



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques d'inspiration géométrique pour la synthèse sonore par modèle physique : application à un modèle de corde géométriquement exact

Pierre Carré

## ► To cite this version:

Pierre Carré. Méthodes numériques d'inspiration géométrique pour la synthèse sonore par modèle physique : application à un modèle de corde géométriquement exact. Mécanique [physics]. Sorbonne Université, 2021. Français. NNT : 2021SORUS353 . tel-03910301

**HAL Id: tel-03910301**

**<https://theses.hal.science/tel-03910301>**

Submitted on 22 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT DE  
SORBONNE-UNIVERSITÉ

Spécialité

Mécanique et acoustique

École Doctorale SMAER 391 : Sciences Mécanique Acoustique Électronique et  
Robotique (Paris)

présentée par

Pierre CARRÉ

pour obtenir le grade de  
DOCTEUR de SORBONNE-UNIVERSITÉ

Sujet de la thèse :

Méthodes numériques d'inspiration géométrique pour la synthèse  
sonore par modèle physique  
Application à un modèle de corde géométriquement exact

soutenue le 20 décembre 2021

devant le jury composé de :

M. Jacky CRESSON	Rapporteur
M. Aziz HAMDOUNI	Rapporteur
Mme. Juliette CHABASSIER	Examinatrice
M. Thomas HÉLIE	Examinateur
Mme. Brigitte D'ANDRÉA-NOVEL	Directrice de thèse
M. Joël BENSOAM	Co-directeur de thèse



# Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Joël Bensoam pour son suivi constant durant mes études, et son implication dans ce travail de thèse en dépit d'une séparation géographique accentuée par les circonstances sanitaires. Je n'aurais pu me passer de son soutien de tous les instants, de sa démarche pédagogique, ainsi que de la stimulation de nos échanges scientifiques. Je remercie sincèrement Brigitte d'Andréa-Novel, sans qui ces trois années n'auraient pas été possibles, de m'avoir accordé sa confiance.

Je voudrais également remercier Aziz Hamdouni, pour ses encouragements à participer aux réunions du GDR Géométrie Différentielle et Mécanique, Jacky Cresson, pour son soutien et ses conseils qui m'ont aidé à faire évoluer mon travail, Juliette Chabassier, pour avoir montré de l'intérêt pour le sujet de cette thèse, et Thomas Hélie, pour sa bienveillance et sa disponibilité ; je les remercie également pour l'honneur qu'ils m'ont fait de bien vouloir participer à mon jury de thèse.

Je ne saurais oublier tous mes collègues de l'IRCAM : Robert Piéchaud, pour nos discussions musicales, artistiques et scientifiques, David Roze, pour son aide scientifique précieuse, ainsi bien sûr que tous les membres, doctorants et stagiaires de l'équipe S3AM et mes voisins du bureau A114.

Un grand merci enfin à mes proches, amis et famille, qui ont été présents pour moi tout au long de mon parcours.



# Communications scientifiques

Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse ont fait l’objet des communications scientifiques suivantes :

- Article soumis pour publication dans une revue avec comité de lecture (en cours d’évaluation) : P. Carré, J. Bensoam, “Sound synthesis of a 3D nonlinear string using a covariant Lie group integrator of a geometrically exact beam model”, *Journal of Sound and Vibration*, 2021.
- Actes de conférence avec comité de relecture J. Bensoam, P. Carré, “Geometric numerical methods with Lie groups”, in *Geometric Science of Information*, F. Nielsen et F. Barbaresco, éd., t. 11712, Cham : Springer International Publishing, 2019, p. 75–84
- Actes de conférence sans comité de relecture : P. Carré, J. Bensoam, “Geometric numerical methods for mechanics”, Congrès Français de Mécanique, Brest, 26–30 août 2019.
- Exposé lors des rencontres du GDR Géométrie Différentielle et Mécanique : “Intégrateurs variationnels et leur implémentation”, Paris, 4–6 novembre 2020.

L’article soumis au *Journal of Sound and Vibration* consitue en substance le chapitre 4 du présent manuscrit.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
<b>I Intégrateurs variationnels</b>	<b>1</b>
I.1 Mécanique variationnelle lagrangienne	2
I.1.1 Formulation variationnelle	3
I.1.2 Équations d'Euler-Lagrange	6
I.1.3 Symplecticité	6
I.1.4 Théorème de Noether	8
I.1.5 Prise en compte des forces extérieures	9
I.2 Mécanique variationnelle discrète	11
I.2.1 Formulation variationnelle	11
I.2.2 Équations d'Euler-Lagrange	12
I.2.3 Symplecticité	13
I.2.4 Théorème de Noether	17
I.2.5 Prise en compte des forces extérieures	19
I.3 Intégrateurs variationnels	19
I.3.1 Intégrateurs variationnels d'ordre faible	20
I.3.1.1 Méthode des rectangles	20
I.3.1.2 Méthode du point milieu	21
I.3.2 Méthodes variationnelles de Galerkin	22
I.3.2.1 Espace des trajectoires	22
I.3.2.2 Quadrature de l'intégrale d'action	23
I.3.2.3 Définition du lagrangien discret	24
I.3.2.4 Choix des points d'interpolation et de la quadrature	24
I.3.2.5 Principe variationnel	25
I.3.2.6 Méthode numérique de Galerkin	26
I.3.2.7 Forçage	27
I.4 L'oscillateur harmonique bidimensionnel	28
I.4.1 Oscillateur harmonique bidimensionnel sans amortissement	28
I.4.2 Oscillateur harmonique amorti	30
I.5 Conclusion	35
<b>II Intégrateurs avec groupes de Lie</b>	<b>37</b>
II.1 Méthodes numériques de Runge-Kutta Munthe-Kaas	38
II.1.1 Méthodes de Runge-Kutta	38



II.1.2	Réduction de l'équation aux dérivées ordinaires . . . . .	39
II.1.3	Principe des méthodes de Runge-Kutta Muntke-Kaas . . . . .	41
II.1.4	Dynamique du solide rigide . . . . .	41
II.1.4.1	Définition du schéma RKMK4 . . . . .	42
II.1.4.2	Application au solide rigide . . . . .	42
II.2	Méthodes variationnelles et groupes de Lie . . . . .	45
II.2.1	Mécanique lagrangienne et réduction par groupe de Lie . . . . .	45
II.2.1.1	Calcul des variations . . . . .	46
II.2.1.2	Équations d'Euler-Poincaré . . . . .	47
II.2.1.3	Théorème de Noether . . . . .	47
II.2.2	Mécanique discrète, lagrangien réduit . . . . .	47
II.2.2.1	Formulation variationnelle . . . . .	48
II.2.2.2	Théorème de Noether . . . . .	50
II.2.3	Méthodes variationnelles de Galerkin avec groupe de Lie . . . . .	51
II.2.3.1	Espace des trajectoires . . . . .	51
II.2.3.2	Quadrature de l'intégrale d'action . . . . .	52
II.2.3.3	Lagrangien discret . . . . .	53
II.2.3.4	Méthode numériques de Galerkin avec groupe de Lie . . . . .	54
II.3	Dynamique du solide rigide . . . . .	54
II.3.1	Formulation lagrangienne de la dynamique du solide rigide . . . . .	55
II.3.2	Définition de la méthode de Galerkin avec groupe de Lie . . . . .	56
II.3.3	Résultats numériques . . . . .	58
II.4	Conclusion . . . . .	63
<b>III</b>	<b>Géométrie multisymplectique</b> . . . . .	<b>65</b>
III.1	Théorie lagrangienne des champs . . . . .	66
III.1.1	Formulation variationnelle . . . . .	67
III.1.2	Équations d'Euler-Lagrange . . . . .	70
III.1.3	Conditions limites . . . . .	72
III.1.4	Multisymplecticité . . . . .	73
III.1.5	Symétries et Théorème de Noether . . . . .	74
III.1.6	Prise en compte des forces extérieures . . . . .	78
III.1.6.1	Principe de Lagrange-d'Alembert . . . . .	78
III.1.6.2	Conséquences sur les moments . . . . .	79
III.2	Méthode covariante de Galerkin . . . . .	80
III.2.1	Définitions . . . . .	81
III.2.1.1	Interpolation polynômiale . . . . .	81
III.2.1.2	Quadrature de l'intégrale d'action . . . . .	82
III.2.1.3	Définition du lagrangien discret . . . . .	82
III.2.2	Variation d'action . . . . .	84
III.2.3	Conditions aux bords . . . . .	87
III.2.4	Multisymplecticité . . . . .	88
III.2.5	Théorème de Noether . . . . .	89
III.2.6	Forçage . . . . .	91
III.2.6.1	Principe de Lagrange-d'Alembert . . . . .	92
III.2.6.2	Loi d'évolution globale des moments . . . . .	93

III.3 Applications . . . . .	94
III.3.1 Équation des ondes . . . . .	94
III.3.1.1 Conditions du premier ordre homogènes . . . . .	96
III.3.1.2 Conditions d'ordre zéro homogènes . . . . .	99
III.3.2 Corde raide non linéaire amortie . . . . .	100
III.3.2.1 Modèle continu . . . . .	100
III.3.2.2 Modèle discret . . . . .	104
III.3.2.3 Résultats numériques . . . . .	105
III.4 Conclusion . . . . .	107
<b>IV Modèle de corde géométriquement exact</b> . . . . .	<b>109</b>
IV.1 Formulation covariante de la poutre de Reissner . . . . .	111
IV.1.1 Description lagrangienne covariante . . . . .	111
IV.1.2 Équations d'Euler-Poincaré forcées . . . . .	112
IV.1.2.1 Définition de la densité lagrangienne . . . . .	113
IV.1.2.2 Calcul variationnel . . . . .	114
IV.1.2.3 Principe de Lagrange d'Alembert . . . . .	115
IV.1.3 Conditions limites . . . . .	116
IV.1.4 Résultats de conservation . . . . .	117
IV.1.4.1 Symétries et théorème de Noether local . . . . .	117
IV.1.4.2 Lois d'évolution globales . . . . .	119
IV.2 Formulation covariante discrète . . . . .	120
IV.2.1 Définitions . . . . .	120
IV.2.2 Équations d'Euler-Poincaré discrètes . . . . .	121
IV.2.2.1 Choix du lagrangien discret . . . . .	121
IV.2.2.2 Calcul variationnel . . . . .	121
IV.2.2.3 Principe de Lagrange-d'Alembert . . . . .	124
IV.2.3 Traitement des conditions limites . . . . .	124
IV.2.4 Résultats de conservation . . . . .	125
IV.3 Modèle de corde . . . . .	127
IV.3.1 Modèle général . . . . .	128
IV.3.1.1 Analyse statique de la corde sous tension . . . . .	129
IV.3.1.2 Amortissements . . . . .	129
IV.3.1.3 Force d'excitation . . . . .	130
IV.3.1.4 Conditions limites . . . . .	130
IV.3.1.5 Modèle complet . . . . .	131
IV.3.2 Modèle linéarisé . . . . .	132
IV.3.2.1 Analyse fréquentielle . . . . .	133
IV.3.2.2 Comparaison avec d'autres modèles de corde . . . . .	134
IV.3.2.3 Discussion . . . . .	137
IV.4 Intégrateur multisymplectique par groupe de Lie pour le modèle de corde . . . . .	139
IV.4.1 Établissement du modèle . . . . .	139
IV.4.2 Réécriture des conditions limites et intégration numérique . . . . .	140
IV.4.3 Résultats numériques . . . . .	141
IV.4.3.1 Petits déplacements . . . . .	142
IV.4.3.2 Grands déplacements . . . . .	144

IV.5 Conclusion	145
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>147</b>
<b>A Formulaires des groupes SO(3) et SE(3)</b>	<b>151</b>
A.1 Groupe des rotations en trois dimensions SO(3)	151
A.1.1 Groupe	151
A.1.2 Algèbre	151
A.1.2.1 Opérations adjointes	151
A.1.2.2 Fonction Cayley	152
A.2 Groupe des rotations et translations en trois dimensions SE(3)	152
A.2.1 Groupe	152
A.2.2 Algèbre	153
A.2.2.1 Opérations adjointes	153
A.2.2.2 Fonction Cayley	153
<b>B Calcul des modes propres du modèle de corde linéarisé</b>	<b>155</b>
B.1 Résolution des équations d'Euler-Poincaré linéarisées	155
B.2 Comportements limites des spectres en fréquence	157
B.2.1 Développement limité des premiers modes	157
B.2.2 Comportement asymptotique	159
<b>C Librairie C++ Geomi</b>	<b>161</b>
C.1 Introduction pratique	162
C.1.1 Méthodes variationnelles	162
C.1.2 Méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas	163
C.2 Principes généraux de l'implémentation	163
C.2.1 Le module <code>Common</code>	163
C.2.1.1 Représentation des systèmes physiques	164
C.2.1.2 Représentation des vecteurs et solveurs numériques	164
C.2.2 Le module <code>Variational</code> : cas classique	164
C.2.2.1 Implémentation des systèmes lagrangiens	164
C.2.2.2 Intégrateurs variationnels	167
C.2.3 Le module <code>RKMK</code>	169
C.2.3.1 Implémentation du système dynamique	169
C.2.3.2 Intégrateurs	171
C.3 Perspectives	173
C.3.1 Interface haut-niveau	173
C.3.2 Calcul symbolique	173
C.3.3 Méthodes covariantes	174
<b>Bibliographie</b>	<b>175</b>

# Introduction

La synthèse sonore consiste à simuler des systèmes produisant des vibrations dans le but de restituer des sons existants, ou d'en créer de nouveaux. Les résultats de simulation sont obtenus par un calcul informatique, qu'on peut distinguer en deux grandes familles d'approches. La première repose sur des techniques de traitement du signal. Celle-ci permet l'obtention de résultats sonores relativement convaincants, en nécessitant un coût de calcul suffisamment faible pour permettre des applications en temps réel. Toutefois, cette approche ne saisit pas la nature des phénomènes physiques mis en jeu, mais traduit simplement leurs effets. La seconde démarche, qui nous intéressera dans ce mémoire, est la synthèse sonore par modèle physique. Cette dernière permet la simulation d'effets riches et complexes, capturant la nature des phénomènes décrits et octroyant aux sons de synthèse un réalisme accru, en contrepartie d'un temps de calcul généralement plus important. Un modèle traduit le comportement du système étudié à partir d'équations différentielles ; or, les solutions analytiques de ces équations ne sont généralement pas disponibles. Aussi est-il nécessaire d'introduire des outils numériques pour permettre une résolution approximative des équations. Cependant, tout l'enjeu de cette démarche est de s'assurer que les résultats numériques approchent correctement les solutions des équations, puisque ce traitement fait inévitablement surgir des problématiques de stabilité numérique, qui peuvent rendre les méthodes d'intégration inopérantes et les résultats aberrants. Si les questions de stabilité ne sont pas propre à l'acoustique, elles sont cependant exacerbées par deux aspects. D'une part, nombre de systèmes modélisés à des fins de synthèse sonore présentent des non linéarités de natures variées, qui confèrent aux sons leur réalisme et leur richesse. D'autre part, les simulations sont effectuées pour des pas d'intégration petits, nécessaires pour rendre compte de comportements vibratoire dans la zone humainement audible du spectre en fréquence (20-20 000 Hz), et sur des temps d'intégration importants (typiquement plusieurs secondes) ; en d'autres termes, les solutions sont calculées sur des durées grandes devant l'échelle caractéristique des phénomènes acoustiques. Cette double problématique pose alors des enjeux pour la résolution numérique des équations différentielles, qui doit garantir la stabilité nécessaire à la crédibilité des solutions numériques.

Au cours des dernières décennies, diverses approches ont été proposées pour assurer des garanties numériques sur les résultats obtenus. Pour les systèmes linéaires, la synthèse modale offre par exemple un moyen efficace, et peu gourmand en calcul, d'effectuer de la synthèse sonore. La conservation de l'énergie est alors garantie pour le couplage non linéaire de systèmes linéaires en petites déformations. Cette approche a notamment été mise en œuvre dans le logiciel Modalys développé à l'IRCAM, qui combine un traitement des systèmes par une approche modale avec des interactions non linéaires [36], [111]. Celle-ci reste cependant restreinte à l'hypothèse d'un comportement linéaire des

composants du système. Cette restriction, pour le traitement des non linéarités, peut être levée en utilisant des méthodes numériques par différences finies. La question est alors de garantir la conservation de l'énergie totale. En effet, en évitant la dissipation ou génération numérique d'énergie, le comportement du système modélisé peut être correctement approché sur de longs temps d'intégration. On peut par exemple citer à ce titre les travaux de Bilbao *et al.* [9], [10], [32], [129] et de Chabassier *et al.* [19], [20] en synthèse sonore. L'approche par les systèmes hamiltoniens à ports repose également sur la garantie de la passivité des systèmes conservatifs pour obtenir des simulations stables. Ce formalisme, introduit dans les années 90 par Maschke et Van der Schaft [100], [101], a vu plusieurs applications en synthèse sonore, comme les travaux de Falaize et Hélie [39]-[41] sur les circuits électroniques audio et le Fender Rhodes.

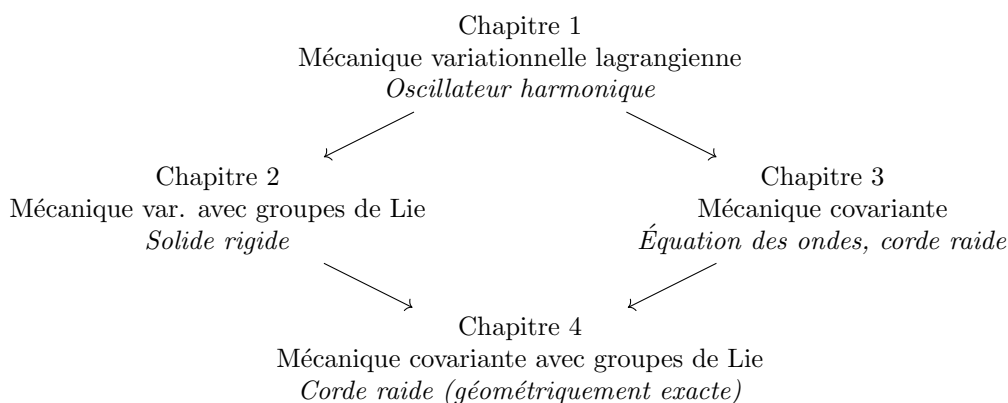
Les méthodes numériques dites d'inspiration géométrique offrent une panoplie d'outils pour approcher les solutions des systèmes modélisés d'une façon qui garantisse la vérification de différents principes physiques [47]. Cette démarche consiste non pas à approcher directement les équations différentielles par des méthodes d'intégration par différences finies, mais à définir un système physique discret encodant des structures physiques fondamentales. En particulier, la mécanique variationnelle discrète permet le traitement des systèmes formulés à l'aide d'un lagrangien. Celle-ci permet d'assurer par construction des garanties sur l'énergie du système, mais également sur la conservation d'invariants physiques. Les intégrateurs numériques d'inspiration géométrique ont vu plusieurs applications dans le domaine de la simulation de systèmes sonores. Ainsi, le comportement de lames vibrantes est simulé à l'aide d'une méthode variationnelle par Baugé [5]; Ishikawa, Michels et Yaguchi [65] proposent une résolution par intégration symplectique d'un modèle simplifié de corde de piano.

Une autre problématique en modélisation physique concerne la nature des non-linéarités des équations. Parmi celles-ci, on peut distinguer celles qui expriment les lois physiques qui régissent les systèmes modélisés, nécessaires à une description fidèle et donc souhaitables, de celles qui résultent d'un choix particulier de système de coordonnées, extrinsèques au problème physique et malvenues. Prenons en guise d'exemple la trajectoire optimale d'un avion à la surface du globe; choisir différents types de système de coordonnées (sphérique, stéréographique, etc) résultera en autant de courbes planaires distinctes mais décrivant pourtant la même géodésique. L'introduction de ces non linéarités artificielles induit des difficultés supplémentaires pour l'intégration numérique, difficultés liées à une représentation non adéquate de la courbure de l'espace physique (le choix de la carte). Les approches à l'aide de méthodes conventionnelles peuvent alors être mises en échec et donner des résultats erronés. Au prix d'un cadre théorique plus complexe, il est généralement possible de reformuler le problème d'une manière intrinsèque. L'enjeu est alors de définir des intégrateurs numériques basés sur cette représentation, qui permettent de résoudre les équations différentielles de façon appropriée. En particulier, de nombreux outils existent pour le traitement des systèmes décrits à partir de l'action d'un groupe de Lie sur une variété [47], [64]. Ceux-ci permettent la simulation de modèles décrivant les solides rigides en grands déplacements, ainsi que les milieux continus (solides rigides infinitésimaux) en grandes déformations, pertinents pour l'écriture des systèmes producteurs de sons en régime non linéaire.

Bien que la mécanique variationnelle discrète, systématisée par les travaux de Marsden

et al. [86], [93]-[95], [98], [99] au début des années 2000, ait atteint une certaine maturité, celle-ci reste pour l’instant en majorité l’objet de l’intérêt des mathématiciens. À ce titre, et à notre connaissance, relativement peu d’applications des outils numériques sortent du cadre des exemples académiques. L’objectif de cette thèse est de montrer l’intérêt des méthodes numériques d’inspiration géométrique pour la synthèse sonore par modèle physique. En particulier, on proposera la formulation d’un modèle de corde amortie géométriquement exacte en trois dimensions valable en grandes déformations. Ce modèle, qui cristallise les différentes problématiques abordées dans ce mémoire, ne peut être résolu de manière adéquate par des méthodes numériques conventionnelles ; la solution numérique sera ici calculée à l’aide d’intégrateurs covariants avec groupe de Lie. Le présent mémoire s’attache à présenter ces outils et concepts d’une manière que nous espérons pédagogique pour les rendre accessibles en pratique. Dans cet esprit d’accessibilité, une partie du travail de thèse a été consacré au développement d’un code informatique en C++, implémentant plusieurs familles de méthodes numériques et disponible en libre accès.

Ce mémoire de thèse est structuré en quatre chapitres, chacun suivant un développement théorique accompagné d’un ou plusieurs exemples pertinents et pédagogiques pour la modélisation de systèmes producteurs de son.



1. Le chapitre 1 rappelle les résultats de la mécanique variationnelle lagrangienne dans leurs versions continue et discrète, obtenus à partir du calcul des variations. On présente les propriétés de conservation des systèmes physiques, pour l’étude desquels on utilise la forme symplectique et le théorème de Noether. Le principe de Lagrange-d’Alembert (ou principe des puissances virtuelles) permet la prise en compte de forces extérieures dans le modèle. L’approche variationnelle dans le contexte discret offre des outils de construction de méthodes numériques, à partir desquels on dérive la famille d’intégrateurs variationnels de Galerkin. Les résultats de la mécanique variationnelle sont ensuite illustrés sur le cas de l’oscillateur harmonique amorti, et les propriétés des intégrateurs numériques sont vérifiées expérimentalement sur cet exemple simple.
2. L’hypothèse de linéarité de l’espace des configurations, supposée au premier chapitre, est relâchée au chapitre 2 pour considérer le cas des groupes de Lie. Les outils permettant le traitement des équations différentielles formulées sur des variétés différentielles sujettes à l’action transitive d’un groupe de Lie sont introduits à partir de l’étude de la famille des méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas. Ces

méthodes, qui permettent à la solution de rester sur la variété ne garantissent pas obligatoirement les propriétés de conservation. Elles sont donc adaptées au cadre de la mécanique variationnelle lagrangienne ; les résultats du chapitre 1 sont alors reformulés en conséquence. Les intégrateurs de Galerkin sont étendus pour le traitement des équations avec groupe de Lie, et leurs propriétés numériques sont illustrées sur l'exemple du solide rigide.

3. Évidemment, pour la synthèse sonore, les modèles décrivent des phénomènes de propagation d'ondes pour lesquels les équations ne sont plus des équations aux dérivées ordinaires, mais aux dérivées partielles, mettant en jeu plusieurs variables indépendantes de temps et d'espace. Leur traitement à l'aide de la théorie lagrangienne des champs est exposée au chapitre 3. Dans ce cas, on introduit la théorie lagrangienne des champs, ou mécanique covariante. Les résultats étendant ceux du premier chapitre sont présentés. Les conditions aux bords sont prises en compte d'une manière intrinsèque par l'extension du principe variationnel. La formulation discrète de la mécanique covariante est proposée dans le cas à deux dimension par l'extension de la famille des méthodes variationnelles de Galerkin. Celle-ci vérifie les équivalents discrets des propriétés continues, que l'on met en évidence sur deux exemples : on valide pour l'équation des ondes les résultats de conservation relatifs à l'énergie, et on présente un cas concret d'application de la méthode covariante à un modèle de corde raide non linéaire amortie.
4. Les non-linéarités du modèle de corde examiné à la fin du chapitre 3 sont le résultat de l'écriture des équations en coordonnées. On propose dans ce chapitre la formulation intrinsèque d'un modèle de corde à partir d'une poutre géométriquement exacte décrite à l'aide du groupe de Lie  $SE(3)$ . Cette approche combine donc celles du chapitre 2 (modèle avec groupe de Lie) et 3 (formulation covariante). Les conditions limites sont traitées par un principe variationnel intrinsèque à partir duquel les lois de conservation sont mises en évidence et vérifiées expérimentalement. Les solutions analytiques de la linéarisation du modèle sont fournies dans le langage habituel de la mécanique vibratoire, et permettent la confrontation du modèle en régime de petites déformations avec les modèles de cordes préexistants. Des résultats numériques sont proposés, montrant une adéquation quantitative avec les attentes théoriques dans le cas des petites déformations, et une vraisemblance qualitative pour la dynamique en grandes déformations.

Les contributions principales de cette thèse portent sur les points suivants :

1. La construction d'un modèle de corde tridimensionnel non-linéaire amorti, défini à partir d'une poutre géométriquement exacte (chapitre 4). La solution numérique est obtenue par application d'un intégrateur covariant avec groupe de Lie. Une attention particulière est portée aux formulations continue et discrète des conditions limites. Ce modèle et sa résolution numérique se situent dans le prolongement des travaux de Demoures *et al.* [29], [31]. Le chapitre 4 a été proposé pour publication au *Journal of Sound and Vibration* et est en cours d'évaluation.
2. Le traitement intrinsèque des conditions limites de types Dirichlet et Neumann dans le cadre de la mécanique lagrangienne covariante (chapitre 3). Cette formulation est donnée dans les domaines continu et discret.

3. La définition d'une méthode de Galerkin covariante d'ordre arbitraire, formulée en deux dimensions mais généralisable à des ordres plus élevés (chapitre 3). La prise en compte des forces extérieures et des conditions limites est effectuée à l'aide d'un principe variationnel discret. L'intégrateur est appliqué à deux systèmes de l'acoustique musicale : l'équation des ondes à une dimension spatiale, et un modèle de corde non linéaire amorti.
4. L'implémentation de la librairie C++ Geomi, fournissant des outils d'intégration géométrique pour les systèmes en dimension finie (appendice C). En particulier, les méthodes numériques présentées aux chapitres 1 (méthodes variationnelles lagrangiennes) et 2 (méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas, méthode variationnelles avec réduction par groupe de Lie) sont implémentées.





# Chapitre I

## Intégrateurs variationnels

Les systèmes lagrangiens représentent une classe importante de systèmes physiques, et permettent en particulier de modéliser de nombreux phénomènes relevant de la mécanique et de l'acoustique. Le calcul de la variation d'action, au centre de cette formulation de la mécanique, est à l'origine de plusieurs résultats fondamentaux issus d'un principe unique. Les équations de la dynamique sont obtenues par application d'un principe de moindre action. Les solutions de ces équations vérifient la propriété fondamentale de symplecticité, c'est-à-dire qu'elle conservent une structure mathématique appelée forme symplectique. Par ailleurs, la mécanique lagrangienne fournit un cadre naturel pour la formulation du théorème de Noether, qui affirme la conservation d'un moment pour chaque symétrie variationnelle. Enfin, la formulation variationnelle peut être étendue à des systèmes non conservatifs à l'aide d'un principe de Lagrange-d'Alembert, ou principe des puissances virtuelles.

La mécanique variationnelle discrète, née de la volonté de refléter qualitativement dans le domaine numérique les propriétés des systèmes modélisés, étend les résultats précédents à des systèmes discrets approchant le comportement de leurs analogues continus. L'originalité de cette approche, par comparaison aux méthodes numériques conventionnelles, est de ne pas chercher à approcher directement les solutions des équations, mais à définir un système dynamique discret qui approche le flot des équations continues. Ce point de vue permet de donner un équivalent numérique aux objets et propriétés de la mécanique variationnelle classique.

Une littérature importante est consacrée à l'étude des méthodes numériques géométriques en général (voir en particulier l'ouvrage très complet de Hairer, Lubich et Wanner [47]), et aux intégrateurs variationnels en particulier. Son origine remonte aux recherches de Jordan [66], Hwang [60] et Cadzow [14] sur le contrôle optimal dans les années 1960. La formulation de la mécanique lagrangienne discrète est proposée par Logan [89], et les lois de conservation des systèmes discrets étudiées par Maeda [90]-[92] et Lee [75], [76]. Les travaux sur les intégrateurs variationnels ont ensuite été développés par Veselov [132], [133], puis Marsden *et al.* [98], [99]. En particulier, Kane, Marsden et Ortiz [69] proposent un intégrateur conservant l'énergie ; la prise en compte d'effets dissipatifs est proposée dans Kane *et al.* [70], et des contraintes dans Wendlandt et Marsden [98]. L'application de la mécanique lagrangienne discrète à la théorie du contrôle a été proposée par les travaux de Junge, Ober-Blöbaum et Marsden [67], [68], [107], [108].

Dans ce chapitre, on considère que l'espace des configurations  $Q$  est un espace vectoriel

et de dimension finie. Le présent chapitre est organisé comme suit. Les principaux résultats de la mécanique variationnelle sont rappelés (§ I.1). On établit le calcul de variation d'action, à partir duquel on déduit les équations d'Euler-Lagrange et la loi d'évolution de l'énergie. Le caractère symplectique des solutions est mis en évidence, et le théorème de Noether, qui fait le lien entre symétrie du système et loi d'invariance, est énoncé. Enfin, le principe de Lagrange-d'Alembert permettant la prise en compte de forces extérieures est présenté, ainsi que ses conséquences sur les lois d'évolution de l'énergie et des moments. Le cadre de la mécanique variationnelle discrète est ensuite posé (§ I.2), cadre dans lequel les résultats de la formulation continue trouvent un équivalent discret. À partir de ces résultats, plusieurs exemples de discrétisation des systèmes lagrangiens sont donnés (§ I.3). En particulier, une classe d'intégrateurs variationnels de Galerkin d'ordre arbitraire est proposée. Le traitement des systèmes non conservatifs est explicité dans ce contexte. Ces méthodes numériques sont implémentées et testées sur l'exemple classique de l'oscillateur harmonique (§ I.4). Les propriétés de préservation numérique des quantités physiques et la convergence des méthodes sont examinées pour les cas sans et avec amortissement. On vérifie notamment que la loi d'évolution du moment angulaire est très bien capturée par les intégrateurs numériques proposés.

Toutes les méthodes numériques présentées dans ce chapitre ont fait l'objet d'une implémentation en C++ dans la librairie Geomi (voir annexe C).

## I.1 Mécanique variationnelle lagrangienne

On rappelle les résultats principaux de la mécanique lagrangienne classique. Celle-ci est habituellement énoncée pour des trajectoires appartenant à des espaces de fonctions possédant les propriétés de dérivabilité appropriées ; on pourra par exemple se référer à Marsden et Ratiu [96] pour une telle formulation. Nous proposons de la formuler dans le langage de la géométrie différentielle, à l'aide des notations introduites par Echeverria-Enriquez *et al.* [33]. En faisant ainsi, nous anticipons sur le chapitre 3 dans lequel les résultats du présent chapitre sont étendus à la théorie lagrangienne des champs pour le traitement des équations aux dérivées partielles. L'introduction des notations spécialisées peut donc se faire dans le contexte de la mécanique lagrangienne classique, familière des mécaniciens, qui fournira une aide pour établir la correspondance entre l'écriture conventionnelle et la notation présente. On suppose le lecteur familier des notions de base du calcul différentiel ; dans le cas contraire, on pourra par exemple se référer à Hélein [53] pour une introduction très complète aux outils utilisés au cours de ce chapitre.

Soit  $t \in \mathbb{R}$  la variable de temps, et  $q \in Q$  une configuration du système, on construit le fibré des configurations  $E = \mathbb{R} \times Q$  ; il s'agit d'un fibré trivial de fibre  $Q$ . Une trajectoire du système est représentée sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$  par la fonction  $\phi : [t_0, t_1] \subset \mathbb{R} \rightarrow E$  qu'on appelle section du fibré  $E$  et qui vérifie  $\phi(t) = (t, q(t))$  pour tout  $t \in [t_0, t_1]$ . On supposera dans la suite que  $\phi$  vérifie les hypothèses de régularité nécessaires.

On définit  $J^1E$  le fibré des 1-jets de  $E$ , qu'on peut assimiler au produit  $\mathbb{R} \times TQ$ . Les éléments de  $J^1E$  sont les objets  $(t, q, v) \in \mathbb{R} \times Q \times T_qQ$ . À toute section  $\phi$  du fibré  $E$  correspond de façon unique le relevé holonome  $j^1\phi$ , qui est une section de  $J^1E$  et s'écrit pour tout  $t$

$$j^1\phi(t) = (t, q(t), \dot{q}(t))$$

où  $\dot{q}$  est la dérivée  $\dot{q} = dq/dt$ . Réciproquement, on dira d'une section  $\psi$  du fibré  $J^1E$  qu'elle est holonome si et seulement si il existe une section  $\phi$  de  $E$  telle que  $\psi = j^1\phi$ . Pour les besoins du premier chapitre, on peut se limiter à considérer l'objet  $j^1\phi$  comme la collection des trois éléments  $t, q$  et  $\dot{q}$ .

Un champ de vecteur  $Z$  sur  $E$  est la donnée en tout point  $p \in E$  d'un vecteur  $Z(p) \in T_pE$ ; on notera  $\chi(E)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $E$ , et de même  $\chi(J^1E)$  l'ensemble des champs de vecteurs sur  $J^1E$ . On définit  $\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_q, \vec{\partial}_v$  la base de  $TJ^1E$ , et sa base duale  $dt, dq, dv$  à partir de laquelle s'écrit toute forme différentielle sur  $J^1E$ .

On établit maintenant le calcul des variations, à la base de la formulation lagrangienne de la mécanique.

### I.1.1 Formulation variationnelle

Soit la densité lagrangienne  $\mathcal{L} : J^1E \rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R})$ , associée au lagrangien  $\mathcal{L} : J^1E \rightarrow \mathbb{R}$  et définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : J^1E &\rightarrow \Lambda^1(\mathbb{R}) \\ j^1\phi &\mapsto \mathcal{L}(t, q, \dot{q})dt \end{aligned}$$

où  $\Lambda^1(\mathbb{R})$  est l'espace des 1-formes différentielles de  $\mathbb{R}$ . L'action  $\mathcal{A} : \Gamma([t_0, t_1], E) \rightarrow \mathbb{R}$  correspondant au lagrangien  $\mathcal{L}$  est l'application définie pour toute section  $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow E$  par

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^*\mathcal{L}.$$

où  $(j^1\phi)^*\mathcal{L}$ , appelé tiré arrière de  $\mathcal{L}$  par  $j^1\phi$ , généralise l'opération de composition  $\mathcal{L} \circ j^1\phi$  au contexte du calcul différentiel [53].

Le calcul de variation de l'action est la procédure centrale pour l'établissement des résultats de la mécanique lagrangienne : de celui-ci découlent les équations d'Euler-Lagrange gouvernant le système physique considéré; il permet également d'obtenir les lois de conservation de certaines grandeurs physiques dans le cas de la présence de symétries via le théorème de Noether, et d'établir le caractère symplectique des solutions des équations d'Euler-Lagrange.

Le calcul de variation s'effectue en considérant des champs de variations  $Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q$  au voisinage d'une trajectoire  $\phi = (t, q)$ . Afin de pouvoir établir la variation d'action, il est d'abord nécessaire de déterminer les variations  $\delta v$  de la vitesse induites par  $\delta t, \delta q$ . Autrement dit : quelle est la composante  $\delta v$  du champ relevé  $j^1Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q + \delta v \vec{\partial}_v$  qui permet de perturber la section holonome  $j^1\phi$  en une autre section holonome  $j^1\bar{\phi}$ , c'est à dire en une trajectoire physique? L'objet de la proposition suivante est de définir le relevé du champ  $Z$ .

**Proposition 1** (Champ de variations). *Soit  $Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q$  un champ de variations arbitraires dépendant uniquement de la variable de temps, alors la variation de vitesse  $\delta v$  induite par  $Z$  est donnée par*

$$\delta v = \frac{d}{dt}\delta q - v \frac{d}{dt}\delta t.$$

On note dans ce cas  $j^1Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q + \delta v \vec{\partial}_v \in \chi(J^1E)$  le relevé du champ  $Z$ .

*Démonstration.* Soit une trajectoire  $\phi$  et une date  $\tau \in \mathbb{R}$ , on définit  $P = (\tau, q(\tau))$  un point de la courbe  $\phi$ . Soit  $\tilde{\phi}$  la trajectoire perturbée par le champ de variations  $Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q$ , on note  $\tilde{P}$  la transformation du point  $P$ , qui au premier ordre s'écrit  $\tilde{P} = (\tau + \lambda \delta t(\tau), q(\tau) + \lambda \delta q(\tau))$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  petit (voir figure I.1).

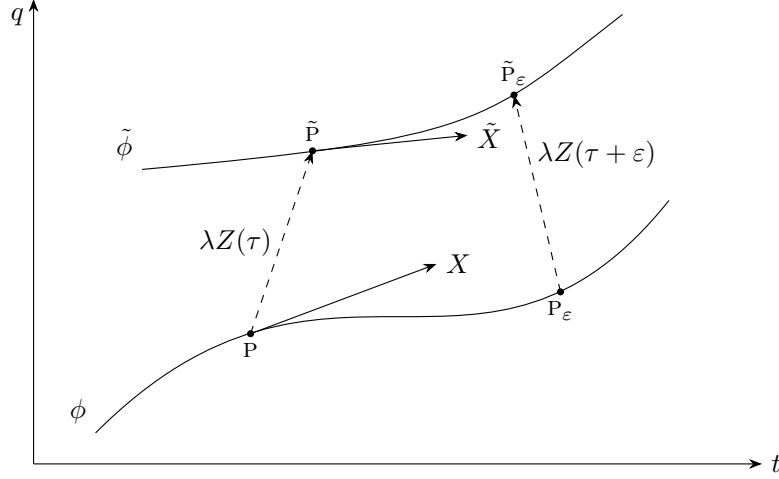


FIG. I.1 Une trajectoire  $\phi$  est perturbée en  $\tilde{\phi}$  par le champ de variations  $Z$ .

La variation de vitesse  $\delta v$  induite par  $\delta t, \delta q$  est définie par

$$\delta v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\dot{\tilde{q}} - \dot{q}}{\lambda}.$$

Pour calculer cette valeur, on exprime les vecteurs tangents aux courbes  $\phi$  et  $\tilde{\phi}$  en  $P$  et  $\tilde{P}$  respectivement. Soit  $P_\epsilon = (\tau + \epsilon, q(\tau + \epsilon))$ , le vecteur  $X$  tangent à la courbe  $\phi$  en  $P$  vaut

$$X = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{P_\epsilon - P}{\epsilon} = (1, \dot{q}).$$

De même, on définit le point  $\tilde{P}_\epsilon = (\tau + \epsilon + \lambda \delta t(\tau + \epsilon), q(\tau + \epsilon) + \lambda \delta q(\tau + \epsilon))$ . Le vecteur  $\tilde{X}$  tangent à la courbe  $\tilde{\phi}$  en  $\tilde{P}$  s'écrit alors

$$\tilde{X} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{P}_\epsilon - \tilde{P}}{\epsilon} = \left( 1 + \lambda \frac{d}{dt} \delta t, \dot{q} + \lambda \frac{d}{dt} \delta q \right)$$

Ceci nous permet de déduire que la dérivée  $\dot{\tilde{q}}$  a pour expression

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\dot{q} + \lambda \frac{d}{dt} \delta q}{1 + \lambda \frac{d}{dt} \delta t}$$

Un passage à la limite permet finalement de conclure

$$\delta v = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\dot{\tilde{q}} - \dot{q}}{\lambda} = \frac{d}{dt} \delta q - \dot{q} \frac{d}{dt} \delta t.$$

Cette formule est cohérente avec la version plus générale proposée par Bensoam et Baugé [7] si l'on suppose, comme dans le cas présent, que les composantes du champ de vecteur ne dépendent que de la variable de temps.  $\square$

À partir de cette donnée, il devient possible d'exprimer la variation de l'action du système.

**Proposition 2** (Variation d'action). *Soit  $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow E$  une trajectoire, et  $Z \in \chi(E)$  un champ de variations, la variation d'action  $\delta\mathcal{A}$  correspondante vaut*

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} \equiv d\mathcal{A}_\phi(Z) &= \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left( \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v - \mathcal{L} \right) \right] \delta t + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right] \delta q \right) dt \\ &\quad + \left[ (j^1\phi)^* \left( \left( \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \right) \delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta q \right) \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

*Démonstration.* Soit  $\phi : [t_0, t_1] \rightarrow E$  une section et  $Z \in \chi(E)$  un champ de variations, la variation d'action associée est définie par  $\delta\mathcal{A} = d\mathcal{A}_\phi(Z)$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left[ j^1Z \lrcorner \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} dq \wedge dt + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} dv \wedge dt \right) \right] + \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( (j^1\phi)^* \left[ j^1Z \lrcorner \mathcal{L} \right] \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} (\delta q dt - \delta t dq) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} (\delta v dt - \delta t dv) \right] + \left[ (j^1\phi)^* \mathcal{L} \delta t \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

On obtient, en utilisant la proposition 1 et l'identité  $u'v = (uv)' - uv'$ ,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta v = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \left[ \frac{d}{dt} \delta q - v \frac{d}{dt} \delta t \right] = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta q - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \delta t \right) - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right) \delta q + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \right) \delta t$$

On remarque d'autre part

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta t dv = d\mathcal{L} \delta t - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} \delta t dt - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \delta t dq$$

Ceci nous permet finalement d'écrire

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left( \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \right) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} \right) \delta t dt + \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right) \delta q dt \\ &\quad + \left[ (j^1\phi)^* \left( \left( \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \right) \delta t + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta q \right) \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

□

Le calcul des variations fait naturellement apparaître la forme de Poincaré-Cartan  $\Theta_{\mathcal{L}}$ , définie comme la 1-forme différentielle

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \left( \mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v \right) dt + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} dq \quad (\text{I.2})$$

On peut réécrire la variation d'action à l'aide de  $\Theta_{\mathcal{L}} \in \Lambda(J^1E)$ , dont l'expression devient alors

$$\delta\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \left( \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} v - \mathcal{L} \right) \right] \delta t + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right] \delta q \right) dt + \left[ (j^1\phi)^* (j^1Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) \right]_{t_0}^{t_1} \quad (\text{I.3})$$

On remarque que l'écriture de la variation d'action distingue deux termes : une intégrale sur le domaine  $[t_0, t_1]$  de la variable de temps, et une intégrale sur la frontière du même domaine, c'est-à-dire sur les points  $t_0, t_1$ . Cette distinction est fondamentale pour la déduction des différents résultats de la mécanique lagrangienne à partir du calcul des variations, selon le type des variations  $Z$  considérées.

### I.1.2 Équations d'Euler-Lagrange

Le calcul de la variation de l'action établi au paragraphe précédent permet d'écrire les équations d'Euler-Lagrange, qui décrivent la dynamique du système, par l'application du principe de Hamilton — ou principe de moindre action.

**Définition 1** (Principe de Hamilton). Le principe de Hamilton énonce que toute solution  $\phi$  du problème lagrangien posé par  $\mathcal{L}$  extrémalise la fonctionnelle d'action : pour toute variation  $Z \in \chi(E)$  nulle aux extrémités du domaine  $[t_0, t_1]$ , la variation d'action vérifie

$$\delta\mathcal{A}_\phi(Z) = 0$$

En considérant des variation  $Z$  nulles en  $t_0, t_1$ , les termes de bord de la variation d'action (I.1) s'annulent. Le champ  $Z$  étant quelconque partout ailleurs, l'annulation du terme intégral de la variation d'action nécessite que la trajectoire  $\phi$  vérifie les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} = 0 \quad (\text{I.4})$$

ainsi que l'équation d'évolution de l'énergie

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \dot{q} - \mathcal{L} \right) = 0 \quad (\text{I.5})$$

dans laquelle on reconnaît l'expression de l'énergie totale du système  $E = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \dot{q} - \mathcal{L}$ . Les solutions du problème variationnel posé par le lagrangien  $\mathcal{L}$  vérifient donc les équations (I.4) et (I.5). En réalité, toute solution des équations d'Euler-Lagrange vérifie également l'équation d'évolution de l'énergie. En effet, on calcule le long des trajectoires holonomes

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} - \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \dot{q} \right) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \frac{d\dot{q}}{dt} + \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \frac{d\dot{q}}{dt} = - \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right) \dot{q}$$

*Remarque 1.* Le calcul de variation d'action est souvent proposé en ne considérant que des variations verticales, c'est-à-dire vérifiant  $\delta t = 0$  (voir par exemple [47], [96], [99]). Dans ce cas, la quantité  $\delta\dot{q}$  se simplifie en  $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ , et un calcul direct de la variation d'action donne

$$\delta\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \right) \delta q dt + \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v} \delta q \right]_{t_0}^{t_1}$$

Les équations d'Euler-Lagrange sont alors obtenues par principe de moindre action en considérant des variations arbitraires  $\delta q$  s'annulant sur les bords du domaine de définition. Si en continu les solutions de (I.4) vérifient automatiquement l'équation d'évolution de l'énergie (I.5), nous verrons au § I.2 que cette propriété n'est plus vraie dans le cas discret. Il devient alors nécessaire de considérer une composante temporelle  $\delta t$  pour obtenir l'équivalent discret de l'équation (I.5).

### I.1.3 Symplecticité

Un résultat fondamental de la mécanique lagrangienne est la conservation d'une 2-forme spécifique, appelée forme symplectique, par les trajectoires solutions des équations d'Euler-Lagrange. Afin d'énoncer cette propriété, on introduit d'abord la notion de flot lagrangien.

**Définition 2** (Flot lagrangien). Pour tout  $t$ , le flot lagrangien est l'application  $F_{\mathcal{L}}^t : J^1E \rightarrow J^1E$  définie pour toute condition initiale  $\psi_0 = (t_0, q_0, v_0)$  par

$$F_{\mathcal{L}}^t(\psi_0) = j^1\phi(t)$$

où  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange (I.4) vérifiant  $j^1\phi(t_0) = \psi_0$ .

**Propriété 1.** Le flot lagrangien est symplectique, c'est-à-dire que pour tout  $t$ ,  $F_{\mathcal{L}}^t$  vérifie

$$F_{\mathcal{L}}^t{}^* \Omega_{\mathcal{L}} = \Omega_{\mathcal{L}}$$

où  $\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$  est la forme symplectique.

*Démonstration.* Nous suivons le principe de la preuve proposée par Marsden et West [99]. Soit l'action restreinte  $\bar{\mathcal{A}} : J^1E \rightarrow \mathbb{R}$ , définie pour toute condition initiale  $\psi_0 = (t_0, q_0, v_0)$  par

$$\bar{\mathcal{A}}(\psi_0) = \int_{t_0}^{t_1} (j^1\phi)^* \mathcal{L}$$

où  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange (I.4) et vérifie  $j^1\phi(t_0) = \psi_0$ . Par définition, puisque  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange, le terme intégral de la variation d'action (I.3) s'annule. En écrivant de plus, par définition du flot  $F_{\mathcal{L}}^t$ , que  $j^1\phi(t_1) = j^1\phi^* F_{\mathcal{L}}^{t_1}(t_0)$ , la variation d'action  $\delta\mathcal{A} = d\mathcal{A}_{\phi}(Z)$  s'exprime alors pour tout champ de variation  $Z$  comme

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= (j^1\phi)^*(j^1Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}})(t_1) - (j^1\phi)^*(j^1Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}})(t_0) \\ &= (j^1\phi)^*(j^1Z \lrcorner F_{\mathcal{L}}^{t_1}{}^* \Theta_{\mathcal{L}})(t_0) - (j^1\phi)^*(j^1Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}})(t_0) \\ &= \left( j^1Z \lrcorner (F_{\mathcal{L}}^{t_1}{}^* \Theta_{\mathcal{L}} - \Theta_{\mathcal{L}}) \right) (\psi_0) \end{aligned}$$

Étant donné que l'action réduite  $\bar{\mathcal{A}}$  ne dépend que de la condition initiale  $\psi_0$ , on peut alors écrire à partir du calcul précédent que  $d\bar{\mathcal{A}} = F_{\mathcal{L}}^{t_1}{}^* \Theta_{\mathcal{L}} - \Theta_{\mathcal{L}}$ . Puisque  $dd\bar{\mathcal{A}} = 0$ , on en déduit, en utilisant la propriété  $d(F_{\mathcal{L}}^t{}^* \Theta_{\mathcal{L}}) = F_{\mathcal{L}}^t{}^* d\Theta_{\mathcal{L}}$ , que

$$0 = F_{\mathcal{L}}^{t_1}{}^* d\Theta_{\mathcal{L}} - d\Theta_{\mathcal{L}} = -F_{\mathcal{L}}^{t_1}{}^* \Omega_{\mathcal{L}} + \Omega_{\mathcal{L}}.$$

Ceci permet de conclure que la forme symplectique est conservé par le flot des équations d'Euler-Lagrange.  $\square$

L'exemple du pendule simple permet d'illustrer le caractère symplectique du flot lagrangien [47]. Le lagrangien de ce système est donné par

$$\mathcal{L}(q, v) = \frac{1}{2}v^2 + \cos(q) \tag{I.6}$$

où  $q$  est l'angle orienté formé par le pendule avec la verticale. L'équation d'Euler-Lagrange correspondante s'écrit

$$\ddot{q} + \sin(q) = 0. \tag{I.7}$$

L'expression de la forme symplectique s'obtient, en partant de la fomule (I.2), comme

$$\Omega_{\mathcal{L}} = dq \wedge dv - v dt \wedge dv - \sin(q) dt \wedge dq$$



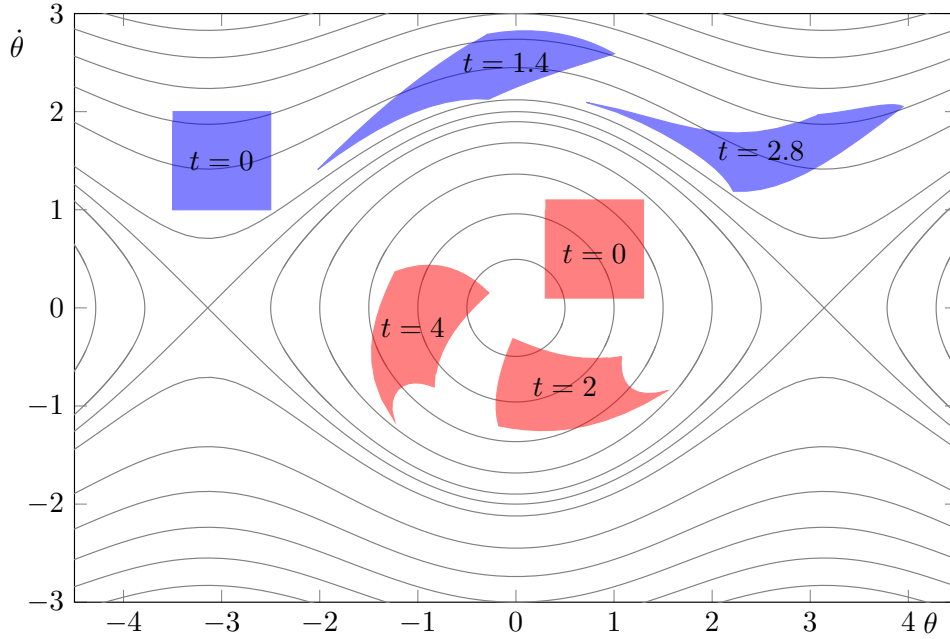


FIG. 1.2 Conservation de l'aire par le flot lagrangien dans l'espace des phases pour le pendule simple. Les carrés rouge et bleu, correspondant à deux ensembles de conditions initiales pour  $t = 0$ , sont transportés par le flot lagrangien  $F_{\mathcal{L}}^t$  à des dates successives.

En particulier, la restriction de cette forme dans l'espace des phases vaut  $dq \wedge dp$ , qui correspond à une mesure de l'aire. Pour cet exemple, la conservation de la forme symplectique se manifeste donc par la préservation des aires par le flot dans l'espace des phases. On peut vérifier cette propriété en figure 1.2, sur laquelle il apparaît clairement que la surface des carrés de conditions initiales, transportés à différentes dates par le flot, est conservée.

#### 1.1.4 Théorème de Noether

En mécanique, une symétrie naturelle du système considéré est un champ de variations qui laisse invariant son lagrangien. Le théorème de Noether montre alors qu'à toute symétrie correspond la préservation d'une quantité associée ; par exemple, à l'invariance du lagrangien par rotation spatiale arbitraire correspond la conservation du moment cinétique. On définit tout d'abord mathématiquement la notion de symétrie naturelle avant d'énoncer le théorème de Noether.

**Définition 3** (Symétrie naturelle). Une symétrie naturelle du système lagrangien est un champ de variations  $S \in \chi(E)$  laissant le lagrangien  $\mathcal{L}$  invariant

$$L_{j^1 S} \mathcal{L} = 0.$$

Ici,  $L_{j^1 S} \mathcal{L}$  est la dérivée de Lie de la 1-forme  $\mathcal{L}$  par le champ de vecteur  $j^1 S$  [23]. La

“formule magique” de Cartan permet en particulier d’écrire [130]

$$L_{j^1 S} \mathcal{L} = d(j^1 S \lrcorner \mathcal{L}) + j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}.$$

La variable  $S$ , utilisée pour dénoter une symétrie naturelle, représente un champ de variations, c’est à dire un objet de  $\chi(E)$ . Sa nature est donc la même que celle des champs notés précédemment  $Z$ . En suivant la convention proposée par Bensoam et Baugié [7], on utilise toutefois cette distinction d’écriture pour refléter dans la notation la discrimination entre champs de variations quelconques et champs de symétrie.

*Remarque 2.* Il est courant de rencontrer des systèmes physiques possédant des symétries verticales, c’est à dire qui agissent trivialement sur la variable de temps. C’est par exemple le cas de l’invariance par translation ou rotation dans l’espace des configurations  $Q$ . Dans ce cas, la condition d’invariance du lagrangien est simplifiée : soit  $S = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q \in \chi(E)$  un champ de variations vérifiant  $\delta t = 0$ , alors  $S$  est une symétrie naturelle du système lagrangien si et seulement si

$$j^1 S \lrcorner d\mathcal{L} = 0.$$

Cette équivalence se prouve en repartant de la définition 3 et en remarquant que  $j^1 S \lrcorner \mathcal{L} = 0$  car  $dt(j^1 S) = 0$ .

Nous disposons maintenant des outils pour énoncer le théorème de Noether [105].

**Théorème 1** (Théorème de Noether). *Soit  $S$  une symétrie du lagrangien, alors les solutions des équations d’Euler-Lagrange conservent le moment  $J_S$  défini par*

$$J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$$

*Démonstration.* La preuve est une conséquence directe de l’expression de la variation d’action. Considérons un champ de variations  $S \in \chi(E)$  symétrie du système, alors la variation d’action s’annule en vertu de la définition 3

$$\delta \mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} L_{j^1 S} \mathcal{L} = 0.$$

Cette égalité est vraie en particulier pour une trajectoire  $\phi$  solution des équations d’Euler-Lagrange (I.4), pour laquelle on vérifie par ailleurs à partir de l’expression (I.3) pour  $Z = S$

$$\delta \mathcal{A} = \left[ (j^1 \phi)^* (j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) \right]_{t_0}^{t_1} = \left[ (j^1 \phi)^* J_S \right]_{t_0}^{t_1}.$$

On peut donc conclure que toute solution des équations d’Euler-Lagrange conserve le moment  $J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$  au cours du temps.  $\square$

### I.1.5 Prise en compte des forces extérieures

En mécanique et en acoustique, de nombreux systèmes physiques mettent en jeu des phénomènes qui ne peuvent pas être décrits à l’aide d’un lagrangien : dissipation, frottements, forces de contrôle, etc. Cependant, il est possible de prendre en compte ces effets grâce à une extension du calcul variationnel à l’aide d’un principe de Lagrange-d’Alembert [72], [99].

Soit  $f : TQ \rightarrow T^*Q$  la fonction décrivant les forces lagrangiennes, le principe de Lagrange-d'Alembert consiste à chercher les trajectoires  $\phi$  vérifiant pour toute variation  $Z = \delta t \vec{\partial}_t + \delta q \vec{\partial}_q$  l'équation variationnelle

$$\delta \mathcal{A} + \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^*(f\zeta) dt = 0$$

où  $\zeta$  s'exprime à partir des composantes du champ  $Z$  comme  $\zeta = \delta q - v\delta t$ . Choisir des variations nulles sur les bords du domaine de définition permet alors de montrer que les trajectoires solutions vérifient les équation d'Euler-Lagrange forcées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} + f = 0 \quad (\text{I.8})$$

Ces équations remplacent les équations d'Euler-Lagrange (I.4). Les solutions vérifient également une équation d'évolution de l'énergie

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} v - \mathcal{L} \right) - f v = 0$$

obtenue par un procédé similaire à celui présenté au § I.1.2.

Les résultats de conservation obtenus précédemment par application du théorème de Noether ne sont plus valable lorsque des forces sont ajoutées au système à l'aide d'un principe de Lagrange-d'Alembert. Dans ce cas, l'existence d'une symétrie du lagrangien donne lieu à une loi pour le moment associé, qui quantifie l'évolution du moment sous l'action des forces correspondant au champ de symétrie.

**Propriété 2** (Loi d'évolution des moments). *Soit  $S \in \chi(E)$  une symétrie du lagrangien, alors pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange forcées (I.8) le moment  $J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$  vérifie la loi d'évolution*

$$j^1 \phi^* J_S(t) = j^1 \phi^* J_S(t_0) + \int_{t_0}^t (j^1 \phi)^*(f\zeta) dt$$

où  $\zeta = dq(S) - vdt(S)$ .

*Démonstration.* La preuve est en substance similaire à celle du théorème de Noether 1. Puisque  $S$  est symétrie du système, la variation d'action vérifie  $\delta \mathcal{A} = 0$ . Par ailleurs, pour  $\phi$  solution des équations d'Euler-Lagrange forcées (I.8), on écrit

$$\delta \mathcal{A} + \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^*(f\zeta) dt = \left[ j^1 \phi^* J_S \right]_{t_0}^{t_1}$$

On peut donc en déduire que  $J_S$  vérifie

$$\left[ j^1 \phi^* J_S \right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^*(f\zeta) dt$$

ce qui permet d'obtenir le résultat attendu.  $\square$

## I.2 Mécanique variationnelle discrète

Afin d'obtenir des solutions numériques aux problèmes de la physique en termes non seulement quantitatifs (i.e. d'erreur de convergence) mais également qualitatifs, il est souhaitable d'adopter une approche numérique qui reflète au mieux les structures physiques fondamentales des systèmes modélisés. La démarche proposée par la mécanique lagrangienne discrète repose sur la construction d'une version approchée du système considéré, à laquelle sont appliqués les outils du calcul variationnel. Il en résulte des solutions numériques qui vérifient les équivalents discrets des propriétés établies dans le cadre continu.

Nous rappelons ici les principaux résultats de la mécanique variationnelle discrète inspirés de Marsden et West [99]. La construction du présent paragraphe suit le cheminement de la version continue présentée au § I.1.

