



HAL
open science

Problèmes de domination et partitionnement de graphes : complexité, structure, criticité

Valentin Bouquet

► **To cite this version:**

Valentin Bouquet. Problèmes de domination et partitionnement de graphes : complexité, structure, criticité. Autre [cs.OH]. HESAM Université, 2022. Français. NNT : 2022HESAC010 . tel-03909059

HAL Id: tel-03909059

<https://theses.hal.science/tel-03909059>

Submitted on 21 Dec 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SMI

Laboratoire Cédric

THÈSE

présentée par : **Valentin BOUQUET**

soutenue le : **10 novembre 2022**

pour obtenir le grade de : **Docteur d'HESAM Université**

préparée au : **Conservatoire national des arts et métiers**

Discipline : **Section 27 du CNU**

Spécialité : **Informatique**

Problèmes de domination et partitionnement de graphes : complexité, structure, criticité

THÈSE dirigée par

M. Christophe PICOULEAU

Professeur, Cnam

et co-encadrée par

M. François DELBOT

Maître de conférences, Sorbonne Université

M. Stéphane ROVEDAKIS

Maître de conférences, Cnam

RAPPORTEURS

Mme Tinaz EKIM

Professeur, Université du Bosphore, Istanbul, Turquie

M. Bernard RIES

Professeur, Université de Fribourg, Suisse

PRÉSIDENT DU JURY

Mme Claire HANEN

Professeur, Sorbonne Université

EXAMINATEURS

M. Denis CORNAZ

Maître de conférences, Université Paris-Dauphine-PSL

M. Dimitri WATEL

Maître de conférences, ENSIIE

Affidavit

Je soussigné, Valentin Bouquet, déclare par la présente que le travail présenté dans ce manuscrit est mon propre travail, réalisé sous la direction scientifique de Christophe Picouveau, et sous la co-direction de François Delbot et Stéphane Rovedakis, dans le respect des principes d'honnêteté, d'intégrité et de responsabilité inhérents à la mission de recherche. Les travaux de recherche et la rédaction de ce manuscrit ont été réalisés dans le respect de la charte nationale de déontologie des métiers de la recherche. Ce travail n'a pas été précédemment soumis en France ou à l'étranger dans une version identique ou similaire à un organisme examinateur.

Fait à Paris, 01/06/2022

Signature : Valentin Bouquet

Affidavit

I, undersigned, Valentin Bouquet, hereby declare that the work presented in this manuscript is my own work, carried out under the scientific direction of Christophe Picouveau and under the co-direction of François Delbot and of Stéphane Rovedakis, in accordance with the principles of honesty, integrity and responsibility inherent to the research mission. The research work and the writing of this manuscript have been carried out in compliance with the French charter for Research Integrity. This work has not been submitted previously either in France or abroad in the same or in a similar version to any other examination body.

Place Paris, date 01/06/2022

Signature : Valentin Bouquet

Remerciements

Durant ces trois années, j'ai rencontré tellement de gens avec qui j'ai eu le plaisir d'échanger qu'il serait déraisonnable de remercier ici chacun d'entre vous, mais heureusement, il m'est facile de vous remercier tous. Donc un grand merci à tous ceux que j'ai pu rencontrer pendant ces trois ans.

Pour commencer, je tiens à remercier vivement les membres de mon jury pour avoir accepté d'évaluer mon travail de thèse. J'ai conscience que rapporter une thèse n'est pas une tâche anodine, et je remercie donc Tinaz EKIM et Bernard RIES pour l'attention qu'ils ont apporté à mes travaux. Vos retours ont été précieux et dénotent du temps que vous m'avez accordé. Merci également à Claire HANEN d'avoir accepté de présider ce jury et à Denis CORNAZ et Dimitri WATEL d'avoir accepté d'examiner mes travaux.

Je tiens à remercier chaleureusement mes trois encadrants qui m'ont accompagné tout au long de ma thèse (et parfois plus). Merci à François DELBOT d'avoir été là pendant toutes ces années, je pense qu'il est évident que je ne serai pas arrivé si loin sans toi. Merci pour ta bienveillance et pour la confiance que tu m'as apportée. Tu as été d'un grand soutien et je t'en suis reconnaissant. Un autre merci à Stéphane ROVEDAKIS qui a accepté de me coencadrer malgré la présence de ton vieil ami François. Souvent premier arrivé et dernier parti du couloir, tu t'es toujours rendu très disponible pour moi (et pour les autres), et ça a été un réel plaisir de te côtoyer durant ces trois années. J'espère qu'un jour, tu seras récompensé à ta juste valeur. Merci aussi à Christophe PICOULEAU d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse. Je suis toujours impressionné par toutes les connaissances qui se nichent au coin de ta tête — en mathématiques, mais pas seulement — et dont j'ai largement profité. J'ai appris et découvert un grand nombre de choses avec toi. Merci aussi pour m'avoir supporté au bureau malgré toutes ces bêtises que j'ai pu écrire au tableau.

Je remercie également tous mes collègues du Cnam que j'ai eu la chance de rencontrer et de fréquenter. Merci à tous les membres du couloir des gentils — dont je fais bien évidemment partie — cela a toujours été un plaisir de discuter avec vous. Si j'ai tant apprécié mes années au Cnam, c'est en grande partie grâce à vous. Une mention particulière à Cédric BENTZ et Sami TAKTAK, les deux meilleurs ennemis du monde. J'espère qu'un jour, vous pourrez vous croiser à nouveau dans des conditions plus favorables. Une deuxième mention, non moins importante, à Valentine HURÉ et Anton MEDVEDEV, j'espère que ce qui est né en salle des imprimantes ne s'éteindra pas de sitôt (vous ne l'avez pas démerité). Je n'oublie pas Dame Agnès PLATEAU dont je suis l'assistant cette année et avec qui j'ai partagé de nombreux et agréables repas et boissons. Je pense aussi à Philippe AUGER pour nous avoir divertis avec tes nombreuses blagues (je sais maintenant que le fond est une matière expansible). À Joel BERTHELIN pour sa présence dans un couloir désertique passé dix-neuf heures (je compte sur toi pour embêter Stéphane avant de partir le soir). Je pense aussi à Henri PUGLIESE, réparateur artisan aguerri, répandant des douces mélodies au sein du couloir. À Gilles LEPAGE même s'il ne

nous a toujours pas ramené les lingots (et pourtant ils tombent des arbres à Puteaux). Au capitaine du navire du Cnam, l'unique Alexandre LESCAUT, affrontant vents et marées, armé de son seul rire tonitruant qui terrasse même le plus téméraire des étudiants. Je pense aussi aux petits doctorants et stagiaires du couloir : Vincent MARON, Axelle DE BRITO, Luthfi BAFANA, Rym BEN MAKTOUF, Antoine HOUDAYER, Arnaud LAZARE. Je pense aussi à tous les enseignants et le personnel du Cnam que j'ai croisé durant toutes ces années : Daniel PORUMBEL, Sourour ELLOUMI, Éric SOUTIL, Zacharie ALÈS, Marie-Christine COSTA, Safia KEDAD-SIDHOUM, Amélie LAMBERT, François BARTHÉLÉMY, Swathi RAJASELVAM, Konstantina KONTOULI, Nicole CHAOUAT, Viviane GAL, Meryem HARA, Joëlle DELACROIX.

Je souhaite finir ces remerciements par ma famille qui a toujours été là pour moi. Merci à mon père Claude et ma mère Jeanne qui m'ont toujours soutenu. Je remercie aussi mes frères Vincent et Vivien, ainsi que mes sœurs Tiphaine et Lydie.

Si j'ai oublié de vous remercier (ou pas autant que vous l'espérez) et que vous pensiez le mériter, alors n'hésitez pas à venir défendre votre cas auprès de moi. Selon la qualité de votre plaidoirie, je vous offrirai la boisson de votre choix¹.

1. Offre soumise à conditions non définies au préalable et à la tête du client.

Résumé

Cette thèse porte sur des problèmes et des questions de la théorie et de l'algorithmique des graphes. La première partie concerne l'étude de l'ensemble dominant minimum. Nous considérons son problème de décision et montrons que le nombre de domination peut être déterminé en temps polynomial dans la classe des graphes sans griffe et sans chemin induit de taille au plus huit. Ensuite, nous étudions les sommets à l'intersection de tous les ensembles dominants minimums d'un graphe. Nous montrons notamment que pour certaines classes de graphes, ces sommets sont toujours critiques relativement au nombre de domination. Nous finissons cette partie sur l'étude des arêtes critiques, *i.e.* les arêtes dont la suppression fait varier le nombre de domination. Nous montrons dans un premier temps une borne optimale sur la cardinalité minimum d'un ensemble d'arêtes critiques dans les graphes triangulés. Dans un second temps, nous montrons qu'il est difficile de décider si il existe une arête critique dans des sous-classes des graphes planaires.

La seconde partie porte sur des problèmes de partitionnement des sommets du graphe. Étant donné une partition des sommets, nous introduisons une mesure de satisfaction pour chaque sommet, qui est le rapport entre son nombre de voisins dans sa communauté et le nombre total de ses voisins. Nous posons ensuite le problème suivant : quel est le ratio maximum $\frac{a}{b}$ tel qu'un graphe possède une partition où chaque sommet a une satisfaction d'au moins $\frac{a}{b}$? Nous étudions les valeurs minimums que ce critère de satisfaction peut atteindre dans différentes classes de graphes. Nous montrons aussi que ce problème est lié au problème du couplage-disconnectant dans les graphes réguliers. Pour cette raison nous poursuivons cette thèse sur l'étude du problème du couplage parfait-disconnectant. Celui-ci consiste à décider si un graphe possède un couplage parfait qui contient une coupe. Nous montrons la complexité de ce problème, notamment dans des classes de graphes planaires ; de degré fixé ; bipartis ; de diamètre au plus d ; sans-griffe ; sans- P_5 .

Mots-clés : graphes, domination, persistance, bondage, partitionnement, couplage-disconnectant, NP-complétude, algorithmes polynomiaux

Abstract

This thesis relates to the study of some problems and questions arising from graph theory and algorithmic theory. The first part is devoted to the study of the minimum dominating set. We consider its decision problem and show that the domination number is computable in polynomial time for graphs with no induced claw and no induced path of length at most eight. Then, we focus on vertices at the intersection of every minimum dominating set of a graph. We show that for certain classes of graphs, these vertices are always critical relatively to the domination number. The first part ends with the study of critical edges, that is, edges whose removal increases the domination number. We show first an optimal bound on the minimum cardinality of a critical set of edges for chordal graphs. Then, we show that it is difficult to decide if there is a critical edge in subclasses of planar graphs. The last part deals with partitions of the vertices of a graph. Given a graph and a partition of its vertices, we introduce a satisfaction criteria for each vertex, which is the ratio between the number of its neighbors in its community and the total number of its neighbors. We consider the following problem : what is the maximum ratio $\frac{a}{b}$ such that a graph has a partition where each vertex has a satisfaction of at least $\frac{a}{b}$? We study lower bounds of this satisfaction criteria for some classes of graphs. We also show that this problem is related to the matching-cut problem in regular graphs. For this reason, we pursue this thesis with the study of the perfect matching-cut problem. It consists in deciding if a graph has a perfect matching that contains a cut. We give complexity results, notably in graph classes that are planar ; with fixed degree ; that are bipartite ; with a fixed diameter d ; that are claw-free ; that are P_5 -free.

Keywords : graphs, domination, persistency, bondage, partitions, matching-cut, NP-completeness, polynomial algorithms

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	7
Abstract	9
Plan du document	13
1 Préliminaires	15
1.1 Terminologie de graphe	15
1.2 Domination	21
1.3 Problèmes de décision et complexité	22
2 Complexité du dominant	25
2.1 Introduction	25
2.2 Graphes sans griffe et sans chemin de taille huit	28
2.2.1 Propriétés algorithmiques	28
2.2.2 Graphes avec des longs cycles induits	29
2.2.3 Graphes sans longs cycles induits	30
2.2.4 Graphes avec petits cycles induits	33
2.3 Conclusion	47
3 Sommets persistants et absents pour le dominant	49
3.1 Introduction	49
3.2 Caractérisation des sommets	50
3.3 Caractérisation des cores dans des classes de graphes	52
3.3.1 Graphes triangulés	53
3.3.2 Cographes	54
3.3.3 Graphes sans griffe	55
3.3.4 Graphes bipartis	60
3.4 Des partitions particulières des sommets	60
3.5 Conclusion	63
4 Arêtes critiques pour le dominant	65
4.1 Introduction	65
4.2 Borne sur le nombre de bondage des graphes triangulés	67

4.3	Complexité du problème de bondage	71
4.3.1	Préliminaires	71
4.3.2	Cores et anticores	72
4.3.3	Graphes planaires	76
4.3.4	Cas particuliers	90
4.3.5	Conclusion et perspectives	92
5	Partition sous contrainte de ratio de degré	93
5.1	Introduction	93
5.2	Définitions	94
5.3	Des bornes sur le ratio de degré optimal	95
5.4	Graphes réguliers	99
5.5	Produit de graphes	101
5.6	Conclusion	104
6	Couplage parfait-disconnectant	105
6.1	Introduction	105
6.2	Graphes bipartis et graphes de diamètre fixé	107
6.2.1	Cas difficiles	107
6.2.2	Cas polynomiaux	112
6.3	Graphes planaires	115
6.4	Graphes sans chemin de longueur cinq	127
6.5	Graphes sans griffe	129
6.6	Graphes de largeur d'arbre bornée	132
6.7	Conclusion	133
	Bibliographie	135

Plan du document

Chapitre 1 : Définitions

Ce chapitre contient les définitions et les notations de théorie des graphes nécessaires pour la lecture du document, ainsi que quelques notions de complexité.

Chapitre 2 : Complexité du dominant

Nous montrons qu'il existe un algorithme polynomial pour le problème de l'ensemble dominant minimum dans les graphes sans griffe et sans chemin induit de taille au plus huit.

Chapitre 3 : Sommets persistants et absents pour le dominant

Nous étudions les sommets qui n'appartiennent à aucun et à tous les ensembles dominants minimums d'un graphe. Nous caractérisons ces sommets en fonction de leur criticité relativement au nombre de domination. Cette criticité mesure comment le retrait d'un sommet du graphe affecte le nombre de domination. Nous étudions ensuite les sommets persistants dans quelques classes de graphes : les graphes triangulés, les cographes, ainsi que des sous-classes des graphes sans griffe. Pour ces graphes, nous montrons que les sommets persistants sont toujours critiques : c'est-à-dire que le retrait d'un sommet persistant fait augmenter le nombre de domination. Nous finissons par exposer certains graphes en réponse à des questions ouvertes de la littérature. Ces graphes ont des partitions particulières des sommets relativement à notre mesure de criticité, aux sommets absents, et aux sommets persistants.

Chapitre 4 : Arêtes critiques pour le dominant

Nous étudions ici une autre mesure de criticité relative au nombre de domination. Nous nous intéressons à la taille du plus petit ensemble d'arêtes dont le retrait du graphe fait augmenter le nombre de domination. Cette mesure est connue dans la littérature comme le nombre de bondage. Dans la première partie, nous étudions le nombre de bondage des graphes triangulés, qui sont les graphes n'ayant pas de cycle induit de longueur au moins quatre. Nous montrons pour ces graphes une borne supérieure optimale sur le nombre de bondage qui est exprimée en fonction de la taille de sa plus grande clique. Dans la deuxième et dernière partie, nous montrons que le problème de décision associé au nombre de bondage est NP-difficile dans des sous-classes des graphes planaires : les graphes planaires 3-réguliers, les graphes planaires sans griffe de degré maximum 3, et les graphes planaires bipartis de degré maximum 3 et de maille k , pour tout k fixé, où $k \geq 3$. Nous montrons ensuite qu'il est possible, pour les graphes planaires de maille au moins 8, de trouver un ensemble de trois arêtes critiques en temps polynomial. Nous finissons cette partie avec des classes de graphes pour lesquelles on peut calculer un ensemble dominant minimum en temps polynomial et où l'on peut aussi déterminer le nombre de bondage en temps polynomial.

Chapitre 5 : Partition sous contrainte de satisfaction minimum

Dans ce chapitre, nous étudions une mesure de satisfaction d'une partition des sommets d'un graphe. Cette mesure exprime pour chaque sommet le rapport entre le nombre de ses voisins dans son ensemble (relativement à la partition) et le nombre total de ses voisins (y compris lui même). Précédemment, une mesure de satisfaction similaire a déjà été étudié afin de déterminer si un graphe possède une partition où chaque sommet possède au moins la moitié de ses voisins dans son ensemble. Comme il existe des graphes ne possédant pas une telle partition, nous proposons la généralisation suivante : quelle est le ratio maximum $\frac{a}{b}$ tel qu'un graphe possède une partition où chaque sommet a une satisfaction d'au moins $\frac{a}{b}$? Ce problème introduit un paramètre mesurant la satisfaction optimale d'un graphe vis-à-vis de l'ensemble de ses partitions de sommets. Nous commençons par réutiliser des résultats de la littérature pour borner la valeur de cette satisfaction optimale, y compris dans certaines classes de graphes. Nous montrons ensuite que certaines petites valeurs de satisfaction optimale ne sont possibles que pour certains graphes. Ensuite, nous étudions la complexité du problème de décision associé à la détermination de ce paramètre. Nous montrons d'ailleurs que pour les graphes réguliers, ce problème intersecte celui du problème du couplage disconnectant. Ce problème consiste, étant donné un graphe, à décider si ce graphe possède un couplage dont la suppression disconnecte le graphe. Ceci nous permet d'obtenir d'autres résultats de complexité dans les graphes réguliers.

Chapitre 6 : Couplage parfait contenant une coupe

Ce chapitre est consacré à la complexité du problème de décision associé au couplage parfait disconnectant. Un couplage parfait-disconnectant est un couplage parfait contenant une coupe, c'est-à-dire que la suppression de ce couplage disconnecte le graphe. Le problème de décision associé est celui de savoir si un graphe possède un couplage parfait-disconnectant. Nous montrons que ce problème est NP-complet pour les graphes planaires de degré maximum quatre, pour les graphes planaires de maille cinq, pour les graphes bipartis 5-réguliers, pour les graphes de diamètre trois et pour les graphes bipartis de diamètre quatre. Nous montrons qu'il existe un algorithme polynomial pour les graphes sans griffe, les graphes sans P_5 , les graphes de diamètre deux, les graphes de diamètre trois, et les graphes de largeur arborescente bornée.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous donnons les définitions et les notations de la théorie des graphes qui seront nécessaires à la compréhension de ce document. Pour le lecteur qui serait intéressé par une plus large introduction à la théorie des graphes, nous conseillons le livre de Bondy [9] qui a inspiré ce préliminaire.

1.1 Terminologie de graphe

Nous définissons la notion de graphe non-orienté qui est utilisé dans cette thèse. Un graphe G est un couple (V, E) , où V est l'ensemble des *sommets* de G et E est l'ensemble des *arêtes* de G , *i.e.* $E \subseteq V \times V$. Les ensembles V et E d'un graphe G peuvent aussi être notés $V(G)$ et $E(G)$, respectivement. Par facilité, étant donné une arête $e = \{u, v\}$, on écrit uv . Une arête uv est dite *incidente* aux sommets u et v . Étant donné une arête uv de G , les sommets u et v sont dits *adjacents*, *connectés*, *liés*, *reliés*, ou *voisins* dans G , et u et v sont les *extrémités* de uv . Dans la même veine, lorsque uv n'est pas une arête de G , on dit que u et v sont *non-adjacents*, *non-connectés*, *non-liés*, *non-reliés*, ou *non-voisins* dans G , et que e est une *non-arête* de G . Une *boucle* est une arête ayant les mêmes extrémités. Si deux arêtes e et e' ont une même extrémité, alors on dit que e et e' sont *adjacentes*, et lorsque e et e' ont les deux mêmes extrémités, on dit que e et e' sont *parallèles*. Un *multigraphe* est un graphe ayant au moins une arête parallèle et peut posséder des boucles. Un graphe *simple* est un graphe sans boucle et sans arête parallèle. À partir de maintenant, les graphes considérés (lorsque cela n'est pas précisé) sont simples et avec un ensemble fini de sommets (et donc un ensemble fini d'arêtes). Le *degré* d'un sommet est son nombre de voisins. Une *feuille* est un sommet de degré un. Un sommet est *isolé* si il est de degré zéro. Un sommet est *universel* si il a pour voisin tous les autres sommets du graphe. Le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de G sont l'*ordre* et la *taille* de G , respectivement.

Notations

Nous regroupons ici les notations les plus fréquemment utilisées. Lorsque l'indice représentant un graphe G est remplacé par un ensemble de sommets $A \subseteq V(G)$, nous considérons dans ce cas le graphe induit par les sommets de A dans G , *i.e.* $G[A]$. Les indices de ces notations pourront être omis lorsque le contexte ne permettra aucune ambiguïté.

— $d_G(v)$ est le *degré* du sommet v dans G .

- $\delta(G)$ est le *degré minimum* d'un sommet de G .
- $\Delta(G)$ est le *degré maximum* d'un sommet de G .
- $N_G(v)$ est le *voisinage (ouvert)* du sommet v dans G .
- $N_G(U)$ est le *voisinage (ouvert)* de l'ensemble U dans G , i.e. $N_G(U) = \{N_G(u) \setminus U \mid u \in U\}$.
- $N_G[v]$ est le *voisinage fermé* du sommet v dans G , i.e. $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$.
- $N_G[U]$ est le *voisinage fermé* de l'ensemble U dans G , i.e. $N_G[U] = \{N_G[u] \mid u \in U\}$.
- $N_k(v) = \{u \mid \text{dist}(u, v) = k, u \in V\}$ désigne les sommets à distance k de v .
- $G \cong H$ ou $G = H$ si G est *isomorphe* à H .
- $G[H]$ est le *sous-graphe induit* par $H \subseteq V(G)$ dans G .
- $H \subseteq_i G$ signifie que H est un sous-graphe induit de G .
- $\overline{G} = (V, \overline{E})$ est le graphe *complémentaire* de $G = (V, E)$, i.e. pour tout $u, v \in V$: si $uv \in E$, alors $uv \notin \overline{E}$; si $uv \notin E$, alors $uv \in \overline{E}$.
- $G - u, G - U$ est le graphe $G(V \setminus \{u\}, E), G(V \setminus U, E)$, respectivement, où $u \in V$ et $U \subseteq V$.
- $G - a, G - A$ est le graphe $G(V, E \setminus \{a\}), G(V, E \setminus A)$, respectivement, où $a \in E$ et $A \subseteq E$.
- $\text{dist}_G(u, v)$ est la *distance* entre u et v dans G .
- $\text{diam}(G)$ est le *diamètre* de G .
- $g(H)$ est la *maille* de G , i.e. la longueur d'un plus petit cycle de H . Par convention $g(H) = +\infty$ quand H n'a pas de cycle.
- $\gamma(G)$ est le *nombre de domination* de G , i.e. la taille d'un *ensemble dominant minimum* de G .
- $\iota(G)$ est le *nombre de domination indépendant* de G , i.e. la taille d'un *ensemble dominant indépendant minimum* de G .
- $\tau(G)$ est la taille d'une *couverture de sommets minimum* de G .
- $\alpha(G)$ est la taille d'un *stable maximum* de G .
- $\omega(G)$ est la taille d'une *clique maximum* de G .
- $P_n = u_1 - \dots - u_n$ est le *chemin induit* à n sommets, c.f. Figure 1.2h
- $C_n = u_1 - \dots - u_n - u_1$ est le *cycle induit* à n sommets, c.f. Figure 1.2i.
- K_n est la *clique* à n sommets.
- $K_{n,m}$ est la *clique bipartie complet*.
- $K_{1,m}$ est l'*étoile (star)*, c.f. Figure 1.2f.
- $K_{1,3}$ est la *griffe (claw)*, c.f. Figure 1.2e.

Représentation et isomorphisme

Un graphe peut être dessiné dans le plan en plaçant les sommets sur des points et en reliant deux sommets par un trait si ils sont voisins. Un tel dessin est une représentation du graphe. La Figure 1.1 est un exemple de deux représentations d'un même graphe. Notons qu'un graphe peut aussi être dessiné sur d'autres surfaces comme le tore, mais ces représentations ne sont pas considérées dans cette thèse.

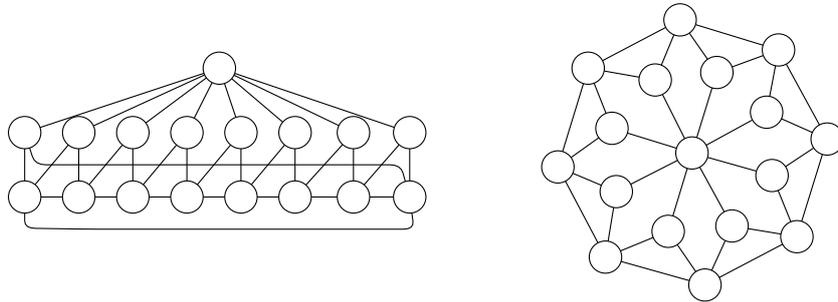


FIGURE 1.1 – Deux représentations d’un même graphe.

Deux graphes sont dits *isomorphes* si il est possible d’obtenir deux représentations identiques. Deux graphes isomorphes G et H sont considérés comme identiques, ce que nous notons $G = H$. Plus formellement les graphes G et H sont isomorphes si il existe deux bijections $f : V(G) \rightarrow V(H)$ et $g : E(G) \rightarrow E(H)$, telles que $uv \in E(G)$ si et seulement si $g(uv) \in E(H)$ et $g(uv) = f(u)f(v)$.

Sous-graphes

Soit G et H deux graphes. Si nous pouvons obtenir un graphe G' isomorphe à H par les seules opérations de suppression de sommets et d’arêtes de G , alors on dit que H est un *sous-graphe* de G . Lorsque H peut être obtenu par la seule opération de suppression de sommets, on dit que H est un *sous-graphe induit* de G . Quand H n’est pas un sous-graphe induit de G , on dit que G est *sans H* (H -free). Similairement, lorsque (H_1, \dots, H_p) ne sont pas des sous-graphes induits de G , on dit que G est *sans- (H_1, \dots, H_p)* (i.e. (H_1, \dots, H_p) -free).

Clique

Une *clique* est un ensemble de sommets où chaque paire distincte est reliée par une arête. La taille de la plus grande clique dans G est notée $\omega(G)$. Un graphe est dit *complet* si ses sommets forment une clique. Le graphe complet à n sommets est noté K_n . Soit A et B deux ensembles disjoints de sommets de G , on dit que A est *complet* à B (ou A et B sont complets deux à deux) si chaque sommet de A est voisin de tous les sommets de B . Similairement, A est dit *anti-complet* à B (ou A et B sont anti-complets deux à deux) si chaque sommet de A est non-voisin de tous les sommets de B .

Indépendant, coloration et couverture

Un *indépendant* ou *stable* est un ensemble de sommets tel que toute paire distincte n’est pas reliée par une arête. La taille du plus grand ensemble indépendant dans G est notée $\alpha(G)$. Nous pouvons remarquer qu’un ensemble indépendant d’un graphe G est une clique dans le graphe complémentaire \overline{G} . Ainsi $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$.

La notion de stable est fortement liée à la coloration de graphe. Une *k -coloration propre* d’un graphe $G = (V, E)$ est une fonction $c : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ telle que pour tout $uv \in E$, $c(u) \neq c(v)$. On dit qu’un graphe est *k -colorable* si il admet une k -coloration propre. Remarquons qu’une k -coloration d’un graphe est une partition des sommets en k ensembles de sommets indépendants. Le nombre minimum de couleurs afin de colorier G est appelé le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$.

Une *couverture de sommets* est un sous-ensemble S de sommets du graphe tel que chaque arête possède au moins une extrémité dans S . Pour chaque sommet $u \in S$, on dit que u *couvre* les arêtes qui lui sont incidentes et que celles-ci sont *couvertes* par u . La taille d'une couverture de sommets minimum est notée $\tau(G)$. Étant donné un graphe G et une couverture de sommets S , nous pouvons remarquer que $V(G) \setminus S$ forme un stable (autrement une arête n'est pas couverte par S). Donc pour tout graphe G , nous avons $\alpha(G) = |V(G)| - \tau(G)$.

Chemins

Un *chemin* est un graphe simple à n sommets tel qu'il existe un ordre des sommets $u_1 - u_2 - \dots - u_n$ où pour tout $i = 1, \dots, n-1$, $u_i u_{i+1}$ est une arête. Étant donné un chemin P , si $V(P) = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $E(P) = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, \dots, n-1\}$, alors P est un *chemin induit*. La *taille* d'un chemin P est son nombre de sommets $|V(P)|$. Un *chemin pair* est un chemin de taille pair. Un *chemin impair* est défini similairement. La *longueur* d'un chemin P est son nombre d'arêtes $|E(P)|$ qui est égal à $|V(P)| - 1$.

Opérations de graphes

La *subdivision* d'une arête uv de G supprime uv et ajoute un nouveau sommet x ($x \notin V(G)$), avec les arêtes ux, vx . La k -*subdivision* subdivise k fois une arête uv , *i.e.* uv est remplacé par un chemin induit de longueur $k+1$. Un graphe G' est une *subdivision* de G si il peut être obtenu depuis G par une séquence de subdivisions d'arêtes.

La *contraction* G/uv d'une arête uv de G supprime les sommets u, v de G et les remplace par un nouveau sommet x ($x \notin V(G)$) tel que x est relié aux précédents voisins de u et de v (sans introduire de boucle ou d'arête parallèle si le graphe avant contraction est simple), *i.e.* $N_{G/uv}(x) = N_G(u) \cup N_G(v)$.

Le *produit cartésien* $G \square H$ de deux graphes G et H est le graphe avec pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (g_1, h_1) et (g_2, h_2) sont adjacents dans $G \square H$ si $g_1 = g_2$ et $h_1 h_2$ est une arête dans H ; ou si $h_1 = h_2$ et $g_1 g_2$ est une arête de G . Pour un sommet v de G , le sous-graphe H_g de $G \square H$ induit par l'ensemble $\{(g, h) \mid h \in H\}$ est appelé une H -fibre. La G -fibre G_h est définie de façon analogue. Remarquons que toutes les G -fibres et les H -fibres sont isomorphiques à G et H , respectivement.

L'*union disjointe* (*disjoint union*) de $H = (S, A)$ et $G = (V, E)$, noté $H + G$, est le graphe $G' = (S \cup V, A \cup E)$. Notons que G' n'est pas connexe. L'*union* (*join*) de $H = (S, A)$ et $G = (V, E)$, noté $H \times G$, est le graphe composé d'une copie de G et de H où S est complet à V . Formellement $H \times G = (S \cup V, A \cup E \cup X)$ où $X = \{uv \mid \forall u \in S, \forall v \in V\}$.

Connexité

Un graphe est *connexe* si pour toute paire de sommets u, v , il existe un chemin entre u et v dans G . Un *sommet d'articulation* (*cut-vertex*) v est tel que G est connexe, mais $G - v$ n'est plus connexe. Similairement un ensemble de sommets $S \subseteq V(G)$ est *disconnectant* si $G - S$ n'est plus connexe. Un *pont* ou une *arête disconnectante* est une arête $e \in E(G)$ telle que G est connexe mais $G - e$ n'est plus connexe. Similairement un ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$ est *disconnectant* si $G - E'$ n'est plus connexe. Étant donné un entier positif $k > 1$, un graphe G est k -*connexe* si pour tout ensemble $S \subseteq V(G)$, où $|S| \leq k-1$, $G - S$ est connexe. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe induit H de G tel que H est connexe et d'ordre maximal.

Distance

La *distance* entre deux sommets u et v est la longueur d'un plus court chemin entre u et v si ils appartiennent à la même composante connexe, sinon $+\infty$. Remarquons qu'un plus court chemin est forcément un chemin induit. Le *diamètre* d'un graphe, noté $diam(G)$, est la distance maximale d'un plus court chemin entre deux sommets si le graphe est connexe, sinon $+\infty$. De manière générale, lorsque nous disons qu'un graphe G est de diamètre k , nous supposons que $diam(G) = k$.

Cycles

Un *cycle* est un graphe à n sommets tel qu'il existe un ordre des sommets $u_1 - u_2 - \dots - u_n - u_1$ où pour tout $i = 1, \dots, n$, $u_i u_{i+1}$ est une arête (nous considérons $u_{n+1} = u_1$). Étant donné un cycle C , si $V(C) = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $E(C) = \{u_i u_{i+1} \mid i = 1, \dots, n\}$, alors C est un *cycle induit*. La *taille* et la *longueur* d'un cycle sont le nombre de sommets et le nombre d'arêtes, respectivement. Notons que la taille est égale à sa longueur. Un *cycle pair* est un cycle avec un nombre pair de sommets. Un *cycle impair* est défini similairement. Un *cycle hamiltonien* est un sous-graphe de G qui est un cycle et tel que $V(G) = V(C)$.

Couplage

Un *couplage* d'un graphe G est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E(G)$ non-adjacentes. Un sommet u est dit *saturé* par $M \subseteq E(G)$ si il est une extrémité d'une arête de M . Lorsque tous les sommets de G sont saturés par un couplage M , nous disons que M est un *couplage parfait* de G . Un couplage M est *maximal* si toutes les arêtes de $E(G) \setminus M$ sont adjacentes à une arête de M . Un couplage est *maximum* si il n'existe pas de couplage de plus grande cardinalité dans G .

Coupe

Une *coupe* est une partition des sommets d'un graphe $G = (V, E)$ en deux ensembles non-vides (X, Y) . L'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans X et dans Y est noté $E(X, Y)$. Si G est connexe, alors $E(X, Y)$ est un ensemble d'arêtes non-vidé disconnectant le graphe. Pour cette raison $E(X, Y)$ est aussi appelé coupe de G quand le contexte n'est pas ambigu.

Classes de graphes

Un graphe est une *forêt* si il n'admet aucun cycle comme sous-graphe. On dit aussi qu'un tel graphe est *acyclique*. Un *arbre* est une forêt connexe. Il est connu qu'un arbre avec au moins deux sommets possède au moins deux feuilles. Comme un arbre ne possède pas de cycle, nous en déduisons que sa clique maximum est au plus 2. Un arbre est *enraciné* si un sommet r est spécifié comme étant la *racine*.

Un graphe est *biparti* si il admet une partition (A, B) de l'ensemble de ses sommets telle que A et B sont deux ensembles indépendants disjoints de G . Une telle partition (A, B) est appelée *bipartition* du graphe. Les graphes bipartis sont connus pour être précisément les graphes sans cycles impairs, *c.f.* [55]. Ils représentent aussi la classe des graphes 2-colorables. Un graphe $G = (A \cup B, E)$ est *biparti complet* si (A, B) est une bipartition et que A et B sont complets deux à deux.

Un *graphe scindé* ou *split graphe* G est un graphe qui admet une bipartition (K, I) de l'ensemble de ses sommets telle que les sommets de K induisent une clique dans G et les sommets de I induisent un stable dans G . Ces graphes ont la particularité d'être sans chemin induit de taille cinq ou plus. Plus précisément, S. Földes et P. Hammer [38] ont caractérisé les splits graphes en terme de sous-graphes induits interdits comme suit :

Théorème 1.1 (S. Földes et P. Hammer [38]) *Un graphe est un split graphe si et seulement si il est sans- $(2K_2, C_4, C_5)$.*

Un graphe est *triangulé* (*chordal* ou *triangulated*) si chaque cycle induit est de longueur au plus trois. Dit autrement, les sous-graphes qui sont des cycles de longueur au moins quatre possèdent une arête qui n'est pas dans le cycle, aussi appelée *corde*. Les graphes triangulés peuvent être vus comme une généralisation des arbres où de petits cycles induits sont autorisés (C_3). Nous pouvons remarquer qu'un graphe triangulé est biparti si et seulement si c'est un arbre.

Un graphe est *fortement triangulé* si il est triangulé et que tous ces cycles pairs de longueur au moins six ont une corde reliant deux sommets à distance impaire dans le cycle.

Un *graphe d'intervalles* est le graphe d'intersection d'un ensemble d'intervalles de la droite réelle. Chaque sommet du graphe représente un intervalle et deux sommets sont reliés si leurs intervalles correspondants s'intersectent. Il est facile de montrer que les graphes d'intervalles ne possèdent pas de cycle de longueur au moins quatre ne contenant pas de corde. Ainsi les graphes d'intervalles appartiennent à la classe des graphes triangulés.

Un graphe est *planaire* si il existe une représentation de celui-ci dans le plan telle qu'aucune arête ne se croise en dehors des extrémités. Nous rappelons le résultat suivant :

Théorème 1.2 (C. Kuratowski [54]) *Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de sous-graphe qui est la subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.*

Un graphe est *planaire extérieur* si il existe une représentation planaire telle que les sommets sont tous sur la face extérieure.

Le *line graphe* $L(G) = (E, A)$ du graphe $G = (V, E)$ a pour sommets E et deux sommets de $L(G)$ sont reliés si leurs arêtes correspondantes dans G sont adjacentes, *i.e.* pour tout $x, y \in E$, $xy \in A$ si et seulement si $x \cap y \neq \emptyset$. Notons que le terme line graphe a été préféré aux termes *graphe adjoint* ou *graphe des arêtes* qui sont peu usités. Précisons que les line graphes sont connus pour être une sous-classe des graphes sans griffe.

Un graphe $G = (V, E)$ est *k-régulier* si tous les sommets sont de degré k , *i.e.* pour tout $u \in V$, $d(u) = k$. Pour faire court on dit que ces graphes sont *réguliers*. Le graphe *cubique* est le graphe 3-régulier et les graphes sous-cubiques sont les graphes de degré maximum trois, *i.e.* on s'autorise les sommets de degré un, deux, ou trois.

Soit \mathcal{C} une classe de graphes. On dit que \mathcal{C} est close par suppression d'arêtes si pour tout graphe $G \in \mathcal{C}$, nous avons $G - A \in \mathcal{C}$, pour tout $A \subseteq E(G)$. Similairement, \mathcal{C} est close par la suppression de sommets si pour tout graphe $G \in \mathcal{C}$, nous avons $G - S \in \mathcal{C}$, pour tout $S \subseteq V(G)$. Par exemple la classe des graphes sans griffe (*c.f.* 1.2e) est close par suppression de sommets mais pas par suppression d'arêtes.

Pour une liste plus exhaustive et plus détaillée des classes de graphes avec leurs propriétés, nous renvoyons le lecteur au livre de Brandstädt, V. Le et J. Spinrad [20].

Des graphes notables

Voici une liste de graphes que nous serons amenés à rencontrer fréquemment tout au long de cette thèse.

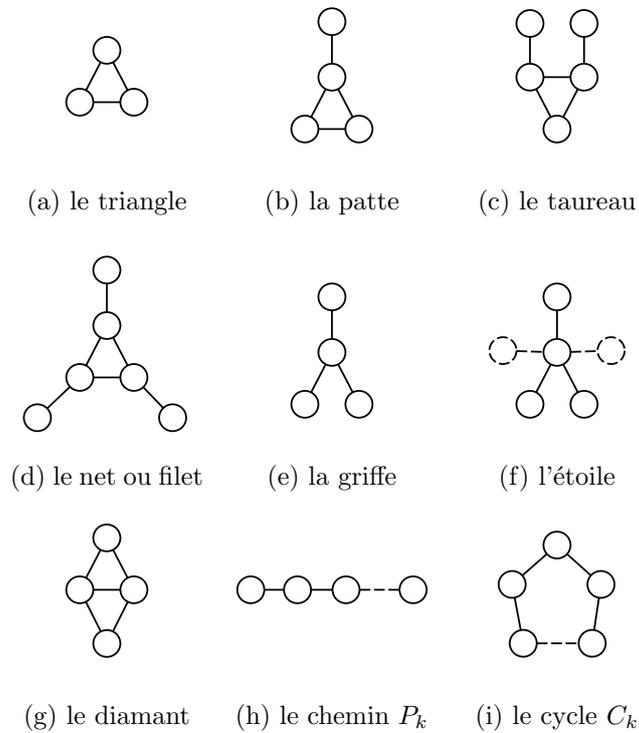


FIGURE 1.2 – Quelques graphes particuliers.

1.2 Domination

Nous introduisons la notion de dominant. Un *ensemble dominant* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-ensemble $S \subseteq V$ tel que chaque sommet $v \in V \setminus S$ a un voisin dans S . Pour faire court, un ensemble dominant est aussi appelé *dominant* quand le contexte ne permet aucune ambiguïté. Les sommets de S sont des *sommets dominants*. Étant donné un ensemble $S \subseteq V$, un sommet $u \in V$ est dit *dominé* si il a un voisin dans S , et S est un dominant du sous-graphe induit par les sommets de $N[S]$. Donc $S \subseteq V$ est un dominant de G si tout sommet de $V \setminus S$ est dominé ou $V = S$.

Nous pouvons observer que tout graphe possède un dominant puisque l'ensemble des sommets d'un graphe est un dominant de celui-ci. Il est donc naturel de se poser la question suivante : quelle est la cardinalité d'un ensemble dominant minimum d'un graphe ? La cardinalité d'un tel dominant pour un graphe G est appelé *nombre de domination* et est noté $\gamma(G)$. La Figure 1.3 est un exemple de dominant minimum d'un graphe.

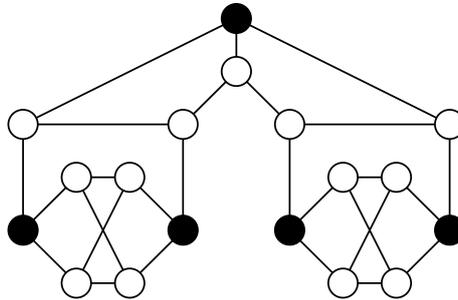


FIGURE 1.3 – Les sommets noirs forment un dominant minimum du graphe.

O. Ore [66] a montré des conditions nécessaires et suffisantes d'un dominant minimal (au sens de l'inclusion). Notons qu'un dominant minimum est un dominant minimal. Nous avons choisi de réécrire l'énoncé de son théorème pour exprimer des conditions nécessaires, mais non-suffisantes, d'un dominant minimum (et non minimal), comme suit :

Théorème 1.3 (O. Ore [66]) *Si S est un dominant minimum, alors pour tout sommet $v \in S$:*

- (a) *v n'est voisin d'aucun sommet de S ; ou*
- (b) *il existe un sommet $u \in V \setminus S$ tel que $N(u) \cap S = \{v\}$.*

Étant donné un sous-ensemble de sommets S de G , si un sommet u est tel que décrit au point (b) (*i.e.* $N(u) \cap S = \{v\}$), alors on dit que u est un *voisin privé* de v relativement à S . On désigne par $pn[v, S]$ l'ensemble des voisins privés de v par rapport à S , *i.e.* $pn[v, S] = \{u \mid N[u] \cap S = \{v\}\}$. Donc pour tout ensemble dominant minimum S de G , et pour tout sommet $v \in S$, nous avons $pn[v, S] \neq \emptyset$.

Des variantes de l'ensemble dominant ont été étudiées. Il s'agit essentiellement de rajouter des contraintes sur l'ensemble dominant, par exemple : l'ensemble dominant doit former un stable, le sous-graphe induit par l'ensemble dominant doit être connexe, l'ensemble dominant doit dominer tous les sommets du graphe (*i.e.* les sommets dominants doivent aussi être dominés), chaque sommet doit être dominé par exactement un sommet dans l'ensemble dominant.

Pour une vue plus générale de la domination et de ses variantes, nous référons aux livres de T. Haynes, S. Hedetniemi, et P. Slater [45], [46].

1.3 Problèmes de décision et complexité

Nous ne donnerons pas ici les définitions précises et techniques de la théorie de la complexité. Nous référons au livre de M. Garey et D. Johnson [42], au livre de S. Arora et B. Barak [3] pour une version plus modernisée, ainsi qu'à la thèse de B. Escoffier [32] qui contient une introduction riche (en français) sur la théorie de la complexité.

Dans cette thèse, nous serons principalement intéressés par des problèmes de décision, *i.e.* des problèmes pour lesquels la réponse est soit « oui », soit « non ». La classe NP regroupe l'ensemble des problèmes de décision pour lesquels il existe un algorithme pouvant s'exécuter en temps polynomial (*certificat*) afin de vérifier si une solution donnée est une réponse positive au problème. La classe P regroupe l'ensemble des problèmes qui peuvent être résolus systématiquement, *i.e.* peu importe l'instance (*c.à.d.* les données ou les entrées) du problème, par un algorithme déterministe en temps

polynomial. Remarquons que si un problème appartient à P , alors il appartient aussi à NP . Malheureusement, il existe des problèmes de décision pour lesquels on ne connaît pas d'algorithme ayant un temps d'exécution polynomial (algorithme polynomial). C'est d'ailleurs le cas du problème suivant :

SATISFIABILITÉ (SAT)

Étant donné : une formule booléenne f .
Décider : est-ce que f est satisfiable ?

Expliquons d'abord ce qu'est une formule booléenne. Une variable booléenne peut prendre soit comme valeur '0', 'fausse', ou 'négative', soit comme valeur '1', 'vraie', ou 'positive'. Une formule booléenne est une combinaison de variables booléennes avec les opérateurs 'non', 'ou', 'et'. Une formule est *satisfiable* si il existe une affectation des variables pour laquelle la formule est 'vraie'. Le problème SAT pose donc la question de savoir si une formule booléenne donnée est *satisfiable* ou non. Notons qu'il existe un algorithme polynomial afin de vérifier si une affectation des variables satisfait une formule donnée, et que donc SAT est dans NP . Il est donc naturel de se poser la question suivante : existe-t-il un algorithme polynomial afin de résoudre SAT, dit autrement, est-ce que SAT est dans P ? Même si on ne connaît toujours pas la réponse à cette question, il est conjecturé que SAT fait partie de ses problèmes dans NP dont on pense qu'ils sont « difficiles » à résoudre. Par cela, on veut dire qu'il existe des problèmes dans NP dont on pense qu'ils ne peuvent être résolus en temps polynomial avec un algorithme déterministe. Ces problèmes sont considérés comme étant les plus « difficiles » de la classe NP . La classe NP -complet regroupe l'ensemble de ces problèmes, et SAT a été le premier problème dont on a démontré qu'il était NP -complet, *c.f.* S. Cook [27] et L. Levin [59].

Pour montrer qu'un problème est dans P , il *suffit* de donner un algorithme polynomial afin de le résoudre. Qu'en est-il pour montrer qu'un problème Π est NP -complet ? La classe NP -complet a été définie comme la classe regroupant les problèmes les plus difficiles à résoudre de la classe NP . Il faut donc montrer qu'il existe un algorithme polynomial pour vérifier qu'une solution donnée apporte une réponse positive au problème Π . Il faut aussi montrer que Π est au moins aussi difficile, en pire cas, que les problèmes NP -complets. Pour cela, on peut faire appel au concept de *réduction polynomiale*. Étant donné deux problèmes \mathcal{P} et \mathcal{P}' , on dit que \mathcal{P} se réduit en temps polynomial vers \mathcal{P}' si il existe un algorithme polynomial qui transforme toute instance I de \mathcal{P} en une instance I' de \mathcal{P}' , et que les solutions de I et I' sont équivalentes. Observons que si \mathcal{P} peut être résolu en temps polynomial, alors \mathcal{P}' également. La preuve du Théorème 2.1 au Chapitre 2 est un exemple « simple » de réduction polynomiale.

Dans cette thèse, tous les problèmes de décision que nous étudions n'appartiennent sans doute pas à la classe NP . Néanmoins, nous montrerons que ces problèmes admettent une réduction polynomiale depuis des problèmes NP -complets. Ces problèmes sont donc considérés comme au moins aussi difficiles et appartiennent à la classe des problèmes NP -difficiles.

Nous finissons cette section en donnant deux problèmes de graphes notables qui sont NP -complets, et qui nous seront utiles dans cette thèse.

STABLE MAXIMUM (MAXIMUM INDEPENDENT SET)

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif k .
Décider : y a-t-il $I \subseteq V$, $|I| \geq k$, tel que I est un ensemble stable de G ?

Nous avons précédemment remarqués qu'étant donné un stable maximum S d'un graphe G , l'ensemble des sommets qui ne sont pas dans le stable, *i.e.* $V(G) \setminus S$ forme une couverture de sommets. Ainsi STABLE MAXIMUM est lié au problème de COUVERTURE DE SOMMETS énoncé ci-dessous.

COUVERTURE DE SOMMETS (VERTEX COVER)

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif k .

Décider : y a-t-il $C \subseteq V$, $|C| \leq k$, tel que toute arête de G a une extrémité dans C ?

COUVERTURE DE SOMMETS a été montré comme étant NP-complet avec une réduction depuis 3-SAT (une variante de SAT), *c.f.* [42]. Comme la taille d'un stable maximum est étroitement liée à la taille d'une couverture de sommets, nous pouvons en déduire que STABLE MAXIMUM est aussi NP-complet.

Chapitre 2

Complexité du dominant

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail commun avec Christophe Picouleau, *c.f.* [19].

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les deux problèmes suivants : DOMINANT MINIMUM ainsi que sa variante DOMINANT INDÉPENDANT MINIMUM. Nous montrons que DOMINANT MINIMUM et DOMINANT INDÉPENDANT MINIMUM peuvent être résolus en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans chemin induit de taille au plus huit.

Précédemment, nous avons défini $\gamma(G)$ comme la cardinalité d'un plus petit ensemble dominant d'un graphe G . Déterminer la valeur de $\gamma(G)$ est associé au problème de décision suivant :

DOMINANT MINIMUM (MINIMUM DOMINATING SET)

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $k \geq 1$.

Décider : y a-t-il $S \subseteq V$, où $|S| \leq k$, tel que tout sommet de $V \setminus S$ a un voisin dans S ?

D. Johnson est le premier à avoir montré que DOMINANT MINIMUM est NP-complet en donnant une transformation depuis COUVERTURE DE SOMMETS. Nous avons choisi de remonter ici que DOMINANT MINIMUM est NP-complet dans les splits graphes puisque ces graphes ont la particularité d'être sans chemin induit de taille cinq ou plus. Cette preuve est quasiment identique à celle de A. Bertossi [8] qui donne une réduction depuis le problème de couverture d'ensembles minimum. Pour rappel, les splits graphes sont les graphes qui ont une partition des sommets en une clique et un ensemble indépendant.

Théorème 2.1 (M. Garey et D. Johnson [42]) DOMINANT MINIMUM est NP-complet dans les splits graphes.

Preuve: Soit $U = \{u_1, \dots, u_n\}$ et $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ une instance de 3-SAT. Nous réduisons cette instance en temps polynomial à une instance de DOMINATION MINIMUM où le graphe est un split.

Nous construisons le graphe $G = (V, E)$. Pour chaque variable $u_i \in U$, $i = 1, \dots, n$, nous créons un triangle associé $T_i = \{u_i, \bar{u}_i, v_i\}$, où u_i représente le littéral positif et \bar{u}_i représente le littéral négatif.

Pour chaque clause $C_j = \{c_x, c_y, c_z\}$, $j = 1, \dots, m$, nous créons un sommet c_j , et ajoutons les arêtes $c_j u_x, c_j u_y, c_j u_z$. Enfin nous ajoutons toutes les arêtes possibles entre les sommets de $\bigcup_{i=1}^n \{u_i, \bar{u}_i\}$, afin qu'ils induisent une clique K de taille $2n$. La Figure 2.1 est une représentation du graphe construit. Puisque K est une clique et que $V \setminus K$ est un ensemble indépendant, alors nous en déduisons que G est un split graphe.

Nous montrons que C est satisfiable si et seulement si $\gamma(G) \leq n$.

Supposons que C soit satisfiable. Nous construisons un ensemble dominant S depuis une assignation des variables satisfaisant C . Si une variable u_i est assignée à vrai, alors $S \leftarrow u_i$. Si une variable u_i est assignée à faux, alors $S \leftarrow \bar{u}_i$. Remarquons que S domine l'ensemble des sommets c_j , $j = 1, \dots, m$, associés aux clauses. De plus, chaque triangle T_i intersecte S . Donc S est un dominant de G et $\gamma(G) \leq n$.

Supposons maintenant que C ne soit pas satisfiable. Nous supposons, par contradiction, que $\gamma(G) \leq n$. Soit S un dominant de G tel que $|S| \leq n$. Puisque les sommets v_i , $i = 1, \dots, n$, forment un ensemble indépendant, et que l'intersection de leur voisinage est vide, alors nous devons prendre au minimum n sommets du graphe afin de les dominer (un sommet par triangle T_i). Donc pour chaque triangle T_i , nous avons $|T_i \cap S| = 1$. Nous en déduisons que $S \cap \bigcup_{j=1}^m \{c_j\} = \emptyset$. Nous construisons maintenant une assignation des variables de U . Pour chaque triangle T_i : si $u_i \in S$, alors nous assignons u_i à vrai, et si $\bar{u}_i \in S$, alors nous assignons u_i à faux. Donc nous avons construit une assignation des variables satisfaisant C , une contradiction. \square

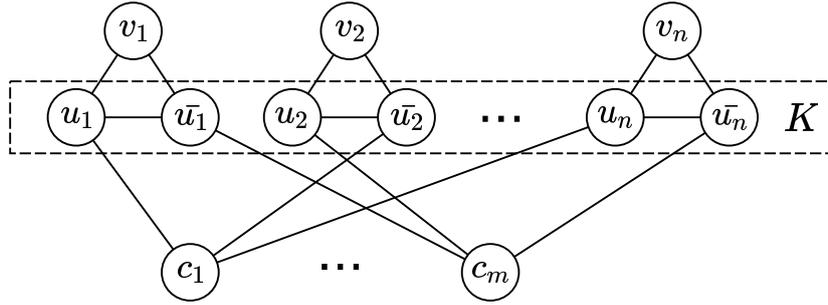


FIGURE 2.1 – Le split graphe construit depuis une instance $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, $C = \{C_1, \dots, C_m\}$ de 3-SAT.

Comme DOMINANT MINIMUM est NP-complet, il est intéressant d'identifier les classes de graphes pour lesquelles ce problème peut être résolu en temps polynomial, et celles pour lesquelles ce problème a été montré NP-complet. Voici un bref récapitulatif de ce qui est connu sur la complexité de DOMINANT MINIMUM pour certaines classes de graphes significatives.

Classe de graphes	Complexité	source
Arbre	P	[26]
Biparti	NP-complet	[8]
Cographe	P	[35]
Cubique	NP-complet	[42]
Diamètre 2	NP-complet	[60]
Fortement triangulé	P	[34]
Largeur arborescente bornée	P	[2]
Line	NP-complet	[78]
Maille k	NP-complet	[79]
Planaire	NP-complet	[42] p. 190
Planaire extérieur	P	\subseteq largeur arborescente bornée
Sans griffe	NP-complet	line \subseteq sans griffe
Sans P_5	NP-complet	split \subseteq sans P_5
Split	NP-complet	[8]
Triangulé	NP-complet	[12]

Notons que certains résultats sur la complexité de DOMINANT MINIMUM dans le livre de M. Garey et D. Johnson [42] sont erronés ou manquants. C'est notamment le cas pour les graphes cubiques. Une mise à jour est disponible dans la section UPDATE de [42] (*c.f.* dernière page).

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la complexité de DOMINANT MINIMUM dans la classe des graphes sans griffe. La classe des graphes sans griffe est particulière pour DOMINANT MINIMUM puisque pour ces graphes, le problème est étroitement lié au problème de décision associé à la cardinalité minimum d'un ensemble dominant indépendant. Un *ensemble dominant indépendant* est un ensemble dominant qui est à la fois un dominant et un ensemble stable. On note comme $\iota(G)$ la cardinalité minimum d'un tel ensemble. Nous définissons le problème de décision comme suit :

DOMINANT INDÉPENDANT MINIMUM (MINIMUM INDEPENDENT DOMINATING SET)

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $k \geq 1$.

Décider : y a-t-il un stable $S \subseteq V$, où $|S| \leq k$, tel que tout sommet de $V \setminus S$ a un voisin dans S ?

R. Allan et R. Laskar [1] ont montré que pour tout graphe sans griffe G , nous avons $\iota(G) = \gamma(G)$. Nous en déduisons que les réponses aux problèmes DOMINANT MINIMUM et DOMINANT INDÉPENDANT MINIMUM sont identiques dans la classe des graphes sans griffe. Nous pourrions par ailleurs souhaiter identifier les classes de graphes pour lesquelles ces deux problèmes sont identiques. À cette fin, D. Sumner et J. Moore dans [73] ont défini un graphe G comme étant *domination parfait* si $\iota(H) = \gamma(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G . Comme tout sous-graphe induit d'un graphe sans griffe est aussi sans griffe, il s'ensuit que les graphes sans griffe sont dominations parfaits. I. Zverovich et V. Zverovich [79] ont proposé une caractérisation des graphes dominations parfaits en termes de 17 sous-graphes induits interdits. E. Camby et F. Plein ont relevé des erreurs dans la preuve de cette caractérisation et ont proposé une caractérisation des graphes dominations parfaits en 8 sous-graphes induits interdits, *c.f.* [22].

L'étude de la complexité de DOMINANT MINIMUM (et donc de DOMINANT INDÉPENDANT MINIMUM) dans la classe des graphes dominations parfaits nous semble intéressante. Nous avons choisi

d'étudier cette complexité pour des classes restreintes de la classe des graphes sans griffe. Voici un bref récapitulatif des résultats connus pour cette classe.

Classes de graphes sans griffe et	Complexité	source
Biparti	P	\subseteq sans net
Line graphe	NP-complet	[78]
Sans diamant	P	[42] p. 190
Sans net	P	[42] p. 190
Sans papillon	P	[8]
Sans P_5	P	[62]
Sans triangle	P	\subseteq sans net
Triangulé	P	[8]

M. Yannakakis et F. Gavril [78] ont montré en 1980 que DOMINANT MINIMUM reste NP-complet dans les graphes sans griffe. En 1984, A. Bertossi [8] a montré que DOMINANT MINIMUM est aussi NP-complet dans les splits graphes, une sous-classe des graphes sans P_5 . Plus récemment, en 2016, D. Malyshev [62] a montré que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans $K_{1,4}$ et sans P_5 , et donc aussi dans les graphes sans griffe et sans P_5 . À notre connaissance, la complexité de DOMINANT MINIMUM reste inconnue pour les graphes sans griffe et sans P_k pour toutes valeurs de k fixées où $k \geq 6$. Nous pensons que cela motive l'étude de la complexité de DOMINANT MINIMUM dans les graphes sans griffe et sans chemin de taille huit qui est faite dans la prochaine section.

2.2 Graphes sans griffe et sans chemin de taille huit

Nous montrons dans cette section que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_8 .

Important : cette section est l'unique passage de la thèse où la définition du voisinage ouvert d'un ensemble de sommets est légèrement altérée. Étant donné un ensemble de sommets $A \subseteq V$, nous désignons le voisinage ouvert de A comme $N_G(A) = \bigcup_{v \in A} N_G(v)$. Ainsi le voisinage ouvert de A peut contenir des sommets de A , mais pas nécessairement tous comme avec le voisinage fermé.

2.2.1 Propriétés algorithmiques

Nous donnons deux propriétés qui nous permettent de simplifier les graphes sans griffe et sans P_k , pour n'importe quel k fixé, à considérer afin de résoudre DOMINANT MINIMUM.

Propriété 2.2 *Soit G un graphe. Si u, v sont deux sommets tels que $N[u] = N[v]$, alors $\gamma(G) = \gamma(G/uv)$.*

Preuve: Soit u' le sommet de G/uv résultant de la contraction de uv . Soit Γ un ensemble dominant minimum de G . Si $u, v \in \Gamma$, alors $\Gamma \setminus \{v\}$ est un autre dominant de G , une contradiction. Si $u \in \Gamma$, alors nous prenons $\Gamma' = (\Gamma \setminus \{u\}) \cup \{u'\}$. Si $u, v \notin \Gamma$, alors nous prenons $\Gamma' = \Gamma$. Dans les deux cas, Γ' est un dominant de G/uv , et donc $\gamma(G) = |\Gamma'| \geq \gamma(G/uv)$. Maintenant supposons que $\gamma(G) > \gamma(G/uv)$. Soit Γ' un ensemble dominant minimum de G/uv . Si $u' \in \Gamma'$, alors $(\Gamma' \setminus \{u'\}) \cup \{u\}$ est un dominant de G

tel que $|(\Gamma' \setminus \{u'\}) \cup \{u\}| = \gamma(G/uv) < \gamma(G)$, une contradiction. Si $u' \notin \Gamma'$, alors Γ' est un dominant de G , une contradiction. Donc $\gamma(G) = \gamma(G/uv)$. \square

Propriété 2.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans griffe tel que $\delta(G) = 1$. Soit u une feuille et v son voisin. Alors il existe Γ un ensemble dominant minimum de G tel que $\Gamma = \{v\} \cup \Gamma'$, où Γ' est un ensemble dominant minimum de $G' = G - N[v]$.*

Preuve: Puisque u est une feuille, il existe Γ un ensemble dominant minimum de G où $v \in \Gamma$. Soit $w \in N(v) \setminus \{u\}$. Puisque G est sans griffe, alors $N(w) \setminus N[v]$ est une clique. Nous pouvons supposer que $w \notin \Gamma$, car nous pourrions remplacer w par $w' \in N(w) \setminus N[v]$ afin d'obtenir un autre ensemble dominant minimum de G (notons que si $N(w) \setminus N[v]$ est vide, alors Γ ne peut être un ensemble dominant minimum). Nous montrons que $\Gamma' = \Gamma \setminus N[v]$ est un ensemble dominant minimum de $G' = G - N[v]$. Clairement Γ' est un dominant de G' . Si il existe S un ensemble dominant minimum de G' tel que $|S| < |\Gamma'|$, alors $S \cup \{v\}$ est un dominant de G où $|S \cup \{v\}| < |\Gamma|$, une contradiction. \square

En conséquence de la propriété précédente, si un ensemble dominant minimum de $G' = G - N[v]$ peut être calculé en temps polynomial, alors un ensemble dominant minimum de G peut aussi être calculé en temps polynomial.

Nous observons que si un graphe possède des structures dominantes de taille fixée, alors nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum en temps polynomial dans ce graphe.

