



HAL
open science

Reconstruction cone-beam à partir de projections avec troncations transverses

Nicolas Gindrier

► **To cite this version:**

Nicolas Gindrier. Reconstruction cone-beam à partir de projections avec troncations transverses. Traitement des images [eess.IV]. Université Grenoble Alpes [2020-..], 2022. Français. NNT : 2022GRALM025 . tel-03906046

HAL Id: tel-03906046

<https://theses.hal.science/tel-03906046>

Submitted on 3 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES

Spécialité : Mathématiques Appliquées

Arrêté ministériel : 25 mai 2016

Présentée par

Nicolas GINDRIER

Thèse dirigée par **Laurent DESBAT**, Pr, Université Grenoble Alpes
et codirigée par **Rolf CLACKDOYLE**, DR2, CNRS

préparée au sein du **Laboratoire Translational Innovation in
Medicine and Complexity**
dans l'**École Doctorale Mathématiques, Sciences et
technologies de l'information, Informatique**

Reconstruction cone-beam à partir de projections avec troncations transverses

Cone-beam reconstruction from projections with transverse truncation

Thèse soutenue publiquement le **20 juillet 2022**,
devant le jury composé de :

Monsieur EMIL SIDKY

PROFESSEUR, UNIVERSITE DE CHICAGO, Rapporteur

Madame VOICHITA MAXIM

MAITRE DE CONFERENCE, INSA LYON, Rapporteur

Madame VALERIE PERRIER

PROFESSEUR, GRENOBLE INP, Présidente, examinatrice

Monsieur CHARLES SOUSSEN

PROFESSEUR, CENTRALE SUPELEC, Examineur

Monsieur LAURENT DESBAT

PROFESSEUR DES UNIVERSITES, UNIVERSITE GRENOBLE ALPES,
Directeur de thèse

Monsieur ROLF CLACKDOYLE

DIRECTEUR DE RECHERCHE, CNRS, Co-directeur de thèse



Reconstruction cone-beam à partir de projections avec troncations transverses

Nicolas Gindrier

Sous la direction de Laurent Desbat et Rolf Clackdoyle

Laboratoire TIMC

Université Grenoble-Alpes

Membres du jury

Emil Sidky : professeur, université de Chicago, *rapporteur*

Vochita Maxim : maître de conférence, Insa Lyon, *rapporteuse*

Valérie Perrier : professeur, Grenoble INP (Ensimag), *présidente, examinatrice*

Charles Soussen : professeur, Centrale Supélec, *examineur*

Laurent Desbat : professeur, université Grenoble-Alpes, *directeur de thèse*

Rolf Clackdoyle : directeur de recherche, CNRS, *co-directeur de thèse*

Membres invités :

Frédéric Noo : professeur, université de l'Utah

Sébastien Gorges : ingénieur, Thales

Yannick Grondin : ingénieur, SurgiQual Institute

Remerciements

Ce travail a été financé par le Fonds unique interministériel (FUI) et l’union européenne FEDER en Auvergne Rhône Alpes (projet 3D4Carm) et par l’ANR (projet ROI doré ANR-17-CE19-0006-01).



Je commence par un grand merci à mes (ex-)encadrants Rolf et Laurent, qui m’ont (re)motivé jusqu’au bout, même quand j’étais au plus bas, et m’ont aidé à remodelé ce manuscrit, pour passer d’un tas de boue à quelque chose d’acceptable. Comme l’a dit Rolf : “tout doctorant a l’impression de faire la pire thèse au monde, ce qui est impossible en pratique...sauf pour une personne”. Je remercie aussi Simon, qui a été un troisième encadrant officieux.

Merci aux membres de mon jury : Charles Soussen, ancien élève de mon école d’ingénieur, Valérie Perrier, que j’ai eu en cours en M2, et surtout les rapporteurs, Emil Sidky et Voichita Maxim, qui ont accepté de lire mon manuscrit dans des délais compliqués. Merci à Frédéric Noo d’avoir pu assister à la soutenance et de m’avoir donné une piste clef durant la thèse.

Merci à tout ceux qui m’ont permis de comprendre ce qu’étaient les mathématiques. Comment on les comprenait, comment on en faisait, et pourquoi elles étaient à la fois belles et utiles. En plus de mes encadrants, je pense notamment à mon professeur de mathématiques du lycée, Hervé R., qui m’a fait l’honneur d’être là à ma soutenance.

Merci aux équipes GMCAO (Tamara, Matthias, qui a décidé d’être père parce que la thèse n’était pas assez difficile, FX, merci pour les NAB sauveteurs et le bon gâteau, Sylvain et le bureau 101 bien sûr, Anastasia, Mathurin, Matthieu) et PRETA (Hugo, Rémi, on “s’entendait” bien, et merci bien sûr à Mariel, compagne d’anxiété mais aussi une nouvelle grande amie). Et merci aux RHs (Elsa et Diane) et à MISI (notamment Olivier), c’est quand même plus simple quand on a affaire à des gens compétents et sympas (d’ailleurs je ne remercie pas l’administration de l’UGA, notamment son service de réservation de salle...).

Merci à ma famille qui n'a pas toujours compris mon choix de faire une thèse, mais l'a toujours soutenu.

Merci aux membres du (projet) BAGELS, notamment Marion S., Roman, Pauline O., Théophile, vos conseils et votre soutien ont été salvateurs, la thèse est une galère collective (et la post-thèse également).

Merci à Mégane R. pour sa sagesse et nos longues discussions au téléphone ou devant de la nourriture, c'était thérapeutique.

Merci aux compères de toujours, de toutes les aventures, Cyril (qui a fait l'aller-retour pour la soutenance en "télétravaillant"), Nicolas D., Nicolas W., Thomas et Jean. Vous êtes le "sang de la veine" et bien plus encore...

Merci à Elisa pour les trois premières années, pas la quatrième...Pendant la thèse, on gagne certaines choses et on en perd d'autres.

“Un expert est quelqu’un qui a fait toutes les erreurs qui peuvent être faites dans un domaine restreint.”

Niels Bohr

“C’est avec la logique que nous prouvons et avec l’intuition que nous trouvons.”

Henri Poincaré

“Le concret, c’est de l’abstrait rendu familier par l’habitude.”

Paul Langevin

“On ne comprend pas les mathématiques, on s’y habitue.”

John Von Neumann

“La mathématique est l’art de donner le même nom à des choses différentes.”

Henri Poincaré

Durant ces presque 4 ans, j’ai passé moins de temps à me battre contre les transformées de Radon et les projections coniques que contre la dépression, l’anxiété et le syndrome de l’imposteur. Si j’ai retenu une chose, c’est que pour faire une thèse, il n’y a pas besoin de génie, de créativité, de capacités de travail surhumaines, mais juste de persévérance. Tout le reste n’est que littérature.

Contexte et résumé

Les premiers scanners médicaux ont vu le jour il y a une cinquantaine d'années. Ils permettent de reconstruire l'image d'une partie du corps d'un patient à partir de ses projections en rayons X. Ils font partie du domaine de la tomographie médicale. Cette thèse traite du problème de reconstruction d'image d'un point de vue mathématique et algorithmique. Plus précisément, nous nous intéressons au problème des données tronquées, c'est-à-dire quand certaines lignes intersectant l'objet et la source de rayons X ne sont pas mesurées. Dans ce cas, les méthodes connues pour la reconstruction d'image sont lacunaires. Nous étudions dans un premier temps de manière non exhaustive les méthodes de reconstruction analytique 2D (chapitre 1) et 3D (chapitre 2) connues. Une reconstruction ne peut pas être stable si l'objet est en dehors de la région de Tuy, correspondant souvent à l'enveloppe convexe de la trajectoire de la source de rayons X. Il se dégage que la méthode la plus adaptée aux troncations, notamment transverses, semble être la méthode DBP (Differentiated Backprojection). Elle nécessite l'utilisation de cordes de la trajectoire de la source de rayons X. C'est pour cela que nous commençons par étudier le lien entre enveloppe convexe et ensemble des cordes d'une trajectoire (chapitre 3), un des objectifs étant le placement de régions d'intérêt reconstructibles par méthode DBP. Nous étudions ensuite plus particulièrement une classe précise de trajectoires, que nous appelons les trajectoires n -sin. Au chapitre 4, dans un cadre géométrique, nous étudions notamment l'union des cordes et de l'enveloppe convexe de ces trajectoires. Puis, au chapitre 5, nous nous intéressons à l'utilisation de la DBP pour ces trajectoires. Nous donnons des conditions d'utilisation de la DBP pour une reconstruction exacte à partir de ces trajectoires pour diverses troncations (cette thèse traite en partie du cas peu étudié des troncations à la fois axiales et transverses). En particulier, la trajectoire 2-sin est mieux adaptée à la méthode DBP que les autres trajectoires n -sin. Il s'avère que même avec des troncations transverses et dans des zones sans corde, des reconstructions dans l'enveloppe convexe de la trajectoire de la source de rayons X semblent parfois possibles, ce qui n'est pas abordé dans la littérature. Nous donnons des débuts d'explication. D'autres pistes complémentaires (déjà connues de la littérature) sont également évoquées, comme avec la méthode de Katsevich, efficace pour traiter le cas des troncations axiales même dans des zones sans corde.

Table des matières

0	Introduction	21
0.1	Introduction et bref historique	21
0.2	Applications de la tomographie	22
0.3	Les dispositifs de la tomographie et de l'imagerie médicale	23
0.4	Rayons X	24
0.4.1	Introduction à la physique des rayons X et interaction avec la matière	24
0.4.2	Hypothèses de modélisation	25
0.4.3	Rayons X et dose	26
0.5	Fonction d'atténuation	26
0.6	Brève discussion sur la stabilité et la notion de problème mal posé	27
1	Tomographie en deux dimensions	29
1.1	Transformée de Radon et géométrie parallèle	29
1.1.1	Transformée de Radon	29
1.1.2	Rétroprojection des projections filtrées (FBP)	31
1.2	Géométrie <i>fan beam</i>	33
1.2.1	Définition générale et détecteur	33
1.2.2	Trajectoire de la source de rayons X	34
1.2.3	Géométrie <i>fan beam</i> circulaire	35
1.2.4	Reconstruction FBP en géométrie <i>fan beam</i>	36
1.3	Champ de vue ou <i>Field of view</i> (FOV)	37
1.4	Cas du <i>short-scan</i> et du <i>less-than-short-scan</i>	39
1.4.1	Configuration du <i>short-scan</i>	39
1.4.2	Configuration du <i>less-than-short-scan</i>	40
1.5	La méthode <i>Differentiated BackProjection</i> (DBP)	42
1.5.1	Introduction	42
1.5.2	La transformée de Hilbert	42
1.5.3	DBP en géométrie parallèle	44
1.5.4	DBP en géométrie <i>fan beam</i>	46
1.5.5	Lignes M : une extension de la méthode DBP	48
1.6	Introduction au problème des projections tronquées	49
1.6.1	Troncations	49
1.6.2	Le cas du problème intérieur	51
1.6.3	Enveloppe de source et région d'intérêt	51
1.7	Flexibilité des méthodes de reconstruction avec troncation	54
1.7.1	Introduction	54
1.7.2	Cas des méthodes FBP, <i>short-scan</i> et <i>less-than-short-scan</i>	54
1.7.3	Cas de la méthode DBP	55

2	Reconstruction tomographique en 3 dimensions	65
2.1	Géométrie parallèle 3D	65
2.1.1	Passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D	65
2.1.2	Transformée en rayons X	65
2.1.3	Transformée de Radon 3D	67
2.1.4	Remarque sur le problème intérieur 3D	68
2.2	Géométrie conique	68
2.2.1	Collimateurs, détecteurs et types de cônes	68
2.2.2	Condition de Tuy	69
2.2.3	Quelques bases de reconstruction analytique	70
2.2.4	Méthode DBP en géométrie conique	75
2.2.5	Troncations de projections coniques	79
2.2.6	Exemple de l'utilisation de la DBP en géométrie conique pour la trajectoire hélicoïdale	84
2.2.7	Récapitulatif (non exhaustif) des méthodes de reconstructions en géométrie conique	85
3	Trajectoires et union des cordes	89
3.1	Union des cordes et trajectoire recouvrable par cordes	89
3.2	Quelques exemples de la littérature	90
3.3	Premiers exemples de constructions d'union des cordes	91
3.3.1	Trajectoires deux cercles orthogonaux (2C) et ligne+cercle	91
3.3.2	Présentation des trajectoires 3LT et 3LC	92
3.3.3	Union des cordes de la trajectoire 3LT	94
3.3.4	Union des cordes de la trajectoire 3LC	95
3.4	Trajectoires à projection convexe	99
3.5	Plans d'appui et frontières recouvrables par cordes	103
3.5.1	Plan d'appui	103
3.5.2	Exemple de l'hélice courte	105
3.6	Construction de l'enveloppe convexe	107
3.6.1	Plans d'appui et enveloppe convexe de la trajectoire deux cercles orthogonaux	107
3.6.2	Test d'appartenance à l'enveloppe convexe	108
3.6.3	Construction de l'enveloppe convexe par union des cordes	109
3.7	Construction numérique de l'union des cordes dans le cas général	111
4	Etude des trajectoires n-sin	113
4.1	Présentation des trajectoires n -sin	113
4.2	Cordes et trajectoires n -sin : premier aperçu	116
4.3	Invariances et symétries	118
4.4	Projection et polynôme de Tchebychev	119
4.5	Construction numérique de l'union de cordes des trajectoires n -sin	121
4.5.1	Méthode	121
4.5.2	Nombre de cordes par point de l'intérieur de l'union des cordes	124
4.6	Etude de la trajectoire 3-sin	124
4.6.1	Construction de l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin	124
4.6.2	Construction de l'union des cordes de la trajectoire 3-sin	132

5	Méthode DBP appliquée aux trajectoires 2-sin et 3-sin	143
5.1	Introduction	143
5.2	FOV et troncations dans le cadre des trajectoires 2-sin et 3-sin	143
5.3	Etat de l'art des reconstructions pour la trajectoire selle	144
5.4	Application de la DBP dans le cas de troncations transverses	145
5.4.1	Résultats théoriques et difficultés de la trajectoire 3-sin	145
5.4.2	Simulations	148
5.5	Trajectoire selle et double troncation	153
5.5.1	Lignes M pour la trajectoire selle avec troncations	153
5.5.2	FOV suffisants	155
5.5.3	Simulations	158
5.6	Trajectoire 3-sin et troncations transverses	160
5.7	Ouverture sur les troncations axiales pour les trajectoires n -sin	166
5.7.1	Introduction	166
5.7.2	Méthode de Katsevich étendue	166
5.7.3	Comparaison avec la méthode DBP	168
5.7.4	Application aux trajectoires n -sin	168
5.7.5	Notes sur l'implémentation	169
5.7.6	Conclusion et ouverture sur les trajectoires ouvertes	171
	Conclusion	173
	Annexes	177
A	Méthodes itératives	177
A.1	Introduction	177
A.2	Méthode des moindres carrés et gradient conjugué	178
A.3	EM-ML	180
B	Simulations projet FUI 3D4C-arm	181
B.1	Présentation du problème	181
B.1.1	Configuration <i>short-scan</i>	182
B.1.2	Configuration <i>less-than-short-scan</i>	183
B.2	Simulation : ellipses horizontales	183
B.2.1	Less-than-short-scan	184
B.3	Simulation : ellipses verticales	184
B.3.1	Short-scan	184
B.3.2	Less-than-short-scan	185
B.4	Analyse des résultats	185
C	Implémentation des filtres rampe et de Hilbert	187
C.1	Implémentation de la transformée de Hilbert	187
C.2	Implémentation du filtre rampe	189
D	Paramétrisation du FOV pour les simulations	191
E	Méthode de Katsevich pour la trajectoire selle	193

Table des figures

1	C-arms	24
2	Loi de Beer-Lambert	27
1.1	Représentation d'une ligne en géométrie parallèle	30
1.2	Schéma d'une géométrie parallèle	30
1.3	Fantôme Shepp-Logan et sinogramme en géométrie parallèle	31
1.4	Différents types d'échantillonnage	33
1.5	Illustration d'une projection <i>fan beam</i>	34
1.6	Schéma d'une géométrie <i>fan beam</i> décrivant une trajectoire circulaire complète	35
1.7	La ligne L est mesurée deux fois	37
1.8	Détecteurs émettant un faisceau de rayons X	37
1.9	Un FOV avec des détecteurs en arc de cercle à partir de deux sources . . .	38
1.10	Construction d'un FOV.	38
1.11	Configuration pour le short-scan	40
1.12	Calcul des poids du less-than-short-scan	41
1.13	Noyau de Hilbert	42
1.14	Méthode DBP avec inverse de Hilbert fini	45
1.15	Transformée de Hilbert tronquée d'une fonction.	47
1.16	Illustration géométrique de la rétroprojection DBP	48
1.17	Illustration géométrique de la méthode des lignes M.	49
1.18	Calcul du support d'un objet	50
1.19	Sinogramme et troncations	50
1.20	Problème intérieur	51
1.21	Illustration de la preuve pour le lien entre enveloppe convexe et enveloppe de source	52
1.22	Construction de l'enveloppe convexe d'une trajectoire 2D.	53
1.23	Reconstruction LTSS	55
1.24	Transformée de Hilbert verticale	56
1.25	Transformée de Hilbert directionnelle	56
1.26	Rétroprojection des dérivées des projections	57
1.27	Transformée de Hilbert unilatérale	58
1.28	Possibilités de reconstruction avec la transformée de Hilbert unilatérale . .	59
1.29	Flexibilité et utilisation des lignes M	59
1.30	Cas où $B_{i,j} \subset A_{i,j}$	60
1.31	Utilisation de la méthode des lignes M	60
1.32	Trajectoire circulaire non connexe	61
1.33	Graphes et DBP	62
1.34	Deux configurations pour une paire d'arêtes	63

1.35	Cas où sur une direction deux transformées de Hilbert sont compensées par deux nouvelles transformées de Hilbert	63
2.1	2 (2D) et 4 (3D) degrés de liberté pour la représentation d'une droite . . .	65
2.2	Paramétrisation d'une base de vecteurs unitaires	66
2.3	Intégrale de plan	67
2.4	Source collimatée et faisceaux	69
2.5	Paramétrisation d'une projection conique sur un détecteur plan	71
2.6	Ligne sur le détecteur et coordonnées sinogramme	72
2.7	Récapitulatif des différents cas d'inversion de la transformée de Hilbert . .	76
2.8	Deux exemples d'utilisation d'une ligne M	77
2.9	Est-il possible de reconstruire un point sur une corde?	78
2.10	Trajectoire hélicoïdale	80
2.11	Base d'un FOV cylindrique pour une trajectoire à base circulaire.	81
2.12	Vue de dessus et coupe axiale d'un FOV simulé	81
2.13	Différents types de troncations	82
2.14	Une trajectoire constituée d'une sous-trajectoire circulaire et d'une sous-trajectoire sous forme d'un segment vertical	83
2.15	Hélice avec une corde	85
2.16	Peut-on avoir une reconstruction exacte et avec quelles méthodes?	86
3.1	Exemples de trajectoires connexes et continues recouvrables par cordes. . .	90
3.2	Exemples de trajectoires connexes et continues non recouvrables par cordes	91
3.3	La trajectoire de deux cercles orthogonaux	93
3.4	La trajectoire LC constituée d'une ligne et d'un cercle	93
3.5	Trajectoire triangle+3 lignes et trajectoire cercle+3 lignes	94
3.6	Paramétrisation du triangle de la trajectoire 3LT	95
3.7	La trajectoire 3LT avec son union des cordes	96
3.8	Trajectoire 3LC paramétrée	97
3.9	Intersection entre les cônes de cordes de la trajectoire 3LC et des plans horizontaux.	97
3.10	Trajectoire 3LC en projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$	98
3.11	Trois cercles tangents et un triangle reliant leur centre	99
3.12	Exemple de trajectoire à projection convexe dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$	100
3.13	Paramétrisation pour une preuve	101
3.14	Trajectoire à projection étoilée	102
3.15	Trajectoire M	103
3.16	Trajectoires smiley	106
3.17	Intersection des trajectoires smiley	106
3.18	Hélice courte	107
3.19	Plan d'appui de deux cercles orthogonaux	109
3.20	Union des cordes d'un simplexe	110
3.21	Construction de l'union des cordes d'un tétraèdre	111
3.22	Simulation de l'union des cordes de la trajectoire 3LT	112
4.1	Trajectoires n -sin sur un cylindre	114
4.2	Enveloppe convexe de la trajectoire selle	115
4.3	Trajectoires 2-sin, selle X et wobble	116
4.4	La trajectoire 3-sin et ses intersections avec les plans $z = H$ et $z = -H$. .	117
4.5	Points \mathbf{a}_i pour les trajectoires 3-sin et 4-sin	118

4.6	Projections des trajectoires 2-sin, 3-sin et 4-sin sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$	120
4.7	Projection de \mathcal{S}_Λ^3 sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ et droite d'appui	121
4.8	Trajectoire n -sin vue de dessus et configuration de Thalès	122
4.9	Construction d'unions de cordes pour la trajectoire 3-sin	123
4.10	Hauteur de corde pour trajectoire n -sin	123
4.11	Paramétrisation pour la preuve d'un théorème	125
4.12	Intersection entre un plan horizontal et une trajectoire 3-sin	126
4.13	Hexagone constitué de points d'intersections entre une trajectoire 3-sin et un plan horizontal	126
4.14	Intersections entre des plans horizontaux et des trajectoires	126
4.15	Représentation de f et f' (1)	130
4.16	Représentation de f et f' (2)	130
4.17	Plusieurs plans d'appui de la trajectoire 3-sin	131
4.18	Enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin par tracé d'hexagones	131
4.19	Calcul de l'aire d'un hexagone non régulier	132
4.20	Cordes dans un plan horizontal pour la trajectoire 3-sin	133
4.21	Différentes cordes contenues dans plusieurs plans horizontaux	134
4.22	Surface et union de surfaces engendrées par des cordes	134
4.23	Projections orthogonales des surfaces rouges et bleues	134
4.24	Union des cordes de la trajectoire 3-sin	135
4.25	Différentes cordes de la trajectoire 3-sin et leur intersection avec un plan horizontal	135
4.26	Triangle central et produit vectoriel	136
4.27	Intersection de cordes de la trajectoire 3-sin avec un plan horizontal	139
4.28	Fonctions f et g	139
4.29	Fonctions f et g	140
4.30	Région sans corde de la trajectoire 3-sin	141
5.1	Troncations transverses et axiales avec la trajectoire selle	144
5.2	Une trajectoire selle avec un objet cylindrique et un FOV	145
5.3	Vue de dessus de la trajectoire avec des cordes représentant les 3 cas de reconstruction pour les cordes traversant un point de la ROI	146
5.4	La méthode des lignes M pour la trajectoire selle	147
5.5	L'enveloppe convexe et l'union des cordes de deux trajectoires n -sin	147
5.6	Configuration en vue de dessus pour les simulations	149
5.7	Les deux coupes pour la reconstruction	149
5.8	Une trajectoire 3-sin avec deux coupes	150
5.9	Reconstruction pour les trajectoires 2-sin et 3-sin	150
5.10	Profils des reconstructions après 120 itérations	151
5.11	Le fantôme Forbild Thorax avec 3 cylindres d'axe vertical	152
5.12	Reconstructions avec projections bruitées	153
5.13	Vue de dessus d'une trajectoire selle avec des lignes M valides ou non . . .	154
5.14	Un exemple de FOV non utilisable pour la méthode des lignes M	155
5.15	Une trajectoire selle avec des troncations uniquement axiales	155
5.16	Une trajectoire selle avec à la fois des troncations axiales et transverses . .	156
5.17	Vue de profil et coupe pour un objet et un FOV cylindriques et lignes M .	156
5.18	Vue de dessus et plan vertical à travers le FOV et un point de l'objet . . .	157
5.19	Un exemple de FOV suffisant de type 1.	157
5.20	FOV semi-circulaire et ligne M	158

5.21	Le fantôme Forbild thorax en vue de dessus et différents FOV pour les reconstructions	159
5.22	Reconstructions pour les différents FOV après 40 et 260 itérations	159
5.23	Profils des reconstructions après 260 itérations	160
5.24	Union des cordes et région sans corde de la trajectoire 3-sin	161
5.25	Exemple de régions pour la paramétrisation de la reconstruction avec troncations transverses pour la trajectoire 3-sin	161
5.26	Vue de dessus : avant et après la soustraction de la reprojexion des données	162
5.27	Configuration pour la trajectoire 3-sin avec troncations transverses	163
5.28	Les cônes pyramidaux et le polyèdre délimitant les lignes intersectant à la fois Ω_{in} et Ω_{out}	163
5.29	Le fantôme utilisé pour les simulations avec ses densités	164
5.30	Une coupe de la reconstruction	164
5.31	Un profil de la reconstruction	165
5.32	Une configuration avec deux lignes contaminées	165
5.33	Paramétrisation pour l'opérateur de Katsevich	167
5.34	Plans filtrants	167
5.35	Intersection entre la trajectoire selle et un plan horizontal	169
5.36	La trajectoire triple source	170
A.1	Illustration de la construction d'un terme de la matrice de projection	178
B.1	Fantômes avec ellipses fines	181
B.2	Schéma de la paramétrisation de la simulation	182
B.3	Schéma de la trajectoire <i>short-scan</i> utilisée pour les reconstructions	182
B.4	Schéma de la trajectoire <i>less-than-short-scan</i> utilisée pour les reconstructions	183
B.5	Reconstructions avec la méthode EM pour le <i>short-scan</i> , ellipses horizontales	183
B.6	Reconstructions avec la méthode du gradient conjugué pour le <i>short-scan</i> , ellipses horizontales	183
B.7	Reconstruction à partir de la méthode EM pour le <i>less-than-short-scan</i> , ellipses horizontales	184
B.8	Reconstruction à partir de la méthode du gradient conjugué pour le <i>less-than-short-scan</i> , ellipses horizontales	184
B.9	Reconstructions pour le <i>short-scan</i> , ellipses verticales	184
B.11	Lignes mesurées verticales et horizontales et ellipses fines	185
B.10	Reconstructions pour le <i>less-than-short-scan</i> , ellipses verticales	185
D.1	Paramétrisation de la source et du détecteur	191
E.1	Fantôme utilisé pour les reconstructions avec la méthode de Katsevich	195
E.2	Reconstructions pour la méthode de Katsevich et du gradient conjugué	196
E.3	Tracé de profils pour les reconstructions avec méthode de Katsevich et du gradient conjugué	196

Liste des symboles

$\mathbf{S}_\lambda, \mathbf{S}_\Lambda$	position de la source de rayons X, trajectoire de la source, $\lambda \in \Lambda$
$C, C_{\lambda_i, \lambda_j}$	corde, corde reliant la position de la source \mathbf{S}_{λ_i} à la position de la source \mathbf{S}_{λ_j}
$\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$	enveloppe convexe de la trajectoire \mathbf{S}_Λ (pour une trajectoire connexe, continue et bornée)
$C_{\mathbf{S}_\Lambda}$	union de cordes de la trajectoire \mathbf{S}_Λ
\mathbf{S}_Λ^n	trajectoire n -sin
$\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$	enveloppe convexe de la trajectoire n -sin
$C_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$	union des cordes de la trajectoire n -sin
$N_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$	région de $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$ traversée par aucune corde
$\overset{>}{L}$	ligne en géométrie <i>fan beam</i>
$\overset{=}{L}$	ligne en géométrie parallèle
\mathcal{P}	plan d'appui
k_R, k_H	filtre rampe, filtre de Hilbert
S^1, S^2	cercle unité, sphère unité
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ ou $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	produit scalaire des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y}
$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$	produit vectoriel des vecteurs \mathbf{x} et \mathbf{y}
$f * g$	produit de convolution des fonctions (ou distributions) f et g
$[x]$	partie entière de x
$\mathcal{R}f$	transformée de Radon de la fonction f
$\mathcal{H}f$	transformée de Hilbert de la fonction f
\hat{f} ou $\mathcal{F}f$	transformée de Fourier de f
$\mathbf{1}_I$	fonction indicatrice sur l'intervalle I
$\overset{\circ}{A}$	intérieur (au sens topologique) de la partie A
$\mathbb{C}A$	complémentaire de la partie A (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3)
$\text{conv}(A)$	enveloppe convexe de l'ensemble A (de \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3)
∂A	frontière (au sens topologique) de A
$A \setminus B$	ensemble A privé de l'ensemble B (intersection de A avec le complémentaire de B)

Chapitre 0

Introduction

0.1 Introduction et bref historique

Parmi les prouesses technologiques apparues ou fortement développées au siècle dernier se trouve la possibilité de voir “à l’intérieur” d’un objet non transparent. Comme nous le verrons brièvement, cela a notamment permis de donner naissance à l’imagerie médicale, aujourd’hui souvent cruciale dans le diagnostic d’un patient ou pour le suivi d’une opération chirurgicale, et ce grâce à des techniques diverses. Une des plus précises se nomme *tomographie*, et, appliquée aux rayons X, est à la base du fonctionnement des scanners¹ médicaux.

La *tomographie*, du grec *Tomós* (τομοσ section ou coupe) et *Graphô* (écriture ou dessin) vise à reconstituer des images 2D ou 3D à partir de projections de dimension inférieure.

La radiographie produit des images d’atténuation des rayons X à la traversée des tissus, ce qui peut être considéré comme la première révolution de l’imagerie médicale. Dans les années 1969-1970 le physicien A.Cormack et l’ingénieur G.Hounsfield ont imaginé combiner de multiples radiographies d’un même objet sous différents points de vue afin de reconstruire la carte d’atténuation des tissus du patient à partir des projections radiographiques[38]². Comme nous le verrons il faut alors résoudre un *problème inverse*, par des méthodes itératives ou des méthodes analytiques (formules d’inversion).

Le mathématicien autrichien J.Radon avait dès 1917 introduit l’intégration sur des hyperplans, outil fondamental de la tomographie (voir chapitre 1 section 1.1.1), et proposé une formule d’inversion en deux dimensions. Cependant, les méthodes de reconstruction utilisables en tomographie voient le jour uniquement au début des années 1970, avec du côté des méthodes analytiques la méthode FBP (*Filtered Backprojection*, voir chapitre 1 section 1.1.2), d’abord en géométrie parallèle puis en géométrie en éventail au milieu des années 1970 [37, section 3.4], et du côté des méthodes itératives l’algorithme ART (voir annexe A pour cet algorithme ; plus largement on peut se reporter à l’ouvrage de référence de F.Natterer [48], parties 2 et 5, sur les sujets évoqués).

La géométrie 3D (chapitre 2) a commencé à être étudiée dans les années 1980, d’abord dans le cadre de la géométrie parallèle, plus adaptée au domaine du PET (section 0.3). La géométrie conique, plus complexe que la géométrie parallèle, s’est développée dans le milieu des années 1980, avec des résultats analytiques (HK.Tuy[75], D.Finch[27]...) mais

1. De manière rigoureuse, il faudrait parler de *scanographe* ou de *tomodensitomètre*.

2. Plus précisément, G.Hounsfield construit un prototype de scanner en 1970 et un scanner commercial en 1972, et A.Cormack propose une méthode d’inversion en 1963. Les deux hommes recevront le prix Nobel en 1979.

qui en dehors de l'agorithme FDK (section 2.2.3) restent peu utilisables en pratique. Il faut attendre le milieu des années 1990 pour voir des méthodes plus simples à implémenter, comme celles développées par M.Defrise et R.Clack[19] ou H.Kudo et T.Saito[44]. Cette thèse se concentrera principalement sur la géométrie conique.

Parallèlement, les méthodes itératives se développent, grâce notamment à l'émergence des GPU.

La trajectoire de la source de rayons X pour le cas hélicoïdal, toujours en géométrie conique, a été très étudiée depuis la fin des années 1990 et en 2002 A.Katsevich [39, 40, 42] a apporté des avancées importantes dans le domaine. Ces résultats en géométrie 3D ont (paradoxalement) relancé la géométrie 2D, notamment pour ce qui est des données limitées, où l'on travaillera notamment avec des trajectoires circulaires partielles (méthode DBP, *less-than-short-scan*...voir chapitre 2). Les problèmes liés aux données manquantes ont été très étudiés dans les années 1970 et 1980 (problème intérieur, extérieur...voir chapitre 1 section 1.6.2 ou [48, partie 4] pour les détails), et des approches en géométrie conique ont été développées pour traiter certaines projections tronquées (axialement) à la fin des années 1990. Néanmoins, c'est bien dans les années 2000 que les méthodes principales permettant des reconstructions avec certaines troncations des données sont développées. Cependant, certaines données manquantes peuvent rendre le problème de reconstruction impossible. Savoir si une *région d'intérêt* (*Region Of Interest* ROI) est reconstituable ou non n'est pas toujours simple, et cette question nous motivera le long de cette thèse.

Cet aperçu n'est bien sûr pas exhaustif, et nous aurons l'occasion de naviguer entre ces méthodes et concepts et donc d'explorer (partiellement) l'histoire de la tomographie moderne.

0.2 Applications de la tomographie

Bien que nous nous concentrons sur cette thèse sur l'application médicale de la tomographie, cette discipline trouve son utilité dans d'autres domaines :

- contrôle non destructif (métrologie, production, révision...);
- science des matériaux (étude des propriétés à l'échelle microscopique grâce par exemple à la *tomographie en microscopie électronique*);
- astrophysique (imagerie Zeeman Doppler³, voir par exemple [23], interférométrie optique). Dans ce cas on ne se sert pas d'un robot pour changer d'angle de mesure, mais de la rotation de la Terre ou des astres mesurés! Le travail accompli par RN.Bracewell en radioastronomie dans les années 1950 a d'ailleurs été profitable à la tomographie médicale, car on peut le considérer comme le pionnier des reconstructions pratiques de tomographie [66];
- géophysique⁴ : la mesure des variations de vitesse des ondes sismiques renseigne sur la composition ou les variations de température du globe terrestre;
- mécanique quantique : reconstruction de l'état d'un système quantique à partir de mesures.

3. Etude du rayonnement magnétique des astres au cours de leur rotation propre, on reconstruit les raies spectrales.

4. Et également l'océanographie.

0.3 Les dispositifs de la tomographie et de l'imagerie médicale

Bien sûr, la radiographie et la tomographie par rayons X ne sont pas les seules modalités de l'imagerie médicale. On peut présenter les techniques suivantes :

IRM L'*Imagerie par Résonance Magnétique*, développée dans les années 1970, utilise les moments magnétiques du spin des particules (en particulier le proton des atomes d'hydrogène) du corps du patient. On mesure la teneur en eau des tissus⁵ via la mesure du temps de relaxation des cellules excitées après avoir été soumises à un champ magnétique important. Comme le scanner, l'IRM est non invasif, mais contrairement à lui, il est aussi non irradiant car il n'utilise pas de rayons X [76, chapitre 8].

SPECT Dans la méthode de *Single Photon Emission Computed Tomography* (en français TEMP : tomographie par émission monophotonique), le patient absorbe un radiotracer qui émettra un rayonnement photonique (ici des rayons gamma et non des rayons X)⁶ [25, chapitre 16].

PET Il existe également la méthode *Positron Emission Tomography* (TEP en français) où comme pour le SPECT, un radiotracer est utilisé, et comme pour le SPECT, on parle d'*imagerie fonctionnelle*⁷ et d'*imagerie d'émission*⁸. Cependant, le radiotracer n'émet pas directement des photons mais des positrons (ou positons), qui produiront des photons en rentrant en collision avec des électrons [76, chapitre 6].

Echographie En échographie, des ultrasons sont émis à travers l'objet et l'on déduira les zones échogènes des ondes réfléchies [76, chapitre 7]. Prenant sa source dans les années 1930, l'échographie médicale a beaucoup évolué, et l'échographie 3D du fœtus est maintenant courante. On parle ici d'*imagerie par réflexion*.

Tomodensitométrie En tomodensitométrie, technique d'imagerie médicale utilisée dans cette thèse, le scanner émet des rayons X, qui traverseront un objet et qui perdront du même coup une certaine intensité. Cette perte d'intensité sera mesurée et l'ensemble des mesures permettra de calculer les densités des matériaux de l'objet. On peut citer comme industriels General Electrics, Siemens, Philips ou encore Toshiba.

Il y a plusieurs types de scanners, nous en donnons deux exemples :

C-arm Un C-arm (figure 1, *gauche*) est un type de scanner relativement petit, par exemple utilisé en tomographie cardiaque. Les C-arms "standards" n'ont qu'un nombre limité de degrés de liberté (deux rotations d'axes orthogonaux [60]) mais certains sont plus complexes et permettent un grand nombre de mouvements de la source de rayons X⁹. La plupart des entreprises citées

5. Plus précisément, pour de l'imagerie anatomique on mesure la teneur en eau, et pour de l'imagerie fonctionnelle on mesure la teneur en hémoglobine.

6. C'est un problème mathématique compliqué dont la résolution date seulement de 2001.

7. On s'intéresse au fonctionnement d'un organe mais pas forcément à sa forme.

8. Le rayonnement est émis dans le corps du patient, alors que la radiographie et la tomographie par rayons X sont des *imageries de transmission*.

9. Par exemple, des scanners C-arm peuvent avoir un mouvement de translation vertical [64] et horizontal (voir figure 1, *gauche*).

précédemment en fabriquant, mais également des sociétés plus petites comme Ziehm. Les C-arms sont de deux types :

- fixes : précis mais il leur faut une salle dédiée à cause de leur taille importante. Certains sont fixés au plafond (*ceiling-mounted C-arms*, [65]) et permettent une rotation autour de l'axe e_z ;
- mobiles : plus petits que les C-arms fixes mais plus difficiles à calibrer.

Ils possèdent des capteurs rectangulaires à une des extrémités du bras en C (donnant le nom au C-arm), et une source de rayons X à l'autre. Une majeure partie du travail de cette thèse est destinée à la tomographie médicale par utilisation d'un C-arm¹⁰.

L'utilisation potentielle des C-arms motive en partie cette thèse, à travers le projet FUI 3D4C-arm.¹¹



FIGURE 1 – *Gauche* : C-arm mobile [image Siemens annotée, modèle cios select], les flèches rouges montrent les mouvements possibles pour ce modèle de C-arm (ici deux rotations et deux translations, mais ces mouvements ne sont pas tous possibles sur chaque C-arm). *Droite* : O-arm [image CHU Poitiers].

O-arm Comme le C-arm le O-arm est doté de capteurs rectangulaires. Il est mobile avec une bonne qualité d'image mais reste onéreux. Il sera principalement utilisé pour l'imagerie du cerveau et de la colonne vertébrale.

0.4 Rayons X

0.4.1 Introduction à la physique des rayons X et interaction avec la matière

Les rayons X sont des ondes électromagnétiques, de longueur d'onde comprise approximativement entre 10^{-8} m et 10^{-11} m (donc de manière équivalente de fréquence comprise environ entre $3 \cdot 10^{16}$ Hz et $3 \cdot 10^{19}$ Hz, ce qui place les rayons X à une fréquence supérieure aux rayons ultraviolets mais inférieure aux rayons gamma), produisant un rayonnement

10. Applications diverses : cardiologie, orthopédie, urologie...

11. Ce travail a été soutenu par le Fonds unique interministériel (FUI) et l'Union européenne FEDER en Auvergne Rhône Alpes (projet 3D4Carm) et par l'ANR (projet ROI ANR-17 CE19-0006-01).

ionisant. Ils ont été découverts en 1895 par le physicien allemand Wilhelm Conrad Röntgen (ce qui lui vaudra d'ailleurs le premier prix Nobel de physique en 1901). Bien que l'énergie d'un photon X est approximativement comprise entre la centaine d'eV et la centaine de keV, en tomographie médicale les énergies utilisées sont autour de 70 keV [66] (pour la santé du patient et pour avoir un contraste de l'image important on restera dans cet ordre de grandeur).

Production Un filament (généralement de tungstène) parcouru par un courant électrique émet des électrons. Ils sont accélérés et percutent l'anode (également en tungstène) [76, chapitre 2]. Leur énergie cinétique va être convertie et il y a alors production de rayons X (et de chaleur) de deux manières :

- les électrons vont exciter les atomes du métal (en expulsant certains de leurs électrons). Ces derniers vont émettre des rayons X en revenant à leur état fondamental.
- Les électrons sont ralentis dans l'anode, cela crée un rayonnement de freinage comportant des rayons X (même si la grande majorité de l'énergie va être convertie en chaleur).

Les rayons X, sous forme de photons, vont interagir avec la matière de deux façons différentes¹² [66] :

- par *effet photoélectrique* (aux faibles énergies, < 50 keV), phénomène d'absorption ;
- par *effet Compton* (aux hautes énergies, > 110 keV), phénomène de diffusion

L'effet photoélectrique intervient lorsqu'un photon rencontre un électron d'une couche "proche" du noyau de l'atome. L'énergie du photon transmise à l'électron l'éjecte. L'électron va être remplacé par un autre électron venant d'une couche électronique supérieure, ce dernier cédant de l'énergie en émettant un *photon de fluorescence* ou en expulsant un autre électron (*électron d'Auger*). L'atténuation d'un rayon X traversant un milieu est donc liée à la densité (électronique) de ce milieu.

L'effet Compton apparaît lors de la rencontre entre un photon et un électron faiblement lié au noyau. Le photon va transmettre son énergie à l'électron, changer de direction et augmenter sa longueur d'onde (il est diffusé, et comme pour l'effet photoélectrique l'électron est éjecté). Le rayonnement en sortie de l'objet sera alors constitué d'un *rayonnement primaire*, de même direction que le faisceau d'entrée, et d'un *rayonnement secondaire*, dû à la diffusion et de direction différente. Ce rayonnement secondaire va détériorer la qualité de l'image reconstruite et être la source de radiations pouvant atteindre le personnel médical et des organes du patient non concernés par l'examen.

Ces deux effets seront liés à la *fonction d'atténuation linéique* μ (voir section 0.5).

0.4.2 Hypothèses de modélisation

La modélisation d'un phénomène physique ne peut se faire que sous certaines approximations et hypothèses [2] [25, chapitre 3]. Lors d'une acquisition des données, on supposera ainsi que :

12. Pour être exhaustif, on peut également parler de la diffusion de Rayleigh et de la création de paires, mais ces phénomènes sont négligeables pour les énergies utilisées en tomographie médicale (par exemple la production de paires se produit pour des énergies au-delà du MeV).

- chaque rayon X est infiniment fin et monochromatique ;
- les détecteurs sont parfaits, c'est-à-dire qu'on néglige le bruit ¹³ ;
- le corps mesuré reste immobile pendant la mesure ;
- les rayons X ont une trajectoire parfaitement rectiligne ; par exemple, on suppose qu'il n'y a pas de réfraction ou de diffraction.

Certaines études tiennent compte d'hypothèses plus réalistes et tentent de les intégrer au modèle (par exemple concernant le diffusé), mais dans cette thèse nous nous bornerons à ces hypothèses.

0.4.3 Rayons X et dose

Un intérêt de la reconstruction de région d'intérêt avec des données tronquées peut être de diminuer la dose de radiation à laquelle le patient et le corps médical sont exposés. On ne cherchera pas, dans le cadre de cette thèse, à quantifier cette dose ¹⁴.

On peut noter que même si les rayons X utilisés en tomographie sont moins intenses que ceux utilisés en radiographie, la durée d'exposition est bien plus longue, ce qui fait que la dose délivrée est plus importante par un scanner que par un radiographe.

On peut, à titre d'exemple, mentionner les doses suivantes (en JRN, jours de rayonnement naturel, qui correspondent à la dose radioactive naturelle reçue chaque jour par un humain, source IRSN) :

- Radiographie du poumon : 7
- Mammographie : 20
- Scanner du crâne : 300
- Scanner du thorax : 900

0.5 Fonction d'atténuation

Nous allons maintenant commencer la modélisation mathématique du problème de reconstruction en introduisant la *fonction d'atténuation* (pour cette section on peut par exemple se reporter à [25, chapitre 3]). Dans un scanner médical, une source envoie des rayons X à travers le corps d'un patient. Selon les atomes qui composent une matière et leur arrangement, ces rayons X vont être plus ou moins absorbés (voir paragraphe 0.4.1 pour l'explication physique). On parlera d'*atténuation de l'intensité* du rayon (l'intensité d'un rayon X étant un flux quantifié par l'énergie du rayon, constante dans le cas d'un rayonnement monochromatique, multiplié par le nombre de photons reçus par unité de temps). En mesurant cette atténuation en différents points on pourra déduire la capacité d'absorption (qui correspond comme on l'a vu paragraphe 0.4.1 à une densité, à un facteur multiplicatif près) des matières et donc par exemple la position des organes, d'une infection ou d'une tumeur. On notera μ la *fonction d'atténuation* (linéique) qui s'appliquera à un

13. On se place dans un cas idéal avec des données non bruitées (sauf pour certaines simulations). On parle ici de bruit découlant de phénomènes physiques, mais cela ne suffit pas à supprimer les problèmes de stabilité ou de précision des schémas numériques.

14. Cette tâche est très difficile à faire de manière non empirique.

point de l'espace \mathbf{x} avec $\mathbf{x} = (x, y)$ en 2D et $\mathbf{x} = (x, y, z)$ en 3D. La loi de Beer-Lambert stipule que pour l'intensité de sortie I_s d'un faisceau de rayons X le long d'une droite L :

$$I_s = I_e e^{-\int_{\mathbf{x} \in L} \mu(\mathbf{x}) dL} \quad (1)$$

avec I_e l'intensité d'entrée (voir figure 2).

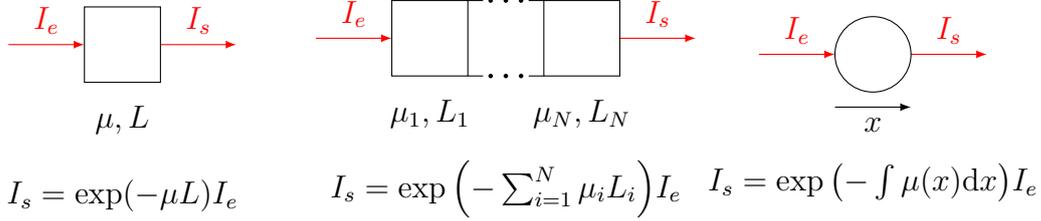


FIGURE 2 – Loi de Beer-Lambert appliquée dans plusieurs cas. *Droite* : Pour un objet homogène. *Milieu* : Pour une juxtaposition d'objets homogènes. *Gauche* : Le long d'une ligne pour un objet hétérogène.

Cette atténuation sera exprimée en cm^{-1} ou en Hounsfield HU, cette dernière unité étant directement liée au coefficient d'atténuation de l'eau.

Dans l'ordre croissant d'atténuation, on peut citer à titre d'exemple l'air¹⁵ (-1000 HU), la graisse, l'eau (0 HU), les muscles, le sang et les os (1000 HU).

L'objectif de la reconstruction tomographique est la détermination des coefficients d'atténuation $\mu(\mathbf{x})$ ¹⁶, avec \mathbf{x} un point de l'objet mesuré, à partir des mesures des différences d'intensité (entrée/sortie) de ces rayons. On a vu que ces mesures (équation (1)) donnaient accès aux intégrales de ligne, le long d'un rayon X, de la fonction d'atténuation ($\int_{\mathbf{x} \in L} \mu(\mathbf{x}) dL$ pour une ligne L). Tout l'enjeu est alors de déterminer les lignes nécessaires à la reconstruction et les méthodes de reconstruction correspondantes.

0.6 Brève discussion sur la stabilité et la notion de problème mal posé

Dans cette thèse, notre souhait est de travailler¹⁷ (en 2D comme en 3D) sur des méthodes de reconstruction permettant une reconstruction "exacte", c'est-à-dire des méthodes analytiques qui, appliquées dans des conditions idéales (hypothèses physiques parfaitement valides...) avec des données suffisantes¹⁸, permettent de reconstruire l'objet (quel qu'il soit) à l'identique. Pour exprimer cela de manière plus rigoureuse, une idée peut être de lier la notion de reconstruction exacte au *problème bien posé*, que nous allons définir. Néanmoins, nous verrons que cette association est trop restrictive et en pratique impossible à utiliser.

Hadamard donne au début du XX^e siècle [34] la définition d'un *problème bien posé* : on dit que le problème $d = \mathcal{A}f$ est bien posé, avec \mathcal{A} un opérateur linéaire continu et d les données du problème, s'il y a existence, unicité et stabilité de la solution f . Dire que

15. En pratique, on néglige donc l'atténuation due à l'air.

16. Par abus de langage, on pourra quelquefois, dans notre modèle, parler de densité pour qualifier $\mu(\mathbf{x})$. Les valeurs des fantômes utilisés en tomographie désignent souvent des densités (par exemple [68]).

17. En dehors des simulations où des méthodes itératives seront souvent utilisées.

18. La notion de données suffisantes est elle aussi difficile à définir, même si elle se base globalement sur le noyau de l'opérateur linéaire liant les données à l'objet dans le problème tomographique.

f est stable signifie que f est continu par rapport à d . Cela a pour conséquence qu'un léger bruit dans les données impliquera une légère différence (et pas plus) de la solution calculée par rapport à la solution réelle. Notons que nous parlons ici de stabilité *analytique*, et non *numérique*, c'est-à-dire que même pour un problème bien posé un schéma numérique peut diverger. Du point de vue de l'opérateur linéaire continu \mathcal{A} , un problème bien posé implique la surjectivité (existence d'un inverse à droite¹⁹) et l'injectivité (existence d'un inverse à gauche¹⁹) de \mathcal{A} ainsi que la continuité de son inverse. Enfin, quand il y a injectivité et pas surjectivité (par exemple à cause de la redondance des données de d), l'inverse à gauche de \mathcal{A} n'est pas forcément unique : c'est en partie cela qui explique la diversité des méthodes de reconstruction tomographique ainsi que la possibilité de reconstruction avec données tronquées.

Dans un problème mal posé (c'est-à-dire qui n'est pas bien posé), on risque de voir l'apparition d'*artefacts* (défauts) sur l'image, voire de ne pas pouvoir reconstruire du tout. On peut néanmoins noter (voir [48, IV.1] pour les définitions) qu'il y a plusieurs classes de problèmes mal posés (modeste, moyen et sévère) plus ou moins problématiques. Leur classement dépend de l'opérateur \mathcal{A} mais aussi de la différentiabilité de la solution f .

Le problème tomographique est un problème mal posé : toute méthode de reconstruction peut être instable, et il faut alors faire intervenir certains espaces de Sobolev au sein desquels il y a stabilité (voir par exemple [27]). En effet, si, pour un espace de dimension finie, les normes sont équivalentes, ce n'est pas le cas des espaces de dimension infinie. Cela signifie qu'un opérateur défini sur un espace de dimension infini peut être qualifié d'instable pour une norme et stable pour une autre (voir par exemple [4, section 2.2]). On cherchera donc autant que possible²⁰, à identifier les régions et les méthodes de reconstruction garantissant existence, unicité et stabilité de l'inversion du problème associé pour tout point de ces régions (pour tout point \mathbf{x} de ces régions l'identification d'un unique $f(\mathbf{x})$ à partir des mesures disponibles est possible et $f(\mathbf{x})$ dépend continûment des données).

19. Un opérateur linéaire \mathcal{B}_d (resp. \mathcal{B}_g) est un *inverse à droite* (resp. *à gauche*) de \mathcal{A} si $\mathcal{A}\mathcal{B}_d = I$ (resp. $\mathcal{B}_g\mathcal{A} = I$), avec I l'opérateur identité.

20. En pratique, il peut être impossible d'utiliser les "bons" espaces fonctionnels, par exemple à cause du bruit.

Chapitre 1

Tomographie en deux dimensions et introduction au problème de reconstruction de région d'intérêt avec troncations

1.1 Transformée de Radon et géométrie parallèle

1.1.1 Transformée de Radon

Définition et introduction à la géométrie parallèle

Nous traitons ici uniquement de la transformée de Radon 2D, la transformée de Radon 3D sera traitée dans le chapitre suivant.

La transformée de Radon est un outil fondamental en tomographie. Elle résulte de la loi d'atténuation de Beer-Lambert (voir chapitre 0 section 0.5) et correspond en 2D à l'intégrale de ligne de la fonction d'atténuation (que nous noterons à partir de maintenant f) sur la droite qui joint la source de rayons X au détecteur. Elle est donc à la base du processus de reconstruction des densités de l'objet. La fonction f sera choisie dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ ¹. Pour une ligne L du plan, la transformée de Radon (de \mathbb{R}^2) peut s'écrire :

$$\mathcal{R}f(L) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbf{x} \in L} f(\mathbf{x}) dL \quad (1.1)$$

Pour une ligne de normale $\boldsymbol{\alpha}$ à une distance r de l'origine, l'équation (1.1) peut se réécrire :

$$\mathcal{R}f(\boldsymbol{\alpha}, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \delta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} - r) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{y} \in \boldsymbol{\alpha}^\perp} f(r\boldsymbol{\alpha} + \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1.2)$$

avec $\boldsymbol{\alpha}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0\}$ et δ la distribution de Dirac.

On peut également considérer deux vecteurs unitaires du plan, orthogonaux entre eux, paramétrés par un angle $\phi \in [0, \pi[$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_\phi &\stackrel{\text{déf}}{=} (\cos \phi, \sin \phi) \\ \boldsymbol{\beta}_\phi &\stackrel{\text{déf}}{=} (-\sin \phi, \cos \phi) \end{aligned} \quad (1.3)$$

1. L'espace de Schwartz est l'espace des fonctions f infiniment dérivables telles que toutes les dérivées de f sont à décroissance rapide. Pour nous, la fonction f sera en fait à support compact car $f(\mathbf{x}) = 0$ si \mathbf{x} n'est pas dans l'objet, qui sera modélisé par une partie fermée et bornée du plan (voir section 1.6).

Avec les vecteurs de l'équation (5.8), un point \mathbf{x} du plan est représenté par les coordonnées $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ dans la base orthonormée $(\boldsymbol{\alpha}_\phi, \boldsymbol{\beta}_\phi) : \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi)}_r \boldsymbol{\alpha}_\phi + \underbrace{(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_\phi)}_s \boldsymbol{\beta}_\phi$. Quand cela n'apporte pas de confusion, on utilisera juste les notations $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$.

On peut définir alors la ligne considérée précédemment comme une ligne $\bar{L}_{\phi,r}$ portée par le vecteur unitaire $\boldsymbol{\beta}_\phi$ et passant par le point de coordonnées $r\boldsymbol{\alpha}_\phi$ (voir figure 1.1) :

$$\bar{L}_{\phi,r} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \{r\boldsymbol{\alpha}_\phi + s\boldsymbol{\beta}_\phi | s \in \mathbb{R}\} \quad (1.4)$$

L'application de la transformée de Radon (équation (1.1)) à une ligne $\bar{L}_{\phi,r}$ est alors :

$$\mathcal{R}f(\phi, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r\boldsymbol{\alpha}_\phi + s\boldsymbol{\beta}_\phi) ds \quad (1.5)$$

On pourra aussi utiliser la notation $\mathcal{R}_\phi f(r)$ à la place de $\mathcal{R}f(\phi, r)$.

La géométrie parallèle a été la première utilisée en tomographie. Elle est bien adaptée au traitement mathématique des données, mais elle est peu efficace du point de vue de l'acquisition de ces données. Une source de rayons X effectue alternativement translations (correspondant aux différentes valeurs de r) et rotations (correspondant aux différentes valeurs de ϕ), en émettant un faisceau unidirectionnel (voir figure 1.2).

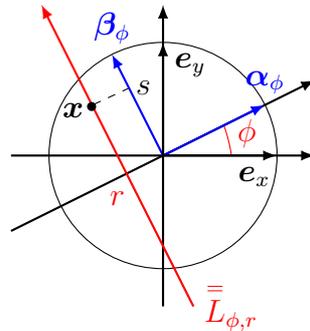


FIGURE 1.1 – Représentation de la ligne $\bar{L}_{\phi,r}$ passant par \mathbf{x} . Le cercle noir représente le cercle unité et $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ est la base canonique de \mathbb{R}^2 .

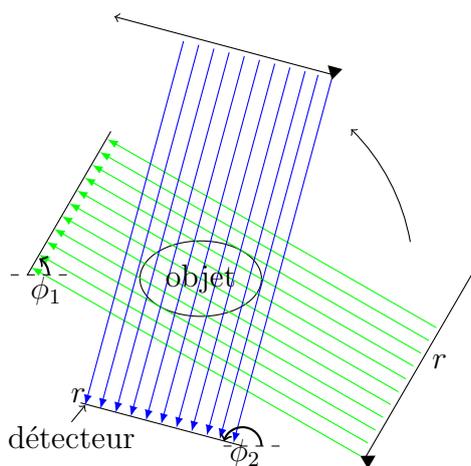


FIGURE 1.2 – Schéma d'une géométrie parallèle avec deux angles ϕ représentés. La source (ici représentée par un triangle noir) émettra un rayon X porté par une ligne $\bar{L}_{\phi,r}$.

2. On peut aussi représenter \mathbf{x} par (r, ϕ) , dans ce cas on parlera de *coordonnées sinogrammes*.

Une *projection en géométrie parallèle* $p(\phi, \cdot)$ (notée aussi $p_\phi(\cdot)$) est un ensemble d'intégrales de lignes telles que :

$$p(\phi, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_\phi f(r) \quad (1.6)$$

Les différentes intégrales de ligne sur les lignes $\bar{L}_{\phi,r}$, donc l'ensemble des valeurs $p(\phi, r)$, formeront une image appelée le *sinogramme* (un exemple est donné figure 1.3 avec le fantôme Shepp-Logan). Le problème de reconstruction tomographique est donc celui de l'inversion de la transformée de Radon.

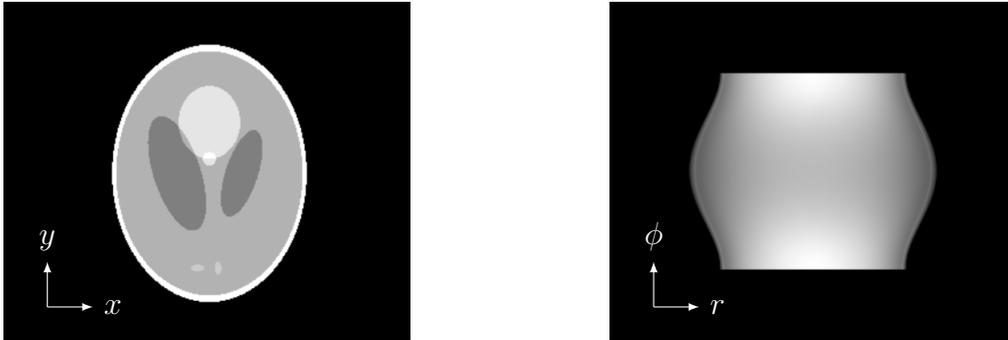


FIGURE 1.3 – *Gauche* : Le fantôme Shepp-Logan [68], très couramment utilisé dans les simulations en tomographie. *Droite* : Le sinogramme de ce fantôme en géométrie parallèle.

Théorème de la section centrale

Un des théorèmes fondamentaux en tomographie est celui de la section centrale (ou théorème de coupe projection) [25, chapitre 6]. Il lie la transformée de Radon et la fonction d'atténuation dans le domaine de Fourier³.

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \forall \phi \in [0, 2\pi[, \widehat{\mathcal{R}_\phi f}(\rho) = \hat{f}(\rho\alpha) \quad (1.7)$$

On utilise ici un abus de notation, la transformée utilisée pour $\widehat{\mathcal{R}_\phi f}(\rho)$ est unidimensionnelle alors que celle de $\hat{f}(\rho\alpha)$ est bidimensionnelle⁴.

Ce théorème implique directement une méthode de reconstruction (par calcul de la transformée de Fourier des intégrales de lignes puis par utilisation de l'équation (1.7) et enfin par inversion de la transformée de Fourier), appelée parfois reconstruction de Fourier bidimensionnelle [8]. Bien que pertinente dans les années 1960 et 1970, grâce au développement de l'algorithme de la transformation de Fourier rapide, elle souffre de problèmes d'interpolation qui la rendent moins précise (bien que plus rapide) que la méthode FBP[8] (présentée dans la section suivante). Pour cette raison, elle est aujourd'hui peu utilisée en tomographie 2D.

1.1.2 Rétroprojection des projections filtrées (FBP)

La rétroprojection est l'opérateur dual de la projection. Elle consiste à sommer (donc à intégrer dans le cas continu), pour les différents angles des mesures, les transformées

3. Dans ce théorème $\phi \in [0, 2\pi[$ car il est facile d'étendre les concepts vus pour $\phi \in [\pi, 2\pi[$, en notant que $\bar{L}_{\phi,r} = \bar{L}_{\phi+\pi,-r}$ et que donc $\mathcal{R}f(\phi, r) = \mathcal{R}f(\phi + \pi, -r)$.

4. Dans la littérature on trouve plusieurs conventions pour la transformée de Fourier, dans cette thèse nous choisissons d'écrire, pour $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$: $\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \exp(-2\pi i \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle) d\mathbf{x}$.

de Radon le long des lignes passant à travers le point considéré. La rétroprojection sera utilisée principalement avec des projections filtrées (de nombreuses manières différentes), car la rétroprojection brute donne de mauvais résultats⁵ [8].

La *rétroprojection des projections filtrées* (Filtered BackProjection en anglais, d'où le sigle FBP) est une technique de reconstruction classique qui a été développée dans les années 1970, d'abord en radioastronomie puis en tomographie médicale [48, chapitre 5]. Le nom anglais peut être trompeur car seules les projections sont filtrées (via un produit de convolution avec un noyau), et la rétroprojection agit ensuite sur ces projections filtrées. Les méthodes d'inversion de la transformée de Radon sont néanmoins nombreuses, on pourra se rapporter par exemple à [48].

Dans ce chapitre, les résultats pourront généralement être retrouvés dans [12] qui dresse une revue de la tomographie 2D jusqu'au début du XXI^e siècle (inclus). Comme d'autres méthodes présentées, nous n'utiliserons pas la FBP⁶ dans cette thèse, ce qui explique pourquoi nous n'aborderons pas certains points. Néanmoins, il nous paraît indispensable d'évoquer certaines méthodes fondamentales. Jusqu'à la fin de la section 1.5, on considère que le détecteur, recevant les rayons X émis par la source, est aussi grand que voulu, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de donnée manquante.

La reconstruction par FBP s'écrit [52] :

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_\phi(\rho) e^{-2i\pi\rho\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}} |\rho| d\rho d\phi \quad (1.8)$$

On peut décomposer cette reconstruction en deux étapes. Premièrement, l'opération de filtrage :

$$p_F(\phi, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{p}_\phi(\rho) e^{-2i\pi\rho r} |\rho| d\rho \quad (1.9)$$

Deuxièmement, la rétroprojection :

$$f(\mathbf{x}) = \int_0^\pi p_F(\phi, r)|_{r=\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\alpha}} d\phi \quad (1.10)$$

On peut aussi écrire l'opération de filtrage sous la forme suivante :

$$p_F(\phi, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\phi, r') k_R(r - r') dr' = (p * k_R)(\phi, r) \quad (1.11)$$

k_R est le filtre rampe, s'écrivant dans l'espace de Fourier :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \widehat{k_R}(\rho) = |\rho| \quad (1.12)$$

On peut remarquer que l'équation (1.9) ne peut pas être implémentée de manière "naïve" (directe), à cause du comportement divergent du filtre rampe dans l'espace de Fourier. Cela signifie que l'amplification des hautes fréquences diverge quand elles tendent vers l'infini. Quelques pistes sur l'implémentation du filtre rampe sont décrites en annexe C.2.

Nous introduisons maintenant le noyau de Hilbert k_H tel que

$$\forall r \in \mathbb{R}^*(= \mathbb{R} \setminus \{0\}), k_H(r) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{\pi r} \quad (1.13)$$

5. Les régions de haute densité produisent des artefacts.

6. Dans la littérature, de nombreuses méthodes sont qualifiées de FBP (dans le sens où on rétroprojette des données filtrées) mais nous adoptons une définition restreinte, en parallèle comme dans le cas *fan beam* (section 1.2.4).

de transformée de Fourier $\widehat{k_H}(\rho) = -i \operatorname{sgn}(\rho)$ [43](section 5.2). Il peut être lié au filtre rampe k_R :

$$\frac{\partial}{\partial r} k_H(r) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sgn}(\rho) e^{2\pi i \rho r} d\rho \right) \quad (1.14)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sgn}(\rho) (2\pi i \rho) e^{2\pi i \rho r} d\rho \quad (1.15)$$

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\operatorname{sgn}(\rho) \rho}_{|\rho|} e^{2\pi i \rho r} d\rho \quad (1.16)$$

$$= 2\pi k_R(r) \quad (1.17)$$

Ainsi on peut lier les projections filtrées par le filtre rampe p_F avec les projections filtrées par le filtre de Hilbert p_H :

$$p_F(\phi, r) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} p_H(\phi, r) \quad (1.18)$$

avec

$$p_H(\phi, r) = (p * k_H)(\phi, r) \quad (1.19)$$

Nous pouvons noter ici que le produit de convolution par le filtre de Hilbert (équation (1.19)) correspond à une transformée de Hilbert qui sera développée section 1.5.2. Des équations (1.18) et (1.10) on peut déduire une autre écriture de la formule FBP :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial}{\partial r} p_H(\phi, r)|_{r=\alpha \cdot \mathbf{x}} d\phi \quad (1.20)$$

1.2 Géométrie fan beam

1.2.1 Définition générale et détecteur

La géométrie *en éventail*, *fan beam* en anglais⁷, est apparue après la géométrie parallèle, lors de la deuxième génération de scanners, en 1972[38]. La source de rayons X sera en rotation autour d'un centre et produira un faisceau de rayons X en éventail.



FIGURE 1.4 – *Gauche* : Echantillonnage équiangulaire pour détecteur circulaire à pas angulaire $\Delta\gamma$. *Droite* : Echantillonnage à espacement linéaire constant Δu .

Le détecteur mesure l'intensité des rayons X en sortie de l'objet (d'un point de vue technique, dans les années 1970, un détecteur était un scintillateur ou un détecteur à

7. Nous garderons le nom anglais, plus "fluide".

gaz [8]). Le détecteur peut être courbe⁸ ou linéaire. On peut rajouter que dans le cas d'un détecteur en arc de cercle, l'échantillonnage est souvent fait à pas angulaire d'ouverture de source constant, alors que dans le cas d'un détecteur linéaire on sera à pas linéaire constant (voir par exemple [37, chapitre 3 section 3.4]). On parlera respectivement d'échantillonnage *équiangulaire* ou à *espacement linéaire constant* (voir figure 1.4). Les problèmes d'échantillonnage sont souvent importants dans les méthodes numériques, et la tomographie n'y échappe pas. Néanmoins ces problématiques ne seront pas étudiées dans cette thèse, et les simulations seront effectuées (au chapitre 5 et en annexes) sur des détecteurs linéaires (plans en 3D), donc avec un espacement linéaire constant.

Pour une position de source $\bar{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^2$ on introduit la *transformée en rayon divergent* (2D) :

$$\mathcal{D}f(\bar{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} f(\bar{\mathbf{S}} + s\boldsymbol{\beta}) ds, \boldsymbol{\beta} \in S^1 \quad (1.21)$$

avec S^1 le cercle unité.

La *projection fan beam* $\bar{g}(\bar{\mathbf{S}}, \cdot)$ peut être définie à partir de la transformée en rayon divergent 2D (une paramétrisation est donnée figure 1.5) :

$$\bar{g}(\bar{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{D}f(\bar{\mathbf{S}}, \boldsymbol{\beta}) \quad (1.22)$$

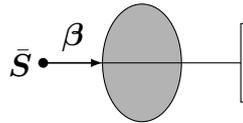


FIGURE 1.5 – Illustration d'une projection *fan beam*. Un rayon X, parallèle à $\boldsymbol{\beta}$, issue de la source $\bar{\mathbf{S}}$ traverse un objet et atteint le détecteur (ici linéaire).

1.2.2 Trajectoire de la source de rayons X

En géométrie *fan beam* (resp. conique en 3D, voir chapitre 2), la source de rayons X se déplacera le long d'une courbe paramétrée du plan (resp. de l'espace). Nous définissons la fonction \mathbf{S} , qui associe à un réel λ une position de la source :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &: \Lambda \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \lambda &\mapsto \mathbf{S}(\lambda) \end{aligned} \quad (1.23)$$

avec $n = 2$ en géométrie *fan beam* et $n = 3$ en géométrie conique. Nous adopterons la notation \mathbf{S}_λ pour $\mathbf{S}(\lambda)$. Nous utiliserons parfois la notation \mathbf{S}_λ pour désigner une position de source quelconque, sans se référer à un Λ particulier.

Nous pouvons définir à partir de la fonction \mathbf{S} une *trajectoire de source* \mathbf{S}_Λ , correspondant à la courbe paramétrée définie par l'application de \mathbf{S} à Λ :

$$\mathbf{S}_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{S}_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \quad (1.24)$$

8. Aussi appelé détecteur en *arc de cercle*, introduit à la troisième génération de scanners [38].

La fonction \mathbf{S} sera continue, et, sauf exception (par exemple section 1.7.3), Λ sera un intervalle de \mathbb{R} . Dans ce cas \mathbf{S}_Λ sera qualifiée de trajectoire continue et connexe⁹. Afin d'éviter des trajectoires trop exotiques, \mathbf{S} sera (par défaut) différentiable par morceaux¹⁰.

1.2.3 Géométrie *fan beam* circulaire

Historiquement, en géométrie *fan beam*, la source a majoritairement décrit un mouvement circulaire, car cela était le plus simple et logique du point de vue de l'acquisition des mesures. La trajectoire de la source s'écrit alors, pour un rayon $R > 0$:

$$\mathbf{S}_\Lambda = \{R \cos \lambda, R \sin \lambda | \lambda \in \Lambda\} \quad (1.25)$$

Pour l'instant (et jusqu'à la section 1.4) on considère que $\Lambda = [0, 2\pi[$, c'est-à-dire que la source décrit un cercle entier, et on parlera de *trajectoire circulaire complète*.

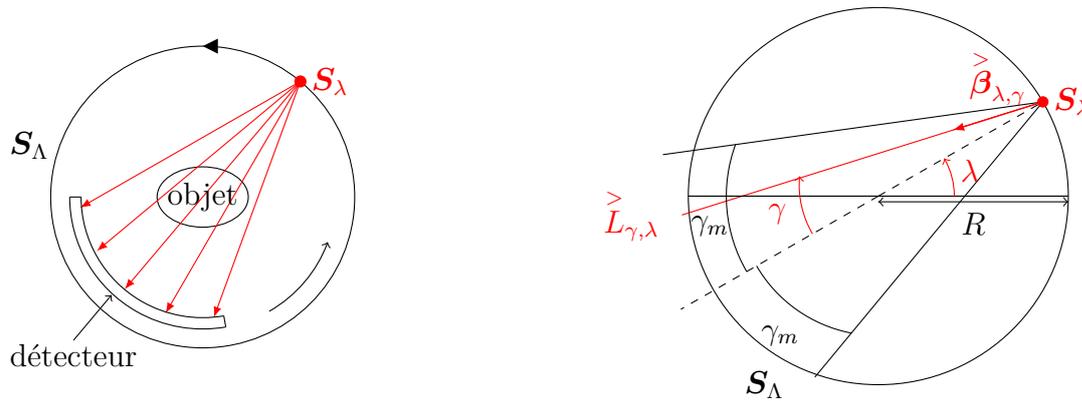


FIGURE 1.6 – *Gauche* : Schéma d'une géométrie *fan beam* à détecteur courbe avec une source de position \mathbf{S}_λ décrivant une trajectoire circulaire complète. *Droite* : Schéma d'une paramétrisation de géométrie *fan beam*, à source \mathbf{S}_λ et avec une ligne $\vec{L}_{\lambda, \gamma}$ (de la même direction que $\vec{\beta}_{\lambda, \gamma}$) issue de cette source. L'angle γ est compté comme les autres angles dans le sens trigonométrique (contrairement à [52] par exemple), γ est donc négatif sur ce schéma.

Le détecteur sera alors en rotation autour du même centre que la trajectoire de la source¹¹ (voir figure 1.6(*gauche*)). Une autre façon de dire cela est de considérer la source et le détecteur comme un ensemble rigide. Le détecteur imposera un secteur angulaire et un angle d'ouverture maximale γ_m avec $\gamma_m \in [0, \pi/2]$, $\gamma_m = \pi/2$ correspondant à la géométrie *fan beam* "classique" (plus d'explications sur les liens entre le détecteur et γ_m à la section 1.3).

La paramétrisation de la géométrie *fan beam* avec trajectoire circulaire de la source peut être faite comme sur la figure 1.6. On définit le vecteur $\vec{\beta}_{\lambda, \gamma} \stackrel{\text{déf}}{=} -(\cos(\lambda + \gamma), \sin(\lambda +$

9. La notion de connexité en analyse et en topologie peut être complexe, il pourrait être plus rigoureux de parler de connexité par arcs, mais notre but ici est juste de différencier les trajectoires constituées d'un seul "morceau" des autres.

10. Le lecteur doit garder à l'esprit que les trajectoires définies ainsi sont potentiellement des modélisations d'un système réel. Nous insisterons dans les propriétés sur les notions de continuité, connexité et de trajectoire bornée, mais dès que nous employons le terme de trajectoire nous considérons par défaut une courbe différentiable (et continue) par morceaux.

11. On peut imaginer des cas avec un autre comportement et une autre position de détecteur (voir par exemple [62]), mais une grande partie de cette thèse repose sur la configuration donnée.

$\gamma))$, avec $\gamma \in [-\gamma_m, \gamma_m]$, $\lambda \in \Lambda$. À partir du vecteur $\overset{\triangleright}{\boldsymbol{\beta}}_{\lambda, \gamma}$ on peut définir la ligne en géométrie *fan beam* $\overset{\triangleright}{L}_{\lambda, \gamma}$:

$$\overset{\triangleright}{L}_{\lambda, \gamma} \stackrel{\text{déf}}{=} \{l \overset{\triangleright}{\boldsymbol{\beta}}_{\lambda, \gamma} + \mathbf{S}_\lambda | l \in \mathbb{R}^+\} \quad (1.26)$$

avec $\mathbf{S}_\lambda = (R \cos \lambda, R \sin \lambda)$.

On peut ainsi donner une définition de la projection *fan beam* adaptée à cette configuration :

$$\overset{\triangleright}{g}(\lambda, \gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} f(\mathbf{S}_\lambda + s \overset{\triangleright}{\boldsymbol{\beta}}_{\lambda, \gamma}) ds \quad (1.27)$$

Néanmoins, la formulation de l'équation (1.27) est globalement restreinte à la trajectoire circulaire. Pour une trajectoire \mathbf{S}_Λ plus générale il est possible d'utiliser le vecteur $\boldsymbol{\beta}_\phi$, introduit pour la géométrie parallèle équation (5.8) :

$$\begin{aligned} g(\lambda, \boldsymbol{\beta}_\phi) &\stackrel{\text{déf}}{=} \bar{g}(\mathbf{S}_\lambda, \boldsymbol{\beta}_\phi) \\ &= \int_0^{+\infty} f(\mathbf{S}_\lambda + s \boldsymbol{\beta}_\phi) ds \end{aligned} \quad (1.28)$$

avec $\phi \in [\lambda, \lambda + \pi]$.

1.2.4 Reconstruction FBP en géométrie *fan beam*

À l'instar de la géométrie parallèle, il existe une formule de reconstruction FBP en géométrie *fan beam*, légèrement plus complexe car elle fait apparaître des pondérations. Pour une trajectoire circulaire :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|^2} \int_\lambda^{\lambda+\pi} R \sin(\phi' - \lambda) g(\lambda, \boldsymbol{\beta}_{\phi'}) k_R(\sin(\phi - \phi')) d\phi' d\lambda \quad (1.29)$$

avec $\phi = \arg(\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda) - \pi/2$, \arg désignant la fonction argument (donnant l'angle entre le vecteur considéré et \mathbf{e}_x).

Pour une droite et un point de l'objet donnés, deux rayons X seront émis et mesurés venant de deux positions de sources différentes, comme montré figure 5.16. Il y aura donc deux contributions identiques (dans une configuration parfaite sans bruit) qui seront moyennées par le coefficient $\frac{1}{2}$ de l'équation (1.29). On peut noter que ce coefficient n'apparaît pas dans la FBP parallèle (équation (1.8)) mais que dans ce cas la rétroprojection se fait seulement sur l'intervalle $[0, \pi]$.

La formulation présentée équation (1.29) est celle présentée dans [12], et utilise la projection *fan beam* formulée équation (1.28). Il est possible d'adopter une autre approche, adaptée particulièrement à la trajectoire circulaire (équation (1.27)), comme on trouve par exemple dans [37, chapitre 3 équation (88)] :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|^2} \int_{-\gamma_m}^{\gamma_m} g(\lambda, \gamma') \widetilde{k}_R(\gamma - \gamma') R \cos \gamma' d\gamma' d\lambda \quad (1.30)$$

avec $\gamma = \arg(-\mathbf{x} + \mathbf{S}_\lambda) - \lambda$ et $\widetilde{k}_R(\gamma) \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{\gamma}{\sin \gamma}\right)^2 k_R(\gamma)$

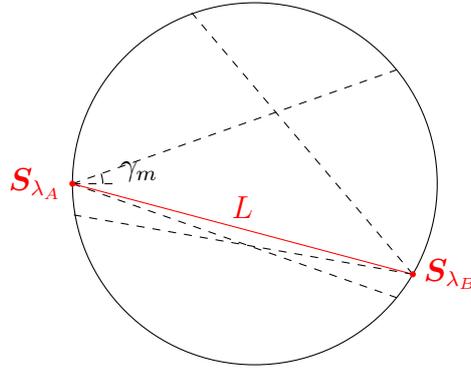


FIGURE 1.7 – La ligne L est mesurée deux fois : une fois via le rayon X émis par S_{λ_A} et une fois par celui émis par S_{λ_B} .

1.3 Champ de vue ou *Field of view* (FOV)

Avant de continuer à décrire les méthodes de reconstruction classique, il nous semble utile ici de définir la notion de champ de vue. Jusqu'à présent, la question de la zone mesurée, "vue" par la source, ne se posait pas. Nous commençons par donner une définition d'une *ligne mesurée*.

Définition 1. Une ligne (demi-droite en géométrie divergente) est dite mesurée quand elle intersecte à la fois une position de source S_λ et le détecteur.