### I.2.1 Formulation variationnelle

On considère une discrétisation de l'intervalle de temps  $[0, T]$  par les dates  $\{t_i\}_{i=0}^I$  telles que  $t_0 = 0$  et  $t_I = T$ . Sauf mention du contraire, on considère que les dates ne sont pas fixées, et peuvent donc varier arbitrairement en vérifiant la condition  $t_i < t_{i+1}$  pour  $0 \leq i < I$ . Une section discrète  $\phi_d$  correspond alors à la donnée de  $I + 1$  paires de dates et positions  $\phi_i = (t_i, q_i)$  où  $q_i \in Q$ . Un champ de vecteur  $Z \in \chi(E)$  est discrétisé par échantillonnage sur les dates  $t_i$ , et on écrit alors  $Z_i = Z(t_i)$ . Enfin, on définira le relevé discret du champ pour deux dates successives  $t_i, t_{i+1}$  par  $j^1 Z(t_i, t_{i+1}) = (Z_i, Z_{i+1})$ .

On définit le lagrangien discret pour tout  $\phi_0 = (t_0, q_0)$ ,  $\phi_1 = (t_1, q_1)$  comme une approximation de l'intégrale d'action sur l'intervalle  $[t_0, t_1]$

$$\mathcal{L}_d(\phi_0, \phi_1) \approx \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^* \mathcal{L} \quad (\text{I.9})$$

où  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange (I.4) et vérifie  $\phi(t_0) = \phi_0$ ,  $\phi(t_1) = \phi_1$ . L'action discrète est définie pour une trajectoire discrète  $\phi_d$  par

$$\mathcal{A}_d(\phi_d) = \sum_{i=0}^{I-1} \mathcal{L}_d^i$$

dans laquelle l'intégrale de la formulation continue est remplacée par une somme, et où la notation raccourcie  $\mathcal{L}_d^i$  est définie par  $\mathcal{L}_d^i = \mathcal{L}_d(\phi_i, \phi_{i+1})$ .

Le choix du lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  détermine l'algorithme de la méthode numérique, qui découle du calcul des variations. Dans cette section, les résultats sont établis pour un lagrangien discret générique ; la procédure de discrétisation de l'intégrale d'action sera abordée au § I.3.

Dans le contexte de la mécanique lagrangienne discrète, le calcul des variations est mené en considérant des variations de dates et de positions  $Z_i = \delta t_i \vec{\partial}_t + \delta q_i \vec{\partial}_q$  pour tout  $i$ . La variation d'action discrète correspondante vaut alors

$$\delta \mathcal{A}_d = \sum_{i=0}^{I-1} \frac{\partial \mathcal{L}_d^i}{\partial t_i} \delta t_i + \frac{\partial \mathcal{L}_d^i}{\partial t_{i+1}} \delta t_{i+1} + \frac{\partial \mathcal{L}_d^i}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial \mathcal{L}_d^i}{\partial q_{i+1}} \delta q_{i+1}$$

Comme lors de l'établissement de l'expression de la variation d'action continue (I.1), on arrange la somme selon un terme "intégral" et deux termes de bords, ce qui revient ici à effectuer un réarrangement des indices de sommation au lieu d'une intégration par parties. On écrit alors

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_d &= \sum_{i=0}^{I-1} \frac{\partial\mathcal{L}_d^i}{\partial t_i} \delta t_i + \sum_{i=1}^I \frac{\partial\mathcal{L}_d^{i-1}}{\partial t_i} \delta t_i + \sum_{i=0}^{I-1} \frac{\partial\mathcal{L}_d^i}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^I \frac{\partial\mathcal{L}_d^{i-1}}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \left[ \left( \frac{\partial\mathcal{L}_d^i}{\partial t_i} + \frac{\partial\mathcal{L}_d^{i-1}}{\partial t_i} \right) \delta t_i + \left( \frac{\partial\mathcal{L}_d^i}{\partial q_i} + \frac{\partial\mathcal{L}_d^{i-1}}{\partial q_i} \right) \delta q_i \right] \\ &\quad + (j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^-)(\phi_0, \phi_1) + (j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^+)(\phi_{I-1}, \phi_I) \end{aligned} \quad (\text{I.10})$$

Ce calcul a naturellement mené à l'introduction des deux formes de Poincaré-Cartan discrètes  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^\pm$ , définies pour tout  $\phi_0, \phi_1$  comme les 1-formes différentielles

$$\Theta_{\mathcal{L}_d}^-(\phi_0, \phi_1) = \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial t_0}(\phi_0, \phi_1) dt_0 + \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial q_0}(\phi_0, \phi_1) dq_0 \quad (\text{I.11a})$$

$$\Theta_{\mathcal{L}_d}^+(\phi_0, \phi_1) = \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial t_1}(\phi_0, \phi_1) dt_1 + \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial q_1}(\phi_0, \phi_1) dq_1 \quad (\text{I.11b})$$

Les résultats de la mécanique variationnelle continue obtenus précédemment seront établis dans leur version discrète à partir de l'exploitation de l'expression de la variation d'action (I.10).

## I.2.2 Équations d'Euler-Lagrange

Le principe de Hamilton est appliqué en considérant des variations  $\delta t_i, \delta q_i$  nulles sur le bord du domaine de définition, et arbitraires ailleurs. L'annulation de la variation d'action  $\delta\mathcal{A}_d$  donne alors pour tout  $1 \leq i \leq I-1$  les équations d'Euler-Lagrange discrètes

$$\frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_{i-1}, \phi_i) = 0 \quad (\text{I.12})$$

ainsi que l'équation d'évolution de l'énergie

$$\frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial t_i}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial\mathcal{L}_d}{\partial t_i}(\phi_{i-1}, \phi_i) = 0. \quad (\text{I.13})$$

Ces deux équations, associées au choix d'un lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  approchant l'intégrale d'action (I.9), définissent un schéma numérique donnant une solution approchée au problème continu.

Contrairement au cas continu, il n'est pas possible ici d'affirmer que la solution numérique de l'équation d'Euler-Lagrange (I.12) vérifie nécessairement l'équation (I.13) également. Nous proposons d'illustrer cette propriété à la lumière de l'exemple du pendule simple. On définit pour cela le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  à l'aide d'une méthode des rectangles tel que pour tout  $\phi_0 = (t_0, q_0), \phi_1 = (t_1, q_1)$

$$\mathcal{L}_d(\phi_0, \phi_1) = (t_1 - t_0) \mathcal{L} \left( t_0, q_0, \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \right)$$

où la dérivée  $\dot{q}(t_0)$  est approchée par un accroissement fini. On rappelle par ailleurs que le lagrangien  $\mathcal{L}$  du pendule est donné par l'expression (I.6). Les équations (I.12) (I.13) s'écrivent pour ce choix de lagrangien discret

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + (t_{i+1} - t_i) \sin(q_i) = 0 \quad (\text{I.14a})$$

$$\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_{i+1} - q_i}{t_{i+1} - t_i} \right)^2 - \cos(q_i) \right] - \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{q_i - q_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \right)^2 - \cos(q_{i-1}) \right] = 0 \quad (\text{I.14b})$$

La solution des équations (I.14a) et (I.14b) calculée pour les conditions initiales  $(q_0, v_0) = (0, 2.5)$  est représentée dans l'espace des phases en figure I.3a. Comme on peut l'observer en figure I.3b, l'énergie totale  $E_d$  est conservée à erreur machine près, où  $E_d$  est définie par

$$E_d(t_0, q_0, t_1, q_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0} \right)^2 - \cos(q_0).$$

Cette expression, que l'on reconnaît dans l'équation (I.14b), est obtenue en définissant  $E_d = j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^-$  pour  $Z = \vec{\partial}_t$ ; nous verrons au § I.2.4 avec l'énoncé du théorème de Noether que cette définition de l'énergie discrète et sa conservation par les solutions numériques peuvent être établies comme la conséquence de l'invariance du système par translation temporelle — d'où l'expression du champ  $Z = \vec{\partial}_t$ .

À l'inverse de la solution des équations (I.14a) et (I.14b), on vérifie sur la figure I.3c que la solution numérique de l'équation (I.14a) calculée pour les mêmes conditions initiales et un pas de temps constant  $t_{i+1} - t_i = h = 0.05$  ne conserve pas l'énergie totale. Toutefois, on peut noter que, si l'énergie n'est pas constante, elle oscille dans un intervalle borné et semble ne pas diverger. Cette propriété remarquable découle du caractère symplectique de l'intégrateur défini par l'équation d'Euler-Lagrange discrète (I.12), dont la définition est l'objet du prochain paragraphe.

*Remarque 3.* Il est à noter qu'il n'est pas garanti en général que l'équation d'évolution de l'énergie (I.5) puisse être résolue, en particulier près des points stationnaires. Cette question est notamment discutée dans Kane *et al.* [69] et Lew *et al.* [87]. Dans ce cas, il est possible en pratique de remplacer la vérification de l'équation (I.5) par un problème de minimisation local de l'erreur sur la variation d'énergie [83].

### I.2.3 Symplecticité

Il a été vu au § I.1.3 que les solutions des équations d'Euler-Lagrange (I.4) conservent la forme symplectique  $\Omega_{\mathcal{L}}$ . En mécanique discrète, un équivalent de cette propriété peut être formulée à l'aide du flot numérique des équations (I.12) et (I.13).

**Définition 4** (Flot numérique). Le flot numérique  $F_{\mathcal{L}_d}$  associé au lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  est défini pour tout  $\phi_{i-1} = (t_{i-1}, q_{i-1})$ ,  $\phi_i = (t_i, q_i)$  par

$$F_{\mathcal{L}_d}(\phi_{i-1}, \phi_i) = (\phi_i, \phi_{i+1})$$

où  $\phi_{i+1}$  est solutions des équations (I.12), (I.13) pour  $\phi_{i-1}$ ,  $\phi_i$ . On notera  $F_{\mathcal{L}_d}^n$  la  $n$ -ème composition du flot avec lui-même, de telle sorte que

$$F_{\mathcal{L}_d}^n(\phi_i, \phi_{i+1}) = (\phi_{i+n}, \phi_{i+n+1})$$

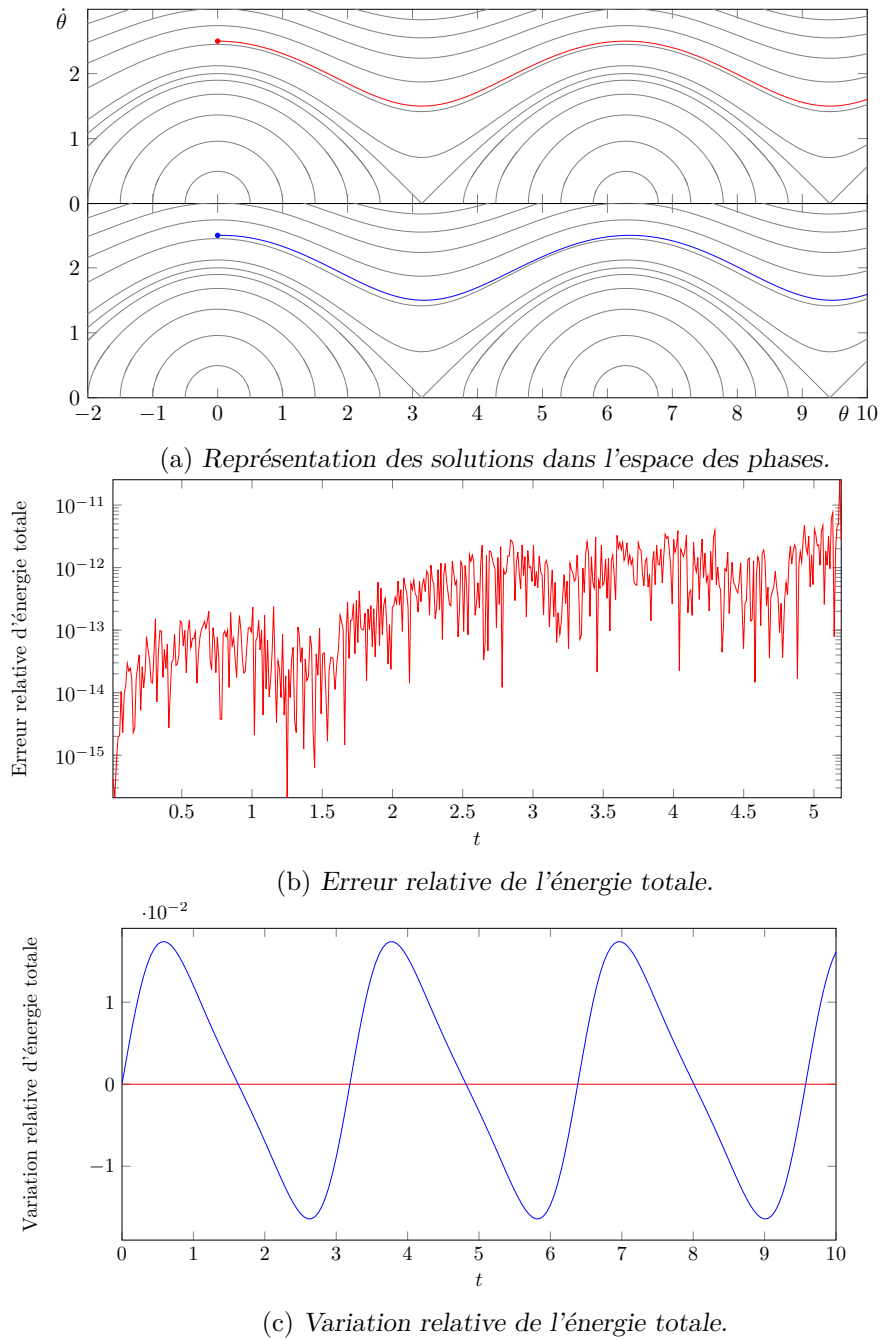


FIG. I.3 Vérifier les équations d'Euler-Lagrange discrètes ne suffit pas à conserver l'énergie : solutions numériques des équations (I.14a) et (I.14b) (rouge) et de l'équation (I.14a) pour un pas constant  $h = 0.05$  (bleu) pour la condition initiale  $(q_0, v_0) = (0, 2.5)$ . L'énergie de la solution rouge implémentant l'équation (I.14b) est conservée à erreur machine près, tandis que celle de la solution bleue oscille dans un voisinage de la valeur exacte.

Tout comme pour la formulation continue, le flot  $F_{\mathcal{L}_d}$  conserve une forme symplectique discrète qui découle du calcul des variations. Les intégrateurs construits à partir de la variation de l'action discrète et les solutions numériques qu'ils produisent sont alors dit symplectiques.

**Propriété 3.** *Le flot discret  $F_{\mathcal{L}_d}$  est symplectique, c'est-à-dire qu'il vérifie*

$$F_{\mathcal{L}_d}^* \Omega_{\mathcal{L}_d} = \Omega_{\mathcal{L}_d}$$

où  $\Omega_{\mathcal{L}_d}$  est la forme symplectique discrète.

Dans le cas continu, la forme symplectique a été définie en prenant la différentielle de la forme de Poincaré-Cartan  $\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$ . Or, il existe dans le cas discret deux formes distinctes  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^-$  et  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^+$  données respectivement par les expressions (I.11a) et (I.11b). Cependant, en remarquant que

$$d\mathcal{L}_d = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial t_0} dt_0 + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_0} dq_0 + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial t_1} dt_1 + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_1} dq_1 = \Theta_{\mathcal{L}_d}^- + \Theta_{\mathcal{L}_d}^+$$

et sachant que  $dd\mathcal{L}_d = 0$ , on vérifie la propriété  $d\Theta_{\mathcal{L}_d}^- + d\Theta_{\mathcal{L}_d}^+ = 0$ . Cela permet finalement de définir la 2-forme symplectique discrète  $\Omega_{\mathcal{L}_d}$  comme

$$\Omega_{\mathcal{L}_d} = -d\Theta_{\mathcal{L}_d}^- = d\Theta_{\mathcal{L}_d}^+.$$

On donne maintenant la preuve de la propriété 3.

*Démonstration.* La preuve de cette propriété est similaire à celle de son analogue continu la propriété 1 [99]. Soit l'action restreinte discrète

$$\tilde{\mathcal{A}}_d(\phi_0, \phi_1) = \mathcal{A}_d(\phi_d)$$

où  $\phi_d$  est solution des équations (I.12) (I.13) vérifiant  $\phi_d(t_0) = \phi_0$  et  $\phi_d(t_1) = \phi_1$ , la variation d'action restreinte vérifie alors

$$\delta \tilde{\mathcal{A}}_d = \left( j^1 Z_{\lrcorner} \Theta_{\mathcal{L}_d}^- \right) (\phi_0, \phi_1) + \left( j^1 Z_{\lrcorner} F_{\mathcal{L}_d}^{I-1*} \Theta_{\mathcal{L}_d}^+ \right) (\phi_0, \phi_1)$$

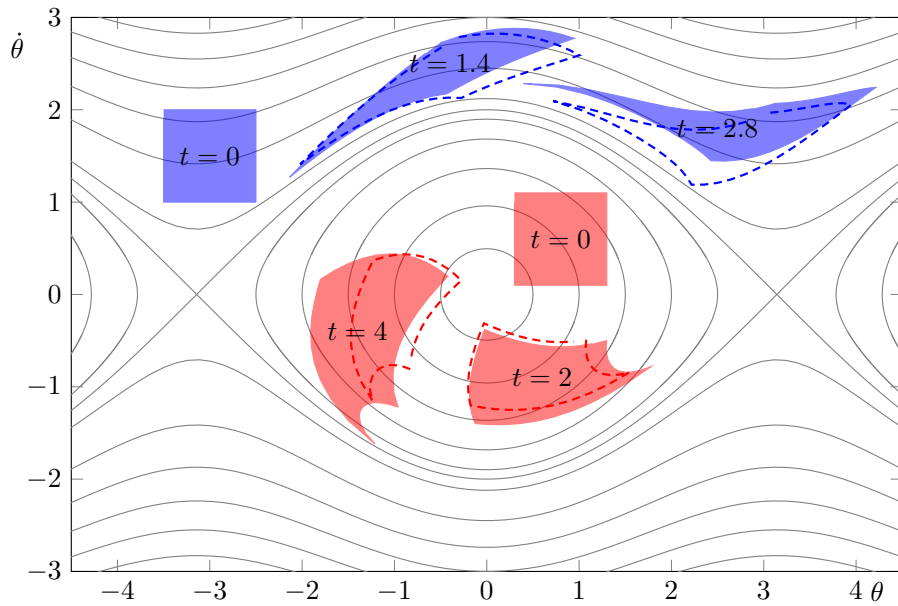
Puisque par définition  $dd\tilde{\mathcal{A}}_d = 0$ , on a finalement

$$F_{\mathcal{L}_d}^{I-1*} \Omega_{\mathcal{L}_d} = \Omega_{\mathcal{L}_d}.$$

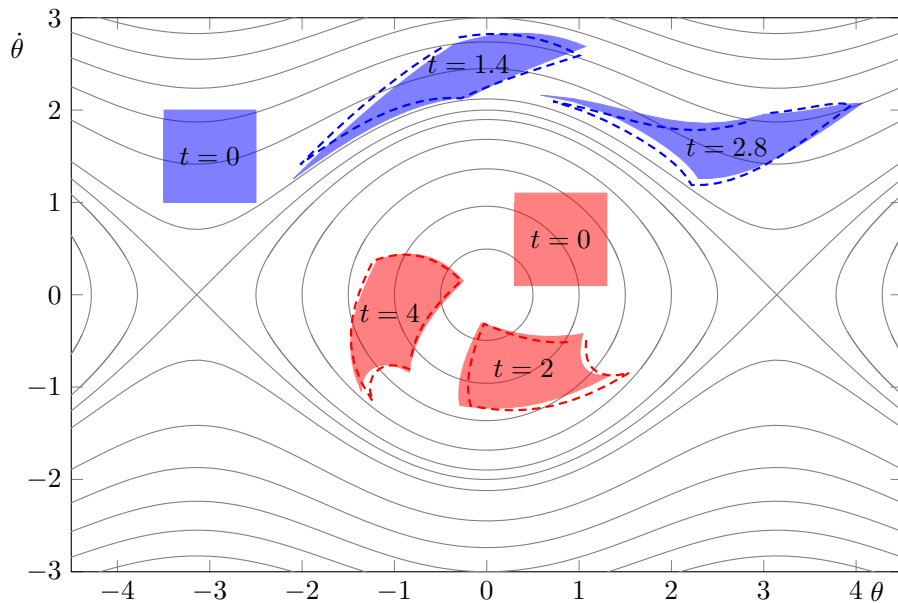
Cette démonstration étant vraie pour tout  $I$ , on peut en particulier l'écrire pour  $I = 2$  ce qui donne le résultat attendu.  $\square$

Pour illustrer la propriété de symplecticité des méthodes variationnelles lagrangiennes, on reprend l'exemple du pendule simple proposé au § I.1.3. Les solutions numériques obtenues par deux méthodes distinctes sont représentées en figure I.4. La première est une méthode d'Euler explicite, discrétisant directement l'équation différentielle continue décrivant la dynamique du pendule (I.7); il est clair d'après la figure I.4a que le flot de ce schéma numérique ne conserve pas les aires dans l'espace des phases, ce qui est la manifestation du fait qu'il n'est pas symplectique. Au contraire, la méthode d'Euler





(a) Méthode d'Euler explicite.



(b) Méthode d'Euler symplectique.

FIG. I.4 Évolution d'un ensemble de conditions initiales dans l'espace des phases par le flot numérique pour le pendule simple : en haut, la méthode d'Euler explicite ne conserve pas l'aire ; en bas, la méthode d'Euler symplectique la conserve. Pour les deux méthodes,  $h = 0.2$ . Les aires représentant les conditions initiales en  $t = 0$  sont transportées en par le flot numérique à des dates successives. Les solutions exactes sont données en point-tillés pour comparaison (voir figure I.2).

symplectique, obtenue par calcul des variations d'un lagrangien discret, conserve bien les aires dans l'espace des phases comme on peut l'observer en figure I.4b.

Le caractère symplectique des solutions numériques a une conséquence importante relative à la conservation de l'énergie totale du système. On considère ici des intégrateurs définis à partir de la seule équation d'Euler-Lagrange discrète (I.12) pour un pas de temps  $h$  constant. Dans ce cas, l'équation d'évolution de l'énergie (I.13) n'est a priori pas vérifiée. Or, étant donné un lagrangien  $\mathcal{L}$ , on peut montrer que définir un intégrateur variationnel symplectique revient à résoudre un système modifié  $\tilde{\mathcal{L}}$  approchant  $\mathcal{L}$  à un certain ordre [86], [87]. Cela a en particulier pour conséquence la conservation approximative de l'énergie du système, au sens où cette dernière est conservée à un certain ordre près et évolue typiquement dans un voisinage de sa véritable valeur. Cette propriété est généralement présentée dans la formulation hamiltonienne de la mécanique à l'aide de la procédure de *backward error analysis* [118]. On renvoie à Hairer, Lubich et Wanner [47] pour le traitement de cette question.

Dans l'exemple du pendule simple, la conservation approximative de l'énergie est mise en évidence par la figure I.5 : la méthode d'Euler explicite ajoute numériquement de l'énergie au système, tandis que la méthode d'Euler symplectique, implémentant l'équation (I.14a), donne une trajectoire dont l'énergie varie autour de la valeur exacte.

#### I.2.4 Théorème de Noether

Afin d'appliquer le théorème de Noether, on définit la notion de symétrie dans le contexte de la mécanique lagrangienne discrète.

**Définition 5** (Symétrie du lagrangien discret). Une symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}_d$  est un champ de variations discrètes  $S$  vérifiant

$$j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}_d = 0.$$

*Remarque 4.* Rien ne permet *a priori* d'assurer que le lagrangien discret hérite des symétries du lagrangien continu ; la vérification de cette propriété dépend de la manière dont le lagrangien discret est défini. Réciproquement, dans le cas où le système discret présente une symétrie, il n'est pas garanti que celle-ci soit la traduction d'une symétrie du système continu. Cependant, on peut prouver que certaines symétries sont toujours reflétées par le lagrangien discret sous certaines hypothèses (voir par exemple Leok [82], [83]).

On énonce maintenant le théorème de Noether discret.

**Théorème 2.** Soit  $S$  un champ de symétrie du lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$ , alors le flot numérique des équations d'Euler-Lagrange discrètes conserve le moment  $J_S$  défini par

$$J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^+.$$

*Démonstration.* Soit  $S$  un champ de symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}_d$  on vérifie alors

$$0 = j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}_d = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^- + j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^+.$$

Soient les moments  $J_S^\pm = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^\pm$ , il vérifient alors en vertu de l'équation précédente l'égalité

$$J_S^+ = -J_S^-.$$

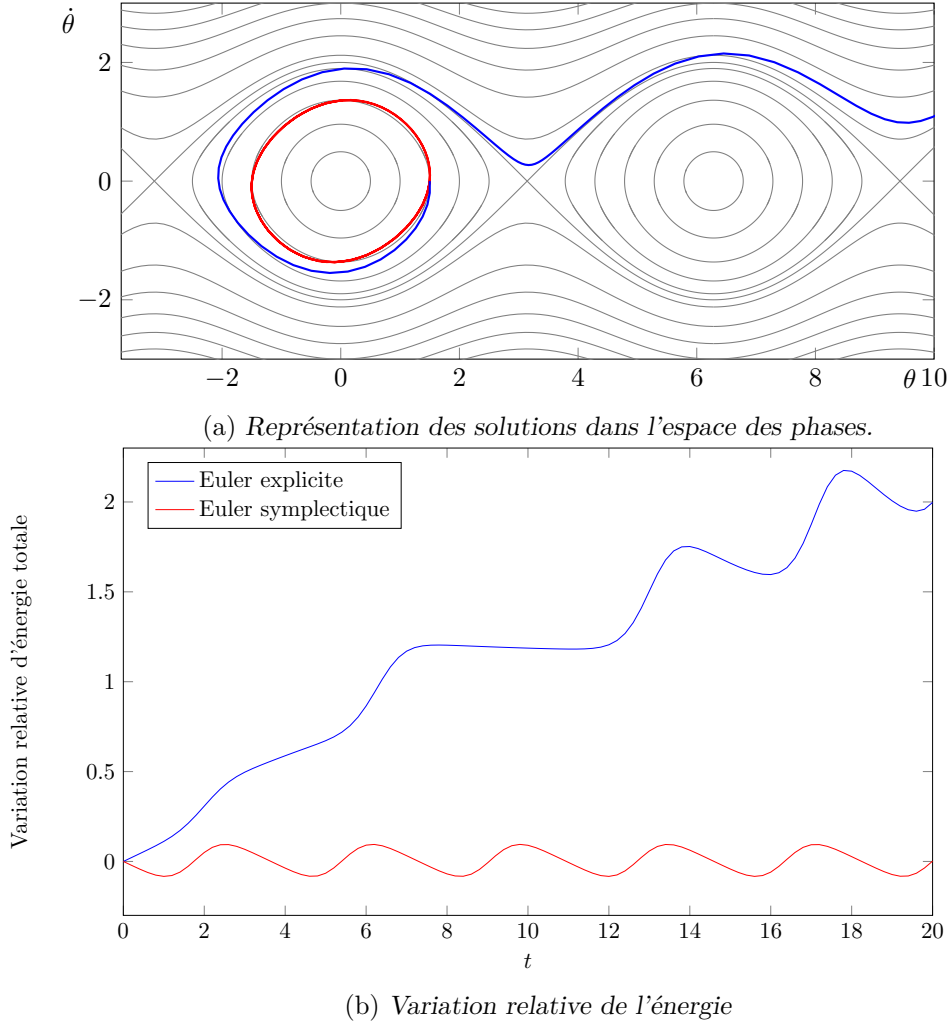


FIG. 1.5 Solutions numériques calculées par méthodes d'Euler explicite (bleu) et Euler symplectique (rouge) pour la condition initiale  $(q_0, v_0) = (1.5, 0)$  et un pas de temps  $h = 0.2$ . La méthode symplectique conserve approximativement l'énergie totale, tandis que la méthode explicite crée numériquement de l'énergie.

Étant donné  $\phi_d$  une solution des équations d'Euler-Lagrange discrètes (I.12) et de l'équation d'évolution (I.13), la variation d'action s'écrit

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{A}_d &= \left( j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^- \right) (\phi_0, \phi_1) + \left( j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^+ \right) (\phi_{I-1}, \phi_I) \\
 &= J_S^- (\phi_0, \phi_1) + J_S^+ (\phi_{I-1}, \phi_I) = \left[ J_S^- + F_{\mathcal{L}_d}^{I-1*} J_S^+ \right] (\phi_0, \phi_1) \\
 &= \left[ -J_S^+ + F_{\mathcal{L}_d}^{I-1*} J_S^+ \right] (\phi_0, \phi_1)
 \end{aligned}$$

Par ailleurs,  $S$  étant une symétrie du lagrangien, on a

$$\delta \mathcal{A}_d = \sum_{i=0}^{I-1} (j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}_d) (\phi_i, \phi_{i+1}) = 0.$$

On conclut alors en écrivant  $J_S = J_S^+ = -J_S^-$  que

$$F_{\mathcal{L}_d}^{I-1*} J_S = J_S$$

ce qui donne le résultat voulu.  $\square$

### 1.2.5 Prise en compte des forces extérieures

Dans ce paragraphe, on se restreint à ne considérer que des champs de variations verticaux  $Z = \delta q \vec{\partial}_q$ . De ce fait, l'application d'un principe de Lagrange-d'Alembert discret ne permet que l'obtention des équations d'Euler-Lagrange forcées, mais pas de l'équation d'évolution de l'énergie.

La prise en compte de phénomènes modélisés par la force lagrangienne  $f : TQ \rightarrow T^*Q$  peut se faire dans le cadre de la mécanique variationnelle discrète. La méthode proposée par Kane, Marsden, Ortiz et West [70] consiste à définir deux fonctions  $f_d^\pm$  discrétisant respectivement les intégrales

$$\begin{aligned} f_d^+(\phi_0, \phi_1) &\approx \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^* \left[ f \cdot \frac{\partial q}{\partial q_1} \right] dt \\ f_d^-(\phi_0, \phi_1) &\approx \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^* \left[ f \cdot \frac{\partial q}{\partial q_0} \right] dt \end{aligned}$$

où  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange forcées (I.8) et vérifie  $\phi(t_0) = (t_0, q_0)$  et  $\phi(t_1) = (t_1, q_1)$ . Le principe de Lagrange d'Alembert discret consiste alors à chercher la solution de l'équation

$$\delta \mathcal{A}_d + \sum_{i=0}^{I-1} \left[ f_d^-(\phi_i, \phi_{i+1}) \cdot \delta q_i + f_d^+(\phi_i, \phi_{i+1}) \cdot \delta q_{i+1} \right] = 0$$

pour toute variation verticale  $\delta q_i$  nulle aux bords du domaine de définition. Un réarrangement des indices de sommation pour le terme de droite donne

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{I-1} \left[ f_d^-(\phi_i, \phi_{i+1}) \cdot \delta q_i + f_d^+(\phi_i, \phi_{i+1}) \cdot \delta q_{i+1} \right] \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \left[ f_d^-(\phi_i, \phi_{i+1}) + f_d^+(\phi_{i-1}, \phi_i) \right] \cdot \delta q_i + f_d^-(\phi_0, \phi_1) \cdot \delta q_0 + f_d^+(\phi_{I-1}, \phi_I) \cdot \delta q_I \end{aligned}$$

En utilisant l'expression (I.10) de la variation d'action et la somme précédente, il vient que toute solution du principe de Lagrange-d'Alembert vérifie les équations d'Euler-Lagrange forcées discrètes

$$\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_{i-1}, \phi_i) + f_d^-(\phi_i, \phi_{i+1}) + f_d^+(\phi_{i-1}, \phi_i) = 0$$

## 1.3 Intégrateurs variationnels

Dans le § I.2, les résultats ont été énoncés pour un lagrangien discret générique  $\mathcal{L}_d$ . En toute généralité, le lagrangien discret approche l'intégrale d'action à l'ordre  $r$  si

$$\mathcal{L}_d(\phi_0, \phi_1) = \int_{t_0}^{t_1} (j^1 \phi)^* \mathcal{L} + O(|t_1 - t_0|^{r+1})$$

où  $\phi$  est solution des équations d'Euler-Lagrange (I.4) vérifiant  $\phi(t_0) = (t_0, q_0)$  et  $\phi(t_1) = (t_1, q_1)$ . L'ordre du flot numérique associé au lagrangien discret est alors également d'ordre  $r$  [99]. Définir un intégrateur numérique variationnel revient donc à définir un lagrangien discret.

La procédure d'approximation de l'intégrale d'action nécessite deux étapes :

1. la restriction de l'espace des solutions sur une base de dimension finie
2. la donnée d'une méthode de quadrature de l'intégrale

L'approche que nous choisissons de présenter dans les paragraphes suivants pour discrétiser l'espace des solutions consiste à considérer des trajectoires continues et dérivables par morceaux, paramétrisables par un ensemble de points de contrôles. Cette approche est motivée par le fait que les solutions numériques peuvent alors être traitées dans chaque sous-intervalle de temps de façon analytique, en particulier pour définir l'opération de dérivation. Toutefois, d'autres méthodes d'approximation du lagrangien discret faisant l'économie de ces hypothèses existent : on renvoie à Marsden et West [99] pour une revue de différentes méthodes d'intégration, ou encore aux travaux de Patrick, Cuell, Spiteri et Zhang [110] qui proposent une procédure pour construire un intégrateur variationnel à partir de n'importe quel type de méthode numérique.

Le § I.3.1 est consacré à la définition et à l'étude de deux exemples d'intégrateurs variationnels d'ordre 1 et 2. Ceux-ci ont l'avantage d'être simples à construire et implémenter, et reposent sur des principes de discrétisation répandus. Le § I.3.2 introduit les intégrateurs variationnels de Galerkin, qui permettent d'implémenter des méthodes numériques d'ordre arbitraire. Ce gain en ordre numérique nécessite la définition de points de contrôle à l'intérieur des sous-intervalles, et l'élaboration d'un problème d'optimisation local devant être résolu à chaque pas de temps.

### I.3.1 Intégrateurs variationnels d'ordre faible

On propose ici deux exemples introductifs d'intégrateurs variationnels, obtenus par l'application d'une quadrature par méthode des rectangles (§ I.3.1.1) et du point milieu (§ I.3.1.2). Les ordres de l'approximation des deux lagrangiens discrets sont établis.

#### I.3.1.1 Méthode des rectangles

La méthode des rectangles a déjà été évoquée au § I.2.2, où elle a été utilisée pour calculer une solution numérique au problème du pendule. Le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d^{rec}$  est construit en restreignant les trajectoires à des fonctions affines par morceaux et en approchant l'intégrale d'action par une méthode des rectangles à gauche (voir figure I.6). On a alors

$$q|_{[t_0, t_1]}(t) \approx q_0 + (q_1 - q_0) \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}, \quad \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \approx (t_1 - t_0) \mathcal{L}(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0))$$

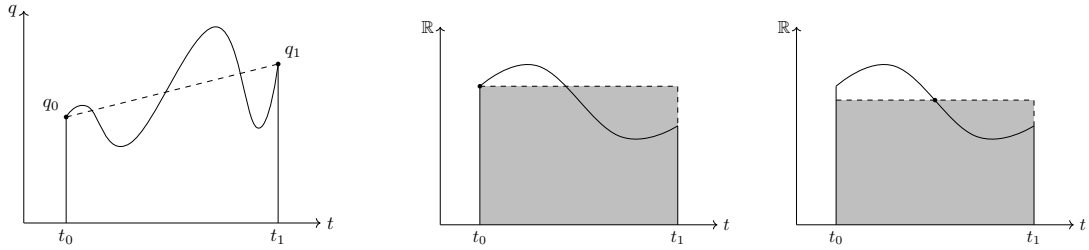
La dérivée de la trajectoire approchée est donnée par un accroissement fini, et le lagrangien discret s'écrit alors

$$\mathcal{L}_d^{rec}(t_0, q_0, t_1, q_1) = (t_1 - t_0) \mathcal{L}\left(t_0, q_0, \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0}\right)$$

On vérifie à l'aide d'un développement limité de l'intégrale d'action l'ordre du lagrangien discret. En posant  $h = t_1 - t_0$  et en effectuant le changement de variable  $\tau = t - t_0$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt &= \int_0^h \mathcal{L}(t_0 + \tau, q(t_0 + \tau), \dot{q}(t_0 + \tau)) d\tau \\ &= h \mathcal{L}(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0)) \\ &\quad + \frac{h^2}{2} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right] (t_0) + O(h^3) \\ &= \mathcal{L}_d^{rec}(\phi_0, \phi_1) + O(h^2) \end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que le lagrangien  $\mathcal{L}_d^{rec}$  est exactement d'ordre 1.



(a) Approximation affine des trajectoires.

(b) Quadrature d'intégrale par méthode du rectangle (gauche) et du point milieu (droite).

FIG. I.6 Les lagrangiens discrets  $\mathcal{L}_d^{rec}$  et  $\mathcal{L}_d^{mid}$  sont définis en effectuant une interpolation affine des trajectoires (I.6a) et une méthode de quadrature du rectangle et du point milieu respectivement (I.6b).

### I.3.1.2 Méthode du point milieu

La différence entre la méthode du point milieu et la méthode des rectangles réside dans le choix de la quadrature de l'intégrale d'action, tandis que les trajectoires sont également approchées par des fonctions affines par morceaux (voir figure I.6). En l'occurrence, la méthode du point milieu est obtenue en définissant

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt \approx (t_1 - t_0) \mathcal{L}\left(t_{1/2}, q(t_{1/2}), \dot{q}(t_{1/2})\right)$$

où  $t_{1/2} = (t_0 + t_1)/2$  est le milieu de l'intervalle de temps. En approchant la trajectoire par une fonction affine, on obtient le lagrangien discret

$$\mathcal{L}_d^{mid}(\phi_0, \phi_1) = h \mathcal{L}\left(t_{1/2}, \frac{q_0 + q_1}{2}, \frac{q_1 - q_0}{t_1 - t_0}\right)$$

L'ordre du lagrangien discret s'établit à partir du développement limité suivant, dans lequel on définit  $h = t_1 - t_0$  et on effectue le changement de variable  $\tau = \frac{1}{2}(t_0 + t_1)$

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{-h/2}^{h/2} \mathcal{L}\left(t_{1/2} + \tau, q(t_{1/2} + \tau), \dot{q}(t_{1/2} + \tau)\right) d\tau$$

$$\begin{aligned}
&= h\mathcal{L}\left(t_{1/2}, q(t_{1/2}), \dot{q}(t_{1/2})\right) \\
&\quad + \frac{1}{8}\left((h)^2 - (-h)^2\right)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\ddot{q}\right](t_{1/2}) + O(h^3) \\
&= \mathcal{L}_d^{mid}(\phi_0, \phi_1) + O(h^3)
\end{aligned}$$

Le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d^{mid}$  est donc au moins d'ordre 2 (pousser le développement un terme plus loin permet de montrer qu'il est exactement d'ordre 2).

Ces deux exemples de lagrangiens discrets mettent en jeu des principes simples. Cependant, l'ordre des méthodes numériques résultantes est limité à des degrés faibles. L'objet du paragraphe suivant est d'introduire une famille de méthode variationnelles d'ordre arbitraire.

### 1.3.2 Méthodes variationnelles de Galerkin

On rappelle que le lagrangien discret doit être défini de façon à établir une approximation de l'action sur un petit intervalle de temps. L'approche utilisée pour construire les méthodes de Galerkin consiste à interpoler localement les trajectoires sur une base de dimension finie, et à évaluer l'intégrale d'action à l'aide d'une méthode de quadrature. En choisissant le degré de l'interpolation et l'ordre de la quadrature, il est possible de construire des schémas numériques d'ordre arbitrairement élevé.

Les méthodes variationnelles de Galerkin proposées par Marsden et West [99] tirent leur origine des travaux sur les méthodes de Galerkin de Estep et French [37], Hulme [57], [58] et Thomée [127]. Ces constructions ont ensuite été étendues et systématisées par Leok [82], [83], [85]. L'étude de la convergence des intégrateurs de Galerkin est l'objet des travaux de Hall [49], [50] et Ober-Blöbaum et Saake [109].

Dans la suite, on considère que les dates  $t_i$  sont fixes et vérifient  $t_i = ih$ . La généralisation de la construction des méthodes à pas de temps fixe en des méthodes variationnelles de Galerkin à pas de temps adaptatifs est proposée par Leok [83]. Dans notre cas, l'équation d'évolution de l'énergie (I.13) n'est *a priori* pas vérifiée. En pratique toutefois, la variation d'énergie, liée à l'ordre de la méthode, devient rapidement très faible. Aussi, pour maintenir l'erreur de l'énergie sous un certain seuil, il ne semble pas nécessairement évident de privilégier la prise en compte de la variation des pas de temps, qui engendre une difficulté additionnelle et double le nombre d'équations à résoudre, par rapport à une méthode à pas fixe de précision suffisante.

#### 1.3.2.1 Espace des trajectoires

L'espace des trajectoires est approché par l'ensemble des trajectoires continues définies à partir d'une base de fonctions d'ordre  $M + 1$  sur chaque sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ . Chaque trajectoire est localement paramétrée par les points de contrôle  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  associés aux fonctions de base  $\varphi_\mu$ , permet d'écrire simplement l'expression de  $\tilde{q}_i$  sur  $[t_i, t_{i+1}]$  comme

$$\tilde{q}_i = \sum_{\mu=0}^M q_i^\mu \varphi_\mu.$$

Une trajectoire  $\tilde{q} : [0, T] \rightarrow Q$  définie sur l'ensemble de l'intervalle temporel s'exprime sur chaque sous intervalle à partir de l'interpolation locale  $\tilde{q}_i$ , ce qui donne pour tout

$t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\tilde{q}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) = \tilde{q}_i(t).$$

Pour assurer la continuité de  $\tilde{q}$  sur les points du maillage global, on écrit pour tout  $0 < i < I$  la condition

$$\tilde{q}_i(t_i) = \tilde{q}_{i-1}(t_i) = q_i.$$

### I.3.2.2 Quadrature de l'intégrale d'action

La seconde étape vers la définition du lagrangien discret consiste à choisir une quadrature de l'intégrale d'action locale évaluée sur l'espace des trajectoires approchées. En se munissant d'une quadrature  $(w_a, c_a)_{a=1}^A$  de l'intervalle  $[0, 1]$ , où les  $c_a$  sont les points de quadrature et  $w_a$  les poids correspondants, on approche l'intégrale d'action par la somme suivante

$$\tilde{\mathcal{A}}_i(\{q_i^\mu\}) = \sum_{a=1}^A h w_a \mathcal{L}(\tilde{q}_i(t_i + c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(t_i + c_a h)) \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt.$$

Cette construction est résumée par la figure I.7.

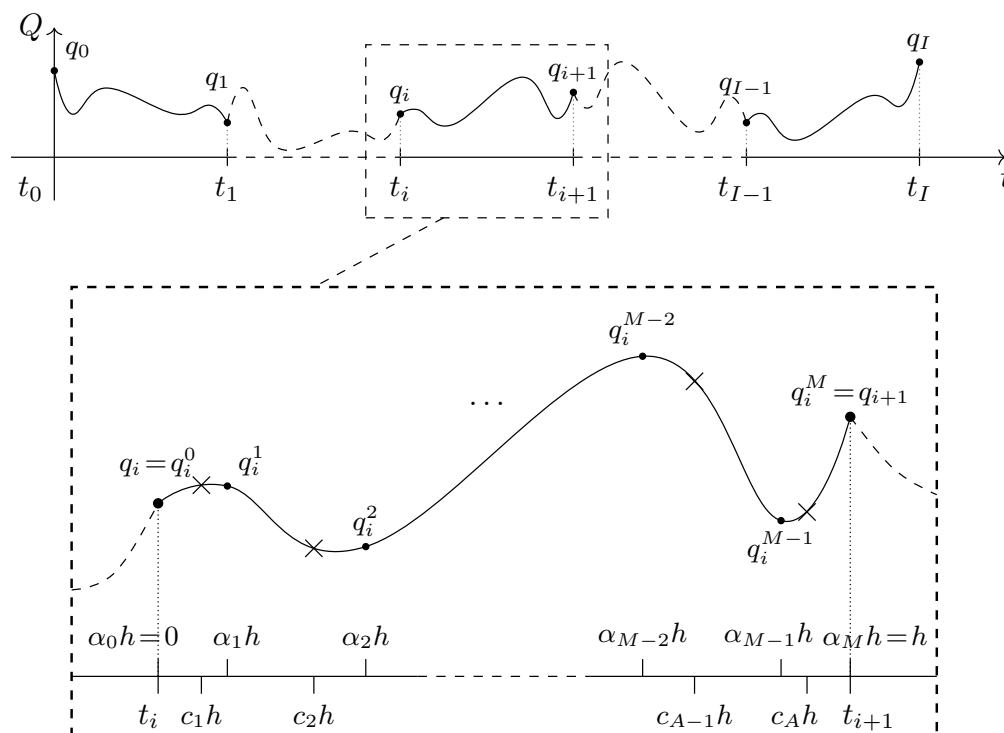


FIG. I.7 Principe de l'interpolation polynômiale. Entre chaque paire de points principaux  $q_i, q_{i+1}$ , la trajectoire est interpolée par un polynôme passant par les points de contrôle  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  associés aux dates  $\alpha_\mu h$ . Les évaluations pour la quadrature, indiquées par une croix, se font aux dates  $\{c_a h\}_{a=1}^A$ .



### I.3.2.3 Définition du lagrangien discret

À partir de la construction de l'approximation de l'intégrale d'action précédente, le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R}$  peut être défini pour tout paire de positions  $q_i, q_{i+1}$  comme solution d'un problème d'optimisation locale consistant à chercher sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  l'extrémal de l'action pour les trajectoires polynomiales vérifiant  $\tilde{q}_i(t_i) = q_i, \tilde{q}_i(t_{i+1}) = q_{i+1}$

$$\mathcal{L}_d(q_i, q_{i+1}) = \underset{\substack{\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M / \tilde{q}_i(t_i)=q_i \\ \tilde{q}_i(t_{i+1})=q_{i+1}}}{\text{ext}} \sum_{a=1}^A h w_a \mathcal{L}(\tilde{q}_i(t_i + c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(t_i + c_a h)) \quad (\text{I.15})$$

Le lagrangien discret est donc défini de façon implicite à partir des points de contrôle  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$ .

### I.3.2.4 Choix des points d'interpolation et de la quadrature

En pratique, le choix des fonctions de base  $\varphi_\mu$  peut être adapté selon le problème étudié. Nous choisissons de considérer une interpolation polynômiale des trajectoires, adaptée à une large classe de systèmes [49], [109], [135]. Dans le cadre de la modélisation pour l'acoustique, il serait également souhaitable de considérer des fonctions de base multiéchelles, développées dans le cadre des méthodes par éléments finis par Hou *et al.* [22], [56], qui permette de traiter de systèmes mettant en jeu des phénomènes évoluant sur différentes échelles spatio-temporelles. On pourra par exemple se référer à Leok [83] pour une discussion sur cet aspect.

Soient les dates  $\{\alpha_\mu\}_{\mu=0}^M, \alpha_\mu \in [0, 1]$  associées aux points de contrôle  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  telles que  $\tilde{q}_i(t_i + \alpha_\mu h) = q_i^\mu$  pour tout  $\mu$ , l'interpolation  $\tilde{q}_i$  s'exprime de façon unique sur la base des polynômes de Lagrange  $\varphi_\mu$  de degré  $M$  pour tout  $t = t_i + \alpha h \in [t_i, t_{i+1}]$  par

$$\tilde{q}_i(t) = \sum_{\mu=0}^M q_i^\mu \varphi_\mu(\alpha), \quad \varphi_\mu(\alpha) = \prod_{0 \leq \nu \leq M, \nu \neq \mu} \frac{\alpha - \alpha_\nu}{\alpha_\mu - \alpha_\nu}$$

La dérivée de  $\tilde{q}_i$  s'exprime alors à l'aide de la famille de polynôme  $\dot{\varphi}_\mu$  de degré  $M - 1$

$$\dot{\tilde{q}}_i(t) = \sum_{\mu=0}^M \frac{1}{h} q_i^\mu \dot{\varphi}_\mu(\alpha), \quad \dot{\varphi}_\mu(\alpha) = \sum_{\substack{0 \leq \lambda \leq M \\ \lambda \neq \mu}} \frac{1}{\alpha_\mu - \alpha_\lambda} \prod_{\substack{0 \leq \nu \leq M \\ \nu \neq \mu, \nu \neq \lambda}} \frac{\alpha - \alpha_\nu}{\alpha_\mu - \alpha_\nu} \quad (\text{I.16})$$

On définit les dates à partir des points d'interpolation de Chebyshev pour l'intervalle  $[0, 1]$ , donnés par  $\alpha_\mu = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi\mu/M))$ . On vérifie en particulier que  $\alpha_0 = 0$  et  $\alpha_M = 1$ , ce qui permet d'écrire  $\tilde{q}_i(t_i) = q_i^0$  et  $\tilde{q}_i(t_{i+1}) = q_i^M$  (voir figure I.8).

Différents choix sont également possibles pour la quadrature d'intégrale  $(w_a, c_a)_{a=1}^A$ . Dans la suite, on utilise la quadrature de Gauss-Legendre [45]. Dans Hall [49], il a été démontré analytiquement qu'une méthode variationnelle de Galerkin associant une interpolation polynômiale de degré  $M$  à une quadrature d'ordre  $r = M$  a une convergence d'ordre (au moins)  $M$ . En pratique, la convergence est encore meilleure : parmi les différentes quadratures étudiées dans Ober-Blöbaum [109], il est notamment vérifié numériquement que pour une quadrature de Gauss-Legendre à  $r$  points, l'ordre de la méthode

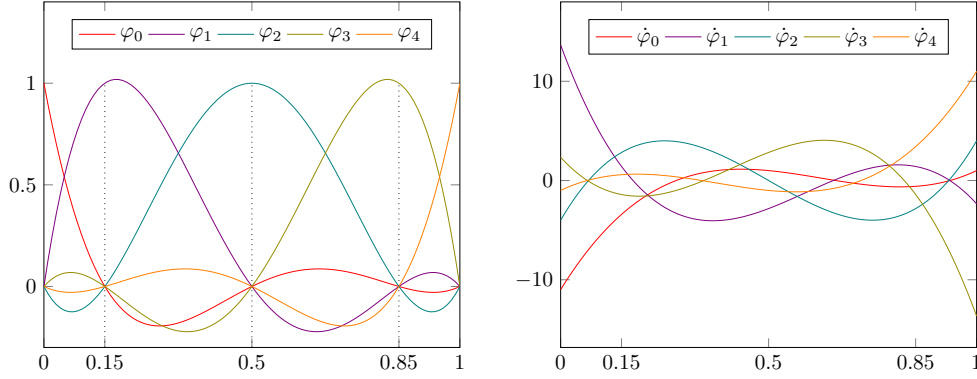


FIG. 1.8 Base de polynômes de Lagrange de degrés 4  $\{\varphi_\mu\}_{\mu=0}^4$  (gauche) et leurs dérivées (droite). Les points d'interpolation de Chebyshev sont indiqués en pointillés.

vaut  $\min(2M, r)$ . Pour les problèmes aux comportements hautement oscillatoires, d'autres méthodes de quadratures sont proposées par Iserles *et al.* [61]-[63] et Leok [83].

*Remarque 5.* Les méthodes du rectangle et du point milieu présentées au § 1.3.1 sont des méthodes de Galerkin pour lesquelles on a fixé le degré d'interpolation polynomiale  $M = 1$  et où les quadrature de l'intégrale sont respectivement  $(1, 0)$  et  $(1, 1/2)$ .

### 1.3.2.5 Principe variationnel

Afin d'établir les conditions d'extrémalité du lagrangien discret, il convient de calculer la variation de l'intégrale d'action approchée  $\tilde{\mathcal{A}}_i$  induite par la variation des points de contrôle  $\{q_i^\nu\}$ . Un calcul direct donne

$$d\tilde{\mathcal{A}}_i(\delta q_i^\nu) = \sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_i) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_i) \right] \cdot \delta q_i^\nu$$

où on introduit la notation raccourcie  $\mathcal{L}(c_a h; \tilde{q}_i) = \mathcal{L}(\tilde{q}_i(t_i + c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(t_i + c_a h))$ . Par indépendance des variations  $\delta q_i^\nu$ , les équations non linéaires implicites définissant le lagrangien discret sont données pour tout  $0 < \nu < M$  par

$$\sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h) \right] = 0$$

et seront désignées dans la suite comme les équations d'Euler-Lagrange internes.

Les solutions numériques vérifient par ailleurs les équations d'Euler-Lagrange discrètes (1.12)

$$\frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_i, \phi_{i+1}) + \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q_i}(\phi_{i-1}, \phi_i) = 0.$$

Après réécriture de cette équation pour le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$ , défini par l'expression (1.15) dans le cadre des méthodes de Galerkin, un pas du schéma numérique est donc

obtenu à partir de la condition de continuité, de l'équation d'Euler-Lagrange discrète, et des  $M - 1$  équations d'Euler-Lagrange internes, ce qui s'écrit pour tout  $1 \leq i \leq I - 1$

$$q_i^0 = q_i \quad (\text{I.17a})$$

$$\sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_0(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_i) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_0(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_i) \right] + \sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_M(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_{i-1}) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_M(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_{i-1}) \right] = 0 \quad (\text{I.17b})$$

$$\sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_i) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_i) \right] = 0 \quad 1 \leq \nu \leq M - 1 \quad (\text{I.17c})$$

### I.3.2.6 Méthode numérique de Galerkin

L'implémentation de la méthode de Galerkin consiste, pour chaque pas  $(q_{i-1}, q_i) \mapsto (q_i, q_{i+1})$ , à résoudre les  $M + 1$  équations (I.17) pour les  $M + 1$  points de contrôle  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$ , ce qui permet d'obtenir la nouvelle position  $q_{i+1} = q_i^M$ . Concrètement, l'équation (I.17a) étant triviale, les  $q_i^\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq M$  solutions des équations (I.17b) et (I.17c) sont calculées par un solveur numérique qui résout pour chaque pas de temps  $\dim(Q) \times M$  équations implicites, typiquement à l'aide d'une méthode de Newton.

Afin d'initialiser les points de contrôle pour la résolution des équations implicites, il est nécessaire de fournir une heuristique permettant le choix de valeurs relativement proches de la solution (à propos de l'importance d'une bonne initialisation, on pourra par exemple consulter Press [114]). Un choix classique est d'utiliser une méthode numérique peu coûteuse pour effectuer les  $M$  pas internes  $(q_i^{\mu-1}, q_i^\mu) \mapsto (q_i^\mu, q_i^{\mu+1})$ . À l'aide d'une méthode d'Euler symplectique par exemple, on résout l'équation d'Euler-Lagrange discrète pour tout  $1 \leq \mu \leq M - 1$

$$\frac{\partial}{\partial q_i^\mu} \left[ h_\mu \mathcal{L} \left( q_i^\mu, \frac{q_i^{\mu+1} - q_i^\mu}{h_\mu} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial q_i^\mu} \left[ h_{\mu-1} \mathcal{L} \left( q_i^{\mu-1}, \frac{q_i^\mu - q_i^{\mu-1}}{h_{\mu-1}} \right) \right] = 0$$

où  $h_\mu = h(\alpha_{\mu+1} - \alpha_\mu)$ ; les valeurs obtenues pour les points de contrôle  $q_i^\mu$  permettent alors d'initialiser la recherche de racine du système (I.17).

Avant de pouvoir effectuer le premier pas d'intégration, il est nécessaire de calculer les points de contrôle pour  $i = 0$ . Si l'intégrateur numérique a pour données d'entrées les positions  $q_0, q_1$ , les points de contrôles  $\{q_0^\mu\}_{\mu=1}^{M-1}$  obtenus en imposant  $q_0^M = q_1$  et en résolvant les  $M - 1$  équations d'Euler-Lagrange discrètes internes (I.17c). Si les données d'entrées sont un couple position et vitesse  $q_0, v_0$ , on impose  $\dot{q}_0(0) = v_0$ ; cette condition se traduit par l'équation

$$\frac{1}{h} \sum_{\mu=0}^M q_0^\mu \dot{\varphi}_\mu(0) = v_0$$

qui doit être résolue avec les équations d'Euler-Lagrange discrètes internes pour les  $M$  variables  $\{q_0^\mu\}_{\mu=1}^M$ .

### I.3.2.7 Forçage

Dans les travaux mentionnés, la prise en compte de forces par un principe de Lagrange-d'Alembert n'est pas étudié pour les intégrateurs variationnels de Galerkin. Nous proposons ici de dériver les équations d'Euler-Lagrange discrètes d'un système forcé.

Étant donné une force  $f : TQ \rightarrow T^*Q$ , il est nécessaire d'approcher sur chaque intervalle de temps  $[t_i, t_{i+1}]$  l'intégrale

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(q, \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt$$

et de lui appliquer un principe variationnel pour les variations indépendantes  $\{\delta q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$ . Par cohérence, nous choisissons d'utiliser pour le calcul de l'intégrale la même quadrature que celle utilisée pour l'évaluation du lagrangien discret. Cela donne

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt &\approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(\tilde{q}_i(t), \dot{\tilde{q}}_i(t)) \cdot \sum_{\mu=0}^M \frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_i^\mu} \cdot \delta q_i^\mu dt \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{\mu=0}^M \varphi_\mu(t) f(\tilde{q}_i(t), \dot{\tilde{q}}_i(t)) \cdot \delta q_i^\mu dt \\ &\approx \sum_{\mu=0}^M \sum_{a=1}^A h w_a \varphi_\mu(c_a) f(\tilde{q}_i(c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(c_a h)) \cdot \delta q_i^\mu = \sum_{\mu=0}^M f_i^\mu \cdot \delta q_i^\mu \end{aligned}$$

où on définit la notation raccourcie  $f_i^\mu = \sum_{a=1}^A h w_a \varphi_\mu(c_a) f(\tilde{q}_i(c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(c_a h))$ . Le réarrangement des termes en fonction des variations  $\delta q_i^\mu$  donne un résultat analogue à celui de la variation d'action discrète

$$\begin{aligned} \int_0^T f(q(t), \dot{q}(t)) \cdot \delta q dt &\approx \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=0}^M f_i^\mu \cdot \delta q_i^\mu \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} f_i^\mu \cdot \delta q_i^\mu + \sum_{i=1}^{I-1} (f_i^0 + f_{i-1}^M) \cdot \delta q_i + f_0^0 \cdot \delta q_0 + f_{I-1}^M \cdot \delta q_I \end{aligned}$$

L'application du principe de Lagrange-d'Alembert discret pour des variations arbitraires  $\delta q_i^\mu$  donne alors l'équation d'Euler-Lagrange discrète forcée et les  $M-1$  équations d'Euler-Lagrange internes forcées, qui s'écrivent pour tout  $1 \leq i \leq I-1$

$$\begin{aligned} &\sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_0(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_i) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_0(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_i) + \varphi_0(c_a) f(\tilde{q}_i(c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(c_a h)) \right] \\ &+ \sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_M(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_{i-1}) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_M(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. + \varphi_M(c_a) f(\tilde{q}_{i-1}(c_a h), \dot{\tilde{q}}_{i-1}(c_a h)) \right] = 0 \end{aligned} \tag{I.18a}$$

$$\sum_{a=1}^A h w_a \left[ \varphi_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}(c_a h; \tilde{q}_i) + \frac{1}{h} \dot{\varphi}_\nu(c_a) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}(c_a h; \tilde{q}_i) \right]$$

$$\left. + \varphi_\nu(c_a) f(\tilde{q}_i(c_a h), \dot{\tilde{q}}_i(c_a h)) \right] = 0 \quad 1 \leq \nu \leq M-1 \quad (\text{I.18b})$$

Les équations (I.18a) et (I.18b) remplacent respectivement les équations (I.17b) et (I.17c) pour donner un pas de la méthode de Galerkin forcée. On remarque que les premières sont égales aux secondes auxquelles on a ajouté le terme de force approprié. On note également que l'équation d'Euler-Lagrange forcée (I.18a) correspond bien à la formulation forcée générale (I.12) pour laquelle on définit  $f_d^-(q_i, q_{i+1}) = f_i^0$  et  $f_d^+(q_i, q_{i+1}) = f_i^M$ .