Propriété 2.4 *Soit $k > 0$ un entier positif fixé et un graphe $G = (V, E)$. Si il existe $T \subseteq V$, où $|T| \leq k$ et $V = N[T]$, alors on peut calculer un ensemble dominant minimum dans G en temps polynomial.*

Preuve: Puisque $\gamma(G) \leq k + k'$, alors nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum en $O(n^k)$. \square

Propriété 2.5 *Soit $k, k' > 0$ deux entiers positifs fixés et $G = (V, E)$ un graphe. Si il existe $T \subset V$, où $|T| \leq k$ et $W = V \setminus N[T]$ tel que $|W| \leq k'$, alors on peut calculer un ensemble dominant minimum dans G en temps polynomial.*

Preuve: Puisque $\gamma(G) \leq k$, alors nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum en $O(n^{k+k'})$. \square

2.2.2 Graphes avec des longs cycles induits

Nous donnons deux lemmes qui nous permettent de conclure que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_k , $k \leq 8$, lorsqu'ils contiennent un long cycle induit.

Lemme 2.6 *Pour tout entier fixé $k \geq 6$, si G est un graphe connexe sans griffe et sans P_k tel que $C_k \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: Soit $C_k = v_1 - \dots - v_k - v_1$, $C_k \subseteq_i G$. Soit $v \notin V(C_k)$ tel que $N(v) \cap V(C_k) \neq \emptyset$. Puisque G est sans griffe et que $k \geq 6$, nous avons $2 \leq |N(v) \cap V(C_k)| \leq 4$. Si $|N(v) \cap V(C_k)| = 2$, alors les deux voisins de v dans C_k doivent être consécutifs, et donc $P_k \subseteq_i G$, une contradiction. Pour $3 \leq |N(v) \cap V(C_k)| \leq 4$, soit w un voisin de v . Si $N(w) \cap V(C_k) = \emptyset$, alors il y a une griffe induite centrée sur v , une contradiction. Donc tous les voisins de v ont un voisin dans C_k , et donc $N[C_k] = V$. D'après la Propriété 2.4, nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial. \square

Lemme 2.7 *Pour tout entier fixé $k \geq 6$, si G est un graphe connexe sans griffe, sans P_k et sans C_k tel que $C_{k-1} \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: Soit $C_{k-1} = v_1 - \dots - v_{k-1} - v_1$, $C_{k-1} \subseteq_i G$, et $v \notin V(C_{k-1})$ tel que $N(v) \cap V(C_{k-1}) \neq \emptyset$. Si $k \geq 7$, alors $2 \leq |N(v) \cap V(C_{k-1})| \leq 4$; si $k = 6$, alors $2 \leq |N(v) \cap V(C_{k-1})| \leq 5$. Soit w un voisin de v tel que $N(w) \cap V(C_{k-1}) = \emptyset$. Si $3 \leq |N(v) \cap V(C_{k-1})| \leq 5$, alors il y a une griffe induite centrée sur v , une contradiction. Si $|N(v) \cap V(C_{k-1})| = 2$, alors il y a $P_k \subseteq_i G$, une contradiction. Donc $N[C_{k-1}] = V$ et d'après la Propriété 2.4, nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial. \square

2.2.3 Graphes sans longs cycles induits

Dans cette section, nous montrons que, pour tout entier positif fixé $k \leq 8$, si G est un graphe sans (griffe, P_k, C_k, C_{k-1}), tel que $C_{k-2} \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial. Le premier lemme donne une propriété structurelle de G . Nous utilisons cette propriété pour montrer deux autres lemmes, le premier étant pour $k = 6$, et le second pour $7 \leq k \leq 8$.

Lemme 2.8 *Pour tout entier positif fixé $k \geq 6$, si G est un graphe connexe sans (griffe, P_k, C_k, C_{k-1}) tel que $C_{k-2} \subseteq_i G$, alors $W = V \setminus N[V(C_{k-2})]$ est un ensemble indépendant de G .*

Preuve: Soit $C = C_{k-2} = v_1 - \dots - v_{k-2} - v_1$, où $C \subseteq_i G$, et soit $v \in N[V(C)] \setminus V(C)$. Nous avons $2 \leq |N_C(v)| \leq 5$ (notons que $|N_C(v)| = 5$ seulement si $C = C_5$). Soit $W = V \setminus N[V(C)]$, et soit $w \in W$ un voisin de v . Si $3 \leq |N_C(v)| \leq 5$, alors il y a une griffe, une contradiction. Donc v est tel que $N_C(v) = \{v_i, v_{i+1}\}$, pour $1 \leq i \leq k-2$ (par abus de notation, quand $i = k-2$ nous supposons que $v_{i+1} = v_1$). D'après la Propriété 2.2, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés. De plus, d'après la Propriété 2.3, nous pouvons supposer que G n'a pas de feuille.

Supposons, par contradiction, que w ait un voisin w' , où $w' \in W$. Si w' n'a pas de voisin dans $N(V(C))$, alors il y a $P_k \subseteq_i G$, une contradiction. Donc w' a un voisin dans $N(V(C))$. Rappelons que $N[w] \neq N[w']$. Si $vw' \notin E$, alors il y a $P_k \subseteq_i G$, une contradiction. Donc w et w' ont les mêmes voisins dans $N(V(C))$ mais pas dans W . Donc il existe $r \in W$ tel que $rw \in E, rw' \notin E$. Les arguments précédents impliquent que $rv \in E$. Mais $G[\{r, v, v_i, w'\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc, $W = V \setminus N[V(C_{k-2})]$ est un ensemble indépendant de G . \square

Lemme 2.9 *Si G est un graphe connexe sans (griffe, P_6, C_6, C_5) tel que $C_4 \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: Soit $C = C_4 = v_1 - \dots - v_4 - v_1$, où $C \subseteq_i G$, et soit $v \notin V(C)$ tel que $N(v) \cap V(C) \neq \emptyset$. Nous avons $2 \leq |N_C(v)| \leq 4$. Soit $W = V \setminus N[C]$, et soit $w \in W$ un voisin de v . Si $3 \leq |N_C(v)| \leq 4$, alors G possède une griffe, une contradiction. Donc $N_C(v) = \{v_i, v_{i+1}\}$, pour $1 \leq i \leq 4$ (par abus de notation, quand $i = 4$ nous supposons que $v_{i+1} = v_1$). D'après la Propriété 2.2, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés. De plus, d'après la Propriété 2.3, nous pouvons supposer que G n'a pas de feuille.

D'après la Propriété 2.5, si $|W| \leq 1$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial. Donc nous pouvons supposer que $|W| \geq 2$. D'après le Lemme 2.8, W est un ensemble indépendant de G . Nous montrons que tous les sommets $v \in N[W] \setminus W$ ont exactement le même voisinage dans C .

Soit $w, w' \in W$, $w \neq w'$, tels que w a un voisin $v \in N[C] \setminus V(C)$ et w' a un voisin $v' \in N[C] \setminus V(C)$. Puisque G est sans griffe $v \neq v'$. Sans perte de généralité $N_C(v) = \{v_1, v_2\}$. Supposons que $N_C(v) \neq N_C(v')$. Sans perte de généralité $N_C(v') = \{v_2, v_3\}$ (notons que $N_C(v') = \{v_1, v_4\}$ est symétrique). Si $vv' \notin E$, alors $w - v - v_1 - v_4 - v_3 - v' = P_6$, sinon $v_1 - v - v' - v_3 - v_4 = C_5$, une contradiction. Maintenant il reste le cas $N_C(v') = \{v_3, v_4\}$. Nous avons $vv' \notin E$ sinon il y a une griffe, mais $w - v - v_1 - v_4 - v' - w' = P_6$, une contradiction. Alors, sans perte de généralité, tous les sommets $w \in W$ n'ont que des voisins $v \in N[C] \setminus V(C)$ tel que $N(v) = \{v_1, v_2\}$.

Soit $|W| = q$, où $q \geq 2$. Nous montrons que $\gamma(G) = q + 1$. Puisque W est un ensemble indépendant, et que pour toute paire $w, w' \in W$, $w \neq w'$, nous avons $N[w] \cap N[w'] = \emptyset$, nous devons prendre q sommets de $N[W]$ pour dominer les sommets W . Ces sommets ne peuvent dominer ni v_3 ni v_4 . Donc $\gamma(G) \geq q + 1$.

Nous construisons un ensemble dominant minimum de G . Nous prenons un voisin de chaque $w \in W$ pour former R . Clairement, $\Gamma = R \cup \{v_3\}$ domine $V(C) \cup N[R]$. Supposons qu'il existe $s \in N[C] \setminus V(C)$ qui n'est pas dominé par Γ . Si $N_C(s) = \{v_1, v_2\}$, alors il existe $r \in R$ tel que $G[\{r, s, v_1, v_4\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_1, v_4\}$, alors $w - v - v_2 - v_3 - v_4 - s = P_6$, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_4\}$, alors il existe $r \in R$ tel que $G[\{r, s, v_2, v_3\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc tous les sommets $s \notin N[R] \cup V(C)$ sont dominés par v_3 . Nous en déduisons que Γ est un ensemble dominant minimum de G . Clairement Γ peut être construit en temps polynomial. \square

Lemme 2.10 *Pour $k \in \{7, 8\}$, si G est un graphe connexe sans (griffe, P_k, C_k, C_{k-1}) tel que $C_{k-2} \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: D'après les Propriétés 2.2 et 2.3, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés et que G n'a pas de feuille. Soit $C = C_{k-2} = v_1 - \dots - v_{k-2} - v_1$, $C \subseteq_i G$ et $v \in N[C] \setminus V(C)$. Nous avons $2 \leq |N_C(v)| \leq 5$ (notons que $|N_C(v)| = 5$ seulement si $C = C_5$). Soit $S = N[C] \setminus V(C)$, $W = V \setminus N[C]$ et $w \in W$ un voisin de v . Si $3 \leq |N_C(v)| \leq 4$, alors G a une griffe, une contradiction. Donc, v est tel que $N_C(v) = \{v_i, v_{i+1}\}$, pour $1 \leq i \leq k - 2$ (par abus de notation, quand $i = k - 2$ nous supposons que $v_{i+1} = v_1$).

Nous montrons que pour tous $w \in W$, il existe $v, v' \in N(w)$ tels que $N_C(v) \cap N_C(v') = \emptyset$. Soit $w \in W$ et $v, v' \in N_S(w)$, $v \neq v'$.

Premièrement, nous montrons que $N_C(v) \neq N_C(v')$. Supposons que $N_C(v) = N_C(v')$. Sans perte de généralité $N_C(v) = \{v_1, v_2\}$. Nous avons $vv' \in E$ ou sinon $G[\{v, v', v_1, v_{k-2}\}]$ est une griffe. Puisque $N[v] \neq N[v']$, il existe $u \in V$ tel que $uv \in E$ et $uw' \notin E$. Si $u \in W$, alors d'après le Lemme 2.8, nous avons $uw \notin E$, mais $G[\{u, v, w, v_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc nous pouvons

supposer que $u \in S$. Si $N_C(u) = \{v_1, v_2\}$, alors $G[\{u, v', v_2, v_3\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_C(u) \neq N_C(v)$ et nous pouvons supposer que $uw \notin E$, ou sinon nous avons u, v deux voisins de w avec un voisinage distinct dans C . Si $N_C(u) \cap N_C(v) = \emptyset$, alors $G[\{u, v, v_1, w\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc, sans perte de généralité, nous supposons que $N_C(u) \cap N_C(v) = \{v_1\}$, mais dans ce cas $G[\{u, v, v_2, w\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N[v] = N[v']$ et v, v' peuvent être contractés, impliquant que w est une feuille, une contradiction. Donc pour tout $w \in W$, il existe $v, v' \in N_S(w)$, $v \neq v'$ tels que $N_C(v) \neq N_C(v')$.

Nous montrons que $N_C(v) \cap N_C(v') = \emptyset$. Sans perte de généralité, supposons que $N_C(v) = \{v_1, v_2\}$ et que $N_C(v') = \{v_2, v_3\}$. Si $vv' \in E$, alors $v_1 - v - v' - v_3 - \dots - v_{k-2} - v_1 = C_{k-1}$, sinon $v_1 - v - w - v' - v_3 - \dots - v_{k-2} - v_1 = C_k$, une contradiction. Donc tous les sommets $w \in W$, ont deux voisins $v, v' \in S$ tels que $N_C(v) \cap N_C(v') = \emptyset$.

D'après la Propriété 2.5, nous pouvons supposer que $|W| \geq 2$. Soit $w, w' \in W$ (rappelons que $ww' \notin E$). Puisque w et w' ont deux voisins dans S qui n'ont pas de voisinage s'intersectant dans C , soit $v \in N(w)$, $v' \in N(w')$ tels que $N_C(v) \cap N_C(v') = \emptyset$. Sans perte de généralité $N_C(v) = \{v_1, v_2\}$. Supposons que $N_C(v') = \{v_3, v_4\}$ (notons que $N(v') = \{v_{k-2}, v_{k-3}\}$ est symétrique). Si $vv' \in E$, alors $G[\{v, v', v_1, w\}]$ est une griffe, sinon $w - v - v_1 - v_{k-2} - \dots - v_4 - v' - w' = P_k$, une contradiction. Donc les sommets de $N_C(v)$ ne sont pas adjacents aux sommets de $N_C(v')$. Nous en déduisons que pour $k = 7$, puisque $C_{k-2} = C_5$, une telle configuration n'est jamais possible. Nous avons donc $|W| \leq 1$ et d'après la Propriété 2.5, un ensemble dominant minimum peut être calculé en temps polynomial.

Nous traitons le cas restant où $k = 8$. Soit $|W| = q$, $q \geq 2$. Nous montrons que $\gamma(G) = q + 2$. Puisque W est indépendant et que pour toute paire distincte $w, w' \in W$, $N[w] \cap N[w'] = \emptyset$, alors nous devons prendre q sommets de $N[W]$ afin de dominer les sommets de W . Soit $w, w' \in W$. D'après les arguments précédents, nous pouvons supposer que w a un voisin v tel que $N_C(v) = \{v_1, v_2\}$, et que w' a un voisin v' tel que $N_C(v') = \{v_4, v_5\}$ (chaque sommet de W a deux voisins qui sont respectivement $\{v_1, v_2\}$ et $\{v_4, v_5\}$ car $C = C_6$). Puisque G est sans griffe, alors $vv' \notin E$. Les q sommets qui dominent W ne peuvent dominer v_3 et v_6 . Donc $\gamma(G) \geq q + 1$.

Supposons que $\gamma(G) = q + 1$. L'ensemble dominant minimum de G doit contenir un sommet $s \in S$ qui est un voisin de v_3 et v_6 . Si $vs \in E$, respectivement $v's \in E$, alors G a une griffe (car s ne peut être complet à $N_C(v) \cup N_C(v')$), une contradiction. Aussi, s doit avoir $(v_1$ ou $v_5)$ et $(v_2$ ou $v_4)$ comme voisins, sinon G a une griffe. Nous supposons d'abord que $N(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$. Alors $w - v - v_1 - s - v_3 - v_4 - v' - w' = P_8$ (rappelons que $vv' \notin E$ puisque G est sans griffe), une contradiction. Le cas où $N(s) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ est symétrique. Maintenant nous supposons que $N(s) = \{v_1, v_3, v_4, v_6\}$ (notons que $N(s) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$ est symétrique). Alors $w - v - v_2 - v_3 - s - v_6 - v_5 - v' = P_8$, une contradiction. Donc $\gamma(G) \geq q + 2$.

Nous montrons que $\Gamma = \{v_1, v_4\} \cup W$ est un ensemble dominant minimum de G . Clairement Γ domine $N[W] \cup V(C)$. Soit $s \notin N[W] \cup V(C)$. Donc $s \in S$. Supposons que $sv_1, sv_4 \notin E$. D'après les arguments précédents, nous avons $ws \notin E$ et $vs \notin E$, sinon $G[\{v, s, v_1, w\}]$ est une griffe. Si $N(s) = \{v_2, v_3\}$, alors $w - v - v_1 - v_6 - v_5 - v_4 - v_3 - s = P_8$, une contradiction. Par symétrie $N(s) \neq \{v_5, v_6\}$. Comme montré précédemment $N(s) \neq \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$. Donc tous $s \notin N[W] \cup V(C)$ est dominé par v_1 ou v_4 . Nous en déduisons que $\Gamma = \{v_1, v_4\} \cup W$ est un ensemble dominant de G . \square

D'après les Lemmes 2.6, 2.7, 2.9, 2.10, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.11 *Soit G un graphe connexe sans griffe et sans P_k , où $6 \leq k \leq 8$. Si $C_l \subseteq_i G$, où $k - 2 \leq l \leq k$, alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

2.2.4 Graphes avec petits cycles induits

Dans cette section, nous montrons que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_8 . En commençant par le résultat sur la complexité du DOMINANT MINIMUM dans les graphes sans griffe et sans P_5 , nous montrons successivement que le problème peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_6 , puis dans les graphes sans griffe et sans P_7 , et nous concluons sur la classe des graphes sans griffe et sans P_8 .

D. Malyshev a montré dans [62] que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans $K_{1,4}$ et sans P_5 . Donc nous obtenons le lemme suivant.

Lemme 2.12 *DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_5 .*

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant :

Lemme 2.13 *DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_6 .*

Preuve: D'après le Corollaire 2.11, si $C_l \subseteq_i G$, $4 \leq l \leq 6$, alors on peut calculer un ensemble dominant minimum dans G en temps polynomial. Si G est sans-(griffe, C_4, C_5, C_6, P_6), alors G est un graphe triangulé. Or on sait qu'il est possible de calculer un ensemble dominant minimum dans les graphes triangulés sans griffe. \square

Lemme 2.14 *Si G est un graphe connexe sans (griffe, C_5, C_6, C_7, P_7), alors un ensemble dominant minimum de G peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: D'après les Propriétés 2.2 et 2.3, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés et que G n'a pas de feuille. D'après le Lemme 2.13, nous pouvons supposer que $P_6 \subseteq_i G$. Soit $P = v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6$.

Soit $W = V \setminus N[V(P)]$. D'après la Propriété 2.4, si $W = \emptyset$, alors on peut calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial. Nous pouvons donc supposer que $W \neq \emptyset$. Soit $S = \{v \in V \setminus V(P) : 2 \leq |N_P(v)| \leq 4\}$. Nous définissons $S_i \subseteq S$ comme les sommets v tels que $|N_P(v)| = i$. Soit $H_i = \{v \in S_2 : N_P(v) = \{v_i, v_{i+1}\}, 1 \leq i \leq 5\}$. Puisque G est sans griffe, chaque H_i est une clique. Si il y a une arête $r_i r_{i+1} \in E$ avec $r_i \in H_i$, $r_{i+1} \in H_{i+1}$, alors $P = v_1 - \dots - v_i - r_i - r_{i+1} - v_{i+2} - \dots - v_6 = P_7$, une contradiction. Si il y a une arête $r_i r_j \in E$ avec $r_i \in H_i$, $r_j \in H_j$ et $j \geq i + 3$, alors $C_p \subseteq_i G$, $p \geq 5$. Donc H_1 est anti-complet à H_2, H_4, H_5 ; et H_2 est anti-complet à H_3, H_5 ; et H_3 est anti-complet à H_4 .

Nous définissons R_i comme l'ensemble des sommets de H_i ayant un voisin dans W , i.e. $R_i = \{v \in H_i : N_W(v) \neq \emptyset\}$, pour $1 \leq i \leq 5$. Puisque G est sans P_7 , alors $R_1 = R_5 = \emptyset$.

Soit $r \in R_i$, $r' \in R_i$, $r \neq r'$, où $i \in \{2, 4\}$, tels que r , respectivement r' , a un voisin $w \in W$, respectivement $w' \in W$. Nous montrons que $N_S(r) = N_S(r')$.

Supposons, par contradiction, qu'il existe $s \in S$ tel que $rs \in E$, $r's \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin R_i \cup H_{i-1} \cup H_{i+1}$. Soit $i = 2$ (le cas $i = 4$ est symétrique). Rappelons que H_2 est anti-complet à H_1, H_3, H_5 , et donc $s \in H_4 \cup S_3 \cup S_4$. Si $s \in H_4$, alors $G[\{r, w, v_3, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$, alors $G[\{r', v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r', v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$ ou $N_P(s) = \{v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r, v_2, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r, v_1, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r', v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r, v_4, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Maintenant prenons $i = 3$. Rappelons que H_3 est anti-complet à H_2, H_4 , et que donc $s \in H_1 \cup H_5 \cup S_3 \cup S_4$. Si $s \in H_1$ (le cas $s \in H_5$ est symétrique), alors $G[\{r, w, v_3, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$ (le cas $N_P(s) = \{v_4, v_5, v_6\}$ est symétrique), alors $G[\{r, w, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r', v_4, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ ou $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r, v_1, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r', v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$ est symétrique), alors $G[\{r', v_4, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ mais $G[\{r, v_2, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_S(r) = N_S(r')$.

Soit $r_2 \in R_2$, $r'_2 \in R_2$, $r_2 \neq r'_2$ tels que r_2 a un voisin $w \in W$, et r'_2 a un voisin $w' \in W$. Soit $r_4 \in R_4$, $r'_4 \in R_4$, $r_4 \neq r'_4$ tels que r_4 est voisin de w , et r'_4 est voisin de w' . Nous montrons que $N_{S \setminus H_4}(r_2) = N_{S \setminus H_4}(r'_2)$, respectivement $N_{S \setminus H_2}(r_4) = N_{S \setminus H_2}(r'_4)$.

Supposons, par contradiction, qu'il y ait $s \in S$ tel que $r_2s \in E$, $r'_2s \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Quand $s \in H_4$, nous savons que s n'est pas un voisin de w . Si $s \in H_4 \cup H_5$, alors $G[\{r_2, v_2, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$, alors $G[\{r'_2, v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r'_2, v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r_2, v_2, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r_2, v_4, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ ou $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r, v_1, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r', v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r_2, v_1, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r'_2, v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r_2, v_4, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_{S \setminus H_4}(r_2) = N_{S \setminus H_4}(r'_2)$ et par symétrie, pour $r'_4 \in R_4$, $r'_4 \neq r_4$, nous avons $N_{S \setminus H_2}(r_4) = N_{S \setminus H_2}(r'_4)$.

Soit $w \in W$. Nous montrons que w n'a pas deux voisins r_i, r_{i+1} où $r_i \in R_i$, $r_{i+1} \in R_{i+1}$. Nous supposons, par contradiction, que ces deux voisins existent. Alors $v_1 - \dots - v_i - r_i - w - r_{i+1} - v_{i+2} - \dots - v_6 = P_8$, une contradiction. Maintenant, puisque $R_1 = R_5 = \emptyset$, si w a deux voisins $r_i \in R_i$, $r_j \in R_j$, $i \neq j$, alors ces deux voisins sont $r_2 \in R_2$, $r_4 \in R_4$, avec $r_2r_4 \in E$, sinon $w - r_4 - v_4 - v_3 - r_2 - w = C_5$. De plus, quand w a deux voisins $r_2 \in R_2$, $r_4 \in R_4$, alors chaque voisin $w' \in N_W(w)$ a r_2 et r_4 comme voisin. Supposons, par contradiction, que w ait un voisin $w' \in W$ tel que $w'r_2 \notin E$ (le cas $w'r_4 \notin E$ est symétrique). Alors $w' - w - r_2 - v_3 - \dots - v_6 = P_7$, une contradiction. Nous en déduisons que $N[w] = N[w']$, une contradiction.

Donc en définissant $Z_{24} = \{w \in W : w \text{ a deux voisins } r_2 \in R_2, r_4 \in R_4\}$, nous avons Z_{24} un ensemble indépendant de G .

Soit $w, w' \in Z_{24}, w \neq w'$. Puisque G est sans griffe, nous avons $N(w) \cap N(w') = \emptyset$. Nous montrons que $N_{R_2}(w)$ est anti-complet à $N_{R_4}(w')$, et que $N_{R_4}(w)$ est anti-complet à $N_{R_2}(w')$. Par contradiction, si w a un voisin $r_2 \in R_2$, et que w' a un voisin $r_4 \in R_4$, tels que $r_2 r_4 \in E$, alors $G[\{v_2, r_2, w, r_4\}]$ est une griffe, une contradiction.

Soit $Z_i = \{w \in W : w \text{ a un voisin dans } R_i \setminus (N_{R_i}(Z_{24}))\}, 2 \leq i \leq 4\}$.

Nous montrons que Z_2, Z_3, Z_4 sont deux à deux anti-complets. Si il y a une arête $w_2 w_4 \in E$, où $w_2 \in Z_2, w_4 \in Z_4$, avec $r'_2 \in R_2, r'_4 \in R_4$ les voisins respectifs de w_2, w_4 , alors $w_2 - r'_2 - v_3 - v_4 - r'_4 - w_4 - w_2 = C_6$ ($r'_2 r'_4 \notin E$ sinon $G[\{v_2, r'_2, w_2, r'_4\}]$ est une griffe). Si il y a une arête $w_2 w_3 \in E$, où $w_2 \in Z_2, w_3 \in Z_3$, avec $r'_2 \in R_2, r'_3 \in R_3$ les voisins respectifs de w_2, w_3 , alors $w_2 - r'_2 - v_3 - r'_3 - w_3 - w_2 = C_5$ (rappelons que $r'_2 r'_3 \notin E$). Nous en déduisons par symétrie qu'il n'y a pas d'arête entre Z_3 et Z_4 .

Soit $Y = W \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 \cup Z_{24})$. Observons que pour tout $w \in Y$, nous avons $N_{Z_2}(w) = N_{Z_4}(w) = N_{Z_{24}}(w) = \emptyset$, sinon $P_7 \subseteq_i G$.

Soit $Y_3 = \{w \in Y : w \text{ a un voisin dans } Z_3\}$. Si il existe $w' \in Y \setminus Y_3$ tel que w' a un voisin $w \in Y_3$, alors $P_7 \subseteq_i G$. Donc $Y = Y_3$.

Nous montrons que nous pouvons supposer que Y_3, Z_2, Z_4 sont trois ensembles indépendants de G . Les arguments sont les mêmes pour les trois ensembles, donc nous montrons que Z_2 est un ensemble indépendant de G . Supposons, par contradiction, qu'il y ait $w_1, w_2 \in Z_2$ tels que $w_1 w_2 \in E$. Nous montrons que $N_{R_2}(w_1) = N_{R_2}(w_2)$. Si $N_{R_2}(w_1) \neq N_{R_2}(w_2)$, alors il existe $r_2 \in R_2$ qui est un voisin de w_1 mais n'est pas un voisin w_2 . Alors $w_2 - w_1 - r_2 - v_3 - \dots - v_6 = P_7$, une contradiction. Si $N_{Z_2}(w_1) \neq N_{Z_2}(w_2)$, alors il existe $w_3 \in Z_2$ tel que $w_2 w_3 \in E, w_1 w_3 \notin E$, mais $G[\{v_2, r_2, w_1, w_3\}]$ est une griffe, une contradiction. Alors $N[w_1] = N[w_2]$, une contradiction. Donc Z_2, Z_4, Y_3 sont trois ensembles indépendants de G .

Puisque G est sans griffe, alors pour toute paire distincte $w_1, w_2 \in Z_2 \cup Z_4 \cup Y_3$, nous avons $N(w_1) \cap N(w_2) = \emptyset$.

Nous montrons que pour tout $w \in Y_3, N(w)$ est une clique. Soit $w \in Y_3$. Supposons qu'il y ait s, s' deux sommets non-adjacents dans $N(w)$. Puisque G est sans griffe, s, s' n'ont pas de voisin commun dans R_3 . Soit $r \in R_3$ un voisin de s . Alors $s' - w - s - r - v_3 - v_2 - v_1 = P_7$, une contradiction.

Puisque G est sans griffe, si il y a un sommet $r \in R_i$ ayant un voisin $z \in Z_i$, et un sommet $s \in S$ tel que $sz \notin E$ et $v_i \notin N(s)$, alors G a une griffe, une contradiction, (notons que $v_{i+1} \notin N(s)$ est symétrique). Donc $N(Z_i)$ est anti-complet à $H_j, j \neq i$.

Nous montrons que nous pouvons supposer que $Z_2 = Z_4 = \emptyset$. Les arguments sont les mêmes dans les deux cas, donc nous considérons Z_2 . Soit $r, r' \in R_2$ deux voisins de $w \in Z_2$. Nous montrons que $N[r] = N[r']$. Puisque $N_R(w) = N_{R_2}(w)$ et $rr' \in E$, alors comme montré précédemment $N_S(r) = N_S(r')$. Pour une paire distincte $w_1, w_2 \in Z_2, N(w_1) \cap N(w_2) = \emptyset$. Donc $N[r] = N[r']$, une contradiction. Alors w est une feuille, une contradiction.

Maintenant, nous étudions la structure de Z_3 . Pour toute paire distincte $w_1, w_2 \in Z_3$ telle que $w_1 w_2 \in E$, il ne peut pas exister deux sommets distincts $w'_1, w'_2 \in Z_3$ tels que $w_1 w'_1 \in E, w'_1 w_2 \notin E$ et

$w_2 w'_2 \in E$, $w_1 w'_2 \notin E$. Nous supposons, par contradiction, qu'une telle paire existe. Nous supposons d'abord que w_2 a un voisin $r_2 \in R_3$ tel que $r_2 w_1 \notin E$. Si $w'_1 r_2 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - r_2 - w_2 - w_1 - w'_1 = P_7$, sinon $G[\{v_4, r_2, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc w_1, w_2 ont un voisin en commun $r_1 \in R_3$. Si $w'_1 r_1 \in E$, alors $G[\{v_3, r_1, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $w'_1 r_1 \notin E$ et w'_1 a un voisin $r'_1 \in R_3$, $r'_1 \neq r_1$. Si $r'_1 w_2 \in E$, alors $G[\{v_3, r'_1, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $r'_1 w_2 \notin E$. Si $r'_1 w_1 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - r'_1 - w'_1 - w_1 - w_2 = P_7$, une contradiction. Donc $r'_1 w_1 \in E$. Si $r'_1 w'_2 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - r'_1 - w_1 - w_2 - w'_2 = P_7$, une contradiction. Donc $r'_1 w'_2 \in E$ mais $G[\{v_4, r'_1, w_1, w'_2\}]$ est une griffe, une contradiction.

En conséquence, chaque composante connexe A_i de Z_3 a un sommet universel. Aussi, G étant sans griffe, deux composantes connexes distinctes ne peuvent partager un voisin dans R_3 . De plus, d'après la Propriété 2.3, nous pouvons supposer que $w_3 \in Z_3$ n'est pas une feuille.

Nous montrons que $w \in Y_3$ est relié à un sommet universel d'une composante connexe A_i de Z_3 . Nous supposons que les voisins de w ne sont pas universels dans A_i . Soit $s \in A_i$ un voisin de w , et $u, u \neq s$, un sommet universel de A_i . Puisque s n'est pas universel, il existe $v, v \in A_i$ tel que $sv \notin E$ et $wv \in E$. Puisque $N(w)$ est une clique, alors $wv \notin E$. Soit $r \in R_3$ un voisin de s . Puisque G est sans griffe, alors $rv \notin E$. Soit $r' \in R_3$, $r' \neq r$, un voisin de v . D'après les arguments précédents $r's \notin E$. Si $r'u \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - r' - v - u - s = P_7$, sinon $v_1 - v_2 - v_3 - r' - u - s - w = P_7$, une contradiction.

Nous sommes prêt à construire un ensemble dominant minimum de G .

Premièrement, nous considérons le cas $Z_{24} \neq \emptyset$. Soit $r_2 \in R_2$, $r_4 \in R_4$ deux voisins de $w \in Z_{24}$. Nous montrons que $R_3 = \emptyset$. Supposons qu'il existe $w' \in W$ ayant un voisin $r_3 \in R_3$. Puisque w' n'est pas un voisin de r_2 ou r_4 , nous avons $w' - r_3 - v_3 - r_2 - r_4 - v_5 - v_6 = P_7$, une contradiction. Donc $R_3 = \emptyset$, et puisque $Z_2 = Z_4 = \emptyset$, alors $W = Z_{24}$. Rappelons que $W = Z_{24}$ est un ensemble indépendant, et que pour toute paire distincte $w', w'' \in Z_{24}$, nous avons $N(w) \cap N(w') = \emptyset$.

Nous construisons un ensemble dominant minimum de G comme suit :

D'après la Propriété 2.5, nous pouvons supposer que $|W| \geq 2$. Prenons $r_2 \in R_2$ un voisin de w (rappelons que les voisins de w dans $R_i, i \in \{2, 4\}$, ont le même voisinage et que tous les sommets de R_i ont les mêmes voisins dans $S \setminus H_4$), et pour tout autre $w' \in Z_{24}$, nous prenons n'importe quel voisin $r'_4 \in R_4$. Ces sommets dominent $Z_{24} \cup H_2 \cup H_4 \cup \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Au moins un autre sommet est nécessaire pour dominer G puisque v_1 et v_6 ne sont pas dominés. En prenant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant (pas nécessairement minimum). Nous vérifions d'abord si il existe s un voisin de v_1 et v_6 qui domine le reste du graphe. Si un tel sommet s n'existe pas, en prenant toutes les paires s_1, s_6 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 6\}$, on peut vérifier si il existe un ensemble dominant minimum avec seulement deux sommets de plus (notons qu'il y a au plus $O(n^2)$ de ces paires).

Nous considérons le cas $Z_{24} = \emptyset$.

Nous construisons un ensemble dominant minimum de G comme suit :

- $Y_3 \neq \emptyset$. Pour chaque $w \in Y_3$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de Z_3 qui est relié à w . Pour chaque composante connexe A_i de Z_3 qui n'est pas connecté à un sommet de Y_3 , nous faisons comme suit : si il existe $r_3 \in R_3$ qui est complet à A_i (rappelons que ces sommets ont le même voisinage), alors nous prenons r_3 , sinon nous prenons un sommet

universel de A_i . Ces sommets dominent $Y_3 \cup Z_3$. Au moins un sommet de plus est nécessaire pour dominer G puisque v_1 et v_6 ne sont pas dominés. En prenant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions d'abord si il existe s un voisin de v_1 et v_6 dominant le reste du graphe. Si un tel sommet s n'est pas trouvé, alors pour toutes les paires s_1, s_6 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 6\}$, nous pouvons vérifier si il y a un ensemble dominant minimum avec seulement deux autres sommets (notons qu'il y a au plus $O(n^2)$ de ces paires).

- $Y_3 = \emptyset$. Alors $Z_3 = W$. Pour chaque composante connexe A_i de Z_3 , si il existe $r_3 \in R_3$ qui est complet à A_i (rappelons que ces sommets ont le même voisinage), alors nous prenons r_3 , sinon nous prenons un sommet universel de A_i . Ces sommets dominent Z_3 . Au moins un sommet de plus est nécessaire pour dominer G puisque v_1 et v_6 ne sont pas dominés. En prenant les trois sommets v_2, v_4, v_6 nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions d'abord si il existe s un voisin de v_1 et v_6 qui domine le reste du graphe. Si un tel sommet s n'est pas trouvé, alors pour toutes les paires s_1, s_6 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 6\}$, nous pouvons vérifier si il y a un ensemble dominant minimum avec seulement deux autres sommets de plus.

La construction de cet ensemble dominant minimum est polynomiale. □

Corollaire 2.15 DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomiale dans les graphes sans griffe et sans P_7 .

Lemme 2.16 Si G est un graphe connexe sans (griffe, C_6, C_7, C_8, P_8), où $C_5 \subseteq_i G$, alors un ensemble dominant minimum peut être calculé en temps polynomiale.

Preuve: D'après les Propriétés 2.2 et 2.3, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés et que G n'a pas de feuille. Soit $C = v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1 = C_5 \subseteq_i G$. Soit $W = V \setminus N[V(C)]$. D'après la Propriété 2.4, si $W = \emptyset$, alors nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomiale. Nous pouvons donc supposer que $W \neq \emptyset$.

Soit $S = \{v \in V \setminus V(C) : 2 \leq |N(v) \cap V(C)| \leq 5\}$, et $S_i \subseteq S$ l'ensemble des sommets v tels que $|N(v) \cap V(C)| = i$. Soit $H_i = \{v \in S_i : N(v) \cap V(C) = \{v_i, v_{i+1}\}\}$, pour $1 \leq i \leq 5$ (par abus de notation, quand $i = 5$ nous supposons que $v_{i+1} = v_1$). Puisque G est sans griffe, chaque H_i est une clique. De plus, si il y a une arête $r_i r_{i+1} \in E$, où $r_i \in H_i, r_{i+1} \in H_{i+1}$, alors $r_i - v_i - v_{i-1} - \dots - v_{i+2} - r_{i+1} - r_i = C_6$, une contradiction. Donc H_i est anti-complet à H_{i+1} . Nous définissons R_i comme l'ensemble des sommets de H_i ayant un voisin dans W , i.e. $R_i = \{v \in H_i : N_W(v) \neq \emptyset\}$, $1 \leq i \leq 5$, $R = R_1 \cup \dots \cup R_5$.

Puisque $W \neq \emptyset$, nous supposons qu'il existe $w_1 \in W$ tel que w_1 a un voisin $r_1 \in R_1$. Supposons que $R_2 \neq \emptyset$. Il existe $w_2 \in W$ avec un voisin $r_2 \in R_2$. Si $w_1 = w_2$, alors $w_1 - r_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_1 - w_1 = C_7$, une contradiction. Donc $w_1 \neq w_2$. Si $w_1 w_2 \in E$, alors $w_1 - w_2 - r_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_1 - w_1 = C_8$, sinon $w_1 - r_1 - v_1 - v_5 - v_4 - v_3 - r_2 - w_2 - w_1 = P_8$, une contradiction. Donc, si $R_i \neq \emptyset$, alors $R_{i-1} = R_{i+1} = \emptyset$. Donc $R_2 = R_5 = \emptyset$.

Soit $r \in R_i, r' \in R_i, r \neq r', i \in \{1, 3, 4\}$ tels que r a un voisin $w \in W$ et r' a un voisin $w' \in W$. Nous montrons que $N_S(r) = N_S(r')$.

Supposons, par contradiction, qu'il y ait $s \in S$ tel que $rs \in E$, $r's \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin H_i \cup H_{i-1} \cup H_{i+1}$. Soit $i = 1$. Si $s \in H_3 \cup H_4$, alors $G[\{r, v_1, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4 \cup S_5$. Si $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r', v_5, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_4, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r, v_1, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r, v_3, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4 \cup S_5$. Si $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r', v_1, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ou $N_C(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ou $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ou $s \in S_5$, alors $G[\{r, v_3, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Pour $i = 3$ et $i = 4$ les arguments sont les mêmes. Donc $N_S(r) = N_S(r')$.

Soit $r_1 \in R_1$, $r'_1 \in R_1$, $r_1 \neq r'_1$, tels que r_1 a un voisin $w \in W$, et r'_1 a un voisin $w' \in W$. Soit $r_3 \in R_3$, $r'_3 \in R_3$, $r_3 \neq r'_3$, tels que r_3 a pour voisin w , et r'_3 a pour voisin w' . Nous montrons que $N_{S \setminus H_3}(r_1) = N_{S \setminus H_3}(r'_1)$, et $N_{S \setminus H_1}(r_3) = N_{S \setminus H_1}(r'_3)$.

Soit $i = 1$. Supposons, par contradiction, qu'il y ait $s \in S \setminus R_3$ tel que $r_1 s \in E$, $r'_1 s \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin H_1 \cup H_2 \cup H_5$. Si $s \in H_4$, alors $G[\{r_1, v_1, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4 \cup S_5$. Si $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r'_1, v_1, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_4, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r_1, v_1, w, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r_1, v_3, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4 \cup S_5$. Si $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ (le cas $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$ est symétrique), alors $G[\{r'_1, v_1, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_C(s) = \{v_1, v_3, v_4, v_5\}$ ou $N_C(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ou $N_C(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$ ou $s \in S_5$, alors $G[\{r_1, v_3, v_5, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Par symétrie, les arguments sont les mêmes pour $i = 3$. Donc $N_{S \setminus H_3}(r_1) = N_{S \setminus H_3}(r'_1)$ et $N_{S \setminus H_1}(r_3) = N_{S \setminus H_1}(r'_3)$.

Nous étudions le cas où w_1 a un voisin r_i , $r_i \in R_i$, $i \in \{3, 4\}$. Puisque les deux cas possibles sont symétriques, soit $r_3, r_3 \in R_3$, un voisin de w_1 . Si $r_1 r_3 \notin E$, alors $w_1 - r_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = C_6$, une contradiction. Donc $N_{R_1}(w_1)$ est complet à $N_{R_3}(w_1)$. Puisque $R_3 \neq \emptyset$, nous avons $R_4 = \emptyset$ et $N_R(w_1) \subseteq R_1 \cup R_3$. Nous définissons les sous-ensembles W suivants :

- $Z = \{w \in W : N_R(w) \neq \emptyset\}$;
- $Z_i = \{z \in Z : N_{R_i}(z) \neq \emptyset, N_{R_j}(z) = \emptyset, 1 \leq i \leq 5, i \neq j\}$;
- $Z_{ij} = \{z \in Z : N_{R_i}(z) \neq \emptyset, N_{R_j}(z) \neq \emptyset, 1 \leq i < j \leq 5\}$;
- $Y = W \setminus Z$.

Premièrement, nous montrons que Z_i est anti-complet à Z_{ij} . Ensuite, nous montrons que Z_i n'est composé que de feuilles (et donc nous pouvons considérer qu'il est vide). Pour finir, nous montrons que si $Z_{ij} \neq \emptyset$, alors $Z = Z_{ij}$. Soit $w_1 \in Z_{13}$, et puisque tous les cas sont symétriques, nous pouvons nous concentrer sur $Z_1 \neq \emptyset$.

Soit $w'_1 \in Z_1$ avec un voisin r'_1 , $r'_1 \in R_1$, $r'_1 \neq r_1$. Notons que $r'_1 r_3 \notin E$ car G est sans griffe. Si $w_1 w'_1 \in E$, alors $r'_1 w_1 \in E$, sinon $w_1 - w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = C_7$, mais $w_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = C_6$, une contradiction. Donc $w_1 w'_1 \notin E$ (par symétrie, pour tout $w_3 \in Z_3$, $w_1 w_3 \notin E$). Donc Z_1 et Z_3 sont anti-complets à Z_{13} .

Maintenant, nous montrons que les sommets de Z_1 sont des feuilles. Supposons qu'il existe $v \in N(w'_1)$, $v \neq r'_1$ tel que $N[v] \neq N[w'_1]$. Si $v \in Z_3$, alors $v - w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = P_8$, une contradiction. Si $v \in Y$, alors soit $v - w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = P_8$ ou $v - w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 - v = C_8$, une contradiction. Si $v \in Z_1$ et que $r'_1 v \notin E$, alors $v - w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_1 = P_8$, une contradiction. Donc $N_{R_1}(w'_1) = N_{R_1}(v)$. Puisque $N[v] \neq N[w'_1]$, nous pouvons supposer qu'il existe $v' \in W$ tel que $vv' \in E$ mais $v'w'_1 \notin E$. Avec les mêmes arguments que précédemment, nous avons $N_{R_1}(v) = N_{R_1}(v')$ et puisque $w'_1 v' \notin E$, alors $G[\{r'_1, v', v_1, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc les sommets de Z_1 sont des feuilles, une contradiction. Donc $Z_1 = \emptyset$ et par symétrie $Z_3 = \emptyset$. Donc $Z = Z_{13}$.

Nous montrons que toutes les paires $v, v' \in Z_{13}$ où $vv' \in E$ sont telles que $N_{R_1 \cup R_3}(v) = N_{R_1 \cup R_3}(v')$. Soit $w'_1 \in Z_{13}$ un voisin de w_1 . Supposons qu'il existe $r'_1 \in N_{R_1}(w'_1)$ tel que $r'_1 w_1 \notin E$. Si $r'_1 r_3 \in E$, alors $G[\{r'_1, r_3, v_3, w_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $r_3 w'_1 \notin E$, alors $w_1 - r_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r'_1 - w'_1 - w_1 = C_7$, sinon $w'_1 - r'_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w'_1 = C_6$, une contradiction. Donc, $N_{R_1}(w_1) = N_{R_1}(w'_1)$ et par symétrie $N_{R_3}(w_1) = N_{R_3}(w'_1)$.

Supposons que $Y \neq \emptyset$. Soit $y \in Y$ un voisin de w_1 . Nous montrons que Z_{13} est une clique. Soit $w'_1 \in Z_{13}$ tel que $w_1 w'_1 \notin E$. Puisque G est sans griffe, alors $N_{R_1 \cup R_3}(w_1) \cap N_{R_1 \cup R_3}(w'_1) = \emptyset$. Mais il y a r'_1 un voisin de w'_1 dans R_1 tel que soit $y - w_1 - r_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r'_1 - w'_1 = P_8$ ou $y - w_1 - r_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r'_1 - w'_1 - y = C_8$, une contradiction, (notons que $r'_1 r_3 \notin E$ puisque G est sans griffe). Donc Z_{13} est une clique.

Nous montrons que les sommets de Y sont des feuilles. Supposons que y ait un voisin $y' \in Y$. Si $y' w_1 \notin E$, alors $y' - y - w_1 - r_1 - v_1 - v_5 - v_4 - v_3 = P_8$, une contradiction. Donc $N_Z(y) = N_Z(y')$. Puisque $N[y] \neq N[y']$, il existe $v, v' \in Y$, tel que $vy \in E$, et $vy' \notin E$. D'après les arguments précédents $w_1 v \in E$, et donc $G[\{r_1, w_1, y', v\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc Y est un ensemble indépendant de G . Maintenant $N(y) \subseteq Z_{13}$ est une clique. Puisque pour toute paire distincte $w_1, w'_1 \in Z_{13}$, nous avons $N_{R_1 \cup R_3}(w_1) = N_{R_1 \cup R_3}(w'_1)$, nous pouvons supposer que $N(y)$ peut être contracté en un seul sommet. Donc, les sommets de Y sont des feuilles, une contradiction. Donc $Y = \emptyset$.

Comme montré précédemment, toute paire de sommets reliés de Z_{13} a le même voisinage dans R , et donc nous pouvons supposer que Z_{13} est un ensemble indépendant. De plus, puisque G est sans griffe, pour toute paire $z, z' \in Z_{13}$, nous avons $N[z] \cap N[z'] = \emptyset$. Aussi, rappelons que le voisinage de chaque $z, z \in Z_{13}$ est une clique.

Nous montrons comment construire un ensemble dominant minimum de G . Rappelons que $W = Z_{13}$. D'après la Propriété 2.5, nous pouvons supposer que $|W| \geq 2$. Donc il y a $w_1, w'_1 \in Z_{13}$ ayant pour voisins $r_1, r'_1 \in R_1$ et $r_3, r'_3 \in R_3$, respectivement. Soit $q = |Z_{13}|$. Clairement, q sommets sont nécessaires pour dominer Z_{13} . Nous prenons r_1 et r'_3 . Rappelons que les sommets de R_1 et R_3 ont le même voisinage dans $S \cup V(C)$. Alors, nous prenons $q-2$ sommets $w \in Z_{13}$, $w \neq w_1, w'_1$. Ces q sommets dominent $\{v_1, v_2, v_3, v_4\} \cup H_1 \cup H_3 \cup Z_{13}$. Il reste à dominer des sommets de $H_2 \cup H_4 \cup H_5 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{v_5\}$. Si il existe un sommet $v, v \in S \cup \{v_5\}$, qui est universel à ces sommets non-dominés, alors nous prenons v . Sinon nous prenons les sommets $\{v_2, v_5\}$.

Maintenant, nous supposons que $Z_{ij} = \emptyset$. Soit $w_1 \in Z_1$. Nous étudions le cas $R_3 \neq \emptyset$. Rappe-

lons que $R_2 = R_4 = R_5 = \emptyset$. Soit $w_3 \in W$ tel que w_3 a un voisin $r_3 \in R_3$. Si $w_1 w_3 \in E$, alors $w_1 - w_3 - r_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_1 - w_1 = C_7$ (notons que $r_1 r_3 \notin E$ puisque G est sans griffe), une contradiction. Donc Z_1 est anti-complet à Z_3 . Supposons que w_1 ait un voisin $v \in Y$. Si $vw_3 \in E$, alors $v - w_3 - r_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_1 - w_1 - v = C_8$, sinon $v - w_1 - r_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_3 = P_8$, une contradiction. Donc tous les $w'_1 \in W$ voisins de w_1 sont dans Z_1 . Si $w'_1 r_1 \notin E$, alors $w'_1 - w_1 - r_1 - v_1 - v_5 - v_4 - r_3 - w_3 = P_8$, une contradiction. Donc $N_R(w_1) = N_R(w'_1)$. Puisque G est sans griffe, alors pour tout $r \in R$, $N_W(r)$ est une clique, et donc $N[w_1] = N[w'_1]$, une contradiction. Donc Z_1 est un ensemble indépendant. Rappelons que pour toute paire de sommets $r, r' \in R_i$, où $1 \leq i \leq 5$, nous avons $N_S(r) = N_S(r')$. Donc, si $r, r' \in R_1$ ont un voisin commun dans Z_1 , nous avons $N[r] = N[r']$, une contradiction. Donc les sommets de Z_1 sont des feuilles, une contradiction. Par symétrie, $W = Z_1 \cup Z_3 = \emptyset$, une contradiction.

Maintenant prenons le cas $R_3 = R_4 = \emptyset$ (notons que $Z = Z_1$).

Nous étudions les sous-cas $H_2 \neq \emptyset$; et $H_5 \neq \emptyset$. Soit $v \in H_2$ (le cas $v \in H_5$ est symétrique). Nous avons $Y = \emptyset$, sinon il y a $y \in Y$, $z \in Z_1$, $r \in R_1$ tels que $v - v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r - z - y = P_8$ (rappelons que $vr \notin E$). Donc $W = Z = Z_1$. Soit $w_1, w_2 \in W$. Supposons que $w_1 w_2 \in E$. Rappelons que $N[w_1] \neq N[w_2]$. Soit $w_1 r_1, w_2 r_2 \in E$, $r_1 \neq r_2$, tels que $w_1 r_2 \notin E$. Nous avons $v - v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_2 - w_2 - w_1 = P_8$, une contradiction. Rappelons que pour tout sommet $r \in R$, $N_W(r)$ est une clique, et que donc $N[w_1] = N[w_2]$, une contradiction. Donc W est un ensemble indépendant. De plus, pour tout $w \in W$ et $r, r' \in N(w)$, r et r' ont le même voisinage dans $V(C) \cup S$. Donc les sommets de W sont des feuilles, et donc $W = \emptyset$, une contradiction.

Ainsi, nous pouvons supposer que $H_2 = H_5 = \emptyset$. Soit $Z_A \subset Z$, $Z_A = \{w \in W : N_Y(w) = \emptyset\}$. Nous montrons que toutes les composantes connexes A_i de $G[Z_A]$ contiennent un sommet universel à A_i . Nous supposons, par contradiction, qu'il existe A_i , $A_i \subseteq Z_A$ n'ayant pas de sommet universel.

Supposons que $z_1 - z_2 - z_3 - z_4 = P_4 \subseteq_i A_i$. Soit $r \in R_1$ un voisin de z_1 (notons qu'il existe un P_5 dont les extrémités sont v_3 et r). Puisque G est sans griffe, alors $rz_3, rz_4 \notin E$. Si $rz_2 \in E$ ou $rz_2 \notin E$, alors il y a un P_8 dont les extrémités sont v_3 et z_4 , ou un P_8 induit dont les extrémités sont v_3 et z_3 , une contradiction.

Maintenant, nous supposons que $z_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_1 = C_4 \subseteq_i A_i$. Soit $r \in R_1$ un voisin de z_1 . Puisque G est sans griffe, alors $rz_3 \notin E$. Si $rz_2 \in E$, alors $rz_4 \notin E$ puisque G est sans griffe, mais $v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r - z_2 - z_3 - z_4 = P_8$, une contradiction. Si $rz_2 \notin E$, alors $v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r - z_1 - z_2 - z_3 = P_8$, une contradiction.

Donc $G[A_i]$ est sans C_4 et sans P_4 . Nous en déduisons qu'il existe $z_1 - z_2 - z_3 = P_3 \subseteq_i G[A_i]$ et $z_4 \in A_i$ tel que $z_4 z_1, z_4 z_2, z_4 z_3 \notin E$. Aussi, il existe $z \in A_i$ tel que $z_2 - z - z_4$ et $zz_1, zz_3 \in E$, mais $A_i[\{z, z_1, z_3, z_4\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc chaque A_i possède un sommet universel à A_i . Puisque G est sans griffe, pour deux composantes connexes distinctes A_i, A_j , nous avons $N_{R_1}(A_i) \cap N_{R_1}(A_j) = \emptyset$.

Supposons que $Y \neq \emptyset$. Nous montrons que Y est un ensemble indépendant. Supposons qu'il y ait $y, y' \in Y$ avec $yy' \in E$. Rappelons que $N[y] \neq N[y']$. Si $N_{Z_1}(y) \neq N_{Z_1}(y')$, alors sans perte de généralité $yw_1 \in E$, $y'w_1 \notin E$, mais $v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r_1 - w_1 - y - y' = P_8$, une contradiction. Donc $N_{Z_1}(y) = N_{Z_1}(y')$. Il n'y a pas de sommet $y'' \in Y$ tel que $yy'' \in E$, $y'y'' \notin E$, car G est sans griffe. Donc Y est un ensemble indépendant de G et pour toute paire de sommets $y, y' \in Y$, nous avons $N(y) \cap N(y') = \emptyset$.

Nous montrons que tout sommet $y \in Y$ a son voisinage $N(y)$ qui induit une clique dans G . Sup-

posons, par contradiction, que y ait deux voisins $z_1, z_2 \in Z$, tels que $z_1 z_2 \notin E$. Puisque G est sans griffe, alors z_1 et z_2 n'ont pas de voisin commun dans R_1 . Si il y a $r \in R_1$ un voisin de z_1 , alors $v_3 - v_4 - v_5 - v_1 - r - z_1 - y - z_2 = P_8$, une contradiction. Donc Y est un ensemble indépendant de G , et pour chaque $y \in Y$, $N(y)$ est une clique. Donc nous pouvons supposer que $|N(y)| \geq 2$, sinon y est une feuille.

Nous montrons que nous pouvons supposer que les composantes A_i de $G[Z_A]$ sont anti-complets à $N(Y)$. Puisque Y n'a pas de feuille, soit $y \in Y$ avec deux voisins $z, z' \in Z_1$ tels que $N[z] \neq N[z']$. Supposons qu'il existe $u \in Z_A$ un voisin de z . Premièrement, nous supposons que $N_R(z) \neq N_R(z')$. Sans perte de généralité, soit $r, r' \in R_1$ les voisins respectifs de z, z' tels que $r'z, rz' \notin E$. Si $uz' \notin E$, alors $ur' \notin E$ car G est sans griffe, mais alors $u - z - z' - r' - v_1 - v_5 - v_4 - v_3 = P_8$, une contradiction. Donc $uz', r'u \in E$, mais $y - z - u - r' - v_1 - v_5 - v_4 - v_3 = P_8$, une contradiction. Donc $N_R(z) = N_R(z')$. Deuxièmement, nous supposons que $N_Z[z] \neq N_Z[z']$. Sans perte de généralité $uz' \notin E$. Soit $r \in R_1$ un voisin de z, z' . Clairement $ru \notin E$ car G est sans griffe, mais alors $G[\{r, u, y, z\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc nous pouvons supposer que chaque composante A_i est anti-complet à $N(Y)$.

Nous décrivons comment construire un ensemble dominant minimum de G .

Soit $q = |Y|$ et k le nombre de composantes connexes de Z_A . Clairement q sommets sont nécessaires pour dominer Y . Donc pour chaque $y_i \in Y$, nous prenons l'un de ses voisins comme suit. Soit $R_1(y_i) = N_{R_1}(N(y_i))$. Si y_i a un voisin z_i qui est complet à $R_1(y_i)$, alors nous prenons z_i , sinon nous prenons un voisin arbitraire de y_i (rappelons que dans les deux cas, ces sommets y_i ont le même voisinage dans Z). Ces q sommets dominant $Y \cup (Z \setminus Z_A)$ et quelques sommets de $R_1(Y)$.

Maintenant k sommets sont nécessaires afin de dominer Z_A . Pour chaque composante connexe $A_i \subset Z_A$: si il existe $r \in R_1$ qui est complet à A_i , alors nous prenons r pour dominer (ceci est le cas a) ; sinon nous prenons n'importe quel sommet universel de A_i (ceci est le cas b) (rappelons que dans les deux cas, ces sommets r ont le même voisinage dans S).

Ces k sommets dominant $Z_A \cup H_1 \cup \{v_1, v_2\}$ si au moins un sommet est choisi dans le cas a , sinon ils dominant seulement Z_A .

Cas où un sommet est choisi dans le cas a : v_3, v_4, v_5 ne sont pas dominés par les $q + k$ sommets déjà sélectionnés (H_1 est une clique, donc $r \in R_1$ domine $H_1 \cup \{v_1, v_2\}$). Donc un ensemble dominant minimum de G est de taille au moins $q + k + 1$. En ajoutant les sommets v_3, v_5 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Si il existe un sommet $v \in V(C) \cup S$, qui est universel aux sommets restants non-dominés, nous le prenons. Cette opération peut être faite en temps polynomial.

Cas où tous les sommets sont choisis dans le cas b : il reste à dominer C et des sommets de $S_2 \cup S_3 \cup S_4$. Donc un ensemble dominant de G est de taille au moins $q + k + 1$. En ajoutant les trois sommets v_1, v_3, v_5 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Si il existe un sommet $v \in S_5$ qui est universel au reste des sommets non-dominés, alors nous le prenons. Sinon, nous cherchons une paire $\{v, v'\} \subset N[V(C)]$ dominant ces sommets. Dans les deux cas, l'opération peut être faite en temps polynomial. \square

Lemme 2.17 *Si G est un graphe connexe sans-(griffe, C_5, C_6, C_7, C_8, P_8), alors un ensemble dominant minimum peut être calculé en temps polynomial.*

Preuve: D'après le Lemme 2.15, nous pouvons supposer que $P_7 \subseteq_i G$. Soit $P = v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - v_7$. D'après les Propriétés 2.2 et 2.3, nous pouvons supposer que tous les sommets contractables de G sont contractés et que G n'a pas de feuille.

Soit $W = V \setminus N[V(P)]$. D'après la Propriété 2.4, si $W = \emptyset$, alors on peut calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial. Nous pouvons donc supposer que $W \neq \emptyset$. Soit $S = \{v \in V \setminus V(P) : 2 \leq |N(v) \cap P| \leq 4\}$, et $S_i \subseteq S$ l'ensemble des sommets v tel que $|N(v) \cap V(P)| = i$. Soit $H_i = \{v \in S_2 : N(v) \cap V(P) = \{v_i, v_{i+1}\}, 1 \leq i \leq 6\}$. Puisque G est sans griffe, alors H_i est une clique. Si il existe une arête $r_i r_{i+1} \in E$ où $r_i \in H_i, r_{i+1} \in H_{i+1}$, alors $P = v_1 - \dots - v_i - r_i - r_{i+1} - v_{i+2} - \dots - v_7 = P_8$, une contradiction. Si il existe une arête $r_i r_j \in E$ où $r_i \in H_i, r_j \in H_j$ et $j \geq i + 3$, alors $C_p \subseteq_i G, p \geq 5$, une contradiction. Donc H_1 est anti-complet à H_2, H_4, H_5, H_6 ; et H_2 est anti-complet à H_3, H_5, H_6 ; et H_3 est anti-complet à H_4, H_6 .

Nous définissons R_i comme les sommets de H_i ayant un voisin dans W , *i.e.* $R_i = \{v \in H_i : N(v) \cap W \neq \emptyset\}$, pour $1 \leq i \leq 6$. Puisque G est sans P_8 , alors $R_1 = R_6 = \emptyset$.

Soit $w \in W$. Nous montrons qu'il ne peut pas exister trois indices $1 \leq i < j < k \leq 6$ tels que w a trois voisins $r_i \in R_i, r_j \in R_j, r_k \in R_k$. Supposons, par contradiction, que ces trois voisins de w existent. Puisque $R_1 = R_6 = \emptyset$, alors $2 \leq i < j < k \leq 5$. Puisque G est sans griffe et que H_p est anti-complet à H_{p+1} , ces trois indices ne peuvent être successifs. Donc sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $i = 2, j = 4, k = 5$. Comme H_2 est anti-complet à H_5 , nous avons $v_3 - r_2 - w - r_5 - v_5 - v_4 - v_3 = C_6$, une contradiction. Donc pour tout $w \in W$, w a au plus deux voisins r_i, r_j tels que $r_i \in R_i, r_j \in R_j, i \neq j$.

Si w a deux voisins $r_i \in R_i, r_j \in R_j, i < j$, alors soit $r_i \in R_2, r_j \in R_4$; ou $r_i \in R_3, r_j \in R_5$ (rappelons que H_i est anti-complet à H_{i+1}, H_p , où $p \geq i + 3$, et que $R_1 = R_6 = \emptyset$).

Si w a deux voisins $r_i \in R_2, r_j \in R_4$, respectivement $r_i \in R_3, r_j \in R_5$, alors $r_i r_j \in E$, sinon $w - r_j - v_4 - v_3 - r_i - w = C_5 \subseteq_i G$, respectivement $w - r_j - v_5 - v_4 - r_i - w = C_5 \subseteq_i G$, une contradiction.

Soit $Z_{24} = \{w \in W : N_{R_2}(w) \neq \emptyset, N_{R_4}(w) \neq \emptyset\}$ et $Z_{35} = \{w \in W : N_{R_3}(w) \neq \emptyset, N_{R_5}(w) \neq \emptyset\}$. Nous montrons que Z_{24} est anti-complet à Z_{35} . Supposons, par contradiction, qu'il y ait $w_1 \in Z_{24}, w_2 \in Z_{35}$ où $w_1 w_2 \in E$. Soit $r_1 \in R_2$ un voisin de w_1 et $r_2 \in R_5$ un voisin de w_2 . Puisque $r_1 r_2 \notin E$, alors $w_1 - r_1 - v_3 - v_4 - v_5 - v_6 - r_2 - w_2 - w_1 = C_8$, une contradiction.