Plus concrètement, quand un rayon X a été émis par une source et que l'intensité de sortie correspondante a été mesurée par un détecteur, la ligne mesurée associée est la ligne passant par le point de mesure et le point d'émission. En 2D, d'un point de vue mathématique, cela signifie qu'on connaît la transformée de Radon de la fonction de densité le long de la ligne considérée.

Nous pouvons alors noter FOV_λ l'éventail (cône en 3D) visible depuis la source S_λ , plus précisément l'union des lignes mesurées issues de S_λ . Le détecteur limitera cet éventail (voir figure 1.8)¹². Le détecteur étant plat ou circulaire, FOV_λ sera toujours convexe.



FIGURE 1.8 – Détecteurs avec une source S_λ émettant un faisceau de rayons X . L_d est la largeur du détecteur et D la distance entre la source et le centre du détecteur. *Gauche* : Cas d'un détecteur linéaire. *Droite* : Cas d'un détecteur en arc de cercle.

Dans le cas d'une source avec un faisceau en éventail on utilisera la notion de *secteur angulaire* défini par l'intervalle angulaire $[-\gamma_m, \gamma_m]$ avec γ_m l'angle d'ouverture maximale de la source (voir figure 1.6(*droite*)).

De la figure 1.8 (*gauche*) on peut déduire que dans le cas d'un détecteur linéaire :

$$\gamma_m = \arctan\left(\frac{L_d}{2D}\right) \quad (1.31)$$

12. On parle même parfois de champ de vue détecteur.

De la figure 1.8 (*droite*) on peut déduire que dans le cas d'un détecteur en arc de cercle :

$$\gamma_m = \frac{L_d}{2D} \quad (1.32)$$

Les approches habituellement choisies dans la littérature sont alors de caractériser le FOV ainsi : une ligne est mesurée si et seulement si elle intersecte le FOV, ou bien, toute ligne intersectant le FOV est mesurée. Nous choisissons néanmoins une autre définition, où une ligne peut être mesurée sans intersecter le FOV et où une ligne peut ne pas être mesurée en intersectant le FOV (voir définition 2 et figure 1.9). L'idée de notre définition est qu'un point du FOV est "vu" par toutes les sources (chaque ligne passant par ce point et une source est mesurée).

Définition 2. Le field of view (*champ de vue en français*) est défini par $\text{FOV} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{FOV}_{\lambda}$.

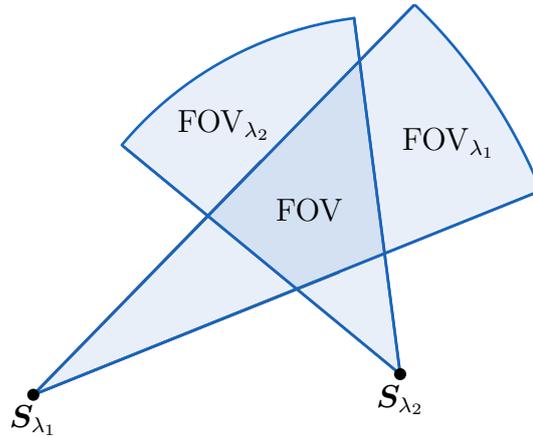


FIGURE 1.9 – Un FOV avec des détecteurs en arc de cercle à partir de deux sources. Une ligne horizontale intersectant ce FOV ne sera pas mesurée.

On peut étendre cette définition du FOV à la géométrie parallèle en considérant les projections comme venant de sources placées à l'infini (voir figure 1.10, *gauche*).

Pour une trajectoire circulaire, le FOV formera habituellement un disque (ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour certaines trajectoires circulaires non entières, comme pour la configuration du *less-than-short-scan* section 1.4.2). Dans ce cas le rayon de ce disque sera appelé R_{FOV} .

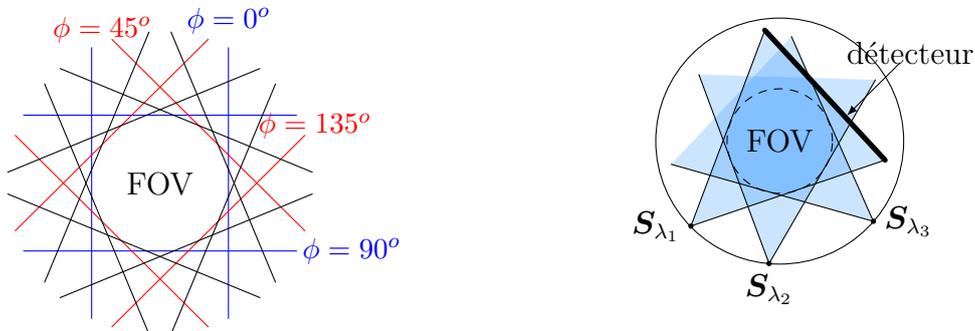


FIGURE 1.10 – *Gauche* : Exemple de construction d'un FOV pour une géométrie parallèle. Les lignes délimitent les projections. *Droite* : FOV pour une géométrie circulaire *fan beam* avec 3 positions de source. Avec toutes les positions de source de la trajectoire circulaire, le FOV serait défini par le cercle en tirets.

Remarque On peut avoir plusieurs sources ou positions de sources et de détecteurs, définissant donc plusieurs FOV_λ , mais avoir un FOV vide, si l'intersection des FOV_λ l'est. De plus, le FOV se réduit quand on rajoute des positions de source.

Du début de ce chapitre, jusqu'à la section 1.6, l'objet est considéré dans le FOV¹³. Nous introduisons également la notion de point *entièrement mesuré*¹⁴.

Définition 3. *Un point est dit entièrement mesuré quand toutes les lignes (resp. les plans en 3D) passant à travers ce point sont mesurées.*

Comme pour la méthodes FBP (section 1.2.4), nous verrons que pour les méthodes *short-scan* (section 1.4.1), *less-than-short-scan* (section 1.4.2) et DBP (section 1.5), un point doit être entièrement mesuré pour être reconstruit (condition nécessaire mais non suffisante). De manière plus globale, comme souligné dans [12], une collection infinie de projections non tronquées amène à une reconstruction *unique*¹⁵ [48]. Néanmoins, cette reconstruction peut être instable. Pour reconstruire un point de manière *stable*¹⁶, il faut qu'il soit entièrement mesuré [27].

Remarque Comme évoqué section 1.3, il aurait aussi été possible de choisir pour définition du FOV l'ensemble des points entièrement mesurés (c'est-à-dire qu'avec cette définition, chaque ligne intersectant le FOV est mesurée).

1.4 Trajectoires circulaires partielles : cas du *short-scan* et du *less-than-short-scan*

1.4.1 Configuration du *short-scan*

Certains dispositifs tomographiques, comme le C-arm¹⁷ ne permettent pas une rotation complète autour du patient, la source ne peut donc pas effectuer un cercle entier. Certaines autres raisons (réduction de dose, durée du scan...) peuvent également amener à vouloir acquérir les données sur un secteur plus restreint que le cercle entier.

Comme précisé sous-section 1.2.4, lors de l'acquisition des projections pour un cercle complet, chaque ligne passant par le FOV est mesurée deux fois. Or pour que la reconstruction soit possible ces lignes ont juste besoin d'être mesurées une fois.

Au lieu d'acquérir les mesures sur 360° , comme cela a été le cas depuis le début de la section 1.2 l'idée pour le *short-scan* est alors de le faire sur $180^\circ + 2\gamma_m$, avec ici $\gamma_m = \arcsin\left(\frac{R_{FOV}}{R}\right)$ (voir figure 1.11, R_{FOV} étant le rayon du FOV circulaire et R le rayon de la trajectoire circulaire). L'objet est toujours dans le FOV et toute ligne passant par le

13. En géométrie 2D, même si l'objet est 3D, ce qui est pris en compte est uniquement la coupe de l'objet dans le plan 2D considéré.

14. Terme propre à cette thèse à notre connaissance.

15. On parle de reconstruction unique quand l'opérateur inverse du problème tomographique (permettant d'obtenir les données de l'objet à partir des données) existe et est unique.

16. L'instabilité intervient lorsque l'opérateur inverse évoqué note 15 est discontinu. Dans ce cas pour deux jeux de données très proches (par exemple un jeu de données sans bruit et un avec un bruit faible) les solutions associées seront éloignées, ce qui n'est pas souhaitable (même avec des données un peu perturbées on veut reconstruire une image proche de l'objet réel). La notion de stabilité est traitée plus en profondeur au chapitre 0 section 0.6.

17. Il permet généralement une rotation autour du patient d'un peu plus de 180° (voir chapitre 0 section 0.3).

FOV est mesurée au moins une fois : l'angle $180^\circ + 2\gamma_m$ est l'angle minimal pour que chaque ligne intersectant le FOV soit mesurée au moins une fois. En effet, pour une trajectoire circulaire, la ligne passant par \mathbf{S}_{λ_0} et étant tangente au FOV forme un angle γ_m avec le diamètre de la trajectoire passant par \mathbf{S}_{λ_0} (voir section 1.3 et figure 1.11). Cette ligne coupe donc la trajectoire en $\mathbf{S}_{\pi+2\gamma_m+\lambda_0}$ (théorème de l'angle au centre). La partie du cercle $\mathbf{S}_{[\lambda_0, \lambda_0+2\gamma_m+\pi]}$ représente la trajectoire de source de la configuration du *short-scan*. Chaque ligne passant par le FOV et $\mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_{[\lambda_0, \lambda_0+2\gamma_m+\pi]}$ appartient donc au cône FOV $_\lambda$ et est donc mesurée. Le segment $[\mathbf{S}_{\lambda_0}, \mathbf{S}_{\lambda_0+2\gamma_m+\pi}]$ étant tangent au FOV, toute ligne traversant le FOV et intersectant la partie du cercle de rayon R n'appartenant pas à $\mathbf{S}_{[\lambda_0, \lambda_0+2\gamma_m+\pi]}$ intersecte également $\mathbf{S}_{[\lambda_0, \lambda_0+2\gamma_m+\pi]}$, cette ligne est donc mesurée. Finalement, pour la configuration *short-scan*, toutes les lignes passant à travers le FOV sont mesurées.

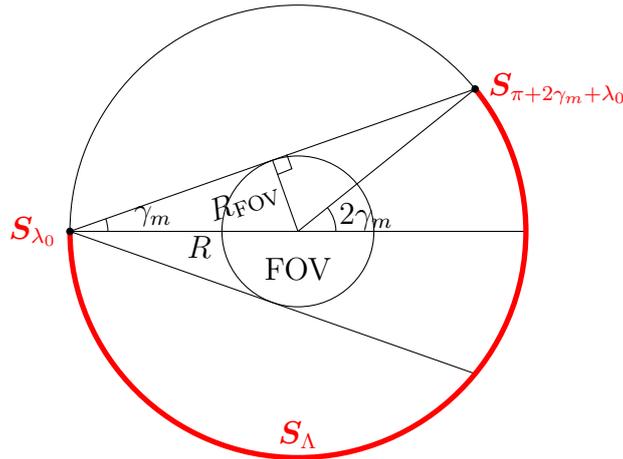


FIGURE 1.11 – Configuration pour le *short-scan* avec un angle quelconque λ_0 .

Sans rentrer dans les détails, il est donc possible d'effectuer une reconstruction dans le FOV dans la configuration *short-scan*, en adaptant légèrement la formule FBP équation (1.29). La rétroprojection se fera bien sûr sur un intervalle de $\pi + 2\gamma_m$ et non plus de 2π , et le facteur $\frac{1}{2}$ devra être remplacé par un poids variable (par exemple les poids de Parker, voir [37, chapitre 3 section 3.5]), pour prendre en compte le nombre de mesures de la ligne (et si possible en évitant les discontinuités).

1.4.2 Configuration du *less-than-short-scan*

La configuration du *less-than-short-scan* (ou *super short-scan*) [52], a été introduite en 2002, soit bien plus tard (une vingtaine d'années) que le *short-scan*. Comme son nom l'indique le *less-than-short-scan* permet d'utiliser un intervalle angulaire pour la trajectoire de la source plus réduit que celui du *short-scan* (donc plus réduit que $\pi + 2\gamma_m$). Pour reconstruire un point, il faut (juste) qu'il soit entièrement mesuré (c'est-à-dire qu'il soit traversé dans toutes les directions par une ligne mesurée) et que l'objet soit dans le FOV (nous en reparlerons après avoir introduit la notion de troncation).

Nous reprenons ici (brièvement) l'approche de [12] pour présenter [52]. Contrairement aux méthodes de reconstruction *fan beam* précédentes, on ne passe plus de la géométrie parallèle à la géométrie *fan beam* par "simple" changement de variable comme pour la FBP. De plus, la formule de reconstruction pour le *less-than-short-scan* ne fait pas intervenir le filtre rampe mais le filtre de Hilbert. Deux approches sont possibles. La première est d'utiliser l'égalité des projections de Hilbert, avec p_H défini sous-section (1.1.2) [52] :

$$p_H(\phi, r)|_{r=\mathbf{S}_\lambda \cdot \alpha_\phi} = g_H(\lambda, \phi) \quad (1.33)$$

avec

$$g_H(\lambda, \phi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^{2\pi} k_H(\sin(\phi' - \phi))g(\lambda, \beta_{\phi'})d\phi' \quad (1.34)$$

On peut alors reconstruire f en utilisant la FBP via le sch\u00e9ma de reconstruction suivant [12] : $g \xrightarrow{(1.34)} g_H \xrightarrow{(1.33)} p_H \xrightarrow{(1.18)} p_F \xrightarrow{(1.10)} f$. L'aspect novateur de ce sch\u00e9ma, par rapport \u00e0 un sch\u00e9ma "classique" de reconstruction par r\u00e9troprojection, est de ne pas utiliser les projections en g\u00e9om\u00e9trie parall\u00e8le non filtr\u00e9es (les projections parall\u00e8les p_F et p_H sont obtenues, via l'\u00e9galit\u00e9 des projections de Hilbert, par les projections *fan beam* filtr\u00e9es). Nous d\u00e9velopperons l'int\u00e9r\u00eat de ce sch\u00e9ma section 1.7.2.

La seconde approche est d'utiliser le filtrage des projections suivant :

$$g_{FLTSS}(\lambda, \phi) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\pi} k_H(\sin(\phi' - \phi)) \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \beta_{\phi'}) d\phi' \quad (1.35)$$

On peut noter que $g_{FLTSS} = \frac{\partial}{\partial \lambda} g_H$, avec g_H d\u00e9fini \u00e9quation (1.34). Il est possible de d\u00e9finir \u00e9galement une correspondance entre g_{FLTSS} et les projections filtr\u00e9es (par le filtre rampe cette fois) p_F d\u00e9finies \u00e9quation (1.9), qui am\u00e8ne \u00e0 la r\u00e9troprojection suivante :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda}\|} w(\lambda, \phi) g_{FLTSS}(\lambda, \phi) |_{\phi=\arg(\mathbf{x}-\mathbf{S}_{\lambda})-\pi/2} d\lambda \quad (1.36)$$

Si Λ est de longueur 2π (la source parcourt un cercle entier), $w = \frac{1}{2}$, sinon ($\Lambda \subsetneq [0, 2\pi[$), en notant qu'une ligne $\overset{\triangleright}{L}_{\lambda, \phi-\lambda-\pi/2}$ intersectant deux fois \mathbf{S}_{Λ} passe par \mathbf{S}_{λ} et $\mathbf{S}_{2\phi-\lambda}$ (voir figure 1.12) :

$$w(\lambda, \phi) = \frac{c(\lambda)}{c(\lambda) + c(2\phi - \lambda)} \quad (1.37)$$

avec c une fonction au moins C^1 ¹⁸ de p\u00e9riode 2π . Pour $a \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{cases} c(a) > 0 & \text{si } \lambda \in \Lambda \\ c(a) = 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.38)$$

Une nouvelle fois nous avons pr\u00e9sent\u00e9 le formalisme venant en partie de la g\u00e9om\u00e9trie parall\u00e8le, tel qu'utilis\u00e9 dans [12]. Pour une approche plus naturelle en g\u00e9om\u00e9trie *fan beam* (ou plus adapt\u00e9e \u00e0 la trajectoire circulaire), on pourra se reporter \u00e0 [52].

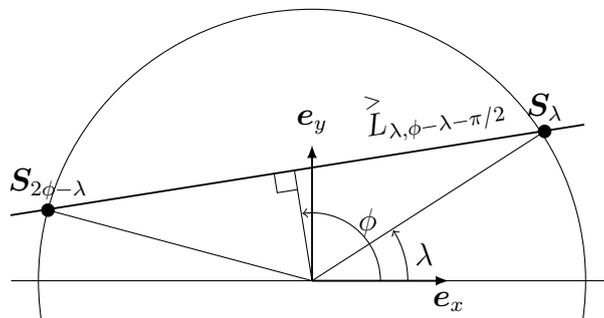


FIGURE 1.12 – Sch\u00e9ma adapt\u00e9 de [52] pour le calcul des poids du *less-than-short-scan* .

18. Le but est d'avoir un poids moyennant les contributions des diff\u00e9rentes lignes en fonction du nombre de fois o\u00f9 elles sont mesur\u00e9es, tout en ayant une fonction de poids lisse pour \u00e9viter des artefacts de reconstruction.

1.5 La méthode *Differentiated BackProjection* (DBP)

1.5.1 Introduction

Le développement des méthodes de reconstruction 2D au XXI^e siècle ne s'est pas arrêté avec le *less-than-short-scan*. Nous présentons maintenant la méthode DBP (Differentiated BackProjection)[51, 93, 92, 84], aussi utilisée en géométrie conique. Avant de décrire la démarche de la DBP, certaines notions doivent être abordées. Une grande partie de la section 1.5 provient d'un des articles de référence pour la DBP 2D [51].

1.5.2 La transformée de Hilbert

Définition et inverse

Nous avons déjà brièvement introduit le filtre (ou noyau) de Hilbert k_H sous-section 1.1.2. Dans cette sous-section (1.5.2), $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ¹⁹ et la *transformée de Hilbert* \mathcal{H} de f est alors :

$$\mathcal{H}f \stackrel{\text{déf}}{=} f * k_H \quad (1.39)$$

L'équation (1.39) présente néanmoins une singularité, pour cette raison on peut l'écrire de la façon suivante :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \mathcal{H}f(r) = \text{vp} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(r') k_H(r - r') \, dr' \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} f(r') k_H(r - r') \, dr' \right\} \quad (1.40)$$

La notation vp désigne la *valeur principale de Cauchy*, qui permet de donner des valeurs à des intégrales impropres qui seraient indéfinies avec l'intégration standard (voir figure 1.13). L'idée est de "compenser" les valeurs autour de la singularité, grâce à la parité de k_H : $k_H(r) + k_H(-r) = 0$. Par souci de simplification, nous utiliserons la notation \int à la place de v.p. $\{\int\}$. Nous donnons en annexe C.1 quelques pistes pour l'implémentation de la transformée de Hilbert. Pour (beaucoup) plus de détails sur la transformée de Hilbert, le lecteur pourra se reporter au(x) livre(s) de F.W.King [43].

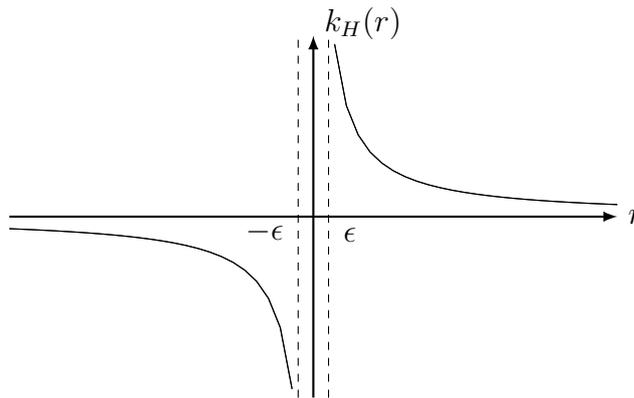


FIGURE 1.13 – Noyau de Hilbert : faire tendre $|\epsilon|$ vers 0 rapproche de manière symétrique de la singularité.

19. La fonction f appartient toujours à l'espace de Schwartz, mais ici on sort du cadre tomographique pour introduire la transformée de Hilbert, et dans cette section uniquement f est une fonction d'une variable uniquement.

Nous allons énoncer quelques propriétés fondamentales de la transformée de Hilbert en commençant par donner la transformée de Fourier du noyau de Hilbert [43, section 5.2] :

$$\widehat{k}_H(\rho) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi r}\right)(\rho) = -i \operatorname{sgn}(\rho) \quad (1.41)$$

et puisque :

$$\widehat{\mathcal{H}f} = \widehat{f * k}_H = \hat{f} \cdot \hat{k}_H \quad (1.42)$$

nous pouvons exprimer la transformée de Fourier de la transformée de Hilbert de f :

$$\widehat{\mathcal{H}f}(\rho) = -i \operatorname{sgn}(\rho) \hat{f}(\rho) \quad (1.43)$$

Nous pouvons maintenant observer que :

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{H}^2 f}(\rho) &= -i \operatorname{sgn}(\rho) \widehat{\mathcal{H}f}(\rho) \\ &= -i \operatorname{sgn}(\rho) (-i \operatorname{sgn}(\rho)) \hat{f}(\rho) \\ &= -\hat{f}(\rho) \end{aligned} \quad (1.44)$$

et puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{H}^2 f = -f \quad (1.45)$$

Nous pouvons en déduire l'inverse de la transformée de Hilbert :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2 &= -\operatorname{id} \\ \mathcal{H}^{-1} &= -\mathcal{H} \end{aligned} \quad (1.46)$$

Inverse de la transformée de Hilbert finie

Pour inverser la transformée de Hilbert en utilisant l'équation (1.46), il faut connaître $\mathcal{H}f$ sur \mathbb{R} , ce qui est difficilement adaptable au cadre tomographique. Dans le cas où $f(l) = 0$ si $l \notin [A, B]$ avec A et B deux réels tels que $B > A$, et si $\mathcal{H}f(l)$ est connue pour $l \in [a, b]$ avec $a < A < B < b$, alors on peut calculer *l'inverse de la transformée de Hilbert finie (ou tronquée)*²⁰ :

$$\forall l \in [A, B], f(l) = \frac{1}{\sqrt{(l-a)(b-l)}} \left(\int_a^b \sqrt{(l'-a)(b-l')} \frac{\mathcal{H}f(l')}{\pi(l-l')} dl' + K \right) \quad (1.47)$$

K est une constante que l'on peut déterminer par exemple en résolvant $f(l^*) = 0$ avec $l^* \in]a, A[\cup]B, b[$:

$$K = - \int_a^b \sqrt{(l'-a)(b-l')} \frac{\mathcal{H}f(l')}{\pi(l^*-l')} dl' \quad (1.48)$$

Transformée de Hilbert 2D

La transformée de Hilbert présentée jusqu'à présent est une transformée de Hilbert 1D, qui agit sur \mathbb{R} , or dans ce chapitre nous travaillons avec une fonction f définie sur \mathbb{R}^2 (et non-nulle uniquement sur une partie bornée de \mathbb{R}^2). De nouveau $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, et nous

20. Il existe d'autres méthodes d'inversion dans ce cas, voir par exemple [69].

supposons f à support compact. Nous introduisons donc la transformée de Hilbert 2D à f :

$$\forall \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \mathcal{H}_0 f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y - y')}{\pi y'} dy' = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y')}{\pi(y - y')} dy' \quad (1.49)$$

Nous verrons sous-section 1.5.3 que le 0 de \mathcal{H}_0 d\u00e9finit un angle sous-tendant la direction verticale, et \mathcal{H}_0 se comportant comme un filtre vertical.

La transform\u00e9e de Fourier de \mathcal{H}_0 est :

$$\forall \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \widehat{\mathcal{H}_0 f}(\boldsymbol{\xi}) = -i \operatorname{sgn}(\xi_2) \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) \quad (1.50)$$

1.5.3 DBP en g\u00e9om\u00e9trie parall\u00e8le

DBP : premi\u00e8re \u00e9tape de reconstruction

La m\u00e9thode DBP est constitu\u00e9e de deux \u00e9tapes. On commence par r\u00e9troprojeter les d\u00e9riv\u00e9es des projections. Nous verrons que ces r\u00e9troprojections sont directement li\u00e9es \u00e0 des transform\u00e9es de Hilbert, il restera donc \u00e0 inverser ces derni\u00e8res (ce qui constitue la deuxi\u00e8me \u00e9tape).

Nous d\u00e9finissons donc les r\u00e9troprojections des d\u00e9riv\u00e9es des projections :

$$b_0(\mathbf{x}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_0^\pi p'(\phi, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi) d\phi \quad (1.51)$$

avec $p'(\phi, r) = \frac{\partial}{\partial r} p(\phi, r)$, en rappelant que $\boldsymbol{\alpha}_\phi = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$.

Il existe un lien simple entre b_0 et \mathcal{H}_0 :

$$b_0(\mathbf{x}) = -2\pi \mathcal{H}_0 f(\mathbf{x}) \quad (1.52)$$

La d\u00e9monstration suivante de l'\u00e9quation (1.52) se retrouve dans [51].

D\u00e9monstration.

$$p'(\phi, r) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (i\rho) \hat{p}(\phi, \rho) e^{2\pi i \rho r} d\rho \quad (1.53)$$

D'apr\u00e8s les \u00e9quations (1.51) et (1.53) :

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{x}) &= 2\pi \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} (i\rho) \hat{p}(\phi, \rho) e^{2\pi i \rho (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi)} d\rho d\phi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} i \operatorname{sgn}(\rho) \hat{p}(\phi, \rho) e^{2\pi i \rho (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi)} |\rho| d\rho d\phi \end{aligned} \quad (1.54)$$

\u00c0 partir du th\u00e9or\u00e8me de la section centrale (\u00e9quation 1.7) et en remarquant que pour $\phi \in [0, \pi]$, $\operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\rho \sin \phi) = \operatorname{sgn}(\rho \alpha_2)$:

$$b_0(\mathbf{x}) = 2\pi \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} i \operatorname{sgn}(\rho \alpha_2) \hat{f}(\rho \boldsymbol{\alpha}_\phi) e^{2\pi i \rho (\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi)} |\rho| d\rho d\phi \quad (1.55)$$

Enfin, en effectuant un changement de variables des coordonn\u00e9es polaires \u00e0 cart\u00e9siennes $\boldsymbol{\xi} = \rho \boldsymbol{\alpha}_\phi$:

$$\begin{aligned} b_0(\mathbf{x}) &= 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} i \operatorname{sgn}(\xi_2) \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{2\pi i(\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x})} d\xi_1 d\xi_2 \\ &= -2\pi \mathcal{H}_0 f(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

□

Seconde étape de reconstruction : inverse fini de la transformée de Hilbert 2D

On considère le rectangle $ABCD$ (voir figure 1.14) défini à partir de deux réels a et b par $\{\mathbf{x} = (x, y) | x \in [C, D], y \in [A, B] \subset [a, b]\}$. On peut adapter l'équation (1.47) pour inverser la transformée de Hilbert 2D :

$$\forall x \in [C, D], \forall y \in [A, B], \mathbf{x} = (x, y)$$

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{\sqrt{(y-a)(b-y)}} \left(\int_a^b \sqrt{(r-a)(b-r)} \frac{\mathcal{H}_0 f(x, r)}{\pi(y-r)} dr + K \right) \quad (1.56)$$

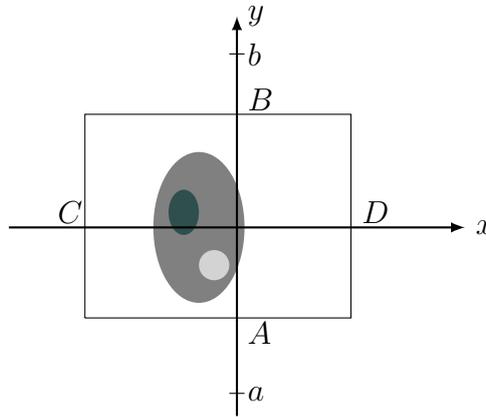


FIGURE 1.14 – Objet (avec 3 densités) dont le support est contenu dans le rectangle $[C, D] \times [A, B]$. on peut appliquer la méthode DBP avec $\mathcal{H}_0 f$ si on connaît $\mathcal{H}_0 f$ sur le segment $[a, b]$. Pour $x \in [C, D]$, si on connaît les valeurs $\mathcal{H}_0 f(x, y)$ pour tout $y \in [a, b]$, alors on peut calculer avec la méthode DBP (via l'équation (1.56)) tout $f(x, y')$ avec $y' \in [A, B]$.

Cet inverse de la transformée Hilbert fini est connu depuis (au moins) la moitié du XX^e siècle [72], mais il n'était pas décrit dans les premiers articles de la DBP (par exemple [93]) et c'est Noo *et al.*[51] qui l'ont introduit dans le cadre de la reconstruction tomographique.

Transformée de Hilbert directionnelle et filtrage directionnel

Nous pouvons étendre la méthode présentée section 1.5.3 en introduisant la *transformée de Hilbert directionnelle*. L'intérêt des différents outils de la DBP que nous présentons sera davantage explicité section 1.7.3. En notant, de manière équivalente à $\boldsymbol{\alpha}_\phi$ et $\boldsymbol{\beta}_\phi$ équation (5.8), $\boldsymbol{\alpha}_\psi = (\cos \psi, \sin \psi)$ et $\boldsymbol{\beta}_\psi = (-\sin \psi, \cos \psi)$:

$$\mathcal{H}_\psi f(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\mathbf{x} - r\boldsymbol{\beta}_\psi)}{\pi r} dr \quad (1.57)$$

Pour inverser (1.57), on reprend les conditions d'application de (1.47) pour un carré $[A, B] \times [A, B]$.

$$\begin{aligned} \forall (r, s) &\in [A, B] \times [A, B], \\ f(\mathbf{x}) &= f(r\boldsymbol{\alpha}_\psi + s\boldsymbol{\beta}_\psi) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{(r-a)(b-r)}} \left(\int_a^b \sqrt{(s'-a)(b-s')} \frac{\mathcal{H}_\psi f(r\boldsymbol{\alpha}_\psi + s'\boldsymbol{\beta}_\psi)}{\pi(s-s')} ds' + K \right) \end{aligned} \quad (1.58)$$

avec $r = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\psi$ et $s = \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}_\psi$.

En définissant :

$$b_\psi(\mathbf{x}) = \int_\psi^{\psi+\pi} p'(\phi, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi) d\phi \quad (1.59)$$

avec $p'(\phi, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi) = \frac{\partial p}{\partial r}(\phi, r)|_{r=\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\alpha}_\phi}$, le lien entre b_ψ et \mathcal{H}_ψ peut être fait [51](2.2) :

$$b_\psi(\mathbf{x}) = -2\pi \mathcal{H}_\psi f(\mathbf{x}) \quad (1.60)$$

Pour reconstruire f , on utilise donc successivement les équations (1.59), (1.60) et (1.58).

1.5.4 DBP en géométrie *fan beam*

Pour cette section on peut trouver comme articles fondateurs [51] et [69], et on adopte la même approche que [15].

On peut réécrire la transformée de Hilbert directionnelle équation (1.57) pour une direction $\boldsymbol{\eta} \in S^1$ (on considère directement une direction imposée par un vecteur et non plus par un angle) :

$$\mathcal{H}_\eta f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(\mathbf{x} - s\boldsymbol{\eta})}{\pi s} ds \quad (1.61)$$

La formule (1.46) peut être étendue au cas 2D :

$$f(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{H}_\eta f(\mathbf{x} - h\boldsymbol{\eta})}{\pi h} dh \quad (1.62)$$

Une nouvelle fois, pour appliquer (1.46) il faut que toutes les valeurs de la transformée de Hilbert soient connues (pour la ligne de direction $\boldsymbol{\eta}$ passant par \mathbf{x}), ce qui est compliqué en pratique.

Pour un point \mathbf{x} de l'objet considéré (à la frontière connue) et une direction $\boldsymbol{\eta}$ donnés, il nous sera utile de définir quatre réels (tel que fait dans [15]) : s_1, s_2 (avec $s_2 > s_1$), h_1 et h_2 (avec $h_2 > h_1$). Les relations entre les intervalles $[s_1, s_2]$ et $[h_1, h_2]$ indiqueront la stratégie de reconstruction à utiliser par la méthode DBP. Les valeurs s_1 et s_2 sont telles que : $\forall s \notin [s_1, s_2], f(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\eta}) = 0$ ²¹. Les réels h_1 et h_2 sont telles que les valeurs de $\mathcal{H}_\eta f(\mathbf{x} + h\boldsymbol{\eta})$ soient connues exactement pour l'intervalle $[h_1, h_2]$ (voir figure 1.15).

Nous nous plaçons maintenant en géométrie *fan beam*, avec une trajectoire \mathbf{S}_Λ continue, connexe et bornée. Dans le cas où $[s_1, s_2] \subset]h_1, h_2[$, on peut une nouvelle fois inverser

21. Pour un objet (à densités strictement positives) convexe les valeurs de s pour lesquelles $f(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\eta})$ est non nul forment un intervalle, mais ce n'est pas forcément le cas pour un objet non convexe.

la transformée de Hilbert, avec une formule (qu'on retrouve dans [15]) proche de l'équation (1.58), mais mieux adaptée à la géométrie *fan beam* :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{\sqrt{-h_1 h_2}} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{(h-h_1)(h_2-h)} \frac{\mathcal{H}_\eta f(\mathbf{x} - h\boldsymbol{\eta})}{\pi h} dh + K \quad (1.63)$$

On peut vérifier que $-h_1 h_2 > 0$. En effet, \mathbf{x} est dans l'objet donc $0 \in [s_1, s_2]$ (sinon \mathbf{x} serait sur une ligne dont chaque point serait associé à une densité nulle, et donc \mathbf{x} ne serait pas dans Ω_O). Puisque $[s_1, s_2] \subset]h_1, h_2[$, $0 \in]h_1, h_2[$ et donc $-h_1 h_2 > 0$. Une nouvelle fois, plusieurs manières de déterminer K existent, et [15] propose, en considérant que la ligne passant par \mathbf{x} et de direction $\boldsymbol{\theta}$ passe par $\mathbf{S}_{\tilde{\lambda}}$:

$$K = \frac{1}{\pi \sqrt{-h_1 h_2}} \underbrace{\int_{s_1}^{s_2} f(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\theta}) ds}_{g(\tilde{\lambda}, \boldsymbol{\theta})} \quad (1.64)$$

Nous nous référerons souvent dans la thèse à cette formule d'inversion sous le nom d'inverse de la transformée de Hilbert *bilatérale* (parfois simplifié en inverse bilatéral), car, grossièrement, pour une direction et un point donnés, l'intervalle de la transformée de Hilbert connue "s'étend au delà des côtés de l'objet". On pourra aussi parler d'inverse "analytique" (par opposition à numérique). Cela prendra un sens à la section 1.7.3.

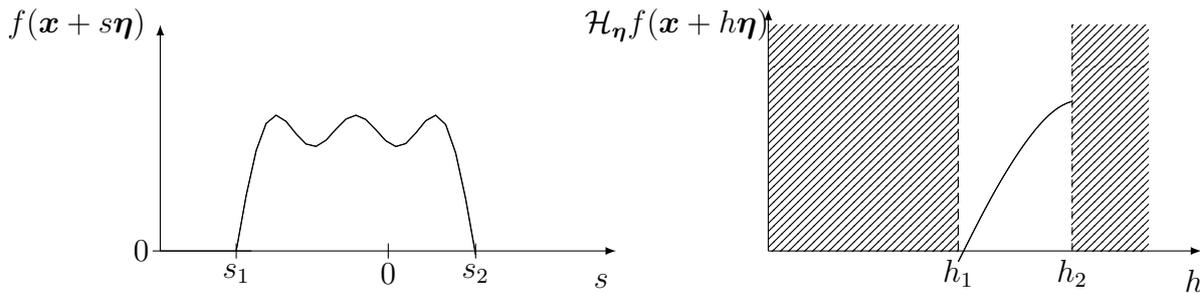


FIGURE 1.15 – Gauche : Valeurs de f (à support compact) sur une ligne de direction $\boldsymbol{\eta}$. Droite : Une transformée de Hilbert tronquée de cette fonction.

En considérant \mathbf{S}_{λ_1} et \mathbf{S}_{λ_2} (que l'on notera respectivement \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2) deux positions de source de \mathbf{S}_Λ . On peut alors écrire la rétroprojection de la dérivée des projections en géométrie *fan beam* sous cette forme :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \boldsymbol{\beta}) \Big|_{\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|}} d\lambda \quad (1.65)$$

Il est de nouveau possible de relier rétroprojection des dérivées et transformée de Hilbert [59] :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) = \pi(\mathcal{H}_{\boldsymbol{\beta}_2} f(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\boldsymbol{\beta}_1} f(\mathbf{x})) \quad (1.66)$$

avec $\boldsymbol{\beta}_i \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_i}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_i\|}$.

On ne peut pas appliquer d'inversion de Hilbert à (1.66) dans le cas général. Nous introduisons alors la notion de *corde*. Une corde est un segment reliant deux positions de source d'une (sous)-trajectoire continue et connexe²². On appellera $C_{i,j}$ (voir figure

22. Dans la littérature on peut trouver la notion de ligne R pour un segment liant deux parties non connectées d'une trajectoire. Ainsi, pour la figure 1.32 il n'est pas question de corde.

1.16, droite) la corde liant \mathbf{S}_i à \mathbf{S}_j . Si $\mathbf{x} \in C_{1,2}$, alors $\beta_1 = -\beta_2$ et on peut écrire d'après l'équation (1.66) :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) = \pi(\mathcal{H}_{\beta_2}f(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{-\beta_2}f(\mathbf{x})) \quad (1.67)$$

On peut remarquer avec (1.61) que $\mathcal{H}_{-\beta_2} = -\mathcal{H}_{\beta_2}$, ce qui permet de réécrire (1.67) (toujours dans le cas où $\mathbf{x} \in C_{1,2}$) :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) = 2\pi\mathcal{H}_{\beta_{1,2}}f(\mathbf{x}) \quad (1.68)$$

avec $\beta_{1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2}{\|\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2\|}$.

Dans le cas où $\mathbf{x} \in C_{i,j}$, il sera utile de travailler avec les intervalles $A_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{x} + s\beta_{i,j} | s \in [s_1, s_2]\}$ (qui sera vu comme l'intersection de la corde $C_{1,2}$ et de l'enveloppe convexe de l'objet) et $B_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathbf{x} + h\beta_{i,j} | h \in [h_1, h_2]\} = \text{FOV} \cap C_{i,j}$ (cette dernière égalité est vérifiée par le fait que pour un point de $\text{FOV} \cap C_{i,j}$ on peut calculer $b_{i,j}$ (équation (1.65)) et donc $\mathcal{H}_{\beta_{i,j}}f$ via l'équation (1.68)). Le cas que nous avons évoqué, $[s_1, s_2] \subset]h_1, h_2[$, est donc équivalent au cas $A_{i,j} \subset B_{i,j}$ (voir figure 1.16, gauche), et on peut utiliser le schéma de reconstruction suivant $g \xrightarrow{(1.65)} b \xrightarrow{(1.68)} \mathcal{H}f \xrightarrow{(1.63)} f$. Nous parlerons de ce schéma de reconstruction sous le nom de *méthode des cordes* (que nous compléterons avec la sous-section 1.7.3).

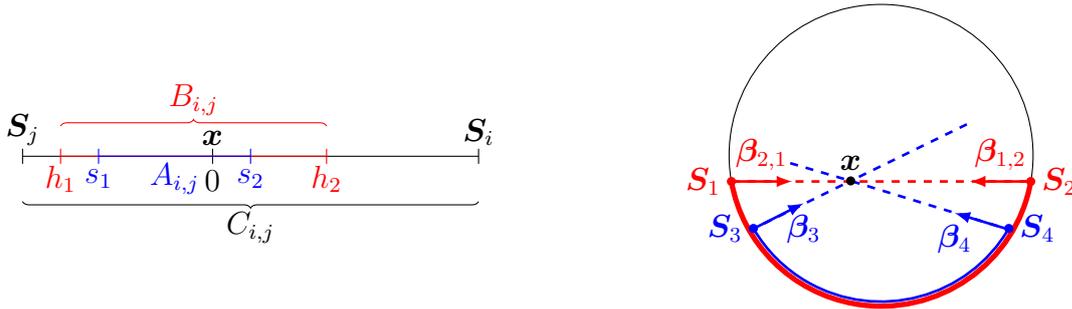


FIGURE 1.16 – Gauche : Corde avec $A_{i,j} \subset B_{i,j}$, ce qui correspond au cas où $[s_1, s_2] \subset]h_1, h_2[$, et donc où on peut inverser la transformée de Hilbert. Droite : La configuration avec les sources \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 illustre l'équation (1.68), celle avec les sources \mathbf{S}_3 et \mathbf{S}_4 illustre l'équation (1.66).

1.5.5 Lignes M : une extension de la méthode DBP

En 2D, la méthode DBP est très flexible car il est possible de choisir de nombreuses cordes pour la reconstruction d'un point. En 2005 une nouvelle idée est apportée pour la DBP en géométrie conique (voir chapitre 2 pour cette géométrie) avec l'utilisation des *lignes M* $L_{\mathbf{x}, \lambda_M} = \{l(\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda_M}) + \mathbf{S}_{\lambda_M} | l \in \mathbb{R}^+\}$ est une demi-droite issue d'une position de source \mathbf{S}_{λ} et passant par un point \mathbf{x} de l'objet, portée par le vecteur $\beta_M = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda_M}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda_M}\|}$. L'idée est d'appliquer les mêmes méthodes d'inversion aux lignes M qu'aux cordes. On considère une trajectoire \mathbf{S}_{Λ} continue, connexe et bornée et \mathbf{S}_{λ_1} et \mathbf{S}_{λ_2} deux positions de sources

23. Le M vient de l'anglais *measured*.

de cette trajectoire avec $\lambda_2 > \lambda_1$, et \mathbf{x} un point de l'objet considéré. L'équation de la *méthode des lignes M*, dans la lignée de l'équation (1.68), est donnée pour $\lambda_M \in [\lambda_1, \lambda_2]$:

$$b_{1,M}(\mathbf{x}) + b_{2,M}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} b_{1,2,M}(\mathbf{x}) = 2\pi\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{x} \in C_{1,2} \quad (1.69)$$

Cette formule est explicitée d'un point de vue géométrique figure 1.17.

Pour reconstruire les points d'un objet étant sur une ligne M $L_{\mathbf{x},\lambda_M}$ avec l'équation (1.63), il faut connaître toutes les valeurs $\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x}')$ pour \mathbf{x}' appartenant à un intervalle contenant $[\mathbf{x} + s_1\boldsymbol{\beta}_M, \mathbf{x} + s_2\boldsymbol{\beta}_M]$. Pour cela, pour chaque $\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x}')$ que l'on veut calculer il doit exister une corde $C_{i',j'}$ passant par \mathbf{x}' (en 2D cela veut dire que \mathbf{x}' est dans l'enveloppe convexe de la trajectoire) afin d'appliquer (1.69) à $b_{i',j',M}(\mathbf{x}')$. Le calcul de $b_{i',j',M}(\mathbf{x}')$ exige quant à lui deux conditions : \mathbf{x}' doit être dans le FOV et λ_M doit être dans $[\lambda_{i'}, \lambda_{j'}]$ (car on doit intégrer les (dérivées) des projections sur les intervalle $[\lambda_i, \lambda_M]$ et $[\lambda_M, \lambda_j]$).

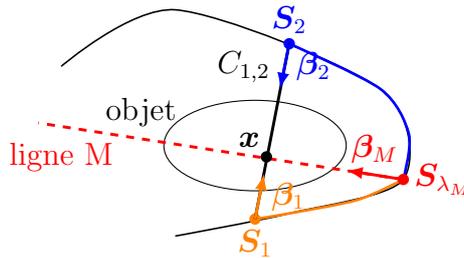


FIGURE 1.17 – Illustration de l'équation (1.69). La partie orange correspond à $b_{1,M}(\mathbf{x}) = \pi(\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\beta_1}f(\mathbf{x}))$ et la partie bleue à $b_{2,M}(\mathbf{x}) = \pi(\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x}) - \mathcal{H}_{\beta_2}f(\mathbf{x}))$ (voir équation (1.66)). Etant donné que $\mathcal{H}_{\beta_2}f = -\mathcal{H}_{\beta_1}f$ on retrouve bien $b_{1,2,M}(\mathbf{x}) = 2\mathcal{H}_{\beta_M}f(\mathbf{x})$: il ne reste plus qu'une seule transformée de Hilbert dans la direction de la ligne M en rouge. On peut noter qu'ici la trajectoire de la source n'est circulaire, la méthode DBP (et la méthode des lignes M) s'adaptant bien à des trajectoires moins standards.

Dans cette thèse nous considérons que la méthode DBP comprend aussi bien la méthode des cordes (qui peut être considérée comme la méthode DBP "classique") que la méthode des lignes M. L'intérêt de la méthode des lignes M sera expliqué plus profondément section 1.7.3.

1.6 Introduction au problème des projections tronquées

1.6.1 Troncations

Jusqu'à présent le FOV contenait l'objet, néanmoins des dimensions restreintes pour le détecteur peuvent produire un FOV trop petit pour que ce soit le cas. Pour être plus précis nous introduisons la notion de *support de l'objet* (souvent simplifié en support).

Définition 4. Le support de l'objet, noté Ω_O , est l'enveloppe convexe de (la fermeture de) l'ensemble des régions de densité non nulle : $\Omega_O = \text{conv}(\{\mathbf{x} | \mu(\mathbf{x}) \neq 0\})$.

Dans toute la suite nous supposons que le support est borné. L'idée de cette définition est de travailler avec des objets convexes, et, s'ils ne sont pas convexes, de considérer des nouveaux objets définis par leur enveloppe convexe (du point de vue de l'image, c'est la même chose). Avoir un support convexe permettra de simplifier les énoncés des résultats dans la thèse.

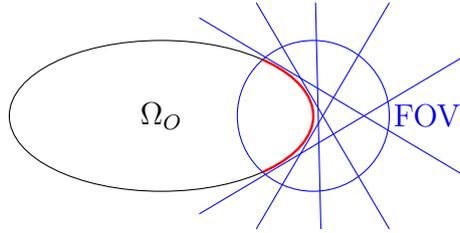


FIGURE 1.18 – Les lignes bleues intersectent le FOV mais pas le support Ω_O . Elles sont donc mesurées et leur intégrale de droite associée vaut 0. Ainsi, on peut par rétroprojection déterminer la frontière rouge (correspondant à la frontière du support dans le FOV).

On notera également que le support peut être considéré comme connu, et même si ce n'est pas le cas, il est relativement simple de le déterminer (ou au moins de déterminer sa frontière dans $\text{FOV} \cap \Omega_O$, voir figure 1.18).

Nous pouvons maintenant aborder la notion de *troncation*.

Définition 5. Une projection est dite tronquée quand une ligne (ou une demi-droite) associée issue d'une source et d'intersection non vide avec le support de l'objet n'est pas mesurée.

Il existe donc au moins une projection tronquée si, et seulement si, $\Omega_O \not\subset \text{FOV}$ (comme sur la figure 1.18). En pratique les projections sont tronquées si le détecteur n'est pas assez grand pour l'objet que l'on souhaite mesurer.

Dans cette thèse on visualisera donc souvent les troncations à partir de la notion de FOV, mais on peut aussi visualiser les troncations sur le sinogramme, comme sur la figure 1.19.

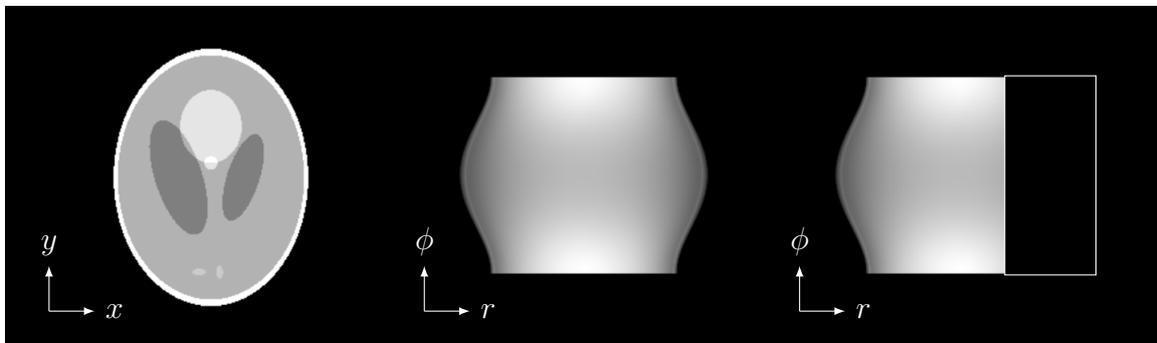


FIGURE 1.19 – *Gauche* : Le fantôme Shepp Logan. *Milieu* : Le sinogramme de ce fantôme en géométrie parallèle. *Droite* : Le sinogramme de ce fantôme avec des troncations. En effet la translation de la source est ici limitée, et certaines mesures, à l'intérieur du rectangle blanc, ne sont pas faites.

Les troncations impliquent donc directement une absence de données. Néanmoins, il y a parfois de la redondance dans les données en tomographie. Si à ce stade du manuscrit, on peut avoir l'intuition (sans en avoir la preuve) qu'il sera difficile de reconstruire une partie de l'objet en dehors du FOV, il n'est pas évident de statuer sur la possibilité de reconstruction dans le FOV avec des troncations. Ce sera un des cheminements de cette thèse.

Nous cherchons donc à partir de maintenant des configurations et des formules de

reconstruction analytiques associées, qui sous certaines conditions permettent une reconstruction unique sans approximation²⁴. On parlera de *reconstruction exacte* dans ce cas.

1.6.2 Le cas du problème intérieur

Une des configurations liées aux troncations est le *problème intérieur*. On considère une région D convexe [13] et strictement incluse dans Ω_O , telle que toutes les lignes passant par un point de D soient mesurées, et uniquement ces lignes²⁵ (un exemple en géométrie parallèle avec le fantôme Shepp-Logan est donné figure 1.20). Le problème

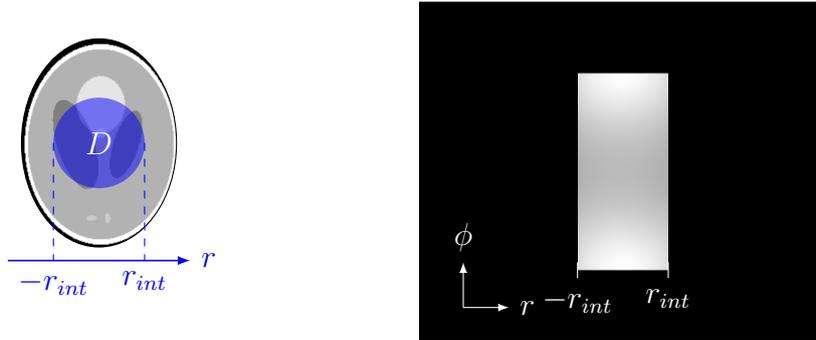


FIGURE 1.20 – Un exemple simple du problème intérieur en géométrie parallèle avec le fantôme Shepp Logan : D n'est pas reconstructible. *Droite* : Le sinogramme associé, on voit qu'il manque des données à cause de la valeur trop faible de r_{int} : l'amplitude de la translation de la source est insuffisante (le sinogramme complet est donné figure 1.19).

intérieur (sans a priori sur l'objet mesuré) n'implique pas un inverse unique [48, VI.1, VI.4], une reconstruction exacte n'est donc pas possible. Pour cette raison, nous ne chercherons pas à étudier ce genre de problème dans cette thèse.

Le problème intérieur est à l'opposé du *problème extérieur*, dans le sens où dans ce dernier aucune ligne passant dans une partie intérieure de l'objet n'est mesurée. Si cette partie intérieure est la région D de la figure 1.20, alors le sinogramme obtenu est le complémentaire (les données tronquées sont ici mesurées et inversement) du sinogramme de cette figure. Le problème extérieur implique lui l'unicité de la reconstruction, mais pas la stabilité [48, VI.1, VI.3], et donc ne peut être généralement à l'origine d'une reconstruction exacte. Nous n'étudierons pas non plus ce problème davantage.

1.6.3 Enveloppe de source et région d'intérêt

Nous pouvons introduire la notion d'*enveloppe de source* (notion propre à cette thèse sous ce nom) et préciser celle de *région d'intérêt*.

Définition 6. On appelle enveloppe de source Ω_{S_λ} la région telle que toute ligne en $2D$ (ou tout plan en $3D$) qui intersecte cette région intersecte la trajectoire.

En rappelant que l'enveloppe convexe d'une courbe est le plus petit ensemble convexe contenant cette courbe, on peut écrire la proposition 1.

24. On parle d'approximation due à la nature de la méthode utilisée, pas d'approximation à cause de phénomènes physiques ou numériques.

25. La région D ne correspond pas à notre définition de FOV car dans notre définition des lignes peuvent ne pas intersecter le FOV et quand même être mesurées.

Proposition 1. *Pour une trajectoire continue, connexe et bornée l'enveloppe de source est l'enveloppe convexe de la trajectoire de la source.*

La proposition 1 est sans doute connue de la littérature. Pour le cas 3D cela est montré par D.Finch [27]. On peut voir le cas 2D comme un cas particulier du cas 3D avec une trajectoire plane et des droites définies par les intersections de plans avec le plan contenant la trajectoire. Nous proposons néanmoins deux preuves restant dans le cadre 2D.

preuve par double inclusion. Nous considérons une trajectoire \mathcal{S}_Λ continue, bornée et connexe. Nous commençons par montrer que $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda) \subset \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Pour cela nous montrons par l'absurde que toute ligne intersectant $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ intersecte \mathcal{S}_Λ . On considère une ligne L intersectant $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ mais pas \mathcal{S}_Λ . La ligne L sépare $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ en deux parties convexes (voir figure 1.21, *gauche*) dont une contient l'entièreté de \mathcal{S}_Λ , car \mathcal{S}_Λ est connexe²⁶. Cette dernière partie est convexe, strictement incluse dans $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ et contient \mathcal{S}_Λ . Il y a une contradiction, car $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ est par définition la plus petite partie convexe contenant \mathcal{S}_Λ . Ainsi, toute ligne intersectant \mathcal{S}_Λ intersecte $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$.

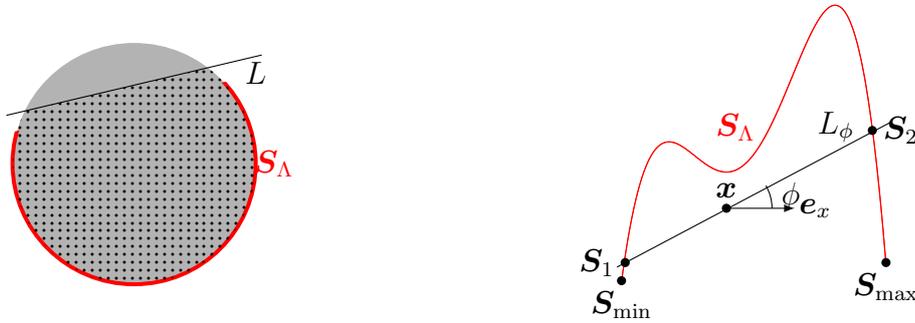


FIGURE 1.21 – *Gauche* : La ligne L sépare la partie grise en deux parties (dont une contenant \mathcal{S}_Λ) et n'intersecte pas \mathcal{S}_Λ . La partie en pointillés est une partie convexe incluse dans la partie grise et contenant \mathcal{S}_Λ . La partie grise ne peut donc pas être l'enveloppe convexe de \mathcal{S}_Λ . *Droite* : Une trajectoire d'extrémités \mathcal{S}_{\min} et \mathcal{S}_{\max} . La ligne L_ϕ passe par \mathbf{x} et forme un angle ϕ avec \mathbf{e}_x . Elle intersecte \mathcal{S}_Λ en deux points (ce qui n'est pas le cas de toutes les lignes passant par \mathbf{x}) et \mathbf{x} appartient au segment $[\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2]$ formé par ces deux points. Le point \mathbf{x} est donc dans $\text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$.

Nous montrons maintenant que $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda} \subset \text{conv}(\mathcal{S}_\Lambda)$ ²⁷. On considère la trajectoire dans un plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ et ses extrémités sont nommées \mathcal{S}_{\min} et \mathcal{S}_{\max} . Soit \mathbf{x} un point de $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et une ligne $L_\phi = \{l\boldsymbol{\alpha}_\phi \mid l \in \mathbb{R}, \boldsymbol{\alpha}_\phi = (\mathcal{S}_\lambda - \mathbf{x}) / \|\mathcal{S}_\lambda - \mathbf{x}\| = (\cos \phi, \sin \phi)\}$ passant par \mathbf{x} et un point \mathcal{S}_λ de \mathcal{S}_Λ (voir figure 1.21, *droite*, la ligne L forme un angle ϕ avec \mathbf{e}_x). On note $[\phi_{\min}, \phi_{\max}] \subset [0, 2\pi[$ ²⁸ l'ensemble des valeurs de ϕ atteintes pour L_ϕ passant par tous les points \mathcal{S}_λ de \mathcal{S}_Λ . Le cas $|\phi_{\max} - \phi_{\min}| < \pi$ ne peut arriver, car dans ce cas il existerait un réel ϵ tel que la ligne passant par \mathbf{x} formerait un angle $\phi_{\min} - \epsilon$ avec \mathbf{e}_x et tel que $\phi_{\max} + \epsilon \notin [\phi_{\min}, \phi_{\max}]$. Ainsi, on aurait une ligne passant par \mathbf{x} qui n'intersecte pas \mathcal{S}_Λ , or $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ par hypothèse. On a donc $|\phi_{\max} - \phi_{\min}| \geq \pi$, ce qui signifie qu'il existe $\phi' \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}]$ tel que $\phi' + \pi \in [\phi_{\min}, \phi_{\max}]$. Ainsi, la ligne $L_{\phi'}$ intersecte \mathcal{S}_Λ en deux

26. Sans cette hypothèse de connexité, on peut construire comme sous-section 1.7.3 une trajectoire où $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda} \subsetneq \text{conv}\mathcal{S}_\Lambda$.

27. Cela semble vrai indépendamment des hypothèses sur \mathcal{S}_Λ , notamment pour la connexité, mais nous le démontrons pour \mathcal{S}_Λ continue, connexe et bornée.

28. Cet ensemble est bien un intervalle car la trajectoire est continue et connexe.

points que l'on nomme \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 , et $\mathbf{x} \in [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2]$. Le point \mathbf{x} est donc sur un segment liant deux points de \mathbf{S}_Λ , \mathbf{x} est donc dans $\text{conv}(\mathbf{S}_\Lambda)$. \square

On définira et on travaillera avec la notion de *plan d'appui* au chapitre 3. On utilise dans cette preuve les lignes d'appui, qui sont des lignes intersectant l'enveloppe convexe d'un ensemble mais pas son intérieur. Elles vont nous permettre de construire l'enveloppe convexe d'une trajectoire.

preuve par construction. Nous considérons une nouvelle fois une trajectoire \mathbf{S}_Λ continue, bornée et connexe. Pour un angle ϕ donné, on considère deux lignes \bar{L}_{ϕ,r_0} et \bar{L}_{ϕ,r_1} (voir équation (1.4)) telles que r_0 (resp. r_1) soit la plus petite (resp. la plus grande) valeur de r pour laquelle $\bar{L}_{\phi,r}$ intersecte \mathbf{S}_Λ (voir figure 1.22, r_0 et r_1 dépendent donc de ϕ , r_0 et r_1 existent car \mathbf{S}_Λ est bornée). Ces lignes sont des lignes d'appui de \mathbf{S}_Λ , car elles contiennent (au moins) un point de \mathbf{S}_Λ mais séparent \mathbb{R}^2 en une partie contenant \mathbf{S}_Λ et une partie "vide". On note E_ϕ la partie de \mathbb{R}^2 comprise entre les deux lignes \bar{L}_{ϕ,r_0} et \bar{L}_{ϕ,r_1} . La trajectoire étant connexe, chaque ligne contenue dans E_ϕ (et donc parallèle à \bar{L}_{ϕ,r_0})

intersecte \mathbf{S}_Λ . Ainsi, on a $\bigcap_{\phi \in [0, 2\pi[}^{E_\phi} \text{conv}(\mathbf{S}_\Lambda)$ par intersection des demi-espaces contenant la trajectoire (E_ϕ est déjà une intersection) correspondant à chaque ligne d'appui. De plus, chaque ligne intersectant un point de $\bigcap_{\phi \in [0, 2\pi[}^{E_\phi}$ intersectera \mathbf{S}_Λ , on peut donc écrire

$$\bigcap_{\phi \in [0, 2\pi[}^{E_\phi} = \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda} \text{ et donc } \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda} = \text{conv}(\mathbf{S}_\Lambda).$$

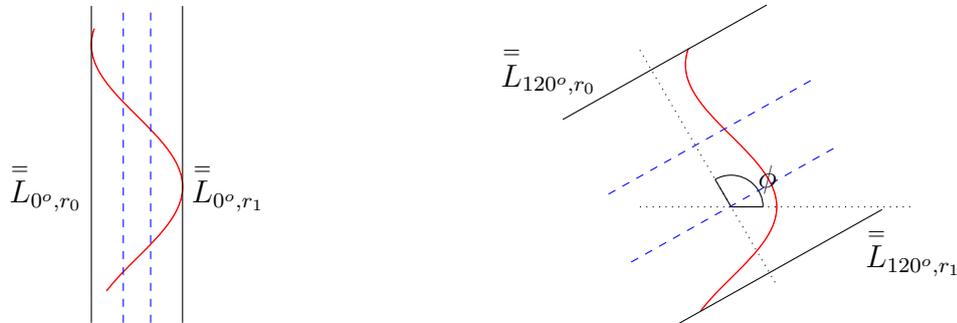


FIGURE 1.22 – Pour une trajectoire (en rouge) on trace les lignes \bar{L}_{ϕ,r_0} et \bar{L}_{ϕ,r_1} . Les lignes bleues hachurées, comprises entre \bar{L}_{ϕ,r_0} et \bar{L}_{ϕ,r_1} , intersectent la trajectoire. *Gauche* : $\phi = 0^\circ$. *Droite* : $\phi = 120^\circ$. \square

La sous-section 1.7.3 montre un exemple de trajectoire non connexe, où ces deux notions sont différentes. Néanmoins, les trajectoires connexes, continues et bornées sont courantes dans cette thèse (et plus généralement en tomographie), on pourra donc utiliser pour ces trajectoires la notation $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ pour désigner leur enveloppe convexe.

Un des intérêts de la notion d'enveloppe de source dans le cadre tomographique 2D est que chaque point de $\text{FOV} \cap \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ est entièrement mesuré. En effet une ligne passant par $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ intersecte \mathbf{S}_Λ , et chaque ligne passant par le FOV et \mathbf{S}_Λ est mesurée.

La région d'intérêt ROI (pour *region of interest*) désigne souvent dans la littérature une zone particulière que l'on souhaite reconstruire²⁹. Nous lui donnerons parfois dans cette thèse un sens plus précis, en la considérant incluse dans ou égale à la région $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda} \cap \Omega_O$ pour une trajectoire continue, connexe et bornée, (nous verrons qu'il est difficile de reconstruire en dehors de cette région, cette zone correspond, en 2D, aux points de l'objet qui sont entièrement mesurés).

1.7 Flexibilité des méthodes de reconstruction en cas de projections tronquées

1.7.1 Introduction

À la fin du XX^e siècle la situation de la tomographie 2D semblait être claire : on pouvait reconstruire toutes les parties d'un objet ou aucune. Néanmoins, le début du nouveau millénaire prouvera le contraire, et permettra (entre autres choses) de montrer que le *short-scan* n'était pas la configuration limite. Nous allons maintenant reprendre les méthodes de reconstruction présentées et étudier si elles peuvent être utiles en présence de troncations. Nous considérons que moins une méthode nécessite des lignes mesurées "éloignées" d'un point que l'on souhaite reconstruire et plus elle est *locale*, et donc flexible et potentiellement adaptée à des troncations.

1.7.2 Cas des méthodes FBP, *short-scan* et *less-than-short-scan*

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement la flexibilité des méthodes introduites précédemment, hors DBP. Le lecteur pourra se référer à [12] pour des explications plus approfondies, notamment concernant la méthode *less-than-short-scan*.

La non-localité du produit de convolution avec le filtre rampe (équation (1.9), le filtre rampe étant non nul presque partout) rend impossible la reconstruction avec troncation par la méthode FBP : en effet pour filtrer les projections pour un point donné, pour un angle ϕ donné, toutes les droites parallèles définies par cet angle (et passant par l'objet) doivent être mesurées. Et la rétroprojection (équation (1.10)) implique donc que ces droites parallèles doivent être mesurées pour tout angle ϕ . Le fait de choisir le filtre de Hilbert plutôt que le filtre rampe ne permet pas pour cette méthode d'utiliser moins de projections (on retrouve un produit de convolution agissant sur les mêmes variables, équation (1.19), et le filtre de Hilbert ne s'annule qu'en l'infini).

Même si la reconstruction *short-scan* se satisfait d'une acquisition des données plus restreinte que la méthode FBP *fan beam*, l'objet doit toujours être contenu dans le FOV pour être reconstruit, car avec cette méthode de reconstruction toute ligne passant par l'objet doit être mesurée.

Le cas du *less-than-short-scan* est plus subtil, l'objet doit toujours être contenu dans le FOV mais pas nécessairement dans Ω_{S_Λ} (voir figure 1.23). En reprenant la première méthode du *less-than-short-scan* (section 1.4.2), on constate que la rétroprojection n'utilise pas les projections en géométrie parallèle, mais seulement les projections parallèles filtrées (par le filtre rampe à partir des projections filtrées par le filtre de Hilbert, voir

29. Des articles comme [13] donnent par contre une définition stricte de la ROI, en la présentant comme la plus grande région de Ω_O constituée de points \mathbf{x} entièrement mesurés tels que $f(\mathbf{x})$ soit reconstruite de manière stable. Notre travail sur la notion de ROI sera généralement cohérente avec cette définition.

équation (1.18)). En effet grâce à l'égalité des projections de Hilbert (équation 1.33), on peut connaître les projections parallèles filtrées (par le filtre de Hilbert) à partir de projections *fan beam*. Aucune projection *fan beam* (le long de la trajectoire) n'est tronquée (ce qui n'est pas le cas pour les projections parallèles, voir figure 1.23 (*droite*)). Un point de l'objet dans $\Omega_{S_\Lambda} \cap \text{FOV}$ est entièrement mesuré, il peut être reconstruit.



FIGURE 1.23 – Dans ces deux cas on peut reconstruire la ROI (contour rouge) définie ici par $\Omega_O \cap \Omega_{S_\Lambda}$. Pour la figure de droite c'est un résultat non trivial au vu des connaissances à la fin du XX^e siècle (car par exemple la ligne verte n'est pas mesurée, ce qui correspond à une projection (horizontale) parallèle tronquée, et donc la méthode FBP ne peut s'appliquer).

Remarque Nous n'avons pas représenté le FOV sur la figure 1.23 car quand l'arc de cercle définissant les positions de la source a un angle plus petit que celui du *short-scan*, le FOV n'est plus un disque et sa représentation devient moins pertinente.

1.7.3 Cas de la méthode DBP

Introduction

Nous allons voir que la méthode DBP est une méthode particulièrement bien adaptée aux troncations, par exemple en permettant des reconstructions même quand l'objet n'est pas entièrement contenu dans le FOV. On peut commencer par remarquer que les opérations effectuées en (1.51) sont locales, c'est-à-dire que les lignes mesurées nécessaires à la rétroprojection d'un point passent uniquement dans un voisinage de ce point. Cela contraste avec la non localité de l'équation de filtrage (1.9), et aura une conséquence sur les troncations admissibles, la méthode DBP étant beaucoup plus flexible que la méthode FBP (une explication plus détaillée est donnée section 1.7.3). Nous allons étudier l'intérêt (et la complémentarité) des différents outils présentés pour cette méthode.

DBP en géométrie parallèle

Avec la méthode présentée section 1.5.3, à partir de \mathcal{H}_0 , nous pouvons effectuer les reconstructions de la figure 1.24. Nous pouvons noter deux éléments. Premièrement, une reconstruction d'une ROI est possible même avec des troncations, et c'est là un des grands intérêts de la méthode DBP. Deuxièmement, l'absence de reconstruction pour la configuration droite de la figure 1.24 est dommageable, le problème ne différant que d'une rotation de $\pi/2$.

Cependant, avec la DBP directionnelle de la section 1.5.3, basée sur les équations (1.59), (1.60) et (1.58), nous pouvons choisir la direction de calcul de la transformée de Hilbert et réaliser les reconstructions de la figure 1.25.



FIGURE 1.24 – *Gauche* : La partie rouge est celle reconstructible par la méthode DBP avec la transformée de Hilbert verticale \mathcal{H}_0 . *Droite* : Dans ce cas on ne peut rien reconstruire avec la transformée de Hilbert verticale.

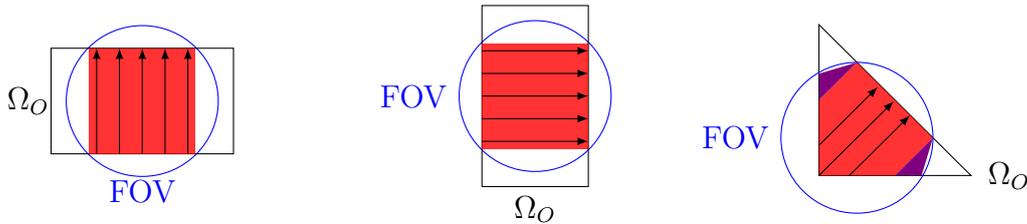


FIGURE 1.25 – La partie rouge est celle reconstructible par la méthode DBP avec la transformée de Hilbert directionnelle \mathcal{H}_ψ . *Gauche* : $\psi = 0$ (DBP verticale). *Milieu* : $\psi = -\pi/2$. *Droite* : $\psi = -\pi/4$. On peut également reconstruire les régions violettes avec la DBP directionnelle avec d'autres valeurs de ψ .

DBP “traditionnelle” en géométrie *fan beam*

En géométrie *fan beam*, nous donnons un exemple de région reconstructible possible avec des troncations, avec la méthode DBP (section 1.5.4), dans le cas d'une trajectoire circulaire figure 1.26(*droite*). Nous retrouvons la même région reconstructible qu'avec la géométrie parallèle (voir par exemple la figure 1.25).

La méthode DBP est bien “plus locale” que la méthode FBP. En effet il n'y a pas de produit de convolution avec un noyau à support non compact³⁰, le filtrage se fait par dérivée (équation (1.65)), et est donc local. Ainsi, la rétroprojection de la dérivée des données (équation (1.65)) nécessite uniquement de mesurer les lignes passant dans un voisinage d'un point considéré. Cela permettra de calculer une transformée de Hilbert (équation (1.66)). Pour reconstruire un point \mathbf{x} , d'autres données seront nécessaires, elles sont utiles pour inverser la transformée de Hilbert (équation (1.63)). Ainsi, pour reconstruire un point \mathbf{x} sur une corde C , on se servira des intégrales de ligne de toutes les droites passant par tout point de $C \cap \text{FOV} (\supset C \cap \Omega_O)$ (ce qui est beaucoup moins que pour la méthode FBP, où pour un point à reconstruire on se sert de toutes les lignes mesurées passant par tous les points de l'objet). Une illustration des droites mesurées utilisées est donnée figure 1.26(*gauche*).

Inverse unilatéral de la transformée de Hilbert

Nous présentons maintenant un nouvel outil de la méthode DBP, que nous n'avons pas introduit avant car il est fortement lié à la notion de troncation. Nous considérons un point \mathbf{x} dans le FOV et sur une corde. M.Defrise *et al.* ont montré en 2006 [21] que le cas $[s_1, s_2] \subset [h_1, h_2]$ (voir sous-section 1.5.4) n'était pas le seul où il était possible d'inverser la

30. Les transformées de Hilbert utilisées sont calculées de manière indirecte, par rétroprojection des dérivées des projections. L'inversion de la transformée de Hilbert se fera toujours dans le cas tronqué.

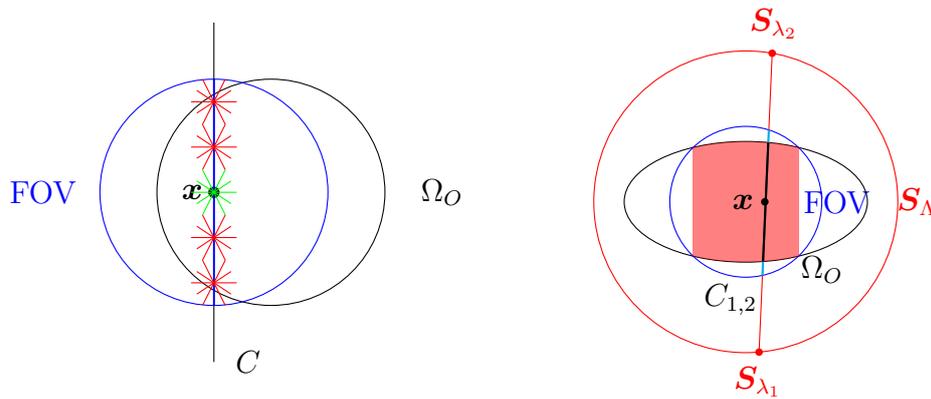


FIGURE 1.26 – *Gauche* : Pour calculer la rétroprojection des dérivées des projections du point \mathbf{x} , toutes les lignes passant par \mathbf{x} (en vert) doivent être mesurées. Pour inverser la transformée de Hilbert de la direction de C et ainsi reconstruire \mathbf{x} , toute ligne (en rouge) passant par un point de $C \cap \text{FOV}$ (en bleu) doit être mesurée. *Droite* : La région rouge pâle est reconstructible par la méthode DBP avec l'inverse analytique de la transformée de Hilbert (inverse bilatéral). En effet pour chaque point de cette section il existe une corde $C_{1,2}$ telle que le segment $C_{1,2} \cap \Omega_O$ (en noir) soit strictement inclus dans le segment $C_{1,2} \cap \text{FOV}$ (extrémités en bleu clair). Un exemple est donné avec le point \mathbf{x} .

transformée de Hilbert. Si $h_1 < s_1 < h_2 < s_2$ (ou $s_1 < h_1 < s_2 < h_2$), alors il n'existe pas d'inverse analytique connu actuellement, comme c'est le cas pour $[s_1, s_2] \subset [h_1, h_2]$, mais il est tout de même possible de calculer numériquement un inverse. On peut par exemple calculer cet inverse avec la méthode POCS (Projection On Convex Subsets)[85]³¹ ou la décomposition en valeurs singulières (SVD) [16]. Cet inverse sera unique et stable, sauf sur l'intersection de l'objet et de la frontière du FOV. Plus précisément, dans le cas où $h_1 < s_1 < h_2 < s_2$, $f(\mathbf{x} + s\boldsymbol{\beta})$, avec $\boldsymbol{\beta}$ dirigeant une corde, peut être reconstruit de manière stable pour $s \in [s_1, h_2[$, et la borne de l'erreur de la reconstruction croît avec la convergence de s vers h_2 et diverge à la limite. Cela est donc suffisant pour parler de reconstruction exacte à l'intérieur (strict) du FOV. Dans le cas d'une trajectoire circulaire complète, nous pouvons reprendre la figure 1.25 et actualiser les régions que nous sommes maintenant capables de reconstruire (figure 1.27).

Nous parlerons de cet inverse de la transformée de Hilbert sous le nom d'inverse de la transformée de Hilbert unilatérale, plus brièvement *inverse unilatéral*³², ou d'*inverse numérique*³³.

Le résultat de [21] est donc puissant car il permet d'obtenir des conditions de reconstruction permissives qui impliquent le théorème 1.

Théorème 1 (Condition suffisante de reconstruction pour une trajectoire circulaire (complète) en géométrie fan beam). *Pour une trajectoire circulaire complète en géométrie fan beam, on peut reconstruire de manière unique et stable l'intérieur de $\text{FOV} \cap \Omega_O$ s'il existe un*

31. La méthode POCS est un schéma itératif du type $f^{(k+1)} = P_i f^{(k)}$, où on alterne 4 projections orthogonales ($1 \leq i \leq 4$). Dans la méthode originale [85], on utilise même 11 projecteurs associés à 11 espaces distincts (!).

32. De manière approximative, la corde définissant la direction de la transformée de Hilbert n'intersecte le FOV en dehors de l'objet ($\text{FOV} \cap \mathbb{C}\Omega_O$) que d'un seul côté de l'objet. Cela fait aussi écho au terme *one-endpoint Hilbert transform* utilisé dans [16].

33. Comme précisé en début de section, à ce jour seul des méthodes numériques sont connues pour calculer cet inverse.

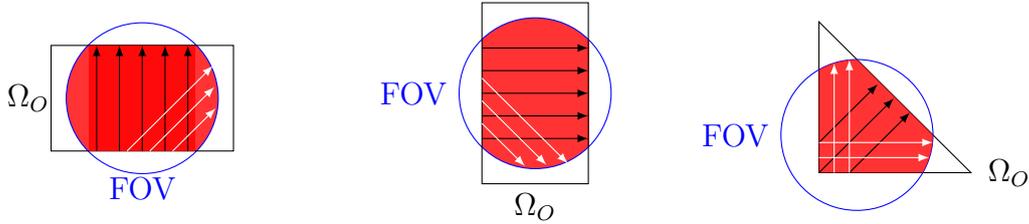


FIGURE 1.27 – La partie rouge est celle reconstructible par la méthode DBP avec le résultat de [21]. Ces résultats peuvent être comparés avec ceux de la figure 1.25 pour voir l’apport de l’inverse de la transformée de Hilbert unilatérale (illustrée sur cette figure par les flèches blanches).

point \mathbf{x}_0 de l’intérieur du FOV tel qu’un voisinage de ce point n’appartienne pas à Ω_O .

Ce théorème est illustré figure 1.28. L’idée est que pour une trajectoire circulaire complète on pourra toujours trouver une corde passant par \mathbf{x}_0 et le point $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_O$ que l’on souhaite reconstruire, ce qui rend possible l’utilisation de l’inverse la transformée de Hilbert unilatérale.