## I.4 L'oscillateur harmonique bidimensionnel

Nous proposons d'illustrer les propriétés numériques de la famille des méthodes de Galerkin, définies au paragraphe précédent, sur l'oscillateur harmonique à deux degrés de liberté. Dans un premier temps (§ I.4.1), on considère un système sans amortissement dont on explicite les quantités physiques préservées. On met alors en évidence une conservation numérique conforme aux attentes, et on vérifie l'ordre de convergence de l'intégrateur. On propose ensuite l'étude de l'oscillateur harmonique amorti grâce à l'application d'un principe de Lagrange-d'Alembert (§ I.4.2). Dans ce cas, les quantités précédemment préservées ne sont plus des invariants temporels. On montre expérimentalement que les intégrateurs variationnels capturent avec une précision arbitraire l'évolution de ces quantités.

### I.4.1 Oscillateur harmonique bidimensionnel sans amortissement

Considérons un oscillateur harmonique bidimensionnel adimensionné et sans amortissement. L'espace de configuration de ce système est l'espace  $Q = \mathbb{R}^2$ , et on décompose la position  $q$  en  $q = (q_x, q_y) \in \mathbb{R}^2$ . Le lagrangien s'écrit pour tout  $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^2$  comme

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q, q \rangle \quad (\text{I.19})$$

L'équation d'Euler-Lagrange correspondante s'écrit

$$\ddot{q} + q = 0.$$

Le lagrangien du système est invariant par l'action du groupe des rotations planaires  $SO(2)$ . Ceci entraîne par application du théorème de Noether la conservation du moment

$$J(q, \dot{q}) = q_x \dot{q}_y - q_y \dot{q}_x \quad (\text{I.20})$$

associé au champ de vecteur  $S = 0\vec{\partial}_t + \hat{\omega}q\vec{\partial}_q$  où la matrice  $\hat{\omega}$  s'écrit

$$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La quantité  $J(q, \dot{q})$  correspond à la composante du moment angulaire orthogonale au plan  $(x, y)$  lorsque le système est plongé dans  $\mathbb{R}^3$ . Par ailleurs, le système étant conservatif, l'énergie totale  $E$  est conservée, où  $E$  est donnée pour tout  $q, \dot{q}$  par

$$E(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} [\langle \dot{q}, \dot{q} \rangle + \langle q, q \rangle].$$

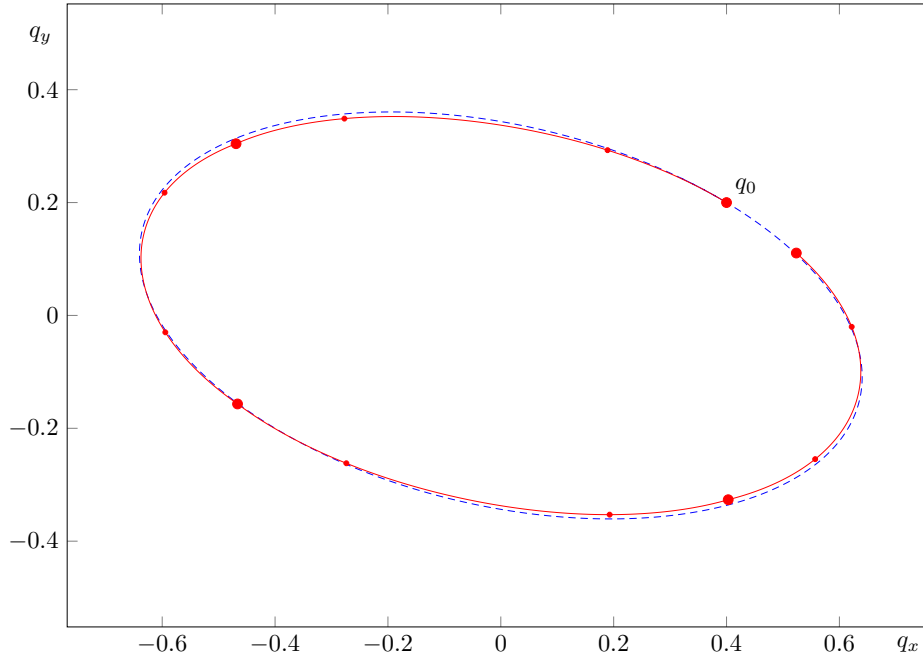


FIG. I.9 Représentation de la solution de l'oscillateur harmonique bidimensionnel initialisé par la position  $q_0$ . La solution exacte est représentée en pointillés bleus. La solution numérique, obtenue par les premières itérations de la méthode de Galerkin pour  $M = 3$  et  $h = 1.5$ , est indiquée par les grands points rouges. Les points de contrôle internes sont donnés par les petits points, et la solution numérique interpolée par le tracé continu rouge.

On applique à ce système la famille des méthodes de Galerkin introduites au § I.3.2. La figure I.9 illustre l'approximation de la solution analytique par interpolation polynômiales. On vérifie expérimentalement que l'ordre de convergence de la méthode est d'ordre  $2M$  en fonction du pas d'intégration  $h$  (figure I.10). La quadrature de Gauss-Legendre implémentée ici étant d'ordre  $r = 2A$  où on a choisi  $A = M$ , l'ordre de convergence obtenu est donc cohérent avec l'ordre  $p = \min(2M, r)$  prévu par [109], [135] et vérifié dans [50], [81]. Cette convergence est calculée à partir de l'erreur aux points nodaux

$$e_q(q_d) = \max_{i \in \{0, \dots, I\}} |q_i - q(t_i)|.$$

Les intégrateurs de Galerkin étant symplectiques, ils conservent approximativement l'énergie totale du système. Cette propriété se vérifie expérimentalement en figure I.12, sur laquelle on peut observer les oscillations typiques de l'énergie autour de sa véritable valeur. L'amplitude de ces variations est fonction du choix de la méthode et du pas utilisé. On constate sur la figure (I.13) que la convergence de l'énergie est d'ordre  $O(h^{2M})$  pour l'erreur aux points nodaux  $e_E(E_d)$ , ce qui est cohérent avec [50].

On montre aisément que le lagrangien est invariant par l'action du groupe de rotations  $SO(2)$  en tant que combinaison linéaire du lagrangien, lui-même invariant. Cela entraîne la conservation du moment discret

$$J_d(q_i, v_i) = (q_i)_x (v_i)_y - (q_i)_y (v_i)_x$$

où on définit la notation raccourcie  $v_i = \dot{q}_i(t_i)$ . La figure I.11 montre que le moment angulaire est, comme attendu, conservé numériquement à erreur machine de l'ordre de  $10^{-14}$  près, et ce quel que soit l'ordre de la méthode appliquée. La conservation approximative de l'énergie est également vérifiée (figure I.12).

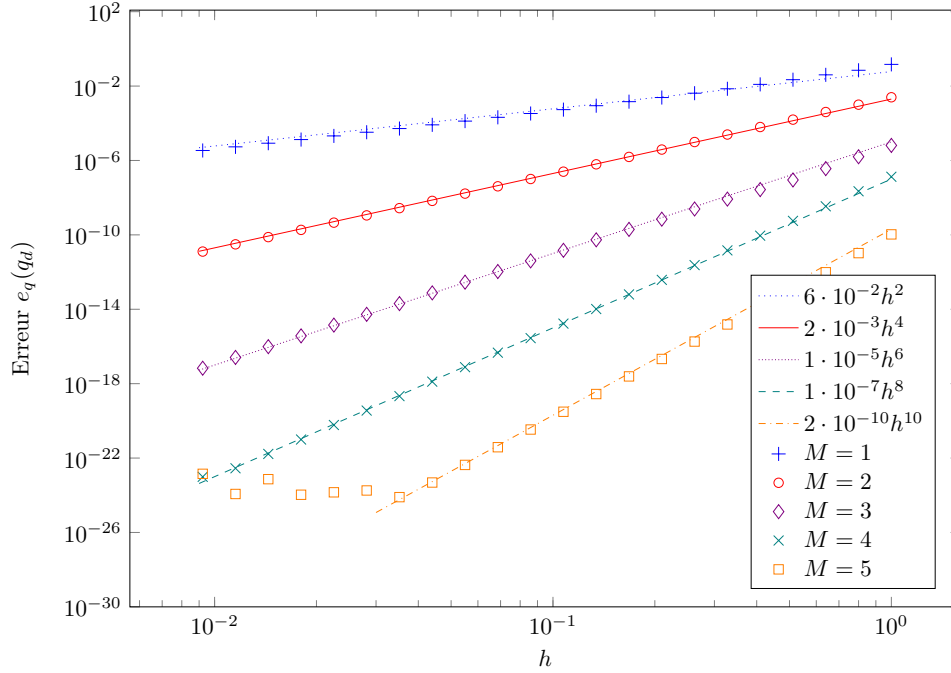


FIG. I.10 Convergence numérique de la méthode de Galerkin calculée pour différentes valeurs de  $M$  et une durée de simulation  $T = 10$ .

#### I.4.2 Oscillateur harmonique amorti

On considère maintenant un oscillateur harmonique amorti. Afin d'obtenir les équations d'Euler-Lagrange du système, le principe de moindre action appliqué précédemment est remplacé par un principe de Lagrange-d'Alembert qui s'écrit

$$\delta \int_0^T \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt + \int_0^T f(\dot{q}(t)) \cdot \delta q dt = 0$$

où  $\mathcal{L}$  est le lagrangien (I.19) et  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  est la force d'amortissement définie par  $f(\dot{q}) = 2\zeta\dot{q}$  où  $\zeta \in \mathbb{R}$  est le facteur d'amortissement. Les équations d'Euler-Lagrange forcées s'écrivent alors

$$\ddot{q} + 2\zeta\dot{q} + q = 0.$$

Les solutions de cette équations sont de la forme  $q_x(t) = C_x e^{-2\zeta t} \cos(t + \varphi_x)$  (resp.  $q_y$ ) où les constantes  $C_x, \varphi_x \in \mathbb{R}$  (resp.  $C_y, \varphi_y$ ) sont à déterminer en fonction des conditions initiales.

L'invariance du lagrangien par rotation planaire est toujours vérifiée. L'ajout de l'amortissement au système change alors la loi de conservation du moment angulaire  $J$  défini

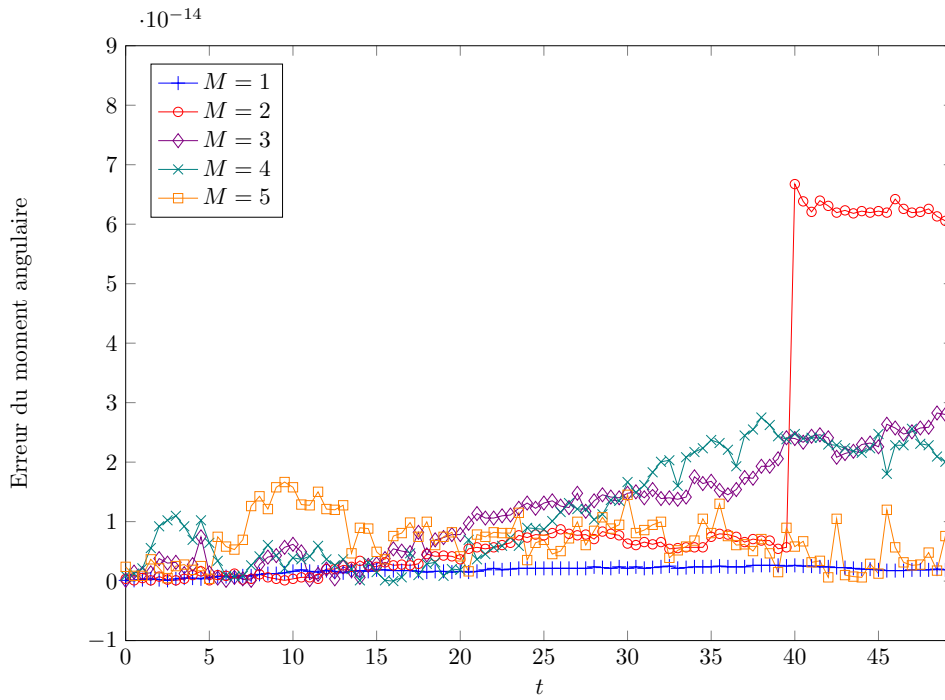


FIG. I.11 Erreur du moment angulaire pour les méthodes de Galerkin pour  $h = 0.5$  et différentes valeurs du paramètre  $M$ .

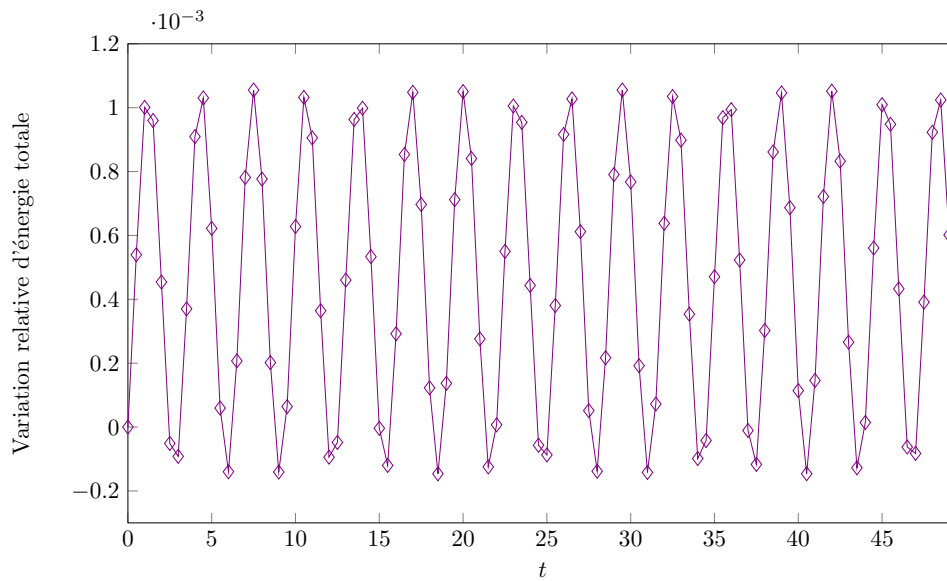


FIG. I.12 Variation relative d'énergie totale de la solution numérique obtenue par méthode de Galerkin pour  $M = 3$  et  $h = 0.2$ .

par (I.20) en une loi d'évolution

$$J(q(t), \dot{q}(t)) = J(q(0), \dot{q}(0)) + \int_0^t f(\dot{q}(\tau)) \cdot \hat{\omega}q(\tau) d\tau.$$



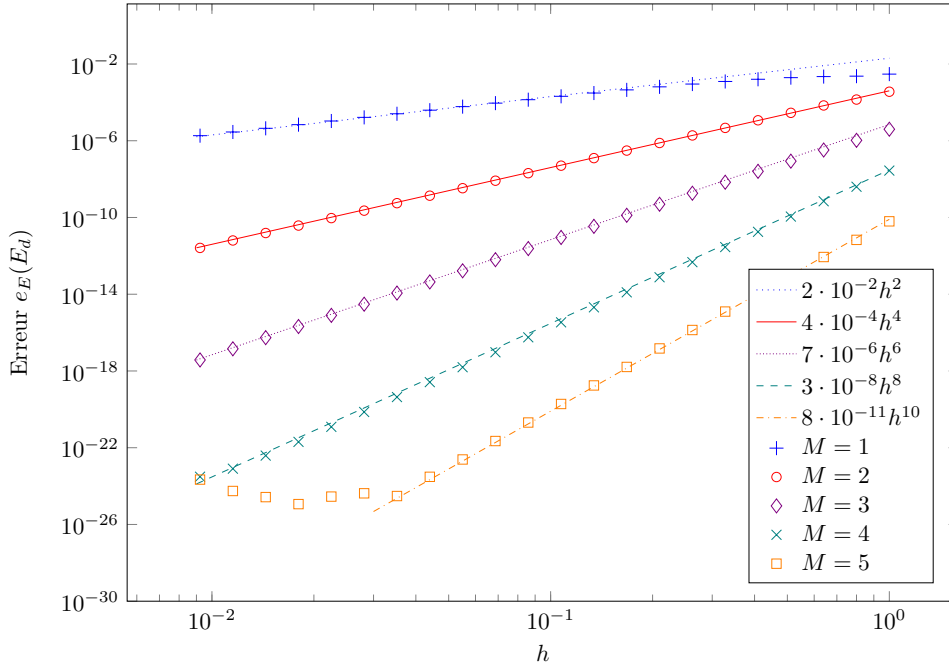


FIG. I.13 Convergence numérique de l'énergie calculée pour différentes valeurs de  $M$  et une durée de simulation  $T = 10$ .

À partir de l'expression de la solution analytique du système, il est possible d'expliciter l'intégrale dans le terme de droite de l'équation précédente comme

$$\int_0^t f(\dot{q}(\tau)) \cdot \hat{\omega}q(\tau) d\tau = C_x C_y \sin(\varphi_y - \varphi_x) (e^{-2\zeta t} - 1)$$

On choisit pour toutes les simulations un coefficient d'amortissement  $\zeta = 0.05$ . Les figures I.14, I.15 et I.16 donnent respectivement la solution, l'énergie et le moment angulaire calculées par un intégrateur de Galerkin avec  $M = 3$  et  $h = 0.5$ . Les quantités numériques sont comparées à leur équivalent analytique grâce à la mesure de variation relative donnée par

$$v_{rel}(f_d, f) = \frac{f_i - f(t_i)}{\sup_{t \in [0, T]} |f(t)|}$$

où  $f$  et  $f_d$  sont les quantités analytique et numérique respectivement. On peut observer que, pour les paramètres choisis pour la méthode, les variations relatives d'énergie et de moment angulaire sont de l'ordre de  $10^{-4}$  et  $10^{-8}$  respectivement. Les quantités physiques sont donc très bien approchées par l'intégrateur numérique. Une estimation de l'ordre du moment angulaire en fonction du pas de temps  $h$  à partir de la figure I.17 donne  $O(h^{4M})$ . Il n'y a pas de raison apparente à l'augmentation de l'erreur de convergence après avoir atteint un minimum, que l'on peut observer pour les méthodes  $M = 3, 4, 5$ ; aussi faisons nous l'hypothèse qu'il s'agit d'une particularité liée à notre implémentation. Il n'existe pas à notre connaissance d'étude théorique sur l'ordre de convergence mis en évidence ici, aussi ne pouvons nous pas généraliser ce résultat à un cas plus général.

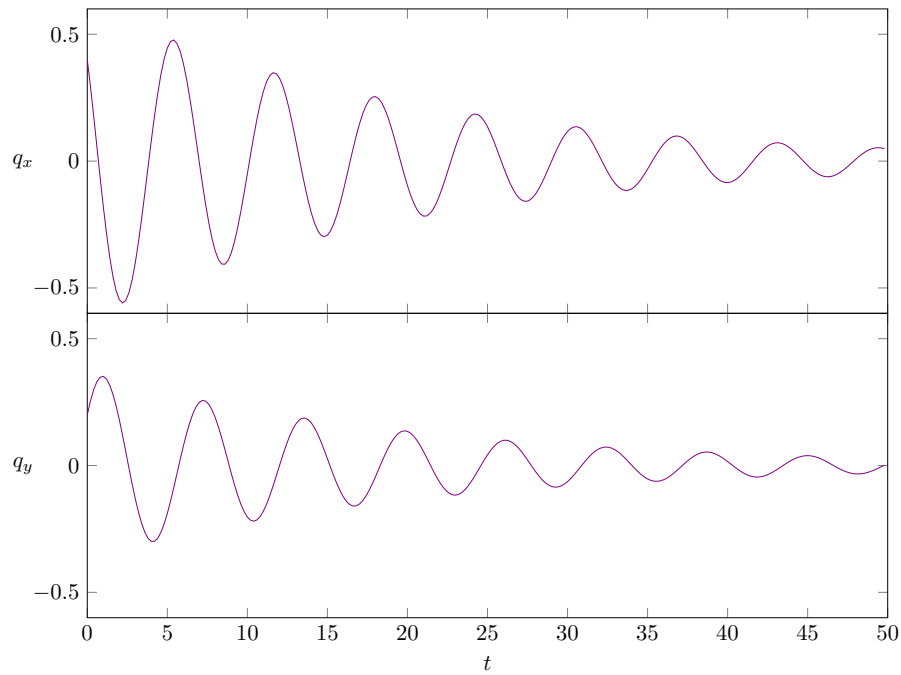


FIG. I.14 *Solution numérique pour l'oscillateur amorti obtenue par méthode de Galerkin pour les paramètres  $M = 3$  et  $h = 0.2$ .*

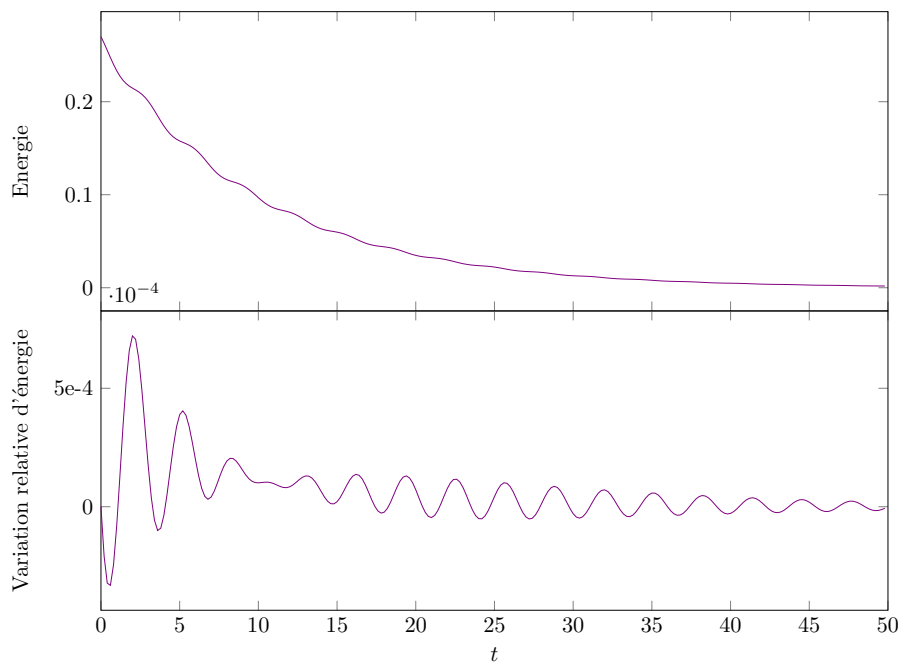


FIG. I.15 *Énergie totale (haut) et variation relative de l'énergie (bas) de la solution numérique obtenue par méthode de Galerkin pour les paramètres  $M = 3$  et  $h = 0.2$ .*

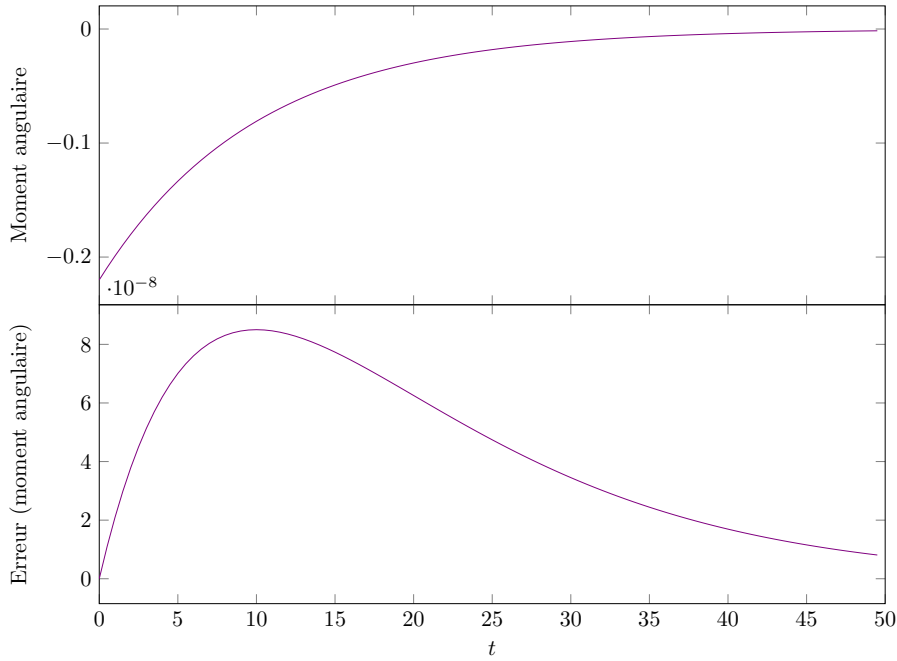


FIG. I.16 *Moment angulaire (haut) et erreur de convergence du moment angulaire (bas) de la solution numérique obtenue par méthode de Galerkin pour les paramètres  $M = 3$  et  $h = 0.2$ .*

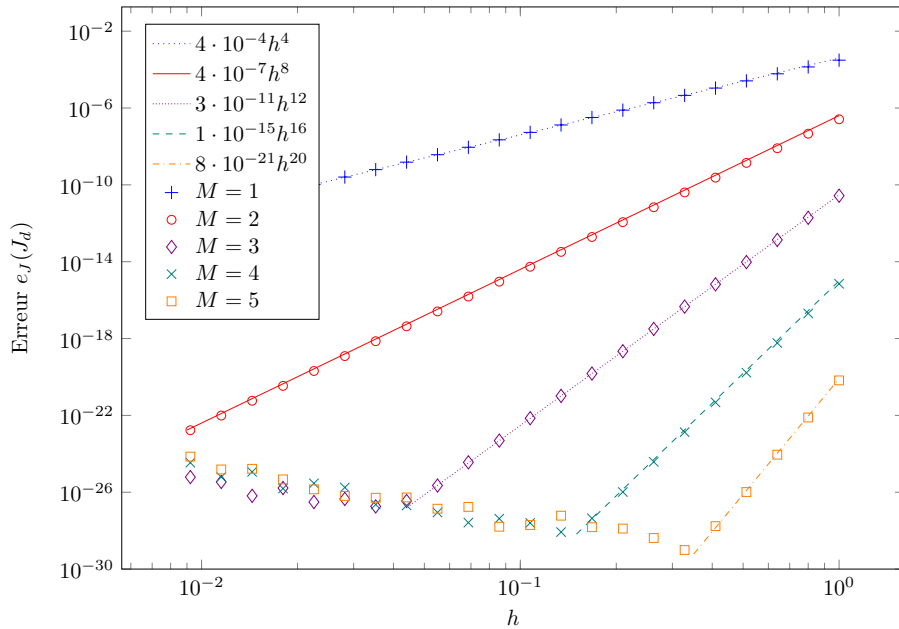


FIG. I.17 *Convergence numérique du moment angulaire calculé pour différentes valeurs de  $M$  et une durée de simulation  $T = 10$ .*

## I.5 Conclusion

Dans ce chapitre, les principaux résultats de la formulation lagrangienne classique ont été rappelés (§ I.1). La construction des intégrateurs variationnels s'établit alors naturellement à partir d'un calcul de la variation d'action similaire à sa version continue (§ I.2). Les solutions numériques obtenues vérifient la propriété de symplecticité, et en conséquence la conservation approximative de l'énergie du système. Elles préservent également les invariants obtenus par l'application de la version discrète du théorème de Noether en présence de symétries du lagrangien. Enfin, l'extension du principe de moindre action en un principe de Lagrange-d'Alembert fournit un cadre élégant pour la prise en compte de forces extérieures, qui assure automatiquement la vérification d'une loi d'évolution des moments. Au choix d'une méthode d'approximation de l'intégrale d'action correspond la définition d'une méthode numérique (§ I.3). En particulier, les intégrateurs variationnels de Galerkin fournissent un exemple de famille de méthodes numériques d'ordre arbitraire. La mise en œuvre de ces intégrateurs sur l'exemple de l'oscillateur amorti a permis de s'assurer expérimentalement des excellentes propriétés de convergence et de conservation des solutions numériques (§ I.4).

Au début du chapitre a été faite l'hypothèse de la linéarité de l'espace des configurations  $Q$ . Toutefois, de nombreux systèmes nécessitent la considération d'espaces de configurations non linéaires qu'il s'agit de préserver afin de proposer une modélisation adéquate. Le chapitre suivant s'attache à traiter, dans le cadre de la mécanique variationnelle lagrangienne, le cas où l'espace de configuration est un groupe de Lie.



# Chapitre II

## Intégrateurs avec groupes de Lie

Dans le premier chapitre, il a été question de la formulation lagrangienne de systèmes physiques évoluant dans un espace de configuration  $Q$  linéaire de dimension finie. Cependant, l'espace de configuration n'est pas nécessairement linéaire. Dans ce cas, les équations d'Euler-Lagrange obtenues sont formulées sur des variétés différentielles qui induisent des non-linéarités qu'il est important de bien traduire numériquement. Puisque les méthodes présentées au chapitre précédent faisaient l'hypothèse de la linéarité de l'espace de configuration, il devient nécessaire de les adapter afin de traiter correctement les systèmes considérés.

De nombreuses approches ont été développées pour approcher numériquement les équations différentielles évoluant sur une variété différentielle. Les méthodes par projection proposées adaptent des intégrateurs numériques classiques projetant à chaque itération la solution approchée sur la variété (Hairer et Wanner [48], Eich-Soellner et Führer [34]). En partant de l'écriture de l'équation différentielle en coordonnées locales, Potra et Rheinboldt [113] construisent un schéma évoluant sur la variété. Le cadre du traitement de systèmes physiques dont l'espace de configuration est une variété est proposé comme une extension des intégrateurs variationnels présentés au chapitre 1 par Marsden et West [99]. En particulier, des méthodes variationnelles de Galerkin pour systèmes contraints sont développés par Leok [83] et Wenger, Ober-Blöbaum et Leyendecker [135]. Dans le cas où un groupe de Lie agit transitivement sur la variété, les équations différentielles peuvent être réduites dans l'algèbre de Lie associée ; la préservation de la variété est alors garantie par une relation de reconstruction. Cette approche a été proposée par les travaux de Crouch et Grossman [26], puis développée et généralisée par Munthe-Kaas [102]-[104], et Iserles *et al.* [64]. Les outils fondamentaux des méthodes avec groupe de Lie trouvent également leur place dans le cadre de la mécanique variationnelle lagrangienne. Cette approche, qui trouve son origine dans les travaux de Marsden, Pekarsky et Shkoller [93], [95], est développée par Leok [83] et Hall [49], [51]. Le cadre général de l'utilisation des méthodes variationnelles avec groupe de Lie en théorie du contrôle est posé par Leok [84]. Kobilarov et Marsden [72] proposent plusieurs exemples d'applications.

Dans le présent chapitre, on s'intéresse au cas particulier où l'espace de configuration est une variété sur laquelle agit transitivement un groupe de Lie. On fait de plus l'hypothèse que ce groupe de Lie est un groupe matriciel. Cette classe de problèmes, qui inclut mais ne se limite pas à la dynamique du solide rigide [55], [96] et des systèmes multi-corps [24], est particulièrement pertinente pour la formulation de nombreux problèmes en

mécanique du solide, mécanique des milieux continus ou encore robotique.

Les idées fondamentales des intégrateurs par groupes de Lie sont présentées au § II.1 à partir de l'exemple de la famille de méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas (abrégées dans la suite en RKMK). Cette approche permet de conserver la structure de la variété sur laquelle est exprimée l'équation différentielle. Toutefois, puisque les méthodes RKMK discrétisent directement les équations, plutôt que les structures physiques qui en sont à l'origine, cette approche ne permet pas de garantir numériquement les propriétés d'invariance du type de celles présentées au chapitre 1. Il est toutefois possible d'adapter les méthodes variationnelles lagrangiennes au contexte des groupes de Lie. Cette formulation est l'objet du § II.2 dans laquelle on considère que l'espace de configuration est un groupe de Lie dont l'action laisse le lagrangien invariant. Une procédure de réduction permet alors l'écriture des équations d'Euler-Poincaré, et le théorème de Noether est systématiquement vérifié pour le champ de symétrie naturel associé à l'action du groupe. Les mêmes résultats sont vérifiés en mécanique discrète. Les méthodes variationnelles de Galerkin introduites au § I.3.2 sont ensuite adaptées pour les groupes de Lie. Une application à la dynamique du solide rigide est proposée au § II.3. Les propriétés de conservation et la convergence numérique des méthodes variationnelles de Galerkin avec groupe de Lie sont alors mises en évidence.

## II.1 Méthodes numériques de Runge-Kutta Munthe-Kaas

Les méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas sont une famille de schémas numériques développés par Munthe-Kaas [102]-[104] qui étendent les méthodes de Runge-Kutta classiques dans le cas où l'espace de configuration est une variété  $\mathcal{M}$  sur laquelle agit un groupe de Lie  $G$ . Dans cette section, on considère le cas particulier d'une équation différentielle matricielle s'écrivant

$$\dot{q} = A(t, q)q \quad (\text{II.1})$$

définie pour tout  $q \in \mathcal{M}$ , où pour tout  $t, q$  la matrice  $A(t, q)$  appartient à l'algèbre  $\mathfrak{g}$  associée à  $G$  (voir Munthe-Kaas [104] pour le traitement du cas général).

On suppose que l'action du groupe est transitive, c'est-à-dire que pour tout  $q_0, q_1 \in \mathcal{M}$ , il existe un élément  $g \in G$  tel que  $q_1 = gq_0$ . Autrement dit, tout élément  $q_1$  de la variété peut être atteint à partir d'un point de départ  $q_0$  par l'action à gauche de  $G$ . Étant donné une condition initiale

$$q(0) = q_0 \in \mathcal{M},$$

une trajectoire  $q : [0, T] \rightarrow \mathcal{M}$  peut alors s'écrire à l'aide d'une courbe  $g : [0, T] \rightarrow G$  tel que  $q(t) = g(t)q_0$  pour tout  $t$ .

Avant d'introduire les méthodes RKMK, nous rappelons quelques notions générales sur les méthodes de Runge-Kutta.

### II.1.1 Méthodes de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta, qui remontent aux travaux de Runge [122] et Kutta [73], développés ensuite par Butcher [12], [13], constituent une classe d'intégrateurs numériques ayant donné lieu à une importante littérature scientifiques. Nous énonçons ici brièvement quelques concepts fondamentaux de cette famille de méthodes.

Soit l'équation différentielle de la variable  $y$

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \quad (\text{II.2})$$

les méthodes de Runge-Kutta à  $s$  étapes consistent à approcher la solution de l'équation (II.2) en calculant  $y_1 \approx y(t_0 + h)$  défini par

$$y_1 = y_0 + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (\text{II.3})$$

où les pentes  $k_i$  sont données pour tout  $1 \leq i \leq s$  par

$$k_i = f \left( t_0 + c_i h, y_0 + h \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right).$$

Les coefficients  $c_i$  vérifient  $c_i = \sum_{j=1}^s a_{ij}$ , et la donnée des réels  $a_{ij}, b_i, 1 \leq i, j \leq s$  déterminent le choix particulier de la méthode de Runge-Kutta. Les coefficients sont généralement présentés sous la forme d'un tableau de Butcher [12]

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \cdots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_s & a_{s1} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \cdots & b_s \end{array}$$

En particulier, si les coefficients vérifient  $a_{ij} = 0$  pour tout  $i \leq j$ , la méthode RK correspondante est explicite puisque toutes les pentes  $k_i$  ne dépendent que des pentes précédentes.

Bien que l'équation différentielle (II.1) que l'on cherche à résoudre numériquement dans cette section soit de la forme (II.2) et puisse donc être traitée directement à l'aide des méthodes de Runge-Kutta, cette approche ne permettrait pas d'obtenir des solutions qui évoluent sur la variété  $\mathcal{M}$  désirée. En effet, les méthodes RK supposent que l'espace des configurations est stable par combinaison linéaire. Or, en toute généralité, la variété  $\mathcal{M}$  n'est pas nécessairement équipée de la structure d'espace vectoriel. Pour s'en convaincre, on peut par exemple examiner le cas où  $\mathcal{M} = \text{SO}(3)$  le groupe des rotations en trois dimensions : soit  $R_1, R_2 \in \text{SO}(3)$  deux matrices de rotation quelconques et  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  un scalaire, alors  $R_1 + \lambda R_2 \notin \text{SO}(3)$ .

Dans ce contexte, la solution numérique  $y_1$  donnée par (II.3) obtenue par une méthode de Runge-Kutta n'appartient pas nécessairement à  $\mathcal{M}$ . Les méthodes RKMK résolvent ce problème en réécrivant l'équation (II.1) sur l'algèbre  $\mathfrak{g}$  associée à  $G$  à l'aide d'un difféomorphisme local entre  $\mathfrak{g}$  et  $G$ . Puisque  $\mathfrak{g}$  possède par nature la structure d'espace vectoriel, les solutions de l'équation différentielle obtenue peuvent être approchées par application des méthodes de Runge-Kutta ; le difféomorphisme permet ensuite de ramener la solution dans l'espace  $\mathcal{M}$ . L'objet du paragraphe suivant est de définir cette procédure.

### II.1.2 Réduction de l'équation aux dérivées ordinaires

Soit  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow G$  un difféomorphisme local entre l'algèbre  $\mathfrak{g}$  et le groupe  $G$  vérifiant  $\Phi(0) = e_G$ , le principe des méthodes avec groupes de Lie consiste à écrire la courbe  $q$  à



l'aide d'une trajectoire  $\xi$  de l'algèbre  $\mathfrak{g}$ . En effet, puisqu'il existe une courbe  $g$  telle que  $q(t) = g(t)q_0$ , en définissant  $g(t) = \Phi(\xi(t))$  on obtient

$$q(t) = \Phi(\xi(t))q_0,$$

et choisir  $\xi(0) = 0$  permet de vérifier  $q(0) = q_0$  (voir figure II.1). On obtient par un calcul direct à partir de l'équation précédente la dérivée temporelle de  $q$

$$\dot{q} = \dot{g}q_0 = \dot{g}g^{-1}gq_0 = \dot{g}g^{-1}q.$$

Or en remarquant que le vecteur vitesse  $\dot{\xi}$  est transporté sur la variété par  $T_\Phi$ , soit  $\dot{g} = T_\xi\Phi(\dot{\xi})$ , la dernière équation peut se réécrire

$$\dot{q} = TR_{g^{-1}} \circ T_\xi\Phi(\dot{\xi})q \quad (\text{II.4})$$

où  $TR_{g^{-1}}$  est l'application tangente à la translation à droite par  $g^{-1}$ , et, de même,  $T_\xi\Phi$  dénote l'application tangente à  $\Phi$ . Cette écriture fait apparaître la différentielle trivialisée à droite de l'application  $\Phi$ , notée  $d^R\Phi$  et définie pour tout  $\xi, \nu \in \mathfrak{g}$  par

$$d^R\Phi_\xi(\nu) = TR_{\Phi(\xi)^{-1}} \circ T_\xi\Phi(\nu)$$

On reviendra plus en détail sur cette application au § II.2.2.

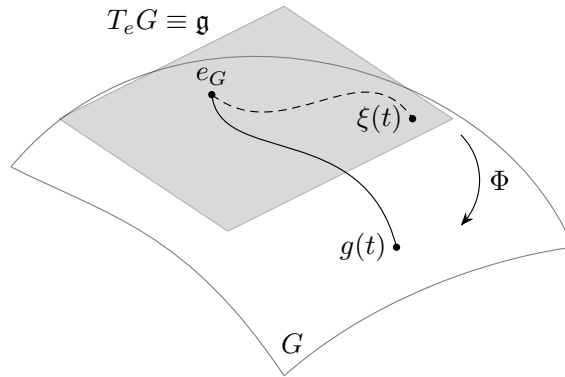


FIG. II.1 Une courbe  $g$  peut s'écrire grâce au difféomorphisme  $\Phi$  à l'aide d'une trajectoire  $\xi$  en définissant  $g(t) = \Phi(\xi(t))$  pour tout  $t$ .

La dérivée (II.4) s'écrit finalement  $\dot{q} = d^R\Phi_\xi\dot{\xi}q$ . En remplaçant  $\dot{q}$  par cette expression dans l'ODE (II.1), celle-ci devient  $A(t, q)q = d^R\Phi_\xi\dot{\xi}q$  et donc  $A(t, q) = d^R\Phi_\xi\dot{\xi}$ . En inversant cette dernière égalité, on obtient une équation différentielle de la variable  $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\dot{\xi} = d^R\Phi_\xi^{-1}(A(t, q)), \quad \xi(0) = 0. \quad (\text{II.5})$$

où  $d^R\Phi^{-1}$  est l'application inverse de  $d^R\Phi$ .

### II.1.3 Principe des méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas

La famille de méthodes numériques proposées par Munthe-Kaas [102]-[104] consiste à résoudre numériquement l'équation différentielle (II.5) de la variable  $\xi \in \mathfrak{g}$  à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta ; l'avancement dans la variété  $\mathcal{M}$  est ensuite effectué grâce au difféomorphisme  $\Phi$ . Dans le cadre des méthodes proposées par Munthe-Kaas, on choisit pour le difféomorphisme  $\Phi$  l'application exponentielle [102]. D'autres possibilités incluent la fonction Cayley ou encore les coordonnées canonique du second ordre. On renvoie à la lecture de Hairer [47] pour une discussion sur le sujet.

Dès lors que  $\|\xi\| < \pi$ , l'application  $d^R \exp_\xi^{-1}$  est définie, et son expression est donné par la série [4]

$$d^R \exp_\xi^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} \text{ad}_\xi^k \quad (\text{II.6})$$

où la constante  $B_k$  est le  $k$ -ième nombre de Bernoulli. L'opérateur adjoint  $\text{ad}_\xi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  correspond au crochet de Lie de l'algèbre  $\mathfrak{g}$  ; dans le cas des algèbres de matrices, il s'agit du commutateur

$$\text{ad}_\xi \nu = [\xi, \nu] = \xi\nu - \nu\xi.$$

Le calcul de la somme infinie (II.6) est mené en pratique par troncature à un ordre  $r$ . L'équation (II.5) devant être résolue par méthode RK se réécrit alors comme l'approximation

$$\dot{\xi} = \sum_{k=0}^r \frac{B_k}{k!} \text{ad}_\xi^k (A(t, \Phi(\xi)y_0)), \quad \xi(0) = 0. \quad (\text{II.7})$$

À partir de ces équations, on définit un pas d'une méthode RKMK de la façon suivante : soit  $h \in \mathbb{R}$  un pas de temps et  $y_n \in \mathcal{M}$  une condition initiale, la solution numérique  $y_{n+1} \approx y(h)$ , où  $y$  est solution de l'équation (II.1) vérifiant  $y(0) = y_n$ , est calculée de la manière suivante :

1. On écrit  $y(h) = \exp(\xi(h))y_i$  où  $\xi$  vérifie (II.7)
2. La solution  $\xi_i \approx \xi(h)$  est calculée à l'aide d'une méthode RK
3. La nouvelle position  $y_{i+1} \approx y(h)$  est obtenue comme  $y_{i+1} = \exp(\xi_i)y_i$ .

Puisque  $y_i$  appartient à la variété  $\mathcal{M}$  qui est stable par l'action de  $G$ , il est garanti que la solution numérique vérifie  $y_{i+1} \in \mathcal{M}$ .

Puisque les méthodes RKMK s'appuient sur la famille bien étudiée des intégrateurs de Runge-Kutta, elles sont relativement simples à mettre en œuvre. Par ailleurs, les propriétés de convergence des méthodes RKMK peuvent être reliés à celles des méthodes RK ; en particulier, pour une méthode de Runge-Kutta d'ordre  $p$ , la méthode RKMK associée est d'ordre  $p$  dès lors que l'ordre de troncature de la somme (II.6) vérifie  $r + 2 \geq p$  [103].

Nous illustrons dans le paragraphe suivant les propriétés numériques des intégrateurs RKMK en considérant la dynamique du solide rigide.

### II.1.4 Dynamique du solide rigide

On se propose ici de montrer les propriétés numériques de l'intégrateur RKMK4 sur l'exemple du problème du solide rigide. Le premier paragraphe est consacré à la définition de la méthode. Celle-ci est ensuite appliquée au second paragraphe ; les résultats numériques sont discutés.

### II.1.4.1 Définition du schéma RKMK4

La méthode RKMK4 est construite à partir du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 classique, décrit par le tableau de Butcher

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 1/6 & 2/6 & 2/6 & 1/6 \end{array}$$

Pour obtenir un schéma RKMK d'ordre 4, il convient de tronquer la somme (II.6) au-delà du terme d'ordre  $r = 2$ , ce qui donne l'équation différentielle de la variable  $\xi \in \mathfrak{g}$

$$\dot{\xi} = A(t, q) - \frac{1}{2} \text{ad}_{\xi} A(t, q) + \frac{1}{12} \text{ad}_{\xi}^2 A(t, q) =: f(t, \xi). \quad (\text{II.8})$$

La méthode RKMK4 consiste donc à calculer  $\xi_i$  solution numérique de l'équation (II.8) à l'aide du schéma RK4. On a alors

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_i, 0) & k_2 &= f\left(t_i + h/2, \frac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 &= f\left(t_i + h/2, \frac{h}{2}k_2\right) & k_4 &= f(t_i + h, h k_3) \end{aligned}$$

$$\xi_i = \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

La nouvelle position  $q_{i+1}$  est enfin calculée à l'aide de la formule

$$q_{i+1} = \exp(\xi_i) q_i$$

On applique maintenant cette méthode sur l'exemple du solide rigide.

### II.1.4.2 Application au solide rigide

La dynamique du solide rigide est donnée par l'équation différentielle du moment cinétique  $\pi$

$$\dot{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\pi_3}{I_3} & -\frac{\pi_2}{I_2} \\ -\frac{\pi_3}{I_3} & 0 & \frac{\pi_1}{I_1} \\ \frac{\pi_2}{I_2} & -\frac{\pi_1}{I_1} & 0 \end{pmatrix} \pi \quad (\text{II.9})$$

où  $I_k$ ,  $k = 1, 2, 3$  sont les moments angulaires dans les trois directions propres du solide. On reconnaît dans cette équation l'EDO (II.1) où la variété  $\mathcal{M} = \{\pi \in \mathbb{R}^3 / \|\pi\| = \|\pi_0\|\}$  est la sphère de rayon  $\|\pi_0\|$  sur laquelle agit le groupe des rotations  $G = \text{SO}(3)$ . La définition de la variété traduit donc la conservation du moment cinétique au cours du temps.

On applique à cette équation la méthode de Runge-Kutta Munthe-Kaas définie au paragraphe précédent. Les valeurs choisies pour les simulations numériques sont données par

$$I_1 = 2/3, \quad I_2 = 1, \quad I_3 = 2, \quad \pi_0 = \left(1/2 \quad 0 \quad \sqrt{3}/2\right)^T.$$

La solution calculée pour le pas de temps  $h = 1.0$  sur  $I = 100$  itérations est présentée en figure II.2a. Les moments  $\pi_i$  obtenus par ce schéma appartiennent comme attendu à la variété  $\mathcal{M}$  représentée par la sphère de rayon  $\|\pi_0\|$ . Par contraste, on peut observer sur la figure II.2b que la solution obtenue par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 classique pour les mêmes paramètres ne présente pas la même stabilité : la norme du moment angulaire n'est pas conservée pour la solution numérique calculée par méthode RK4 (figure II.3). Par ailleurs, on vérifie numériquement que l'intégrateur RKMK4 est bien d'ordre 4 (figure II.4).

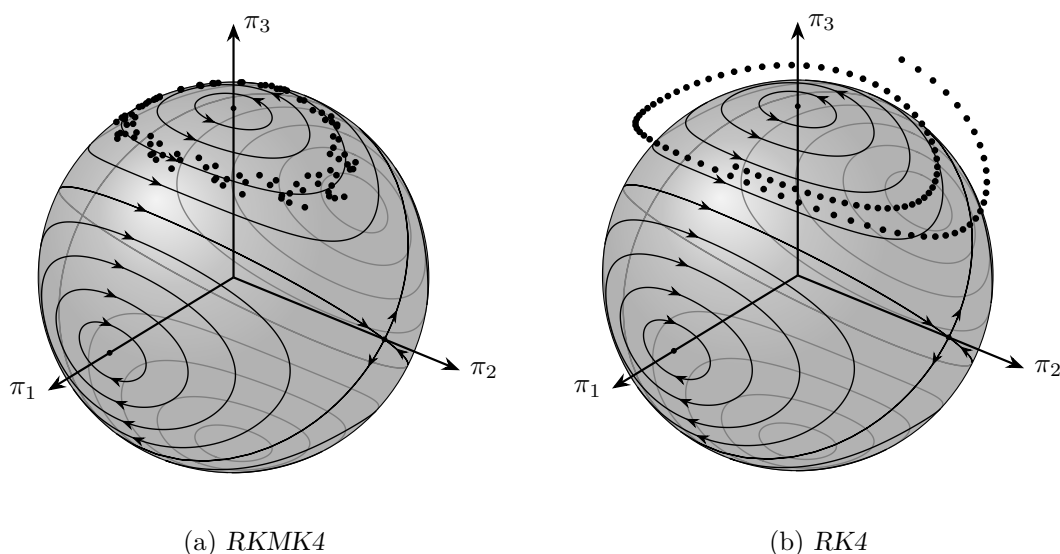


FIG. II.2 Solution numérique de l'équation du solide rigide (II.9) obtenue par application de la méthode RKMK4 (gauche) et RK4 (droite) avec  $h = 1.0$  pour  $I = 100$  itérations. La solution calculée avec la méthode par groupe de Lie évolue sur la sphère de rayon  $\|\pi_0\|$ , tandis que la seconde fait croître numériquement la norme du moment angulaire.

Dans certains contextes, il est souhaitable de conserver non seulement la structure de la variété différentielle sur laquelle sont formulées les équations différentielles, mais également d'autres structures ou quantités physiques comme la forme symplectique, l'énergie ou les invariants provenant de symétries du système. Si les méthodes RKMK sont par construction capable de vérifier la première assertion, elles ne vérifient *a priori* pas de propriétés de conservation additionnelles. Dans le cas du solide rigide par exemple, la solution numérique calculée à l'aide d'une méthode RKMK4 ne conserve pas l'énergie du système. Ceci s'observe en figure II.5, où il est clair que l'intégrateur dissipe numériquement de l'énergie. On peut également observer ce résultat en figure II.2a, dans laquelle la solution s'éloigne progressivement de son orbite d'isoénergie d'origine pour se rapprocher de l'axe vertical.

En adaptant le cadre variationnel défini au premier chapitre au contexte des méthodes par groupe de Lie, il est possible de construire des intégrateurs numériques préservant à la fois la forme symplectique et les moments de Noether d'une part, et la structure de la variété différentielle d'autre part. L'objet du paragraphe suivant est de définir cette

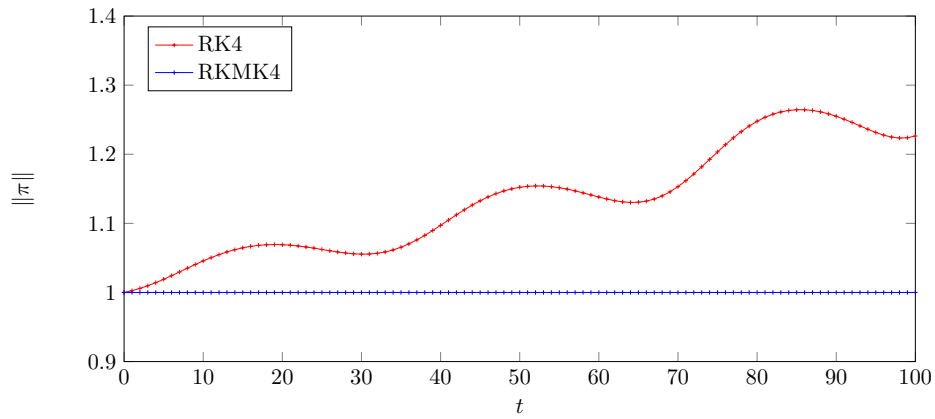


FIG. II.3 Norme du moment angulaire  $\|\pi\|$  en fonction du temps calculé à l'aide des méthodes RKMK4 et RK4 pour  $h = 1.0$ .

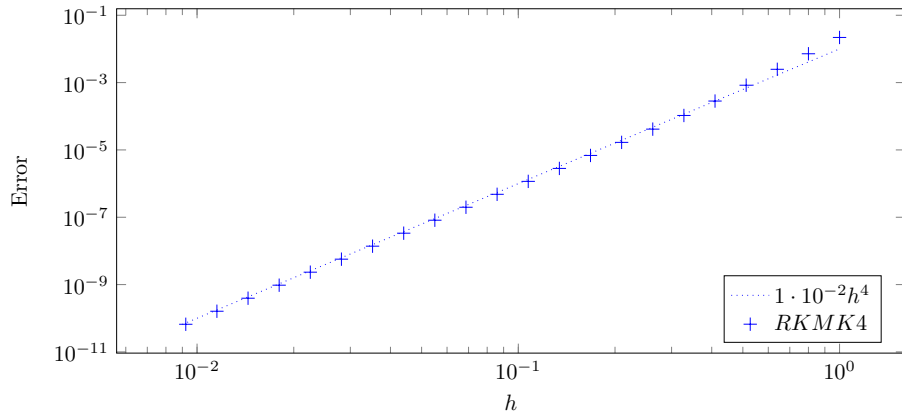


FIG. II.4 Convergence numérique de la méthode RKMK4 (durée de simulation  $T = 10$ ).

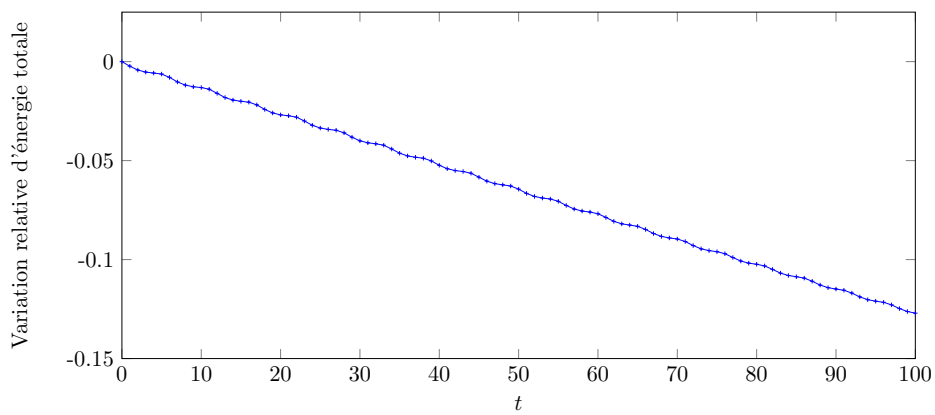


FIG. II.5 Variation relative de l'énergie du système pour une méthode RKMK4 avec  $h = 1.0$ .

formulation variationnelle.

## II.2 Méthodes variationnelles et groupes de Lie

On considère maintenant un système dont l'espace de configuration est un groupe de Lie  $G$ , muni d'un lagrangien  $\mathcal{L} : TG \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose de plus que ce lagrangien est invariant par l'action du groupe  $G$  à gauche, c'est à dire qu'il vérifie pour tout  $\tilde{g} \in G$  et toute trajectoire  $g : [t_0, t_1] \rightarrow G$  l'égalité

$$\mathcal{L}(g, \dot{g}) = \mathcal{L}(L_{\tilde{g}}g, TL_{\tilde{g}}\dot{g}).$$

Enfin, on ne considèrera dans la suite que des champs de variations verticaux, c'est-à-dire pour lesquels  $\delta t = 0$ . Il est toutefois possible de généraliser les résultats énoncés pour des champs de variations quelconques.

Les principes des schémas numériques par action d'un groupe de Lie, présentés au § II.1 avec l'exemple des méthodes RKMK, peuvent être mis en œuvre dans le contexte de la mécanique variationnelle. Il en résulte des méthodes numériques qui assurent par construction la préservation de la structure sous-jacente de l'espace de configuration, tout en maintenant les propriétés de conservations propres à la mécanique variationnelle discrète. Les schémas obtenus sont donc symplectiques, préservent les moments et (approximativement) l'énergie, et les solutions évoluent sur l'espace de configuration défini par le problème physique. L'objet du § II.2.1 est de définir le cadre de la mécanique lagrangienne continue adaptée au contexte des groupes de Lie. En particulier, les équations d'Euler-Lagrange sont réduites en équations d'Euler-Poincaré par invariance du lagrangien par l'action du groupe, et le théorème de Noether s'applique automatiquement, assurant la préservation d'un moment associé à l'action du groupe. Les équivalents discrets de ces résultats sont donnés au § II.2.2. Enfin, le § II.2.3 introduit les méthodes variationnelles de Galerkin avec groupe de Lie adaptant la famille d'intégrateurs présentés au § I.3.2.

### II.2.1 Mécanique lagrangienne et réduction par groupe de Lie

Soit le lagrangien  $\mathcal{L} : TG \rightarrow \mathbb{R}$ , on suppose que  $\mathcal{L}$  est invariant à gauche par l'action du groupe  $G$ ; en d'autres termes, le lagrangien  $\mathcal{L}$  ne dépend pas de la position  $g$ . En choisissant alors en particulier  $\tilde{g} = g^{-1}$ , on obtient  $TL_{g^{-1}}g = e_G$ , et  $TL_{g^{-1}}\dot{g} \in \mathfrak{g}$ . Cela permet de définir le lagrangien réduit  $\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  qui ne dépend que de la dérivée trivialisée à gauche  $\chi = TL_{g^{-1}}\dot{g} \in \mathfrak{g}$

$$\ell(\chi) = \mathcal{L}(e_G, \chi).$$

L'action du système s'écrit alors pour toute trajectoire  $g$  comme

$$\mathcal{A}(g) = \int_{t_0}^{t_1} \ell(\chi) dt.$$

On établit maintenant l'expression de la variation d'action.

### II.2.1.1 Calcul des variations

Le calcul des variations de l'action s'écrit pour le champ  $\delta\chi$

$$\delta\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \delta\chi \right\rangle dt.$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  dénote le produit scalaire. Afin d'exprimer  $\delta\mathcal{A}$  en fonction du champ de variations verticales trivialisées à gauche  $\zeta = g^{-1}\delta g \in \mathfrak{g}$ , il est nécessaire de calculer la variation  $\delta\chi$  induites par les variations  $\zeta$ . On remarque au préalable, en dérivant l'expression  $gg^{-1} = e$ , que

$$\frac{d}{dt}g^{-1} = -g^{-1}\dot{g}g^{-1},$$

ce qui permet d'écrire

$$\dot{\zeta} = \frac{d}{dt}(g^{-1}\delta g) = -g^{-1}\dot{g}g^{-1}\delta g + g^{-1}\frac{d}{dt}\delta g = -\chi\zeta + g^{-1}\delta\dot{g}. \quad (\text{II.10})$$

Pour obtenir la dernière égalité, on a utilisé le fait que pour des variations verticales,  $\delta t = 0$ , ce qui permet alors d'écrire d'après la propriété 1 du chapitre 1 que  $\delta\dot{g} = \frac{d}{dt}\delta g$ . On peut alors conclure en utilisant la dérivée (II.10)

$$\begin{aligned} \delta\chi &= \delta(g^{-1}\dot{g}) = -(g^{-1}\delta g)(g^{-1}\dot{g}) + g^{-1}\delta\dot{g} = -\zeta\chi + \dot{\zeta} + \chi\zeta \\ &= \dot{\zeta} + \text{ad}_\chi \zeta \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

En remplaçant  $\delta\chi$  par son expression (II.11) dans le calcul de la variation d'action, on obtient finalement après intégration par parties

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \dot{\zeta} + \text{ad}_\chi \zeta \right\rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \text{ad}_\chi \zeta \right\rangle dt - \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \frac{d}{dt} \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \zeta \right\rangle dt + \left[ \left\langle \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \zeta \right\rangle \right]_{t_0}^{t_1} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left\langle \text{ad}_\chi^* \frac{\partial\ell}{\partial\chi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial\ell}{\partial\chi}, \zeta \right\rangle dt + [\Theta_\ell(\zeta)]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

L'opérateur co-adjoint  $\text{ad}^* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$  est défini par l'appariement avec l'opérateur  $\text{ad} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  via le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ , et s'écrit pour tout  $\chi, \nu \in \mathfrak{g}$ ,  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  comme

$$\left\langle \text{ad}_\chi^* \mu, \nu \right\rangle = \langle \mu, \text{ad}_\chi \nu \rangle.$$

La forme de Poincaré-Cartan  $\Theta_\ell$  associé au lagrangien réduit  $\ell$  est définie par

$$\Theta_\ell = \frac{\partial\ell}{\partial\chi} g^{-1} dg.$$

Cette expression se retrouve dans l'expression plus générale proposée par Bensoam et Baugé [7] si on lève l'hypothèse de variations verticales pour considérer des champs de variations quelconques.