Nous montrons que nous pouvons supposer que Z_{24} et Z_{35} sont deux ensembles indépendants de G . Les deux ensembles étant symétrique, nous montrons que Z_{24} est indépendant. Supposons, par contradiction, qu'il y ait $w_1, w_2 \in Z_{24}$ tels que $w_1 w_2 \in E$. Nous montrons que $N_{R_2}(w_1) = N_{R_2}(w_2)$. Si $N_{R_2}(w_1) \neq N_{R_2}(w_2)$, alors il existe $r_2 \in R_2$ qui est un voisin de w_1 mais qui n'est pas voisin de w_2 . Alors $w_2 - w_1 - r_2 - v_3 - \dots - v_7 = P_8$, une contradiction. Nous montrons que $N_{R_4}(w_1) = N_{R_4}(w_2)$. Si $N_{R_4}(w_1) \neq N_{R_4}(w_2)$, alors il existe $r_4 \in R_4$ qui est un voisin de w_1 mais qui n'est pas voisin de w_2 . Il y a $r_2 \in R_2$ un voisin de w_1 et w_2 . Puisque $r_2 r_4 \in E$, alors $G[\{v_2, r_2, r_4, w_2\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_{R_2}(w_1) = N_{R_2}(w_2)$ et $N_{R_4}(w_1) = N_{R_4}(w_2)$. D'après la Propriété 2.2, il existe $s \notin R_2 \cup R_4$ tel que s est un voisin de w_1 mais qui n'est pas voisin de w_2 . Soit $r_2 \in R_2$ un voisin de w_1 et w_2 . Si $s r_2 \notin E$, alors $s - w_1 - r_2 - v_3 - \dots - v_7 = P_8$, une contradiction. Si $s r_2 \in E$, alors $G[\{v_2, r_2, s, w_2\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc Z_{24} est un ensemble indépendant et par symétrie Z_{35} est aussi un ensemble indépendant. De plus, puisque G est sans griffe, alors pour toute paire distincte $w, w' \in Z_{24} \cup Z_{35}$, nous avons $N(w) \cap N(w') = \emptyset$.

Pour toute paire distincte $w, w' \in Z_{24}$, respectivement $w, w' \in Z_{35}$, $N_{R_2}(w)$ est anti-complet à $N_{R_4}(w')$; et $N_{R_4}(w)$ est anti-complet à $N_{R_2}(w')$, respectivement $N_{R_3}(w)$ est anti-complet à $N_{R_5}(w')$; et $N_{R_5}(w)$ est anti-complet à $N_{R_3}(w')$. Supposons, par contradiction, que w ait un voisin $r_2 \in R_2$, et que w' ait un voisin $r_4 \in R_4$, et tels que $r_2 r_4 \in E$. Alors $G[\{v_2, r_2, w, r_4\}]$ est une griffe, une contradiction.

Soit $Z_i = \{w \in W : N(w) \cap R_i \setminus (N_{R_i}(Z_{24} \cup Z_{35})) \neq \emptyset\}$, $2 \leq i \leq 5$. Nous montrons que Z_2, Z_3, Z_4, Z_5 sont deux à deux anti-complets. Si il existe une arête $w_2 w_4 \in E$, où $w_2 \in Z_2$, $w_4 \in Z_4$, avec $r'_2 \in R_2$, $r'_4 \in R_4$ les voisins respectifs de w_2, w_4 , alors $w_2 - r'_2 - v_3 - v_4 - r'_4 - w_4 - w_2 = C_6$ (notons que $r'_2 r'_4 \notin E$ sinon $G[\{v_2, r'_2, w_2, r'_4\}]$ est une griffe), une contradiction. Par symétrie, il n'y a pas d'arête entre Z_3 et Z_5 . Si il existe une arête $w_2 w_5 \in E$, où $w_2 \in Z_2$, $w_5 \in Z_5$, avec $r'_2 \in R_2$, $r'_5 \in R_5$ les voisins respectifs de w_2, w_5 , alors $w_2 - r'_2 - v_3 - v_4 - v_5 - r'_5 - w_5 - w_2 = C_7$ (rappelons que $r'_2 r'_5 \notin E$), une contradiction. Si il existe une arête $w_4 w_5 \in E$ où $w_4 \in Z_4$, $w_5 \in Z_5$, avec $r'_4 \in R_4$, $r'_5 \in R_5$ les voisins respectifs de w_4, w_5 , alors $w_4 - r'_4 - v_5 - r'_5 - w_5 - w_4 = C_5$ (rappelons que $r'_4 r'_5 \notin E$), une contradiction. Par symétrie, il n'y a pas d'arête entre Z_2, Z_3 .

Soit $Y = W \setminus (Z_2 \cup Z_3 \cup Z_4 \cup Z_5 \cup Z_{24} \cup Z_{35})$. Observons que pour tout $w \in Y$, nous avons $N_{Z_2}(w) = N_{Z_5}(w) = N_{Z_{24}}(w) = N_{Z_{35}}(w) = \emptyset$, sinon $P_8 \subseteq_i G$. Maintenant, si $w \in Y$ a deux voisins $w_3 \in Z_3$, $w_4 \in Z_4$, alors $C_6 \subseteq_i G$, une contradiction. Donc $Y = Y_3 \cup Y_4$ où $Y_3 \cap Y_4 = \emptyset$, $Y_3 = \{w \in Y : N_{Z_3}(w) \neq \emptyset\}$, $Y_4 = \{w \in Y : N_{Z_4}(w) \neq \emptyset\}$. De plus Y_3 est anti-complet à Y_4 , sinon $C_7 \subseteq_i G$.

Nous montrons que nous pouvons supposer que Z_2, Z_5, Y_3, Y_4 sont quatre ensembles indépendants de G . Les arguments étant les mêmes pour les quatre ensembles, nous prouvons notre affirmation sur Z_2 . Supposons, par contradiction, qu'il y ait $w_1, w_2 \in Z_2$ tels que $w_1 w_2 \in E$. Nous montrons que $N_{R_2}(w_1) = N_{R_2}(w_2)$. Si $N_{R_2}(w_1) \neq N_{R_2}(w_2)$, alors il existe $r_2 \in R_2$ qui est un voisin de w_1 mais qui n'est pas voisin de w_2 . Alors $w_2 - w_1 - r_2 - v_3 - \dots - v_7 = P_8$, une contradiction. Puisque $N(w_1), N(w_2) \subseteq Z_2 \cup R_2$, le résultat découle de la Propriété 2.2. Donc Z_2, Z_5, Y_3, Y_4 sont quatre ensembles indépendants de G .

Puisque G est sans griffe, alors pour toute paire $w_1, w_2 \in Z_2 \cup Z_5 \cup Y_3 \cup Y_4$, nous avons $N(w_1) \cap N(w_2) = \emptyset$.

Nous montrons pour tout $w \in Y_3 \cup Y_4$ que $N(w)$ induit une clique dans G . Comme les deux cas sont symétriques, prenons $w \in Y_4$. Supposons qu'il y ait s, s' deux sommets non-adjacents dans $N(w)$. Puisque G est sans griffe, alors s, s' ne peuvent avoir un voisin commun dans R_4 . Soit $r \in R_4$ un voisin de s . Alors $s' - w - s - r - v_4 - v_3 - v_2 - v_1 = P_8$, une contradiction.

Puisque G est sans griffe, si il y a un sommet $r \in R_i$ avec un voisin $z \in Z_i$ et un sommet $s \in S$ tel que $sz \notin E$ et $v_i \notin N(s)$, alors G a une griffe (notons que le cas $v_{i+1} \notin N(s)$ est symétrique), une contradiction. Donc $N(Z_i)$ est anti-complet à H_j , $j \neq i$.

Nous montrons que nous pouvons supposer que $Z_2 = Z_5 = \emptyset$. Les arguments étant les mêmes pour les deux cas, nous pouvons considérer Z_2 . Soit $r, r' \in R_2$ deux voisins de $w \in Z_2$. D'après les arguments précédents, $N(w)$ est complet à H_2 et anti-complet à H_1, H_3, H_4, H_5, H_6 . Donc, il reste le cas $N_{S_3 \cup S_4}(r) \neq N_{S_3 \cup S_4}(r')$. Supposons que $N_{S_3 \cup S_4}(r) \neq N_{S_3 \cup S_4}(r')$. Soit $s \in S_3 \cup S_4$ tel que $rs \in E$ et $r's \notin E$. Si $\{v_2, v_3\} \not\subseteq N_P(s)$, alors $G[\{r, s, v_2, w\}]$ ou $G[\{r, s, v_3, w\}]$ est une griffe, une contra-

diction. Donc $\{v_2, v_3\} \subset N_P(s)$. Si $v_1 \notin N_P(s)$, respectivement $v_4 \notin N_P(s)$, alors $G[\{r', s, v_1, v_2\}]$, respectivement $G[\{r', s, v_3, v_4\}]$, est une griffe, une contradiction. Donc $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ mais $G[\{r, s, v_1, v_4\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N[r] = N[r']$, une contradiction. Donc w est une feuille, une contradiction.

Nous étudions maintenant la structure des ensembles Z_3 et Z_4 . Les deux cas étant symétriques, nous pouvons considérer Z_4 . Pour toute paire distincte $w_1, w_2 \in Z_4$ tels que $w_1 w_2 \in E$, alors il n'y a pas deux sommets $w'_1, w'_2 \in Z_4$ tels que $w'_1 w_1 \in E, w'_1 w_2 \notin E$ et $w'_2 w_2 \in E, w'_2 w_1 \notin E$. Supposons, par contradiction, qu'il y ait deux de ces sommets. Premièrement, nous supposons que w_1, w_2 ont deux voisins respectifs $r_1, r_2 \in R_4, r_1 \neq r_2$. Si $w'_1 r_2 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r_2 - w_2 - w_1 - w'_1 = P_8$, une contradiction. Si $w'_1 r_2 \in E$, alors $G[\{v_4, r_2, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Deuxièmement, sans perte de généralité, $r_1 \in R_4$ est un voisin commun de w_1, w_2 et $r_2 \in R_4$ est un voisin de w_2 mais n'est pas un voisin de w_1 . Si $w'_1 r_2 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r_2 - w_2 - w_1 - w'_1 = P_8$, sinon $G[\{v_4, r_2, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Troisièmement, $r_1, r_2 \in R_4$ sont deux voisins communs de w_1, w_2 (r_1, r_2 ne sont pas nécessairement distincts). Si, sans perte de généralité, $w'_1 r_1 \in E$, alors $G[\{v_4, r_1, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $w'_1 r_1, w'_1 r_2 \notin E$, alors w'_1 a un voisin $r'_1 \in R_4, r'_1 \neq r_1, r_2$. Si $r'_1 w_2 \in E$, alors $G[\{v_4, r'_1, w_2, w'_1\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $r'_1 w_2 \notin E$. Si $r'_1 w_1 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r'_1 - w'_1 - w_1 - w_2 = P_8$, une contradiction. Donc $r'_1 w_1 \in E$. Si $r'_1 w'_2 \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r'_1 - w_1 - w_2 - w'_2 = P_8$, une contradiction. Donc $r'_1 w'_2 \in E$, mais $G[\{v_4, r'_1, w_1, w'_2\}]$ est une griffe, une contradiction.

En conséquence des propriétés précédentes, chaque composante connexe A_i de $Z_3 \cup Z_4$ a un sommet universel. Aussi, G étant sans griffe deux composantes connexes distinctes ne peuvent partager un voisin commun dans $R_3 \cup R_4$. De plus, chaque $w_4 \in Z_3 \cup Z_4$ n'est pas une feuille.

Nous montrons que $w \in Y_3 \cup Y_4$ est relié à un sommet universel d'une composante connexe A_i de $Z_3 \cup Z_4$. Les deux cas étant symétriques, nous considérons Z_4 . Soit $w \in Z_4$. Nous pouvons donc supposer que les voisins de w ne sont pas universels dans A_i . Soit $s \in A_i$ un voisin de w , et soit $u, u \neq s$, un sommet universel de A_i . Puisque s n'est pas universel, il existe $v \in A_i$ tel que $sv \notin E$ et $wv \in E$. Puisque $N(w)$ est une clique, alors $wv \notin E$. Soit $r \in R_4$ un voisin de s . Puisque G est sans griffe, alors $rv \notin E$. Soit $r', r' \in R_4, r' \neq r$, un voisin de v . Comme précédemment $r's \notin E$. Si $r'u \notin E$, alors $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r' - v - u - s = P_8$, sinon $v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - r' - u - s - w = P_8$, une contradiction.

Nous sommes prêts à construire un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial.

Premièrement, nous traitons le cas $Z_{24} \neq \emptyset$ (le cas $Z_{35} \neq \emptyset$ est similaire). Soit $r_2 \in R_2, r_4 \in R_4$ deux voisins de $w \in Z_{24}$. Rappelons que $N(Z_{24}) \subseteq R_2 \cup R_4$.

Nous montrons que $R_3 = \emptyset$. Supposons qu'il y ait un sommet $w' \in W$ avec un voisin $r_3 \in H_3$ (donc $R_3 \neq \emptyset$). Notons que w' ne peut être un voisin de r_2 ou r_4 . Alors $w' - r_3 - v_3 - r_2 - r_4 - v_5 - v_6 - v_7 = P_8$, une contradiction. Nous en déduisons que $Z_{35} = \emptyset$. Il n'y a pas de sommet $w' \in W$, ayant r_2 comme voisin, sinon $G[\{v_2, r_2, r_4, w'\}]$ est une griffe. Par symétrie, il n'y a pas de sommet $w' \in W$, ayant r_4 comme voisin.

Soit $r_2 \in R_2, r'_2 \in R_2, r_2 \neq r'_2$ tels que r_2 a un voisin $w \in Z_{24}$ et r'_2 a un voisin $w' \in Z_{24}$. Soit $r_4 \in R_4, r'_4 \in R_4, r_4 \neq r'_4$ tels que r_4 est voisin de w , et r'_4 est voisin de w' . Nous montrons que $N_{S \setminus H_4}(r_2) = N_{S \setminus H_4}(r'_2)$, respectivement $N_{S \setminus H_2}(r_4) = N_{S \setminus H_2}(r'_4)$.

Soit $i = 2$ (le cas $i = 4$ est symétrique). Nous supposons, par contradiction, qu'il existe $s \in S \setminus H_4$ tel que $r_2 s \in E$, $r'_2 s \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin S_2$. Donc $s \in S_3 \cup S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$, alors $G[\{r'_2, v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r'_2, v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j+2}\}$, $j \geq 3$, alors $G[\{r_2, w, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r_2, v_1, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_j, v_{j+1}\}$, $j \geq 4$, alors $G[\{r_2, v_1, v_j, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_j, v_{j+1}\}$, $j \geq 4$, alors $G[\{r'_2, v_1, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_j, v_{j+1}, v_{j'}, v_{j'+1}\}$, $j \geq 3$, $j' \geq j+2$, alors $G[\{r_2, w, v_2, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_{S \setminus H_4}(r_2) = N_{S \setminus H_4}(r'_2)$ et $N_{S \setminus H_2}(r_4) = N_{S \setminus H_2}(r'_4)$.

Soit $r_4 \in R_4$, $r'_4 \in R_4$, $r_4 \neq r'_4$ tels que r_4 a un voisin $w \in Z_4$, et r'_4 a un voisin $w' \in Z_4$. Nous montrons que $N_S(r_4) = N_S(r'_4)$.

Supposons, par contradiction, qu'il y ait $s \in S$ tel que $r_4 s \in E$, $r'_4 s \notin E$. D'après les arguments précédents $s \notin H_1 \cup H_3 \cup H_4 \cup H_5$. Donc $s \in H_2 \cup H_6 \cup S_3 \cup S_4$. Si $s \in H_2$ ou $s \in H_6$, alors $G[\{v_4, w, r_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_3 \cup S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3\}$, alors $G[\{v_1, v_3, r_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{v_5, w, r_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{v_5, v_6, r'_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{v_3, v_4, r'_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_5, v_6, v_7\}$, alors $G[\{v_4, w, r_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $s \in S_4$. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, alors $G[\{r_4, v_1, v_3, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r'_4, v_5, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r_4, v_3, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_4, v_5, v_6, v_7\}$, alors $G[\{r'_4, v_3, v_4, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_6, v_7\}$ ou $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_6, v_7\}$, alors $G[\{r_4, v_2, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_3, v_4, v_6, v_7\}$, alors $G[\{r_4, v_3, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_5, v_6\}$ ou $N_P(s) = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$, alors $G[\{r_4, v_2, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Si $N_P(s) = \{v_1, v_2, v_4, v_5\}$, alors $G[\{r'_4, v_5, v_6, s\}]$ est une griffe, une contradiction. Donc $N_S(r_4) = N_S(r'_4)$. Par symétrie, pour $r_2 \in R_2$, $r'_2 \in R_2$, $r_2 \neq r'_2$ tels que r_2 a un voisin $w \in Z_2$, et r'_2 un voisin $w' \in Z_2$, nous avons $N_S(r_2) = N_S(r'_2)$.

Nous construisons maintenant un ensemble dominant minimum de G .

- $|Z_{24}| \geq 2$. Nous prenons $r_2 \in R_2$ un voisin de w , et pour chaque sommet $w' \in Z_{24}$ nous prenons un sommet adjacent $r'_4 \in R_4$. Pour chaque $w' \in Y_4$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de Z_4 qui est relié à w' . Pour chaque composante connexe A_i de Z_4 qui n'a pas de sommet relié à Y_4 , nous prenons un sommet universel de A_i . Ces sommets dominent $Z_{24} \cup Y_4 \cup Z_4 \cup H_2 \cup H_4 \cup \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Puisque v_1, v_7 n'ont pas de voisin commun, au moins deux autres sommets sont nécessaires pour dominer le graphe. En prenant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire distincte s_1, s_7 où s_i est un voisin de v_i , $i \in \{1, 7\}$. Nous pouvons donc vérifier si il existe un ensemble dominant minimum avec seulement deux sommets supplémentaires en temps polynomial (puisque'il y a au plus $O(n^2)$ paires possibles).
- $|Z_{24}| = 1$. Pour chaque $w' \in Y_4$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de Z_4 qui est relié à w' . Si il existe un sommet $r \in R_4$ complet à la composante connexe A_i de Z_4 qui n'a pas de sommet relié à Y_4 , alors nous prenons r . Pour le reste des composantes connexes A_i de Z_4 qui n'ont pas de sommet relié à Y_4 , nous prenons un sommet universel de

A_i . Ces sommets dominent $Y_4 \cup Z_4$ (notons que H_2, H_4 ne sont pas nécessairement dominés). Puisque v_1, v_7, w n'ont pas de voisin commun, au moins trois autres sommets sont nécessaires pour dominer G . En ajoutant les quatre sommets v_2, v_4, v_6, w , nous avons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum en ajoutant seulement trois sommets supplémentaires s_1, s_7, r_4 ou s_1, s_7, r_2 , et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.

Si $Z_{24} = Z_{35} = \emptyset$, alors nous construisons un ensemble dominant minimum de G comme suit :

- $Y_3, Y_4 \neq \emptyset$. Pour chaque $w \in Y_3 \cup Y_4$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de $Z_3 \cup Z_4$ qui est relié à w . Si il y a $r_4 \in R_4$ qui est complet à une composante connexe A_i de Z_4 qui n'a pas de sommet relié à $Y_3 \cup Y_4$ alors nous prenons r_4 . Nous faisons de même pour les composantes connexes de Z_3 n'ayant pas de voisin dans Y_3 . Pour les composantes connexes restantes A_i de $Z_3 \cup Z_4$ qui ont un sommet relié à $Y_3 \cup Y_4$, nous prenons un sommet universel dans A_i . Ces sommets dominent $Y_3 \cup Z_3 \cup Y_4 \cup Z_4$ (notons que H_2, H_4 ne sont pas nécessairement dominés). Puisque v_1, v_7 n'ont pas de voisin commun, alors deux autres sommets sont nécessaires pour dominer G . En ajoutant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire distincte s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum de G avec seulement deux sommets supplémentaires et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.
- $Y_3 \neq \emptyset, Y_4 = \emptyset$ ou $Y_4 \neq \emptyset, Y_3 = \emptyset$. Les deux cas étant symétriques, soit $Y_4 = \emptyset$.
 - $Z_4 \neq \emptyset$. Pour chaque $w \in Y_3$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de Z_3 relié à w . Si il y a $r_4 \in R_4$ qui est complet à une composante connexe A_i de Z_4 , alors nous prenons r_4 . Si il y a $r_3 \in R_3$ qui est complet à une composante connexe A_j de Z_3 qui n'a pas de sommet relié à Y_3 , alors nous prenons r_3 . Nous prenons un sommet universel dans chaque composante restante $A_l, A_l \neq A_i, A_j$, de $Z_3 \cup Z_4$. Ces sommets dominent $Y_3 \cup Z_3 \cup Z_4$. Puisque v_1, v_7 n'ont pas de voisin commun, au moins deux autres sommets sont nécessaires pour dominer G . En ajoutant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum de G avec seulement deux sommets supplémentaires et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.
 - $Z_4 = \emptyset$. Pour chaque $w \in Y_3$, nous prenons un sommet universel dans la composante connexe A_i de Z_3 relié à w . Si il y a $r_3 \in R_3$ qui est complet à une composante connexe A_i de Z_3 qui n'a pas de sommet relié à Y_3 , alors nous prenons r_3 . Nous prenons un sommet universel de chacune des composantes connexes restantes A_i de Z_3 . En ajoutant les sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum de G avec seulement deux sommets supplémentaires et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.
- $Y_3, Y_4 = \emptyset$.
 - $Z_3, Z_4 \neq \emptyset$. Si il y a $r_4 \in R_4$, respectivement $r_3 \in R_3$, qui est complet à une composante

connexe A_i de Z_4 , respectivement de Z_3 , alors nous prenons r_4 , respectivement r_3 . Pour chaque composante connexe restante de $Z_3 \cup Z_4$, nous prenons un sommet universel de celle-ci. En ajoutant les sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum de G avec seulement deux sommets supplémentaires et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.

- $Z_3 \neq \emptyset, Z_4 = \emptyset$ ou $Z_4 \neq \emptyset, Z_3 = \emptyset$. Soit $Z_3 \neq \emptyset$. Si il y a $r_3 \in R_3$ qui est complet à une composante connexe A_i de Z_3 , alors nous prenons r_3 . Pour chaque composante connexe restante de Z_3 , nous prenons un sommet universel de celle-ci. En ajoutant les trois sommets v_2, v_4, v_6 , nous obtenons un ensemble dominant de G (pas nécessairement minimum). Nous vérifions si il existe une paire s_1, s_7 où s_i est un voisin de $v_i, i \in \{1, 7\}$. Dans ce cas il existe un ensemble dominant minimum de G avec seulement deux sommets supplémentaires et nous pouvons le vérifier en temps polynomial.
- $Z_3 = Z_4 = \emptyset$. Alors $V = N[V(C)]$ et d'après la Propriété 2.4 nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum de G en temps polynomial.

□

D'après les Lemmes 2.6, 2.7, 2.10, 2.16, 2.17, nous obtenons le résultat espéré suivant :

Théorème 2.18 DOMINANT MINIMUM *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_8 .*

2.3 Conclusion

Nous avons montré que DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans chemin induit de taille huit. Nous laissons le problème ouvert suivant :

Problème : existe-t-il un entier positif k , où $k \geq 9$, tel que DOMINANT MINIMUM est NP-complet dans les graphes sans griffe et sans P_k ?

Si la réponse était positive, le défi serait de montrer une dichotomie, *i.e.* trouver l'entier positif k tel que DOMINANT MINIMUM est NP-complet dans les graphes sans griffe et sans P_k , mais peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe et sans P_{k-1} .

Nous pensons qu'il serait aussi intéressant d'étudier la complexité de DOMINANT MINIMUM dans les graphes sans griffe et sans H , où H est un graphe fini fixé, autres que ceux rencontrés dans ce chapitre. Nous avons d'ailleurs commencé cette étude même si nos résultats préliminaires ne sont pas contenus dans ce document. Nous avons aussi étudié les graphes sans griffe de diamètre d et pensons avoir établi une dichotomie pour $d = 2$ et $d = 3$. Nous poursuivons nos travaux sur l'étude du DOMINANT MINIMUM dans les graphes de diamètre d et sans H pour établir d'autres dichotomies en fonction du graphe fixé ou du diamètre.

Chapitre 3

Sommets persistants et absents pour le dominant

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail commun avec François Delbot et Christophe Picouleau, *c.f.* [16].

3.1 Introduction

Dans la même veine que les travaux de E. Boros et al. dans [13] sur le stable maximum, soit $\Omega(G)$ l'ensemble de tous les ensembles dominants minimums de G . Soit $\text{core}(G) = \bigcap \{S : S \in \Omega(G)\}$ l'ensemble des sommets appartenant à tous les ensembles de $\Omega(G)$. Nous désignons $\text{corona}(G) = \bigcup \{S : S \in \Omega(G)\}$ comme l'ensemble des sommets appartenant à au moins un ensemble de $\Omega(G)$. Enfin, soit $\text{anticore}(G) = V(G) - \text{corona}(G)$ l'ensemble des sommets n'appartenant à aucun ensemble de $\Omega(G)$.

Nous cherchons à caractériser les sommets de $\text{core}(G)$, $\text{corona}(G)$ et $\text{anticore}(G)$.

La partition suivante des sommets d'un graphe, relativement au nombre de domination, est définie dans [45] page 136 :

- $V^0 = \{v \in V : \gamma(G - v) = \gamma(G)\}$;
- $V^+ = \{v \in V : \gamma(G - v) > \gamma(G)\}$;
- $V^- = \{v \in V : \gamma(G - v) < \gamma(G)\}$.

Les deux caractérisations suivantes sont données dans [45] page 137 :

Théorème 3.1 *Un sommet $v \in V^+$ si et seulement*

1. *v n'est pas un sommet isolé et $v \in \text{core}(G)$, et*
2. *aucun ensemble $S \subseteq V - N[v]$ avec cardinalité $\gamma(G)$ ne domine $G - v$.*

Théorème 3.2 *Un sommet $v \in V^-$ si et seulement si $pn[v, S] = \{v\}$ pour un ensemble dominant minimum S de G où $v \in S$.*

Remarque 3.3 *D'après le Théorème 3.2, aucun sommet $v \in \text{anticore}(G)$ n'appartient à V^- .*

Dans la section 3.2, nous donnons des caractérisations sur l'appartenance d'un sommet v à $\text{core}(G)$ ou $\text{corona}(G) - \text{core}(G)$ ou $\text{anticore}(G)$. Puis dans la section 3.3, pour certaines classes de graphes, nous montrons qu'aucun sommet n'appartient à $\text{core}(G) \cap V^0$, ce qui a pour conséquence de simplifier la caractérisation des sommets de $\text{core}(G)$ pour ces familles de graphes. Enfin dans la section 3.4, nous donnons des réponses positives à des questions ouvertes posées dans [69], sur l'existence de graphes avec une partition particulière des sommets en V^0, V^+ , tel que $\text{core}(G) \neq \emptyset$.

3.2 Caractérisation des sommets

Nous utilisons les Théorèmes 3.1 et 3.2 pour caractériser l'appartenance d'un sommet donné à $\text{core}(G)$ ou $\text{corona}(G) - \text{core}(G)$ ou $\text{anticore}(G)$. Aussi, nous soulevons des problèmes algorithmiques de ces caractérisations.

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Étant donné $v \in V$, nous définissons le graphe $G_v + u = (V', E')$, où $u \notin V$ comme : $V' = V \cup \{u\}$ et $E' = E \cup \{uv\}$.

Remarque 3.4 *Tous les ensembles dominants de $G_v + u$ contiennent u ou v . De plus, si il existe un ensemble dominant minimum de $G_v + u$ qui contient u , alors il en existe un autre qui contient v (mais la réciproque n'est pas nécessairement vraie).*

Théorème 3.5 $v \in \text{anticore}(G)$ si et seulement si $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$.

Preuve: Soit $v \in \text{anticore}(G)$. D'après la Remarque 3.4, un ensemble dominant minimum S de $G_v + u$ contient soit u ou v . Donc S a un sommet de plus que n'importe quel ensemble dominant de G . Maintenant soit $v \notin \text{anticore}(G)$. Supposons, par contradiction, que $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$. Alors il existe S un ensemble dominant de G contenant v . Donc S est aussi un dominant de $G_v + u$, une contradiction. \square

Lemme 3.6 $v \in \text{core}(G) \cap V^-$ si et seulement si v est un sommet isolé.

Preuve: Clairement si v est isolé, alors $v \in \text{core}(G) \cap V^-$. Nous pouvons donc supposer qu'il existe un sommet non-isolé v tel que $v \in \text{core}(G) \cap V^-$. Puisque $\gamma(G - v) < \gamma(G)$, il existe un ensemble dominant S de $G - v$ de taille $\gamma(G) - 1$. Soit w un voisin de v dans G . Nous avons donc $S \cup \{w\}$ un ensemble dominant minimum de G ne contenant pas v , une contradiction. \square

Théorème 3.7 $v \in \text{core}(G)$ si et seulement l'une des trois conditions suivantes est vraie :

1. v est isolé; ou
2. $\gamma(G - v) > \gamma(G)$; ou
3. $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et pour tout ensemble dominant S de $G - v$ avec $|S| = \gamma(G)$, nous avons $S \cap N[v] = \emptyset$.

Preuve: Supposons que $v \in V$ respecte l'une des trois conditions précédentes. Si v est isolé, alors $v \in \text{core}(G)$. Si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$, alors $v \in V^+$ et d'après le Théorème 3.1, $v \in \text{core}(G)$. Supposons maintenant que v respecte (3), i.e. $v \in V^0$ et v n'est pas isolé. Soit S un ensemble dominant minimum

de G . Si $v \notin S$, alors $S \cap N[v] \neq \emptyset$, mais $S - \{v\}$ est de cardinalité $\gamma(G)$ et un ensemble dominant de $G - v$, une contradiction.

Supposons que $v \in \text{core}(G)$. Si $v \in V^-$, alors d'après le Lemme 3.6, v est isolé. Si $v \in V^+$, alors $\gamma(G - v) > \gamma(G)$. Reste à considérer le cas où $v \in V^0$. Il existe un ensemble dominant S de $G - v$ avec $|S| = \gamma(G)$. Si $S \cap N[v] \neq \emptyset$, alors S est un ensemble dominant minimum de G avec $v \notin S$, une contradiction. Donc tous les ensembles dominants S de $G - v$, où $|S| = \gamma(G)$, sont tels que $S \cap N[v] = \emptyset$. \square

Le graphe de la Figure 3.1 possède trois sommets dans $\text{core}(G)$ correspondant chacun à l'une des trois conditions de l'énoncé du Théorème 3.7.

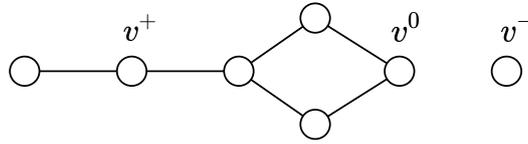


FIGURE 3.1 – $v^+ \in \text{core}(G) \cap V^+$, $v^0 \in \text{core}(G) \cap V^0$, $v^- \in \text{core}(G) \cap V^-$.

Le Théorème 3.7 peut être reformulé comme ci-dessous. Cette formulation pourrait être plus intéressante d'un point de vue algorithmique grâce au Théorème 3.5.

Théorème 3.8 $v \in \text{core}(G)$ si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vraie :

1. v est isolé ; ou
2. $\gamma(G - v) > \gamma(G)$; ou
3. $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et pour chaque $u \in N(v)$, nous avons $u \in \text{anticore}(G - v)$.

D'après les Théorèmes 3.5 et 3.7, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 3.9 $v \in \text{corona}(G) - \text{core}(G)$ si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vraie :

1. $v \in V^-$ et v n'est pas isolé ; ou
2. $v \in V^0$ et il existe un ensemble dominant S de $G - v$ où $|S| = \gamma(G)$ et tel que $S \cap N[v] \neq \emptyset$ et $\gamma(G_v + u) = \gamma(G)$.

Propriété 3.10 Soit \mathcal{C} une classe de graphes telle que pour tout $G \in \mathcal{C}$, $G_v + u \in \mathcal{C}$, et où DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial. Étant donné $G = (V, E) \in \mathcal{C}$ et $v \in V$, le problème pour décider si $v \in \text{core}(G)$ ou $v \in \text{anticore}(G)$ ou $v \in \text{corona}(G) - \text{core}(G)$ est dans la classe P.

Preuve: Soit $G \in \mathcal{C}$. Nous pouvons calculer k , la taille d'un ensemble dominant minimum de G , en temps polynomial. Il s'ensuit d'après le Théorème 3.5 que nous pouvons vérifier si $v \in \text{anticore}(G)$ en temps polynomial. Clairement, vérifier si v satisfait la condition 1. ou 2. du Théorème 3.8 peut être calculé en temps polynomial, et grâce au Théorème 3.5, on peut vérifier si v satisfait la condition 3. en temps polynomial. Donc, décider si $v \in \text{core}(G)$ ou $v \in \text{anticore}(G)$ ou $v \in \text{corona}(G) - \text{core}(G)$ est dans P. \square

3.3 Caractérisation des cores dans des classes de graphes

Comme énoncé au Théorème 3.7, il y a trois types de sommets dans $\text{core}(G)$. Dans cette section, nous montrons que pour certaines classes de graphes connexes avec au moins deux sommets, nous n'avons qu'un type de sommet dans $\text{core}(G)$ qui sont les sommets V^+ , *i.e.* $\text{core}(G) = V^+$. Notons que la restriction sur la connexité et le nombre de sommets nous permet d'avoir $\text{core}(G) \cap V^- = \emptyset$. Nous nous intéressons ici à identifier, quand cela est possible, les classes de graphes \mathcal{C} « les plus grandes » possibles telles que pour tout graphe $G \in \mathcal{C}$, $\text{core}(G) = V^+$. Nous entendons par là que nous cherchons une classe \mathcal{C}' « proche » de \mathcal{C} où $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ et telle qu'il existe un graphe $G' \in \mathcal{C}'$ où $\text{core}(G') \neq V^+$. Par exemple la classe des graphes sans P_4 peut être vu comme une classe de graphes proche de celle des graphes sans P_5 .

Nous commençons par donner des propriétés générales qui nous seront utiles plus tard.

Propriété 3.11 *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec au moins deux sommets. Si $v \in V$ est tel que $G[N[v]]$ est une clique, alors $v \notin \text{core}(G)$.*

Preuve: Soit $u \in N(v)$. Si il existe un ensemble dominant minimum S de G contenant v , alors $(S - v) \cup \{u\}$ est un autre ensemble dominant minimum. \square

Lemme 3.12 *Soit v un sommet d'articulation de G tel que $v \in \text{core}(G)$. Si pour toute composante connexe C de $G - v$ les sommets $V(C) \cap N(v)$ induisent une clique, alors $v \in V^+$.*

Preuve: Soit $v \in \text{core}(G)$. Supposons que $v \in V^0$. D'après le point 3 du Théorème 3.7, nous avons $\gamma(G-v) = \gamma(G)$ et tous les ensembles dominants S de $G-v$ avec $|S| = \gamma(G)$, sont tels que $S \cap N[v] = \emptyset$. Soit D un ensemble dominant minimum de G . Soit C_1, \dots, C_k , $k \geq 2$, les composantes connexes de $G - v$. Soit $S_i = S \cap C_i$, $D_i = D \cap C_i$, où $1 \leq i \leq k$. Puisque $v \in D$, il existe i tel que $|D_i| < |S_i|$. Sans perte de généralité, prenons $i = 1$. Clairement D_1 domine $C_1 - (C_1 \cap N[v])$. Si $D_1 \cap N[v] \neq \emptyset$, alors $D_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ domine G (rappelons que $C_1 \cap N[v]$ est une clique) mais $|D_1| + |S_2| + \dots + |S_k| < \gamma(G)$. Nous pouvons supposer que $D_1 \cap N[v] = \emptyset$. Soit $v_1 \in C_1 \cap N[v]$. Alors $|D_1 \cup \{v_1\}| \leq |S_1|$, et donc $D_1 \cup \{v_1\} \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ est un ensemble dominant minimum de G ne contenant pas v , contredisant $v \in \text{core}(G)$, et donc $v \notin V^0$.

D'après le Théorème 3.7 $v \notin V^-$, et donc $v \in V^+$. \square

Nous corrigeons une erreur publiée concernant les sommets d'articulations. L'énoncé de la Proposition 5 dans [6] est le suivant : *si un sommet d'articulation v de G est dans tous les ensembles dominants minimums de G , alors $\gamma(G - v) > \gamma(G)$* . Cela signifie que si un sommet v de G est un sommet d'articulation tel que $v \in \text{core}(G)$, alors $v \in V^+$. C'est une erreur puisqu'il existe un graphe possédant un sommet d'articulation dans $\text{core}(G) \cap V^0$, *c.f.* Figure 3.2.

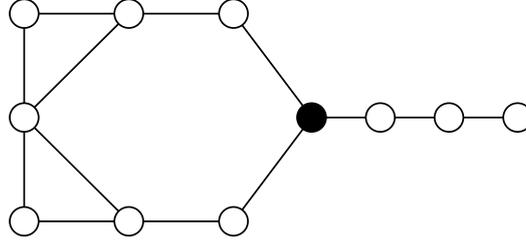


FIGURE 3.2 – Un graphe G où $\gamma(G) = 3$ et tel que le sommet noir appartient à $\text{core}(G) \cap V^0$.

Lemme 3.13 Soit G un graphe connexe avec au moins deux sommets et $v \in \text{core}(G)$. Soit C_1, \dots, C_k les composantes connexes de $G - N[v]$. Soit N_i les voisins de v avec un voisin dans C_i , où $1 \leq i \leq k$. Si $G[N_i]$ est une clique, alors $v \in V^+$.

Preuve: Supposons que $v \in V^0$. Si il n'y a pas de telle composante C_i , i.e. $G = N[v]$, alors d'après le Théorème 3.7, $v \in V^+$. Si $k = 1$, puisque le voisinage de v est une clique, alors $v \notin \text{core}(G)$. Nous en déduisons qu'il existe au moins une composante C_i . D'après le Théorème 3.7, $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et tous les ensembles de sommets S dominant $G - v$, où $|S| = \gamma(G)$, sont tels que $S \cap N[v] = \emptyset$. Soit D un ensemble dominant minimum de G . Soit N_i l'ensemble des voisins de v avec un voisin dans C_i , $1 \leq i \leq k$. Soit $S_i = S \cap (C_i \cup N_i)$, $D_i = D \cap (C_i \cup N_i)$, où $1 \leq i \leq k$.

Supposons que pour tout i , nous avons $|D_i| < |S_i|$. Sans perte de généralité $|D_1| = |S_1|$, $|D_2| = |S_2|$ tels que $u \in D_1 \cap D_2$. Notons que $D_1 \cup D_2$ dominant $C_1 \cup N_1 \cup C_2 \cup N_2$. Donc $D_1 \cup D_2 \cup S_3 \cup \dots \cup S_k$ est un ensemble dominant minimum de G , une contradiction.

Maintenant, nous pouvons supposer qu'il existe i tel que $|D_i| < |S_i|$. Sans perte de généralité, soit $i = 1$. Clairement D_1 domine C_1 , et $S_2 \cup \dots \cup S_k$ domine $C_2 \cup \dots \cup C_k$ et $N(v) - N_1$. Soit $v_1 \in N_1$. Donc $D_1 \cup \{v_1\} \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ est un ensemble dominant minimum de G puisque $N_1 \cup \{v\}$ est une clique. Donc $v \in V^+$, une contradiction. \square

3.3.1 Graphes triangulés

Nous rappelons qu'un graphe est triangulé si et seulement tout cycle de longueur au moins quatre contient une corde, i.e. il ne possède pas de cycle induit de longueur quatre ou plus. Nous montrons que pour tout graphe triangulé sans sommet isolé, $\text{core}(G) = V^+$. De plus, nous montrons que nous pouvons déterminer le statut d'un sommet (core, anticore, corona) en temps linéaire dans les arbres qui est une sous-classe des arbres.

Propriété 3.14 Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé connexe avec au moins deux sommets. Alors $v \in \text{core}(G)$ si et seulement si $v \in V^+$.

Preuve: D'après le Théorème 3.7, si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$, alors $v \in \text{core}(G)$. Donc nous pouvons supposer que $v \in \text{core}(G)$. Supposons, par contradiction, que $v \in V^0$. D'après le Théorème 3.7, $N_2(v) \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe N_i comme défini au Lemme 3.13 qui n'est pas une clique. Alors il existe $s, t \in N_i$ tels que st est une non-arête. Donc il existe un chemin entre s et t dans C_i . Soit P un tel plus court chemin. Donc $G[P \cup \{v\}]$ est un trou, une contradiction. Donc chaque N_i est une clique. Nous en déduisons du Lemme 3.13 que $v \in V^+$, une contradiction. \square

D'après la Propriété 3.14, le Théorème 3.5 et le Corollaire 3.9, nous obtenons le Théorème suivant.

Théorème 3.15 *Soit $G = (V, E)$ un graphe triangulé connexe avec au moins deux sommets.*

- $v \in \text{core}(G)$ si et seulement si $v \in V^+$;
- $v \in \text{anticore}(G)$ si et seulement si $\gamma(G_v + u) = \gamma(G) + 1$;
- $v \in \text{corona}(G) - \text{core}(G)$ si et seulement si $v \in V^-$, ou $v \in V^0$ et $\gamma(G_v + u) = \gamma(G)$.

Nous nous intéressons au cas particulier des arbres. Il est connu que nous pouvons calculer un ensemble dominant minimum en temps linéaire dans les arbres, *c.f.* [26]. De plus, étant donné un arbre G , le graphe $G_v + u$ est aussi un arbre. Nous en déduisons le résultat suivant.

Remarque 3.16 *Soit G un arbre et v un sommet de G . Décider si $v \in \text{core}(G)$ ou $v \in \text{anticore}(G)$ ou $v \in \text{corona}(G) - \text{core}(G)$ peut être fait en temps linéaire.*

3.3.2 Cographe

La classe des cographe est aussi la classe des graphes sans P_4 , *c.f.* [20] p. 176. Si G est un cographe, alors il admet la décomposition suivante, *c.f.* [20] p. 14 :

- un sommet est un cographe ;
- si G_1 et G_2 sont deux cographe, alors $G_1 + G_2$ (l'union disjointe de G_1 et G_2) est un cographe ;
- si G_1 et G_2 sont deux cographe, alors $G_1 \times G_2$ (l'union de G_1 et G_2) est un cographe.

Donc si G est un cographe connexe avec au moins deux sommets, alors il existe deux cographe G_1, G_2 tels que $G = G_1 \times G_2$.

Propriété 3.17 *Soit G un cographe avec au moins deux sommets. Alors $0 \leq |\text{core}(G)| \leq 1$. Si $|\text{core}(G)| = 1$, alors $\text{core}(G) = V^+$.*

Preuve: Soit $G = (V, E) = G_1 \times G_2$, où $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ sont deux cographe non-vides (mais pas nécessairement connexes). Comme V_1 est complet à V_2 , nous pouvons construire un ensemble dominant de G en prenant n'importe quelle paire $\{v_1, v_2\}$, où $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Donc nous avons $\gamma(G) \leq 2$.

Supposons $\gamma(G) = 2$. Clairement $\min\{|V_1|, |V_2|\} \geq 2$, sinon il existe un sommet universel dominant G . Un ensemble dominant minimum S de G est tel que $S = \{v_1, v_2\}$ avec $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$. Pour n'importe quel sommet $v'_1 \in V_1, v'_1 \neq v_1$, nous avons $S' = (S \setminus \{v_1\}) \cup \{v'_1\}$ un ensemble dominant minimum de G . Donc $\text{core}(G) = \emptyset$. Nous en déduisons que $|\text{core}(G)| \leq 1$.

Maintenant supposons que $\gamma(G) = 1$. Donc G possède un sommet universel, disons v_1 , où $v_1 \in V_1$. Soit $v_1 \in \text{core}(G)$. Si $v_1 \in V^0$, alors il existe $\{v\}$ un ensemble dominant minimum où $v \in V \setminus N[v_1]$. Puisque $N[v_1] = V$, ce n'est pas possible. Donc $v_1 \in V^+$ \square

Il est naturel de se poser la question suivante : est-ce que la Propriété 3.17 (au moins la dernière condition) reste vraie pour les graphes sans $P_k, k \geq 5$? Pour une première réponse, regardons le graphe de la Figure 3.3. Ce graphe G possède un chemin induit de taille cinq et $\text{core}(G) \cap V^0 \neq \emptyset$. Observons

que ce graphe est aussi biparti. Ainsi $\text{core}(G) \cap V^0$ n'est pas systématiquement vide si G est un graphe biparti sans P_6 .

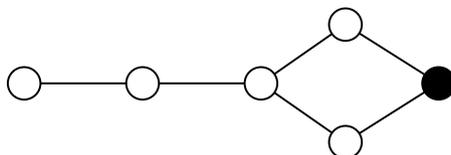


FIGURE 3.3 – Un graphe G biparti sans P_6 . Le sommet noir appartient à $\text{core}(G) \cap V^0$ et $\gamma(G) = 2$.

Notons qu'une erreur est présente dans l'article que nous avons publié et qui est associé à ce résultat, *c.f.* [16]. Nous avons annoncé avoir établi une dichotomie entre les graphes sans P_4 et sans P_5 sur l'existence ou non de ces sommets. Ce n'est en fait pas le cas. Il reste à savoir ce qu'il en est pour les graphes sans P_5 . Nous avons malheureusement laissé ce problème ouvert. Nous rajoutons tout de même le résultat suivant pour la classe des splits graphes qui est une sous-classe des graphes sans P_5 .

Propriété 3.18 *Soit G un split graphe avec au moins deux sommets. Si $\text{core}(G) \neq \emptyset$, alors $\text{core}(G) = V^+$.*

Preuve: Soit $G = (V, E)$ un split graphe. Rappelons que les splits graphes admettent une partition des sommets en une clique et un stable. Soit (K, I) une partition de V où K est une clique et I un stable. Comme I est un stable et que son voisinage induit une clique, on peut supposer que pour tout ensemble dominant minimum S de G , nous avons $S \cap I = \emptyset$. Soit $v \in S$ et S' un ensemble dominant minimum de $G - v$. Si $G - v$ est connexe, alors G est un split graphe et on peut supposer que $S' \cap I = \emptyset$; donc $N_G(v) \cap S' \neq \emptyset$, et nous en déduisons $v \notin \text{core}(G) \cap V^0$. Si $G - v$ n'est pas connexe, alors il existe un sommet $u \in N_G(v) \cap I$ tel que u est isolé dans $G - v$; donc $u \in S'$ et $N_G(v) \cap S' \neq \emptyset$, et nous en déduisons que $v \notin \text{core}(G) \cap V^0$. \square

3.3.3 Graphes sans griffe

Pour les mêmes raisons précédemment exposées, nous nous intéressons aux graphes connexes sans griffe (sans $K_{1,3}$) avec au moins deux sommets. Étant donné un graphe H , nous étudions la classe des graphes sans $(H, K_{1,3})$. Nous montrons que lorsque $H = \text{net}$ ou $H = P_7$, alors il peut exister un sommet v tel que $v \in \text{core}(G) \cap V^+$ ou $v \in \text{core}(G) \cap V^0$. Dans le cas où $H = \text{taureau}$, ou $H = P_6$, ou H est un sous-graphe du taureau, ou de P_6 , nous montrons que $v \in \text{core}(G) \cap V^0$ n'est pas possible, mais qu'il peut exister des sommets dans $\text{core}(G) \cap V^+$.

Nous donnons ici une propriété des graphes sans griffe de R. Allan et R. Laskar, *c.f.* [1], qui nous sera utile dans nos preuves : si G est un graphe sans griffe, alors $\gamma(G) = \iota(G)$. Rappelons que $\iota(G)$ est la taille d'un ensemble dominant minimum indépendant. Donc dans les graphes sans griffe, il existe un ensemble dominant minimum qui est indépendant.

Aussi, rappelons que la classe des lignes graphes est une sous-classe des graphes sans griffe. De plus, si G est sans diamant et sans trou impair, alors G est le line graphe d'un graphe biparti, *c.f.* [20]. La

Figure 3.4 montre un graphe G qui est le line graphe d'un graphe biparti. Notons que G est sans trou impair et sans $(K_{1,3}, K_4, \text{net}, \text{diamant})$, et tel que G a un sommet v où $v \in \text{core}(G) \cap V^0$.

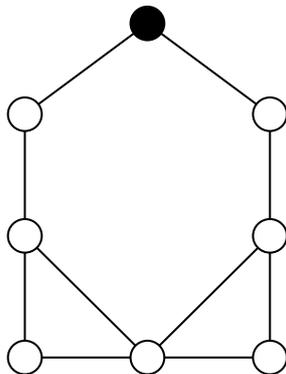


FIGURE 3.4 – Un graphe G sans trou impair et sans $(K_{1,3}, K_4, \text{net}, \text{diamant})$. Le sommet noir est dans $\text{core}(G) \cap V^0$ et $\gamma(G) = 2$.

Nous donnons maintenant notre résultat pour les graphes sans griffe et sans P_6 et pour les graphes sans griffe et sans taureau.

Propriété 3.19 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans griffe et sans P_6 avec au moins deux sommets. Alors $v \in \text{core}(G)$ si et seulement si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$.

Preuve: D'après le Théorème 3.7, si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$ alors $v \in \text{core}(G)$. Donc nous pouvons supposer que $v \in \text{core}(G)$. Supposons que v soit comme au point 3 du Théorème 3.7, *i.e.* $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et tous les ensembles S dominant $G - v$, où $|S| = \gamma(G)$, sont tels que $S \cap N[v] = \emptyset$.

Nous décrivons maintenant l'organisation de la preuve. Dans un premier temps, nous montrons comment le graphe G est structuré à distance p de v , où $1 \leq p \leq 5$. Dans un second temps, nous définissons la *partition en clique jumelle* de G . Puis nous montrons que nous pouvons réduire G à un graphe H obtenu grâce à la partition en clique jumelle. Ensuite nous montrons que G et H sont « équivalents » par rapport à l'ensemble dominant minimum. Pour finir, nous donnons des configurations d'ensembles dominants minimums afin d'en déduire que $\text{core}(G) \cap V^0 = \emptyset$.

D'après la Propriété 3.11, $N(v)$ n'est pas une clique. Puisque G est sans griffe, nous avons $\alpha(N(v)) = 2$. Pour n'importe quel ensemble dominant indépendant S , il existe a, b deux voisins privés de v par rapport à S tels que ab est une non-arête.

Si le sous-graphe $G[N(v)]$ n'est pas connexe, puisque G est sans griffe, alors $G[N(v)]$ est composé de deux cliques anti-complets K_a et K_b . Si le sous-graphe $G[N(v)]$ est connexe, alors un chemin induit maximal $P_k, k \geq 1$ dans $G[N(v)]$ est soit tel que $P_k = P_3$ ou $P_k = P_4$. Quand $P_k = P_3$, alors $G[N(v)]$ est composé de trois cliques $K_a, K_b, K_{a'}$ telles que K_b est complet à K_a et $K_{a'}$, et $K_a, K_{a'}$ sont anti-complets. Quand $P_k = P_4$, alors $G[N(v)]$ est composé de quatre cliques $K_a, K_b, K_{b'}, K_{a'}$, où K_b est complet à $K_a, K_{b'}$, et où $K_{b'}$ est complet à $K_{a'}, K_b$, tandis que les autres cliques sont deux à deux anti-complets.

Soit $u, w \in N_2(v)$ ayant un voisin commun $s, s \in K_p, p \in \{a, a', b, b'\}$. Si $uw \notin E$, alors $G[\{u, w, s, v\}]$ est une griffe. Donc tous les sommets $u \in N_2(v)$ avec au moins un voisin commun $s, s \in N(v)$, induisent une clique. Avec le même argument pour $u, w \in N_{p+1}(v), s \in N_p(v)$ et $v' \in N_{p-1}(v) \cap N(s)$, nous avons que pour n'importe quel $p \geq 1$, tous les sommets $u \in N_{p+1}(v)$ avec au moins un voisin commun $s, s \in N_p(v)$, induisent une clique.

Nous définissons la partition $\text{TCP}(G)$ en clique jumelle de G comme la partition $(K_0 = \{v\}, K_1, \dots, K_q)$ de V telle que chaque K_i induit une clique, et pour toutes les paires $u, w \in K_i$ les sommets u et w sont vrais-jumeaux, *i.e.* $N[u] = N[w]$, et K_i est maximal (au sens de l'inclusion), où $1 \leq i \leq q$. Notons que $\text{TCP}(G)$ est unique et que pour n'importe quelle paire K_i, K_j de $\text{TCP}(G)$, soit K_i et K_j sont complets ou soit anti-complets.

Depuis $\text{TCP}(G)$ nous définissons son graphe associé $H = (K, F)$ comme suit : $K = \{K_0 = \{v\}, K_1, \dots, K_q\}$ et deux sommets de K sont adjacents si et seulement si leurs cliques correspondantes dans $\text{TCP}(G)$ sont complets.

Nous remarquons que puisque G est sans griffe et sans P_6 , alors H est aussi sans griffe et sans P_6 . De plus, aucune paire u, w de sommets distincts de H n'est telle que $N[u] = N[w]$.

Nous donnons des relations entre G et H . Notons que pour tout ensemble dominant minimum S de G , nous avons $|K_i \cap S| \leq 1$, où $0 \leq i \leq q$. Nous observons aussi que $\gamma(G) = \gamma(H)$. De plus, nous avons :

- $|K_i \cap S| = 1$ pour tout ensemble dominant minimum S de G si et seulement si $K_i \in \text{core}(H)$;
- $|K_i \cap S| = 0$ pour tout ensemble dominant minimum S de G si et seulement si $K_i \in \text{anticore}(H)$.

Puisque G et H sont équivalents relativement à l'ensemble dominant minimum, nous pouvons nous concentrer sur le graphe de partition en clique jumelle de G . Puisque nous n'avons plus besoin de G , nous remplaçons à partir de maintenant G par H dans nos écritures, *i.e.* $G \leftarrow H$.

D'après le Théorème 3.7, les sommets $u \in N(v)$ ont un voisin dans $N_2(v)$. Nous écrivons $N_k(v, w)$ pour l'ensemble des sommets qui sont des voisins de w à distance k de v .

Rappelons qu'il existe $a, b \in N(v)$ deux voisins privés de v par rapport à S et tel quel $ab \notin E$. Soit $c \in N_2(v, a) \cap N_2(v, b)$. Donc $c \notin S$. Donc il existe $d \in S$ qui domine c , mais da, db sont des non-arêtes et $G[\{a, b, c, d\}]$ est une griffe. Donc $N_2(v, a) \cap N_2(v, b) = \emptyset$.

Soit S' un ensemble dominant indépendant minimum de $G - v$ (rappelons que $\gamma(G) = \iota(G)$). Dans S' , les sommets a, b sont dominés par $\alpha \in N_2(v, a), \beta \in N_2(v, b)$, respectivement, où $\alpha \neq \beta$, et $\alpha\beta$ est une non-arête. Puisque a, b sont deux voisins privés de v par rapport à S , alors $\alpha, \beta \notin S$, et donc $\delta \in S$ domine α dans S . Si $\delta\beta$ est une non-arête, alors $\delta - \alpha - a - v - b - \beta$ est un P_6 . Donc $\delta\beta$ est une arête. Donc $G[\{v, a, \alpha, \delta, \beta, b\}] = C_6$.

Soit $C_6 = v_1 - v_2 - v_3 - w_1 - w_2 - w_3 - v_1$ un cycle induit de longueur six dans G . Si $V = C_6$, alors $\text{core}(G) = \emptyset$. Donc il existe $w \in V - C_6$ et une arête $uw, u \in C_6$ puisque G est connexe. Sans perte de généralité, soit $u = v_1$. Si wv_2, ww_3 sont deux non-arêtes, alors $G[\{w, v_1, v_2, w_1\}]$ est une griffe.

Donc sans perte de généralité, nous pouvons supposer que wv_2 est une arête. Si w a exactement deux voisins, v_1, v_2 dans C_6 , alors $w - v_2 - v_3 - w_1 - w_2 - w_3$ est un P_6 . Si w a exactement trois voisins dans C_6 , alors ils doivent être consécutifs puisque le graphe est sans griffe. Si w a exactement quatre voisins dans C_6 , soit ils sont consécutifs ou ce sont deux paires disjointes de sommets adjacents séparés par un sommet (à gauche et à droite) car le graphe est sans griffe. Si w a au moins cinq voisins dans C_6 , alors il y a une griffe. Donc les sommets à distance un de C_6 peuvent être partitionnés en trois ensembles :

- $W_3 = \{w : w \text{ a exactement trois voisins consécutifs dans } C_6\}$;
- $W_4 = \{w : w \text{ a exactement quatre voisins consécutifs dans } C_6\}$;
- $W_2 = \{w : w \text{ a deux paires de voisins consécutifs dans } C_6\}$.

Soit $W = W_3 \cup W_4 \cup W_2$. Soit u un sommet à distance deux de C_6 , et $w \in W$ tel que $uw \in E$. Puisque chaque $w \in W$ a deux voisins non-adjacents dans C_6 , alors G possède une griffe. Donc $V = C_6 \cup W$, et $W \neq \emptyset$.

Remarquons que $\gamma_1 = \{v_1, w_1\}, \gamma_2 = \{v_2, w_2\}, \gamma_3 = \{v_3, w_3\}$ sont trois ensembles dominants minimums de C_6 .

Quand $W_2 = \emptyset$, alors γ_1 et γ_2 sont deux ensembles dominants minimums de G et donc $\text{core}(G) = \emptyset$.

Soit $w \in W_2$. Sans perte de généralité, soit v_1, v_2, w_1, w_2 les voisins de w . Supposons qu'il existe $w' \in W_2$ avec les mêmes voisins que w dans C_6 . Puisque G est une partition en clique jumelle, nous avons $N[w] \neq N[w']$. Si $ww' \notin E$, alors $G[\{v_2, v_3, w, w'\}]$ est une griffe. Donc $ww' \in E$ et, sans perte de généralité, il existe $u \in W$ tel que $uw \in E$, mais $uw' \notin E$. Supposons que $u \in W_3$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que u est soit un voisin de v_1, v_2, v_3 ou un voisin de v_2, v_3, w_1 . Si u est un voisin de v_1, v_2, v_3 , alors $G[\{u, v_1, w', w_3\}]$ est une griffe. Si u est un voisin de v_2, v_3, w_1 , alors $G[\{u, v_1, w, w_2\}]$ est une griffe. Maintenant, soit $u \in W_4$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que u est soit un voisin de v_1, v_2, v_3, w_1 ou un voisin de w_3, v_1, v_2, v_3 . Si u est un voisin de v_1, v_2, v_3, w_1 , alors $G[\{u, v_1, w', w_3\}]$ est une griffe. Si u est un voisin de w_3, v_1, v_2, v_3 , alors $G[\{u, v_3, w, w_3\}]$ est une griffe. Donc $u \in W_2$. Si u a les mêmes voisins que w dans C_6 , alors $G[\{u, v_2, v_3, w'\}]$ est une griffe. Donc sans perte de généralité, les voisins de u dans C_6 sont v_2, v_3, w_2, w_3 mais $G[\{u, v_3, w_3, w\}]$ est une griffe. Donc $N[w] = N[w']$. Nous en déduisons que $|W_2| \leq 3$.

Supposons que $W_2 = \{w\}$. Soit v_1, v_2, w_1, w_2 les voisins de w . Puisque chaque sommet $u \in W_3 \cup W_4$ a un voisin dans $\gamma_1 = \{v_1, w_1\}$, et un autre voisin dans $\gamma_2 = \{v_2, w_2\}$, nous en déduisons que γ_1 et γ_2 sont deux ensembles dominants minimums disjoints de G et donc $\text{core}(G) = \emptyset$.

Maintenant supposons que $W_2 = \{w_{12}, w_{13}\}$. Sans perte de généralité, soit v_1, v_2, w_1, w_2 les voisins de w_{12} , et v_1, v_3, w_1, w_3 les voisins de w_{13} . Soit $u \in W_3$. Supposons que les voisins de u soient v_1, v_2, v_3 . Alors $G[\{v_1, w_3, w_{12}, u\}]$ est une griffe. Par symétrie, il reste le cas où les voisins de u sont w_3, v_1, v_2 . Dans ce cas $G[\{v_2, u, w_{12}, v_3\}]$ est une griffe. Donc $W_3 = \emptyset$. Soit $u \in W_4$. Supposons que les voisins de u soient v_1, v_2, v_3, w_1 . Alors $G[\{w_1, u, w_{13}, w_2\}]$ est une griffe. Par symétrie, il reste le cas où les voisins de u sont v_2, v_3, w_1, w_2 . Dans ce cas $G[\{w_2, u, w_{12}, w_3\}]$ est une griffe. Donc $W_4 = \emptyset$ et $V = C_6 \cup W_2$. Il s'ensuit que $\gamma_1 = \{v_1, w_1\}$ et $W_2 = \{w_{12}, w_{13}\}$ sont deux ensembles dominants minimums disjoints de G . Donc $\text{core}(G) = \emptyset$.

Soit $W_2 = \{w_{12}, w_{13}, w_{23}\}$. Soit v_1, v_2, w_1, w_2 les voisins de w_{12} , et v_1, v_3, w_1, w_3 les voisins de w_{13} , et v_2, v_3, w_2, w_3 les voisins de w_{23} . Comme précédemment $W_3 \cup W_4 = \emptyset$ (car chaque sommet $u \in W_3 \cup W_4$

induirait une griffe). Donc $V = C_6 \cup W_2$. Alors un ensemble dominant minimum de G est de taille trois. Maintenant $\{v_1, w_2, v_3\}$ et $\{w_1, v_2, w_3\}$ sont deux ensembles dominants minimums disjoints de G et donc $\text{core}(G) = \emptyset$.