Plus précisément, en considérant un objet convexe³⁴ et une trajectoire circulaire complète \mathcal{S}_Λ , s’il n’existe pas de point \mathbf{x}_0 tel que défini par l’énoncé du théorème 1, cela signifie que $\text{FOV} \subset \Omega_O$, on est donc dans le cas du problème intérieur (voir sous-section 1.6.2), donc il ne peut y avoir de reconstruction unique. S’il existe un tel point, on considère une ligne L passant par $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_O$ et \mathbf{x}_0 et intersectant la trajectoire \mathcal{S}_Λ en deux positions de source (ce qui permet de définir une corde). Grâce à la convexité du FOV et de Ω_O , on peut décomposer le segment $L' = L \cap (\text{FOV} \cup \Omega_O) \supset [\mathbf{x}, \mathbf{x}_0]$ en deux ou trois segments successifs :

$$L' = \underbrace{(L' \cap \text{FOV} \cap \complement\Omega_O)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(L' \cap \text{FOV} \cap \Omega_O)}_{\neq \emptyset} \cup (L' \cap \Omega_O \cap \complement\text{FOV}) \quad (1.70)$$

avec $\complement\Omega_O$ désignant le complémentaire de Ω_O dans \mathbb{R}^2 . Le premier terme du membre de droite de (1.70) n’est pas l’ensemble vide (et est donc un segment) car il correspond à la partie de L' passant par \mathbf{x}_0 et $V(\mathbf{x}_0) \subset \text{FOV} \cap \complement\Omega_O$. Le deuxième terme est également un segment il correspond à la partie de L' passant par $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_O$. Si le troisième terme est l’ensemble vide, on peut alors inverser la transformée de Hilbert de manière analytique (1.63). S’il est un segment, alors on devra utiliser une inversion unilatérale/numérique. Dans tous les cas la reconstruction du point \mathbf{x} est possible.

Méthode des lignes M

L’intérêt de la méthode des lignes M (voir section 1.5.5) est sa flexibilité. On l’utilisera principalement dans le cas où pour toute corde $C_{i,j}$ (c’est-à-dire une corde reliant une source \mathcal{S}_i à une source \mathcal{S}_j) passant à travers un point \mathbf{x} du FOV on a $B_{i,j} \subset A_{i,j}$ (voir section 1.5.4 et figure 1.30, pour rappel $B_{i,j} = \text{FOV} \cap C_{i,j}$ et $A_{i,j} = \Omega_O \cap C_{i,j}$), ce qui signifie qu’on ne peut pas reconstruire de point sur $C_{i,j}$ à partir de l’équation (1.68) (ni par transformée de Hilbert bilatérale ni par transformée de Hilbert unilatérale). Il est encore plus intéressant d’utiliser la méthode des lignes M en utilisant l’inverse de Hilbert unilatéral (l’intersection de la ligne M considérée et de la partie du FOV en dehors de

34. Si l’objet n’est pas convexe, on peut toujours considérer un objet alternatif défini par son enveloppe convexe.

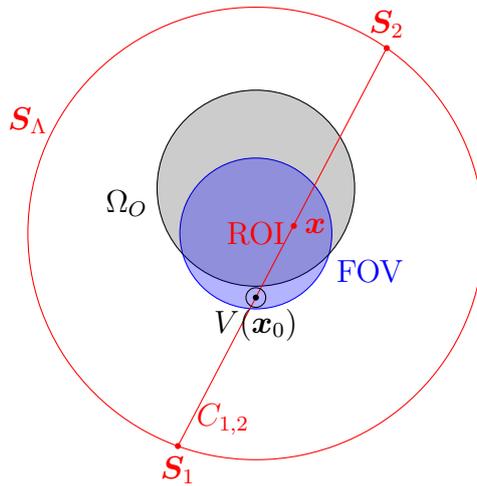


FIGURE 1.28 – Le voisinage du point \mathbf{x}_0 est contenu dans le FOV mais pas dans Ω_O , on peut donc reconstruire la ROI qui est ici l'intérieur de $\Omega_O \cap \text{FOV}$. Pour reconstruire \mathbf{x} on peut appliquer l'inverse de la transformée de Hilbert unilatérale sur la partie de la corde $C_{1,2}$ intersectant le FOV.

l'objet forme un unique segment). Pour reconstruire un point $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda}$ à partir d'une ligne M L_M , il faut donc que ce point soit sur une corde³⁵. De plus il faut que L_M intersecte la partie de $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda}$ qui n'est pas dans l'objet (cela garantit à la fois que chaque point de L_M entre \mathbf{x} et la frontière de Ω_O soit dans le FOV et traversé par une corde, et à la fois qu'il soit possible de calculer assez de transformées de Hilbert pour que l'inversion soit possible avec une des méthodes vues section 1.5.4 ou 1.7.3). Deux configurations d'utilisation d'une ligne M sont données figure 2.8.

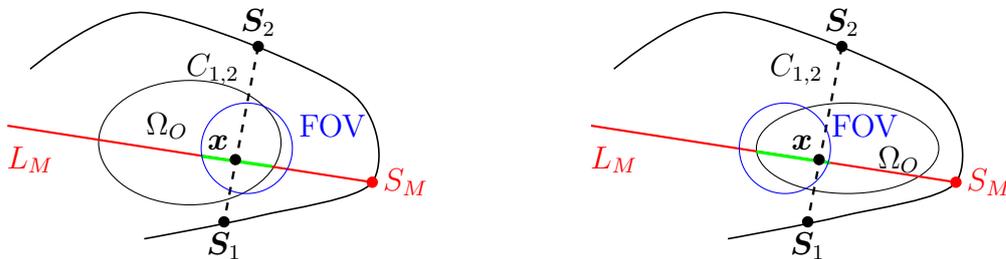


FIGURE 1.29 – Deux exemples d'utilisation d'une ligne M (en rouge) pour un point \mathbf{x} sur une corde $C_{1,2}$. Dans ces deux cas il n'est pas possible d'utiliser la méthode des cordes pour reconstruire \mathbf{x} (avec la corde $C_{1,2}$), la méthode des lignes M doit être employée (avec une inversion numérique de la transformée de Hilbert le long de la ligne M). La ligne M intersecte bien $\text{FOV} \setminus \Omega_O$. Chaque point de $L_M \cap \text{FOV} \cap \Omega_O$ (en vert) est bien intersecté par une corde car on reste dans l'enveloppe convexe de la trajectoire.

Nous verrons que les lignes M seront très utiles en géométrie conique, néanmoins nous présentons un exemple (de notre invention) où les lignes M trouvent également leur place en géométrie *fan beam*.

Dans la figure 1.31 (*gauche*), pour reconstruire \mathbf{x} avec la méthode des cordes (inverse unilatéral compris) il faudrait une corde passant par \mathbf{x} et dont une extrémité est une

35. Cela est garanti en 2D, pour une trajectoire continue, bornée et connexe, par le fait que $\mathbf{x} \in \Omega_{S_\Lambda}$. Nous verrons que cela est bien plus compliqué en 3D.

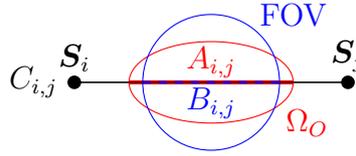
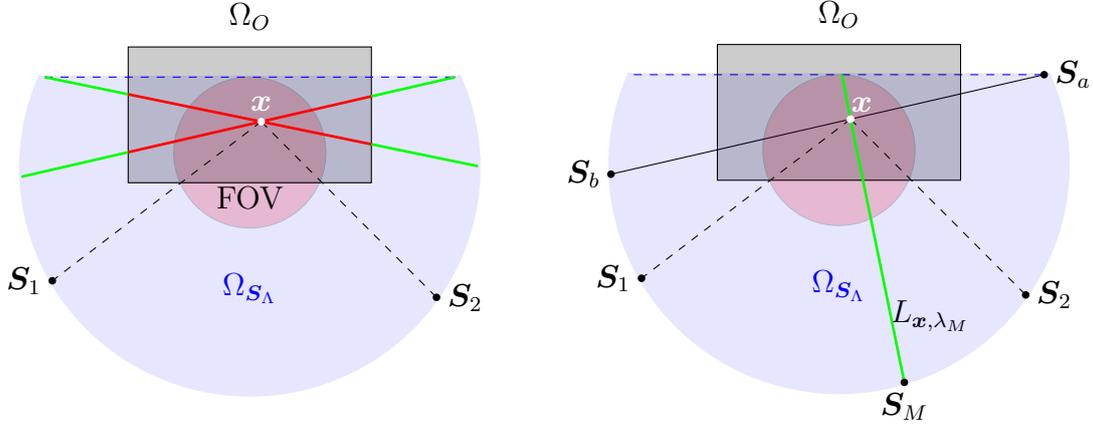
FIGURE 1.30 – Cas où $B_{i,j} \subset A_{i,j}$.

FIGURE 1.31 – *Gauche* : On ne peut pas reconstruire le point x avec la méthode des cordes sur cette configuration, car l’intersection de toutes les cordes passant par x avec le FOV est contenue dans Ω_O . *Droite* : Utilisation de la méthode des lignes M avec la demi-droite L_{x,λ_M} pour le point x appartenant à la corde $C_{a,b}$ (reliant S_a à S_b).

source entre S_1 et S_2 . On doit donc nécessairement utiliser la méthode des lignes M. Le point $x \in \Omega_{S_\Lambda} \cap \text{FOV}$ de la figure 1.31(*droite*) peut être reconstruit par inverse de la transformée de Hilbert unilatérale (l’équation (1.69) s’applique). En effet L_{x,λ_M} (en particulier $[x, S_M]$) intersecte $\text{FOV} \cap \complement\Omega_O$ et $[x, S_M] \cap \Omega_O \subset \Omega_{S_\Lambda} \cap \text{FOV}$ (donc chaque point du segment $[x, S_M] \cap \Omega_O$ est traversé par une corde et est entièrement mesuré).

À partir de la méthode des cordes et des lignes M, nous pouvons rapporter le résultat suivant en géométrie *fan beam* :

Théorème 2 (Condition suffisante de reconstruction pour une trajectoire circulaire (partielle) en géométrie *fan beam*). *Pour une trajectoire circulaire (possiblement non complète mais connexe) en géométrie fan beam, on peut reconstruire de manière unique et stable l’intérieur de $\text{FOV} \cap \Omega_O \cap \Omega_{S_\Lambda}$ s’il existe un point x_0 de l’intérieur de $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda}$ tel qu’un voisinage de ce point n’appartienne pas à Ω_O .*

Les limites de la DBP : le cas de la ROI triangulaire

Nous avons vu que la DBP était une méthode puissante, néanmoins il y a certaines configurations où elle ne peut pas être utilisée. On peut construire une “ROI triangulaire”, où on traite d’une trajectoire circulaire non connexe avec $\Lambda = \bigcup_{i=1}^3 \Lambda_i$ où $\Lambda_1 = [60^\circ, 140^\circ]$, $\Lambda_2 = [180^\circ, 260^\circ]$ et $\Lambda_3 = [300^\circ, 20^\circ]$ (voir figure 1.32). Cette configuration a par exemple été abordée dans [51] ou [52]. Le triangle de la figure 1.32 représente ce que l’on a appelé l’enveloppe de source Ω_{S_Λ} (voir déf. 6), c’est-à-dire que toutes les lignes passant par un point de Ω_{S_Λ} intersectent S_Λ ³⁶. De plus, on considère ici que $\Omega_O \subset \text{FOV}$, ce qui signifie

36. Ici la trajectoire est non connexe, Ω_{S_Λ} n’est pas l’enveloppe convexe de la trajectoire.

que cette configuration n'est pas un problème intérieur (évoqué sous-section 1.6.2), il n'y a pas de troncation (selon notre définition). Si l'on assimile la région d'intérêt (ROI) au triangle défini par $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$, alors toute ligne passant par la ROI est mesurée. On va montrer

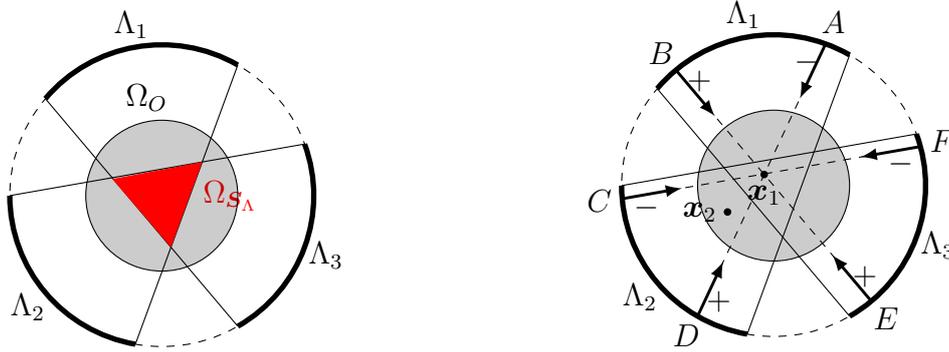


FIGURE 1.32 – *Gauche* : Configuration avec une trajectoire circulaire (non connexe) constituée de 3 arcs de cercles : nous souhaitons reconstruire la ROI définie par le triangle rouge (où toute ligne passant par un point intersecte la trajectoire). *Droite* : Configuration pour calculer la transformée de Hilbert de f en \mathbf{x}_1 dans la direction $\beta_D = (\mathbf{x}_1 - \mathcal{S}_D)/\|\mathbf{x}_1 - \mathcal{S}_D\|$ (que l'on notera pour simplifier $\mathcal{H}_D(\mathbf{x}_1)$). Les signes $-$ associés à A et $+$ associés à B signifient qu'on va calculer $b_{A,B}(\mathbf{x}_1) = \mathcal{H}_B(\mathbf{x}_1) - \mathcal{H}_A(\mathbf{x}_1)$. On ne peut pas calculer de transformée de Hilbert (juste une somme de transformées de Hilbert) pour f en \mathbf{x}_2 .

qu'on peut calculer certaines transformées de Hilbert $\mathcal{H}f(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ mais qu'il n'est pas possible de le faire (en tout cas avec les outils présentés dans le cadre de cette thèse) si $\mathbf{x} \in \Omega_O \setminus \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. On se base sur la configuration de la figure 1.32 (*droite*). On peut calculer les rétroprojections des dérivées des projections suivantes (en allégeant les notations) :

$$b_{AB}(\mathbf{x}_1)/\pi = \mathcal{H}_B(\mathbf{x}_1) - \mathcal{H}_A(\mathbf{x}_1) = \mathcal{H}_B(\mathbf{x}_1) + \mathcal{H}_D(\mathbf{x}_1) \quad (1.71)$$

$$b_{CD}(\mathbf{x}_1)/\pi = \mathcal{H}_D(\mathbf{x}_1) - \mathcal{H}_C(\mathbf{x}_1) \quad (1.72)$$

$$b_{FE}(\mathbf{x}_1)/\pi = \mathcal{H}_E(\mathbf{x}_1) - \mathcal{H}_F(\mathbf{x}_1) = -\mathcal{H}_B(\mathbf{x}_1) + \mathcal{H}_C(\mathbf{x}_1) \quad (1.73)$$

d'où on tire :

$$b_{AB}(\mathbf{x}_1) + b_{CD}(\mathbf{x}_1) + b_{EF}(\mathbf{x}_1) = 2\pi\mathcal{H}_D(\mathbf{x}_1) \quad (1.74)$$

Il n'est pas possible de faire la même démarche pour \mathbf{x}_2 , on ne peut pas "compenser" les transformées de Hilbert de la même façon. Pour le comprendre nous proposons de visualiser le problème sous forme de graphe (figure 1.33), dans une approche un peu différente de celle de la littérature.

La figure 1.33 permet de comprendre qu'il est possible de calculer des transformées de Hilbert uniquement en des points de $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Cependant, $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ est inclus dans le support de l'objet, ce qui signifie qu'il manque des transformées de Hilbert pour pouvoir inverser. L'article [51] montre plus globalement que la méthode DBP ne peut être utilisée quand toutes les lignes passant par $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ intersectent $\Omega_O \setminus \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Cela montre entre autres choses l'utilité de l'existence d'une corde³⁷ à travers le point que l'on veut reconstruire. En effet si on note $\Omega'_{\mathcal{S}_\Lambda}$ l'enveloppe de source d'une partie connexe de la trajectoire, une corde de cette partie connexe appartient donc à $\Omega'_{\mathcal{S}_\Lambda}$, car $\Omega'_{\mathcal{S}_\Lambda}$ est dans ce cas également l'enveloppe

37. Liant donc deux points d'une partie connexe de la trajectoire, et non juste une ligne R qui peut lier deux parties non connexes, par exemple les points C et F de la trajectoire.



FIGURE 1.33 – Chaque nœud d’un graphe correspond à un arc. Á chaque arc on calcule au moins une rétroprojection des dérivées des projections, qui correspond à une différence de deux transformées de Hilbert (une avec un signe + et une avec un signe –). Une arête lie deux nœuds (arcs) qui ont des transformées de Hilbert de même direction. Une arête possède deux signes identiques si, et seulement si, la somme des transformées de Hilbert dans cette direction est nulle. Pour pouvoir calculer une unique transformée de Hilbert il faut donc qu’il y ait une unique arête avec deux signes différents. *Gauche* : Transcription en graphe de la figure 1.32 (pour le point \mathbf{x}_1) et des équations (1.71) à (1.74). L’arête reliant le nœud 1 au nœud 2 a deux signes différents, cela correspond au terme $2\mathcal{H}_D$ de l’équation (1.74). *Droite* : Transcription en graphe pour le point \mathbf{x}_2 . Il y a forcément un nombre pair d’arêtes qui ont les mêmes signes et un nombre pair d’arêtes de signes différents (plus d’explications en fin de section 1.7.3), ce qui signifie qu’il n’est pas possible de calculer de transformée de Hilbert en \mathbf{x}_2 , et en général en tout point de $\Omega_O \setminus \Omega_{S_A}$.

convexe de la partie connexe (voir prop. 1). Sauf cas exotiques, la corde en question peut être support d’une ligne intersectant Ω_{S_A} mais pas $\Omega_O \setminus \Omega_{S_A}$.

Pour reconstruire la ROI avec cette configuration il faudra utiliser la méthode présentée dans [52] (section 1.4.2) ou la méthode *virtual fan beam* [14]³⁸. Les configurations où la méthode DBP échoue à reconstruire alors que la méthode *virtual fan beam* le peut étant très minoritaires [12], nous ne travaillerons pas avec cette méthode. Il est néanmoins possible de reconstruire de manière stable et unique la ROI (Ω_{S_A}), mais dans $\Omega_O \setminus \Omega_{S_A}$, il y a unicité sans stabilité.

Explications complémentaires sur la figure 1.33, droite : nous rappelons que l’idée des manipulations des calculs de rétroprojections des dérivées est d’aboutir à une transformée de Hilbert de direction unique. La difficulté de cette configuration est qu’il n’existe pas des lignes R reliant l’arc 1 et l’arc 3 et passant par \mathbf{x}_2 . Les transformées de Hilbert provenant de rétroprojections de l’arc 1 (resp. de l’arc 3) ne peuvent être compensées qu’avec des transformées de Hilbert provenant de rétroprojections de l’arc 2. Il n’y a donc aucune arête reliant les nœuds 1 et 3. On peut se concentrer sur les nœuds 2 et 3. Il n’y a que deux façons de créer une paire d’arêtes³⁹ entre ces deux nœuds (voir figure 1.34), qui amènent soit au vecteur nul soit à deux transformées de Hilbert de directions différentes. On pourrait être tenter de rajouter des rétroprojections pour “compenser” (annuler) les transformées de Hilbert provenant des premières rétroprojections (voir figure 1.35), ce qui peut donner 3 cas :

- les nouvelles transformées de Hilbert ne compensent aucune des anciennes : il y a

38. L’idée de cette méthode est de construire une trajectoire virtuelle de sorte à ne travailler qu’avec des projections *fan beam* non tronquées.

39. Une rétroprojection des dérivées étant égale à une somme (ou plutôt une différence) de deux transformées de hilbert, on doit ici travailler par paire d’arêtes.



FIGURE 1.34 – Les deux configurations pour une paire d’arêtes reliant les nœuds 2 et 3. *Gauche* : Configuration où la somme des transformées de Hilbert va s’annuler pour les deux arêtes. *Droite* : Configuration qui amène à deux transformées de Hilbert de directions différentes.

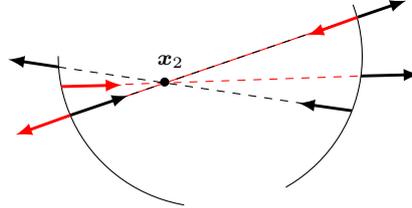


FIGURE 1.35 – Le point x_2 est le même que celui figure 1.32. Pour chaque arc on calcule successivement deux rétroprojections des dérivées des projections. Cela crée 8 transformées de Hilbert (de 4 directions différentes), 4 en noir puis 4 en rouge. Ce schéma illustre le cas où sur une direction deux transformées de Hilbert (en noir) sont compensées par deux nouvelles transformées de Hilbert (en rouge). Il reste toujours deux directions différentes avec des transformées de Hilbert non nulles (alors qu’une seule serait souhaitable pour le schéma d’inversion).

maintenant quatre transformées de Hilbert de directions différentes ;

- une des nouvelles transformées de Hilbert compense une ancienne : il y a deux nouveau deux transformées de Hilbert (une ancienne et une nouvelle) ;
- il y a une “compensation totale” : la somme des transformées de Hilbert est nulle.

On comprend qu’en réitérant ce processus il ne sera pas possible d’obtenir une unique transformée de Hilbert. De plus, ajouter des arêtes entre les nœuds 1 et 2 ne peut pas compenser les transformées de Hilbert créées à partir des arêtes entre les nœuds 2 et 3, car les les transformées de Hilbert induites seraient nécessairement de directions différentes.

Chapitre 2

Reconstruction tomographique en 3 dimensions

2.1 Géométrie parallèle 3D

2.1.1 Passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D

Il y a deux façons d'envisager le passage de la géométrie 2D à la géométrie 3D en tomographie. Premièrement, on peut voir la transformée de Radon comme une intégration sur un hyperplan, donc une droite en 2D et un plan en 3D (la transformée de Radon 3D sera traitée section 2.1.3) : cette approche est la plus mathématique. Deuxièmement, les rayons X étant toujours modélisés par des droites en 3D, on peut continuer à intégrer le long de droites, via *la transformée en rayons X* (voir section 2.1.2) : cette approche est plus physique ou pratique. Le problème est donc plus complexe que le simple ajout d'une troisième coordonnée. Par exemple, les droites, sont des objets "2D" dans une géométrie 2D et "4D" dans une géométrie 3D (elles ont respectivement 2 et 4 degrés de liberté). Cela induit de la redondance en géométrie 3D. La figure 2.1 montre comment paramétriser une ligne en 2D (resp. 3D) à partir de deux lignes (resp. deux plans) parallèles.

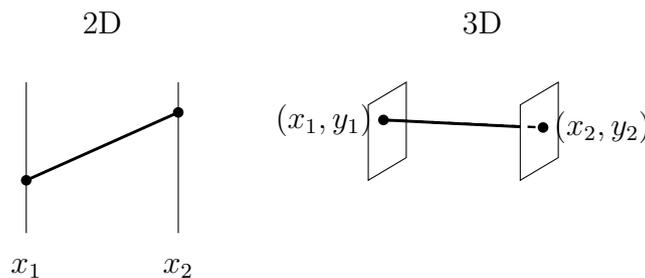


FIGURE 2.1 – Visualisation des 2 degrés de liberté (*gauche*, x_1 et x_2) pour une droite 2D et des 4 degrés de liberté (*droite*, x_1 , x_2 , y_1 et y_2) pour une droite 4D.

Malgré ces différences entre géométrie 2D et 3D, les notations et définitions données dans le chapitre 1 resteront, sauf mention du contraire, valables en 3D.

2.1.2 Transformée en rayons X

Définition et théorème de la section centrale

Les résultats de la section 2.1.2 se retrouvent par exemple dans [20].

On définira la *transformée en rayon X* pour l'intégrale le long d'une droite en géométrie 3D :

$$\mathcal{X}f(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{y} + l\boldsymbol{\alpha}) dl, \boldsymbol{\alpha} \in S^2, \mathbf{y} \in \boldsymbol{\alpha}^\perp \quad (2.1)$$

avec $\boldsymbol{\alpha}^\perp = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{y} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0\}$.

En introduisant les vecteurs unitaires selon la figure 2.2 :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}_{\phi, \theta} &\stackrel{\text{déf}}{=} (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta) \\ \boldsymbol{\beta}_{\phi, \theta} &\stackrel{\text{déf}}{=} (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \\ \boldsymbol{\gamma}_{\phi, \theta} &\stackrel{\text{déf}}{=} (-\cos \phi \cos \theta, -\sin \phi \cos \theta, \sin \theta) \end{aligned} \quad (2.2)$$

avec $\phi \in [0, 2\pi[$ et $\theta \in [0, \pi/2[$ on peut écrire la transformée en rayons X sous la forme :

$$\mathcal{X}f(\phi, \theta, s, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(r\boldsymbol{\alpha}_{\phi, \theta} + s\boldsymbol{\beta}_{\phi, \theta} + t\boldsymbol{\gamma}_{\phi, \theta}) dr \quad (2.3)$$

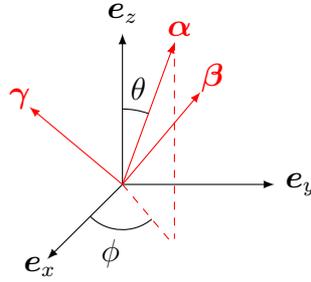


FIGURE 2.2 – Paramétrisation d'une base de vecteurs unitaires $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ pour la transformée en rayons X et la transformée de Radon 3D. La base canonique de \mathbb{R}^3 est représentée par $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Il est possible d'adapter le théorème de la section centrale 2D (chapitre 1 section 1.1.1) à cette transformée en rayons X (le théorème de la section centrale pour la transformée de Radon 3D sera exprimé équation (2.9)) :

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \widehat{\mathcal{X}f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \quad \text{dans le cas où } \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\xi} = 0 \quad (2.4)$$

avec \hat{f} la transformée de Fourier 3D d'un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ($\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$ dans le domaine fréquentiel) et $\widehat{\mathcal{X}f}$ une transformée de Fourier 2D :

$$\widehat{\mathcal{X}f}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \int_{\boldsymbol{\alpha}^\perp} \mathcal{X}f(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{y}) \exp(-2\pi i \langle \boldsymbol{\xi}, \mathbf{y} \rangle) d\mathbf{y} \quad (2.5)$$

Première notion de projection parallèle 3D et condition d'Orlov

Soit $\omega \subset S^2$ l'ensemble des vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$ tel que toutes les lignes (parallèles) de direction $\boldsymbol{\alpha}$ passant à travers un objet considéré sont mesurées (on connaît leur transformée en rayon X). Pour $\boldsymbol{\alpha} \in \omega$, toutes les intégrales lignes parallèles à $\boldsymbol{\alpha}$ forment une *projection parallèle en rayons X*. L'ensemble ω définit donc l'ensemble des directions de projection (ω peut être aussi appelée *l'ouverture (angulaire)* du scanner).

La condition d'Orlov [56] est une condition de reconstruction en géométrie 3D parallèle, et énonce qu'“une reconstruction exacte est possible si tout grand cercle de la sphère unité (cercle ayant pour centre l'origine et un rayon de longueur 1) intersecte ω ”.

Cette condition de reconstruction peut être comprise sous le prisme du théorème de la section centrale présentée section 2.1.2. Si la condition d'Orlov est satisfaite, en considérant une fréquence $\xi \in \mathbb{R}^3$ on peut trouver $\alpha \in \omega$ sur le grand cercle perpendiculaire à ξ . Il y a donc au moins une projection parallèle en rayons X pour laquelle la transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ peut être calculé avec le théorème de la section centrale. Ainsi, en calculant toutes les fréquences ξ puis en prenant la transformée de Fourier inverse on peut reconstruire une image.

2.1.3 Transformée de Radon 3D

Définition

De manière analogue à la transformée de Radon 2D (voir équation (1.2) chapitre 1), en considérant un plan¹ de normale α , à une distance r de l'origine, la transformée de Radon 3D s'exprime ainsi [48, II.1] :

$$\mathcal{R}_f(\alpha, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} \delta(\alpha \cdot \mathbf{x} - r) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\mathbf{y} \in \alpha^\perp} f(r\alpha + \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \alpha \in S^2 \quad (2.6)$$

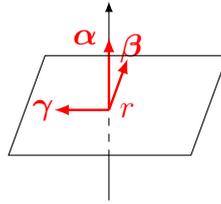


FIGURE 2.3 – L'intégrale de plan, de normale α , lors de la transformée de Radon, est réalisée selon le plan (β, γ) .

Avec les vecteurs unitaires de la figure 2.2, on peut paramétrer le plan considéré précédemment ainsi (voir figure 2.3) :

$$\Pi_{\phi, \theta, r} \stackrel{\text{déf}}{=} \{r\alpha_{\phi, \theta} + s\beta_{\phi, \theta} + t\gamma_{\phi, \theta} | (s, t) \in \mathbb{R}^2\} \quad (2.7)$$

La transformée de Radon 3D associée à ce plan s'écrit, comme pour l'équation (1.5) du chapitre 1 :

$$\mathcal{R}_f(\phi, \theta, r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(r\alpha_{\phi, \theta} + s\beta_{\phi, \theta} + t\gamma_{\phi, \theta}) ds dt \quad (2.8)$$

On remarquera qu'on peut se ramener à la géométrie 2D en supprimant l'intégration sur γ .

Comme en géométrie 2D, $p(\phi, \theta, \cdot)$ définit une projection parallèle : $p(\phi, \theta, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_f(\phi, \theta, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{R}_f(\alpha, r) \stackrel{\text{déf}}{=} p(\alpha, r) \stackrel{\text{déf}}{=} p_\alpha(r)$ (la notation $\alpha_{\phi, \theta}$ est simplifiée en α quand il n'y a pas d'ambiguïté).

1. Parfois appelé *plan de Radon*, et considéré comme *mesuré* si sa transformée de Radon associée est connue.

Théorème de la section centrale

De manière analogue à la géométrie 2D, le théorème de la section centrale s'applique [48, II.1] :

$$\hat{p}_\alpha(\rho) = \hat{f}(\rho\alpha) \quad (2.9)$$

La transformée de Fourier à gauche de (2.9) est 1D, celle à droite est 3D.

Rétroprojections filtrées

La formule de reconstruction par FBP est la suivante [48, II.2] :

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} p_F(\alpha, r)|_{r=\alpha \cdot \mathbf{x}} d\alpha \quad (2.10)$$

avec les projections filtrées

$$p_F(\alpha, r) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial^2}{\partial r^2} p(\alpha, r) \quad (2.11)$$

$$= -4\pi^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \rho^2 \exp(2\pi i \rho r) \hat{p}_\alpha(\rho) d\rho \quad (2.12)$$

L'équation (2.12) explicite le lien de la FBP avec le théorème de la section centrale équation (2.9). Il y a plusieurs façons de filtrer les projections. L'avantage de la formulation équation (2.11) est d'avoir, par les propriétés de la dérivée seconde, un filtre qui reste local. Si tous les plans passant par \mathbf{x} (et un voisinage pour pouvoir calculer les dérivées) sont mesurés, alors on peut reconstruire \mathbf{x} .

2.1.4 Remarque sur le problème intérieur 3D

Cas des transformées de Radon

Dans [48, VI.1, VI.4], le problème intérieur apparaît quand on connaît uniquement les transformées de Radon à travers une ROI sphérique contenue dans l'intérieur strict d'un objet, cela signifie que l'on sait la mesure de tous les plans intersectant la ROI. On peut donc calculer $\mu(\mathbf{x})$ avec l'équation (2.10) dans la ROI. En paraphrasant Natterer [48], on peut même généraliser : "l'inversion de la transformée de Radon est locale en dimension impaire" (II.2) ce qui a pour conséquence que "le problème intérieur est uniquement résoluble en dimension impaire" (VI.4).

Cas des transformées en rayons X

Dans [10], le problème intérieur est défini à partir des transformées en rayons X : on a acquis les mesures des intégrales de droite uniquement pour des lignes traversant une ROI sphérique dans l'intérieur strict d'un objet sphérique). Dans ce cas la ROI n'est généralement pas reconstituée (solution non unique).

2.2 Géométrie conique

2.2.1 Collimateurs, détecteurs et types de cônes

On s'intéresse à partir de maintenant à la géométrie conique (*cone beam* en anglais), géométrie 3D en rayons divergents analogue à la géométrie *fan beam* en 2D. Elle constituera la géométrie majoritairement étudiée dans cette thèse. Une source de rayons X seule

diffuse dans toutes les directions. Pour avoir un faisceau dirigé, la source est enfermée dans une boîte de plomb (le plomb atténue fortement les rayons X) avec une ouverture, l'ensemble étant qualifié de collimateur. En projection conique on considère souvent un collimateur à ouverture circulaire ou carrée, qui produira respectivement des faisceaux en cône de révolution ou en cône pyramidal (voir figure 2.4).



FIGURE 2.4 – S symbolise une source de rayons X. *Gauche* : Source collimatée avec détecteur. *Droite, haut* : Faisceau en cône pyramidal. *Droite, bas* : Faisceau en cône de révolution.

Il est nécessaire que la projection du faisceau sur le plan du détecteur soit contenue dans le détecteur.

Dans certains dispositifs on peut trouver un *collimateur dynamique* dont les dimensions de l'ouverture peuvent varier [62]. Les dimensions du faisceau dépendront alors de la source considérée.

2.2.2 Condition de Tuy

Introduction et énoncé

La condition de Tuy [75] est une condition de reconstruction, analogue à la condition d'Orlov (nous développons ce point sous-section 2.2.2), adaptée à la géométrie conique. On considère pour le moment une configuration sans troncation (c'est-à-dire que chaque ligne passant par une position de source et intersectant l'objet est mesurée. Davantage de développement sur cette notion de troncation en géométrie conique seront données section 2.2.5.).

Dans le cadre d'une reconstruction de région d'intérêt, sans troncation, on peut énoncer la condition de Tuy [75] sous cette forme :

Théorème 3. *Condition de Tuy. Une reconstruction stable d'une ROI est possible si chacun des plans contenant un point de la ROI intersecte la trajectoire de la source de manière non tangente.*

La condition de Tuy n'est pas vérifiée pour les trajectoires planes pour un objet 3D, comme la trajectoire circulaire (même si cette trajectoire est tout de même très utilisée, pour des reconstructions approchées mais de qualité satisfaisante, voir section 2.2.3).

Dans la littérature, une trajectoire (associé à un objet) respectant cette condition est parfois dite *complète* ou *suffisante*.

Résultat de Finch et conséquence pour les configurations avec troncations

D.Finch a montré par la suite que la condition de Tuy n'est pas seulement une condition suffisante, elle est aussi nécessaire à une reconstruction stable [27]. On notera en géométrie

conique la *région de Tuy* $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ la région pour laquelle, pour chaque point \mathbf{x} , tout plan passant par \mathbf{x} intersecte la trajectoire.

Pour résumer, sans troncation, une reconstruction stable d'une ROI est possible si et seulement si la condition de Tuy est satisfaite. Dans un cas avec troncation, une reconstruction n'est possible que si la condition de Tuy est vérifiée (la condition de Tuy est alors nécessaire mais non suffisante). Il paraît alors raisonnable d'étudier les reconstructions de ROI pour la région $\Omega_O \cap \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$, c'est-à-dire (l'enveloppe convexe de) l'objet appartenant à la région de Tuy. Pour rappel, Ω_O est le *support de l'objet*. Il a été défini chapitre 1 section 1.6, dans un contexte 2D, comme l'enveloppe convexe (de la fermeture) de l'ensemble des régions de densité non nulle, et cela s'adapte naturellement en 3D.

Lien entre résultat d'Orlov et de Tuy

On peut voir la géométrie parallèle 3D comme un cas particulier de la géométrie conique, pour des sources placées à l'infini. De même, la condition d'Orlov peut être considérée comme une forme spéciale de la condition de Tuy. S.Metzler *et al.*[47] montrent qu'en fait, la condition de Tuy (couplée avec le résultat de Finch) et la condition d'Orlov sont équivalentes.

2.2.3 Quelques bases de reconstruction analytique

Trajectoires de la source de rayons X en géométrie conique

Nous allons travailler avec la notion de trajectoire de la source de rayons X (abrégée en trajectoire). Nous adoptons la même construction que chapitre 1 section 1.2.2, à savoir définir une fonction \mathcal{S} , qui associe à un réel λ une position de la source :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} : \Lambda \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \lambda &\mapsto \mathcal{S}(\lambda) \end{aligned} \quad (2.13)$$

La notation \mathcal{S}_λ désignera $\mathcal{S}(\lambda)$. À partir de la fonction \mathcal{S} la trajectoire correspond à la courbe paramétrée définie par l'application de \mathcal{S} à Λ :

$$\mathcal{S}_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \{\mathcal{S}_\lambda | \lambda \in \Lambda\} \quad (2.14)$$

La fonction \mathcal{S} sera continue et différentiable par morceaux. On utilisera (surtout au chapitre 3) le terme de connexe quand Λ sera un intervalle de \mathbb{R} .

Projection conique

De manière analogue à la géométrie *fan beam*, la *transformée en rayon divergent* s'écrit :

$$\mathcal{D}f(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^{+\infty} f(\mathcal{S}_\lambda + l\boldsymbol{\eta}) dl, \lambda \in \Lambda, \boldsymbol{\eta} \in S^2 \quad (2.15)$$

La *projection en géométrie conique* $g(\lambda, \cdot)$ s'identifie à cette transformée :

$$g(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{D}f(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \quad (2.16)$$

Détecteur 3D et paramétrisation

Cette section s'inspire fortement d'une partie de la thèse de F.Noo [49]. Les détecteurs seront plan dans le cadre de notre étude, et seront représentés par un rectangle, contenu dans un plan Π_λ .

On associe au détecteur une base orthonormée $(\mathbf{e}_u, \mathbf{e}_v, \mathbf{e}_w)$ avec \mathbf{e}_u et \mathbf{e}_v deux vecteurs de Π_λ . De cette base on peut créer un repère du détecteur avec une origine nommée *point principal* O_λ , qui sera défini par la projection orthogonale de la source \mathbf{S}_λ sur le plan Π_λ (on a donc $\mathbf{e}_w = \frac{\mathbf{S}_\lambda - O_\lambda}{\|\mathbf{S}_\lambda - O_\lambda\|}$, voir figure 2.5). Cela fait sens dans les configurations qui nous intéressent, à savoir vérifiant les affirmations suivantes :

- O_λ est un point du détecteur ;
- Ω_O se place entre la source \mathbf{S}_λ et le détecteur et ne contient jamais O_λ ;
- l'orientation du détecteur dépend de λ à travers l'origine O_λ et le repère associé.

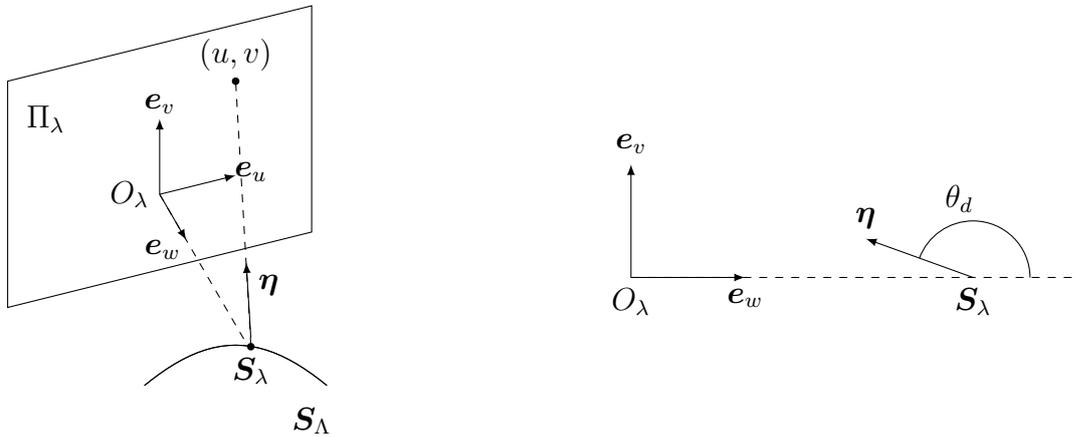


FIGURE 2.5 – Paramétrisation d'une projection conique sur un détecteur plan.

On note D_λ la distance source-détecteur ($D_\lambda = \|\mathbf{S}_\lambda - O_\lambda\|$). Le vecteur $\boldsymbol{\eta}$ de $g(\lambda, \boldsymbol{\eta})$ peut alors s'exprimer, avec les notations de la figure 2.5 :

$$\boldsymbol{\eta} = (u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v - D_\lambda\mathbf{e}_w) / \sqrt{u^2 + v^2 + D_\lambda^2} \quad (2.17)$$

On peut adapter la projection conique (équations (2.16) et (2.15)) avec les coordonnées détecteur :

$$g(\lambda, u, v) = \sqrt{u^2 + v^2 + D_\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{S}_\lambda + l(u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v - D_\lambda\mathbf{e}_w)) dl \quad (2.18)$$

Il apparaît un poids devant l'intégrale. En effet, l'intégration de f équation (2.15) se faisait suivant un vecteur unitaire. Le vecteur $u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v - D_\lambda\mathbf{e}_w$ n'étant en général pas unitaire, on peut le normer (sa norme étant $\sqrt{u^2 + v^2 + D_\lambda^2}$). Si comme dans (2.18), on choisit d'intégrer selon $u\mathbf{e}_u + v\mathbf{e}_v - D_\lambda\mathbf{e}_w$, il faut alors pondérer l'intégrale par sa norme.

Fonction intermédiaire et résultat de Grangeat

Les *fonctions intermédiaires (de Radon)* sont des fonctions principalement développées par H.K.Tuy, P.Grangeat et B.D.Smith (voir par exemple [9]), agissant sur la transformée de Radon tridimensionnelle, et utilisées pour faire un lien entre cette transformée et les projections coniques sur un détecteur. P.Grangeat utilise une approche par dérivée, différente de celle utilisée par B.D.Smith (par filtre rampe, donc moins locale). On appelle *résultat de Grangeat* l'égalité suivante ([19] sous cette forme, [32] pour la forme originelle utilisant les coordonnées détecteur) :

$$\underbrace{\int_{S^2} \delta'(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\eta}) g(\lambda, \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta}}_{G(\lambda, \boldsymbol{\alpha})} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R}_f(\boldsymbol{\alpha}, r) \right|_{r=\mathbf{S}_\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.19)$$

avec δ' la dérivée de la distribution de Dirac². La fonction G est appelée la fonction intermédiaire de Grangeat. L'idée est que la somme des intégrales de ligne sur un plan correspond (approximativement) à l'intégrale du plan.

Originellement, le résultat de Grangeat était exprimé avec des coordonnées détecteur (pour des détecteurs plan). Nous donnons les résultats suivants à partir de la thèse de F.Noo [49], qui lui même reprend (sous une forme légèrement différente) les travaux de P.Grangeat [32, 33].

Sans reprendre la démonstration, l'idée est d'introduire les coordonnées sinogrammes $(r_2(\boldsymbol{\alpha}), \phi_2(\boldsymbol{\alpha}))$ sur le détecteur (le 2 en indice signifiant que ce sont des coordonnées "2D"), pour la ligne $\bar{L}_{\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha})}$ (voir chapitre 1 section 1.1.1 pour les coordonnées sinogramme et les lignes en géométrie parallèle). La ligne $\bar{L}_{\phi_2, r_2}(\boldsymbol{\alpha})$ est définie comme l'intersection du plan du détecteur (pour une position de source \mathbf{S}_λ) et du plan passant par \mathbf{S}_λ et de normale $\boldsymbol{\alpha}$ (voir figure 2.6). La ligne $\bar{L}_{\phi_2, r_2}(\boldsymbol{\alpha})$ peut s'écrire :

$$\bar{L}_{\phi_2, r_2}(\boldsymbol{\alpha}) = \left\{ r_2(\boldsymbol{\alpha}) \begin{pmatrix} \cos \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \\ \sin \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\sin \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \\ \cos \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.20)$$

Avec les coordonnées sinogrammes on peut exprimer le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{D_\lambda \cos \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{e}_u + D_\lambda \sin \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{e}_v + r_2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{e}_w}{\sqrt{r_2(\boldsymbol{\alpha})^2 + D_\lambda^2}} \quad (2.21)$$

On peut également réécrire $G(\boldsymbol{\alpha}, \lambda)$ sous la forme $G(\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha}), \lambda)$:

$$G(\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha}), \lambda) = \frac{r_2(\boldsymbol{\alpha}) + D_\lambda^2}{D_\lambda^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(u \cos \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) + v \sin \phi_2(\boldsymbol{\alpha}) - r_2(\boldsymbol{\alpha})) \bar{g}(\lambda, u, v) du dv \quad (2.22)$$

avec la projection pondérée :

$$\bar{g}(\lambda, u, v) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{D_\lambda}{\sqrt{u^2 + v^2 + D_\lambda^2}} g(\lambda, u, v) \quad (2.23)$$

Sans reprendre les calculs complets, pour expliquer d'où provient l'équation (2.22), on peut préciser que :

$$d\boldsymbol{\eta} = J du dv \quad (2.24)$$

2. On peut se reporter à [11] pour plus d'éléments sur cette distribution. Par exemple on peut définir δ' à partir d'une fonction test $k : k'(0) = - \int_{-\infty}^{+\infty} k(s) \delta'(s) ds$.

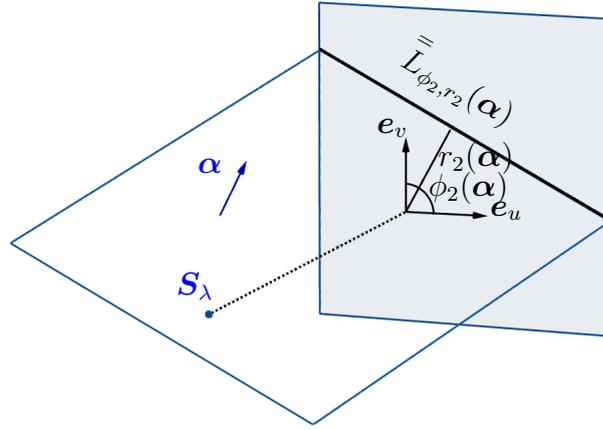


FIGURE 2.6 – La ligne $\bar{L}_{\phi_2, r_2}(\boldsymbol{\alpha})$ est l'intersection du plan passant par S_λ et de normale $\boldsymbol{\alpha}$ et du détecteur. Cette ligne est associée aux coordonnées sinogrammes $(r_2(\boldsymbol{\alpha}), \phi_2(\boldsymbol{\alpha}))$. Image inspirée de la figure 4.2 de [49].

avec le jacobien J :

$$J = \frac{D_\lambda}{(u^2 + v^2 + D_\lambda^2)^{3/2}} \quad (2.25)$$

La fonction intermédiaire de Grangeat s'écrit donc dans l'équation (2.22) comme une (dérivée d'une) intégrale de ligne de projection conique sur le détecteur. On peut la réécrire avec une transformée de Radon 2D \mathcal{R}_2 appliquée à une projection conique :

$$G(\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha}), \lambda) = -\frac{r_2(\boldsymbol{\alpha})^2 + D_\lambda^2}{D_\lambda^2} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R}_2 \bar{g}(\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha}), \lambda) \quad (2.26)$$

On retrouve le résultat originel de Grangeat [32] en liant les termes de droite des équations (2.26) et (2.19) :

$$\frac{r_2(\boldsymbol{\alpha})^2 + D_\lambda^2}{D_\lambda^2} \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R}_2 \bar{g}(\phi_2(\boldsymbol{\alpha}), r_2(\boldsymbol{\alpha}), \lambda) = \left. \frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R}_f(\boldsymbol{\alpha}, r) \right|_{r=S_\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.27)$$

Originellement, P.Grangéat [32, 33] a travaillé sur l'implémentation de cette méthode pour la trajectoire circulaire. F.Noo [49] a ensuite proposé des implémentations pour tout détecteur plan avec projections coniques.

Reconstruction par méthode de Grangeat et CB-FBP

Le résultat de Grangeat, équation (2.19) (section 2.2.3), permet une reconstruction en géométrie conique (quand les projections ne sont pas tronquées) d'un point \boldsymbol{x} en deux étapes :

1. Calcul de $\frac{\partial}{\partial r} \mathcal{R}_f(\boldsymbol{\alpha}, r)$, avec $r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{x}$ (dans un voisinage de \boldsymbol{x}), grâce au résultat de Grangeat

2. Utilisation de la FBP en dérivant (équation (2.11)) et rétroprojetant (équation (2.10))

On peut noter que pour utiliser le résultat de Grangeat équation (2.19), il est nécessaire de dériver la transformée de Radon en $r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}_\lambda$. Or pour la reconstruction avec l'équation (2.10) nous avons besoin de la dérivée (seconde) en $r = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$. La condition de Tuy (section 2.2.2) énonce en fait (de manière équivalente à notre formulation géométrique) que pour un point \mathbf{x} (de la région de Tuy) et un vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ donné, il existe $\mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_\Lambda$ tel que $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}_\lambda$. En effet le plan passant par \mathbf{x} et de normale $\boldsymbol{\alpha}$ est à une distance (signée) $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x}$ de l'origine. Ce plan intersecte \mathbf{S}_Λ en \mathbf{S}_λ car \mathbf{x} est dans la région de Tuy (ce plan est donc à une distance $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}_\lambda$ de l'origine) d'où $\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{S}_\lambda$.

L'article [19] (ainsi que [44] avec des notations différentes) montre qu'il est possible de traiter ces deux étapes en une seule formule et d'aboutir à la formule de reconstruction de type FBP³ en géométrie conique (CB-FBP) :

$$f(\mathbf{x}) = \int_{\Lambda} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|^2} g^* \left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|}, \lambda \right) d\lambda \quad (2.28)$$

avec

$$g^*(\tilde{\boldsymbol{\eta}}, \lambda) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \delta'(\tilde{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\eta}) G(\lambda, \boldsymbol{\eta}) W(\lambda, \boldsymbol{\eta}) d\boldsymbol{\eta} \quad (2.29)$$

et

$$W(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{|\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{S}'_\lambda|}{n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{S}_\lambda)} \quad (2.30)$$

avec enfin $n(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{S}_\lambda)$ le nombre d'intersections avec la trajectoire \mathbf{S}_Λ et le plan de normal $\boldsymbol{\eta}$ et de distance à l'origine $\boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{S}_\lambda$. Néanmoins d'autres normalisations sont possibles et parfois nécessaires, car l'application de la dérivée (δ') implique des contraintes de régularité sur W .

L'avantage de la CB-FBP est d'avoir un algorithme plus "fluide" avec un stockage des données réduit. En effet, contrairement à la méthode en deux étapes, il n'y a pas besoin de calculer et stocker des transformées de Radon (sous forme de matrice 3D) avant d'effectuer la rétroprojection. Le traitement des données devient séquentiel grâce en partie au poids W qui gère les redondances dans les projections coniques.

Enfin, on peut noter que l'article [44] de H.Kudo et T.Saito propose, également en 1994, une formule de reconstruction en géométrie conique sans troncation, dans le même "esprit" que la formule CB-FBP. Cette formule utilise les travaux de P.Grangéat mais également ceux de B.D.Smith [70].

Algorithme FDK

La méthode CB-FBP soit une formule de reconstruction exacte, assez polyvalente, car elle fonctionne pour les trajectoires vérifiant la condition de Tuy. Dans le cas d'une trajectoire circulaire :

$$\mathbf{S}_\Lambda = \{(R \cos \lambda, R \sin \lambda, 0) | \lambda \in \Lambda = [0, 2\pi[\} \quad (2.31)$$

l'algorithme FDK (du nom de ses créateurs L.A.Feldkamp, L.C.Davis, J.W.Kress) est plus adapté [26] [37, section 3.6]. La condition de Tuy n'est pas satisfaite en dehors du plan de

3. L'algorithme n'est pas "purement" FBP, à cause de la partie de filtrage se faisant uniquement via $W(\lambda, \boldsymbol{\eta})$.

la trajectoire circulaire. Dans ce plan, la reconstruction est exacte et la formule (2.32) est équivalente à la formule de reconstruction FBP en géométrie *fan beam* (on peut aussi voir l'algorithme FDK comme un cas particulier de l'algorithme CB-FBP). Plus on s'éloigne de ce plan et plus l'approximation est grande (car plus on s'éloigne et plus il manque des plans mesurés nécessaires à la reconstruction).

La formule de reconstruction de la méthode FDK peut-être formulée de la manière suivante [37, section 3.6] :

$$f_{FDK}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} M^2 \frac{R}{\sqrt{R^2 + u^2 + v_x^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} k_R(u_x - u) g(\lambda, u, v_x) du d\lambda \quad (2.32)$$

Le couple (u_x, v_x) représente les coordonnées de la projection de \mathbf{x} sur le détecteur, elles ont pour valeurs :

$$u_x \stackrel{\text{déf}}{=} M \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_u \quad (2.33)$$

$$v_x \stackrel{\text{déf}}{=} M \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_v \quad (2.34)$$

$$\text{avec } M \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{R}{R - \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_w} = \frac{\|\mathbf{S}_\lambda\|^2}{\|\mathbf{S}_\lambda\|^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}_\lambda} \quad (2.35)$$

La valeur M est appelée le *facteur d'amplification*, elle peut être vue comme le rapport (en valeur absolue) entre le cosinus de l'angle d'incidence du rayon sur le détecteur et la distance entre la source et le point considéré.

On rappelle que k_R est le filtre rampe, s'écrivant dans l'espace de Fourier :

$$\forall \rho \in \mathbb{R}, \widehat{k}_R(\rho) = |\rho|.$$

Cette formule s'applique dans le cas $D_\lambda = R$ avec un *détecteur virtuel*. Dans cette configuration on se ramène à un détecteur dont l'origine est confondue avec l'origine du repère galiléen (associé à $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$).

Beaucoup d'auteurs ont proposé des pistes d'amélioration pour l'algorithme FDK ou la configuration utilisée. Par exemple H.Kudo et T.Saito [45] expliquent qu'en rajoutant un bout de trajectoire au cercle (la trajectoire complète devenant $\mathbf{S}_\Lambda = \mathbf{S}_{\Lambda_1} \cup \mathbf{S}_{\Lambda_2}$, avec \mathbf{S}_{Λ_1} étant la trajectoire circulaire), l'information apportée est telle que les plans manquants ne posent plus problème (plus de détails section 2.2.5).

2.2.4 Méthode DBP en géométrie conique

La description de la méthode DBP en géométrie divergente (voir chapitre 1 section 1.5.4) reste globalement valable en 3D. Néanmoins il y a une grande différence entre l'utilisation de la DBP entre la géométrie 2D et la géométrie 3D résidant dans le nombre de cordes utilisables (nous rappelons qu'une corde est un segment liant deux positions de source d'une partie connexe d'une trajectoire). En effet, en géométrie 2D, on trouve une infinité de cordes pour chaque point (ce qui ne veut pas dire qu'on pourra forcément utiliser la méthode des cordes), alors qu'en géométrie 3D, pour un point donné, il peut ne passer qu'une corde, voire aucune. La présence des cordes pour une trajectoire donnée sera étudiée dans le chapitre suivant. À titre d'exemple, pour la trajectoire hélicoïdale (qu'on décrira section 2.2.5), sur un intervalle angulaire de 2π , pour un point donné de l'enveloppe convexe de la trajectoire, il existe une et une seule corde (appelée *ligne π*) passant à travers ce point (on trouve plusieurs démonstrations de ce résultat, une preuve géométrique est donnée dans [15]). Cela impose donc la méthode utilisée pour appliquer la DBP.

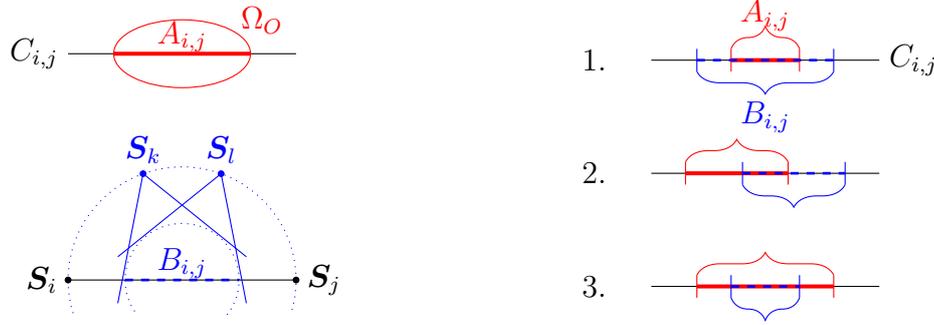


FIGURE 2.7 – Récapitulatif des différents cas d'inversion de la transformée de Hilbert pour la corde $C_{i,j}$ selon les positions relatives de $A_{i,j} = C_{i,j} \cap \Omega_O$ et $B_{i,j} = C_{i,j} \cap \text{FOV}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$ (deux cônes de lignes mesurées sont représentés, ils sont issus de \mathbf{S}_k et \mathbf{S}_l , deux positions de source de $\mathbf{S}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$). 1. : $A_{i,j} \subset B_{i,j}$: inverse de la transformée de Hilbert calculé de manière analytique [60]. 2. $A_{i,j} \cap B_{i,j} \neq \emptyset$, $B_{i,j} \setminus A_{i,j} \neq \emptyset$ et $A_{i,j} \setminus B_{i,j} \neq \emptyset$: transformée de Hilbert unilatérale, on peut inverser cette transformée numériquement [21]. 3. $B_{i,j} \subset A_{i,j}$: pas d'inversion de la transformée de Hilbert possible (dans la direction de $C_{i,j}$).

Nous disons qu'un point \mathbf{x} est vu par une source sur une (sous-)trajectoire $\mathbf{S}_{[\lambda_i, \lambda_j]} \subset \mathbf{S}_\Lambda$ si toute ligne passant par \mathbf{x} et $\mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$ est mesurée. Si on définit FOV_λ comme le cône représenté par l'ensemble des lignes mesurées issues de \mathbf{S}_λ (comme en 2D chapitre 1 section 1.3), alors dire que \mathbf{x} est vu par une source sur une (sous-)trajectoire $\mathbf{S}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$ signifie que $\mathbf{x} \in \text{FOV}_{[\lambda_i, \lambda_j]} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcap_{\lambda \in [\lambda_i, \lambda_j]} \text{FOV}_\lambda$.

Nous allons faire un rapide rappel des trois possibilités de reconstruction par méthode DBP, avec une approche un peu plus géométrique qu'au chapitre 1 (les méthodes décrites seront très utilisées au chapitre 5). On considère une trajectoire \mathbf{S}_Λ continue et connexe. Soit une corde $C_{\lambda_i, \lambda_j} \stackrel{\text{déf}}{=} C_{i,j}$ (reliant les sources \mathbf{S}_{λ_i} et \mathbf{S}_{λ_j}) passant par un point $\mathbf{x} \in \Omega_O$ tel que \mathbf{x} est vu par chaque source de $\mathbf{S}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$. Soit $A_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_O \cap C_{i,j}$ et $B_{i,j} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{FOV}_{[\lambda_i, \lambda_j]} \cap C_{i,j}$ ⁴. On peut alors envisager les trois cas de figure différents pour inverser la transformée de Hilbert en \mathbf{x} parallèlement à $C_{i,j}$ (voir figure 2.7, ces cas ont été introduits et détaillés au chapitre 1 sections 1.5.4, 1.5.5 et 1.7.3 et les notations utilisées en géométrie *fan beam* peuvent facilement être adaptées à la géométrie conique) :

1. $A_{i,j} \subset B_{i,j}$: c'est le cas idéal, premier à être traité dans l'histoire de la DBP, l'inverse de la transformée de Hilbert (en \mathbf{x}) peut être calculé de manière analytique (voir chapitre 1 équation (1.63) ou section 2.2.6 équation (2.51)).
2. $A_{i,j} \cap B_{i,j} \neq \emptyset$, $B_{i,j} \setminus A_{i,j} \neq \emptyset$ et $A_{i,j} \setminus B_{i,j} \neq \emptyset$: on sait depuis 2006 et [21] qu'il est possible de calculer numériquement un inverse stable pour $\mathbf{x} \in A_{i,j} \cap B_{i,j}$
3. $B_{i,j} \subset A_{i,j}$: c'est un cas qui se rapproche du problème intérieur, il n'est pas possible d'inverser la transformée de Hilbert sur la corde $C_{i,j}$

Les deux premiers cas peuvent donc être traités via ce qui a été introduit sous le nom de *méthode des cordes*. Ils proviennent de l'inversion de la transformée de Hilbert dans la direction $C_{1,2}$ portée par le vecteur $\boldsymbol{\eta}_{1,2} \stackrel{\text{déf}}{=} (\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2) / \|\mathbf{S}_1 - \mathbf{S}_2\|$, liée à la rétroprojection

4. A est un intervalle car le support Ω_O est convexe. $B_{i,j}$ est un intervalle car chaque cône de lignes mesurées FOV_λ est convexe, l'intersection des cônes $\text{FOV}_{[\lambda_i, \lambda_j]}$ est donc un convexe.

des dérivées de projections en géométrie divergente (voir chapitre 1 section 1.5.4 et plus particulièrement figure 1.16 pour l'interprétation géométrique)[15, 59] :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) = 2\pi\mathcal{H}_{\eta_{1,2}}f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in C_{1,2} \quad (2.36)$$

La rétroprojection des dérivées de projections $b_{1,2}(\mathbf{x})$ est quant à elle obtenue par la formule :

$$b_{1,2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} b_{\lambda_1, \lambda_2}(\mathbf{x}) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \boldsymbol{\eta}) \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|}} d\lambda \quad (2.37)$$

Comme nous l'avons souligné, contrairement à la géométrie 2D, il y a en géométrie 3D peu voire aucune flexibilité quant au choix de la corde. Le troisième cas ($B \subset A$), rendant impossible l'utilisation de la méthode des cordes peut apparaître souvent, notamment dans le cas de troncations importantes. La *méthode des lignes* M^5 est donc plus susceptible d'être utilisée. Néanmoins, son utilisation est plus délicate qu'en géométrie 2D. Nous rappelons que pour une ligne M $L_{\mathbf{x}, \lambda_M}$ issue d'une source $\mathbf{S}_{\lambda_M} \in \mathbf{S}_{[\lambda_1, \lambda_2]} \subset \mathbf{S}_\Lambda$ et portée par $\boldsymbol{\eta}_M \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda_M}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_{\lambda_M}\|}$, la méthode des lignes M s'appuie sur l'équation :

$$b_{1,M}(\mathbf{x}) + b_{2,M}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{déf}}{=} b_{1,2,M}(\mathbf{x}) = 2\pi\mathcal{H}_{\boldsymbol{\eta}_M}f(\mathbf{x}) \text{ avec } \mathbf{x} \in C_{1,2} \quad (2.38)$$

Nous introduisons $B_{\mathbf{x}, \lambda_M}$, que nous supposons pour des raisons de simplicité être un intervalle. Pour une ligne $L_{\mathbf{x}, \lambda_M}$ donnée, un point \mathbf{y} appartient à $B_{\mathbf{x}, \lambda_M}$ si :

- \mathbf{y} est sur $L_{\mathbf{x}, \lambda_M}$
- \mathbf{y} est traversée par une corde $C_{i', j'}$ telle que $\mathbf{S}_{\lambda_M} \in \mathbf{S}_{[\lambda_{i'}, \lambda_{j'}]}$;
- \mathbf{y} appartient à $\text{FOV}_{[\lambda_{i'}, \lambda_{j'}]}$

Pour pouvoir utiliser l'équation (2.38) et inverser la transformée de Hilbert associée, l'intervalle $B_{\mathbf{x}, \lambda_M}$ ne doit pas être inclus dans Ω_O ⁶. Deux configurations de ligne M sont données figure 2.8.

La méthode des cordes et la méthode des lignes M seront très utilisées dans le cadre de cette thèse. Cela permettra (entre autres choses) de donner des exemples concrets et d'explorer les utilisations et les limites de ces méthodes. Un arbre décisionnel pour la méthode DBP est donné figure 2.9.

2.2.5 Troncations de projections coniques

Trajectoires "axiales" et à base circulaire

Une projection associée à une source \mathbf{S}_λ est tronquée quand des lignes issues de \mathbf{S}_λ et intersectant l'objet à reconstruire ne sont pas mesurées. Pour certaines trajectoires, il est possible de caractériser ces troncations. Une sous-classe de ces trajectoires sera étudiée dans les deux derniers chapitres. Nous nous intéressons aux trajectoires *axiales*, pour lesquelles on peut définir un axe, la source étant en rotation autour de cet axe (et

5. Comme dit au chapitre 1, nous considérons la méthode des lignes M comme faisant partie de la méthode DBP, même si la DBP se restreint habituellement dans la littérature à la méthode des cordes.

6. L'idée est d'appliquer la méthode cordes à $L_{\mathbf{x}, \lambda_M}$, soit par inversion analytique [60] soit par inversion numérique [21].

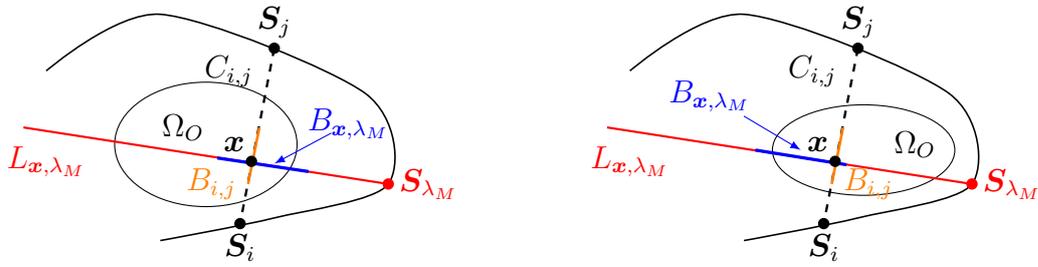


FIGURE 2.8 – Deux exemples d'utilisation d'une ligne M (en rouge) pour un point \mathbf{x} sur une corde $C_{i,j}$, avec une configuration vue de dessus. Dans ces deux cas on suppose que $B_{i,j}(= C_{i,j} \cap \text{FOV}_{[\lambda_i, \lambda_j]})$ est le segment orange. Il n'est pas possible d'utiliser la méthode des cordes pour reconstruire \mathbf{x} (car $B_{i,j} \subset \Omega_O$), la méthode des lignes M doit être employée (avec une inversion numérique de la transformée de Hilbert le long de la ligne M). On suppose que l'intervalle B_{x, λ_M} est le segment bleu. Il intersecte bien $\complement \Omega_O$ (le complément du support). Pour définir B_{x, λ_M} il faut s'assurer que chaque point \mathbf{y} de B_{x, λ_M} est traversé par $C_{i',j'}$ telle que $S_{\lambda_M} \in \mathcal{S}_{[\lambda_{i'}, \lambda_{j'}]}$, ce qui n'est pas évident pour des trajectoires 3D.

autour de l'objet). Par convention cet axe sera dirigé par \mathbf{e}_z . En considérant une fonction R continue et toujours strictement positive, on peut décrire ces trajectoires comme :

$$\mathcal{S}_\Lambda = \{R(\lambda) \cos \lambda, R(\lambda) \sin \lambda, Z(\lambda) | \lambda \in \Lambda\} \quad (2.39)$$

avec Λ un intervalle égal ou supérieur à 2π , et Z une fonction continue.

Parmi ces trajectoires, nous étudions surtout les trajectoires à *base circulaire*, où la fonction $R(\lambda)$ devient un rayon constant $R > 0$:

$$\mathcal{S}_\Lambda = \{R \cos \lambda, R \sin \lambda, Z(\lambda) | \lambda \in \Lambda\} \quad (2.40)$$

Un exemple de trajectoire à base circulaire est la trajectoire hélicoïdale, décrite dans la sous-section 2.2.5.

On considère que la source et le détecteur constituent un ensemble rigide en rotation autour de \mathbf{e}_z (la distance source-détecteur est donc constante) et l'orientation du détecteur est telle que $\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_z$ ⁷ (voir par exemple figure 2.10).

Introduction aux projections coniques tronquées axialement avec le problème de l'objet long

Historiquement, le fait que le corps humain soit (en général) bien plus haut que large, a créé un intérêt pour le *problème de l'objet long* (plus connu sous le nom de *long object problem* en anglais). En considérant l'axe du corps humain, le problème de l'objet long apparaît quand on tente de reconstruire une ROI bornée par deux coupes transaxiales avec une troncation (axiale) au-delà de ces coupes.

Concrètement, ce problème a été très étudié pour la *trajectoire hélicoïdale* (plus simplement appelée *hélice*, un exemple est donné figure 2.10). Cette trajectoire est particulièrement utilisée en géométrie conique, l'idée étant d'avoir un patient allongé avec une

7. Telles que nous les décrivons, les trajectoires à base circulaire sont bien plus adaptées aux scanners circulaires avec translation du lit du patient qu'au C-arm, adapté à des trajectoires supportées par une sphère et non un cylindre, et avec un détecteur en opposition à la source.

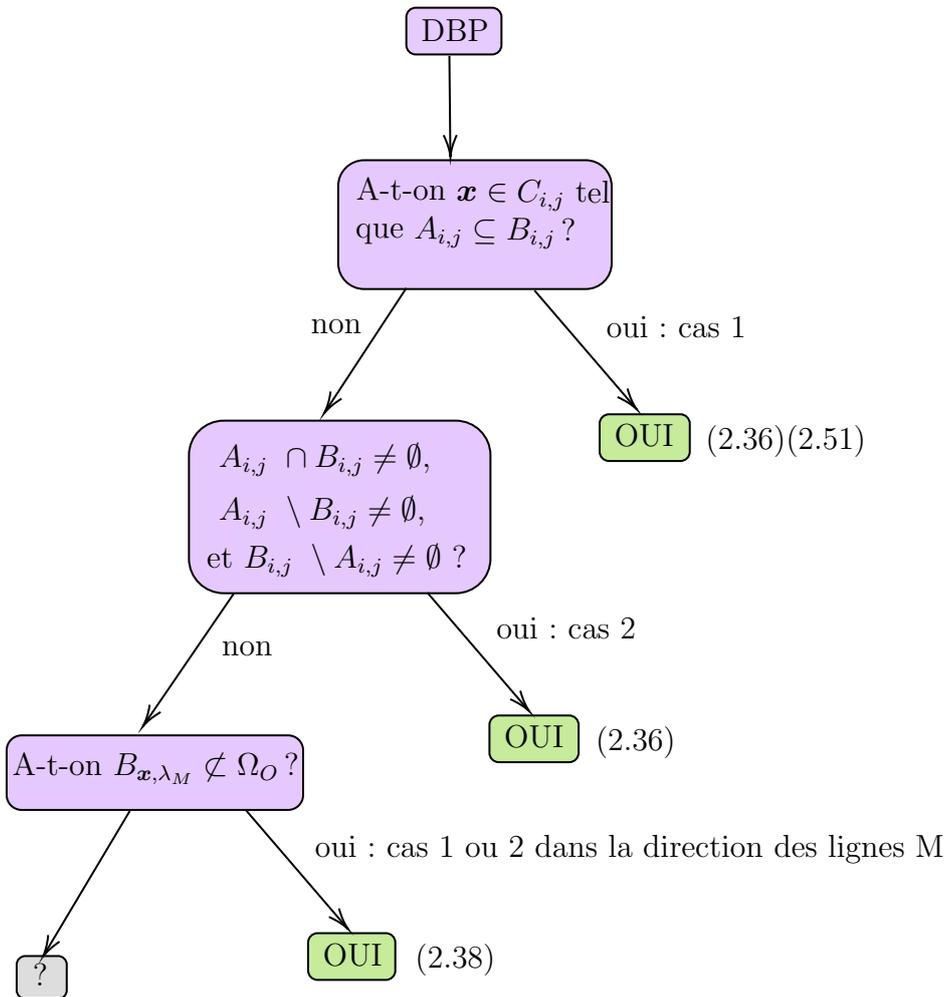


FIGURE 2.9 – **Est-il possible de reconstruire un point sur une corde ?** Récapitulatif des différents de cas de reconstruction pour un point d'un objet avec la méthode DBP. Cet arbre pourra être considéré comme la suite de celui de la figure 2.16. Le point considéré est donc sur une corde $C_{i,j}$. L'arbre répond à la question : est-il possible de reconstruire un point sur une corde ? Les réponses OUI correspondent à une utilisation de la méthode DBP, le point d'interrogation signifie qu'il n'y a actuellement pas de théorie pour dire si une reconstruction est possible. Les références permettant la construction de l'arbre sont (entre autres) [51, 59, 21]. Les appellations cas 1 et cas 2 réfèrent à la section 2.2.4. Enfin, nous pouvons rappeler que $A_{i,j} = C_{i,j} \cap \Omega_O$ et $B_{i,j} = C_{i,j} \cap \text{FOV}_{\lambda_i, \lambda_j}$. L'intervalle B_{x, λ_M} appartient à une ligne M L_{x, λ_M} , avec $\lambda_M \in [\lambda_i, \lambda_j]$, et on rappelle qu'un point y de L_{x, λ_M} appartient à B_{x, λ_M} s'il est traversé par une corde $C_{i', j'}$ telle que $S_{\lambda_M} \in S_{\lambda_{i'}, \lambda_{j'}}$ et $y \in \text{FOV}_{[\lambda_{i'}, \lambda_{j'}]}$.

source en rotation autour de lui, additionnée d'une translation le long du corps du patient (par exemple en déplaçant le lit). En notant p le pas de l'hélice, cette trajectoire se définit :

$$\mathcal{S}_\Lambda = \left\{ \left(R \cos \lambda, R \sin \lambda, \frac{p}{2\pi} \lambda \right) \mid \lambda \in \Lambda \right\} \quad (2.41)$$

Généralement, l'intervalle angulaire Λ de (2.41) est au moins de 2π .

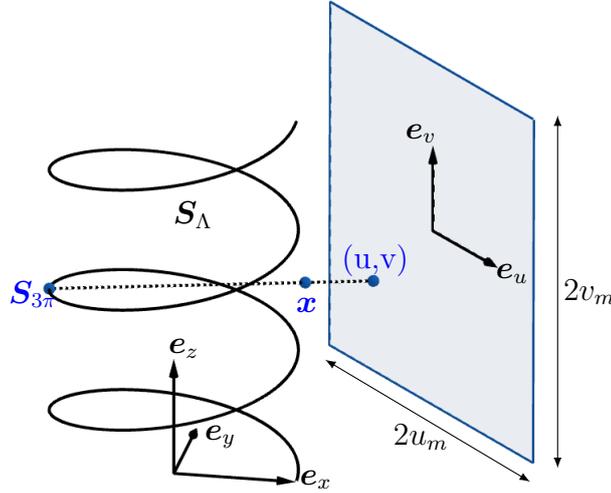


FIGURE 2.10 – Trajectoire hélicoïdale avec $\Lambda = [0, 6\pi[$. Un rayon issu de $\mathcal{S}_{3\pi}$ traverse le point x et frappe le détecteur en (u, v) , coordonnées du détecteur de dimensions $2u_m \times 2v_m$.

Troncations du point de vue détecteur

Pour les trajectoires axiales, les troncations en géométrie conique peuvent être décrites en termes de coordonnées détecteur. On reprend la paramétrisation de la figure 2.5 et on considère que le détecteur a un axe e_v parallèle à e_z et a pour dimensions $2u_m$ et $2v_m$: $|u| \leq u_m$ et $|v| \leq v_m$ (voir par exemple figure 2.10). Les projections sont non tronquées si toute droite passant par une position de source et intersectant l'objet intersecte aussi le détecteur (dans une position correspondante à la position de source considérée). Si v_m est trop petit pour que les projections soient non tronquées (le détecteur n'est pas assez haut), alors on parle de *truncations axiales*. Si u_m est trop petit pour que les projections soient non tronquées (le détecteur n'est pas assez large), alors on parle de *truncations transverses* ou de *truncations transaxiales*. Il est bien sûr possible de combiner ces deux types de troncations, mais les troncations axiales restent majoritaires, et bien plus étudiées dans la littérature, à cause des proportions du corps humain (voir section 2.2.5).

FOV pour les trajectoires à base circulaire

Il est plus délicat (et souvent moins pertinent) de parler de FOV pour les trajectoires en géométrie 3D, en comparaison à la géométrie 2D. Nous tentons quand même de définir un FOV cylindrique pour les trajectoires à base circulaire. Pour définir la base de ce cylindre, on peut reprendre l'idée utilisée dans [15], à savoir considérer la projection de la

trajectoire sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, c'est-à-dire un cercle. On retrouve alors la configuration *fan beam* standard (avec une trajectoire circulaire complète), et la base du FOV sera définie par le cercle pour lequel chaque projection est tangente (voir figure 2.11).

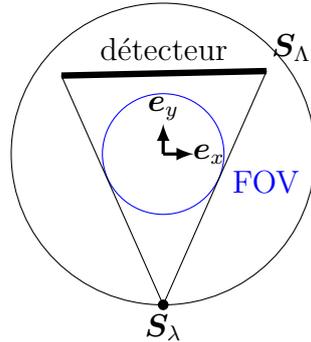


FIGURE 2.11 – Base d'un FOV cylindrique pour une trajectoire à base circulaire.

Il reste à définir la hauteur du FOV.

Cas des trajectoires fermées Dans le cas où \mathbf{S}_λ est fermée, c'est-à-dire où Z est une fonction de période 2π , on peut considérer qu'un point du FOV doit être vu par toutes les sources du détecteur. Cela rejoint la définition donnée au chapitre 1 pour la géométrie 2D, à savoir qu'un point appartient au FOV s'il est contenu dans le cône de lignes mesurées (c'est-à-dire intersectant une source et le détecteur) de chaque source de la trajectoire. Nous utiliserons cette définition au chapitre 5. Cette définition fait sens uniquement si le détecteur est axialement aussi étendu que la trajectoire (ou du même ordre). De plus, le FOV défini ainsi n'est pas vraiment un cylindre (à cause de ses extrémités non plates, voir figure 2.12 pour le cas de la trajectoire circulaire). Si pour des raisons de simplicité on souhaite considérer un FOV cylindrique, on peut travailler avec le plus grand cylindre contenu dans le FOV (c'est-à-dire le cylindre le plus haut tel que les extrémités plates du cylindres soient dans le FOV).