### II.2.1.2 Équations d'Euler-Poincaré

La variation d'action est, comme au chapitre 1, distinguée en deux termes : une intégrale sur le domaine temporel, et des termes de bords. L'application du principe de Hamilton donne les équations d'Euler-Poincaré vérifiées par les solutions du problème variationnel, obtenues en considérant des variations trivialisées quelconques s'annulant sur les limites du domaine temporel

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \chi} - \text{ad}_\chi^* \frac{\partial \ell}{\partial \chi} = 0 \quad (\text{II.12})$$

Dans cette équation, l'opérateur  $\text{ad}^*$  traduit la nature non-linéaire du groupe de Lie représentant l'espace de configuration.

### II.2.1.3 Théorème de Noether

Puisque le lagrangien est invariant par l'action (à gauche) du groupe, la conservation d'un invariant du système découle automatiquement de l'application du théorème de Noether. Plus précisément, pour tout vecteur  $\eta \in \mathfrak{g}$ , on montre que le champ de variations  $S_\eta = \text{Ad}_{g^{-1}} \eta$  laisse le lagrangien réduit  $\ell$  invariant, ce qui permet de conclure que le courant de Noether  $J_\eta$  est conservé par les solutions du système, où l'expression de  $J_\eta$  est donnée par

$$J_\eta = S_\eta \lrcorner \Theta_\ell = \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial \chi}, \text{Ad}_{g^{-1}} \eta \right\rangle = \left\langle \text{Ad}_{g^{-1}}^* \frac{\partial \ell}{\partial \chi}, \eta \right\rangle.$$

On renvoie à la lecture de Bensoam et Baugé [7] pour une démonstration rigoureuse de ce résultat. Puisque  $\eta$  est quelconque, on peut finalement conclure que le moment

$$J = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \frac{\partial \ell}{\partial \chi}$$

est constant le long des trajectoires solutions.

## II.2.2 Mécanique discrète, lagrangien réduit

On propose maintenant une procédure de discrétisation de la formulation variationnelle réduite, construite à partir d'un difféomorphisme local entre le groupe  $G$  et l'algèbre  $\mathfrak{g}$ .

Soient  $g_i, g_{i+1}$  deux positions dans l'espace de configuration  $G$  séparés par un intervalle de temps constant  $h$ . La construction de méthodes variationnelles avec groupes Lie procède d'un principe similaire à celui décrit au § II.1, qui consiste à se munir d'un difféomorphisme local  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow G$  de façon à définir  $\xi_i \in \mathfrak{g}$  tel que

$$g_{i+1} = g_i \Phi(\xi_i). \quad (\text{II.13})$$

On suppose dans la suite que  $\Phi$  vérifie  $\Phi(0_{\mathfrak{g}}) = e_G$ .

Le calcul des variations induites par des champs de variations trivialisées à gauche  $\zeta_i = g_i^{-1} \delta g_i$  permet l'obtention des équations d'Euler-Poincaré discrètes et des résultats de conservation dérivant de l'application du théorème de Noether. L'objet du prochain paragraphe est d'adapter le calcul de variation de l'action discrète du § I.2.1 du chapitre 1 au contexte des groupes de Lie.



### II.2.2.1 Formulation variationnelle

On se munit d'un lagrangien discret réduit  $\ell_d$ , défini comme une approximation de l'intégrale d'action sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , ce qui s'écrit pour tout  $\xi_i = \Phi^{-1}(g_i^{-1}g_{i+1})$

$$\ell_d(\xi_i) \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ell(g^{-1}\dot{g})dt \quad (\text{II.14})$$

où  $g$  est solution des équations d'Euler-Poincaré (II.12) et vérifie  $g(t_i) = g_i$ ,  $g(t_{i+1}) = g_{i+1}$ . Nous établissons les résultats de variations indépendamment du choix particulier d'un lagrangien  $\ell_d$ ; des exemples concrets de lagrangiens discrets seront examinés au § II.2.3.

Soit une trajectoire  $g_d$ , l'action discrète est définie par

$$\mathcal{A}_d(g_d) = \sum_{i=0}^{I-1} \ell_d(\xi_i) = \sum_{i=0}^{I-1} \ell_d\left(\Phi^{-1}\left(g_i^{-1}g_{i+1}\right)\right)$$

L'objectif est d'établir les variations de l'action en fonction des variations trivialisées  $\zeta_i = g_i^{-1}\delta g_i \in \mathfrak{g}$ . Cependant, le lagrangien  $\ell_d$  s'exprime à l'aide de la variable  $\xi_i$ . Il est donc nécessaire d'établir l'expression des variations  $\delta\xi_i$  induites par les variations  $\zeta_i$  préalablement au calcul de variation d'action. On écrit tout d'abord

$$\begin{aligned} \delta \left[ g_i^{-1}g_{i+1} \right] &= -g_i^{-1}\delta g_i g_i^{-1}g_{i+1} + g_i^{-1}\delta g_{i+1} \\ &= -\left(g_i^{-1}\delta g_i\right)\left(g_i^{-1}g_{i+1}\right) + \left(g_i^{-1}g_{i+1}\right)\left(g_{i+1}\delta g_{i+1}\right) \\ &= -\zeta_i \Phi(\xi_i) + \Phi(\xi_i)\zeta_{i+1} \\ &= \left[-\zeta_i + \Phi(\xi_i)\zeta_{i+1}\Phi(\xi_i)^{-1}\right]\Phi(\xi_i) \\ &= T_e R_{\Phi(\xi_i)}\left(-\zeta_i + \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}\zeta_{i+1}\right) \end{aligned}$$

où  $T_e R_g : \mathfrak{g} \rightarrow T_g G$  est l'application tangente de translation à droite, et l'opérateur adjoint  $\text{Ad} : G \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est défini pour tout  $g, \xi$  par  $\text{Ad}_g \xi = g\xi g^{-1}$  [55]. L'équation de reconstruction (II.13) a été utilisée pour écrire  $g_i^{-1}g_{i+1} = \Phi(\xi_i)$ . En partant de l'expression  $\xi_i = \Phi^{-1}\left(g_i^{-1}g_{i+1}\right)$ , on peut alors écrire

$$\begin{aligned} \delta\xi_i &= T_{g_i^{-1}g_{i+1}}\Phi^{-1}\left(\delta\left[g_i^{-1}g_{i+1}\right]\right) \\ &= T_{\Phi(\xi_i)}\Phi^{-1} \circ T_e R_{\Phi(\xi_i)}\left(-\zeta_i + \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}\zeta_{i+1}\right) \end{aligned}$$

La composition du difféomorphisme inverse  $\Phi^{-1}$  avec la translation à droite mène naturellement à l'introduction de la différentielle trivialisée à droite et de son inverse, notées respectivement  $d^R\Phi$  et  $d^R\Phi^{-1}$ . Ces dernières sont définies pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$  par

$$\begin{aligned} d^R\Phi_\xi : \quad T\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} &\xrightarrow{T_\xi\Phi} T_g G &\xrightarrow{TR_{g^{-1}}} T_e G \equiv \mathfrak{g} \\ \nu &\longmapsto T_\xi\Phi(\nu) &\longmapsto TR_{g^{-1}} \circ T_\xi\Phi(\nu) \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

$$\begin{aligned} d^R\Phi_\xi^{-1} : \quad T_e G \equiv \mathfrak{g} &\xrightarrow{TR_g} T_g G &\xrightarrow{T_g\Phi^{-1}} T\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \\ \nu &\longmapsto TR_g(\nu) &\longmapsto T_g\Phi^{-1} \circ TR_g(\nu) \end{aligned}$$

où on note  $g = \Phi(\xi)$ . Ces applications linéaires sont l'inverse l'une de l'autre et vérifient donc  $d^R\Phi_\xi^{-1} \circ d^R\Phi_\xi = \text{id}_{\mathfrak{g}}$  [72]. L'étape de "trivialisation" à droite peut être intuitivement comprise comme étant le moyen de ramener les dérivées appartenant à différents plans tangents  $T_gG$  au plan tangent en l'identité  $T_eG \equiv \mathfrak{g}$  (voir figure II.6). La différentielle trivialisée inverse nous permet finalement d'exprimer la variation  $\delta\xi_i$  en fonction de  $\zeta_i$  et  $\zeta_{i+1}$  comme

$$\delta\xi_i = d^R\Phi_{\xi_i}^{-1} \left( -\zeta_i + \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)} \zeta_{i+1} \right)$$

La variation du lagrangien discret peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \langle \ell'_d(\xi_i), \delta\xi_i \rangle &= \left\langle \ell'_d(\xi_i), d^R\Phi_{\xi_i}^{-1} \left( -\zeta_i + \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)} \zeta_{i+1} \right) \right\rangle \\ &= \left\langle d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)} \zeta_{i+1} - \zeta_i \right\rangle \\ &= \left\langle \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), \zeta_{i+1} \right\rangle - \left\langle d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), \zeta_i \right\rangle \end{aligned}$$

où les applications duales  $\text{Ad}^*$  et  $d^R\Phi^{-1*}$  sont définies à partir du produit scalaire

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$$

et vérifient pour tout  $g \in G$ ,  $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ,  $\mu \in \mathfrak{g}^*$  par l'appariement

$$\langle \mu, \text{Ad}_g \eta \rangle = \langle \text{Ad}_g^* \mu, \eta \rangle, \quad \langle \mu, d^R\Phi_\xi^{-1} \eta \rangle = \langle d^R\Phi_\xi^{-1*} \mu, \eta \rangle.$$

À l'aide de l'expression du produit scalaire précédent, la variation d'action s'écrit après un réarrangement des indices de sommation

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_d &= \sum_{i=0}^{I-1} \langle \ell'_d(\xi_i), \delta\xi_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \left\langle \text{Ad}_{\Phi(\xi_{i-1})}^* d^R\Phi_{\xi_{i-1}}^{-1*} \ell'_d(\xi_{i-1}) - d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), \zeta_i \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \Theta_{\ell_d}^-(\xi_0), \zeta_0 \right\rangle + \left\langle \Theta_{\ell_d}^+(\xi_{I-1}), \zeta_I \right\rangle \end{aligned}$$

Ici, les formes de Poincaré-Cartan discrètes  $\Theta_{\ell_d}^\pm$  sont définies par

$$\begin{aligned} \Theta_{\ell_d}^-(\xi_i) &= \left\langle -d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), g_i^{-1} dg_i \right\rangle \\ \Theta_{\ell_d}^+(\xi_i) &= \left\langle \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i), g_{i+1}^{-1} dg_{i+1} \right\rangle \end{aligned}$$

Les équations d'Euler-Poincaré discrètes sont obtenues en appliquant un principe de moindre action : les solutions du problème annulent la variation d'action pour des champs de variations  $\zeta_i$  arbitraires s'annulant en  $i = 0, I$ , ce qui implique pour tout  $1 \leq i \leq I-1$

$$d^R\Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i) - \text{Ad}_{\Phi(\xi_{i-1})}^* d^R\Phi_{\xi_{i-1}}^{-1*} \ell'_d(\xi_{i-1}) = 0 \quad (\text{II.16})$$

Cette équation, qui est la version discrète de l'équation d'Euler-Poincaré (II.12), définit le schéma numérique variationnel. Une itération de la méthode  $\xi_{i-1} \mapsto \xi_i$  est effectuée en calculant  $\xi_i$  solution de l'équation précédente (II.16). Les positions  $g_i$  peuvent alors être calculées à partir d'une position initiale  $g_0 = g(0)$  et de la relation de reconstruction discrète (II.13).

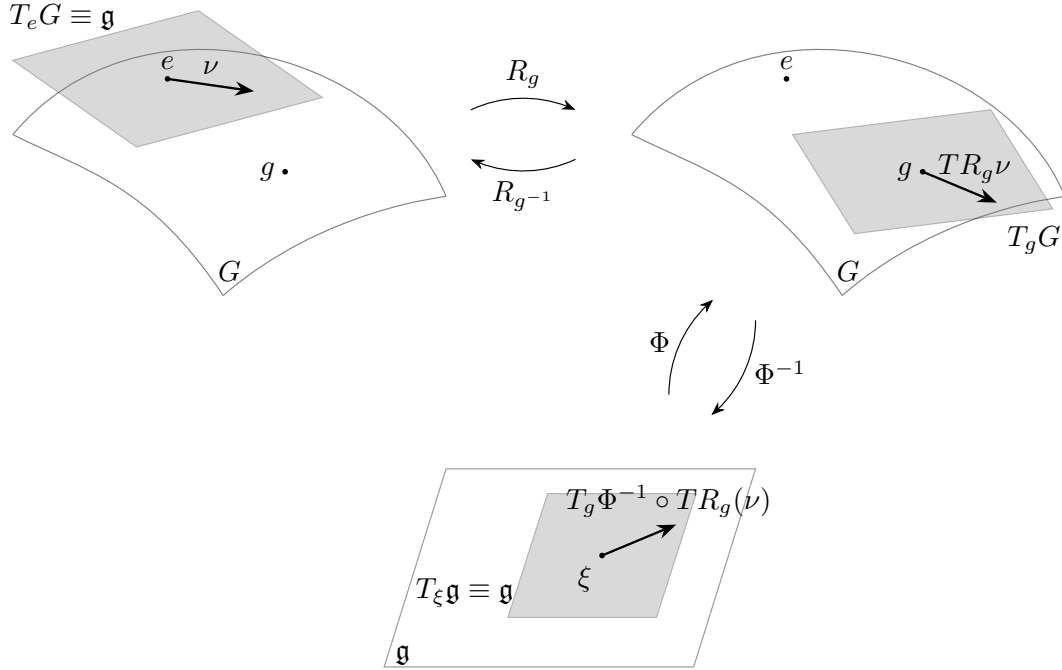


FIG. II.6 La différentielle trivialisée  $d^R \Phi_\xi^{-1}$  est définie par la composition de l'application tangente à la translation à droite,  $TR_g$ , avec la différentielle du difféomorphisme inverse  $\Phi^{-1}$ . Son inverse  $d^R \Phi_\xi$  est obtenu en suivant le chemin inverse.

### II.2.2.2 Théorème de Noether

On suppose que le lagrangien discret  $\ell_d$  est équivariant par l'action du groupe  $G$ . De ce fait, comme dans le cas continu vu au § II.2.1.3, cette propriété du lagrangien implique un résultat de conservation par l'application du théorème de Noether. Dans le cas discret, pour tout  $\eta \in \mathfrak{g}$ , le lagrangien  $\ell_d$  est invariant pour le champ de symétrie trivialisé à gauche  $\zeta_i = \text{Ad}_{g_i^{-1}} \eta$ . Soit  $\xi_i \in \mathfrak{g}$ , on définit son moment associé  $\pi_i$  par

$$\pi_i = d^R \Phi_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i).$$

Pour tout  $\eta \in \mathfrak{g}$ , les moments  $J_\eta^\pm = j^1 S_\eta \lrcorner \Theta_\ell^\pm$  sont alors donnés pour tout  $\xi_i$  par

$$\begin{aligned} J_\eta^+(\xi_i) &= \left\langle \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* \pi_i, \text{Ad}_{g_{i+1}^{-1}} \eta \right\rangle \\ J_\eta^-(\xi_i) &= \left\langle -\pi_i, \text{Ad}_{g_i^{-1}} \eta \right\rangle \end{aligned}$$

et vérifient  $J_\eta^+ = -J_\eta^-$ . En définissant  $J_\eta = J_\eta^+$ , le théorème de Noether permet de conclure la conservation du courant  $J_\eta(\xi_i)$  par les solutions du problème, où

$$\begin{aligned} J_\eta(\xi_i) &= \left\langle \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* \pi_i, \text{Ad}_{g_{i+1}^{-1}} \eta \right\rangle = \left\langle \text{Ad}_{g_{i+1}^{-1}}^* \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* \pi_i, \eta \right\rangle \\ &= \left\langle \text{Ad}_{g_i^{-1}}^* \pi_i, \eta \right\rangle. \end{aligned}$$

La dernière ligne a été obtenue en utilisant

$$\text{Ad}_{g_{i+1}}^* \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)}^* = \text{Ad}_{\Phi(\xi_i)g_{i+1}}^* = \text{Ad}_{g_i^{-1}g_{i+1}g_{i+1}^{-1}}^* = \text{Ad}_{g_i^{-1}}^*.$$

Puisque que  $J_\eta(\xi_i)$  est conservé pour tout  $\eta \in \mathfrak{g}$ , on peut finalement conclure que le moment  $J_i = \text{Ad}_{g_i^{-1}} \pi_i$  est conservé numériquement.

Nous proposons maintenant de définir une méthode de discrétisation de l'intégrale d'action (II.14) donnant lieu à une famille de méthodes variationnelles adaptant les intégrateurs variationnels de Galerkin au contexte des groupes de Lie.

### II.2.3 Méthodes variationnelles de Galerkin avec groupe de Lie

Les méthodes de Galerkin étudiées au § 1.3.2 du chapitre 1 consistent à restreindre l'espace des fonctions dans lequel est recherché la solution des équations du système, et à appliquer une quadrature de l'intégrale d'action. Cependant, il n'est pas directement possible d'appliquer ces méthodes car elles reposent sur l'approximation des courbes de l'espace de configuration par des interpolation polynômiale paramétrées par les points de contrôle  $q_\mu \in Q$  sur les fonctions de base  $\varphi_\mu$

$$\tilde{q}(t) = \sum_{\mu=0}^M q_\mu \varphi_\mu(t).$$

Or, cette construction repose sur la linéarité de l'espace de configuration  $Q$ , ce qui n'est a priori pas vérifié dans le cas où  $Q = G$  un groupe de Lie.

Les méthodes de Galerkin peuvent dans ce cas être adaptées en effectuant une interpolation dans l'algèbre  $\mathfrak{g}$  similaire à celle décrite au § 1.3.2, qui vérifie par essence les hypothèses de linéarité requises, et en la ramenant sur le groupe à l'aide d'un difféomorphisme local  $\Phi$ . Cette famille d'intégrateurs a fait l'objet de travaux précédents. Le cadre général a été posé par Leok [83]. L'étude des propriétés de convergence numériques de ces méthodes sont l'objet de la thèse de Hall [49], [51].

Dans le cadre des méthodes de Galerkin avec groupe de Lie, nous ferons les mêmes choix que ceux présentés dans le cas classique pour les méthodes de Galerkin sans groupe de Lie d'une interpolation polynômiale construite à partir des polynômes de Lagrange associés à des points d'interpolation de Chebychev, et d'une quadrature de Gauss-Legendre pour évaluer l'intégrale d'action (voir chapitre 1). D'autres choix sont tout à fait possibles, mais ne seront pas discutés ici.

#### II.2.3.1 Espace des trajectoires

Soit une trajectoire  $\tilde{\xi}$  dans l'algèbre  $\mathfrak{g}$ , paramétrée sur chaque sous-intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  par  $M + 1$  points de contrôles  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  associés aux fonctions de base  $\varphi_\mu$  et aux dates  $\alpha_\mu$  de sorte que pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$\tilde{\xi}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) = \tilde{\xi}_i(t) = \sum_{\mu=0}^M \xi_i^\mu \varphi_\mu(\tilde{t})$$

où  $\tilde{t} = (t - t_i)/h$ . Soit  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow G$  un difféomorphisme local, on fait correspondre à  $\tilde{\xi}$  la trajectoire  $\tilde{g}$  évoluant sur le groupe  $G$  en définissant pour tout  $t \in [t_i, t_{i+1}]$  la relation

$$\tilde{g}|_{[t_i, t_{i+1}]}(t) = \tilde{g}_i(t) = g_i \Phi \left( \sum_{\mu=0}^M \xi_i^\mu \varphi_\mu(\tilde{t}) \right)$$

où  $g_i = \tilde{g}(t_i)$ . Pour chaque intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$ , la courbe  $\tilde{g}_i$  passe aux dates  $\alpha_\mu$  par les  $M + 1$  points  $\{g_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  définis par  $g_i^\mu = g_i \Phi(\xi_i^\mu)$ , ce qui équivaut à la relation

$$\xi_i^\mu = \Phi^{-1} \left( L_{g_i^{-1}} g_i^\mu \right)$$

Sans perdre en généralité, on suppose que  $\Phi(0_{\mathfrak{g}}) = e_G$ . Choisir alors  $\xi_i^0 = 0$  permet de vérifier que  $g_i^0 = g_i$ . Par ailleurs, l'hypothèse de continuité de  $\tilde{g}$  requiert que  $g_i^M = g_{i+1}^0 = g_{i+1}$ , ce qui impose  $\xi_i^M = \Phi^{-1} \left( L_{g_i^{-1}} g_{i+1} \right)$ . Cette construction est résumée en figure II.7.

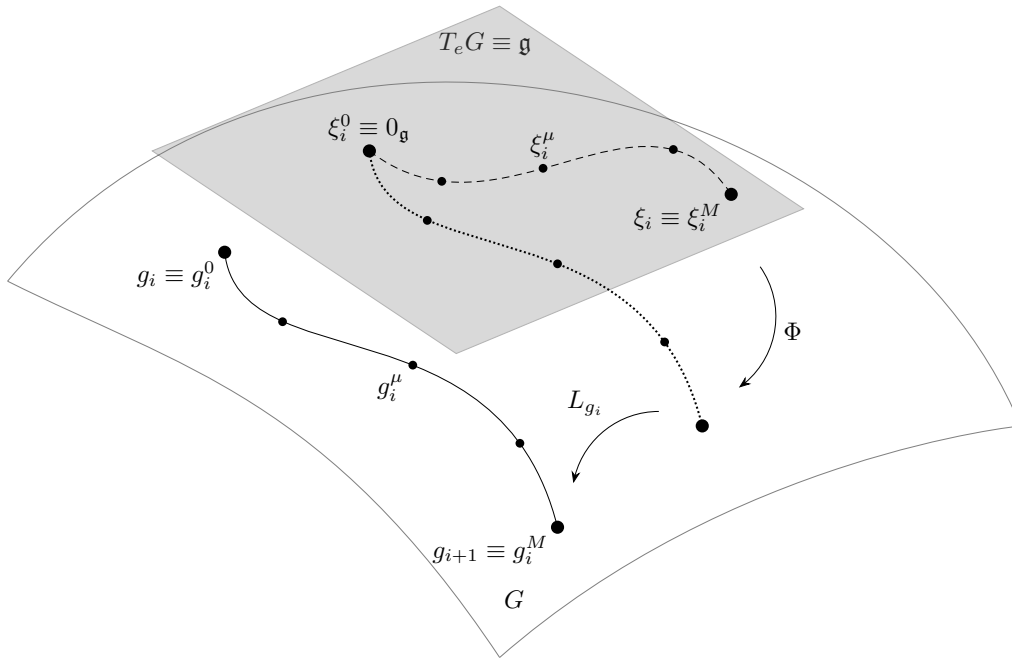


FIG. II.7 Schéma du principe d'interpolation pour les groupes de Lie. La trajectoire polynômiale  $\tilde{\xi}_i$ , définie sur l'algèbre  $\mathfrak{g}$ , est rapportée dans le groupe à l'aide du difféomorphisme  $\Phi$ , puis amenée au point  $g_i$  par translation à gauche.

### II.2.3.2 Quadrature de l'intégrale d'action

De façon similaire à la construction proposée au § I.3.2, l'intégrale d'action est approchée sur un intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  à l'aide d'une quadrature de Gauss-Legendre  $(w_a, c_a)_{a=1}^r$ , ce qui s'écrit

$$\tilde{\mathcal{A}}_i(\{\xi_i^\mu\}) = h_i \sum_{a=1}^A w_a \ell(\tilde{\chi}_i(c_a h)) \quad (\text{II.17})$$

où la dérivée trivialisée  $\tilde{\chi} \in \mathfrak{g}$  de la trajectoire  $\tilde{g}$  est définie par  $\tilde{\chi} = \tilde{g}^{-1}\dot{\tilde{g}}$ .

Afin d'exprimer l'intégrale d'action en fonction des points de contrôles  $\{\xi_i^\mu\}$  en vue de la résolution d'un problème d'optimisation locale, il est nécessaire d'expliciter  $\tilde{\chi}_i$  en fonction de ces points. On vérifie d'abord que la dérivée  $\dot{\tilde{g}}_i$  de  $\tilde{g}_i = L_{g_i}\Phi(\tilde{\xi}_i)$  s'écrit

$$\dot{\tilde{g}}_i = TL_{g_i}T_{\tilde{\xi}_i}\Phi\left(\dot{\tilde{\xi}}_i\right).$$

En partant la définition de  $\tilde{\chi}_i$ , on obtient alors

$$\tilde{\chi}_i = TL_{\tilde{g}_i^{-1}}TL_{g_i}T_{\tilde{\xi}_i}\Phi\left(\dot{\tilde{\xi}}_i\right) = TL_{\tilde{g}_i^{-1}g_i}T_{\tilde{\xi}_i}\Phi\left(\dot{\tilde{\xi}}_i\right) = TL_{\Phi(\tilde{\xi}_i)^{-1}}T_{\tilde{\xi}_i}\Phi\left(\dot{\tilde{\xi}}_i\right)$$

où on a utilisé le fait que

$$\tilde{g}_i^{-1}g_i = \left(g_i\Phi(\tilde{\xi}_i)\right)^{-1}g_i = \Phi(\tilde{\xi}_i)^{-1}g_i^{-1}g_i = \Phi(\tilde{\xi}_i)^{-1}$$

De la même manière que la différentielle trivialisée à droite  $d^R\Phi$  vérifie la définition (II.15), la différentielle trivialisée à gauche  $d^L\Phi$  est donnée pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$  par

$$d^L\Phi_\xi = TL_{\Phi(\xi)^{-1}} \circ T_\xi\Phi.$$

Ceci nous permet finalement d'écrire l'expression de  $\tilde{\chi}_i$  en fonction de  $\tilde{\xi}_i$  comme

$$\tilde{\chi}_i = d^L\Phi_{\tilde{\xi}_i}\left(\dot{\tilde{\xi}}_i\right) \quad (\text{II.18})$$

### II.2.3.3 Lagrangien discret

Le lagrangien discret réduit  $\ell_d$  est défini à l'aide d'un problème d'optimisation local pour les points de contrôles  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=1}^{M-1}$  : soit  $g_i, g_{i+1}$ , le lagrangien discret  $\ell_d : \xi \rightarrow \mathbb{R}$  approche l'intégrale d'action sur l'intervalle  $[t_i, t_{i+1}]$  de sorte que, pour  $\xi_i = g_i^{-1}g_{i+1}$ , on a

$$\ell_d(\xi_i) = \underset{\substack{\xi_i^\mu \in \mathfrak{g} / \xi_i^0 = 0_{\mathfrak{g}}, \\ \xi_i^M = \xi_i}}{\text{ext}} h \sum_{a=1}^A w_a \ell(\tilde{\chi}_i(c_a h)) \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \ell(\chi(t))$$

où  $g(t_i) = g_i, g(t_{i+1}) = g_{i+1}$  et  $g$  est solution des équations d'Euler-Poincaré (II.12). La dérivée trivialisée  $\chi$  associée à  $g$  s'écrit  $\chi = g^{-1}\dot{g}$ , et l'expression de  $\tilde{\chi}_i$ , qui dépend des  $\xi_i^\mu$ , est donnée par (II.18).

La condition d'extrémalité est vérifiée par les  $M - 1$  points de contrôle  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=1}^{M-1}$  annulant pour tout  $1 \leq \nu \leq M - 1$  les conditions

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i}{\partial \xi_i^\nu} = h \sum_{a=1}^A w_a \ell'(\tilde{\chi}_i(c_a h)) T_{\xi_i^\nu} \tilde{\chi}_i(c_a h) = 0 \quad (\text{II.19})$$

Ces équations constituent les  $M - 1$  équations d'Euler-Poincaré internes.

### II.2.3.4 Méthode numériques de Galerkin avec groupe de Lie

Soit  $M$  le degré de l'interpolation polynômiale des trajectoires et  $A$  le nombre de points de la quadrature de Gauss-Legendre définissant une méthode de Galerkin, un pas  $(g_{i-1}, g_i) \mapsto (g_i, g_{i+1})$  de l'intégrateur numérique est effectué comme suit :

1. soit les configurations  $g_{i-1}, g_i \in G$  et les points de contrôle  $\{\xi_{i-1}^\mu\}_{\mu=0}^M$  réalisant la condition d'extrémalité de  $\ell_d(\xi_{i-1})$  où  $\xi_{i-1}$  est défini par  $\xi_{i-1} \equiv \Phi^{-1}(g_{i-1}^{-1}g_i)$ .
2. on calcule les  $M+1$  points de contrôle  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=0}^M$  vérifiant l'équation d'Euler-Poincaré discrète (II.16), les  $M-1$  équations d'Euler-Poincaré internes (II.19), et  $\xi_i^0 = 0_{\mathfrak{g}}$ .
3. la nouvelle position  $g_{i+1}$  est calculée en utilisant la relation de reconstruction (II.13).

L'utilisation du difféomorphisme local  $\Phi$ , à la base des méthodes présentées, induit une restriction due au fait que les constructions ne sont valides que dans un voisinage de l'origine. En pratique, cette restriction impose une limitation du pas de temps, qui doit être choisi inférieur à une borne supérieure dépendant du difféomorphisme particulier utilisé pour l'implémentation de la méthode.

## II.3 Dynamique du solide rigide

Nous proposons d'illustrer les propriétés des intégrateurs numériques variationnels avec groupes de Lie présentés précédemment en les appliquant à la dynamique du solide rigide. La dynamique de ce système a été approchée au § II.1 en calculant les trajectoires solutions de l'équation d'Euler-Poincaré (II.9) à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta Munthe-Kaas. Pour traiter le problème dans le formalisme de la mécanique variationnelle, il est nécessaire de le décrire à l'aide de son lagrangien, ce qui est l'objet du § II.3.1. Une discrétisation du système dynamique sera ensuite proposée au § II.3.2. Des résultats numériques seront alors présentés et discutés.

Le solide rigide, et le groupe de Lie  $SO(3)$  qui permet de le représenter, sont au centre de la formulation de nombreux problèmes physiques relevant de la mécanique du solide, de la robotique ou encore de la mécanique des milieux continus ; aussi sont-ils l'objet d'une très riche littérature scientifique qui remonte aux travaux de Poincaré [112]. L'étude de cet exemple nous permet en particulier d'introduire certains des outils conceptuels qui serviront à la définition du modèle de corde du chapitre 4. On renvoie à Marsden et Ratiu [96] pour un traitement complet de la dynamique du solide rigide, dont nous ne rappellerons ici que les principaux résultats.

Les intégrateurs de Galerkin avec groupe de Lie ont précédemment été appliqués au calcul de la dynamique du solide rigide par Hall et Leok [51]. Le traitement du même problème par un intégrateur similaire est proposé par Leitz et Leyendecker [80], pour lequel l'interpolation de la trajectoire du solide rigide est effectuée à l'aide de quaternions. Les autres approches numériques variationnelles appliquées à la dynamique du solide rigide, ne faisant pas appel aux intégrateurs de type Galerkin, sont trop nombreuses pour être recensées. On citera simplement les travaux de Lee, Leok et McClamroch [74], [77], [78], ainsi qu'une application des intégrateurs variationnels avec groupe de Lie à la théorie du contrôle proposée par Kobilarov et Marsden [72] pour des solides rigides, soumis à différentes interactions prises en considération à l'aide d'un principe de Lagrange-d'Alembert (voir chapitre 1).

### II.3.1 Formulation lagrangienne de la dynamique du solide rigide

L'espace des configuration du solide rigide est le groupe spécial orthogonal à trois dimensions

$$G = \text{SO}(3) = \{R \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) / R^T R = I_3\}.$$

Soit  $g : [0, T] \rightarrow G$  une trajectoire, la dérivée trivialisée à gauche  $\hat{\chi}$  est définie par  $\hat{\chi} = R^{-1}\dot{R} = R^T\dot{R}$ . L'objet  $\hat{\chi}$  appartient à l'algèbre des matrices antisymétriques  $\mathfrak{so}(3)$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3) = \{\hat{\chi} \in \text{GL}_3(\mathbb{R}) / \hat{\chi}^T = -\hat{\chi}\}.$$

On utilise dans la notation l'application  $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ , définie pour tout  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)^T \in \mathbb{R}^3$  par

$$\hat{\chi} = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_3 & \chi_2 \\ \chi_3 & 0 & -\chi_1 \\ -\chi_2 & \chi_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette application permet de faire le lien entre les notations vectorielle et matricielle de l'algèbre  $\mathfrak{so}(3)$ , et vérifie pour tout  $v \in \mathbb{R}^3$  la relation  $\hat{\chi}v = \chi \wedge v$  où  $\wedge$  est l'opération de produit vectoriel usuelle.

Le lagrangien réduit du système est égal à l'énergie cinétique totale, et s'écrit à l'aide de la représentation vectorielle de  $\chi$  comme

$$\ell(\chi) = \frac{1}{2} \langle \chi, \mathbb{J}\chi \rangle$$

où  $\mathbb{J}$  est le tenseur d'inertie du solide. Dans la suite, on suppose sans perdre en généralité que le repère mobile coïncide avec les directions propres du solide ; le tenseur  $\mathbb{J}$  s'écrit alors comme la matrice diagonale  $\mathbb{J} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . L'équation d'Euler-Poincaré du système est donné pour tout  $\chi$  par

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{J}\chi) - \text{ad}_\chi^*(\mathbb{J}\chi) = 0 \quad (\text{II.20})$$

En utilisant la représentation vectorielle de l'algèbre  $\mathfrak{so}(3)$  et de son dual  $\mathfrak{so}(3)^*$ , l'action co-adjointe  $\text{ad}^* : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$  prend pour tout  $\chi \in \mathfrak{g}, \pi \in \mathfrak{g}^*$  l'expression  $\text{ad}_\chi^* \pi = \chi \wedge \pi$ . Un élément de l'algèbre duale  $\mathfrak{so}(3)^*$  représente un moment cinétique. En définissant le moment  $\pi = \mathbb{J}\chi$  associé à  $\chi$ , l'équation d'Euler-Poincaré (II.20) se réécrit alors

$$\dot{\pi} = \chi \wedge \pi$$

Utiliser la définition  $\chi \wedge \pi = \hat{\chi}\pi$  et remplacer  $\chi$  par  $\mathbb{J}^{-1}\pi$  dans cette expression permet de retrouver l'équation (II.1) du § II.1.

Le moment  $\pi \in \mathfrak{g}^*$  est exprimé dans le repère invariant à gauche (ou repère mobile). Dans le repère invariant à droite (ou repère spatial), ce moment s'écrit  $\Pi = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \pi \in \mathfrak{g}^*$ . Pour le groupe spécial orthogonal, l'opérateur  $\text{Ad}^* : \text{SO}(3) \times \mathfrak{so}(3)^* \rightarrow \mathfrak{so}(3)^*$  s'écrit  $\text{Ad}_g^* \pi = g\pi$  pour tout  $g \in \text{SO}(3), \pi \in \mathfrak{so}(3)^*$ , ce qui donne

$$\Pi = g^{-1}\pi.$$

Le lagrangien réduit étant trivialement invariant par l'action de  $\text{SO}(3)$ , l'application du théorème de Noether donné au § II.2.1.3 permet de conclure que le moment  $\Pi$  est conservé



par les trajectoires solutions du système. On retrouve ici le résultat classique selon lequel les composantes du moment cinétique exprimé dans le repère spatial sont conservées au cours du temps.

La solution du problème est obtenue en résolvant tout d'abord les équations d'Euler-Poincaré pour la variable  $\pi$ . La trajectoire  $g$  est ensuite déterminée à partir de la relation de reconstruction

$$\dot{g} = g\chi, \quad g(0) = g_0$$

où la vitesse angulaire  $\chi = \mathbb{J}^{-1}\pi$  est connue. On renvoie à Marsden et Ratiu [96] pour l'établissement des solutions analytiques de ces équations, dont les expressions sont complexes et nécessitent des disjonctions de cas selon les valeurs des composantes du tenseur d'inertie et des conditions initiales du problème. L'existence de solutions analytiques explicites permet au paragraphe suivant de calculer les erreurs de convergence des différentes quantités numériques.

### II.3.2 Définition de la méthode de Galerkin avec groupe de Lie

Nous proposons ici l'application de la famille d'intégrateurs de Galerkin avec groupe de Lie présentée au § II.2.3 pour résoudre numériquement la dynamique du solide rigide. L'approche présentée ici, similaire à celle de Hall [51], consiste à construire une interpolation polynômiale de la trajectoire du solide exprimée à l'aide du groupe  $\text{SO}(3)$  et en choisissant comme difféomorphisme  $\Phi$  la fonction Cayley.

Dans Hall [51], les dérivées sont exprimées sur les différents espaces tangents  $T_{g_i}G$ , ce qui nécessite au moment de l'explicitation des équations d'avoir recours à une gymnastique mathématique supplémentaire afin d'établir les dérivées trivialisées, qui ne sont jamais mentionnées explicitement. À l'inverse, la formulation à l'aide des dérivées trivialisées proposée au § II.2 permet l'écriture unifiée des équations d'Euler-Poincaré, et met en exergue les opérateurs construits à partir du difféomorphisme qui seront réutilisés au chapitre 4.

On choisit, pour appliquer la méthode de Galerkin, le difféomorphisme  $\text{cay} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$  défini pour tout  $\xi \in \mathfrak{g}$  par [123]

$$\text{cay}(\xi) = \left( \mathbf{I}_3 - \frac{\hat{\xi}}{2} \right)^{-1} \left( \mathbf{I}_3 + \frac{\hat{\xi}}{2} \right)$$

Cette application permet de définir  $\tilde{g}_i$  la trajectoire interpolée dans le groupe entre les dates  $t_i$  et  $t_{i+1}$  à l'aide de la courbe  $\xi_i$  comme

$$\tilde{g}_i(t) = g_i \text{cay} \left( \tilde{\xi}_i(t) \right) \quad \text{où} \quad \tilde{\xi}_i(t) = \sum_{\mu=0}^M \xi_i^\mu \phi_\mu(\tilde{t})$$

avec  $\tilde{t} = (t - t_i)/h$ . La dérivée trivialisée à gauche  $\tilde{\chi}_i$  correspondante est donnée par la relation (II.18) qui s'écrit ici

$$\tilde{\chi}_i = \text{d}^L \text{cay}_{\tilde{\xi}_i} \dot{\tilde{\xi}}_i = \frac{2}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} \left( 2\mathbf{I} - \hat{\tilde{\xi}}_i \right) \dot{\tilde{\xi}}_i$$

Afin de calculer les dérivées partielles de l'intégrale d'action discrète  $\tilde{\mathcal{A}}_i$ , dont l'expression est donnée par (II.17), en fonction des points de contrôle  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=0}^M$ , il est nécessaire d'obtenir la variation de  $\chi_i$  induite par  $\delta\xi_i^\mu$ . Pour cela, on calcule

$$\begin{aligned} d\tilde{\chi}_i(\delta\xi_i^\mu) &= \frac{2}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} \left[ -\phi_\mu \widehat{\delta\xi_i^\mu} - 2\phi_\mu \frac{\langle \tilde{\xi}_i, \delta\xi_i^\mu \rangle}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) \right] \dot{\tilde{\xi}}_i + \frac{2}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) \frac{\dot{\phi}_\mu}{h} \delta\xi_i^\mu \\ &= \frac{2}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} \left[ \phi_\mu \widehat{\xi}_i \delta\xi_i^\mu - \frac{\dot{\phi}_\mu}{h} \widehat{\xi}_i \delta\xi_i^\mu - \frac{2\phi_\mu}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) \dot{\tilde{\xi}}_i \langle \tilde{\xi}_i, \delta\xi_i^\mu \rangle + \frac{2\dot{\phi}_\mu}{h} \delta\xi_i^\mu \right] \\ &= \frac{2}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} \left[ \phi_\mu \widehat{\xi}_i + \frac{\dot{\phi}_\mu}{h} (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) - \frac{2\phi_\mu}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) \dot{\tilde{\xi}}_i \tilde{\xi}_i^T \right] \delta\xi_i^\mu \\ &= \left\langle \frac{\partial \tilde{\chi}_i}{\partial \xi_i^\mu}, \delta\xi_i^\mu \right\rangle, \end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i}{\partial \xi_i^\mu} &= h \sum_{a=1}^A w_a \ell'(\tilde{\chi}_i) \frac{\partial \tilde{\chi}_i}{\partial \xi_i^\mu} \\ &= h \sum_{a=1}^A w_a \frac{4}{(4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2)^2} \dot{\tilde{\xi}}_i^T (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i)^T \mathbb{J} \left[ \phi_\mu \widehat{\xi}_i + (2\mathbf{I} - \widehat{\xi}_i) \left( \frac{\dot{\phi}_\mu}{h} \mathbf{I} - \frac{2\phi_\mu}{4 + \|\tilde{\xi}_i\|^2} \dot{\tilde{\xi}}_i \tilde{\xi}_i^T \right) \right] \end{aligned}$$

où les fonctions  $\tilde{\xi}_i$  et  $\dot{\tilde{\xi}}_i$  sont évaluées en  $\tilde{t}_{i,a}$ . Enfin, on calcule les expressions nécessaires à l'écriture de l'équation d'Euler-Poincaré discrète à partir de Selig [123] et du lemme A.3 de Kobilarov et Marsden [72]

$$\begin{aligned} d^{\text{R}} \text{cay}_\xi^{-1*} &= (d^{\text{R}} \text{cay}_\xi^{-1})^T = \left( \mathbf{I} + \frac{\widehat{\xi}}{2} + \frac{\xi \xi^T}{4} \right) \\ \text{Ad}_{\text{cay}(\xi)}^* d^{\text{R}} \text{cay}_\xi^{-1*} &= d^{\text{R}} \text{cay}_{-\xi}^{-1*} = \left( \mathbf{I} - \frac{\widehat{\xi}}{2} + \frac{\xi \xi^T}{4} \right) \end{aligned}$$

Un pas de la méthode variationnelle de Galerkin avec groupe de Lie approchant la dynamique du solide rigide est finalement constituée de l'équation d'Euler-Poincaré (II.21a), des  $M - 1$  équations d'Euler-Poincaré internes (II.21b) et de la relation de reconstruction (II.21c)

$$d^{\text{R}} \text{cay}_{\xi_{i+1}}^{-1*} \ell'_d(\xi_{i+1}) - \text{Ad}_{\text{cay}(\xi_i)}^* d^{\text{R}} \text{cay}_{\xi_i}^{-1*} \ell'_d(\xi_i) = 0 \quad (\text{II.21a})$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i}{\partial \xi_i^\mu} = 0 \quad 0 < \mu < M \quad (\text{II.21b})$$

$$g_{i+1} = g_i \text{cay}(\xi_i) \quad (\text{II.21c})$$

où  $\ell'_d(\xi_i) = \partial \tilde{\mathcal{A}}_i / \partial \xi_i^M$ . Pour chaque pas  $g_i \mapsto g_{i+1}$ , les équations d'Euler-Poincaré (II.21a) et (II.21b) doivent être résolues pour les  $M$  points de contrôles  $\{\xi_i^\mu\}_{\mu=1}^M$  à l'aide d'un solveur numérique. La nouvelle position  $g_{i+1}$  est ensuite obtenue à partir de l'équation de reconstruction (II.21c).

### II.3.3 Résultats numériques

On présente ici les résultats numériques obtenus par application des méthodes de Galerkin à la dynamique du solide rigide. Les simulations sont menées en choisissant pour le tenseur d'inertie les valeurs

$$I_1 = 2/3, \quad I_2 = 1, \quad I_3 = 2$$

et pour les données initiales du problèmes

$$g_0 = \text{cay}((1, 0, -3)), \quad \pi_0 = (1/2, 0, \sqrt{3}/2)^T.$$

Les courbes d'interpolation dans le groupe et l'algèbre obtenue pour les deux premières itérations de la méthode pour les paramètres  $h = 2.5$  et  $M = 3$  sont représentés en figure II.8. La solution numérique du moment  $\pi$  calculée sur  $I = 100$  itérations est représenté en figure II.14. Celle-ci appartient bien à la sphère de rayon  $\|\pi_0\|$ . Les trois composantes du moment angulaire  $\Pi$ , exprimé dans le repère spatial, sont conservée numériquement par la solution à erreur machine près (figure II.9). On retrouve par ailleurs la conservation approximative de l'énergie en figure II.10; ce résultat est attendu pour la méthode variationnelle de Galerkin avec groupe de Lie, qui est symplectique (voir chapitre 1).

On vérifie expérimentalement qu'une méthode de Galerkin avec groupe de Lie pour une interpolation d'ordre  $M$  et une quadrature de Gauss-Legendre à  $A$  points pour  $A = M$  vérifie une convergence numérique d'ordre  $2M$  (figure II.11). L'erreur est ici calculée à l'aide de la distance définie pour deux matrices de rotation  $g_1, g_2$  de  $\text{SO}(3)$  comme la norme de Frobenius de la déviation par rapport à l'identité de  $g_1^{-1}g_2$

$$d(g_1, g_2) = \|\text{I} - g_1^{-1}g_2\|.$$

Pour une discussion sur les différents choix possibles pour la mesure de distance sur  $\text{SO}(3)$ , on renvoie à la lecture de Huynh [59]. D'autre part, la variation d'énergie vérifie la même propriété de convergence (figure II.12). Ces résultats recourent ceux obtenus par Leitz et Leyendecker [80] et Hall et Leok [51]. Enfin, on observe sur la figure II.13 que la convergence numérique du moment  $\pi_i$  exprimé dans le repère mobile est d'ordre  $4M$ . Ce résultat est à mettre en regard avec l'ordre de convergence des méthodes RKMK vues au § II.1, qui dans le cas de la dynamique du solide rigide approchent les solutions  $\pi$  de l'équation (II.9). En particulier, une méthode de Galerkin pour  $M = A = 1$  a le même ordre de convergence que la méthode RKMK4 vis-à-vis de la variable  $\pi$  (cf. figure II.4).

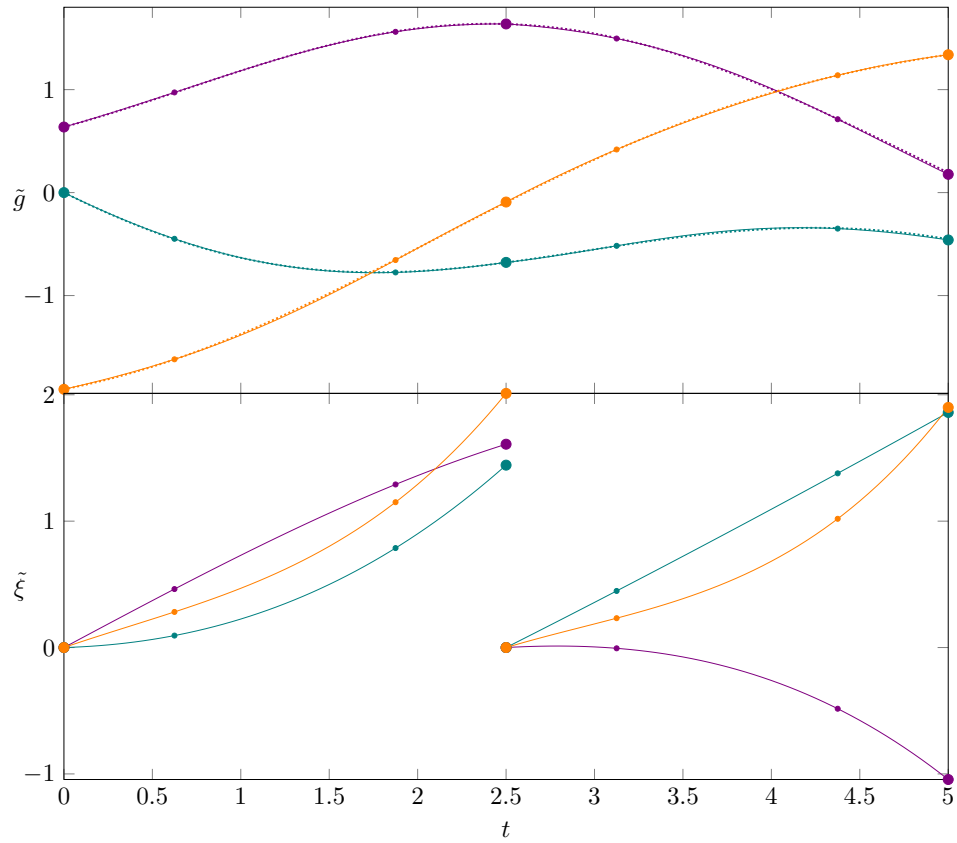


FIG. II.8 Composantes des courbes de Galerkin  $\tilde{g}$  et  $\tilde{\xi}$  des deux premiers pas de temps de la solution numérique pour  $M = 3$  et  $h = 2.5$ . Les  $g_i$ ,  $\xi_i$  sont indiqués par les grands points, et les points de contrôle internes  $g_i^\mu$ ,  $\xi_i^\mu$  par les petits points.

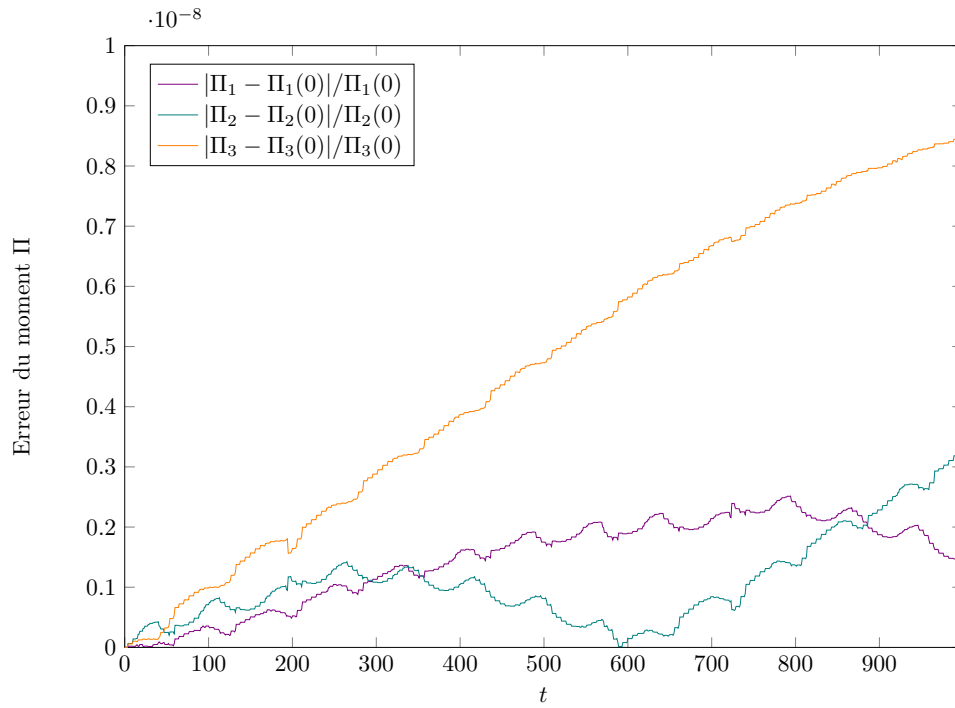


FIG. II.9 Erreur relative des trois composantes du moment angulaire spatial  $\Pi$  pour la méthode de Galerkin avec les paramètres  $M = 3$  et  $h = 1.0$ .

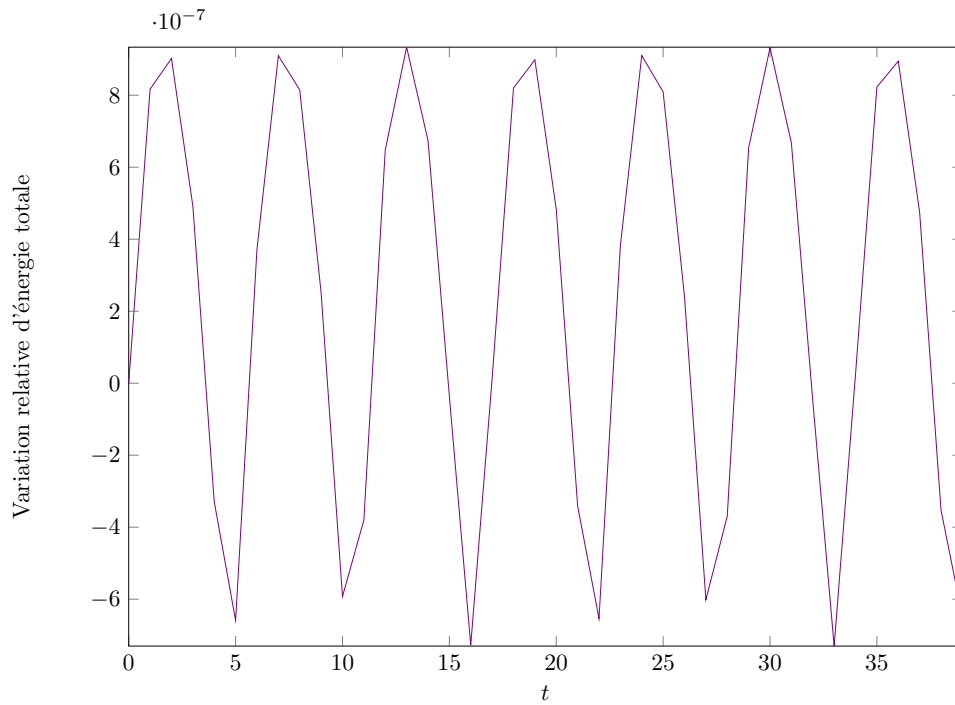


FIG. II.10 Variation relative de l'énergie de la solution numérique calculée par méthode de Galerkin avec les paramètres  $M = 3$  et  $h = 1.0$ .

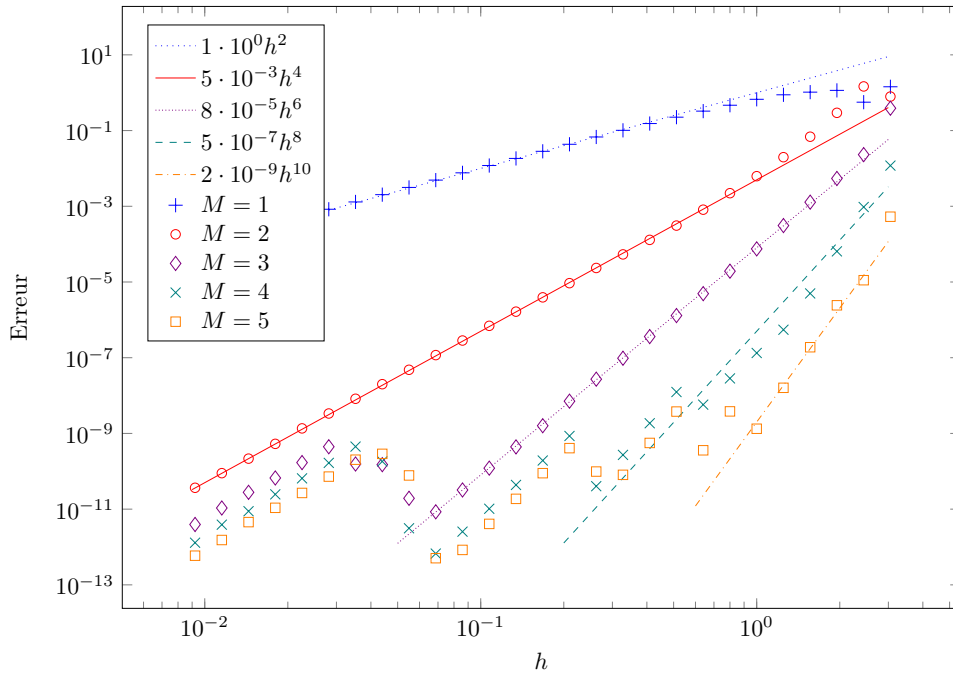


FIG. II.11 Convergence numérique de la méthode de Galerkin calculée pour différentes valeurs de l'ordre d'interpolation  $M$  une durée de simulation  $T = 10$ .

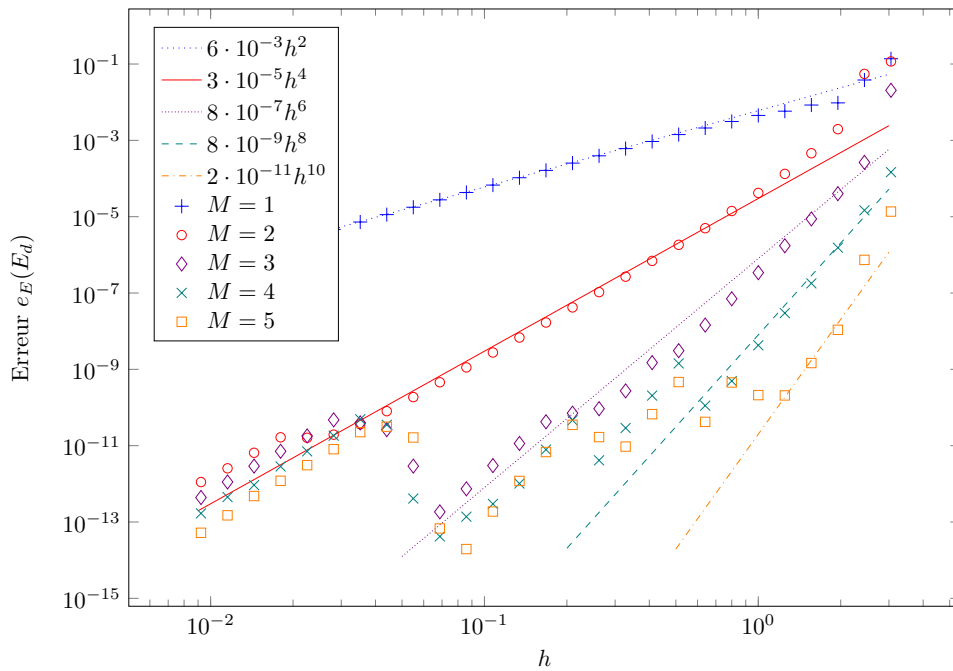


FIG. II.12 Convergence numérique de l'énergie de la solution obtenue par méthode de Galerkin calculée pour différentes valeurs de l'ordre d'interpolation  $M$  une durée de simulation  $T = 10$ .