Donc la partition en clique jumelle de G ne possède aucun sommet dans $\text{core}(\text{TCP}(G)) \cap V^0$, et donc le graphe initial G n'a pas de sommet dans $\text{core}(G) \cap V^0$. \square

Le graphe de la Figure 3.5 est sans griffe et sans P_7 avec un sommet $v \in \text{core}(G) \cap V^0$. Puisque G contient un P_6 comme sous-graphe induit, notre résultat est serré.

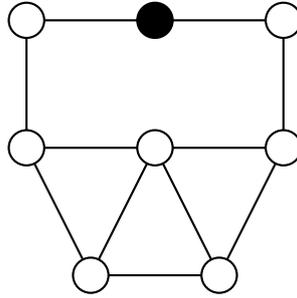


FIGURE 3.5 – Un graphe sans griffe et sans P_7 . Le sommet noir est dans $\text{core}(G) \cap V^0$ et $\gamma(G) = 2$.

Propriété 3.20 Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans griffe et sans taureau avec au moins deux sommets. Alors $v \in \text{core}(G)$ si et seulement si $\gamma(G - v) > \gamma(G)$.

Preuve: Le début de la preuve est le même que celui de la preuve de la Propriété 3.19. Ainsi, nous considérons G comme étant le graphe issu de la partition en clique jumelle, *i.e.* $G \leftarrow \text{TCP}(G)$. Soit $P = \alpha - a - v - b - \beta$ un chemin induit de G . Il existe δ , où $\delta \notin P$, un voisin de α et qui n'est pas voisin de v, a, b . Donc d'après le Lemme 3.12, il y a un cycle induit C_k , où $k \geq 6$, contenant v .

Soit $C_k = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. Si $V = C_k$, alors $\text{core}(G) = \emptyset$. Donc il existe $w \in V - C_k$ et une arête wu , où $u \in C_k$. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $u = v_1$. Si wv_2, wv_k sont deux non-arêtes, alors $G[\{w, v_1, v_2, v_k\}]$ est une griffe. Si w a cinq voisins dans C_k , alors G a une griffe. Si w a exactement deux voisins (consécutifs) dans C_k , disons v_1, v_2 , alors $G[\{w, v_1, v_2, v_3, v_k\}]$ est un taureau. Si w a exactement quatre voisins dans C_k , disons v_1, v_2, v_3, v_4 (comme précédemment ils sont consécutifs), alors $G[\{w, v_1, v_3, v_4, v_5\}]$ est un taureau. Donc w a exactement trois voisins consécutifs dans C_k , disons v_1, v_2, v_3 .

Soit $u, u \notin C_k$, un voisin de w . Si u n'a pas de voisin dans C_k , alors $G[\{w, u, v_1, v_3\}]$ est une griffe. Donc u a trois voisins consécutifs dans C_k . Puisque G est le graphe issu de la partition en clique jumelle, nous avons $N[w] \neq N[v_2]$. Supposons qu'il existe w' un voisin de v_2 tel que ww' est une non-arête. Donc w' est un voisin de v_2, v_3, v_4 , mais $G[\{v_3, v_4, v_5, w, w'\}]$ est un taureau. Donc sans perte de généralité, u existe et nous pouvons supposer que $u \notin N(v_2)$. Puisque $k \geq 6$, nous avons $|N(w) \cap N(u)| \leq 1$. Si $N(w) \cap N(u) = \emptyset$, alors $G[\{w, u, v_1, v_3\}]$ est une clique. Donc nous pouvons supposer que $N(w) \cap N(u) = \{v_1\}$. Mais dans ce cas $G[\{w, u, v_1, v_3, v_{k-1}\}]$ est un taureau

Donc si $v \in \text{core}(G)$, alors $v \notin V^0$. \square

Remarquons que le graphe de la Figure 3.5 est sans griffe mais contient un taureau. Comme il possède un sommet dans $\text{core}(G) \cap V^0$, nous en déduisons que notre résultat est serré.

En regroupant les Propriétés précédentes, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 3.21 *Soit H un sous-graphe induit de P_6 ou du taureau, et G un graphe connexe sans H et sans griffe avec au moins deux sommets. Si $v \in \text{core}(G)$, alors $v \in V^+$. De plus, il existe un graphe sans griffe contenant un taureau ou un P_6 avec un sommet dans $\text{core}(G) \cap V^0$.*

3.3.4 Graphes bipartis

Rappelons que les graphes bipartis sont les graphes sans cycles impairs. Notons que les graphes précédemment étudiés ne sont pas des sous-classes des graphes bipartis puisqu'ils peuvent contenir des triangles. Clairement, un graphe G connexe biparti sans griffe avec au moins deux sommets est soit un chemin ou un cycle pair. Si G est un chemin, alors $\text{core}(G) = V^+$. Si G est un cycle, alors G est 2-régulier et biparti et $\text{core}(G) = \emptyset$. Contrairement aux graphes 2-réguliers bipartis, les graphes cubiques (3-réguliers) bipartis peuvent avoir des sommets dans $\text{core}(G)$. Pour exemple, le graphe de la Figure 3.6 montre un graphe cubique biparti avec un sommet dans $\text{core}(G) \cap V^0$.

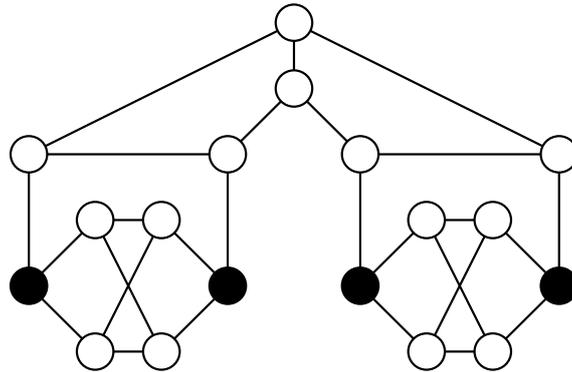


FIGURE 3.6 – Un graphe biparti cubique. Les sommets noirs sont dans $\text{core}(G) \cap V^0$ et $\gamma(G) = 5$.

3.4 Des partitions particulières des sommets

Dans cette section, nous exposons des graphes connexes sans sommet isolé, admettant des partitions des sommets en $\text{core}(G)$, $\text{corona}(G) - \text{core}(G)$, $\text{anticore}(G)$, par rapport à V^0 et V^+ . Deux de ces graphes répondent à deux questions ouvertes par V. Samodivkin dans [69].

Dans [45] page 139, Figure 5.2, est présenté un graphe connexe $G = (V, E)$ avec deux sommets tel que $V = V^-$. Des graphes tels que $V = V^0$ sont aussi présentés dans [45] p.147, Théorème 5.23. Ces graphes sont tels que $\text{core}(G) = \emptyset$, et le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est l'un d'entre eux. Les auteurs ont aussi montré que ces graphes avec $\text{core}(G) \neq \emptyset$ peuvent exister mais aucun de ces graphes n'est exposé (ou construit). Trouver un tel graphe correspond à la première question de V. Samodivkin dans son article. Dans [69] V. Samodivkin soulève les deux questions suivantes.

1. Est-ce qu'il existe un graphe connexe $G = (V, E)$ tel que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ pour tout sommet $v \in V$ et tel qu'il existe $u \in V$ où $u \in \text{core}(G)$?
2. Est-ce qu'il existe un graphe connexe $G = (V, E)$ tel qu'il existe un sommet $w \in V$, où $w \in V^+$, et tel que tous les sommets $v \in V, v \neq w$, sont tels que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$ et tel qu'il existe $u \in V, u \neq w$ où $u \in \text{core}(G)$?

Le graphe G de la Figure 3.7 donne une réponse positive à la première question. Nous laissons le lecteur vérifier que le sommet central u de G (c.f. Figure 3.7), est dans $\text{core}(G)$, et que ce sommet central est dans V^0 puisque $\gamma(G) = \gamma(G - u)$ (c.f. Figure 3.8).

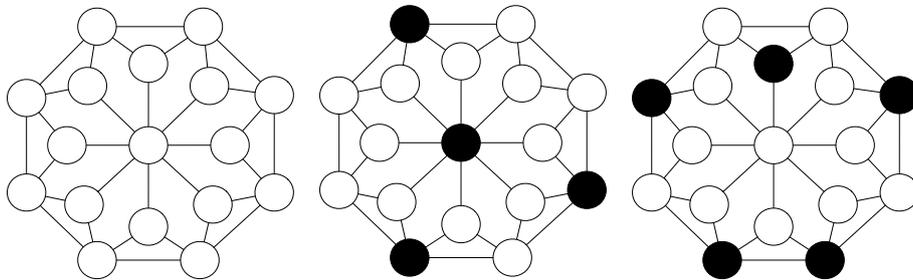


FIGURE 3.7 – De gauche à droite : le graphe G , un ensemble dominant minimum de taille 4, un ensemble dominant minimal de taille 5 ne contenant pas le sommet central.

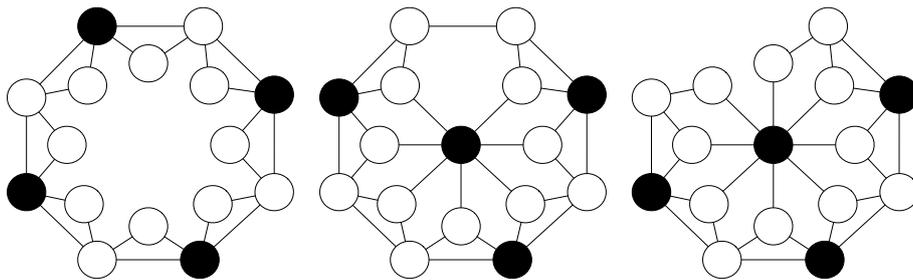


FIGURE 3.8 – Pour tout sommet v : les ensembles dominants minimums (à la symétrie près) de $G - v$ qui sont de taille 4.

Le graphe G exposé dans la Figure 3.9 donne une réponse positive à la deuxième question. La composante de droite de G correspond au graphe donné dans la Figure 3.7. À partir de la Figure 3.8, nous pouvons observer pour n'importe quel sommet v de la composante de droite, que $\gamma(G - v) = \gamma(G)$. Nous laissons le lecteur vérifier à partir des Figures 3.9, 3.10 et 3.11 que pour n'importe quel sommet v de la composante de gauche, sauf le sommet central, que nous avons aussi $\gamma(G - v) = \gamma(G)$.

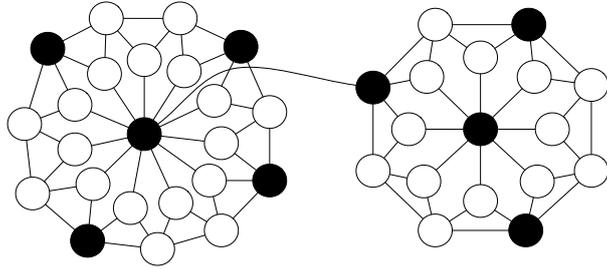


FIGURE 3.9 – Le graphe G en réponse à la question 2 avec un ensemble dominant minimum de taille 9.

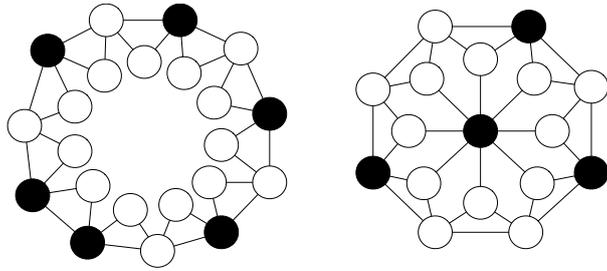


FIGURE 3.10 – Le graphe $G - v$ où v est le sommet central de la Figure 3.9 avec un ensemble dominant minimum de taille 10. Donc $\gamma(G - v) > \gamma(G)$ et $v \in V^+$.

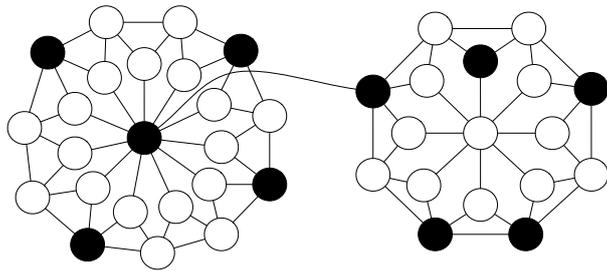


FIGURE 3.11 – Un ensemble dominant minimal ne contenant pas le sommet central de la composante de droite d'ordre 10.

Le graphe de la Figure 3.12 est un graphe d'ordre minimum tel que $V^+, V^0, V^- \neq \emptyset$ et $\text{anticore}(G) = \emptyset$. La preuve de sa minimalité est obtenue par un ordinateur.

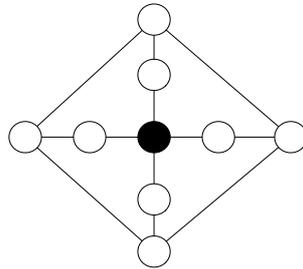


FIGURE 3.12 – Un graphe avec $\gamma(G) = 3$. Le sommet noir est dans V^+ . Ses quatre voisins sont dans V^0 , et les quatre autres sommets V^- .

Le graphe de la Figure 3.13 est tel que $V = (\text{core}(G) \cap V^0) \cup \text{anticore}(G)$.

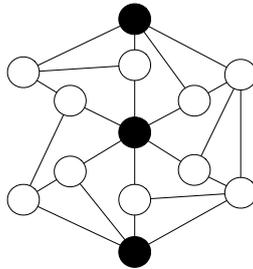


FIGURE 3.13 – Un graphe avec $\gamma(G) = 3$ où $V = (\text{core}(G) \cap V^0) \cup \text{anticore}(G)$. Les sommets noirs sont dans $\text{core}(G) \cap V^0$.

3.5 Conclusion

Nous avons donné une caractérisation simple des sommets appartenant à toutes, aucunes, ou quelques ensembles dominants minimums d'un graphe. Lorsque le graphe n'a pas de sommet isolé, les sommets appartenant à tous les ensembles dominants minimums sont de deux types : ceux qui une fois supprimé augmentent le nombre de domination du graphe, et ceux qui une fois supprimé ne font pas varier le nombre de domination du graphe. Pour certaines classes de graphes, nous avons montré que seul des sommets du premier type étaient possibles. Pour finir, nous avons donné des partitions des sommets d'un graphe évitant certains types de sommets relativement à nos caractérisations.

Pour poursuivre cette thématique, il pourrait être intéressant de chercher une « bonne » caractérisation de ces classes de graphes pour lesquelles la caractérisation (par rapport au statut des sommets) change. L'existence d'une telle caractérisation pourrait répondre à la question suivante : pour ces classes de graphes, est-ce que le statut d'un sommet peut être décidé en temps polynomial ?

Chapitre 4

Arêtes critiques pour le dominant

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés aux sommets à l'intersection de tous les ensembles dominants minimums d'un graphe. Ces sommets persistants ont été caractérisés selon leur criticité : soit le retrait d'un sommet fait varier le nombre de domination, ou soit le nombre de domination reste constant. Dans ce chapitre, nous nous concentrons cette fois-ci sur la criticité des arêtes relativement au nombre de domination.

4.1 Introduction

Étant donné un graphe G , existe-t-il une arête e telle que sa suppression du graphe fait varier son nombre de domination? Comme un dominant de $G - e$ est aussi un dominant de G , nous en déduisons que le retrait d'une arête (ou d'un ensemble d'arêtes) ne diminue pas le nombre de domination. Par contre, le retrait d'une arête peut augmenter le nombre de domination puisque c'est le cas pour l'unique arête de la clique à deux sommets. Cette propriété n'est pas toujours vraie puisque le triangle ne possède pas d'arête dont le retrait fait augmenter le nombre de domination. Dans ce cas, on pourrait reformuler la question comme suit : existe-t-il un sous-ensemble d'arêtes A dont la suppression du graphe fait varier son nombre de domination? Si le graphe est connexe, alors la réponse à cette question est toujours positive puisqu'il suffit de supprimer l'ensemble des arêtes du graphe. On peut donc chercher à restreindre la taille de cet ensemble afin qu'il soit minimum. Pour cela, J. Fink et al. [36] ont introduit le *nombre de bondage*. Le nombre de bondage $b(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum d'arêtes dont la suppression dans G augmente le nombre de domination, *i.e.* $E' \subseteq E$ tel que $\gamma(G - E') = \gamma(G) + 1$. Le nombre de bondage est donc une mesure de criticité du graphe relativement au nombre de domination. Le cas le plus critique étant celui où $b(G) = 1$. Dans ce cas, le graphe possède une arête e telle que $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$, et une telle arête e est dite *γ -critique*.

Une première motivation de l'étude du nombre de bondage porte sur la détermination de ses valeurs minimums et maximums. Comme il existe des graphes, par exemple le chemin induit de taille deux, ayant une arête γ -critique, nous pouvons nous concentrer sur la borne supérieure. Prenons un graphe G et supposons qu'il existe un sommet $v \in V(G)$ tel que $\gamma(G - v) \geq \gamma(v)$. Soit $H = G - E_v$, où E_v est l'ensemble des arêtes incidentes à v dans G . Comme $H - v = G - v$ et que v est un sommet isolé de H , nous en déduisons que $\gamma(H) = \gamma(G - v) + 1 > \gamma(G)$. Donc pour les graphes G possédant un tel sommet, nous avons $b(G) \leq \Delta(G)$. De plus, il existe des graphes atteignant cette valeur. Avant de présenter un

de ces graphes, nous introduisons le *corona* $G_1 \circ G_2$ (c.f. R. Frucht et F. Harary [39]) qui est le graphe formé d'une copie de G_1 et de $|V(G_1)|$ copies de G_2 où le $i^{\text{ème}}$ sommet de G_1 est relié aux sommets de la $i^{\text{ème}}$ copie de G_2 . K. Carlson et M. Develin [24] ont montré que le corona $G = K_n \circ K_1$ a nombre de bondage égal à $\Delta(G)$. Mais qu'en est-il pour les graphes G ne possédant pas un tel sommet ? Pour ces graphes G , nous avons que pour tout sommet $v \in V(G)$, $\gamma(G - v) < \gamma(G)$. Ces graphes ont été introduit par R. Brigham et al. [21] en tant que graphes γ -sommet-critiques. Malheureusement, pour ces graphes-là, il n'est pas possible d'obtenir une borne triviale comme précédemment sur le nombre de bondage en fonction du degré maximum. Nous aimerions tout de même savoir à quel point cette borne sur le nombre de bondage diverge quand le graphe est γ -sommet-critique. U. Teschner [75] a montré qu'il n'existait pas de constante fixée c telle que $b(G) \leq \Delta(G) + c$ si G est γ -sommet-critique, et U. Teschner a aussi montré dans [74], que pour tout graphe $G = K_n \square K_n$ issu du produit cartésien de deux cliques K_n, K_n , $n \geq 3$, nous avons $b(G) = \frac{3}{2}\Delta(G)$. Encore aujourd'hui, nous ne savons pas si il existe des graphes avec un nombre de bondage plus grand, et ces graphes sont les seuls connus ayant un nombre de bondage de $\frac{3}{2}\Delta(G)$.

Pour répondre à ces questions, deux Théorèmes se sont révélés particulièrement utiles pour établir des bornes supérieures selon certaines conditions. Puisque les preuves sont relativement simples, nous avons choisi de les exposer ici.

Théorème 4.1 (B. Hartnell et D. Rall [44]) *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $uv \in E$. Alors $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 - |N(u) \cap N(v)|$.*

Preuve: Soit $uv \in E$. Prenons $E_u = \{ux \mid ux \in E\}$ et $A_v = \{vx \mid vx \in E, x \notin N(u)\}$. Considérons le graphe $H = G - (A_v \cup E_u)$. Puisque $|A_v \cup E_u| \leq d(u) + d(v) - 1 - |N(u) \cap N(v)|$, nous pouvons supposer, par contradiction, que $\gamma(H) = \gamma(G)$. Soit S un ensemble dominant minimum de H . Puisque u est un sommet isolé de H , alors $u \in S$. Si $N_G(u) \cap S \neq \emptyset$, alors $S \setminus \{u\}$ est un ensemble dominant minimum de G , une contradiction. Donc $N_G(u) \cap S = \emptyset$. Remarquons que $N_H[v] \subseteq N_G(u)$. Puisque $N_H(v) \cap S \neq \emptyset$, alors $N_G(u) \cap S \neq \emptyset$, une contradiction. \square

Théorème 4.2 (J. Fink et al. [36]) *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $u, v \in V$ tels que $\text{dist}(u, v) \leq 2$. Alors $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1$.*

Nous avons remarqué que le -1 de la borne précédente correspondait au cas où $N(u) \cap N(v)$ est un ensemble indépendant de G . Nous avons donc choisi de réécrire et de montrer ce théorème dans une version légèrement améliorée.

Théorème 4.3 *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et $u, v \in V$ tels que $\text{dist}(u, v) \leq 2$. Alors $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 - k$, où*

$$k = \max_{x \in N(u) \cap N(v)} (|N(x) \cap (N(u) \cap N(v))|)$$

Preuve: Soit $u, v \in V$ tel que $\text{dist}(u, v) \leq 2$. D'après le Théorème 4.1, nous pouvons supposer que $uv \notin E$. Soit $x \in N(u) \cap N(v)$ tel que $|N(x) \cap (N(u) \cap N(v))|$ soit maximum. Prenons $E_u = \{uz \mid uz \in E\}$ et $A_v = \{vz \mid vz \in E, z \notin N[x] \cap N(u)\}$. Considérons le graphe $H = G - (A_v \cup E_u)$. Puisque $|A_v \cup E_u| \leq d(u) + d(v) - 1 - k$, nous pouvons supposer, par contradiction, que $\gamma(H) = \gamma(G)$. Soit S un ensemble dominant minimum de H . Puisque u est un sommet isolé de H , alors $u \in S$.

Si $N_G(u) \cap S \neq \emptyset$, alors $S \setminus \{u\}$ est un ensemble dominant minimum de G , une contradiction. Donc $N_G(u) \cap S = \emptyset$. Remarquons que $N_H(v) \subseteq N_G(u)$. Nous en déduisons que $v \in S$. Notons que x domine $N_H[v]$. Ainsi $(S \cup \{x\}) \setminus \{v\}$ est un autre ensemble dominant de H , et il s'ensuit que $N_G(u) \cap S \neq \emptyset$, une contradiction. \square

Le Théorème 4.1, nous permet d'en déduire que le nombre de bondage est au plus $2\Delta(G) - 1$. Ainsi, si la borne supérieure $\frac{3}{2}\Delta(G)$ sur le nombre de bondage n'était pas optimale, il existerait un graphe G tel que $\frac{3}{2}\Delta(G) < b(G) \leq 2\Delta(G) - 1$. Comme cette question est encore largement ouverte, il est aussi possible d'étudier le nombre de bondage pour certaines classes de graphes. Un des premiers résultats connus porte sur les arbres pour lesquels la borne supérieure obtenue est une constante fixée. Le résultat suivant a été obtenu indépendamment par D. Bauer et al., et J. Fink et al. Comme la preuve est relativement simple, nous avons choisi de la réexposer ici.

Théorème 4.4 (D. Bauer et al. [6], J. Fink et al. [36]) *Si G est un arbre, alors $b(G) \leq 2$.*

Preuve: Supposons que G possède deux feuilles $u, v \in V(G)$ telles que $x \in N(u) \cap N(v)$. D'après le Théorème 4.2, nous en déduisons que $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 \leq 1$. Autrement, il existe u tel que $d(u) = 2$ et tel que v est une feuille dans le voisinage de u . D'après le Théorème 4.1, nous en déduisons que $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 \leq 2$. \square

Notons que les arbres appartiennent à la classe des graphes triangulés. Un graphe *triangulé* est un graphe qui n'a pas de trou. Dit autrement, tous les sous-graphes qui sont des cycles de longueur au moins quatre ont une corde. Pour poursuivre l'étude du nombre de bondage, nous avons choisi d'étudier les graphes triangulés au prochain chapitre.

4.2 Borne sur le nombre de bondage des graphes triangulés

Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 4.5 *Soit G un graphe triangulé. Si G est une clique, alors $b(G) = \lceil \omega(G)/2 \rceil$. Sinon $b(G) \leq \omega(G) \leq \Delta(G)$.*

Preuve: Nous pouvons supposer que G est connecté avec au moins deux sommets. Il est évident que $\Delta(G) \geq \omega(G) - 1$, et que $\Delta(G) = \omega(G) - 1$ si et seulement si G est une clique. Lorsque G est une clique paire, nous observons que $b(G) = \omega(G)/2$ en supprimant un couplage parfait de G . Lorsque G est une clique impaire, nous observons que $b(G) = (\omega(G) - 1)/2 + 1$ en supprimant un couplage parfait M de G et une arête incidente quelconque au sommet universel restant dans $G - M$. Donc si G est une clique, alors $b(G) = \lceil \omega(G)/2 \rceil$. Nous pouvons donc supposer que G n'est pas une clique et que $\omega(G) \leq \Delta(G)$.

Supposons, par contradiction, que $b(G) > \omega(G)$. Soit K une clique de G . La *partition de distance* de G relatif à K est une partition (A_0, \dots, A_k) des sommets de V telle que $A_0 = V(K)$ et $A_i = \{v \in V \mid v \in N(u), u \in A_{i-1}\}$, pour $i = 1, \dots, k$. Remarquons que A_i est l'ensemble des sommets à distance i de K .

Propriété 4.5.1 *Soit $C \subseteq A_i$ où $i \neq 0$, tel que $G[C]$ est une composante connexe de $G[A_i]$, et soit $Q = N(C) \cap A_{i-1}$. Alors $G[Q]$ est une clique.*

Supposons, par contradiction, que $G[Q]$ ne soit pas une clique. Puisque A_0 est une clique, nous pouvons considérer que $i \geq 2$. Soit $u, u' \in Q$ tels que $uu' \notin E$. Notons qu'il existe un chemin entre u et K et entre u' et K dans $G[A_0 \cup \dots \cup A_{i-2} \cup \{u, u'\}]$. Donc il y a un chemin induit $P = u - \dots - u'$ entre u et u' dans $G[A_0 \cup \dots \cup A_{i-2} \cup \{u, u'\}]$. Soit $P' = u - \dots - u'$ un chemin induit entre u et u' dans $G[C \cup \{u, u'\}]$. Alors $G[V(P) \cup V(P')]$ est un cycle induit de longueur au moins quatre, une contradiction. Donc $G[Q]$ est une clique. Ceci montre la Propriété 4.5.1.

Soit $W \subseteq A_i$, où $i = 0, \dots, k$, tel que $G[W]$ est une composante connexe de $G[A_i]$ avec au moins deux sommets. Nous ajoutons la contrainte suivante sur W : $F = N(W) \cap A_{i+1}$ est vide ou un ensemble indépendant de G , et $N(F) \cap A_{i+2} = \emptyset$. Nous prenons W tel que $\psi(K) = |F \cup W|$ est minimum. Quand $W \neq V(K)$, nous écrivons $Q = N(W) \cap A^{i-1}(K)$. Remarquons que si $W = V(K)$, alors $Q = \emptyset$.

Nous montrons que W existe tel que décrit précédemment. Puisque G n'est pas une clique, nous avons $A_{k-1}, A_k \neq \emptyset$. Si A_k n'est un indépendant de G , alors il y a $C \subseteq A_k$ tel que $G[C]$ est une composante connexe de $G[A_k]$ avec au moins deux sommets. Puisque $|C| \geq 2$ et $N(C) \cap A_{k+1} = \emptyset$, alors W existe. Maintenant, nous pouvons supposer que A_k est un ensemble indépendant de G . Soit $C \subseteq A_{k-1}$ tel que $N(C) \cap A_k \neq \emptyset$ et où $G[C]$ est une composante connexe de $G[A_{k-1}]$. Si $|C| \geq 2$, alors W existe puisque $N(C) \cap A_k$ est un ensemble indépendant de G et que $A_{k+1} = \emptyset$. Donc il reste le cas $|C| = 1$. Soit $C = \{u\}$ et $v \in N(u) \cap A_k$. D'après la Propriété 4.5.1, $G[N(v) \cap A_{k-1}]$ est une clique. Nous en déduisons que $N(v) = \{u\}$ et $d(v) = 1$. D'après la Propriété 4.5.1, $N(u) \cap A_{k-2}$ est une clique. Donc $d(u) \leq \omega(G)$. Alors d'après le Théorème 4.2, $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 \leq \omega(G)$, une contradiction. Donc $|C| \geq 2$ et nous en déduisons que W existe.

Soit K une clique de G telle que $\psi(K) = \min(\{\psi(K') \mid K' \text{ est une clique de } G\})$. Nous considérons les ensembles A_0, \dots, A_k, F, Q, W relatifs à K , comme décrit plus haut.

Propriété 4.5.2 *Pour tout $u \in W$ tel que $Q = N(u) \cap A_{i-1}$, les ensembles $W \setminus \{u\}$ et $N(u) \cap (F \cup W)$ sont indépendants dans G , et $W = N[u] \cap W$.*

Supposons, par contradiction, que $W \setminus \{u\}$ ou que $N(u) \cap (F \cup W)$ ne soit pas un ensemble indépendant de G . Soit $K' = G[Q \cup \{u\}]$. Nous remarquons que Q est vide lorsque $W = A_0$. D'après la Propriété 4.5.1, Q est une clique. Donc K' est une clique. Soit $A'_0, A'_1, \dots, A'_{k'}$ la partition de distance relatif à K' . Notons que $A'_0 = K'$. Puisque $W \setminus \{u\}$ ou $N(u) \cap (F \cup W)$ ne sont pas des ensembles indépendants, il y a $W' \subseteq A'_1 \cap (F \cup W)$ tel que $G[W']$ est une composante connexe de $G[A'_1]$ avec au moins deux sommets. Soit $F' = N(W') \cap A'_2$. Nous remarquons que $F' \subseteq F$. Donc soit $F' = \emptyset$ ou F' est un ensemble indépendant de G , et $N(F') \cap A'_3 = \emptyset$. Alors $|F' \cup W'| \leq |F \cup W| - 1$ et donc $\psi(K)$ n'est pas minimum, une contradiction. Nous en déduisons que $W \setminus \{u\}$ et $N(u) \cap (F \cup W)$ sont deux ensembles indépendants de G . Puisque $G[W]$ est connexe, nous avons $W \subseteq N[u]$. Ceci montre la Propriété 4.5.2.

Propriété 4.5.3 *Il existe $u \in W$ tel que $Q = N(u) \cap Q$.*

Supposons, par contradiction, que pour tout sommet $u \in W$, nous avons $Q \neq N(u) \cap Q$, i.e. $Q \not\subseteq N(u)$. Soit $u \in W$ tel que $|N(u) \cap Q|$ est maximum. Puisque tout sommet de Q a un voisin dans W , il y a $u' \in W$ tel que $q'u' \in E$ et $q'u \notin E$, où $q' \in Q$. Nous prenons u' tel que $\text{dist}(u, u')$ est minimum. Comme $|N(u) \cap Q|$ est maximum, il y a $q \in Q$ tel que $qu \in E$ et $qu' \notin E$. Puisque $G[W]$ est connexe, il y a un plus court chemin $P = u - \dots - u'$ entre u et u' dans $G[W]$. Si $P = u - u'$, alors $C_4 = q - q' - u' - u - q$ est un cycle induit de longueur quatre, une contradiction. Soit $v \in V(P) \setminus \{u, u'\}$.

Supposons que $q'v \in E$. Comme $\text{dist}(u, u')$ est minimum, nous avons $N(u) \cap Q \subseteq N(v) \cap Q$. Alors $|N(v) \cap Q| > |N(u) \cap Q|$ est une contradiction de la maximisation de $|N(u) \cap Q|$. Donc pour tout $v \in V(P) \setminus \{u, u'\}$, nous avons $uq' \notin E$. Si aucun sommet de $V(P) \setminus \{u, u'\}$ est un voisin de q , alors $G[V(P) \cup \{q, q'\}]$ est un cycle induit de longueur au moins cinq, une contradiction. Donc il y a $v \in V(P) \setminus \{u, u'\}$ tel que $qv \in E$. Nous prenons v tel que $\text{dist}(u', v)$ est minimum. Soit $P' = v - \dots - u'$ un plus court chemin entre u' et v . Alors $G[V(P') \cup \{q, q'\}]$ est un cycle induit de longueur quatre, une contradiction. Ceci montre la Propriété 4.5.3.

Propriété 4.5.4 *Pour tout $u \in W$, $|N(u) \cap F| \leq 1$, et pour tout $v \in F$, $d(v) = 1$*

Supposons, par contradiction, qu'il existe $u \in W$ tel que $v, v' \in N(u) \cap F$. D'après la Propriété 4.5.3, il y a $w \in W$ tel que $Q = N(w) \cap Q$. D'après la Propriété 4.5.2, $W = N[w] \cap W$ et $W \setminus \{w\}$, $(F \cup W) \cap N(w)$ sont deux ensembles indépendants de G . D'après la Propriété 4.5.1, $N(v) \cap A_i$ et $N(v') \cap A_i$ sont deux cliques, et donc $N(v) \subseteq W$ et $N(v') \subseteq W$. Si $d(v) \geq 2$ ou $d(v') \geq 2$, alors $(F \cup W) \cap N(w)$ n'est pas un ensemble indépendant de G . Donc $d(v), d(v') \leq 1$. Mais d'après le Théorème 4.2, nous avons $b(G) \leq d(v) + d(v') - 1 \leq 1$, une contradiction. Ceci montre la Propriété 4.5.4.

Propriété 4.5.5 $|Q| \leq \omega(G) - 1$

D'après la Propriété 4.5.1, Q est une clique, et d'après la Propriété 4.5.3, il y a $u \in W$ tel que $Q = N(u) \cap Q$. Donc $Q \cup \{u\}$ est une clique et $|Q| \leq \omega(G) - 1$. La Propriété 4.5.5 est prouvée.

D'après la Propriété 4.5.3, il y a $u \in W$ tel que $Q = N(u) \cap Q$. Rappelons que $|W| \geq 2$ et que $G[W]$ est connexe. Supposons qu'il y ait $v \in W$, $u \neq v$, tel que $Q = N(v) \cap Q$. D'après la Propriété 4.5.2, $W \setminus \{u\}$ et $W \setminus \{v\}$ sont deux ensembles indépendants de G . Donc $W = \{u, v\}$. D'après la Propriété 4.5.1, Q est une clique, et donc $|Q| \leq \omega(G) - 2$. D'après la Propriété 4.5.4, $|N(u) \cap F|, |N(v) \cap F| \leq 1$. Donc $d(u) \leq |Q \cup W \setminus \{u\}| + 1 \leq \omega(G)$ et $d(v) \leq |Q \cup W \setminus \{v\}| + 1 \leq \omega(G)$. Supposons que u ait un voisin $x \in F$. D'après la Propriété 4.5.4, nous avons $d(x) = 1$. Alors d'après le Théorème 4.2, $b(G) \leq d(u) + d(x) - 1 \leq \omega(G)$, une contradiction. Donc $N(u) \cap F, N(v) \cap F = \emptyset$. Nous en déduisons que $d(u) = d(v) = \omega(G) - 1$. D'après le Théorème 4.1, nous avons $b(G) \leq d(u) + d(v) - 1 - |N(u) \cap N(v)| \leq \omega(G)$, une contradiction.

Nous pouvons maintenant supposer que u est l'unique sommet dans W tel que $Q = N(u) \cap Q$. Nous montrons que F est vide. Rappelons que d'après les Propriétés 4.5.1, 4.5.5, 4.5.4, $G[Q]$ est une clique, $|Q| \leq \omega(G) - 1$, et tous les sommets de W ont au plus un voisin dans F . De plus, d'après la Propriété 4.5.2, $W = N[u]$ et $(F \cup W) \setminus \{u\}$ est un ensemble indépendant de G . Donc pour tout $v \in W \setminus \{u\}$, nous avons $d(v) \leq |Q| + 1 \leq \omega(G)$. Soit $x \in F$. D'après la Propriété 4.5.4, $d(x) = 1$. Si il existe $v \in W \setminus \{u\}$ un voisin de x , alors d'après le Théorème 4.2, nous avons $b(G) \leq d(v) + d(x) - 1 \leq \omega(G)$, une contradiction. Donc x est un voisin de u . Mais pour tout $v \in W \setminus \{u\}$, nous avons $\text{dist}(v, x) \leq 2$. Donc d'après le Théorème 4.2, nous avons $b(G) \leq d(v) + d(x) - 1 \leq \omega(G)$, une contradiction. Donc $F = \emptyset$. Nous en déduisons que pour tout $v \in W \setminus \{u\}$, nous avons $d(v) \leq |Q| \leq \omega(G) - 1$.

Soit S un ensemble dominant minimum de G . Supposons que $|S \cap W| \geq 2$. Alors $(S \setminus W) \cup \{u\}$ est dominant de G , une contradiction de la minimalité de S . Donc pour tout ensemble dominant minimum de G , nous avons $|S \cap W| \leq 1$. Soit $v \in W \setminus \{u\}$ et $E_v = \{vv' \in E \mid v' \in N(v)\}$. Rappelons que $d(v) \leq \omega(G) - 1$, et que donc $|E_v| \leq \omega(G) - 1$. Soit $w \in W \setminus \{v\}$ ($u = w$ est possible). Soit

$E_w = \{qw \in E \mid q \in (N(w) \cap Q) \setminus N(v)\}$ l'ensemble des arêtes incidentes à w ayant une extrémité x dans Q tel que $vx \notin E$. Remarquons que $|E_w| \leq |Q \setminus N(v)|$, et que donc $|E_v \cup E_w| \leq |Q| + 1 \leq \omega(G)$. Nous supprimons les arêtes $E_v \cup E_w$ de G et obtenons le graphe $G' = (V, E - (E_v \cup E_w))$. Puisque $b(G) > \omega(G)$, nous en déduisons que $\gamma(G') = \gamma(G)$. Soit S' un ensemble dominant minimum de G' . Puisque G' a les mêmes sommets que G , avec quelques arêtes en moins, n'importe quel dominant de G' est un dominant de G . Donc S' est un ensemble dominant minimum de G . D'après les arguments précédents, nous avons $|S' \cap W| \leq 1$. Observons que v est isolé dans G' , et que donc $v \in S'$. Si $S' \cap N_G(v) \neq \emptyset$, alors $S' \setminus \{v\}$ est un ensemble dominant de G , une contradiction. Donc $S' \cap N_G(v) = \emptyset$. Rappelons que $N_{G'}(w) \cap Q \subseteq N_G(v) \cap Q$. Donc $N_{G'}(w) \cap S' \cap W \neq \emptyset$. Nous observons alors que $|S' \cap W| \geq 2$, une contradiction.

Donc $\gamma(G') > \gamma(G)$. Puisque nous avons supprimé au plus $\omega(G)$ arêtes de G pour construire G' , nous avons $b(G) \leq \omega(G)$. \square

Nous montrons que la borne du Théorème 4.5 est serrée. Dans l'introduction, nous avons présenté le graphe corona $G = K_n \circ K_1$, qui est la clique K_n où chaque sommet est voisin d'une unique feuille. Remarquons que ce graphe est triangulé. Enfin, rappelons que K. Carlson et M. Develin dans [24] ont montré que $\gamma(G) = \omega(G)$ et que $b(G) = \omega(G)$.

Pour les graphes non-triangulés, nous exposons une famille non-finie de graphes \mathcal{C} , telle que pour tout $G \in \mathcal{C}$, nous avons $b(G) > \omega(G)$, et le cycle induit le plus long de G est de longueur quatre. Considérons le graphe $G = (P_2 \square P_k) \circ K_1$, où $k \geq 2$ (rappelons que $P_2 \square P_k$ est le produit cartésien de P_2 et P_k). Le cycle le plus long de G est de longueur quatre et $\omega(G) = 2$. Nous observons aisément que $\gamma(G) = 2k$ et que $b(G) = 3 = \omega(G) + 1$. Il serait donc intéressant de savoir si il existe un graphe G qui a pour plus long cycle induit C_4 , et tel que $b(G) > \omega(G) + 1$. Ainsi, étudier le nombre de bondage pour les graphes triangulés autorisant les C_4 (qui sont appelés *quadrangulés* ou 1-triangulés) ne serait pas dénué d'intérêt.

Nous souhaitons maintenant justifier de l'éventuel intérêt du Théorème 4.5 et de sa preuve. Mais d'abord un peu de contexte. Nous avons vu en introduction qu'il est conjecturé que tout graphe G a un nombre de bondage d'au plus $\frac{2}{3}\Delta(G)$, et qu'il existe un graphe atteignant cette borne. Pour les graphes planaires, la conjecture suivante a été posé :

Conjecture 4.6 ([46]) *Si G est un graphe planaire, alors $b(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Même si cette conjecture reste ouverte, il a été montré que le nombre de bondage ne pouvait trop excéder le degré maximum du graphe. Plus précisément, le nombre de bondage est borné par une constante.

Théorème 4.7 (Kang et Yuan [53]) *Si G est un graphe planaire, alors $b(G) \leq \min(8, \Delta(G) + 2)$.*

À ce jour, aucun graphe planaire G n'est connu pour avoir un nombre de bondage de 8 ou de $\Delta(G) + 2$. Seul un graphe planaire avec un nombre de bondage de 6 a été découvert par K. Carlson et M. Develin [24]. C'est le graphe corona $G = H \circ K_1$ où H est un graphe planaire avec $\delta(H) = 5$. La question de savoir si il existe un graphe planaire avec un nombre de bondage de 7 ou 8 reste ouverte. Heureusement, quelques avancées ont été établies en fonction du degré minimum, du degré maximum, ou de la maille. Nous exposons les grands cas restants qui ont été énumérés dans l'article de J.-M. Xu [77] (qui est d'ailleurs un article assez complet sur l'état de l'art du nombre de bondage).

Proposition 4.8 *La conjecture 4.6 reste ouverte pour les graphes planaires H tels que soit :*

- $3 \leq \delta(H) \leq \Delta(H) \leq 6$; ou
- $g(H) < 5$; ou
- H est cubique et $g(H) < 6$.

En utilisant le Théorème 4.5, et puisque tout graphe planaire G a une clique de taille au plus quatre, nous obtenons le résultat suivant :

Corollaire 4.9 *Soit G un graphe planaire triangulé. Si G n'est pas une clique, alors $b(G) \leq 4$. Si $G = K_2$, alors $b(G) = 1$. Si $G = K_3$ ou $G = K_4$, alors $b(G) = 2$.*

De plus, nous pensons que la preuve du Théorème 4.5 pourrait impliquer un résultat légèrement plus fort qui pourrait aussi être d'utilité afin d'attaquer la Conjecture 4.6. Pour exemple, prenons un graphe G et supposons que ce graphe dispose d'une *structure triangulée*. Par cela, nous signifions qu'il existe une clique K dont le retrait disconnecte le graphe et telle qu'il existe H une composante connexe triangulée de $G - K$. En utilisant la partition de distance sur la clique H (en supposant que cette composante est « suffisamment grande »), nous pourrions montrer que $b(G) \leq \omega(H)$ en réutilisant les mêmes arguments que dans la preuve du Théorème 4.5. Nous pensons donc qu'il serait intéressant d'étudier les graphes qui ne possèdent pas cette structure triangulée. De plus, que pourrions nous en déduire si un graphe possédait une structure « presque triangulée » ? Par exemple, la structure pourrait être 1-triangulé ou pourrait posséder un nombre limité de grand cycle par rapport au nombre de sommets.

Pour finir, puisque nous pensons que les graphes ayant une structure triangulée pourraient nous permettre d'obtenir de meilleures bornes sur le nombre de bondage, il pourrait être utile d'étudier les graphes triangulés ayant un grand nombre de bondage. Nous posons donc le problème suivant :

Problème : Caractériser les graphes triangulés pour lesquels $b(G) = \omega(G)$.

4.3 Complexité du problème de bondage

4.3.1 Préliminaires

Dans la section précédente, nous nous sommes concentrés sur la valeur maximum que pouvait prendre le nombre de bondage. Mais on pourrait aussi être intéressé à calculer le nombre de bondage de n'importe quel graphe. Le nombre de bondage est étroitement lié au nombre de domination, qui est associé au problème DOMINANT MINIMUM et qui est un problème supposé difficile à résoudre car NP-complet. Nous avons choisi dans cette section de nous intéresser à la complexité du problème de décision associé au nombre de bondage et qui est défini comme suit :

d -BONDAGE

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$ et un entier positif $d \geq 1$.

Décider : est-ce que $b(G) \leq d$?

1-BONDAGE a été montré NP-complet dans [51], et il a été montré dans [50], qu'il reste NP-complet dans les graphes bipartis. Dans cette section, nous renforçons ce résultat comme suit :

Théorème 4.10 *Pour n'importe quel $k \geq 3$, 1-BONDAGE est NP-complet dans les graphes bipartis planaires de degré maximum 3 et de maille au moins k .*

Nous pensons que ce résultat est intéressant grâce à la borne supérieure du nombre de bondage montrée par M. Fischermann et al. [37].

Théorème 4.11 (M. Fischermann et al. [37]) *Soit G un graphe planaire de maille 8. Alors $b(G) \leq 3$.*

Nous avons étendu ce résultat d'un point de vue algorithmique comme suit :

Proposition 4.12 *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire de maille au moins 8. Alors nous pouvons trouver un sous-ensemble d'arêtes $E' \subseteq E$, où $|E'| = 3$, tel que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$ en temps polynomial.*

4.3.2 Cores et anticores

Avant de montrer la difficulté du BONDAGE dans les graphes planaires, nous définissons les deux problèmes suivants qui seront utilisés afin de montrer la complexité du problème du BONDAGE.

α -CORE

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$.

Décider : y a-t-il un sommet qui appartient à tous les stables maximums de G , i.e. $|\alpha\text{-core}(G)| \geq 1$?

τ -ANTICORE

Étant donné : un graphe $G = (V, E)$.

Décider : y a-t-il un sommet qui n'appartient à aucune couverture de sommets minimum de G , i.e. $|\tau\text{-anticore}(G)| \geq 1$?

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, les ensembles $\alpha\text{-core}(G)$ et $\tau\text{-anticore}(G)$ sont définis de manière analogue au Chapitre 3, i.e. : $\alpha\text{-core}(G)$ est l'ensemble des sommets à l'intersection de tous les stables maximums de G ; $\tau\text{-anticore}(G)$ est l'ensemble des sommets qui n'appartiennent à aucune couverture de sommets de G . Les sommets de $\alpha\text{-core}(G)$ et de $\tau\text{-anticore}(G)$ sont aussi appelés les α -cores et les τ -anticores, respectivement. Nous avons vu au Chapitre 1 que $\alpha(G) = |V| - \tau(G)$ et que si S est un stable maximum, alors $V \setminus S$ est une couverture d'ensembles minimum. Nous en déduisons que $\alpha\text{-core}(G) = \tau\text{-anticore}(G)$.

E. Boros et al. ont étudié les α -cores dans [13]. Ils ont annoncé avoir montré qu'étant donné un graphe G et un entier $k \geq 0$, décider si $|\alpha\text{-core}(G)| > k$ est NP-complet. Nous pensons qu'ils ont seulement montré que le problème est NP-difficile, et qu'il reste la question de son appartenance à NP. Comme nous remarquons que α -CORE est le même problème pour $k = 0$, nous souhaitons savoir si α -CORE est dans NP. Si c'était le cas, alors il devrait exister un certificat, que nous pourrions tester en temps polynomial, ayant les caractéristiques suivantes : étant donné un graphe G et un ensemble de sommets $C \subseteq V(G)$, est-ce que $C \subseteq \alpha\text{-core}(G)$? Donc nous devrions pouvoir tester si un sommet donné est dans $\alpha\text{-core}(G)$ en temps polynomial. Nous avons l'intuition que ce ne serait pas possible, sauf si $P = NP$. Le résultat suivant confirme notre intuition.

Théorème 4.13 *Étant donné un graphe G et un sommet v , il n'existe pas d'algorithme polynomial pour décider si $v \in \alpha\text{-core}(G)$, sauf si $P = NP$.*

Preuve: Nous définissons comme CORE-STABLE le problème de décision suivant : étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un sommet $v \in V$, est-ce que $v \in \alpha\text{-core}(G)$? Nous remarquons que si $v \in \alpha\text{-core}(G)$, alors $\alpha(G - v) = \alpha(G) - 1$, sinon $\alpha(G) = \alpha(G - v)$. Nous montrons que si il existe un algorithme polynomial pour CORE-STABLE, alors STABLE MAXIMUM peut aussi être résolu en temps polynomial.

Soit (G, k) une instance de STABLE MAXIMUM et v un sommet de G . Nous résolvons CORE-STABLE avec pour entrées (G, v) en temps polynomial. Si $v \in \alpha\text{-core}(G)$, alors G a un stable de taille k si et seulement si $G - v$ a un stable de taille $k - 1$. Donc l'instance $(G - v, k - 1)$ est équivalente à (G, k) pour STABLE MAXIMUM. Si $v \notin \alpha\text{-core}(G)$, alors G a un stable de taille k si et seulement si $G - v$ a un stable de taille k . Donc l'instance $(G - v, k)$ est équivalente à (G, k) pour STABLE MAXIMUM.

Nous pouvons donc utiliser l'algorithme polynomial pour CORE-STABLE afin d'obtenir une instance équivalente plus petite pour STABLE MAXIMUM. Par itération de l'algorithme pour résoudre CORE-STABLE sur les sommets de G , nous pouvons résoudre STABLE MAXIMUM en temps polynomial. Comme STABLE MAXIMUM est connu pour être NP-complet, *c.f.* [42], nous en déduisons que CORE-STABLE ne peut être résolu en temps polynomial, sauf si $P = NP$. \square

D'après le Théorème 4.13, nous en déduisons que $\alpha\text{-CORE}$ n'est pas dans NP. D'après le résultat de E. Boros et al. dans [13], nous obtenons :

Théorème 4.14 (E. Boros et al. [13]) *$\alpha\text{-CORE}$ est NP-difficile.*

Puisque pour tout graphe G , nous avons $\alpha\text{-core}(G) = \tau\text{-anticore}(G)$, alors nous obtenons le corollaire suivant.

Corollaire 4.15 *$\tau\text{-ANTICORE}$ est NP-difficile.*

Nous décrivons une opération qui nous sera utile pour montrer que $\tau\text{-anticore}$ reste NP-difficile dans les graphes planaires. Étant donné $G = (V, E)$ et $v \in V(G)$, nous définissons le graphe $G_v + u = (V', E')$, où $u \notin V(G)$ comme suit : $V' = V \cup \{u\}$ et $E' = E \cup \{uv\}$.

Propriété 4.16 *Soit v un sommet du graphe $G = (V, E)$, alors $v \in \tau\text{-anticore}(G)$ si et seulement si $\tau(G_v + u) = \tau(G) + 1$.*

Preuve: Soit v un sommet de G . N'importe quelle couverture de sommets minimum de $G_v + u$ contient soit u ou v pour couvrir l'arête uv . Donc si $v \in \tau\text{-anticore}(G)$, alors $\tau(G_v + u) = \tau(G) + 1$. Sinon, il existe une couverture de sommets minimum S de G contenant v qui est aussi une couverture de sommets minimum de $G_v + u$. \square

Nous montrons que $\tau\text{-ANTICORE}$ reste NP-difficile dans les graphes planaires.

Théorème 4.17 *$\tau\text{-ANTICORE}$ est NP-difficile dans les graphes planaires.*

Preuve: M. Garey et al. dans [41] ont montré que COUVERTURE DE SOMMETS (dénommé NODE COVER) est NP-complet dans les graphes planaires. Pour montrer cela, ils ont donné une réduction polynomiale de COUVERTURE DE SOMMETS sans restrictions sur le graphe donné. Nous montrons

que le graphe $G' = (V', E')$ issu de la réduction depuis $G = (V, E)$ a les propriétés suivantes : τ -anticore(G') $\neq \emptyset$ si et seulement si τ -anticore(G) $\neq \emptyset$. Commençons par détailler la preuve de Garey et al.

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, nous construisons $G' = (V', E')$. Plongeons G dans le plan tel qu'au plus deux arêtes se croisent en un point, et aucune arête ne croise un sommet qui ne lui est pas incident. Pour construire G' , remplaçons chaque croisement d'arête par une copie du graphe H tel que dessiné sur la Figure 4.1. Pour chaque i, j , où $0 \leq i, j \leq 2$, nous définissons comme $c[i, j]$ la cardinalité d'une couverture de sommets minimal C de H telle que $|\{v_1, v'_1\} \cap C| = i$ et $|\{v_2, v'_2\} \cap C| = j$. Notons que v_1, v'_1, v_2, v'_2 sont les quatre coins de H , *c.f.* Figure 4.2. Les propriétés de $c[i, j]$ sont les suivantes :

	i	0	1	2
j		0	1	2
0		13	14	15
1		13	13	14
2		14	14	15

TABLE 4.1 – Les valeurs de $c[i, j]$.

Donc $\tau(H) = 13$ et pour toute couverture de sommets S de G' , $|S \cap H| \geq 13$. Depuis une couverture de sommets minimum S de G , nous pouvons construire une couverture de sommets minimum S' de G' en prenant les sommets de S qui sont dans G' et exactement 13 sommets pour chaque copie de H . Donc si $\tau(G) = k$, nous avons $\tau(G') = k + 13d$, où d est le nombre de copies de H (*i.e.* le nombre de croisements). Ceci complète notre description de la preuve de Garey et al.

Propriété 4.17.1 *Si τ -anticore(G) $\neq \emptyset$, alors τ -anticore(G') $\neq \emptyset$.*

Soit $v \in \tau$ -anticore(G). D'après la Propriété 4.16, nous avons $\tau(G) = \tau(G_v + u) + 1$. Puisque $G'_v + u$ peut être construit à partir de $G_v + u$, alors $\tau(G'_v + u) = \tau(G_v + u) + 13$ et donc $v \in \tau$ -anticore(G'). Donc si un sommet v appartient à τ -anticore(G), alors v appartient aussi à τ -anticore(G'). La Propriété 4.17.1 est démontrée.

Propriété 4.17.2 *Si τ -anticore(G) = \emptyset , alors τ -anticore(G') = \emptyset .*

Supposons que τ -anticore(G) = \emptyset . Soit ab, cd deux arêtes de G qui se croisent. Nous construisons le graphe G_H , une copie de G où les croisements sont remplacés par le graphe H comme décrit plus haut. Sans perte de généralité, nous nous pouvons supposer qu'il existe deux couvertures de sommets minimums S_1, S_2 de G telles que $a, c \in S_1$ et $b, d \in S_2$. Soit S'_2 l'ensemble des sommets noirs représentés sur la Figure 4.2. Nous observons que $|S'_2| = 13$ et que S'_2 est une couverture de sommets minimum de H . Remarquons aussi que S'_2 couvre les arêtes av_1 et cv_2 , et que S_2 couvre les arêtes bv'_1 et dv'_2 . Donc $S_2 \cup S'_2$ est une couverture de sommets de G_H . Puisque $\tau(G_H) = \tau(G) + 13$, alors $S_2 \cup S'_2$ est une couverture de sommets minimum. Nous considérons maintenant le symétrique par rotation à 180 degré de la Figure 4.2. Soit S'_1 l'ensemble des sommets noirs de cette symétrie. Nous observons que S'_1 couvre les arêtes bv'_1 et dv'_2 , et que S_1 couvre les arêtes av_1 et cv_2 . Donc $S_1 \cup S'_1$ est une couverture des sommets de G_H . Puisque $\tau(G_H) = \tau(G) + 13$, c'est une couverture de sommets minimum. À partir de ces deux couvertures de sommets minimums de G_H , nous en déduisons que τ -anticore(G_H) = \emptyset . Par

itération sur les paires d'arêtes se croisant, nous obtenons un graphe G' tel que $\tau\text{-anticore}(G') = \emptyset$. Nous en déduisons le résultat de la preuve de la Propriété 4.17.2.

Donc d'après les Propriétés 4.17.1 et 4.17.2, nous avons $\tau\text{-anticore}(G') \neq \emptyset$ si et seulement si $\tau\text{-anticore}(G) \neq \emptyset$. \square

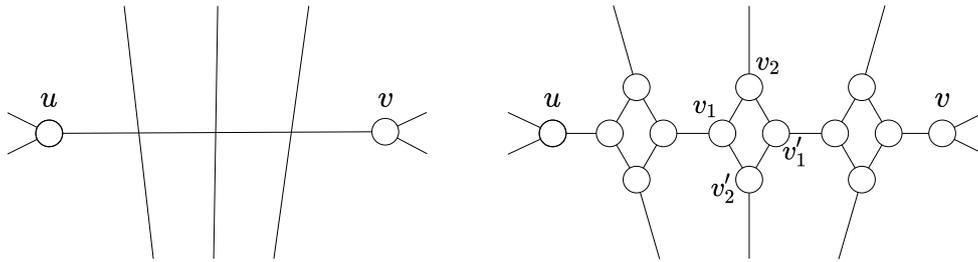


FIGURE 4.1 – Suppression des croisements d'arêtes de G pour construire G' . Chaque C_4 représente une copie du graphe H de la Figure 4.2.

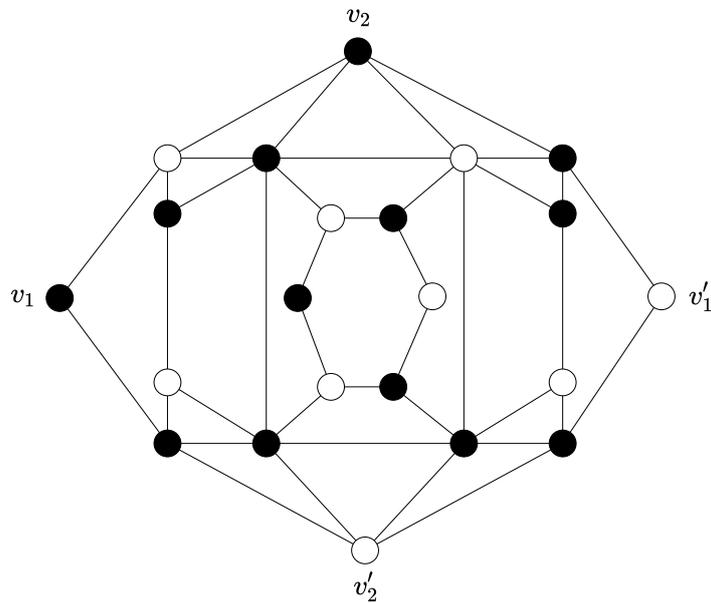


FIGURE 4.2 – Le graphe planaire H où les sommets noirs forment une couverture des sommets minimaux de H .

Puisque pour tout graphe G , nous avons $\tau\text{-anticore}(G) = \alpha\text{-core}(G)$, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 4.18 $\alpha\text{-CORE}$ est NP-difficile dans les graphes planaires.

4.3.3 Graphes planaires

Dans cette section, nous montrons que 1-BONDAGE reste NP-difficile dans certaines classes restreintes de graphes planaires. Les deux remarques suivantes nous seront utiles dans nos réductions.

Remarque 4.19 Soit uv une arête d'un graphe $G = (V, E)$. Si il existe un ensemble dominant minimum S de G tel que soit $u, v \notin S$ ou $u, v \in S$, alors uv n'est pas une arête γ -critique.

Remarque 4.20 Soit v un sommet d'un graphe $G = (V, E)$. Si il existe un ensemble dominant minimum S de G tel que $v \notin S$ et $|S \cap N(v)| \geq 2$, alors toute arête incidente à v n'est pas γ -critique.

En utilisant le Théorème 4.17, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 4.21 1-BONDAGE est NP-difficile dans les graphes planaires de degré maximum 3.

Preuve: Nous prouvons ce résultat à l'aide d'une réduction polynomiale depuis τ -ANTICORE qui est NP-difficile dans les graphes planaires, *c.f.* Théorème 4.17. Depuis un graphe planaire connexe $G = (V, E)$, nous construisons un graphe planaire connexe $G' = (V', E')$ avec degré maximum 3. Soit $n = |V(G)|$ et $m = |E(G)|$.

Pour chaque sommet v de G , nous associons la composante connexe G_v . Nous décrivons cette composante G_v qui est aussi représentée en Figure 4.3a :

- Un cycle induit C_v de longueur $3l + 3$ où $l = d_G(v)$, tel que $C_v = v_0 - \bar{v}_0 - v'_0 - v_1 - \bar{v}_1 - v'_1 - \dots - v_l - \bar{v}_l - v'_l - v_0$;
- Un chemin induit $P_v = a - b - c - d$ qui est relié à C_v par l'arête av_0 ;
- À chaque paire v_i, v'_i de C_v , où $i = 1, \dots, d_G(v) - 1$, est associée une patte $P^i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$ où $\{b_i, c_i, d_i\}$ est un triangle, $a_i b_i$ est une arête, et P^i est reliée à C_v par les arêtes $a_i v_i$ et $a_i v'_i$.