Cas de la trajectoire hélicoïdale Dans [15], le FOV est choisi aussi grand (étendu axialement) que l'objet. Pour une configuration plus générale, nous proposons d'introduire la *fenêtre de Tam*, utilisée habituellement comme condition de reconstruction dans les trajectoires hélicoïdales (sans avoir besoin de la notion de FOV). Pour chaque position de source \mathbf{S}_λ , le détecteur doit être au moins aussi étendu que la fenêtre de Tam [74], définie par la région délimitée par la projection de la sous-trajectoire $\mathbf{S}_{[\lambda-2\pi, \lambda+2\pi]}$ (plus de détails et une illustration sont par exemple donnés dans [93]). La trajectoire hélicoïdale est à base circulaire, pour définir sa hauteur nous proposons de noter $\mathbf{S}_{\lambda_{\min}}$ (resp. $\mathbf{S}_{\lambda_{\max}}$) la position de source minimale (resp. maximale) telle que la condition de Tam soit respectée (en supposant que cette condition est satisfaite pour chaque $\mathbf{S}_\lambda \in [\mathbf{S}_{\lambda_{\min}}, \mathbf{S}_{\lambda_{\max}}]$). La hauteur du FOV peut alors être définie par la différence d'"altitude" entre $\mathbf{S}_{\lambda_{\min}}$ et $\mathbf{S}_{\lambda_{\max}}$, c'est-à-dire $(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) \frac{p}{2\pi}$.

Néanmoins, nous pouvons définir un FOV cylindrique pour la trajectoire hélicoïdale comme le plus grand cylindre dont chaque point vérifie la condition axiale de Tam (c'est-à-dire que le détecteur est au moins aussi étendu axialement que la fenêtre de Tam).



FIGURE 2.12 – Vue de dessus (*gauche*) et coupe axiale (*droite*) d'un FOV (en blanc, en définissant le FOV comme l'intersection pour chaque source des cônes de lignes de mesurées émis) d'une trajectoire circulaire avec 30 projections coniques. Pour obtenir ces images, on rétroprojette les projections dans un volume constant (par exemple dans ce cas, tous les voxels du volume valent 1, et après la rétroprojection le FOV peut être défini par les voxels valant le nombre de projections, donc 30 ici). En rouge est dessiné le plus grand cylindre contenu dans ce FOV. Il peut être utile pour définir un FOV cylindrique. Les projections et le calcul du FOV ont été obtenu grâce à la bibliothèque RTK [63]

Troncations du point de vue FOV

Les limites dimensionnelles du détecteur impactent directement le FOV. En considérant une trajectoire à base circulaire, avec le FOV et le support de l'objet Ω_O cylindriques, on peut illustrer les différents cas de troncation sur la figure 2.13.

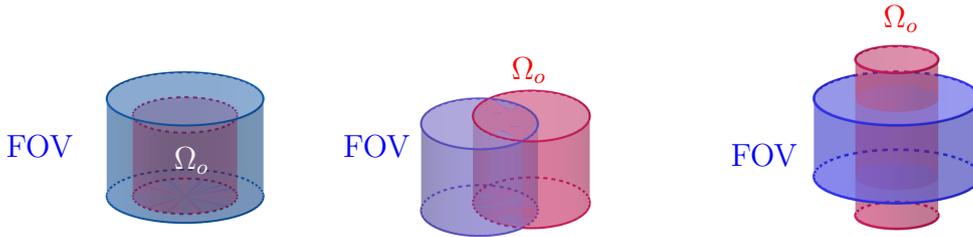


FIGURE 2.13 – *Gauche* : Le support de l'objet Ω_O est entièrement contenu dans le FOV, il n'y a pas de troncation. *Milieu* : Troncations transverses (ou transaxiales). *Droite* : Le support de l'objet cylindrique Ω_O dépasse axialement le FOV, les troncations sont axiales.

Introduction aux méthodes de reconstruction adaptées aux projections tronquées

Les méthodes de type Grangeat décrites précédemment sont en pratique mal adaptées aux troncations. Il manquera souvent des plans pour appliquer la formule de Grangeat lors de troncations. F.Noo décrit dans sa thèse [49](section 5.3) un algorithme adapté pour des trajectoires $\mathcal{S}_\Lambda = \mathcal{S}_{\Lambda_1} \cup \mathcal{S}_{\Lambda_2}$, avec \mathcal{S}_{Λ_1} une trajectoire circulaire, avec des troncations axiales. Pour cela il se base sur la *méthode hybride* développée (appelée *algorithme composite* dans sa thèse) de H.Kudo et T.Saito[45]. Sans donner tous les éléments, on peut préciser que la méthode FDK peut être vue comme un cas limite de la méthode CB-FBP (avec un poids constant)(section 2.2.3). Les plans non mesurés lors de l'utilisation de la méthode FDK forment une partie de l'espace appelée *zone d'ombre de Grangeat*. S'ils intersectent une ROI (pas trop étendue axialement) ces plans sont globalement horizontaux. Pour reconstruire une ROI il faut alors rajouter une sous-trajectoire (par exemple

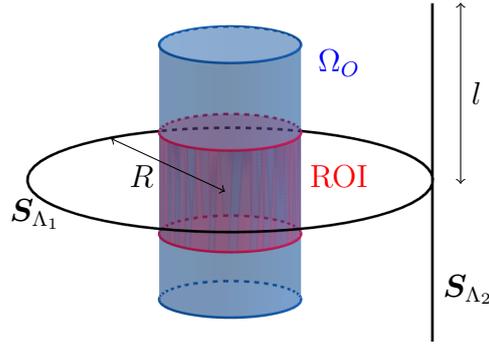


FIGURE 2.14 – Une trajectoire constituée d’une sous-trajectoire circulaire \mathbf{S}_{Λ_1} et d’une sous-trajectoire \mathbf{S}_{Λ_2} sous forme d’un segment vertical (orthogonal au cercle). Le cylindre (représentant l’objet) peut être axialement infini et donc provoquer des trajectoires tronquées. La ROI est néanmoins reconstructible. (La figure est inspirée de [45])

un segment vertical comme décrit dans [45], comme sur la figure 2.14) pour mesurer ces plans manquants (avec la méthode CB-FBP). On peut par exemple décrire ces deux sous-trajectoires par :

$$\mathbf{S}_{\Lambda_1} = \{(R \cos \lambda, R \sin \lambda, 0) | \lambda \in [0, 2\pi[= \Lambda_1\} \quad (2.42)$$

$$\mathbf{S}_{\Lambda_2} = \{(R, 0, \lambda - l - 2\pi) | \lambda \in [2\pi, 2\pi + 2l] = \Lambda_2\} \quad (2.43)$$

avec $l, R > 0$.

D’autres idées sont apparues au début du XXI^e siècle, pour développer des méthodes de reconstruction plus flexibles. Nous parlerons à la fin du chapitre 5 (section 5.7) de formules de reconstruction développées en partie par A.Katsevich et permettant des troncations axiales. Néanmoins, les méthodes de Katsevich et la méthode décrite ci-dessous sont très proches et partagent la même idée, à savoir que la formule de reconstruction utilise des familles de lignes filtrées sur un détecteur, ces familles de lignes pouvant être en partie choisies. Nous présentons quelques éléments d’une méthode décrite dans [50, chapitre 13], initiée en 2002 et qui a par exemple été utilisé pour la trajectoire selle⁸ [60].

L’idée est de ne plus travailler avec la fonction de Grangeat G équation (2.19), pour ensuite connaître \mathcal{R}'_f , puis \mathcal{R}''_f et enfin f , mais directement avec la fonction G' [50] (équation (13.48)) appelée fonction de Grangeat dérivée ou modifiée :

$$G'(\lambda, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} G(\lambda, \boldsymbol{\alpha}) = \int_{S^2} \delta'(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\theta}) \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \boldsymbol{\theta}) d\boldsymbol{\theta} \quad (2.44)$$

L’équivalent du résultat de Grangeat équation (2.19) peut alors s’écrire :

$$-\frac{\partial^2}{\partial r^2} \mathcal{R}_f(\boldsymbol{\alpha}, r) \Big|_{r=\mathbf{S}_\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}} = \frac{G'(\lambda, \boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{S}'_\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}} \quad (2.45)$$

Ainsi, on obtient directement \mathcal{R}''_f . On peut alors exhiber une formule de reconstruction [50, équations 13.60 et 13.62] [60] :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Lambda(\mathbf{x})} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|} g_F(\mathbf{x}, \lambda, \boldsymbol{\eta}) \Big|_{\boldsymbol{\eta} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|}} d\lambda \quad (2.46)$$

8. Nous ne décrivons pas ici la trajectoire selle mais elle sera largement étudiée dans les prochains chapitres, notamment à partir du chapitre 4.

$$g_F(\mathbf{x}, \lambda, \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{S^2} \frac{1}{\tilde{n}(\lambda, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})} \text{sgn}(\mathbf{S}'_\lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}) \delta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\eta}) G'(\lambda, \boldsymbol{\alpha}) d\boldsymbol{\alpha} \quad (2.47)$$

Le poids $\tilde{n}(\lambda, \boldsymbol{\alpha})$ est le nombre d'intersections entre la trajectoire \mathbf{S}_Λ et le plan contenant \mathbf{S}_λ et \u00e9tant orthogonal \u00e0 $\boldsymbol{\alpha}$. Les \u00e9quations (2.46) et (2.47) sont proches de celles pour la m\u00e9thode CB-FPB \u00e9quation (2.28). Certains changements sont mineurs (carr\u00e9 ou non pour le terme $\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|$, une valeur absolue qui devient une fonction signe...) mais d'autres sont importants. Par exemple, ici la r\u00e9troprojection se fait sur $\Lambda(\mathbf{x})$, qui correspond \u00e0 une sous-trajectoire telle que tous les plans passant par \mathbf{x} intersecte cette sous-trajectoire⁹. Autre point, le poids W de la CB-FBP \u00e9quation (2.29) \u00e9tait soumis \u00e0 une d\u00e9rivation (via δ'), ce qui pouvait impliquer des contraintes de r\u00e9gularit\u00e9, ce probl\u00e8me n'appara\u00eet plus ici.

L'objectif ici est de donner quelques pistes pour comprendre comment cette m\u00e9thode peut permettre des troncations axiales. Cela se fait en partie par un gros travail de r\u00e9\u00e9criture de g_F [50, sections 13.4.2 et 13.4.3] dont nous extrayons quelques \u00e9tapes¹⁰. Premièrement, en notant que l'int\u00e9gration de l'\u00e9quation (2.47) sur la sph\u00e8re unit\u00e9 correspond en fait \u00e0 une int\u00e9gration sur un cercle, le terme $\delta(\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\eta})$ n'\u00e9tant non nul (et \u00e9gal \u00e0 1) que pour $\boldsymbol{\alpha}$ orthogonal \u00e0 $\boldsymbol{\eta}$. Ainsi, en param\u00e9trisant ce cercle par un angle ψ , on peut d\u00e9finir une famille de vecteurs $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(\psi, \lambda)$ appartenant au plan orthogonal \u00e0 $\boldsymbol{\eta}$, et r\u00e9\u00e9crire une premi\u00e8re fois g_f :

$$g_F(\lambda, \mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{\text{sgn}(\cos \psi)}{\tilde{n}(\lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\psi, \lambda), \mathbf{x})}}_{\tilde{W}_1(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}})} G'(\bar{\boldsymbol{\alpha}}(\psi, \lambda), \lambda) d\psi \quad (2.48)$$

Du poids $\tilde{W}_1(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ on tire un autre "poids" : $\tilde{W}_2(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} 2 \frac{\partial \tilde{W}_1(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}})}{\partial \psi}(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$. Cela permet une nouvelle r\u00e9\u00e9criture de g_F :

$$g_F(\lambda, \mathbf{x}) = \int_0^\pi \tilde{W}_2(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}}) g_H(\lambda, \psi, \mathbf{x}) d\psi \quad (2.49)$$

avec

$$g_H(\lambda, \psi, \mathbf{x}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \int_{-\pi}^\pi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \cos \theta \tilde{\boldsymbol{\eta}} + \sin \theta \tilde{\boldsymbol{\beta}}) d\theta \quad (2.50)$$

avec $\tilde{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|}$ et $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ un vecteur que nous n'explicitons pas ici, mais qui est orthogonal \u00e0 $\tilde{\boldsymbol{\eta}}$ et d\u00e9pendant de ψ .

La fonction g_H d\u00e9finit en fait l'int\u00e9gration d'une ligne sur le d\u00e9tecteur. Plus pr\u00e9cis\u00e9ment, cette ligne, d\u00e9pendant de λ , \mathbf{x} et ψ , est d\u00e9finie par l'intersection du plan contenant \mathbf{x} , \mathbf{S}_λ et $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ et le d\u00e9tecteur. La fonction $\tilde{W}_1(\psi, \lambda, \bar{\boldsymbol{\alpha}})$ pouvant souvent \u00eatre constante (pour une projection donn\u00e9e) presque partout, g_F \u00e9quation (2.49) peut en fait se r\u00e9\u00e9crire comme une somme pond\u00e9r\u00e9e de lignes filtr\u00e9es (via g_H). L'int\u00e9r\u00eat est de jouer avec le poids et $\Lambda(\mathbf{x})$ pour que les lignes s\u00e9lectionn\u00e9es sur le d\u00e9tecteur soient assez horizontales pour qu'il n'y ait pas de troncations axiales (les ordonn\u00e9es minimale et maximale des points de ces lignes sur le d\u00e9tecteur sont dans l'intervalle $[-v_m, v_m]$).

9. Par exemple, si $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{S}_\lambda}$ on peut choisir $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda$. Si \mathbf{x} est sur une corde $C_{i,j}$ on peut choisir $\Lambda(\mathbf{x}) = [\lambda_i, \lambda_j]$.

10. Nous invitons le lecteur \u00e0 s'y r\u00e9f\u00e9rer pour tous les d\u00e9tails techniques, l'objectif ici \u00e9tant de donner les grandes lignes pour passer d'une formule proche de la CB-FBP avec une fonction de Grangeat modifi\u00e9e, \u00e0 filtrer des lignes sur le d\u00e9tecteur assez horizontales pour permettre des troncations axiales.

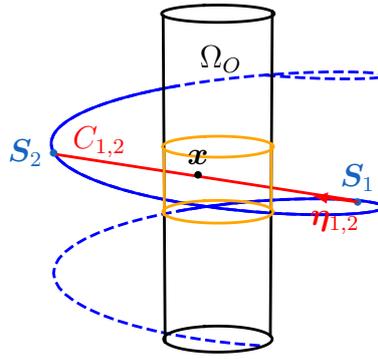


FIGURE 2.15 – Hélice $\mathcal{S}_{[0,4\pi]}$ avec une corde (ligne π car $\lambda_2 - \lambda_1 < 2\pi$, la ligne pleine représente $\mathcal{S}_{[\pi,3\pi]}$) $C_{1,2}$ à travers un point \mathbf{x} de la ROI (en orange). Le point \mathbf{x} peut être reconstruit par méthode DBP.

Remarque Dans les dernières étapes la fonction dérivée de Grangeat n'apparaît plus explicitement. Ce cheminement sera repris au chapitre 5 section 5.7 avec par exemple des explications et applications sur le choix des familles de lignes.

2.2.6 Exemple (historique) de l'utilisation de la DBP en géométrie conique pour la trajectoire hélicoïdale

La méthode DBP est une solution possible au problème de l'objet long pour la trajectoire hélicoïdale [93]. Nous considérons que la condition de la fenêtre de Tam est satisfaite. Pour pouvoir utiliser la méthode DBP, chaque point de la ROI doit être traversé par une corde, et nous rappelons qu'il existe une unique ligne π pour chaque point de l'enveloppe convexe de l'hélice. Plus précisément, pour un point \mathbf{x} de coordonnée axiale $p\lambda/(2\pi)$, il existe une corde $C_{1,2}$ passant par \mathbf{x} et reliant \mathcal{S}_1 à \mathcal{S}_2 , avec $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{S}_{[\lambda-\pi, \lambda+\pi]}$ (voir figure 2.15).

Sans troncation transverse, l'équation (2.36) peut être utilisée pour calculer la transformée de Hilbert $\mathcal{H}_{\mathbf{n}_{1,2}}f(\mathbf{x})$. Enfin, tel qu'expliqué plus largement dans le chapitre 1 section 1.5.4, cette transformée de Hilbert peut être inversée par ¹¹ :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{-1}{\sqrt{-h_1 h_2}} \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{(h-h_1)(h_2-h)} \frac{\mathcal{H}_{\mathbf{n}_{1,2}}f(\mathbf{x} - h\boldsymbol{\eta}_{1,2})}{\pi h} dh + K \quad (2.51)$$

avec par exemple $K = \frac{1}{\pi\sqrt{-h_1 h_2}} g(\lambda_1, \boldsymbol{\eta}_{1,2})$ et h_1, h_2 tels que $B_{12} = [\mathbf{x} + h_1\boldsymbol{\eta}_{1,2}, \mathbf{x} + h_2\boldsymbol{\eta}_{1,2}]$ (voir section 2.2.4 pour la définition de B_{12}).

Enfin, il est possible de rajouter des troncations transverses à cette configuration, en utilisant la méthode des lignes M (voir section 2.2.4, c'est l'objet de l'article [15]).

11. Nous rappelons à titre informatif que cette formule n'était pas connu du monde de la tomographie lors de l'écriture de [93], même si cela était connu au moins dans le monde mathématique depuis les années 1930 [72].

2.2.7 Récapitulatif (non exhaustif) des méthodes de reconstructions en géométrie conique

À la lumière des méthodes que nous avons partiellement présentées, nous donnons un bilan (très partiel) des stratégies de reconstruction analytique en géométrie conique à adapter selon la configuration, sous forme d'arbre (figure 2.16).

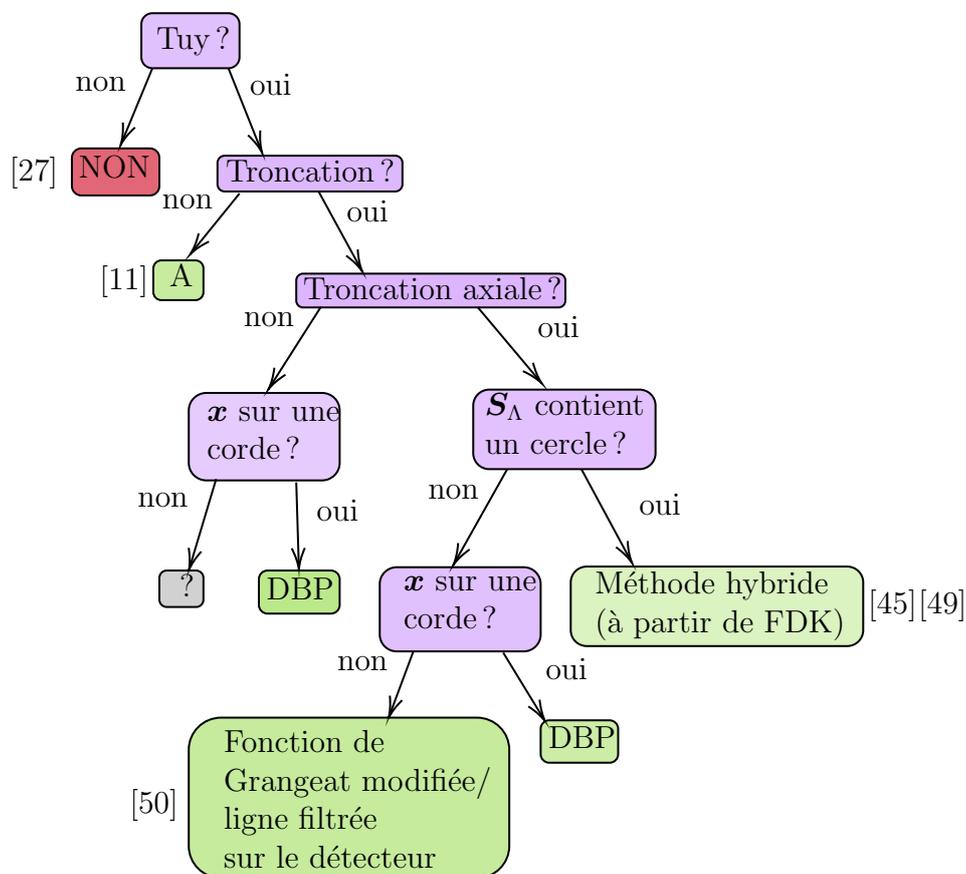


FIGURE 2.16 – **Peut-on avoir une reconstruction exacte et avec quelles méthodes ?** Récapitulatif (non exhaustif) des différents cas de reconstruction d'une ROI dans un objet. *Tuy* signifie que l'objet (ou la ROI) satisfait la condition de Tuy pour une trajectoire donnée. L'arbre de décision répond à la question : peut-on avoir une reconstruction exacte (pour un point et une trajectoire donnée) ? et si oui, avec quelles méthodes ? Le point d'interrogation signifie qu'il n'y a pas de méthode de reconstruction analytique connue dans ce cas, et que nous ne savons pas si une reconstruction exacte est possible ou non (et nous retrouverons ce point aveugle plus tard dans la thèse). L'arbre est continué à partir du nœud DBP figure 2.9. Enfin, le texte du nœud A est : "Méthodes de reconstruction variées de la transformée de Radon 3D développées à partir de/basées sur la formule d'inversion de Tuy[75], le résultat de Grangeat[32] ou de Smith[70]" .

Remarque La méthode DBP permet d'avoir davantage de troncations, même axiales, que les méthodes de filtrage 1D sur le détecteur (voir section 2.2.5) ([93] pour le cas de la trajectoire hélicoïdale).

Remarque Parfois les méthodes présentées demandent plus de conditions que ce que l'arbre dit. De plus, des méthodes différentes sont parfois groupées, alors qu'il peut y avoir

des différences d'utilisation entre elles. Par exemple nous verrons (brièvement) au chapitre 5 section 5.7 que les méthodes de filtrage 1D sur le détecteur ont évolué ([6], [58]...), par exemple pour utiliser des familles de lignes filtrées moins complexes (et donc permettre plus de troncations). On peut aussi citer le fait que pour la trajectoire selle, [60] utilise en 2004 la méthode de Grangeat modifiée pour des points \boldsymbol{x} appartenant à des cordes (on rappelle que cela est une possibilité de définir l'intervalle de rétroprojection $\Lambda(\boldsymbol{x})$ pour cette méthode). On a donc expliqué 2.2.5 que cette méthode pouvait être ramenée à un filtrage de lignes sur le détecteur, et [79] a repris le cas de la trajectoire selle en montrant que l'existence de cordes n'était pas nécessaire pour une reconstruction avec troncations axiales.

Chapitre 3

Trajectoires et union des cordes

3.1 Union des cordes et trajectoire recouvrable par cordes

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la méthode DBP semble particulièrement intéressante pour la reconstruction de ROI avec projections coniques tronquées. Cette méthode est indissociable de la notion de corde¹. On rappelle qu'une corde est un segment liant deux positions de source d'une trajectoire continue et connexe (par exemple la corde C_{λ_1, λ_2} relie les positions de source \mathbf{S}_{λ_1} et \mathbf{S}_{λ_2}) et peut se paramétrer ainsi :

$$C_{\lambda_1, \lambda_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{x} = t\mathbf{S}_{\lambda_1} + (1-t)\mathbf{S}_{\lambda_2}, t \in [0, 1]\} \quad (3.1)$$

En effet un point ne peut être reconstruit par la méthode DBP que s'il est sur une corde (c'est une condition nécessaire mais non suffisante, voir chapitre 2 section 2.2.4). Il est donc intéressant de savoir, pour une trajectoire donnée \mathbf{S}_Λ , au sein de la région de Tuy $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ (pour laquelle pour chaque point \mathbf{x} , chaque plan passant par \mathbf{x} intersecte \mathbf{S}_Λ), quels points $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ sont sur des cordes.

On introduit alors l'*union des cordes* d'une trajectoire \mathbf{S}_Λ , qui est une définition assez intuitive :

$$C_{\mathbf{S}_\Lambda} \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2} C_{\lambda_1, \lambda_2} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 | \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2, \mathbf{x} \in C_{\lambda_1, \lambda_2}\} \quad (3.2)$$

Un des objectifs de ce chapitre est la construction de tels ensembles, ce qui permettra par exemple de donner des indices sur l'intérêt de l'utilisation de la méthode DBP pour une trajectoire donnée. Néanmoins, on abandonne globalement dans ce chapitre les considérations tomographiques concernant les méthodes de reconstruction et la faisabilité des trajectoires considérées pour adopter un point de vue surtout géométrique.

On peut définir l'enveloppe convexe d'une trajectoire 3D comme la plus petite région convexe² de l'espace contenant cette trajectoire. Nous ne nous intéresserons qu'à des trajectoires telles que la région de Tuy et l'enveloppe convexe désignent les mêmes régions, soit généralement des trajectoires continues, connexes et bornées (le fait que $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda} = \text{conv}(\mathbf{S}_\Lambda)$ pour de telles trajectoires en 3D est énoncé dans [27], sa version 2D étant évoquée chapitre 1 1.6.3), et nous pouvons donc noter $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ cette enveloppe convexe. Une corde est donc toujours contenue dans l'enveloppe convexe d'une trajectoire donnée (par définition d'un

1. D'autres méthodes de reconstruction nécessitent aussi des cordes.
2. Un segment reliant deux points d'une région convexe appartient à cette région.

convexe) et on aura l'inclusion $C_{S_\Lambda} \subset \Omega_{S_\Lambda}$. Les trajectoires “optimales” pour la méthode DBP paraissent donc être des trajectoires vérifiant $C_{S_\Lambda} = \Omega_{S_\Lambda}$, que l'on appellera trajectoires *recouvrables par cordes* (RC).

Définition 7. Une trajectoire S_Λ est recouvrable par cordes³ si par tout point de l'enveloppe convexe Ω_{S_Λ} de S_Λ passe une corde de S_Λ .

Par extension, nous appellerons une région (du plan ou de l'espace) dont tout point est traversé par une corde une région recouvrable par cordes (RC).

3.2 Quelques exemples de la littérature

On peut, dans la littérature, trouver un certain nombre de trajectoires vérifiant le fait d'être recouvrable par cordes. Les trajectoires que nous considérons sont dessinées figure 3.1 (on cite entre parenthèses soit la première évocation de la trajectoire, soit l'article analysant l'union des cordes de cette trajectoire) :

1. hélice (plusieurs articles donnent une démonstration que cette trajectoire est RC, dont [17]);
2. cercle + ligne;
3. selle⁴ (trajectoire définie dans le cadre général et résultat prouvé dans [60]);
4. 2 cercles + ligne (première évocation dans [73] et étude des cordes dans [88]);
5. 2 cercles orthogonaux (de même rayon et centre) (trajectoire évoquée dans [75], [59] énonce le fait qu'elle soit RC);
6. arc de cercle + ligne [22].

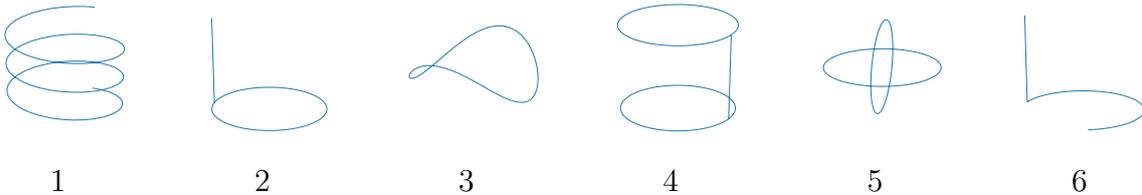


FIGURE 3.1 – Exemples de trajectoires connexes et continues recouvrables par cordes.

À l'inverse, d'autres trajectoires ne vérifient pas cette propriété⁵, nous les représentons figure 3.2 (les références entre parenthèses présentent la trajectoire et expliquent pourquoi elles ne sont pas RC) :

1. *Reverse helix* : composition de deux morceaux d'hélice en sens opposé ([55]);
2. 2 arcs + ligne (trajectoire ALA, voir [88]);

3. On trouve parfois dans la littérature recouvrement par lignes R (*full R-line coverage*), même s'il peut y avoir de subtiles différences avec notre définition (voir par exemple [88]).

4. Nous y reviendrons longuement, notamment au chapitre 4.

5. Il y en a beaucoup d'autres, nous verrons qu'il est plus difficile de créer des trajectoires RC que le contraire.

3. 2 arcs+ ligne étendue (trajectoire AELA, voir [88]).

On peut noter que certains trajectoires comme la AELA ne sont pas RC (des points de leur enveloppe convexe ne sont pas traversés par une corde) mais peuvent quand même avoir une région RC intéressante incluse dans leur enveloppe convexe. Par exemple la trajectoire ALEA présente une ROI cylindrique (d'axe parallèle à la ligne et de hauteur égale à la trajectoire) recouvrable par cordes, ce qui peut-être en pratique suffisant pour une reconstruction exacte, selon l'objet considéré. La trajectoire ALA n'a quant à elle même pas de ROI cylindrique RC⁶. Les trajectoires avec une ligne et des arcs ont été assez étudiées dans la littérature, car elles sont en pratique assez simples à réaliser (une rotation puis une translation du lit ou d'un C-arm puis une rotation dans le sens inverse), les arcs peuvent être comme déjà évoqués des arcs de cercles, mais aussi des arcs d'ellipse [87] ou d'hélice [88].

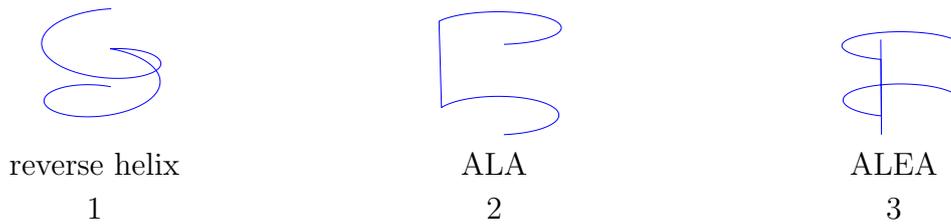


FIGURE 3.2 – Exemples de trajectoires connexes et continues non recouvrables par cordes.

3.3 Premiers exemples de constructions d'union des cordes

3.3.1 Trajectoires deux cercles orthogonaux (2C) et ligne+cercle

L'article [59] annonce que la trajectoire des deux cercles orthogonaux est RC, mais ne présente pas la preuve. Nous proposons de montrer que chaque point d'une sous-partie A_Λ de l'enveloppe convexe $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ de cette trajectoire est traversée par une corde. Les deux cercles seront notés \mathcal{S}_{Λ_1} et \mathcal{S}_{Λ_2} . Pour des raisons de simplicité nous supposons \mathcal{S}_{Λ_1} dans le plan $(\mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ et \mathcal{S}_{Λ_2} dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (voir figure 3.3 (gauche)). Nous proposons de définir A_Λ ainsi :

$$A_\Lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \bigcup_{\bar{y} \in [-R, R]} T_{\bar{y}} \quad (3.3)$$

avec (voir figure 3.3 (gauche)) :

$$T_{\bar{y}} \stackrel{\text{déf}}{=} \text{conv}(\{\mathcal{S}_1(y), \tilde{\mathcal{S}}_1(y), \mathcal{S}_2(y), \tilde{\mathcal{S}}_2(y)\}) \quad (3.4)$$

Les points $\mathcal{S}_1(y)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_1(y)$ (resp. $\mathcal{S}_2(y)$ et $\tilde{\mathcal{S}}_2(y)$) sont respectivement les intersections de \mathcal{S}_{Λ_1} (resp. \mathcal{S}_{Λ_2}) avec le plan d'équation $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = \bar{y}\}$. L'ensemble A_Λ est donc un "empilement" de losanges (qui sont même des carrés). Nous expliquerons section 3.6.1 (quand nous aurons introduit les bons outils) qu'en fait A_Λ s'identifie à $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ (mais cela ne change rien à la preuve ci-dessous).

6. En effet [88] montre que c'est l'extension des lignes de la trajectoire ALEA qui permet de couvrir la ROI cylindrique centrale.

On considère un point $\mathbf{x} \in A_\Lambda$ (\mathbf{x} n'étant pas dans l'intérieur d'un des deux cercles, auquel cas il est évident que \mathbf{x} appartienne à une corde). On choisit un point (mobile) $\mathbf{S}_1 \in \mathcal{S}_{\Lambda_1}$. Il est possible de choisir \mathbf{S}_1 tel que la ligne passant par \mathbf{x} et \mathbf{S}_1 ne passe pas par l'intérieur de \mathcal{S}_{Λ_2} , par exemple en prenant \mathbf{S}_1 (que l'on appellera \mathbf{S}_{out}) comme une intersection entre \mathcal{S}_{Λ_1} et le plan parallèle au plan contenant \mathcal{S}_{Λ_2} et passant par \mathbf{x} . Il est aussi possible de choisir \mathbf{S}_1 (que l'on appellera \mathbf{S}_{in}) tel que la ligne passant par \mathbf{x} et \mathbf{S}_{in} passe dans l'intérieur du cercle \mathcal{S}_{Λ_2} , et tel que \mathbf{S}_{in} et \mathbf{S}_{out} soient du même côté du plan contenant \mathcal{S}_{Λ_2} . Pour le comprendre l'idée est de considérer $T_{\bar{y}}$, avec $\bar{y} = y$ (et $\mathbf{x} = (x, y, z)$, une illustration est donnée figure 3.3(droite)) et donc $\mathbf{x} \in T_y$. Plus spécifiquement, on peut choisir de noter les intersections tel que \mathbf{x} appartienne au triangle formé par $\mathbf{S}_1(y)$, $\mathbf{S}_2(y)$ et $\tilde{\mathbf{S}}_2(y)$. Ainsi, la demi-droite issue de $\mathbf{S}_1(y)$ passant par \mathbf{x} intersecte $[\mathbf{S}_2(y), \tilde{\mathbf{S}}_2(y)]$, qui est une corde de \mathcal{S}_{Λ_2} . Cette demi-droite traverse donc l'intérieur de \mathcal{S}_{Λ_2} et on peut choisir $\mathbf{S}_{\text{in}} = \mathbf{S}_1(y)$. Ainsi, par continuité (théorème des valeurs intermédiaires), en faisant parcourir \mathcal{S}_1 le long du cercle \mathcal{S}_{Λ_1} (en particulier entre \mathbf{S}_{in} et \mathbf{S}_{out}), pour un certain \mathbf{S}_1 noté \mathbf{S}_{C_1} , la ligne passant par \mathbf{x} et \mathbf{S}_{C_1} intersectera \mathcal{S}_{Λ_2} . Il y a donc une corde passant par \mathbf{x} .

On peut suivre approximativement le même raisonnement pour la trajectoire ligne+cercle (LC), en considérant une demi-droite passant par un point mobile de la ligne et un point de l'enveloppe convexe de la trajectoire (nous ne prétendons pas qu'une telle preuve n'existe pas dans la littérature, mais nous donnons notre version). On considère un cercle de rayon R centré sur l'origine dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ définissant \mathcal{S}_{Λ_2} , et une ligne verticale \mathcal{S}_{Λ_1} :

$$\mathcal{S}_{\Lambda_1} = \{R, 0, h\lambda | h > 0, \lambda \in \Lambda_1 = [0, 1]\} \quad (3.5)$$

La trajectoire LC peut être vue comme l'union de \mathcal{S}_{Λ_1} et \mathcal{S}_{Λ_2} . Soit un point \mathbf{x} de son enveloppe convexe⁷ (qui n'appartient pas à l'intérieur du cercle \mathcal{S}_{Λ_2}) et \mathbf{S}_1 un point (mobile) de \mathcal{S}_{Λ_1} . Une nouvelle fois on va définir $\mathbf{S}_{\text{in}} \in \mathcal{S}_{\Lambda_1}$ tel que la demi-droite issue de \mathbf{S}_{in} et passant par \mathbf{x} traverse l'intérieur du cercle \mathcal{S}_{Λ_2} , ce qui n'est pas le cas de la demi-droite issue de $\mathbf{S}_{\text{out}} \in \mathcal{S}_{\Lambda_1}$ (et passant par \mathbf{x}). Le point \mathbf{S}_{out} peut être choisi simplement comme de même altitude que \mathbf{x} (plus précisément comme l'intersection de la ligne \mathcal{S}_{Λ_1} et du plan horizontal passant par \mathbf{x} , voir figure 3.4). Le point \mathbf{S}_{in} peut être le point le plus haut de la ligne : $\mathbf{S}_{\text{max}} = (R, 0, h)$. En effet en notant $O = (R, 0, 0)$ et \mathbf{S}_2 l'intersection du cercle \mathcal{S}_{Λ_2} et du plan contenant la ligne \mathcal{S}_{Λ_1} et \mathbf{x} , \mathbf{x} est contenu dans le triangle formé par les points \mathbf{S}_{max} , \mathbf{S}_{Λ_2} et O (figure 3.4, les trois côtés de ce triangle appartiennent à l'enveloppe convexe de la trajectoire LC). La droite passant par \mathbf{x} et \mathbf{S}_{max} intersecte $[O\mathbf{S}_2]$ qui est une corde du cercle. Pour conclure sur le fait que \mathbf{x} soit sur une corde, on considère une nouvelle fois la demi-droite issue de \mathbf{S}_1 et passant par \mathbf{x} . En faisant varier \mathbf{S}_1 entre \mathbf{S}_{out} et \mathbf{S}_{in} la demi-droite considérée va (en invoquant le théorème des valeurs intermédiaires) intersecter le cercle \mathcal{S}_{Λ_2} , formant ainsi une corde de la trajectoire LC passant par \mathbf{x} .

3.3.2 Présentation des trajectoires 3LT et 3LC

Nous présentons ici deux trajectoires dont les unions des cordes sont relativement simples à comprendre. Il s'agit de la trajectoire cercle+3 lignes (3LC) et de la trajectoire triangle+lignes (3LT) (voir figure 3.5). On suppose que le triangle et le cercle de ces trajectoires appartiennent au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Ces trajectoires peuvent être considérées comme

7. L'enveloppe convexe de la trajectoire LC est un cône non droit de sommet l'extrémité de la ligne et de base le cercle.

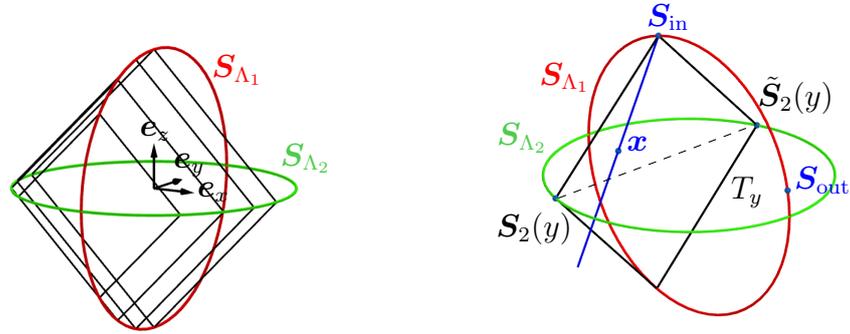


FIGURE 3.3 – La trajectoire de deux cercles orthogonaux. *Gauche* : Différents $T_{\bar{y}}$ (pour différentes valeurs de $\bar{y} \in [-R, R]$, en rappelant que l'union des $T_{\bar{y}}$ forme A_Λ). *Droite* : $\mathbf{x} = (x, y, z) \in T_{\bar{y}} = T_y (\in A_\Lambda \subset \Omega_{S_\Lambda})$ et la demi-droite issue de \mathbf{x} et passant par S_{in} traverse l'intérieur de S_{Λ_2} .

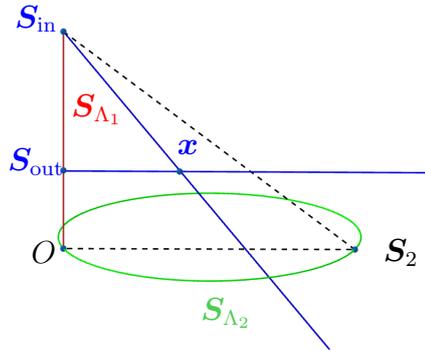


FIGURE 3.4 – La trajectoire LC constituée d'une ligne S_{Λ_1} et d'un cercle S_{Λ_2} . La demi-droite passant par \mathbf{x} et issue de S_{in} traverse l'intérieur du cercle (car elle intersecte $[OS_2]$, une corde du cercle, et \mathbf{x} appartient au triangle OS_2S_{in}). La demi-droite passant par \mathbf{x} et issue de S_{out} ne passe pas par l'intérieur du cercle.

des prémices à la trajectoire 3-sin que nous aborderons en profondeur au chapitre 4. Elles présentent l'avantage d'avoir des régions de Tuy importantes mais leur réalisation par des scanners médicaux n'est pas aisée pour une source unique : GL. Zeng [90] présente par exemple la trajectoire 3LC pour trois sources (dans un contexte SPECT). Nous souhaitons décrire les unions des cordes de ces trajectoires pour pouvoir potentiellement placer des ROI reconstructibles par DBP.

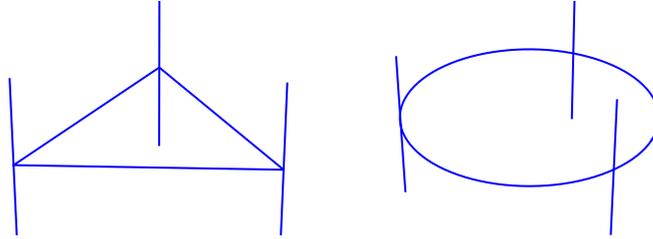


FIGURE 3.5 – *Gauche* : Trajectoire triangle+3 lignes (3LT). *Droite* : Trajectoire cercle+3 lignes (3LC).

3.3.3 Union des cordes de la trajectoire 3LT

On cherche à déterminer les caractéristiques de l'union des cordes de la trajectoire 3LT. Le triangle de la 3LT est équilatéral de côtés de longueur l , de centre de gravité placé en l'origine, et des lignes de hauteur h . Le triangle est illustré figure 3.6 (gauche). Par symétrie on travaillera uniquement avec la partie supérieure ($z \geq 0$). La zone recouvrable par cordes est formée de deux sous-zones, qui sont dessinées (figure 3.6 et figure 3.7) :

- (i) 3 rectangles pleins engendrés par les droites
- (ii) 3 tétraèdres engendrés par une droite et le côté du triangle opposé (voir figure 3.6(droite))

On étudiera particulièrement cette deuxième sous-zone.

Les trois rectangles (i) peuvent être respectivement décrits par :

$$-x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3}, x \in \left[-\frac{l}{2}, 0\right], z \in [0, h] \quad (ac)$$

$$x + \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{l}{3}, x \in \left[0, \frac{l}{2}\right], z \in [0, h] \quad (ab) \quad (3.6)$$

$$y = -\frac{l}{2\sqrt{3}}, x \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], z \in [0, h] \quad (cb)$$

Pour chaque tétraèdre (voir (ii)), on associe une face $F(z)$ (on peut les différencier en $F_a(z)$, $F_b(z)$ et $F_c(z)$) contenant un côté du triangle et un point de la ligne (verticale) opposée (voir figure 3.6, *droite*), ce point ayant pour coordonnée verticale z . Les trois faces $F(h)$ sont portées par des plans ayant pour équation respective :

$$\begin{aligned} F_b(z) &: -x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{zl}{h} = \frac{l}{3} \\ F_c(z) &: x + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{zl}{h} = \frac{l}{3} \\ F_a(z) &: y = -\frac{l}{2\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

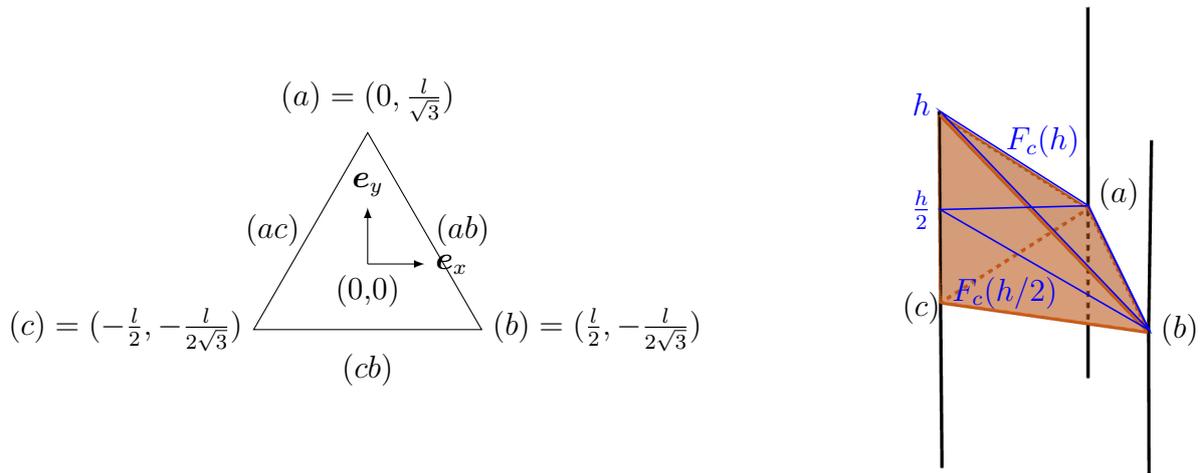


FIGURE 3.6 – *Gauche* : Paramétrisation du triangle de la trajectoire 3LT dans le plan (e_x, e_y) . Nous appelons les sommets de ce triangle (a) , (b) et (c) et les côtés correspondants (ac) , (ab) et (cb) . *Droite* : Un des tétraèdres (ii) formés par l'union des cordes de la trajectoire triangle+lignes. La face contenant un côté du triangle et un point de la ligne (verticale) opposée de la trajectoire est notée face $F(z)$ (les triangles bleus sont $F_c(h/2)$ et $F_c(h)$), avec z la coordonnée verticale du point sur la ligne verticale.

Une face $F(z)$ est RC (en traçant toutes les cordes partant du point d'altitude z de la ligne verticale correspondante et reliant le côté opposé du triangle). On peut ainsi engendrer un tétraèdre par l'ensemble des faces $F(z)$, $z \in [0, h]$. Tout point des tétraèdres (ii) est alors intersecté par une corde.

Un point caractéristique de cet ensemble, noté \mathbf{x}_m , est le point le plus bas de la surface supérieure de la frontière de C_{S_Λ} (voir figure 3.7). Il se situe à l'intersection des faces $F(z)$ des tétraèdres (équation (3.7)) :

$$\mathbf{x}_m = (0, 0, h/3) \quad (3.8)$$

Cela peut par exemple être utile au placement d'une ROI si on veut utiliser la méthode DBP. Par exemple, la ROI peut-être (contenu dans) un cylindre centré en l'origine de hauteur $h/3$ et de rayon $-l/(2\sqrt{3})$.

Une simulation numérique de l'union de corde de cette trajectoire est présentée figure 3.22 section 3.7. Elle utilise une méthode brute affichant les voxels traversés par des cordes.

3.3.4 Union des cordes de la trajectoire 3LC

Comme pour la trajectoire 3LT on ne s'intéressera, pour des raisons de symétrie, qu'à la partie supérieure ($z \geq 0$) de l'union des cordes. Les raisonnements qui vont être décrits présentent des similitudes avec les études des domaines de cordes pour les trajectoires cercles+ligne (par exemple [88]).

La trajectoire 3LC est constituée de 3 lignes de hauteur h réparties de manière régulière autour d'un cercle de rayon R (figure 3.8, *gauche*).

Comme pour la trajectoire 3LT, les cordes reliant les lignes verticales forment des rectangles. Nous nous intéressons surtout aux cônes de cordes reliant un point d'une ligne verticale et le cercle de la trajectoire (figure 3.8, *droite*). Chaque cône est un volume

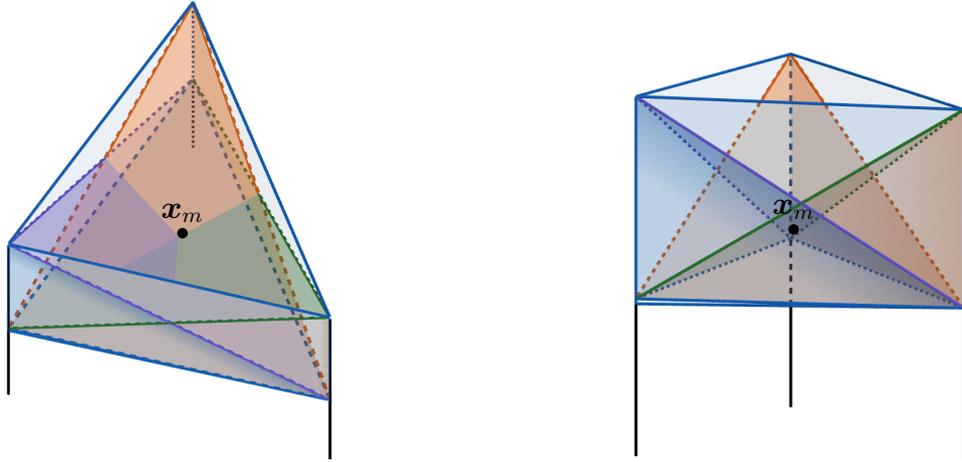


FIGURE 3.7 – La trajectoire 3LT avec son (demi-)union des cordes C_{S_Λ} . Le point \mathbf{x}_m est le point le plus bas de la surface supérieure de la frontière de C_{S_Λ} .

engendré par l’union des surfaces de corde liant un point d’une ligne d’altitude z_c et un point du cercle de rayon R , pour tout $z_c \in [0, h]$ (en fait, de manière rigoureuse, l’union d’une corde et d’une ligne verticale a été étudiée dans le cadre de la trajectoire LC section 3.3.1, on a (re)démontré que l’enveloppe convexe de cette trajectoire est un cône, et que chaque point de ce cône est intersecté par une corde). L’intersection entre un plan horizontal et un de ces cônes forme un disque.

On s’intéresse à l’intersection entre un plan horizontal et les trois cônes (donc trois disques) pour deux “altitudes” particulières de plan, notées z_{c_1} et z_{c_2} (voir figure 3.9). Pour le plan d’altitude z_{c_1} , l’intersection est la plus haute où il n’y a pas de “trou” (l’union des disques dans le plan est simplement connexe). Pour le plan d’altitude z_{c_2} , l’intersection est la plus haute où l’union des disques est connexe par arcs dans le plan. Connaître ces deux altitudes peut être utile pour le placement des ROI.

La relation entre une hauteur z_c du cercle ($z_c \in [0, h]$) et son rayon r est définie par application directe du théorème de Thalès (voir figure 3.9) :

$$r = R \frac{h - z_c}{h} \Leftrightarrow z_c = h \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad (3.9)$$

Altitude z_{c_1} Pour l’altitude z_{c_1} on a simplement :

$$r_1 = \frac{R}{2} \quad (3.10)$$

$$z_{c_1} = \frac{h}{2} \quad (3.11)$$

On peut donc par exemple placer une ROI cylindrique centrée de hauteur $h/2$ (h en prenant en compte la trajectoire totale) et de rayon $R/2 (= r_1)$. Le rayon est r_1 car, en projection dans un plan horizontal, les intersections des cercles inscrits (en dehors de celle se trouvant sur au centre du cercle de trajectoire) sont sur le triangle liant les trois lignes de la trajectoire 3LC (voir figure 3.10, *gauche*). Le point I est défini comme étant à l’intersection des cercles de rayon $r_1 = R/2$, centrés en Q et P , points se trouvant respectivement au milieu de $[OB]$ et $[AO]$, O se trouvant au centre du cercle de la trajectoire 3LC. On peut montrer que $I \in [AB]$. En effet si on définit I' comme l’intersection de $[AB]$ et du cercle

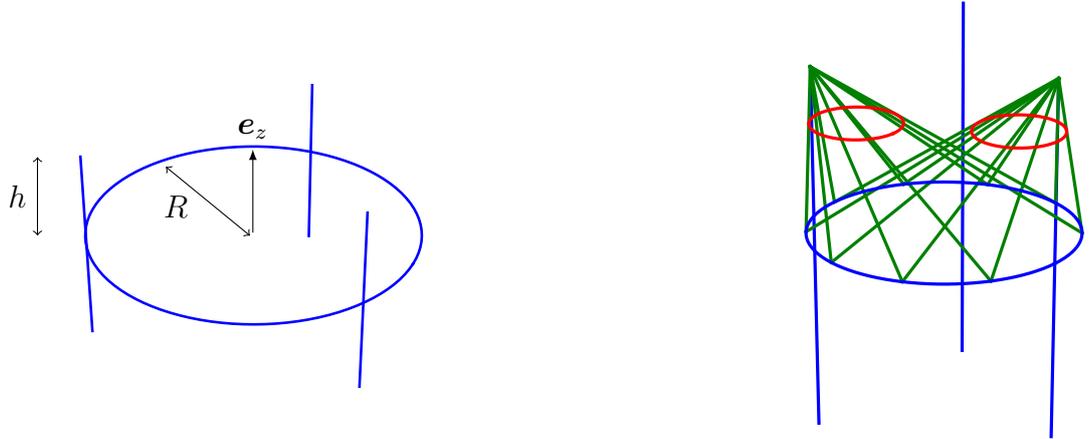


FIGURE 3.8 – *Gauche* : Trajectoire 3LC paramétrée. *Droite* : La trajectoire 3LC avec des cordes (en vert) de deux cônes de cordes tracés. Les cercles rouges représentent les frontières de l'intersection entre ces deux cônes et un plan horizontal.

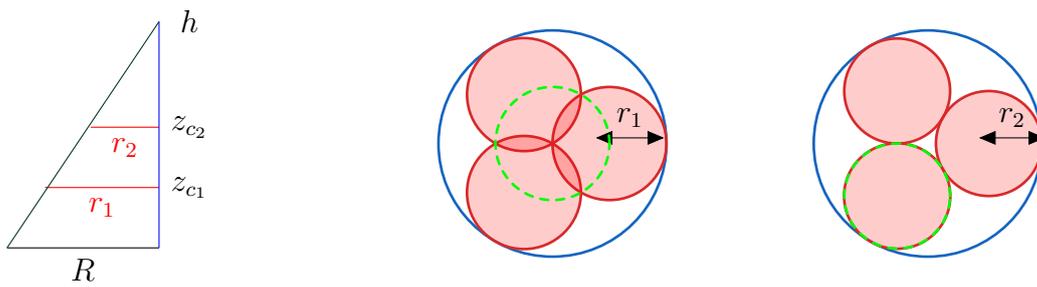


FIGURE 3.9 – Intersection entre les cônes de cordes de la trajectoire 3LC et des plans horizontaux. Tout point dans un disque rouge est intersecté par une corde. Les cercles en tirets verts représentent les bases de potentielles ROI cylindriques. *Milieu* : Altitude z_{c_1} , l'union des disques est simplement connexe. *Droite* : Altitude z_{c_2} , l'union des disques est connexe par arcs.

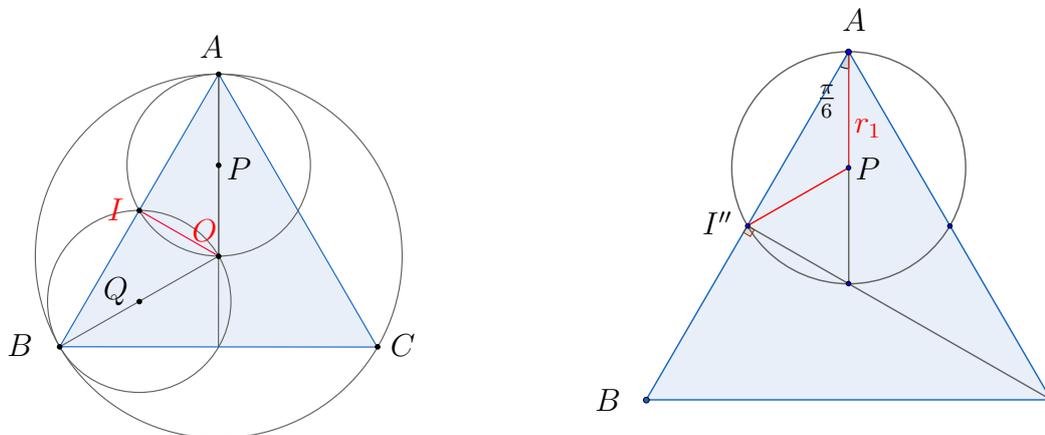


FIGURE 3.10 – *Gauche* : Trajectoire 3LC en projection dans le plan (e_x, e_y) . Le point I est à l'intersection des cercles de centres Q et P et de rayon r_1 . On peut montrer qu'il est aussi au milieu du segment $[AB]$, et que $IO = r_1$. *Droite* : I'' est l'intersection du cercle de rayon r_1 et de centre P avec $[AB]$, I'' est en fait confondu avec I .

de centre P et de rayon r_1 , on a $AB = 3R/(2 \cos \frac{\pi}{6}) = 2\sqrt{3}r_1$ (car ABC est un triangle équilatéral de hauteur $3R/2$ voir figure 3.10, *gauche*) et $I'A = 2r_1 \cos \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}r_1 = \frac{AB}{2}$ (voir figure 3.10, *droite*). De même, si on définit I'' comme l'intersection de $[AB]$ et du cercle de centre Q , on a également $I''B = 2r_1 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{AB}{2}$, d'où $I'' = I' = I$. On en déduit que IO (le rayon de la base du cylindre d'une ROI potentielle) est bien égale à r_1 .

Altitude z_{c_2} C'est la configuration où les cônes se "rejoignent". À cette hauteur on ne peut pas placer de ROI centrée (reconstructible par méthode DBP).

Déterminer le rayon r_2 des cercles (voir figure 3.9, *droite*) est un problème classique connu sous le nom des 3 cercles inscrits. Il consiste à remarquer que si l'on note m la longueur des médianes du triangle équilatéral de côté $2r$ (voir figure 3.11), alors :

$$\begin{cases} m = \frac{2}{3} \cdot 2r_2 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{2}{3} \sqrt{3} r_2 \\ m + r_2 = R \end{cases}$$

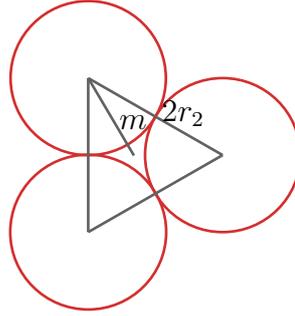


FIGURE 3.11 – Trois cercles tangents de rayon r_2 et un triangle équilatéral de côté $2r_2$ reliant leurs centres, la longueur de sa médiane est notée m .

$$\text{On en déduit : } \begin{cases} r_2 = \frac{R}{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}} \\ z_{c_2} = \frac{2h}{2 + \sqrt{3}} \end{cases} .$$

Les ROI cylindriques potentielles seront dans ce cas non centrées, on peut les placer au centre des disques de rayon r_2 définis par l'intersection des cônes de cordes et du plan $z = z_{c_2}$. Ces ROI auront donc un rayon r_2 et une hauteur z_{c_2} ($2z_{c_2}$) pour la trajectoire totale, et si les lignes de la trajectoire 3LC passent respectivement par les points $(R, 0, 0)$, $(-\frac{R}{2}, \frac{\sqrt{3}R}{2}, 0)$ et $(-\frac{R}{2}, -\frac{\sqrt{3}R}{2}, 0)$ alors les centres de la base du cylindre des ROI peuvent être $(R - r_2, 0, 0)$, $(\frac{r_2 - R}{2}, r_2, 0)$ et $(\frac{r_2 - R}{2}, -r_2, 0)$.

3.4 Trajectoires à projection convexe

Pour étudier des classes de trajectoires et non plus uniquement des trajectoires particulières, nous travaillons avec la notion de *convexité* d'une trajectoire. En géométrie plane (2D), une courbe plane (généralement fermée mais pas nécessairement) est dite convexe si elle est la frontière d'un ensemble convexe. Parler de convexité pour une courbe dans l'espace 3D est plus ambigu, ou en tout cas peu intuitif, on introduira la notion de trajectoire à *projection convexe* (dans un plan donné).

Définition 8. *Une trajectoire est dite à projection convexe s'il existe un plan tel que la projection orthogonale de la courbe dans ce plan est convexe et qu'il y a une bijection entre la trajectoire et sa projection.*

Avec cette définition, la trajectoire hélicoïdale et les deux trajectoires présentées plus haut (3LT et 3LC) ne sont pas à projection convexe, car plusieurs points de la trajectoire vont être projetés sur le même point du plan de projection (par exemple, en reprenant la définition de la trajectoire hélicoïdale équation (2.41), pour λ et $\lambda + 2\pi$ dans Λ , \mathbf{S}_λ et $\mathbf{S}_{\lambda+2\pi}$ auront tous deux pour projection $(R \cos \lambda, R \sin \lambda)$ dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$). Un exemple de trajectoire à projection convexe est donné figure 3.12.

Nous allons beaucoup utiliser les termes de trajectoires *fermées* et *ouvertes*. Dans le cas général, il n'est pas si évident de définir (et peut-être pas si pertinent) ce type de

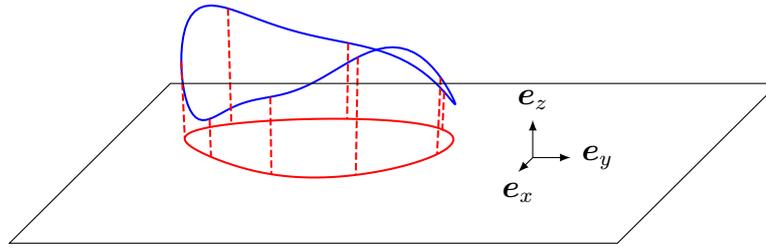


FIGURE 3.12 – Exemple de trajectoire à projection convexe dans le plan (e_x, e_y) .

trajectoire. On peut appeler les trajectoires ouvertes les trajectoires ayant au moins une extrémité⁸ (hélice, cercle+ligne) tandis que les trajectoires fermées n'en ont pas (cercle, deux cercles orthogonaux).

Nous présentons un résultat, que nous avons conçu comme une généralisation d'un résultat de [60] (propriété 2)⁹ qui nous sera utile par la suite (notamment au chapitre 4) pour une certaine classe de trajectoires :

Théorème 4. *Soit une trajectoire continue, connexe et fermée \mathcal{S}_Λ à projection convexe dans le plan (e_x, e_y) . S'il existe deux points $\mathbf{x}' = (x, y, z')$ et $\mathbf{x}'' = (x, y, z'')$, avec $z' < z''$, tels que \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' soient traversés par une corde de \mathcal{S}_Λ , alors il passe une corde par tout point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ avec $z \in [z', z'']$.*

Démonstration. Le début de la preuve est semblable à la preuve [60](A.2) des deux cordes¹⁰ pour la trajectoire selle. La figure 3.13 illustre ce début de preuve.

Soit une trajectoire de source \mathcal{S}_Λ et deux points \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' satisfaisant les conditions de l'énoncé. Soit $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$, avec $z \in [z', z'']$, \mathcal{L} la ligne passant par \mathbf{x} parallèlement à e_z et enfin $\Pi(\omega)$, le plan contenant \mathcal{L} et faisant un angle ω avec le plan dirigé par e_y et e_z . Le plan $\Pi(\omega)$ intersecte la trajectoire en \mathcal{S}_{λ_1} et \mathcal{S}_{λ_2} et la ligne reliant ces deux positions de source coupe \mathcal{L} en $\tilde{\mathbf{x}} = (x, y, \tilde{z}(\omega))$. Il y a deux intersections, pour chaque $\omega \in [0, \pi[$, entre $\Pi(\omega)$ et \mathcal{S}_Λ car la trajectoire est de projection convexe dans le plan (e_x, e_y) orthogonal à $\Pi(\omega)$. La trajectoire de courbe étant continue, et dont aucune partie ne se superpose en projection (par définition de la trajectoire à projection convexe), $\tilde{z}(\omega)$ prend toutes les valeurs, pour ω parcourant $[0, \pi]$, d'un intervalle qu'on nommera $A = [\tilde{z}_{min}, \tilde{z}_{max}]$. Cela montre, par le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe une corde intersectant tout \mathbf{x} tel que $z \in A$. De plus, on a décrit toutes les cordes intersectant \mathcal{L} (car toute corde intersectant \mathcal{L} est dans un plan contenant \mathcal{L} , il existe donc ω tel que ce plan soit $\Pi(\omega)$). Donc $[z', z''] \subset A$. D'où $\forall z \in [z', z''], z \in A$.

□

Ce résultat peut s'étendre aux trajectoires connexes, continues et *ouvertes* à projection convexe¹¹. L'idée de la preuve est la même que pour le théorème 4 mais ω est cette fois-ci à

8. On peut dire que $\mathcal{S}_{\lambda_\epsilon} \in \mathcal{S}_\Lambda$ est une extrémité s'il existe un réel positif ϵ , tel que l'intersection avec la trajectoire de toute sphère de rayon inférieur à ϵ et centré en $\mathcal{S}_{\lambda_\epsilon}$ est un singleton (on rappelle qu'une telle sphère est définie pour une norme $\|\cdot\|$, dans notre cas la norme 2, par $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\mathbf{x} - \mathcal{S}_{\lambda_\epsilon}\| = \epsilon\}$).

9. Cette propriété énonce que chaque point de l'enveloppe convexe d'une trajectoire selle est intersecté par une corde (et même deux).

10. Pour chaque point de l'intérieur de l'enveloppe convexe de la trajectoire selle, il existe deux cordes passant à travers ce point.

11. Ces trajectoires ont donc deux extrémités et pas de point double car ce sont des courbes continues sur un cylindre droit qui coupent au maximum une fois chaque génératrice du cylindre.

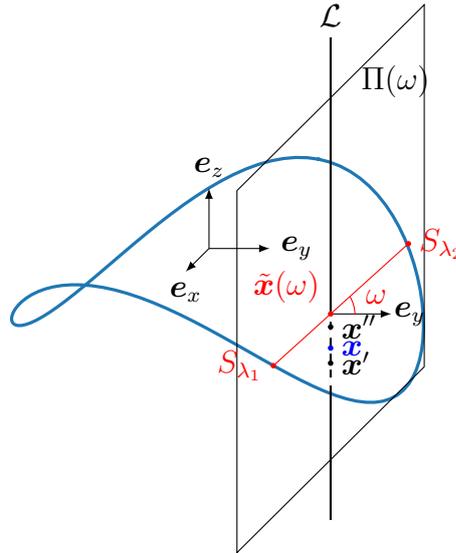


FIGURE 3.13 – Paramétrisation pour le début de la preuve du théorème 4 prise en grande partie de [60]. On rajoute en plus les points \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' en supposant que ces deux points sont traversés par une corde.

valeurs dans $[\omega_1, \omega_2] \subset [0, 2\pi[$. Pour définir ω_1 et ω_2 , on considère les deux droites passant respectivement par \mathbf{x} et une extrémité de la trajectoire, et \mathbf{x} et l'autre extrémité. Ces deux droites forment respectivement un angle ω_1 et un angle ω_2 , tels qu'un plan vertical d'angle $\omega \in [\omega_1, \omega_2]$ intersecte deux fois la trajectoire.

Enfin, le théorème 4 peut être appliqué à certaines régions d'une trajectoire (fermée) à projection étoilée (analogue de la trajectoire à projection convexe mais dont une projection est à la frontière d'une région étoilée, voir figure 3.14). Généralement, une région \mathcal{A} est dite *étoilée* (par rapport à \mathbf{y}) s'il existe un point $\mathbf{y} \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout point $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$, le segment $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ est dans \mathcal{A} . Dans notre cas, les points \mathbf{x} seront choisis dans la projection de la trajectoire \mathcal{S}_Λ et on notera la région correspondante $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda}$. On peut alors définir la région $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda}$, $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda} \mid \mathcal{A} \text{ est étoilée par rapport à } \mathbf{y}\}$. On considère la projection de la trajectoire pour définir les régions $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda}$, ces deux régions sont donc contenues dans un plan. La figure 3.14 présente une trajectoire à projection étoilée avec ses régions $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda}$ dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Soit une trajectoire \mathcal{S}_Λ continue, connexe et fermée à projection étoilée dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, alors le théorème 4 s'applique pour tout point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ tel que $(x, y) \in \mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Un effet, un plan vertical passant par un tel point \mathbf{x} intersecte deux fois la trajectoire (et pas plus, sinon un segment contenant \mathbf{x} et dont les extrémités sont dans $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda}$ ne serait pas inclus dans $\mathcal{A}_{\mathcal{S}_\Lambda}$, ce qui serait en contradiction avec la définition de $\mathcal{B}_{\mathcal{S}_\Lambda}$).

Le théorème 4 permet donc de construire des unions de cordes, et il peut être lié à la notion de trajectoire recouvrable par cordes en introduisant la notion de *trajectoire à frontière recouvrable par cordes*.

On note $\partial C_{\mathcal{S}_\Lambda}$ (resp. $\partial \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$) la frontière de $C_{\mathcal{S}_\Lambda}$ (resp. $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$).

Définition 9. Une trajectoire est à frontière recouvrable par cordes si la frontière de

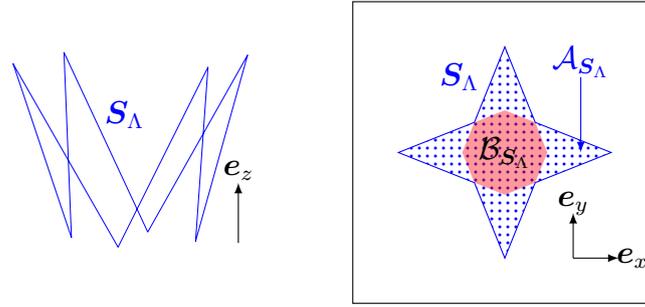


FIGURE 3.14 – *Gauche* : Exemple de trajectoire à projection étoilée. *Droite* : Projection de la trajectoire étoilée dans un plan (e_x, e_y) et régions \mathcal{A}_{S_Λ} (en pointillés bleus) et \mathcal{B}_{S_Λ} (en rouge).

l'enveloppe convexe de sa trajectoire est contenue dans l'union des cordes ($\partial\Omega_{S_\Lambda} \subset C_{S_\Lambda}$), c'est-à-dire si par tout point de la frontière de l'enveloppe convexe d'une trajectoire S_Λ passe une corde de S_Λ .

De cette définition et du théorème 4 on tire le corollaire suivant¹² :

Corollaire 1. *Une trajectoire continue, connexe et fermée à projection convexe est recouvrable par cordes (l'enveloppe de source est égal à l'enveloppe de cordes ($\Omega_{S_\Lambda} = C_{S_\Lambda}$)) si elle est à frontière recouvrable par cordes ($\partial\Omega_{S_\Lambda} \subset C_{S_\Lambda}$).*

Démonstration. Il faut donc montrer que pour une telle trajectoire (à frontière RC), un point de l'enveloppe convexe est dans l'union des cordes (l'autre inclusion étant toujours vraie). Soit $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \Omega_{S_\Lambda} \setminus \partial\Omega_{S_\Lambda}$ (si \mathbf{x} est dans $\partial\Omega_{S_\Lambda}$, alors par hypothèse \mathbf{x} est traversé par une corde). On considère une droite verticale passant par \mathbf{x} . Cette droite intersecte $\partial\Omega_{S_\Lambda}$ en deux points que l'on peut noter $\mathbf{x}'' = (x, y, z'')$ et $\mathbf{x}' = (x, y, z')$, tels que $z'' > z > z'$. Par hypothèse, $\partial\Omega_{S_\Lambda} \subset C_{S_\Lambda}$, donc \mathbf{x}'' et \mathbf{x}' sont chacun traversés par une corde. On peut donc appliquer le théorème 4 au point \mathbf{x} , ce qui prouve que $\mathbf{x} \in C_{S_\Lambda}$. \square

Ce corollaire peut, de même que le théorème 4, être étendu aux trajectoires continues, connexes et ouvertes.

L'hypothèse de la frontière recouvrable par cordes est importante pour appliquer le corollaire 1 et déclarer qu'une trajectoire est RC. Par exemple la trajectoire M (voir figure 3.15) est une trajectoire continue, fermée et à projection convexe mais n'est pas à frontière RC (donc n'est pas RC). On peut par exemple définir cette trajectoire en liant par des segments les points $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1.5, 0, 2)$, $(2, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1.5, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(0.5, 1, 1)$ et $(1.5, 0, 2)$. On peut étudier les quatre points les plus hauts de la trajectoire M (dans notre cas ceux ayant 1 pour troisième coordonnée) : dans le plan contenant ces points (d'équation $z = 1$), les seules cordes existantes sont les côtés du rectangle défini par ces points et ses diagonales. Or ce rectangle (et son intérieur) appartient à $\partial\Omega_{S_\Lambda}$, il devrait être RC, donc la trajectoire M n'est pas à frontière recouvrable par cordes (et

12. Comme le théorème 4 et plusieurs résultats de ce chapitre, nous avons développé ce résultat indépendamment, bien que l'idée soit implicite dans [60], mais il est probable qu'il soit connu de la communauté de tomographie, ou du moins de la communauté de géométrie.

donc non RC). Cet exemple va nous pousser à travailler avec la notion de *plan d'appui* développée dans la section 3.5.

Néanmoins, on peut trouver des applications du théorème 4 pour la trajectoire M . Par exemple en considérant les points $\mathbf{x}' = (1, 0.5, 0)$ et $\mathbf{x}'' = (1, 0.5, 1)$ (voir figure 3.15) appartenant respectivement à l'intersection des diagonales des rectangles formés par les quatre points les plus bas et les plus hauts de la trajectoire. Ainsi, \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' sont traversés par des cordes, et on peut appliquer le théorème 4 pour tout point \mathbf{x} entre \mathbf{x}' et \mathbf{x}'' , c'est à dire que $[\mathbf{x}', \mathbf{x}''] \subset C_{\mathcal{S}_\Lambda}$.

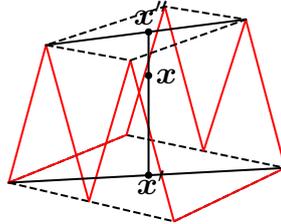


FIGURE 3.15 – Trajectoire M (rouge), les points contenus à l'intérieur strict du rectangle supérieur (et n'appartenant pas aux diagonales) appartiennent à l'enveloppe convexe mais aucune corde ne passe par eux. Le théorème 4 énonce que le segment $[\mathbf{x}', \mathbf{x}'']$ (ligne verticale noire) est dans $C_{\mathcal{S}_\Lambda}$.

3.5 Plans d'appui et frontières recouvrables par cordes

3.5.1 Plan d'appui

Dans le cadre de notre étude nous définissons les *plans d'appui* de la manière suivante.

Définition 10. Un plan d'appui $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}}$ (pour une trajectoire \mathcal{S}_Λ) est un plan qui intersecte l'enveloppe convexe de la trajectoire en un point \mathbf{x} mais pas l'intérieur de cette enveloppe convexe $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ ($\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}} \cap \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda} = \emptyset$ et $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}} \cap \partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda} \neq \emptyset$).

Remarque L'intersection des demi-espaces (fermés) contenant $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ formés par les plans d'appui $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}}$ (pour tout $\mathbf{x} \in \partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ ¹³) forme $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ (énoncé dans [3] prop. 11.5.5 pour un convexe fermé quelconque).

Un plan d'appui tel que défini déf. 10 intersecte forcément la trajectoire. On peut le montrer en raisonnant par l'absurde, on considère un plan d'appui $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}}$ qui n'intersecte pas \mathcal{S}_Λ . On note \mathbf{n} sa normale, \mathbf{n} pointant "vers" le demi-espace contenant \mathcal{S}_Λ . Il existe donc un réel ϵ tel que la translation de $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}}$ de $\epsilon\mathbf{n}$ (donnant $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{n}}$) n'intersecte pas non plus \mathcal{S}_Λ . L'intersection des demi-espaces contenant \mathcal{S}_Λ formés par les plans d'appui et $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x} + \epsilon\mathbf{n}}$ forme un ensemble convexe contenant \mathcal{S}_Λ . Or cet ensemble est plus petit que $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Il y a donc une contradiction.

On peut alors noter $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \lambda}$ un plan d'appui intersectant \mathcal{S}_Λ en \mathcal{S}_λ . De plus, cela signifie qu'on peut considérer l'intersection des demi-espaces formés par les plans d'appui $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_\Lambda$ (c'est-à-dire les plans d'appui $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda, \lambda}$, $\lambda \in \Lambda$) pour construire $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. On utilisera cette méthode à plusieurs reprises, par exemple au chapitre 4 section 4.6.1 et dans ce chapitre section 3.6.1.

13. Il existe un plan d'appui en tout point de la frontière d'un convexe fermé [3, section 11].

Remarque En géométrie convexe, on parle plus généralement d'hyperplan d'appui $\mathcal{P}_{\Omega, \mathbf{x}}$ de Ω en un point $\mathbf{x} \in \Omega$, avec $\Omega \in \mathbb{R}^n$. Un hyperplan $\mathcal{P}_{\Omega, \mathbf{x}}$ est tel que \mathbf{x} est dans $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et Ω est inclus dans un des deux demi-espaces de \mathbb{R}^n définis par $\mathcal{P}_{\Omega, \mathbf{x}}$ [3] (section 11.5). Dans notre cas l'ensemble Ω est $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et on travaille dans \mathbb{R}^3 .

Remarque Un plan d'appui en un point n'est pas toujours unique, il existe par exemple une infinité de plans d'appui pour un sommet d'un cube.

Remarque De manière générale, un plan d'appui n'est pas un plan *tangent*. Un plan tangent en un point d'une surface (différentiable) a pour normale le gradient en ce point. Il n'est pas pertinent de parler de plan tangent pour une courbe (par exemple il n'y a pas unicité). Néanmoins, parfois un plan d'appui à un point de l'enveloppe convexe d'une trajectoire sera le plan tangent de l'enveloppe convexe en ce point (dans la thèse cela arrive par exemple pour l'enveloppe convexe de la trajectoire 2C section 3.6.1 et au chapitre 4 section 4.6.1). Enfin, un plan tangent n'est pas forcément un plan d'appui (localement la surface se trouve d'un seul côté du plan tangent, mais ce n'est pas nécessairement le cas pour l'ensemble de la surface).

Ces plans d'appui et leur(s) intersection(s) avec la trajectoire peuvent nous servir à caractériser $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ et $\partial C_{\mathcal{S}_\Lambda}$, et permettent parfois de savoir si une trajectoire est à frontière recouvrable par cordes.

Par exemple, comme pour la trajectoire M, il est parfois facile de trouver un plan d'appui qui montre que la trajectoire n'est pas à frontière recouvrable par cordes. Plus généralement, nous proposons d'utiliser la proposition suivante.