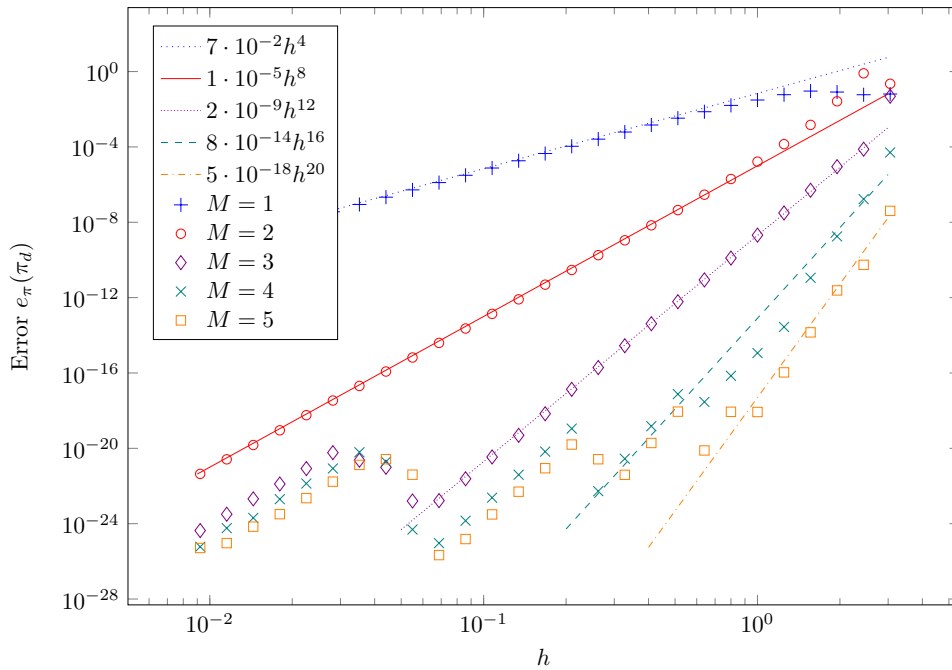


FIG. II.13 Convergence numérique du moment  $\pi$  obtenu par méthode de Galerkin calculée pour différentes valeurs de l'ordre d'interpolation  $M$  une durée de simulation  $T = 10$ .

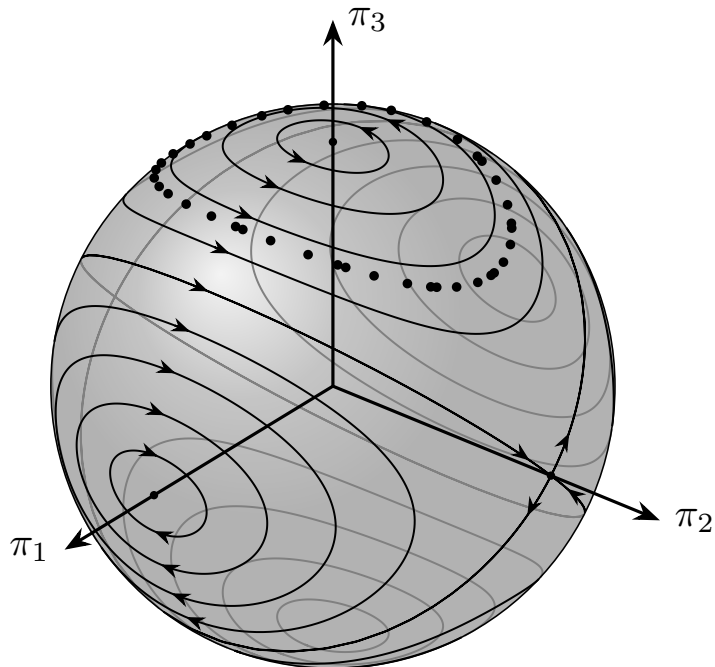


FIG. II.14 Moment angulaire obtenu par application de la méthode de Galerkin pour les paramètres  $M = 3$  et  $h = 1.0$  sur  $I = 100$  itérations.

## II.4 Conclusion

Au premier chapitre, les principaux résultats de la mécanique lagrangienne classique ont été rappelés dans le cas où l'espace de configuration est un espace linéaire. Ils ont été élargis ici au traitement des systèmes physiques formulés sur un groupe de Lie. Les principes généraux de l'approximation des équations différentielles à l'aide de méthodes avec groupe de Lie ont été introduits à partir de l'étude des schémas de Runge-Kutta Munthe-Kaas (§ II.1). Ces principes ont ensuite été adaptés en mécanique lagrangienne pour l'approximation des systèmes invariants par l'action d'un groupe de Lie (§ II.2). Dans ce cas, le principe variationnel mène à l'établissement des équations d'Euler-Poincaré, et la conservation d'un moment est automatiquement vérifiée par application du théorème de Noether. Les méthodes de Galerkin, reformulées dans ce contexte, ont permis de calculer les solutions numériques de la dynamique du solide rigide et de vérifier les propriétés énoncées (§ II.3)

Le prochain chapitre est consacré au traitement des équations aux dérivées partielles dans le cadre de la formulation lagrangienne des champs.





# Chapitre III

## Géométrie multisymplectique

Au premier chapitre ont été rappelés les principaux résultats de la mécanique lagrangienne classique, dans lequel a été posée l'hypothèse d'un espace des configurations  $Q$  de dimension finie. Cette formulation de la mécanique a alors permis le traitement des systèmes décrits par des équations différentielles ordinaires. Toutefois, ce traitement peut être étendu à une classe plus large de problèmes exprimés à partir d'équations aux dérivées partielles. La formulation lagrangienne permet alors notamment de rendre compte de la mécanique des milieux continus, qui joue un rôle prépondérant dans la formulation des systèmes acoustiques.

Pour les systèmes physiques pouvant être décrits par une densité lagrangienne, la formulation covariante présente un cadre naturel étendant la mécanique lagrangienne classique. La densité lagrangienne dépend alors de la variable de temps et d'une ou plusieurs variables spatiales, ainsi que des dérivées partielles de la trajectoire selon ces différentes variables. L'action d'un tel système est définie comme une intégrale sur un domaine spatio-temporel, là où, dans le cas classique, la seule variable temporelle décrit le problème physique. Cette description, qui remonte aux travaux pionniers de François Gallissot [43], [44], est proposée à l'aide des outils de la géométrie différentielle dans Echeverría-Enríquez *et al.* [33] et Bensoam et Baugié [7], et les principaux résultats sont énoncés dans les travaux de Marsden et Shkoller [97], Fetecau, Marsden et West [42] et Ellis, Gay-Balmaz, Holm, Putkaradze et Ratiu [35].

La mécanique lagrangienne covariante admet également une formulation discrète, dont les concepts fondamentaux ont été posés dans Marsden, Patrick et Shkoller [94] puis développés par Lew, Marsden, Ortiz et West [86]. La discrétisation des structures décrivant le système physique assure alors la vérification numérique des résultats de conservation. Plusieurs intégrateurs numériques multisymplectiques d'ordre faible définis selon cette approche ont été proposés en tant que preuves de concepts. On pourra par exemple se référer aux travaux de Chen [21], Marsden, Patrick et Shkoller [94], et Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [31].

Le présent chapitre est organisé comme suit. Les outils de la théorie lagrangienne des champs sont introduits (§ III.1). Le calcul des variations permet tout d'abord l'établissement des équations d'Euler-Lagrange covariantes et des lois d'évolution associées aux différentes variables spatio-temporelles. On propose ensuite un traitement des conditions aux limites grâce à l'extension du principe de moindre action qui donne un cadre intrinsèque pour l'obtention des conditions du premier ordre. Le caractère multisymplectique

des solutions des équations d'Euler-Lagrange est ensuite rappelé, qui est l'extension en formulation covariante du résultat de symplecticité, puis le théorème de Noether, qui associe à toute symétrie du système une loi de conservation, est énoncé. Enfin, la prise en compte de forces extérieures exercées sur le système est réalisée à l'aide d'un principe de Lagrange-d'Alembert. On propose au § III.2 la définition d'une famille de méthodes covariantes de Galerkin généralisant celle du premier chapitre au cas à deux variables indépendantes. Après avoir construit la méthode, les équivalents discret du résultat de multisymplecticité et du théorème de Noether sont donnés. Une attention particulière est portée au traitement des conditions aux limites à partir d'un principe variationnel étendu, et à la prise en compte des forces extérieures. Deux exemples d'applications de l'intégrateur sont ensuite proposés (§ III.3) : l'étude de l'équation des ondes est l'occasion de vérifier les propriétés de conservation approximative de l'énergie par les solutions numériques ; un modèle de corde raide non linéaire est ensuite examiné, et on met en évidence la vérification numérique de la loi d'évolution des moments.

### III.1 Théorie lagrangienne des champs

La structure de fibré des 1-jets a été introduite au premier chapitre dans le cas particulier où la seule variable considérée était le temps. On généralise maintenant cette structure dans le cas de  $n+1$  variables (typiquement une variable de temps et  $n$  variables d'espace). Nous ne rappellerons ici que les notions nécessaires dans le cadre de ce chapitre, que nous empruntons à Encheverría-Enríquez *et al.* [33] et Bensoam et Baugé [7] ; le lecteur pourra se référer à ces sources pour une exposition plus circonstanciée.

Les variables servant à paramétrer le problème lagrangien appartiennent à une variété différentielle orientable  $M$  de dimension  $n+1$  appelée base. Les trajectoires du système sont représentées par les sections  $\phi : \mathcal{U} \subset M \rightarrow E$  du fibré différentiel  $E$ . Le fibré  $E$  est localement le produit de la base  $M$  et de la fibre  $Q$ , espace des configurations de dimension  $N$ . Un élément du fibré  $E$  peut s'écrire à l'aide du système de coordonnées locales  $\{x^\mu, y^A\}$  où  $x^\mu$ ,  $0 \leq \mu \leq n$  sont des coordonnées locales de  $M$  et  $y^A$ ,  $1 \leq A \leq N$  des coordonnées locales de  $Q$ . Dans ce cas, la section  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  s'écrit pour tout  $x \in \mathcal{U}$  comme  $\phi(x) = (x^\mu(x), \phi^A(x))$ .

Le fibré des 1-jets de  $E$ , noté  $J^1E$ , est la structure qui permet de généraliser dans le cas de plusieurs variables indépendantes la notion d'espace tangent. Soit une section  $\phi$  du fibré  $E$ , on appelle relevé (canonique) de  $\phi$  la section  $j^1\phi$  du fibré  $J^1E$ . Celui-ci s'écrit pour tout  $x \in \mathcal{U}$  comme

$$j^1\phi(x) = \left( x^\mu(x), \phi^A(x), \frac{\partial \phi^A}{\partial x^\mu}(x) \right)$$

dans le système de coordonnées locales  $\{x^\mu, y^A, v_\mu^A\}$ . Une telle section est dite holonome, c'est à dire qu'elle vérifie

$$(j^1\phi)^*\theta = 0$$

où la 1-forme vectorielle  $\theta$  est appelée forme de contact [33], dont on rappellera simplement qu'elle s'écrit en coordonnées  $\theta = \theta^A \otimes \vec{\partial}_A$  avec

$$\theta^A = dy^A - v_\mu^A dx^\mu.$$

Il sera parfois judicieux de pouvoir singulariser la variable de temps par opposition aux variables d'espace. On notera donc par convention  $t$  la variable de temps  $x^{\mu=0}$  évoluant dans l'intervalle  $\mathcal{T}$ , et  $X^\mu$  pour  $1 \leq \mu \leq n$  les variables d'espace  $x^\mu$  prenant leurs valeurs dans le domaine matériel à  $n$  dimensions  $\mathcal{B}$ , de sorte que le domaine  $\mathcal{U}$  s'écrive  $\mathcal{U} = \mathcal{T} \times \mathcal{B}$ . La dérivée temporelle sera alors notée  $v_t$  et les dérivées spatiales  $V_\mu$  pour  $1 \leq \mu \leq n$ .

### III.1.1 Formulation variationnelle

Soit  $\omega \in \Lambda^{n+1}(M)$  la forme volume canonique de la variété  $M$

$$\omega = dx^0 \wedge \dots \wedge dx^n$$

La densité lagrangienne  $\mathcal{L} : J^1E \rightarrow \Lambda^{n+1}M$  est définie comme le produit  $\mathcal{L} = \mathcal{L}\omega$  où  $\mathcal{L} \in C^\infty(J^1E)$  est la fonction lagrangienne associée à  $\mathcal{L}$ . L'action  $\mathcal{A} : \Gamma_c(M, E) \rightarrow \mathbb{R}$  est définie pour toute section à support compact  $\phi \in \Gamma_c(M, E)$  comme l'intégrale du tiré arrière de la densité lagrangienne par le relevé canonique de la section  $\phi$

$$\mathcal{A}(\phi) = \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \mathcal{L}.$$

Le calcul variationnel est à la base de la formulation lagrangienne de la mécanique. À ce titre, la variation de l'action joue un rôle fondamental. Comme dans le premier chapitre, son obtention nécessite au préalable la définition du relevé d'un champ de vecteur de  $E$ , qui induit des transformations conservant le caractère holonomes des sections de l'espace total.

**Proposition 3** (Relevé holonome d'un champ de vecteur). *Soit  $Z = \alpha^\mu \vec{\partial}_\mu + \beta^A \vec{\partial}_A$  un champ de vecteur de  $\chi(E)$ , son relevé holonome est le champ de vecteur  $j^1Z \in \chi(J^1E)$  donné au point  $\bar{P} = (x^\mu, y^A, v_\mu^A)$  par*

$$j^1Z = \alpha^\mu \vec{\partial}_\mu + \beta^A \vec{\partial}_A + \left( \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu} + v_\mu^B \frac{\partial \zeta^A}{\partial y^B} \right) \vec{\partial}_\mu^A$$

où  $\zeta^A = \theta^A(j^1Z) = \beta^A - v_\nu^A \alpha^\nu$ .

*Démonstration.* On trouvera dans Bensoam et Baugié [7] et Echeverría-Enríquez *et al.* [33] deux versions de la preuve de ce résultat.  $\square$

Nous disposons maintenant des outils nécessaires pour écrire la variation d'action dans le formalisme de la théorie lagrangienne des champs.

**Propriété 4.** *La variation d'action  $\delta\mathcal{A}$  s'écrit pour toute section  $\phi \in \Gamma_c(M, E)$  et tout champ de variation  $j^1Z \in \chi(J^1E)$  comme*

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (j^1Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ \zeta^A \left( \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \right) \omega \right] \quad (\text{III.1})$$

où  $\zeta^A = \theta^A(j^1Z)$ , et où  $\Theta_{\mathcal{L}}$  est la forme de Poincaré-Cartan.

La  $(n+1)$ -forme  $\Theta_{\mathcal{L}}$ , qui apparaît naturellement lors du calcul variationnel, est donnée en coordonnées locales par l'expression

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\mu}^A} \theta^A \wedge d^n x_{\mu} + \mathcal{L}. \quad (\text{III.2})$$

La forme  $\Theta_{\mathcal{L}}$  peut également s'écrire

$$\Theta_{\mathcal{L}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\mu}^A} dy^A \wedge d^n x_{\mu} - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\mu}^A} v_{\mu}^A - \mathcal{L} \right) \omega. \quad (\text{III.3})$$

Dans la suite, on utilisera alternativement les expressions (III.2) et (III.3) selon le contexte.

On observe que la variation d'action est constituée, comme au chapitre 1, de deux termes intégraux, l'un évalué sur le domaine de définition  $\mathcal{U}$  de la section  $\phi$ , l'autre sur le contour  $\partial\mathcal{U}$ . Les résultats de la mécanique lagrangienne covariante seront dérivés à partir de la variation d'action en considérant différentes configurations de champs de variations  $Z$ .

*Démonstration.* (Variation d'action) Soit un champ de variation  $Z \in \chi(E)$ , il induit un groupe de difféomorphismes locaux à un paramètre  $\tau_{\varepsilon}^E : E \rightarrow E$ . On définit  $\tau_{\varepsilon}^M : M \rightarrow M$  la restriction de  $\tau_{\varepsilon}^E$  à  $M$  et  $j^1\tau_{\varepsilon}^E : J^1E \rightarrow J^1E$  le relevé canonique de  $\tau_{\varepsilon}^E$ . On note  $\phi_{\varepsilon} \in \Gamma_c(M, E)$  l'image de  $\phi$  par  $\tau_{\varepsilon}^E$ , définie sur le support  $\mathcal{U}_{\varepsilon} = \tau_{\varepsilon}^M(\mathcal{U})$  par  $\phi_{\varepsilon} = \tau_{\varepsilon}^E \circ \phi \circ (\tau_{\varepsilon}^M)^{-1}$ . On note  $j^1\phi_{\varepsilon}$  son relevé canonique, exprimé par  $j^1\phi_{\varepsilon} = j^1\tau_{\varepsilon}^E \circ j^1\phi \circ (\tau_{\varepsilon}^M)^{-1}$ . La variation d'action  $\delta\mathcal{A}$  induite par le champ de variation  $j^1Z$  est défini comme

$$\delta\mathcal{A} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (\mathcal{A}(\phi_{\varepsilon}) - \mathcal{A}(\phi)).$$

Ici, l'action évaluée sur  $\phi_{\varepsilon}$  s'écrit  $\mathcal{A}(\phi_{\varepsilon}) = \int_{\mathcal{U}_{\varepsilon}} (j^1\phi_{\varepsilon})^* \mathcal{L}$ , expression dans laquelle on remarquera que l'intégrale est évaluée sur le domaine  $\mathcal{U}_{\varepsilon}$ . Il en découle ensuite que

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{\mathcal{U}_{\varepsilon}} (j^1\phi_{\varepsilon})^* \mathcal{L} - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \mathcal{L} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{\mathcal{U}_{\varepsilon}} (\tau_M^{-1})^* j^1\phi^* j^1\tau_{\varepsilon}^* \mathcal{L} - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \mathcal{L} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi^* j^1\tau_{\varepsilon})^* \mathcal{L} - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \mathcal{L} \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[ \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (j^1\tau_{\varepsilon}^* \mathcal{L} - \mathcal{L}) \right] \\ &= \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} [j^1\tau_{\varepsilon}^* \mathcal{L} - \mathcal{L}] \right) \\ &= \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* L_{j^1Z} \mathcal{L} = \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (d(j^1Z \lrcorner \mathcal{L}) + j^1Z \lrcorner d\mathcal{L}) \\ &= \int_{\partial\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (j^1Z \lrcorner \mathcal{L}) + \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (j^1Z \lrcorner d\mathcal{L}) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Les deux dernières lignes du calcul ont été obtenues par application successive de la formule de Cartan et du théorème de Stokes. On commence par le calcul de  $j^1Z \lrcorner d\mathcal{L}$ . En

utilisant le fait que  $dx^\mu \wedge \omega = 0$  et que  $dy^A \wedge \omega = \theta^A \wedge \omega$ , on écrit la différentielle  $d\mathcal{L}$  comme

$$d\mathcal{L} = d\mathcal{L} \wedge \omega = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \theta^A \wedge \omega + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} dv_\mu^A \wedge \omega \quad (\text{III.5})$$

On évalue le premier terme contracté sur  $j^1Z$  et tiré en arrière par le relevé canonique d'une section  $\phi$ , ce qui donne

$$\begin{aligned} (j^1\phi)^* \left[ j^1Z \lrcorner \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \theta^A \wedge \omega \right) \right] &= (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \left( \theta^A(j^1Z)\omega - \theta^A \wedge \omega(j^1Z) \right) \right] \\ &= (j^1\phi)^* \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \zeta^A \omega \right) \end{aligned}$$

où on rappelle que  $\zeta^A = \theta^A(j^1Z) = \beta^A - v_\nu^A \alpha^\nu$ . Le critère holonomique  $(j^1\phi)^* \theta^A = 0$  a permis de supprimer le dernier terme. Pour calculer le second terme de (III.5), on vérifie d'abord que

$$j^1Z \lrcorner \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} dv_\mu^A \wedge \omega \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \left( \gamma_\mu^A \omega - \alpha^\nu dv_\mu^A \wedge d^n x_\nu \right) \quad (\text{III.6})$$

Le terme  $\gamma_\mu^A$  est la composante en  $\vec{\partial}_\mu^A$  du relevé du champ de vecteur  $Z$ . Il vérifie

$$(j^1\phi)^* \gamma_\mu^A = (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \zeta^A}{\partial x_\mu} + v_\mu^B \frac{\partial \zeta^A}{\partial y^B} \right] = (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \zeta^A}{\partial x_\mu} + \frac{\partial \zeta^A}{\partial y^B} \frac{\partial \phi^B}{\partial x^\mu} \right]$$

L'enjeu consiste à intégrer par parties les dérivées de  $\zeta^A$  pour pouvoir mettre cette variable en facteur dans l'intégrale sur  $\mathcal{U}$ . Pour cela, on dérive  $\zeta^A$  par rapport à la variable  $x^\mu$ , ce qui évalué sur une section  $j^1\phi$  donne

$$(j^1\phi)^* \frac{d\zeta^A}{dx^\mu} = \frac{\partial \zeta^A}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \zeta^A}{\partial y^B} \frac{\partial \phi^B}{\partial x^\mu} + \frac{\partial \zeta^A}{\partial v_\nu^B} \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial x^\nu \partial x^\mu}$$

On peut alors réécrire

$$(j^1\phi)^* \gamma_\mu^A = (j^1\phi)^* \left[ \frac{d\zeta^A}{dx^\mu} + \alpha_\nu \frac{\partial^2 \phi^B}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \right]$$

où on a utilisé le fait que  $\partial \zeta^A / \partial v_\nu^B = -\alpha^\nu \delta_A^B$ . Puisque  $dx^\lambda \wedge d^n x_\mu = \omega \delta_\lambda^\mu$ , et que

$$(j^1\phi)^* \left( dv_\mu^A \wedge d^n x_\nu \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\lambda \partial x_\mu} dx^\lambda \wedge d^n x_\nu = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_\nu \partial x_\mu} \omega,$$

le terme (III.6) évalué sur  $j^1\phi$  prend finalement l'expression

$$(j^1\phi)^* \left[ j^1Z \lrcorner \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} dv_\mu^A \wedge \omega \right) \right] = (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \frac{d\zeta^A}{dx^\mu} \omega \right]$$

Par intégration par parties, on obtient finalement la variation d'action

$$\int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* (j^1Z \lrcorner d\mathcal{L}) = \int_{\partial \mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ \zeta^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} d^n x_\mu \right] - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ \zeta^A \left( \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \right) \omega \right]$$

En utilisant encore une fois la définition  $\zeta^A = \theta^A(j^1 Z)$ , la variation d'action s'écrit finalement

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ j^1 Z \lrcorner \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \theta^A \wedge d^n x_\mu + \mathcal{L} \right) \right] - \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ \zeta^A \left( \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y^A} \right) \omega \right]$$

On reconnaît dans la première intégrale l'expression de la forme de Poincaré-Cartan  $\Theta_{\mathcal{L}}$ .  $\square$

### III.1.2 Équations d'Euler-Lagrange

Les équations d'Euler-Lagrange covariantes sont obtenues par application d'un principe de Hamilton, qui énonce que les solutions du problème variationnel sont des extrema de l'action pour des variations aux bords nulles.

**Théorème 3** (Principe de Hamilton). *Les trajectoire physiques du problème variationnel posé par le système lagrangien  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$  sont les points critiques de la fonctionnelle d'action : toute solution  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  vérifie*

$$\delta\mathcal{A}_\phi(Z) = 0$$

pour tout champ de variations  $Z \in \chi(E)$  nul sur la frontière  $\partial\mathcal{U}$  du domaine de définition.

Soit une section  $\phi \in \Gamma_c(M, E)$  définie sur  $\mathcal{U}$ , et soit un champ de vecteur  $Z \in \chi(E)$  s'annulant sur  $\partial\mathcal{U}$ . La contraction  $j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$  est alors identiquement nulle sur  $\partial\mathcal{U}$ , et le premier terme intégral de la variation d'action (III.1) s'annule. Le champ de vecteur  $Z$  étant quelconque partout ailleurs, les  $\zeta^A = \beta^A - v_\nu^A \alpha^\nu$  sont arbitraires ; annuler la variation d'action nécessite donc que la trajectoire  $\phi$  vérifie les équations d'Euler-Lagrange covariantes

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial y^A} \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N \quad (\text{III.7})$$

Les équations sont ici présentées sous forme de  $N$  égalités scalaires, tandis qu'elles étaient énoncées sous la forme d'une unique équation vectorielle (I.4) au chapitre 1.

Il a été vu au § I.1.2 dans le cas en dimension finie qu'en examinant séparément les composantes verticale  $\delta q$  et horizontale  $\delta t$  des champs de variations, il est possible d'établir deux équations distinctes à partir de l'application du principe de Hamilton : les équations d'Euler-Lagrange et l'équation d'évolution de l'énergie. Dans le cas multisymplectique, un résultat similaire peut être énoncé. Pour un champ de variations  $Z = \beta^A \vec{\delta}_A$  vertical, on écrit  $\zeta^A = \beta^A$  ; le principe de moindre action donne alors les équations d'Euler-Lagrange (III.7), déjà explicitées. Pour un champ de variations horizontales  $Z = \alpha^\nu \vec{\delta}_\nu$  en revanche, on peut alors montrer que la condition d'annulation de la variation d'action donne, par indépendance des composantes  $\alpha^\nu$ ,  $n + 1$  équations d'évolution, qui s'écrivent

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_\nu} + \frac{d}{dx^\mu} \left( \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx^\nu} \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N, \quad 0 \leq \nu \leq n \quad (\text{III.8})$$

En particulier, pour la variable de temps  $t = x_{\nu=0}$  associée à  $\nu = 0$ , l'équation (III.8) traduit la loi d'évolution locale de la densité d'énergie  $\mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_t^A} v_t^A - \mathcal{L}$ . En effet, en séparant

la variable de temps des variables matérielles  $X_\mu$ , on écrit

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d}{dX_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} v_t^A \right) \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N$$

En intégrant cette loi d'évolution locale de la densité d'énergie sur le domaine matériel  $\mathcal{B}$ , et en supposant que le lagrangien ne dépend pas explicitement du temps, on obtient l'équation suivante exprimant l'évolution de l'énergie totale  $E$ , vérifiée pour tout  $t$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} \mathcal{E} d^n X = - \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} v_t^A d^{n-1} X_\mu \quad (\text{III.9})$$

*Démonstration.* (Équations d'évolution (III.8)) Pour un champ de variations horizontales  $Z = \alpha^\nu \vec{\partial}_\nu$ , on vérifie que  $\zeta^A = \alpha^\nu v_\nu^A$ . L'application du principe de Hamilton a alors pour conséquence que toute trajectoire solution  $\phi$  vérifie les équations

$$(j^1\phi)^* \left[ v_\nu^A \left( \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \right) \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N, \quad 0 \leq \nu \leq n \quad (\text{III.10})$$

On écrit tout d'abord

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} v_\nu^A \right] = (j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \frac{\partial y^A}{\partial x_\nu} \right] = (j^1\phi)^* \left[ \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \frac{\partial v_\mu^A}{\partial x_\nu} \right].$$

Après avoir vérifié l'intégration par parties

$$v_\nu^A \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} = \frac{d}{dx_\mu} \left( v_\nu^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \right) - \frac{dv_\nu^A}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A},$$

l'équation (III.10) se met pour tout  $0 \leq \nu \leq n$  sous la forme

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} + \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \left( \frac{\partial v_\mu^A}{\partial x_\nu} - \frac{\partial v_\nu^A}{\partial x_\mu} \right) \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N$$

Il reste finalement à vérifier que

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial v_\mu^A}{\partial x_\nu} - \frac{\partial v_\nu^A}{\partial x_\mu} \right] = \frac{\partial^2 q}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 q}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = 0$$

pour conclure le résultat attendu.  $\square$

*Remarque 6.* Tout comme dans le cas en dimension finie étudié au chapitre 1, ces équations sont vérifiées par toute solution des équations d'Euler-Lagrange (III.7), mais dans la formulation multisymplectique discrète en revanche, la vérification des équations d'Euler-Lagrange n'impliquent pas la vérification de l'équivalent discret de (III.8).

*Remarque 7.* Nous verrons au § III.1.5 que les équations (III.8) peuvent également être établies par application du théorème de Noether local pour des champs de symétries naturelles infinitésimales.



### III.1.3 Conditions limites

Dans la formulation classique en dimension finie du principe de Hamilton, la question des conditions limites du problème variationnel est évacuée en ne considérant pour la recherche d'extremums que les champs de vecteurs nuls sur la bordure du domaine de définition de la solution. Historiquement, ceci vient du fait que le principe de moindre action cherche à établir la solution d'un problème d'optimisation entre deux positions supposées connues au début et à la fin de l'expérience [52].

Dans la formulation lagrangienne covariante, le traitement des conditions limites est d'une importance centrale pour pouvoir exprimer les lois d'évolutions globales des différentes grandeurs physiques. La théorie lagrangienne des champs est apte à traiter des conditions aux limites d'ordre zéro et un. Deux formulations alternatives des conditions limites s'offrent alors. La première consiste à les imposer, indépendamment de l'établissement des équations d'Euler-Lagrange par application du principe de Hamilton pour lequel on considère des champs de variations nuls sur le bord du domaine. La seconde, inspirée de Lew, Marsden, Ortiz et West [86], consiste à étendre le principe variationnel pour établir du même coup les équations d'Euler-Lagrange et les conditions limites du premier ordre. Cette formulation intrinsèque permet d'expliciter naturellement l'influence des conditions limites sur les lois d'évolutions globales. La proposition suivante pose l'équivalence entre les deux formulations.

**Proposition 4.** *Soit  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$  un système lagrangien, soit un domaine  $\mathcal{U} \subset M$  et deux sous-ensembles  $\partial\mathcal{U}_0 \subset \partial\mathcal{U}$  et  $\partial\mathcal{U}_1 \subset \partial\mathcal{U}$ , soit une section  $\bar{\phi} : \mathcal{U} \rightarrow E$  et les 1-formes  $\bar{\tau}_\mu = \bar{\tau}_\mu^A dy^A$  pour  $0 \leq \mu \leq n$ . Les deux formulations suivantes sont équivalentes :*

(i) *La section  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  est solution de*

$$\delta\mathcal{A}_\phi(Z) = 0$$

*pour tout champ de variations  $Z \in \chi(E)$  nul sur  $\partial\mathcal{U}$ , et vérifie les conditions limites*

$$\begin{cases} \phi = \bar{\phi} & \text{sur } \partial\mathcal{U}_0 \\ (j^1\phi)^* \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} = \bar{\tau}_\mu^A & \text{sur } \partial\mathcal{U}_1 \end{cases}$$

(ii) *La section  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  est solution du principe variationnel étendu*

$$\delta\mathcal{A}_\phi(Z) = \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 Z \lrcorner \bar{\tau}_\mu) \wedge d^n x_\mu \quad (\text{III.11})$$

*pour tout champ de variations  $Z \in \chi(E)$  vertical sur  $\partial\mathcal{U}_1$  et nul sur  $\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1$ , et vérifie la condition limite*

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_0$$

*Remarque 8.* Dans la proposition 4 précédente, on ne fait pas l'hypothèse que  $\partial\mathcal{U}_0$  et  $\partial\mathcal{U}_1$  forment une partition de  $\partial\mathcal{U}$ . En d'autres termes, il n'est pas nécessaire que ces sous-ensembles soient disjoints, ni qu'ils ne forment un recouvrement. Un exemple typique illustrant cette remarque est celui d'un problème aux valeurs initiales, pour lequel les conditions d'ordre zéro et un sont donnés sur la frontière  $\{0\} \times \mathcal{B}$  où le domaine est défini par  $\mathcal{U} = [0, T] \times \mathcal{B}$ ; on a alors  $\{0\} \times \mathcal{B} \subset (\partial\mathcal{U}_0 \cap \partial\mathcal{U}_1)$ . En pratique, ces ensembles doivent

être définis de manière adéquate pour assurer l'existence et l'unicité de la solution du problème variationnel. Toutefois cette question n'est pas discutée ici, puisque l'objet de la proposition 4 est uniquement de poser l'équivalence entre les formulations (i) et (ii).

*Remarque 9.* Il est important de noter que les variations sont supposées être nulles sur la partie de la frontière sur laquelle on n'établit pas de condition du premier ordre ( $\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1$ ), et non pas sur la partie de la frontière sur laquelle les condition d'ordre zéro sont données ( $\partial\mathcal{U}_0$ ) ; on peut, pour s'en convaincre, réexaminer l'exemple présenté en remarque 8.

*Démonstration.* On prouve (ii)  $\Rightarrow$  (i), l'autre sens s'obtenant facilement à partir de cette démonstration.

La condition d'ordre zéro est vraie par hypothèse, et on vérifie immédiatement que pour un champ  $Z$  nul sur  $\partial\mathcal{U}$ , le terme de droite de (III.1) s'annule, et donc  $\delta\mathcal{A} = 0$ . Il reste alors à montrer la condition du premier ordre pour prouver l'implication voulue.

Soit un champ  $Z \in \chi(E)$  vertical sur  $\partial\mathcal{U}_1$  et nul sur  $\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1$ . Sur  $\partial\mathcal{U}_1$ , le champ s'écrit  $Z = \beta^A \bar{\partial}_A$ , et on vérifie alors que

$$j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}} = \beta^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} d^n x_\mu$$

L'intégrale de bord de l'expression de la variation d'action (III.1) se réécrit en partitionnant la bordure  $\partial\mathcal{U}$

$$\int_{\partial\mathcal{U}} (j^1 \phi)^* (j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) = \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 \phi)^* \left[ \beta^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} d^n x_\mu \right] + \int_{\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1} (j^1 \phi)^* (j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}})$$

En écrivant  $(j^1 Z \lrcorner \bar{\tau}_\mu) = \beta^A \bar{\tau}_\mu^A$ , l'équation de variation d'action devient

$$\int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 \phi)^* \left[ \beta^A \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} d^n x_\mu \right] - \int_{\mathcal{U}} (j^1 \phi)^* \left[ \zeta^A \left( \frac{d}{dx^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \right) \omega \right] = \int_{\partial\mathcal{U}_1} \beta^A \bar{\tau}_\mu^A d^n x_\mu$$

Les  $\beta^A$  pouvant être choisis quelconques sur  $\partial\mathcal{U}_1$ , on établit les conditions limites du premier ordre

$$(j^1 \phi)^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} = \bar{\tau}_\mu^A \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_1$$

□

### III.1.4 Multisymplecticité

On rappelle le résultat vu au § 1.1.3 en mécanique lagrangienne classique, qui énonce que le flot  $F_{\mathcal{L}}$  des équations d'Euler-Lagrange est symplectique, c'est à dire qu'il conserve la forme multisymplectique  $\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$ , ce qui s'écrit  $F_{\mathcal{L}}^* \Omega_{\mathcal{L}} = \Omega_{\mathcal{L}}$ . Dans le contexte de la théorie lagrangienne des champs, cette propriété admet une généralisation. La forme multisymplectique est définie dans le contexte présent à partir de la forme de Poincaré-Cartan (III.2) comme la  $(n+2)$ -forme différentielle

$$\Omega_{\mathcal{L}} = -d\Theta_{\mathcal{L}}$$

Le caractère multisymplectique des solutions des équations d'Euler-Lagrange covariantes s'exprime alors de la manière suivante

**Propriété 5** (Formule de la forme multisymplectique). Soit  $V, W \in \chi(E)$  deux champs de variation verticaux, alors toute solution  $\phi$  des équations d'Euler-Lagrange vérifie

$$\int_{\partial\mathcal{U}} (j^1\phi)^*(j^1V \lrcorner j^1W \lrcorner \Omega_{\mathcal{L}}) = 0.$$

Cette propriété admet une formulation locale équivalente obtenue par application du théorème de Stokes

$$d \left[ (j^1\phi)^*(j^1V \lrcorner j^1W \lrcorner \Omega_{\mathcal{L}}) \right] = 0.$$

*Démonstration.* On renvoie à Marsden, Patrick et Shkoller [94] pour la preuve de ce résultat.  $\square$

Le caractère multisymplectique des solutions des équations d'Euler-Lagrange covariantes est un résultat riche et complexe, dont l'étude approfondie sort du cadre de cette thèse. Les conséquences de cette propriété sont généralement abordées dans la littérature en intégrant les systèmes physiques sur toutes les variables de base à l'exception d'une seule ; les discussions sont ensuite menées en étudiant le caractère symplectique des solutions vis-à-vis de la variable de base laissée libre. Le lecteur pourra par exemple se référer à Lew, Marsden, Ortiz et West [86] pour une étude sur les liens entre multisymplecticité spatiale et théorème de réciprocity de Betti, et multisymplecticité temporelle et symplecticité au sens de la mécanique lagrangienne classique (cf. premier chapitre). Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [29], [31] proposent une discussion, en continu et en discret, sur les liens entre multisymplecticité et symplecticité en temps et espace selon les types de conditions limites.

Nous examinerons au § III.3.1 les implications en mécanique covariante discrète du caractère multisymplectique des solutions vis-à-vis de la vérification approximative de la loi d'évolution de l'énergie.

### III.1.5 Symétries et Théorème de Noether

L'énoncé du théorème de Noether en mécanique lagrangienne classique, vu au premier chapitre, affirme qu'à toute symétrie du lagrangien correspond un invariant : le flot des équations d'Euler-Lagrange préserve une quantité appelée moment. Dans le contexte de la théorie lagrangienne des champs, le théorème de Noether s'écrit à l'aide de formes différentielles selon deux formulations équivalentes, l'une locale et l'autre globale. La formulation globale, généralisant le résultat du théorème 1, permet en particulier d'écrire une équation de conservation reliant les valeurs de moments sur le bord du domaine de définition. Les énoncés des théorèmes seront accompagnés d'exemples concrets fréquemment rencontrés en mécanique des milieux continus.

Avant d'introduire le théorème de Noether, il convient de définir la notion de symétrie du lagrangien dans le contexte du formalisme des 1-jets.

**Définition 6** (Symétrie naturelle infinitésimale). Une symétrie naturelle infinitésimale du système lagrangien  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$  est un champ de vecteur  $S \in \chi(E)$  dont le relevé canonique laisse  $\mathcal{L}$  invariant

$$L_{j^1S}\mathcal{L} = 0.$$

Cette définition est identique à celle proposée au premier chapitre (voir définition 3). Toutefois, il est important de rappeler ici que le lagrangien  $\mathcal{L}$  est maintenant une  $(n+1)$ -forme et que l'expression du relevé du champ de symétrie  $S$  est donné par la proposition 3. La remarque 2 vue au chapitre 1, selon laquelle un champ de variations vertical est symétrie du lagrangien si et seulement si  $j^1S \lrcorner d\mathcal{L} = 0$ , reste vraie dans le contexte présent.

On énonce maintenant le théorème de Noether dans sa version locale.

**Théorème 4** (Théorème de Noether (local)). *Soit  $S \in \chi(E)$  une symétrie naturelle du système lagrangien  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$ , alors la  $n$ -forme  $J_S = (j^1S) \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$  est fermée sur les solutions  $\phi$  du problème variationnel*

$$d\left((j^1\phi)^* J_S\right) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $S$  un champ de symétrie infinitésimal, alors  $L_{j^1S}\Theta_{\mathcal{L}} = 0$  [33]. En utilisant la formule de Cartan, on développe cette expression en

$$L_{j^1S}\Theta_{\mathcal{L}} = d(j^1S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) + j^1S \lrcorner d\Theta_{\mathcal{L}}.$$

Soit  $\phi$  une solution du problème variationnel, elle vérifie  $(j^1\phi)^*(j^1S \lrcorner d\Theta_{\mathcal{L}}) = 0$ . Puisque les opérations différentielle et tiré-arrière commutent, il en vient que

$$0 = (j^1\phi)^*\left(d\left(j^1S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}\right)\right) = d\left((j^1\phi)^*\left(j^1S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}\right)\right)$$

On conclut alors que la forme  $J_S$  est fermée sur les solutions des équations d'Euler-Lagrange covariantes.  $\square$

On donne quelques conséquences immédiates du théorème de Noether pour des champs de symétrie rencontrés usuellement en mécanique des milieux continus : l'invariance par translation dans l'espace de base (exemple 1) et l'invariance par translation matérielle (exemple 2).

*Exemple 1* (Invariance par translation dans l'espace de base). On considère ici le cas d'un champ de symétrie naturel  $S = \alpha^\mu \vec{\partial}_\mu$ , qui consiste à effectuer une reparamétrisation des variables de base. Dans ce cas, le moment  $J_S$  s'écrit

$$J_S = -\alpha^\nu \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} dy^A \wedge d^{n-1}x_{\mu\nu} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\mu^A - \mathcal{L} \right) d^n x_\mu \right]$$

Puisque relevé canonique  $j^1\phi$  vérifie le critère d'holonomie,  $(j^1\phi)^* dy^A = (j^1\phi)^*(v_\lambda^A dx^\lambda)$ . Cela permet de calculer l'expression du moment

$$(j^1\phi)^* J_S = (j^1\phi)^* \left( \alpha^\nu \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A d^n x_\mu + \mathcal{L} d^n x_\nu \right] \right)$$

L'application du théorème de Noether local 4 permet alors d'affirmer que la forme  $J_S$  est fermé sur les solutions du problème, ce qui s'écrit

$$d\left[(j^1\phi)^* J_S\right] = (j^1\phi)^* \left[ -\alpha^\nu \left( \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} \right) \omega \right] = 0$$

Par indépendance des  $\alpha_\nu$ , on peut finalement conclure que les équations suivantes sont vérifiées

$$(j^1\phi)^* \left[ \left( \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} \right) \right] = 0 \quad 0 \leq \nu \leq n$$

On reconnaît ici les équations d'évolution (III.8) auxquelles manque le terme  $\partial \mathcal{L} / \partial x_\nu$ , absence qui est la conséquence de l'invariance du lagrangien par rapport à la variable  $x_\nu$ . En particulier, pour la variable de temps  $x_\nu = t$ , on retrouve l'équation d'évolution de l'énergie totale (III.9).

*Exemple 2* (Invariance par translation). On considère le champ de symétrie vertical  $S = \beta^A \vec{\partial}_A$  qu'on suppose constant, ce qui correspond à une translation dans l'espace de configuration  $Q$ . Le calcul du moment  $J_S$  donne

$$J_S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} \beta^A d^n x_\mu$$

L'application du théorème de Noether local donne les équations d'Euler-Lagrange (III.7) dans lesquelles le terme  $\partial \mathcal{L} / \partial y^A$  est absent (ce qui traduit l'invariance du lagrangien par rapport à la variable  $y$ ).

Le théorème de Noether admet également une formulation globale. Celle-ci est utile pour exprimer les conséquences de la présence de symétries en tant que préservation de quantités physiques "macroscopiques".

**Théorème 5** (Théorème de Noether (global)). *Soit  $S \in \chi(E)$  une symétrie naturelle du système lagrangien  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$ , alors pour toute solution  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  du problème variationnel le courant de Noether  $(j^1\phi)^* J_S$  vérifie*

$$\int_{\partial \mathcal{U}} (j^1\phi)^* J_S = 0$$

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient directement en intégrant l'égalité du théorème de Noether local 4 sur le domaine  $\mathcal{U}$  et en appliquant le théorème de Stokes. Une autre manière d'aboutir à ce résultat est de repartir de la définition de la variation d'action

$$\delta \mathcal{A}_\phi(S) = \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* L_{j^1 S} \mathcal{L}$$

pour  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$ . Cette intégrale est nulle puisque  $S$  est symétrie naturelle infinitésimale du lagrangien. Par ailleurs, en utilisant l'expression (III.1) pour  $\phi$  solution des équations d'Euler-Lagrange, la variation d'action vaut l'intégrale du courant  $(j^1\phi)^* J_S$  sur le bord  $\partial \mathcal{U}$ , ce qui donne le résultat attendu.  $\square$

*Remarque 10.* Le théorème de Noether global a été énoncé pour une intégrale de bord sur le domaine  $\mathcal{U}$ . Toutefois, ce résultat peut s'étendre à tout sous-domaine  $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ .

Dans le cas où le champ  $S$  ne définit pas une symétrie du système, il reste possible de lui associer un moment  $J_S$ , qui ne vérifie pas le théorème de Noether mais une loi d'évolution explicitée à partir des conditions limites. En particulier, pour des champs de vecteurs verticaux, la prise en compte explicite des conditions limites du premier ordre donne lieu à une formulation de la loi d'évolution de  $J_S$ .

**Proposition 5.** Soit le problème aux limites défini par (III.11), soit  $J_S$  le moment associé au champ vertical  $S \in \chi(E)$ , alors pour toute solution  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  du problème variationnel

$$\int_{\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1} (j^1\phi)^* J_S = \delta\mathcal{A} - \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 S \lrcorner \bar{\tau}_\mu) \wedge d^n x_\mu$$

*Démonstration.* Soit  $\phi$  une solution de l'équation (III.11) pour tout champ vertical  $S$  nul sur  $\partial\mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_1$ , alors

$$\int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1\phi)^* (j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}) = \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 S \lrcorner \bar{\tau}_\mu) \wedge d^n x_\mu$$

Pour  $S$  un champ de variations verticales arbitraires, la variation d'action vérifie donc

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 S \lrcorner \bar{\tau}_\mu) \wedge d^n x_\mu + \int_{\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1} (j^1\phi)^* (j^1 Z \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}})$$

Il suffit de rappeler que  $J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$  pour conclure le résultat voulu.  $\square$

On propose d'examiner l'application de ce résultat afin de déterminer les lois d'évolution globales de la quantité de mouvement à partir de l'exemple du champ de variations introduit en exemple 2.

*Exemple 3* (Loi d'évolution de la quantité de mouvement). Soit le champ de variations  $S = \beta^A \bar{\delta}_A$ , on fait l'hypothèse que le champ est constant, et on choisit sans perdre en généralité  $\beta^A = 1$  pour tout  $A$ . On suppose de plus que les conditions d'ordre 1 sont définies de telle sorte que  $\partial\mathcal{U}_1 = [0, T] \times \partial\mathcal{B}_1$ , c'est à dire que des conditions du premier ordre sont imposées pour toute la durée de l'expérience sur un sous-domaine  $\partial\mathcal{B}_1 \subset \partial\mathcal{B}$  de la frontière matérielle. En notant  $t$  la variable de temps,  $X_\mu$  les variables spatiales associées aux dérivées  $V_\mu$ , on décompose alors l'intégrale suivante selon les frontières temporelles et spatiales

$$\int_{\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1} (j^1\phi)^* J_S = \left[ \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t^A} d^n X \right]_0^T + \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} dt \wedge d^{n-1} X_\mu$$

faisant ainsi apparaître la quantité de mouvement totale du système

$$p^A(t) = \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_t^A}(t, X) d^n X.$$

En calculant à partir de l'expression (III.4) la variation d'action

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\mathcal{U}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} \omega,$$

on obtient par application de la proposition 5 la loi d'évolution de la quantité de mouvement

$$\begin{aligned} p^A(T) &= p^A(0) + \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} dt \wedge d^n X \\ &\quad - \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}_1} \bar{\tau}_\mu^A dt \wedge d^{n-1} X_\mu - \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} dt \wedge d^{n-1} X_\mu \end{aligned}$$

En particulier, si une traction nulle est imposée sur l'ensemble de la frontière matérielle, de sorte que  $\bar{\tau} = 0$  sur  $\partial\mathcal{B}_1 = \partial\mathcal{B}$ , et que le champ  $S$  définit une symétrie du lagrangien, on retrouve la propriété de conservation de la quantité de mouvement.

### III.1.6 Prise en compte des forces extérieures

La modélisation de systèmes physiques nécessite dans de nombreux cas la prise en compte de forces extérieures s'exerçant sur le système. Par exemple, beaucoup de systèmes de la mécanique des milieux continus, pouvant être décrits par une densité lagrangienne et des trajectoires évoluant sur une variété de base spatio-temporelle, sont le siège différents types de phénomènes dissipatifs. En acoustique, ces comportements sont responsables d'effets qu'il est crucial de reproduire pour obtenir des sons riches et convaincants.

Nous proposons ici d'appliquer un principe de Lagrange-d'Alembert dans la théorie lagrangienne des champs. Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [31] établissent, en considérant des champs de variations verticales, les équations d'Euler-Lagrange covariantes forcées. En prenant en compte des variations  $Z \in \chi(E)$  arbitraires, nous allons voir qu'il est possible de dériver également les équations d'évolution, comme il a été fait dans le § I.1.5 dans le contexte de la mécanique variationnelle classique.

#### III.1.6.1 Principe de Lagrange-d'Alembert

En présence de forces, l'application d'un principe de Lagrange-d'Alembert permet d'obtenir les équations d'Euler-Lagrange covariantes forcées et les équations d'évolution. On énonce ce principe dans le contexte de la théorie lagrangienne des champs.

**Théorème 6** (Principe de Lagrange-d'Alembert). *Les solutions du problème variationnel posé par le système  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$  sur lequel s'applique le champ de force  $f$  défini sur  $\mathcal{U}$  sont les points critiques de l'équation*

$$\delta \mathcal{A}_\phi(Z) + \int_{\mathcal{U}} (j^1 \phi)^* \left[ f^A \zeta^A \omega \right] = 0 \quad (\text{III.12})$$

pour tout champ de variation  $Z \in \chi(E)$  nul sur la frontière  $\partial \mathcal{U}$  du domaine de définition.

Les conséquences de ce principe sont obtenues d'une manière similaire à celles du principe de Hamilton : Soit une section  $\phi$  du fibré, définie sur le domaine  $\mathcal{U}$ , et un champ  $Z \in \chi(E)$  choisi nul sur  $\partial \mathcal{U}$ , la condition (III.12) est alors équivalente à

$$\int_{\mathcal{U}} (j^1 \phi)^* \left[ \zeta^A \left( \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} - f^A \right) \omega \right] = 0.$$

L'argument classique sur l'indépendance des composantes du champ de variations permet de conclure que les trajectoires solutions vérifient les équations d'Euler-Lagrange forcées

$$(j^1 \phi)^* \left[ \frac{d}{dx_\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} - f^A \right] = 0 \quad 1 \leq A \leq N. \quad (\text{III.13})$$

Par ailleurs, en adaptant le calcul qui a mené à l'établissement des équations d'évolution (III.8), on trouve que toute solution  $\phi$  vérifie également les équations d'évolution forcées

$$(j^1 \phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\nu} + \frac{d}{dx_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_\mu^A} v_\nu^A \right) - \frac{d\mathcal{L}}{dx_\nu} - f^A v_\nu^A \right] = 0 \quad 1 \leq \nu \leq n, 0 \leq \nu \leq n \quad (\text{III.14})$$

Tout comme les solutions des équations d'Euler-Lagrange (III.7) vérifient également les équations d'évolution (III.8) (cf. § III.1.2), on montre de la même manière que les solutions des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.13) sont solutions des équations (III.14).

Dans le cas particulier pour lequel on écrit l'équation d'évolution associée à la variable de temps, on obtient pour la densité d'énergie

$$(j^1\phi)^* \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \frac{dE}{dt} + \frac{d}{dX_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} v_t^A \right) - f^A v_t^A \right] = 0$$

En supposant que le lagrangien ne dépend pas explicitement de la variable de temps et en intégrant l'équation précédente sur le domaine matériel, on obtient la loi d'évolution de l'énergie totale

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{B}} E d^m X = - \int_{\partial \mathcal{B}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} v_t^A d^{m-1} X_\mu + \int_{\mathcal{B}} f^A v_t^A d^m X$$

Cette équation, à rapprocher de la loi d'évolution (III.9) dans le cas conservatif, caractérise comment l'énergie est influencées par les contributions en traction sur les frontières du domaine matériel et par les forces volumiques qui s'exercent sur le système.

### III.1.6.2 Conséquences sur les moments

Dans le cas d'un système isolé, il a été vu au § III.1.5 qu'à toute symétrie naturelle du lagrangien  $S \in \chi(E)$  était associée la conservation d'un moment  $J_S$  correspondant par application du théorème de Noether. Lorsque des forces sont prises en compte par le principe de Lagrange-d'Alembert (III.12), la propriété d'invariance du moment devient une loi d'évolution qui met en jeu les forces appliquées sur le système. L'objet de la proposition suivante est d'énoncer l'équation d'évolution globale associée à toute symétrie du lagrangien, qui remplace dans ce contexte le théorème de Noether global 5.

**Proposition 6.** *Soit  $S \in \chi(E)$  une symétrie naturelle du système lagrangien  $((E, M, \pi), \mathcal{L})$ , alors pour toute solution  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.13),  $(j^1\phi)^* J_S$  vérifie*

$$\int_{\partial \mathcal{U}} (j^1\phi)^* J_S = \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ f^A \theta^A(j^1 S) \omega \right].$$

*Démonstration.* Soit  $S \in \chi(E)$  un champ de symétrie, alors la variation d'action vérifie  $\delta \mathcal{A}(S) = 0$ . Par ailleurs, pour toute section  $\phi$  solution des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.13),

$$\delta \mathcal{A}(S) + \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* \left[ f^A \theta^A(j^1 S) \omega \right] = \int_{\partial \mathcal{U}} (j^1\phi)^* J_S,$$

ce qui permet de conclure le résultat attendu.  $\square$

Si le champs  $S$  ne définit pas une symétrie, la proposition précédente ne s'applique pas. Toutefois, il est tout de même possible de définir la loi d'évolution de la quantité  $J_S$  en fonction des forces et des conditions limites. On généralise ici la proposition 5 au cas forcé.



**Proposition 7.** Soit  $J_S$  le moment associé au champ vertical  $S \in \chi(E)$ , alors pour toute solution  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow E$  des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.13),  $J_S$  vérifie

$$\int_{\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1} (j^1\phi)^* J_S = \delta\mathcal{A} + \int_{\mathcal{U}} (j^1\phi)^* [f^A \theta^A(j^1 S)\omega] - \int_{\partial\mathcal{U}_1} (j^1 S \lrcorner \bar{\tau}_\mu) \wedge d^n x_\mu$$

*Démonstration.* Ce résultat se démontre en adaptant la preuve de la proposition 5.  $\square$

On illustre cette proposition en reprenant l'exemple 3 de la loi d'évolution de la quantité de mouvement.

*Exemple 4* (Loi d'évolution de la quantité de mouvement forcée). Soit le champ de variations du lagrangien  $S = \beta^A \bar{\partial}_A$  où  $\beta^A = 1$ , en présence de forces, la loi d'évolution de la quantité de mouvement de l'exemple 3 devient

$$\begin{aligned} p^A(t) = p^A(0) + \int_0^T \int_{\mathcal{B}} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y^A} + f^A \right) dt \wedge d^n X \\ - \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}_1} \bar{\tau}_\mu^A dt \wedge d^{n-1} X_\mu - \int_0^T \int_{\partial\mathcal{B}_0} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V_\mu^A} dt \wedge d^{n-1} X_\mu \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Cette équation exprime la façon dont la quantité de mouvement varie sous l'influence combinée des conditions limites et des forces extérieures.

## III.2 Méthode covariante de Galerkin

Nous proposons dans cette section la définition d'une méthode covariante de Galerkin généralisant au cas à deux variables de base  $t, s$  la famille d'intégrateurs proposés au § 1.3.2. Le choix de se limiter à deux variables tient à la volonté de ne pas trop alourdir les notations, et au fait que les problèmes considérés à la fin de ce chapitre et au chapitre suivant se formulent à l'aide d'une unique variable d'espace. Toutefois, la généralisation à  $n$  variables d'espaces peut se faire en suivant une construction similaire à celle développée ici.

Les outils conceptuels de la mécanique variationnelle covariante sont présentés dans Marsden, Patrick et Shkoller [94], qui exposent notamment les propriétés de multisymplecticité et le théorème de Noether. Les principes généraux des méthodes de Galerkin covariantes sont posés par Leok [83]. Une implémentation d'une famille de méthode apparentée récemment été proposée par Leitz, Sato et Leyendecker [81]. Les auteurs donnent des résultats de convergence numériques, mais les propriétés géométriques ne sont pas discutées. Nous proposons ici de systématiser la construction de méthodes de Galerkin covariantes. Une attention particulière est accordé au traitement des conditions limites et à la prise en compte des forces extérieures au système.

Dans la suite, on considère une discrétisation de l'espace de base par un maillage régulier rectangulaire. La formulation covariante discrète est intimement liée au choix de discrétisation spatio-temporel. Hormis le maillage rectangulaire régulier, différents maillages sont envisageables : Demoures *et al.* [29], [31] considèrent par exemple un maillage triangulaire asymétrique. D'autres options sont également discutées dans Marsden, Patrick et Shkoller [94]. Les intégrateurs variationnels asynchrones définissent des pas de temps et d'espace adaptatifs; on pourra lire à ce sujet Lew, Marsden, Ortiz et West [86]. Une

autre approche consiste à appliquer les outils du calcul différentiel discret à des maillages polygonaux quelconques. On renvoie à Ptácková et Velho [116] pour une introduction à cette approche.

Ce paragraphe reflète le cheminement proposé au § III.1. Les résultats discrets, équivalents de leur version continue, sont présentés en suivant la même logique. Après les définitions permettant de donner le cadre des méthodes de Galerkin covariantes (§ III.2.1), les équations d'Euler-Lagrange discrètes (§ III.2.2) et le traitement des conditions au bords par un principe variationnel étendu (§ III.2.3) sont établis. On rappelle ensuite les propriétés de multisymplecticité (§ III.2.4) et l'énoncé du théorème de Noether (§ III.2.5). On propose ensuite une discrétisation permettant la prise en compte de forces agissant sur le système à l'aide d'un principe de Lagrange-d'Alembert (§ III.2.6).

### III.2.1 Définitions

On définit ici les objets nécessaires à la construction d'un intégrateur de Galerkin covariant en deux dimensions.

#### III.2.1.1 Interpolation polynômiale

Le domaine de définition  $\mathcal{U} = [0, T] \times [0, L]$  est discrétisé par le maillage rectangulaire régulier de côtés  $h$  et  $l$ , en  $I$  pas de temps et  $J$  pas d'espace. On définit les dates et abscisses  $t_i = ih$  et  $s_j = jl$  pour tout  $0 \leq i \leq I$ ,  $0 \leq j \leq J$ .

On généralise l'interpolation polynômiale présentée au § I.3.2.1 au cas à deux dimensions ; le lecteur pourra se référer à la figure III.1 pour un complément graphique aux définitions introduites dans ce paragraphe. L'espace des trajectoires définies sur le continuum espace-temps  $\mathcal{T} \times \mathcal{B} = [0, T] \times [0, L]$  est approché sur chaque maille  $\square_i^j = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  par la fonction  $\tilde{q}_i^j$ , définie à l'aide des  $(M+1) \times (N+1)$  points de contrôle  $\{q_{i,\mu}^{j,\nu}\}_{\mu=0..M}^{\nu=0..N}$  par

$$\tilde{q}_i^j(t, s) = \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N q_{i,\mu}^{j,\nu} \varphi_\mu(\tilde{t}) \psi_\nu(\tilde{s})$$

où  $\tilde{t} = (t - t_i)/h$ ,  $\tilde{s} = (s - s_j)/l$ . Les fonctions de base sont formées par les produits  $\varphi_\mu \psi_\nu$ , où  $\varphi_\mu$  et  $\psi_\nu$  sont les polynômes de Lagrange de degrés  $M$  et  $N$  respectivement, définis pour  $\alpha, \beta \in [0, 1]$  par

$$\varphi_\mu(\alpha) = \prod_{\substack{0 \leq \lambda \leq M \\ \lambda \neq \mu}} \frac{\alpha - \alpha_\lambda}{\alpha_\mu - \alpha_\lambda}, \quad \psi_\nu(\beta) = \prod_{\substack{0 \leq \lambda \leq N \\ \lambda \neq \nu}} \frac{\beta - \beta_\lambda}{\beta_\nu - \beta_\lambda}$$

On choisit pour les  $\{\alpha_\mu\}_{\mu=0}^M$  et les  $\{\beta_\nu\}_{\nu=0}^N$  les  $M$  et  $N$  points d'interpolation de Chebyshev respectivement. La continuité de la solution sur l'ensemble du domaine est assurée en imposant la condition

$$\begin{aligned} q_{i,0}^{j,\nu} &= q_{i-1,M}^{j,\nu}, & 0 < i < I, \quad 0 \leq j < J, \quad 0 \leq \nu \leq N \\ q_{i,\mu}^{j,0} &= q_{i-,\mu}^{j-1,N}, & 0 \leq i < I, \quad 0 < j < J, \quad 0 \leq \mu \leq M \end{aligned}$$

On se convainc que cette condition sur les points de contrôles suffit à assurer la continuité de la trajectoire sur les arêtes du maillage.