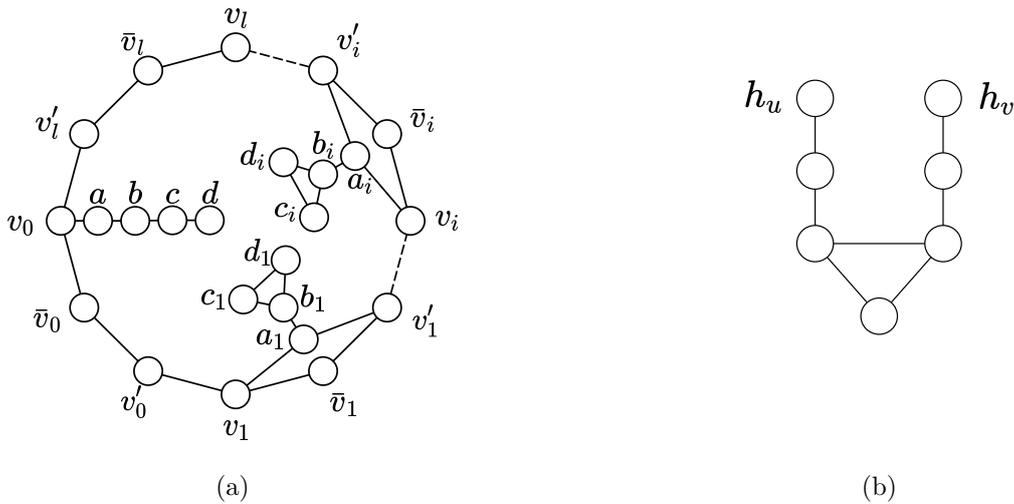
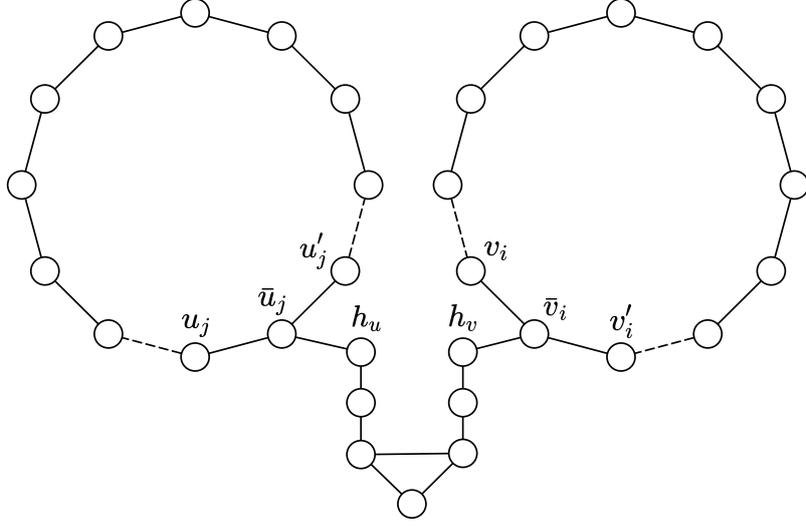


FIGURE 4.3 – (a) La composante G_v associée à un sommet v de G ; (b) La composante H_{uv} associée à une arête uv de G .

FIGURE 4.4 – Deux composantes G_u, G_v connectées par la composante H_{uv} .

Pour chaque arête uv de G , nous créons une copie du graphe H_{uv} représenté dans la Figure 4.3b. Nous observons que les composantes G_v et H_{uv} sont planaires et de degré maximum 3. De plus, chaque \bar{v}_i de G_v , où $i = 1, \dots, d_G(v)$, est de degré 2. Nous montrons comment les composantes sont reliées les unes aux autres afin que le graphe résultant soit planaire. Considérons une représentation planaire de G . Chaque composante G_v est placée à la même position dans le plan que son sommet associé v dans G . Pour chaque composante H_{uv} , nous opérons à l'identique avec son arête associée uv dans G . Nous plongeons chaque cycle induit C_v dans le plan comme un cercle afin que le chemin P_v et les pattes P^i , où $i = 1, \dots, d_G(v) - 1$, soient à l'intérieur du cercle. Puis, pour chaque sommet v de G , nous itérons dans le sens antihoraire sur les arêtes incidentes à v en les étiquetant de $i = 1$ à $i = d_G(v)$. À chaque étape, soit uv l'arête considérée incidente à v avec pour étiquette i . Nous ajoutons l'arête $\bar{v}_i h_v$, où $h_v \in V(H_{uv})$. Nous observons que G' est planaire avec $\Delta(G') \leq 3$. Cela clôt notre construction de G' .

Nous commençons par montrer que $\gamma(G') = 6m + n + \tau(G)$, et finissons par montrer que $b(G') = 1$ si et seulement si $\tau\text{-anticore}(G) \neq \emptyset$.

Nous montrons le résultat suivant :

Propriété 4.21.1 *Soit S' un ensemble dominant de G' . Pour chaque G_v , $|S' \cap V(G_v)| \geq 2d_G(v) + 1$.*

Soit G_v et $l = d_G(v)$. Soit T un ensemble dominant de $G' \setminus V(G_v)$. Nous construisons un ensemble dominant S' de G' à partir de T . Puisque nous souhaitons prouver une borne inférieure sur $|S' \cap V(G_v)|$, nous pouvons supposer que $N(V(G_v)) \subset T$. Soit $S' = T$. Notons que l'ensemble des sommets $\{\bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l\}$ de G_v est dominé par S' . Puisque $v_0 - a - b - c - d$ est un chemin induit dans G' tel que $N(V(P_v)) = v_0$, nous ajoutons c, v_0 à S' afin de dominer P_v . Pour chaque patte $P^i = \{a_i, b_i, c_i, d_i\}$, où $i = 1, \dots, l-1$, puisque $G'[\{b_i, c_i, d_i\}]$ est un triangle et que $N(\{b_i, c_i, d_i\}) = \{a_i\}$, où $a_i b_i \in E$, nous ajoutons b_i à S' . À cette étape $|S' \cap V(G_v)| = l + 1$, et il reste à dominer $I = \{v'_{i-1}, v_i \mid i = 1, \dots, l\}$. Observons que I est l'union disjointe de l chemins induits de taille 2. Pour une paire v'_{i-1}, v_i , si on ne prend aucun des sommets v'_{i-1}, v_i dans S' , alors nous devons prendre \bar{v}_{i-1} et \bar{v}_i (ou \bar{a}_{i-1} et \bar{a}_i qui

sont équivalents) dans S' pour dominer v'_{i-1}, v_i . Donc nous devons ajouter au moins l sommets à S' . Des arguments précédents, nous pouvons en déduire que si nous ajoutons exactement l sommets à S' , alors nous devons prendre $v'_{i-1} \in S'$, ou $v_i \in S'$; et $\bar{v}_0, \bar{v}_i \notin S'$, pour tout $i = 1, \dots, l$. La Propriété 4.21.1 est démontrée.

Soit S_v un ensemble dominant d'une composante G_v . Nous donnons les définitions suivantes :

- Si $|S_v| = 2d_G(v) + 1$, alors S_v est une *configuration non-dominante* de G_v . Notons que d'après les arguments précédents, si S_v est une configuration non-dominante, alors $S_v \cap \{\bar{v}_i \mid i = 0, \dots, d_G(v)\} = \emptyset$. Voici un exemple de cette configuration : $S_v = \{c, v_0, v_l\} \cup \{b_i, v_i \mid i = 1, \dots, l-1\}$, où $l = d_G(v)$.
- Si $|S_v| \geq 2d_G(v) + 2$ et $\bar{v}_i \in S_v$ pour un sommet $\bar{v}_i \in V(G_v)$, alors S_v est une *configuration semi-dominante* de G_v .
- Si $|S_v| = 2d_G(v) + 2$ et $\{\bar{v}_i \mid i = 1, \dots, d_G(v)\} \subset S_v$, alors S_v est une *configuration dominante* de G_v . Notons qu'une configuration dominante est un cas restreint d'une configuration semi-dominante. Voici un exemple de cette configuration $S_v = \{c, v_0, v'_l, \bar{v}_l\} \cup \{b_i, \bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l-1\}$, où $l = d_G(v)$.

Étant donné un dominant S' de G' , d'après la propriété 4.21.1, pour toute composante G_v , $S_v = S' \cap V(G_v)$ est soit une configuration non-dominante ou une configuration semi-dominante.

Soit H_{uv} la composante associée à une arête uv de G , et $\bar{u} \in V(G_u)$, $\bar{v} \in V(G_v)$, tels que $h_u \bar{u}, h_v \bar{v} \in E$. Soit S' un ensemble dominant minimum de G' . La propriété suivante peut se vérifier facilement.

Propriété 4.21.2 *Si $\bar{u}, \bar{v} \notin S'$, alors $|S' \cap V(H_{uv})| \geq 3$. Sinon $|S' \cap V(H_{uv})| = 2$.*

Soit S' un ensemble dominant de G' . Considérons les trois ensembles $S'_v = S' \cap V(G_v)$, $S'_u = S' \cap V(G_u)$ et $S'_{uv} = S' \cap V(H_{uv})$. D'après la Propriété 4.21.2, $|S'_{uv}| = 2$ si et seulement si S'_u ou S'_v est une configuration semi-dominante, avec $\bar{u}_i \in S'$ ou $\bar{v}_i \in S'$. Dans ce cas, nous disons que S'_{uv} est une *configuration couverte* et que H_{uv} est *couverte* par S' . Lorsque $\bar{u}_i \in S'$ (resp. $\bar{v}_i \in S'$), nous disons que G_u (resp. G_v) *couvre* H_{uv} . Des exemples de configurations couvertes avec G_u ou G_v couvrant H_{uv} sont exposés dans les Figures 4.5a, 4.5c, et 4.6.

Nous définissons comme S'_G l'ensemble des G_v tel que S'_v est une configuration semi-dominante dans S' , et S'_H l'ensemble des H_{uv} qui ne sont pas couverts par S' . D'après la Propriété 4.21.2, si une composante H_{uv} n'est pas couvert, alors $|S'_{uv}| \geq 3$. Nous en déduisons la borne inférieure suivante :

$$\begin{aligned} |S'| &\geq 2m + \sum_{v \in V(G)} (2d_G(v) + 1) + |S'_G| + |S'_H| \\ &\geq 6m + n + |S'_G| + |S'_H| \end{aligned} \tag{4.1}$$

Un ensemble dominant S' de G' est le *dominant associé* à une couverture de sommets minimum S de G , si S' respecte les propriétés suivantes :

- Si $v \notin S$, alors S'_v est une configuration non-dominante de G_v ;
- Si $v \in S$, alors S'_v est une configuration dominante de G_v ;

- Pour chaque arête $uv \in E(G)$, S'_{uv} est une configuration couverte de H_{uv} . Notons que G_u ou G_v couvre H_{uv} .

Nous montrons la propriété suivante :

Propriété 4.21.3 $\gamma(G') \leq 6m + n + \tau(G)$.

Soit S' le dominant associé à la couverture de sommets minimum S de G . Puisque chaque H_{uv} est couverte par G_u ou G_v , nous en déduisons que S' est un dominant de G' tel que $|S'_G| = \tau(G)$ et $|S'_H| = 0$. Donc $|S'| = 6m + n + \tau(G)$. La Propriété 4.21.3 est démontrée.

Propriété 4.21.4 $\gamma(G') \geq 6m + n + \tau(G)$.

Soit $p = 6m + n + \tau(G)$. Supposons, par contradiction, qu'il existe un ensemble dominant S' de G' tel que $|S'| < p$. D'après (4.1), nous avons $|S'_G| + |S'_H| < \tau(G)$. Nous construisons une couverture de sommets S de G à partir de S' . Pour chaque composante G_v de S'_G , nous ajoutons v à S . Il reste à couvrir les arêtes associées aux composantes de S'_H . Pour chaque composante H_{uv} de S'_H , soit uv son arête associée dans G : nous ajoutons une de ses extrémités, disons u , à S . Nous en déduisons que S est une couverture de sommets de G telle que $|S| < \tau(G)$, une contradiction. Cela démontre la Propriété 4.21.4.

D'après les Propriétés 4.21.3 et 4.21.4, nous en déduisons la propriété suivante :

Propriété 4.21.5 $\gamma(G') = 6m + n + \tau(G)$.

Avec les arguments utilisés pour démontrer la Propriété 4.21.3, et d'après la Propriété 4.21.5, nous en déduisons que l'ensemble dominant associé à une couverture de sommets minimum est un ensemble dominant minimum.

Dans la partie restante, nous montrons que $b(G') = 1$ si et seulement $\tau\text{-anticore}(G) \neq \emptyset$. Dans un premier temps, nous montrons que si $\tau\text{-anticore}(G) = \emptyset$, alors $b(G') > 1$. Pour ce faire nous montrons qu'aucune arête avec une extrémité dans H_{uv} , et qu'aucune arête dans G_v n'est γ -critique dans G' .

Propriété 4.21.6 *Si $\tau\text{-anticore}(G) = \emptyset$, alors pour tout H_{uv} , les arêtes avec une extrémité dans H_{uv} ne sont pas γ -critiques dans G' .*

Soit $uv \in E$ et H_{uv} sa composante associée. Soit S une couverture de sommets minimum de G et S' son dominant associé dans G' .

Premièrement, supposons que $u, v \in S$. Considérons la configuration couverte S'_{uv} de la Figure 4.5c. D'après les Remarques 4.19 et 4.20, les arêtes épaisses (ou arêtes grasses) de la figure ne sont pas γ -critiques. Pour les trois arêtes non-épaisses restantes, nous considérons la configuration couverte symétrique de la Figure 4.5d. D'après les Remarques 4.19 et 4.20, ces trois arêtes ne sont pas γ -critiques. Nous en déduisons que les arêtes avec une extrémité dans H_{uv} ne sont pas γ -critiques dans G' .

Deuxièmement, nous pouvons supposer que $u \in S$ et $v \notin S$ (le cas $u \notin S$ et $v \in S$ est symétrique, et le cas $u, v \notin S$ n'existe pas car S couvre l'arête uv). Puisque $\tau\text{-anticore}(G') = \emptyset$, il y a une autre couverture de sommets minimum T de G telle que $u \notin T$ et $v \in T$. Soit T' le dominant associé à T dans G' . Remarquons que G_u (resp. G_v) couvre H_{uv} dans S' (resp. T'). Nous pouvons donc considérer les sommets noirs de la Figure 4.5a (resp. Figure 4.5b) comme configuration couverte de S'_{uv} (resp.

T'_{uv}). D'après les Remarques 4.19 et 4.20, les arêtes de la figure ne sont pas γ -critiques. Donc les arêtes ayant une extrémité dans H_{uv} ne sont γ -critiques. La Propriété 4.21.6 est démontrée.

Propriété 4.21.7 *Si τ -anticore(G) = \emptyset , alors pour toute composante G_v , les arêtes de G_v ne sont pas γ -critiques dans G' .*

Soit $v \in V$, $l = d_G(v)$, et G_v sa composante associée.

Premièrement, supposons que $v \notin \tau$ -core(G). Puisque τ -anticore(G) = \emptyset , il existe S et T , deux couvertures de sommets minimums de G , telles que $v \notin S$ et $v \in T$. Soit S', T' les dominants associés à S, T , respectivement. Notons que chaque H_{uv} est couverte par G_u, G_v dans S', T' , respectivement. Donc nous pouvons supposer que S'_{uv} est comme décrite sur la Figure 4.6. Remarquons que S'_v est une configuration non-dominante de G_v , tandis que T'_v est une configuration dominante de G_v . Nous donnons une configuration non-dominante de S'_v et une configuration dominante T'_v :

1. $S'_v = Z \cup \{c, v_0\} \cup \{w_i \mid w_i \in \{b_i, c_i, d_i\}, i = 1, \dots, l-1\}$ avec $Z = \{v_i \mid i = 1, \dots, l\}$ ou $Z = \{v'_i \mid i = 0, \dots, l-1\}$;
2. $T'_v = W \cup \{\bar{v}_l\} \cup \{b_i, \bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l-1\}$ avec $W = \{c, v_0, v'_0\}$ ou $W = \{d, b, \bar{v}_0\}$ ou $W = \{c, v_0, \bar{v}_0\}$.

Nous pouvons donc prendre n'importe quelles configurations S'_v, T'_v exposées ci-dessus dans S', T' , respectivement, afin que S', T' restent des ensembles dominants minimums de G' . Nous en déduisons grâce aux Remarques 4.19 et 4.20, que les arêtes de G_v ne sont pas γ -critiques dans G' .

Deuxièmement, supposons que $v \in \tau$ -core(G). Puisque τ -anticore(G) = \emptyset , alors pour chaque arête uv de G , il existe S une couverture de sommets minimum de G telle que $u, v \in S$. Soit u un voisin de v , et soit S une couverture de sommets minimum de G telle que $u, v \in S$. Soit S' son ensemble dominant associé dans G' . Notons que S_u, S_v sont des configurations dominantes de G_u, G_v , respectivement. Donc H_{uv} est couvert par G_u et G_v dans S' . Donc nous pouvons remplacer S'_{uv} par les sommets noirs dominants H_{uv} représentés dans la Figure 4.6. Nous observons que le sommet h_v domine le sommet \bar{v}_j dans G_v , où $j \in \{1, \dots, l\}$. Nous donnons des configurations dominantes de G_v pour remplacer S'_v dans S' . Plus précisément, le point 3. est une configuration dominante de G_v , tandis que les points 4. et 5. sont des configurations semi-dominantes de taille $2d_G(v) + 2$ qui couvrent chaque composante $H_{u'v}$, où $u' \neq u$.

3. $S'_v = W \cup \{\bar{v}_l\} \cup \{b_i, \bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l-1\}$ avec $W = \{c, v_0, v'_0\}$ ou $W = \{d, b, \bar{v}_0\}$ ou $W = \{c, v_0, \bar{v}_0\}$;
4. $S'_v = \{a_j, w_j\} \cup \{c, v_0, v'_0, \bar{v}_l\} \cup \{b_i, \bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l-1, i \neq j\}$, où $j \neq l$ et $w_j \in \{b_j, c_j, d_j\}$;
5. $S'_v = \{v_j\} \cup \{c, v_0, v'_0\} \cup \{b_i, \bar{v}_i \mid i = 1, \dots, l-1, i \neq j\}$, où $j = l$.

Nous pouvons donc prendre n'importe quelle configuration S'_v exposée ci-dessus dans S' , afin que S' reste un ensemble dominant minimum de G' . Nous en déduisons grâce aux Remarques 4.19 et 4.20, les propriétés suivantes : d'après le point 3. les arêtes incidentes à un des sommets $a, b, c, d, v_0, \bar{v}_0, v'_0$ ne sont pas γ -critiques dans G' ; d'après le point 4. les arêtes incidentes à un des sommets $a_j, b_j, c_j, d_j, v_j, \bar{v}_j, v'_j$ ne sont pas γ -critiques dans G' ; d'après le point 5. les arêtes incidentes à un des sommets v_j, \bar{v}_j, v'_j ne sont pas γ -critiques dans G' . Puisque nous pouvons construire ces ensembles dominants minimums S' , à partir de n'importe quelle couverture de sommets minimum S où $u, v \in S$, $u \in N(v)$, les configurations précédentes sont valables pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$. Donc les arêtes de G_v ne sont pas γ -critiques dans G' . La Propriété 4.21.7 est démontrée.

Puisque chaque arête de G' est soit dans une composante G_v ou à une extrémité dans H_{uv} , nous avons donc d'après les Propriétés 4.21.6 et 4.21.7, que si τ -anticore(G) = \emptyset , alors G' n'a pas d'arête γ -critique. Nous en déduisons la propriété suivante :

Propriété 4.21.8 Si $\tau\text{-anticore}(G) = \emptyset$, alors $b(G') > 1$.

Il reste à montrer la propriété suivante :

Propriété 4.21.9 Si $\tau\text{-anticore}(G) \neq \emptyset$, alors $b(G') = 1$.

Soit $v \in \tau\text{-anticore}(G)$. Nous montrons qu'il n'existe pas d'ensemble dominant minimum de G' tel que G_v a une configuration semi-dominante. Supposons, par contradiction, qu'il y ait S' un ensemble dominant minimum de G' tel que S'_v soit une configuration semi-dominante de G_v . Nous construisons une couverture de sommets minimum S de G à partir de S' . Pour chaque composante G_u de S'_G , nous ajoutons le sommet $u \in V(G)$ à S . Pour chaque composante H_{uv} de S'_H , nous prenons une extrémité de uv , disons $u \in V(G)$, et l'ajoutons à S . D'après (4.1) et la Propriété 4.21.5, nous avons $|S_G| + |S_H| = \tau(G)$. Donc $|S| = \tau(G)$. Mais S est une couverture de sommets minimum de G , où $v \in S$, une contradiction. Donc il n'existe pas d'ensemble dominant minimum de G' où G_v a une configuration semi-dominante.

Il reste à montrer qu'il existe une arête γ -critique dans G' . Soit S' un ensemble dominant minimum de G' . D'après les arguments utilisés pour démontrer la Propriété 4.21.1, nous avons seulement deux configurations possibles de S'_v pour la composante G_v , qui sont :

- $S'_v = \{c, v_0, v_l\} \cup \{v_i, w_i \mid w_i \in \{b_i, c_i, d_i\}, i = 1, \dots, d_G(v) - 1\}$;
- $S'_v = \{c, v_0, v'_0\} \cup \{v'_i, w_i \mid w_i \in \{b_i, c_i, d_i\}, i = 1, \dots, d_G(v) - 1\}$.

Nous observons que pour tous les ensembles dominants minimum de G' , nous avons $c \in S'$ et $d \notin S'$, où $c, d \in V(G_v)$ (précisément $c, d \in V(P_v)$). Rappelons que d est une feuille. Donc d est dominé exclusivement par c dans tout ensemble dominant S' de G' . Donc l'arête cd est γ -critique dans G' . La propriété 4.21.9 est démontrée.

D'après les Propriétés 4.21.8 et 4.21.9, nous en déduisons que $b(G') = 1$ si et seulement si $\tau\text{-anticore}(G) \neq \emptyset$. Donc 1-BONDAGE est NP-difficile dans les graphes planaires de degré maximum 3. \square

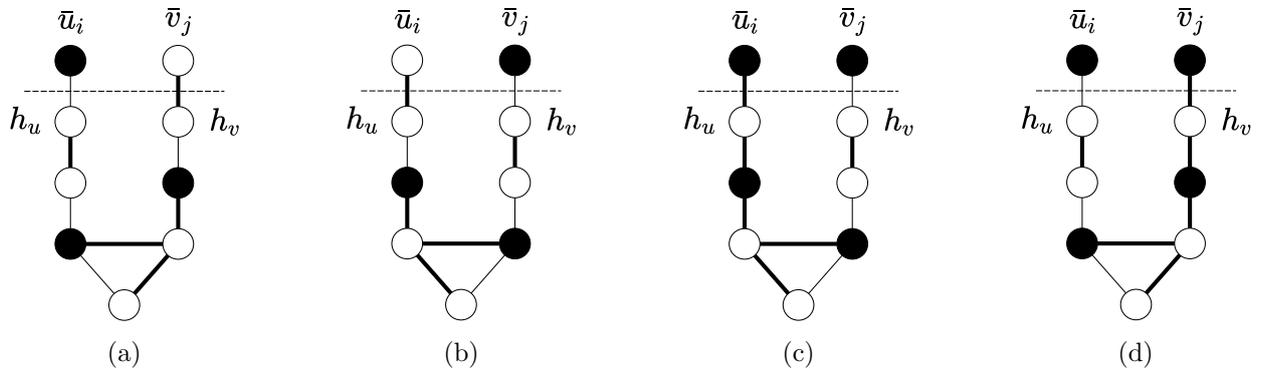


FIGURE 4.5 – (a) Une configuration couverte de H_{uv} où G_u est couvrant ; (b) une configuration couverte de H_{uv} où G_v est couvrant ; (c,d) deux configurations couvertes de H_{uv} où G_u et G_v sont couvrants.

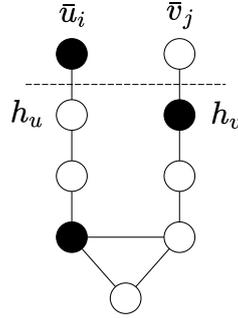


FIGURE 4.6 – Une configuration couverte de H_{uv} où G_u est couvrant et h_v domine \bar{v}_j .

À partir des arguments de la preuve du Théorème 4.21, nous pouvons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.22 1-BONDAGE est NP-difficile dans les graphes planaires sans griffe de degré maximum 3.

Preuve: À partir du graphe G' issu de la réduction de la preuve du Théorème 4.21, nous construisons un graphe planaire sans griffe H' avec degré maximum 3.

Dans un premier temps, nous définissons l'opération O_c pour construire, à partir de G' , un graphe planaire intermédiaire H ayant pour degré maximum 3 et $k - 1$ griffes induites, où k est le nombre de griffes de G' . Dans un deuxième temps, nous montrons que $\gamma(H) = \gamma(G') + 2$. Pour finir, nous montrons que $b(H) = b(G')$.

L'opération O_c consiste à prendre un sommet v au centre d'une griffe induite de G' , à le supprimer, et à le remplacer par la composante H_v , une copie du graphe présenté dans la Figure 4.7. Soit H le graphe résultant de cette opération. Nous observons que H est planaire avec un degré maximum de 3 et au plus $k - 1$ griffes induites.

La composante H_v satisfait les propriétés suivantes. Nous avons $\gamma(H_v) = 3$ et $\{a, b, c\}$ est un ensemble dominant minimum de G . Les graphes $H_v - a$, $H_v - b$, $H_v - c$ ont un unique ensemble dominant minimum de taille 2, qui sont, $\{v_1, v_4\}$, $\{v_2, v_5\}$, $\{v_3, v_6\}$, respectivement. Il n'existe pas d'ensemble dominant minimum de $H_v - \{a, b, c\}$.

Nous montrons la propriété suivante :

Propriété 4.22.1 $\gamma(H) \leq \gamma(G') + 2$

Soit S' un ensemble dominant minimum de G' . Nous construisons un ensemble dominant T de H à partir de S' . Soit $T = S'$. Supposons que $v \notin S'$. Si $u_1 \in S'$, alors nous ajoutons v_3, v_6 à T . Donc T est un ensemble dominant de H . Les cas $u_2 \in S'$ et $u_3 \in S'$ sont symétriques. Maintenant nous pouvons supposer que $v \in S'$. Nous supprimons v de T et ajoutons les sommets a, b, c . Donc T est un ensemble dominant de H , et T domine les sommets u_1, u_2, u_3 . Donc $\gamma(H) \leq \gamma(G') + 2$. Ceci prouve la Propriété 4.22.1.

Propriété 4.22.2 $\gamma(H) = \gamma(G') + 2$

Soit T un ensemble dominant minimum de H . Nous construisons un ensemble dominant S' de G' à partir de T . Supposons que $|T| < \gamma(G') + 2$. D'après nos arguments précédents $|T \cap V(H_v)| \geq 2$. Si $|T \cap V(H_v)| = 2$, alors $a, b, c \notin T$ et $T \cap \{u_1, u_2, u_3\} \neq \emptyset$. Donc $T \cap V(G')$ est un ensemble dominant minimum de G' , une contradiction. Sinon $|T \cap V(H_v)| \geq 3$, et donc $T \cap V(G') \cup \{v\}$ est un ensemble dominant minimum de G' , une autre contradiction. Donc $\gamma(H) \geq \gamma(G) + 2$. D'après la Propriété 4.22.1, nous en déduisons la Propriété 4.22.2.

Soit S_G et S'_G deux ensembles dominants minimums de G' . Quand S_G et S'_G sont tels que décrit dans l'un des deux cas ci-dessous, nous montrons que les arêtes incidentes avec un sommet de H_v dans H ne sont pas γ -critiques.

- (a) $u_i, v \in S_G$, $u_i \in S'_G$, et $v \notin S'_G$, où $i \in \{1, 2, 3\}$.

Supposons que $u_1 = u_i$. Nous construisons S_H, S'_H depuis S_G, S'_G , respectivement. Soit $S_H = S_G$ et $S'_H = S'_G$. Nous supprimons v de S_H et ajoutons les sommets b, c, w à S_H , où $w \in \{a, v_1, v_2\}$. Nous ajoutons v_3, v_6 à S'_H . D'après la Propriété 4.22.2, S_H et S'_H sont deux ensembles dominants minimums de H . D'après les Remarques 4.19 et 4.20, les arêtes ayant une extrémité dans H_v ne sont pas γ -critiques. Les cas $u_2 = u_i$ et $u_3 = u_i$ sont symétriques.

- (b) $u_i, u_j \in S_G$, $u_i, u_l \in S'_G$, et $v \notin S_G \cup S'_G$, où $i, j, l \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j \neq l$.

Supposons que $u_i = u_1$, $u_j = u_2$ et $u_l = u_3$. Nous construisons S_H, S'_H depuis S_G, S'_G , respectivement. Soit $S_H = S_G$ et $S'_H = S'_G$. Nous ajoutons les sommets v_1, v_4 ou v_3, v_6 à S_H . Nous ajoutons les sommets v_2, v_5 ou v_3, v_6 à S'_H . D'après la Propriété 4.22.2, S_H et S'_H sont deux ensembles dominants minimums de H . D'après les Remarques 4.19 et 4.20, les arêtes ayant une extrémité dans H_v ne sont pas γ -critiques. Les cas restants sont symétriques.

Nous sommes prêts à montrer le résultat suivant :

Propriété 4.22.3 *Si $b(G') \geq 2$, alors les arêtes ayant une extrémité dans H_v ne sont pas γ -critiques dans H .*

Lorsque $b(G') \geq 2$, nous montrons que pour chaque griffe induite dans G' , qu'il existe deux ensembles dominants minimums tels que décrits au point (a) ou (b). Nous observons que chaque sommet au centre d'une griffe induite dans G' appartient à une composante G_v . Nous allons donc concentrer nos efforts sur l'intersection des ensembles dominants minimums de G' avec les composantes G_v . Rappelons que lorsque $b(G') \geq 2$, le graphe G' a des ensembles dominants minimums contenant les ensembles décrits dans les points 1. et 2. ou dans les points 3. 4. et 5 (*c.f.* preuve de la Propriété 4.21.9). Ainsi, pour chaque griffe induite de G' , nous montrons qu'il existe deux ensembles dominants minimums S_G et S'_G contenant des ensembles exposés aux points 1. et 2. et qui correspondent au cas (a) ou (b). Nous faisons de même pour les points 3. 4. et 5.

Premièrement, regardons la griffe $G'[\{a, v_0, \bar{v}_0, v'_i\}]$, où v_0 est à son centre. D'après le point 2. nous avons $\bar{v}_0, v_0 \in S_G$ et $\bar{v}_0 \in S'_G$, $v_0 \notin S'_G$. Cela correspond au cas (a) avec $u_i = \bar{v}_0$ et $v = v_0$. D'après le point 3. nous avons $v_0, \bar{v}_0 \in S_G$ et $\bar{v}_0 \in S'_G$, $v_0 \notin S'_G$. Cela correspond au cas (a) avec $u_i = \bar{v}_0$ et $v = v_0$.

Deuxièmement, regardons la griffe $G'[\{a_i, b_i, v_i, v'_i\}]$, où a_i est à son centre. D'après le point 1. nous avons $b_i, v_i \in S_G$ et $b_i, v'_i \in S'_G$ où $a_i \notin S_G \cup S'_G$. Cela correspond au cas (b) avec $u_i = b_i$, $u_j = v_i$, $u_l = v'_i$, et $v = a_i$. D'après le point 4. nous avons $b_i, a_i \in S_G$ (écrit b_j, a_j) et $b_i \in S'_G$, $a_i \notin S'_G$ (écrit b_i, a_i cette fois-ci). Notons que ces ensembles sont possibles pour $i, j = 1, \dots, l$, $i \neq j$. Cela correspond au cas (a) avec $u_i = b_i$ et $v = a_i$.

Enfin, il reste la griffe $G'[\{h_v, v_i, v'_i, \bar{v}_i\}]$, où \bar{v}_i est à son centre. D'après le point 1. nous avons $h_v v_i \in S_G$ ou $h_v v'_i \in S'_G$ et $\bar{v}_i \notin S_G \cup S'_G$. Nous rappelons que h_v appartient aux deux ensembles dominants minimums car le point 1. est une configuration non-dominante (pour plus de précisions, nous référons au paragraphe au-dessus du point 1. où il est précisé que S'_{uv} est tel que décrit sur la Figure 4.6). Cela correspond au cas (b) avec $u_i = h_v$, $u_j = v_i$ et $u_l = v'_i$. D'après le point 3. $h_v, \bar{v}_i \in S_G$. D'après le point 4. nous avons $h_v \in S'_G$, $\bar{v}_i \notin S'_G$ (écrit \bar{v}_j). Notons que ces ensembles existent pour $i, j = 1, \dots, l$, $i \neq j$. Pour les mêmes raisons que précédemment, le sommet h_v appartient aux deux ensembles dominants minimums (pour plus de précisions, nous référons au paragraphe au-dessus du point 3.). Cela correspond au cas (a) avec $u_i = h_v$ et $v = v_0$.

Nous avons vérifié, pour chaque griffe induite dans G' , qu'il existe toujours deux ensembles dominants minimums S_G et S'_G satisfaisant le point (a) ou (b). Donc la Propriété 4.22.3 est démontrée.

Propriété 4.22.4 $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G') = 1$.

Supposons que $b(G') = 1$. Nous savons que cd est γ -critique dans G' (voir la fin de la preuve utilisée pour montrer la Propriété 4.21.9 dans le Théorème 4.21). Puisque c, d ne sont pas des sommets appartenant à une griffe induite de G' , nous avons $cd \in H$. Donc d'après la Propriété 4.22.2, nous avons $\gamma(H - cd) = \gamma(G' - cd) + 2$, et donc cd est γ -critique dans H .

Maintenant nous pouvons supposer que $b(G') \geq 2$. Supposons, par contradiction, que $b(H) = 1$. Soit xy une arête γ -critique de H . D'après la Propriété 4.22.3, les arêtes incidentes à H_v dans H ne sont pas γ -critiques. Donc $xy \in E(G')$. Mais d'après la Propriété 4.22.2, nous avons $\gamma(G' - xy) = \gamma(H - xy) - 2$, et donc $b(G') = 1$, une contradiction. La Propriété 4.22.4 est démontrée.

D'après les Propriétés 4.22.2 et 4.22.4, en appliquant itérativement l'opération O_c jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de griffes induites, nous obtenons un graphe planaire sans griffe H' avec pour degré maximum 3 et tel que $b(H') = 1$ si et seulement si $b(G') = 1$. \square

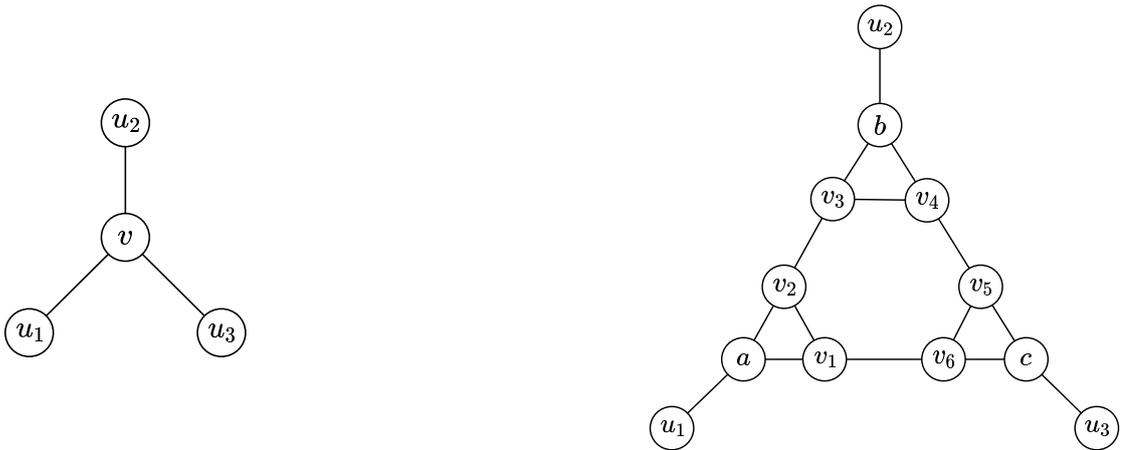


FIGURE 4.7 – Sur la gauche, une griffe induite de G' , et sur la droite, la composante associée H_v remplaçant cette griffe.

Théorème 4.23 1-BONDAGE est NP-difficile dans les graphes planaires 3-réguliers.

Preuve: Nous donnons une réduction polynomiale depuis 1-BONDAGE qui est NP-difficile dans les graphes sous-cubiques planaires, *c.f.* Théorème 4.21. Depuis un graphe planaire $G = (V, E)$ tel que $\Delta(G) \leq 3$, nous construisons un graphe planaire 3-régulier $G' = (V', E')$. Soit H_1, H_2 les graphes respectifs des Figures 4.8a, 4.8b. Nous observons les propriétés suivantes pour H_1 et H_2 :

- $\gamma(H_1) = \gamma(H_2) = 2$;
- $\gamma(H_1 - \{u_1, u_2\}) = \gamma(H_2 - u) = 2$;
- $b(H_1 - \{u_1, u_2\}) = b(H_2) = 2$;
- $u_1, u_2 \in \gamma\text{-anticore}(H_1)$ et $u \in \gamma\text{-anticore}(H_2)$.

Nous décrivons l'opération O_1 pour transformer un sommet de degré 1 en un sommet de degré 3. Soit v un sommet de degré 1 dans G . Prenons une copie de H_1 et relierons v à u_1 et u_2 . Dans le graphe H obtenu, nous avons $d_H(v) = 3$. Puisque les sommets de H_1 dans H sont de degrés 3, alors H possède un sommet de degré 1 en moins que G .

Nous décrivons l'opération O_2 pour transformer un sommet de degré 2 en un sommet de degré 3. Soit v un sommet de degré 2 dans G . Prenons une copie de H_2 et relierons v à u . Dans le graphe H obtenu, nous avons $d_H(v) = 3$ et exactement deux sommets de H_2 dans H sont de degrés 1, tandis que les autres sont de degrés 3. Donc H possède un sommet de degré 2 en moins que G .

Soit H le graphe obtenu de l'opération O_i , et soit H_i le sous-graphe ajouté, où $i \in \{1, 2\}$.

Propriété 4.23.1 $\gamma(H) = \gamma(G) + 2$

Puisque $\gamma(H_i) = 2$, nous avons $\gamma(H) \leq \gamma(G) + 2$. Soit S un ensemble dominant minimum de H . Supposons, par contradiction, que $|S| < \gamma(G) + 2$. En utilisant les propriétés de H_i exposées au début, nous obtenons $|S \cap V(H_i)| \geq 2$. Si $|S \cap V(H_i)| = 2$, alors en utilisant les mêmes propriétés, nous obtenons $u_1, u_2 \notin S$ ou $u \notin S$. Donc $S \setminus H_i$ est un ensemble dominant de G tel que $|S \setminus H_i| < \gamma(G)$, une contradiction. Sinon $|S \cap V(H_i)| \geq 3$, et nous avons $\{v\} \cup S \setminus V(H_i)$ un ensemble dominant de G , une contradiction. Cela démontre la Propriété 4.23.1.

Propriété 4.23.2 $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$.

Soit $A \subseteq E$ tel que $\gamma(G - A) = \gamma(G) + 1$. D'après la Propriété 4.23.1, nous avons $\gamma(H - A) = \gamma(G - A) + 2$, et nous en déduisons que $b(H) \leq b(G) \leq 2$. Supposons que $b(H) = 1$. Supposons, par contradiction, que $b(G) \geq 2$. Soit uv une arête γ -critique dans H . Soit $H_i = H_1$. Puisque l'arête incidente à v dans G n'est pas γ -critique, alors il y a un ensemble dominant minimum S de G où $v \in S$. Puisque $\gamma(H_1 - \{u_1, u_2\}) = 2$ et $b(H_1 - \{u_1, u_2\}) = 2$, nous en déduisons que les arêtes incidentes à H_1 dans H ne sont pas γ -critiques dans H . Ainsi $uv \in E(G)$ et donc $\gamma(H - uv) = \gamma(G - uv) + 2$, une contradiction. Maintenant soit $H_i = H_2$. Soit S, S' les ensembles dominants minimums respectifs de G, H_2 . Puisque $S \cup S'$ est un ensemble dominant minimum de H et que $b(H_2) = 2$, nous en déduisons que uv n'a pas d'extrémité dans H_2 . Ainsi $uv \in E(G)$ et donc $\gamma(H - uv) = \gamma(G - uv) + 2$, une contradiction. La Propriété 4.23.2 est démontrée.

Donc d'après les Propriétés 4.23.1 et 4.23.2, en appliquant O_1 et O_2 jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommet de degré 1 ou 2, nous obtenons G' , un graphe planaire 3-régulier, où $b(G') = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$. \square



FIGURE 4.8 – (a) le graphe H_1 pour supprimer les sommets de degrés 1; (b) le graphe H_2 pour supprimer les sommets de degrés 2.

Théorème 4.24 *Pour tout k fixé, $k \geq 3$, 1-BONDAGE est NP-difficile dans les graphes planaires bipartis de maille k où les sommets sont de degrés 2 ou 3.*

Preuve: Nous donnons une réduction polynomiale depuis 1-BONDAGE qui est NP-difficile dans les graphes planaires cubiques, *c.f.* Théorème 4.23. Depuis un graphe cubique planaire $G = (V, E)$ tel que $b(G) \leq 2$, et un entier $k \geq 3$, nous construisons un graphe planaire biparti $G' = (V', E')$ avec $2 \leq \delta(G') \leq \Delta(G') \leq 3$ et $g(G') \geq k$.

La 3-subdivision d'une arête uv est obtenue en subdivisant uv en quatre arêtes et en insérant trois nouveaux sommets, disons u', w, v' . Dit autrement, uv est remplacée par un chemin de longueur cinq que nous notons $P_5 = u - u' - w - v' - v$. La 3-subdivision a été utilisée dans [79] (*c.f.* Corollaire 3 de la source) pour montrer la NP-complétude de DOMINANT MINIMUM dans les graphes bipartis de maille au moins k . Il est prouvé que $\gamma(H) = \gamma(H') + 1$, où H' est le graphe obtenu depuis la 3-subdivision d'une arête d'un graphe H . Malheureusement, cette opération ne maintient pas le nombre de bondage du graphe obtenu. Pour cette raison, nous introduirons l'opération O_e pour isoler les « petits » cycles induits pour lesquels les arêtes pourront être 3-subdivisée sans altérer le nombre de bondage.

Nous montrons la propriété suivante :

Propriété 4.24.1 *Soit H le graphe obtenu de la 3-subdivision d'une arête uv de G tel que $u, v \notin \gamma\text{-anticore}(G)$. Alors $\gamma(H) = \gamma(G) + 1$ et $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$. De plus $u', w, v' \notin \gamma\text{-anticore}(H)$.*

Puisque $\gamma(H) = \gamma(G) + 1$ a déjà été montré dans [79], nous pouvons nous concentrer sur l'élément suivant de la Propriété 4.24.1 :

Propriété 4.24.2 *$b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$.*

Supposons que $b(G) = 1$. Soit st une arête γ -critique de G . Si $st \neq uv$, alors $\gamma(H - st) = \gamma(G - st) + 1$. Donc st est γ -critique dans H et $b(H) = b(G) = 1$. Sinon $st = uv$. Supposons que uu' ne soit pas γ -critique dans H . Soit S' un ensemble dominant minimum de $H - uv$. Nous avons $(N_G[u] \setminus \{v\}) \cap S' \neq \emptyset$, et nous pouvons supposer que $w \in S'$, puisque u' est une feuille de $H - uv$. Puisque v' est dominé par w dans S' , et que $d_H(v') = 2$, nous pouvons supposer que $(N_G[v] \setminus \{u\}) \cap S' \neq \emptyset$. Donc $S' \setminus \{w\}$ est un ensemble dominant minimum, une contradiction. Le cas vv' est symétrique. Donc uu' et vv' sont γ -critiques dans H et donc $b(H) = b(G) = 1$.

Maintenant supposons que $b(G) \geq 2$. Supposons, par contradiction, que $b(H) = 1$. Soit st une arête γ -critique de H . Si st est une arête de G , alors $\gamma(H - st) = \gamma(G - st) + 1$, une contradiction.

Donc $st \in \{uu', vv', u'w, v'w\}$. Depuis un ensemble dominant minimum S de $G - uv$, nous obtenons $S' = S \cup \{w\}$ un ensemble dominant minimum de H . D'après les Remarques 4.19 et 4.20, les arêtes uu' et vv' ne sont pas γ -critiques dans H . De plus, il y a S_1 et S_2 , deux ensembles dominants minimums de G tels que $u \in S_1$ et $v \in S_2$. Notons que $S_1 = S_2$ est une possibilité. Alors $S'_1 = S \cup \{v'\}$ et $S'_2 = S \cup \{u'\}$ sont deux ensembles dominants minimums de H . Mais d'après la Remarque 4.19, $u'w$ et $v'w$ ne sont pas γ -critiques dans H . Donc $b(H) \geq 2$. Nous observons que les trois sommets ajoutés u', w, v' , issus de la 3-subdivision de uv , ne sont pas dans γ -anticore(H) puisque u, v n'appartiennent pas à γ -anticore(G). La Propriété 4.24.2 est démontrée, et nous en déduisons la Propriété 4.24.1.

Avant d'introduire l'opération O_e , nous listons quelques propriétés du graphe H_e qui sera utilisé dans cette opération. Soit H_e le graphe représenté dans la Figure 4.9a. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $\gamma(H_e) = 8$ et $\gamma(H_e \setminus U) = 8$, où $U \subseteq \{x, y\}$. Nous mettons en évidence les six ensembles dominants minimums de H_e suivants :

- $A = \{a_1, a_3, b_1, b_4, d_2, e_2, f_2, g_2\}$;
- $B = \{a_1, a_3, b_1, b_4, d_3, e_3, f_3, g_3\}$;
- $C = \{a_1, a_3, b_2, c_3, d_3, e_1, f_1, g_2\}$;
- $D = \{a_2, b_1, b_4, c_1, d_4, e_3, f_2, g_4\}$;
- $E = \{a_1, a_3, b_3, c_4, d_3, e_2, f_4, g_1\}$;
- $F = \{a_1, b_2, b_4, c_2, d_1, e_4, f_3, g_4\}$.

À partir des Remarques 4.19 et 4.20, ainsi que des ensembles dominants minimums A, B, C, D, E , nous en déduisons que le graphe H_e n'admet aucune arête γ -critique. Donc $b(H_e) \geq 2$. Nous observons que chaque sommet de $H_e \setminus \{x, y\}$ appartient à au moins un ensemble dominant minimum de H_e . De plus γ -anticore(H_e) = $\{x, y\}$.

Nous décrivons l'opération O_e . Prenons une arête $e = uv$ de G . Remplaçons l'arête uv par le gadget H_e tel que ux et vy sont deux arêtes. Nous allons montrer la propriété suivante :

Propriété 4.24.3 *Soit H le graphe obtenu de l'opération O_e d'une arête e de G . Alors $\gamma(H) = \gamma(G) + 8$ et $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$.*

Premièrement, nous nous concentrons sur la partie suivante :

Propriété 4.24.4 $\gamma(H) = \gamma(G) + 8$.

Soit S un ensemble dominant minimum de G . Depuis S nous construisons S' un dominant de H . Soit $S' = S$. Si $u, v \notin S$ ou $u, v \in S$, alors nous prenons $S' \leftarrow S' \cup A$. Puisque A est un ensemble dominant minimum de H_e , alors S' est un dominant H . Si $u \in S$ et $v \notin S$, alors nous prenons $S' \leftarrow S' \cup \{a_1, b_2, c_3, d_2, e_1, f_1, g_2, y\}$. Remarquons que u domine x et que y domine v . Donc S' est un dominant de H . Les cas $u \notin S$ et $v \in S$ sont symétriques. Donc $\gamma(H) \leq \gamma(G) + 8$.

Maintenant soit S' un ensemble dominant minimum de H . Depuis S' nous construisons S un ensemble dominant minimum de G . Soit $S = S' \cap V(G)$. Puisque $\gamma(H_e \setminus U) = 8$, où $U \subseteq \{x, y\}$, alors $|S' \cap V(H_e)| \geq 8$. Donc $|S| \leq \gamma(G)$. Si $|S| \leq \gamma(G) - 2$, alors $S \cup \{u\}$ est un ensemble dominant minimum de G , une contradiction. Supposons que $|S| = \gamma(G) - 1$. Si S domine G , alors $|S| < \gamma(G)$, une

contradiction. Si $N_G[u] \cap S \neq \emptyset$ et $N_G[v] \cap S \neq \emptyset$, alors S est un dominant de G tel que $|S| < \gamma(G)$, une contradiction. Donc $u, v \notin S$. Nous en déduisons que S ne domine pas $H_e \cup U$ dans H , où $U \subseteq \{u, v\}$. Puisque $x, y \in \gamma\text{-anticore}(H_e)$ et que $\gamma(H_e) = 8$, nous avons $|S' \cap H_e| \geq 9$. Donc $\gamma(H) = \gamma(G) + 8$. La Propriété 4.24.4 est démontrée.

Il nous reste à montrer la propriété suivante pour finir la démonstration de la Propriété 4.24.3.

Propriété 4.24.5 $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$.

Supposons que $b(G) = 1$. Supposons, par contradiction, que $b(H) \geq 2$. Soit st , $st \neq uv$, une arête γ -critique de G . D'après la Propriété 4.24.4, $\gamma(H - st) = \gamma(G - st) + 8$, et donc $b(H) = 1$, une contradiction. Donc uv est l'unique arête γ -critique de G . Supposons que ux ne soit pas γ -critique dans H . D'après la Propriété 4.24.4, $\gamma(H - ux) = \gamma(G) + 8$. Soit S' un ensemble dominant minimum de $H - ux$, et $S = S' \cap V(G)$. Notons que $S \cap N_G[u] \neq \emptyset$. Puisque $\gamma(H_e \setminus U) = 8$, où $U \subseteq \{x, y\}$, alors $|S' \cap V(H_e)| \geq 8$. Donc $|S| \leq \gamma(G)$. Si S domine $G - uv$, alors $|S| < \gamma(G - uv)$, une contradiction. Donc $S \cap N_G[v] = \emptyset$, et nous avons $y \in S'$. Nous rappelons que $\gamma(H_e) = 8$ et $y \in \gamma\text{-anticore}(H_e)$. Donc $|S' \cap V(H_e)| \geq 9$. Nous en déduisons que $|S| \leq \gamma(G) - 1$. Donc S domine $G - u$ et $S \cup \{v\}$ domine $G - uv$. Mais $|S \cup \{v\}| < \gamma(G - uv)$, une contradiction. Donc si $b(G) = 1$, nous avons $b(H) = 1$.

Maintenant, nous pouvons supposer que $b(G) \geq 2$. Supposons, par contradiction, que $b(H) = 1$. Soit st une arête γ -critique dans H . Soit S un ensemble dominant minimum de $G - uv$. Notons que $S' = S \cup A$ est un ensemble dominant minimum de $H - ux - vy$. Puisque H_e est une composante isolée de $H - ux - vy$ et que $b(H_e) \geq 2$, alors st n'est pas une arête avec une extrémité dans H_e . Donc $st \in E(G)$ et nous avons $\gamma(H - st) = \gamma(G - st) + 8$, une contradiction. Donc $b(H) \geq 2$. La Propriété 4.24.5 est démontrée. À partir des Propriétés 4.24.4 et 4.24.5, nous en déduisons la Propriété 4.24.3.

Propriété 4.24.6 Soit H le graphe obtenu d'une opération O_e sur une arête $e = uv$ de G . Si uv n'est pas γ -critique dans G , alors les sommets de $H_e \setminus \{x, y\}$ n'appartiennent pas à $\gamma\text{-anticore}(H)$.

Soit S un ensemble dominant minimum de $G - uv$. Alors $S \cup X$, où $X \in \{A, B, C, D, E, F\}$, est un ensemble dominant minimum de H . Donc les sommets de $H_e \setminus \{x, y\}$ n'appartiennent pas à $\gamma\text{-anticore}(H)$. Cela démontre la Propriété 4.24.6.

Pour finir, nous souhaitons appliquer l'opération de 3-subdivision sur le sous-graphe H_e afin qu'il soit biparti, de maille au moins k , et tel que tous les chemins induits entre x et y soient impairs. Soit H le graphe obtenu de l'opération O_e d'une arête uv de G . D'après la Propriété 4.24.3, nous avons $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$. D'après les Propriétés 4.24.1 et 4.24.6, nous pouvons 3-subdiviser n'importe quelle arête de $H_e \setminus \{x, y\}$ tel que le graphe résultant ait un nombre de bondage de 1 si et seulement si H a un nombre de bondage de 1. Donc nous pouvons 3-subdiviser les arêtes épaisses et les arêtes en pointillées de $H_e \setminus \{x, y\}$, qui sont représentées sur la Figure 4.9b. Chaque arête épaisse sera 3-subdivisée itérativement de telle façon que le chemin entre ses extrémités soit pair, tandis que chaque arête en pointillée sera 3-subdivisée itérativement afin que le chemin entre ses extrémités soit impair. Nous 3-subdivisons les arêtes autant de fois que nécessaire afin d'obtenir un sous-graphe H_e de maille k . Il reste alors à montrer que le graphe H'_e résultant de ces opérations est biparti et qu'il n'existe pas de chemin pair entre x et y . Pour cela, observons la 2-coloration de H_e dans la Figure 4.9b. Tout un chacun peut vérifier les observations suivantes :

— les sommets reliés par une arête ou un chemin pair (arête épaisse) ont des couleurs distinctes ;

- les sommets reliés par une arête impaire (arête en pointillée) ont la même couleur ;
- les sommets x et y ont la même couleur et les chemins colorés entre x et y alternent les couleurs.

Nous en déduisons que H'_e est planaire, sous-cubique, biparti, et de maille au moins k .

En appliquant itérativement l'opération H_e et l'opération de 3-subdivision telles que décrites plus haut, nous obtenons un graphe H qui est planaire, sous-cubique, biparti, de maille au moins k , et tel que $b(H) = 1$ si et seulement si $b(G) = 1$. \square

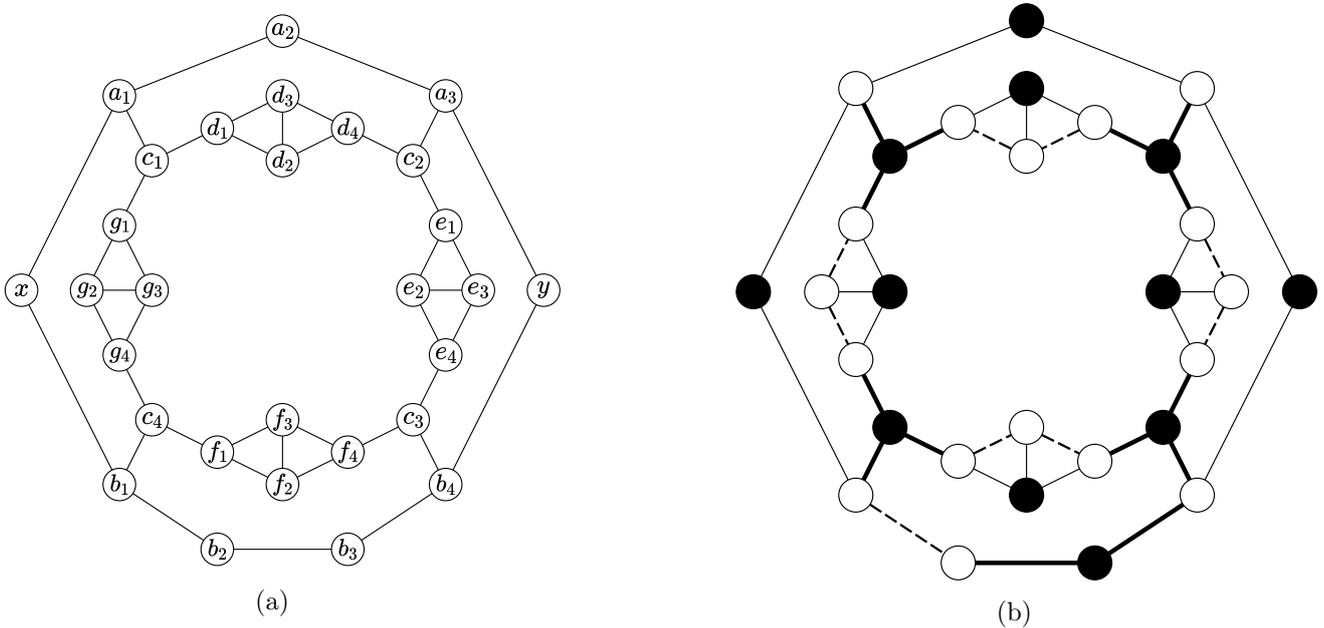


FIGURE 4.9 – (a) Le graphe H_e remplaçant une arête; (b) 3-subdivisions des arêtes en pointillées et des arêtes épaisses du graphe H_e , afin que le graphe résultant soit biparti et de maille au moins k .

Dans [37] (voir Théorème 3.5), il est montré que pour tout graphe planaire G de maille au moins 8, nous avons $b(G) \leq 3$. Donc une instance de 3-BONDAGE est toujours positive dans ces graphes. Cependant, nous souhaitons savoir si il existe un algorithme polynomial pour trouver un ensemble de trois arêtes E' tel que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$. Il a été montré dans [79] que DOMINANT MINIMUM est NP-complet (*c.f.* Corollaire 3 de la source) dans les graphes bipartis sous-cubiques et de maille fixé k , pour tout $k \geq 3$. Donc nous ne pouvons pas trouver un tel ensemble d'arêtes en utilisant la « force brute », *i.e.* tester pour chaque ensemble de trois arêtes E' si $\gamma(G - E') > \gamma(G)$. Heureusement, nous pouvons réutiliser les arguments de [37] (preuve du Théorème 3.5) pour trouver efficacement un tel ensemble d'arêtes.

Proposition 4.25 *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire de maille au moins 8. Nous pouvons trouver $E' \subseteq E$, où $|E'| = 3$, tel que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$ en temps polynomial.*

Preuve: La preuve dans [37] (*c.f.* Théorème 3.5 de la source) pour démontrer que $b(G) \leq 3$ repose sur l'existence de deux sommets u, v tels que, soit :

- (1) $uv \in E$ et $d(u) + d(v) \leq 4$; ou
- (2) $\text{dist}(u, v) \leq 2$ et $d(u) + d(v) \leq 3$.

Il est montré que les deux configurations précédentes existent toujours. Donc pour chaque cas, nous donnons une méthode pour trouver un ensemble d'arêtes γ -critique de taille au plus trois. Supposons qu'il y ait $u, v \in V$ comme décrit en (1). Nous prenons E' comme l'ensemble des arêtes incidentes à u, v . Remarquons que $|E'| \leq 3$. Soit S un ensemble dominant minimum de $G - E'$. Puisque les deux sommets u, v sont isolés dans $G - E'$, nous en déduisons que $u, v \in S$. Il s'ensuit que $S \setminus \{u\}$ est un dominant de G et donc $\gamma(G - E') > \gamma(G)$.

Maintenant supposons qu'il y ait $u, v \in V$ comme décrit en (2). Sans perte de généralité $d(v) = 1$, et $d(u) \leq 2$. Soit $w \in N(u) \cap N(v)$. Nous prenons E' comme l'ensemble des arêtes incidentes à u et l'arête vw . Remarquons que $|E'| \leq 3$ et que u et v sont isolés dans $G - E'$. Nous en déduisons qu'il existe un ensemble dominant minimum de $G - E'$ tel que $u, v \in S$. Il s'ensuit que $(S \setminus \{u, v\}) \cup \{w\}$ est un dominant de G et donc $\gamma(G - E') > \gamma(G)$.

Puisque nous pouvons tester en temps polynomial si il existe deux sommets tels que décrits en (1) ou (2), cela démontre l'énoncé de la proposition. \square

4.3.4 Cas particuliers

Nous poursuivons avec une approche plus générale sur les classes de graphes pour lesquelles d -BONDAGE peut être résolu en temps polynomial. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un ensemble de sommets $A \subseteq V$, nous construisons $G_{A+} = (V', E')$ à partir d'une copie de G comme suit : pour chaque $v \in A$ nous ajoutons exactement un sommet $u \notin V$, tel que uv soit une arête. Nous montrons la propriété suivante sur G_{A+} :

Lemme 4.26 *Soit $G = (V, E)$ un graphe et $A \subseteq V$. Il existe un ensemble dominant minimum S de G , tel que $A \subseteq S$, si et seulement si $\gamma(G_{A+}) = \gamma(G)$.*

Preuve: Si il existe un ensemble dominant minimum S de G tel que $A \subseteq S$, alors S est un ensemble dominant minimum de G_{A+} . Maintenant nous pouvons supposer que $A \not\subseteq S$ pour tous les ensembles dominants minimums S de G . Soit D un ensemble dominant minimum de G_{A+} . Nous pouvons supposer que $A \subseteq D$, puisque chaque sommet de A a une feuille comme voisin dans G_{A+} . Donc D est un dominant de G mais D n'est pas un ensemble dominant minimum, et donc $\gamma(G_{A+}) > \gamma(G)$. \square

Nous sommes maintenant prêts à montrer notre résultat qui est inspiré de la Proposition 3.17 de l'article de E. Galby et al. [40] pour réduire le nombre de domination par la contraction d'arête(s).

Proposition 4.27 *Étant donné un entier fixé $d \geq 1$, le d -BONDAGE peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} , si :*

- (1) \mathcal{C} est close par suppression d'arêtes et DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} ; ou
- (2) \mathcal{C} est la classe des graphes sans H , où H est un graphe fixé avec $\delta(H) \geq 2$, et DOMINANT MINIMUM peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} ; ou
- (3) pour tout $G \in \mathcal{C}$, nous avons $\gamma(G) \leq k$, où k est une constante fixée.

Preuve: Soit $G = (V, E) \in \mathcal{C}$. Nous montrons (1). Lorsque \mathcal{C} est close par suppression d'arêtes, nous pouvons calculer $\gamma(G - E')$ en temps polynomial, pour tout $E' \subseteq E$, où $|E'| \leq d$. Donc d -BONDAGE peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} .

Nous montrons (2). Soit $E' \subseteq E$, où $|E'| \leq d$, et soit $G' = G - E'$. Nous définissons comme W l'ensemble des sommets couverts E' , i.e. $W = \{v \in e \mid e \in E'\}$. Nous observons que $|W| \leq 2d$. Soit \mathcal{A} la collection de tous les ensembles $A \subseteq N[W]$, où $|A| \leq 2d$, dominant les sommets de W dans G' . Notons que $W \in \mathcal{A}$, et que $|\mathcal{A}| \leq \Delta(G)^{2d} \leq n^{2d}$.