Proposition 2. *S'il existe un plan d'appui dont l'intersection avec une trajectoire forme uniquement un ensemble fini de points contenant au moins trois points non alignés alors cette trajectoire est non recouvrable par cordes.*

Démonstration. On considère un plan d'appui d'une trajectoire \mathcal{S}_Λ dont au moins 3 points des n points ($n > 2$) d'intersection avec la trajectoire sont non-alignés. Nous appelons $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ l'ensemble de ces n points, d'enveloppe convexe $\Omega_n \stackrel{\text{déf}}{=} \text{conv}(\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n})$. Un nombre fini de points est relié au maximum par un nombre fini de cordes ($(n-1)n/2$). Les points $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont coplanaires mais non tous alignés donc Ω_n est un polygone non réduit à un ou deux segments (son aire n'est pas nulle), donc nécessite un nombre infini de cordes pour être recouvert. On peut donc choisir un point $\mathbf{x} \in \Omega_n \subset \partial \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ qui n'est pas sur une des $(n-1)n/2$ (ou moins) cordes reliant les points $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq n}$. Le point \mathbf{x} ne peut pas être sur une autre corde (\mathbf{x} appartient à un plan d'appui, et un plan d'appui sépare l'espace en deux demi-espaces dont un ne contient aucun bout de la trajectoire, ce qui signifie qu'il ne peut pas y avoir de corde "traversant" un plan d'appui). Il existe donc des points de $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ qui ne peuvent être traversés par une corde de la trajectoire. \square

On peut également donner une condition suffisante pour qu'une trajectoire soit à frontière recouvrable par cordes (voir prop. 3). Cependant, nous devons d'abord introduire les deux théorèmes de Carathéodory (en géométrie convexe) [24]. Le premier sera utile pour la section 3.6.3 et le second pour la preuve de la proposition 3.

Théorème 5 (Premier théorème de Carathéodory). *Soit \mathbf{y} un point de $\text{conv}(E)$ avec E un sous-ensemble de \mathbb{R}^n , alors il existe un ensemble $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq s}$ de points de E , avec*

$s \leq n + 1$, tel que \mathbf{y} soit une combinaison convexe¹⁴ de points de $\{\mathbf{x}_i\}_{1 \leq i \leq s}$.

Théorème 6 (Second théorème de Carathéodory). *Dans le cas où E est composé au plus de n composantes connexes, le théorème 5 s'applique avec $s \leq n$.*

Comme pour la proposition 2, nous avons développé indépendamment la proposition 3. Néanmoins, la proposition 3 repose en grande partie sur un théorème connu de géométrie convexe (le "second" théorème de Carathéodory).

Proposition 3 (Condition suffisante de trajectoire à frontière recouvrable par cordes). *Si pour une trajectoire continue \mathcal{S}_Λ , tout plan d'appui contient au maximum deux arcs (morceaux de la trajectoire) non connexes (potentiellement réduits à des points), alors \mathcal{S}_Λ est à frontière recouvrable par cordes.*

Démonstration. On rappelle qu'on peut construire l'enveloppe convexe d'une trajectoire par intersection des demi-espaces définis par les plans d'appui à cette trajectoire. Il faut alors montrer que toutes les (enveloppes convexes des) intersections des plans d'appui avec la trajectoire sont recouvrables par cordes, car l'union des enveloppes convexes de ces intersections recouvre $\partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Pour cela on utilise le second théorème de Carathéodory (th. 6) appliqué à la dimension 2 : si un ensemble de \mathbb{R}^2 est constitué au plus de deux composantes connexes, alors il existe deux points \mathbf{x}_1 et \mathbf{x}_2 tels qu'un point \mathbf{x} de l'enveloppe convexe de cet ensemble soit une combinaison convexe de \mathbf{x}_1 et de \mathbf{x}_2 . En d'autres termes, cela signifie que si un plan d'appui a une intersection avec la trajectoire formant au maximum deux arcs connexes, alors tout point de l'enveloppe convexe de cette intersection est sur une corde de cette intersection. Ainsi une trajectoire \mathcal{S}_Λ telle que décrite par l'énoncé est bien à frontière RC. \square

Remarque Le deuxième théorème de Carathéodory n'est pas incohérent avec la proposition 2, car cette proposition implique (au moins) trois composantes connexes.

Ce résultat paraît évident mais le cas de trois arcs non connexes l'est beaucoup moins. La figure 3.16 montre plusieurs trajectoires semblables reposant sur un plan d'appui horizontal. L'intersection de ces trajectoires avec ce plan d'appui donne trois arcs non connexes (ou points). La figure 3.17 montre que ces intersections ne sont pas toutes recouvrables par cordes, ce qui implique que parfois la trajectoire est RC (et parfois non).

3.5.2 Exemple de l'hélice courte

On peut définir une hélice "courte", à mi-chemin entre une hélice et une trajectoire circulaire, pour un rayon R et un pas p (figure 3.18(*gauche*))¹⁵ :

$$\mathcal{S}_\Lambda = \left\{ \left(R \cos \lambda, R \sin \lambda, \frac{p\lambda}{2\pi} \right) \mid \lambda \in \Lambda = [0, 4\pi/3[\right\} \quad (3.12)$$

L'hélice courte est une trajectoire ouverte à projection convexe (c'est le cas même pour la version de l'hélice courte générale, c'est-à-dire avec un intervalle Λ quelconque dans $[0, 2\pi[$). Pour montrer qu'elle est recouvrable par cordes on peut donc montrer qu'elle est à frontière recouvrable par cordes. Cela semble être le cas car tous les plans d'appui de cette trajectoire ne contiennent au maximum que deux points de la trajectoire (nous ne

14. Une combinaison convexe est une combinaison linéaire avec des coefficients positifs. Si un point est une combinaison convexe d'autres points, alors il est dans l'enveloppe convexe de ces points.

15. On peut choisir un intervalle Λ différent, tant qu'il est de longueur strictement inférieure à 2π .

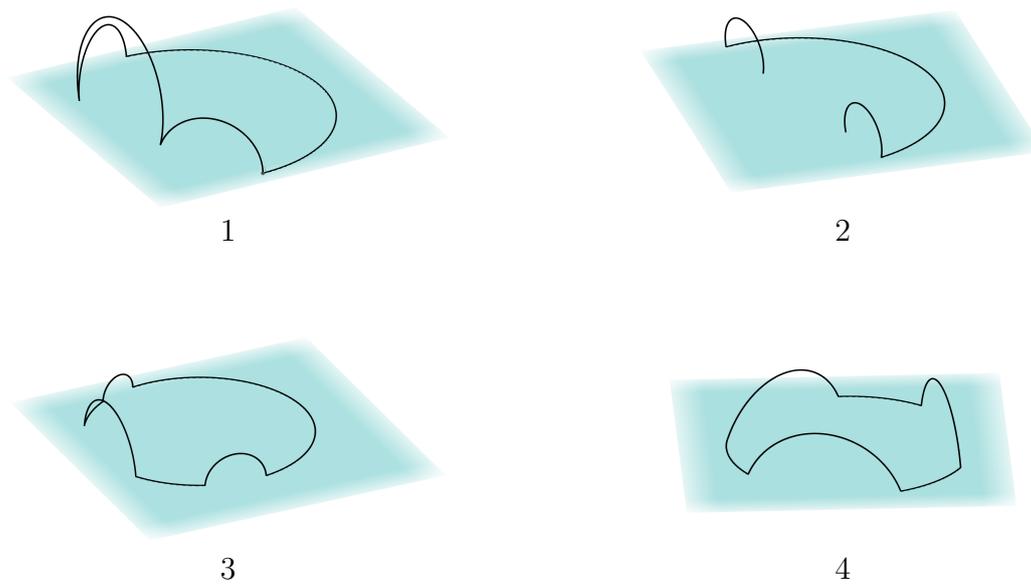


FIGURE 3.16 – Exemples de trajectoires à projection convexe (trajectoires “smiley”). La figure 3.17 considère la projection de ces cas sur le plan bleu. Elle montre que les projections convexes de 2 et 3 sont RC mais pas celles de 1 et 4.

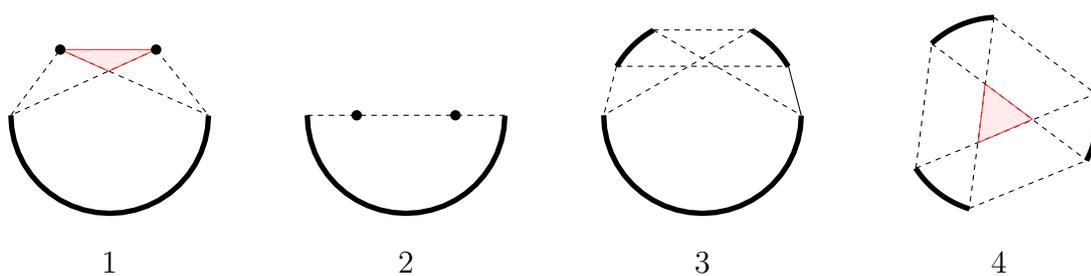


FIGURE 3.17 – Plusieurs cas d’intersection de trajectoires (trajectoires “smiley” dessinées figure 3.16) avec un plan d’appui horizontal. Les zones rouges montrent des zones de l’enveloppe convexe de ces intersections non recouvrables par cordes. Deux des quatre exemples (1 et 4) sont donc non recouvrables par cordes.



FIGURE 3.18 – Hélice courte (angle de $4\pi/3$). *Droite* : Surfaces de cordes supérieure (orange) et inférieure (noir).

le démontrons pas mais on peut en être empiriquement convaincu en “jouant” avec un logiciel de géométrie). Pour ce genre de trajectoire, les cordes issues de \mathbf{S}_0 et $\mathbf{S}_{4\pi/3}$ (ou dans un cadre plus général l’autre extrémité de la trajectoire) forment respectivement deux surfaces de $\partial C_{\mathbf{S}_\Lambda}$ (évoqué dans [55] pour le cas limite de Λ de longueur 2π , voir figure 3.18(*droite*)). Tous les points “entre” ces deux surfaces sont traversés par une corde (via le théorème 4). Si $\partial C_{\mathbf{S}_\Lambda} = \partial \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ (ce que nous supposons mais qu’il reste à prouver rigoureusement), alors l’hélice courte est RC (par application du corollaire 1).

3.6 Construction de l’enveloppe convexe

3.6.1 Plans d’appui et enveloppe convexe de la trajectoire deux cercles orthogonaux

Le but de cette section est de montrer que A_Λ défini section 3.3.1 correspond en fait à l’enveloppe convexe de la trajectoire $2C$ (cela finira du même coup de démontrer que cette trajectoire est RC). Pour cela on va montrer que chaque côté des carrés $T_{\bar{y}}$ (voir figure 3.3) est contenu dans un plan d’appui de la trajectoire $2C$ (notée \mathbf{S}_Λ , d’enveloppe convexe $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$, voir figure 3.19(*gauche*)) pour un exemple d’un tel plan d’appui). Ainsi, cela prouve que chaque point de la frontière de A_Λ appartient à un plan d’appui de \mathbf{S}_Λ , ce qui signifie que $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda} \subset A_\Lambda$. Or on avait déjà l’inclusion $A_\Lambda \subset \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ (car la frontière de A_Λ est constituée de cordes de \mathbf{S}_Λ), d’où $A_\Lambda = \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$.

La trajectoire \mathbf{S}_Λ est constituée des cercles \mathbf{S}_{Λ_1} et \mathbf{S}_{Λ_2} , paramétrés pour un rayon $R > 0$:

$$\mathbf{S}_{\Lambda_1} = \{(0, R \cos \lambda, R \sin \lambda) | \lambda \in \Lambda_1 = [0, 2\pi]\} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{S}_{\Lambda_2} = \{(R \cos \lambda, R \sin \lambda, 0) | \lambda \in \Lambda_2 = [0, 2\pi]\} \quad (3.14)$$

Parmi les quatre cordes définissant $T_{\bar{y}}$, on se concentre sur la corde C_{λ_1, λ_2} , avec $\mathbf{S}_{\lambda_1} \in \mathbf{S}_{\Lambda_1}$, $\lambda_1 \in [0, \pi]$ (cette corde est donc dans la partie $z \geq 0$ de l’espace). Les points \mathbf{S}_{λ_1} et \mathbf{S}_{λ_2} appartiennent tous deux au plan $y = \bar{y}$, donc $\cos \lambda_1 = \sin \lambda_2$ et donc $\lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \lambda_1$ ou $\lambda_2 = \frac{\pi}{2} + \lambda_1$, on choisit arbitrairement la première solution (la symétrie du problème permet de choisir n’importe laquelle des quatre cordes). On s’intéresse au plan $\mathcal{P}_{A, \lambda_1}$ contenant \mathbf{S}_{λ_1} et tangent aux cercles \mathbf{S}_{Λ_1} et \mathbf{S}_{Λ_2} (nous verrons qu’avec $\lambda_2 = \frac{\pi}{2} - \lambda_1$ le plan

$\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$ contiendra aussi $\mathbf{S}_{\lambda_2} = \mathbf{S}_{\frac{\pi}{2}-\lambda_1}$). Ce plan a pour normale un vecteur colinéaire à :

$$\mathbf{S}'_{\Lambda_1} \wedge \mathbf{S}'_{\Lambda_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin \lambda_1 \\ R \cos \lambda_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \sin \lambda_2 \\ R \cos \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -R \sin \lambda_1 \\ R \cos \lambda_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -R \cos \lambda_1 \\ R \sin \lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$= -R^2 \cos \lambda_1 \begin{pmatrix} \sin \lambda_1 \\ \cos \lambda_1 \\ \sin \lambda_1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

En dehors du cas particulier $\lambda_1 = \frac{\pi}{2}$, on peut diviser par $-R^2 \cos \lambda_1$ et paramétrer le plan $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$:

$$\mathcal{P}_{A,\lambda_1} = \{ \mathbf{x} = (x, y, z) \mid x \sin \lambda_1 + y \cos \lambda_1 + z \sin \lambda_1 = d, \lambda_1 \in]0, \pi[\setminus \frac{\pi}{2} \} \quad (3.17)$$

Pour définir d , on utilise le fait que $\mathbf{S}_{\lambda_1} \in \mathcal{P}_{A,\lambda_1}$:

$$d = R \cos^2 \lambda_1 + R \sin^2 \lambda_1 = R \quad (3.18)$$

Pour montrer que $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$ est un plan d'appui en \mathbf{S}_{λ_1} , on considère un point $\mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_{\Lambda_1}$ et on l'injecte dans l'équation de $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$:

$$R \cos \lambda \cos \lambda_1 + R \sin \lambda \sin \lambda_1 - R = \underbrace{R \cos(\lambda_1 - \lambda) - R}_{\leq 0} \quad (3.19)$$

Les termes de (3.19) sont égaux à 0 uniquement pour $\lambda = \lambda_1$ (sinon ils sont négatifs), ce qui signifie que le seul point de $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$ appartenant au cercle \mathbf{S}_{Λ_1} est \mathbf{S}_{λ_1} , les autres points du cercle étant du même côté de $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$.

On fait de même pour $\mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_{\Lambda_2}$:

$$R \cos \lambda \sin \lambda_1 + R \sin \lambda \cos \lambda_1 - R = \underbrace{R \sin(\lambda + \lambda_1) - R}_{\leq 0} \quad (3.20)$$

Les termes de (3.19) sont égaux à 0 uniquement pour $\lambda + \lambda_1 = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π), c'est-à-dire pour $\lambda = \lambda_2$. Ainsi le seul point de $\mathcal{P}_{A,\lambda_2}$ appartenant au cercle \mathbf{S}_{Λ_2} est \mathbf{S}_{λ_2} , les autres points du cercle étant du même côté de $\mathcal{P}_{A,\lambda_1}$. On a donc montré qu'il existe un plan d'appui contenant la corde C_{λ_1,λ_2} , et pour des raisons de symétries que tout point de $T_{\bar{y}}$ appartient à un plan d'appui. Cela est vrai pour tout \bar{y} (on peut refaire le raisonnement pour le cas $\lambda_1 = \pi/2$ que l'on a exclu) donc pour A_Λ . On a donc du même coup construit l'enveloppe convexe de la trajectoire 2C (représentée figure 3.19(droite)) et montré que cette enveloppe convexe est A_Λ .

3.6.2 Test d'appartenance à l'enveloppe convexe

Dans le cas général, sans tracer toute l'enveloppe convexe, il peut être utile de tester si un point appartient ou non à l'enveloppe convexe d'une trajectoire (par exemple pour savoir s'il est dans la région de Tuy). Nous présentons une méthode "basique"¹⁶ s'appliquant à une trajectoire quelconque. Une nouvelle fois on utilise les plans d'appui. On

16. On retrouve à peu près les mêmes idées qu'en géométrie 2D, au chapitre 1 pour la preuve par construction de la propriété 1.

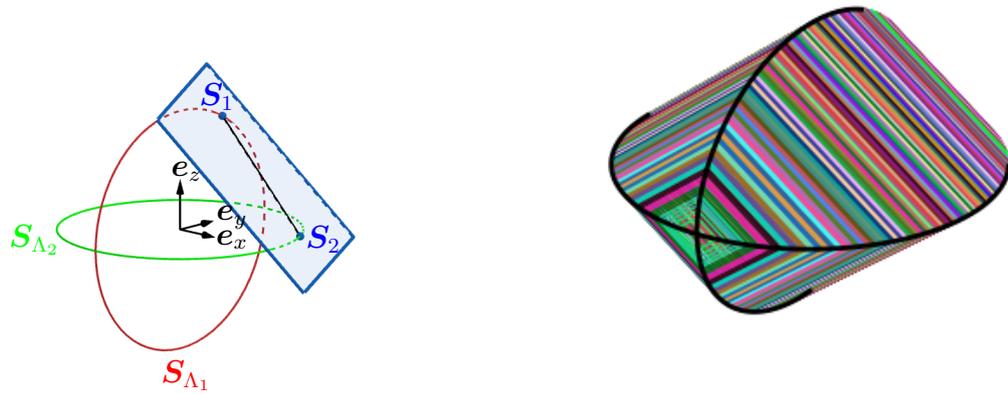


FIGURE 3.19 – *Gauche* : Un plan d’appui en S_1 et S_2 . *Droite* : L’enveloppe convexe de deux cercles orthogonaux (de même rayon et centre) vue comme un empilement de carrés.

choisit N points répartis de manière homogène sur la sphère unité. Chaque point est indexé par i ($1 \leq i \leq N$) et sera associé à un vecteur \mathbf{n}_i . Le vecteur \mathbf{n}_i peut être vu comme le vecteur normal d’une paire de plans, d’équations respectives $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} = a_i$ et $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{x} = b_i$. Les réels a_i et b_i sont choisis comme respectivement la plus petite et la plus grande valeur telles que les plans considérés intersectent la trajectoire. On a donc N paires de plans d’appui dont l’intersection des demi-espaces contenant la trajectoire contient l’enveloppe convexe de cette trajectoire. On peut tester si un point \mathbf{y} appartient à cette intersection (\mathbf{y} appartient à cette intersection si $\forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, a_i \leq \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{y} \leq b_i$).

Pour obtenir (une approximation de) l’enveloppe convexe, on peut soit faire le test pour un grand nombre de points \mathbf{y} , soit “découper” les plans d’appui pour ne garder que les parties appartenant à l’intersection des demi-espaces. Bien sûr, il faut faire tendre N vers l’infini pour obtenir exactement l’enveloppe convexe.

3.6.3 Construction de l’enveloppe convexe par construction d’unions de cordes

L’utilisation de plans d’appui est souvent une option satisfaisante pour la construction d’une enveloppe convexe (voir par exemple section 3.6.1), mais le résultat de géométrie convexe suivant [5] peut aussi être utilisé :

Théorème 7 (Lien entre enveloppe convexe et union des cordes). *Soit E un ensemble borné de points de \mathbb{R}^3 . Son enveloppe convexe est alors égale à l’union des cordes de son union des cordes.*

Cela s’applique donc à toute trajectoire bornée (bien que le résultat soit encore plus puissant, car il peut s’appliquer à des ensembles discrets de points). Dans les trajectoires recouvrables par corde, par définition il n’y a besoin de calculer qu’une seule union de cordes pour parvenir à l’enveloppe convexe, mais le théorème 7 assure qu’il faut en calculer au maximum deux (pour une trajectoire 3D).

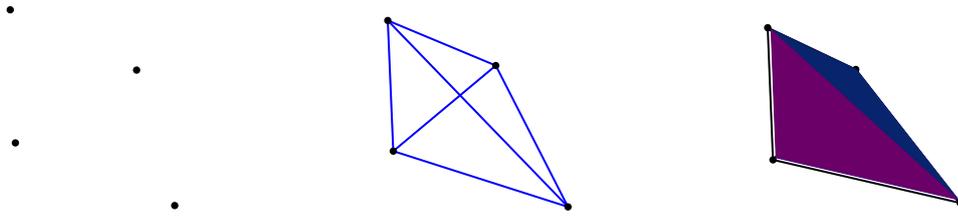


FIGURE 3.20 – *Gauche* : un simplexe en dimension 3. *Milieu* : L’union des cordes du simplexe (on trace les arêtes du tétraèdre). *Droite* : L’union des cordes des arêtes du tétraèdre (“double” union des cordes du simplexe). Cela correspond à l’enveloppe convexe du simplexe.

Nous pouvons donner les principaux éléments de la preuve du théorème 7 de [5] dans le cas d’une trajectoire 3D. La première idée est de considérer un simplexe de dimension 3 (défini par les 4 points d’un tétraèdre : $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, et $(1, 0, 0)$ pour le simplexe classique en dimension 3, mais on peut choisir n’importe quels points non coplanaires, voir figure 3.20, *gauche*). La première union de cordes de ce simplexe consiste à tracer les arêtes pour former un tétraèdre (figure 3.20, *milieu*). L’union des cordes des arêtes de ce tétraèdre “remplit” le tétraèdre (3.20, *droite*) : suite à ce “double” tracé de cordes tout point dans l’enveloppe convexe du simplexe est intersecté par une corde. Pour comprendre pourquoi un point de l’enveloppe convexe des arêtes du tétraèdre est toujours traversé par une corde, on peut adopter un raisonnement semblable à celui réalisé pour la trajectoire 3LT (3.3.3). En effet, il suffit de considérer un triangle formé de deux points du simplexe et d’un point (mobile) de l’arête formé par les deux autres points (voir figure 3.21, *gauche*). Ce triangle est RC. En faisant varier le troisième point sur l’entièreté du segment opposé aux deux autres points on peut parcourir le tétraèdre et donc le remplir de cordes.

Il est donc possible de recouvrir un ensemble de quatre points (coplanaires ou non) de \mathbb{R}^3 par cordes par “double” union des cordes. La deuxième idée est d’utiliser le “premier” théorème de Carathéodory (th. 5) appliqué à une trajectoire 3D : soit un point \mathbf{y} de l’enveloppe convexe $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ d’une trajectoire continue (non nécessairement connexe) \mathbf{S}_Λ alors il existe 4 points de \mathbf{S}_Λ tels que \mathbf{y} soit dans l’enveloppe convexe de ces 4 points. Or, on a montré que quatre points de \mathbb{R}^3 a une enveloppe convexe RC par double union des cordes, donc il existe une corde de $C_{\mathbf{S}_\Lambda}$ (et non nécessairement \mathbf{S}_Λ) passant par \mathbf{y} . La figure 3.21(*droite*) illustre ce résultat avec la trajectoire 3-sin (qui sera introduite et étudiée au chapitre suivant) : un point de l’enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin est dans l’enveloppe convexe de quatre points de la trajectoire¹⁷. De plus, il est sur une corde des quatre arêtes reliant ces points.

Néanmoins, tant sur le plan analytique que sur le plan numérique, tracer successivement deux unions de cordes peut être assez lourd.

17. La trajectoire 3-sin étant connexe, on aurait pu se contenter de 3 points : \mathbf{x} aurait été dans le triangle formé par ces 3 points (application du théorème 6).

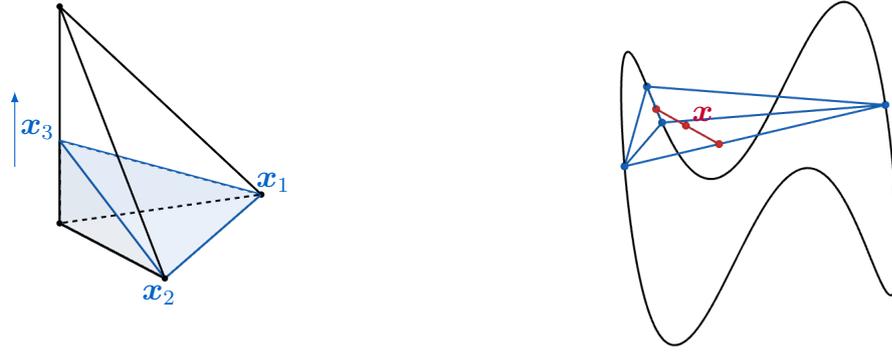


FIGURE 3.21 – *Gauche* : La construction de l’union des cordes (des arêtes) d’un tétraèdre. Le triangle formé par les points \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 et \mathbf{x}_3 est RC. En faisant varier \mathbf{x}_3 sur le segment opposé à $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ on peut “remplir” le tétraèdre de cordes. *Droite* : Le point \mathbf{x} est dans l’enveloppe convexe de quatre points de la trajectoire 3-sin. Il est sur une corde (en rouge) des arêtes (en bleu) du tétraèdre formé par ces quatre cordes.

3.7 Construction numérique de l’union des cordes dans le cas général

Dans cette dernière section, nous présentons une méthode numérique (naïve) pour construire l’union des cordes d’une trajectoire quelconque, soit pour calculer une enveloppe convexe par la méthode décrite section 3.6.3, soit pour placer une ROI (potentiellement reconstructible par méthode DBP). La solution la plus naïve pour représenter une union de cordes est de tracer directement un grand nombre de cordes C_{λ_1, λ_2} , λ_1 et λ_2 étant choisis dans une discrétisation de Λ . Cette solution est lourde, tant en terme de calculs que de visualisation. Dans le cas général, on peut discrétiser l’espace (contenant $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ et donc $C_{\mathbf{S}_\Lambda}$) en voxels et afficher les voxels intersectés par au moins une corde. Une solution simple est de discrétiser chaque corde en k points et de représenter l’ensemble des voxels par un tableau de booléens dont chaque valeur (initialement à `true`) sera mis à `false` s’il correspond à un des k points. Á la fin du processus, les voxels à `false` seront les seuls traversés par des cordes.

On rappelle que chaque corde C_{λ_1, λ_2} peut être paramétrée en

$$C_{\lambda_1, \lambda_2} = \{\mathbf{S}_{\lambda_1} + (\mathbf{S}_{\lambda_2} - \mathbf{S}_{\lambda_1})t \mid t \in [0, 1]\} \quad (3.21)$$

qui se discrétise en

$$C_{\lambda_1, \lambda_2, i} = \mathbf{S}_{\lambda_1} + (\mathbf{S}_{\lambda_2} - \mathbf{S}_{\lambda_1}) \frac{i}{k}, i \in \llbracket 0, k \rrbracket \quad (3.22)$$

La seule difficulté de cette méthode est de bien choisir les paramètres de discrétisation afin de représenter le plus fidèlement $C_{\mathbf{S}_\Lambda}$. La trajectoire \mathbf{S}_Λ est discrétisée en n_{C_1} points représentant n_{C_1} positions de source qui seront chacun reliés à n_{C_2} positions de source. En considérant que l’espace des voxels est discrétisé en un cube de n_x^3 voxels, il paraît cohérent que $n_{C_1} n_{C_2}$ soit au moins de l’ordre de n_x^2 . Un choix possible est : $n_{C_1} = n_{C_2} = 2n_x = k$ (ce sont des paramètres déterminés empiriquement).

Cet algorithme peut par exemple être utilisé pour la trajectoire 3LT, figure 3.22, avec la paramétrisation de la section 3.3.3. Pour des trajectoires particulières, des méthodes plus adaptées et précises peuvent être mises en place, comme nous le verrons au chapitre suivant.

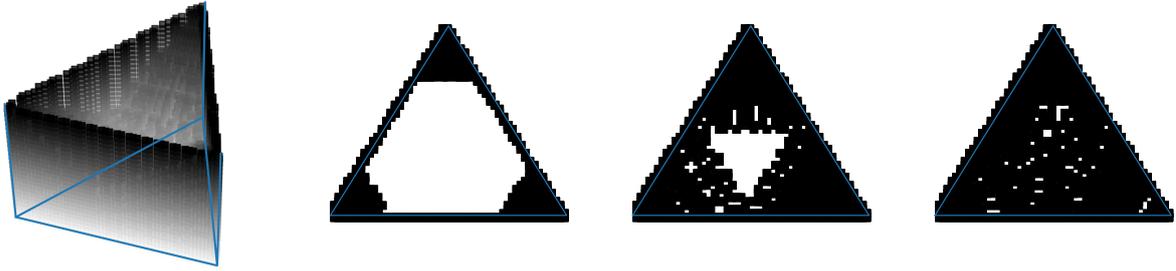


FIGURE 3.22 – Construction “naïve” de l’union des cordes pour la trajectoire 3LT. Le voxel est affiché (en noir) s’il est traversé par une corde. Simulations réalisées avec $h = 1$ et $l = 2$ (pour définir la trajectoire), $n_x = 60$, $n_{C_1} = n_{C_2} = 100$ et $k = 40$ (pour le calcul numérique de l’union des cordes). Trois coupes selon l’axe e_z sont présentées, de gauche à droite : $z = 3h/4$, $z = h/2$ et $z = h/3$ (attitude maximale pour laquelle l’union des cordes est simplement connexe dans la coupe).

Chapitre 4

Etude des trajectoires n -sin

Ce chapitre s'inscrit dans la lignée du précédent : il est principalement géométrique, et s'attache à la description de propriétés de trajectoires, notamment l'union de leurs cordes¹. Cependant, ce chapitre se concentre uniquement sur les trajectoires n -sin, en particulier les trajectoires 2-sin et 3-sin. On s'attarde par exemple sur la construction de l'union des cordes et de l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin. Toutes ces considérations géométriques trouvent leur place dans un cadre tomographique dans le dernier chapitre.

4.1 Présentation des trajectoires n -sin

Soient un rayon R et une hauteur H deux réels strictement positifs et un entier $n > 1$. Nous introduisons les *trajectoires n -sin*, trajectoires continues (et différentiables), fermées et connexes à projection convexe :

$$\mathcal{S}_\Lambda^n = \{ \mathcal{S}_\lambda^n = (R \cos \lambda, R \sin \lambda, H \cos(n\lambda)) \mid \lambda \in \Lambda = [0, 2\pi[\} \quad (4.1)$$

Ces trajectoires peuvent être également définies comme des sinusoides fermées autour d'un cylindre (la figure 4.1 présente les trajectoires 2-sin, 3-sin et 4-sin supportées par un cylindre). Elles sont de période 2π ce qui permettra parfois d'adopter un autre intervalle de définition Λ (de longueur toujours égale à 2π). Ces trajectoires sont aussi définies dans [7] (sous le nom de *saddle trajectories*²).

La trajectoire 2-sin correspond à la trajectoire selle "classique", étudiée et définie dans un cadre plus général par F.Noo et J.Pack [60], même on trouve mention de cette trajectoire en 1990 [71] et 1996 [91]³. De manière générale une trajectoire selle peut être vue comme une intersection de deux surfaces définies par $z = g_1(x)$ et $z = g_2(y)$ avec g_1 et g_2 deux fonctions telles que [60] :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, g_1''(x) > 0, g_1'(0) = 0, g_1(0) < 0 \\ \forall y \in \mathbb{R}, g_2''(y) < 0, g_2'(0) = 0, g_2(0) = -g_1(0) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Pour retrouver l'équation (4.1) avec $n = 2$, donc l'équation de la trajectoire selle classique, Pack et Noo prennent $g_1(x) = H((2x^2/R^2) - 1)$ et $g_2(y) = -g_1(y)$ [60]. Ces deux surfaces définissent aussi, par leur convexité, l'enveloppe convexe (région de Tuy,

1. Une définition de l'union des cordes est donnée chapitre 3 équation (3.2).
2. Bien que, comme nous le verrons, le terme *saddle*, qui se traduit par selle, est plutôt consacré à la seule trajectoire 2-sin.
3. L'article fait mention des trajectoires n -sin avec n une puissance de deux, sous le nom de *circular sinusoids*.

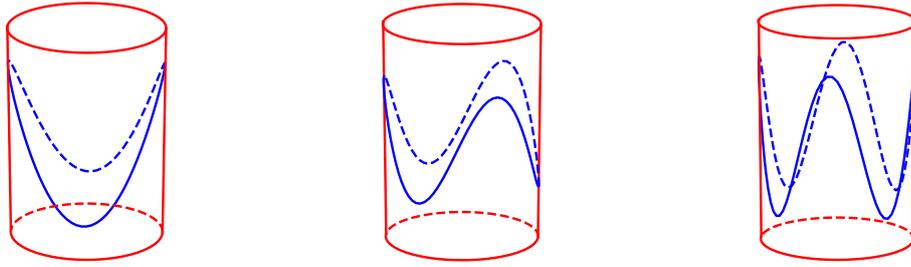


FIGURE 4.1 – *Gauche* : La trajectoire 2-sin (selle) vue comme une sinusoïde de période π sur un cylindre. *Milieu* : La trajectoire 3-sin (vue comme une sinusoïde de période $2\pi/3$) sur un cylindre. *Droite* : La trajectoire 4-sin (vue comme une sinusoïde de période $\pi/2$) sur un cylindre.

sous-ensemble de \mathbb{R}^3 , dont nous appelons le volume “volume de Tuy”, voir figure 4.2) de la trajectoire selle [60].

De notre côté, dans cette continuité, nous avons calculé le volume de Tuy $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}) \in \mathbb{R}^+$ de la trajectoire selle :

$$V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}) = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{g_1(x)}^{g_2(y)} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{H(2x^2/R^2-1)}^{-H(2y^2/R^2-1)} r dz dr d\theta$$

En se servant du fait que l’intersection des surfaces engendrées par g_1 et g_2 définissent la trajectoire selle, et donc s’intersectent sur le cylindre de rayon R , on peut effectuer le changement de variables $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, d’où :

$$\begin{aligned} V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{H(2r^2 \cos^2(\theta)/R^2-1)}^{-H(2r^2 \sin^2(\theta)/R^2-1)} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^R -2H \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right) r dr d\theta \\ &= H\pi R^2 \end{aligned}$$

Notre résultat est donc d’affirmer que le volume de Tuy de la trajectoire selle est la moitié de celle d’un cylindre de même rayon et même hauteur ($2H$). En notant $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^n})$ le volume de Tuy d’une trajectoire n -sin, et avec $n > 2$, on a l’encadrement suivant :

$$\pi H R^2 = V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}) < V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^n}) < V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^{n+1}}) < 2\pi H R^2 \quad (4.3)$$

Rappelons qu’avoir un volume de Tuy élevé est intéressant, car cela permet d’avoir des zones potentielles de reconstruction plus grandes. Les inégalités de l’équation (4.3) se justifient par le fait que plus n est élevé, et plus l’enveloppe convexe d’une trajectoire n -sin approxime un cylindre de hauteur $2H$ (et s’assimile au cylindre pour n tendant vers l’infini $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^n}) = 2HR^2$). Cela peut aussi se visualiser en étudiant l’intersection des trajectoires n -sin avec un plan horizontal, ce qu’on fera section 4.6.1. Enfin, la section 4.6.1 donnera des approximations de $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^3})$ et $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^4})$.

D’un point de vue pratique, les trajectoires n -sin telles que décrites équation (4.1) sont difficilement réalisables par un C-arm “standard” sans translation du lit du patient ⁴.

4. Un C-arm “standard” ne peut réaliser que des rotations (voir chapitre 0 section 0.3), et donc difficilement suivre une trajectoire définie sur un cylindre. En effet la source de rayons X reste à une distance fixe de l’isocentre.



FIGURE 4.2 – Enveloppe convexe (région de Tuy) $\Omega_{\mathcal{S}_\lambda^2}$ de la trajectoire selle (ou 2-sin). *Droite* : La trajectoire selle et son enveloppe convexe définis par deux surfaces, g_1 et g_2 , dont les intersections avec $\Omega_{\mathcal{S}_\lambda^2}$ sont respectivement représentées en bleu (générée par $g_1(x)$) et en rouge (générée par $g_2(y)$).

Cependant, des trajectoires proches, définies sur une sphère, peuvent être réalisées par un C-arm (pour H bien plus petit que R , on peut avoir des trajectoires presque équivalentes). Un axe de rotation (orthogonal au “C” du C-arm) produira une trajectoire circulaire qui sera “modulée” par la deuxième rotation. Par exemple, [60, section 4] propose trois exemples de trajectoires selles dites sphériques, dont la première (appelée selle X) est proche de la trajectoire selle classique (trajectoire 2-sin, voir figure 4.3). Les points (x, y, z) de cette trajectoire sphérique peuvent être paramétrés par $\lambda \in [0, 2\pi[$:

$$x(\lambda) = R \cos(\lambda) \cos(\psi_1(\lambda)) \quad (4.4)$$

$$y(\lambda) = x(\lambda - \pi/2) = R \sin \lambda \cos(\psi_1(\lambda)) \quad (4.5)$$

$$z(\lambda) = R \sin(\psi_1(\lambda)) \quad (4.6)$$

avec $k \in]0, 0.5[$ et $\psi_1(\lambda) = \arctan(k \cos(2\lambda)/\sqrt{1 - k^2})$. Un autre article [61] paru la même année propose une trajectoire (très) proche de la selle X appelée *wobble* (figure 4.3) et définie par :

$$x(\lambda) = R \cos(\lambda) \cos(\psi_2(\lambda)) \quad (4.7)$$

$$y(\lambda) = R \sin(\lambda) \cos(\psi_2(\lambda)) \quad (4.8)$$

$$z(\lambda) = R \sin(\psi_2(\lambda)) \quad (4.9)$$

avec $\psi_2(\lambda) = k \cos(2\lambda)$.

Nous choisissons néanmoins de travailler avec la trajectoire définie équation (4.1), plus simple à étudier et qui nous semble quand même pertinente même dans un cadre clinique, que ce soit avec un C-arm (car comme vu au chapitre 0 section 0.3 des C-arm modernes proposent des translations) ou avec un scanner multi-coupes (dont la translation du lit du patient est courante avec la trajectoire hélicoïdale), ou encore avec un dispositif futur. De plus, plusieurs résultats (notamment au chapitre 5) peuvent s’appliquer à la trajectoire selle “classique” comme à une trajectoire selle sphérique/wobble. Enfin, nous pouvons adapter la trajectoire wobble aux trajectoires n -sin afin d’obtenir des trajectoires n -sin sphériques, il suffit simplement de changer l’équation (4.9) en (voir figure 4.3 *droite* pour la trajectoire 3-sin sphérique) :

$$z(\lambda) = R \sin(k \cos(n\lambda)) \quad (4.10)$$

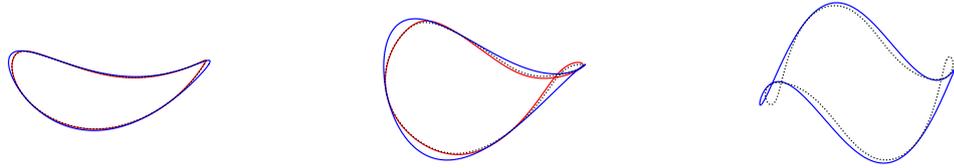


FIGURE 4.3 – *Gauche, milieu* : Trajectoires 2-sin (bleu), selle X (rouge) et wobble (pointillés noirs), pour $R = 1$, $H = k$ et $k = 0.3$ (*gauche*) et $k = 0.499$ (*milieu*). Pour k peu élevé, une portion de cylindre peut s'approcher à une portion de sphère, donc les trajectoires sont proches. Quand k augmente les trajectoires sphériques s'éloignent de la trajectoire 2-sin. *Droite* : Trajectoire 3-sin (cylindrique) et trajectoire wobble adaptée selon l'équation (4.10) pour $n = 3$, $k = 0.499$.

4.2 Cordes et trajectoires n -sin : premier aperçu

Dans le cas général, une corde reliant \mathbf{S}_1 à \mathbf{S}_2 est paramétrée comme une combinaison convexe de deux points :

$$C_{12} = \{\mathbf{S}_1 + t(\mathbf{S}_2 - \mathbf{S}_1) = (1-t)\mathbf{S}_1 + t\mathbf{S}_2 \mid t \in [0, 1]\} \quad (4.11)$$

Dans le cas d'une trajectoire n -sin, les cordes peuvent être décrites par :

$$C_{12} = \left\{ (1-t) \begin{pmatrix} R \cos \lambda_1 \\ R \sin \lambda_1 \\ H \cos(n\lambda_1) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} R \cos \lambda_2 \\ R \sin \lambda_2 \\ H \cos(n\lambda_2) \end{pmatrix} \mid t \in [0, 1] \right\} \quad (4.12)$$

On peut commencer par démontrer un résultat intuitif étant l'allure des trajectoires, à savoir que pour les trajectoires n -sin avec n impair, le seul point se situant sur l'axe porté par \mathbf{e}_z et traversé par une corde est l'origine. On note $\mathbf{x}_O = (0, 0, z_O)$, $z_O \in [-H, H]$, un point de l'axe z et on cherche l'intersection entre \mathbf{x}_O et une corde C_{12} :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_O \end{pmatrix} = (1-t) \begin{pmatrix} R \cos \lambda_1 \\ R \sin \lambda_1 \\ H \cos(n\lambda_1) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} R \cos \lambda_2 \\ R \sin \lambda_2 \\ H \cos(n\lambda_2) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Des deux premières lignes on peut vérifier que le milieu de la corde considérée appartient à l'axe z : $\left. \begin{array}{l} (1-t) \cos \lambda_1 + t \cos \lambda_2 = 0 \\ (1-t) \sin \lambda_1 + t \sin \lambda_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (1-t)^2 \cos^2 \lambda_1 = t^2 \cos^2 \lambda_2 \\ (1-t)^2 \sin^2 \lambda_1 = t^2 \sin^2 \lambda_2 \end{array} \right\}$
 $\Rightarrow (1-t)^2 = t^2 \Rightarrow t = 1/2$

On en déduit que $\cos \lambda_1 = -\cos \lambda_2$ et que $\sin \lambda_1 = -\sin \lambda_2$, donc $\lambda_1 = \lambda_2 + \pi$ (à 2π près). Ce résultat se comprend bien en regardant la configuration de la corde et de la trajectoire n -sin en projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (ou vue de haut) car la corde est alors un diamètre du cercle résultant de la projection de la trajectoire.

On a alors : $z_O = \frac{H}{2} \cos(n\lambda_1) + \frac{H}{2} \cos(n\lambda_1 + n\pi)$. On distingue alors deux cas :

$$\begin{cases} z_O = H \cos(n\lambda_1) \in [-H, H] \text{ si } n \text{ pair} \\ z_O = 0 \text{ si } n \text{ impair} \end{cases} \quad (4.14)$$

Selon la parité de n , on a deux cas opposés. Si n est pair, cela signifie que tout point sur l'axe \mathbf{e}_z et appartenant à $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}^n$ est traversé par une corde. Au contraire, le seul point traversé par une corde pour une trajectoire n -sin avec n impair est $(0, 0, 0)$ ⁵. Concrètement, cela

5. Brièvement évoqué dans [59].

implique que si on adopte une approche DBP, on ne peut pas mettre de ROI au centre d'une trajectoire d'ordre impair, contrairement à une trajectoire d'ordre pair. On notera cependant qu'il est difficile de discuter sur la largeur de la ROI. En fait, en dehors de la trajectoire selle (2-sin) (figure 4.1 (*gauche*)), dont l'enveloppe convexe et l'union des cordes sont identiques [60], aucune trajectoire n -sin n'a tout point de son enveloppe convexe traversé par une corde. Néanmoins, on peut exhiber des régions "denses" en cordes, en particulier des segments verticaux (parallèles à l'axe \mathbf{e}_z) de longueur $2H$. Pour cela on utilise le théorème 4 du chapitre 3 qui, appliquée à une trajectoire n -sin, énonce que si deux extrémités d'une trajectoire n -sin sont traversées par une corde, alors par tout point du segment passe une corde.

Pour trouver les extrémités de ces segments on peut remarquer que le plan horizontal d'équation $z = H$ (ainsi que celui d'équation $z = -H$) intersecte une trajectoire n -sin en n points dont l'enveloppe convexe forme un polygone régulier (un segment pour la trajectoire selle, un triangle pour la trajectoire 3-sin, voir figure 4.4). En effet, cela correspond respectivement aux équations $H \cos(n\lambda) = H$ et $H \cos(n\lambda) = -H$ de solutions sur $[0, 2\pi[$ respectives $\lambda_j = 2j\pi/n$ et $\lambda_j = (2j+1)\pi/n$ pour $0 \leq j \leq n-1$. Considérons les cordes (au nombre de $n(n-1)/2$), indépendamment pour chaque plan, reliant les points d'intersection (pour un plan les cordes forment un triangle pour la trajectoire 3-sin et un carré avec ses diagonales pour la trajectoire 4-sin, voir figure 4.5). Alors, en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, les cordes du plan $z = H$ intersectent les cordes du plan $z = -H$ en des points \mathbf{a}_i correspondant aux segments verticaux (de longueur $2H$) pour lesquels chaque point est traversé par une corde. On peut donner à titre d'exemple la représentation de ces points pour les trajectoires 3-sin et 4-sin (figure 4.5).

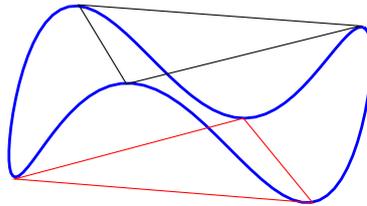


FIGURE 4.4 – La trajectoire 3-sin (en bleu) et ses intersections avec les plans $z = H$ et $z = -H$. Le triangle noir est constitué des cordes reliant les 3 points de la trajectoire 3-sin de 3^e coordonnée $z = H$, et le triangle rouge des cordes passant par les points de 3^e coordonnée $z = -H$.

Pour la trajectoire 3-sin, avec $R = 1$, les points \mathbf{a}_i , $1 \leq i \leq 6$ en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ ont pour coordonnées :

$$(\mathbf{a}_i)_{1 \leq i \leq 6} = \left\{ \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{6} \right), \left(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\} \quad (4.15)$$

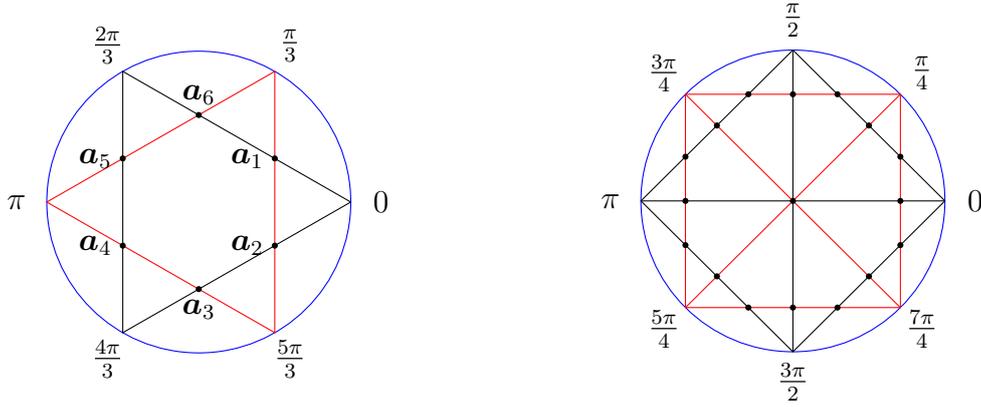


FIGURE 4.5 – En projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, les points \mathbf{a}_i délimitent les segments verticaux de longueur $2H$ pour lesquels chaque point est intersecté par une corde. *Gauche* : Trajectoire 3-sin. *Droite* : Trajectoire 4-sin.

Pour la trajectoire 4-sin :

$$(\mathbf{a}_i)_{1 \leq i \leq 17} = \left\{ (0, 0), \left(\pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right), \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \right), \right. \\ \left. \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(0, \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (4.16)$$

Ces points \mathbf{a}_i peuvent aider à centre une ROI pour la méthode DBP, même s'il est difficile de donner les dimensions d'une telle ROI.

4.3 Invariances et symétries

Les trajectoires n -sin présentent un certain nombre de symétries et d'invariances. En notant Q_θ la matrice de rotation d'angle θ autour de l'axe \mathbf{e}_z , et K_{xy} (resp. K_{xz}) la matrice de symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (resp. $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$) :

1. invariance par rotation de $\frac{2k\pi}{n}$, $0 \leq k \leq n$, autour de l'axe \mathbf{e}_z ,
c'est-à-dire $Q_{\frac{2k\pi}{n}} \mathbf{S}_\lambda = \mathbf{S}_{\lambda + \frac{2k\pi}{n}}$
2. invariance par composée d'une rotation de $\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $0 \leq k < n$, autour de l'axe \mathbf{e}_z et d'une symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, c'est-à-dire $K_{xy} Q_{\frac{(2k+1)\pi}{n}} \mathbf{S}_\lambda = \mathbf{S}_{\lambda + \frac{(2k+1)\pi}{n}}$
3. symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ (et par rapport à $(n-1)$ autres plans en appliquant l'invariance par rotation), c'est-à-dire $K_{xz} \mathbf{S}_\lambda = \mathbf{S}_{-\lambda}$

Démonstration. 1. On applique à \mathbf{S}_λ^n une rotation de $\frac{2k\pi}{n}$, $0 \leq i \leq n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2k\pi/n) & -\sin(2k\pi/n) & 0 \\ \sin(2k\pi/n) & \cos(2k\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_{\frac{2k\pi}{n}}} \underbrace{\begin{pmatrix} R \cos \lambda \\ R \sin \lambda \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_\lambda^n} = \begin{pmatrix} R \cos(\lambda + 2k\pi/n) \\ R \sin(\lambda + 2k\pi/n) \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix} \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} R \cos(\lambda + 2k\pi/n) \\ R \sin(\lambda + 2k\pi/n) \\ H \cos(n(\lambda + 2k\pi/n)) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{\lambda+2k\pi/n}^n}$$

2. On applique à \mathbf{S}_λ^n une rotation de $\frac{(2k+1)\pi}{n}$, $0 \leq k < n$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos((2k+1)\pi/n) & -\sin((2k+1)\pi/n) & 0 \\ \sin((2k+1)\pi/n) & \cos((2k+1)\pi/n) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{Q_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}} \begin{pmatrix} R \cos \lambda \\ R \sin \lambda \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ R \sin(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} R \cos(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ R \sin(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ -H \cos(n(\lambda + (2k+1)\pi/n)) \end{pmatrix}$$

On compose ensuite par une symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{K_{xy}} \underbrace{\begin{pmatrix} R \cos(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ R \sin(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ -H \cos(n(\lambda + (2k+1)\pi/n)) \end{pmatrix}}_{Q_{\frac{(2k+1)\pi}{n}} \mathbf{S}_\lambda} = \underbrace{\begin{pmatrix} R \cos(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ R \sin(\lambda + (2k+1)\pi/n) \\ H \cos(n(\lambda + (2k+1)\pi/n)) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{\lambda+(2k+1)\pi/n}^n} \quad (4.17)$$

3. On applique à \mathbf{S}_λ^n une symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K_{xz}} \begin{pmatrix} R \cos \lambda \\ R \sin \lambda \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \lambda \\ -R \sin \lambda \\ H \cos(n\lambda) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} R \cos(-\lambda) \\ R \sin(-\lambda) \\ H \cos(-n\lambda) \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}_{-\lambda}^n} \quad (4.18)$$

□

Ces propriétés permettront de travailler sur des parties d'une trajectoire n -sin puis d'étendre les propriétés à l'entièreté de la trajectoire, par exemple pour la construction de l'enveloppe convexe et de l'union des cordes de la trajectoire 3-sin section 4.6.

4.4 Projection et polynôme de Tchebychev

On a vu dans la section 4.3 que le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ est plan de symétrie d'une trajectoire n -sin. On peut donc facilement projeter la trajectoire sur ce plan :

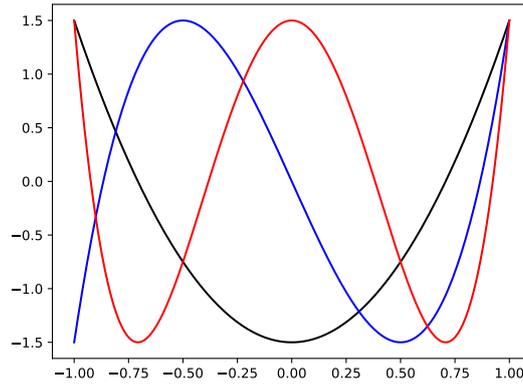


FIGURE 4.6 – Projections des trajectoires 2-sin (noir), 3-sin (bleu) et 4-sin (rouge) sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ pour $R = 1$ et $H = 1.5$. Elles correspondent respectivement aux polynômes de Tchebychev de degré 2, 3 et 4.

$$x(\lambda) = R \cos \lambda \quad (4.19)$$

$$z_n(\lambda) = H \cos(n\lambda) \quad (4.20)$$

On peut travailler avec l'équation cartésienne :

$$z_n(x) = H \cos(n \arccos(x/R)) \quad (4.21)$$

L'équation (4.21) est en fait un polynôme de Tchebychev. Pour les trajectoires 2-sin, 3-sin et 4-sin on a par exemple (ces polynômes sont tracés figure 4.6) :

$$z_2(x) = H(2(x/R)^2 - 1) \quad (4.22)$$

$$z_3(x) = H(4(x/R)^3 - 3x/R) \quad (4.23)$$

$$z_4(x) = H(8(x/R)^4 - 8(x/R)^2 + 1) \quad (4.24)$$

Nous n'utilisons pas directement ces propriétés, mais cela donne par exemple une idée intuitive de la construction de l'enveloppe convexe des trajectoires n -sin. Par exemple, pour la trajectoire 3-sin en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, on peut considérer la droite tangente en \mathbf{S}_λ^3 , $\lambda \in]0, \pi/3[$. Ramené à l'espace 3D, cette droite représente un plan tangent en \mathbf{S}_λ^3 et $\mathbf{S}_{-\lambda}^3$ (par symétrie de la trajectoire 3-sin par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, orthogonal au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$)⁶. Dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, \mathbf{S}_λ^3 est représenté par les coordonnées cartésiennes x_λ et $z_3(x_\lambda)$. Pour $\lambda \in]0, \pi/3[$, on a $x_\lambda \in]R/2, R[$. La figure 4.7 montre une droite tangente en $(x_{\pi/6}, z_3(x_{\pi/6})) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$. La convexité⁷ de $z_3(x)$ sur $]R/2, R[$ fait que le seul point d'intersection entre la droite tangente en \mathbf{S}_λ^3 , $\lambda \in]0, \pi/3[$, et $z_x(3)$ est $(x_\lambda, z_3(x_\lambda))$. On en déduit que le plan tangent associé est un plan d'appui. Par les propriétés d'invariance et de symétrie (voir section 4.3) on peut ainsi définir les différents plans d'appui de la trajectoire 3-sin, et donc son enveloppe convexe $\Omega_{\mathbf{S}_\lambda^3}$. Une construction plus détaillée et rigoureuse de $\Omega_{\mathbf{S}_\lambda^3}$ est proposée section 4.6.1.

6. On vérifiera section 4.6.1 que le vecteur normal à un tel plan est bien contenu dans $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$.

7. $z_3''(x) = 24Hx/R^3 \implies \forall x \in]R/2, R[, z_3''(x) > 0$. La projection de \mathbf{S}_λ^3 sur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ est donc convexe sur $x \in]R/2, R[$, ou de manière équivalente $\lambda \in]-\pi/3, \pi/3[$.

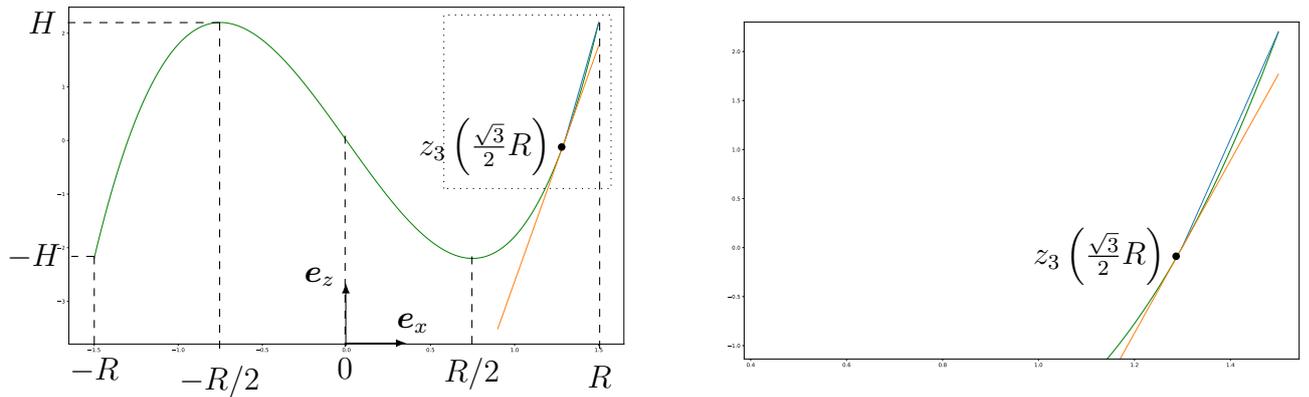


FIGURE 4.7 – La courbe verte représente une projection de \mathcal{S}_Λ^3 sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ (c'est donc dans ce plan un polynôme de Tchebychev $z_3(x)$) pour $R = 1.5$, $H = 2.2$. La ligne orange est la droite tangente en $\mathcal{S}_{\pi/6}^3$ (en projection), c'est une “droite d'appui” (la trajectoire se situe entièrement du même côté de la droite). La ligne bleue relie $\mathcal{S}_{\pi/6}^3$ (en projection) à un sommet de la projection : c'est une corde de la projection (convexe sur cet intervalle), ce ne peut pas être une “droite d'appui”.

4.5 Construction numérique de l'union de cordes des trajectoires n -sin

4.5.1 Méthode

Pour un point (x_0, y_0) du disque centré de rayon R dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, on note \mathcal{L}_0 la ligne verticale passant par ce point (voir figure 4.8). On veut déterminer l'ensemble des points de \mathcal{L}_0 traversés par une corde d'une trajectoire n -sin (de rayon R).

En projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, la droite (et donc la corde associée) passant par une position de source donnée $\mathcal{S}_1 = (x_1, y_1, z_1) = (R \cos(\lambda_1), R \sin(\lambda_1), H \cos(n\lambda_1))$ et (x_0, y_0) a pour équation cartésienne, si $x_1 \neq x_0$:

$$y(x_0) = y_0 \quad (4.25)$$

$$y(x_1) = y_1 \quad (4.26)$$

$$y(x) = ax + b \quad (4.27)$$

avec $a = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}$ et $b = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1}$. Dans le cas où $x_1 = x_0$, on a $x_2 = x_1$ et donc $y_2 = -y_1$ (car $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$ est plan de symétrie d'une trajectoire n -sin).

On cherche la position de source $\mathcal{S}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ telle que la droite décrite contienne la corde $C_{1,2}$ (reliant \mathcal{S}_1 à \mathcal{S}_2) puis on en déduira l'intersection $(x_0, y_0, z_0) = \mathcal{L}_0 \cap C_{1,2}$ (voir figure 4.8, *gauche*). Les intersections cette droite avec le cercle d'équation $x^2 + y^2 = R^2$ sont les racines $\{x_{12}\}$ de :

$$a^2 x^2 + 2abx + b^2 + x^2 = R^2 \quad (4.28)$$

$$\{x_{12}\} = \frac{-ba \pm \sqrt{a^2 b^2 + (a^2 + 1)(R^2 - b^2)}}{a^2 + 1} \quad (4.29)$$

On choisit ensuite $x_2 \in \{x_{12}\}$ tel que $(x_0 - x_2)(x_0 - x_1) < 0$ (c'est-à-dire $x_0 \in [x_1, x_2]$ ou $x_0 \in [x_2, x_1]$, voir figure 4.8, *gauche*). On peut ensuite facilement calculer $y_2 \in \{\pm \sqrt{R^2 - x_2^2}\}$, en choisissant y_2 tel que $(y_0 - y_2)(y_0 - y_1) < 0$. On finit enfin de

déterminer \mathbf{S}_2 ⁸ :

$$\lambda_2 = \begin{cases} \pi & \text{si } y_2 = 0 \text{ et } x_2 < 0 \\ 2\arctan\left(\frac{y_2}{x_2 + \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.30)$$

La connaissance de λ_2 amène à celle de z_2 (4.1), et enfin, via le théorème de Thalès (voir figure 4.8, droite) :

$$z_0 = z_1 + (z_2 - z_1) \left| \frac{x_0 - x_1}{x_2 - x_1} \right| \quad (4.31)$$

Pour un point $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{L}_0$ (x_0, y_0 connus), en faisant varier λ_1 de 0 à 2π , en trouvant \mathbf{S}_2 tel que $\mathbf{x}_0 \in C_{1,2}$ puis en en déduisant z_0 , on peut déterminer $z_{\min, x_0, y_0} = \min_{\lambda_1 \in [0, 2\pi[} \{z_0 | \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in C_{1,2}\}$ et $z_{\max, x_0, y_0} = \max_{\lambda_1 \in [0, 2\pi[} \{z_0 | \mathbf{x}_0 \in C_{1,2}\}$. Pour chaque ligne \mathcal{L}_0 , le point $(x_0, y_0, z_{\min, x_0, y_0})$ (resp. $(x_0, y_0, z_{\max, x_0, y_0})$) est donc tel qu'aucune corde n'intersecte \mathcal{L}_0 au-dessous de (x_0, y_0, z_{\min}) (resp. au-dessus de (x_0, y_0, z_{\max})). Le théorème 4 (chapitre 3) énonce que tout point (x_0, y_0, z_0) , avec $z_0 \in [z_{\min, x_0, y_0}, z_{\max, x_0, y_0}]$, est traversé par une corde.

Ainsi, l'ensemble des points (x_0, y_0, z_{\min}) et (x_0, y_0, z_{\max}) , avec l'ensemble des (x_0, y_0) recouvrant le disque (du plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$) centré de rayon R , décrivent deux surfaces recouvrant $\partial C_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$. Cela permet de déterminer l'union des cordes d'une trajectoire n -sin (et plus généralement d'une trajectoire à projection convexe dont la projection est un cercle). Notons qu'on ne trace pas les cordes, mais des surfaces de points définissant $C_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$. En utilisant cette méthode avec une discrétisation en coordonnées polaires, on peut par exemple simuler l'union de cordes des trajectoires 3-sin et 4-sin (voir figure 4.9). Dans la section 4.6.2, nous étudierons plus en détails la construction de l'union des cordes de la trajectoire 3-sin.

Pour finir, nous pouvons tracer les variations de z_0 en fonction de λ_1 (figure 4.10, ce travail a aussi été réalisé dans [7] avec d'autres configurations, mais sans donner de méthode). Dans nos tracés, pour une valeur z_0 fixée, il y a (à deux exceptions près correspondant à $\partial C_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$) soit au moins 4 valeurs de λ_1 soit aucune correspondantes. Cela signifie que les points (x_0, y_0, z_0) présentés dans cette figure sont traversés par au moins deux (et pas quatre, car $C_{\lambda_1, \lambda_2} = C_{\lambda_2, \lambda_1}$) cordes si z_0 est telle qu'ils sont dans $C_{\mathbf{S}_\Lambda^n}$.

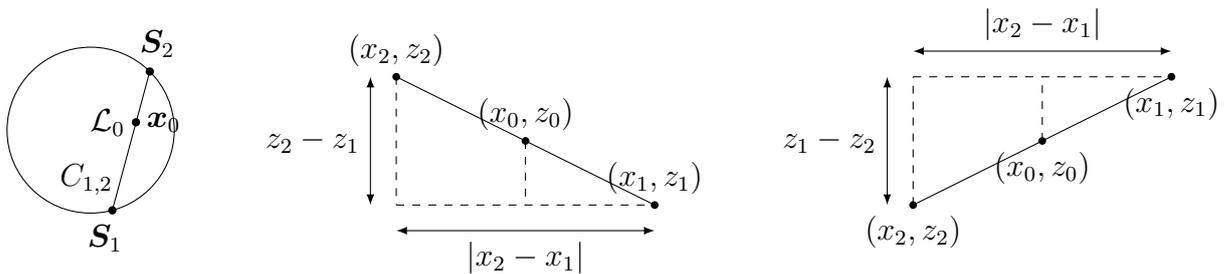


FIGURE 4.8 – *Gauche* : Une trajectoire n -sin et une ligne verticale \mathcal{L}_0 vues de dessus. Connaisant \mathbf{S}_1 et (x_0, y_0) , on cherche la coordonnée z_0 du point $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ défini par $\mathcal{L}_0 \cap C_{1,2}$. *Droite* : Configuration de Thalès pour les points $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ et (x_0, y_0, z_0) en projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z)$, pour $z_1 < z_2$ et $z_1 > z_2$. Dans les deux configurations on retrouve la formule (4.31).

8. On utilise une formule de l'angle moitié pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, pour directement travailler avec $\lambda_2 \in [-\pi, \pi]$.

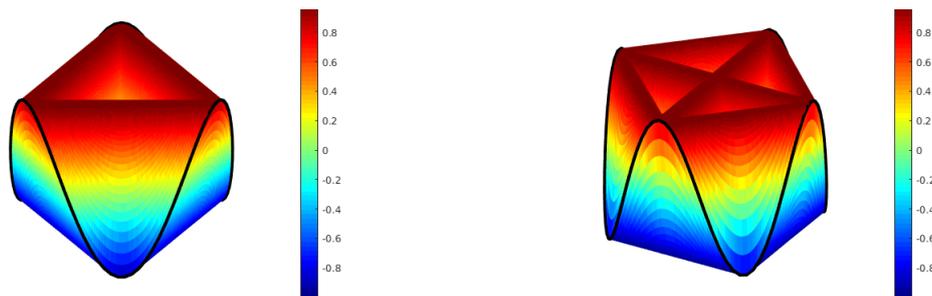


FIGURE 4.9 – Construction d'unions de cordes pour la trajectoire 3-sin (*gauche*) et 4-sin (*droite*) avec $H = 1$ (la variation de couleur correspond à la variation sur l'axe e_z).

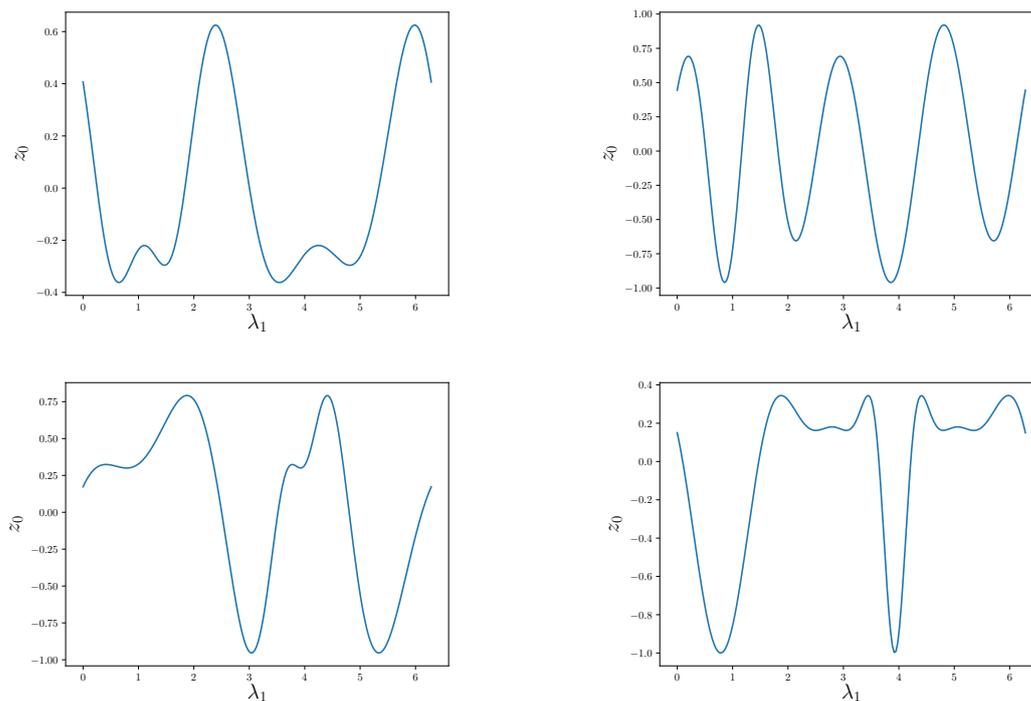


FIGURE 4.10 – Pour un point (x_0, y_0) du disque unité contenu dans le plan (e_x, e_y) on fait passer une ligne verticale \mathcal{L}_0 . Pour une trajectoire n -sin avec $R = H = 1$ on trace en fonction de λ_1 la coordonnée z (notée z_0) de l'intersection de la corde C_{λ_1, λ_2} et de \mathcal{L}_0 . *Gauche* : Trajectoire 3-sin. *Droite* : Trajectoire 4-sin. *Haut* : $(x_0, y_0) = (0.1, 0.2)$. *Bas* : $(x_0, y_0) = (-0.3, -0.3)$.

4.5.2 Nombre de cordes par point de l'intérieur de l'union des cordes

À partir de la section précédente et de la figure 4.10 on peut conjecturer que par un point de l'intérieur strict de $C_{S_\Lambda^n}$ passe au moins deux cordes. On peut trouver une preuve pour la trajectoire selle dans [60, annexe A.2] et nous proposons de l'adapter pour (toutes) les trajectoires n -sin th. 8. Pour un point, être traversé par deux cordes permet d'avoir plus de flexibilité pour utiliser la méthode DBP. Cependant, dans le cas général, nous avons peu d'informations sur le positionnement de ces cordes.

Théorème 8. *Un point de l'intérieur strict de $C_{S_\Lambda^n}$ est traversé par (au moins) deux cordes de S_Λ^n .*

Démonstration. Nous reprenons les notations de la section 3.4 chapitre 3 utilisées pour la preuve du théorème 4. Nous adaptons la démonstration de [60, annexe A.2] qui énonce que tout point à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la trajectoire selle est traversée par deux cordes. On considère un point $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \overset{\circ}{C}_{S_\Lambda^n}$ (intérieur de $C_{S_\Lambda^n}$) traversé par une ligne verticale \mathcal{L} et un plan vertical Π contenant \mathcal{L} (voir figure 4.11). Ce plan Π forme un angle ω dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ avec \mathbf{e}_y . Le plan Π intersecte S_Λ^n en deux points formant une corde C . Enfin, la troisième coordonnée du point (en général différent de \mathbf{x}) défini par l'intersection de C et de \mathcal{L} dépend de ω et est donné par la fonction $\mathcal{Z}(\omega)$. On peut noter que la fonction \mathcal{Z} est périodique de période π . En reprenant le théorème 4(chapitre 3 section 3.4) et sa démonstration, on peut affirmer que le point \mathbf{x} appartient à un segment $[\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}] \subset \mathcal{L}$, avec $\mathbf{x}_{\min} = (x, y, z_{\min})$ et $\mathbf{x}_{\max} = (x, y, z_{\max})$, tel qu'uniquement les points de $[\mathbf{x}_{\min}, \mathbf{x}_{\max}]$ sont traversés par une corde. De plus $z \neq z_{\min}$ et $z \neq z_{\max}$ car \mathbf{x} n'est pas à la frontière de $C_{S_\Lambda^n}$. Il est donc possible (par périodicité de \mathcal{Z}) de choisir un angle $a \in [0, \pi]$ tel que $\mathcal{Z}(a) = z_{\min}$. Le point \mathbf{x}_{\max} est aussi traversé par une corde donc il existe $\tilde{b} \in [0, \pi], \tilde{b} \neq a$ tel que $\mathcal{Z}(\tilde{b}) = z_{\max}$. Sachant que $\mathcal{Z}(\tilde{b} + \pi) = \mathcal{Z}(\tilde{b})$, on définit b tel que :

- $b = \tilde{b}$ si $a < \tilde{b}$;
- $b = \tilde{b} + \pi$ si $\tilde{b} < a$.

Ainsi, $a < b < a + \pi$ et $\mathcal{Z}(a) = \mathcal{Z}(a + \pi) = z_{\min}$ et $\mathcal{Z}(b) = z_{\max}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c_1 \in]a, b[$ et $c_2 \in]b, a + \pi[$ tels que $\mathcal{Z}(c_1) = \mathcal{Z}(c_2) = z$. Etant donné que $|c_1 - c_2| < \pi$, cela signifie que \mathbf{x} est traversé par deux cordes distinctes. \square

4.6 Etude de la trajectoire 3-sin

4.6.1 Construction de l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin

Intersections de la trajectoire 3-sin avec un plan horizontal

Dans cette section nous allons analyser l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin, avant d'étudier l'union des cordes dans la section 4.6.2. Certaines approches proposées pourraient être généralisées à l'ensemble des trajectoires n -sin. Pour une trajectoire 3-sin S_Λ (dans cette section nous omettrons le "3" signifiant 3-sin, pour alléger les notations), on changera dans cette section la définition de Λ de l'équation (4.1) ($\Lambda = [0, 2\pi[$) pour $\Lambda = [-\pi/3, 5\pi/3[$ afin de s'adapter à la valeur $\lambda_A \in \Lambda$ définie par la suite (équation (4.32)).

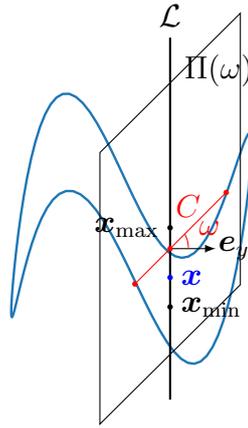


FIGURE 4.11 – Paramétrisation pour la preuve du théorème 8 avec une trajectoire 3-sin.

Notre objectif ici est de décrire précisément l'enveloppe convexe $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ de \mathcal{S}_Λ . Nous rappelons que \mathcal{S}_Λ est portée par la surface d'un cylindre centré sur l'origine, de rayon R et de hauteur $2H$, donc $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ est un sous-ensemble de ce cylindre fini et plein.

Il sera intéressant de travailler dans un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}} = \{(x, y, z) | z = \tilde{z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ où $|\tilde{z}| \leq H$. Pour $\tilde{z} \in]-H, H[$, l'intersection de $\Pi_{\tilde{z}}$ avec \mathcal{S}_Λ définit 6 points A, B, C, D, E et F correspondant à 6 angles $(\lambda_A, \lambda_B \dots)$ voir figure 4.12). En effet, l'équation $H \cos(3\lambda) = \tilde{z}$ admet 6 solutions en λ (dans un intervalle de longueur 2π) pour $\tilde{z} \in]-H, H[$. L'enveloppe convexe de ces 6 points définit un hexagone plein, dépendant de \tilde{z} , et noté $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ (on peut noter que \mathcal{H}_0 est un hexagone régulier). Les intersections de \mathcal{S}_Λ avec Π_H et Π_{-H} sont définies par seulement 3 points chacune ($\mathcal{S}_{-\pi/3}, \mathcal{S}_{\pi/3}$ et \mathcal{S}_π pour Π_{-H} , $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{2\pi/3}$ et $\mathcal{S}_{4\pi/3}$ pour Π_H , voir figure 4.13 pour Π_H). On définit \mathcal{H}_H et \mathcal{H}_{-H} respectivement comme les enveloppes convexes de $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{2\pi/3}$ et $\mathcal{S}_{4\pi/3}$ et $\mathcal{S}_{-\pi/3}, \mathcal{S}_{\pi/3}$ et \mathcal{S}_π .

Le but de cette section est de montrer que $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ est l'intersection de $\Pi_{\tilde{z}}$ et de $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. On rappelle que la fonction $\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, est bijective, continue et décroissante. Le polygone plein $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ est paramétré par les angles suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_A &= -\frac{1}{3} \arccos(\tilde{z}/H) & \lambda_B &= \frac{1}{3} \arccos(\tilde{z}/H) \\ \lambda_C &= \lambda_A + \frac{2\pi}{3} & \lambda_D &= \lambda_B + \frac{2\pi}{3} \\ \lambda_E &= \lambda_A + \frac{4\pi}{3} & \lambda_F &= \lambda_B + \frac{4\pi}{3} \end{aligned} \quad (4.32)$$

On peut noter que pour $\tilde{z} = H$, $\lambda_A = \lambda_B (= 0)$, $\lambda_C = \lambda_D (= 2\pi/3)$ et $\lambda_E = \lambda_F (= 4\pi/3)$. Pour $\tilde{z} = -H$, $\lambda_A = \lambda_F (= -\pi/3)$, $\lambda_B = \lambda_C (= \pi/3)$ et $\lambda_D = \lambda_E (= \pi)$. Dans le cas général, l'intersection entre un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}}$, $|\tilde{z}| < H$, et une trajectoire n -sin définit $2n$ points dont les angles correspondants λ_k^n sont, pour $0 \leq k \leq 2n - 1$:

$$\lambda_k^n = \frac{(-1)^{k+1}}{n} \arccos\left(\frac{\tilde{z}}{H}\right) + \frac{2\pi \lfloor \frac{k}{2} \rfloor}{n} \quad (4.33)$$

avec $\lfloor x \rfloor$ désignant la partie entière de x .

Ainsi, cette intersection formera un polygone de côtés parallèles deux à deux (voir figure 4.14).

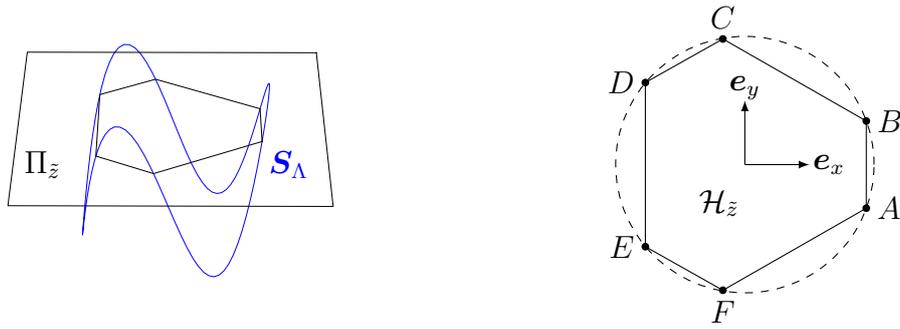


FIGURE 4.12 – Intersection entre un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}}$ et S_{Λ} (avec les points de l'intersection qui sont liés). *Droite* : Le cercle en tirets est la projection de S_{Λ} sur $\Pi_{\tilde{z}}$.