La définition proposée pour l'espace des trajectoires approchées permet de définir naturellement les opération de dérivation par rapport aux différentes variables de base. En particulier, les dérivées du premier ordre de l'interpolation  $\tilde{q}_i^j$  ont pour expression

$$\tilde{q}_i^j(t, s) = \frac{1}{h} \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N q_{i,\mu}^{j,\nu} \dot{\varphi}_\mu(\tilde{t}) \psi_\nu(\tilde{s}), \quad \tilde{q}'_i^j(t, s) = \frac{1}{l} \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N q_{i,\mu}^{j,\nu} \varphi_\mu(\tilde{t}) \psi'_\nu(\tilde{s}).$$

On définit enfin  $j^1 \tilde{\phi}_i^j$  le relevé de la section  $\tilde{\phi}_i^j$ , s'écrivant pour tout  $t, s \in \square_i^j$

$$j^1 \tilde{\phi}_i^j(t, s) = \left( t, s, \tilde{q}_i^j(t, s), \dot{\tilde{q}}_i^j(t, s), \tilde{q}'_i^j(t, s) \right).$$

### III.2.1.2 Quadrature de l'intégrale d'action

On propose d'évaluer l'intégrale d'action sur  $\square_i^j$  par l'application de deux quadratures de Gauss-Legendre. On notera  $(w_a, c_a)_{a=1}^A$  la quadrature de l'intervalle  $[0, 1]$  pour la variable de temps, et  $(w_b, c_b)_{b=1}^B$  celle de la variable d'espace. On a alors

$$\tilde{\mathcal{A}}_i^j = hl \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^B w_a^b \mathcal{L}_{i,a}^{j,b} \approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{s_j}^{s_{j+1}} (j^1 \phi)^* \mathcal{L}$$

où  $w_a^b = w_a w_b$ . Dans la définition précédente, on a utilisé la notation raccourcie

$$\mathcal{L}_{i,a}^{j,b} = \left( \mathcal{L} \circ j^1 \tilde{\phi}_i^j \right) (t_i + hc_a, s_j + lc_b).$$

### III.2.1.3 Définition du lagrangien discret

Afin de définir le lagrangien discret, on introduit une notation qui distingue les points de contrôles sur les bords et à l'intérieur des cellules du maillage.

La maille d'indices  $i, j$ , dénotée  $\square_i^j$ , est définie par  $\square_i^j = [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$ . L'ensemble des mailles est noté  $\mathbf{U}^\square = \{\square_i^j / 0 \leq i \leq I-1, 0 \leq j \leq J-1\}$ . Pour chaque maille  $\square_i^j$ , on numérote les indices  $\mu, \nu$  des coordonnées  $t_{i,\mu}, s_{j,\nu}$  appartenant aux arêtes de la maille à l'aide de la variable muette  $k$  comme indiqué sur le schéma III.2. On vérifie alors

$$\square^{(k)} = \begin{cases} (k-1, 0) & 1 \leq k \leq M \\ (M, k-M-1) & M+1 \leq k \leq M+N \\ (2M+N+1-k, N) & M+N+1 \leq k \leq 2M+N \\ (0, 2(M+N)+1-k) & 2M+N+1 \leq k \leq 2(M+N). \end{cases}$$

et on définit  $K = 2(M+N)$  de telle sorte que  $1 \leq k \leq K$ .

On définit l'ensemble des indices  $(i, j, \mu, \nu)$  sur les arêtes du maillage par

$$\mathbf{U} = \left\{ i, j, \mu, \nu / 0 \leq i < I, 0 \leq j < J, \mu, \nu \in (\{0, \dots, M\} \times \{0, N\}) \cup (\{0, M\} \times \{0, \dots, N\}) \right\}$$

En suivant [94], le fibré  $E$  est remplacé en discret par  $E_d = \mathbf{U} \times Q$ , et une section discrète  $\phi_d$  est définie pour tout  $i, j, \mu, \nu \in \mathbf{U}$  par  $\phi_d(i, j, \mu, \nu) = \phi_{i,\mu}^{j,\nu} = (t_{i,\mu}, s_{j,\nu}, q_{i,\mu}^{j,\nu})$ . Le fibré

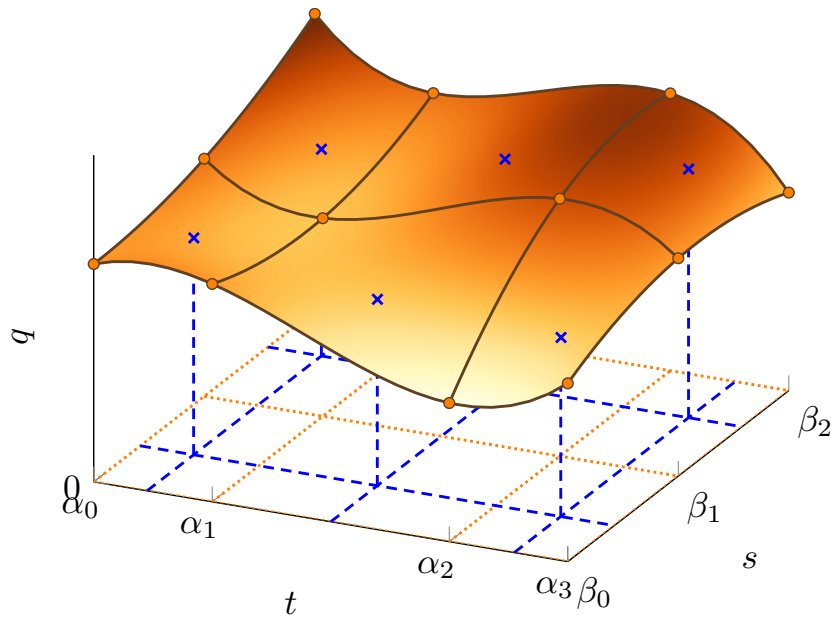


FIG. III.1 Les trajectoires sont interpolées selon les variables spatiotemporelles par des polynômes, de degrés respectifs  $M = 3$  et  $N = 2$  pour cet exemple. Les croix bleues représentent les points d'évaluation utilisés pour la quadrature de Gauss-Legendre, ici avec  $A = M$  et  $B = N$ .

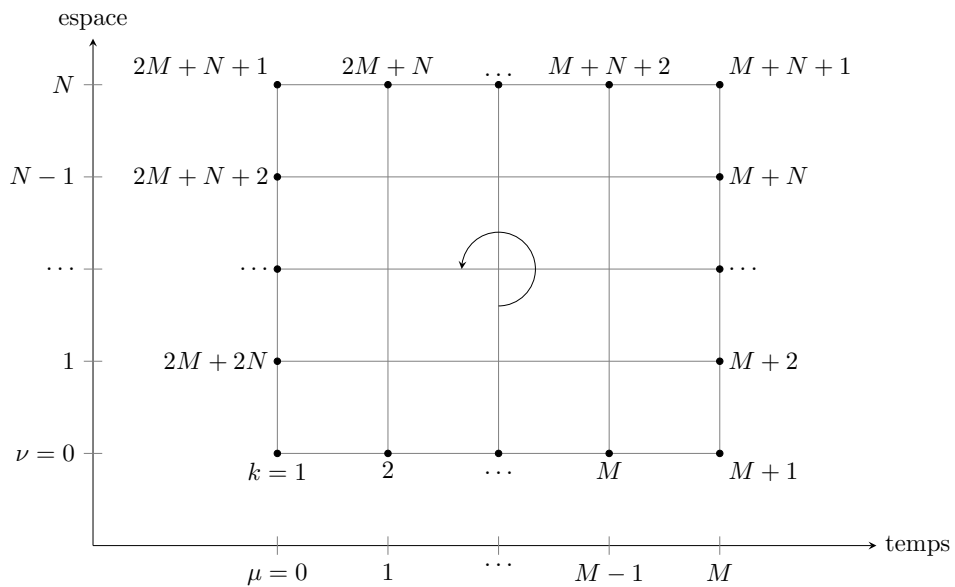


FIG. III.2 Convention de numérotation des indices appartenant aux arêtes du maillage.

des 1-jets  $J^1 E$  devient alors  $J^1 E_d = \mathbf{U} \times Q^K$ , et une section holonome a pour analogue

discret  $j^1\phi_d$ , définie sur toute maille  $\square$  par

$$j^1\phi_d(\square) = (\square, \phi_d(\square^{(1)}), \dots, \phi_d(\square^{(K)})).$$

Cette définition du relevé discret permet une notation concise des résultats, et rend plus évidente la similarité entre les résultats du domaine continu et leurs équivalents discrets.

Soit un champ de vecteur continu  $Z \in \chi(E)$ , qu'on supposera vertical, sa discrétisation sur le maillage  $\mathbf{U}$  est définie par l'échantillonnage de  $Z$  sur les coordonnées  $t_{i,\mu}$ ,  $s_{j,\nu}$  tel que

$$Z_{i,\mu}^{j,\nu} = Z(t_{i,\mu}, s_{j,\nu}).$$

On dénotera simplement par  $Z$  le champ discrétisé, le contexte permettant de savoir si le champ considéré est continu ou discret. Enfin, le relevé de  $Z$  est défini pour toute maille  $\square$  par

$$j^1Z(\square) = (Z(\square^{(1)}), \dots, Z(\square^{(K)})).$$

On définit le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d : J^1E_d \rightarrow \mathbb{R}$  comme l'extrémum de la quadrature de l'intégrale d'action pour la donnée d'une section discrète

$$\left( (j^1\phi_d)^* \mathcal{L}_d \right) (\square_i^j) = \mathcal{L}_i^j = \underset{\{q_{i,\mu}^{j,\nu}\}_{\substack{0 < \nu < N \\ 0 < \mu < M}}}{\text{ext}} \tilde{\mathcal{A}}_i^j$$

Dans cette définition, l'intégrale d'action est extrémalisée sur les points de contrôles internes  $\{q_{i,\mu}^{j,\nu}\}_{\substack{0 < \nu < N \\ 0 < \mu < M}}$  pour la donnée des points de contrôle principaux. Cette définition est l'analogie en deux dimensions de celle proposé dans le cas classique au § 1.3.2.

### III.2.2 Variation d'action

On procède maintenant au calcul des variations de l'intégrale d'action  $\tilde{\mathcal{A}}_i^j$  locale. Ce calcul permet : d'une part, l'obtention des conditions d'extrémalité sur les points de contrôle  $\{q_{i,\mu}^{j,\nu}\}_{\substack{0 < \nu < N \\ 0 < \mu < M}}$  pour le lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  évalué sur  $j^1\phi_d(\square_i^j)$ ; d'autre part, l'établissement des équation d'Euler-Lagrange covariantes. Soient des variations arbitraires  $\delta q_{i,\mu}^{j,\nu}$ , la variation d'action locale s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\mathcal{A}}_i^j &= \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \\ &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,0}} \delta q_{i,0}^{j,0} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,0}} \delta q_{i,M}^{j,0} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,N}} \delta q_{i,0}^{j,N} + \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,N}} \delta q_{i,M}^{j,N} \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{M-1} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,0}} \delta q_{i,\mu}^{j,0} + \sum_{\mu=1}^{M-1} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,N}} \delta q_{i,\mu}^{j,N} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,\nu}} \delta q_{i,0}^{j,\nu} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,\nu}} \delta q_{i,M}^{j,\nu} \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{M-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \end{aligned}$$

où les dérivées partielles de  $\tilde{\mathcal{A}}_i^j$  s'expriment en fonction de celles du lagrangien continu  $\mathcal{L}$  et de l'interpolation  $\tilde{q}_i^j$  comme

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} = hl \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^B w_a^b \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \frac{\partial \tilde{q}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \tilde{q}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \frac{\partial \tilde{q}'_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} \right)$$

avec

$$\frac{\partial \tilde{q}}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}}(t, s) = \phi_\mu(\tilde{t})\psi_\nu(\tilde{s}), \quad \frac{\partial \dot{\tilde{q}}}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}}(t, s) = \frac{1}{h}\dot{\phi}_\mu(\tilde{t})\psi_\nu(\tilde{s}), \quad \frac{\partial \tilde{q}'}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}}(t, s) = \frac{1}{l}\phi_\mu(\tilde{t})\psi'_\nu(\tilde{s}).$$

Les éléments sommés sont distingués en trois groupes distincts, associés respectivement aux variations sur les angles, les arêtes et l'intérieur de la maille. Cet arrangement facilite l'écriture du calcul des variations de l'action discrète  $\mathcal{A}_d$  :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_d &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \delta \tilde{\mathcal{A}}_i^j = \boxed{\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} DEL_i^j \delta q_i^j} \tag{III.16} \\ &+ \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} DEL_{i,\mu}^{j,0} \delta q_{i,\mu}^{j,0} + \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} DEL_{i,0}^{j,\nu} \delta q_{i,0}^{j,\nu}} \\ &+ \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} DEL_{i,\mu}^{j,\nu} \delta q_{i,\mu}^{j,\nu}} \\ &+ \boxed{\sum_{i=1}^{I-1} B_i^0 \delta q_i^0 + B_i^J \delta q_i^J + \sum_{j=1}^{J-1} B_0^j \delta q_0^j + B_I^j \delta q_I^j} \\ &+ \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} B_{i,\mu}^0 \delta q_{i,\mu}^0 + B_{i,\mu}^J \delta q_{i,\mu}^J + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} B_0^{j,\nu} \delta q_0^{j,\nu} + B_I^{j,\nu} \delta q_I^{j,\nu}} \\ &+ \boxed{B_0^0 \delta q_0^0 + B_I^0 \delta q_I^0 + B_0^J \delta q_0^J + B_I^J \delta q_I^J} \end{aligned}$$

Les termes de la somme précédente sont distingués entre équations d'Euler-Lagrange discrètes  $DEL$  et termes de bord  $B$ . On pourra s'aider de la figure III.3 pour interpréter l'arrangement des sommes.

On distingue trois différent types de termes d'Euler-Lagrange, selon qu'il soient formulés sur les nœuds du maillage (III.17), les arêtes (III.18), (III.19) ou l'intérieur des mailles (III.20)

$$DEL_i^j = \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{j-1}}{\partial q_{i,0}^{j-1,N}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{i-1}^j}{\partial q_{i-1,M}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{i-1}^{j-1}}{\partial q_{i-1,M}^{j-1,N}} \quad 1 \leq i < I, 1 \leq j < J \tag{III.17}$$

$$DEL_{i,\mu}^{j,0} = \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{j-1}}{\partial q_{i,\mu}^{j-1,N}} \quad 0 \leq i < I, 1 \leq j < J, 1 \leq \mu < M \tag{III.18}$$

$$DEL_{i,0}^{j,\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{i-1}^j}{\partial q_{i-1,M}^{j,\nu}} \quad 1 \leq i < I, 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N \tag{III.19}$$

$$DEL_{i,\mu}^{j,\nu} = \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} \quad 0 \leq i < I, 0 \leq j < J, 1 \leq \mu < M, 1 \leq \nu < N \tag{III.20}$$

De même, les termes de bords sont définis à partir des dérivées partielles de la quadrature d'intégrale d'action et se distinguent selon les indices

$$B_i^0 = \frac{\mathcal{L}_i^0}{\partial q_{i,0}^{0,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{i-1}^0}{\partial q_{i,M}^{0,0}} \quad B_i^J = \frac{\partial \mathcal{L}_i^{J-1}}{\partial q_{i,0}^{J-1,N}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{i-1}^{J-1}}{\partial q_{i-1,M}^{J-1,N}} \quad 1 \leq i < I$$

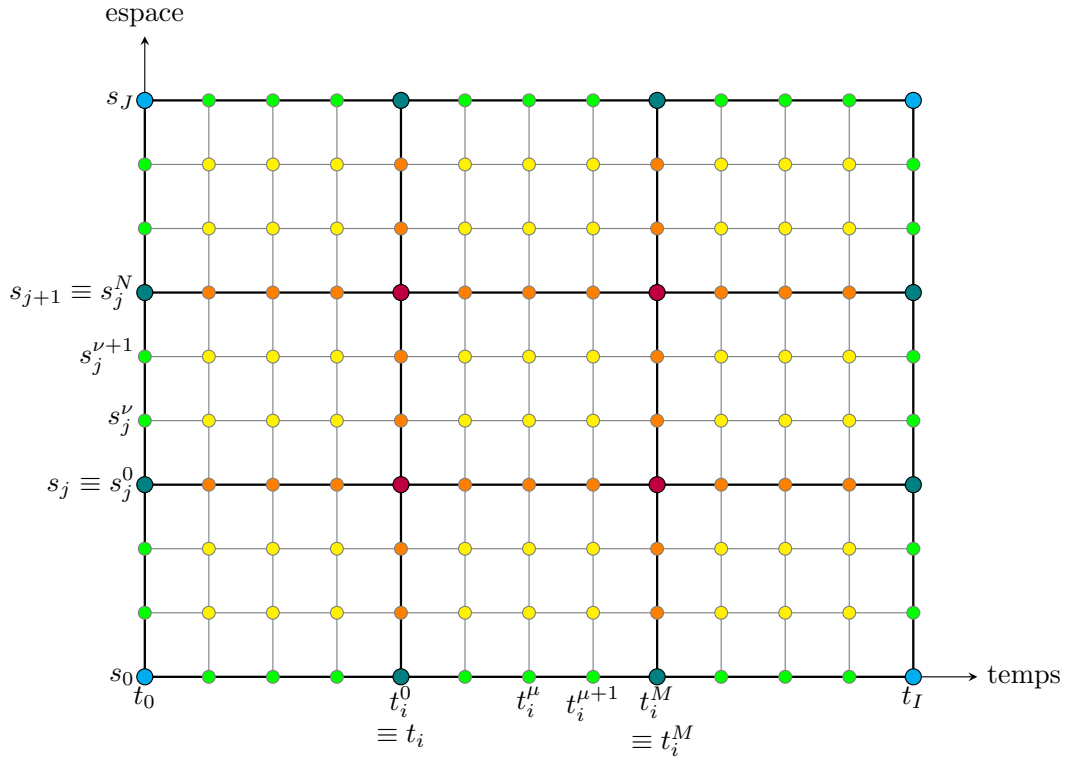


FIG. III.3 Représentation de la grille spatio-temporelle.

$$\begin{aligned}
B_0^j &= \frac{\partial \mathcal{L}_0^j}{\partial q_{0,0}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_0^{j-1}}{\partial q_{0,0}^{j-1,N}} & B_I^j &= \frac{\partial \mathcal{L}_{I-1}^j}{\partial q_{I-1,M}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{I-1}^{j-1}}{\partial q_{I-1,M}^{j-1,N}} & 1 \leq j < J \\
B_0^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_0^0}{\partial q_{0,0}^{0,0}} & B_0^J &= \frac{\partial \mathcal{L}_0^{J-1}}{\partial q_{0,0}^{J-1,N}} \\
B_I^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}_{I-1}^0}{\partial q_{I-1,M}^{0,0}} & B_I^J &= \frac{\partial \mathcal{L}_{I-1}^{J-1}}{\partial q_{I-1,M}^{J-1,N}} \\
B_{i,\mu}^0 &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^0}{\partial q_{i,\mu}^{0,0}} & B_{i,\mu}^J &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_i^{J-1}}{\partial q_{i,\mu}^{J-1,N}} & 0 \leq i < I, 1 \leq \mu < M \\
B_0^{j,\nu} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_0^j}{\partial q_{0,0}^{j,\nu}} & B_I^{j,\nu} &= \frac{\partial \tilde{\mathcal{A}}_{I-1}^j}{\partial q_{I-1,M}^{j,\nu}} & 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N
\end{aligned}$$

L'application d'un principe de Hamilton pour des variations nulles sur les bords de domaines permet l'obtention des équations d'Euler-Lagrange covariantes discrètes définies sur les nœuds et les arêtes par

$$DEL_i^j = 0 \quad 1 \leq i < I, 1 \leq j < J \quad (\text{III.21a})$$

$$DEL_{i,\mu}^{j,0} = 0 \quad 0 \leq i < I, 1 \leq j < J, 1 \leq \mu < M \quad (\text{III.21b})$$

$$DEL_{i,0}^{j,\nu} = 0 \quad 1 \leq i < I, 1 \leq j < J, 1 \leq \nu < N \quad (\text{III.21c})$$

De plus, la condition d'extrémalité du lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$  nécessite la vérification des équations d'Euler-Lagrange internes

$$DEL_{i,\mu}^{j,\nu} = 0 \quad 0 \leq i < I, 0 \leq j < J, 1 \leq \mu < M, 1 \leq \nu < N \quad (\text{III.22})$$

Les équations sur l'intérieur du domaine étant maintenant posées, il reste à définir les conditions limites. L'objet du prochain paragraphe est d'établir les équations sur le bord à partir d'un principe variationnel étendu.

### III.2.3 Conditions aux bords

Afin de discrétiser les conditions au bord, on propose un principe variationnel étendu. Celui-ci permet l'établissement des conditions limites à partir des termes  $B_i^j$  qui découle naturellement du calcul de variation d'action mené au paragraphe précédent. Appliquer un principe variationnel pour obtenir les conditions aux bords nécessite au préalable la définition d'une discrétisation de l'intégrale

$$\int_{\partial\mathcal{U}_1} \bar{\tau}_\mu^A \delta q^A d^n x_\mu$$

Nous proposons de l'approcher à l'aide du même principe que celui utilisé pour définir le lagrangien discret. Pour ne pas alourdir la notation, on procède à la définition de l'approximation pour le bord  $[t_i, t_{i+1}] \times \{0\}$ , les autres cas de figure se généralisant aisément à partir du cas considéré :

$$\begin{aligned} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \bar{\tau}^{s=0}(t), \delta q(t, 0) \rangle dt &\approx \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\langle \bar{\tau}^{s=0}(t), \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \frac{\partial \bar{q}_i^0}{\partial q_{i,\mu}^{0,\nu}}(t, 0) \delta q_{i,\mu}^{0,\nu} \right\rangle dt \\ &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sum_{\mu=0}^M \phi_\mu(\tilde{t}) \langle \bar{\tau}^{s=0}(t), \delta q_{i,\mu}^0 \rangle dt \\ &\approx \sum_{\mu=0}^M \left[ \sum_{a=1}^A h w_a \phi_\mu(c_a) \bar{\tau}^{s=0}(t_{i,a}) \right] \cdot \delta q_{i,\mu}^0 \\ &= \sum_{\mu=0}^M \bar{\tau}_{i,\mu}^0 \cdot \delta q_{i,\mu}^0 \end{aligned}$$

où on définit la notation  $\bar{\tau}_{i,\mu}^0 = \sum_{a=1}^A h w_a \phi_\mu(c_a) \bar{\tau}^{s=0}(t_{i,a})$ . La seconde ligne a été obtenue en utilisant le fait que

$$\frac{\partial \bar{q}_i^0}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}}(t, 0) = \phi_\lambda(\tilde{t}) \psi_\gamma(0) \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\gamma = \phi_\lambda(\tilde{t}) \delta_\gamma^0 \delta_\mu^\lambda \delta_\nu^\gamma = \phi_\mu(\tilde{t}) \delta_\nu^0$$

On obtient, après intégration par parties sur le bord  $[0, T] \times \{0\}$ , le résultat suivant

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \bar{\tau}, \delta q \rangle ds &\approx \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=0}^M \bar{\tau}_{i,\mu}^{s=0} \cdot \delta q_{i,\mu}^0 = \boxed{\sum_{i=1}^{I-1} (\bar{\tau}_{i,0}^{s=0} + \bar{\tau}_{i-1,M}^{s=0}) \cdot \delta q_i^0} + \boxed{\sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} \bar{\tau}_{i,\mu}^{s=0} \cdot \delta q_{i,\mu}^0} \\ &\quad + \boxed{\bar{\tau}_{0,0}^{s=0} \cdot \delta q_0^0 + \bar{\tau}_{I-1,M}^{s=0} \cdot \delta q_I^0} \end{aligned}$$



Les couleurs reflètent celle utilisées dans le schéma III.3. On applique le même principe sur les trois autres bords. Ceci nous permet finalement d'écrire l'approximation de l'intégrale sur l'ensemble de la frontière  $\partial\mathcal{U}$  comme

$$\int_{\partial\mathcal{U}} \bar{\tau}_\mu^A \delta q^A d^n x_\mu \approx \sum_{i,j,\mu,\nu \in \partial\mathcal{U}} \bar{\tau}_{i,\mu}^{j,\nu} \cdot \delta q_{i,\mu}^{j,\nu}$$

Au vu des résultats précédents, on distingue selon les différents indices l'expression de  $\bar{\tau}_d$  comme suit

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_i^0 &= \bar{\tau}_{i,0}^{s=0} + \bar{\tau}_{i-1,M}^{s=0}, & \bar{\tau}_i^J &= \bar{\tau}_{i,0}^{s=L} + \bar{\tau}_{i-1,M}^{s=L}, & 1 \leq i < I \\ \bar{\tau}_0^j &= \bar{\tau}_{t=0}^{j,0} + \bar{\tau}_{t=0}^{j-1,N}, & \bar{\tau}_I^j &= \bar{\tau}_{t=T}^{j,0} + \bar{\tau}_{t=T}^{j-1,N}, & 1 \leq j < J \\ \bar{\tau}_{i,\mu}^0 &= \bar{\tau}_{i,\mu}^{s=0}, & \bar{\tau}_{i,\mu}^J &= \bar{\tau}_{i,\mu}^{s=L}, & 0 \leq i < I, 1 \leq \mu < M \\ \bar{\tau}_0^{j,\nu} &= \bar{\tau}_{t=0}^{j,\nu}, & \bar{\tau}_I^{j,\nu} &= \bar{\tau}_{t=T}^{j,\nu}, & 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N \\ \bar{\tau}_0^0 &= \bar{\tau}_{0,0}^{s=0} + \bar{\tau}_{t=0}^{0,0}, & \bar{\tau}_I^0 &= \bar{\tau}_{I-1,M}^{s=0} + \bar{\tau}_{t=T}^{0,0} \\ \bar{\tau}_0^J &= \bar{\tau}_{0,0}^{s=L} + \bar{\tau}_{t=0}^{J-1,N}, & \bar{\tau}_I^J &= \bar{\tau}_{I-1,M}^{s=L} + \bar{\tau}_{t=T}^{J-1,N} \end{aligned}$$

Une fois cette définition posée, il devient possible d'établir les conditions aux bords par application d'un principe variationnel étendu, traduisant dans le cas discret la proposition 4.(ii). Soit  $\partial\mathcal{U}_0 \subset \partial\mathcal{U}$  et  $\partial\mathcal{U}_1 \subset \partial\mathcal{U}$  deux sous-domaines de la frontière du domaine de définition discrétisant respectivement  $\partial\mathcal{U}_0$  et  $\partial\mathcal{U}_1$ . Soit  $\bar{\tau}_d$  défini sur  $\partial\mathcal{U}_1$  discrétisant  $\bar{\tau}$  par la procédure définie précédemment. On suppose que la trajectoire  $\phi_d$  vérifie les conditions limites d'ordre 0

$$\phi_{i,\mu}^{j,\nu} = \bar{\phi}_d(t_{i,\mu}, s_{j,\nu}) \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_0, \quad (\text{III.23})$$

alors  $\phi_d$  est solution du problème variationnel étendu si elle vérifie

$$\delta\mathcal{A}_d = \sum_{\square/\square \cap \partial\mathcal{U}_1^\square \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial\mathcal{U}_1} (\bar{\tau}_d \cdot \delta q_d) (\square^{(k)}) \right]$$

pour toute variation verticale  $\delta q_d$  s'annulant sur le bord  $\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1$ .

L'application du principe variationnel donne les équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.21), déjà obtenues au paragraphe précédent par principe de Hamilton, ainsi que les équations limites du premier ordre, qui s'écrivent

$$B_{i,\mu}^{j,\nu} = \bar{\tau}_{i,\mu}^{j,\nu} \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_1. \quad (\text{III.24})$$

Les conditions d'ordre zéro (III.23) sont quant à elles vérifiées par hypothèse.

### III.2.4 Multisymplecticité

Il a été vu au premier chapitre que le flot des équations d'Euler-Lagrange conserve la forme symplectique, et que cette propriété était également vérifiée par les solutions numériques obtenues par l'application d'une méthode variationnelle. De même, dans la formulation covariante discrète, les solutions numériques vérifient un équivalent numérique

de la propriété de multisymplecticité. On définit les formes de Poincaré-Cartan discrètes associées au lagrangien  $\mathcal{L}_d$  pour tout  $1 \leq k \leq K$  par

$$\left( (j^1 \phi_d)^* \Theta_{\mathcal{L}_d}^k \right) (\square_i^j) = \frac{\partial \mathcal{L}_d}{\partial q^k} \left( j^1 \phi_d(\square_i^j) \right) dq^k$$

Ces formes sont au nombre de  $K = 2M + 2N$ . D'après cette définition, il est clair que les formes de Poincaré-Cartan vérifient la relation

$$d\mathcal{L}_d = \sum_{k=1}^K \Theta_{\mathcal{L}_d}^k.$$

Prendre la différentielle de cette égalité permet de vérifier que

$$\sum_{k=1}^K \Omega_{\mathcal{L}_d}^k = 0$$

où les formes  $\Omega_{\mathcal{L}_d}^k = -d\Theta_{\mathcal{L}_d}^k$  sont les formes multisymplectiques. Tout comme leurs analogues continus, les solutions des équations d'Euler-Lagrange covariantes discrètes (III.21) vérifient une propriété de multisymplecticité, qu'on énonce maintenant.

**Propriété 6.** *Soit  $\phi_d$  une solution des équations d'Euler-Lagrange discrètes (III.21), alors pour toutes variations verticales  $V, W$*

$$\sum_{\square/\square \cap \partial \mathbf{U} \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} (j^1 \phi_d)^* \left( j^1 V \lrcorner j^1 W \lrcorner \Omega_{\mathcal{L}_d}^k \right) (\square) \right] = 0.$$

*Démonstration.* On renvoie à Marsden, Patrick et Shkoller [94] pour la preuve de ce résultat.  $\square$

*Remarque 11.* À la différence de la formulation continue, dans laquelle la forme de Poincaré-Cartan est une  $(n + 1)$  forme (ici  $n = 1$ ), les formes de Poincaré-Cartan discrètes sont d'ordre 1, indépendamment de la valeur de  $n$ . De même, l'équivalent discret de la  $(n + 2)$ -forme multisymplectique sont les 2-formes multisymplectiques discrètes.

*Remarque 12.* Les résultats présentés ici doivent être adaptés pour le choix d'autres lagrangiens discrets. On rappelle que la construction vue au premier chapitre donnait lieu à deux formes,  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^+$  et  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^-$ . Ici, puisque le lagrangien discret dépend des  $K$  points de contrôles situés sur les nœuds et arêtes du maillage, il est naturel de définir autant de formes  $\Theta_{\mathcal{L}_d}^k$ . D'autres constructions peuvent également donner d'autres définitions : par exemple, un lagrangien discret défini sur des mailles triangulaires engendre trois formes de Poincaré-Cartan [31], [94].

### III.2.5 Théorème de Noether

On énonce maintenant le théorème de Noether dans le contexte de la mécanique lagrangienne covariante discrète. Il est tout d'abord nécessaire de définir la notion de symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ . On ne considère ici que des champs de variations verticaux.

**Définition 7.** Soit  $S$  un champ de symétrie verticale du lagrangien discret  $\mathcal{L}_d$ , alors  $j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}_d = 0$ .

On définit les  $K$  formes moments discrètes  $J_S^k$ , données à partir des formes de Poincaré-Cartan pour tout  $1 \leq k \leq K$  par  $J_S^k = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^k$ . Ceci nous permet d'énoncer le théorème de Noether local.

**Théorème 7** (Noether local). *Soit  $S$  une symétrie verticale du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ , alors les moments discrets  $J_S^k$  vérifient la relation*

$$\sum_{k=1}^K J_S^k = 0. \quad (\text{III.25})$$

*Démonstration.* Il s'agit de la définition même de symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ . En effet, soit  $S$  une telle symétrie, alors

$$0 = j^1 S \lrcorner d\mathcal{L}_d = \sum_{k=1}^K j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}_d}^k = \sum_{k=1}^K J_S^k$$

ce qui montre le résultat attendu.  $\square$

**Théorème 8** (Noether global). *Soit  $S$  une symétrie verticale du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ , alors pour toute solution  $\phi_d$  des équations d'Euler-Lagrange covariante discrètes (III.21), on vérifie la loi de conservation*

$$\sum_{\square/\square \cap \partial \mathbf{U}^{\square} \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} (j^1 \phi_d)^* (J_S^k) (\square) \right] = 0.$$

*Démonstration.* La preuve de la version globale du théorème s'établit en intégrant (i.e. en sommant) sa version discrète (III.25) sur le domaine  $\mathbf{U}$ , puis en appliquant le théorème de Stokes (i.e. en réarrangeant les indices de sommation). On obtient alors

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=1}^K (j^1 \phi_d)^* J_S^k (\square_i^j) \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left[ \sum_{\mu=0}^M \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,0}} \cdot S_{i,\mu}^{j,0} + \sum_{\mu=0}^M \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,N}} \cdot S_{i,\mu}^{j,N} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,\nu}} \cdot S_{i,0}^{j,\nu} + \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,\nu}} \cdot S_{i,M}^{j,\nu} \right] \\ &= \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} DEL_i^j \cdot S_i^j + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} DEL_{i,\mu}^{j,0} \cdot S_{i,\mu}^{j,0} + \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} DEL_{i,0}^{j,\nu} \cdot S_{i,0}^{j,\nu} \\ &\quad + \sum_{\square/\square \cap \partial \mathbf{U}^{\square} \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} (j^1 \phi_d)^* J_S^k (\square) \right] \end{aligned}$$

Toute solution  $\phi_d$  des équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.21) annulant les sommes faisant intervenir les termes  $DEL_{i,\mu}^{j,\nu}$ , on obtient le résultat voulu.  $\square$

*Remarque 13.* Le théorème de Noether global 8 a été écrit en intégrant la formulation locale sur l'ensemble du domaine de définition. Il admet en fait une formulation analogue sur tout sous-domaine.

### III.2.6 Forçage

On considère maintenant les modifications à apporter à la formulation de la méthode covariante pour la prise en compte de l'action de forces s'exerçant sur le système. On rappelle que le forçage du système dans le cas continu à l'aide du principe de Lagrange-d'Alembert (§ III.1.6). Afin de l'appliquer dans le contexte discret, nous proposons de procéder à une quadrature de l'intégrale

$$\iint_{\mathcal{U}} \langle f(q, \dot{q}), \delta q \rangle \omega$$

généralisant l'approche exposée au § I.2.5 au cas à deux variables indépendantes. Dans ce contexte, on écrit

$$\begin{aligned} \iint_{\square_i^j} \langle f(q, \dot{q}), \delta q \rangle \omega &\approx \iint_{\square_i^j} \left\langle f(\tilde{q}_i^j, \dot{\tilde{q}}_i^j), \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \frac{\partial \tilde{q}_i^j}{\partial q_{i,\mu}^{j,\nu}} \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \right\rangle \omega \\ &= \iint_{\square_i^j} \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \phi_\mu(\tilde{t}) \psi_\nu(\tilde{s}) \langle f(\tilde{q}_i^j, \dot{\tilde{q}}_i^j), \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \rangle \omega \\ &\approx \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \left[ \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^B h k w_a^b \phi_\mu(c_a) \psi_\nu(c_b) f\left(\tilde{q}_i^j(hc_a, kc_b), \dot{\tilde{q}}_i^j(hc_a, ks_b)\right) \right] \cdot \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \\ &= \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N f_{i,\mu}^{j,\nu} \cdot \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \end{aligned}$$

où on définit la notation

$$f_{i,\mu}^{j,\nu} = \sum_{a=1}^A \sum_{b=1}^B h k w_a^b \phi_\mu(c_a) \psi_\nu(c_b) f\left(\tilde{q}_i^j(hc_a, kc_b), \dot{\tilde{q}}_i^j(hc_a, ks_b)\right)$$

À partir de cette formule, on obtient après un réarrangement des indices de sommation l'expression de la quadrature de l'intégrale sur l'ensemble du domaine  $\mathcal{U}$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{U}} \langle f(q, \dot{q}), \delta q \rangle \omega &\approx \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N f_{i,\mu}^{j,\nu} \cdot \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} && \text{(III.26)} \\ &= \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \left( f_{i,0}^{j,0} + f_{i,0}^{j-1,N} + f_{i-1,M}^{j,0} + f_{i-1,M}^{j-1,N} \right) \delta q_i^j \\ &\quad + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} \left( f_{i,\mu}^{j,0} + f_{i,\mu}^{j-1,N} \right) \delta q_{i,\mu}^j \\ &\quad + \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} \left( f_{i,0}^{j,\nu} + f_{i-1,M}^{j,\nu} \right) \delta q_i^{j,\nu} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} f_{i,\mu}^{j,\nu} \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{I-1} \left( f_{i,0}^{0,0} + f_{i-1,M}^{0,0} \right) \delta q_i^0 + \left( f_{i,0}^{J-1,N} + f_{i-1,M}^{J-1,N} \right) \delta q_i^J \\
& + \sum_{j=1}^{J-1} \left( f_{0,0}^{j,0} + f_{0,0}^{j-1,N} \right) \delta q_0^j + \left( f_{I-1,M}^{j,0} + f_{I-1,M}^{j-1,N} \right) \delta q_I^j \\
& + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} f_{i,\mu}^{0,0} \delta q_{i,\mu}^0 + f_{i,\mu}^{J-1,N} \delta q_{i,\mu}^J + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} f_{0,0}^{j,\nu} \delta q_0^{j,\nu} + f_{I-1,M}^{j,\nu} \delta q_I^{j,\nu} \\
& + \left[ f_{0,0}^{0,0} \delta q_0^0 + f_{I-1,M}^{0,0} \delta q_I^0 + f_{0,0}^{J-1,N} \delta q_0^J + f_{I-1,M}^{J-1,N} \delta q_I^J \right]
\end{aligned}$$

Le code couleur permet de s'aider de la figure III.3 pour comprendre la structuration de la somme précédente, identique à celle de la variation d'action (III.16).

### III.2.6.1 Principe de Lagrange-d'Alembert

À ce stade, les équations d'Euler-Lagrange forcées discrètes peuvent être énoncées. Pour cela, on considère des variations  $\delta q_{i,\mu}^{j,\nu}$  arbitraires qu'on impose nulles sur la frontière. L'application du principe de Lagrange-d'Alembert discret, qui consiste à vérifier pour ces variations que

$$\delta \mathcal{A}_d + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N f_{i,\mu}^{j,\nu} \cdot \delta q_{i,\mu}^{j,\nu} = 0$$

donne alors, en remplaçant les deux termes par leurs expressions respectives (III.16) et (III.26), les équations d'Euler-Lagrange discrètes forcées, définies sur les nœuds du maillage par

$$\begin{aligned}
DEL_i^j + f_{i,0}^{j,0} + f_{i,0}^{j-1,N} + f_{i-1,M}^{j,0} + f_{i-1,M}^{j-1,N} &= 0 & 1 \leq i < I, 1 \leq j < J \\
DEL_{i,\mu}^{j,0} + f_{i,\mu}^{j,0} + f_{i,\mu}^{j-1,N} &= 0 & 0 \leq i < I, 1 \leq j < J, 1 \leq \mu < M \\
DEL_{i,0}^{j,\nu} + f_{i,0}^{j,\nu} + f_{i-1,M}^{j,\nu} &= 0 & 1 \leq i < I, 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N
\end{aligned}$$

Celles-ci remplacent les équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.21a), (III.21b) et (III.21c) respectivement. De même, les équations d'Euler-Lagrange internes (III.22), qui expriment la condition d'extrémalisation du lagrangien discret, sont modifiées pour prendre en compte un terme de force supplémentaire, et deviennent

$$DEL_{i,\mu}^{j,\nu} + f_{i,\mu}^{j,\nu} = 0 \quad 0 \leq i < I, 0 \leq j < J, 1 \leq \mu < M, 1 \leq \nu < N$$

Enfin, les conditions limites du premier ordre (III.24) se réécrivent (là où elles sont définies) comme

$$\begin{aligned}
B_i^0 + f_{i,0}^{0,0} + f_{i-1,M}^{0,0} &= \bar{\tau}_i^0 & 1 \leq i < I \\
B_i^J + f_{i,0}^{J-1,N} + f_{i-1,M}^{J-1,N} &= \bar{\tau}_i^J & 1 \leq i < I \\
B_0^j + f_{0,0}^{j,0} + f_{0,0}^{j-1,N} &= \bar{\tau}_0^j & 1 \leq j < J \\
B_I^j + f_{I-1,M}^{j,0} + f_{I-1,M}^{j-1,N} &= \bar{\tau}_I^j & 1 \leq j < J
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{i,\mu}^0 + f_{i,\mu}^{0,0} &= \bar{\tau}_{i,\mu}^0 & 0 \leq i < I, 1 \leq \mu < M \\
 B_{i,\mu}^J + f_{i,\mu}^{J-1,N} &= \bar{\tau}_{i,\mu}^J & 0 \leq i < I, 1 \leq \mu < M \\
 B_0^{j,\nu} + f_{0,0}^{j,\nu} &= \bar{\tau}_0^{j,\nu} & 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N \\
 B_I^{j,\nu} + f_{I-1,M}^{j,\nu} &= \bar{\tau}_I^{j,\nu} & 0 \leq j < J, 1 \leq \nu < N \\
 B_0^0 + f_{0,0}^{0,0} &= \bar{\tau}_0^0 \\
 B_I^0 + f_{I-1,M}^{0,0} &= \bar{\tau}_I^0 \\
 B_0^J + f_{0,0}^{J-1,N} &= \bar{\tau}_0^J \\
 B_I^J + f_{I-1,M}^{J-1,N} &= \bar{\tau}_I^J
 \end{aligned}$$

### III.2.6.2 Loi d'évolution globale des moments

Lorsque des forces extérieures s'exercent sur le système, le théorème de Noether 8 ne s'applique plus. Toutefois, en présence de symétrie du lagrangien, il reste possible d'exprimer la loi d'évolution d'un moment en fonction des conditions limites et des termes de force.

**Théorème 9.** *Soit  $S$  une symétrie verticale du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ , alors pour toute solution  $\phi_d$  des équations d'Euler-Lagrange forcées discrètes (III.27), les moments discrets  $J_S^k$  vérifient la relation*

$$\sum_{\square/\square \in \partial \mathbf{U}^\square \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_d)^* J_S^k \right) (\square) \right] = \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \notin \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square) \right] \quad (\text{III.28})$$

*Démonstration.* Soit  $S$  une symétrie du lagrangien  $\mathcal{L}_d$ , alors  $\delta \mathcal{A}_d = 0$ , ce qui permet d'écrire

$$\delta \mathcal{A}_d + \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \sum_{k=1}^K \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square) = \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \sum_{k=1}^K \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square).$$

D'autre part, toute solution  $\phi_d$  des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.27) vérifie

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{A}_d + \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \sum_{k=1}^K \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square) \\
 = \sum_{\square/\square \in \partial \mathbf{U}^\square \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_d)^* \left( J_S^k + (f \cdot S)^k \right) \right) (\square) \right].
 \end{aligned}$$

On conclut à partir des deux égalités précédentes que

$$\begin{aligned}
 \sum_{\square/\square \in \partial \mathbf{U}^\square \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_d)^* J_S^k \right) (\square) \right] \\
 = \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \sum_{k=1}^K \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square) - \sum_{\square/\square \in \partial \mathbf{U}^\square \neq \emptyset} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \in \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_d)^* (f \cdot S)^k \right) (\square) \right]
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{\square \in \mathbf{U}^\square} \left[ \sum_{k/\square^{(k)} \notin \partial \mathbf{U}} \left( (j^1 \phi_a)^*(f \cdot S)^k \right) (\square) \right]$$

□

### III.3 Applications

Nous proposons d'appliquer la méthode de Galerkin covariante développée au paragraphe précédent à deux exemples de l'acoustique : l'équation des ondes ainsi qu'un modèle de corde raide amorti. L'étude de la formulation covariante de l'équation des ondes au § III.3.1 sera l'occasion d'une discussion sur les équations d'évolution (III.8) et sur la façon dont celles-ci sont approchées par les solutions numériques. En particulier, on mettra en évidence que l'intégrateur covariant préserve approximativement l'énergie totale au cours du temps pour les systèmes conservatifs. Dans le cas où les conditions limites en espace sont homogènes de type Dirichlet ou Neumann et indépendantes de la variable de temps, cette conservation peut être démontrée en se ramenant à une analyse symplectique.

On considère ensuite au § III.3.2 la formulation covariante d'un modèle de corde raide amortie définie à partir d'une poutre précontrainte. Après avoir donné une analyse du modèle continu, nous en proposons une discrétisation à l'aide de l'intégrateur de Galerkin covariant qui vérifie numériquement la loi d'évolution de la quantité de mouvement.

#### III.3.1 Équation des ondes

Nous appliquons dans ce paragraphe la méthode de Galerkin covariante définie au § III.2 à l'équation des ondes à une dimension spatiale afin d'étudier les propriétés des solutions numériques vis-à-vis de la conservation de l'énergie totale.

L'équation des ondes est sujette à un traitement par méthode covariantes dans Marsden, Patrick et Shkoller [94]. Les résultats numériques présentent une bonne stabilité, et conservent approximativement l'énergie (au sens de non-divergence) pour des temps de simulation longs. Dans cette étude, les auteurs ont considéré un système défini sur cercle, supprimant ainsi les frontières spatiales. Nous proposons ici d'examiner la prise en compte des conditions limites à l'aide du principe variationnel étendu proposé au § III.2.3.

On rappelle tout d'abord la formulation de l'équation des ondes scalaire à une dimension d'espace à l'aide des notations mises en place dans ce chapitre. L'espace de base  $\mathbb{R}^2$  est formé des variables de temps  $t$  et espace  $s$ , et on étudie le système sur le domaine  $\mathcal{U} = \mathcal{T} \times \mathcal{B} = [0, T] \times [0, L]$ . Une section  $\phi$  du fibré s'écrit alors en coordonnées locales  $\phi(t, s) = (t, s, q)$  où  $q \in \mathbb{R}$ , et son relevé holonome

$$j^1 \phi(t, s) = (t, s, q, \dot{q}).$$

La densité lagrangienne du système est définie pour toute section  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  par  $(j^1 \phi)^* \mathcal{L} = \mathcal{L}(j^1 \phi) dt \wedge ds$ , où

$$\mathcal{L}(j^1 \phi) = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - \frac{1}{2} q'^2$$

L'application du principe de Hamilton donne alors l'équation d'Euler-Lagrange covariante (en l'occurrence l'équation des ondes)

$$\ddot{q} - q'' = 0.$$

Dans la suite, on considère un problème aux valeurs initiales ; les discussions seront menées en examinant différents types de conditions limites en espace. Pour définir un traitement numérique des conditions limites, il est nécessaire de définir les objets requis pour l'application du principe variationnel étendu, c'est-à-dire les domaines  $\partial\mathcal{U}_0$ ,  $\partial\mathcal{U}_1$  et les fonctions  $\bar{q}$ ,  $\bar{\tau}$ . On introduit les ensembles  $\partial\mathcal{U}_0^t \cup \partial\mathcal{U}_0^s = \partial\mathcal{U}_0$  qui permettent de partitionner  $\partial\mathcal{U}_0$  selon les conditions de Dirichlet en temps et espace respectivement ; de même, on définit  $\partial\mathcal{U}_1^t \cup \partial\mathcal{U}_1^s = \partial\mathcal{U}_1$  pour les conditions du premier ordre.

Les conditions en temps sont obtenues en se munissant d'une fonction scalaire  $\bar{q}_{t=0}$  définie sur la frontière  $\partial\mathcal{U}_0^t = \{0\} \times [0, L]$ , imposant la condition initiale de Dirichlet en temps

$$q = \bar{q}_{t=0} \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_0^t.$$

De même, on définit  $\bar{\tau}_{t=0}$  sur la frontière  $\partial\mathcal{U}_1^t = \{0\} \times [0, L]$  pour imposer la condition du premier ordre en temps

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}} = \dot{q} = \bar{\tau}_{t=0} \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_1^t.$$

Pour le traitement des conditions limites en espace, on impose exactement une condition à chaque extrémité  $s = 0, L$ , ce qui assure que le problème défini possède une solution unique. Dans la suite, on examine deux cas :

1. Conditions du premier ordre homogènes : on définit alors  $\bar{\tau}_{s=0} = \bar{\tau}_{s=L} = 0$  qui impose

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q'} = -q' = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_1^s = [0, T] \times \{0, L\}. \quad (\text{III.29})$$

Par ailleurs, on a  $\partial\mathcal{U}_0^s = \emptyset$ .

2. Conditions de Dirichlet homogènes : on impose la condition

$$q = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{U}_0^s = [0, T] \times \{0, L\}, \quad (\text{III.30})$$

et  $\partial\mathcal{U}_1^s = \emptyset$ .

Ces deux situations sont résumées par les schémas représentés en figure III.4.

Nous avons vu, au § III.1.2, que la densité d'énergie  $\mathcal{E}$  vérifie une loi d'évolution locale (III.8), qui s'écrit ici pour tout  $t, s \in [0, T] \times [0, L]$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} - \frac{d}{ds}(q'\dot{q}) = 0 \quad \text{où} \quad \mathcal{E} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}}\dot{q} - \mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}q'^2.$$

La formulation globale de ce résultat dépend des conditions frontières, et s'énonce

$$E(T) = E(0) - \int_0^T [q'\dot{q}]_0^L dt \quad (\text{III.31})$$

où on a défini l'énergie totale du système à l'instant  $t$  par  $E(t) = \int_0^L \mathcal{E}(t, s) ds$ .



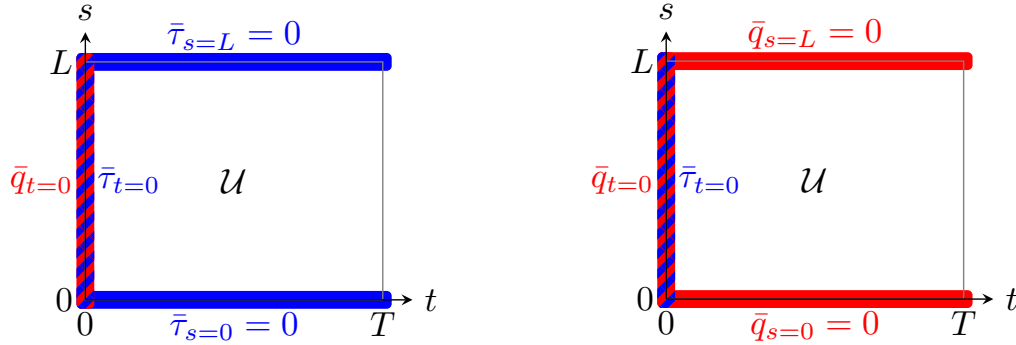


FIG. III.4 Définitions des domaines et fonctions pour les problèmes aux valeurs initiales avec condition de Neumann homogènes (gauche) et de Dirichlet homogènes (droite). Les conditions d'ordre zéro et un sont indiquées en rouge et bleu respectivement.

Nous étudions maintenant l'évolution numérique de l'énergie totale du système pour les deux type de conditions limites en espaces (III.29) et (III.30). La méthode de Galerkin covariante définie au § III.2 a été construite en ne considérant que des variations verticales, aussi les équivalents discrets des équations d'évolution n'ont pas été établies. Malgré cela, l'énergie totale est approximativement conservée au cours du temps par les solutions numériques. Ces résultats sont mis en évidence et justifiés dans les paragraphes suivants.

### III.3.1.1 Conditions du premier ordre homogènes

On considère dans un premier temps que des conditions du premier ordre homogènes sont imposées sur les bords du domaine spatial. Dans ce cas, la condition aux bords (III.29) impose  $q' = 0$  en  $s = 0, L$ . Le terme intégral de l'équation d'évolution globale (III.31) s'annule donc, traduisant la conservation de l'énergie du système au cours du temps.

Cette formulation trouve son équivalent numérique par application d'un principe variationnel étendu. En suivant la méthode de construction des conditions de bords détaillée au § III.2.3, on obtient les équations aux limites de Dirichlet (III.23) qui s'écrivent ici

$$q_0^{j,\nu} = \bar{q}(0, s_{j,\nu}), \quad 0 \leq j < J, \quad 0 \leq \nu \leq N$$

ainsi que les conditions du premier ordre (III.24) données par

$$B_0^{j,\nu} = \bar{\tau}_0^{j,\nu}, \quad 0 \leq j < J, \quad 0 \leq \nu \leq N$$

$$B_{i,\mu}^0 = \bar{\tau}_{i,\mu}^0 = 0, \quad B_{i,\mu}^J = \bar{\tau}_{i,\mu}^J = 0, \quad 0 \leq i < I, \quad 0 \leq \mu \leq M.$$

Avec les équations d'Euler-Lagrange discrètes (III.21), celles-ci définissent la méthode covariante de Galerkin donnant la solution numérique du problème aux conditions initiales.

La solution numérique de l'équation des ondes, calculée pour les paramètres donnés en table III.1 et les conditions initiales

$$\bar{q}(0, s) = \sin\left(\frac{2\pi s}{L} + \frac{\pi}{2}\right), \quad \bar{\tau}(0, s) = 0,$$

est représentée en figure III.5. L'évolution au cours du temps de  $E$  l'énergie totale du système est donnée en figure III.6 pour différents paramètres d'intégration numérique; l'amplitude de la variation d'énergie est fonction du pas et de l'ordre de la méthode. Par ailleurs, on observe expérimentalement que l'énergie est approximativement conservée par la méthode sur des temps d'intégration très longs (figure III.7).

Paramètre	$h$	$M$	$I$	$l$	$N$	$J$
Valeur	0.2	2	10	0.25	2	4

TABLE III.1 – Paramètres utilisés pour la simulation numérique de l'équation des ondes par méthode covariante de Galerkin.

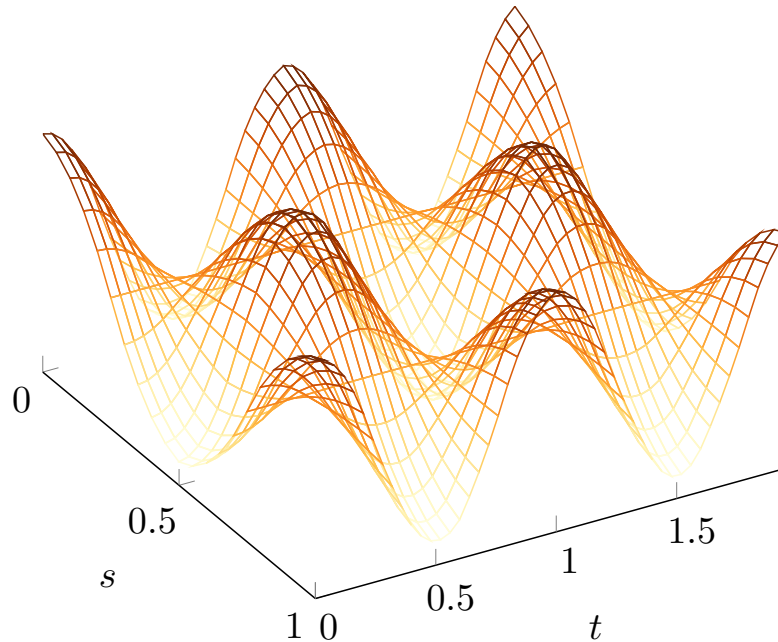


FIG. III.5 Solution numérique de l'équation des ondes pour des conditions homogènes du premier ordre. Les paramètres utilisés sont donnés en table III.1.

Ce résultat est une propriété démontrable de l'intégrateur numérique. En substance, la preuve consiste à reformuler le problème en intégrant selon la variable spatiale, de façon à considérer un système lagrangien équivalent ne dépendant que de la variable de temps. On montre alors, à l'aide des outils de la mécanique lagrangienne classique, que les solutions numériques sont symplectique et, à ce titre, conservent approximativement l'énergie. Nous donnons ici les grandes étapes de la démonstration; le lecteur pourra trouver dans Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [31] une discussion plus exhaustive sur un problème covariant similaire.

On définit pour tout indice temporel  $i$  la configuration  $\mathbf{q}_i$  comme le vecteur constitué de toutes les configurations  $q_{i,0}^{j,\nu}$  pour  $0 \leq j < J$ ,  $0 \leq \nu \leq N$ , soit  $\mathbf{q}_i = (q_{i,0}^{0,0}, q_{i,0}^{0,1}, \dots, q_{i,0}^{J-1,N})$ . On note  $\mathbf{Q} = Q^{J \times N+1}$  l'espace de configuration tel que  $\mathbf{q}_i \in \mathbf{Q}$ . Soit le lagrangien discret

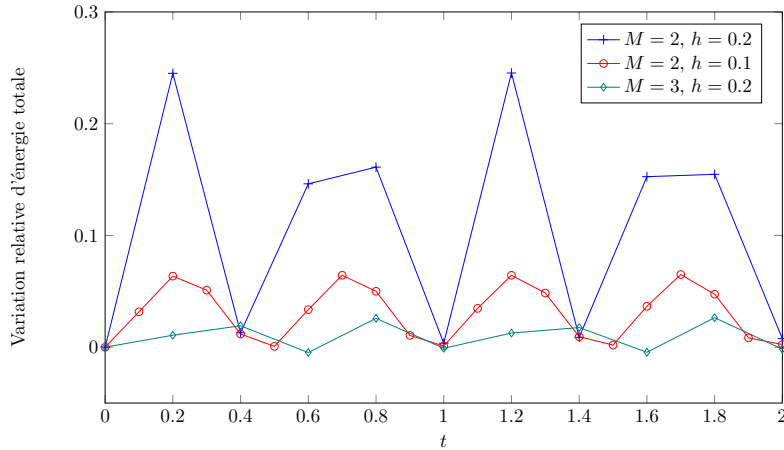


FIG. III.6 Variation relative de l'énergie totale de l'équation des ondes pour des conditions homogènes du premier ordre calculée pour différentes valeurs de  $h$  et de  $M$ .

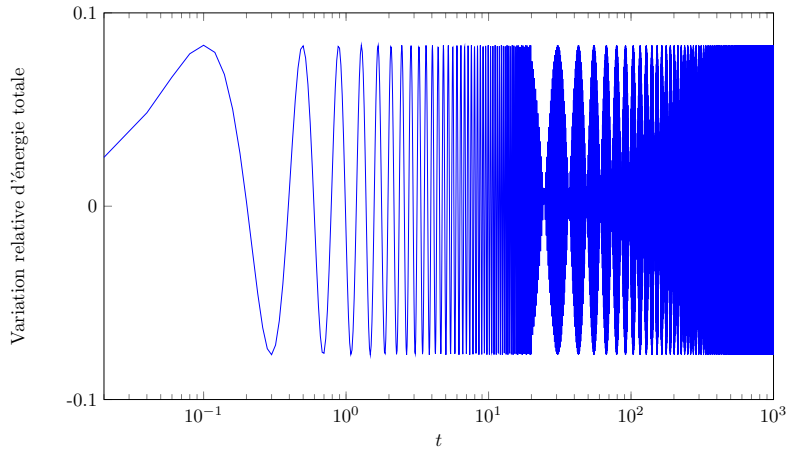


FIG. III.7 Variation relative d'énergie totale de l'équation des ondes pour des conditions homogènes du premier ordre (échelle logarithmique). La solution est calculée sur  $I = 5 \cdot 10^4$  itérations pour un pas temporel  $h = 0.02$  une interpolation de degré  $M = 1$ .