Nous montrons que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$ si et seulement si pour tous les ensembles dominants minimums S de G , et pour tous les ensembles $A \in \mathcal{A}$, nous avons $A \not\subseteq S$. Premièrement, supposons que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$. Supposons, par contradiction, qu'il y ait S un ensemble dominant minimum de G , et $A \in \mathcal{A}$, tels que $A \subseteq S$. Nous en déduisons que S domine W dans G' . Puisque S domine $V \setminus W$ dans G' , il s'ensuit que S est un ensemble dominant de G' , une contradiction. Deuxièmement, supposons que pour tout ensemble dominant minimum S de G , et que pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous avons $A \not\subseteq S$. Supposons, par contradiction, que $\gamma(G - E') = \gamma(G)$. Soit S un ensemble dominant minimum de G . Soit D un sous-ensemble minimal de $S \cap N[W]$ tel que D domine W dans G' . Puisque D est minimal, pour tout $u \in D$, nous avons $v \in N_{G'}(u) \cap W$ tel que $N_{G'}(v) \cap D = \{u\}$. Donc $|D| \leq |W| \leq 2d$. Il s'ensuit que $D \in \mathcal{A}$, et que donc $D \subseteq S$, une contradiction.

Donc d'après le Lemme 4.26, $\gamma(G - E') > \gamma(G)$ si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$, nous avons $\gamma(G_{A+}) > \gamma(G)$. Rappelons que G_{A+} est une copie de G plus $|A|$ feuilles. Donc si G est sans H et que $\delta(H) \geq 2$, il s'ensuit que G_{A+} est sans H . Donc nous pouvons calculer $\gamma(G)$ et $\gamma(G_{A+})$ en temps polynomial. Puisqu'il y a $\mathcal{O}(n^{2d})$ ensembles E' , et que les collections correspondantes \mathcal{A} sont de tailles au plus $\mathcal{O}(n^{2d})$, nous en déduisons que nous pouvons vérifier si il existe un tel ensemble E' , où $\gamma(G - E') > \gamma(G)$, en temps polynomial. Donc d -BONDAGE peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} .

Nous montrons (3). Puisque k est fixé, nous pouvons tester pour tous les ensembles $S \subseteq V$, où $|S| \leq k$, si S est un dominant de G en temps polynomial. Nous pouvons donc calculer le nombre de domination de G en temps polynomial. Pour chaque ensemble $E' \subseteq E$, où $|E'| \leq d$, nous définissons \mathcal{A} comme dans la preuve du point (2). Rappelons que $|\mathcal{A}| \leq \mathcal{O}(n^{2d})$. Pour tester si $\gamma(G - E') > \gamma(G)$, nous utilisons Lemme 4.26. Ainsi nous testons pour tout ensemble $E' \subseteq E$, tel que $|E'| \leq d$, et pour tout $A \in \mathcal{A}$ si $\gamma(G_{A+}) \neq \gamma(G)$. Donc d -BONDAGE peut être résolu en temps polynomial dans \mathcal{C} . \square

Pour finir cette sous-section, nous donnons une réponse à la question suivante soulevée dans [50] : est-ce que BONDAGE est dans NP ? Nous remarquons que si BONDAGE est dans NP, alors il existe un certificat que nous pourrions tester en temps polynomial, avec les caractéristiques suivantes : étant donné un graphe G et $E' \subseteq E(G)$, est-ce que $\gamma(G - E') > \gamma(G)$? Donc nous devrions pouvoir tester si une arête donnée est γ -critique dans G en temps polynomial. Nous montrons que cela n'est pas possible, sauf si $P = NP$.

Théorème 4.28 *Étant donné un graphe G et une arête $e \in E(G)$, il n'existe pas d'algorithme polynomial pour décider si $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$, sauf si $P = NP$.*

Preuve: Nous définissons comme γ -SUPPRESSION ARÊTE le problème de décision suivant : étant donné un graphe G et une arête $e \in E(G)$, est-ce que $\gamma(G - e) = \gamma(G) + 1$? Nous montrons que si γ -SUPPRESSION ARÊTE peut être résolu en temps polynomial, alors nous pouvons résoudre DOMINANT MINIMUM en temps polynomial.

Soit (G, k) une instance de DOMINANT MINIMUM. Nous initialisons $G' \leftarrow G$ et $p \leftarrow 0$. Nous décrivons la procédure suivante. Nous sélectionnons une arête $e \in E(G')$ et mettons $G' \leftarrow G' - e$. Nous résolvons γ -SUPPRESSION ARÊTE avec pour entrée (G', e) en temps polynomial. Si (G', e) est une OUI-INSTANCE, alors nous mettons $p \leftarrow p + 1$. Si $V(G')$ est un ensemble indépendant de G' , alors nous arrêtons la procédure, sinon nous poursuivons celle-ci. À chaque étape, le graphe de l'instance γ -SUPPRESSION ARÊTE a une arête en moins. Donc il y a au plus $|E(G)|$ étapes avant que cette procédure ne finisse.

À la fin de la procédure, nous avons $\gamma(G') = |V(G)|$. Nous remarquons que $\gamma(G) + p = \gamma(G')$ puisque p est incrémenté de 1 à chaque fois que le nombre de domination augmente de 1. Donc $\gamma(G) = |V(G)| - p$, et il s'ensuit que (G, k) est une OUI-INSTANCE de DOMINANT MINIMUM si et seulement si $|V(G)| - p \leq k$. Donc nous pouvons résoudre DOMINANT MINIMUM en temps polynomial. \square

Corollaire 4.29 BONDAGE *n'appartient pas* à NP, *sauf si* P = NP.

4.3.5 Conclusion et perspectives

Nous avons montré la NP-difficulté de 1-BONDAGE pour les classes de graphes suivantes :

- graphes planaires cubiques ;
- graphes planaires sous-cubiques sans griffe ;
- graphes planaires bipartis sous-cubiques et de maille au moins k , pour tout $k \geq 3$ fixé.

Naturellement, il serait intéressant de connaître la complexité de BONDAGE dans les graphes bipartis planaires cubiques de maille au moins k , pour tout $k \geq 3$ fixé. Malheureusement, nous ne sommes pas parvenus à supprimer des sommets de degrés deux sans introduire des petits cycles. Nous pensons donc que l'étude des graphes planaires cubiques sans (C_4, \dots, C_k) pourraient être d'intérêt. L'étude de la complexité du BONDAGE dans les graphes sans H , où H est un graphe fixé fini, serait aussi intéressant. Il reste aussi à déterminer la complexité du d -BONDAGE pour d'autres valeurs fixées d où $d \geq 2$. Pour conclure cette partie, nous aimerions soulever le problème suivant :

Problème : Caractériser les graphes planaires de maille 8 avec un nombre de bondage de 3.

Chapitre 5

Partition sous contrainte de ratio de degré

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail commun avec François Delbot et Christophe Picouleau, *c.f.* [17].

5.1 Introduction

Il existe de nombreux problèmes de partitionnement des sommets d'un graphe. Un problème naturel est celui de chercher une partition des sommets telle que chaque élément « maximise » ses liens dans l'ensemble dans lequel il appartient. Ce problème est étroitement lié à des problèmes de partitionnement de graphes en communautés. On pourrait par exemple souhaiter partitionner un graphe en cliques ou sous-ensembles, tel que chaque sommet possède plus de voisins dans son ensemble (relativement à une partition) que dans le reste du graphe. Pour le lecteur qui souhaiterait en apprendre plus sur la détection de communautés dans les graphes (en restant proche de ce que nous étudierons ci-dessous), nous conseillons la thèse de T. Pontoizeau [67].

À l'opposé, il existe la notion de *partition externe* (*external partition*), où il s'agit de partitionner les sommets d'un graphe tel que chaque sommet a au moins la moitié de ses voisins en dehors de son ensemble, relativement à la partition. Il est connu que tous les graphes ont une partition externe (*c.f.* [7]). Au contraire, il existe la notion de *partition interne* (*internal partition*), où il s'agit de partitionner les sommets d'un graphe tel que chaque sommet a au moins la moitié de ses voisins dans son ensemble (relativement à la partition). Cette fois-ci, tous les graphes ne possèdent pas une partition interne puisque toute clique impaire, par exemple, n'admet pas une telle partition.

Ces deux notions sont apparues sous différentes appellations. La partition externe est aussi mentionnée comme la *partition satisfaisante complémentaire* (*co-satisfactory partition*), la *partition non-amicale* (*unfriendly partition*), ou la *2-alliance offensive* (*offensive 2-alliance*). Le problème pour décider si un graphe admet une partition en k ensembles selon les deux contraintes précédentes est appelé *k-alliance offensive* (*offensive k-alliance*) et *k-alliance défensive* (*defensive k-alliance*), respectivement. Nous conseillons les travaux de C. Bazgan et al. [7] pour une lecture plus approfondie de ce sujet.

S. Morris dans [63] s'est intéressé à un problème plus général. Étant donné un graphe et un paramètre q , où $0 < q < 1$, l'objectif est de trouver une partition (A, B) des sommets du graphe telle que chaque sommet $v \in A$ (respectivement $u \in B$) a au moins $q \times d(v)$ de ses voisins dans A (respectivement $(1 - q) \times d(u)$ voisins dans B). Dans ce cas, Morris parle de partition $q/(1 - q)$ -cohésive tandis

que A. Ban et al. [5] parlent de partition q -interne (q -*internal partition*) et de partition q -externe (q -*external partition*).

Nous définissons et motivons le problème de partition que nous étudions dans cette section. Un réseau de communautés peut être modélisé par un graphe où chaque sommet représente un individu et chaque arête représente un lien d'amitié. Étant donné une partition des membres du réseau, pour un membre, le ratio entre le nombre d'amis dans son ensemble et le nombre de ses voisins dans tout le réseau (où nous considérons qu'un membre est son propre ami) est une mesure de satisfaction du membre. Le pire ratio (minimum) de tous les membres du réseau est une mesure de qualité d'une partition. Le problème que nous étudions a pour objectif de trouver la valeur du pire ratio parmi toutes les partitions non-triviales possibles. Notons que pour notre problème, nous avons pris en compte le voisinage fermé d'un sommet au contraire de la majorité des problèmes étudiés précédemment. Ceci nous permet entre autres d'avoir des bornes de satisfactions plus « élégantes ».

L'organisation de cette section est la suivante. Nous commençons par formaliser notre problème de partition et donnons quelques résultats de la littérature qui ont des conséquences sur celui-ci. Ensuite, nous donnons quelques bornes inférieures et supérieures sur le ratio de degré. Nous montrons aussi des valeurs exactes de ce ratio pour certaines classes de graphes dont les arbres. La section 5.4 est dédiée aux graphes réguliers. Pour ces graphes, nous donnons des valeurs exactes du ratio de degré ainsi que des résultats de NP-complétude. Dans la section 5.5, nous nous intéressons au produit cartésien de deux graphes. Des bornes inférieures sur le ratio de degré et des preuves de NP-complétude y sont exposées. Nous concluons dans la section 5.6 pour finir par des questions ouvertes.

5.2 Définitions

Pour notre problème de partition, nous utilisons fréquemment le *degré fermé* d'un sommet x qui est $d_G[x] = d_G(x) + 1$. Étant donné un graphe G , (V_1, V_2) est une partition de $V(G)$ si $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V(G)$ et $V_i \neq \emptyset$, pour $i = 1, 2$. Nous désignons par \mathcal{P}_G l'ensemble des partitions des sommets de G . Soit (V_1, V_2) une partition de \mathcal{P}_G . Pour $v \in V_i$ nous définissons

$$q_G^i(v) = \frac{d_{G[V_i]}(v) + 1}{d(v) + 1}$$

comme le *ratio de degré* ou la *satisfaction* de v dans la partition (V_1, V_2) . Étant donné G , nous définissons

$$q(G) = \max_{(V_1, V_2) \in \mathcal{P}} \left\{ \min_{\substack{v \in V_i \\ i=1,2}} \{q^i(v)\} \right\}$$

comme le *ratio de degré optimal* ou la *satisfaction optimale* du graphe G . La partition (V_1, V_2) est optimale quand

$$\min_{\substack{v \in V \\ i=1,2}} q_G^i(v) \geq q(G)$$

Le problème de décision associé au ratio de degré optimal est le suivant :

<p style="text-align: center;">PARTITION RATIO DEGRÉ</p> <p style="text-align: center;"><i>Étant Donné</i> : un graphe G et un rationnel positif q, $1 \geq q > 0$.</p> <p style="text-align: center;"><i>Décider</i> : est-ce que $q(G) \geq q$?</p>

Notons qu'étant donné une partition des sommets de G , nous pouvons vérifier si la satisfaction des sommets (relativement à la partition) est au moins q . Donc PARTITION RATIO DEGRÉ est dans NP.

Avant de donner des résultats qui nous seront utiles, nous définissons les deux graphes suivants. Le graphe $K_4 - e + v$ est obtenu à partir d'un diamant en y ajoutant un sommet v voisins des deux sommets de degré trois. Le k -triangle noté T_k , $k \geq 1$, est le graphe $V(T_k) = \{s, t, v_1, \dots, v_k\}$ et $E(T_k) = \{st\} \cup \{v_i s, v_i t : 1 \leq i \leq k\}$. Remarquons que $T_1 = C_3$.

Un des ingrédients majeurs de nos preuves est le Théorème de M. Stiebitz [71] suivant :

Théorème 5.1 (M. Stiebitz [71]) *Soit G un graphe et $f_1, f_2 : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$ deux fonctions. Supposons que $d_G(x) \geq f_1(x) + f_2(x) + 1$ pour tout sommet $x \in V(G)$. Alors il existe une partition (V_1, V_2) des sommets de G telle que :*

1. $d_{G[V_1]}(x) \geq f_1(x)$ pour tout sommet $x \in V_1$, et
2. $d_{G[V_2]}(x) \geq f_2(x)$ pour tout sommet $x \in V_2$.

Ce résultat a été amélioré par J. Hou et al. pour les graphes sans- $(K_4 - e + v)$ ainsi que pour les graphes sans- $(K_3, C_8, K_{2,3})$, c.f. [49]. H. Ma et al. ont aussi amélioré ce résultat pour les graphes sans- $(C_4, K_4, \text{diamant})$, c.f. [61].

Théorème 5.2 (J. Hou et al. [49]) *Soit G un graphe sans- $(K_4 - e + v)$ et $f_1, f_2 : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ deux fonctions. Supposons que $d_G(x) \geq f_1(x) + f_2(x)$ pour tout sommet $x \in V(G)$. Alors il existe une partition (V_1, V_2) des sommets de G telle que :*

1. $d_{G[V_1]}(x) \geq f_1(x)$ pour tout sommet $x \in V_1$, et
2. $d_{G[V_2]}(x) \geq f_2(x)$ pour tout sommet $x \in V_2$.

Théorème 5.3 (J. Hou et al., H. Ma et al.[49, 61]) *Soit G un graphe sans- $(C_4, K_4, \text{diamant})$ ou sans- $(K_3, C_8, K_{2,3})$, et $f_1, f_2 : V(G) \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ deux fonctions. Supposons que $d_G(x) \geq f_1(x) + f_2(x) - 1$ pour tout sommet $x \in V(G)$. Alors il existe une partition (V_1, V_2) des sommets de G telle que :*

1. $d_{G[V_1]}(x) \geq f_1(x)$ pour tout sommet $x \in V_1$, et
2. $d_{G[V_2]}(x) \geq f_2(x)$ pour tout sommet $x \in V_2$.

5.3 Des bornes sur le ratio de degré optimal

Nous donnons quelques bornes sur le ratio de degré optimal d'un graphe, ainsi que des valeurs exactes pour certaines classes de graphes.

Étant donné un graphe G non-connexe, si nous prenons une composante connexe V_1 et mettons le reste des sommets du graphe dans V_2 , alors nous obtenons une partition optimale telle que $q(G) = 1$. Si G est connexe avec un seul sommet, alors G n'admet pas de partition. Afin d'omettre ces cas triviaux, nous supposons que les graphes considérés sont connexes avec au moins deux sommets. Dans ce cas, toute partition de $V(G)$ induit une coupe non-vide et donc $q(G) < 1$.

Lemme 5.4 *Si G est un graphe connexe, alors*

$$q(G) \leq \max_{uv \in E(G)} \min\left\{\frac{d(u)}{d[u]}, \frac{d(v)}{d[v]}\right\}$$

Preuve: Puisque G est connexe, pour n'importe quelle partition (V_1, V_2) il existe une arête $uv \in E(G)$ telle que $u \in V_1$ et $v \in V_2$. Alors $q^1(u) \leq \frac{d(u)}{d[u]}$ et $q^2(v) \leq \frac{d(v)}{d[v]}$. Le résultat en découle. \square

Corollaire 5.5 *Si G est un arbre, alors*

$$q(G) = \max_{uv \in E(G)} \min\left\{\frac{d(u)}{d[u]}, \frac{d(v)}{d[v]}\right\}$$

Preuve: D'après le Lemme 5.4, il suffit de prendre une arête uv maximisant $\min\left\{\frac{d(u)}{d[u]}, \frac{d(v)}{d[v]}\right\}$. \square

Nous donnons maintenant quelques bornes inférieures.

Proposition 5.6 *Pour tout graphe G , nous avons $q(G) \geq \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2+\frac{1}{p}}\right\}$, où $2p = \min_{v \in V(G)}\{d_G(v) : d_G(v) \text{ est pair}\}$. La borne est serrée.*

Preuve: Nous utilisons le Théorème 5.1. Soit $f_i(v) = \lfloor \frac{1}{2}(d(v) - 1) \rfloor$, pour $i = 1, 2$. Nous avons $d(v) \geq f_1(v) + f_2(v) + 1$ et donc il existe une partition (V_1, V_2) de $V(G)$ telle que $d_{G[V_i]}(v) \geq f_i(v)$ pour $i = 1, 2$ et pour tout sommet $v \in V(G)$. Donc $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p+1}{2p+2} = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p+1$; et $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p}{2p+1} = \frac{1}{2+\frac{1}{p}}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p$.

Remarquons que $q(K_{2p}) = \frac{1}{2}$ et $q(K_{2p+1}) = \frac{1}{2+\frac{1}{p}}$ s'obtiennent en prenant une partition (presque) équilibrée. \square

Proposition 5.7 *Si G est un graphe sans- $(K_4 - e + v)$, alors $q(G) \geq \frac{1}{2}$. La borne est serrée.*

Preuve: Nous utilisons le Théorème 5.2. Soit $f_i(v) = \lfloor \frac{1}{2}d(v) \rfloor$, pour $i = 1, 2$. Nous avons $d(v) \geq f_1(v) + f_2(v)$ et donc il existe une partition (V_1, V_2) de $V(G)$ telle que pour tout sommet $v \in V(G)$, $d_{G[V_i]}(v) \geq f_i(v)$ où $i = 1, 2$. Donc $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p+1}{2p+2} = \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p+1$; et $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p+1}{2p+1} > \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p$.

Remarquons que $q(K_{2p+1, 2p+1}) = \frac{1}{2}$ s'obtient en prenant une partition presque équilibrée. \square

Proposition 5.8 *Pour tout graphe G sans- $(C_4, K_4, \text{diamant})$ ou sans- $(K_3, C_8, K_{2,3})$, nous avons $q(G) > \frac{1}{2}$.*

Preuve: Nous utilisons le Théorème 5.3. Soit $f_i(v) = \lceil \frac{1}{2}d(v) \rceil$, pour $i = 1, 2$. Nous avons $d(v) \geq f_1(v) + f_2(v) - 1$ et donc il existe une partition (V_1, V_2) de $V(G)$ telle que pour tout sommet $v \in V(G)$, $d_{G[V_i]}(v) \geq f_i(v)$ où $i = 1, 2$. Donc $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p+2}{2p+2} > \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p+1$; et $\frac{d_{G[V_i]}(v)+1}{d[v]} \geq \frac{p+1}{2p+1} > \frac{1}{2}$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p$. \square

Nous donnons maintenant quelques valeurs exactes pour certaines classes de graphes.

Propriété 5.9 Soit T_k un k -triangle, alors $q(T_k) = (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1) \frac{1}{k+2}$.

Preuve: Clairement, si $s, t \in V_i$, alors il existe $v \in V_j$, $j \neq i$, tel que $q^j(v) = \frac{1}{3}$. Maintenant depuis $V_1 = \{s, v_1, \dots, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}\}$, $V_2 = \{t, v_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}, \dots, v_k\}$, nous obtenons $q(T_k) = (\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1) \frac{1}{k+2}$. \square

Nous précisons maintenant la borne inférieure de la Proposition 5.6 dans les deux Propositions suivantes.

Proposition 5.10 Pour tout graphe G , $q(G) = \frac{1}{3}$ si et seulement si $G = C_3$. Si $G \neq C_3$, alors $q(G) \geq \frac{2}{5}$.

Preuve: Il est évident que $q(C_3) = \frac{1}{3}$. Nous pouvons donc supposer que $G \neq C_3$. D'après la Proposition 5.6, nous avons $q(G) > \frac{1}{3}$ quand $\delta(G) > 2$. Si G n'est pas connexe, alors $q(G) = 1$. Si G possède une feuille, alors $q(G) \geq \frac{1}{2}$. Supposons que uv soit une arête disconnectante. Soit C_1, C_2 les deux composantes connexes de $G - uv$, et $(V(C_1), V(C_2))$ la partition correspondante de $V(G)$. Nous avons $q(u) = \frac{d(u)}{d[u]} \geq \frac{2}{3}$, et $q(v) = \frac{d(v)}{d[v]} \geq \frac{2}{3}$, donc $q(G) \geq \frac{2}{3}$. Maintenant supposons que v soit un sommet d'articulation. Soit C une composante connexe de $G - v$ où v a le moins de voisins (parmi toutes les composantes de $G - v$). Soit $V_1 = C$, $V_2 = V(G) \setminus C$. Pour chaque sommet u de V_1 , nous avons $q^1(u) = \frac{d(u)}{d[u]} \geq \frac{2}{3}$. Pour chaque sommet u de $V_2 \setminus \{v\}$, nous avons $q^2(u) = 1$, et pour le sommet d'articulation v , nous avons $q^2(v) > \frac{1}{2}$. Donc nous pouvons supposer que G est connexe, que $\delta(G) = 2$, et que G n'a ni arête disconnectante, ni sommet d'articulation, et que G possède au moins quatre sommets.

Nous procédons par récurrence sur $|V(G)|$. Soit $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$ l'ensemble des partitions des sommets de G obtenu comme suit : $f_i(v) = p$ pour $i = 1, 2$ quand $d(v) = 2p + 1$; $f_1(v) = p$ et $f_2(v) = p - 1$ quand $d(v) = 2p$. D'après le Théorème 5.1, il existe $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}$ telle que $|N(v) \cap V_i| + 1 \geq f_i(v) + 1$ pour $i = 1, 2$ pour tout sommet $v \in V_i$. Donc $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}'$. Nous montrons qu'il existe $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}'$ telle que $q^i(v) \geq \frac{2}{5}$ pour $i = 1, 2$.

Soit $|V(G)| = 4$. Puisque G est sans arête disconnectante et sans feuille, et que $G \neq T_2$, alors $G = K_4$ ou $G = C_4$. Pour chaque cas il existe $(V_1, V_2) \in \mathcal{P}'$ avec $q^i(v) \geq \frac{1}{2} \geq \frac{2}{5}$ pour $i = 1, 2$ (puisque G possède un couplage parfait $M = \{uv, u'v'\}$, il suffit de prendre $V_1 = \{u, v\}$ et $V_2 = \{u', v'\}$).

Maintenant nous supposons qu'il existe $(V'_1, V'_2) \in \mathcal{P}'$ avec $q^i(v) \geq \frac{2}{5}$ pour $i = 1, 2$, pour tout graphe G' avec $4 \leq |V(G')| \leq n - 1$ où $n \geq 5$.

Soit $v \in V(G)$ avec $N(v) = \{s, t\}$. Le premier cas est lorsque $st \notin E(G)$. Soit G' le graphe obtenu depuis $G - v$ en ajoutant l'arête st . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une partition (V'_1, V'_2) de V' telle que $q(G') \geq \frac{2}{5}$. Si $s, t \in V'_1$, alors en prenant $V_1 = V'_1 \cup \{v\}$, $V_2 = V'_2$, nous obtenons $q(G) \geq q(G') \geq \frac{2}{5}$. Supposons que $s \in V_1$ et $t \in V_2$. D'après l'hypothèse de récurrence $q(G' + st) \geq \frac{2}{5}$, et nous en déduisons que $q(G) \geq \frac{2}{5}$.

Le deuxième cas est lorsque $st \in E(G)$. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une partition (V'_1, V'_2) des sommets de $G' = G - v$ telle que $q(G') \geq \frac{2}{5}$. Si $s, t \in V'_1$, respectivement $s, t \in V'_2$, alors en prenant $V_1 = V'_1 \cup \{v\}$, $V_2 = V'_2$, respectivement, $V_1 = V'_1$, $V_2 = V'_2 \cup \{v\}$, nous obtenons $q(G) \geq q(G') \geq \frac{2}{5}$.

Maintenant, sans perte de généralité, soit $s \in V'_1$ et $t \in V'_2$. Premièrement, supposons que $d_{G'}(s) = 2p + 1$. Notons que $p \geq 1$, ou sinon s est un sommet d'articulation. Nous avons $|N_{G'}(s) \cap V'_1| + 1 \geq$

$p + 1$. Alors nous obtenons $\frac{|N_{G'}(s) \cap V'_1| + 1}{d_G(s) + 1} \geq \frac{p+1}{2p+3} \geq \frac{2}{5}$. Deuxièmement, soit $d_{G'}(s) = 2p$. Nous avons $|N_{G'}(s) \cap V'_1| + 1 \geq p + 1$. Alors nous obtenons $\frac{|N_{G'}(s) \cap V'_1| + 1}{d_G[s]} \geq \frac{p+1}{2p+2} \geq \frac{1}{2}$. En prenant $V_1 = V'_1$ et $V_2 = V'_2 \cup \{v\}$, nous obtenons que $q(G) \geq \frac{2}{5}$. \square

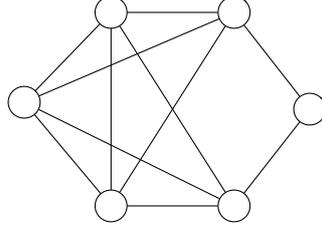


FIGURE 5.1 – Le graphe $G = \overline{K_2} \cup \text{griffe}$ où $q(G) = \frac{2}{5}$.

Proposition 5.11 *Soit G un graphe où $\Delta(G) \leq 6$ et $\mathcal{F} = \{K_5, K_5 - e, T_3, \overline{K_2} \cup \text{griffe}\}$. Alors $q(G) = \frac{2}{5}$ si et seulement si $G \in \mathcal{F}$. Si $G \notin \mathcal{F} \cup \{C_3\}$, alors $q(G) \geq \frac{3}{7}$.*

Preuve: Observons que si $G \in \mathcal{F}$, alors $q(G) = \frac{2}{5}$. D'après la Proposition 5.10, $q(G) \geq \frac{2}{5}$ lorsque $G \neq C_3$. Si G possède un sommet d'articulation, alors $q(G) > \frac{1}{2}$. Quand G est sans triangle, alors nous utilisons le Théorème 5.2. Dans ce cas nous posons $f_1(v) = f_2(v) = \lfloor \frac{d(v)}{2} \rfloor$, pour tout sommet $v \in V(G)$, et nous obtenons $q(G) \geq \frac{1}{2}$. Donc à partir de maintenant, nous pouvons supposer que G est 2-connexe et qu'il contient un triangle.

Nous disons que (A, B) est une *bonne paire* si A, B sont deux ensembles de sommets disjoints et non-vides de $V(G)$ tels que soit $\frac{|N_G[v] \cap A|}{d_G[v]} \geq \frac{3}{7}$ quand $v \in A$; ou soit $\frac{|N_G[v] \cap B|}{d_G[v]} \geq \frac{3}{7}$ quand $v \in B$.

Nous montrons que si G possède une bonne paire (A, B) , alors $q(G) \geq \frac{3}{7}$. Soit (A, B) une bonne paire de G . Si $A \cup B = V(G)$, alors (A, B) est une partition des sommets de G et $q(G) \geq \frac{3}{7}$. Soit $C = V(G) \setminus (A \cup B)$ et nous pouvons supposer que $C \neq \emptyset$. Si pour tout sommet $v \in C$, nous avons $\frac{|N_G[v] \cap C|}{d_G[v]} \geq \frac{3}{7}$, alors $(A \cup B, C)$ est une partition de $V(G)$ et $q(G) \geq \frac{3}{7}$. Autrement, il existe $v \in C$ tel que $\frac{|N_G[v] \cap C|}{d_G[v]} < \frac{3}{7}$. Puisque $d(v) \leq 6$, alors nous avons $|N_G(v) \cap C| \leq 1$. Donc $\max(|N_G(v) \cap A|, |N_G(v) \cap B|) \geq \lceil \frac{1}{2}(d(v) - 1) \rceil$. De plus $\frac{\lceil \frac{1}{2}(d(v) - 1) \rceil + 1}{d[v]} \geq \frac{3}{7}$. Nous décrivons la procédure suivante : quand $|N_G(v) \cap A| \geq |N_G(v) \cap B|$, nous mettons $A' \leftarrow A \cup \{v\}$, $B' \leftarrow B$, et sinon $A' \leftarrow A$, $B' \leftarrow B \cup \{v\}$. Donc (A', B') est une bonne paire. En itérant cette procédure, nous obtenons une bonne paire qui est aussi une partition des sommets de G . Donc $q(G) \geq \frac{3}{7}$.

L'objectif de la preuve est maintenant de montrer que G possède toujours une bonne paire. Soit $T = \{a, b, c\}$ un triangle de G . Si $G - T$ contient un cycle C , alors (T, C) est une bonne paire. Maintenant nous pouvons supposer que $G - T$ est acyclique. Soit C une composante connexe de $G - T$. Notons que puisque G est 2-connexe, chaque feuille de C a un voisin dans T . De plus, lorsque C ne contient qu'un sommet v isolé, alors v a deux voisins dans T .

Pour le premier cas, nous nous intéressons aux degrés des sommets dans C . Supposons que C contienne deux sommets distincts u, v tels que $d_G[u], d_G[v] \leq 4$. Soit P un chemin entre u et v dans C . Puisque $|N[u] \cap P| = |N[v] \cap P| = 2$, nous avons $\frac{|N[u] \cap P|}{d_G[u]} = \frac{|N[v] \cap P|}{d_G[v]} \geq \frac{2}{4} > \frac{3}{7}$. De plus, pour tout $w \in P$, $w \neq u, v$, nous avons $|N[w] \cap P| = 3$, et ainsi $\frac{|N[w] \cap P|}{d_G[w]} \geq \frac{3}{7}$. Donc (T, P) est une bonne paire. À partir de maintenant, chaque composante connexe C a au plus un sommet v tel que $d_G[v] \leq 4$. Supposons que C ait trois feuilles, disons u, v, w . Nous pouvons supposer que $d[u], d[v] \geq 5$ et que c est un voisin de w . Soit P un chemin entre v et w dans C . Puisque $P \cup \{c\}$ est un cycle, alors $(P \cup \{c\}, \{a, b, u\})$ est une bonne paire. Donc nous pouvons supposer que chaque composante C est soit un sommet isolé ou soit un chemin. Notons que pour simplifier, nous disons qu'un chemin possède au moins deux sommets, sinon c'est un sommet isolé.

Pour le deuxième cas, il existe deux composantes connexes C, C' dans $G - T$ qui sont des chemins. Soit u et v deux feuilles de C . Sans perte de généralité $d_G[v] = 5$, et donc v est complet à T et c est un voisin de u . Soit v' une feuille où $d[v'] = 5$. Alors $(C \cup \{c\}, \{a, b, v'\})$ est une bonne paire.

Pour le troisième cas, il existe deux composantes C, C' dans $G - T$ où C est un chemin et $C' = \{w\}$ un sommet isolé. Soit u et v deux feuilles de C . Sans perte de généralité $d_G[v] = 5$ et c est un voisin de u . Rappelons que w a deux voisins dans T . Si $a, b \in N(w)$, alors $(C \cup \{c\}, \{a, b, w\})$ est une bonne paire. Sinon et sans perte de généralité $N(w) = \{a, c\}$. Si $d_G[u] \leq 4$, alors $(\{c, u, w\}, \{a, b, v\})$ est une bonne paire. Sinon $d_G[u] = 5$ et alors $(C \cup \{b\}, \{a, c, w\})$ est une bonne paire.

Pour le quatrième cas, C est l'unique composante de $G - T$ et C est un sommet. Soit u et v deux feuilles de C . Sans perte de généralité $d_G[v] = 5$ et c est un voisin de u . Premièrement, supposons que $C = u - v$. Si c est le voisin unique de u dans T , alors $(\{a, b\}, \{c, u, v\})$ est une bonne paire; sinon G est soit isomorphe à K_5 ou $K_5 - e$. Deuxièmement supposons que $C = v - \dots - w - u$. Si $d_G[u] \leq 4$, alors $d_G[w] \geq 5$, et donc $(\{c, u, w\}, \{a, b, v\})$ est une bonne paire. Donc $d_G[u] = 5$. Le premier sous-cas est quand $d_G[w] = 3$. Si $C = v - w - u$, alors $G = \overline{K_2} \cup$ griffé. Sinon w a un voisin s dans C , $s \neq u$, tel que $d_G[s] \geq 5$. Donc s a un voisin, disons c , dans T et donc $(\{c, s, u, w\}, \{a, b, v\})$ est une bonne paire. Le second sous-cas est quand $d_G[w] \geq 4$. Dans ce cas w a un voisin dans T , disons c . Alors $(\{c, u, w\}, \{a, b, v\})$ est une bonne paire.

Enfin, il reste le cas où toutes les composantes de $G - T$ sont des sommets isolés. Notons que dans ce cas $3 \leq d[v] \leq 4$. Sans perte de généralité $6 \geq d(a) \geq d(b) \geq d(c) \geq 2$. Si $d(c) = 2$, alors $G = T_k$. Puisque $k \notin \{1, 3\}$, la Propriété 5.9 implique que $q(G) \geq \frac{3}{7}$. Maintenant, supposons que $d(c) = 3$ et v est un voisin de c dans $G - T$. Alors $(\{c, v\}, V(G) \setminus \{c, v\})$ est une bonne paire. Maintenant, $6 \geq d(a) \geq d(b) \geq d(c) \geq 4$. Si $G - T$ a exactement deux sommets, alors $G = K_5 - e \in \mathcal{F}$. Donc $G - T$ a au moins trois sommets. Alors c a deux voisins dans $G - T$, disons u, v . Puisque $d(a) \geq d(b) \geq d(c)$, alors il existe $w \in G - T$, $w \neq u, v$, tel que a et b sont deux voisins de w . Donc $(\{c, u, v\}, \{a, b, w\})$ est une bonne paire.

Ainsi, nous avons montré que G a toujours une bonne paire. Cela complète la preuve. \square

5.4 Graphes réguliers

Nous commençons cette section en donnant des valeurs exactes pour le ratio de degré optimal d'un graphe cubique (*i.e.* tous les sommets sont de degré exactement trois). Puis nous montrons que PARTITION RATIO DEGRÉ est NP-complet dans les graphes k -réguliers, pour $k \geq 4$.

Étant donné un graphe G connexe et k -régulier, décider si $q(G) \geq \frac{k}{k+1}$ équivaut à décider si G possède un couplage-disconnectant. D'après [25, 43, 57], nous savons qu'il est décidable en temps polynomial si un graphe cubique possède un couplage-disconnectant (plus précisément, il est connu que seul K_3 et $K_{3,3}$ n'ont pas de couplages-disconnectants), mais le problème devient NP-complet dans les graphes 4-réguliers. Le problème est aussi NP-complet dans les graphes bipartis ayant une bipartition (A, B) où tous les sommets de A sont de degrés trois, et tous les sommets de B sont de degrés quatre.

Proposition 5.12 *Si G est un graphe connexe 3-régulier non-isomorphe au K_4 ou au $K_{3,3}$, alors $q(G) = \frac{3}{4}$.*

Preuve: D'après la remarque précédente, nous savons que décider si $q(G) \geq \frac{3}{4}$ équivaut à décider si G possède un couplage-disconnectant. On sait aussi que tous les graphes cubiques non-isomorphes au K_3 et au $K_{3,3}$ possèdent un couplage-disconnectant. Cela complète la preuve. \square

V. Chvátal dans [25] donne un algorithme polynomial afin de calculer un couplage-disconnectant pour les graphes où $\Delta(G) \leq 3$. Nous pouvons donc utiliser cet algorithme pour trouver une partition optimale pour un graphe cubique qui n'est pas K_3 ou $K_{3,3}$.

Proposition 5.13 *Soit G un graphe connexe 4-régulier. Si $G = K_5$, alors $q(G) = \frac{2}{5}$. Sinon quand G possède un couplage-disconnectant, alors $q(G) = \frac{4}{5}$, et sinon $q(G) = \frac{3}{5}$.*

Preuve: Puisque G est connexe nous avons $q(G) \leq \frac{4}{5}$. Nous observons que $q(K_5) = \frac{2}{5}$. Nous pouvons donc supposer que $G \neq K_5$. Clairement $q(G) = \frac{4}{5}$ si et seulement si G possède un couplage-disconnectant. Maintenant supposons que G n'ait pas de couplage-disconnectant. Quand G est sans triangle, alors d'après le Théorème 5.2, nous pouvons définir $f_1(v) = f_2(v) = 2$ pour tout sommet $v \in V(G)$, et nous obtenons $q(G) \geq \frac{3}{5}$. Ainsi on peut supposer qu'un triangle $T = \{a, b, c\}$ est induit dans G . Quand $G - T$ possède un cycle C , alors (T, C) est une bonne paire ((A, B) est une bonne paire si $\frac{|N_G(v) \cap A| + 1}{d_G[v]} \geq \frac{3}{5}$ quand $v \in A$; ou $\frac{|N_G(v) \cap B| + 1}{d_G[v]} \geq \frac{3}{5}$ quand $v \in B$). Les arguments sont les mêmes que pour la Propriété 5.11. Donc nous pouvons supposer que chaque composante connexe de $G - T$ est un arbre. Si une composante a au moins deux sommets, alors elle possède deux feuilles qui sont reliées aux sommets a, b, c . Dans ce cas $G - T = K_2$, et donc $G = K_5$, une contradiction. Donc chaque composante connexe de $G - T$ est un unique sommet isolé, mais comme G est 4-régulier, ce n'est pas possible. \square

Proposition 5.14 *Soit G un graphe biparti connexe où $\delta(G) = 3$ et $\Delta(G) = 4$. Décider si $q(G) = \frac{3}{4}$ est NP-complet.*

Preuve: D'après V. Le et B. Randerath [57], nous savons que, étant donné un graphe biparti connexe ayant une bipartition (A, B) où tous les sommets de A sont de degrés trois, et tous les sommets de B sont de degrés quatre, décider si ce graphe possède un couplage-disconnectant est NP-complet. Si G possède un couplage-disconnectant, alors G a une partition (V_1, V_2) où pour tout $v \in V_i$, $i = 1, 2$, au plus un voisin de v est dans V_j , $j \neq i$. Puisque tous les sommets de degré trois sont du même côté de la partition de G , nous obtenons $q(G) = \frac{3}{4}$. Réciproquement, il est clair que nous avons $q(G) \leq \frac{3}{4}$. Si il existe une partition (V_1, V_2) avec $q(G) = \frac{3}{4}$, alors pour tout sommet $v \in V_i$, pour $i = 1, 2$, au plus un de ses voisins est dans V_j , $j \neq i$. Donc G possède un couplage-disconnectant. \square

Lemme 5.15 *Pour tout k fixé, où $k \geq 4$, décider si un graphe biparti k -régulier possède un couplage disconnectant est NP-complet.*

Preuve: La preuve est par récurrence sur k . Soit $k = 4$. D'après [43], nous savons que décider si un graphe connexe 4-régulier possède un couplage-disconnectant est NP-complet. Depuis un tel graphe G , nous construisons en temps polynomial un graphe biparti connexe 4-régulier $G' = (V(G'), E(G'))$ où $V(G') = V_1 \cup V_2$ comme suit : chaque sommet $v \in V(G)$ a deux copies $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ et l'ensemble des arêtes est $E(G') = \{v_1u_2, u_1v_2 : uv \in E(G)\}$. Clairement $C \subseteq E(G)$ est un couplage-disconnectant de G si et seulement si $C' = \{u_1v_2, u_2v_1 : uv \in C\}$ est un couplage-disconnectant de G' .

Soit $k > 4$. Supposons que décider si un graphe G connexe biparti $(k-1)$ -régulier a un couplage-disconnectant est NP-complet. Depuis G nous construisons G' un graphe biparti k -régulier comme décrit précédemment avec $E(G') = \{v_1u_2, u_1v_2 : uv \in E(G)\} \cup \{v_1v_2 : v \in V(G)\}$. Alors $C \subseteq E$ est un couplage-disconnectant de G si et seulement si $C' = \{u_1v_2, u_2v_1 : uv \in C\}$ est un couplage disconnectant de G' . \square

D'après le Théorème 5.2, nous avons $q(G) \geq \frac{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor + 1}{k+1}$ quand G est un graphe biparti k -régulier.

Proposition 5.16 *Soit G un graphe connexe biparti k -régulier, où $k \geq 4$. Alors décider si $q(G) = \frac{k}{k+1}$ est NP-complet.*

Preuve: Nous utilisons le Lemme 5.15. Soit $k, k \geq 4$, et soit G un graphe biparti k -régulier. Si G possède un couplage-disconnectant, alors il y a une partition (V_1, V_2) des sommets où pour chaque sommet $v \in V_i$, pour $i = 1, 2$, au plus un voisin appartient à $V_j, j \neq i$. Donc $q(G) = \frac{k}{k+1}$. Réciproquement, si $q(G) = \frac{k}{k+1}$, alors il existe une partition (V_1, V_2) des sommets telle que les sommets $v \in V_i$, où $i = 1, 2$, ont au plus un voisin dans $V_j, j \neq i$. Donc G a un couplage-disconnectant. \square

5.5 Produit de graphes

Nous donnons des bornes inférieures sur le ratio de degré optimal quand G est le produit cartésien de deux graphes (*c.f.* Chapitre 1 *Opérations de graphes*). Nous présentons aussi des résultats de NP-complétude pour ces graphes là.

Nous considérons uniquement le produit cartésien de deux graphes finis G et H où G et H sont des graphes connexes avec au moins deux sommets.

Puisque que le couplage-disconnectant joue un rôle important pour le ratio de degré optimal, et plus particulièrement pour les graphes réguliers, nous donnons le lemme suivant qui nous sera utile par la suite.

Lemme 5.17 *Pour toute paire de graphes G et H , le produit cartésien $G \square H$ possède un couplage-disconnectant si et seulement si G ou H possède un couplage-disconnectant.*

Preuve: Premièrement, supposons que G a un couplage-disconnectant. Soit (V_1, V_2) une partition des sommets de G telle que $E(V_1, V_2)$ est un couplage-disconnectant G . Nous construisons la partition (V'_1, V'_2) des sommets de $G \square H$ comme suit : pour chaque $v \in V_i$, nous prenons la H -fibre correspondante H_v dans V'_i , pour $i = 1, 2$. Clairement $E(V'_1, V'_2)$ est un couplage-disconnectant de $G \square H$. Notons que cela fonctionne si H possède un couplage-disconnectant.

Réciproquement, on peut supposer que ni G ni H ne possèdent de couplage-disconnectant. Par contradiction, soit (V'_1, V'_2) une partition des sommets de $G \square H$ telle que $E(V'_1, V'_2)$ est un couplage-disconnectant de $G \square H$. Si il existe une H -fibre H_u telle que $H_u \not\subset V'_i$, pour $i = 1, 2$, alors $E(V'_1 \cap H_u, V'_2 \cap H_u)$ est un couplage-disconnectant de H . Cela est vrai aussi pour une G -fibre G_u telle que $G_u \not\subset V_i$, pour $i = 1, 2$. Ainsi si il n'y a ni H -fibre et ni G -fibre qui sont coupées par la partition (V'_1, V'_2) , alors nous en déduisons que $E(V'_1, V'_2)$ n'est pas un couplage-disconnectant de $G \square H$, une contradiction. \square

Nous montrons maintenant deux bornes inférieures sur le ratio de degré optimal du produit de deux graphes.

Lemme 5.18 *Soit (V_1, V_2) et (V'_1, V'_2) deux partitions de G et $G' = G \square H$, respectivement, telles que $V'_i = \{v' \mid v' \in H_v, v \in V_i\}$, pour $i = 1, 2$. Alors pour $i = 1, 2$*

$$\min_{v' \in V(G \square H)} (q_{G \square H}^i(v')) > \min_{v \in V(G)} (q_G^i(v))$$

Preuve: Pour chaque sommet $v \in V(G)$, la H -fibre correspondante H_v est telle que $H_v \subset V'_i$, et pour tout sommet $v' \in H_v$, nous avons $d_{G' \setminus H_v}(v') = d_G(v)$, $d_{H_v}(v') \geq 1$. Donc pour chaque sommet $v' \in H_v$, nous avons $q_{G'}^i(v') = \frac{d_{G[V'_i]}(v) + d_{H_v}(v') + 1}{d_G(v) + d_{H_v}(v') + 1} > \frac{d_{G[V'_i]}(v) + 1}{d_G(v) + 1} = \frac{d_{G[V_i]}[v]}{d_G[v]} = q_G^i(v)$, pour $i = 1, 2$. Nous en déduisons que $\min(q_{G \square H}^i(v')) > \min(q_G^i(v))$. \square

Puisque le produit cartésien de deux graphes est commutatif, en prenant une partition de satisfaction $q(G)$ ou $q(H)$, nous obtenons le résultat suivant :

Proposition 5.19 *Pour toute paire de graphes G et H ,*

$$q(G \square H) > \max(q(G), q(H))$$

Proposition 5.20 *Pour toute paire de graphes G et H ,*

$$q(G \square H) > \frac{1}{2}$$

Preuve: Nous utilisons le Théorème 5.1. Soit $f_i(v) = \lfloor \frac{1}{2}d(v) - 1 \rfloor$, pour $i = 1, 2$. Comme $d(v) \geq f_1(v) + f_2(v) + 1$, alors il existe une partition (V_1, V_2) de G telle que $d_{G[V_i]} \geq f_i(v)$, pour $i = 1, 2$. D'après la Proposition 5.19, nous pouvons supposer que $q(G), q(H) < \frac{1}{2}$, et que donc il existe un sommet v de G tel que $q_G^i(v) < \frac{1}{2}$. Notons que $q_G^i(v) < \frac{1}{2}$ seulement si $d_G(v) = 2p$, où $p \geq 1$.

Soit $G' = G \square H$. Nous définissons la partition (V'_1, V'_2) de G' comme suit : $V'_1 = \{v' \mid v' \in H_v, v \in V_1\}$ et $V'_2 = \{v' \mid v' \in H_v, v \in V_2\}$. Soit v un sommet de G tel que $d_G(v) = 2p$ et $q_G^i(v) = \frac{p}{2p+1} < \frac{1}{2}$. Pour la H -fibre correspondante H_v , nous avons $d_{G' \setminus H_v}(v') = d_G(v)$, $d_{H_v}(v') \geq 1$, $H_v \subset V_i$, pour $i = 1, 2$ et pour tout sommet v' de H_v . Donc nous avons $q_{G'}^i(v') = \frac{p + d_{H_v}(v')}{2p + d_{H_v}(v') + 1} \geq \frac{1}{2}$ pour tout sommet v' de H_v avec égalité seulement lorsque $d_{H_v}(v') = 1$. Mais si $d_{H_v}(v') = 1$, alors H a au moins une feuille et donc $q(H) \geq \frac{1}{2}$. Donc d'après la Proposition 5.19, nous obtenons $q(G \square H) > \frac{1}{2}$. \square

Proposition 5.21 *Si G est un graphe k -régulier et que H est un arbre, alors*

$$q(G \square H) = \max_{uv \in E(H)} \min \left\{ \frac{d(u)+k}{d[u]+k}, \frac{d(v)+k}{d[v]+k} \right\}$$

Preuve: D'après le Lemme 5.4, nous avons $q(G \square H) \leq \max_{uv \in E(H)} \min\{\frac{d(u)+k}{d[u]+k}, \frac{d(v)+k}{d[v]+k}\}$. Soit $uv \in E(H)$ telle que $\min\{\frac{d(u)}{d[u]}, \frac{d(v)}{d[v]}\}$ est maximum. L'arbre $H - uv$ est composé de deux composantes connexes C_u, C_v . Soit (V_1, V_2) une partition des sommets de $G \square H$ telle que $V_1 = \cup_{w \in C_u} \{G_w\}$ et $V_2 = \cup_{w \in C_v} \{G_w\}$, où les G_w sont les G -fibres induites par les sommets w de H . Soit $M = \{st \in E(G \square H) : s \in V_1, t \in V_2\}$. Puisque uv est une arête disconnectante dans H , alors M est un couplage-disconnectant de $G \square H$. Donc la partition (V_1, V_2) permet d'obtenir la valeur de $q(G \square H)$ énoncé dans la Proposition. \square

Proposition 5.22 *Soit G un graphe connexe biparti où $\Delta(G) = 5$. Décider si $q(G \square K_2) \geq \frac{5}{6}$ est NP-complet.*

Preuve: D'après V. Le et B. Randerath [57], nous savons que, étant donné un graphe biparti connexe ayant une bipartition (A, B) où tous les sommets de A sont de degrés trois, et tous les sommets de B sont de degrés quatre, décider si ce graphe possède un couplage-disconnectant est NP-complet. Depuis G nous construisons un autre graphe biparti G' en ajoutant pour chaque sommet v un nouveau sommet associé v' , tel que v' est relié uniquement à v dans G' . Remarquons que $\Delta(G') = 5$. Soit $H = G' \square K_2$. Clairement H peut être construit en temps polynomial depuis G . Si G possède un couplage-disconnectant, alors G a une partition (V_1, V_2) de ses sommets où tout sommet $v \in V_i$, $i = 1, 2$, a au plus un voisin dans V_j , $j \neq i$. Depuis (V_1, V_2) , nous construisons une partition (V'_1, V'_2) des sommets de H comme suit : pour chaque sommet $v \in V_i$ son associé v' est ajouté à V_i , et ensuite nous prenons $V'_i = \{w \mid w \in K_2 \text{ fibre de } v \in V_i\}$, $i = 1, 2$. Nous en déduisons que $q(H) \geq \frac{5}{6}$.

Réciproquement, supposons que $q(H) \geq \frac{5}{6}$. Soit (V'_1, V'_2) une partition des sommets de H de satisfaction $\frac{5}{6}$. Puisque pour chaque sommet associé v' , nous avons $d_H(v') = 2$, alors v' est du même côté de la partition que ses deux voisins. Donc tout sommet $v \in V'_i$, où $i = 1, 2$, a au plus un voisin dans V_j , $j \neq i$. Donc G possède un couplage-disconnectant. \square

Proposition 5.23 *Soit k, k' deux entiers où $k, k' \geq 4$, et H un graphe k' -régulier sans couplage-disconnectant. Décider si $q(G \square H) \geq \frac{k+k'}{k+k'+1}$ où G est un graphe biparti k -régulier est NP-complet.*

Preuve: D'après le Lemme 5.15, nous savons que pour tout entier $k \geq 4$, décider si un graphe biparti k -régulier \tilde{G} a un couplage-disconnectant est NP-complet. Étant donné (V_1, V_2) une partition des sommets de \tilde{G} induisant un couplage-disconnectant, nous construisons une partition (V'_1, V'_2) des sommets de $G' = G \square H$ comme suit : pour tout sommet $v \in V_i$, nous mettons les sommets de sa H -fibre associée H_v dans V'_i , où $i = 1, 2$. Clairement, pour tout sommet $w \in V'_i$, nous avons $q_{G'}^i(w) \geq \frac{k+k'}{k+k'+1}$.

Réciproquement, soit (V'_1, V'_2) une partition des sommets de $G' = G \square H$ impliquant $q(G') \geq \frac{k+k'}{k+k'+1}$. Puisque H n'a pas de couplage-disconnectant, chaque fibre H_v est telle que $H_v \subset V'_i$. Nous construisons une partition (V_1, V_2) des sommets de \tilde{G} comme suit : pour tout sommet $v \in V(G)$, si $H_v \subset V'_i$, alors nous mettons v dans V_i . Clairement (V_1, V_2) implique $q(\tilde{G}) \geq \frac{k}{k+1}$. \square

Notons que pour tout graphe G k -régulier et tout graphe H tel que H possède un couplage-disconnectant, nous avons $q(G \square H) \geq \frac{\Delta(G \square H)}{\Delta(G \square H)+1}$, puisque depuis un couplage-disconnectant M de H , il suffit de prendre une partition (V'_1, V'_2) des sommets de $G \square H$ où les sommets de chaque fibre H_v sont partitionnés par rapport à M .

Proposition 5.24 *Soit G et H deux graphes connexes cubiques. Si $G, H \in \{K_4, K_{3,3}\}$, alors $q(G \square H) = \frac{5}{7}$. Sinon $q(G \square H) = \frac{6}{7}$.*

Preuve: Supposons, sans perte de généralité, que $G \notin \{K_4, K_{3,3}\}$. Donc G a un couplage-disconnectant et d'après la remarque précédente $q(G \square H) = \frac{6}{7}$. Maintenant on peut supposer que $G, H \in \{K_4, K_{3,3}\}$. D'après le Lemme 5.17, $G \square H$ n'a pas de couplage disconnectant. Donc $q(G \square H) \leq \frac{5}{7}$. Supposons que $G = H = K_4$. Soit $V(G) = \{a, b, c, d\}$ et $V(H) = \{1, 2, 3, 4\}$. En prenant la partition (V_1, V_2) des sommets de $G \square H$ où $V_1 = \{(a, i), (b, i) : 1 \leq i \leq 4\}$ et $V_2 = \{(c, i), (d, i) : 1 \leq i \leq 4\}$, nous avons $q(G \square H) \geq \frac{5}{7}$. Supposons que $G = H = K_{3,3}$. Soit $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$ avec $ab \in E(G)$ et $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ avec $E(H[\{1, 2, 3\}]) = \emptyset$. En prenant la partition (V_1, V_2) des sommets de $G \square H$, où $V_1 = \{(a, i), (b, i) : 1 \leq i \leq 6\}$ et $V_2 = V(G \square H) \setminus V_1$, nous avons $q(G \square H) \geq \frac{5}{7}$. Nous pouvons maintenant supposer que $G = K_4$. Soit $V(G) = \{a, b, c, d\}$ et $H = K_{3,3}$ avec $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $E(H[\{1, 2, 3\}]) = \emptyset$. En prenant la partition (V_1, V_2) des sommets de $G \square H$ où $V_1 = \{(a, i), (b, i) : 1 \leq i \leq 6\}$ et $V_2 = V(G \square H) \setminus V_1$, nous avons $q(G \square H) \geq \frac{5}{7}$. Donc $q(K_4 \square K_4) = q(K_{3,3} \square K_{3,3}) = q(K_4 \square K_{3,3}) = \frac{5}{7}$. \square

5.6 Conclusion

Étant donné un graphe G , nous avons défini le paramètre $q(G)$ qui est son ratio de degré maximum. Ce paramètre est une mesure de la qualité locale (*i.e.* le sommet le moins satisfait) d'une partition des sommets de G . Nous avons montré des bornes sur $q(G)$, nous avons aussi caractérisé des graphes atteignant certaines valeurs particulières pour $q(G)$, et plus précisément pour $q(G) = \frac{1}{3}$ et $q(G) = \frac{2}{5}$. Nous avons montré que le problème de décision associé au calcul de la valeur $q(G)$ est NP-complet pour certaines classes de graphes réguliers. Nous avons aussi donné des bornes inférieures pour $q(G)$ et donné des résultats de complexité pour les graphes correspondants au produit cartésien de deux graphes.

Des questions restent ouvertes, notamment :

- Pouvons-nous retirer la condition $\Delta(G) \leq 6$ de la Proposition 5.11 ?
- Est-il possible de caractériser les graphes avec $q(G) = \frac{3}{7}$ (ou pour tout autre valeurs $q(G) = \frac{4}{9}$, $q(G) = \frac{5}{11}, \dots$) ?
- Quelle est la complexité de PARTITION RATIO DEGRÉ pour les classes suivantes : les complémentaires de graphes bipartis, les graphes split (graphes scindés), et les cographes ?

Le ratio de degré optimal concerne la partition en deux ensembles de sommets d'un graphe. Une direction de recherche intéressante pourrait être l'étude de ce paramètre pour les k -partitions, où $k \geq 3$. Il serait aussi intéressant de considérer des partitions avec des contraintes additionnelles : chaque ensemble doit avoir la même cardinalité, chaque ensemble doit être connexe, etc.

Chapitre 6

Couplage parfait-disconnectant

Les résultats présentés dans ce chapitre sont le fruit d'un travail commun avec Christophe Picouleau, *c.f.* [18].

6.1 Introduction

COUPLAGE-DISCONNECTANT est le problème de décision suivant : étant donné un graphe, y a-t-il un couplage de ce graphe qui contient une coupe ? Un tel couplage est appelé couplage-disconnectant. Nous rappelons quelques résultats de complexité connus. V. Chvátal dans [25] a montré que COUPLAGE-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes de degré maximum trois, tandis qu'il est NP-complet dans les graphes de degré maximum quatre. P. Bonsma dans [10] a montré que ce problème restait NP-complet dans les graphes planaires de degré maximum quatre et dans les graphes planaires de maille cinq. Bonsma et al. dans [11] ont montré que les graphes planaires de maille au moins six ont tous un couplage-disconnectant. Ils ont aussi exposé des algorithmes pour résoudre ce problème en temps polynomial pour certaines classes de graphes, notamment : les graphes sans griffe, les cographes et les graphes avec une largeur arborescente ou une largeur de clique bornée. V. Le et B. Randerath dans [57] ont montré que ce problème restait NP-complet dans les graphes bipartis admettant une bipartition (A, B) telle que les sommets de A sont de degrés quatre et les sommets de B sont de degré trois.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une version plus restreinte qui est le problème COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT. Cette fois-ci, le couplage qui est une coupe doit appartenir à un couplage parfait du graphe. Un tel couplage est appelé couplage parfait-disconnectant. Notons que tout couplage parfait-disconnectant est un couplage-disconnectant mais que l'inverse n'est pas nécessairement vrai. Par exemple, la Figure 6.1 montre à gauche un graphe possédant un couplage parfait et un couplage-disconnectant mais ne possédant pas de couplage parfait-disconnectant (le couplage-disconnectant est représenté par les arêtes épaisses), alors que le graphe à droite possède un couplage parfait-disconnectant. À notre connaissance, la seule référence au couplage parfait-disconnectant est de A. Diwan dans [30], qu'il appelle *2-facteur* disconnectant. Rappelons qu'un k -facteur est un sous-graphe F couvrant les sommets de G tel que $d_F(v) = k$ pour tout sommet v . Si le graphe induit par le k -facteur n'est pas connexe, alors c'est un k -facteur disconnectant. Comme les graphes qu'il étudie sont cubiques, un 2-facteur disconnectant est une collection de cycle induit disjoint couvrant tous les sommets du graphe. Ainsi, nous pouvons observer que les arêtes qui ne sont pas dans un 2-facteur

forment un couplage parfait-disconnectant. A. Diwan montre que tous les graphes planaires cubiques sans pont possèdent un 2-facteurs disconnectant, à l'exception de la clique K_4 . Nous pouvons voir ce résultat comme une « amélioration », pour les graphes planaires, du célèbre théorème de Petersen énonçant que tous les graphes cubiques sans pont possèdent un couplage parfait.

Une variante du COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est étudié dans [47], où il est montré que le problème de décision suivant est NP-complet : étant donné un graphe, existe-t-il une partition des sommets (X, Y) telle que les arêtes entre X et Y forment un couplage parfait ? Cela revient à décider si un graphe possède un couplage parfait qui est une coupe (au lieu d'un couplage parfait qui contient une coupe). Ce problème a été récemment revisité en 2021 par V. Le et J. Telle dans [58]. Pour illustrer que notre problème est différent, nous pouvons observer que le graphe à droite de la Figure 6.1 possède un couplage parfait-disconnectant (*c.f.* les arêtes épaisses), mais qu'il n'a pas de partition (X, Y) des sommets telle que les arêtes entre X et Y forment un couplage parfait.

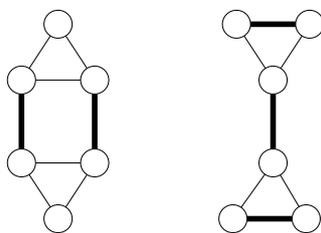


FIGURE 6.1 – À gauche un couplage-disconnectant, à droite un couplage parfait-disconnectant.

Dans la continuité des travaux sur COUPLAGE-DISCONNECTANT, nous étudions la complexité du COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT. Après quelques observations ci-dessous, nous montrons les résultats suivants. Dans la section 6.2, nous montrons que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis 5-réguliers, dans les graphes de diamètre trois, et dans les graphes bipartis de diamètre d , pour n'importe quel $d \geq 4$ fixé. Nous montrons que ce problème peut être résolu en temps polynomial dans les graphes bipartis de diamètre trois ainsi que dans les graphes de diamètre deux. Dans la section 6.3, nous montrons que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes planaires où les sommets sont de degré trois ou quatre, et pour les graphes planaires de maille cinq. Dans les sections 6.4, 4.7 et 6.6, nous montrons que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans P_5 (ce qui inclut les cographes, les splits graphes, et les graphes *co-bipartis* qui sont les graphes complémentaires des graphes bipartis), dans les graphes sans griffe, et dans les graphes avec une largeur d'arbre borné. Nous concluons dans la section 6.7 avec quelques questions restées ouvertes.

Le problème de décision associé au couplage parfait-disconnectant est défini comme suit :

COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT

Étant donné : un graphe connexe $G = (V, E)$.

Décider : y a-t-il $M \subseteq E$ tel que M est un couplage parfait et $G - M$ n'est pas connexe ?

Nous pouvons vérifier en temps polynomial qu'un ensemble d'arêtes est un couplage parfait du graphe. Nous pouvons aussi vérifier en temps polynomial qu'un graphe n'est pas connexe. Donc COU-

PLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est dans NP.

Un graphe est dit *immunisé* si il ne possède pas de couplage disconnectant. Nous pouvons remarquer les résultats suivants.