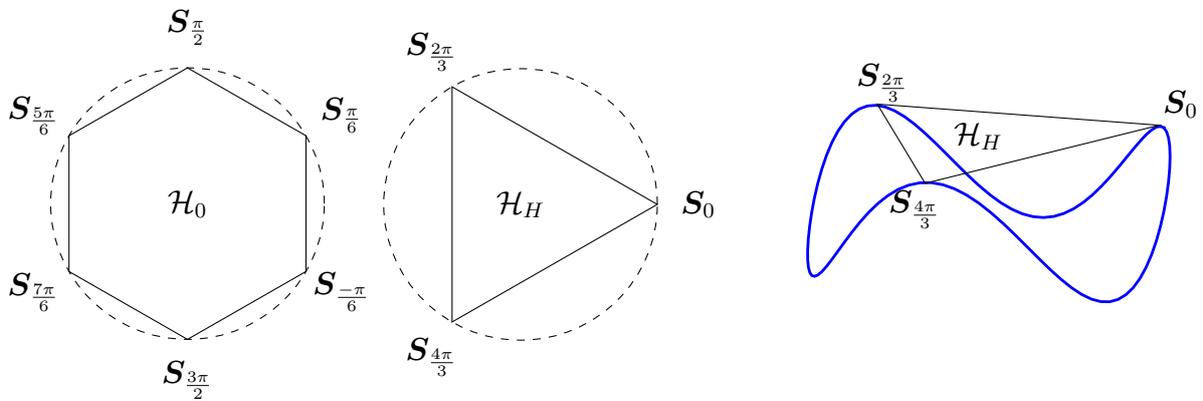


FIGURE 4.13 – Points d'intersection (reliés) entre $\Pi_{\tilde{z}}$ et S_{Λ} , représentant $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$. *Gauche* : $\tilde{z} = 0$. *Milieu et droite* : $\tilde{z} = H$.

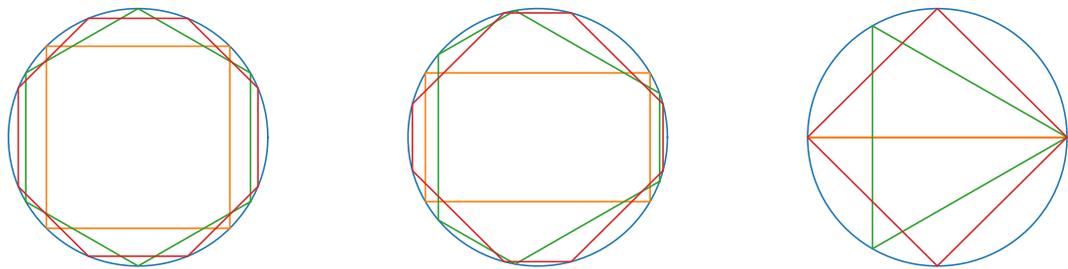


FIGURE 4.14 – Intersections (reliées) entre les trajectoires 2-sin (orange), 3-sin (vert) et 4-sin (rouge) et un plan d'équation $z = \tilde{z}$. *Gauche* : $\tilde{z} = 0$. *Milieu* : $\tilde{z} = H/2$. *Droite* : $\tilde{z} = H$.

Construction de l'enveloppe convexe par plans d'appui

On rappelle⁹ qu'un plan d'appui en un point de \mathbf{S}_Λ peut être défini comme un plan contenant au moins un point de \mathbf{S}_Λ et séparant l'espace en deux tel qu'un des deux demi-espaces contienne l'entièreté de \mathbf{S}_Λ . Un théorème de géométrie convexe énonce qu'un tel plan contient au moins un point de $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ et sépare l'espace en deux tel qu'un demi-espace contienne $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$ en entier [3, section 11]. Ainsi, si pour tout $\tilde{z} \in [-H, H]$ il existe un plan d'appui contenant A et B , alors les segments $[AB]$ appartiennent à la frontière de $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$. Le but est alors de démontrer que le plan tangent en A et B , noté $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$, est un plan d'appui de \mathbf{S}_Λ . Pour $\tilde{z} = H$, A et B sont confondus, le plan $\mathcal{P}_{AB,H}$ peut être défini comme le plan horizontal contenant \mathbf{S}_0 , $\mathbf{S}_{2\pi/3}$ et $\mathbf{S}_{4\pi/3}$. Le plan $\mathcal{P}_{AB,H}$ est un plan d'appui car \mathbf{S}_0 , $\mathbf{S}_{2\pi/3}$ et $\mathbf{S}_{4\pi/3}$ sont les seuls points de \mathbf{S}_Λ tels que $\mathbf{S}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z = H$ (tous les autres points vérifient $\mathbf{S}_\lambda \cdot \mathbf{e}_z < H$).

$$\forall \lambda \in [0, 2\pi[, \mathbf{S}'_\lambda \stackrel{\text{déf}}{=} \frac{\partial \mathbf{S}_\lambda}{\partial \lambda} = (-R \sin \lambda, R \cos \lambda, -3H \sin(3\lambda)) \quad (4.34)$$

Les tangentes à la trajectoire en A et B ont donc pour coefficient directeur $\mathbf{S}'_A \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{S}'_{\lambda_A} = (-R \sin \lambda_A, R \cos \lambda_A, -3H \sin(3\lambda_A))$ et $\mathbf{S}'_B \stackrel{\text{déf}}{=} \mathbf{S}'_{\lambda_B} = (-R \sin \lambda_B, R \cos \lambda_B, -3H \sin(3\lambda_B)) = (R \sin \lambda_A, R \cos \lambda_A, 3H \sin(3\lambda_A))$.

Ainsi, un vecteur normal de $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$, pour $\tilde{z} \in [-H, H[$ (et donc $\lambda_A \in [-\pi/3, 0[$), est :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{S}'_A \wedge \mathbf{S}'_B}{2R} = \begin{pmatrix} 3H \sin(3\lambda_A) \\ 0 \\ -R \sin \lambda_A \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

L'équation du plan $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$ s'écrit donc :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d \quad (4.36)$$

avec

$$\begin{aligned} d &= \mathbf{n} \cdot (R \cos \lambda_A, R \sin \lambda_A, H \cos(3\lambda_A)) \\ &= 3RH \sin(3\lambda_A) \cos \lambda_A - RH \cos(3\lambda_A) \sin \lambda_A \end{aligned} \quad (4.37)$$

Le but est maintenant de montrer que les seuls points de la trajectoire satisfaisant (4.36) (donc appartenant au plan $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$) sont A et B , et que tous les autres points de \mathbf{S}_Λ se situent du même côté de $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$ pour $\tilde{z} \in [-H, H[$. Cela correspondra (voir équation (4.32)) à prendre des valeurs de λ_A sur l'intervalle $[-\pi/3, 0[$.

On étudiera donc, en rappelant que $\Lambda = [-\pi/3, 5\pi/3[$:

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}_\lambda - d, \mathbf{S}_\lambda \in \mathbf{S}_\Lambda \\ &= 3RH \sin(3\lambda_A) \cos \lambda - RH \sin \lambda_A \cos(3\lambda) - d \end{aligned} \quad (4.38)$$

La fonction f équation (4.38) est proportionnelle à la distance au plan. Pour démontrer que tous les points de \mathbf{S}_Λ sont du même côté de $\mathcal{P}_{AB,\tilde{z}}$, il faut montrer que la fonction f sur Λ est de signe constant.

$$f'(\lambda) = -3RH \sin(3\lambda_A) \sin \lambda + 3RH \sin \lambda_A \sin(3\lambda) \quad (4.39)$$

9. Voir chapitre 3 section 3.5.

$$f'(\lambda) = 0 \Rightarrow \sin(3\lambda) \sin \lambda_A - \sin(3\lambda_A) \sin \lambda = 0 \quad (4.40)$$

On peut réécrire la dernière égalité grâce à l'égalité $\sin(3\lambda) = 3 \sin \lambda - 4 \sin^3 \lambda$:

$$-\sin(3\lambda_A) \sin \lambda + \sin \lambda_A (3 \sin \lambda - 4 \sin^3 \lambda) = 0 \quad (4.41)$$

On effectue le changement de variables (non bijectif) $w = \sin \lambda$, $\lambda \in \Lambda$, et l'équation (4.41) peut s'écrire :

$$w((- \sin(3\lambda_A) + 3 \sin \lambda_A) - w^2(4 \sin \lambda_A)) = 0 \quad (4.42)$$

On en déduit donc que soit $w = 0$ et que donc $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pi$ soit :

$$w = \mp \sqrt{(3 \sin \lambda_A - \sin(3\lambda_A))/(4 \sin \lambda_A)} \quad (4.43)$$

$$= \mp \sqrt{4 \sin^3 \lambda_A / (4 \sin \lambda_A)} \quad (4.44)$$

$$= \mp \sin \lambda_A \quad (4.45)$$

En rappelant que $\lambda_A \in [-\pi/3, 0[$ et que $-\lambda_A = \lambda_B$, l'équation (4.45) a quatre solutions : λ_A , λ_B , $\lambda_A + \pi$ et $\lambda_B + \pi$.

Il y a donc six valeurs qui annulent f' sur Λ que l'on énonce par ordre croissant : λ_A , 0 , λ_B , $\lambda_A + \pi$, π et $\lambda_B + \pi$. De plus, d'après (4.39) :

$$f'(-\pi/3) = 3RH \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(3\lambda_A) < 0 \text{ car } \lambda_A \in [-\pi/3, 0[\quad (4.46)$$

Nous pouvons alors dresser le tableau de variations suivant :

λ	$-\frac{\pi}{3}$	λ_A	0	λ_B	$\frac{\pi}{3}$			
$f'(\lambda)$		-	0	+	0	-	0	+
$f(\lambda)$		↘ 0 ↗		↘ 0 ↗				

λ	$\frac{\pi}{3}$	$\lambda_A + \pi$	π	$\lambda_B + \pi$	$\frac{5\pi}{3}$			
$f'(\lambda)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(\lambda)$		↗ $f(\pi)$ ↘		↗ ↘				

Il reste donc à montrer, pour prouver que le minimum de f est 0 et est atteint en λ_A et λ_B , que $f(\pi) \geq 0$. La subtilité ici est que $f(\pi) \geq 0$ doit être vérifié pour tout $\lambda_A \in [-\pi/3, 0[$ (c'est-à-dire pour tous les plans $\mathcal{P}_{AB, \tilde{z}}$ pour $\tilde{z} \in [-H, H]$). On étudiera donc la fonction f_π définie sur $[-\pi/3, 0[$ telle que :

$$f_\pi(\lambda_A) = f(\pi) = -3RH \sin(3\lambda_A) + RH \sin(\lambda_A) - RH \sin(3\lambda_A) \cos(\lambda_A) + RH \cos(3\lambda_A) \sin(\lambda_A) \quad (4.47)$$

$$= RH((-3 \sin(3\lambda_A))(1 + \cos(\lambda_A)) + \sin \lambda_A(1 + \cos(3\lambda_A))) \quad (4.48)$$

$$f'_\pi(\lambda_A) = RH(-9 \cos(3\lambda_A)(1 + \cos \lambda_A) + 3 \sin(3\lambda_A) \sin \lambda_A + \cos \lambda_A(1 + \cos(3\lambda_A)) - 3 \sin(3\lambda_A) \sin \lambda_A) \quad (4.49)$$

$$= RH(\cos(3\lambda_A)(-9 - 8 \cos \lambda_A) + \cos \lambda_A) \quad (4.50)$$

$$= RH((4 \cos^3(\lambda_A) - 3 \cos \lambda_A)(-9 - 8 \cos \lambda_A) + \cos \lambda_A) \quad (4.51)$$

$$= RH \cos \lambda_A((4 \cos^2(\lambda_A) - 3)(-9 - 8 \cos \lambda_A) + 1) \quad (4.52)$$

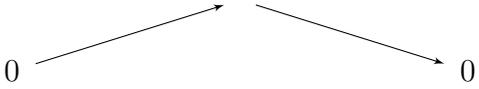
$$= RH \cos \lambda_A(-32 \cos^3(\lambda_A) - 36 \cos^2(\lambda_A) + 24 \cos \lambda_A + 28) \quad (4.53)$$

$$= -RH \cos \lambda_A 4(\cos \lambda_A + 1)^2(8 \cos \lambda_A - 7) \quad (4.54)$$

Nous allons étudier les solutions de $f'_\pi(\lambda_A) = 0$ sur $[-\pi/3, 0[$:

- si $\cos \lambda_A = 0$ alors $\lambda_A = -\pi/2[2\pi] \notin [-\pi/3, 0[$;
- si $\cos \lambda_A = -1$ alors $\lambda_A = \pi[2\pi] \notin [-\pi/3, 0[$;
- si $\cos \lambda_A = 7/8$ alors $\lambda_A = \pm \arccos(7/8)[2\pi]$, la seule de ces valeurs dans $[-\pi/3, 0[$ est $-\arccos(7/8)$.

La fonction f'_π s'annule donc uniquement en $-\arccos(7/8)$ sur $[-\pi/3, 0[$ et on peut donc dresser le tableau de variation suivant, en notant que $f'_\pi(0) = -16RH$ et $f_\pi(-\pi/3) = f_\pi(0) = 0$.¹⁰

λ_A	$-\frac{\pi}{3}$	$-\arccos(7/8)$	0		
$f'_\pi(\lambda_A)$		$+$	0	$-$	$-16RH$
$f_\pi(\lambda_A)$	0			0	

On a donc montré que $\forall \lambda_A \in [-\pi/3, 0[$, $f_\pi(\lambda_A) \geq 0$. Sur $[-\pi/3, 0[$ la seule valeur annulant f_π est $\lambda_A = -\pi/3$, ce qui correspond à $\tilde{z} = -H$. Dans ce cas $\mathcal{P}_{AB, -H}$ est un plan horizontal (pour $\lambda_A = \pi/3$, $\mathbf{n} \propto \mathbf{e}_z$) contenant les points \mathbf{S}_π , $\mathbf{S}_{\pi/3}$ (B pour $\tilde{z} = -H$) et $\mathbf{S}_{-\pi/3}$ (A pour $\tilde{z} = -H$). Cela met fin à la preuve montrant que le plan tangent en A et B est toujours bien un plan d'appui et que le segment $[AB]$ est donc un segment de $\partial\Omega_{\mathcal{S}_A}$.

Les figures 4.15 et 4.16 montrent des tracés de f et f' .

10. On s'autorise à appliquer f_π et f'_π en 0 pour des raisons de continuité.

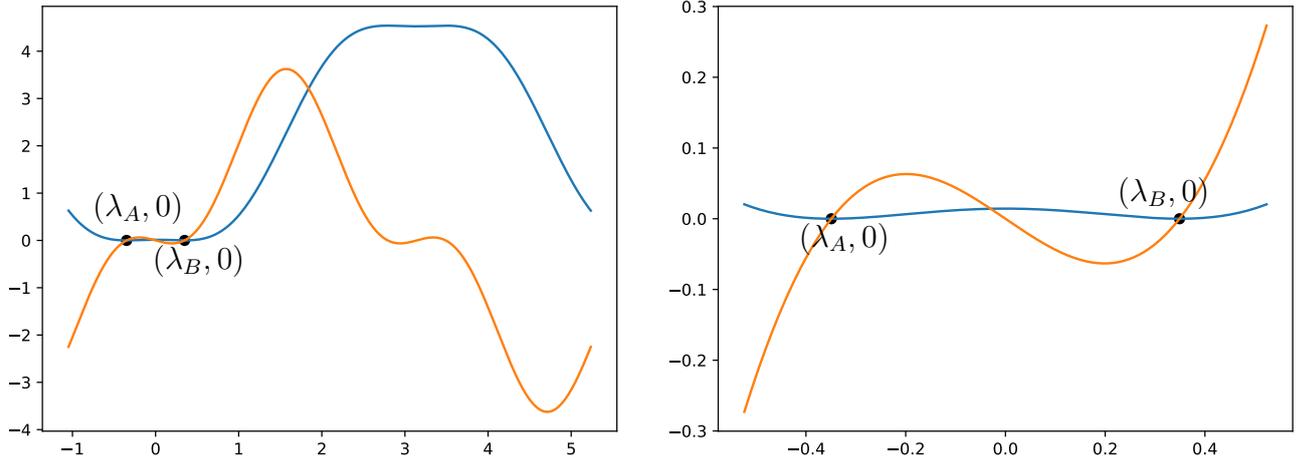


FIGURE 4.15 – Représentation de f (équation (4.38), en bleu) et f' (équation (4.39), en orange) pour $R = H = 1$ et $\tilde{z} = H/2$. *Gauche* : intervalle $[-\pi/3, 5\pi/3]$. *Droite* : intervalle $[-\pi/6, \pi/6]$.

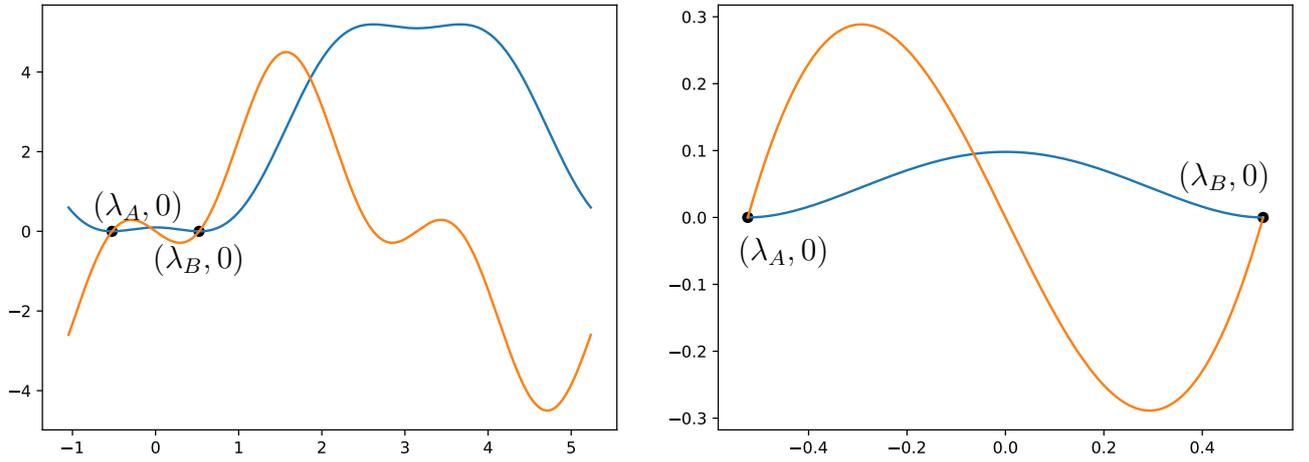


FIGURE 4.16 – Représentation de f (équation (4.38), en bleu) et f' (équation (4.39), en orange) pour $R = H = 1$ et $\tilde{z} = 0$. *Gauche* : intervalle $[-\pi/3, 5\pi/3]$. *Droite* : intervalle $[-\pi/6, \pi/6]$.

La figure 4.17 montre quelques plans d'appui tangents en A et B pour plusieurs valeurs de \tilde{z} .

L'invariance par rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe \mathbf{e}_z de la trajectoire 3-sin (section 4.3) implique que les plans $\mathcal{P}_{CD,\tilde{z}}$ et $\mathcal{P}_{EF,\tilde{z}}$ sont aussi des plans d'appui (respectivement en C et D et E et F). Les segments $[CD]$ et $[EF]$ appartiennent donc aussi à $\partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$.

Par l'invariance obtenue par rotation autour de l'axe \mathbf{e}_z de $\pi/3$ composée avec une symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (section 4.3) on peut déduire de la même manière que précédemment que les segments $[BC]$, $[DE]$ et $[FA]$ appartiennent à $\partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$.

On a donc montré que tous les segments constituant la frontière de $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$, pour $\tilde{z} \in]-H, H[$, appartiennent à $\partial\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$. Les triangles \mathcal{H}_{-H} et \mathcal{H}_H étant les enveloppes convexes des intersections des plans horizontaux Π_{-H} et Π_H avec la trajectoire (respectivement en $\mathcal{S}_{-\pi/3}$, $\mathcal{S}_{\pi/3}$ et \mathcal{S}_π et en \mathcal{S}_0 , $\mathcal{S}_{2\pi/3}$ et $\mathcal{S}_{4\pi/3}$), on a bien montré que $\forall \tilde{z} \in [-H, H], \mathcal{H}_{\tilde{z}} = \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda} \cap \Pi_{\tilde{z}}$, ce qui permet de construire $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda}$ (voir figure 5.5).

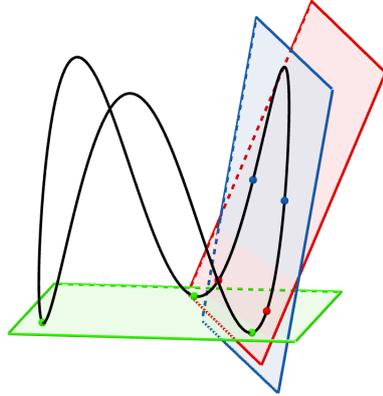


FIGURE 4.17 – Plusieurs plans d'appui de la trajectoire 3-sin tangents en A et B avec $\mathcal{P}_{AB,0}$ en bleu et $\mathcal{P}_{AB,-H}$ en vert.

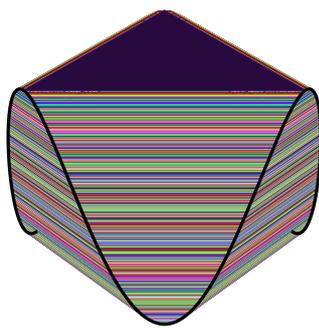


FIGURE 4.18 – Représentation de l'enveloppe convexe Ω_{S_Λ} pour la trajectoire 3-sin (pour $H = R = 1$) par tracé des hexagones $\mathcal{H}_{\bar{z}}$.

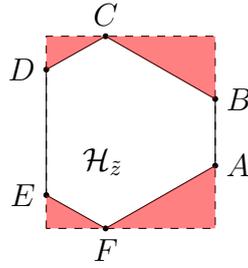


FIGURE 4.19 – On peut calculer l’aire de $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ en retranchant l’aire de triangles à un rectangle englobant $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$.

On peut également utiliser la méthode des plans d’appui pour construire les enveloppes convexes des trajectoires n -sin, $n > 3$. Par exemple $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^4}$ sera un empilement d’octogones de côtés parallèles deux à deux (définis équation (4.33)).

Complément sur le volume de l’enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin

Dans la section 4.1 nous avons juste annoncé que le volume de l’enveloppe convexe d’une trajectoire n -sin, $n > 2$, était strictement compris entre πHR^2 et $2\pi HR^2$. Maintenant que ces enveloppes convexes sont plus clairement décrites, on peut donner de meilleures approximations. On peut par exemple approximer l’enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin comme un empilement de N hexagones de hauteur $\Delta H = 2H/N$ (un peu comme sur la figure 5.5). On peut alors estimer le volume d’une trajectoire n -sin par :

$$V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^n}) \approx \Delta H \sum_{k=0}^{N-1} \mathcal{A}(n, \tilde{z}_k) \quad (4.55)$$

avec $\mathcal{A}(n, \tilde{z}_k)$ l’aire de l’enveloppe convexe de l’intersection entre une trajectoire n -sin et un plan d’équation $z = \tilde{z}_k$, $\tilde{z}_k = \frac{2kH}{N-1} - H$. Par exemple pour la trajectoire 3-sin (voir figure 4.19), en notant $x_A = R \cos \lambda_A$ et $y_A = R \sin \lambda_A$ ¹¹ :

$$\mathcal{A}(3, \tilde{z}_k) = (y_C - y_F)(x_A - x_E) - (y_B - y_C)(x_B - x_C) - (y_C - y_D)(x_C - x_D) \quad (4.56)$$

Avec cette méthode on trouve $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^3}) \approx 4.67HR^2$ (et $V(\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^4}) \approx 5.33HR^2$).

4.6.2 Construction de l’union des cordes de la trajectoire 3-sin

Union des cordes

Nous cherchons maintenant à définir l’union des cordes $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ de la trajectoire 3-sin \mathcal{S}_Λ (ce travail figure également dans l’acte de conférence du *Fully3D 2021* [31]). Nous considérons une nouvelle fois un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}}$ (défini sous-section 4.6.1) et son intersection avec \mathcal{S}_Λ (figure 4.13, gauche). On note $\mathcal{S}_A = \mathcal{S}_{\lambda_A}$. Nous cherchons à montrer que chaque point de $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ (défini sous-section 4.6.1) qui n’est pas dans le triangle central que l’on notera $\mathcal{T}_{\tilde{z}}$ (défini par l’intersection des segments $[\mathcal{S}_C, \mathcal{S}_F]$, $[\mathcal{S}_D, \mathcal{S}_A]$ et $[\mathcal{S}_E, \mathcal{S}_B]$, figure 4.20) est dans l’union des cordes $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$. Considérant la figure 4.21 et les équations (4.1) (pour $n = 3$) et (4.32), nous constatons que les cordes $C_+(\tilde{z})$ (reliant \mathcal{S}_D à \mathcal{S}_E pour $\tilde{z} \in [0, H]$) et $\tilde{C}_+(\tilde{z})$ (reliant \mathcal{S}_F à \mathcal{S}_C pour $\tilde{z} \in [0, H]$) se déplacent (et se confondent quand $\tilde{z} = H$), de manière continue selon \tilde{z} croissant, pour $\tilde{z} \in [0, H]$. La corde $C_-(\tilde{z})$, où $\tilde{z} \in [-H, 0]$, se

11. En rappelant que λ_A dépend de \tilde{z} , c’est donc aussi le cas pour x_A et y_A .

déplace continument selon \tilde{z} décroissant jusqu'à $C_-(-H) = \mathbf{S}_\pi$. Avec l'union de toutes les cordes $C_+(\tilde{z})$ et $\bar{C}_+(\tilde{z})$ pour $\tilde{z} \in [0, H]$ et les cordes $C_-(\tilde{z})$ pour $\tilde{z} \in [-H, 0]$, une surface peut être créée (voir figure 4.22, *droite*). On rappelle que la trajectoire 3-sin est invariante par une rotation de $2\pi/3$ autour de l'axe \mathbf{e}_z et est invariante par une rotation de $\pi/3$ (autour du même axe) suivie d'une symétrie par rapport au plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (voir section 4.3). Avec ces symétries il est possible de créer six surfaces similaires à celles décrites précédemment (figure 4.22, *gauche*). Le théorème 4 du chapitre 3 s'applique à la trajectoire 3-sin. Ainsi, s'il existe deux points $\mathbf{x}' = (x, y, z')$ et $\mathbf{x}'' = (x, y, z'')$, $z' < z''$ tous deux traversés par une corde, alors chaque point $\mathbf{x} = (x, y, z)$, avec $z' < z < z''$, est aussi traversé par une corde. Pour finir la construction de $C_{S_\Lambda^3}$ nous devons exhiber les points \mathbf{x}' et les points \mathbf{x}'' correspondants, appartenant à l'union des six surfaces, pour vérifier que chaque point à l'intérieur du volume défini par cette union est traversé par une corde.

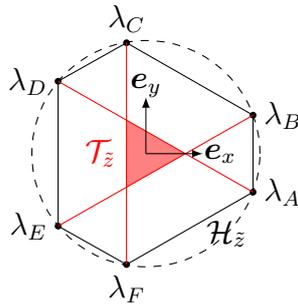


FIGURE 4.20 – Intersection entre un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}}$ et \mathbf{S}_Λ (avec les points d'intersection reliés). Les lignes rouges et noires sont des lignes contenues dans le plan $\Pi_{\tilde{z}}$. Le but de cette sous-section est de montrer que tous les points contenus dans $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ (le polygone noir et son intérieur), mais en dehors du triangle rouge, sont traversés par une corde.

Nous définissons les surfaces bleues comme les surfaces générées par les cordes C_+ ($[\mathbf{S}_D\mathbf{S}_E]$, $[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_B]$ et $[\mathbf{S}_F\mathbf{S}_A]$ pour $\tilde{z} \in [0, H]$, $[\mathbf{S}_E\mathbf{S}_F]$, $[\mathbf{S}_B\mathbf{S}_A]$ et $[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_D]$ pour $\tilde{z} \in [-H, 0]$) et \bar{C}_+ ($[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_F]$, $[\mathbf{S}_D\mathbf{S}_A]$ et $[\mathbf{S}_E\mathbf{S}_B]$ pour $\tilde{z} \in [0, H]$ et $[\mathbf{S}_D\mathbf{S}_A]$, $[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_F]$ et $[\mathbf{S}_E\mathbf{S}_B]$ pour $\tilde{z} \in [-H, 0]$). Avec les notation des cordes (voir équation (4.32) pour les dépendances en \tilde{z}),

ces surfaces sont respectivement : $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_D, \lambda_E} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_C, \lambda_F} \right)$, $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_C, \lambda_B} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_D, \lambda_A} \right)$, $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_D, \lambda_A} \right)$, $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_F, \lambda_A} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_E, \lambda_B} \right)$, $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_E, \lambda_F} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_D, \lambda_A} \right)$, $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_B, \lambda_A} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_C, \lambda_F} \right)$ et $\left(\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_C, \lambda_D} \right) \cup \left(\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_E, \lambda_B} \right)$. Les surfaces

rouges sont définies par les surfaces générées par les cordes C_- ($[\mathbf{S}_D\mathbf{S}_E]$, $[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_B]$ et $[\mathbf{S}_F\mathbf{S}_A]$ pour $\tilde{z} \in [-H, 0]$, $[\mathbf{S}_E\mathbf{S}_F]$, $[\mathbf{S}_B\mathbf{S}_A]$ et $[\mathbf{S}_C\mathbf{S}_D]$ pour $\tilde{z} \in [0, H]$) (voir figure 4.22). Avec les notations des cordes, ces surfaces sont respectivement : $\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_D, \lambda_E}$, $\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_C, \lambda_B}$,

$\bigcup_{\tilde{z} \in [-H, 0]} C_{\lambda_F, \lambda_A}$, $\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_E, \lambda_F}$, $\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_B, \lambda_A}$ et $\bigcup_{\tilde{z} \in [0, H]} C_{\lambda_C, \lambda_D}$. Pour ce paragraphe chaque

projection définira implicitement une projection orthogonale sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ (qui est le plan Π_0). L'intersection des projections des surfaces bleues recouvre l'hexagone régulier \mathcal{H}_0 (voir figure 4.23). Alors un point "entre" deux surfaces bleues (une au-dessus et une au-dessous de Π_0) et dont la projection est dans \mathcal{H}_0 est traversée par une corde. Un point

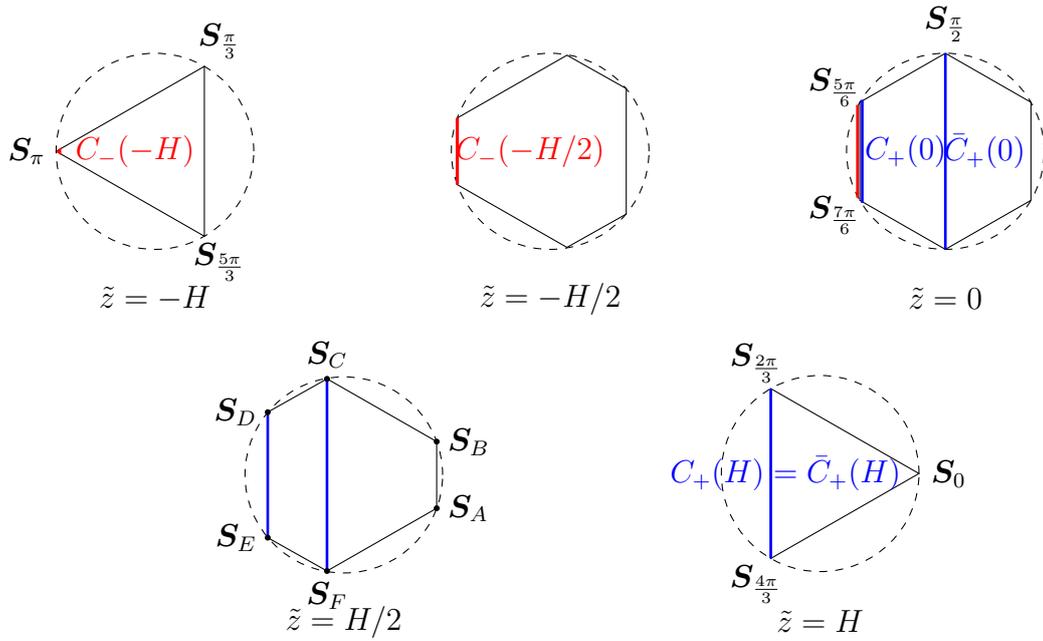


FIGURE 4.21 – Différentes cordes contenues dans plusieurs plans horizontaux. Les cordes bleues, définies pour $\tilde{z} > 0$, sont les cordes $C_+(\tilde{z})$ (reliant S_E à S_D) et $\bar{C}_+(\tilde{z})$ (reliant S_F à S_C) et sont parallèles (et sont même confondues pour $\tilde{z} = H$). La corde rouge est $C_-(\tilde{z})$ (reliant S_E à S_D). L’union de ces cordes, pour tout $\tilde{z} \in [-H, H]$ est dessinée figure 4.22.

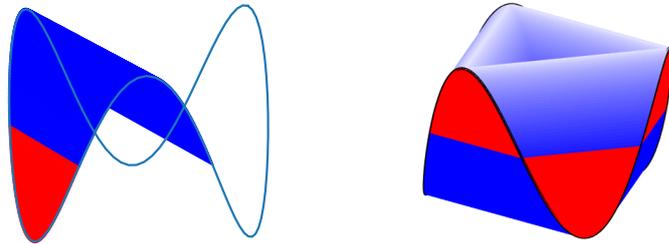


FIGURE 4.22 – *Gauche* : Une surface créée pour les cordes décrites figure 4.21. *Droite* : L’union des six surfaces obtenues à partir de la surface de la figure de gauche, en utilisant les symétries de la trajectoires 3-sin.

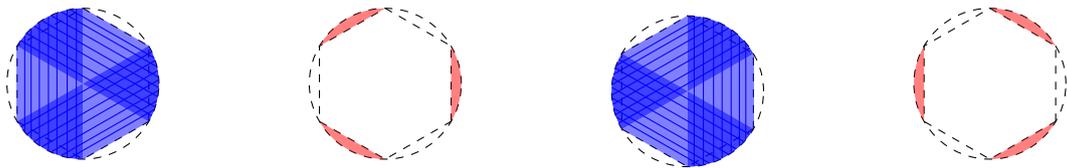


FIGURE 4.23 – Projections orthogonales sur le plan (e_x, e_y) des surfaces rouges et bleues. *Gauche* : Surfaces définies pour $\tilde{z} > 0$. *Droite* : Surfaces définies pour $\tilde{z} < 0$. L’hexagone en tirets relie les points de l’intersection entre S_Λ et Π_0 (plan (e_x, e_y)).

dont la projection est dans la région entre \mathcal{H}_0 et le disque de rayon R est traversé par une corde s'il est "entre" une surface rouge et une surface bleue sur le même côté de Π_0 . L'ensemble¹² des points intersectés par une corde est $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$, représenté figure 4.24.

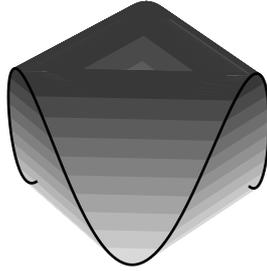


FIGURE 4.24 – L'union des cordes de \mathcal{S}_Λ^3 : $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ (les nuances de gris sont juste une indication de z). Pour être rigoureux, ce que nous avons décrit ne peut être qu'une sous-partie de $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$.

Zone sans corde

La construction de $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ décrite au-dessus est incomplète. En effet il reste à prouver que les points (pour un plan $\Pi_{\tilde{z}}$ donné) appartenant à ce qui a été appelé le triangle central ne sont pas traversés par une corde (auquel cas nous n'aurions fait que décrire une partie de $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$). Nous cherchons alors à construire $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3} = \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^3} \setminus C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$. Á ce jour nous n'avons pas une preuve satisfaisante de la construction de $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$, mais nous présentons quelques approches.

Nous continuons de travailler dans un plan Π_z , ici avec $\tilde{z} \in [0, H]$. On découpe \mathcal{S}_Λ en plusieurs parties s (les parties "short (courtes)", au-dessus de $\Pi_{\tilde{z}}$) et l (les parties "long", au-dessous de $\Pi_{\tilde{z}}$) (figure 4.25). On étudie les cordes liant ces parties. Il y a 4 cas : les cordes liant les parties s_1 à l_1 (directement opposées), s_1 à l_2 ou l_3 ("l" à "s" mais non directement opposées), s_1 à s_2 ou s_3 ("s" à "s") et l_1 à l_2 ou l_3 ("l" à "l"). Il est clair que les cordes liant s_1 à l_2 n'intersectent pas le triangle central. Les cordes liant s_1 à s_2 (resp. l_1 à l_2) sont au-dessus (resp. au-dessous) de $\Pi_{\tilde{z}}$. Le dernier cas (cordes liant s_1 à l_1) est (beaucoup) plus compliqué, et jusqu'à la fin de cette partie nous allons donner des approches pour l'aborder.

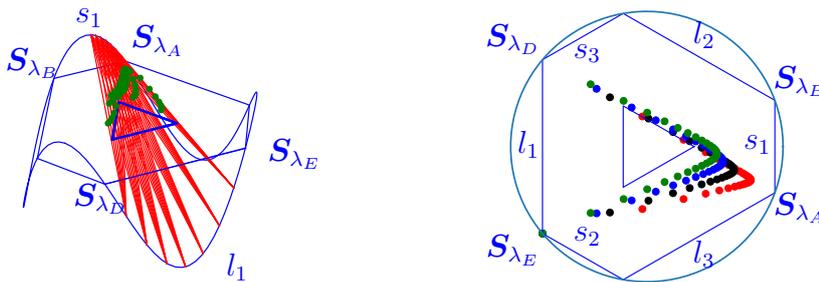


FIGURE 4.25 – Cordes pour plusieurs valeurs de $\lambda_1 \in [\lambda_A, \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}]$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$ et intersections pour le plan $z = H/2$. Droite : Intersections des cordes avec le plan $z = H/2$ pour 4 valeurs de λ_1 .

On considère $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$ ¹³(on pourra généraliser à \mathcal{S}_Λ^3 entière en rappelant que la trajectoire 3-sin est invariante par rotation de $2\pi/3$, voir section 4.3).

12. Ou peut-être juste un sous-ensemble, nous en reparlerons section 4.6.2.

13. Pour des raisons de symétrie on pourra aussi travailler avec $\lambda_1 \in [\lambda_A, \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}]$ ou $\lambda_2 \in [\lambda_D, \frac{\lambda_D + \lambda_E}{2}]$.

L'intersection d'une corde C_{12} (liant \mathbf{S}_{λ_1} à \mathbf{S}_{λ_2}) avec $\Pi_{\tilde{z}}$ s'écrit :

$$X_{12} = t_{\tilde{z}}\mathbf{S}_{\lambda_2} + (1 - t_{\tilde{z}})\mathbf{S}_{\lambda_1} \quad (4.57)$$

avec

$$t_{\tilde{z}} = \frac{\tilde{z} - H \cos(3\lambda_1)}{H(\cos(3\lambda_2) - \cos(3\lambda_1))} \quad (4.58)$$

Dans le plan $\Pi_{\tilde{z}}$ les coordonnées du plan d'intersection sont :

$$\begin{cases} x_{12} = Rt_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + R(1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1 \\ y_{12} = Rt_{\tilde{z}} \sin \lambda_2 + R(1 - t_{\tilde{z}}) \sin \lambda_1 \end{cases} \quad (4.59)$$

avec toujours $t_{\tilde{z}}$ défini selon (4.58). Á partir des équations (4.59) on peut tracer un certain nombre d'intersections entre des cordes C_{12} et un plan $\Pi_{\tilde{z}}$, pour vérifier qu'aucune de ces intersections n'est dans le triangle central (figure 4.25).

Une approche plus analytique est de considérer le triangle central comme l'intersection de trois demi-plans. Pour qu'un point soit dans le triangle central, il faut donc qu'il soit d'un côté précis des trois droites définissant ces demi-plans.

Une première méthode est de travailler avec le sens d'un produit vectoriel (ou de manière équivalente en 2D avec un déterminant), voir figure 4.26).

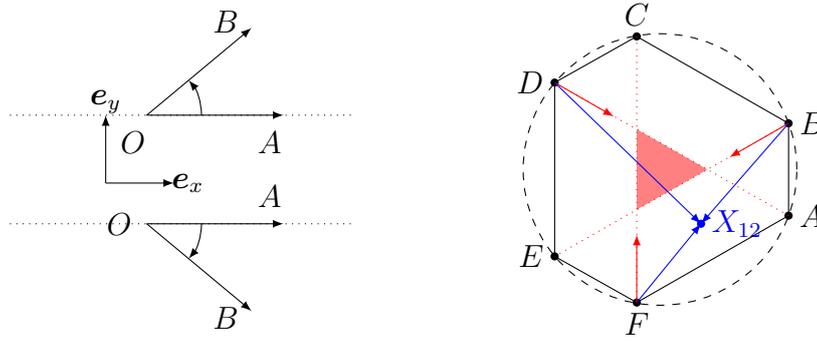


FIGURE 4.26 – *Gauche* : Le produit vectoriel $\mathbf{OA} \wedge \mathbf{OB}$ produit un vecteur porté par \mathbf{e}_z , dans le même sens que \mathbf{e}_z sur la figure de haut et dans le sens opposé sur la figure du bas. *Droite* : Un point X_{12} en dehors du triangle central : les produits vectoriels entre les vecteurs rouge et bleu ne donneront pas des vecteurs de même sens.

Á chaque droite soutenant un segment du triangle central on peut associer une fonction, appliquée à un point X_{12} de $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$, dont le signe donne le côté de la droite où est situé X_{12} . En notant $\mathbf{S}_D = \mathbf{S}_{\lambda_D}$ et $\mathbf{DA} = \mathbf{S}_A - \mathbf{S}_D$, une telle fonction pour la droite passant par D et A , appliquée à un point X_{12} , peut être définie par :

$$f_{DA}(X_{12}) = ((X_{12} - \mathbf{S}_D) \wedge \mathbf{DA}) \cdot \mathbf{e}_z = \det(X_{12} - \mathbf{S}_D, \mathbf{DA}, \mathbf{e}_z) \quad (4.60)$$

Le déterminant de (4.60) peut en fait s'exprimer comme un déterminant 2D, en prenant les deux premières coordonnées de chaque vecteur.

On peut exprimer f_{DA} en fonction de λ_1 et λ_2 , en utilisant (4.59) :

$$f_{DA}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{vmatrix} R(t_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1 - \cos \lambda_D) & R(\cos \lambda_A - \cos \lambda_D) \\ R(t_{\tilde{z}} \sin \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \sin \lambda_1 - \sin \lambda_D) & R(\sin \lambda_A - \sin \lambda_D) \end{vmatrix} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} &= R^2((t_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1 - \cos \lambda_D)(\sin \lambda_A - \sin \lambda_D) \\ &\quad - (t_{\tilde{z}} \sin \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \sin \lambda_1 - \sin \lambda_D)(\cos \lambda_A - \cos \lambda_D)) \end{aligned} \quad (4.62)$$

En utilisant (4.58) et l'égalité $\tilde{z} = H \cos(3\lambda_A)$ on peut réécrire (4.62) :

$$\frac{f_{DA}(\lambda_1, \lambda_2)}{R^2} = (a_1 \cos \lambda_2 + a_2 \cos \lambda_1 - \cos \lambda_D)(\sin \lambda_A - \sin \lambda_D) \quad (4.63)$$

$$+ (a_1 \sin \lambda_2 + a_2 \sin \lambda_1 - \sin \lambda_D)(\cos \lambda_A - \cos \lambda_D) \quad (4.64)$$

avec $a_1 = \frac{\cos(3\lambda_A) - \cos(3\lambda_1)}{\cos(3\lambda_2) - \cos(3\lambda_1)}$ et $a_2 = \frac{\cos(3\lambda_2) - \cos(3\lambda_A)}{\cos(3\lambda_2) - \cos(3\lambda_1)}$.

On peut définir de même des fonctions f_{BE} et f_{FC} . Un point de $\mathcal{H}_{\tilde{z}}$ est dans le triangle central (de même \tilde{z}) si (et seulement si) f_{DA} , f_{BE} et f_{FC} appliquées à ce point sont positives. Pour montrer qu'aucune corde n'intersecte le triangle central, pour un \tilde{z} donné, il faut donc montrer que :

$$\boxed{\forall \lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B], \forall \lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E], f_{DA}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \text{ ou } f_{BE}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \text{ ou } f_{FC}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0}$$

Néanmoins il est très difficile de travailler (en dehors du cadre numérique, voir figures 4.28 et 4.29) avec ces fonctions. On peut continuer d'adopter une approche par fonctions mais en travaillant astucieusement avec les équations des droites définissant le triangle central, afin d'utiliser des fonctions moins complexes. D'après les équations (4.32) on a $\cos \lambda_D = \cos(\lambda_A - 2\pi/3)$ et $\sin \lambda_D = -\sin(\lambda_A - 2\pi/3)$:

$$\mathbf{S}_D - \mathbf{S}_A = \begin{pmatrix} R(\cos(\lambda_A - 2\pi/3) - \cos \lambda_A) \\ R(-\sin(\lambda_A - 2\pi/3) - \sin \lambda_A) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

$$= R \begin{pmatrix} 2 \sin(\lambda_A - \pi/3) \sin(\pi/3) \\ -2 \sin(\lambda_A - \pi/3) \cos(\pi/3) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.66)$$

$$= R \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin(\lambda_A - \pi/3) \\ -\sin(\lambda_A - \pi/3) \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

Ainsi l'équation de la droite passant par \mathbf{S}_D (D dans le plan $\Pi_{\tilde{z}}$) et \mathbf{S}_A (A dans le plan $\Pi_{\tilde{z}}$) est de la forme :

$$y_{DA}(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}} + k \quad (4.68)$$

En se servant du fait que la droite considérée passe par A , on a $y_{DA}(R \cos \lambda_A) = R \sin \lambda_A = -R \frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} + k$, et la droite peut être paramétrée par :

$$y_{DA}(x) = -\frac{x}{\sqrt{3}} + R \left(\frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} + \sin \lambda_A \right) \quad (4.69)$$

De même, les équations des deux autres droites définissant le triangle central sont :

$$y_{EB}(x) = \frac{x}{\sqrt{3}} - R \left(\frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} + \sin \lambda_A \right) \quad (4.70)$$

$$x_{FC} = R \cos(\lambda_C) = R \cos(\lambda_A + 2\pi/3) \quad (4.71)$$

A partir des équations (4.59) et (4.69), (4.70) et (4.71) on peut définir les fonctions g_{DA} ,

g_{EB} et g_{FC} telles que :

$$g_{DA}(\lambda_1, \lambda_2) = -y_{12} + y_{DA}(x_{12}) \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} &= -(t_{\tilde{z}} \sin \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \sin \lambda_1) - \frac{1}{\sqrt{3}}(t_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1) \\ &+ \sin \lambda_A + \frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$g_{EB}(\lambda_1, \lambda_2) = y_{12} - y_{EB}(x_{12}) \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} &= t_{\tilde{z}} \sin \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \sin \lambda_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}(t_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1) \\ &+ \sin \lambda_A + \frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} \end{aligned} \quad (4.75)$$

$$g_{FC}(\lambda_1, \lambda_2) = x_{12} - x_{FC} \quad (4.76)$$

$$= t_{\tilde{z}} \cos \lambda_2 + (1 - t_{\tilde{z}}) \cos \lambda_1 - \cos(\lambda_A + 2\pi/3) \quad (4.77)$$

Selon le signe d'une fonction g , le point considéré est situé d'un côté ou de l'autre de la droite associée à la fonction g , ce qui permet de savoir si un point est dans le triangle central à partir du signe des trois fonctions g . L'assertion à démontrer pour qu'aucun point de l'intersection entre une corde C_{12} et un plan $\Pi_{\tilde{z}}$ ne soit dans $\mathcal{T}_{\tilde{z}}$ devient¹⁴ :

$$\boxed{\forall \lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B], \forall \lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E], g_{DA}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \text{ ou } g_{BE}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0 \text{ ou } g_{FC}(\lambda_1, \lambda_2) \leq 0}$$

On peut étudier le cas simple $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = \pi$, $\tilde{z} \in [0, H]$ (donc $\lambda_A \in [-\pi/6, 0]$). L'intersection de la corde $C_{0,\pi}$ avec le plan $\Pi_{\tilde{z}}$ a pour coordonnées $(R\tilde{z}/H, 0, \tilde{z})$, et on rappelle que $\tilde{z} = H \cos(3\lambda_A)$, donc en appliquant (4.72) :

$$g_{DA}(0, \pi) = -\frac{\cos(3\lambda_A)}{\sqrt{3}} + \sin \lambda_A + \frac{\cos \lambda_A}{\sqrt{3}} \quad (4.78)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(2 \sin(2\lambda_A) \sin \lambda_A) + \sin \lambda_A \quad (4.79)$$

$$= \sin \lambda_A \left(1 + \frac{2 \sin(2\lambda_A)}{\sqrt{3}} \right) \quad (4.80)$$

L'expression $g_{DA}(0, \pi)$ dépend de λ_A . Pour $\lambda_A = 0$ et $\lambda_A = \frac{1}{2} \arcsin(-\sqrt{3}/2) = -\pi/6$, $g_{DA}(0, \pi) = 0$. Pour les autres valeurs de $-\pi/6 < \lambda_A < 0$, $g_{DA}(0, \pi) < 0$. Cela montre donc que $g_{DA}(0, \pi)$ n'intersecte pas l'intérieur du triangle central $\mathcal{T}_{\tilde{z}}$ pour $\lambda_A \in [-\pi/6, 0]$ ($\tilde{z} \in [0, H]$).

Cependant, même avec les fonctions g , plus simples que les fonctions f , il nous paraît difficile de travailler analytiquement comme avec $g_{DA}(0, \pi)$.

On présente maintenant quelques tracés dans le plan $\Pi_{H/2}$. La figure 4.27 montre les lignes définissant $\mathcal{T}_{H/2}$ et différentes intersections entre des cordes (pour $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ et $\lambda_2 = \pi$), et pour $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$) et $\Pi_{H/2}$. La figure 4.28 montre les fonctions f et g correspondant aux intersections de la figure 4.27. La figure 4.29 montre les fonctions f et g pour tout $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ et $\lambda_2 \in [\lambda_E, \lambda_D]$. On adopte le code couleur suivant : le vert correspond aux points A et D (le segment $[\mathbf{S}_A, \mathbf{S}_D]$, les fonctions f_{DA} et g_{DA}), le bleu pour les points B et E et le rouge pour les points C et F .

14. Les fonctions g ont été définies de cette manière pour qu'un point dans le triangle central soit associé à des valeurs positives pour toutes les fonctions g .

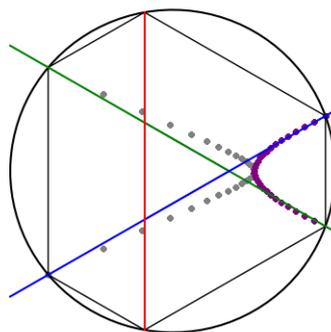


FIGURE 4.27 – Intersection de cordes (pour $\lambda_2 = \pi$ et $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ en violet, et pour $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$) en gris) avec le plan $\Pi_{H/2}$.

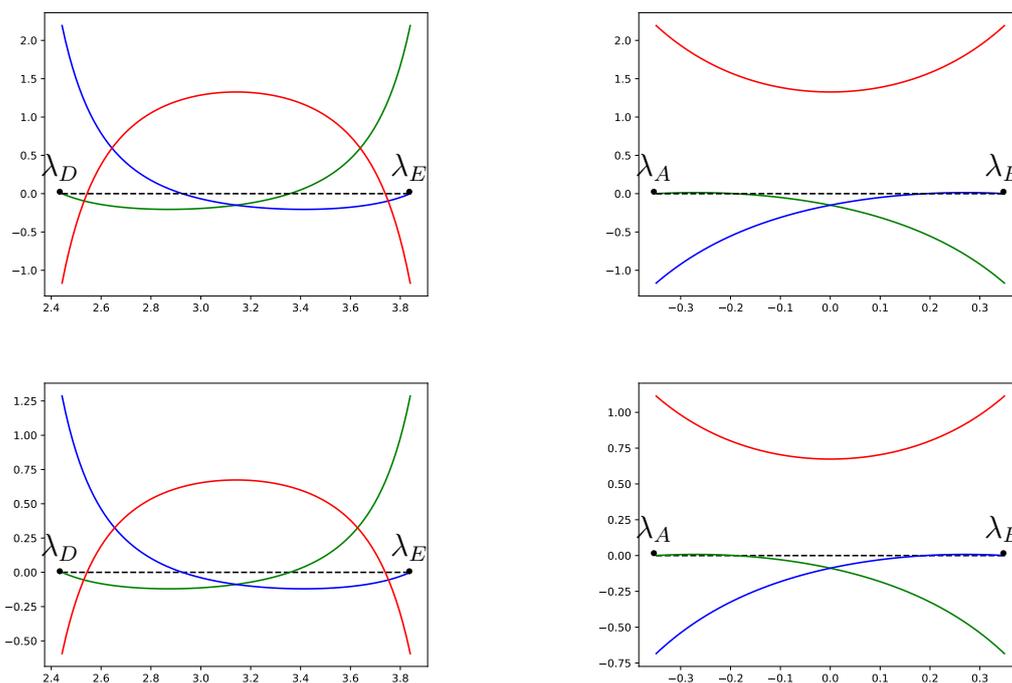


FIGURE 4.28 – Fonctions f (*haut*) et g (*bas*) (f_{DA} et g_{DA} en vert, f_{EB} et g_{EB} en vert, f_{FC} et g_{FC} en vert) pour $R = H = 1$ et $\tilde{z} = H/2$. *Gauche* : $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$ (λ_2 est en abscisse). *Droite* : $\lambda_2 = \pi$ et $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ (λ_1 est en abscisse). Pour toutes les valeurs de λ_1 et λ_2 présentées, il y a toujours une fonction f (et une fonction g) plus petite que 0, ce qui signifie qu'aucune corde considérée n'intersecte $\mathcal{T}_{H/2}$.

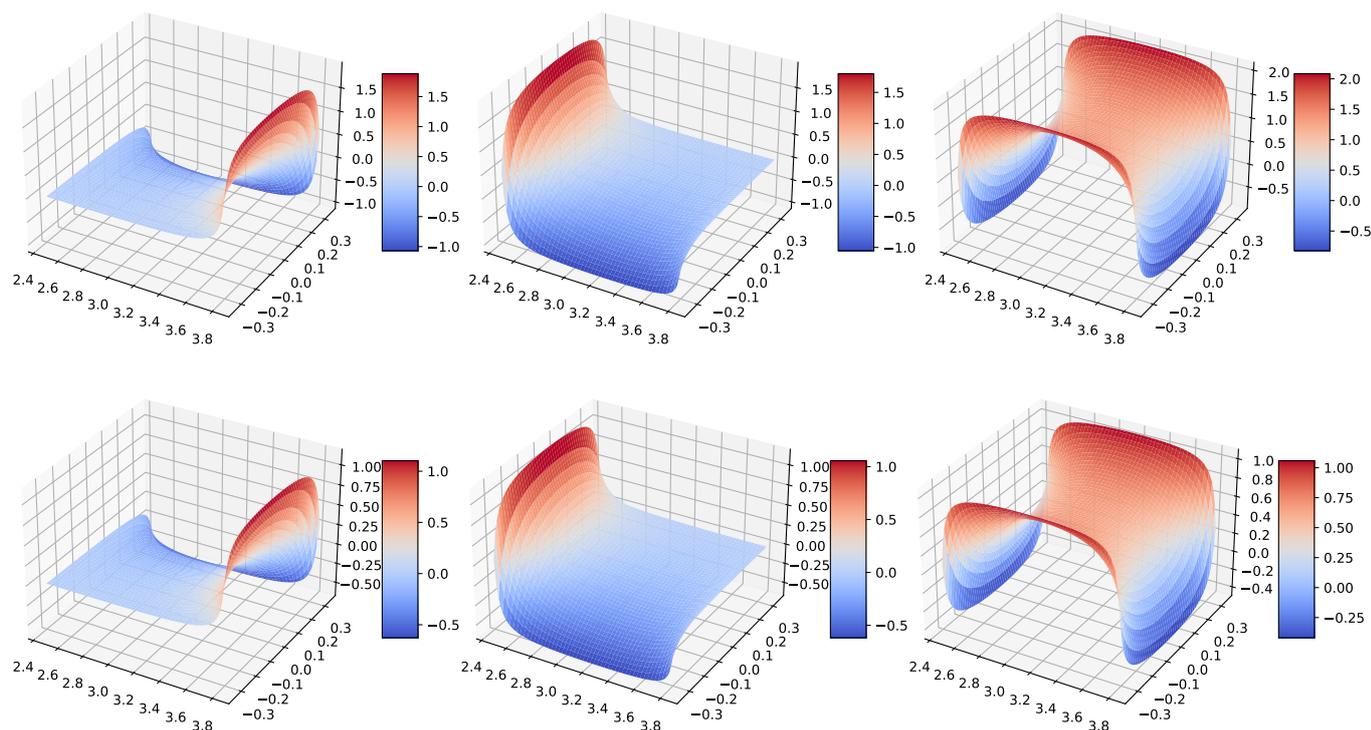


FIGURE 4.29 – Fonctions f et g pour $R = H = 1$ et $\tilde{z} = H/2$ en fonction de λ_1 (abscisse à “gauche”) et λ_2 (abscisse à “droite”) *Haut*, de gauche à droite : f_{DA} , f_{EB} et f_{FC} . *Bas*, de gauche à droite : g_{DA} , g_{EB} et g_{FC} . Quels que soient $\lambda_1 \in [\lambda_A, \lambda_B]$ et $\lambda_2 \in [\lambda_D, \lambda_E]$, une des trois valeurs $f_{DA}(\lambda_1, \lambda_2)$, $f_{EB}(\lambda_1, \lambda_2)$ ou $f_{FC}(\lambda_1, \lambda_2)$ (respectivement $g_{DA}(\lambda_1, \lambda_2)$, $g_{EB}(\lambda_1, \lambda_2)$ ou $g_{FC}(\lambda_1, \lambda_2)$) est toujours négative, donc il n’y a pas de corde C_{12} intersectant $\mathcal{T}_{H/2}$.

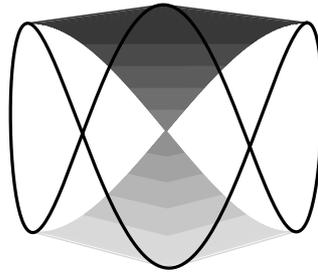


FIGURE 4.30 – Nous conjecturons que $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ s'identifie à l'ensemble représenté dans cette figure : c'est-à-dire un empilement de triangles de sommets I_1 , I_2 et I_3 donnés aux équations (4.83), (4.84), (4.85), dans des plans $z = \tilde{z}$, $\tilde{z} \in [-H, H]$.

On peut tracer (ce que nous avons conjecturé comme) $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ (figure 4.30) à partir des sommets (notés I_1 , I_2 et I_3 , et dépendant de \tilde{z}) définissant le triangle central. Par exemple le sommet défini par l'intersection des droites (CF) et (DE) satisfait l'équation :

$$t_{1,C}\mathbf{S}_C + (1 - t_{1,C})\mathbf{S}_F = t_{1,B}\mathbf{S}_B + (1 - t_{1,B})\mathbf{S}_E \quad (4.81)$$

et donc :

$$t_{1,C} \cos \lambda_C + (1 - t_{1,C}) \cos \lambda_F = t_{1,B} \cos \lambda_B + (1 - t_{1,B}) \cos \lambda_E \quad (4.82)$$

En utilisant le fait que $\cos \lambda_C = \cos \lambda_F$ on a :

$$I_1 = t_{1,B}\mathbf{S}_B + (1 - t_{1,B})\mathbf{S}_E, \quad t_{1,B} = \frac{\cos \lambda_F - \cos \lambda_E}{\cos \lambda_B - \cos \lambda_E} \quad (4.83)$$

On peut montrer que les deux autres sommets peuvent être définis par :

$$I_2 = t_{2,D}\mathbf{S}_D + (1 - t_{2,D})\mathbf{S}_A, \quad t_{2,D} = \frac{\cos \lambda_F - \cos \lambda_A}{\cos \lambda_D - \cos \lambda_A} \quad (4.84)$$

$$I_3 = t_{3,A}\mathbf{S}_A + (1 - t_{3,A})\mathbf{S}_D, \quad t_{3,A} = \frac{\sin \lambda_D}{\sin \lambda_D - \sin \lambda_A} \quad (4.85)$$

Chapitre 5

Méthode DBP appliquée aux trajectoires 2-sin et 3-sin

5.1 Introduction

La méthode DBP a été introduite au chapitre 2 et les trajectoires n -sin, notamment la trajectoire 2-sin et la trajectoire 3-sin, ont été étudiées au chapitre 4. Nous proposons dans ce chapitre de voir comment la méthode DBP peut être appliquée pour ces trajectoires en la présence de troncations (transverses, axiales, ou les deux réunies). L'objet étudié sera un cylindre (de base circulaire ou elliptique) et le FOV sera assimilé à un cylindre d'axe parallèle à celui de l'objet. Les résultats de la section 5.4 ont fait l'objet d'une présentation orale à la conférence *CT Meeting 2020* [29], ceux de la section 5.5 ont été présentés via un poster lors de la conférence *MIC 2020* [30]. Enfin, la section 5.6 explicite une partie des résultats présentés au *Fully3D 2021* [31]. Pour avoir un aperçu plus exhaustif de la gestion des troncations pour les trajectoires n -sin, nous nous permettons de rajouter une partie à la fin du chapitre, sortant du cadre DBP, sur la méthode Katsevich et ses extensions (section 5.7).

5.2 FOV et troncations dans le cadre des trajectoires 2-sin et 3-sin

La notion de FOV en géométrie conique n'est pas toujours évidente et pertinente (par exemple on utilise plutôt la fenêtre de Tam pour la trajectoire hélicoïdale, comme dans [93]). Au chapitre 2 section 2.2.5 nous avons un peu discuté de la définition d'un FOV 3D dans le cadre de trajectoires à base circulaire (trajectoires dont la projection dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ est un cercle).

Nous considérons un détecteur plat et rectangulaire d'axe vertical \mathbf{e}_v parallèle à \mathbf{e}_z et de distance constante par rapport à la source (la source et le détecteur forment un ensemble rigide). On rappelle qu'une ligne est *mesurée* quand elle intersecte une position de source et le détecteur. De plus, pour une position de source, l'ensemble des lignes mesurées données forme un cône noté FOV_λ . L'intersection de ces cônes $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \text{FOV}_\lambda$ est le FOV. Cela signifie qu'un point du FOV est vu par toutes les sources. Ainsi, comme en géométrie fan beam classique (chapitre 1 section 1.2.4 et section 1.3), en projection sur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, l'éventail de lignes mesurées issues d'une source sera tangent au cercle du FOV. Cependant, comme souligné chapitre 2 section 2.2.5 un FOV décrit de cette manière

n'est pas un cylindre parfait, à cause de ses extrémités non plates. Pour des raisons de simplicité, on considérera pourtant souvent un FOV cylindrique, qui peut être vu comme le plus grand cylindre inscrit dans le FOV (de notre définition). Cela fait sens car notre but sera surtout de donner des conditions de reconstruction suffisantes.

On rappelle qu'une situation de troncation apparaît quand une ligne passant à travers une source et un objet n'est pas mesurée. On peut ensuite comme chapitre 2 section 2.2.5 adopter un point de vue plus large en observant les relations entre le support de l'objet Ω_O (pour rappel l'enveloppe convexe des régions de densité non nulle) et le FOV. Pour un FOV et un support cylindrique on parle de troncations *transverses* (ou transaxiales) quand la base du cylindre du FOV n'est pas assez large pour contenir celle de Ω_O (en projection dans $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$). Les troncations axiales ont lieu quand Ω_O est axialement plus étendu (selon l'axe \mathbf{e}_z) que le FOV.

La figure 5.1 illustre les troncations transverses et axiales avec la trajectoire selle.



FIGURE 5.1 – La trajectoire selle S_A^2 avec un FOV cylindrique et Ω_O le support de l'objet. *Gauche* : Troncations transverses. *Droite* : Troncations axiales.

5.3 Bref état de l'art des méthodes de reconstruction analytiques appliquées à la trajectoire selle

De 2004 à 2006, plusieurs propositions de méthodes de reconstruction analytiques ont été proposées pour la trajectoire selle. Nous ne détaillons pas ces méthodes et nous nous contentons de souligner que ces méthodes ne permettent au plus que des troncations axiales (et non transverses) dans la grande majorité (nous donnerons une exception en fin de paragraphe). Le premier article de cette période à s'intéresser aux trajectoires selles est [60], qui donne une méthode de reconstruction avec une rétroprojection filtrée (et pondérée) utilisant la dérivée de la fonction de Grangeat (voir [50] ou chapitre 2 section 2.2.5). Les articles [79] et [82] utilisent tous les deux la méthode de Katsevich (voir section 5.7) mais [82] effectue la rétroprojection sur une portion de trajectoire correspondant à une corde contenant le point à reconstruire, alors que [79] utilise une méthode présentée dans [58] (cela sera étudié section 5.7 et dans l'annexe E). L'article [80], paru peu après [79] et par les mêmes auteurs, présente deux formules de reconstruction de type FDK, qui d'après les auteurs donnent de meilleurs résultats que la méthode présentée dans [79] et s'adaptent aux selles sous leur forme générale. Toujours pour des selles générales, [86] présente deux formules de type FBP et DBP. Enfin, l'article [78] aborde le problème de la troncation transverse en plus de la troncation axiale, avec des approches de type DBP. Cette approche sera aussi la nôtre, mais des outils développés après la parution de cet article nous permettent de pousser l'investigation bien plus loin (par exemple la transformée de Hilbert unilatérale développée seulement en 2006 [21]). De même, [84]

aborde la méthode DBP “classique” avec la trajectoire selle. *L’auteur tient à signaler que la découverte de l’article [78] a eu lieu très tardivement dans la thèse, et après la parution de [29]. L’auteur tient à présenter ses excuses pour ne pas avoir fait mention de [78] dans cet article, en soulignant que les résultats concernant la trajectoire selle, la DBP et les troncations transverses ont été obtenus de manière indépendante, à partir notamment de [15], [60] et des articles “classiques” de DBP (il aurait d’ailleurs aussi fallu faire mention de [84]).*

5.4 Application de la DBP dans le cas de troncations transverses

5.4.1 Résultats théoriques et difficultés de la trajectoire 3-sin

Nous commençons par nous placer dans le cadre de troncations transverses uniquement (cas où le détecteur est assez haut mais pas assez large pour l’objet étudié). Le FOV cylindrique intersecte alors l’objet Ω_O sans le contenir (un exemple avec la trajectoire 2-sin est donné figure 5.2). Nous allons étudier l’application de la méthode DBP (englobant la méthode des lignes M) dans cette configuration avec les trajectoires 2-sin et 3-sin.

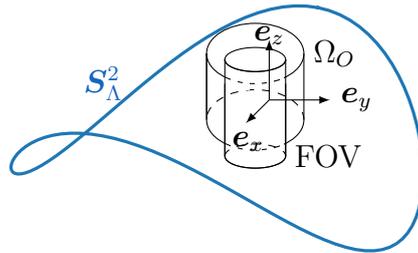


FIGURE 5.2 – Une trajectoire 2-sin avec un objet cylindrique Ω_O et un FOV (plus axialement étendu que Ω_O).

Commençons par considérer uniquement la trajectoire 2-sin (d’enveloppe convexe $\Omega_{S_\Lambda^2}$), une région d’intérêt $\text{ROI} = \text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda^2} \cap \Omega_O^1$ et un point $\mathbf{x} \in \text{ROI}$. On rappelle que dans le cas de la trajectoire 2-sin, $\Omega_{S_\Lambda^2} = C_{S_\Lambda^2}$, avec $C_{S_\Lambda^2}$ l’union des cordes de S_Λ^2 . Cela signifie que le point \mathbf{x} sera toujours sur une corde que l’on notera C^2 . Nous considérons alors le segment $Q = C \cap (\text{FOV} \cup \Omega_O)$. Il peut y avoir 0, 1 ou 2 extrémités de Q n’appartenant pas à Ω_O (voir figure 5.3), qui peuvent être traitées selon les méthodes de reconstruction suivantes :

- 0 : il n’est pas possible d’utiliser la méthode des cordes, on ne peut pas inverser la transformée de Hilbert dans la direction de C , il faudra utiliser la méthode des lignes M ;
- 1 : on peut utiliser la méthode des cordes avec l’inverse de la transformée de Hilbert unilatérale (dans la direction de C) ;

1. On rappelle qu’un résultat de [27] implique qu’il ne peut y avoir de reconstruction exacte en dehors de l’enveloppe convexe Ω_{S_Λ} d’une trajectoire continue et bornée.

2. Pour cette trajectoire il sera même sur deux cordes distinctes s’il est à l’intérieur strict de $\Omega_{S_\Lambda^2}$.

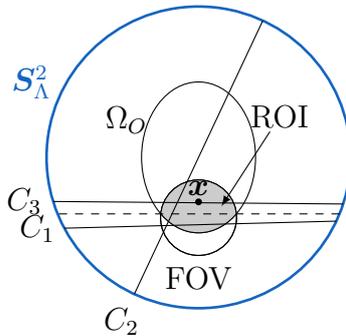


FIGURE 5.3 – Vue de dessus de la configuration de la figure 5.2. La ligne en tirets délimite les 3 cas de reconstruction pour les cordes traversant un point de la ROI : les deux extrémités de C_1 sont en dessous de la ligne en tirets (C_1 intersecte l’objet avant le FOV) donc l’inverse de la transformée de Hilbert finie peut être appliqué, C_2 traverse la ligne en tirets donc la transformée de Hilbert unilatérale peut être utilisée, et les deux extrémités de C_3 sont au-dessus de la ligne en tirets (C_3 intersecte le FOV avant l’objet) donc on ne peut pas reconstruire avec la méthode des cordes (pour reconstruire \mathbf{x} il faudra utiliser la méthode des lignes M).

- 2 : on peut utiliser la méthode des cordes avec l’inverse analytique de la transformée de Hilbert³ (dans la direction de C).

Dans le cas où les deux extrémités de Q appartiennent à Ω_O , il faut donc utiliser la méthode des lignes M. On peut rapidement rappeler que la méthode des lignes M (introduite dans [59]) est utilisée pour les reconstructions d’un point \mathbf{x} qui appartient à une corde où on ne peut inverser la transformée de Hilbert. Dans ce cas, on choisit une ligne M^4 L_{S_M, η_M} contenant \mathbf{x} et dont au moins une extrémité de $Q_M = L_{S_M, \eta_M} \cap (\Omega_O \cup \text{FOV})$ est en dehors de Ω_O . Pour réaliser l’inversion de la transformée de Hilbert le long de Q_M , chaque point $\mathbf{y} \in Q_M \cap \text{FOV}$ doit être traversé par sa propre corde. Une fois que $\mathcal{H}_{\eta_M} f(\mathbf{y})$ a été calculée pour tout $\mathbf{y} \in Q_M \cap \text{FOV}$, alors la transformée de Hilbert peut être inversée le long de Q_M pour obtenir $f(\mathbf{x})$ (voir figure 5.4).

L’approche décrite ci-dessous s’inspire en partie de [15], qui appliquait la méthode DBP à la trajectoire hélicoïdale également dans le cadre de troncations transverses.

Chaque point de l’enveloppe convexe de la trajectoire selle (figure 5.5) étant traversé par une corde, en cas de troncations axiales restreintes⁵, toutes les cordes seront visibles, et la méthode des cordes permet de réaliser des reconstructions dans la région de Tuy (en utilisant uniquement l’inverse analytique de Hilbert).

Dans le cas de troncations transverses (mais ici non axiales), la situation est plus complexe, les trois cas décrits dans la figure 5.3 surviennent. Chaque point \mathbf{x} de $\Omega_{S_\Lambda^2} \cap \Omega_O \cap \text{FOV}$ sera sur une corde, et l’on sera soit dans le cas de l’inversion analytique (cas de la corde C_1 de la figure 5.3), soit dans le cas de l’inversion unilatérale (cas de la corde C_2) ou dans le cas où l’inversion de Hilbert est impossible (C_3). Dans ce dernier cas, il est toujours possible de choisir une ligne M liant \mathbf{x} à la trajectoire, qui sort de Ω_O en restant encore dans le FOV. Tous les points \mathbf{y} dans le FOV et sur cette ligne M sont intersectés

3. Aussi appelé inverse de la transformée de Hilbert finie.

4. On rappelle qu’une ligne M est une demi-droite issue d’une position de source passant par un point donné de l’objet considéré, voir figure 5.4 ou se reporter aux chapitres 1 (section 1.5.5) et 2 (section 2.2.4).

5. Plus précisément, si les extrémités du FOV cylindrique sont au-delà de l’enveloppe convexe de la trajectoire selle.

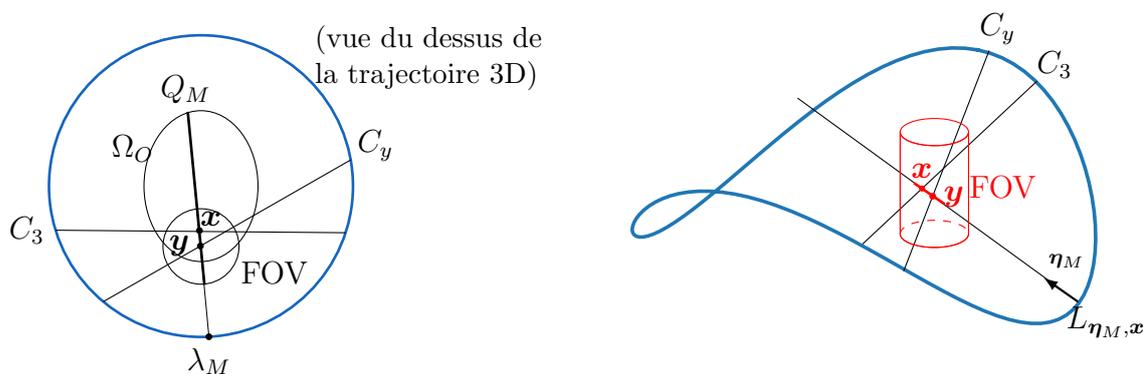


FIGURE 5.4 – *Gauche* : La méthode des lignes M. Le point \mathbf{x} ne peut pas être reconstruit par la méthode des cordes en utilisant la corde C_3 . On choisit une ligne M contenant \mathbf{x} . Si chaque point $\mathbf{y} \in Q_M \cap \text{FOV}$ est sur une corde C_y , alors la transformée de Hilbert peut être calculée, et l'inversion le long de Q_M est possible, pour reconstruire f en \mathbf{x} (et en tout \mathbf{y}). *Droite* : Une ligne M traversant \mathbf{x} et \mathbf{y} . Les points \mathbf{x} et \mathbf{y} sont tous deux traversés par une corde (respectivement C_3 et C_y).

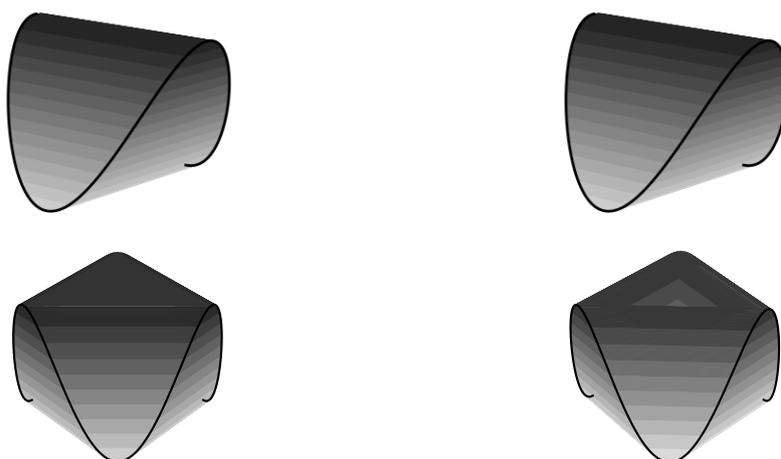


FIGURE 5.5 – L'enveloppe convexe et l'union des cordes de deux trajectoires n -sin. *Haut* : La trajectoire 2-sin. *Bas* : La trajectoire 3-sin. *Gauche* : L'enveloppe convexe de la trajectoire (la région de Tuy). *Droite* : L'union des cordes de la trajectoire.

par une corde, pour laquelle la transformée de Hilbert peut être calculée. L'inversion de Hilbert est donc possible dans les trois cas, et la ROI ($= \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2} \cap \Omega_O \cap \text{FOV}$) peut être reconstruite. Dans [78], seul le cas de la corde C_1 est abordé, étant donné qu'il n'y a que deux cordes de \mathcal{S}_Λ^2 passant par un point, les régions que l'on peut reconstruire et/ou les troncations possibles ne sont pas nombreuses.

D'après nos connaissances, c'est la première méthode de reconstruction analytique de la trajectoire 2-sin avec des troncations transverses avec [78] (mais comme expliqué ci-dessus, [78] n'utilise que l'inverse de Hilbert bilatéral, ce qui réduit fortement les possibilités de reconstruction). Cette approche peut être généralisée avec d'autres trajectoires à projection convexe recouvrables par cordes (voir chapitre 3, il faudra néanmoins faire attention à la forme du FOV, il est plus facile de travailler avec un FOV cylindrique généré par une trajectoire dont la projection est un cercle). Le cas de troncations transverses ET axiales sera traité dans la section 5.5.

Contrairement à la trajectoire 2-sin, la région de Tuy de la trajectoire 3-sin contient certains points qui ne sont pas traversés par une corde. Le chapitre 4 (section 4.6.2) traite de ce sujet en détails mais on peut brièvement voir figure 5.5 qu'il y a un "trou triangulaire" (où aucune corde ne passe) par rapport à l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$.

Pour ces points de $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$, non traversés par une corde, la méthode DBP (que ce soit la méthode des cordes ou la méthode des lignes M) ne peut pas être utilisée, et ce même sans troncation. Cependant, il n'existe (actuellement) pas de théorie indiquant s'il est possible ou non de reconstruire exactement une région sans corde avec des troncations transverses⁶. Les simulations de la partie suivante semblent indiquer que de telles reconstructions sont possibles.