$\mathbf{L}_d : \mathbf{Q} \times \mathbf{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  défini par l'extremum

$$\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_d(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) = \underset{\{q_{i,\mu}^{j,\nu}\}_{\substack{0 \leq j < J, 0 \leq \nu \leq N \\ 0 < \mu < M}}}{\text{ext}} \sum_{j=0}^{J-1} \tilde{\mathcal{A}}_i^j.$$

Ce lagrangien sera dit “temporel”, par opposition au lagrangien covariant  $\mathcal{L}_d$ . D'une part, la condition d'extrémalisation du lagrangien  $\mathbf{L}_d$  donne les équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.21b) et (III.22), ainsi que les conditions aux bords du premier ordre  $B_{i,\mu}^0 = 0$  et  $B_{i,\mu}^J = 0$  pour tout  $1 \leq \mu \leq M-1$ . D'autre part, on applique à  $\mathbf{L}_d$  un principe variationnel pour des variations  $\delta \mathbf{q}_i = (\delta q_{i,0}^{0,0}, \dots, \delta q_{i,0}^{J-1,N})$ . On calcule tout d'abord les

dérivées partielles

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}_i}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i &= \sum_{j=1}^{J-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{j-1}}{\partial q_{i,0}^{j-1,N}} \right] \delta q_i^j + \frac{\partial \mathcal{L}_i^0}{\partial q_{i,0}^{0,0}} \delta q_i^0 + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{J-1}}{\partial q_{i,0}^{J-1,N}} \delta q_i^J + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,\nu}} \delta q_i^{j,\nu} \\ \frac{\partial \mathbf{L}_i}{\partial \mathbf{q}_{i+1}} \delta \mathbf{q}_{i+1} &= \sum_{j=1}^{J-1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,0}} + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{j-1}}{\partial q_{i,M}^{j-1,N}} \right] \delta q_{i+1}^j + \frac{\partial \mathcal{L}_i^0}{\partial q_{i,M}^{0,0}} \delta q_{i+1}^0 + \frac{\partial \mathcal{L}_i^{J-1}}{\partial q_{i,M}^{J-1,N}} \delta q_{i+1}^J \\ &\quad + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=1}^{N-1} \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,M}^{j,\nu}} \delta q_{i+1}^{j,\nu} \end{aligned}$$

Cette écriture permet finalement de déduire par indépendance des variations  $\delta \mathbf{q}_i$  que les solutions des équations d'Euler-Lagrange associées à  $\mathbf{L}_d$

$$\frac{\partial \mathbf{L}_d}{\partial \mathbf{q}_i}(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) + \frac{\partial \mathbf{L}_d}{\partial \mathbf{q}_i}(\mathbf{q}_{i-1}, \mathbf{q}_i) = 0$$

sont exactement les solutions des équation d'Euler-Lagrange covariantes (III.21a) et (III.21c) ainsi que des conditions aux bords du premier ordre  $B_i^0 = 0$  et  $B_i^J = 0$ . On conclut alors que les solutions numériques associées au lagrangien covariant  $\mathcal{L}_d$  sont exactement les solutions du problème défini par le lagrangien temporel  $\mathbf{L}_d$ . Par conséquent, les solutions préservent la forme symplectique discrète  $\Omega_{\mathbf{L}_d} = d\Theta_{\mathbf{L}_d}^\pm$  associée à  $\mathbf{L}_d$ , définie à l'aide des formes de Poincaré-Cartan s'écrivant

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathbf{L}_d}^+(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) &= \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{k=M+1}^{M+N+1} \left( (j^1 \phi_d)^* \Theta_{\mathcal{L}_d}^k \right) (\square_i^j) \\ \Theta_{\mathbf{L}_d}^-(\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_{i+1}) &= \sum_{j=0}^{J-1} - \left[ \left( (j^1 \phi_d)^* \Theta_{\mathcal{L}_d}^1 \right) (\square_i^j) + \sum_{k=2M+N+1}^{2(M+N)} \left( (j^1 \phi_d)^* \Theta_{\mathcal{L}_d}^k \right) (\square_i^j) \right]. \end{aligned}$$

Par conséquent, les solutions conservent approximativement l'énergie associée au lagrangien  $\mathbf{L}_d$  (au sens défini au premier chapitre).

On va voir maintenant qu'un résultat similaire est obtenu en considérant des conditions aux bords d'ordre zéro homogènes.

### III.3.1.2 Conditions d'ordre zéro homogènes

On s'intéresse maintenant sur les extrémités spatiale à des conditions de Dirichlet homogènes. Ces conditions, décrites par l'équation (III.29), imposent  $q = 0$  en  $s = 0, L$ , et partant  $\dot{q} = 0$ . Le terme intégral de l'équation d'évolution globale de l'énergie (III.31) s'annule alors, impliquant à nouveau la conservation de l'énergie totale au cours du temps.

Les conditions aux bords discrètes correspondant à cette situation s'obtiennent par application du principe variationnel étendu, qui donne les conditions de Dirichlet

$$\begin{aligned} q_0^{j,\nu} &= \bar{q}(0, s_{j,\nu}), \quad 0 \leq j < J, \quad 0 \leq \nu \leq N \\ q_{i,\mu}^0 &= \bar{q}(t_{i,\mu}, 0) = 0, \quad q_{i,\mu}^J = \bar{q}(t_{i,\mu}, L) = 0, \quad 0 \leq i < I, \quad 0 \leq \mu \leq M \end{aligned}$$

et les conditions du premier ordre

$$B_0^{j,\nu} = \bar{\tau}_0^{j,\nu}, \quad 0 \leq j < J, \quad 0 \leq \nu \leq N.$$

Les résultats des simulations numériques obtenues par méthodes de Galerkin covariante pour les paramètres donnés en table III.1 et les conditions initiales

$$\bar{q}(0, s) = \sin\left(\frac{2\pi s}{L}\right), \quad \bar{\tau}(0, s) = 0$$

sont représentés en figure III.8.

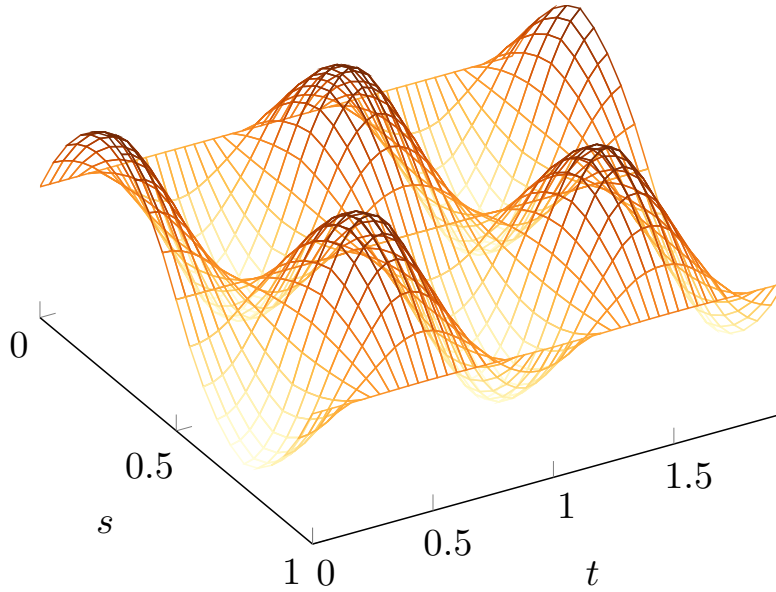


FIG. III.8 Solution numérique de l'équation des ondes pour des conditions de Dirichlet homogènes. Les paramètres utilisés sont donnés en table III.1.

Encore une fois, l'énergie est approximativement conservée au cours du temps par la solution numérique, comme on peut le voir en figure III.9. En adaptant la preuve proposée au § III.3.1.1, on peut à nouveau démontrer ce résultat par un recours aux outils de la mécanique lagrangienne classique : en prenant pour espace de configuration discret non plus  $\mathbf{Q} = Q^{J \times N+1}$  mais  $\mathbf{Q}_0 = \{\mathbf{q} = (0, q^{0,1}, \dots, q^{j,\nu}, \dots, q^{J-1, N-1}, 0) / q^{j,\nu} \in Q\}$ , on montre que les solutions des équations d'Euler-Lagrange covariantes sont symplectiques (voir Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [31] pour une démonstration dans un contexte similaire).

### III.3.2 Corde raide non linéaire amortie

On étudie maintenant un modèle de corde raide non linéaire amortie et sa discrétisation à l'aide d'une méthode de Galerkin covariante.

#### III.3.2.1 Modèle continu

Nous rappelons ici la description de corde proposée par Chabassier *et al.* [17], [18]. Celle-ci modélise les trois composantes du mouvement planaire d'une corde autour de

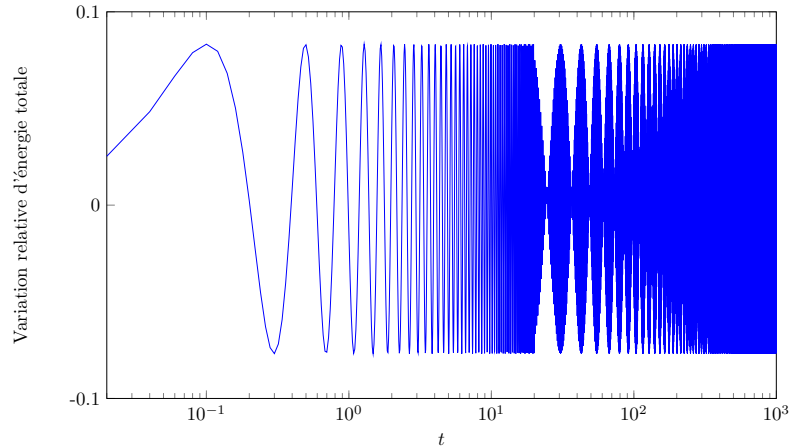


FIG. III.9 Variation relative d'énergie totale de l'équation des ondes pour des conditions de Dirichlet homogènes (échelle logarithmique). La solution est calculée sur  $I = 5 \cdot 10^4$  itérations pour un pas temporel  $h = 0.02$  une interpolation de degré  $M = 1$ .

sa position d'équilibre : le déplacement transverse  $u$ , le déplacement longitudinal  $v$ , et l'angle de rotation  $\varphi$  des sections de corde orthogonale à la ligne des centroïdes (voir figure III.10). Le modèle, décrit à l'origine à partir d'un hamiltonien, est ici réécrit dans la formulation lagrangienne covariante.

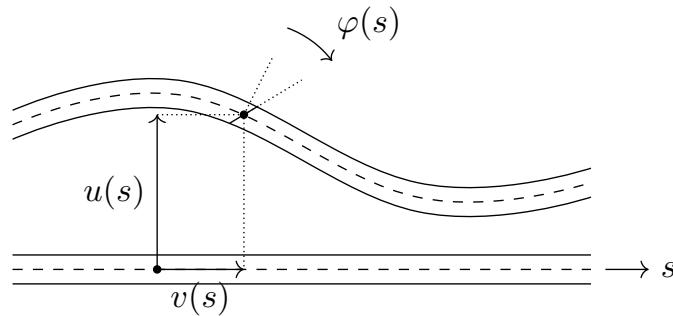


FIG. III.10 Les composantes  $u$ ,  $v$  et  $\varphi$  représentent respectivement les déplacements transverse et longitudinal, et l'angle de rotation de la corde par rapport à la tangente.

**III.3.2.1.1 Équations d'Euler-Lagrange** Soit  $q = (u, v, \varphi)^T \in \mathbb{R}^3$  une configuration dépendant des variables de temps  $t \in [0, T]$  et d'espace  $s = [0, L]$ , le lagrangien  $\mathcal{L}$  est défini comme le produit  $\mathcal{L} = \mathcal{L} dt \wedge ds$  où la fonction  $\mathcal{L}$  est donnée par

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, q') = \frac{1}{2} \langle \dot{q}, \mathbb{M} \dot{q} \rangle - \frac{1}{2} \langle q', \mathbb{A} q' \rangle - \langle q', \mathbb{B} q \rangle - \frac{1}{2} \langle q, \mathbb{C} q \rangle - \mathcal{U}(q')$$

Les tenseurs d'ordre trois  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{A}$ ,  $\mathbb{B}$ ,  $\mathbb{C}$  et la fonction  $\mathcal{U}$  sont définis par

$$\begin{aligned}\mathbb{M} &= \begin{pmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{pmatrix}, & \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} T_0 + AG\kappa & 0 & 0 \\ 0 & EA & 0 \\ 0 & 0 & EI \end{pmatrix}, \\ \mathbb{B} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -AG\kappa \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \mathbb{C} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & AG\kappa \end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\mathcal{U}(q') = (EA - T_0) \left( \frac{(u')^2}{2} + (1 + v') - \sqrt{(u')^2 + (1 + v')^2} \right)$$

où  $E$  et  $G$  sont le module de Young et le coefficient de cisaillement,  $A$  est l'aire d'une section de corde,  $\rho$  la masse volumique,  $\kappa$  le coefficient de Timoshenko,  $T_0$  la tension au repos, et  $I$  le moment d'inertie axial. Les trajectoires solutions du systèmes vérifient les équation d'Euler-Lagrange (III.7), données pour le modèle de corde raide par

$$\mathbb{M}\ddot{q} - \mathbb{A}q'' + (\mathbb{B}^T - \mathbb{B})q' + \mathbb{C}q - \frac{d}{ds}(\nabla\mathcal{U}(q')) = 0$$

Le terme associé à  $\mathbb{B}$  est responsable du couplage entre le déplacement transverse  $u$  et la rotation  $\phi$ , tandis que le terme  $\frac{d}{ds}(\nabla\mathcal{U}(q'))$  modélise le couplage non linéaire entre les déplacements transverse  $u$  et longitudinal  $v$ .

Dans le modèle, les pertes du système sont prise en compte par l'ajout d'une force représentant l'amortissement

$$f = -\mathbb{R}\dot{q} + \mathbb{G}\frac{\partial^3 q}{\partial t \partial s^2}.$$

Les tenseur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{G}$  sont responsables des amortissements fluide et visqueux respectivement, et ont pour expression

$$\mathbb{R} = 2 \begin{pmatrix} \rho AR_u & 0 & 0 \\ 0 & \rho AR_v & 0 \\ 0 & 0 & \rho IR_\phi \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = 2 \begin{pmatrix} T_0\gamma_u & 0 & 0 \\ 0 & EA\gamma_v & 0 \\ 0 & 0 & EI\gamma_\phi \end{pmatrix}$$

où  $R = (R_u, R_v, R_\phi)^T$  et  $\eta = (\eta_u, \eta_v, \eta_\phi)^T$  sont les coefficients d'amortissement fluide et visqueux. L'ajout des termes d'amortissement *via* un principe de Lagrange-d'Alembert aboutit aux équations d'Euler-Lagrange forcées

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{R}\dot{q} - \mathbb{G}\frac{\partial^3 q}{\partial t \partial s^2} - \mathbb{A}q'' + (\mathbb{B}^T - \mathbb{B})q' + \mathbb{C}q - \frac{d}{ds}(\nabla\mathcal{U}(q')) = 0 \quad (\text{III.32})$$

L'équation vectorielle précédente peut être développée sous forme de trois équations scalaires des variables  $u$ ,  $v$  et  $\varphi$

$$\begin{aligned}\rho A\ddot{u} + 2\rho AR_u u' - 2T_0\eta_u \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial s^2} - (T_0 + AG\kappa)u'' + AG\kappa\varphi' & \quad (\text{III.33a}) \\ - \frac{d}{ds} \left( (EA - T_0)u' \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{(u')^2 + (1 + v')^2}} \right) \right) & = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho A \ddot{v} - EA v'' + 2\rho AR_v v' - 2T_0 \eta_v \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial s^2} & \quad (III.33b) \\
 - \frac{d}{ds} \left( (EA - T_0) \left( 1 - \frac{1 + v'}{\sqrt{(u')^2 + (1 + v')^2}} \right) \right) & = 0 \\
 \rho I \ddot{\varphi} + 2\rho AR_\varphi \varphi' - 2T_0 \eta_\varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial s^3} - EI \varphi'' + AG\kappa (\varphi - u') & = 0
 \end{aligned}$$

On suppose de plus que les extrémités sont encastées, c'est-à-dire conditions aux bords de type Dirichlet homogènes pour  $u$  et  $v$  (pas de déplacements des extrémités) et Neumann homogène pour  $\phi$  (contrainte nulle), ce qui s'écrit

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0, \quad v(t, 0) = v(t, L) = 0, \quad \phi'(t, 0) = \phi'(t, L) = 0. \quad (III.34)$$

L'ensemble des équations (III.32) et (III.34) forment le modèle complet de corde raide non linéaire amortie.

**III.3.2.1.2 Loi d'évolution de l'énergie** La loi locale d'évolution de la densité d'énergie s'obtient à partir de l'expression (III.8) pour la variable  $x_\nu = t$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} + \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \cdot \dot{q} \right) - f \cdot \dot{q} = 0$$

où  $\mathcal{E} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} - \mathcal{L}$  est la densité d'énergie. En remplaçant  $f$  par son expression dans l'équation précédente et en effectuant une intégration par rapport à la variable d'espace  $s$ , on obtient la loi d'évolution de l'énergie de la corde

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \mathcal{E} ds + \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} \dot{q} \right]_0^L = \left[ \left\langle \dot{q}, \mathbb{G} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} \right\rangle \right]_0^L - \int_0^L \left\langle \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s}, \mathbb{G} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} \right\rangle ds - \int_0^L \langle \dot{q}, \mathbb{R} \dot{q} \rangle ds \quad (III.35)$$

où on a utilisé l'intégration par parties

$$\int_0^L \left\langle \dot{q}, \mathbb{G} \frac{\partial^3 q}{\partial t \partial s^2} \right\rangle ds = \left[ \left\langle \dot{q}, \mathbb{G} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} \right\rangle \right]_0^L - \int_0^L \left\langle \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s}, \mathbb{G} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} \right\rangle ds$$

La condition de Dirichlet pour les composantes  $u$  et  $v$  assure que  $\dot{u} = \dot{v} = 0$  sur les bords. De même, la condition de Neumann pour la composante  $\varphi$  permet de conclure que  $\partial \varphi' / \partial t = 0$  sur les bords. Enfin, en explicitant la dérivée du lagrangien

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q'} = -\mathbb{A}q' - \mathbb{B}q - \nabla \mathcal{U}(q'),$$

on vérifie à partir des expressions de  $\mathbb{B}$  et  $\mathcal{U}$  que la troisième composante de ce terme est nulle sur les bords du domaine spatial. L'ensemble de ces conditions permet de conclure que toutes les intégrales de bord dans l'égalité (III.35) sont nulles. On peut finalement conclure que

$$\frac{d}{dt} \int_0^L \mathcal{E} ds = - \int_0^L \left\langle \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s}, \mathbb{G} \frac{\partial^2 q}{\partial t \partial s} \right\rangle ds - \int_0^L \langle \dot{q}, \mathbb{R} \dot{q} \rangle ds$$

Les produits scalaires mettant en jeu les tenseurs  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{G}$  étant positifs, l'énergie décroît au cours du temps sous l'action des amortissements exercés sur le système.



**III.3.2.1.3 Symétries du lagrangien** Soit le champ de variations  $S = \beta_u \vec{\partial}_u + \beta_v \vec{\partial}_v$  pour  $\beta_u, \beta_v \in \mathbb{R}$  des constantes arbitraires ; on écrit par raccourci de notation  $S = (\beta_u, \beta_v, 0)^T$ . Le champ  $S$  définit une symétrie verticale du lagrangien qui correspond à une translation du système selon le plan de la corde. En effet,

$$j^1 S \lrcorner d\mathcal{L} = - \left\langle \mathbb{C}q + \mathbb{B}^T q', S \right\rangle = - \left\langle (0, 0, AG\kappa(\varphi - u'))^T, (\beta_u, \beta_v, 0)^T \right\rangle = 0.$$

Le moment associé au champ  $S$  est défini par  $J_S = j^1 S \lrcorner \Theta_{\mathcal{L}}$ , ce qui s'écrit en coordonnées

$$J_S = \langle \mathbb{M}\dot{q}, S \rangle ds + \langle \mathbb{A}q' + \mathbb{B}q + \nabla\mathcal{U}(q'), S \rangle dt$$

En vertu de la proposition 6,  $J_S$  vérifie pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange forcées (III.32) une loi d'évolution locale, qui s'écrit

$$\left\langle \mathbb{M}\ddot{q} - \mathbb{A}q'' - \mathbb{B}q' - \frac{d}{ds} \nabla\mathcal{U}(q') - f, (\beta_u, \beta_v, 0)^T \right\rangle dt \wedge ds = 0.$$

Les constantes  $\beta_u, \beta_v$  étant arbitraires, cette loi locale est équivalente aux équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.33a) et (III.33b) pour les variables  $u$  et  $v$ . La version globale de cette loi donne l'évolution de la quantité de mouvement de la corde sous l'influence des déformations aux bords et des forces de dissipation (voir exemple 4).

### III.3.2.2 Modèle discret

Nous proposons maintenant de calculer les solutions du modèle de corde en appliquant l'intégrateur de Galerkin covariant défini au § III.2. Pour cela, il est nécessaire d'explicitier la discrétisation des termes d'amortissement.

**III.3.2.2.1 Discrétisation des forces d'amortissement** Le terme d'amortissement visco-élastique dans les équations d'Euler-Lagrange covariantes (III.32) met en jeu une dérivée du troisième ordre. Pour discrétiser le terme de force selon la méthode proposée au § III.2.6, il est alors nécessaire d'exprimer cette dérivée à partir des fonctions de base. On écrit donc la dérivée de l'interpolant  $\tilde{q}_i^j$  pour tout  $t, s \in [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$  comme

$$\frac{\partial^3 \tilde{q}_i^j}{\partial t \partial s^2}(t, s) = \sum_{\mu=0}^M \sum_{\nu=0}^N \frac{1}{h^2} q_\mu^\nu \dot{\varphi}_\mu(\tilde{t}) \psi_\nu''(\tilde{s})$$

où la dérivée  $\dot{\varphi}_\mu$  est donnée par l'expression (I.16), et où  $\psi_\nu''$  s'écrit pour tout  $\beta \in [0, 1]$  comme

$$\psi_\nu''(\beta) = \sum_{\substack{0 \leq \eta \leq N \\ \eta \neq \nu}} \frac{1}{\beta_\nu - \beta_\eta} \left[ \sum_{\substack{0 \leq \lambda \leq N \\ \lambda \neq \nu, \lambda \neq \eta}} \frac{1}{\beta_\nu - \beta_\lambda} \left[ \prod_{\substack{0 \leq \mu \leq N \\ \mu \neq \nu, \mu \neq \eta, \mu \neq \beta}} \frac{\beta - \beta_\mu}{\beta_\nu - \beta_\mu} \right] \right]$$

Afin de pouvoir effectuer ces opérations de dérivation sur les polynômes de base, on suppose que leurs degrés vérifient respectivement  $M \geq 1$  et  $N \geq 2$ .

**III.3.2.2.2 Symétries du lagrangien discret** Pour toute solution des équations d'Euler-Lagrange forcées covariantes, la loi d'évolution locale associée à la symétrie du lagrangien s'écrit par application du théorème 7 sur toute cellule  $\square$  du maillage

$$\sum_{k=1}^K \left( (j^1 \phi_d)^* J_S^k \right) (\square) = 0.$$

À partir de cette égalité locale, on peut exprimer une loi d'évolution globale qui dépend des conditions limites et des forces exercées sur le système, donnée par le théorème 9. En particulier, en réarrangeant les sommes de l'équation (III.28), on fait apparaître la loi d'évolution de la quantité de mouvement totale du système au cours du temps, définie pour tout  $i$  par

$$p_i = \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{\nu=0}^N \frac{\partial \mathcal{L}_i^j}{\partial q_{i,0}^{j,\nu}} \cdot S_{i,0}^{j,\nu}. \quad (\text{III.36})$$

Cette loi, qui relie la valeur du moment à l'instant  $t_i$  à sa valeur initiale et à l'influence des conditions limites spatiales et des forces, s'écrit

$$p_i = p_0 + \sum_{\iota=0}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} B_{\iota,\mu}^0 \cdot S_{\iota,\mu}^{0,0} + \sum_{\iota=1}^{i-1} B_{\iota}^0 \cdot S_{\iota}^0 + \sum_{\iota=0}^{i-1} \sum_{\mu=1}^{M-1} B_{\iota,\mu}^J \cdot S_{\iota,\mu}^{J-1,N} + \sum_{\iota=1}^{i-1} B_{\iota}^J \cdot S_{\iota}^J \\ \sum_{\square \in \mathcal{U}_d} \left[ \sum_{k/\square^k \notin \partial \mathcal{U}_d} (j^1 \phi_d)^* \left( (f \cdot S)^k \right) (\square) \right] \quad (\text{III.37})$$

L'écriture de la loi d'évolution sous cette forme est à rapprocher de sa version continue, donnée par l'équation (III.15) en exemple 4. Nous allons voir au prochain paragraphe qu'elle est vérifiée par construction par les solutions des équations d'Euler-Lagrange forcées.

### III.3.2.3 Résultats numériques

Une solution du modèle de corde raide (III.32) a été approchée par simulation numérique à l'aide d'une méthode de Galerkin covariante pour les paramètres physiques et numériques donné en tables III.2 et III.3. Les paramètres physiques ont été choisis pour correspondre à une corde en acier accordée à la fréquence fondamentale de 55 Hz. Pour cela, la corde est excitée pendant une durée de  $1 \times 10^{-3}$  s à l'aide d'une force dont le profil est donné par une rampe de magnitude maximale  $f_{\max} = 100$  N

$$f(t, s) = \delta_{s_c}(s) 1_{[0, t_c[}(t) \frac{t}{t_c} f_{\max} (1, 0, 0)^T$$

Cette force simule un pincement transverse de la corde à l'abscisse  $s = 72$  cm qui se trouve aux 40% de la longueur totale  $L = 1.8$  m.

L'évolution au cours du temps des deux composantes (selon  $u$  et  $v$ ) de la quantité de mouvement discrète  $p_i$ , définie par la somme (III.36), est donnée en figure III.11. Cette loi d'évolution prend en compte les conditions aux bords, les différents types d'amortissements, ainsi que la force d'excitation. On observe pour la composante transverse  $p_u$  deux oscillations du mode fondamental de la corde à 55 Hz. On peut constater sur cette

Paramètre	$h$	$M$	$I$	$l$	$N$	$J$
Valeur	$1 \times 10^{-5}$	1	4000	0.09	2	20

TABLE III.2 – Paramètres numériques utilisés pour la simulation numérique du modèle de corde raide par méthode covariante de Galerkin.

$E$	$G$	$a$	$A$	$\rho$	$I$
$2 \times 10^{11}$ Pa	$7.9 \times 10^{10}$ Pa	$1.5 \times 10^{-3}$ m	$\pi a^2$	$7800$ kg/m <sup>3</sup>	$\frac{\pi}{4} a^4$
$\kappa$	$T_0$	$R_u$	$R_v$	$R_\varphi$	$\gamma$
0.95	2161 N	$0.05$ s <sup>-1</sup>	$0.25$ s <sup>-1</sup>	$0.05$ s <sup>-1</sup>	$7 \times 10^{-9}$ s

TABLE III.3 – Paramètres physiques utilisés pour la simulation numérique du modèle de corde raide par méthode covariante de Galerkin.

même figure (bas) que la loi d'évolution (III.37) du moment en fonction des forces et des conditions limites est vérifiée à précision machine près. L'intégrateur proposé vérifie donc bien par définition la loi d'évolution numérique attendue.

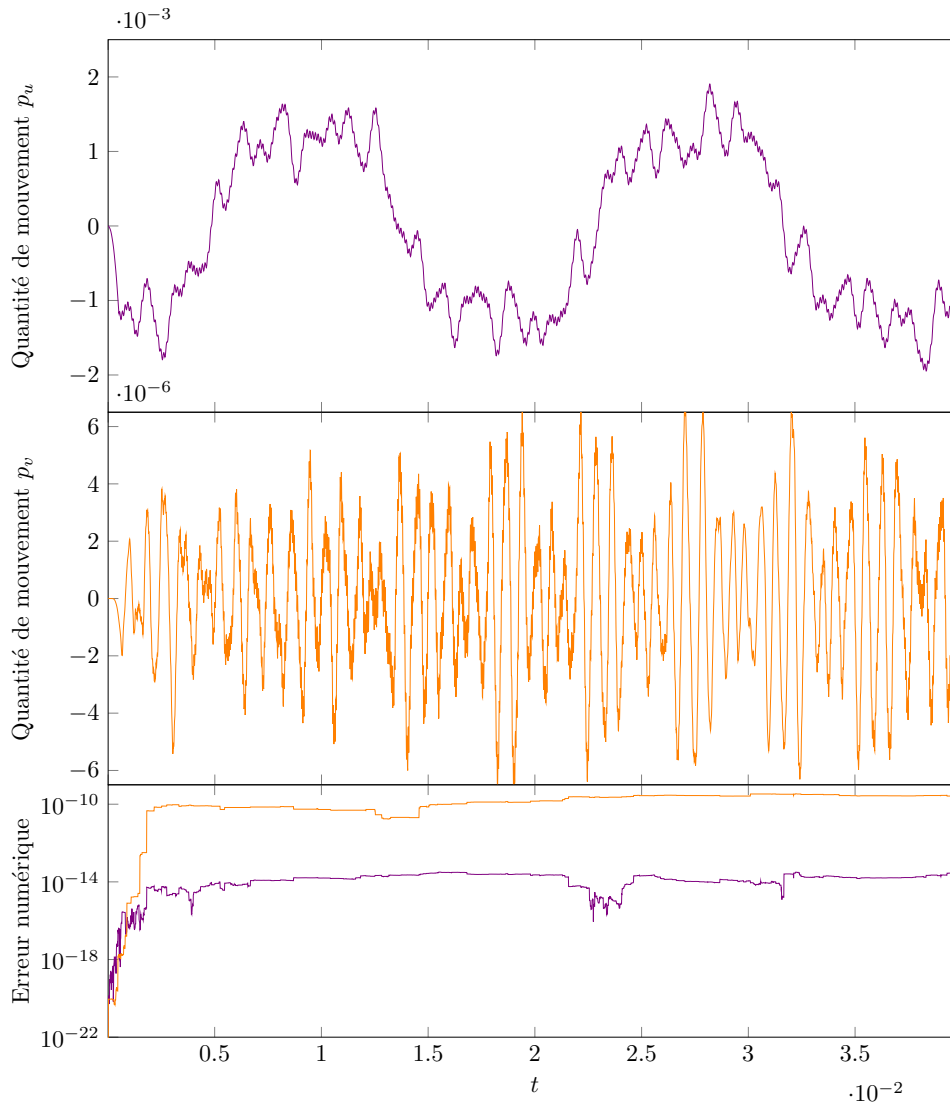


FIG. III.11 Composantes  $p_u$  et  $p_v$  de la quantité de mouvement totale du système au cours du temps. La loi d'évolution (III.37) est vérifiée à précision machine près (bas).

### III.4 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre la formulation de la mécanique lagrangienne en théorie lagrangienne des champs (§ III.1). Cette construction généralise les résultats de la mécanique lagrangienne classique vus au chapitre 1 : le calcul des variations de l'action permet l'obtention des équations d'Euler-Lagrange covariantes vérifiées par les solutions physiques, ainsi que des équations d'évolutions locales associées aux différentes variables de base. Le traitement des conditions limites du premier ordre est proposé dans le cadre variationnel par une extension du principe de Hamilton. Les résultats de multisymplecticité et le théorème de Noether s'établissent également à partir du calcul des variations.

Enfin, la prise en compte des forces extérieures est rendue possible par un principe de Lagrange-d'Alembert, duquel on tire les conséquences pour les conditions limites et les lois d'évolutions des quantités physiques. La définition d'une famille de méthode covariantes de Galerkin a établi une version discrète de ces résultats (§ III.2). Au § III.3, ces méthodes numériques ont été mises en œuvre sur deux exemples : l'équation des ondes, et un modèle de corde raide amortie. Le premier a permis de vérifier pour deux types de conditions aux bords la préservation approximative de l'énergie pour les systèmes conservatifs, conséquence de la symplecticité en temps des solution numériques. Le second propose un exemple d'application des méthodes numériques définies à un système non linéaire complet prenant en compte des forces d'amortissement et différents types de conditions limites. Cette application a été l'occasion de valider numériquement la vérification de la loi d'évolution de la quantité de mouvement.

Le modèle de corde considéré à la fin de ce chapitre fait l'hypothèse de petites déformations qui permettent d'effectuer des linéarisations simplifiant l'écriture des équations ; les non linéarités sont alors prises en compte par une modification de la loi de comportement. Une autre approche pour rendre compte des non linéarités de manière intrinsèque consiste à formuler le problème à l'aide d'un groupe de Lie approprié. L'objet du prochain chapitre est de définir un modèle de corde valide en grandes déformations, basé sur une poutre géométriquement exacte précontrainte formulée à l'aide du groupe de Lie  $SE(3)$ , et de calculer les solutions par application d'un intégrateur covariant avec groupe de Lie.

# Chapitre IV

## Modèle de corde géométriquement exact

La synthèse de sons riches et réalistes nécessite souvent la prise en compte de phénomènes non linéaires qui ont lieu lors de l'émission du son par un instrument de musique. En particulier, ces phénomènes non linéaires peuvent devenir prépondérants lorsque les déformations des éléments physiques qui composent le système ne peuvent plus être considérées comme faibles devant les dimensions caractéristiques. Modéliser ces effets est donc particulièrement crucial pour simuler correctement des instruments ou sous-systèmes d'instruments comme les gongs, cymbales, et cordes en particulier.

Historiquement, les premiers modèles de cordes furent établis à partir d'équation différentielles linéaires pour des déplacement transverses planaires de petite amplitude par d'Alembert [27] et Euler [38]. Ces descriptions furent ensuite étendues pour prendre en compte les non-linéarités dues à la variation de tension dans la corde par Kirchhoff [71]. Par la suite, de nombreux modèles *ad hoc* ont été proposés pour répondre à différentes problématiques. L'une des principales familles de modèles décrivant la dynamique des cordes raides et fondée sur la théorie des poutres. Rayleigh [117] propose un tel modèle, dans lequel les déplacements transverses sont considérés faibles tandis que le déplacement longitudinal est négligé. En prenant en compte la rigidité en flexion, Boutillon [11] permet un couplage entre les modes de flexion et de cisaillement, qui résulte en un spectre transverse inharmonique. Dans Chabassier, Chaigne et Joly [18], la corde est modélisée par une poutre de Timoshenko précontrainte dans laquelle le déplacement longitudinal est pris en compte ; ce modèle a été présenté au § III.3.2.

La démarche derrière la définition du modèle de poutre géométriquement exact est de mettre en équation la géométrie du système de manière adéquate, ce qui fait par essence intervenir des non-linéarités intrinsèques entre les différents degrés de liberté. Notons que de nombreuses descriptions relèvent de modèles de cordes qu'on qualifie parfois de "géométriquement exactes" (au sens où les non-linéarités proviennent de la description géométrique) sans que celles-ci soient tout à fait générales. On peut à ce titre citer Carrier [16], Anand [1] ou Watzky [134] qui, selon les auteurs et l'importance des phénomènes modélisés, négligent certaines composantes et/ou développent les premiers termes des non-linéarités.

Nous présentons dans ce chapitre un modèle de corde non linéaire amortie à trois dimensions, construit à partir d'une poutre géométriquement exacte. Le modèle de poutre, qui est à la base de la description de corde proposée dans ce chapitre, a été formulé par Reissner [119], puis développé par Simo [124] et Simo, Marsden et Krishnaprasad [126].

Ce modèle peut être vu comme une extension du modèle de Kirchhoff, dans lequel les hypothèses sont modifiées afin de permettre l'élongation de la poutre et la rotation arbitraire des sections par rapport à la ligne des centroïdes [2]. Cette formulation tridimensionnelle reste donc valide pour des systèmes soumis à de grands déplacements, et permet en particulier de décrire les couplages entre les six degrés de liberté. La description covariante de ce système, dans le formalisme de la théorie lagrangienne des champs introduite au chapitre 3, est donnée par Ellis, Gay-Balmaz, Holm, Putkaradze et Ratiu [35] et Bensoam et Baugié [7]. Le fait que la poutre géométriquement exacte soit (1) un exemple de modèle covariant avec groupe de Lie ; (2) suivant une loi de comportement linéaire, donc simple ; (3) ne nécessitant pour sa formulation que deux variables indépendantes ; (4) modélise un système physique omniprésent en mécanique ; en a fait un exemple de choix pour tester différentes méthodes numériques d'inspiration géométriques. Par ailleurs, son usage en acoustique musicale a été suggérée par Bensoam et Roze [8], mais aucune approche numérique n'a encore été menée à bien dans ce contexte.

Dans Leyendecker, Betsch et Steinmann [88], la poutre est traitée numériquement en tant que système hamiltonien contrain. Leitz [79] et Demoures, Gay-Balmaz, Nembrini, Ratiu et Weinand [30] proposent des approches numériques à partir d'intégrateurs variationnels asynchrones symplectiques avec groupe de Lie. Un intégrateur covariant est défini pour traiter un système isolé dans Demoures, Gay-Balmaz et Ratiu [29] et élargi pour prendre en compte force de gravité et impacts sans frictions dans Demoures, Gay-Balmaz, Desbrun, Ratiu et Aragón [28]. La dynamique de la poutre est résolue par un intégrateur covariant formulé pour des quaternions par Leitz, Sato et Leyendecker [81]. D'autres approches prennent des routes différentes de l'intégration géométrique, généralement aptes à traiter des modèles linéarisés ou faiblement non-linéaires : on citera par exemple Tuković, De Jaeger, Cardiff et Ivankovic [131] qui applique une méthode des volumes finis à une simplification du modèle géométriquement exact, ou encore Roze *et al.* [8], [120], [121] qui propose dans un contexte d'acoustique musicale de résoudre la projection modale des équations développées aux premiers ordres de non-linéarités par l'utilisation de séries de Volterra.

Notre approche, axée sur l'approximation des équations par des méthodes covariantes avec groupes de Lie, s'inspire des travaux menés par Demoures *et al.* [28], [29], [31]. Afin de modéliser une corde dans des configurations intéressantes pour des fins de synthèse sonore, ces travaux sont étendus pour prendre en compte de conditions limites non triviales différenciées selon les degrés de liberté, d'une précontrainte permettant l'ajout d'une tension au repos, et de forces modélisant l'amortissement fluide que subit le système.

Le présent chapitre est organisé comme suit. La formulation covariante continue de la poutre géométriquement exacte est rappelée au § IV.1. En particulier, l'application d'un principe de Lagrange-d'Alembert étendu permet l'obtention des équations d'Euler-Poincaré et des conditions limites d'une manière unifiée. Un modèle covariant discret est ensuite défini au § IV.2. Les résultats de conservation approximative de l'énergie totale et de préservation exacte d'un moment de Noether à 6 composantes scalaires est alors validée numériquement. Sur la base de la description de la poutre géométriquement exacte, un modèle de corde rigide non linéaire est définie au § IV.3. Afin de donner un contexte critique pour les résultats numériques de la suite et de décrire le comportement du système autour de l'équilibre statique dans un langage plus familier des acousticiens, le spectre analytique de la linéarisation du modèle est explicité et comparé à plusieurs modèles de

cordes répandus. Les résultats numériques, obtenus par résolution du modèle de corde discret défini au § IV.4, convergent vers la solution des équations linéarisées pour des forces d'excitation donnant lieu à des vibrations de faible amplitude, et l'effet de glissement fréquentiel (*pitch bend*) est correctement reproduit lors de grands déplacements.

## IV.1 Formulation covariante de la poutre de Reissner

On rappelle dans le présent paragraphe la formulation covariante de poutre géométriquement exacte développé par Reissner [119] et Simo *et al.* [124], [126]. On renvoie à la lecture au travaux de Primault [115] pour une description détaillée des différents espaces et objets.

La formulation covariante donnée au chapitre 3 concerne les systèmes dont les espaces de configurations sont des espaces vectoriels. Dans le cas présent, la poutre est représentée à l'aide du groupe de Lie spécial euclidien  $SE(3)$ . Tout comme la mécanique lagrangienne classique avait été étendue au chapitre 2 pour considérer les espaces de Lie comme espace de configuration, il est nécessaire ici de faire de même pour la formulation covariante. Les spécificités qu'entraînent cette formulation seront présentées au fur et à mesure de l'exposé. Étant donné que la méthode construite au § IV.2 fera l'hypothèse d'un maillage spatio-temporel fixe, on se limitera à n'y considérer que des champs de variations verticaux. On reflète ce choix dans la formulation continue en posant la même restriction.

### IV.1.1 Description lagrangienne covariante

On considère une poutre homogène de longueur  $L$  et de masse volumique  $\rho$ , dont les sections orthogonales sont des disques de rayon  $a$  et d'aire  $A$ . Chaque section non déformable d'abscisse  $s \in [0, L]$  est représentée par un solide rigide tridimensionnel associé au repère matériel orthonormé  $(E_1, E_2, E_3)$  dont on suppose qu'il coïncide avec les directions principales du solide. La position d'une section dans le repère spatial est donnée par la translation  $r(s)$  du centre de la section, suivie d'une rotation  $R(s)$  du repère matériel (voir figure IV.1). Ainsi, à tout point matériel  $P = (0, P_y, P_z)$  de la section correspond le point  $p(P, s) = r(s) + R(s)P$  dans le repère spatial.

Par conséquent, la configuration de la poutre est décrite convenablement par la fonction

$$\begin{aligned} g : \mathcal{T} \times \mathcal{B} &\rightarrow SE(3) \\ (t, s) &\mapsto (R(t, s), r(t, s)) \end{aligned}$$

où on définit les domaines temporel  $\mathcal{T} = [0, T]$  et spatial  $\mathcal{B} = [0, L]$ . Le groupe de Lie spécial euclidien  $SE(3)$  est le groupe des translations et rotations dans l'espace à trois dimensions

$$SE(3) = \{g = (R, r) / R \in SO(3), r \in \mathbb{R}^3\}$$

défini comme le produit  $SE(3) = SO(3) \times \mathbb{R}^3$ . L'opération du groupe est définie pour tout  $g = (R, r), \tilde{g} = (\tilde{R}, \tilde{r}) \in SE(3)$  par  $g\tilde{g} = (R\tilde{R}, R\tilde{r} + r)$ .

L'algèbre  $\mathfrak{se}(3)$  associée au groupe  $SE(3)$  permet de définir les dérivées trivialisées à gauche. Ainsi, les dérivées temporelle et spatiale s'écrivent respectivement

$$\chi = g^{-1}\dot{g}, \quad \epsilon = g^{-1}g' \tag{IV.1}$$



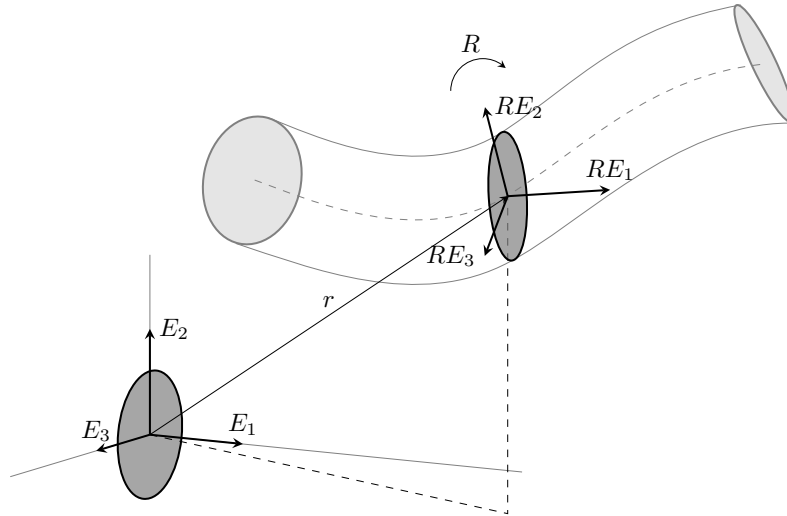


FIG. IV.1 Une section de poutre est un solide rigide paramétré par une translation  $r$  suivi d'une rotation  $R$  du repère  $(E_1, E_2, E_3)$ .

Les variables  $\chi$  et  $\epsilon$  vérifient l'équation de compatibilité

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} - \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \text{ad}_\chi \epsilon$$

Celle-ci s'obtient par à calcul direct à partir des définitions (IV.1). En effet,

$$\frac{\partial \chi}{\partial s} = -g^{-1} g' g^{-1} \dot{g} + g^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} = -\epsilon \chi + g^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}, \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} = -\chi \epsilon + g^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial s}$$

Puisque  $\partial^2 g / \partial t \partial s = \partial^2 g / \partial s \partial t$ , on retrouve le résultat voulu. Dans le cas d'espace de courbure nulle, le crochet de Lie  $\text{ad}_\chi \epsilon = [\chi, \epsilon]$  est identiquement nul et l'équation de compatibilité traduit simplement le caractère  $\mathcal{C}^2$  de  $g$ , soit  $\partial \dot{g} / \partial s - \partial g' / \partial t = 0$ .

*Remarque 14.* En toute rigueur,  $\chi$  est définie à partir de l'application tangente  $\chi = TL_{g^{-1}} \dot{g}$ , mais  $\text{SE}(3)$  étant un groupe de Lie matriciel, cette expression peut se simplifier sous la forme (IV.1). Cette remarque est également valable pour  $\epsilon$ .

*Remarque 15* (Interprétation physique des dérivées convectives). Les variables  $\chi$  et  $\bar{\epsilon}$  représentent respectivement la vitesse et la déformation par rapport à la configuration de référence, exprimées dans le repère matériel (ou mobile). En écrivant  $\chi = (\omega, \gamma)$  où  $\omega$  et  $\gamma$ , vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ , sont les vecteurs vitesse de rotation et translation, on reconnaît dans  $\omega_i$  et  $\gamma_i$  les célérités correspondant à l'axe  $E_i$ . De la même manière pour la déformation  $\bar{\epsilon} = (\bar{\Omega}, \bar{\Gamma})$  avec  $\bar{\Omega}, \bar{\Gamma} \in \mathbb{R}^3$ , la composante  $\bar{\Omega}_1$  modélise la torsion,  $\bar{\Omega}_2, \bar{\Omega}_3$  les rotations planaires, tandis que  $\bar{\Gamma}_1$  est l'élongation et  $\bar{\Gamma}_2, \bar{\Gamma}_3$  le cisaillement.

### IV.1.2 Équations d'Euler-Poincaré forcées

Dans ce paragraphe, les équations d'Euler-Poincaré covariantes du modèle de poutre sont obtenues par application d'un principe variationnel de Lagrange-d'Alembert.

### IV.1.2.1 Définition de la densité lagrangienne

La densité d'énergie cinétique  $K(\chi)$  d'une section de vélocité  $\chi$  est donnée par le produit scalaire

$$K(\chi) = \frac{1}{2} \langle \chi, \mathbb{J}\chi \rangle \quad (\text{IV.2})$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{se}(3) \times \mathfrak{se}(3)^* \rightarrow \mathbb{R}$  est le produit scalaire canonique obtenu par identification de  $\mathfrak{se}(3)$  et  $\mathfrak{se}(3)^*$  avec  $\mathbb{R}^6$ . Le tenseur  $\mathbb{J}$  d'ordre 6 est défini par

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \mathbb{J}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{J}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{J}_1 = \text{diag}(\rho I_\rho, \rho I_a, \rho I_a), \quad \mathbb{J}_2 = \rho A I_3$$

où  $\mathbb{J}_1$  est le tenseur d'inertie, dans lequel on reconnaît  $I_\rho$  et  $I_a$  les moments d'inertie polaire et axial respectivement, et  $\mathbb{J}_2$  le tenseur de masse. Les hypothèses sur la géométrie des sections donnent  $I_\rho = Aa^2/2$  et  $I_a = Aa^2/4$ . L'expression (IV.2) a été obtenue à partir de l'écriture de l'énergie cinétique dans le repère spatial :

$$\begin{aligned} K(g, \dot{g}) &= \frac{1}{2} \iint_P \langle \dot{p}(P), \rho \dot{p}(P) \rangle dP = \frac{1}{2} \iint_P \rho \left[ \langle \dot{R}P, \dot{R}P \rangle + \langle \dot{r}, \dot{r} \rangle + 2 \langle \dot{r}, \dot{R}P \rangle \right] dP \\ &= \frac{1}{2} \iint_P \rho \left[ \langle R^T \dot{R}P, R^T \dot{R}P \rangle + \langle R^T \dot{r}, R^T \dot{r} \rangle \right] dP + \left\langle \dot{r}, \dot{R} \iint_P \rho P dP \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \omega, \left( \iint_P \rho \hat{P}^T \hat{P} dP \right) \omega \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \gamma, \left( \iint_P \rho dP \right) \gamma \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \omega, \mathbb{J}_1 \omega \rangle + \frac{1}{2} \langle \gamma, \mathbb{J}_2 \gamma \rangle = \frac{1}{2} \langle \chi, \mathbb{J}\chi \rangle \end{aligned}$$

Les inversions entre intégrales et produits scalaires sont possibles dans la mesure où  $R$  et  $r$  ne dépendent pas de la variable muette  $P$ . Le terme de la deuxième ligne a été supprimé en exploitant le fait que le centroïde de la section est supposé être le centre d'inertie de la section.

La poutre de Reissner est un modèle élastique pour lequel on suppose que déformation et contrainte vérifient une relation linéaire. Sous cette hypothèse, la densité d'énergie de déformation  $U(\epsilon)$  d'une section de poutre s'écrit

$$U(\epsilon) = \frac{1}{2} \langle \bar{\epsilon}, \mathbb{C}\bar{\epsilon} \rangle$$

où  $\mathbb{C}$  est le tenseur de Hooke généralisé dont l'expression est donné par [125]

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \mathbb{C}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{C}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{C}_1 = \text{diag}(GI_\rho, EI_a, EI_a), \quad \mathbb{C}_2 = \text{diag}(EA, GA, GA)$$

avec  $E$  le module d'Young et  $G$  le coefficient de cisaillement.

On reconnaît, dans l'expression des énergie cinétique et de déformation, le moment  $\pi = \mathbb{J}\chi$  et la contrainte  $\sigma = \mathbb{C}\bar{\epsilon}$  qui sont des éléments de l'algèbre duale  $\mathfrak{se}(3)^*$ . Ils sont définis par les relations

$$\pi = \frac{\partial \ell}{\partial \chi}, \quad \sigma = -\frac{\partial \ell}{\partial \epsilon}$$

En écrivant  $\pi = (\phi, v)^T \in \mathbb{R}^6$ , on interprète physiquement  $\phi = \mathbb{J}_1 \omega \in \mathbb{R}^3$  comme le moment cinétique et  $v = \mathbb{J}_2 \gamma \in \mathbb{R}^3$  comme la quantité de mouvement. De même, pour

$\sigma = (\Phi, \Upsilon)^T \in \mathbb{R}^6$ , le vecteur  $\Phi = \mathbb{C}_1 \bar{\Omega}$  est la contrainte angulaire à une composante de torsion et deux de flexion, tandis que  $\Upsilon = \mathbb{C}_2 \bar{\Gamma}$  est la contrainte linéaire, formée de la contrainte normale et de deux composantes de cisaillement.

La densité lagrangienne du système s'écrit comme la différence entre énergies cinétique et potentielle, ce qui donne

$$\mathcal{L}(g, \dot{g}, g') = K(g^{-1}\dot{g}) - U(g^{-1}g').$$

Ce lagrangien est trivialement invariant par action à gauche du groupe de Lie  $\text{SE}(3)$ , ce qui nous permet de définir le lagrangien réduit  $\ell : \mathfrak{se}(3) \times \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathbb{R}$  pour tout  $\chi, \epsilon$  comme

$$\ell(\chi, \epsilon) = \mathcal{L}(e_G, g^{-1}\dot{g}, g^{-1}g') = K(\chi) - U(\epsilon)$$

En effet, on vérifie pour  $g, h \in \text{SE}(3)$  que

$$L_{h^{-1}g} \cdot TL_{h^{-1}}\dot{g} = (h^{-1}g)^{-1}(h^{-1}\dot{g}) = g^{-1}hh^{-1}\dot{g} = \chi, \quad L_{h^{-1}g} \cdot TL_{h^{-1}}g' = \epsilon,$$

et partant

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(L_{h^{-1}g}, TL_{h^{-1}}\dot{g}, TL_{h^{-1}}g') &= K(L_{h^{-1}g} \cdot TL_{h^{-1}}\dot{g}) - U(L_{h^{-1}g} \cdot TL_{h^{-1}}g') \\ &= K(\chi) - U(\epsilon) \\ &= \mathcal{L}(g, \dot{g}, g'). \end{aligned}$$

#### IV.1.2.2 Calcul variationnel

On établit maintenant l'expression de la variation d'action dans le formalisme covariant avec groupe de Lie. Nous avons vu au chapitre 2 comment les résultats de la mécanique lagrangienne classique, présentée au chapitre 1, étaient réduits en conséquence de la symétrie induite par l'action du groupe de Lie sur lui-même. Cette réduction s'opère aussi dans le formalisme covariant vu au chapitre 3, qu'il est nécessaire d'adapter au contexte présent. Nous rappelons ici les résultats principaux; le lecteur peut se référer à Bensoam et Baugié [7] pour un traitement plus complet.

L'action d'une trajectoire  $g : \mathcal{U} \rightarrow G$  du système est définie à partir du lagrangien réduit comme

$$\mathcal{A}(g) = \int_{\mathcal{U}} \ell(\chi, \epsilon) dt \wedge ds$$

La variation d'action associée à un champ de variations verticales trivialisées  $\zeta = g^{-1}\delta g \in \mathfrak{se}(3)$  s'écrit alors

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\mathcal{U}} \left\langle \text{ad}_\chi^* \pi - \dot{\pi} - \text{ad}_\epsilon^* \sigma + \sigma', \zeta \right\rangle dt \wedge ds + \int_0^L [\langle \pi, \zeta \rangle_0^T] ds - \int_0^T [\langle \sigma, \zeta \rangle_0^L] dt \quad (\text{IV.3})$$

*Démonstration.* La preuve de ce résultat s'obtient par un procédé similaire à celui présenté au § II.2.1. Soit un champ de variations verticales  $\delta g$ , pour tout  $t, s$  et  $g \in G$  le vecteur  $\delta g(t, s, g)$  appartient à  $T_g G$  l'espace tangent du groupe  $G$  en  $g$ . Pour ramener les variations dans le groupe  $\mathfrak{g}$ , on définit  $\zeta = g^{-1}\delta g \in \mathfrak{g}$  le champ de variations trivialisé à gauche.

La variation de l'action s'écrit

$$\delta\mathcal{A} = \int_{\mathcal{U}} \left( \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial \chi}, \delta \chi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ell}{\partial \epsilon}, \delta \epsilon \right\rangle \right) dt \wedge ds = \int_{\mathcal{U}} (\langle \pi, \delta \chi \rangle - \langle \sigma, \delta \epsilon \rangle) dt \wedge ds \quad (\text{IV.4})$$

Afin de pouvoir calculer son expression, il est nécessaire d'expliciter les variations  $\delta\chi$  et  $\delta\epsilon$  induites par  $\zeta$ ; celles-ci ont pour expression (voir équations (II.11))

$$\delta\chi = \dot{\zeta} + \text{ad}_\chi \zeta, \quad \delta\epsilon = \zeta' + \text{ad}_\epsilon \zeta \quad (\text{IV.5})$$

On peut alors réécrire l'intégrale suivante à l'aide d'une intégration par parties

$$\begin{aligned} \iint_{\mathcal{U}} \langle \pi, \delta\chi \rangle dt \wedge ds &= \iint_{\mathcal{U}} \langle \pi, \text{ad}_\chi \zeta \rangle dt \wedge ds + \iint_{\mathcal{U}} \langle \pi, \dot{\zeta} \rangle dt \wedge ds \\ &= \iint_{\mathcal{U}} \langle \text{ad}_\chi^* \pi, \zeta \rangle dt \wedge ds - \iint_{\mathcal{U}} \langle \dot{\pi}, \zeta \rangle dt \wedge ds + \int_0^L [\langle \pi, \zeta \rangle]_0^T ds \\ &= \iint_{\mathcal{U}} \langle \text{ad}_\chi^* \pi - \dot{\pi}, \zeta \rangle dt \wedge ds + \int_0^L [\langle \pi, \zeta \rangle]_0^T ds. \end{aligned}$$

Le même calcul est mené pour le second terme intégral de (IV.4) faisant intervenir la dérivée partielle  $\partial\ell/\partial\epsilon$ . On obtient par sommation des deux expressions le résultat souhaité pour la variation d'action.  $\square$

### IV.1.2.3 Principe de Lagrange d'Alembert

Le calcul des variations d'actions étant maintenant établi, un principe variationnel peut être appliqué pour obtenir les équations de la dynamique de la poutre géométriquement exacte. Toutefois, l'action de forces extérieures exercées sur le système n'est pour l'instant pas modélisé. Afin de pouvoir rendre compte de ces effets, le principe de Hamilton est modifié en un principe de Lagrange-d'Alembert, que nous énonçons maintenant.

Soit la densité de forces lagrangiennes  $f$  modélisant les forces agissant sur le système telle que  $f(g, \chi, \epsilon) \in T_g^*G$  pour tout  $g, \chi, \epsilon$ , le principe de Lagrange d'Alembert consiste à chercher les solutions de l'équation

$$\delta\mathcal{A} + \iint_{\mathcal{U}} \langle f, \delta g \rangle ds dt = 0 \quad (\text{IV.6})$$

pour des variations nulles sur le bord du domaine  $\partial\mathcal{U}$ . Puisque l'expression (IV.3) de la variation d'action  $\delta\mathcal{A}$  s'exprime à l'aide des variations trivialisées à gauche  $\zeta = g^{-1}\delta g$ , il est nécessaire de refléter cette écriture dans le terme intégral de l'équation (IV.6). À cette fin, on définit la densité de forces lagrangiennes trivialisée  $F$  définie pour tout  $g, \chi, \epsilon$  par  $F(g, \chi, \epsilon) = g^{-1}f(g, \chi, \epsilon) \in \mathfrak{se}(3)^*$ . L'égalité suivante est alors vérifiée

$$\langle f(g, \chi, \epsilon), \delta g \rangle = \langle F(g, \chi, \epsilon), \zeta \rangle$$

par prémultiplication des deux termes du produit scalaire de gauche par  $g^{-1}$ , ce qui permet de modifier l'équation (IV.6) pour l'écrire en fonction des variations trivialisées  $\zeta$ . Finalement, on applique le principe de Lagrange-d'Alembert en considérant des variations  $\zeta$  arbitraires s'annulant sur  $\partial\mathcal{U}$ , ce qui permet d'obtenir, en repartant de l'expression de la variation d'action (IV.3), les équations d'Euler-Poincaré forcées

$$\dot{\pi} - \text{ad}_\chi^* \pi - \sigma' + \text{ad}_\epsilon^* \sigma = F \quad (\text{IV.7})$$

vérifiées par toute solution du problème. Par identification de l'algèbre duale  $\mathfrak{se}(3)^*$  avec  $\mathbb{R}^6$ , ces équations d'Euler-Poincaré forment un système de six équations scalaires non linéaires des composantes des vecteurs  $\pi, \sigma$ .

Les non-linéarités, absentes de la loi de comportement du modèle, apparaissent dans les équations d'Euler-Poincaré ; elles sont due à l'écriture du modèle à l'aide du groupe de Lie  $SE(3)$  qui présente une courbure intrinsèque. Les couplages entre les composantes des vecteurs  $\pi$  et  $\sigma$  sont décrits par l'opérateur co-adjoint  $ad^*$ , dont l'expression est donnée pour tout  $(\xi, \alpha) \in \mathfrak{g}$ ,  $(\mu, \beta) \in \mathfrak{g}^*$  par

$$ad_{(\xi, \alpha)}^*(\mu, \beta) = (\mu \wedge \xi - \alpha \wedge \beta, -\xi \wedge \beta)$$

C'est cette description qui vaut au modèle de poutre le qualificatif de "géométriquement exact".