Propriété 6.1 *Les graphes K_3 et $K_{2,3}$ sont immunisés.*

Propriété 6.2 *Supposons que G ait un couplage parfait-disconnectant M avec $E(X, V \setminus X) \subseteq M$. Soit H un sous-graphe immunisé de G . Alors soit $V(H) \subset X$ ou $V(H) \subset V \setminus X$.*

Propriété 6.3 *Supposons que G ait un couplage parfait-disconnectant M avec $E(X, V \setminus X) \subseteq M$. Si v a deux voisins dans X , alors $v \in X$.*

Propriété 6.4 *Si M est un couplage parfait qui contient un pont, alors M est un couplage parfait-disconnectant.*

Propriété 6.5 *Si un graphe G où $\delta(G) = 1$ a un couplage parfait, alors G a un couplage parfait-disconnectant.*

6.2 Graphes bipartis et graphes de diamètre fixé

Nous donnons des résultats de complexité pour les graphes réguliers, les graphes bipartis, ainsi que pour les graphes de diamètre fixé. Nous commençons par donner des résultats de NP-complétude, et nous finissons par montrer les cas pour lesquels le problème peut être résolu en temps polynomial.

6.2.1 Cas difficiles

Théorème 6.6 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis 5-réguliers.

Preuve: V. Le et B. Randerath dans [57] ont montré que COUPLAGE DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis $G = (V = S \cup T, E)$ admettant une bipartition (S, T) telle que les sommets de T sont de degré trois et les sommets de S sont de degré quatre.

Depuis G nous construisons (en temps polynomial) un graphe connexe $G' = (V', E')$ comme suit. Nous prenons deux copies $G_1 = (V_1 = S_1 \cup T_1, E_1)$, et $G_2 = (V_2 = S_2 \cup T_2, E_2)$ de G . Pour chaque $v \in T$, soit $v_1 \in T_1$, $v_2 \in T_2$, ses deux copies dans G_1 , G_2 , respectivement. Nous « relier » v_1 à v_2 grâce au graphe de la Figure 6.2. Pour chaque $v \in S$, soit $v_1 \in S_1$, et $v_2 \in S_2$ ses deux copies dans G_1, G_2 , respectivement. Nous ajoutons l'arête v_1v_2 . Clairement G' est biparti et 5-régulier. Il peut être vérifié facilement que le graphe de la Figure 6.2 est immunisé.

Depuis un couplage-disconnectant $M \subseteq E$ de G correspond $M' \subseteq E'$ comme suit. Pour chaque $uv \in M$, $u \in S$, $v \in T$, nous prenons les arêtes u_1v_1, u_2v_2 ainsi que les arêtes épaisses à gauche de la Figure 6.2. Pour chaque sommet w qui n'est pas couvert par M : si $w \in T$, alors nous prenons les arêtes épaisses à droite de la Figure 6.2 ; si $w \in S$, alors nous prenons l'arête w_1w_2 . Donc M' est un couplage parfait de G' . Puisqu'il y a deux sommets u, v dans $G - M$ n'ayant aucun chemin les reliant, alors il n'existe pas de chemin reliant u_i et v_j , où $i, j \in \{1, 2\}$ dans $G' - M'$. Donc M' est un couplage parfait-disconnectant de G' .

Réciproquement, soit M' un couplage parfait-disconnectant de G' . Le graphe de la Figure 6.2 ne peut être disconnecté par M' . De plus, les arêtes v_1v_2 , où $v \in S$, ne peuvent disconnecter G' . Donc nous en déduisons que $G'[V_i]$, où $i \in \{1, 2\}$, est disconnecté. Soit $M_1 = M' \cap E_1$. Donc M_1 est un couplage-disconnectant dans G . \square

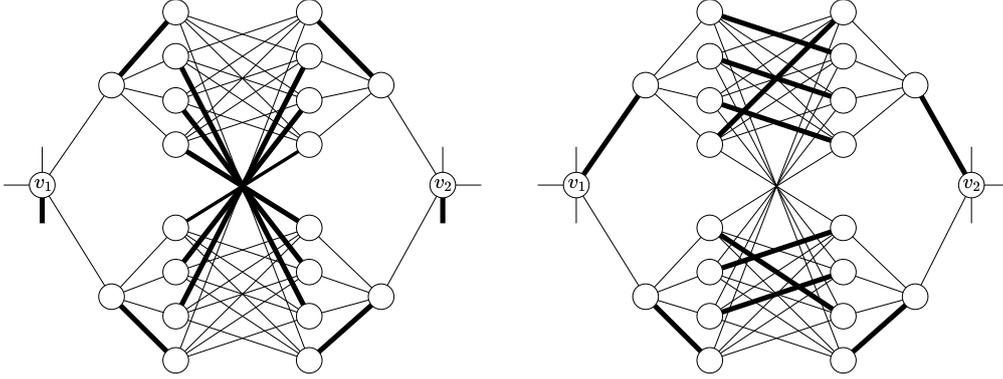


FIGURE 6.2 – À gauche $v \in T$ est saturé par M , à droite $v \in T$ n'est pas saturé par M .

Théorème 6.7 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes de diamètre 3.

Preuve: H. Le et V. Le dans [56] ont montré que COUPLAGE DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes de diamètre trois. Leur preuve a inspiré celle-ci.

Depuis un tel graphe $G = (V, E)$, nous construisons (en temps polynomial) un graphe connexe $G' = (V', E')$ comme suit. Nous prenons deux copies $G_1 = (V_1, E_1)$, et $G_2 = (V_2, E_2)$ de G . Nous définissons $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$. Nous décrivons comment construire G_1 (la construction de G_2 est identique). Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $K_{v_i^1}$ un graphe complet à n sommets. Nous ajoutons des arêtes entre v_i^1 et $K_{v_i^1}$, de façon à ce que $K_{v_i^1} \cup \{v_i^1\}$ soit une clique de taille $n + 1$. Nous disons que $K_{v_i^1}$ est la clique correspondante à v_i^1 . Soit $K^1 = \bigcup_{i=1, \dots, n} V(K_{v_i^1})$ l'ensemble des sommets appartenant aux cliques associés aux sommets de V_1 . Pour chaque paire de cliques $K_{v_i^1}$, $K_{v_j^1}$, où $i < j$, nous ajoutons exactement une arête $q_i q_j$, où $q_i \in K_{v_i^1}$, $q_j \in K_{v_j^1}$, de telle façon à ce que q_i, q_j aient exactement un voisin dans $K^1 \setminus V(K_{v_i^1})$, $K^1 \setminus V(K_{v_j^1})$, respectivement. Donc pour chaque clique $K_{v_i^1}$, chaque sommet de $K_{v_i^1}$ — sauf un qui n'a pas de voisin dans $K^1 \setminus V(K_{v_i^1})$ — a exactement un voisin dans $K^1 \setminus V(K_{v_i^1})$. Puis, pour chaque paire $v_i^1 \in V_1$, $v_i^2 \in V_2$, nous rendons $K_{v_i^1}$ complet à $K_{v_i^2}$; v_i^1 complet à $K_{v_i^2}$; et v_i^2 complet à $K_{v_i^1}$. Donc $K_{v_i^1, v_i^2} = K_{v_i^1} \cup K_{v_i^2}$ est une clique avec $2n$ sommets. Notons que $K_{v_i^1, v_i^2} \cup \{v_i^1\}$ et $K_{v_i^1, v_i^2} \cup \{v_i^2\}$ sont deux cliques avec $2n + 1$ sommets, et que donc $K_{v_i^1, v_i^2} \cup \{v_i^1, v_i^2\}$ est immunisé. Nous avons fini de décrire la construction de G' .

Nous commençons par prouver que $\text{diam}(G') = 3$. Premièrement, remarquons que pour chaque paire $q \in K_{v_i^1}$, $q' \in K_{v_j^1}$, nous avons $\text{dist}_{G'}(q, q') \leq 3$, et que pour toute paire $v \in V_1 \cup V_2$, $q \in K_u$, où $u \in V_1 \cup V_2$, nous avons $\text{dist}_{G'}(v, q) \leq 3$. Soit v_i^1, v_j^1 , $i \neq j$, deux sommets non-adjacents dans G' . D'après notre construction, il y a une arête $qq' \in E(G')$, où $q \in K_{v_j^1}$ et $q' \in K_{v_i^1}$. Rappelons que v_i^1

et v_j^1 sont tous deux complets à leurs cliques correspondantes. Donc $v_i^1 - q - q' - v_j^1$ est un chemin et ainsi $\text{dist}_{G'}(v_i^1, v_j^1) \leq 3$. Il en est de même pour deux sommets distincts de V_2 . Maintenant soit v_i^1, v_j^2 . Si $i = j$, alors il y a un chemin $v_i^1 - q - v_i^2$, où $q \in K_{v_i^1, v_i^2}$. Donc on peut supposer que $i \neq j$. Alors il existe $qq' \in E(G')$, où q est un sommet de $K_{v_i^1}$ et q' est un sommet de $K_{v_j^2}$. Donc $v_i^1 - q - q' - v_j^2$ est un chemin et ainsi $\text{dist}_{G'}(v_i^1, v_j^2) \leq 3$. Donc $\text{diam}(G') = 3$.

Depuis $M \subseteq E$ un couplage-disconnectant de G correspond $M' \subseteq E'$ comme suit. Soit (X, Y) la partition des sommets de G induite par le couplage-disconnectant M . Pour chaque paire $x \in X, y \in Y$, soit $x^1, y^1 \in V_1$, et $x^2, y^2 \in V_2$ leurs sommets correspondants dans G' . Nous prenons $q_{x^1}q_{y^1}$ et $q_{x^2}q_{y^2}$ dans M' , où $q_{x^1} \in K_{x^1}, q_{x^2} \in K_{x^2}, q_{y^1} \in K_{y^1}$ et $q_{y^2} \in K_{y^2}$. Nous montrons que $G'[K^1 \cup K^2] - M'$ est non-connexe. Soit K^X l'ensemble des cliques correspondantes aux sommets $v \in X$. L'ensemble K^Y est défini de manière identique pour Y . Pour chaque paire $K_u \in K^X, K_v \in K^Y$, il y a exactement une arête qq' entre K_u et K_v , et donc $qq' \in M'$. Nous en déduisons que $G'[K^1 \cup K^2] - M'$ est non-connexe et que M' est un couplage. Pour chaque arête $v_i v_j \in M$, nous prenons $v_i^1 v_j^1, v_i^2 v_j^2 \in M'$. Donc $G_1 - M'$ et $G_2 - M'$ sont tous les deux non-connexes. Rappelons que $G'[K^1 \cup K^2] - M'$ est aussi non-connexe, et que donc $G' - M'$ est non-connexe. Donc M' est un couplage-disconnectant de G' . Nous montrons comment prendre des arêtes non-saturées afin que M' soit un couplage parfait-disconnectant. Pour chaque $v \in V$ non-saturé par M dans G , nous pouvons sélectionner une paire de sommets non-saturés q_1, q_2 dans $K_{v_i^1, v_j^2}$. Pour chaque paire, nous prenons les arêtes $v_i^1 q_1, v_j^2 q_2$ dans M' . Remarquons qu'il reste un nombre pair de sommets dans $K_{v_i^1, v_j^2}$ qui ne sont pas saturés dans M' . Donc nous pouvons prendre n'importe quel couplage couvrant ces arêtes dans M' . Ainsi M' est un couplage parfait-disconnectant

Réciproquement, soit M' un couplage parfait-disconnectant de G' . Rappelons que pour chaque paire v_i^1, v_i^2 , la clique $K_{v_i^1, v_i^2} \cup \{v_i^1, v_i^2\}$ est immunisée. Donc $G'[V_i] - M'$, où $i \in \{1, 2\}$, est non-connexe. Soit $M_1 = M' \cap E_1$. Donc M_1 est un couplage-disconnectant dans G . \square

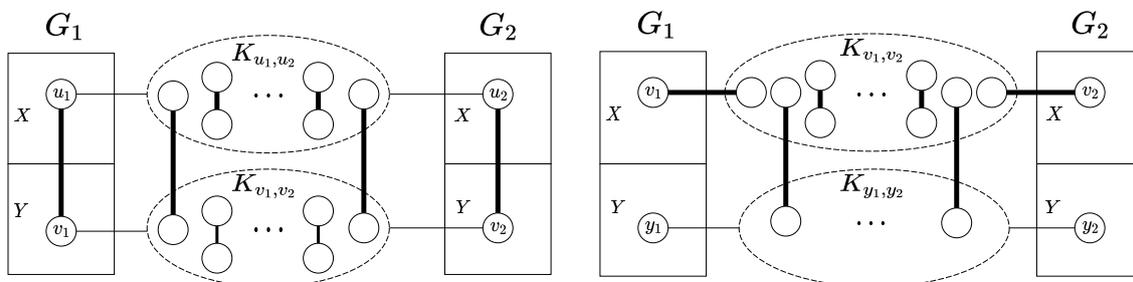
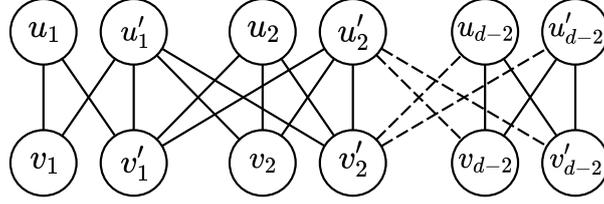


FIGURE 6.3 – À gauche u_1, v_1 sont saturés par M , à droite v_1, v_2 ne sont pas saturés M .

FIGURE 6.4 – La chaîne bipartite composée de $K_{3,3}$.

Théorème 6.8 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis de diamètre 4.

Preuve: H. Le et V. Le dans [56] ont montré que COUPLAGE DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis de diamètre 4. Leur preuve a inspiré celle-ci.

Depuis un graphe biparti $G = (V = A \cup B, E)$ où $\text{diam}(G) = 4$, nous construisons (en temps polynomial) un graphe connexe $G' = (V', E')$ comme suit. Nous prenons deux copies $G_1 = (V_1 = A_1 \cup B_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2 = A_2 \cup B_2, E_2)$ de G . Nous définissons $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, $V_1 = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_n^1\}$, $V_2 = \{v_1^2, v_2^2, \dots, v_n^2\}$. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, soit $Q_{v_i^1}$ un ensemble indépendant à n sommets. Nous ajoutons des arêtes entre v_i^1 et $Q_{v_i^1}$ afin que v_i^1 soit complet à $Q_{v_i^1}$. Nous disons que $Q_{v_i^1}$ est l'ensemble indépendant correspondant à v_i^1 . Nous faisons de même pour les sommets de G_2 . Puis, pour chaque paire $v_i^1 \in V_1$, $v_j^2 \in V_2$, nous rendons $Q_{v_i^1}$ complet à $Q_{v_j^2}$. Donc $Q_{v_i^1} \cup Q_{v_j^2}$ est isomorphe à $K_{n,n}$. Nous désignons les ensembles suivants : $Q_{v_i^1, v_j^2} = Q_{v_i^1} \cup Q_{v_j^2} \cup \{v_i^1, v_j^2\}$, $Q_{A_k} = \bigcup_{v \in A_k} Q_v$, $Q_{B_k} = \bigcup_{v \in B_k} Q_v$, $Q_k = Q_{A_k} \cup Q_{B_k}$, $k = 1, 2$, et $Q = Q_1 \cup Q_2$. Remarquons que $Q_{v, v'}$ est immunisé.

Pour chaque paire $v_i \in A$, $v_j \in A$, $i \neq j$, nous ajoutons exactement une arête entre $Q_{v_i^1}$ et $Q_{v_j^2}$, et exactement une arête entre $Q_{v_i^2}$ et $Q_{v_j^1}$. Nous appliquons cette opération de façon à ce que les arêtes ajoutées forment un couplage. Nous faisons de même pour les paires $v_i \in B$, $v_j \in B$, $i \neq j$. Pour chaque paire $v_i \in A$, $v_j \in B$, nous ajoutons exactement une arête entre $Q_{v_i^1}$ et $Q_{v_j^1}$, et exactement une arête entre $Q_{v_i^2}$ et $Q_{v_j^2}$. Nous appliquons cette opération de façon à ce que les arêtes ajoutées forment un couplage. Nous avons fini de décrire la construction de G' . Remarquons que $A_1 \cup Q_{B_1} \cup Q_{A_2} \cup B_2$ et $B_1 \cup Q_{A_1} \cup Q_{B_2} \cup A_2$ sont deux ensembles indépendants disjoints qui forment une partition de V' . Donc G' est biparti.

Nous commençons par montrer que $\text{diam}(G') = 4$. Puisque $\text{diam}(G) = 4$, pour chaque paire $v_i, v_j \in V_k$, $k = 1, 2$, nous avons $\text{dist}_{G'}(v_i, v_j) \leq 4$, et pour chaque paire $v_i \in A$, $v_j \in A$, $i \neq j$ ou $v_i \in B$, $v_j \in B$, $i \neq j$, nous avons $\text{dist}_G(v_i, v_j) = 2$. Par construction de G' , pour chaque paire $v_i \in V_k$, $q \in Q_k$, $i = 1, 2$, nous avons $\text{dist}_{G'}(v_i, q) \leq 4$, et pour chaque paire $q, q' \in Q_{A_1}$, nous avons $\text{dist}_{G'}(q, q') \leq 3$. Il en est de même pour toutes les paires de sommets de Q_{A_2} ou de Q_{B_1} ou de Q_{B_2} . Soit $q_i \in Q_{v_i^1}$, $q_j \in Q_{v_j^2}$. Si $i = j$, alors $\text{dist}_{G'}(q_i, q_j) = 1$. Nous pouvons donc supposer que $i \neq j$. Supposons que $v_i, v_j \in A$. Alors il existe un chemin $P = q_i - q_2 - q_1 - q_j$, où $q_2 q_1$ est une arête entre $Q_{v_i^2}$ et $Q_{v_j^1}$, et donc $\text{dist}_{G'}(q_i, q_j) \leq 3$. Supposons que $v_i \in A$, $v_j \in B$. Alors il y a un chemin $P = q_i - v_i - q_a - q_b - q_j$, où $q_a q_b$ est une arête entre $Q_{v_i^1}$ et $Q_{v_j^1}$, et donc $\text{dist}_{G'}(q_i, q_j) \leq 4$. Maintenant prenons la paire $q_i \in Q_{v_i^1}$, $q_j \in Q_{v_j^1}$, où $v_i \in A$, $v_j \in B$. Alors il y a un chemin $P = q_i - q_a - q_b - q_j$, où $q_a q_b$ est une arête entre $Q_{v_i^2}$ et $Q_{v_j^2}$, et donc $\text{dist}_{G'}(q_i, q_j) \leq 3$. Ensuite prenons la paire $q_i \in Q_{v_i^1}$, $v_j^2 \in V_2$. Supposons que $v_i, v_j \in A$. Alors il y a un chemin $P = q_i - v_i - q'_i - q_j - v_j$, où $q'_i q_j$ est une arête

entre $Q_{v_i^1}$ et $Q_{v_j^2}$, et donc $\text{dist}_{G'}(q_i, v_j) \leq 4$. Nous pouvons donc supposer que $v_i \in A$, $v_j \in B$. Alors il y a un chemin $P = q_i - q_a - q_j - v_j$, où $q_a q_j$ est une arête entre $Q_{v_i^2}$ et $Q_{v_j^2}$, et donc $\text{dist}_{G'}(q_i, v_j) \leq 3$. Les cas restants sont symétriques. Donc $\text{diam}(G') = 4$.

Depuis $M \subseteq E$ un couplage-disconnectant de G , nous construisons $M' \subseteq E'$ comme suit. Soit (X, Y) une partition de G induite par le couplage-disconnectant M . Soit $x \in X$, $y \in Y$. Si $x \in A$ et $y \in B$, alors nous prenons $q_{x_1} q_{y_1}, q_{x_2} q_{y_2}$ dans M' . Cette opération est illustrée à gauche de la Figure 6.5. Autrement $x, y \in A$, respectivement $x, y \in B$, et nous prenons $q_{x_1} q_{y_2}, q_{x_2} q_{y_1}$ dans M' . Cette opération est illustrée à droite de la Figure 6.5. Pour chaque $uv \in M$, nous prenons $u_1 v_1, u_2 v_2$ dans M' . Maintenant M' est un couplage-disconnectant de G' . Nous montrons comment sélectionner les arêtes restantes afin que M' soit un couplage parfait-disconnectant.

Soit $v_i \in V$ un sommet qui n'est pas saturé par M . Nous prenons deux sommets non-saturés q_1, q_2 dans $Q_{v_i^1, v_i^2}$, et ajoutons les arêtes $v_i^1 q_1, v_i^2 q_2$ dans M' . Maintenant, pour chaque $Q_{v_i^1, v_i^2}$ il reste le même nombre de sommets non-saturés dans $Q_{v_i^1}$ et dans $Q_{v_i^2}$. Puisque $G[Q_{v_i^1, v_i^2}]$ est un graphe biparti complet, nous pouvons ajouter dans M' un couplage saturant le reste des sommets de $Q_{v_i^1, v_i^2}$. Cette opération est illustrée sur la Figure 6.6. Nous en déduisons que M' est un couplage parfait-disconnectant.

Réciproquement, soit M' un couplage parfait-disconnectant de G' . Rappelons que pour chaque paire $v_i^1 \in V_1$, $v_i^2 \in V_2$, le sous-graphe issu des sommets de $Q_{v_i^1, v_i^2}$ est immunisé. Donc $G'[V_i] - M'$, où $i \in \{1, 2\}$ est non-connexe. Prenons $M_1 = M' \cap E_1$. Donc M_1 est un couplage-disconnectant de G . \square

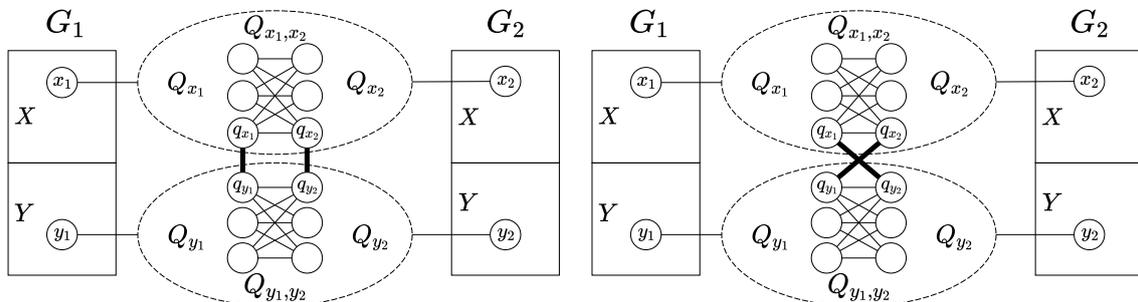


FIGURE 6.5 – À gauche, nous avons les sommets $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, y_1 \in B_1, y_2 \in B_2$, et les arêtes $q_{x_1} q_{y_1}, q_{x_2} q_{y_2}$ sont dans un couplage parfait-disconnectant de G' . À droite, nous avons les sommets $x_1, y_1 \in A_1, x_2, y_2 \in A_2$, et les arêtes $q_{x_1} q_{y_2}, q_{x_2} q_{y_1}$ sont dans un couplage parfait-disconnectant de G' .

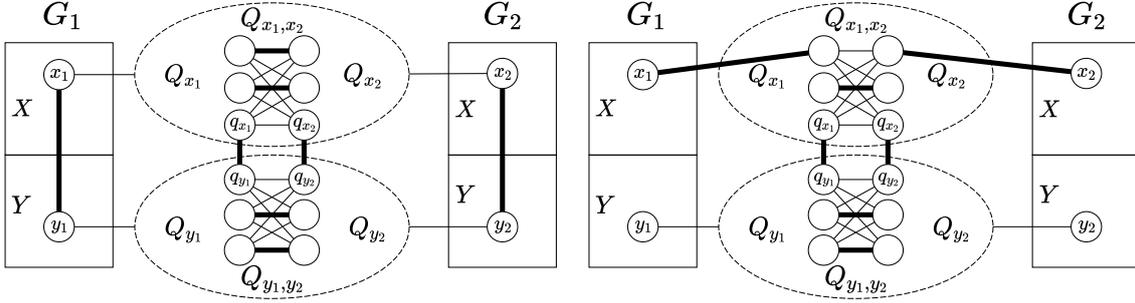


FIGURE 6.6 – À gauche, les sommets x_1, x_2 sont saturés par le couplage-disconnectant de G . À droite, x_1, x_2 ne sont pas saturés par le couplage-disconnectant de G .

En utilisant les arguments précédents, mais en ajoutant cette fois-ci le graphe biparti H de la Figure 6.4 tel que u_1, u'_1 sont complets à Q_{w^1} et v_1, v'_1 sont complets à Q_{w^2} , où w^1, w^2 sont deux copies d'un sommet w de G , nous obtenons un graphe biparti G' où $\text{diam}(G') = d$, $d \geq 4$. Nous pouvons observer que $H \cup Q_{w^1} \cup Q_{w^2}$ est immunisé et que H a un couplage parfait $\{u_1 v_1, u'_1 v'_1, \dots, u_{d-2} v_{d-2}, u'_{d-2} v'_{d-2}\}$. Donc nous obtenons le résultat suivant.

Théorème 6.9 *Pour tout d fixé où $d \geq 4$, COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes de diamètre d .*

6.2.2 Cas polynomiaux

Tandis que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis de diamètre quatre, nous montrons ici que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes bipartis de diamètre trois. Pour finir, nous montrons que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut aussi être résolu en temps polynomial dans les graphes de diamètre deux.

Nous aurons besoin de la caractérisation suivante extraite de [56] (c.f. Fact 2).

Propriété 6.10 *Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti. Alors $\text{diam}(G) \leq 3$ si et seulement si $N(a) \cap N(b) \neq \emptyset$ pour n'importe quelle paire de sommets distincts a, b du même côté de la bipartition.*

Nous utilisons aussi les observations suivantes. Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti, et M un couplage parfait-disconnectant où (X, Y) est la partition des sommets induite par la coupe.

Propriété 6.11 *Soit $uv \in M$ où $u \in X, v \in Y$. Alors $N(u) \setminus \{v\} \subseteq X$ et $N(v) \setminus \{u\} \subseteq Y$.*

Propriété 6.12 *Si un sommet v a deux voisins dans X , respectivement dans Y , alors $v \in X$, respectivement $v \in Y$.*

Propriété 6.13 *Si un sommet v a un voisin dans $x \in X$, et un autre voisin dans $y \in Y$, tel que $xy \in M$, alors M n'est pas un couplage parfait-disconnectant.*

Nous sommes prêt à montrer le résultat suivant.

Théorème 6.14 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes bipartis de diamètre 3.*

Preuve: Soit $G = (V_1 \cup V_2, E)$ un graphe biparti où $\text{diam}(G) \leq 3$. Si G n'a pas de couplage parfait, alors G n'a pas de couplage parfait-disconnectant. Nous pouvons donc supposer que G a un couplage parfait. Alors $|V_1| = |V_2|$. Si uv est un pont et qu'il existe M un couplage parfait tel que $uv \in M$, alors G a un couplage parfait-disconnectant. Nous pouvons donc supposer que $\delta(G) \geq 2$ et que si M est un couplage parfait-disconnectant de G , alors $|E(X, Y)| \geq 2$.

Nous tentons de construire un couplage parfait-disconnectant M avec (X, Y) la partition des sommets issus de la coupe de M . Nous prenons deux arêtes ab, cd , où $a, d \in V_1$, $b, c \in V_2$, telles que $\{ab, cd\} \subseteq M$. Lorsque nous obtenons un couplage parfait-disconnectant M , l'algorithme s'arrête, sinon nous cherchons une autre paire tant que cela est possible.

Nous montrons que si G a un couplage parfait-disconnectant, alors il existe M un couplage parfait-disconnectant tel que $\{a, c\} \subseteq X$, $\{b, d\} \subseteq Y$. Soit $a \in X$, $b \in Y$. Supposons, par contradiction, que $V_2 \subseteq Y$. D'après la Propriété 6.12, nous avons $d(a) \geq 2$, et donc $a \in Y$, une contradiction.

Donc nous mettons $a, c \in X$, $b, d \in Y$. Notons qu'il existe au plus $\mathcal{O}(|V|^2)$ de ces combinaisons.

Puisque que G est biparti, nous avons $N(a) \cap N(b) = N(a) \cap N(c) = N(b) \cap N(d) = N(c) \cap N(d) = \emptyset$. De plus, d'après la Propriété 6.13, si il existe $v \in N(a) \cap N(d)$ ou $v \in N(b) \cap N(c)$, alors M ne peut exister. Donc nous avons $N(a) \cap N(d) = N(b) \cap N(c) = \emptyset$.

Nous définissons les ensembles de sommets suivant :

- $A = N(a) \setminus \{b, c\}$, $B = N(b) \setminus \{a, d\}$, $C = N(c) \setminus \{a, d\}$, $D = N(d) \setminus \{b, c\}$;
- $S = \{v \in V_1 \mid v \notin N(b) \cup N(c), N(v) \cap A \neq \emptyset, N(v) \cap D \neq \emptyset\}$;
- $T = \{v \in V_2 \mid v \notin N(a) \cup N(d), N(v) \cap B \neq \emptyset, N(v) \cap C \neq \emptyset\}$.

Nous montrons que $A, B, C, D, S, T, \{a, b, c, d\}$ est une partition de $V_1 \cup V_2$. Notons que les ensembles sont disjoints deux à deux. Nous supposons, par contradiction, qu'il existe $v \in V_1$ qui n'est dans aucun des ensembles précédents. D'après la Propriété 6.10, v et a ont un voisin commun w . Puisque $N(a) \subseteq A \cup \{b, c\}$, nous avons une contradiction. Le cas $v \in V_2$ est identique.

D'après la Propriété 6.11, nous avons $A \cup C \subseteq X$ et $B \cup D \subseteq Y$. Soit $v \in A$. D'après la Propriété 6.12, si v a deux voisins dans B , alors $v \in Y$, donc M ne peut exister. La situation est identique lorsqu'un sommet de B a deux voisins dans A , ou qu'un sommet de C a deux voisins dans D , ou qu'un sommet de D a deux voisins dans C . Si v a exactement un voisin $w \in B$, alors $vw \in M$ et d'après la Propriété 6.11, nous devons mettre tous ses voisins dans X , et tous les voisins de w sont mis dans Y . Nous faisons de même pour les sommets de B, C, D . D'après la Propriété 6.12, si $v \in S$ a deux voisins dans X , respectivement Y , alors $v \in X$, respectivement $v \in Y$. Nous faisons de même pour $v \in T$. Si un sommet appartient à X et Y , alors M ne peut exister et nous arrêtons. D'après la Propriété 6.12, si un sommet dans X , respectivement Y , a deux voisins dans Y , respectivement X , alors M ne peut exister.

Soit $S' = \{v \in S \mid v \notin X \cup Y\}$ et $T' = \{v \in T \mid v \notin X \cup Y\}$. D'après les arguments précédents, et puisque $\delta(G) \geq 2$, chaque sommet $v \in S'$ a exactement un voisin $v_a \in A$ et un voi-

sin $v_d \in D$, et chaque sommet $v \in T'$ a exactement un voisin $v_b \in B$ et un voisin $v_c \in C$. Soit $A' = \{v_a \in A \mid vv_a \in E, v \in S'\}$, $D' = \{v_d \in D \mid vv_d \in E, v \in S'\}$, $B' = \{v_b \in B \mid vv_b \in E, v \in T'\}$, $C' = \{v_c \in C \mid vv_c \in E, v \in T'\}$. Remarquons que d'après la Propriété 6.12, pour chaque paire $v_a \in A'$, $v_d \in D'$, nous avons $N(v_a) \cap N(v_d) \subseteq S'$. Par symétrie, pour chaque paire $v_b \in B'$, $v_d \in D'$, nous avons $N(v_b) \cap N(v_c) \subseteq T'$.

Pour tout $v \in S'$, respectivement $v \in T'$, si M existe alors soit $vv_a \in M$ ou $vv_d \in M$, respectivement $vv_b \in M$ ou $vv_c \in M$. Donc toutes les arêtes st , où $s \in S'$, $t \in T'$, sont telles que $st \notin M$, et les deux sommets s, t doivent appartenir à un même ensemble X ou Y .

Soit $|S'| = \mu$, $|A'| = \alpha$, $|D'| = \delta$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\alpha \geq \delta$ (le cas $\alpha \leq \delta$ étant symétrique). D'après la Propriété 6.10, et puisque chaque sommet de S' a exactement un voisin dans A' et un voisin dans D' , nous avons $\mu \geq \alpha\delta$. Afin que M existe, il faut que $\mu \leq \alpha + \delta$, et donc $\alpha + \delta \geq \alpha\delta$, ce qui est possible seulement si $\alpha = \delta = 2$ ou $\delta = 1$, $\alpha \geq 1$.

Soit $\alpha = \delta = 2$. Nous définissons les ensembles $A' = \{v_a^1, v_a^2\}$, $D' = \{v_d^1, v_d^2\}$, $S' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Alors $G' = G[A' \cup D' \cup S']$ consiste en quatre chemins $v_a^1 - v_1 - v_d^1$, $v_a^1 - v_2 - v_d^2$, $v_a^2 - v_3 - v_d^1$, $v_a^2 - v_4 - v_d^2$. Il existe donc deux couplages parfaits de G' , qui sont, $M_a = \{v_a^1 v_1, v_d^2 v_2, v_d^1 v_3, v_a^2 v_4\}$, $M_d = \{v_a^1 v_2, v_d^2 v_4, v_d^1 v_1, v_a^2 v_3\}$.

Soit $\delta = 1$. Nous avons $\alpha \leq \mu \leq \alpha + 1$. Nous définissons les ensembles $A' = \{v_a^1, \dots, v_a^\alpha\}$, $D' = \{v_d\}$, $S' = \{v_1, \dots, v_\mu\}$. Nous supposons que $v_a^i v_i \in E$ pour $1 \leq i \leq \mu$. Soit $G' = G[A' \cup D' \cup S']$.

Premièrement $\mu = \alpha$. Alors G' est composé de α chemins $v_a^1 - v_1 - v_d, \dots, v_a^\alpha - v_\alpha - v_d$. Notons que G' n'a pas de couplage parfait, mais rappelons que pour chaque $v_i \in S'$, soit $v_i v_a^i \in M$ ou $v_i v_d \in M$. Donc dans G' , il existe $\alpha + 1$ couplages qui disconnectent A' de D' . Ces couplages sont $M_0 = \{v_a^1 v_1, \dots, v_a^\alpha v_\alpha\}$ et $M_i = \{v_i v_d\} \cup \{v_a^j v_j, 1 \leq j \leq \alpha, j \neq i\}$.

Deuxièmement $\mu = \alpha + 1$. Alors G' est composé de deux chemins $v_a^1 - v_1 - v_d, v_a^1 - v_2 - v_d$, et de $\alpha - 1$ chemins $v_a^2 - v_3 - v_d, \dots, v_a^\alpha - v_{\alpha+1} - v_d$. Il existe exactement deux couplages (parfaits) dans G' qui disconnectent A' de D' , et qui sont $\bar{M}_1 = \{v_a^1 v_1, v_d v_2, v_a^2 v_3, \dots, v_a^\alpha v_{\alpha+1}\}$ et $\bar{M}_2 = \{v_a^1 v_2, v_d v_1, v_a^2 v_3, \dots, v_a^\alpha v_{\alpha+1}\}$.

Par symétrie, nous listons les couplages de $G'' = G[B' \cup C' \cup T']$: soit $M'_0 = \{v'_a v'_1, \dots, v'_a v'_\alpha\}$ et $M'_i = \{v'_i v'_d\} \cup \{v'_a v'_j, 1 \leq j \leq \alpha, j \neq i\}$; ou $\bar{M}'_1 = \{v'_a v'_1, v'_d v'_2, v'_a v'_3, \dots, v'_a v'_\alpha - v'_{\alpha+1}\}$ et $\bar{M}'_2 = \{v'_a v'_2, v'_d v'_1, v'_a v'_3, \dots, v'_a v'_\alpha - v'_{\alpha+1}\}$. Donc il y a $\mathcal{O}(|E|^2)$ combinaisons possibles entre les couplages de G' et G'' .

Pour chaque combinaison, nous testons si $E(X, Y)$ est un couplage-disconnectant. Si ce n'est pas le cas, alors M avec $E(X, Y) \subseteq M$ n'existe pas. Autrement, soit $X' \subseteq X$ tel que $N(X') \cap Y = \emptyset$ et $Y' \subseteq Y$ tel que $N(Y') \cap X = \emptyset$. Nous testons si $G[X' \cup Y']$ possède un couplage parfait. Si ce n'est pas le cas, alors M avec $E(X, Y) \subseteq M$ n'existe pas. Autrement, nous avons M un couplage parfait-disconnectant de G .

Nous estimons le temps d'exécution de l'algorithme précédent. D'après [48], nous pouvons calculer un couplage parfait dans un graphe biparti en temps $\mathcal{O}(|V|^{\frac{5}{2}})$. Vérifier si il existe un couplage parfait qui contient un pont peut être fait en temps $\mathcal{O}(|V|^{\frac{5}{2}})$. Rappelons qu'il existe $\mathcal{O}(|V|^2)$ paires d'arêtes ab, cd . Étant donné une paire ab, cd , le temps d'exécution de nos procédures est de $\mathcal{O}(|V|^{\frac{5}{2}})$. Donc la

complexité de notre algorithme est de $\mathcal{O}(|V|^{\frac{9}{2}})$. \square

Nous donnons maintenant un algorithme polynomial pour les graphes de diamètre deux.

Théorème 6.15 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes de diamètre 2.*

Preuve: Soit $G = (V, E)$ où $\text{diam}(G) = 2$. Nous pouvons supposer que G a un couplage parfait. Soit $xy \in E$. Nous testons si il existe un couplage-disconnectant $E(X, Y)$ tel que $x \in X$ et $y \in Y$. D'après la Propriété 6.11, nous mettons $X \leftarrow X \cup N(X) \setminus \{y\}$ et $Y \leftarrow Y \cup N(Y) \setminus \{x\}$. Si $X \cap Y \neq \emptyset$ ou si $E(X, Y)$ n'est pas un couplage, alors il n'y a pas de couplage-disconnectant $E(A, B)$ où $x \in A$, $y \in B$. Sinon, puisque $\text{diam}(G) = 2$, nous avons X, Y une partition de V . Soit W l'ensemble des sommets non-saturés par $M = E(X, Y)$. Si il existe un couplage parfait M' dans $G[W]$, alors $M \cup M'$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant contenant la coupe M . \square

Remarque 6.16 *Les cliques sont les graphes de diamètre un. Donc K_2 est l'unique graphe de diamètre un qui possède un couplage parfait-disconnectant.*

6.3 Graphes planaires

Nous montrons la NP-complétude de COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT pour deux sous-classes des graphes planaires. La première classe est celle où les sommets sont de degrés trois ou quatre, et la seconde classe est celle de maille cinq.

Dans notre première preuve, nous utilisons le problème de décision suivant pour notre réduction.

SEGMENT 3-COLORABLE (SEGMENT 3-COLORABILITY)	
<i>Étant donné :</i>	Un ensemble de sommets V et trois ensembles disjoints d'arêtes A, B, C tels que $G = (V, A \cup B \cup C)$ est un multigraphe planaire 3-régulier possédant un cycle hamiltonien $A \cup B$.
<i>Décider :</i>	Y a-t-il une fonction de coloration $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ telle que si $uv \in A$, alors $f(u) = f(v)$, et si $uv \in C$, alors $f(u) \neq f(v)$?

Théorème 6.17 (P. Bonsma [10]) SEGMENT 3-COLORABLE *est NP-complet.*

La preuve du Théorème suivant est inspirée par celle de P. Bonsma dans [10] montrant que COUPLAGE-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes planaire de degré maximum quatre.

Théorème 6.18 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *est NP-complet dans les graphes planaires où tous les sommets sont de degré trois ou quatre.*

Preuve: Soit (V, A, B, C) une instance de SEGMENT 3-COLORABLE avec $G = (V, A \cup B \cup C)$. Nous réduisons en temps polynomial cette instance à une instance $G' = (V', E')$ de COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT où G' est un graphe planaire de degré maximum 4. Pour finir, nous transformons G' en G'' afin que tout sommet v de G'' soit de degré trois ou quatre.

Considérons un plongement planaire de G . On oriente les arêtes du cycle hamiltonien $A \cup B$ dans le sens antihoraire par rapport au plongement. Nous disons qu'un sommet u précède v si il y a une arête de u vers v dans le plongement considéré. On oriente les arêtes de C de manière arbitraire. Puisque l'ensemble des arêtes $A \cup B$ forme un cycle hamiltonien, alors ce cycle divise le plan en deux régions dans le plongement considéré. Donc nous pouvons catégoriser les arêtes de C en deux parties par rapport à ce cycle : les arêtes internes et les arêtes externes. Parce que chaque sommet v de G est incident à exactement une arête e de C , nous pouvons définir les quatre orientations de la composante g_v correspondant au sommet v dans G' , qui sont :

1. Si e est une arête interne et que v est incident à la queue de e , alors nous prenons une copie de la composante g_v qui est illustrée en Figure 6.7a ;
2. Si e est une arête interne et que v est incident à la tête de e , alors nous prenons une copie de la composante g_v tel qu'illustré en Figure 6.7b ;
3. Si e est une arête externe et que v est incident à la queue de e , alors nous prenons une copie de la composante g_v tel qu'illustré en Figure 6.7c ;
4. Si e est une arête externe et que v est incident à la tête de e , alors nous prenons une copie de la composante g_v tel qu'illustré en Figure 6.7d.

Nous montrons comment deux sommets g_u et g_v sont reliés dans G' quand il existe une arête $e = uv \in A \cup B$, où u précède v . Si $e \in A$, alors nous créons une copie de la composante a_e qui est illustrée dans la Figure 6.8a. Si $e \in B$, alors nous créons une copie de la composante b_e qui est illustrée dans la Figure 6.8b. Dans les deux cas, remarquons que les appellations des sommets aux extrémités gauches et droites des composantes a_e et b_e sont identiques. Celles-ci sont d'ailleurs identiques aux appellations des sommets aux extrémités gauches et droites des composantes g_v et g_u . Nous fusionnons donc chaque sommet $r_{u,i}, r'_{u,i}$ de g_u avec son sommet correspondant l_i, l'_i de a_e ou b_e . Puis nous fusionnons chaque sommet $l_{v,i}, l'_{v,i}$ de g_v avec son sommet correspondant r_i, r'_i de a_e ou b_e . Remarquons que ces opérations ne créent pas de sommet de degré strictement plus que quatre, et ne détruisent pas la planarité des composantes.

Nous montrons maintenant comment deux sommets g_u et g_v sont reliés dans G' quand il existe une arête $uv \in C$ où u précède v . Nous relierons $c_{u,i}$ à $c_{v,i}$ et $c'_{u,i}$ à $c'_{v,i}$ avec les chemins respectifs $c_{u,i} - d_i - c_{v,i}$ et $c'_{u,i} - d'_i - c'_{v,i}$, où $i = 1, 2, 3$ comme illustré dans la Figure 6.8c. Remarquons que ces opérations ne créent pas de sommet de degré strictement plus que quatre, et ne détruisent pas la planarité des composantes. À ce moment, G' est complètement construit.

Pour chaque composante utilisée pour construire G' , nous montrons que les seuls couplages-disconnectants possibles sont ceux des Figures 6.9, 6.10 et 6.11. Notons qu'il existe deux cas particuliers qui ne sont pas représentés sur les figures et qui concernent la composante g_v . Nous préciserons plus tard pourquoi ces deux cas ne sont pas possibles dans G' .

Pour chaque composante, nous allons montrer que les seuls couplages-disconnectants possibles sont ceux où exactement une arête est imposée à l'extrémité gauche ou droite des composantes (*c.f.* les arêtes entre les sommets l ou entre les sommets r). Nous montrons que les arêtes épaisses qui sont coupées par les lignes hachées des Figures 6.9, 6.10, 6.11 forment les seuls couplages-disconnectants

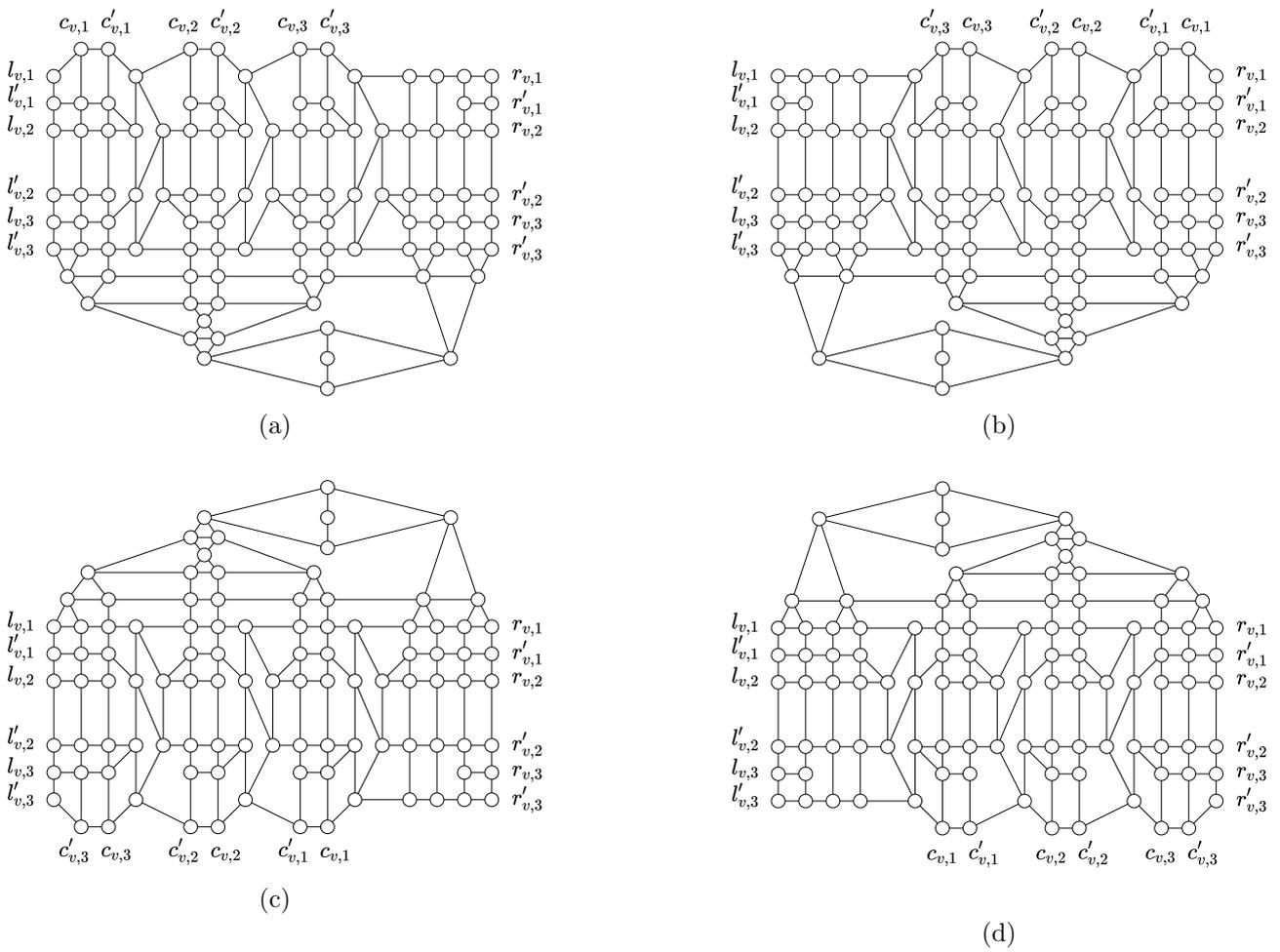


FIGURE 6.7 – Quatre orientations d’une composante g_v : (a) en queue d’une arête interne, (b) en tête d’une arête interne, (c) en queue d’une arête externe, et (d) en tête d’une arête externe.

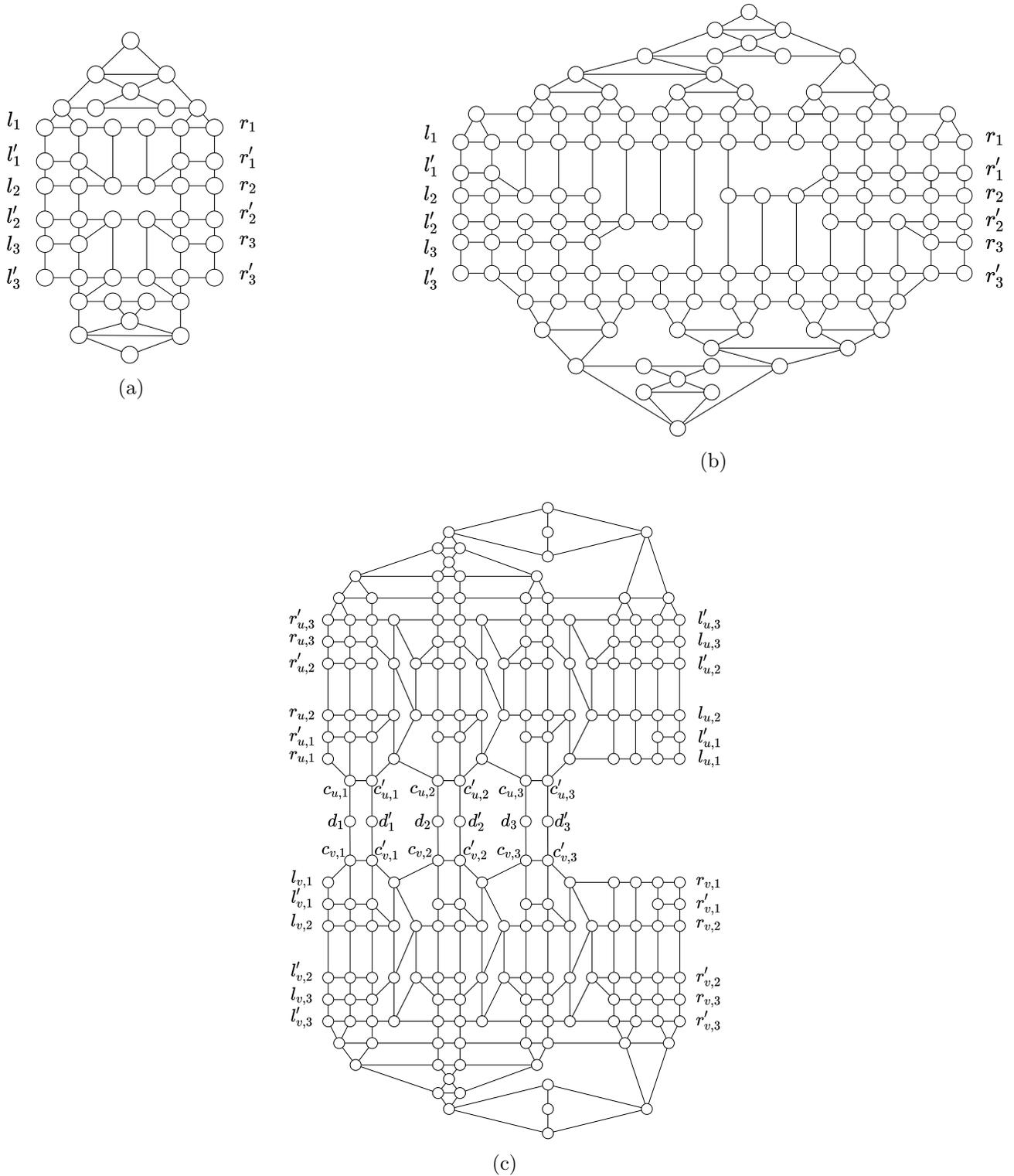


FIGURE 6.8 – Les composantes reliant les sommets g_v (a) la composante a_e associée à une A -arête e de G , (b) la composante b_e associée à une B -arête e de G , et (c) deux sommets g_u, g_v où $uv \in C$

minimales possibles. À partir de maintenant, si ce n'est pas précisé un couplage-disconnectant est supposé comme étant minimal.

Avant de montrer que les seuls couplages-disconnectants de nos composantes sont ceux des Figures 6.9, 6.10, 6.11, nous exposons quelques propriétés des sous-graphes induits dans celles-ci. Rappelons que le triangle est immunisé, et que donc aucune arête d'un triangle n'appartient à un couplage-disconnectant minimal. Considérons maintenant le C_4 . Si une arête du C_4 est dans un couplage-disconnectant, alors l'arête du C_4 qui n'est pas adjacente à celle-ci y appartient aussi (et les deux arêtes restantes n'y appartiennent pas). Ces propriétés nous permettent de « contrôler » le couplage-disconnectant d'une direction à l'autre pour chacune de nos composantes. De plus, les triangles permettent d'empêcher de « couper » nos composantes par le bas ou pas le haut. Nous pouvons donc considérer que nos composantes se « coupent » uniquement de gauche à droite. Ainsi, quand on cherche à construire un couplage-disconnectant, il est possible de l'initialiser à partir d'une arête entre deux sommets l à gauche.

Prenons la composante g_v ainsi que ses trois couplages-disconnectants de la Figure 6.9. Nous montrons qu'ils sont les seuls couplages-disconnectants possibles. Remarquons que les couplages-disconnectants des Figures 6.9a et 6.9b peuvent être modifiés pour contenir les arêtes $r'_{v,1}r_{v,2}$ ou $l'_{v,2}l_{v,3}$, respectivement. Les couplages-disconnectants contenant les arêtes $r'_{v,1}r_{v,2}$ ou $l'_{v,2}l_{v,3}$ sont les deux cas exceptionnels dont nous parlions précédemment. Notons que dans G' , la composante g_v est reliée à une composante a_e ou b_e . Il est donc facile de voir qu'un couplage-disconnectant de g_v contenant les arêtes $r'_{v,1}r_{v,2}$ ou $l'_{v,2}l_{v,3}$ ne sera pas un couplage-disconnectant dans G' à cause des triangles présents dans a_e et b_e . Donc nous pouvons ignorer ces deux cas particuliers. Maintenant, prenons un cycle de longueur au moins cinq dans g_v . En prenant n'importe quelle arête de ce cycle qui n'est pas dans un de nos trois couplages-disconnectants, il est simple de vérifier qu'elle n'appartient à aucun couplage-disconnectant (dans tous les cas un triangle « bloque » la coupe). Donc nous pouvons nous concentrer sur les C_4 . En prenant une arête afin d'initialiser la coupe, nous remarquons facilement que les choix sont assez restreints car le « chemin de la coupe » va dépendre d'une séquence de C_4 consécutifs, et que notre coupe ne peut contenir une arête d'un triangle. Nous pouvons donc vérifier que les couplages-disconnectants de g_v sont ceux de la Figure 6.9.

Nous montrons comment construire un couplage-disconnectant parfait de g_v . Considérons un couplage-disconnectant (a), (b), ou (c) de la Figure 6.9. En prenant les arêtes épaisses qui ne sont pas dans la coupe considérée, il est clair que nous obtenons un couplage parfait-disconnectant de g_v .

Si $l_{v,i}l'_{v,i}$ est dans un couplage-disconnectant de g_v , alors nous disons que g_v est *coupée* par i , où $i = 1, 2, 3$. À chaque choix de i , $i \in \{1, 2, 3\}$, correspond une des trois couleurs du sommet v du graphe initial G . Observons que dans ce cas, $r_{v,i}r'_{v,i}$ est aussi dans ce couplage-disconnectant de g_v . De plus, il sera important pour plus tard d'observer que $c_{v,i}c'_{v,i}$ est aussi dans ce couplage-disconnectant tandis que $c_{v,j}c'_{v,j}$, où $i \neq j$, ne l'est pas.

Concentrons nous maintenant sur les sommets remplaçant les arêtes A, B, C .

Rappelons que chaque arête e de A est remplacée par une composante a_e comme montré dans la Figure 6.8a. Trois couplages-disconnectants sont exposés dans la Figure 6.10 (*c.f.* les arêtes épaisses coupées par une ligne hachée). Nous montrons que ce sont les seuls couplages-disconnectants de a_e . Notons qu'à cause des triangles, il n'y a pas de couplage-disconnectant contenant les arêtes $l'_i l_{i+1}$ ou $r'_i r_{i+1}$, ($i = 1, 2$). Pour la même raison, il n'existe pas de couplage-disconnectant « passant » par le haut ou par le bas de a_e . Pour finir, prenons C_8 qui est au centre de la composante. À cause de la position des quatre triangles ainsi que des quatre C_4 qui entourent C_8 , un couplage-disconnectant « passe »

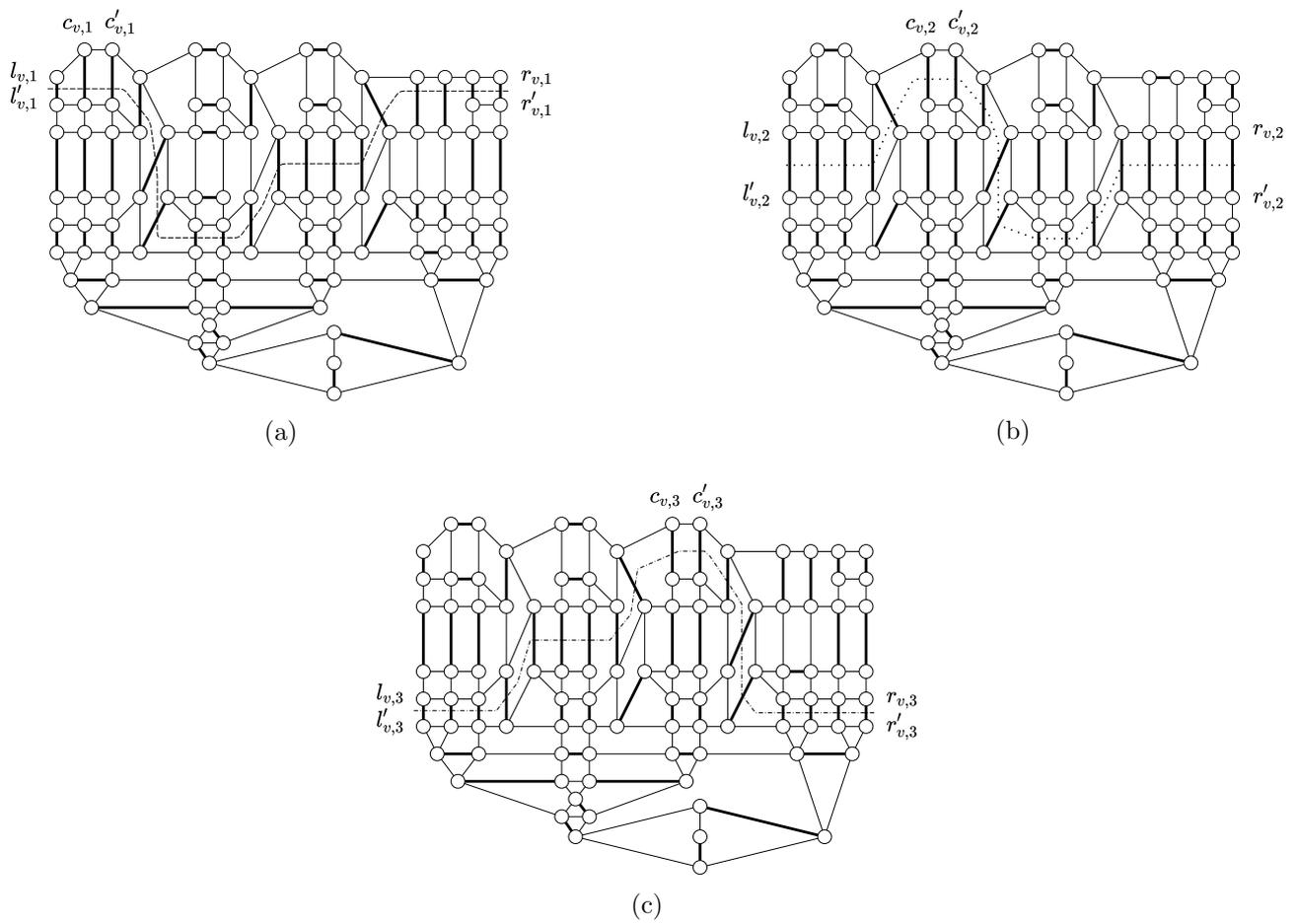


FIGURE 6.9 – Les trois couplages-disconnectants d'une composante g_v coupée par la ligne hachée. Les arêtes épaisses représentent les couplages parfaits-disconnectants

soit horizontalement ou verticalement au travers de C_8 . Or il n'existe pas de couplage-disconnectant coupant verticalement a_e .

Comme pour g_v , si une arête $l_1l'_1$ est dans un couplage-disconnectant, alors $r_1r'_1$ est dans un couplage-disconnectant. Donc nous obtenons la propriété suivante :

Propriété 6.19 *Si deux sommets g_u et g_v sont reliés par une composante a_e , alors pour tout couplage-disconnectant, g_u est coupé par i si et seulement si g_v est coupé par i , où $i = 1, 2, 3$.*

Remarquons que nous aurions pu obtenir cette propriété en reliant directement deux sommets g_v sans utiliser a_e , mais que cela aurait créé des sommets de degré strictement supérieur à quatre.

Il reste à construire un couplage parfait-disconnectant de a_e . Pour cela, nous pouvons considérer l'ensemble des arêtes épaisses des couplages-disconnectants (a), (b), (c) de la Figure 6.10.

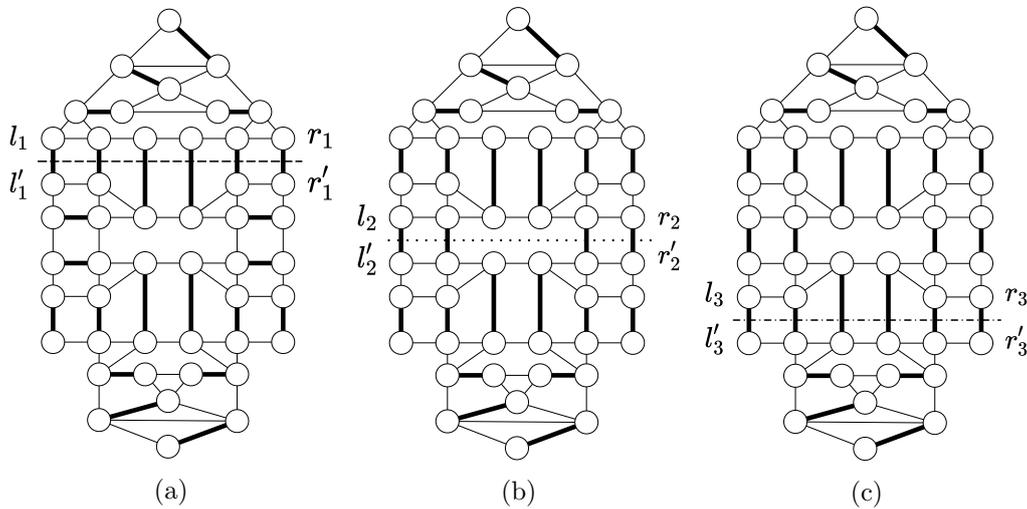


FIGURE 6.10 – Les trois couplages-disconnectants d'une composante a_e représentés par les lignes hachées. Les arêtes épaisses forment un couplage parfait-disconnectant pour chaque cas.