5.4.2 Simulations

Le but de ces premières simulations est de comparer des reconstructions pour la trajectoire 2-sin et 3-sin. Nous avons vu que pour la trajectoire 3-sin, une région de l'enveloppe convexe n'est traversée par aucune corde, il n'est donc pas possible d'utiliser la méthode DBP⁷. Pour cela nous utilisons une méthode itérative, la méthode des moindres carrés avec le gradient conjugué, que nous détaillons dans l'annexe A. Succinctement, cette méthode consiste à minimiser selon f $\|Rf - p\|_2^2 + \gamma \|\nabla f\|_2^2$ avec R l'opérateur de projection et p les projections mesurées). Nous utilisons l'implémentation de la bibliothèque RTK[63], avec $\gamma = 100^8$, 120 itérations⁹ et 200 positions de source équiréparties sur la

6. On sait juste que pour être restructurable, cette région doit être dans le FOV et dans l'enveloppe convexe de la trajectoire. On sait également que sans troncation, grâce à la condition de Tuy, tout point de l'enveloppe convexe de la trajectoire peut-être exactement reconstruit.

7. Une autre raison est que la méthode de reconstruction proposée avec la méthode DBP est assez complexe à implémenter, notamment pour l'inverse numérique de la transformée de Hilbert. Au moment où ce manuscrit est écrit, des avancées ont été faites avec des travaux de A.Coussat, M.Defrise *et al.*[16], en travaillant sur la décomposition en valeurs singulières (SVD) de la transformée de Hilbert, mais à notre connaissance les implémentations réalisées se limitent pour l'instant au cas 2D (même s'il n'y pas de raison théorique qui s'opposerait à son extension au cas 3D). Il en est de même pour la méthode POCS, utilisée également pour calculer cet inverse [21, 83], mais seulement en 2D (une nouvelle fois, une implémentation 3D pourrait être considérée).

8. Le paramètre γ est choisi de manière empirique : on teste simplement plusieurs valeurs de γ pour la même géométrie d'acquisition.

9. Cette méthode converge, pour toutes ses utilisations nous itérons jusqu'à ce que cette convergence soit atteinte (une nouvelle itération n'apporte plus d'amélioration de la qualité).

trajectoire¹⁰. Enfin, nous reconstruisons une image de taille 380 x 152 x 382 à partir de projections simulées du fantôme Forbild Thorax¹¹.

Pour les deux trajectoires, on choisit pour rayon $R = 250$ mm et pour hauteur totale 200 mm ($H = 100$ mm). Le FOV est centré sur la colonne vertébrale (la reconstruction effectuée peut être assimilée à un examen médical des vertèbres). Son rayon est de 50 mm et une hauteur de 380 mm (la hauteur du fantôme, nous ne souhaitons pas de troncation axiale). L'ensemble fantôme, FOV et trajectoire est illustré figure 5.6. La largeur du fantôme étant de 300 mm, le FOV va causer des troncations transverses importantes.

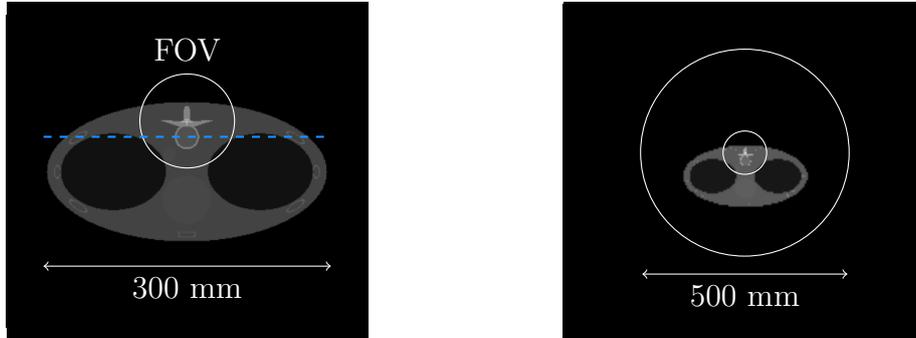


FIGURE 5.6 – Configuration en vue de dessus en $z = 0$ pour les simulations. La ligne bleue en tirets représente le profil utilisé figure 5.10. *Gauche* : Le fantôme Forbild thorax et le FOV. *Droite* : La trajectoire avec le fantôme.

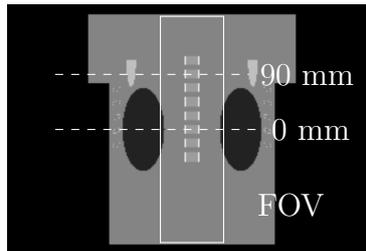


FIGURE 5.7 – Les deux coupes pour la reconstruction (vue de profil).

Deux coupes à des hauteurs différentes sont présentées pour le fantôme reconstruit ($z = 0$ mm et $z = 90$ mm, voir figures 5.7 et 5.8). Le but est de constater l'influence de l'absence de cordes. En particulier, pour la trajectoire 3-sin, plus on s'éloigne verticalement de l'origine et plus il manque des cordes. Les résultats des reconstructions sont montrés figures 5.9 et 5.10. Selon la théorie DBP, les tranches de l'objet appartenant aux deux coupes peuvent être reconstruites pour la trajectoire 2-sin, mais ce n'est pas le cas pour la section transversale $z = 90$ mm pour la trajectoire 3-sin (il n'y a pas de corde traversant le FOV pour cette section, c'est le pire cas). La section $z = 0$ mm est moins évidente : tous les points du FOV (pour cette section) sont certes traversés par une corde mais il n'y a pas de garantie de pouvoir utiliser la méthode des lignes M¹².

10. Plus précisément l'intervalle $\Lambda = [0, 2\pi[$ est discrétisé de manière homogène avec un pas de $\frac{\pi}{100}$.

11. Le Forbild Thorax est un fantôme qui représente grossièrement un torse humain contenant les poumons, la colonne vertébrale, le coeur, l'aorte, les côtes, le sternum et les épaules.

12. C'est assez subtil : dans le cas où la méthode des cordes ne s'applique pas, il faut que la ligne M candidate pour la méthode des lignes M intersecte $\text{FOV} \setminus \Omega_O$. De plus, pour reconstruire un point \mathbf{x} , chaque point de $[\mathbf{x}, \mathbf{S}_\lambda^n] \cap \text{FOV}$ doit être intersecté par une corde. Pour des raisons de concavité de $N_{\mathbf{S}_\lambda^3}$ il semble qu'une telle ligne M existe mais nous n'avons pas approfondi la question. Cependant, dans la

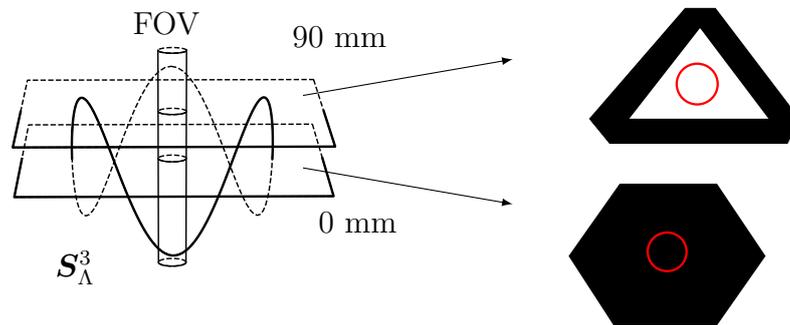


FIGURE 5.8 – *Gauche* : Une trajectoire 3-sin (pas à nos dimensions) avec un FOV cylindrique et deux coupes. *Droite, haut* : L'union des cordes (en noir, le blanc signifie qu'il n'y a pas de corde) et le FOV pour la section $z = 90$ mm, aucun point du FOV (cercle rouge) pour cette section n'est traversé par une corde. *Droite, bas* : L'union des cordes (en noir) et le FOV pour la section $z = 0$, tous les points du FOV de cette section sont traversés par une corde.

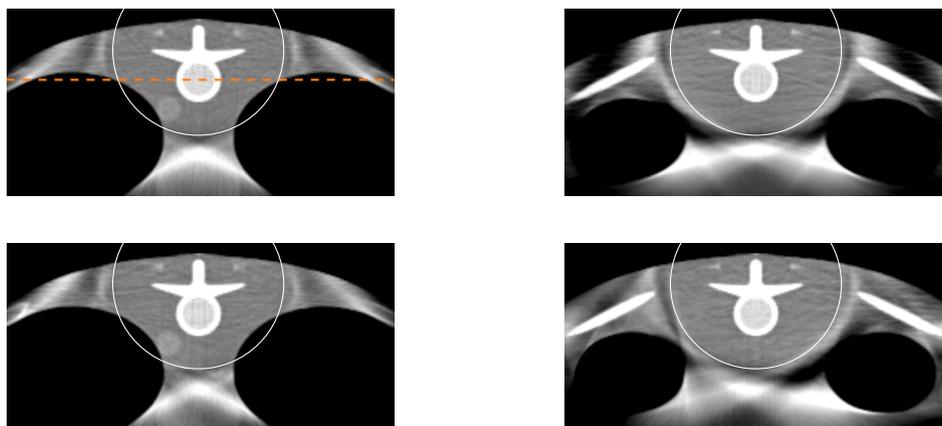


FIGURE 5.9 – Reconstruction pour les trajectoires 2-sin et 3-sin. *Gauche* : $z = 0$. *Droite* : $z = 90$ mm. *Haut* : $n = 2$. *Bas* : $n = 3$. Les cercles blancs représentent le FOV. La ligne orange représente le profil pour la figure 5.10. Fenêtrage : *level* : 1.0, *window* : 0.5.

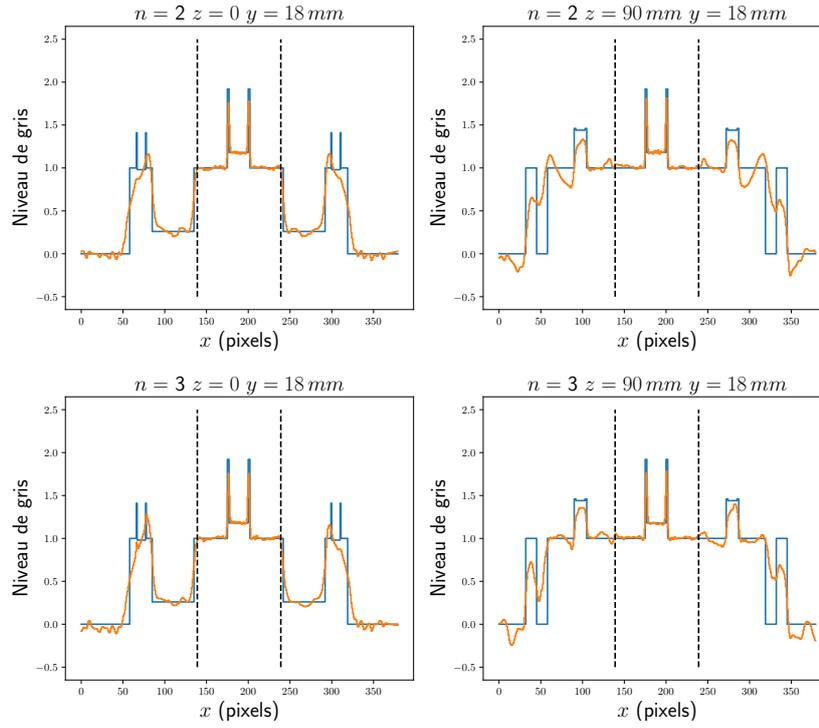


FIGURE 5.10 – Profils (le fantôme est en bleu, la reconstruction en orange) des reconstructions après 120 itérations en $y = 18$ mm. *Gauche* : $z = 0$. *Droite* : $z = 90$ mm. *Haut* : Trajectoire 2-sin. *Bas* : Trajectoire 3-sin.

On peut noter figure 5.9 que les 4 images sont de qualité comparable et satisfaisante dans le FOV. L'image correspondant à la section $z = 90$ mm de la trajectoire 3-sin semble similaire à celle de la trajectoire 2-sin. Nous pouvons donc considérer (avec précaution) que, grâce à une théorie encore inconnue, cette partie de la région de Tuy peut être précisément reconstruire même s'il n'y a pas de cordes la traversant. Il est également possible que nos simulations ne soient pas assez fines pour déceler de petits artefacts ou des erreurs plus importantes pour la reconstruction de la trajectoire 3-sin que celle de la 2-sin.

Pour tenter de quantifier la qualité de reconstruction, nous pouvons appliquer les classiques calculs d'erreur relative et RMSE (*Root Mean Squared Error*). Ce calcul n'a un sens que dans $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda}^{13}$. En notant $\text{ROI}_n = \text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda^n} \cap \Omega_O$:

$$err = \frac{100}{m} \sum_{\substack{i,j,k \\ x_i, y_j, z_k \in \text{ROI}_n}} \frac{|f_{\text{reco}}(x_i, y_j, z_k) - f_{\text{fant}}(x_i, y_j, z_k)|}{|f_{\text{fant}}(x_i, y_j, z_k)|} \quad (5.1)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{\substack{i,j,k \\ x_i, y_j, z_k \in \text{ROI}_n}} |f_{\text{reco}}(x_i, y_j, z_k) - f_{\text{fant}}(x_i, y_j, z_k)|^2} \quad (5.2)$$

avec i , j et k les indices respectifs de discrétisation de x , y et z , n valant 2 ou 3, f_{reco} la densité de la reconstruction et f_{fant} la densité de référence (celle du fantôme) et m

section 5.5, l'existence de lignes M pertinentes est notre sujet de préoccupation, mais les configurations évoquées concernent uniquement la trajectoire selle, où l'union des cordes est plus simple.

13. Et nous nous restreignons au support de l'objet, ce qui évite aussi de diviser par 0 dans le calcul de l'erreur relative.

étant le nombre de termes de la somme. On choisit de réaliser ces calculs pour les deux reconstructions précédentes, dans un cylindre approximant (et étant inclus dans) $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\lambda^n}$ ¹⁴. Pour la trajectoire 2-sin on a $RMSE = 0.0907$ et l'erreur vaut $err = 3.17\%$, pour la trajectoire 3-sin $RMSE = 0.0928$ et $err = 3.26\%$. Cela nous conforte dans l'idée qu'il y a peu de différences de qualité de reconstruction pour cette configuration.

Afin de tenter de déceler une différence entre reconstruction de trajectoire 2-sin et 3-sin, d'autres reconstructions ont été faites. Par exemple, on peut rajouter des cylindres de même axe avec une haute densité pour rendre la reconstruction plus difficile¹⁵, voir figure 5.11. La reconstruction pour la section $z = 90$ mm présente des artefacts un peu plus prononcés pour la trajectoire 3-sin, mais la très grande majorité du FOV (dont la vertèbre) semble bien reconstruite et de qualité semblable pour les deux trajectoires, il paraît difficile de conclure avec ces reconstructions.

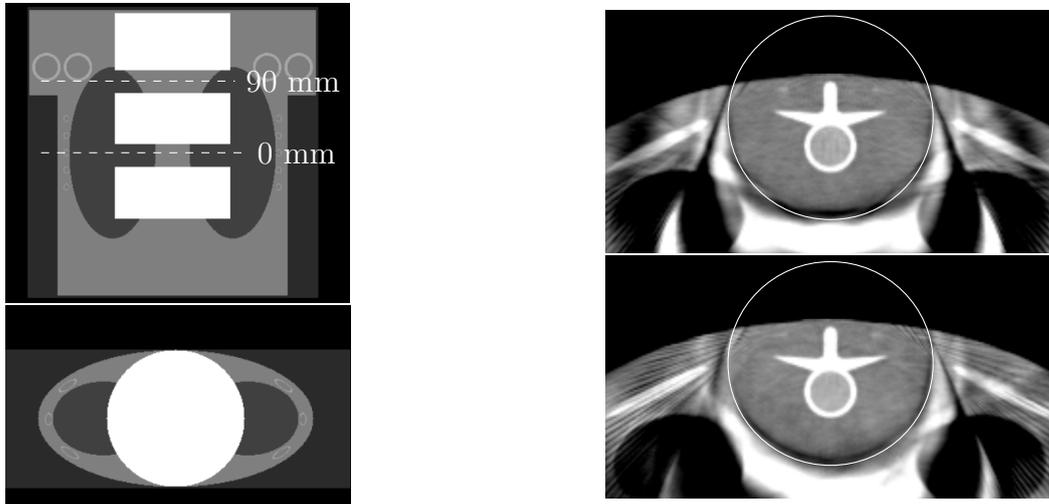


FIGURE 5.11 – *Gauche* : Le fantôme Forbild Thorax avec 3 cylindres d'axe parallèle à e_z , de rayon 75 mm et de densité 10 (la grande majorité du fantôme d'origine ayant une densité entre 0 et 2). *Droite* : Reconstructions pour la section $z = 90$ mm. Les cercles blancs représentent les FOV. Fenêtrage : *window* : 1.0, *level* : 1.0. *Droite, haut* : Trajectoire 2-sin. *Droite, bas* : Trajectoire 3-sin.

Enfin, pour tester la stabilité de la reconstruction, nous pouvons ajouter un bruit poissonien, basé sur la loi de Poisson $g(k, \alpha) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$, avec α correspondant dans notre cas à un nombre moyen de photons émis pendant un certain temps (assez long), et k le nombre observé de photons¹⁶. Si l'on appelle *poisson* la fonction donnant un k pour un α donné, suivant la loi de Poisson, on peut obtenir une projection bruitée \tilde{p} à partir

14. Il semble inutilement compliqué de chercher à réaliser précisément ces calculs pour $\text{FOV} \cap \Omega_{S_\lambda^n} \cap \Omega_O$.

15. On peut faire le parallèle avec le fantôme de Defrise.

16. Une projection sans bruit sera donc associée à α et une projection bruitée à k .

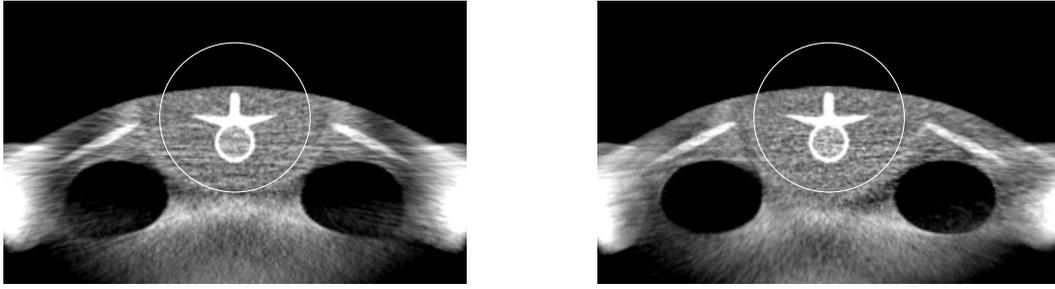


FIGURE 5.12 – Reconstructions avec projections bruitées pour la section $z = 90$ mm avec 140 itérations (les cercles blancs sont les FOV). Fenêtrage : *window* : 1.0, *level* : 1.0. *Gauche* : Trajectoire 2-sin. *Droite* : Trajectoire 3-sin.

d'une projection p :

$$\tilde{I} = poisson(I_e e^{-\mu_{H_2O} p}) \quad (5.3)$$

$$\tilde{p} = \frac{\ln(I_e / \tilde{I})}{\mu_{H_2O}} \quad (5.4)$$

avec I_e l'intensité du rayon d'entrée (déterminée par le nombre de photons incidents) et $\mu_{H_2O} = 0.01879 \text{ mm}^{-1}$ le coefficient d'absorption de l'eau. Nous avons réalisé des simulations avec $I_e = 5 \cdot 10^3$ et 140 itérations, voir figure 5.12. Une nouvelle fois, les différences de reconstruction (dans le FOV) ne sont pas flagrantes, le bruit ne semble pas avoir provoqué d'instabilités pour la région sans corde de la trajectoire 3-sin. Il est néanmoins possible qu'avec un fantôme spécifique bien choisi, des différences entre les reconstructions 2-sin et 3-sin apparaissent.

Dans cette section, nous avons donc constaté que la méthode DBP (via la méthode des cordes et celle des lignes M) peut être utilisée avec des troncations transverses pour la trajectoire 2-sin. Nous notons également que la trajectoire 3-sin (et les trajectoires n -sin en général pour $n > 2$, voir chapitre 4) a certaines régions de son enveloppe convexe non traversées par des cordes, mais cela ne semble pas empêcher la reconstruction de ces régions, même avec des troncations transverses (on peut faire l'hypothèse que ces résultats resteront valides pour les trajectoires n -sin en général).

Les questions qui s'ouvrent alors sont les suivantes :

- Peut-on envisager davantage de troncations pour la trajectoire selle ?
- Peut-on justifier de manière théorique le caractère exact des reconstructions (s'il existe) pour toute l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin avec troncations transverses ?

Des réponses partielles seront respectivement données section 5.5 et 5.6.

5.5 Trajectoire selle et double troncation

5.5.1 Lignes M pour la trajectoire selle avec double troncation

La section précédente a montré que des reconstructions exactes pouvaient être effectuées grâce à la méthode DBP pour la trajectoire selle avec des troncations transverses. L'objectif de cette section est de donner, en utilisant principalement l'approche de

la méthode des lignes M, des *conditions suffisantes* de reconstruction (concernant principalement les dimensions du FOV) quand les troncations sont à la fois axiales et transverses (cela a été brièvement abordé dans [78], les autres articles de la littérature se concentrant pour la plupart au plus sur les troncations axiales, voir section 5.3). Une nouvelle fois on considère que Ω_O et le FOV sont des cylindres d'axe parallèle à l'axe \mathbf{e}_z . Dans cette section, on ne se concentre que sur la trajectoire selle, car son union de cordes (égale à la région de Tuy) est simple et intéressante pour la méthode DBP, comme expliqué dans la section précédente. La figure 5.1 section 5.2 montrait deux configurations de trajectoires selle avec troncations axiales ou transverses.¹⁷

On rappelle que la méthode DBP (via la méthode des cordes) permet de reconstruire un point $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_{S_\Lambda} \cap \Omega_O$ s'il est sur une corde et si l'intersection de la corde et du FOV contient un bout de corde en dehors de l'objet. Dans cette section, nous nous concentrons sur le cas où le point \mathbf{x} est sur une corde mais qu'il ne respecte pas la seconde condition. Comme nous l'avons vu, dans ce cas il faut utiliser la méthode des lignes M. Pour reconstruire \mathbf{x} , il faut alors que l'intersection entre le FOV et la ligne M contenant \mathbf{x} contienne un bout de ligne en dehors de l'objet Ω_O . De manière équivalente, la ligne M doit intersecter la région $\Omega_F = \text{FOV} \setminus \Omega_O$. Plusieurs lignes M peuvent satisfaire à cette condition (voir figure 5.13). De plus, chaque point de la partie de la ligne M intersectant $\text{FOV} \cap \Omega_O$ doit être traversé (chacun) par une corde. Comme \mathbf{x} est dans l'enveloppe convexe de S_Λ^2 , le segment extrait d'une ligne M entre une position de source et \mathbf{x} est toujours dans l'enveloppe convexe, donc chaque point de ce segment appartient à une corde différente.

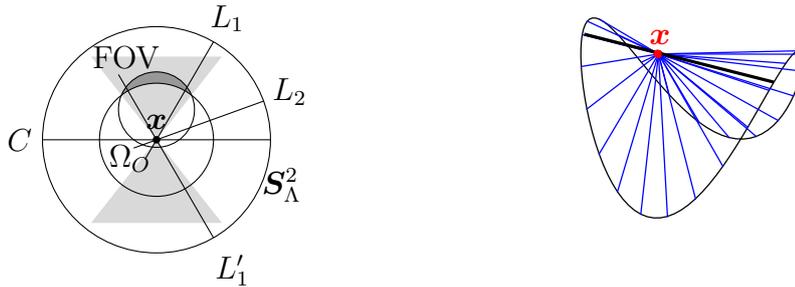


FIGURE 5.13 – *Gauche* : Vue de dessus d'une trajectoire selle S_Λ^2 et un objet de support Ω_O . Ici, \mathbf{x} est sur la corde C et la méthode DBP ne peut pas être directement appliquée (on ne peut pas appliquer la méthode des cordes), parce que $C \cap \text{FOV}$ est dans l'intérieur strict de $C \cap \Omega_O$. Cependant, la méthode des lignes M peut être appliquée, L_1 est une ligne M *valide* (utilisable pour la méthode des lignes M), parce que $L_1 \cap \Omega_F \neq \emptyset$ ($\Omega_F = \text{FOV} \setminus \Omega_O$ est la région gris foncé). On peut raisonner de même pour L'_1 , mais ce n'est pas le cas pour L_2 . Les cônes gris délimitent les lignes M valides. *Droite* : Des (parties de) lignes M (en bleu) à travers un point \mathbf{x} (à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la trajectoire selle). Le point \mathbf{x} est sur une corde (en noir).

Quand il y a à la fois des troncations transverses et axiales, l'application de la méthode des lignes M requiert un examen attentif de la géométrie du FOV et de l'objet Ω_O . La figure 5.14 donne un exemple de FOV non utilisable pour la trajectoire selle S_Λ^2 parce

17. La trajectoire selle utilisée dans cette section sera en fait définie par $\{(R \cos \lambda, R \sin \lambda, H \sin(2\lambda)), \lambda \in [0, 2\pi[\}$ et non par $\{(R \cos \lambda, R \sin \lambda, H \cos(2\lambda)), \lambda \in [0, 2\pi[\}$, car pour des raisons sans grande importance il était plus simple de travailler avec une rotation de $\pi/2$ de la trajectoire selle originale.

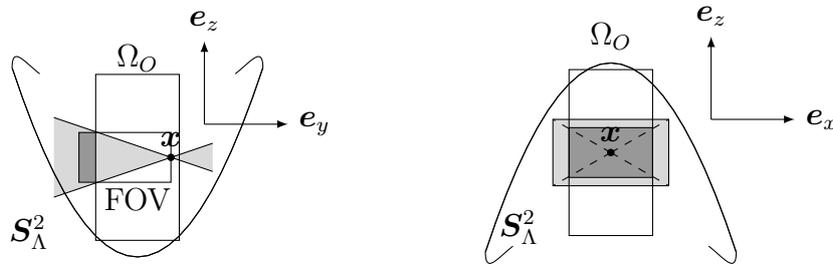


FIGURE 5.14 – Un exemple de FOV non utilisable (donc non *suffisant*) pour la méthode des lignes M, parce que les (deux) cônes (pyramidaux) des lignes (en gris clair) issus de \mathbf{x} qui intersectent $\text{FOV} \setminus \Omega_O$ (gris foncé) n'intersectent pas la trajectoire selle \mathcal{S}_Λ^2 . Il ne peut donc pas y avoir de ligne M qui intersecte $\text{FOV} \setminus \Omega_O$, et la reconstruction en sein de $\text{FOV} \cap \Omega_O$ ne peut pas être utilisée en utilisant la méthode des lignes M.

que, pour le point \mathbf{x} choisi, il n'y a pas de ligne M intersectant. Une ligne M est *valide* si et seulement si son intersection avec Ω_F contient un segment.

Notre but est de définir des FOV tels que chaque point de la région d'intérêt (ROI) $\Omega_O \cap \text{FOV} \cap \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}$ peut être reconstruit avec la méthode des lignes M, en faisant l'hypothèse que $\Omega_F \neq \emptyset$. Nous appelons ces FOV des FOV *suffisants*.

Par la suite, nous nous intéressons à deux configurations de FOV suffisants mélangeant troncations axiales et transverses. Ils seront appelés *type 1* et *type 2*.

5.5.2 FOV suffisants

Comme nous l'avons dit, le cas des troncations uniquement axiales a déjà été traité dans la littérature ([60], [80]...), mais pas sous l'angle de la méthode DBP. Pour des raisons de simplicité, on considère ici que le FOV et l'objet Ω_O sont des cylindres de même axe. Soit $\mathbf{x} \in \Omega_O \cap \text{FOV} \cap \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}$, alors l'intersection entre Ω_F et un plan horizontal contenant \mathbf{x} forme une couronne. Puisque \mathbf{x} est dans $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}$, nous pouvons noter une des intersections de ce plan avec \mathcal{S}_Λ^2 par \mathcal{S}_λ . Voir figure 5.15 pour une illustration. Alors, une ligne M issue de \mathcal{S}_λ et passant par \mathbf{x} intersecte la couronne, donc la ligne M est valide et le FOV est suffisant. Par convexité, le segment liant \mathcal{S}_λ à \mathbf{x} est dans $\Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2}$, donc chaque point de ce segment est intersecté par une corde, comme requis pour que la ligne M soit valide.

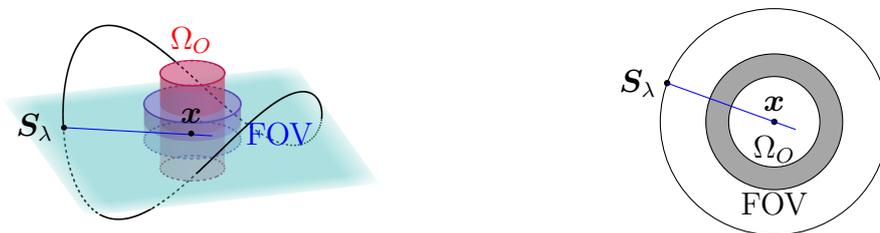


FIGURE 5.15 – Une trajectoire selle avec des troncations uniquement axiales. Considérant un plan horizontal passant par $\mathbf{x} \in \Omega_O \cap \Omega_{\mathcal{S}_\Lambda^2} \cap \text{FOV}$, il est possible d'avoir une ligne M valide (en bleu) provenant d'une intersection entre le plan horizontal et la trajectoire. *Droite* : Vue de dessus, la couronne en gris foncé est Ω_F .

À partir de maintenant, nous travaillons avec une autre configuration, présentant des troncations transverses parfois additionnées de troncations axiales (un exemple est donné

figure 5.16). Dans ce cas, les projections de Ω_O et du FOV sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ s'intersectent, comme sur la figure 5.13, c'est-à-dire, si D_o (resp. D_{FOV}) est le disque défini par la projection orthogonale du cylindre Ω_O (resp. FOV) sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, alors nous supposons que $D_{\text{FOV}} \cap D_o \neq \emptyset$.

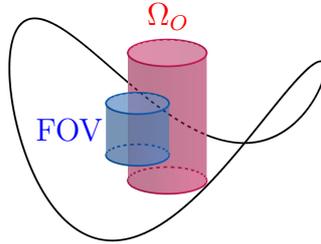


FIGURE 5.16 – Une trajectoire selle avec à la fois des troncations axiales et transverses.

Nous donnons maintenant des conditions pour qu'un FOV soit suffisant, donc assurant que le ROI puisse être reconstruit en utilisant la méthode des lignes M.

FOV suffisant de type 1

Nous commençons par définir les FOV suffisants de type 1. Pour chaque extrémité du FOV cylindrique (la base ou le sommet), une des deux conditions suivantes doit être satisfaite pour qu'un FOV soit *suffisant de type 1* (voir figure 5.19) :

- l'extrémité est en dehors de $\Omega_{\mathcal{S}_\lambda^2}$;
- l'extrémité dépasse l'objet (le FOV a une intersection non vide avec l'extrémité correspondante de Ω_O).

Le caractère suffisant d'un FOV de type 1 peut être justifié en considérant un plan vertical contenant un point \mathbf{x} de la ROI et intersectant Ω_F (voir figure 5.17), ou de manière équivalente en projection orthogonale sur $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, intersectant $D_{\text{FOV}} \setminus D_o$ (voir figure 5.18).

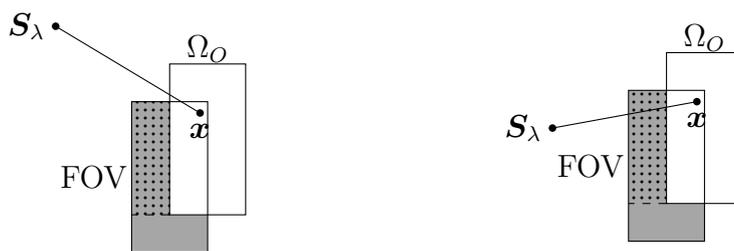


FIGURE 5.17 – Vue de profil et coupe pour un objet cylindrique et un FOV cylindrique. La partie gris foncé est Ω_F . Le plan horizontal de la figure 5.18 passera à travers la région pointillée parce que $\mathbf{x} \in \text{FOV} \cap \Omega_O$. *Gauche* : Une potentielle mais invalide ligne M issue de \mathcal{S}_λ et passant par \mathbf{x} est montrée. Ce cas doit être évité. *Droite* : Une ligne M potentielle et valide issue de \mathcal{S}_λ et passant par \mathbf{x} est montrée.

Le point \mathbf{x} appartenant à $\Omega_{\mathcal{S}_\lambda^2}$, ce plan vertical intersectera la trajectoire en deux points. Soit \mathcal{S}_λ tel que la projection du segment $[\mathbf{x}, \mathcal{S}_\lambda]$ dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ intersecte $D_{\text{FOV}} \setminus D_o$ (voir figure 5.18).

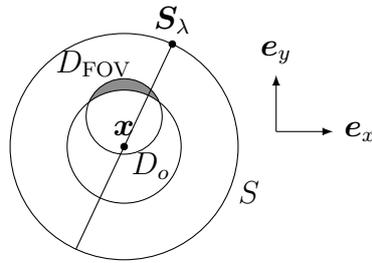


FIGURE 5.18 – Vue en projection de dessus (sur le plan (e_x, e_y)) montrant un plan vertical contenant x passant à travers $D_{\text{FOV}} \setminus D_o$ (en gris foncé). Ce plan intersecte la trajectoire selle en deux points, et S_λ est le point tel que la projection de $[x, S_\lambda]$ intersecte $D_{\text{FOV}} \setminus D_o$.

Nous considérons le segment $[x, S_\lambda]$. Nous devons vérifier que ce segment de ligne M intersecte Ω_F (avec une longueur non nulle), c'est-à-dire que cette situation de la figure 5.17 ne se produit pas. Pour le cas où les deux extrémités du FOV sont au-delà de Ω_O , alors $[x, S_\lambda]$ intersecte clairement Ω_F . Dans le cas où les deux extrémités du FOV sont au-delà de Ω_O , nous commençons par rappeler que, par convexité, le segment $[x, S_\lambda]$ est toujours contenu dans $\Omega_{S_\lambda^2}$ (parce que ses extrémités le sont). Puisque les extrémités du FOV sont en dehors de $\Omega_{S_\lambda^2}$, le segment $[x, S_\lambda]$ doit intersecter Ω_F . Le cas restant (une extrémité en dehors de $\Omega_{S_\lambda^2}$ et une en dehors de Ω_O) est un mélange des cas précédents, et donc $[x, S_\lambda]$ intersecte encore Ω_F . Ce dernier cas est illustré figure 5.19.

Nous avons donc montré qu'une ligne M issue de S_λ et passant à travers x et (donc contenant $[x, S_\lambda]$) intersectant Ω_F et est donc valide, en rappelant que $[x, S_\lambda] \in \Omega_{S_\lambda}$ ce qui signifie que chaque point de ce segment appartient à une corde.

Les FOV suffisants de type 1 sont adaptés aux troncations transverses, parce que la contrainte concerne principalement la hauteur du FOV.



FIGURE 5.19 – Un exemple de FOV suffisant de type 1. En effet, le sommet du FOV est au-dessus de $\Omega_{S_\lambda^2}$ et la base est au-dessous de Ω_O . L_a et L_b sont des lignes M valides issues de S_a et S_b et peuvent être utilisées pour reconstruire x_a et x_b . Droite : Ω_F est la région gris foncé.

FOV suffisant de type 2

Nous nous intéressons maintenant au FOV *suffisant de type 2*. Pour une coupe parallèle au plan (e_x, e_y) , nous notons F_1 et F_2 les points d'intersection des frontières de Ω_O et du FOV, comme sur la figure 5.20. Un FOV est appelé *semi-circulaire* si $[F_1, F_2]$ est sur ou au-dessous du centre de FOV, dans la configuration de la figure 5.20 *gauche*. On considère un FOV semi-circulaire et la projection orthogonale de ce FOV sur un plan parallèle au

plan vertical contenant F_1 et F_2 . Si la projection orthogonale de \mathbf{S}_Λ^2 sur ce plan intersecte la projection orthogonale du FOV, alors il y a une ligne M valide pour tous les points de la ROI et la ROI peut être reconstruite. Un FOV semi-circulaire qui satisfait ce critère de projection orthogonale est appelé *suffisant de type 2* (voir figure 5.20). Dans le cas où le centre du FOV est strictement au-dessus de $[F_1, F_2]$, alors la condition de projection peut être adoucie¹⁸.

Les FOV suffisants de type 2 sont bien adaptés aux troncations axiales.

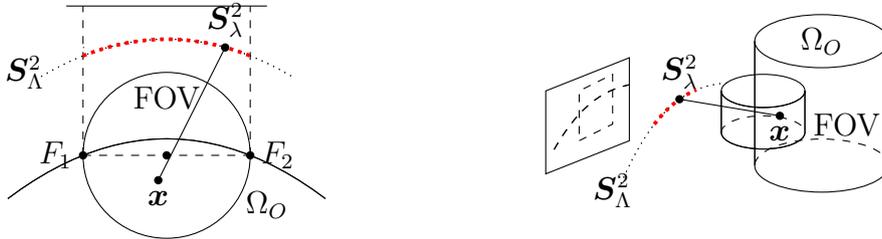


FIGURE 5.20 – Vue de dessus (*gauche*) et vue de profil (*droite*) pour un FOV semi-circulaire avec une ligne M issue de \mathbf{S}_Λ et passant à travers \mathbf{x} . La ligne rouge en pointillés est la partie de la trajectoire de source \mathbf{S}_Λ^2 dont la projection intersecte la projection du FOV. Pour chaque point \mathbf{x} de $\Omega_o \cap \text{FOV} \cap \Omega_{\mathbf{S}_\Lambda}$, chaque ligne M issue d'une position de source \mathbf{S}_Λ de la partie rouge de la trajectoire de source est valide. *Droite* : le rectangle en tirets est la projection du FOV sur un plan parallèle à un plan vertical contenant F_1 et F_2 . La courbe en tirets est la projection de la trajectoire \mathbf{S}_Λ^2 .

5.5.3 Simulations

Comme pour les simulations de la section 5.4, les simulations sont faites avec le fantôme du Forbild thorax et la méthode des moindres carrés avec le gradient conjugué est utilisée. L'idée ici est de comparer des qualités de reconstruction pour FOV suffisants et non suffisants. On pourrait croire, par exemple en considérant la figure 5.21, que le FOV n'est pas toujours centré sur l'origine (le centre de rotation). En réalité le FOV a toujours même axe et on fera changer l'objet de position, mais pour des questions de visualisation nous faisons comme si l'objet était fixe.

Nous simulons 200 projections et les images sont reconstruites dans un volume de $380 \times 152 \times 382$ voxels avec $\gamma = 100$. Nous réalisons des reconstructions pour 4 FOV : le FOV 1 n'est pas suffisant, les FOV 2 et 2 bis sont suffisants de type 1 (le FOV 2 s'étend axialement sur toute la hauteur du fantôme alors que le FOV 2 bis se limite à la hauteur de $\Omega_{\mathbf{S}_\Lambda^2}$, dans notre configuration cela produit des troncations axiales) et le FOV 3 est suffisant de type 2. Les FOV 1, 2 et 2 bis sont presque des problèmes intérieurs.

FOV	R_F	H_F	C_F	suffisant	dim_det
1		18	(0,30,78)	non	92×69
2	50	380	(0,30,-190)	type 1	92×437
2 bis		200	(0,30,-100)	type 1	92×257
3		18	(0,67,78)	type 2	92×69

18. La projection n'est alors plus orthogonale et il faut prendre en compte les directions tangentes au cercle du FOV en F_1 et F_2 .

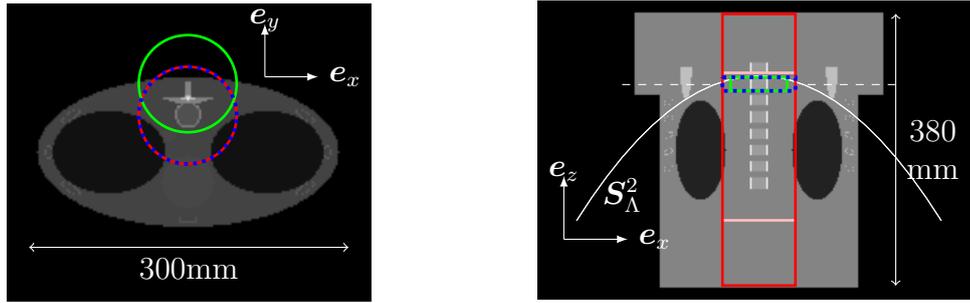


FIGURE 5.21 – Le fantôme Forbild thorax en vue de dessus (*gauche*) et vue de profil (*droite*). Le FOV 1 est représenté par la ligne bleue en pointillés, le FOV 2 est la ligne rouge et le FOV 3 est la ligne verte. Le FOV 2 bis a même base que le FOV 2 mais s'étend axialement uniquement jusqu'aux frontières de $\Omega_{S_\Lambda^2}$, et est délimité par les lignes roses (visibles seulement sur la figure de droite, pour des raisons de lisibilité le cercle rose n'a pas été représenté à gauche). Sur la figure de gauche, les cercles bleu et rouge (FOV 1 et 2) sont confondus. La ligne blanche en tirets dans l'image de droite correspond au profil de la figure 5.23. On peut voir sur la figure de droite que la projection (du haut) du FOV 3 sur un plan orthogonal à e_y intersecte la projection de S_Λ^2 , ce qui le rend suffisant de type 2.

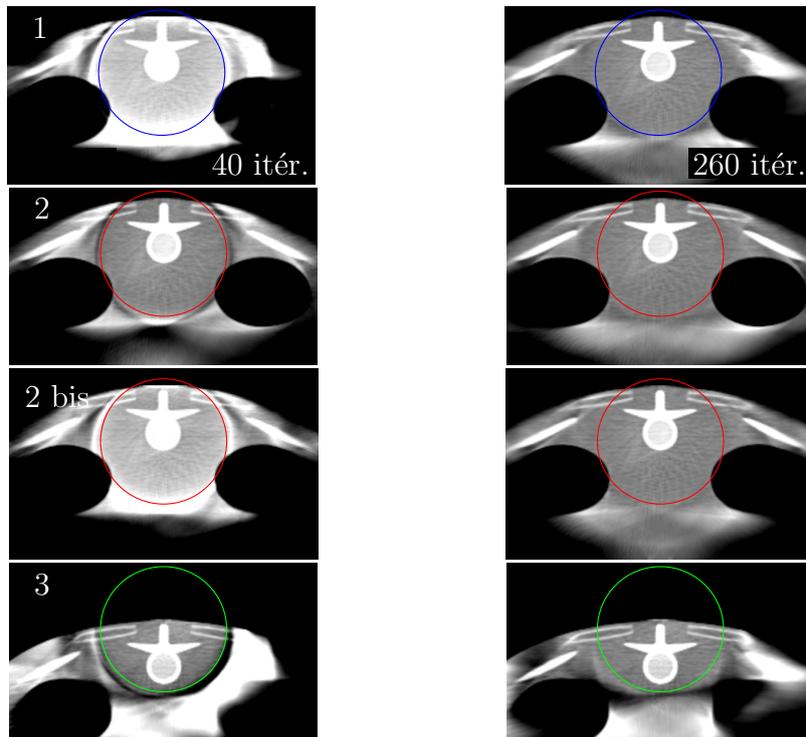


FIGURE 5.22 – Reconstructions en $z = 84$ mm. *Gauche* : 40 itérations. *Droite* : 260 itérations, pour le FOV 1 (haut), FOV 2 et FOV 2 bis (milieu) et FOV3 (bas). Les cercles représentent les FOV. Fenêtrage : window : 0.5, level : 1.

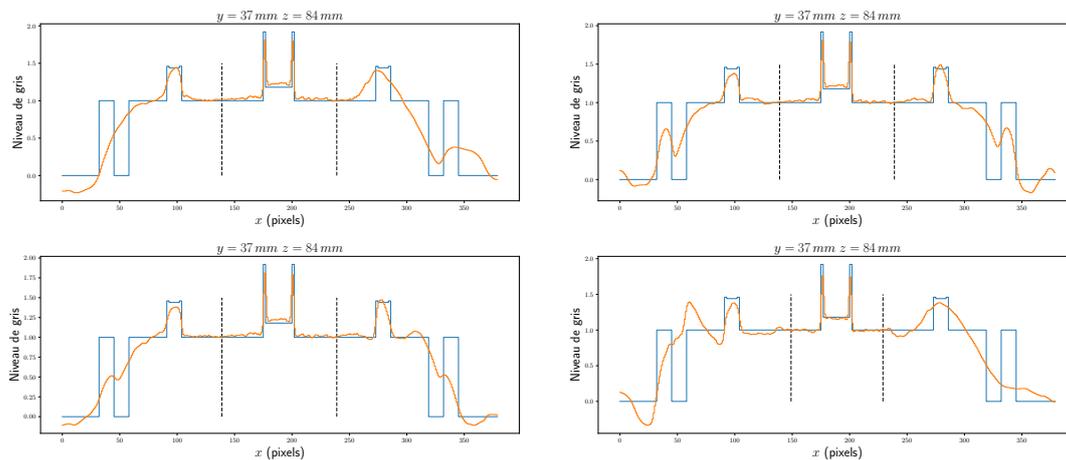


FIGURE 5.23 – Profils (le fantôme est en bleu, reconstruction en orange) des reconstructions après 260 itérations en $y = 37$ mm et $z = 84$ mm (voir Fig. 5.21 droite) pour le FOV 1 (haut à gauche), FOV 2 (haut à droite) et FOV 2 bis (bas à gauche), FOV 3 (bas à droite). Les lignes noires en tirets sont les limites du FOV.

La figure 5.22 montre des sections à $z = 84$ mm pour les images reconstruites pour les quatre FOV, et la figure 5.23 montre des profils correspondants en $y = 37$ mm. Tous les FOV donnent des bonnes reconstructions, probablement parce les FOV suffisants correspondent à des conditions suffisantes mais non nécessaires. Cependant, la convergence pour le FOV 1 (non suffisant) et le FOV 2 bis (suffisant) est plus lente (à 40 itérations la reconstruction est loin d’avoir convergé contrairement aux autres FOV). Cette lenteur de convergence peut être due à une information ou une redondance de données moins importante. La possibilité d’utiliser des détecteurs relativement petits, même si cela entraîne des troncations axiales et transverses, semble donc possible sous certaines conditions.

5.6 Méthode et exemple de configuration pour la trajectoire 3-sin et troncations transverses

La section 5.4 a montré que des reconstructions exactes semblaient possibles dans des zones sans corde pour la trajectoire 3-sin, même avec des troncations transverses, ce qu’à notre connaissance aucune théorie n’explique. Le but de cette section est de décrire une approche pour justifier une reconstruction dans une zone sans corde avec des troncations “raisonnables”. F.Noo *et al.*[55] ont travaillé sur la trajectoire *reverse helix* évoquée chapitre 3. Comme pour la trajectoire 3-sin, certains points de l’enveloppe convexe de cette trajectoire ne sont pas traversés par une corde. F.Noo *et al.*[55] ont proposé une méthode pour reconstruire la zone non traversée par des cordes dans le cadre de troncations axiales. Leur configuration était donc différente mais nous pouvons adopter (et adapter) les différentes étapes de la méthode proposée. L’objectif est de reconstruire la région $\Omega_{in} = \text{FOV} \cap \Omega_O \cap N_{S_\lambda^3}$, contenue dans le FOV et la région de Tuy de la trajectoire 3-sin, mais qui n’est traversée par aucune corde. Sans troncation, comme expliqué au chapitre 2, de nombreuses méthodes de reconstruction existent. Néanmoins, les troncations transverses empêchent l’utilisation des méthodes “historiques” et l’absence de cordes empêche de faire appel à la DBP. En considérant le FOV et Ω_O comme connus, en rappelant que $N_{S_\lambda^3}$ et $C_{S_\lambda^3}$ ont été décrits au chapitre 4 (et illustrés une nouvelle fois figure 5.24), on peut résumer l’approche en 4 étapes :

1. Reconstruction de $\Omega_{\text{DBP}} \subseteq \text{FOV} \cap \Omega_O \cap C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ avec la méthode DBP, où Ω_{DBP} est la région où l'on peut appliquer la méthode DBP.
2. Reprojection des points reconstruits (projections coniques du nouvel objet reconstruit dans la région Ω_{DBP}).
3. Soustraction des reprojections des données coniques originelles, qui aboutit à un nouveau problème avec un objet plus petit, défini sur la région $\Omega_O \setminus \Omega_{\text{DBP}} = \Omega_{\text{in}} \cup \Omega_{\text{out}}$, avec $\Omega_{\text{out}} \stackrel{\text{déf}}{=} \Omega_O \setminus (\Omega_{\text{DBP}} \cup \Omega_{\text{in}})$ (les régions Ω_{DBP} , Ω_{in} et Ω_{out} sont mutuellement disjointes, ces régions sont illustrées figure 5.25)
4. Pour que la reconstruction soit possible, la nouvelle configuration doit être un problème sans troncation et satisfaisant la condition de Tuy : la reconstruction de Ω_{in} par une des diverses méthodes pour la reconstruction conique à partir des projections non-troncquées (par exemple [75], [44], [19]...).

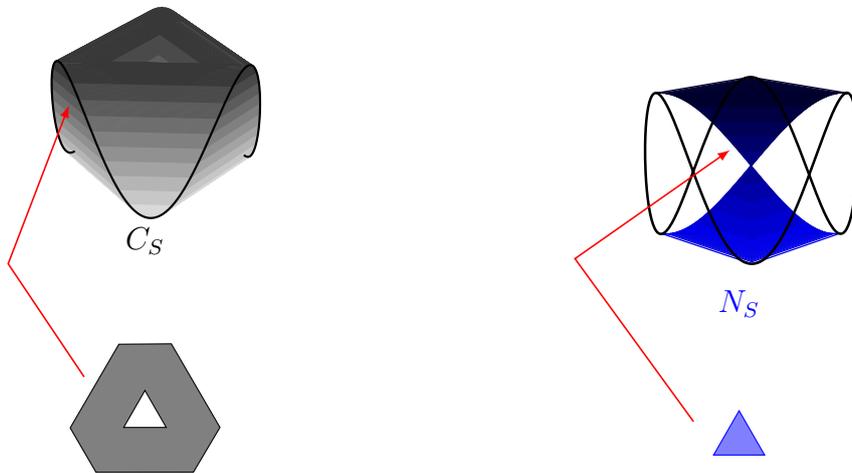


FIGURE 5.24 – Les ensembles $C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ (gauche) et $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ (droite). On rappelle que l'intersection d'un plan horizontal avec $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ forme un triangle équilatéral (en bleu), dont l'apothème est croissant selon $|z|$.

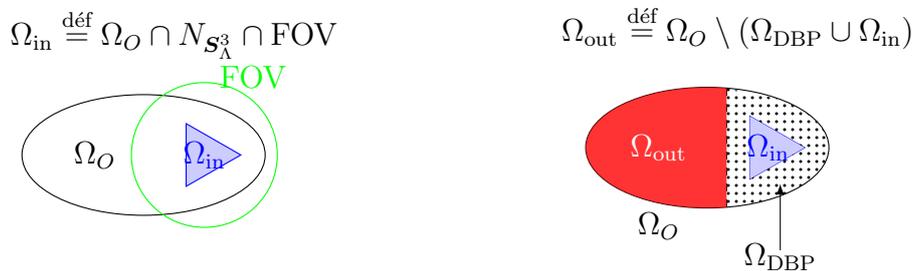


FIGURE 5.25 – Exemple de régions Ω_{in} et Ω_{out} .

Pour appliquer cette méthode, deux points doivent être principalement pris en compte. Premièrement, comme détaillé dans les chapitre 2 et dans les parties précédentes de ce chapitre, la méthode DBP peut parfois ne pas être appliquée à tout point de $\text{FOV} \cap \Omega_O \cap$

$C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}^{19}$, donc la région Ω_{DBP} doit être définie avec précaution. Deuxièmement, il ne doit pas y avoir de *lignes contaminées*, qui sont définies comme les lignes mesurées de Ω_{in} intersectant Ω_{out} .

Nous proposons un exemple de configuration sans ligne contaminée. D'autres exemples sont aussi possibles. Le FOV est un cylindre centré sur l'axe e_z de rayon 90 mm. Le support de l'objet Ω_O est un support de même direction avec une base elliptique définie par $\{(a \cos \lambda_e + c_o, b \sin \lambda_e) | \lambda_e \in [0, 2\pi[, a = 80 \text{ mm}, b = 40 \text{ mm}, c_o = 20 \text{ mm}\}$. Son extension axiale (dans la direction z) se fait sur $[12 \text{ mm}, 20 \text{ mm}]$ et le FOV est axialement étendu sur un intervalle plus grand (pas de troncations axiales). Enfin, \mathcal{S}_Λ^3 sera paramétré par $H = 60 \text{ mm}$ et $R = 160 \text{ mm}$. Cette configuration est présentée en vue de dessus, avant et après soustraction des reprojections des données, voir figure 5.26. La région Ω_{DBP} peut ici être définie par $\Omega_{\text{DBP}} = \text{FOV} \cap \Omega_O \cap C_{\mathcal{S}_\Lambda^3} \setminus A$ (la région pointillée de la figure 5.26, *gauche*), avec $A \stackrel{\text{déf}}{=} \text{conv}(\Omega_O \setminus \text{FOV}) \setminus (\Omega_O \setminus \text{FOV})$ (la région orange de la figure 5.27, *gauche*). Cependant, il pourrait être possible de reconstruire certains points de la petite région A avec la méthode des lignes M^{20} , mais ce n'est pas le but principal de cette section, qui est de prouver qu'il est possible de reconstruire Ω_{in} . Une illustration 3D est donnée figure 5.27, *droite*.

Nous voyons figure 5.26 (*droite*) que s'il n'y a pas de ligne contaminée, la configuration satisfait la condition de Tuy (il n'y a "plus de troncation"). Au lieu de dessiner toutes les lignes mesurées (ici ce sont les lignes provenant d'une position de source de \mathcal{S}_Λ^3), nous choisissons de nous concentrer sur les lignes intersectant à la fois Ω_{in} et Ω_{out} . Ces lignes délimitent deux cônes pyramidaux et un polyèdre²¹ (figure 5.28). Nous constatons figure 5.28 que ces cônes (et le polyèdre) n'intersectent pas \mathcal{S}_Λ^3 , donc aucune ligne contaminée n'existe, et donc la reconstruction de Ω_{in} est possible.

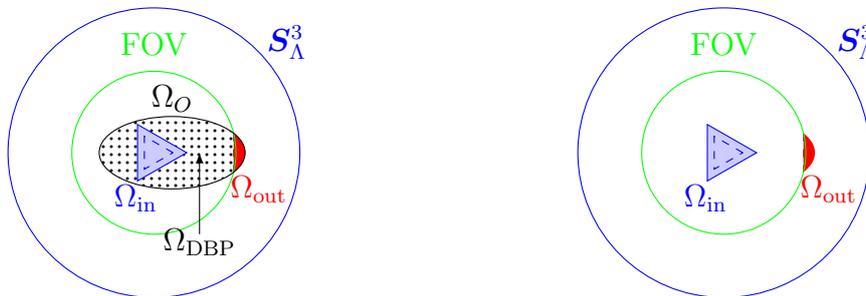


FIGURE 5.26 – Vue de dessus de la configuration considérée. Le triangle bleu en tirets (resp. le plus grand triangle) délimite l'intersection de $N_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ avec le plan horizontal $z = 12 \text{ mm}$ (resp. $z = 20 \text{ mm}$). Un zoom sur Ω_{out} est fait figure 5.27, *gauche*. *Gauche* : Avant la soustraction de la reprojection de Ω_{DBP} (région en pointillés) des données. *Droite* : Après la soustraction.

Nous avons créé un fin fantôme cylindrique de base elliptique, de forme semblable à celle de Ω_O , et des ellipsoïdes et des boules ont été rajoutés, voir figure 5.29. La configuration pour la trajectoire de source et le FOV est la même que décrite précédemment. Le détecteur rectangulaire de 400×430 pixels est à une distance de 290 mm de la source.

19. Á cause des troncations il n'est pas sûr qu'un point de $\text{FOV} \cap \Omega_O \cap C_{\mathcal{S}_\Lambda^3}$ soit sur une corde telle que la méthode des cordes soit applicable, et il n'est pas toujours évident d'appliquer la méthode des lignes M , comme par exemple section 5.5.

20. En reprenant des raisonnements tenus à la section 5.5.

21. Plus exactement un cylindre ayant comme base un trapèze.

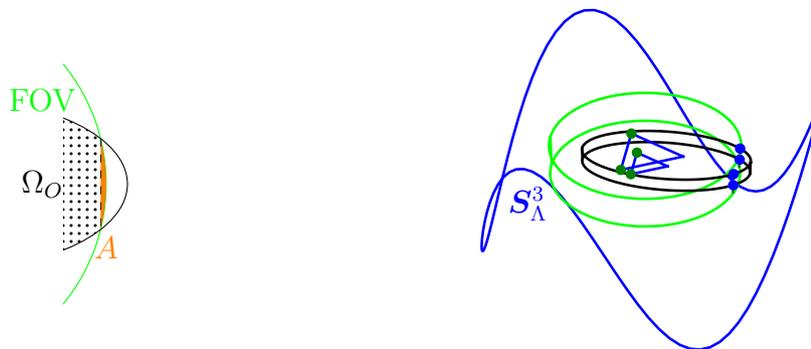


FIGURE 5.27 – *Gauche* : Zoom sur la partie droite de Ω_O : la région pointillée est Ω_{DBP} , la région orange est A et la région non pointillée (blanche et orange) de Ω_O est Ω_{out} . *Droite* : La configuration proposée. Le FOV est délimité par les deux cercles verts, Ω_O par les deux ellipses noires et $N_{S_\Lambda^3}$ par les triangles bleus (à $z = 12$ mm and $z = 20$ mm). Les boules vert foncé et bleues sont utilisées pour dessiner les lignes limites de la figure 5.28.

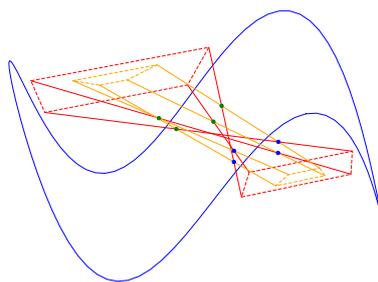


FIGURE 5.28 – Les cônes pyramidaux (rouges) et le polyèdre (orange) délimitant les lignes intersectant à la fois Ω_{in} et Ω_{out} . Ils n'intersectent pas S_Λ^3 donc ces lignes ne sont pas contaminées.

Un total de 360 projections coniques a été simulé. Le volume de reconstruction consistait en $162 \times 82 \times 8$ voxels (pixels et voxels font tout deux 1 mm de côté).

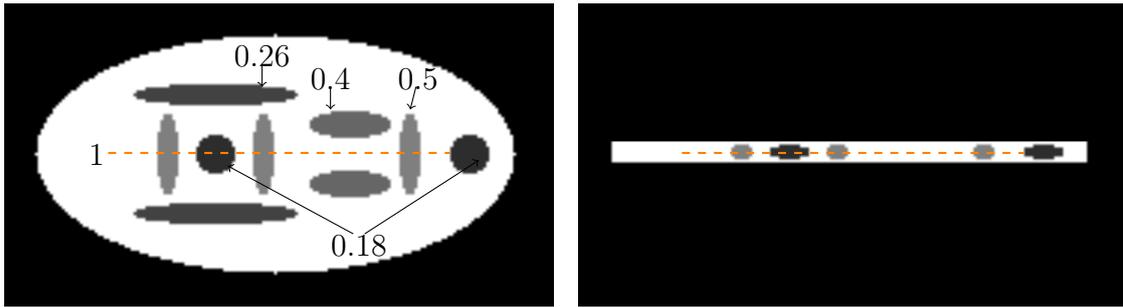


FIGURE 5.29 – Le fantôme utilisé pour les simulations avec ses densités. Les lignes oranges indiquent l’emplacement du profil de la figure 5.31. *Gauche* : Vue de dessus. *Droite* : Vue de profil.

L’objectif était de vérifier que la région triangulaire $N_{S_\lambda^3}$ (plus précisément Ω_{in}) peut être correctement reconstruite selon la théorie présentée dessus. Le but étant d’approfondir les résultats de la section 5.4, on utilisera dans cette section également la méthode des moindres carrés avec le gradient conjugué avec ici 60 itérations réalisées et $\gamma = 500$. Des premiers résultats sont montrés figure 5.30 et 5.31 (en comparant avec une reconstruction sans troncation, avec un FOV de rayon 102 mm).

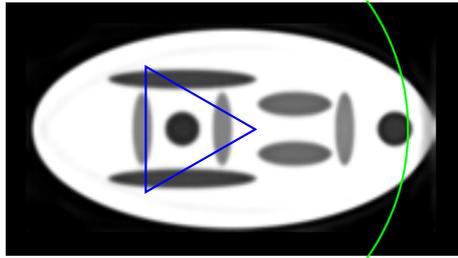


FIGURE 5.30 – La section $z = 16$ mm de la reconstruction. L’arc circulaire vert délimite le FOV et le triangle bleu est $N_{S_\lambda^3}$ (pour cette coupe). Les paramètres pour la visualisation sont une fenêtre de 1 et un niveau de 0.5.

On trouve une qualité équivalente de reconstruction dans $N_{S_\lambda^3}$ ou dans les zones avec cordes (dans le FOV), dans les cas avec ou sans troncation. Cependant, notre exemple a relativement peu de troncations, contrairement au cas de la section 5.4 (qui a donc beaucoup de lignes contaminées), ce qui est loin d’en faire une explication exhaustive des résultats. De plus, l’objet est assez fin, on est presque dans un cas 2D.

On peut par exemple “faire tourner” l’ensemble $FOV \cup \Omega_O$ (rotation de $\pi/6$ autour de l’axe e_z) afin d’obtenir des lignes contaminées (figure 5.32, *gauche*). On donne un profil figure 5.32(*droite*) et on peut constater que la présence de lignes contaminées ne semble pas impacter la reconstruction (ce qui est cohérent avec les résultats de la section 5.4).

La théorie proposée semble être pertinente mais elle ne recouvre pas l’entièreté des reconstructions possibles pour la trajectoire 3-sin avec des troncations transverses. Un échange privé avec F.Noo semble indiquer que la quatrième étape de la méthode proposée peut être remplacée. En utilisant certaines méthodes de reconstruction permettant des troncations mais ne nécessitant pas de cordes²², certaines lignes contaminées peuvent être tolérées, ce qui permet des configurations moins restrictives.

22. En particulier voir [50, section 13.4.] ou chapitre 2 section 2.2.5.

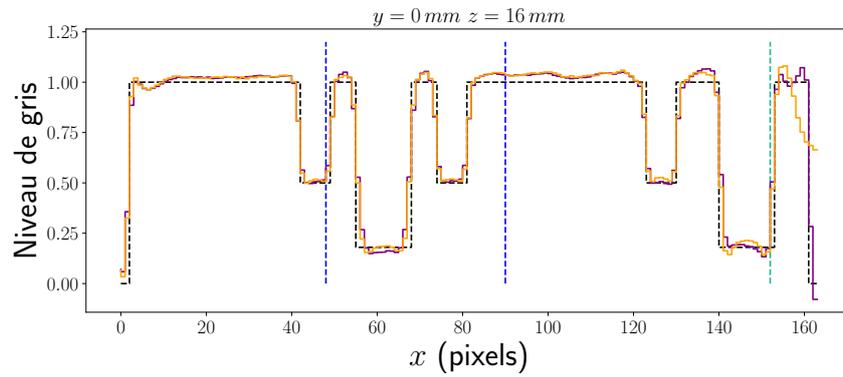


FIGURE 5.31 – Un profil de la reconstruction en $y = 0$ mm et $z = 16$ mm. La ligne noire est le fantôme, la ligne violette est la reconstruction sans troncations et la ligne orange est la reconstruction avec troncations. La ligne verte en tirets est la limite droite du FOV (pour la reconstruction avec troncations) et les lignes bleues en tirets délimitent N_{S^3} .

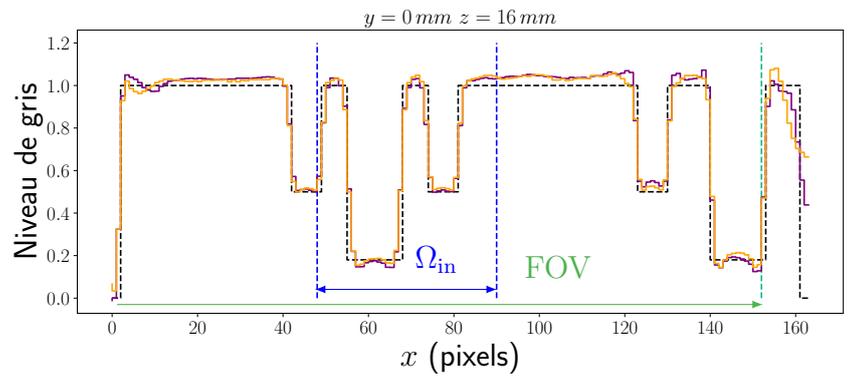
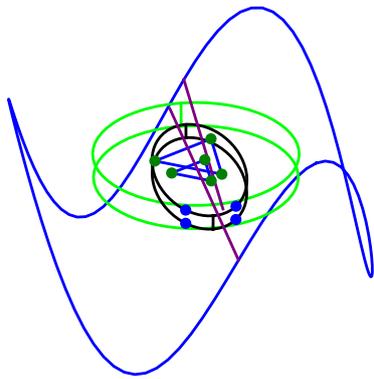


FIGURE 5.32 – *Gauche* : Une configuration avec deux lignes contaminées. *Droite* : Un profil de reconstruction $y = 0$ mm et $z = 16$ mm, la ligne orange représente la reconstruction tronquée sans lignes contaminées et la ligne violette représente la reconstruction tronquée avec lignes contaminées (voir la légende de la figure 5.31).

5.7 Ouverture sur les troncations axiales pour les trajectoires n -sin

5.7.1 Introduction

Nous avons peu évoqué les reconstructions pour les trajectoires n -sin avec les troncations axiales. Cela est dû au fait que trop de points qui peuvent être potentiellement à l'emplacement d'une ROI ne sont pas traversés par des cordes. Néanmoins avec des méthodes développées au début du XX^e siècle et initiées en partie par A.Katsevich [39, 41], il est possible de faire de telles reconstructions sans présence de cordes.

Avant 2004 et le développement de la méthode DBP par Zou et Pan [93], Katsevich avait développé entre 2001 et 2004 une méthode de reconstruction exacte en géométrie conique, d'abord dans le cas de la trajectoire hélicoïdale [39] [42], puis dans le cas général [41]. Cette méthode a ensuite été améliorée pour permettre davantage de troncations axiales, voir par exemple [57]. Nous qualifierons cette méthode et ses dérivées d'approche de Katsevich.

5.7.2 Méthode de Katsevich étendue

Formule de reconstruction et paramètres géométriques

Nous n'allons pas présenter les premières versions de la formule de Katsevich (par exemple dans [42]), mais nous concentrer sur sa réécriture, notamment dans [58].

Nous présentons l' "opérateur de Katsevich", implicitement introduit dans la formule de reconstruction exhibée par Katsevich en 2003 [41], puis par [6] et décrit sous cette forme par Pack et Noo en 2005 [58].

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \lambda^-, \lambda^+) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\lambda^-}^{\lambda^+} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|} g_\kappa(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}) d\lambda \quad (5.5)$$

g_κ représente les données filtrées :

$$g_\kappa(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{g(\lambda, \boldsymbol{\theta}(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}, \gamma))}{\pi \sin \gamma} d\gamma \quad (5.6)$$

avec

$$\boldsymbol{\theta}(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}, \gamma) = \cos \gamma \boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x}) + \sin \gamma \boldsymbol{\beta}(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}) \quad (5.7)$$

et

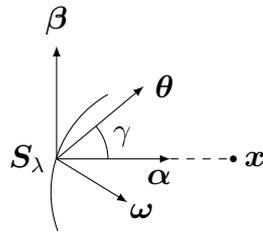
$$\boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda}{\|\mathbf{x} - \mathbf{S}_\lambda\|} \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\beta}(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}) = \frac{\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x})) \boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x})}{\|\mathbf{e} - (\mathbf{e} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x})) \boldsymbol{\alpha}(\lambda, \mathbf{x})\|} \quad (5.9)$$

Les principaux paramètres de g_κ sont représentés figure 5.33.

Remarque $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ et \mathbf{e} sont coplanaires.

Dans l'équation (5.6), $\{\boldsymbol{\theta}(\lambda, \mathbf{x}, \mathbf{e}, \gamma)\}_{\gamma \in [-\pi, \pi]}$ définit un *plan filtrant* (voir la figure 5.34, gauche). Ces plans filtrants sont les plans $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$, définis équations (5.8) et (5.9) (et contenant donc \mathbf{e}). Le vecteur $\boldsymbol{\alpha}$ est uniquement déterminé par λ et \mathbf{x} , et $\boldsymbol{\beta}$ par \mathbf{e} et $\boldsymbol{\alpha}$. Le vecteur \mathbf{e} est donc un vecteur important pour l'orientation du plan filtrant, le plan



$$(\alpha, \beta, \theta, \omega) \in (S^2)^4$$

FIGURE 5.33 – Paramétrisation pour la fonction g_κ de l'opérateur de Katsevich et le résultat de Pack et Noo.

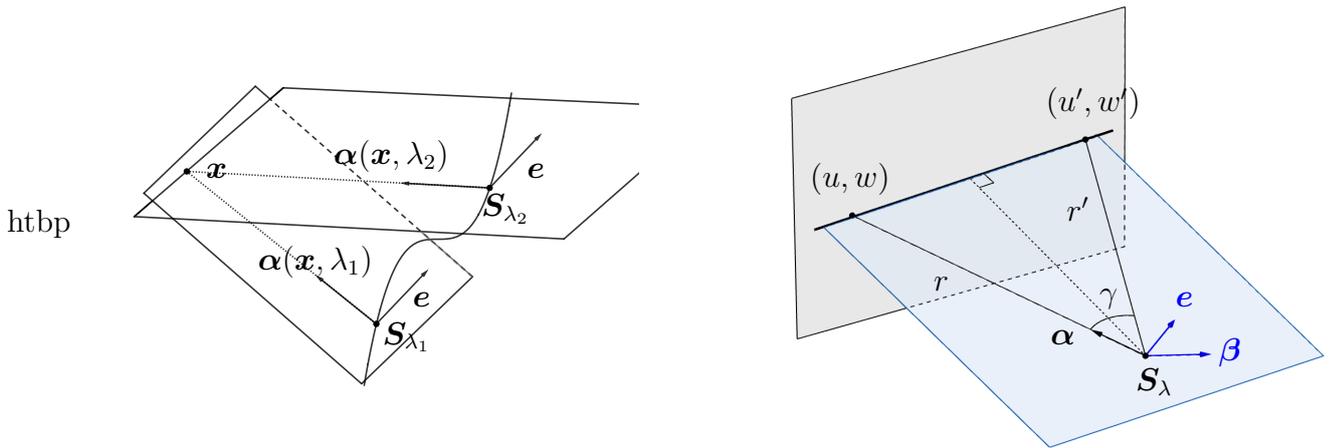


FIGURE 5.34 – *Gauche* : Exemples de plans filtrants paramétrés par λ , \mathbf{x} et \mathbf{e} . Pour des raisons de simplicité nous avons ici représenté un vecteur \mathbf{e} perpendiculaire à α (et donc $\beta = \mathbf{e}$) mais ce n'est pas forcément le cas. *Droite* : Plan filtrant intersectant le détecteur et formant une ligne filtrante.

filtrant pouvant être défini par le plan passant par un point \mathbf{x} et une position de source \mathbf{S}_λ et contenant le vecteur \mathbf{e} . Quand les plans filtrants ne sont jamais parallèles à l'axe \mathbf{e}_z , ce qui est le cas avec la trajectoire selle [79], on peut autoriser des troncations axiales.

L'article [6] montre qu'il n'y a pas besoin d'étudier l'entière des plans filtrants, mais seulement leurs intersections avec le détecteur, appelé *lignes filtrantes* voir figure 5.34). Ces lignes filtrantes définissent les données requises (et donc les troncations possibles).

La figure 5.34 montre également les liens entre u et γ . On peut montrer (voir par exemple [53, annexe A.1]) que $k_H(\sin \gamma)d\gamma = -\frac{r}{r'}k_H(u - u')du'$, ce qui permettra de réécrire le produit de convolution (5.6), par exemple dans l'équation (E.4).

Lien entre l'opérateur de Katsevich et la transformée de Radon

On rappelle que la dérivée seconde de la transformée de Radon 3D d'une fonction f est :

$$\mathcal{R}'' f(\omega, s) = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \int_{\mathbf{x} \cdot \omega = s} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (5.10)$$

On rappelle également que, réciproquement, la formule générale de reconstruction FBP en géométrie conique est :

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \mathcal{R}'' f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \quad (5.11)$$

L'article [57] lie l'opérateur de Katsevich (équation (5.5)) et la dérivée seconde de la transformée de Radon²³ (équation (5.10)). On a l'équation :

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}, \lambda^-, \lambda^+) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \mathcal{R}'' f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \lambda^-, \lambda^+) d\boldsymbol{\omega} \quad (5.12)$$

avec σ défini comme (quelques paramètres sont représentés figure 5.33) :

$$\sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}, \lambda^-, \lambda^+) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{e}) (\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\lambda^-, \mathbf{x})) - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\alpha}(\lambda^+, \mathbf{x}))) \quad (5.13)$$

5.7.3 Comparaison avec la méthode DBP

Avec le résultat de Pack et Noo (voir section 5.7.2), l'utilisation de la méthode de Katsevich se fait via une combinaison linéaire des vecteurs coplanaires (formant un polygone, dans un plan contenant un point \mathbf{x}), issus de points sources. Cette combinaison linéaire vectorielle se traduit par une combinaison linéaire de rétroprojections de projections dérivées puis filtrées (via un filtre de Hilbert). Le filtrage a lieu dans un plan, ou de manière équivalente sur l'intersection de ce plan avec le détecteur. Dans la méthode DBP, c'est la direction de la corde passant à travers \mathbf{x} qui impose la direction de filtrage. On rappelle que dans la méthode DBP on rétroprojette directement les dérivées des projections, pour obtenir une transformée de Hilbert qu'on inversera par la suite.

L'avantage de la méthode de Katsevich est de ne pas avoir besoin de l'existence de cordes, mais elle permet moins de troncations (notamment les troncations transverses que la méthode DBP peut gérer en partie).

5.7.4 Application aux trajectoires n -sin

Le résultat de Pack et Noo s'adapte en fait à toutes les trajectoires continues fermées à projection convexe, et en particulier aux trajectoires n -sin. Soit une trajectoire \mathcal{S}_Λ continue, fermée et à projection convexe dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. On appelle $\{P_i\}_{1 \leq i \leq N}$ l'ensemble des points d'intersection entre un plan horizontal. Les segments $[P_i, P_{i+1}]$, pour $1 \leq i \leq N$, définissent un polygone convexe, en notant $P_{N+1} = P_1$. L'article [81] explique que pour un tel ensemble de points $\{P_i\}_{1 \leq i \leq N}$, le théorème 9 s'applique²⁴.

Théorème 9. *Si un point $\mathbf{x} \in \operatorname{conv}(\{P_i\}_{1 \leq i \leq N})$, avec $\{P_i\}_{1 \leq i \leq N}$ (les sommets ordonnés d') un polygone convexe, alors :*

$$\forall \boldsymbol{\omega} \in S^2, 2 \sum_{i=1}^N \sigma(\mathbf{e}_{P_i P_{i+1}}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^N \operatorname{sgn}(\mathbf{e}_{P_i P_{i+1}} \cdot \boldsymbol{\omega}) (\operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}_i \mathbf{x}) - \operatorname{sgn}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{P}_{i+1} \mathbf{x})) \\ &= 4 \end{aligned} \quad (5.15)$$

23. Un premier lien, plus complexe, avait déjà été présenté dans [6]

24. Durant la thèse nous avons développé et démontré indépendamment le théorème 9 (avec une preuve plus longue et complexe que [81]), à partir de [79], [58] et [57] avant de découvrir [81] et de constater que le théorème était déjà connu.

$$\text{avec } \mathbf{e}_{P_i P_{i+1}} = \frac{\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}}{\|\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}\|}$$

L'article [81] précise que ce résultat permet d'inverser de reconstruire un point \mathbf{x} de l'enveloppe convexe de $\{P_i\}_{1 \leq i \leq N}$, en utilisant (5.12) :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{P_i P_{i+1}}) &= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \mathcal{R}'' f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) \sum_{i=1}^N \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{P_i P_{i+1}}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \cdot 2 \int_{S^2} \mathcal{R}'' f(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} \\ &= 2f(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Enfin, [81] fait remarquer que, comme nous l'avons constaté au chapitre 4, l'intersection d'un plan horizontal avec une trajectoire n -sin forme toujours un polygone convexe (de $2n$ points), donc l'équation (5.16) s'applique pour tout point de l'enveloppe convexe d'une trajectoire n -sin. Cela garantit bien la possibilité de reconstruction avec troncation axiale pour une trajectoire n -sin, même pour des points ne se trouvant pas sur une corde.

A titre d'exemple, on peut parler brièvement du cas de la trajectoire selle présentée dans [79]. Soient A , B , C et D les 4 points de l'intersection entre la trajectoire selle (voir figure 5.35) et le plan $\Pi_{\bar{z}}$. On notera \mathbf{e}_{AB} le vecteur $\frac{B-A}{\|B-A\|}$.

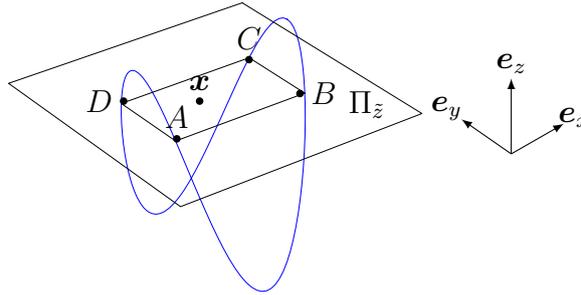


FIGURE 5.35 – Intersection entre la trajectoire selle et le plan $\Pi_{\bar{z}}$.