Rappelons que chaque arête e de B est remplacée par une composante b_e comme montré dans la Figure 6.8b. Neuf couplages-disconnectants sont exposés dans la Figure 6.11. Nous montrons que ce sont les seuls couplages-disconnectants de b_e . Pour chacune des trois configurations de la Figure 6.11, nous prenons H le sous-graphe induit par les sommets qui ne sont pas saturés par une arête épaisse. Nous observons que H peut être partitionné en deux sous-graphes induits C et C' qui sont isomorphes deux à deux. Nous nous concentrons sur le sous-graphe C qui est représenté dans la Figure 6.12. Supposons qu'il n'y ait aucun couplage-disconnectant « passant » par les arêtes de la bordure haute ou de la bordure basse de C . Avec des arguments similaires pour montrer les seuls couplages-disconnectants de g_v et a_e , nous obtenons que les trois couplages-disconnectants possibles de C sont ceux des Figures 6.9a, 6.9b et 6.9c (*c.f.* les arêtes coupées par la ligne hachée). De plus, comme pour a_e , à cause des triangles, il n'y a pas de couplage-disconnectant contenant $l'_i l_{i+1}$ ou $r'_i r_{i+1}$, où $i = 1, 2$. Revenons maintenant à la composante b_e . À cause des triangles il n'y a pas de couplage-disconnectant passant par le haut ou par le bas de b_e . Donc, aucun couplage-disconnectant de b_e ne passe par le haut ou le bas de C et C' . Nous en déduisons que b_e possède neuf couplages-disconnectants qui sont ceux exposés dans la Figure 6.11. De plus, si une arête $l_i l'_i$, où $i = 1, 2, 3$ est dans un couplage-disconnectant de b_e , alors $r_j r'_j$, où $j = 1, 2, 3$ y est aussi. Nous obtenons donc la propriété suivante :

Propriété 6.20 *Si deux sommets g_u et g_v sont reliés par une composante b_e , alors pour tout couplage-disconnectant M , g_u est coupé par M si et seulement si g_v est coupé par M . Toutes les combinaisons de couplages-disconnectants entre g_u et g_v sont possibles.*

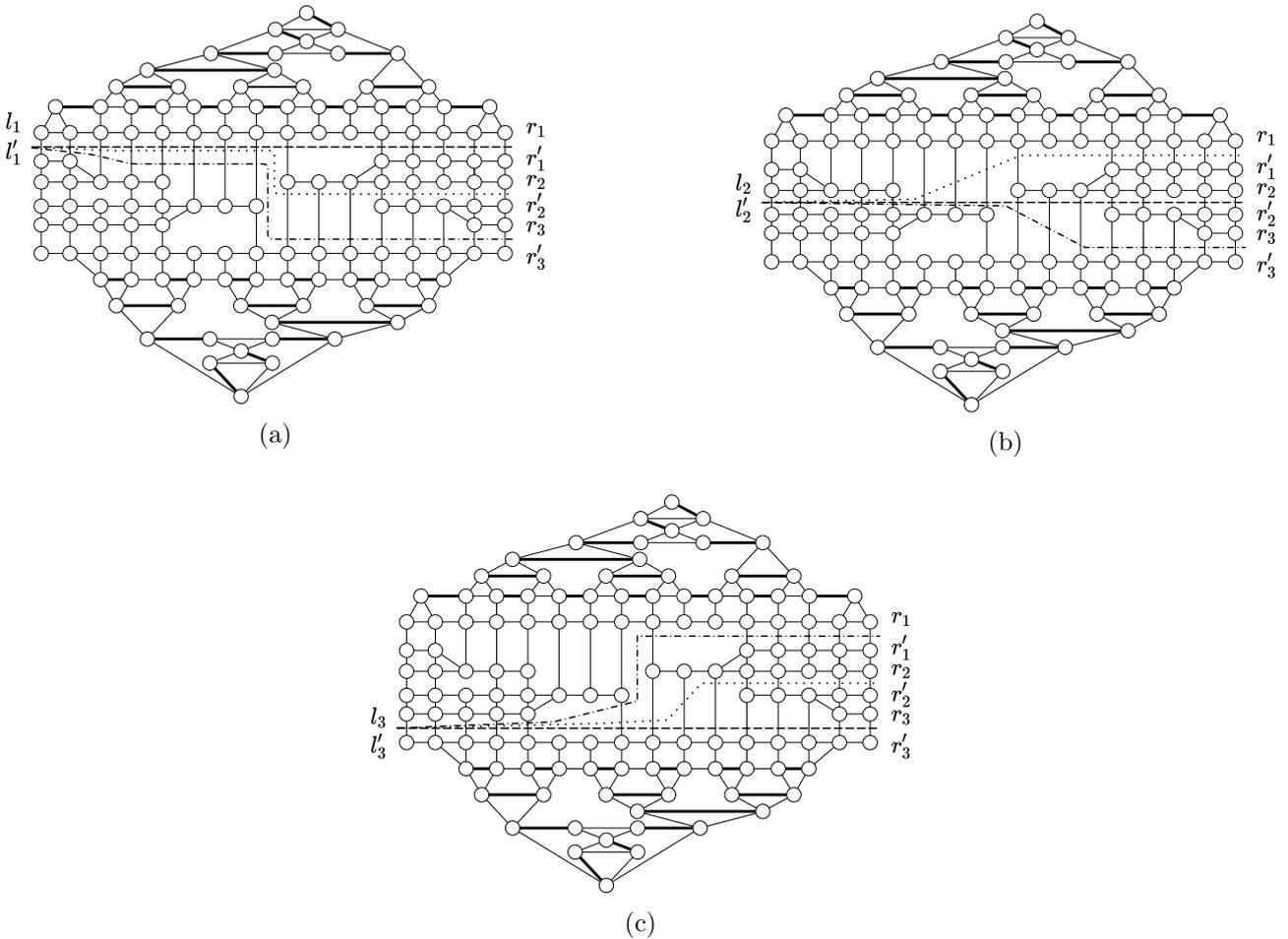


FIGURE 6.11 – Les neuf couplages-disconnectants d’une composante b_e représentés par les lignes hachées. Les arêtes épaisses forment un couplage parfait-disconnectant pour chaque cas.

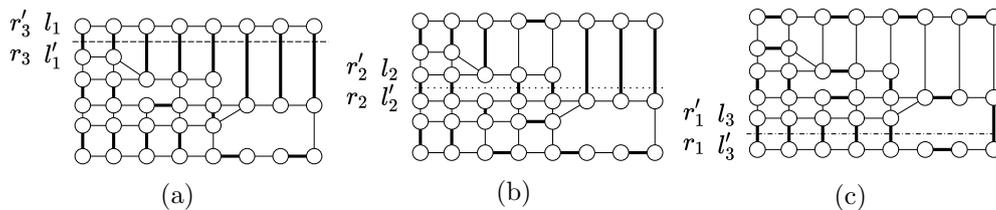


FIGURE 6.12 – Les trois couplages-disconnectants de gauche à droite de C , un sous-graphe induit de b_e , représentés par les lignes hachées. Les arêtes épaisses forment un couplage parfait-disconnectant pour chaque cas.

Il reste à construire un couplage parfait-disconnectant d'une composante b_e . Pour tous les graphes de la Figure 6.11, nous prenons les arêtes épaisses. Puis nous identifions un couplage-disconnectant issu d'une ligne hachée. Nous prenons ensuite les arêtes des sous-graphes C et C' qui sont coupées par ce couplage-disconnectant dans la Figure 6.12. Enfin, nous prenons le reste des arêtes épaisses de C et C' qui ne sont pas traversées par le couplage-disconnectant. Ainsi nous avons un couplage parfait-disconnectant de b_e .

Nous montrons le résultat suivant :

Propriété 6.21 *Soit g_u et g_v reliés par des C -chemins. Pour tout couplage parfait-disconnectant de G' , si g_u est coupé par i , alors g_v est coupé par j , où $i \neq j$.*

Preuve: Soit M un couplage parfait-disconnectant de G . Si une composante g_u est coupée par i , alors $c_{u,i} \in V(g_u)$ est saturé par M . Supposons, par contradiction, que g_v soit coupé par i . Pour les mêmes raisons $c_{v,i} \in V(g_v)$ est saturé par M . Rappelons que $c_{u,i}$ est relié à $c_{v,i}$ par un sommet d_i tel que $N_{G'}(d_i) = \{c_{u,i}, c_{v,i}\}$. Or d_i n'est pas saturé par M une contradiction. \square

En utilisant les propriétés des composantes connexes de G' , nous montrons la propriété suivante :

Propriété 6.22 *À chaque couplage parfait-disconnectant de G' correspond une 3-coloration de G et réciproquement.*

Preuve: Puisque $A \cup B$ est un cycle hamiltonien dans G , et que les composantes de G' n'ont d'autres couplages-disconnectants que ceux indiqués ci-dessus, d'après les Propriétés 6.19 et 6.20, nous en déduisons que si G' possède un couplage-disconnectant, ce couplage-disconnectant déconnecte chaque composante correspondant à un sommet de G , ainsi que chaque composante associée à une arête de $A \cup B$. Notons que les arêtes des C -chemins ne peuvent disconnectées le graphe G' , et que donc pour tous les C -chemins reliant deux sommets g_u et g_v , un couplage-disconnectant minimal ne peut contenir les arêtes $c_{u,i} - d_i - c_{v,i}$, $c'_{u,i} - d'_i - c'_{v,i}$, où $i = 1, 2, 3$. \square

Nous montrons la propriété suivante :

Propriété 6.23 *Étant donné un couplage-disconnectant de G' , nous pouvons construire un couplage parfait-disconnectant de G' .*

Preuve: Soit M un couplage-disconnectant de G' . Nous montrons comment construire un couplage parfait-disconnectant M' tel que $M \subset M'$.

Soit g_u un sommet relié à deux arêtes a_e ou b_e . Comme g_u est coupé par i , nous prenons les arêtes issues de ce couplage-disconnectant. Puis, pour les sommets $l_{u,j}$, $l'_{u,j}$ et $r_{u,j}$, $r'_{u,j}$, où $i \neq j$, qui sont fusionnés avec les sommets de a_e ou b_e , nous prenons un des couplages parfaits-disconnectants de a_e ou b_e des Figures 6.10, 6.11 et 6.12 (cela dépend comment est coupé a_e ou b_e par M). Soit g_v le sommet relié à g_u par des C -chemins. Nous pouvons supposer que u précède v . Puisque g_v est coupé par j (rappelons que $i \neq j$), alors nous prenons $c_{u,j}d_j$, $c'_{u,j}d'_j$, $c_{v,i}d_i$, $c'_{v,i}d'_i$, $c_{u,k}d_k$, $c'_{u,k}d'_k$, où $i \neq j \neq k$, dans M' . Il reste des sommets non-saturés par M' dans g_u qui ne sont pas l , r , c , et qui n'ont pas une extrémité dans M . Il suffit donc de prendre le reste des arêtes épaisses associées à une coupe i , *i.e.* (a), (b) ou (c) dans la Figure 6.9. En appliquant cette opération pour chaque composante g_u , nous obtenons M' un couplage parfait-disconnectant de G' . \square

Pour finir nous montrons la propriété suivante :

Propriété 6.24 G' est planaire et $\Delta(G') = 4$.

Preuve: Toutes les composantes associées aux sommets et aux arêtes de G sont planaires et sont de degré maximum quatre, *c.f.* Figure 6.7 et 6.8. De plus, nous avons montré précédemment qu'en reliant nos composantes, nous n'avons pas créé de sommet de degré cinq ou plus. Donc $\Delta(G') = 4$. Parce que $A \cup B$ est un cycle hamiltonien de G , nous pouvons relier les g_u un par un sans détruire la planarité. Il reste donc les C -chemins. Étant donné un sens antihoraire du cycle hamiltonien $A \cup B$, il est clair qu'aucun des C -chemins ne se croisent dans G . Rappelons que ces arêtes sont dans le cycle (interne) ou en dehors du cycle (externe). Soit g_u et g_v deux sommets reliés par des C -chemins. Si ils sont connectés par une arête interne, nous pouvons voir grâce aux Figures 6.7a et 6.7b que les trois chemins ne se croisent pas. Si g_u et g_v sont reliés par une arête externe, la même propriété peut être observée grâce aux Figures 6.7c et 6.7d. Donc le graphe G' est planaire et de degré maximum quatre. \square

La dernière propriété complète la première partie de la preuve. Pour finir, nous montrons que nous pouvons facilement transformer G' en un graphe planaire G'' tel tous les sommets sont de degré trois ou quatre.

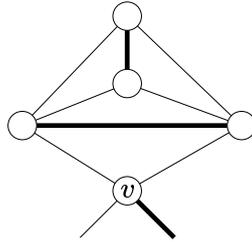


FIGURE 6.13 – Composante à quatre sommets pour supprimer un sommet de degré deux.

Nous remarquons que dans G' , pour tout sommet v , nous avons $d(v) \in \{2, 3, 4\}$. Pour chaque sommet v de degré deux, nous relierions v à quatre nouveaux sommets comme illustré dans la Figure 6.13. Notons que le graphe induit par les quatre sommets possède un couplage parfait. Aussi G'' est planaire tel que $\delta(G'') = 3$ et $\Delta(G'') = 4$. Puisque le sous-graphe induit par v et les quatre sommets est immunisé, nous en déduisons que G'' a un couplage parfait-disconnectant si et seulement si G' a un couplage parfait-disconnectant. Cela complète la preuve. \square

Nous observons dans la preuve du Théorème 6.18, que les triangles sont d'une grande importance puisqu'ils sont immunisés. Nous pouvons donc nous poser la question suivante : est-ce que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT reste NP-complet dans des graphes planaires de maille cinq ou plus ?

Pour COUPLAGE-DISCONNECTANT, A. Moshi dans [64] a montré que toutes les arêtes uv pouvaient être remplacées par un cycle de longueur quatre ($C_4 = u - u_1 - v - v_1 - u$) afin d'obtenir une instance équivalente où le graphe est planaire et biparti. Donc COUPLAGE-DISCONNECTANT reste NP-complet dans les graphes planaires bipartis de degré maximum huit. Malheureusement, cette construction ne fonctionne pas pour COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT et il semble impossible d'obtenir

un résultat similaire avec une construction proche. P. Bonsma dans [10], a montré que COUPLAGE-DISCONNECTANT est NP-complet pour les graphes planaires de maille cinq. Pour les graphes planaires de maille au moins six, P. Bonsma et al. dans [11] ont montré que tous ces graphes avaient un couplage-disconnectant. Mis à part le cas du biparti planaire, nous avons réussi à obtenir des résultats similaires en remplaçant chaque arête du graphe par le graphe de la Figure 6.14.

Théorème 6.25 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes planaires de maille cinq.

Preuve: Depuis $G = (V, E)$ une instance de COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT où G est un graphe planaire, nous construisons un graphe planaire $G' = (V', E')$ de maille cinq. Nous remplaçons chaque arête uv de G par la composante H comme sur la Figure 6.14a. Notons que puisque la distance dans H entre u et v est trois, alors $g(G') = 5$. Depuis $M \subseteq E$ un couplage parfait-disconnectant de G nous construisons $M' \subseteq E'$ comme suit. Si $uv \in M$, alors nous prenons les arêtes épaisses de la Figure 6.14b dans M' . C'est l'unique couplage maximal dans H quand u et v sont saturés par des arêtes extérieures à H . De plus, ce couplage ne disconnecte pas H . Sinon, quand $uv \notin M$, à la symétrie près, nous prenons un des deux couplages représentés par les arêtes épaisses dans les Figures 6.14c et 6.14d qui forment tous les deux un couplage parfait de H disconnectant u de v . Nous laissons le lecteur vérifier qu'il n'existe pas d'autres couplages parfaits de H saturant u et v par l'intérieur. Aussi, puisque H a un nombre pair de sommets, il n'existe pas de couplage parfait-disconnectant où u est saturé à l'intérieur de H et v est saturé à l'extérieur de H . Donc M' est un couplage parfait-disconnectant de G' . Réciproquement, en utilisant les propriétés de H décrites précédemment, nous en déduisons que si G' possède un couplage parfait-disconnectant, alors G possède aussi un couplage parfait-disconnectant. \square

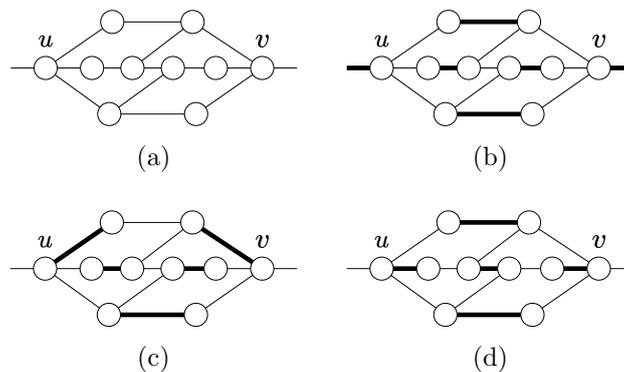


FIGURE 6.14 – (a) la composante planaire H de maille cinq ; (b) l'unique couplage parfait de $H \setminus \{u, v\}$; et (c) les deux couplages parfaits-disconnectants de H .

Nous utilisons le Théorème 6.18 pour montrer le résultat suivant.

Théorème 6.26 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes sans $K_{1,4}$ où pour tout sommet v , $\delta(v) \in \{3, 4\}$.

Preuve: D'après le Théorème 6.18, COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes planaires où pour tout sommet v , $\delta(v) \in \{3, 4\}$. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire, où

pour tout $v \in V$, $\delta(v) \in \{3, 4\}$. Soit $u \in V$ un sommet au centre d'une étoile $K_{1,4}$ dans G , i.e. $G[\{u, w, x, y, z\}] = K_{1,4}$. Soit H le graphe où u est remplacé par le graphe à cinq sommets G_u tel que décrit dans la Figure 6.15. Remarquons que H est planaire et pour tout sommet v de H , $\delta(v) \in \{3, 4\}$. Aussi H possède un $K_{1,4}$ induit de moins que G . De plus, on peut voir que G_u est immunisé (car tous les sommets sont dans un triangle) et que $G_u - \{u_1, u_2\}$ a un nombre de sommets impair. Donc tous les couplages parfaits-disconnectants de H contiennent exactement une arête de $\{au_1, cu_1, bu_2, cu_2\}$ et exactement une arête de $\{u_1w, u_1z, u_2x, u_2y\}$.

Soit M un couplage parfait-disconnectant de G . Sans perte de généralité $uw \in M$. Alors $M \cup \{u_1w, ac, bu_2\} \setminus \{uw\}$ est un couplage parfait-disconnectant de H . Réciproquement, soit M' un couplage parfait-disconnectant de H . Sans perte de généralité $bc, u_1a, u_2x \in M'$. Puisque G_u est immunisé, alors $M' \setminus \{bc, u_1a\}$ est un couplage-disconnectant de H . Donc $M' \cup \{ux\} \setminus \{bc, u_1a, u_2x\}$ est un couplage parfait-disconnectant de G .

Donc nous pouvons remplacer chaque $K_{1,4}$ de G comme décrit précédemment, et le graphe résultant possède un couplage parfait-disconnectant si et seulement si G en a aussi un. \square

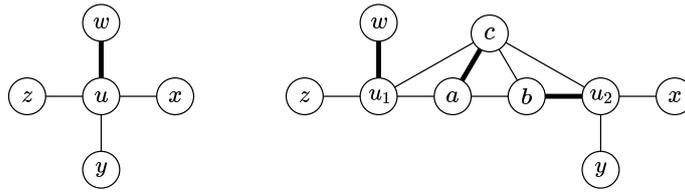


FIGURE 6.15 – Comment remplacer un sommet u au centre d'une étoile $K_{1,4}$ par G_u .

Le reste de la section traite des graphes cubiques. Pour les graphes cubiques planaires, nous connaissons le résultat suivant :

Théorème 6.27 (A. Diwan [30]) *Tous les graphes cubiques planaires sans pont, sauf K_4 , ont un couplage parfait-disconnectant.*

Nous nous intéressons maintenant aux graphes cubiques qui possèdent un pont.

Propriété 6.28 *Soit $G = (V, E)$ un graphe cubique et $W \subseteq E$ l'ensemble des ponts de G . Alors pour tout couplage parfait M de G , nous avons $W \subseteq M$.*

Preuve: Supposons, par contradiction, qu'il existe un pont uv tel que $uv \notin M$. Soit C une des deux composantes connexes de $G - uv$. Les arêtes de M dans C forment un couplage parfait de C . Mais C a un nombre de sommets impair puisque qu'il a un nombre pair de sommets de degré 3 et exactement un sommet de degré 2, une contradiction. \square

Donc tous les graphes cubiques qui ont un pont et un couplage parfait, ont aussi un couplage parfait-disconnectant. Nous avons donc une vue complète des graphes cubiques, qui est :

Corollaire 6.29 *Tous les graphes cubiques planaires, sauf K_4 , qui ont un couplage parfait ont un couplage parfait-disconnectant.*

Malheureusement ce résultat ne tient pas pour les graphes cubiques (non-planaire) sans pont, puisque A. Diwan a montré dans [29] qu'il existe une classe de graphes arbitrairement large qui contient des graphes cubiques sans pont ayant un couplage parfait, mais ne possédant pas de couplage parfait-disconnectant.

6.4 Graphes sans chemin de longueur cinq

Dans cette section, nous montrons que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans la classe des graphes sans P_5 . Nous utilisons les deux théorèmes ci-dessous.

Théorème 6.30 (G. Bacsó et Z. Tuza [4]) *Soit G un graphe connexe sans P_5 . Alors G a une clique dominante ou un P_3 induit dominant.*

Théorème 6.31 (E. Camby et O. Schaudt [23]) *Étant donné un graphe connexe G à n sommets et m arêtes, il est possible de calculer en temps $O(n^5(n+m))$ un dominant connexe X ayant les propriétés suivantes : pour k minimum, où $k \geq 4$, tel que G est sans P_k , alors $G[X]$ est sans P_{k-2} ou $G[X]$ est isomorphe à P_{k-2} .*

Cela implique que pour un graphe connexe sans P_5 , un dominant connexe X est tel que $G[X]$ est sans P_3 ou $G[X] = P_3$, et X peut être calculé en temps polynomial. Notons qu'un graphe sans P_3 -free est une clique. Donc nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 6.32 *Étant donné un graphe G connexe sans P_5 , on peut calculer un ensemble dominant de G qui est soit un P_3 ou une clique en temps polynomial.*

Nous montrons maintenant le résultat suivant :

Théorème 6.33 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans P_5 .*

Preuve: Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe sans P_5 . Si G n'a pas de couplage parfait, alors G n'a pas de couplage parfait-disconnectant. Si G a une feuille, alors tous les couplages parfaits M de G sont aussi des couplages parfaits-disconnectants. Nous pouvons donc supposer que $\delta(G) \geq 2$ et qu'il existe un couplage parfait.

Pour un sous-ensemble $X \subseteq V$, la procédure \mathcal{P} fonctionne comme suit. Aussi longtemps que possible : si $v \in V \setminus X$ a deux voisins dans X , alors $X \leftarrow X \cup \{v\}$; si il y a $x \in X$ tel que x a deux voisins $u, v \in V \setminus X$ avec $uv \in E$, alors $X \leftarrow X \cup \{u, v\}$.

Notre objectif est d'essayer de construire un couplage (parfait)-disconnectant où la coupe est entre un ensemble $Z \subset V$ et $V \setminus Z$ tel que $X \subseteq Z$. Donc d'après la Propriété 6.1, nous appliquons \mathcal{P} sur X .

— Une clique domine G :

Soit $K = \{k_1, \dots, k_p\}$ une clique dominante minimale de G . Par définition, tous les sommets $v \notin K$ ont un voisin $k_i \in K$.

— $p = 1$: tous les sommets appartiennent à un triangle et k_1 est dans tous les triangles. D'après la Propriété 6.1, il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant.

- $p = 2$: soit $V_1 = \{v \in V \setminus K : vk_1 \in E, vk_2 \notin E\}$, $V_2 = \{v \in V \setminus K : vk_1 \notin E, vk_2 \in E\}$.

Premièrement, nous essayons de construire un couplage parfait-disconnectant depuis $X = \{k_1, k_2\}$. Nous exécutons \mathcal{P} sur X . Ensuite, si $V = X$, alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant dans G . Sinon $V \neq X$, et pour tout sommet $v_1 \in V_1 \setminus X$, v_1 a tous ses voisins dans $V_2 \setminus X$, et pour tout sommet $v_2 \in V_2 \setminus X$, v_2 a tous ses voisins dans $V_1 \setminus X$. Puisque G n'a pas de feuille, alors tous les sommets de $(V_1 \cup V_2) \setminus X$ ont au moins un voisin qui n'est pas dans X .

Nous montrons que $G[V \setminus X]$ est connexe. Supposons, par contradiction, qu'il existe u_1u_2 et v_1v_2 deux arêtes de deux composantes distinctes de $G[V \setminus X]$, où $u_1, v_1 \in V_1 \setminus X$, et $u_2, v_2 \in V_2 \setminus X$. Alors $v_2 - v_1 - k_1 - u_1 - u_2 = P_5$, une contradiction. Si il existe un couplage parfait-disconnectant M de G , alors il existe un sommet de $V \setminus X$, disons $v_1 \in V_1 \setminus X$, tel que v_1 est déconnecté des sommets de X dans $G - M$, et donc $v_1k_1 \in M$. Nous montrons que v_1 a exactement un voisin dans $V_2 \setminus X$. Supposons, par contradiction, qu'il existe deux voisins u_2, v_2 de v_1 dans $V_2 \setminus X$. Au moins une arête parmi u_2k_2, v_2k_2 est une arête de $G - M$. Puisque $v_1v_2, v_1u_2 \notin M$, alors v_1 est connecté à X , une contradiction. Nous pouvons donc supposer que v_1 a exactement un voisin $v_2 \in V_2 \setminus X$ et que $v_2k_2 \in M$. Par symétrie, et puisque $G[V \setminus X]$ est connexe, $V \setminus X = \{v_1, v_2\}$ où $v_1v_2 \in E$. Maintenant soit M' un couplage maximum de $G[V \setminus \{k_1, k_2, v_1, v_2\}]$. Si M' est un couplage parfait, alors $M = M' \cup \{k_1v_1, k_2v_2\}$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'existe pas de couplage parfait-disconnectant.

Deuxièmement, nous essayons de construire un couplage parfait-disconnectant M tel que k_1 soit déconnecté de k_2 dans $G - M$. Cela signifie que nous devons couper toutes les arêtes entre $X_1 = N[k_1] \setminus \{k_2\}$ et $X_2 = N[k_2] \setminus \{k_1\}$. Donc si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ou $E(X_1, X_2)$ n'est pas un couplage-disconnectant de G , alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant. Sinon, soit W l'ensemble des sommets avec une extrémité dans $E(X_1, X_2)$. Soit M' un couplage maximum de $G - W$. Si M' est un couplage parfait, alors $M = E(X_1, X_2) \cup M'$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant.

- $p \geq 3$: D'après la Propriété 6.1, si un couplage parfait-disconnectant M existe, alors tous les sommets k_1, \dots, k_p sont dans la même composante $G - M$. Nous exécutons \mathcal{P} sur $X = K$. Si $V = X$, alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant. Maintenant $V \neq X$. En utilisant les mêmes arguments que précédemment, nous en déduisons que $G[V \setminus X]$ est connexe. Si il existe M un couplage parfait-disconnectant, alors il doit exister un sommet v de $V \setminus X$ tel que v est déconnecté de X dans $G - M$. Soit $vk_1 \in M$. Soit u un voisin de v dans $V \setminus X$. Nous avons $uk_i \in M, i \neq 1$. Nous en déduisons que si il existe deux sommets de $V \setminus X$ avec un voisin commun dans K , alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant. Sinon il existe M' un couplage (parfait) entre les sommets de $V \setminus X$ et $K' \subset K$. Soit M'' un couplage maximum de $G[X \setminus K']$. Si M'' est un couplage parfait, alors $M = M' \cup M''$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant.

- Un P_3 induit domine G :

Soit $P_3 = a - b - c$ un chemin induit dominant G . Par définition, tous les sommets $v \notin \{a, b, c\}$ ont un voisin dans $\{a, b, c\}$. Si M est un couplage parfait-disconnectant, alors il y a une coupe $E(X, V \setminus X) \subseteq M$ avec deux sommets consécutifs dans P_3 qui sont dans X . Par symétrie, nous avons les cas suivants à considérer : $\{a, b, c\} \subseteq X$; ou $\{a, b\} \subseteq X$ et $c \in V \setminus X$.

- $\{a, b, c\} \subseteq X$: nous exécutons \mathcal{P} sur $X = \{a, b, c\}$. Si $V = X$, alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant. Maintenant $V \setminus X \neq \emptyset$, et tous les sommets $v \in V \setminus X$ ont exactement un voisin dans P_3 , et un voisin $u \in V \setminus X$. Nous montrons que $G[V \setminus X]$ est connexe. Supposons, par contradiction, qu'il y ait deux arêtes v_1v_2 et u_1u_2 appartenant à deux composantes distinctes de $G[V \setminus X]$. Puisque les voisins de v_1, v_2 , respectivement u_1, u_2 , dans P_3 sont distincts, nous pouvons supposer que v_1, u_1 ont un voisin commun $w \in \{a, b, c\}$. Donc $v_2 - v_1 - w - u_1 - u_2 = P_5$, une contradiction. Nous en déduisons que $G[V \setminus X]$ est connexe.

Si il existe M un couplage parfait-disconnectant de G , alors il y a $v \in V \setminus X$ tel que v est déconnecté de X dans $G - M$. Soit $w_v \in \{a, b, c\}$ le voisin de v dans P_3 . Nous avons $vw_v \in M$. Maintenant pour chaque voisin u de v où $u \in V \setminus X$, nous notons $w_u, w_u \neq w_v$, son voisin dans P_3 . Alors $uw_u \in M$. Nous en déduisons que $2 \leq |V \setminus X| \leq 3$ et $E(X, V \setminus X) \subseteq M$ est un couplage-disconnectant. Soit M' un couplage maximum de $G[X \setminus N(V \setminus X)]$. Si M' est un couplage parfait, alors $M = M' \cup E(X, V \setminus X)$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant.

- $\{a, b\} \subseteq X$ et $c \in V \setminus X$: nous devons chercher une coupe M' telle qu'il n'y a pas de chemin entre c et a, b dans $G - M'$. Donc il n'y a pas de chemin entre $X_1 = N[c] \setminus \{b\}$ et $X_2 = N[a] \cup N[b] \setminus \{c\}$. Si $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ ou $E(X_1, X_2)$ n'est pas un couplage-disconnectant, alors il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant. Sinon, soit W l'ensemble des sommets avec une extrémité dans le couplage-disconnectant $E(X_1, X_2)$. Maintenant soit M'' un couplage maximum de $G - W$. Si M'' est un couplage parfait, alors $M = E(X_1, X_2) \cup M''$ est un couplage parfait-disconnectant de G . Sinon il n'y a pas de couplage parfait-disconnectant.

D'après le Corollaire 6.32, calculer un P_3 dominant ou une clique dominante peut se faire en temps polynomial. Calculer un couplage maximum peut se faire en temps polynomial. Donc notre algorithme peut être exécuté en temps polynomial. \square

Corollaire 6.34 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les cographes, les split graphes, et les graphes co-bipartis.*

Preuve: Ces graphes appartiennent à la classe des graphes sans P_5 . \square

6.5 Graphes sans griffe

Nous montrons dans cette section que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe. Nous aurons besoin du Théorème suivant de D. Sumner [72].

Théorème 6.35 (D. Sumner [72]) *Tous les graphes connexes sans griffe avec un nombre pair de sommets ont un couplage parfait.*

Nous pouvons maintenant montrer notre résultat.

Théorème 6.36 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes connexes sans griffe.*

Preuve: D'après la Propriété 6.5, nous pouvons supposer que $\delta(G) \geq 2$. Nous pouvons aussi supposer que G possède un couplage parfait.

Supposons que G possède un sous-graphe induit $P = a - b - c - d$, où $d_G(b) = d_G(c) = 2$. Tous les couplages parfaits M de G sont tels que $M_P = \{ab, cd\} \subset M$ ou $M'_P = \{bc\} \subset M$. Puisque M_P est un couplage-disconnectant, si $M_P \subset M$, alors M est un couplage parfait-disconnectant de G . On peut donc supposer que $M'_P = \{bc\} \subset M$. Si bc est un pont, alors M'_P est un couplage-disconnectant et M est un couplage parfait-disconnectant. Sinon $G' = G - bc$ est connexe et avec un nombre pair de sommets, donc d'après le Théorème [72], G' a un couplage parfait M' . Mais nous avons $M_P = \{ab, cd\} \subset M'$, et donc M' est un couplage parfait-disconnectant de G . À partir de maintenant, on peut donc supposer que les graphes considérés n'ont pas un tel chemin P .

Si G est sans C_3 , alors G est un cycle pair et donc il existe un couplage parfait-disconnectant. On peut donc supposer que G contient un triangle $C_3 = \{a, b, c\}$. Rappelons que le triangle est immunisé. Nous décrivons comment construire un *bouquet* immunisé \mathcal{C} , où $\{a, b, c\} \subseteq \mathcal{C} \subseteq V$. Nous initialisons $\mathcal{C} = \{a, b, c\}$. Nous exécutons les deux règles suivantes, dans l'ordre qui suit, et tant que cela est possible.

Règle 1 : il existe $v \notin \mathcal{C}$ avec deux voisins $s, t \in \mathcal{C}$: alors $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{v\}$. Notons que cela est obligatoire puisque aucun couplage ne peut disconnecter v de s et t .

Règle 2 : il existe $v \in \mathcal{C}$ avec deux voisins $s, t \notin \mathcal{C}$: alors $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{s, t\}$. Notons que cela est obligatoire à cause des éléments suivants : premièrement, v a un voisin $w \in \mathcal{C}$ qui n'est pas un voisin de s, t (d'après la Règle 1) ; deuxièmement, G est sans griffe, donc $\{v, s, t\}$ induit un triangle dans G , et un triangle est immunisé.

Soit $\mathcal{C} = \{C\}$. Nous exécutons les deux règles précédentes sur chaque triangle de G , qui n'est pas encore dans un bouquet de \mathcal{C} , jusqu'à ce que chaque triangle appartienne à un bouquet de \mathcal{C} . Puisque G est sans griffe et que $\delta(G) \geq 2$, tous les sommets qui ne sont pas dans un bouquet sont de degré deux. Maintenant \mathcal{C} représente l'ensemble des bouquets de G .

Nous disons que deux bouquets C, C' sont *liés* si il existe un chemin $P = u - \dots - v$ où $u \in C, v \in C'$, tel que chaque sommet w de $P, w \neq u, v$, n'appartient pas à un bouquet. Dans ce cas P est un *lien* entre C et C' . Notons qu'il peut exister plusieurs liens entre deux bouquets. Puisque G est sans griffe, deux liens ne peuvent avoir la même extrémité dans un bouquet. Donc, quand il existe une arête entre deux liens, les deux extrémités de cette arête sont dans un même bouquet.

Soit C un bouquet. Le *core* de C est l'ensemble des sommets $K \subseteq C$ qui ne sont pas une extrémité d'un lien, *i.e.* $N[K] \subseteq C$. Notons que K est connexe. Le *corona* de C est $Q = C \setminus K$. Donc tous les sommets $v \in Q$ sont une extrémité d'un lien. Nous disons que C est *pair* lorsque son core K est tel que $|K|$ est pair, et sinon il est *impair*. Soit $H = (\mathcal{C}, \mathcal{E})$ le graphe où \mathcal{C} est l'ensemble des bouquets, et $C_i C_j \in \mathcal{E}$ quand il existe un lien C_i entre C_j .

Notre algorithme vérifie, dans l'ordre donné, les cinq cas suivants.

Cas 1 : il existe un unique bouquet $C \in \mathcal{C}$, i.e. $C = V$.

Puisque C est immunisé, alors G n'a pas de couplage parfait-disconnectant.

Cas 2 : il existe un bouquet pair C tel que $G[V \setminus C]$ est connexe.

D'après le Théorème 6.35, $G[K]$ a un couplage parfait M_K , où K est le core de C . D'après la *Règle 1* et la *Règle 2*, $M_Q = E(Q, N(Q) \setminus C)$ est un couplage parfait entre chaque sommet du corona Q de C et de ses uniques voisins en dehors de C . Notons que M_Q est un couplage-disconnectant qui sépare C du reste du graphe. Nous montrons que $G' = G[V \setminus N[C]]$ est aussi connexe. Supposons, par contradiction, qu'il existe deux sommets $s, t \in V \setminus N[C]$ qui ne sont pas reliés dans G' . Dans $G[V \setminus C]$ il existe un chemin P entre s et t . D'après la *Règle 1*, nous avons $P = s - \dots - u - v - w - \dots - t$, où $v \in N[C] \setminus C$ et $u, w \in V \setminus N[C]$. Mais G étant sans griffe, nous avons $uw \in E$ et donc $P' = s - \dots - u - w - \dots - t$ est un chemin de G' , une contradiction. Donc quand $G[V \setminus C]$ est connexe, $G[V \setminus N[C]]$ est aussi connexe. Soit M_G un couplage parfait de G' . Nous avons donc $M_G \cup M_Q$ un couplage parfait-disconnectant de G .

Cas 3 : il existe un bouquet impair C tel que $G[V \setminus C]$ est connexe, et tel qu'il y a $v \in N(C)$ n'appartenant à aucun bouquet.

D'après la *Règle 1*, v a seulement un voisin $w \in Q$. Rappelons que v est le voisin unique de w en dehors de C et que $d_G(v) = 2$. Nous remplaçons C par $C' = C \cup \{v\}$ dans \mathcal{C} . Donc $K' = K \cup \{w\}$ est le core pair de C' , et ainsi C' est un core pair. Notons que $G[V \setminus C']$ est connexe et non-vide. Dans ce cas, nous sommes au *Cas 2* et G possède un couplage parfait-disconnectant.

Cas 4 : H a une feuille C .

Soit C' le voisin unique de C dans H . Puisque le core K de C est impair, alors $G[K]$ n'a pas de couplage parfait. Il s'ensuit que pour tout couplage parfait M de G , au moins un lien entre C et C' n'est pas dans M . Donc C et C' ne peuvent être déconnectés par un couplage parfait-disconnectant. Donc C et C' sont fusionnés en un nouveau bouquet $\bar{C} = C \cup C'$. Ainsi, le nombre total de bouquets de \mathcal{C} diminue d'une unité, et nous retournons au *Cas 1*.

Cas 5 : il existe une paire de bouquets impairs C, C' telle que $CC' \in \mathcal{E}$ et $G[V \setminus (C \cup C')]$ est connexe.

Soit $\bar{C} = C \cup C'$. Après exécution du *Cas 3*, les liens entre C et C' sont des arêtes. Nous pouvons donc observer que $E(C, C')$ est un couplage. Donc \bar{C} est pair puisque son core est tel que $\bar{K} = K \cup K' \cup W$, où W est l'ensemble des sommets ayant une extrémité dans $E(C, C')$. Après exécution du *Cas 4*, nous avons $N(\bar{C}) \setminus \bar{C} \neq \emptyset$. Nous pouvons donc remplacer C et C' par \bar{C} dans \mathcal{C} . Ainsi nous sommes dans le *Cas 2* et donc G donc a un couplage parfait-disconnectant.

Afin de montrer que toutes les situations sont couvertes par les *Cas 1-5*, nous avons besoin des propriétés suivantes. Premièrement, d'après [9] (c.f. page 211, 9.1.6), nous savons que pour tout graphe 2-connexe $G' = (V', E')$, il existe une arête contractable $e \in E'$ telle que G'/e est aussi un graphe 2-connexe. Deuxièmement, nous montrons que pour tout graphe 1-connexe $G' = (V', E')$ où $\delta(G') \geq 2$, il existe une arête e d'une composante terminale telle que $G'/e - e$ reste un graphe connexe.

Soit T une composante terminale où a est son sommet d'articulation. Puisque G' n'a pas de feuille, alors T a un cycle contenant a . Soit $D = a - \dots - u - v - \dots - a$ un cycle de longueur maximum et soit $e = uv$ une arête de D où $u, v \neq a$. Supposons, par contradiction, que $G'' = G'/e - e$ n'est pas connexe. Alors G'' a une composante connexe T' qui ne contient ni a ni les autres sommets de D . Soit w un sommet de T' . Puisque T est 2-connexe, alors G' a un cycle $D' = a - \dots - u - \dots - w - \dots - v - \dots - a$, contredisant la maximalité de D .

Nous montrons maintenant que l'algorithme termine. Rappelons qu'après le *Cas 4*, le graphe H est connexe et $\delta(H) \geq 2$. Aussi, après le *Cas 5*, tous les bouquets sont impairs. D'après la première propriété précédente, quand H est 2-connexe, nous pouvons toujours appliquer les *Cas 2,3,5*. Sinon H est 1-connexe et d'après la seconde propriété précédente, nous pouvons appliquer les *Cas 2,3,5*.

Quand le *Cas 1* est exécuté, l'algorithme s'arrête et G n'a pas de couplage parfait-disconnectant. Quand le *Cas 2* ou 3 est exécuté, l'algorithme s'arrête et G possède un couplage parfait-disconnectant. Quand le *Cas 4* ou 5 est exécuté, le nombre de bouquets dans \mathcal{C} décroît d'une unité et nous revenons au *Cas 1*.

Il reste donc à montrer que notre algorithme s'exécute en temps polynomial. Rappelons que l'algorithme d'Edmonds permet de calculer un couplage parfait en temps $O(|E| \cdot |V|^2)$ (notons qu'il existe des algorithmes plus rapides). Vérifier si il existe un chemin induit $P = a - b - c - d$, où $d_G(b) = d_G(c) = 2$, peut être fait en temps $O(|V|^2)$.

À chaque étape, tous les bouquets sont sommets disjoints, et donc il y a au plus $O(|V|)$ bouquets. Chaque bouquet contient au moins un triangle, donc initialiser les bouquets peut être fait en temps $O(|V|^3)$. Exécuter la *Règle 1* et la *Règle 2* peut être fait en temps $O(|V|^3)$. Donc l'initialisation globale est faite en $O(|V|^3)$.

Chercher deux bouquets impairs adjacents dans une composante 2-connexe terminale peut être fait en temps $O(|E|)$. Le *Cas 5* s'exécute au plus $|V|$ fois. Donc toutes les exécutions du *Cas 1* et du *Cas 5* peuvent être fait en temps $O(|V|^3)$. Le *Cas 2* ou le *Cas 3* s'exécute au plus une fois, et ils s'exécutent uniquement si le graphe a un couplage parfait-disconnectant. Donc la complexité globale de notre algorithme est $O(|E| \cdot |V|^2)$. \square

6.6 Graphes de largeur d'arbre bornée

Il est montré dans [10] qu'un graphe ayant un couplage-disconnectant peut être exprimé en MSOL. Décider si un graphe a une propriété exprimable en MSOL peut être fait en temps linéaire pour les classes de largeur d'arbre bornée (si la décomposition est donnée). Donc il existe un algorithme polynomial pour COUPLAGE-DISCONNECTANT dans les classes de largeur d'arbre bornée. Nous renvoyons vers le livre de B. Courcelle [28] pour plus d'informations sur le langage MSOL. Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 6.37 COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT *peut être résolu en temps polynomial dans les graphes de largeur d'arbre bornée.*

Preuve: Nous pouvons exprimer la propriété du couplage parfait-disconnectant s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} \exists V_1 \subseteq V : \exists V_2 \subseteq V : \exists M \subseteq E : (V_1 \cap V_2 = \emptyset) \wedge (V_1 \cup V_2 = V) \wedge \neg(V_1 = \emptyset) \wedge \neg(V_2 = \emptyset) \wedge \\ (\forall u \in V : \exists v \in V : \forall w \in V : \neg(v = w) \wedge (uv \in M) \wedge \neg(uw \in M)) \wedge \\ \neg(\exists u \in V_1 : \exists v \in V_2 : (uv \in E) \wedge \neg(uv \in M)). \end{aligned}$$

La première ligne correspond à l'existence d'une partition non triviale (V_1, V_2) des sommets de V et d'un ensemble ensemble d'arêtes M de E . La deuxième ligne signifie que chaque sommet de V doit avoir exactement une extrémité dans M , donc M est un couplage parfait. La troisième et dernière ligne signifie qu'il ne peut exister deux sommets $u \in V_1, v \in V_2$ tels que uv soit une arête qui n'est pas dans le couplage parfait M . Ainsi M doit être un couplage parfait contenant les arêtes de la coupe (V_1, V_2) , et donc M est un couplage parfait-disconnectant. \square

Il est aussi montré dans [10] que la propriété du couplage-disconnectant peut être exprimé en MSOL sans *quantification sur les ensembles d'arêtes*. Décider si un graphe a une propriété exprimable en MSOL sans quantification sur les ensembles d'arêtes peut être calculé en temps linéaire dans les graphes de largeur de clique bornée (comme les cographes), quand une telle décomposition est donnée. Nous renvoyons vers le livre de B. Courcelle [28] pour plus de précisions à ce sujet. Malheureusement, il a été montré dans [28] (*c.f.* Proposition 5.13 page 338), que la propriété du couplage parfait n'est pas exprimable en MSOL sans quantification sur les ensembles d'arêtes. Donc nous ne pouvons pas conclure que COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes de largeur de clique bornée (étant donné cette décomposition) en utilisant la formulation MSOL.

6.7 Conclusion

Dans la lignée de COUPLAGE-DISCONNECTANT, nous avons montré des résultats de complexité pour COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT en faisant varier différents paramètres de graphe. Voici un résumé :

- Graphes réguliers : COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes bipartis 5-réguliers ;
- Diamètre : pour un entier d fixé et G de diamètre d , alors COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial quand $d \leq 2$, mais est NP-complet quand $d \geq 3$; COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial quand G est biparti et que $d \leq 3$, mais est NP-complet quand $d \geq 4$;
- Graphes planaires : COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT est NP-complet dans les graphes où $\delta(G) = 3, \Delta(G) = 4$, et pour les graphes de maille cinq, mais admet une résolution en temps polynomial pour les graphes cubiques ;
- COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans griffe, mais est NP-complet dans les graphes planaires sans $K_{1,4}$;
- COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes sans P_5 ;
- Largeur d'arbre borné : COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT peut être résolu en temps polynomial dans les graphes de largeur d'arbre borné.

Nous donnons une liste de classes de graphes pour lesquelles il serait intéressant de déterminer la complexité de COUPLAGE PARFAIT-DISCONNECTANT.

- Les graphes cubiques (non-planaires), les graphes sous-cubiques, et les graphes 4-réguliers ;
- Les graphes bipartis planaires ;
- Les graphes planaires de maille d pour un d fixé où $d \geq 6$;
- Les graphes sans P_k , où $k \geq 6$.

Bibliographie

- [1] R. B. Allan and R. Laskar, *On domination and independent domination numbers of a graph*, Discrete Mathematics 23 (2) (1978), 73–76.
- [2] S. Arnborg and A. Proskurowski, *Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k -trees*, Discrete Applied Mathematics 23 (1) (1989), 11–24.
- [3] S. Arora and B. Barak, *Computational Complexity: A Modern Approach*, Cambridge University Press, 2009.
- [4] G. Bacsó and Z. Tuza, *Dominating cliques in P_5 -free graphs*, Periodica Mathematica Hungarica 21 (4) (1990), 303–308.
- [5] A. Ban and N. Linial, *Internal Partitions of Regular Graphs*, Journal of Graph Theory 83 (1) (2016), 5–18.
- [6] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, and C. L. Suffel, *Domination alteration sets in graphs*, Discrete Mathematics 47 (1983), 153–161.
- [7] C. Bazgan, Z. Tuza, and D. Vanderpooten, *Satisfactory graph partition, variants, and generalizations*, European Journal of Operational Research 206 (2) (2010), 271–280.
- [8] A. A. Bertossi, *Dominating sets for split and bipartite graphs*, Information Processing Letters 19 (1) (1984), 37–40.
- [9] A. Bondy and U. S. R. Murty, *Graph Theory*, 1st ed., Springer, 2010.
- [10] P. Bonsma, *The complexity of the matching-cut problem for planar graphs and other graph classes*, Journal of Graph Theory 62 (2) (2009), 109–126.
- [11] P. Bonsma, A. M. Farley, and A. Proskurowski, *Extremal graphs having no matching cuts*, Journal of Graph Theory 69 (2) (2012), 206–222.
- [12] K. S. Booth and J. H. Johnson, *Dominating Sets in Chordal Graphs*, SIAM Journal on Computing (2006).
- [13] E. Boros, M. C. Golumbic, and V. E. Levit, *On the number of vertices belonging to all maximum stable sets of a graph*, Discrete Applied Mathematics 124 (1-3) (2002), 17–25.
- [14] V. Bouquet, *The complexity of the Bondage problem in planar graphs*, arXiv:2107.11216 (2021).
- [15] V. Bouquet, *The bondage number of chordal graphs*, arXiv:2203.09256 (2022).
- [16] V. Bouquet, F. Delbot, and C. Picouleau, *On the vertices belonging to all, some, none minimum dominating set*, Discrete Applied Mathematics 288 (2021), 9–19.
- [17] V. Bouquet, F. Delbot, and C. Picouleau, *Partition of graphs with maximum degree ratio*, arXiv:2007.12434 (2021).

- [18] V. Bouquet and C. Picouleau, *The complexity of the Perfect Matching-Cut problem*, arXiv:2011.03318 (2021).
- [19] V. Bouquet and C. Picouleau, *The Minimum Dominating Set problem is polynomial for (claw, P_3)-free graphs*, arXiv:2001.07554 (2021).
- [20] A. Brandstädt, V. B. Le, and J. P. Spinrad, *Graph Classes: A Survey*, SIAM, 1999.
- [21] R. C. Brigham, P. Z. Chinn, and R. D. Dutton, *Vertex domination-critical graphs*, Networks 18 (3) (1988), 173–179.
- [22] E. Camby and F. Plein, *A note on an induced subgraph characterization of domination perfect graphs*, Discrete Applied Mathematics 217 (2017), 711–717.
- [23] E. Camby and O. Schaudt, *A New Characterization of P_k -free Graphs*, Algorithmica 75 (1) (2016), 205–217.
- [24] K. Carlson and M. Develin, *On the bondage number of planar and directed graphs*, Discrete Mathematics 306 (8) (2006), 820–826.
- [25] V. Chvátal, *Recognizing decomposable graphs*, Journal of Graph Theory 8 (1) (1984), 51–53.
- [26] E. Cockayne, S. Goodman, and S. Hedetniemi, *A linear algorithm for the domination number of a tree*, Information Processing Letters 4 (2) (1975), 41–44.
- [27] S. A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing (New York, NY, USA), STOC '71, Association for Computing Machinery, 1971, pp. 151–158.
- [28] B. Courcelle and J. Engelfriet, *Graph Structure and Monadic Second-Order Logic: A Language-Theoretic Approach*, Cambridge University Press, 2012.
- [29] A. A. Diwan, *Decomposing graphs with girth at least five under degree constraints*, Journal of Graph Theory 33 (4) (2000), 237–239.
- [30] A. A. Diwan, *Disconnected 2-Factors in Planar Cubic Bridgeless Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 84 (2) (2002), 249–259.
- [31] J. Edmonds, *Paths, Trees, and Flowers*, Canadian Journal of Mathematics 17 (1965), 449–467.
- [32] B. Escoffier, *Approximation polynomiale de problèmes d'optimisation : aspects structurels et opérationnels*, These de doctorat, Paris 9, 2005.
- [33] M. Farber, *Independent domination in chordal graphs*, Operations Research Letters 1 (4) (1982), 134–138.
- [34] M. Farber, *Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs*, Discrete Applied Mathematics 7 (2) (1984), 115–130.
- [35] M. Farber and J. Mark Keil, *Domination in permutation graphs*, Journal of Algorithms 6 (3) (1985), 309–321.
- [36] J. F. Fink, M. S. Jacobson, L. F. Kinch, and J. Roberts, *The bondage number of a graph*, Discrete Mathematics 86 (1) (1990), 47–57.
- [37] M. Fischermann, D. Rautenbach, and L. Volkmann, *Remarks on the bondage number of planar graphs*, Discrete Mathematics 260 (1) (2003), 57–67.
- [38] S. Foldes and P. L. Hammer, *Split graphs*, Congres. Numer 19 (1977), 311–315.
- [39] R. Frucht and F. Harary, *On the corona of two graphs*, aequationes mathematicae 4 (3) (1970), 322–325.

- [40] E. Galby, P. T. Lima, and B. Ries, *Reducing the domination number of graphs via edge contractions and vertex deletions*, *Discrete Mathematics* 344 (1) (2021), 112169.
- [41] M. R. Garey, D. S. Johnson, and L. Stockmeyer, *Some simplified NP-complete graph problems*, *Theoretical Computer Science* 1 (3) (1976), 237–267.
- [42] M. R. Garey and D. S. Johnson, *Computers and Intractability; A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman & Co., 1990.
- [43] G. C. M. Gomes and I. Sau, *Finding Cuts of Bounded Degree: Complexity, FPT and Exact Algorithms, and Kernelization*, *Algorithmica* 83 (6) (2021), 1677–1706.
- [44] B. L. Hartnell and D. F. Rall, *Bounds on the bondage number of a graph*, *Discrete Mathematics* 128 (1) (1994), 173–177.
- [45] T. W. Haynes, S. Hedetniemi, and P. Slater, *Fundamentals of Domination in Graphs*, CRC Press, 1998.
- [46] T. W. Haynes, S. T. Hedetniemi, and P. J. Slater, *Domination in Graphs Advanced Topics: Volume 2: Advanced Topics*, Routledge, 2017.
- [47] P. Heggenes and J. A. Telle, *Partitioning graphs into generalized dominating sets*, *Nordic Journal of Computing* 5 (2) (1998), 128–142.
- [48] J. E. Hopcroft and R. M. Karp, *An $n^{5/2}$ Algorithm for Maximum Matchings in Bipartite Graphs*, *SIAM Journal on Computing* 2 (4) (1973), 225–231.
- [49] J. Hou, H. Ma, J. Yu, and X. Zhang, *On partitions of $K_{2,3}$ -free graphs under degree constraints*, *Discrete Mathematics* 341 (12) (2018), 3288–3295.
- [50] F.-T. Hu and M. Y. Sohn, *The algorithmic complexity of bondage and reinforcement problems in bipartite graphs*, *Theoretical Computer Science* 535 (2014), 46–53.
- [51] F.-T. Hu and J.-M. Xu, *On the complexity of the bondage and reinforcement problems*, *Journal of Complexity* 28 (2) (2012), 192–201.
- [52] A. Kaneko, *On decomposition of triangle-free graphs under degree constraints*, *Journal of Graph Theory* 27 (1) (1998), 7–9.
- [53] L. Kang and J. Yuan, *Bondage number of planar graphs*, *Discrete Mathematics* 222 (1) (2000), 191–198.
- [54] C. Kuratowski, *Sur le problème des courbes gauches en Topologie*, *Fundamenta Mathematicae* 15 (1) (1930), 271–283.
- [55] D. König, *Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre*, *Mathematische Annalen* 77 (4) (1916), 453–465.
- [56] H.-O. Le and V. B. Le, *A complexity dichotomy for matching cut in (bipartite) graphs of fixed diameter*, *Theoretical Computer Science* 770 (2019), 69–78.
- [57] V. B. Le and B. Randerath, *On stable cutsets in line graphs*, *Theoretical Computer Science* 301 (1) (2003), 463–475.
- [58] V. B. Le and J. A. Telle, *The Perfect Matching Cut Problem Revisited*, Tech. Report arXiv:2107.06399, arXiv, 2021.
- [59] L. A. Levin, *Universal sequential search problems*, *Problemy peredachi informatsii* 9 (3) (1973), 115–116.

- [60] D. Lokshтанov, N. Misra, G. Philip, M. S. Ramanujan, and S. Saurabh, *Hardness of r -dominating set on Graphs of Diameter $(r+1)$* , Parameterized and Exact Computation (Cham) (G. Gutin and S. Szeider, eds.), Lecture Notes in Computer Science, Springer International Publishing, 2013, pp. 255–267 (en).
- [61] J. Ma and T. Yang, *Decomposing C_4 -free graphs under degree constraints*, Journal of Graph Theory 90 (1) (2019), 13–23.
- [62] D. S. Malyshev, *A complexity dichotomy and a new boundary class for the dominating set problem*, Journal of Combinatorial Optimization 32 (1) (2016), 226–243.
- [63] S. Morris, *Contagion*, The Review of Economic Studies 67 (1) (2000), 57–78.
- [64] A. M. Moshi, *Matching cutsets in graphs*, Journal of Graph Theory 13 (5) (1989), 527–536.
- [65] C. M. Mynhardt, *Vertices contained in every minimum dominating set of a tree*, Journal of Graph Theory 31 (3) (1999), 163–177.
- [66] O. Ore, *Theory of Graphs*, Colloquium Publications, vol. 38, American Mathematical Society, 1962.
- [67] T. Pontoizeau, *Community detection : computational complexity and approximation*, Theses, Université Paris sciences et lettres, 2018.
- [68] R. Sahbi and M. Chellali, *On some open problems concerning quorum colorings of graphs*, Discrete Applied Mathematics 247 (2018), 294–299.
- [69] V. Samodivkin, *Changing and unchanging of the domination number of a graph*, Discrete Mathematics 308 (22) (2008), 5015–5025.
- [70] K. Shafique and R. D. Dutton, *On satisfactory partitioning of graphs*, Congressus Numerantium 154 (2002), 183–194.
- [71] M. Stiebitz, *Decomposing graphs under degree constraints*, Journal of Graph Theory 23 (3) (1996), 321–324.
- [72] D. Sumner, *Graphs with 1-Factors*, Proceedings of the American Mathematical Society 42 (1) (1974), 8–12.
- [73] D. Sumner and J. Moore, *Domination perfect graphs*, Notices Amer. Math. Soc 26 (1979).
- [74] U. Teschner, *A new upper bound for the bondage number of graphs with small domination number*, Australas. J Comb. 12 (1995), 27–36.
- [75] U. Teschner, *The bondage number of a graph G can be much greater than $\Delta(G)$* | Semantic Scholar, Australas. J Comb. 43 (1996).
- [76] T. Ulrich, *On the bondage number of block graphs*, Ars. Comb. 46 (1997), 25–32.
- [77] J.-M. Xu, *On Bondage Numbers of Graphs: A Survey with Some Comments*, International Journal of Combinatorics 2013 (2013).
- [78] M. Yannakakis and F. Gavril, *Edge Dominating Sets in Graphs*, SIAM Journal on Applied Mathematics 38 (3) (1980), 364–372.
- [79] I. E. Zverovich and V. E. Zverovich, *An induced subgraph characterization of domination perfect graphs*, Journal of Graph Theory 20 (3) (1995), 375–395.

Résumé : Cette thèse porte sur des problèmes et des questions de la théorie et de l'algorithmique de graphes. La première partie concerne l'étude de l'ensemble dominant minimum. Nous considérons son problème de décision et montrons que le nombre de domination peut être déterminé en temps polynomial dans la classe des graphes sans griffe et sans chemin induit de taille au plus huit. Ensuite, nous étudions les sommets à l'intersection de tous les ensembles dominants minimums d'un graphe. Nous finissons cette partie sur l'étude des arêtes critiques, *i.e.* les arêtes dont la suppression fait varier le nombre de domination. La seconde partie porte sur des problèmes de partitionnement des sommets du graphe. Étant donné une partition des sommets, nous introduisons une mesure de satisfaction pour chaque sommet, qui est le rapport entre son nombre de voisins dans sa communauté et le nombre total de ses voisins. Nous posons ensuite le problème suivant: quel est le ratio maximum $\frac{a}{b}$ tel qu'un graphe possède une partition où chaque sommet a une satisfaction d'au moins $\frac{a}{b}$? Nous poursuivons cette thèse sur l'étude du problème du couplage parfait-disconnectant. Celui-ci consiste à décider si un graphe possède un couplage parfait qui contient une coupe.

Mots clés : graphes, domination, persistance, bondage, partitionnement, couplage-disconnectant, NP-complétude, algorithmes polynomiaux

Abstract : This thesis relates to the study of some problems and questions arising from graph theory and algorithmic theory. The first part is devoted to the study of the minimum dominating set. We consider its decision problem and show that the domination number is computable in polynomial time for graphs with no induced claw and no induced path of length at most height. Then, we focus on vertices at the intersection of every minimum dominating sets of a graph. The first part ends with the study of critical edges, that is, edges which removal increase the domination number. The second part deals with partitions of the vertices of the graph. Given a graph and a partition of its vertices, we introduce a satisfaction criteria for each vertex, which is the ratio between the number of its neighbors in its community and the total number of its neighbors. We give the following problem: what is the maximum ratio $\frac{a}{b}$ such that a graph has a partition where each vertex has a satisfaction of at least $\frac{a}{b}$? We pursue this thesis with the study of the perfect matching-cut problem. It consists in deciding if a graph has a perfect matching that contains a cut.

Keywords : graphs, domination, persistency, bondage, partitions, matching-cut, NP-completeness, polynomial algorithms