On peut alors reconstruire f par la formule (cas particulier de (5.16)) :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{AB}, \lambda_A, \lambda_B) + \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{BC}, \lambda_B, \lambda_C) + \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{CD}, \lambda_C, \lambda_D) + \mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{DA}, \lambda_D, \lambda_A)) \quad (5.17)$$

En effet, il est prouvé que (cas particulier de 9) :

$$\begin{aligned} \forall \boldsymbol{\omega} \in S^2, \forall \mathbf{x} \in \Omega_{S^2} \cap \Pi_{\bar{z}}, \\ \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{AB}, \lambda_A, \lambda_B) + \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{BC}, \lambda_B, \lambda_C) \\ + \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{CD}, \lambda_C, \lambda_D) + \sigma(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}_{DA}, \lambda_D, \lambda_A) = 2 \end{aligned} \quad (5.18)$$

5.7.5 Notes sur l'implémentation

L'article [79] décrit une implémentation de la méthode de Katsevich (étendue par le résultat de Pack et Noo) pour la trajectoire selle, et [46] pour la trajectoire triple-source

(voir figure 5.36), qui s'adapte facilement à la trajectoire 3-sin. Nous avons à notre tour implémenté la méthode de Katsevich pour la trajectoire selle suivant les principales étapes de [79], en jouant sur les différentes implémentations possibles du filtre de Hilbert (voir annexe E).

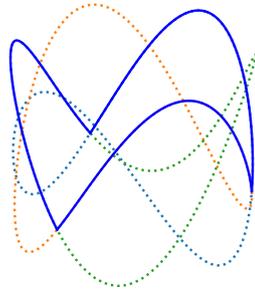


FIGURE 5.36 – La trajectoire triple source (en bleu) utilisée dans [46] et constituée de parties de trajectoires selles (en pointillés).

Il est assez facile d'étendre l'implémentation de [79] et [46] à l'ensemble des trajectoires n -sin, le point principal étant de donner les directions de filtrage (ce qui constitue une de nos rares contributions de la section 5.7).

Comme écrit chapitre 4 section 4.6.1, les paramètres $\lambda_{i,\tilde{z}}$, $0 < i < 2n-1$, correspondant aux intersections entre un plan horizontal $\Pi_{\tilde{z}}$ et \mathcal{S}_{Λ}^n peuvent être écrits :

$$\lambda_{i,\tilde{z}}^n = \frac{(-1)^{i+1}}{n} \arccos\left(\frac{\tilde{z}}{H}\right) + \frac{2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor}{n} \quad (5.19)$$

Les directions de projections ne dépendant pas du plan $\Pi_{\tilde{z}}$ considéré, on peut choisir de considérer le plan Π_0 (soit le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$). Dans ce plan les paramètres sont :

$$\lambda_{i,0}^n = \frac{(-1)^{i+1}}{n} \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi \lfloor \frac{i}{2} \rfloor}{n} \quad (5.20)$$

Les directions de filtrage peuvent être ensuite définies par ²⁵ :

$$\mathbf{e}_i^n = \begin{pmatrix} \cos \lambda_{i+1,0}^n \\ \sin \lambda_{i+1,0}^n \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \lambda_{i,0}^n \\ \sin \lambda_{i,0}^n \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Enfin, [46] qualifie certaines trajectoires d'*efficaces*, et il est facile de vérifier que les trajectoires n -sin le sont. En effet, le fait que chaque intersection d'une trajectoire n -sin avec un plan horizontal forme un polygone de $2n$ côtés dont les côtés sont parallèles deux à deux font qu'il n'y a que n directions de filtrage à calculer. Pour une trajectoire quelconque, pour chaque altitude \tilde{z} , il faut calculer de nouvelles directions de filtrage, ce qui fait des trajectoires n -sin des trajectoires adaptées à la méthode (étendue) de Katsevich.

25. On peut bien sûr ensuite normaliser les vecteurs \mathbf{e}_i^n si on veut travailler avec des vecteurs unitaires.

5.7.6 Conclusion et ouverture sur les trajectoires ouvertes

Le caractère recouvrable par cordes de la trajectoire selle en fait une trajectoire privilégiée pour la méthode DBP avec toute sorte de troncation. Les autres trajectoires n -sin se prêtent beaucoup moins à l'utilisation de la DBP à cause du "manque" de cordes. Ces trajectoires sont par contre adaptées à la méthode de Katsevich "étendue", quand les troncations sont juste axiales. Comme dit en perspective de la section 5.6, les méthodes présentées dans cette section ou dans [50, section 13.4] peuvent être potentiellement adaptées (au moins pour la trajectoire 3-sin) pour des reconstructions hybrides telles que présentées section 5.6, pour traiter de troncations transverses. Néanmoins, cette approche est très peu flexible.

Enfin, à partir de l'équation (5.12), il est possible de démontrer que :

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{BA}, \lambda_B, \lambda_A + 2\pi) = -\mathcal{K}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_{BA}, \lambda_A, \lambda_B) \quad (5.22)$$

Nous pensons que cela peut ouvrir la voie à l'utilisation de la méthode de Katsevich pour une trajectoire n -sin ouverte²⁶, car cela signifie (comme pour la méthode DBP) que l'on peut choisir quel "chemin" parcourir entre deux points sources pour une rétroprojection. De plus, la méthode DBP est assez mal adaptée aux trajectoires ouvertes, car "ouvrir" la trajectoire enlève un grand nombre de cordes.

26. Où l'intervalle Λ est moins grand que 2π .

Conclusion

L'objectif de cette thèse était d'étudier la reconstruction de région d'intérêt avec projections tronquées, notamment dans le cadre de la géométrie conique, en particulier avec des trajectoires de source appelées n -sin. Ces trajectoires ont été introduites dans cette thèse dans le cadre de l'utilisation potentielle d'un C-arm, motivée par le projet FUI 3D4C-arm²⁷. Cela a été l'occasion d'effectuer un panorama non exhaustif des méthodes analytiques 2D (chapitre 1) et coniques (chapitre 2) de reconstruction, en insistant sur la méthode DBP, identifiée comme la méthode la plus prometteuse pour les reconstructions souhaitées. Cependant, pour reconstruire une région d'intérêt par la méthode DBP, chaque point de cette région doit être traversé par une corde. Pour cela, nous avons présenté au chapitre 3 des outils destinés à étudier l'union des cordes d'une trajectoire (les notions de trajectoire (à frontière) recouvrable par cordes et à projection convexe nous semblent pertinentes). L'approche de la tomographie est restée au long de cette thèse assez géométrique. Nous avons étudié au chapitre 4 les trajectoires n -sin, particulièrement en ce qui concerne leur union des cordes et leur enveloppe convexe, notamment pour la trajectoire 3-sin (la trajectoire 2-sin, connue sous le nom de trajectoire selle, a été davantage étudiée dans la littérature). Au chapitre 5, nous avons donné des conditions de reconstruction pour la trajectoire 2-sin avec des troncations transverses et axiales avec la méthode DBP, ce qui permet l'utilisation de détecteurs plus petits. Cette double troncation nous semble très peu évoquée dans la littérature. La méthode DBP peut difficilement s'appliquer à la trajectoire 3-sin, car, contrairement à la trajectoire 2-sin, de nombreux points de l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin ne sont pas traversés par une corde. Néanmoins, dans cette zone de l'enveloppe convexe sans corde, des reconstructions exactes semblent possibles, même avec des troncations transverses, ce qui à notre connaissance n'a pas été abordé dans la littérature. Nous avons présenté une approche théorique pour tenter de justifier (partiellement) ce résultat. Enfin, nous avons brièvement évoqué les connaissances actuelles sur l'application de la méthode de Katsevich et de son extension aux trajectoires n -sin. Cette méthode permet des reconstructions exactes avec troncations axiales sans se préoccuper de l'existence de cordes.

Bien que le travail effectué dans cette thèse cible principalement les trajectoires n -sin, dont seule la version 2-sin est répandue pour le moment, des extensions de ces résultats à d'autres trajectoires peuvent être envisagées (par exemple les trajectoires fermées et continues à projection convexe, des trajectoires fermées dont la projection dans un plan donne une courbe convexe, comme un cercle). On peut avant tout retenir que sous certaines conditions des multiples troncations sont parfois possibles, ce qui peut engager une réflexion sur les zones mesurées (et donc potentiellement plus irradiées) du patient et sur la taille des détecteurs. Des détecteurs plus petits donnent un avantage pratique lors du fonctionnement du scanner, un avantage économique et peuvent permettre de réduire la

27. Ce travail a été soutenu par le Fonds unique interministériel (FUI) et l'Union européenne FEDER en Auvergne Rhône Alpes (projet 3D4Carm) et par l'ANR (projet ROI ANR-17 CE19-0006-01).

dose de radiation (via une collimation plus importante).

Le lien entre cordes et trajectoire est complexe, il faut voir le chapitre 3 principalement comme une introduction des notions et méthodes utiles au chapitre 4, et non comme une approche exhaustive et parfaitement rigoureuse de la question. Néanmoins, comme pour les chapitres suivants, nous pensons que les outils évoqués (construction d'une enveloppe convexe par plan d'appui, caractérisation d'union des cordes...) peuvent être source d'intérêt pour certains membres de la communauté tomographique. Pour le chapitre 4, la preuve que nous aurions souhaité présenter pour construire la région constituée des points non traversés par une corde dans l'enveloppe convexe de la trajectoire 3-sin n'est pas totalement aboutie.

De plus, l'interrogation levée dans le chapitre 5 n'a pas été vraiment résolue. En effet, nous ne pouvons affirmer avec certitude qu'il est possible d'effectuer des reconstructions exactes dans des zones sans corde avec des troncations transverses importantes, et si c'est le cas, nous ne savons que partiellement le justifier.

Annexes

Annexe A

Méthodes itératives

A.1 Introduction

Nous présentons ici les méthodes itératives, qui sont utilisées dans plusieurs de nos simulations. Contrairement aux méthodes analytiques, les méthodes itératives ne sont pas directes, elles ne reposent pas sur une formule analytique exacte. De plus, et c'est un avantage, elles ont moins besoin de prendre en compte la géométrie du problème (seulement pour le projecteur). L'idée est de résoudre un système linéaire, de taille importante, mais creux.

Les méthodes itératives se divisent en deux catégories :

- statistiques, comme EM et ses dérivées (OSEM...)
- algébriques (ART, SART, méthode des moindres carrés avec gradient conjugué...)

On aura à résoudre le système linéaire :

$$\mathbf{p} = \mathbf{R}\mathbf{f} \tag{A.1}$$

en notant N_l le nombre de pixels de la largeur de l'image (on considère une image carrée) et N_p le nombre de projections, \mathbf{p} le vecteur contenant les projections (de taille N_p), \mathbf{R} la matrice projection (de taille $[N_p, N_l^2]$ et $[N_p, N_l^3]$ en 3D) et \mathbf{f} le vecteur (de taille N_l^2 en 2D et N_l^3 en 3D) contenant les densités de l'objet.

En géométrie parallèle (voir section 1.1), $N_p = N_{rot}N_{trans}$ avec N_{rot} le nombre de rotations et N_{trans} le nombre de translations de la source. On peut alors montrer qu'une condition d'échantillonnage est $N_{rot} \geq \frac{\pi}{2}N_{trans}$.

R_{ij} est la contribution de chaque pixel (voxel en 3D) j au rayon i (voir figure A.1). Une manière simple de construire \mathbf{R} est :

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si le rayon } i \text{ traverse le pixel } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{A.2}$$

\mathbf{R} est donc une matrice creuse mais elle est souvent mal conditionnée.

Il y a néanmoins différentes manière de construire la matrice \mathbf{R} , plusieurs *opérateurs de projection* sont possibles. Sans trop rentrer dans les détails, on trouve majoritairement deux familles¹ :

1. Il existe aussi le *distance driven*, plus complexe.

- le *ray-driven* : le rayon passe au centre d'un pixel détecteur et \mathbf{R} est générée ligne par ligne
- le *pixel-driven* : le rayon passe au centre d'un pixel image et \mathbf{R} est générée colonne par colonne

Ces opérateurs de projection peuvent différer selon les pondérations et les interpolations utilisées.

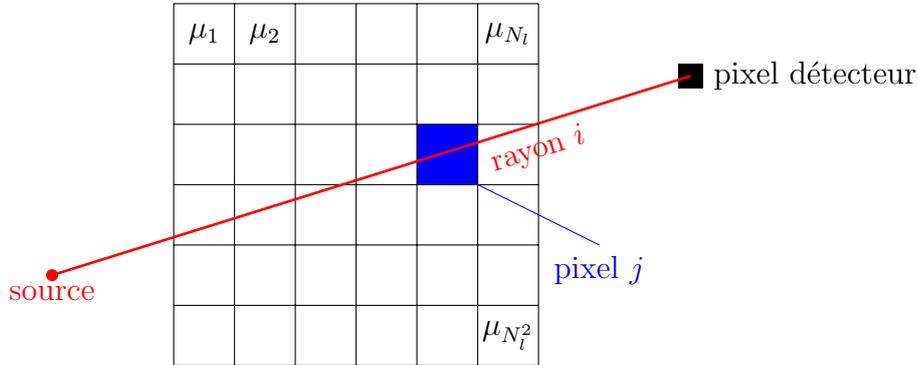


FIGURE A.1 – Exemple de construction de la valeur R_{ij} pour une image 2D.

Généralement, les algorithmes sont soit additifs soit multiplicatifs, c'est-à-dire que pour chaque itération k on ajoute ou on multiplie la solution approchée de (A.1) $\mathbf{f}^{(k)}$ par un terme correctif dépendant des projections mesurées. On peut par exemple initialiser $\mathbf{f}^{(0)}$ de manière uniforme (par exemple en choisissant un vecteur de 0 pour une méthode additive et un vecteur de 1 pour une méthode multiplicative) mais on peut aussi initialiser par l'estimation de la densité moyenne d'un pixel.

A.2 Méthode de descente, méthode des moindres carrés et gradient conjugué

La méthode du gradient conjugué, décrite originellement dans [35] appartient à la famille des *méthodes de descente*, c'est-à-dire que l'inconnue \mathbf{X} (resp. \mathbf{f} dans notre cas) est cherchée de la façon suivante :

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} + \rho^{(k)} \mathbf{d}^{(k)} \quad (\text{A.3})$$

avec $\mathbf{d}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ (resp. $n = N_l^2$) la direction de descente et $\rho^{(k)} \in \mathbb{R}$ le pas de descente.

Dans les méthodes historiques de descente utilisées en tomographie on peut citer ART, SART [1] et SIRT [28]. Nous n'utilisons pas ces méthodes dans nos simulations².

La résolution de (A.1) apporte le risque de donner une infinité de solutions ou aucune. L'idée ici n'est donc pas de résoudre (A.1) mais de calculer :

$$\mathbf{f}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{f}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{R}\mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 \right) \quad (\text{A.4})$$

². Par exemple pour l'algorithme SART il faut définir un critère d'arrêt avec précaution, car l'algorithme peut diverger.

d'où le nom de *méthode des moindres carrés*. Cela est équivalent à résoudre, avec $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^*$ l'opérateur de rétroprojection (qui est l'opérateur *dual* de l'opérateur de projection \mathbf{R}) :

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f} = \mathbf{R}^T \mathbf{p} \quad (\text{A.5})$$

En effet,

$$\arg \min_{\mathbf{f}} \left(\frac{1}{2} \|\mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 \right) = \arg \min_{\mathbf{f}} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f} - 2\mathbf{p}^T \mathbf{R} \mathbf{f} + \mathbf{p}^T \mathbf{p}) \right) \quad (\text{A.6})$$

$$= \arg \min_{\mathbf{f}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{p}^T \mathbf{R} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p} \right) \quad (\text{A.7})$$

En prenant le gradient (par rapport à \mathbf{f}) de $\frac{1}{2} \mathbf{f}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{p}^T \mathbf{R} \mathbf{f} + \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \mathbf{p}$ on obtient $\mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{R}^T \mathbf{p}$ ce qui bien correspond à l'équation (A.5).

Le système (A.5) a toujours au moins une solution. On choisira celle de *moindre norme*, appelée *inverse de Moore Penrose généralisé*.

On cherche l'inverse de Moore Penrose plutôt que la solution de l'équation (A.1) car on rappelle que \mathbf{R} est souvent non carrée, de noyau non nul et avec des projections possiblement bruitées.

Dans les méthodes de gradient, la résolution du système passe par la minimisation de $\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{b}^T \mathbf{X}$, avec \mathbf{A} une matrice symétrique et définie positive, dont le gradient est $\mathbf{A} \mathbf{X} - \mathbf{b}$. Ces méthodes peuvent s'appliquer à (A.5) en posant $\mathbf{A} = \mathbf{R}^T \mathbf{R}$ et $\mathbf{b} = \mathbf{R}^T \mathbf{p}$.

La *méthode du gradient conjugué* est caractérisée par le choix du pas et surtout de la direction de descente. On peut montrer que le pas de descente optimal est :

$$\rho^{(k)} = - \frac{\langle \mathbf{A} \mathbf{f}^{(k)} - \mathbf{b}, \mathbf{d}^{(k)} \rangle}{\langle \mathbf{A} \mathbf{d}^{(k)}, \mathbf{d}^{(k)} \rangle} \quad (\text{A.8})$$

La direction de descente est quant à elle définie comme une direction de descente "conjuguée" par rapport à \mathbf{A} , c'est-à-dire $\forall i \neq j, \langle \mathbf{A} \mathbf{d}^{(i)}, \mathbf{d}^{(j)} \rangle = 0$.

Soit γ un réel positif, un terme de régularisation peut être rajouté et on cherchera alors à calculer :

$$\mathbf{f}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{f}} (\|\mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \gamma \|\mathbf{f}\|_2^2) \quad (\text{A.9})$$

Cette régularisation, appelée *régularisation de Tikhonov*, peut être utile du fait du mauvais conditionnement habituel de \mathbf{R} . Elle apporte de la stabilité³, c'est-à-dire que pour une faible variation des données (par exemple deux ensembles de données modérément bruitées obtenus de la même manière), la variation de la solution sera également faible. Certes on ajoute un biais, mais on réduit aussi également fortement la variance de la solution.

Nous avons tenu à expliquer cette méthode efficace un peu plus que les autres car elle est particulièrement utilisée dans le cadre de cette thèse, pour des reconstructions 2D dans le cadre du projet FUI 3D4C-arm (annexe B) comme pour des reconstructions en géométrie conique pour les trajectoires n -sin, et avec la bibliothèque RTK [63] pour ces dernières. Pour ces dernières simulations, on utilisera une régularisation proche de (A.9) avec γ déterminé de manière empirique⁴ :

$$\mathbf{f}^\dagger = \arg \min_{\mathbf{f}} (\|\mathbf{R} \mathbf{f} - \mathbf{p}\|_2^2 + \gamma \|\nabla \mathbf{f}\|_2^2) \quad (\text{A.10})$$

3. En dimension finie, les valeurs propres de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ sont positives ou nulles (mais pas strictement positives), son inverse peut alors avoir des valeurs propres très élevées. L'ajout du terme de régularisation permet d'éviter ce problème.

4. Il existe cependant des méthodes pour calculer une valeur efficace de γ .

A.3 EM-ML

L'algorithme EM-ML (Expectation Maximization) correspond à la recherche du maximum de vraisemblance dans le cas d'un bruit poissonien⁵. Il a été introduit en 1982 [67]. On calcule alors :

$$\hat{\mathbf{f}}_{ML} = \arg \max_{\mathbf{g}} \left(\sum_{i=1}^{N_p} (p_i \ln(\langle \mathbf{R}_i, \mathbf{g} \rangle) - \langle \mathbf{R}_i, \mathbf{g} \rangle) \right) \quad (\text{A.11})$$

Avec \mathbf{R}_i la i -ème ligne de \mathbf{R} , et donc $\langle \mathbf{R}_i, \mathbf{g} \rangle = \sum_{l=1}^{N_l^2} R_{i,l} g_l$.

L'algorithme itératif proposé pour calculer $\hat{\mathbf{f}}_{ML}$ est :

$$f_j^{(k+1)} = \frac{f_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^{N_p} R_{i,j}} \sum_{i=1}^{N_p} \left(R_{i,j} \frac{p_i}{\langle \mathbf{R}_i, \mathbf{f}^{(k)} \rangle} \right) \quad (\text{A.12})$$

Cet algorithme a le défaut de converger assez lentement, il est néanmoins implémenté et utilisé pour des simulations 2D dans le cadre du projet FUI 3D4C-arm (annexe B). Il peut être adapté en algorithme OSEM [36] pour corriger cet inconvénient. Néanmoins, il présente également la particularité d'avoir une qualité d'image qui se dégrade si le nombre d'itérations devient trop élevé (il ne converge pas forcément vers la solution voulue^{6 7}).

5. Le nombre de photons détectés suit une distribution de Poisson, il est surtout utilisé en SPECT ou en PET. En tomographie des rayons X, le grand nombre de photons permet de faire l'approximation d'un bruit gaussien, et il sera alors plus naturel d'utiliser la méthode des moindres carrés (qui est équivalente à la méthode ML avec bruit gaussien).

6. Cela vient du fait qu'avec cet algorithme on reconstruit les basses fréquences puis les hautes fréquences.

7. C'est également le cas de la méthode du gradient conjuguée quand il n'y a pas de régularisation.

Annexe B

Simulations en tomographie 2D dans le cadre du projet FUI 3D4C-arm

B.1 Présentation du problème

Pour le projet FUI 3D4C-arm, des simulations en géométrie *fan beam* ont été réalisées. L'idée était d'effectuer des reconstructions itératives, en particulier dans des configurations où une reconstruction exacte n'était pas possible. Pour cela, un code de L.Desbat a été utilisé, en implémentant en plus la géométrie *fan beam* et l'algorithme EM (l'algorithme du gradient conjugué et de la méthode des moindres carrés, simplifié en GC, étant déjà implémenté).

On s'intéresse à la reconstruction d'une partie d'un fantôme représentant de manière (très) schématique une coupe au niveau du bassin. La ROI est centrée sur la "hanche" du fantôme. Nous envisageons deux configurations pour cette hanche : elle est constituée de fines ellipses de même direction, dans le premier cas "horizontales" (figure B.1 (*gauche*)) et dans le second "verticales" (*droite*).

Enfin, nous avons implémenté un algorithme pour estimer le support à partir des projections, ce qui permet d'améliorer la convergence des algorithmes itératifs. Nous donnons parfois les résultats avec le support connu, et parfois avec le support calculé.



FIGURE B.1 – Fantôme avec ellipses horizontales (*gauche*) ou verticales (*droite*).

Les paramètres utilisés dans les simulations sont les suivants (ils correspondent à la figure B.2) :

Nombre de positions de source : 200

Nombre de droites mesurées par position : 2000

Angle d'ouverture maximale de la source : $\gamma_m = 2.4^\circ$

Rayon de la trajectoire de source : $R = 700$ mm

La trajectoire de la source et le FOV sont centrés en $(0, 0)$.

Rayon du FOV $R_{\text{FOV}} = 30$ mm

Taille de l'image (pixels) : 512×256

Distance source détecteur : $l_{sd} = 1100$ mm

Largeur détecteur : $L_d = 94$ mm

Dimensions du fantôme : ellipse de dimensions 30 mm \times 60 mm

Les ellipses contenues dans la FOV ont pour dimensions 10 mm \times 5 mm et celles en dehors 8 mm \times 5 mm.

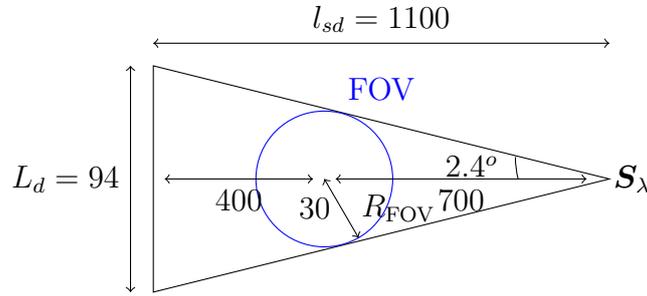


FIGURE B.2 – Schéma (non à l'échelle) de la paramétrisation de la simulation

Les configurations testées sont celles du *short-scan* et du *less-than-short-scan*. Néanmoins pour le cas du *less-than-short-scan*, la ROI (et donc le FOV) sont en dehors de Ω_{S_Λ} ; la reconstruction exacte n'est donc pas possible.

B.1.1 Configuration *short-scan*

La trajectoire de la source est ici d'intervalle angulaire $\Lambda = [-\frac{\pi}{2} - \gamma_m, \frac{\pi}{2} + \gamma_m]$ (voir figure B.3).

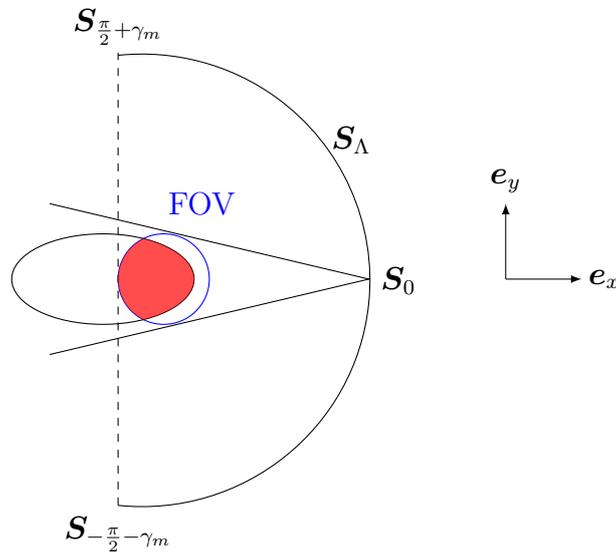


FIGURE B.3 – Schéma de la trajectoire *short-scan* utilisée pour les reconstructions de hanche. Le FOV (en bleu) n'est en réalité pas vraiment circulaire, et cela est par exemple en lien avec les artefacts des figures B.5 et B.6. La ROI est en rouge.

Pour cette configuration, il est possible d'utiliser l'inverse de la transformée de Hilbert unilatérale (voir sous-section 1.7.3), une reconstruction exacte de la ROI est donc possible. Des simulations numériques de reconstruction sont présentées B.5 et B.6.

B.1.2 Configuration *less-than-short-scan*

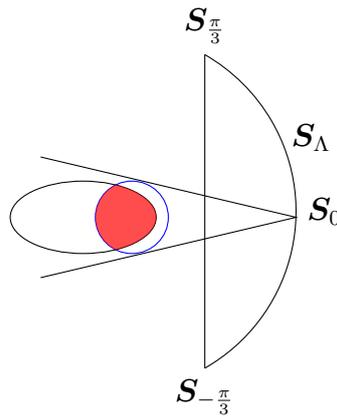


FIGURE B.4 – Schéma de la trajectoire *less-than-short-scan* utilisée pour les reconstructions de hanche. Le cercle représente le FOV. La ROI est en rouge.

La trajectoire de la source est ici d'intervalle angulaire $\Lambda = [-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$ (voir figure B.4). Ce n'est pas la configuration du *less-than-short-scan* décrite dans [52], car il y a des troncations et la ROI n'est pas dans Ω_{S_Λ} . Les points de la ROI ne sont pas entièrement mesurés, les lignes verticales ne sont pas mesurées. Une reconstruction exacte n'est donc pas possible, on verra que la direction des ellipses sera importante pour espérer avoir une reconstruction exploitable. Des reconstructions sont présentées figures B.7 et B.8.

B.2 Simulation : ellipses horizontales

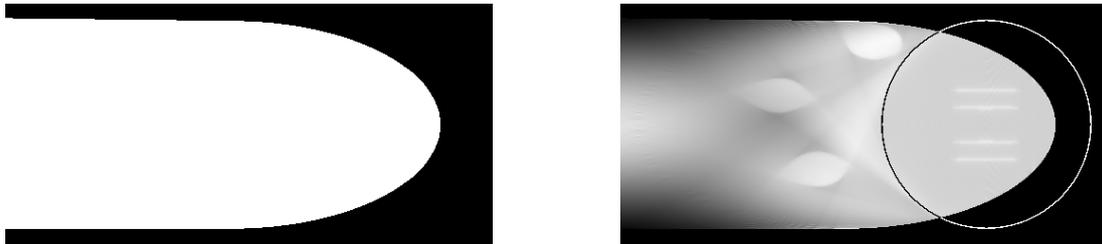


FIGURE B.5 – *Gauche* : Support reconstruit. *Droite* : Méthode EM, 50 itérations, support calculé.

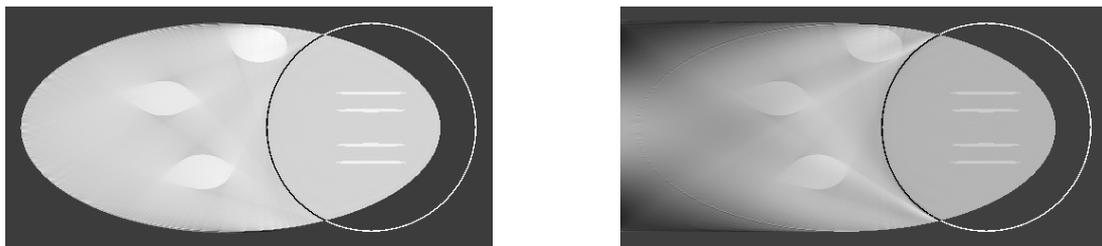


FIGURE B.6 – *Gauche* : Méthode GC, 22 itérations, support donné. *Droite* : Méthode GC, 34 itérations, support calculé.

B.2.1 Less-than-short-scan

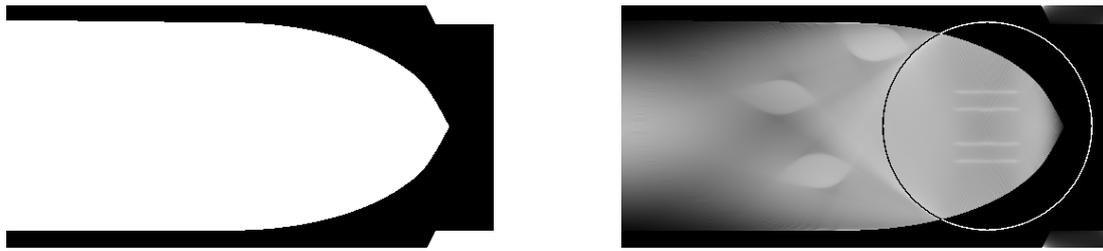


FIGURE B.7 – *Gauche* : Support reconstruit à partir des projections. *Droite* : Méthode EM, 50 itérations, support calculé.

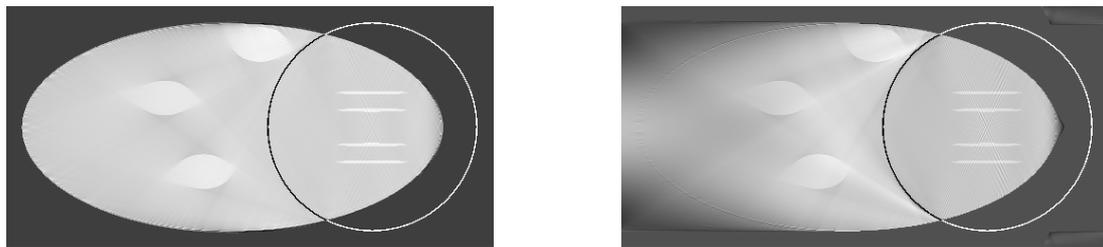


FIGURE B.8 – *Gauche* : méthode GC, 23 itérations, support donné. *Droite* : méthode GC, 32 itérations, support calculé.

B.3 Simulation : ellipses verticales

On garde les mêmes paramètres mais le fantôme change dans le FOV, les ellipses horizontales deviennent verticales (voir figure B.1). On verra que cela aura une influence importante lors du *less-than-short-scan* où les mesures manquantes rendront la reconstruction impossible.

B.3.1 Short-scan

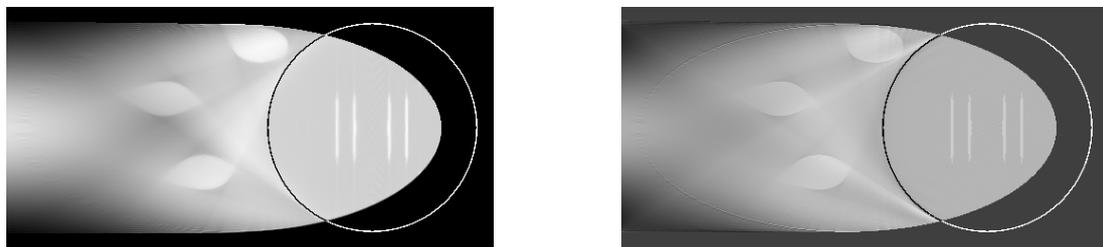


FIGURE B.9 – *Gauche* : Méthode EM, 50 itérations. *Droite* : Méthode GC, 34 itérations.

Comme pour le *short-scan* de la sous-section B.1.1, toutes les lignes intersectant le FOV sont mesurées au moins une fois, on peut donc reconstruire le FOV (simulations figure B.9).

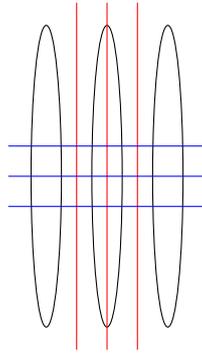


FIGURE B.11 – Contrairement aux intégrales de droite des lignes verticales (en rouge), les intégrales de droite des lignes horizontales (en bleu) ont quasiment la même valeur : elles donnent donc très peu d’information pour la reconstruction.

B.3.2 Less-than-short-scan

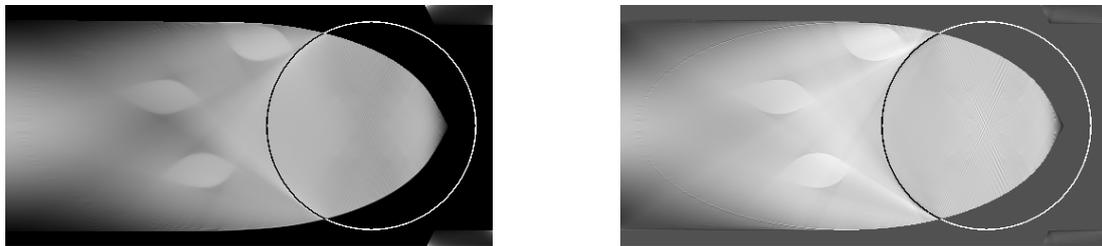


FIGURE B.10 – *Gauche* : Méthode EM, 50 itérations. *Droite* : Méthode GC, 32 itérations.

Les lignes manquantes étant celles les plus proches de l’axe vertical (e_y), reconstruire des objets *verticaux* est impossible (simulations figure B.10). On peut comprendre que les lignes mesurées horizontales apportent moins d’information que les lignes mesurées verticales pour la reconstruction d’ellipses verticales (voir figure B.11).

B.4 Analyse des résultats

Dans nos exemples, nous avons montré qu’une trajectoire “*less-than-short-scan*” peut permettre de “voir” certains détails, comme par exemple des hautes fréquences verticales (c’est-à-dire par exemple des ellipses de grand axe dans la direction horizontale et de petit axe dans la direction verticale), si la trajectoire est convenablement choisie. Par contre, d’autres détails, comme par exemple des hautes fréquences horizontales, ne seraient pas visibles pour cette trajectoire.

Nous pensons que dans le cadre de la chirurgie orthopédique (information de forme ou de fort contraste), il est possible de proposer des acquisitions avec un débattement angulaire de moins de 180 degrés (par exemple de 140 degrés) permettant d’identifier les informations pertinentes en fonction des cibles visées dans la région d’intérêt pour un type d’intervention donné.

On comprend donc que même dans des cas où une reconstruction exacte est impossible on peut effectuer une reconstruction approchée selon l’objet considéré.

Annexe C

Implémentation du filtre rampe et de la transformée de Hilbert

Les filtres k_R et k_H sont utilisés comme un produit de convolution et ne peuvent pas être implémentés naïvement. Une des solutions est d'utiliser l'espace de Fourier et de définir une fréquence de coupure.

C.1 Implémentation de la transformée de Hilbert

On rappelle que le filtre de Hilbert s'écrit :

$$k_H(r) = \frac{1}{\pi r} = \int_{-\infty}^{+\infty} -i \operatorname{sgn}(\rho) e^{2i\pi\rho r} d\rho \quad (\text{C.1})$$

Le problème de l'application de ce filtre à une fonction f , $f * k_H$, est la singularité. Tel qu'expliqué chapitre 1 section 1.5.2 il faut alors faire intervenir la valeur principale de Cauchy (vp) :

$$\forall r \in \mathbb{R}, \mathcal{H}f(r) = \text{vp} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(r') k_H(r - r') dr' \right\} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\mathbb{R} \setminus [-\epsilon, \epsilon]} f(r') k_H(r - r') dr' \right\} \quad (\text{C.2})$$

Pour résoudre ce problème de singularité du point de vue de l'implémentation, on peut définir un filtre de Hilbert passe-bas avec une fonction k_H^c avec $c > 0$ le paramètre de la fréquence de coupure, telle que $\widehat{k_H^c}(\rho) = \mathbb{1}_{[-c, c]}(-i \operatorname{sgn}\rho)$. La fonction k_H^c peut alors s'écrire :

$$k_H^c = \int_{-c}^c -i \operatorname{sgn}\rho e^{2i\pi\rho r} d\rho \quad (\text{C.3})$$

$$= \frac{1 - \cos(2\pi cr)}{\pi r} \quad (\text{C.4})$$

En pratique, en choisissant un pas d'échantillonnage $\Delta r > 0$, en posant $r_j = j\Delta r$, $j \in \mathbb{Z}$, et en prenant $c = 1/(2\Delta r)$ comme fréquence de coupure¹ on peut écrire une version discrétisée (et implémentable) de k_H^c ² :

$$k_H^{1/(2\Delta r)}(r_j) = \begin{cases} \frac{2}{j\pi\Delta r} & \text{pour } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

1. Á la limite du critère de Shannon.

2. $\lim_{j \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\pi j)}{j\pi\Delta r} = \frac{\sin(0)}{\Delta r} = 0$

Cette méthode (et celle présentée ci-dessous) est par exemple employée pour la simulation de la trajectoire selle avec la méthode de Katsevich annexe E.

On peut relier ce résultat à la méthode des trapèzes dans le domaine physique, en réalisant la convolution sur un intervalle fini, et en utilisant un *half-pixel-shift* (décalage d'un demi-pixel) pour les deux méthodes qui seront alors équivalentes. Le *half-pixel-shift* consiste, si on discrétise avec un pas Δu un détecteur 1D linéaire avec la variable u (ce que nous ferons annexe E), avec $u_i = i\Delta u$, à décaler ces valeurs d'un demi-pas pour travailler avec $u_{i+1/2}$ ³. Cela permet d'éviter la singularité (on ne travaille plus avec $u_0 = 0$, mais avec $u_{-1/2} = -\Delta u/2$ et $u_{1/2} = \Delta u/2$).

Une note de M.Defrise [18] détaille ces deux approches. L'idée d'origine est de chercher à approximer $\mathcal{H}f(0)$, avec une discrétisation telle que $\Delta r = 1$ et $r = j + s$, et $s = 0$ (pas de décalage) ou $s = 1/2$ (décalage d'un demi pixel). On utilise des fonctions d'interpolation Ψ telles que :

$$\mathcal{H}f(0) \approx \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{y} \sum_j f(j+s) \Psi(y-j-s) = \sum_j f(j+s) \alpha_s(j) \quad (\text{C.6})$$

avec α_s un coefficient dépendant du décalage s tel que :

$$\alpha_s(j) = \mathcal{H}\Psi(-j-s) \quad (\text{C.7})$$

La première méthode que nous avons décrite, avec le filtre de Hilbert passe-bas, peut être retrouvée en choisissant $\Psi(r) = \text{sinc}(r)$ ⁴. On peut parler d'*interpolation de Shannon*.

$$\mathcal{H}\Psi(r) = \begin{cases} \frac{1-\cos(\pi r)}{\pi r} & \text{pour } r \neq 0 \\ 0 & \text{pour } r = 0 \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Les coefficients α_s associés sont donc :

$$\alpha_0(j) = \begin{cases} \frac{-2}{\pi j} & \text{pour } j \text{ impair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

$$\alpha_{1/2}(j) = \frac{-1}{\pi(j+1/2)} \quad (\text{C.10})$$

On peut montrer que le schéma utilisant les coefficients $\alpha_{1/2}(j)$ est robuste et que $\hat{\alpha}_{1/2}(\rho) = -i \text{sgn} \rho$ pour $\rho \in [-1, 1]$ (alors que l'égalité avec le filtre de Hilbert idéal n'est valable que pour $\rho \in [-1/2, 1/2]$ pour les coefficients $\alpha_0(j)$).

En utilisant $\Psi(r) = \delta(r)$, avec δ la distribution de Dirac, on aboutit à la méthode des trapèzes et on peut montrer que :

$$\mathcal{H}f(0) \approx \sum_j -\frac{f(j+s)}{\pi(j+s)} \quad (\text{C.11})$$

Pour $s = 1/2$, on retrouve l'expression des coefficients (voir équation (C.6)) pour l'interpolation de Shannon équation (C.10), et dans ce cas pour les deux approches le filtre peut être implémenté sous la forme suivante, avec $r_j = j\Delta r$:

$$\boxed{\mathcal{H}f(r_j) = \Delta r \sum_i \frac{f(\Delta r(i+1/2))}{\pi(r_j - \Delta r(i+1/2))}} \quad (\text{C.12})$$

3. Cette méthode peut-être aussi utilisée dans le calcul numérique de dérivées.

4. En effet dans ce cas $\hat{\Psi}(\xi) = \mathbb{1}_{[-1/2, 1/2]}$, on retrouve bien le filtre passe-bas évoqué avec $c = 1/(2\Delta r)$.

Il est également possible d'utiliser des courbes spline pour la fonction Ψ . On peut ensuite rajouter un fenêtrage, par exemple une implémentation de la méthode de Katsevich pour la trajectoire hélicoïdale utilise la fenêtre de Hamming⁵ [77].

Enfin, [43](chapitre 14) donne également des pistes pour évaluer la valeur de la transformée de Hilbert en la singularité.

C.2 Implémentation du filtre rampe

Pour le filtre rampe, comme pour le filtre de Hilbert (section précédente), il est courant de travailler avec l'inverse de la transformée de Fourier à bande limitée : $\widehat{k}_R^c(\rho) = \mathbb{1}_{[-c,c]}|\rho|$. On a donc :

$$k_R^c(r) = \int_{-c}^c |\rho| e^{2i\pi\rho r} d\rho \quad (\text{C.13})$$

$$= \frac{c \sin(2\pi cr)}{\pi r} - \left(\frac{\sin(\pi cr)}{\pi r} \right)^2 \quad (\text{C.14})$$

À l'instar du filtre de Hilbert, on peut discrétiser k_R^c avec un pas $\Delta r > 0$, $r_j = j\Delta r$, $j \in \mathbb{Z}$, et $c = 1/(2\Delta r)$:

$$k_R^{1/(2\Delta r)}(r_j) = \begin{cases} \frac{-1}{(\pi j \Delta r)^2} & \text{pour } j \text{ impair} \\ \frac{1}{4\Delta r^2} & \text{pour } j = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Ce filtre est parfois appelé *filtre de Ram-Lak*. On peut aussi utiliser un fenêtrage, par exemple en travaillant avec :

$$\widehat{k}_R^c(\rho) = \mathbb{1}_{[-c,c]}|\rho|(a + (1-a)\cos(\pi\rho/c)) \quad (\text{C.16})$$

Pour $a = 1$ on retrouve (C.14) (fenêtrage avec une fonction porte), pour $a = 0.54$ on a un fenêtrage de Hamming, $a = 0.5$ un fenêtrage de Hann.

Pour plus de détails sur la discrétisation et l'implémentation, on pourra se reporter à [37, chapitre 3 section 4] ou [89].

5. Cela a surtout un intérêt pour la reconstruction avec des données réelles.

Annexe D

Paramétrisation du FOV pour les simulations

Contrairement à des cas pratiques, on raisonne dans cette thèse davantage en terme de FOV qu'en terme de détecteur. Pour nos simulations, on place le détecteur à une distance dépendant du rayon du FOV voulu. On travaille avec une trajectoire axiale, de préférence à base circulaire (nos simulations 3D ne concernent que des trajectoires n -sin). On considère un FOV qui sera un disque (de rayon R_{FOV} de centre \mathbf{C}_{FOV} ¹) en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Le détecteur aura une largeur L_d et sera à une distance l_{sd} de la source. On rappelle que γ caractérise l'ouverture de la source en 2D. En 3D, pour les trajectoires à base circulaire (voir chapitre 2 section 2.2.5), l'angle γ peut être défini comme l'ouverture angulaire du faisceau en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. Ces paramètres sont illustrés figure D.1. Nous ne discutons pas ici de la hauteur et du placement axial du FOV.



FIGURE D.1 – Paramétrisation de la source et du détecteur en projection sur le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. L_d est la largeur du détecteur et l_{sd} la distance source-détecteur.

De la figure D.1 on tire :

$$\begin{cases} l_{sd}(\lambda) = \frac{L_d}{2 \tan(\gamma(\lambda))} \\ \gamma(\lambda) = \arcsin\left(\frac{R_{\text{FOV}}}{\|\mathbf{S}_{\lambda,xy} - \mathbf{C}_{\text{FOV}}\|}\right) \end{cases}$$

avec $\mathbf{S}_{\lambda,xy}$ le vecteur constitué des deux premières composantes de \mathbf{S}_λ (pour les trajectoires n -sin ce sera donc $\mathbf{S}_{\lambda,xy} = (R \cos \lambda, R \sin \lambda)$ et $\|\mathbf{S}_{\lambda,xy}\| = R$). Pour une trajectoire à base circulaire (par exemple une trajectoire n -sin) et un FOV centré on a simplement $\|\mathbf{S}_{\lambda,xy} - \mathbf{C}_{\text{FOV},xy}\| = R$.

En posant $a = R_{\text{FOV}} / \|\mathbf{S}_{\lambda,xy} - \mathbf{C}_{\text{FOV},xy}\| (= \sin \gamma)$ et en rappelant que $\tan(\arcsin(x)) =$

1. Généralement le FOV est centré sur l'origine.

$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, on exprime le lien entre largeur du détecteur et distance source-détecteur :

$$l_{sd} = \frac{L_d \sqrt{1-a^2}}{2a} = \left(\frac{L_d}{2} \tan \gamma \right) \quad (\text{D.1})$$

On peut alors exprimer les coordonnées \mathbf{O}_d de l'origine du détecteur dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$:

$$\mathbf{O}_d = l_{sd} \frac{\mathbf{C}_{\text{FOV}} - \mathbf{S}_{\lambda,xy}}{\|\mathbf{C}_{\text{FOV}} - \mathbf{S}_{\lambda,xy}\|} + \mathbf{S}_{\lambda,xy} \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{O}_d = \frac{L_d \sqrt{1-a^2}}{2 R_{\text{FOV}}} (\mathbf{C}_{\text{FOV}} - \mathbf{S}_{\lambda,xy}) + \mathbf{S}_{\lambda,xy} \quad (\text{D.3})$$

Dans le cadre des trajectoires n -sin le détecteur aura une trajectoire circulaire dans le plan $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$. On peut rajouter que le plan du détecteur contiendra les vecteurs $\mathbf{e}_u = (-\sin \lambda, \cos \lambda, 0)$ et $\mathbf{e}_v = (0, 0, 1)$.

Annexe E

Implémentation de la méthode de Katsevich étendue pour la trajectoire selle

Comme il y a plusieurs variations de la méthode de Katsevich, il y a plusieurs manières de l'implémenter. Nous avons tenté d'implémenter la méthode de Katsevich selon [79]. L'article [54] et le rapport [77] vont plus loin en creusant les stratégies potentielles pour les différentes étapes de l'implémentation, mais traitent le cas de la trajectoire hélicoïdale (sur lequel nous ne nous attardons pas). Les étapes d'implémentation pour la reconstruction avec une trajectoire selle peuvent être [79] :

1. Dérivation dans une direction constante :

$$\begin{aligned} g_1(\lambda, u, v) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} g(\lambda, \boldsymbol{\theta}) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{u^2 + D^2}{D} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{uv}{D} \frac{\partial}{\partial v} \right) g(\lambda, u, v) \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

avec D la distance (ici constante) source détecteur.

2. Pondération :

$$g_2(\lambda, u, v) = \frac{D}{\sqrt{D^2 + u^2 + v^2}} g_1(\lambda, u, v) \quad (\text{E.2})$$

3. Réarrangement (aller) de l'espace cartésien du détecteur (avec le paramètre $\bar{z} = z - H \cos(2\lambda)$) vers l'espace des lignes filtrantes sur le détecteur : $g_3(\lambda, u, \bar{z}) = g_2(\lambda, u, V(\lambda, u, \bar{z}))$ avec

$$V(\lambda, u, \bar{z}) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{R} \left(D - \frac{u}{\tan \lambda} \right) & \text{si } \bar{z} \geq 0 \\ \frac{\bar{z}}{R} (D + u \tan \lambda) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

La subtilité ici est de définir les valeurs limites de \bar{z} (voir [80] pour plus de détails).

4. Transformée de Hilbert "horizontale" (en u) : pour toutes les valeurs de \bar{z} :

$$g_4(\lambda, u, \bar{z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_H(u - u') g_3(\lambda, u', \bar{z}) du' \quad (\text{E.4})$$

5. Réarrangement retour : $g_\kappa(\lambda, u, v) = g_4(\lambda, u, \bar{Z}(\lambda, u, v))$ avec

$$\bar{Z}(\lambda, u, v) = \begin{cases} \frac{vR \sin \lambda}{D \sin \lambda - u \cos \lambda} & \text{si } v \geq 0 \\ \frac{vR \cos \lambda}{D \cos \lambda + u \sin \lambda} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

6. Rétroprojection des projections filtrées $g_\kappa(\lambda, u, v)$. Pour tout point $\mathbf{x} = (x, y, z)$ de la ROI (\subset FOV) :

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\bar{w}_{\mathbf{x},\lambda}} g_\kappa(\lambda, u_{\mathbf{x},\lambda}, v_{\mathbf{x},\lambda}) d\lambda \quad (\text{E.6})$$

avec

$$w_{\mathbf{x},\lambda} = R - x \cos \lambda - y \sin \lambda \quad (\text{E.7})$$

$$u_{\mathbf{x},\lambda} = \frac{D}{w_{\mathbf{x},\lambda}} (-x \sin \lambda + y \cos \lambda) \quad (\text{E.8})$$

$$v_{\mathbf{x},\lambda} = \frac{D}{w_{\mathbf{x},\lambda}} (z - H \cos(2\lambda)) \quad (\text{E.9})$$

Le paramètre \bar{z} est important car son signe est corrélé avec la direction de filtrage (parallèle à \mathbf{e}_y pour $\bar{z} < 0$, parallèle à \mathbf{e}_x sinon).

Nous aimerons discuter des étapes 1 et 4, qui sont des étapes “indépendantes” de la trajectoire, et dont l’implémentation n’est pas discutée dans [79]. Nous avons implémenté la dérivée (E.1) selon un schéma centré avec un décalage d’un demi-pixel tel que proposé par [77]. Par exemple, pour calculer $g_1^u(u_{i+1/2}, v_{j+1/2}, \lambda_{k+1/2})$, la dérivée numérique de g selon u avec $u_i = i\Delta u$, $i \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} g_1^u(u_{i+1/2}, v_{j+1/2}, \lambda_{k+1/2}) &= (g(u_{i+1}, v_j, \lambda_k) - g(u_i, v_j, \lambda_k) \\ &\quad g(u_{i+1}, v_{j+1}, \lambda_k) - g(u_i, v_{j+1}, \lambda_k) \\ &\quad g(u_{i+1}, v_j, \lambda_{k+1}) - g(u_i, v_j, \lambda_{k+1}) \\ &\quad g(u_{i+1}, v_{j+1}, \lambda_{k+1}) - g(u_i, v_{j+1}, \lambda_{k+1})) / (4\Delta u) \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

La subtilité va alors être de gérer ces décalages, notamment pour u_i . Les valeurs numériques de g sont définies sur $[u_{i_{\min}}, \dots, u_{i_{\max}}]$, celles de g_1 sur $[u_{i_{\min}+1/2}, \dots, u_{i_{\max}-1/2}]$. La transformée de Hilbert va à sans tour avoir un impact. Nous avons choisi d’implémenter la transformée de Hilbert (voir annexe C.1 pour plus de détails) de trois façons : avec la méthode “de Fourier” (interpolation de Shannon), avec et sans décalage d’un demi-pixel, et avec la méthode des trapèzes (interpolation avec la fonction de Dirac) avec un décalage d’un demi-pixel pour éviter la singularité. L’annexe C.1, s’appuyant sur une note de M. Defrise [18], énonce que les deux dernières méthodes sont équivalentes.

La méthode “de Fourier” sera implémenté en construisant un noyau k_H :

$$k_H(u_i, s) = \frac{1 - \cos(\pi u_{i+s})}{\pi u_{i+s}} \quad (\text{E.11})$$

$s = 1/2$ s’il y a un décalage, $s = 0$ sinon et $u_i \in [u_{2i_{\min}+1/2}, \dots, u_{2i_{\max}-1/2}]$. On effectue ensuite le produit de convolution entre k_H et g_3 pour obtenir g_4 . Les valeurs de g_4 seront toujours définies sur $[u_{i_{\min}+1/2}, \dots, u_{i_{\max}-1/2}]$ pour $s = 0$, mais sur $[u_{i_{\min}}, \dots, u_{i_{\max}-1}]$ pour $s = 1/2$.

La méthode des trapèzes s’implémente ainsi :

$$g_4(u_i, \dots) = \Delta u \sum_{j=i_{\min}}^{i_{\max}-1} \frac{g_3(u_{j+1/2}, \dots)}{\pi(u_i - u_{j+1/2})} \quad (\text{E.12})$$

avec $i \in [i_{\min}, \dots, i_{\max} - 1]$. En décalant deux fois d’un demi-pixel (avec la dérivée puis avec la méthode de Fourier ou la méthode des trapèzes) on retrouve l’échantillonnage initial en perdant juste la dernière valeur¹.

Les simulations ont été faites avec un fantôme simple ellipsoïde non standard de longueurs d’axes respectives 120 mm, 20 mm et 20 mm (constitué d’ellipsoïdes, voir figure E.1). Les paramètres de la trajectoire selle sont $R = 250$ mm et $H = 50$ mm, la distance source détecteur est 400 mm et 300 projections sont simulées. Le détecteur a une largeur de 400 mm et une hauteur de 500 mm (pas de troncation axiale) et un pixel a une largeur de 1 mm. Trois reconstructions avec la méthode de Katsevich (méthode “de Fourier” avec et sans *half pixel shift* et méthode des trapèzes avec *half pixel shift*) et une reconstruction avec la méthode des moindres carrées et la méthode du gradient conjugué (annexe A) ont été effectuées dans un volume de $135 \times 135 \times 45$ voxels. Les résultats des reconstructions sont présentés figure E.2.

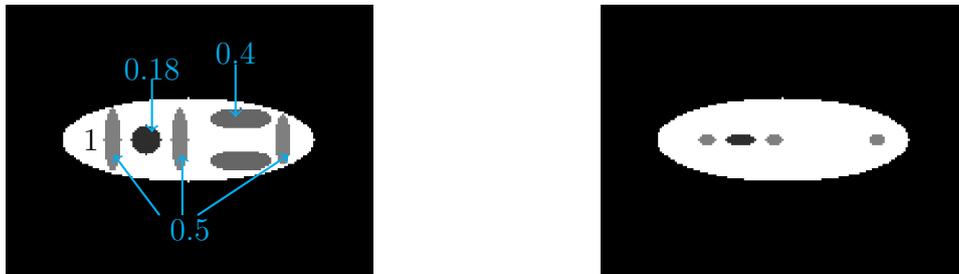


FIGURE E.1 – Fantôme utilisé pour les reconstructions avec la méthode de Katsevich

Les calculs d’erreurs confirment que la méthode du gradient conjugué donne de meilleurs résultats que la méthode de Katsevich (avec notre implémentation). La figure E.3 montre des profils.

	RMSE	erreur relative
Katse. Fourier sans half-shift pixel	0.1766	9.75%
Katse. avec (Fourier) half-shift pixel	0.1769	9.76%
Katse. avec (trapèzes) half-shift pixel	0.1769	9.76%
gradient conjugué	0.0796	3.70%

1. Par contre la transformée de Hilbert n’affecte que l’échantillonnage en u , les échantillonnages en λ et en v sont toujours décalés d’un demi-pixel.

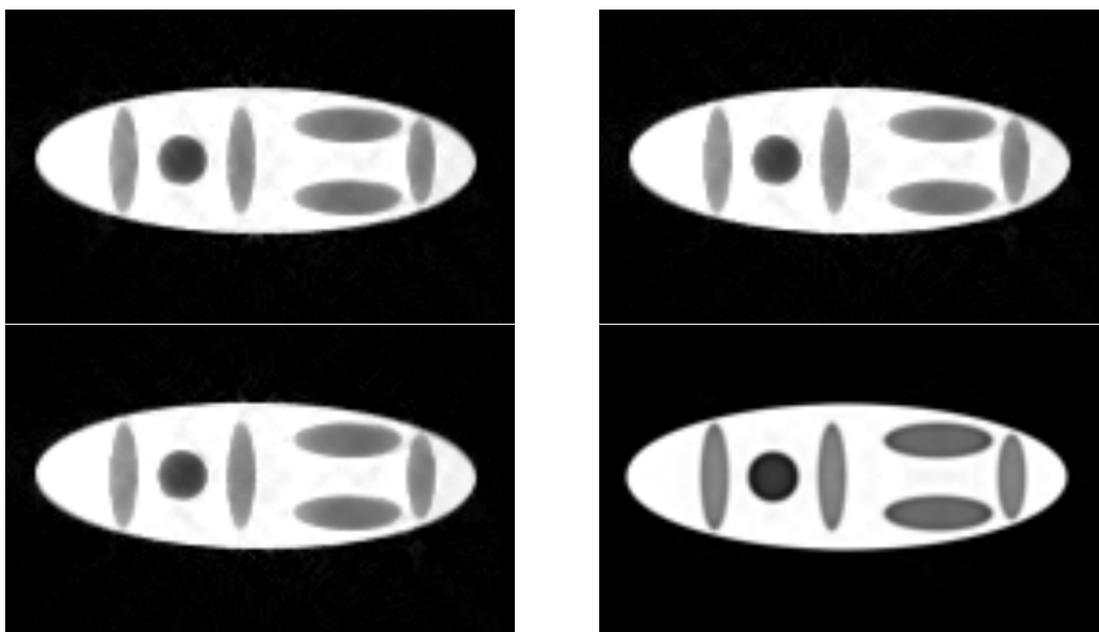


FIGURE E.2 – La reconstruction de notre fantôme selon différentes méthodes ($window : 1, level : 0.5$). *Haut, gauche* : méthode de Katsevich, transformée de Hilbert avec méthode de Fourier, sans *half pixel shift*. *Haut, droite* : méthode de Katsevich, transformée de Hilbert avec méthode de Fourier, avec *half pixel shift*. *Bas, gauche* : méthode de Katsevich, transformée de Hilbert avec méthode des trapèzes, avec *half pixel shift*. *Bas, droite* : méthode des moindres carrés avec gradient conjugué ($\gamma = 100$), 40 itérations.

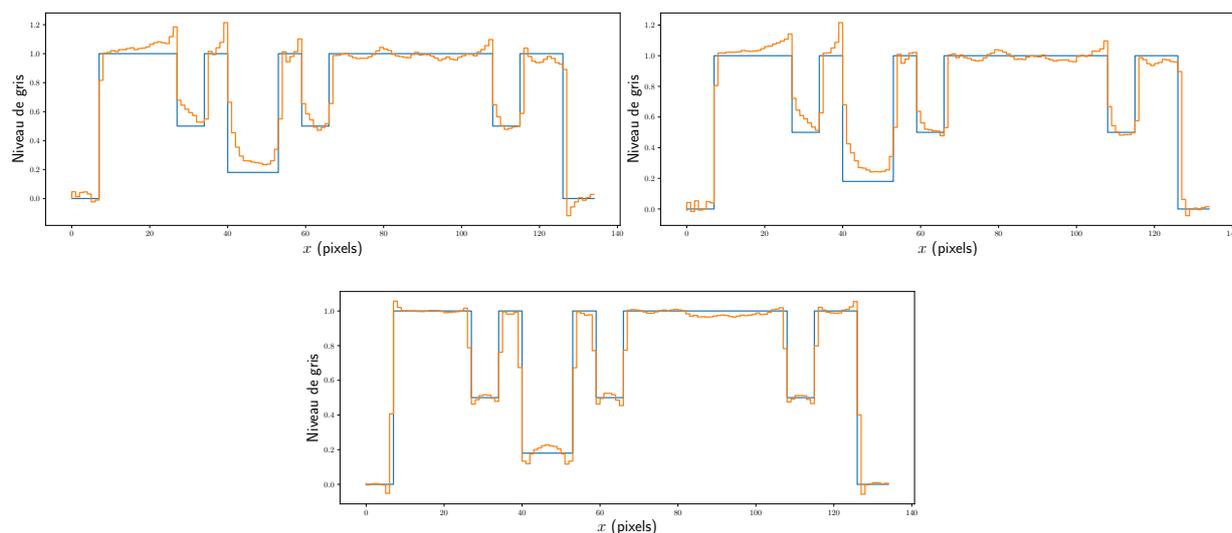


FIGURE E.3 – Tracé de profils. *Haut, gauche* : méthode de Katsevich, transformée de Hilbert avec méthode de Fourier, sans *half shift pixel*. *Haut, droite* : méthode de Katsevich, transformée de Hilbert avec méthode de Fourier, sans *half* avec *pixel*. *Bas* : méthode des moindres carrés.

Bibliographie

- [1] A. Andersen and A. Kak. Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART) : A superior implementation of the ART algorithm. *Ultrasonic Imaging*, 6(1) :81–94, jan 1984.
- [2] K. Batenburg, H. Per Christian, J. S. Jørgensen, and W. R. B. Lionheart. Scientific Computing for Computed Tomography. 2018.
- [3] M. Berger. *Géométrie*, volume 2. 2016.
- [4] A. Bilgot. *Méthodes locales d'identification de surfaces de discontinuité à partir de projections tronquées pour l'imagerie interventionnelle*. PhD thesis, Université Joseph-Fourier, 2008.
- [5] T. Bonnesen and W. Fenchel. *Theory of convex bodies*. BCS Associates, Moscow, Idaho, USA, 1987.
- [6] C. Bontus, T. Köhler, and R. Proksa. A quasiexact reconstruction algorithm for helical CT using a 3-Pi acquisition. *Medical Physics*, 30(9) :2493–2502, 2003.
- [7] C. Bontus, R. Proksa, and T. Köhler. New saddle trajectories for CT. *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, 4 :2309–2310, 2006.
- [8] R. A. Brooks and D. G. Chiro. Principles of computer assisted tomography (CAT) in radiographic and radioisotopic imaging. *Physics in Medicine and Biology*, 21(5) :689–732, 1976.
- [9] R. Clack and M. Defrise. Cone-beam reconstruction by the use of Radon transform intermediate functions. *JOSA A*, 11 :580—585, 1994.
- [10] R. Clackdoyle. Fully 3D reconstruction theory in perspective. In *The Eighth International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, number July, pages 64–69, 2005.
- [11] R. Clackdoyle and M. Defrise. Overview of reconstruction algorithms for exact cone-beam tomography. In F. L. Bookstein, J. S. Duncan, N. Lange, and D. C. Wilson, editors, *SPIE : Mathematical Methods in Medical Imaging III*, volume 2299, pages 230–241, Bellingham, jul 1994. SPIE.
- [12] R. Clackdoyle and M. Defrise. Tomographic reconstruction in the 21st century. *IEEE Signal Processing Magazine*, (July) :60–80, 2010.
- [13] R. Clackdoyle, M. Defrise, F. Noo, and H. Kudo. Two-Dimensional Region-of-Interest Tomography. In *Oberwolfach*, pages 2070–2074, 2006.

- [14] R. Clackdoyle, F. Noo, J. Guo, and J. A. Roberts. Quantitative reconstruction from truncated projections in classical tomography. *51(5)* :2570–2578, 2004.
- [15] R. Clackdoyle, F. Noo, F. Momey, L. Desbat, and S. Rit. Accurate Transaxial Region-of-Interest Reconstruction in Helical CT? *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, *1(4)* :334–345, 2017.
- [16] A. Coussat, S. Rit, R. Clackdoyle, M. Defrise, L. Desbat, and J. M. Letang. Region-of-Interest CT Reconstruction using Object Extent and Singular Value Decomposition. *IEEE Transactions on Radiation and Plasma Medical Sciences*, 2021.
- [17] P. E. Danielsson, P. Edholm, J. Eriksson, M. Magnusson Seger, and H. Turbell. The original PI-method for helical cone-beam CT. In *Fully 3D*, pages 3–6, Egmond aan Zee, 1999.
- [18] M. Defrise. The discretization of Hilbert transform : usefulness of the pixel shift. Technical report.
- [19] M. Defrise and R. Clack. A Cone-Beam Reconstruction Algorithm Using Shift-Variant Filtering and Cone-Beam Backprojection. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, *13(1)* :186–195, 1994.
- [20] M. Defrise, R. Clack, and D. W. Townsend. Image reconstruction from truncated, two-dimensional, parallel projections. *Inverse Problems*, *11(2)* :287–313, 1995.
- [21] M. Defrise, F. Noo, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Truncated Hilbert transform and image reconstruction from limited tomographic data. *Inverse Problems*, *22(3)* :1037–1053, 2006.
- [22] F. Dennerlein, A. Katsevich, G. Lauritsch, and J. Hornegger. Exact and efficient cone-beam reconstruction algorithm for a short-scan circle combined with various lines. In J. M. Fitzpatrick and J. M. Reinhardt, editors, *SPIE, Medical Imaging 2005 : Image Processing*, volume 5747, page 388, apr 2005.
- [23] L. Desbat and C. Mennessier. On the invertibility of Doppler imaging : An approach based on generalized tomography. *Inverse Problems*, *15(1)* :193–213, 1999.
- [24] H. G. Eggleston. *Convexity*. Cambridge University Press, jan 1958.
- [25] C. L. Epstein. *Introduction to the Mathematics of Medical Imaging*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, jan 2007.
- [26] L. A. Feldkamp, L. C. Davis, and J. W. Kress. Practical cone-beam algorithm. *Journal of the Optical Society of America A*, *1(6)* :612, jun 1984.
- [27] D. V. Finch. Cone Beam Reconstruction with Sources on a Curve. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *45(4)* :665–673, 1985.
- [28] P. Gilbert. Iterative methods for the three-dimensional reconstruction of an object from projections. *Journal of Theoretical Biology*, *36(1)* :105–117, 1972.
- [29] N. Gindrier, R. Clackdoyle, S. Rit, and L. Desbat. Cone-beam reconstruction from n-sin trajectories with transversely-truncated projections. In *6th International Conference on Image Formation in X-Ray Computed Tomography*, pages 46–49, Regensburg, 2020.

- [30] N. Gindrier, R. Clackdoyle, S. Rit, and L. Desbat. Sufficient field-of-view for the M-line method in cone-beam CT. In *2020 IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference (NSS/MIC)*, Boston (virtual), United States, 2020.
- [31] N. Gindrier, L. Desbat, and R. Clackdoyle. CB reconstruction for the 3-sin trajectory with transverse truncation. In *6th Virtual International Meeting on Fully 3D Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, Leuven, 2021.
- [32] P. Grangeat. *Analyse d'un système d'imagerie 3d par reconstruction à partir de radiographies x en géométrie conique*. PhD thesis, ENST, 1987.
- [33] P. Grangeat. Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the radon transform. In Herman, Louis, and Natterer, editors, *Mathematical Methods in Tomography*, pages 66–97. Springer, Berlin, 1991.
- [34] J. Hadamard. Les problèmes aux limites dans la théorie des équations aux dérivées partielles. *Journal de Physique Théorique et Appliquée*, 6(1) :202–241, 1907.
- [35] M. Hestenes and E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems, 1952.
- [36] H. M. Hudson and R. S. Larkin. Accelerated Image Reconstruction Using Ordered Subsets of Projection Data. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(4) :601–609, 1994.
- [37] A. C. Kak and M. Slaney. *Principles of tomographic imaging*. New-York, 1988.
- [38] W. A. Kalender. X-ray computed tomography. *Physics in Medicine and Biology*, 51(13) :29–43, 2006.
- [39] A. Katsevich. Theoretically exact FBP-type inversion algorithm for spiral CT. *RECALL*, 62(6) :0–3, 2001.
- [40] A. Katsevich. Analysis of an exact inversion algorithm for spiral cone-beam CT. *Physics in Medicine and Biology*, 47(15) :2583–2597, 2002.
- [41] A. Katsevich. A general scheme for constructing inversion algorithms for cone beam CT. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2003(21) :1305–1321, 2003.
- [42] A. Katsevich. An improved exact filtered backprojection algorithm for spiral computed tomography. *Advances in Applied Mathematics*, 32(4) :681–697, 2004.
- [43] F. W. King. *Hilbert transforms*. Cambridge University Press Cambridge, 2009.
- [44] H. Kudo and T. Saito. Derivation and Implementation of a Cone-Beam Reconstruction Algorithm for Nonplanar Orbits. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 13(1) :196–211, 1994.
- [45] H. Kudo and T. Saito. An extended completeness condition for exact cone-beam reconstruction and its application. In *Proceedings of 1994 IEEE Nuclear Science Symposium - NSS'94*, volume 4, pages 1710–1714. IEEE, 1995.

- [46] Y. Lu, J. Zhao, and G. Wang. Exact image reconstruction with triple-source saddle-curve cone-beam scanning. *Physics in Medicine and Biology*, 54(10) :2971–2991, may 2009.
- [47] S. D. Metzler, J. E. Bowsher, and R. J. Jaszczak. Geometrical Similarities of the Orlov and Tuy Sampling Criteria and a Numerical Algorithm for Assessing Sampling Completeness. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 50(5 II) :1550–1555, 2003.
- [48] F. Natterer. *The Mathematics of Computerized Tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics, jan 2001.
- [49] F. Noo. *Méthodes numériques directes de reconstruction d’images tridimensionnelles à partir de projections coniques*. PhD thesis, université de Liège, 1998.
- [50] F. Noo. Principles of Three-Dimensional Imaging from Cone-Beam Projection Data. In *Informatics In Medical Imaging*, chapter 13, pages 181–197. CRC Press, 2011.
- [51] F. Noo, R. Clackdoyle, and J. D. Pack. A two-step Hilbert transform method for 2D image reconstruction. *Physics in Medicine and Biology*, 49(17) :3903–3923, 2004.
- [52] F. Noo, M. Defrise, R. Clackdoyle, and H. Kudo. Image reconstruction from fan-beam projections on less than a short scan. *Physics in Medicine and Biology*, 47(14) :2525–2546, 2002.
- [53] F. Noo and D. Heuscher. Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries. *Physics in Medicine and Biology*, 48(23) :3787–3818, 2003.
- [54] F. Noo and D. Heuscher. Exact helical reconstruction using native cone-beam geometries. *Physics in Medicine and Biology*, 48(23) :3787–3818, 2003.
- [55] F. Noo, A. Wunderlich, L. Günter, and H. Kudo. On the problem of axial data truncation in the reverse helix geometry. In *10th International Meeting on Fully Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 90–93, 2009.
- [56] Orlov. Theory of three-dimensional reconstruction. I. Conditions of a complete set of projections. *Sov. Phys. Crystallography*, 1976.
- [57] J. D. Pack and F. Noo. Cone-beam reconstruction outside R-lines using the back-projection of 1-D filtered data. *The Eighth International Meeting on Fully Three-dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, (July) :287–290, 2005.
- [58] J. D. Pack and F. Noo. Cone-beam reconstruction using 1D filtering along the projection of M-lines. *Inverse Problems*, 21(3) :1105–1120, 2005.
- [59] J. D. Pack, F. Noo, and R. Clackdoyle. Cone-beam reconstruction using the back-projection of locally filtered projections. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(1) :70–85, 2005.
- [60] J. D. Pack, F. Noo, and H. Kudo. Investigation of saddle trajectories for cardiac CT imaging in cone-beam geometry. *Physics in Medicine and Biology*, 49(11) :2317–2336, 2004.

- [61] K. Ramamurthi, J. L. Prince, and N. Strobel. Exact 3D cone-beam reconstruction from projections obtained over a wobble trajectory on a c-arm. In *2004 2nd IEEE International Symposium on Biomedical Imaging : Macro to Nano*, volume 1, pages 932–935, 2004.
- [62] S. Rit, R. Clackdoyle, P. Keuschnigg, and P. Steininger. Filtered-backprojection reconstruction for a cone-beam computed tomography scanner with independent source and detector rotations. *Medical Physics*, 43(5) :2344–2352, 2016.
- [63] S. Rit, M. Vila Oliva, S. Brousmiche, R. Labarbe, D. Sarrut, and G. C. Sharp. The Reconstruction Toolkit (RTK), an open-source cone-beam CT reconstruction toolkit based on the Insight Toolkit (ITK). *Journal of Physics : Conference Series*, 489(1), 2014.
- [64] L. Ritschl, J. Kuntz, C. Fleischmann, and M. Kachelrieß. The rotate-plus-shift C-arm trajectory. Part I. Complete data with less than 180° rotation. *Medical Physics*, 43(5) :2295–2302, 2016.
- [65] H. Schomberg. Complete Source Trajectories for C-Arm Systems and a Method for Coping with Truncated Cone-Beam Projections. *Proceedings of the 6th International Meeting on Fully Three-dimensional Image Reconstruction and Nuclear Medicine*, pages 221–224, 2001.
- [66] H. J. Scudder. Introduction to Computer Aided Tomography. *Proceedings of the IEEE*, 66(6) :628–637, 1978.
- [67] L. Shepp and Y. Vardi. Maximum Likelihood Reconstruction for Emission Tomography. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1 :113—122, 1982.
- [68] L. A. Shepp and B. F. Logan. The Fourier reconstruction of a head section. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21(3) :21–43, jun 1974.
- [69] E. Y. Sidky and X. Pan. Recovering a compactly supported function from knowledge of its Hilbert transform on a finite interval. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(2) :97–100, 2005.
- [70] B. D. Smith. Image reconstruction from cone-beam projections : necessary and sufficient conditions and reconstruction methods. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 4 :14—25, 1985.
- [71] B. D. Smith. Cone-beam tomography : recent advances and a tutorial review. *Optical Engineering*, 29(5) :524, 1990.
- [72] F. Smithies. Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology. By S. G. Mikhlin. Translated from the Russian by A. H. Armstrong. Pp. xii, 338. 80s. 1957. (Pergamon Press). *The Mathematical Gazette*, 43(344) :156–156, may 1957.
- [73] K. C. Tam. Cone beam imaging of a section of a long object with a short detector. In Springer, editor, *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging*, pages 525–530, Berlin, Heidelberg, 1997.
- [74] K. C. Tam, S. Samarasekera, and F. Sauer. Exact cone beam CT with a spiral scan. *Physics in Medicine and Biology*, 43(4) :1015–1024, 1998.

- [75] H. K. Tuy. Inversion Formula For Cone-Beam Reconstruction. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 43(3) :546–552, 1983.
- [76] S. Webb. *The Physics of Medical Imaging*. IOP Publishing, 1988.
- [77] A. J. Wunderlich. The Katsevich Inversion formula for cone beam CT. 2006.
- [78] D. Xia, Y. Zou, L. Yu, E. Y. Sidky, and X. Pan. Image Reconstruction for Scanning Configurations with Tilted Helical and Saddle Trajectories. In *The Eighth International Meeting on Fully Three-dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 347–350, Salt Lake City, 2005.
- [79] H. Yang, M. Li, K. Koizumi, and H. Kudo. Exact cone beam reconstruction for a saddle trajectory. *Physics in Medicine and Biology*, 51(5) :1157–1172, 2006.
- [80] H. Yang, M. Li, K. Koizumi, and H. Kudo. View-independent reconstruction algorithms for cone beam CT with general saddle trajectory. *Physics in Medicine and Biology*, 51(15) :3865–3884, 2006.
- [81] H. Yang, M. Li, K. Koizumi, and H. Kudo. Application of Pack and Noo’s Cone-Beam Inversion Formula to a Wide Class of Trajectories. pages 3471–3475, 2007.
- [82] Y. Yangbo and G. Wang. Filtered backprojection formula for exact image reconstruction from cone-beam data along a general scanning curve. *Medical Physics*, 32(1) :42–48, 2005.
- [83] Y. Ye, H. Yu, Y. Wei, and G. Wang. A general local reconstruction approach based on a truncated hilbert transform. *International Journal of Biomedical Imaging*, 2007, 2007.
- [84] Y. Ye, S. Zhao, H. Yu, and G. Wang. A general exact reconstruction for cone-beam CT via backprojection- filtration. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 24(9) :1190–1198, 2005.
- [85] D. C. Youla and H. Webb. Image Restoration by the Method of Convex Projections : Part 1-Theory. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 1(2) :81–94, 1982.
- [86] H. Yu, S. Zhao, Y. Ye, and G. Wang. Exact BPF and FBP algorithms for nonstandard saddle curves. *Medical Physics*, 32(11) :3305–3312, 2005.
- [87] Z. Yu, F. Noo, G. Lauritsch, F. Dennerlein, and J. Hornegger. Ellipse-line-ellipse source trajectory and its R-line coverage for long-object cone-beam imaging with a C-arm system. *Medical Imaging 2012 : Physics of Medical Imaging*, 8313 :83133E, 2012.
- [88] Z. Yu, A. Wunderlich, F. Dennerlein, G. Lauritsch, and F. Noo. Line plus arc source trajectories and their R-line coverage for long-object cone-beam imaging with a C-arm system. *Physics in Medicine and Biology*, 56(12) :3447–3471, jun 2011.
- [89] G. L. Zeng. Revisit of the Ramp Filter. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 62(1) :131–136, feb 2015.
- [90] G. L. Zeng and G. T. Gullberg. A cone-beam tomography algorithm for orthogonal circle-and-line orbit. *Physics in Medicine and Biology*, 37(3) :563–577, 1992.

- [91] G. L. Zeng, G. T. Gullberg, and S. A. Foresti. Eigen Analysis of Cone-Beam Scanning Geometries. In J. Amans and P. Grangeat, editors, *Three-Dimensional Image Reconstruction in Radiology and Nuclear Medicine*, pages 75–86. 1996.
- [92] T. Zhuang, S. Leng, B. E. Nett, and G. H. Chen. Fan-beam and cone-beam image reconstruction via filtering the backprojection image of differentiated projection data. *Physics in Medicine and Biology*, 49(24) :5489–5503, 2004.
- [93] Y. Zou and X. Pan. Exact image reconstruction on PI-lines from minimum data in helical cone-beam CT. *Physics in Medicine and Biology*, 49(6) :941–959, 2004.