### IV.1.3 Conditions limites

Dans ce chapitre, on s'intéresse pour le modèle de poutre géométriquement exact à un problème aux valeurs initiales. La position  $g$  et le moment  $\pi$  sont prescrits pour toute la poutre à  $t = 0$  deux fonctions  $\bar{u}$  et  $\bar{\pi}$  respectivement. À chaque extrémité est imposée une et une seule condition de Dirichlet ( $\bar{v}$ ) ou de Neumann ( $\bar{\sigma}$ ). Cela s'exprime mathématiquement par les équations suivantes

$$\text{cond. initiales} \begin{cases} g(0, s) = \bar{u}(0, s) & \forall t, s \in \{0\} \times \mathcal{B} =: \partial\mathcal{U}_0^t & \text{(IV.8a)} \\ \pi(0, s) = \bar{\pi}(0, s) & \forall t, s \in \{0\} \times \mathcal{B} =: \partial\mathcal{U}_1^t & \text{(IV.8b)} \end{cases}$$

$$\text{cond. aux bords} \begin{cases} g(t, s) = \bar{v}(t, s) & \forall t, s \in \mathcal{T} \times \partial\mathcal{B}_0 =: \partial\mathcal{U}_0^s & \text{(IV.8c)} \\ \sigma(t, s) = \bar{\sigma}(t, s) & \forall t, s \in \mathcal{T} \times \partial\mathcal{B}_1 =: \partial\mathcal{U}_1^s & \text{(IV.8d)} \end{cases}$$

Ici le singleton  $\{0\}$  correspond à la borne inférieure de l'intervalle de temps  $\mathcal{T} = [0, T]$ . Les sous-ensembles  $\partial\mathcal{B}_0$  et  $\partial\mathcal{B}_1$  de  $\partial\mathcal{B} = \{0, L\}$  désignent les extrémités sur lesquelles des conditions d'ordre zéro (Dirichlet) ou un (Neumann) respectivement sont imposées. On suppose, dans le cadre de notre modèle, que exactement une condition est prescrite à chaque extrémité, ce qui revient à considérer que ces sous-ensembles forment une partition de  $\partial\mathcal{B}$  et vérifient donc  $\partial\mathcal{B}_0 \cup \partial\mathcal{B}_1 = \partial\mathcal{B}$  et  $\partial\mathcal{B}_0 \cap \partial\mathcal{B}_1 = \emptyset$ .

Le problème aux valeurs initiales (IV.8) peut s'écrire de façon équivalente à partir d'une formulation variationnelle étendue (voir proposition 4). Pour cela, on réécrit le principe de Lagrange-d'Alembert (IV.6) de façon à pouvoir en déduire les conditions limites du premier ordre. Cette version a l'avantage d'être intrinsèque et, comme nous le verrons au § IV.2, admet un équivalent discret qui assure de poser les équations au bord de manière cohérente avec la formulation variationnelle. Le principe de Lagrange-d'Alembert consiste ici à chercher les trajectoires  $g$ , vérifiant les conditions d'ordre zéro posées par (IV.8a) et (IV.8c) sur  $\partial\mathcal{U}_0$ , et solution de

$$\delta\mathcal{A} + \iint_{\mathcal{U}} \langle f, \zeta \rangle ds dt = \int_{\partial\mathcal{U}_1} \langle \bar{\tau}, \zeta \rangle$$

pour toute variation  $\zeta$  s'annulant sur le sous-ensemble  $\partial\mathcal{U} \setminus \partial\mathcal{U}_1$ , où  $\bar{\tau}$  est la 1-forme  $\bar{\tau} = \bar{\pi}ds - \bar{\sigma}dt$  et les ensembles  $\partial\mathcal{U}_0$  et  $\partial\mathcal{U}_1$  sont définis par

$$\partial\mathcal{U}_0 = \partial\mathcal{U}_0^t \cup \partial\mathcal{U}_0^s, \quad \partial\mathcal{U}_1 = \partial\mathcal{U}_1^t \cup \partial\mathcal{U}_1^s$$

On vérifie à partir de l'expression de la variation d'action (IV.3) que l'application de ce principe permet l'obtention des équations du premier ordre (IV.8b) et (IV.8d).

*Remarque 16.* Dans la formulation des équations aux bords précédente, il a été implicitement supposé que tous les degrés de liberté sont traités de la même manière. Or, il est possible de différencier les types de conditions limites selon les différents degrés de liberté en posant pour chacun d'eux les équations (IV.8) appropriées. Le principe variationnel étendu peut aisément être adapté pour considérer ce cas.

On propose trois exemples classiques de types de conditions limites pour une poutre afin d'illustrer le principe variationnel étendu. Pour chaque cas, les sous-ensembles et fonctions nécessaires à la formulation variationnelle sont donnés avec les schémas des exemples en figure IV.2.

1. Poutre libre : les deux extrémités de la poutre sont libres, ce qui se traduit par une condition du premier ordre homogène. On a par ailleurs  $\partial\mathcal{B}_0 = \emptyset$  et  $\partial\mathcal{B}_1 = \{0, L\}$  (figure IV.2a). Ceci se traduit par les conditions limites

$$\begin{cases} g(0, s) = \bar{u}(0, s) & \text{sur } \partial\mathcal{U}_0 = \partial\mathcal{U}_| \\ \pi(0, s) = \bar{\pi}(0, s), \quad \sigma(t, s) = \bar{\sigma} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U}_1 = \partial\mathcal{U}_\perp \end{cases} \quad (\text{IV.9})$$

2. Poutre encastree : dans ce cas, les extrémités sont encastrees, ce qui se modélise par une condition de Dirichlet constante ; en conséquence de quoi  $\partial\mathcal{B}_0 = \{0, L\}$  et  $\partial\mathcal{B}_1 = \emptyset$ . (figure IV.2b). On obtient alors

$$\begin{cases} g(0, s) = \bar{u}(0, s), \quad g(t, s) = \bar{v} & \text{sur } \partial\mathcal{U}_0 = \partial\mathcal{U}_\perp \\ \pi(0, s) = \bar{\pi}(0, s) & \text{sur } \partial\mathcal{U}_1 = \partial\mathcal{U}_| \end{cases} \quad (\text{IV.10})$$

3. Poutre simplement supportée : ici, les degrés de liberté en rotation et translation sont traités différemment ; les premiers à l'aide d'une condition limite en espace du premier ordre homogène (IV.9), les seconds avec une condition de Dirichlet constante (IV.10) (figure IV.2c).

Nous présentons maintenant plusieurs résultats de conservation importants vérifiés par les solutions des équations d'Euler-Poincaré covariantes.

#### IV.1.4 Résultats de conservation

L'invariance du lagrangien par l'action du groupe SE(3) sur lui-même est la manifestation de l'existence d'un champ de symétrie naturel qui, par l'application du théorème de Noether, donne lieu à une loi de conservation. On donne au § IV.1.4.1 la formulation locale de la loi d'évolution du moment et au § IV.1.4.2 sa version globale qu'on énonce en fonction des conditions limites.

##### IV.1.4.1 Symétries et théorème de Noether local

Il a déjà été montré que le lagrangien  $\ell$  est invariant par action du groupe SE(3) des translations et rotations en trois dimensions (voir § IV.1.2.1). Ceci s'exprime de manière équivalente par le fait que le champ de variations verticales  $S = g^{-1}\delta g \in \mathfrak{g}^*$  où  $\delta g$  est constant définit une symétrie naturelle du lagrangien. Une loi de conservation locale peut donc être formulée à partir de l'application du théorème de Noether. Cependant, l'écriture de la mécanique de la poutre de Reissner à partir du lagrangien réduit  $\ell$  nécessite certaines

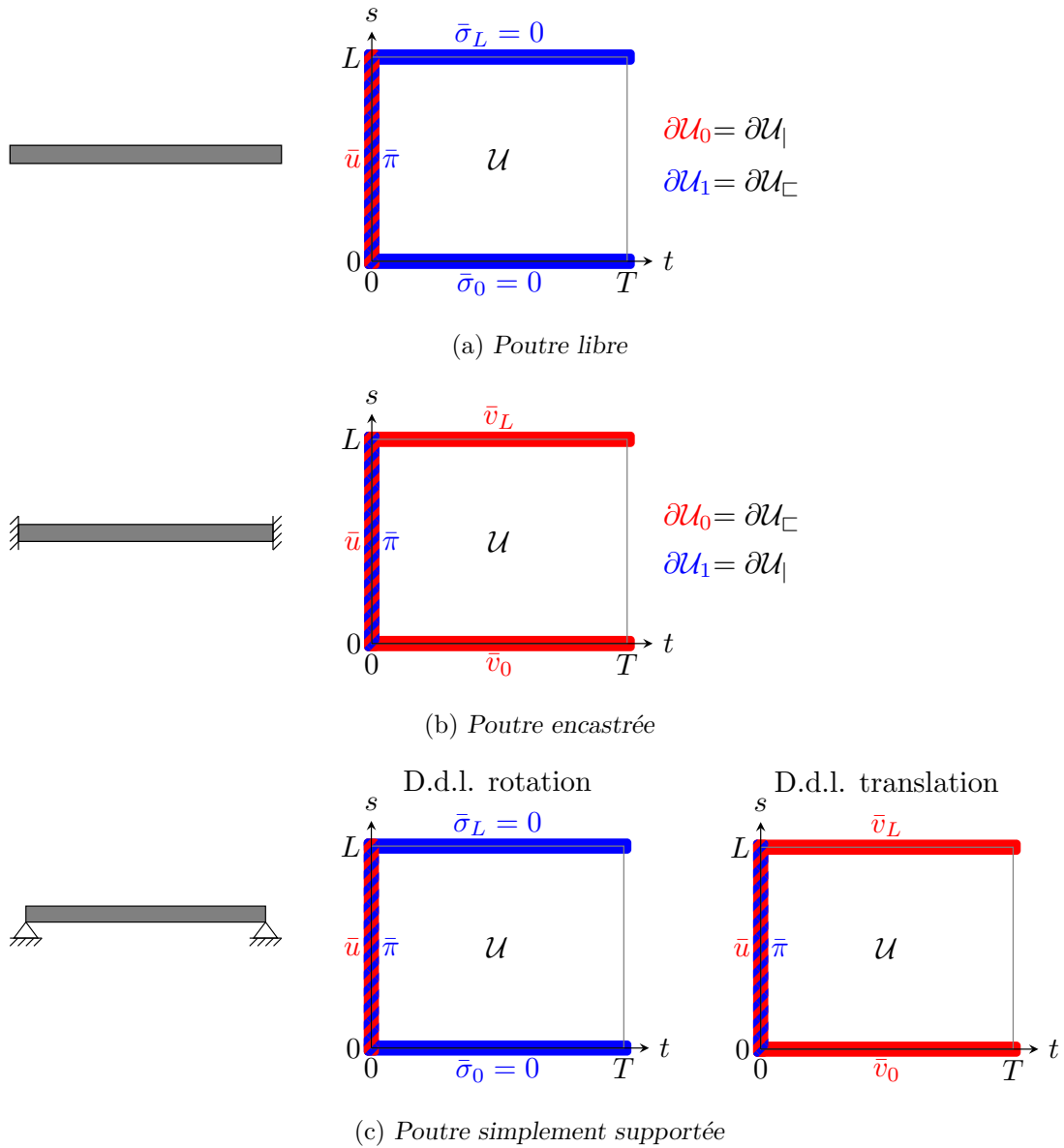


FIG. IV.2 Schémas et résumé des fonctions/ensembles pour trois types de conditions limites. Les conditions d'ordre zéro sont indiquées en rouge, et d'ordre un en bleu.

précautions pour l'application de ce théorème. On renvoie à Bensoam et Baugé [7] pour l'établissement du théorème de Noether dans ce contexte.

L'équation de conservation locale associée au champ de symétrie  $S$  s'écrit

$$\dot{\Pi} - \Sigma' = 0 \quad (\text{IV.11})$$

où  $\Pi$  est le moment constitué de la quantité de mouvement et du moment cinétique, et  $\Sigma$  la contrainte, tous deux exprimés dans le repère spatial. Ces quantités sont reliées à  $\pi$  et  $\sigma$  par la relation

$$\Pi = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \pi, \quad \Sigma = \text{Ad}_{g^{-1}}^* \sigma.$$

Cette loi de conservation est en fait exactement l'équation d'Euler-Poincaré (IV.7) sans terme de force écrite dans le repère spatial (c'est-à-dire en utilisant la représentation invariante à droite). Pour la retrouver, il suffit de réécrire (IV.11) en utilisant la propriété suivante (voir Holm [55] Prop. 4.2.5)

$$\dot{\Pi} = \frac{d}{dt} [\text{Ad}_{g^{-1}}^* \pi] = \text{Ad}_{g^{-1}}^* [\dot{\pi} - \text{ad}_{\chi}^* \pi], \quad \Sigma = \frac{d}{ds} [\text{Ad}_{g^{-1}}^* \sigma] = \text{Ad}_{g^{-1}}^* [\sigma' - \text{ad}_{\epsilon}^* \sigma].$$

D'autre part, il est trivial de vérifier que la densité lagrangienne est invariante par toute transformation du type  $(t, s) \mapsto (t + \alpha_t, s + \alpha_s)$ , ce qui a pour conséquence la vérification de lois d'évolutions locales, écrites comme les deux équations scalaires

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \chi} \cdot \chi - \ell \right) = - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \epsilon} \cdot \chi \right) \quad (\text{IV.12})$$

$$\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \epsilon} \cdot \epsilon - \ell \right) = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \ell}{\partial \chi} \cdot \epsilon \right) \quad (\text{IV.13})$$

On reconnaît dans la première ligne l'équation d'évolution de la densité d'énergie du système  $\mathcal{E}$  qui a pour expression

$$\mathcal{E} = \frac{\partial \ell}{\partial \chi} \cdot \chi - \ell = \frac{1}{2} \langle \pi, \chi \rangle + \frac{1}{2} \langle \sigma, \bar{\epsilon} \rangle.$$

La seconde correspond à la loi d'évolution d'une quantité sans interprétation physique qui nous soit connue, et que nous nommerons par analogie "énergie spatiale". Comme montré dans le cas général de la théorie lagrangienne des champs au § III.1.2 ces équations sont exactement les équations d'évolution obtenues avec les équations d'Euler-Poincaré par application du principe de moindre action.

#### IV.1.4.2 Lois d'évolution globales

Le résultat obtenu par application du théorème de Noether local admet également une formulation globale. Celle-ci permet d'établir la loi d'évolution des moments.

En intégrant l'équation (IV.11) sur le domaine spatial  $[0, L]$ , on obtient l'expression de la variation du moment total de la poutre  $\mathcal{J}$  en fonction des contraintes aux extrémités  $s = 0$  et  $s = L$

$$\mathcal{J} \equiv \frac{d}{dt} \int_0^L \Pi ds = [\Sigma]_0^L \quad (\text{IV.14})$$



En particulier, le moment total est constant pour des conditions du premier ordre homogène aux extrémités. Cela correspond au fait la quantité de mouvement et le moment cinétique d'une poutre libre sont conservés au cours du temps.

De même, en intégrant l'équation (IV.12) selon la variable d'espace, on obtient l'équation d'évolution de l'énergie totale du système  $E$ , qui s'écrit

$$\frac{dE}{dt} = - [\langle \sigma, \chi \rangle]_0^L$$

où  $E$  est définie par  $E = \int_0^L \mathcal{E} ds$ . En particulier, pour des conditions du premier ordre homogène aux extrémités, le terme de droite de l'équation précédente s'annule, traduisant la conservation de l'énergie totale du système au cours du temps.

## IV.2 Formulation covariante discrète

Dans cette section, on écrit la formulation covariante de la poutre de Reissner, prenant en compte la structure de groupe de Lie de l'espace de configuration. Cela permet d'établir un cadre pour la définition d'une méthode numérique variationnelle.

### IV.2.1 Définitions

Pour le modèle discret, les variables spatio-temporelles sont échantillonnées sur un maillage uniforme :  $I$  dates  $t_i$  sont espacées d'un intervalle constant  $h \in \mathbb{R}$ , et  $J$  abscisses  $s_j$  d'un intervalle  $l \in \mathbb{R}$ . Soit l'ensemble  $\mathbf{U} = \{0, \dots, I\} \times \{0, \dots, J\}$  des indices, à chaque paire d'indices  $(i, j) \in \mathbf{U}$  correspond les coordonnées de temps et espace  $(t_i, s_j)$  et la position  $g_i^j \in G$ .

Définir un intégrateur covariant avec groupe de Lie selon le type d'approche proposée au chapitre 2 nécessite le choix d'un difféomorphisme local entre le groupe  $\text{SE}(3)$  et son algèbre  $\mathfrak{se}(3)$ . Tout comme Demoures *et al.* [29], [31] et Kobilarov [72], notre choix se porte vers la fonction Cayley, numériquement rapide à calculer. Déjà introduite au chapitre 2 pour le groupe  $\text{SO}(3)$ , cette fonction peut être étendue pour le groupe  $\text{SE}(3)$  par le difféomorphisme local  $\text{cay} : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \text{SE}(3)$  (cf. Selig [123]). On a alors, pour tout  $\xi = (\omega, \gamma) \in \mathfrak{se}(3)$ ,

$$\text{cay}(\omega, \gamma) = \left( \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \left( \text{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right), \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \gamma \right).$$

On approche à l'aide de cette fonction les dérivées covariantes  $\chi$  et  $\epsilon$  en  $t_i, s_j$  par  $\chi_i^j, \epsilon_i^j \in \mathfrak{se}(3)$  de telle sorte que

$$g_{i+1}^j = g_i^j \text{cay}(h\chi_i^j), \quad g_i^{j+1} = g_i^j \text{cay}(l\epsilon_i^j) \quad (\text{IV.15})$$

ou, de manière équivalente,

$$\chi_i^j = \frac{1}{h} \text{cay}^{-1} \left( (g_i^j)^{-1} g_{i+1}^j \right), \quad \epsilon_i^j = \frac{1}{l} \text{cay}^{-1} \left( (g_i^j)^{-1} g_i^{j+1} \right). \quad (\text{IV.16})$$

On peut interpréter cette approximation comme la version avec groupe de Lie d'un accroissement fini du type  $u_{i+1} = u_i + hv_i$ .

### IV.2.2 Équations d'Euler-Poincaré discrètes

Maintenant que le cadre de l'approximation des trajectoires a été posé, un lagrangien discret est défini comme la quadrature de l'intégrale d'action sur une maille. L'application d'un principe variationnel permet alors l'obtention des équations d'Euler-Poincaré discrètes.

#### IV.2.2.1 Choix du lagrangien discret

Afin d'établir les équations de la dynamique discrète du système, la donnée d'un lagrangien discret  $\ell_d$  réalisant l'approximation

$$\ell_d \approx \iint_{\square_i^j} \ell(\chi, \epsilon) ds dt$$

est nécessaire. Nous choisissons de définir le lagrangien discret sur la maille  $\square_i^j$  de dimensions  $h, l$  à partir des valeurs de  $\chi_i^j, \chi_i^{j+1}, \epsilon_i^j, \epsilon_{i+1}^j$  en moyennant les énergies cinétiques et potentielles

$$\ell_d \left( \square_i^j, \chi_i^j, \chi_i^{j+1}, \epsilon_i^j, \epsilon_{i+1}^j \right) = hl \left[ \frac{1}{2} \left[ K(\chi_i^j) + K(\chi_i^{j+1}) \right] - \frac{1}{2} \left[ U(\epsilon_i^j) + U(\epsilon_{i+1}^j) \right] \right]$$

Dans la suite, on utilisera la notation simplifiée  $\ell_i^j = \ell_d \left( \square_i^j, \chi_i^j, \chi_i^{j+1}, \epsilon_i^j, \epsilon_{i+1}^j \right)$ .

#### IV.2.2.2 Calcul variationnel

L'action discrète du système s'écrit comme la somme de l'évaluation du lagrangien discret  $\ell_d$  sur l'ensemble des mailles, soit

$$\mathcal{A}_d = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \ell_i^j$$

Le calcul des variations de  $\delta \mathcal{A}_d$  se calcule directement comme

$$\delta \mathcal{A}_d = \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^j}, \delta \chi_i^j \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^{j+1}}, \delta \chi_i^{j+1} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \epsilon_i^j}, \delta \epsilon_i^j \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \epsilon_{i+1}^j}, \delta \epsilon_{i+1}^j \right\rangle. \quad (\text{IV.17})$$

On rappelle que, afin d'obtenir l'expression de la variation dans le cas continu, il a été nécessaire d'écrire les variations  $\delta \chi, \delta \epsilon$  en fonction des  $\zeta$  (voir § IV.1.2.2). De façon analogue pour le calcul discret, les expressions de  $\delta \chi_i^j, \delta \epsilon_i^j$  doivent être données en fonction des variations arbitraires trivialisées  $\zeta_i^j = (g_i^j)^{-1} \delta g_i^j \in \mathfrak{se}(3)^*$ . Un calcul similaire ayant déjà été établi au chapitre 2, on renvoie au § II.2.2 pour les détails de la preuve. Les variations s'écrivent alors

$$\delta \chi_i^j = \frac{1}{h} \text{d}^{\text{R}} \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} \left( -\zeta_i^j + \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_i^j)} \zeta_{i+1}^j \right), \quad (\text{IV.18})$$

$$\delta \epsilon_i^j = \frac{1}{l} \text{d}^{\text{R}} \text{cay}_{l\epsilon_i^j}^{-1} \left( -\zeta_i^j + \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^j)} \zeta_i^{j+1} \right) \quad (\text{IV.19})$$

où les équations (IV.18) et (IV.19) sont les équivalents discrets des expressions (IV.5). On rappelle que la différentielle trivialisée à droite  $d^R \text{cay}_\xi^{-1} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  est définie comme la composition de deux applications tangentes, s'écrivant pour  $\xi, \nu \in \mathfrak{g}$ ,  $g = \text{cay}(\xi)$

$$d^R \text{cay}_\xi^{-1}(\nu) = T_g \text{cay}^{-1} \circ TR_g(\nu).$$

Les expressions des variations  $\delta\chi_i^j$ ,  $\delta\epsilon_i^j$  permettent d'établir l'expression de la variation d'action  $\delta\mathcal{A}_d$ . Pour cela, on écrit tout d'abord le premier produit scalaire de la somme (IV.17) à l'aide de l'expression (IV.18)

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^j}, \delta \chi_i^j \right\rangle &= \frac{1}{h} \left\langle \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^j}, d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_i^j)} \zeta_{i+1}^j - \zeta_i^j \right) \right\rangle \\ &= \frac{1}{h} \left\langle \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_i^j)}^* d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^j}, \zeta_{i+1}^j \right\rangle - \frac{1}{h} \left\langle d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \frac{\partial \ell_i^j}{\partial \chi_i^j}, \zeta_i^j \right\rangle \end{aligned}$$

Des expressions similaires sont obtenues pour les autres membres de (IV.17). La fonction  $d^R \text{cay}_\xi^{-1} * : \mathfrak{se}(3)^* \rightarrow \mathfrak{se}(3)^*$  est définie appariée à la différentielle trivialisée par le produit scalaire, c'est à dire que pour tout  $\mu \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\nu \in \mathfrak{g}$

$$\langle \mu, d^R \text{cay}_\xi^{-1} \nu \rangle = \langle d^R \text{cay}_\xi^{-1} * \mu, \nu \rangle$$

On définit les moments discrets  $\pi_i^j, \sigma_i^j \in \mathfrak{se}(3)^*$  par

$$\pi_i^j = d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \frac{\partial \ell}{\partial \chi}(\chi_i^j) = d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \mathbb{J}\chi_i^j \quad (\text{IV.20})$$

$$\sigma_i^j = -d^R \text{cay}_{l\epsilon_i^j}^{-1} * \frac{\partial \ell}{\partial \epsilon}(\epsilon_i^j) = d^R \text{cay}_{l\epsilon_i^j}^{-1} * \mathbb{C}\bar{\epsilon}_i^j \quad (\text{IV.21})$$

En pratique, par identification de  $\mathfrak{se}(3)^*$  avec  $\mathbb{R}^6$ , l'opérateur  $d^R \text{cay}_\xi^{-1} * : \mathfrak{se}(3)^* \rightarrow \mathfrak{se}(3)^*$  peut être vu comme une matrice carrée de taille 6 dont l'expression s'écrit pour  $\xi = (\omega, \gamma)$  (cf. Demoures, Gay-Balmaz, Kobilarov et Ratiu [29])

$$d^R \text{cay}_\xi^{-1} * = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} + \frac{\omega\omega^T}{4} & \frac{\hat{\gamma}}{2} \left( \mathbb{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \\ 0_{3 \times 3} & \mathbb{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \end{pmatrix}$$

De même, l'opérateur  $\text{Ad}_{\text{cay}(\xi)}^*$  s'écrit également dans ce contexte comme la matrice carrée

$$\text{Ad}_{\text{cay}(\xi)}^* = \begin{pmatrix} \left( \mathbb{I} - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \left( \mathbb{I} + \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} & -\frac{4}{4+|\omega|^2} \left( \mathbb{I} - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \hat{\gamma} \left( \mathbb{I} - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \\ 0 & \left( \mathbb{I} - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \left( \mathbb{I} + \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \end{pmatrix}$$

Pour appliquer le principe de Lagrange-d'Alembert, il reste à fournir une approximation des travaux virtuels. En s'inspirant de l'approximation choisie pour le lagrangien discret  $\ell_d$ , on définit

$$\iint_{\square_i^j} \langle F(t, s, \chi), \zeta(t, s) \rangle ds dt \approx hl \left[ \frac{1}{2} \langle F_i^j, \zeta_i^j \rangle + \frac{1}{2} \langle F_i^{j+1}, \zeta_i^{j+1} \rangle \right]$$

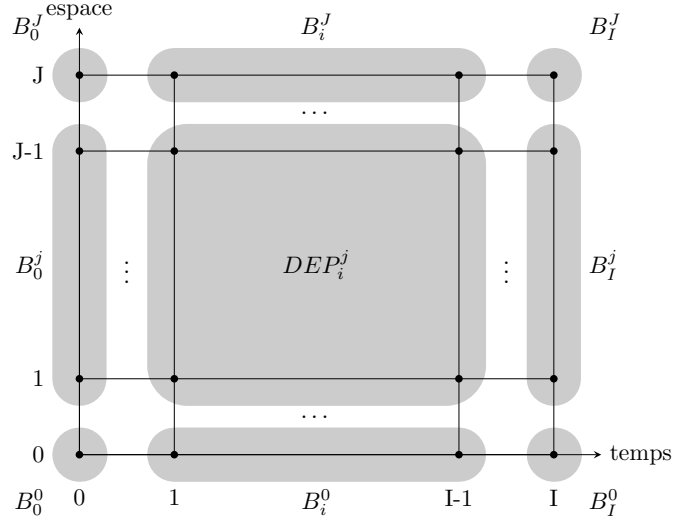


FIG. IV.3 Arrangement des termes de la variation d'action discrète (IV.22) sur le maillage spatio-temporel.

où  $F_i^j$  définit la notation raccourcie  $F_i^j = F(t_i, s_j, \chi_i^j, \epsilon_i^j)$ . En effectuant une intégration par parties discrète par réarrangement des indices de sommation de la variation d'action, on obtient finalement l'expression suivante, dans laquelle termes intérieurs et termes de bords sont distingués

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A}_d + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} hl \left[ \frac{1}{2} \langle F_i^j, \zeta_i^j \rangle + \frac{1}{2} \langle F_i^{j+1}, \zeta_i^{j+1} \rangle \right] \\ = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \langle DEP_i^j, \zeta_i^j \rangle + \sum_{i,j \in \partial \mathbf{U}} \langle B_i^j, \zeta_i^j \rangle \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

où  $\partial \mathbf{U}$  est l'ensemble des indices situés sur le bord du domaine. Le terme  $DEP_i^j$  est donné pour tout  $1 \leq i \leq I-1$ ,  $1 \leq j \leq J-1$  par

$$DEP_i^j = l \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^j)}^* \pi_{i-1}^j - \pi_i^j \right) - h \left( \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{j-1})}^* \sigma_i^{j-1} - \sigma_i^j \right) + hl F_i^j$$

et les termes de bords  $B_i^j$  sont distingués selon les valeurs des indices  $i, j$  de la manière suivante (voir figure IV.3)

$$\begin{aligned} B_i^0 &= + \left[ \frac{l}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^0)}^* \pi_{i-1}^0 - \pi_i^0 \right) + h\sigma_i^0 \right] + \frac{hl}{2} F_i^0 & \forall 1 \leq i \leq I-1 \\ B_i^J &= + \left[ \frac{l}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^J)}^* \pi_{i-1}^J - \pi_i^J \right) - h \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{J-1})}^* \sigma_i^{J-1} \right] + \frac{hl}{2} F_i^J & \forall 1 \leq i \leq I-1 \\ B_0^j &= - \left[ \frac{h}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_0^{j-1})}^* \sigma_0^{j-1} - \sigma_0^j \right) + l\pi_0^j \right] + hl F_0^j & \forall 1 \leq j \leq J-1 \\ B_I^j &= - \left[ \frac{h}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_I^{j-1})}^* \sigma_I^{j-1} - \sigma_I^j \right) - l \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{I-1}^j)}^* \pi_{I-1}^j \right] & \forall 1 \leq j \leq J-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_0^0 &= -\frac{l}{2}\pi_0^0 + \frac{h}{2}\sigma_0^0 + \frac{hl}{2}F_0^0 \\
B_I^0 &= + \left[ \frac{l}{2} \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{I-1}^0)}^* \pi_{I-1}^0 + \frac{h}{2}\sigma_I^0 \right] \\
B_0^J &= - \left[ \frac{h}{2} \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_0^{J-1})}^* \sigma_0^{J-1} + \frac{l}{2}\pi_0^J \right] + \frac{hl}{2}F_0^J \\
B_I^J &= \frac{l}{2} \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{I-1}^J)}^* \pi_{I-1}^J - \frac{h}{2} \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_I^{J-1})}^* \sigma_I^{J-1}
\end{aligned}$$

### IV.2.2.3 Principe de Lagrange-d'Alembert

Le principe de Lagrange-d'Alembert affirme que la somme (IV.22) est égale à zéro pour toute variation  $\zeta_i^j$  nulle sur la frontière  $\partial\mathbf{U}$ . Par indépendance de  $\zeta_i^j$ , on obtient alors les équations d'Euler-Poincaré forcées pour  $0 < i < I$ ,  $0 < j < J$

$$l \left( \pi_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^j)}^* \pi_{i-1}^j \right) - h \left( \sigma_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{j-1})}^* \sigma_i^{j-1} \right) = hlF_i^j.$$

On remarque que cette discrétisation covariante conserve la symétrie présente dans les équations d'Euler-Poincaré continues (IV.7). Nous soulignons que cette observation n'est pas nécessairement vraie pour d'autres choix de discrétisations covariantes : approcher les trajectoires et l'intégrale d'action par d'autres interpolations et quadratures résulte en d'autres équations d'Euler-Poincaré discrètes et, nécessairement, d'autres méthodes numériques.

### IV.2.3 Traitement des conditions limites

Nous proposons ici de discrétiser le problème aux valeurs initiales (IV.8) à l'aide d'un principe variationnel étendu. Soient  $\partial\mathbf{B}_0$ ,  $\partial\mathbf{B}_1$  les ensembles d'indices spatiaux discrétisant les domaines  $\partial\mathcal{B}_0$  et  $\partial\mathcal{B}_1$  respectivement. Les conditions de Dirichlet (IV.8a) et (IV.8c) sont discrétisées par échantillonnage sur le maillage. À l'inverse, les conditions du premier ordre sont obtenues à partir d'un principe variationnel étendu : les trajectoires  $g_i^j$  prescrites par les conditions de Dirichlet sur  $\partial\mathbf{U}_0$  sont solutions de l'équation

$$\delta\mathcal{A}_d + \sum_{i=0}^{I-1} \sum_{j=0}^{J-1} hl \left[ \frac{1}{2} \langle f_i^j, \zeta_i^j \rangle + \frac{1}{2} \langle f_i^{j+1}, \zeta_i^{j+1} \rangle \right] = \sum_{i,j \in \partial\mathbf{U}_1} \langle \bar{\tau}_i^j, \zeta_i^j \rangle \quad (\text{IV.24})$$

pour les variations  $\zeta_i^j$  s'annulant sur  $\partial\mathbf{U} \setminus \partial\mathbf{U}_1$ , et où les termes  $\bar{\tau}_i^j$  sont imposés sur  $\partial\mathbf{U}_1$ . En utilisant l'expression (IV.22), l'équation (IV.24) donne

$$\sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \langle DEP_i^j, \zeta_i^j \rangle + \sum_{(i,j) \in \partial\mathbf{U}_1} \langle B_i^j, \zeta_i^j \rangle + \sum_{(i,j) \in \partial\mathbf{U} \setminus \partial\mathbf{U}_1} \langle B_i^j, \zeta_i^j \rangle = \sum_{(i,j) \in \partial\mathbf{U}_1} \langle \bar{\tau}_i^j, \zeta_i^j \rangle$$

On obtient à partir de la somme sur la frontière la condition du premier ordre

$$B_i^j = \bar{\tau}_i^j \quad \text{pour } i, j \in \partial\mathbf{U}_1 \quad (\text{IV.25})$$

Les expressions des  $B_i^j$  sont données par (IV.23) selon les différentes paires d'indices  $i, j$ . On remarque que les conditions du premier ordre discrètes ne sont pas des échantillonnages directs de leurs équivalents continus (IV.8b) et (IV.8d).

On définit les analogues discrets des conditions limites correspondant aux modèles de poutres libre (IV.9) et encastree (IV.10) en appliquant un principe variationnel étendu. Les équations limites sont alors obtenues en définissant les couples de fonctions/ensembles d'après la figure IV.4, ce qui donne pour la poutre libre

$$\begin{cases} g_0^j = \bar{u}_0^j & \text{sur } \partial\mathbf{U}_0 = \partial\mathbf{U}_\perp \\ B_0^j = \bar{\pi}_0^j, \quad B_i^0 = B_i^J = 0 & \text{sur } \partial\mathbf{U}_1 = \partial\mathbf{U}_\square \end{cases}$$

et pour la poutre encastree

$$\begin{cases} g_0^j = \bar{u}_0^j, \quad g_i^0 = \bar{v}_i^0, \quad g_i^J = \bar{v}_i^J & \text{sur } \partial\mathbf{U}_0 = \partial\mathbf{U}_\square \\ B_0^j = \bar{\pi}_0^j & \text{sur } \partial\mathbf{U}_1 = \partial\mathbf{U}_\perp \end{cases} \quad (\text{IV.26})$$

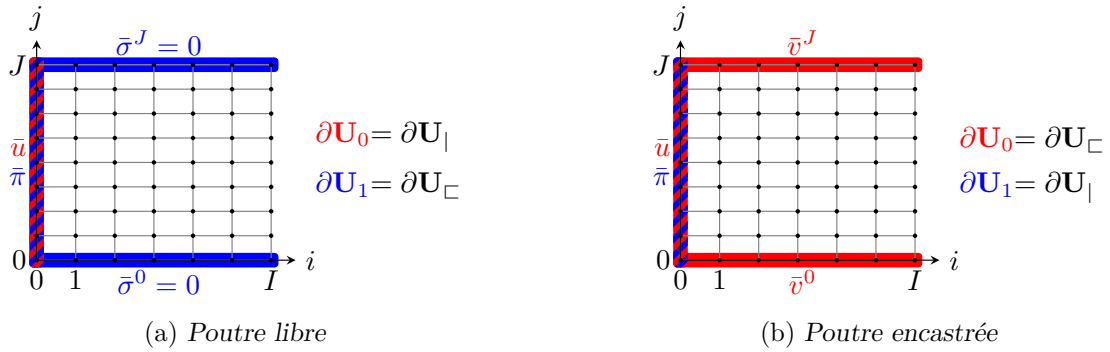


FIG. IV.4 Conditions limites discrètes pour les modèles de poutres libre (gauche) et encastree (droite). Les conditions d'ordre zéro sont indiquées en rouge, et d'ordre un en bleu.

#### IV.2.4 Résultats de conservation

Nous avons au § IV.1.2.1 que le lagrangien continu  $\ell$  est par définition invariant par l'action du groupe  $\text{SE}(3)$ , ce qui a pour conséquence l'existence d'une loi de conservation par application du théorème de Noether. Cette propriété est également vérifiée pour le lagrangien discret  $\ell_d$ . En effet, soit  $\tilde{g} \in \text{SE}(3)$ , alors on vérifie d'une part

$$K(\tilde{g}\chi_i^j) = \langle \tilde{g}\chi_i^j, \mathbb{J}\tilde{g}\chi_i^j \rangle = \langle \chi_i^j, \mathbb{J}\chi_i^j \rangle = K(\chi_i^j)$$

et, par un calcul similaire,  $U(\tilde{g}\epsilon_i^j) = U(\epsilon_i^j)$ . Cela permet de conclure

$$\begin{aligned} \ell_d(\square_i^j, \tilde{g}\chi_i^j, \tilde{g}\chi_i^{j+1}, \tilde{g}\epsilon_i^j, \tilde{g}\epsilon_{i+1}^j) &= hl \left[ \frac{1}{2} [K(\tilde{g}\chi_i^j) + K(\tilde{g}\chi_i^{j+1})] - \frac{1}{2} [U(\tilde{g}\epsilon_i^j) + U(\tilde{g}\epsilon_{i+1}^j)] \right] \\ &= hl \left[ \frac{1}{2} [K(\chi_i^j) + K(\chi_i^{j+1})] - \frac{1}{2} [U(\epsilon_i^j) + U(\epsilon_{i+1}^j)] \right] \\ &= \ell_d(\square_i^j, \chi_i^j, \chi_i^{j+1}, \epsilon_i^j, \epsilon_{i+1}^j) \end{aligned}$$

Le théorème de Noether s'applique donc également dans sa version discrète. Sa formulation locale s'établit alors pour tout  $0 < i < I$ ,  $0 < j < J$  par

$$(J^1 + J^2 + J^3 + J^4)(\square_i^j) = 0 \quad (\text{IV.27})$$

où les  $J, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  sont les fonctions moments discrètes définies par

$$\begin{aligned} J^1(\square_i^j) &= \text{Ad}_{(g_i^j)^{-1}}^* \left[ -\frac{l}{2} \pi_i^j + \frac{h}{2} \sigma_i^j \right] \\ J^2(\square_i^j) &= \text{Ad}_{(g_{i+1}^j)^{-1}}^* \left[ \frac{l}{2} \text{Ad}_{\tau(h\chi_i^j)}^* \pi_i^j + \frac{h}{2} \sigma_{i+1}^j \right] \\ J^3(\square_i^j) &= \text{Ad}_{(g_i^{j+1})^{-1}}^* \left[ -\frac{l}{2} \pi_i^{j+1} - \frac{h}{2} \text{Ad}_{\tau(l\epsilon_i^j)}^* \sigma_i^j \right] \\ J^4(\square_i^j) &= \text{Ad}_{(g_{i+1}^{j+1})^{-1}}^* \left[ \frac{l}{2} \text{Ad}_{\tau(h\chi_i^{j+1})}^* \pi_i^{j+1} - \frac{h}{2} \text{Ad}_{\tau(l\epsilon_{i+1}^j)}^* \sigma_{i+1}^j \right] \end{aligned}$$

L'équation (IV.27) est la version discrète de la loi de conservation locale (IV.11).

Le théorème admet également une formulation globale, obtenue en intégrant l'équation locale (IV.27) sur un domaine arbitraire. En particulier, en définissant  $\mathcal{J}_i$  le moment défini à l'indice  $i$  sur l'ensemble du domaine spatial de la poutre

$$\mathcal{J}_i = \sum_{j=0}^{J-1} J^2(\square_i^j) + J^4(\square_i^j) = \sum_{j=0}^{J-1} -J^1(\square_i^j) - J^3(\square_i^j),$$

et en supposant que les conditions du premier ordre homogènes en espace (IV.26) sont vérifiées, on énonce l'équivalent discret de la loi de conservation (IV.14) du moment  $\mathcal{J}$  par

$$\mathcal{J}_i = \mathcal{J}_0, \quad \forall 0 \leq i \leq I \quad (\text{IV.28})$$

Les lois d'évolution de la densité d'énergie (IV.12) et de la densité d'énergie "spatiale" (IV.13) ne sont pas vérifiées dans le contexte discret. En effet, on rappelle que l'existence de ces équations nécessite la possibilité de faire varier les dates et abscisses  $t_i, s_j$  du maillage; or, celui-ci a été fixé par hypothèse au § IV.2.1. On s'attend toutefois, au vu des résultats présentés au chapitre 3 sur l'exemple de l'équation des ondes, à ce que les lois d'évolution soient approximativement vérifiées par les solutions numériques. Par ailleurs, à l'aide d'une preuve similaire à celle proposée au § III.3.1, on montre que dans le cas où des conditions aux bords du premier ordre homogènes sont vérifiées, le système est symplectique en temps et conserve donc approximativement l'énergie totale [31].

On valide expérimentalement ces lois de conservation discrètes à partir d'une simulation numérique implémentant la méthode covariante pour le système de poutre libre isolé des forces extérieures. Les conditions initiales utilisées pour la simulation sont les suivantes

$$g_0^{j+1} = g_0^j \tau(l\epsilon_0^j) \quad \forall 0 \leq j < J$$

où  $g_0^0 = e_G = (I_3, (0, 0, 0))$  et la courbure initiale constante  $\epsilon_0^j$  est donnée pour tout  $0 \leq j < J$  par

$$\epsilon_0^j = \begin{pmatrix} 0.01 & -0.03 & 0.02 & 1.0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La condition du premier ordre (IV.25) est imposée de sorte à avoir  $\chi_0^j = (0.1, 0.2, 0, 0, 1, 0)^T$  pour tout  $0 \leq j \leq J$ . Une condition de contrainte nulle (IV.26) est implémentée pour le traitement des frontières spatiales, et aucune force n'est prise en compte. Les paramètres physiques utilisés pour la simulation sont donnés en table IV.1 ; les valeurs correspondent à celle d'une fine barre d'acier [3], [54]. Les résultats de simulation montrent que l'énergie est comme attendu approximativement préservée (figure IV.5). De même, des évaluations numériques sur différentes mailles de la loi de conservation locale (IV.27) est vérifiée à erreur machine près. La version globale (IV.28) traduisant la conservation des six composantes du moment  $\mathcal{J}_i$  au cours du temps (les trois composantes du moment cinétique, et les trois composantes de la quantité de mouvement) est également vérifiée, comme le montre la figure IV.6. Ces résultats sont en accords avec ceux obtenus par Demoures *et al.* [29], [31].

Paramètre	$\rho$	$E$	$G$	$a$	$L$
Valeur	$7800 \text{ kg m}^{-3}$	$2 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$7.9 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$	$1.8 \text{ m}$

TABLE IV.1 – Paramètres physiques pour une fine tige d'acier.

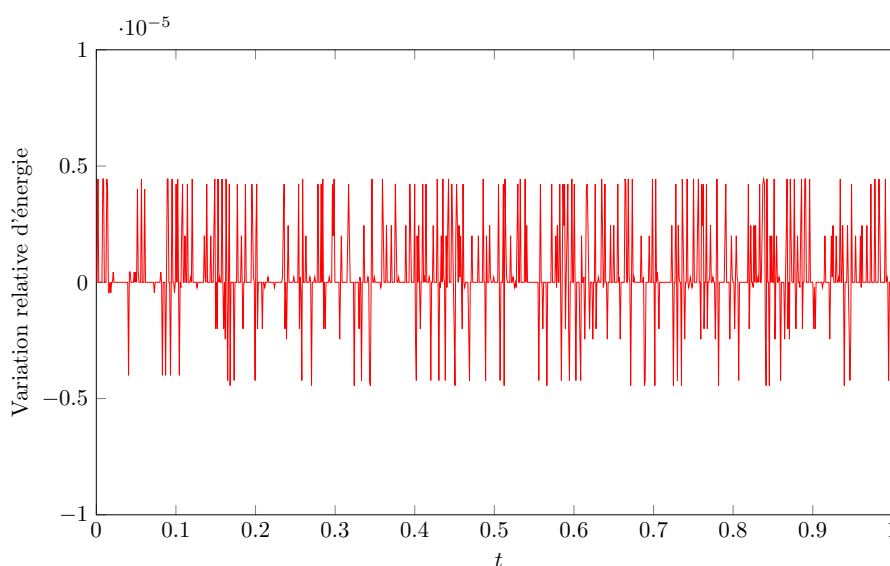


FIG. IV.5 L'énergie totale du système de poutre libre est approximativement conservée par la solution numérique.

On propose maintenant de définir un modèle de corde à partir de la poutre géométriquement exacte, et d'en proposer une discrétisation par méthode covariante.

### IV.3 Modèle de corde

Dans les paragraphes précédents, le modèle de poutre covariant a été rappelé, et une discrétisation par méthode covariante proposée, dans lesquels le traitement des conditions limites a été fait à partir d'un principe variationnel. À partir de ces résultats, nous proposons dans le présent paragraphe de définir un modèle de corde raide amortie non linéaire



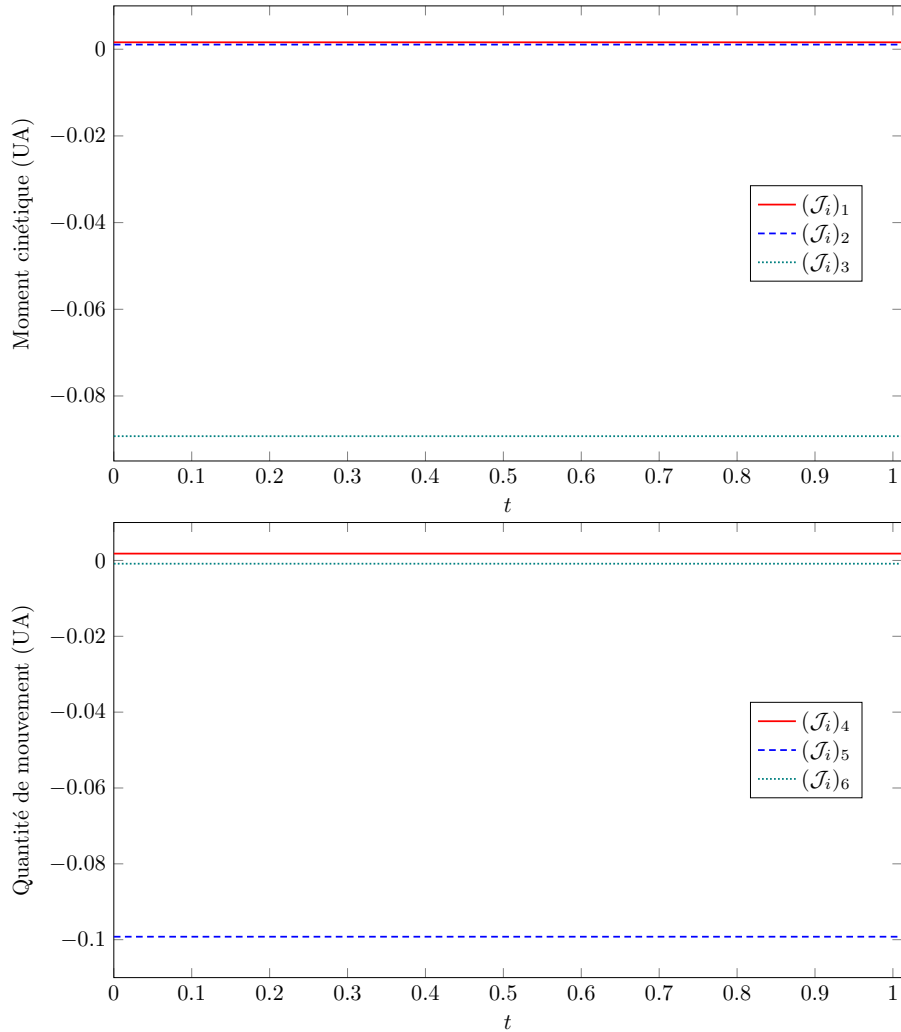


FIG. IV.6 La solution numérique vérifie la conservation du moment cinétique (haut) et de la quantité de mouvement (bas) de l'ensemble de la poutre dans les trois directions d'espace à erreur machine près.

sous tension à des fins de synthèse sonore. Le modèle général est défini au § IV.3.1. Sa linéarisation est ensuite dérivée au § IV.3.2, et le spectre de ses solutions analytiques explicité.

### IV.3.1 Modèle général

Nous proposons ici un modèle de corde à partir du modèle de poutre géométriquement exact vu au § IV.1. La définition passe par la prise de compte d'une précontrainte à l'équilibre, de forces d'excitation et d'amortissement et du traitement différencié des conditions limites selon les différents degrés de liberté.

### IV.3.1.1 Analyse statique de la corde sous tension

Définir un modèle de corde à partir de la poutre géométriquement exacte nécessite l'ajout d'une tension  $T_0$  au repos. Pour cela, la manière la plus simple est d'imposer des conditions de Dirichlet sur les composantes de translation des extrémités de la poutre de façon à induire une élongation. Afin d'établir la relation entre tension et élongation, on propose l'analyse statique suivante.

Soit une corde, fixée à l'extrémité  $s = 0$ , et sur laquelle s'exerce en  $s = L$  une force de magnitude  $T_0$  dans l'axe de la corde  $F_{T_0} = (0, 0, 0, T_0, 0, 0)$ . Un calcul rapide nous permet de vérifier que  $g_{T_0}$ , défini pour tout  $s$  par

$$g_{T_0}(s) = (I_3, (1 + \alpha)sE_1) \quad (\text{IV.29})$$

où  $\alpha = T_0/EA$ , est solution statique des équations d'Euler-Poincaré (IV.7). On en déduit que l'élongation de la corde est linéairement proportionnelle à la tension, et que la longueur résultante  $L_{T_0}$  vaut

$$L_{T_0} = (1 + \alpha)L = \left(1 + \frac{T_0}{EA}\right)L$$

Dans la suite, on préférera modéliser la précontrainte de la corde en imposant des conditions limites de Dirichlet telles que  $g(s = 0) = (I_3, 0_3)$  et  $g(s = L) = (I_3, L_{T_0}E_1)$ , pour lesquelles la solution statique est également  $g_{T_0}$ .

### IV.3.1.2 Amortissements

La corde subit des pertes dues à différents effets dissipatifs, les principaux étant dûs aux phénomènes thermoélastiques et viscoélastiques. Les pertes thermoélastiques sont prépondérantes, et sont responsables d'un amortissement qui dépend de la fréquence de vibration, caractéristique des sons musicaux produit à partir de l'excitation d'une corde. Elles sont généralement prises en compte dans les équations aux dérivées partielles par un terme proportionnel à la dérivée du troisième ordre  $\partial^3 q / \partial t \partial x^2$  (voir par exemple Bensa *et al.* [6]). Cette force d'amortissement a été prise en compte pour le modèle de corde raide du § III.3.2 et son approximation numérique par méthode covariante de Galerkin. Toutefois, au vu de la discrétisation définie au § IV.2 pour le modèle de poutre, plus élémentaire, il semble difficile d'approcher la dérivée d'ordre 3; aussi choisissons nous de négliger ce terme. Il n'y a cependant pas d'impossibilité fondamentale à prendre en compte cet visqueux dans un modèle covariant numérique plus élaboré.

La prise en compte des pertes est décrite à l'aide de la force d'amortissement trivialisée  $F_d$  définie pour tout  $\dot{g}$  par

$$F_d(\chi) = \mathbb{D}\chi$$

où  $\mathbb{D}$  est la matrice diagonale

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} \mathbb{D}_1 & 0 \\ 0 & \mathbb{D}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbb{D}_1 = 2 \operatorname{diag}(\rho I_\rho D_\rho, \rho I_a D_a, \rho I_a D_a), \quad \mathbb{D}_2 = 2 \operatorname{diag}(\rho A d_\rho, \rho A d_a, \rho A d_a).$$

Les coefficients  $d_\rho$  et  $d_a$  représentent les amortissements de translations longitudinale et transverses respectivement, et les coefficients  $D_\rho$  et  $D_a$  les amortissements de rotations polaire et axiales; tous s'expriment en  $s^{-1}$ .

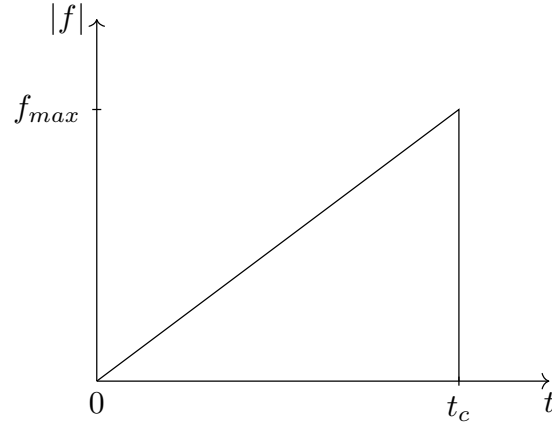


FIG. IV.7 Magnitude de la force d'excitation  $f_c$  modélisant une interaction de type pincement.

#### IV.3.1.3 Force d'excitation

On écarte le système de sa position d'équilibre à l'aide d'une force d'excitation. Suivant Giordano et Winans [46], afin de simuler une interaction simplifiée de type pincement en un point localisé d'abscisse curviligne  $s_c$  durant un intervalle de temps  $[0, t_c]$ , on définit la force  $f_c : \mathcal{T} \times \mathcal{B} \rightarrow T^*\text{SE}(3)$  comme une rampe d'amplitude maximale  $f_{max}$  (voir figure IV.7)

$$f_c(t, s) = \delta_{s_c}(s) 1_{[0, t_c]}(t) \frac{t}{t_c} f_{max} \bar{v}.$$

Ici, le vecteur unité  $\bar{v} \in T^*\text{SE}(3)$  définit la direction dans laquelle la corde est tirée. Par exemple, pour  $\bar{v} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T$ , la corde est excitée dans la direction transverse  $e_2$ , et choisir  $\bar{v} = (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T$  imprime à la corde un mouvement de rotation autour de son axe.

La force  $F_c$  trivialisée à gauche, obtenue par prémultiplication de  $f_c$  par  $g^{-1}$ , a pour expression

$$F_c(t, s) = \delta_{s_c}(s) 1_{[0, t_c]}(t) \frac{t}{t_c} f_{max} g^{-1} \bar{v}.$$

On remarque que la direction  $g^{-1} \bar{v}$  dans laquelle la corde est excitée dépend de l'orientation de la section de corde concernée. Ceci est attendu, puisque la force  $F_c$  est exprimée dans le repère mobile (ou matériel). La magnitude est en revanche inchangée par la transformation.

#### IV.3.1.4 Conditions limites

À l'instant initial  $t = 0$ , la corde est dans sa position d'équilibre  $g_{T_0}$  précontrainte par une tension  $T_0$ , et on suppose que son moment initial est nul :

$$\begin{aligned} g(t = 0, s) &= (\mathbf{I}_3, (1 + \alpha)sE_1) \\ \pi(t = 0, s) &= 0_6 \end{aligned}$$

À partir de la formulation de conditions limites de types Dirichlet et Neumann, permise par la description variationnelle covariante définie au chapitre 3, on définit le traitement des extrémités de la corde. On fait sur les deux bords les hypothèses suivantes, qui modélisent les conditions simplifiées d'une corde attachée à l'agrafe :

- (i) La position  $r$  est fixe, et correspond à celle de la corde sous tension à l'équilibre. Cela se traduit en équation par

$$r(t, 0) = 0_3, \quad r(t, L) = L_{T_0} E_1 \quad \forall t \in \mathcal{T}.$$

- (ii) Les flexions, c'est-à-dire les rotations selon les axes  $E_2$  et  $E_3$ , sont libres. La contrainte est donc nulle aux extrémités pour ces composantes

$$\sigma_i(t, 0) = 0, \quad \sigma_i(t, L) = 0, \quad \forall t \in \mathcal{T}, i \in \{2, 3\} \quad (\text{IV.30})$$

- (iii) On considère que la corde ne roule pas sur l'agrafe. Cela impose que la composante en torsion, c'est-à-dire la rotation selon l'axe de la corde  $E_1$ , soit constante. Une des façons possibles d'exprimer cette condition en équation est de paramétrer la matrice de rotation  $R$  grâce à la fonction exponentielle par un vecteur  $\theta \in \mathfrak{so}(3)$ , et d'écrire

$$R(t, 0) = \exp(\hat{\theta}), \quad R(t, L) = \exp(\hat{\theta}), \quad \forall t \in \mathcal{T}$$

où  $\theta = (0, \theta_2, \theta_3)$ . Les composantes  $\theta_2, \theta_3$  sont déterminées à partir de la condition (IV.30).

Les conditions aux bords sont donc différenciées selon les degrés de liberté (voir tableau IV.2) : les hypothèses (i) et (iii) imposent des conditions d'ordre zéro pour les degrés 4,5,6 et 1 respectivement, et l'hypothèse (ii) une condition du premier ordre homogène pour les degrés 2,3.

DOF	$\bar{u}$	$\bar{\pi}$	$\bar{v}_0$	$\bar{v}_L$	$\bar{\sigma}_0$	$\bar{\sigma}_L$
1	0	0	0	0	/	/
2,3	$0_2$	$0_2$	/	/	$0_2$	$0_2$
4,5,6	$\frac{s}{L} L_{T_0} E_1$	$0_3$	$0_3$	$L_{T_0} E_1$	/	/

TABLE IV.2 – Les conditions limites sont différenciées selon les différents degrés de liberté de l'espace de configuration.

#### IV.3.1.5 Modèle complet

La description complète de la corde est obtenu par application du principe de Lagrange-d'Alembert pour les forces et conditions limites définies précédemment. Les équations obtenues définissent alors le modèle de corde suivant

$$\text{E.-P. forcées} \quad \dot{\pi} - \text{ad}_\chi^* \pi - \sigma' + \text{ad}_c^* \sigma = \mathbb{D}\chi + F_c \quad (\text{IV.31a})$$

$$t = 0 \begin{cases} g(t = 0, s) = \left( \mathbb{I}_3, \frac{s}{L} L_{T_0} E_1 \right) \\ \pi(t = 0, s) = 0_6 \end{cases}$$

$$s = 0 \begin{cases} g(t, s = 0) = (\exp(\widehat{\theta}(t, 0)), 0_3) & \text{où } \theta_1 = 0 \\ \mathbb{P}\sigma(t, s = 0) = 0_2 \end{cases} \quad (\text{IV.31b})$$

$$s = L \begin{cases} g(t, s = L) = (\exp(\widehat{\theta}(t, L)), L_{T_0}E_1) & \text{où } \theta_1 = 0 \\ \mathbb{P}\sigma(t, s = L) = 0_2 \end{cases} \quad (\text{IV.31c})$$

où  $\mathbb{P}$  est la matrice de projection isolant les composantes soumises à des conditions aux bords du premier ordre

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.32})$$

### IV.3.2 Modèle linéarisé

On développe dans cette section une linéarisation du modèle de corde (IV.31). L'objectif de cette entreprise est double : elle permet tout d'abord de réécrire une version simplifiée des équations de notre modèle de corde dans un langage plus familier des modèles de la littérature, en mettant momentanément de côté les objets et notations de la géométrie différentielle et des groupes de Lie ; par ailleurs, les solutions analytiques du problème complet n'étant pas disponibles, ce modèle simplifié fournit un premier aperçu du comportement de la corde, et constituera un appareil critique permettant d'évaluer la crédibilité des résultats numériques.

Pour linéariser les équations du modèle, on s'intéresse à la dynamique de la corde sous l'hypothèse de petits déplacements autour de la position d'équilibre précontraint (IV.29). On écrit alors, pour  $\varepsilon$  petit, les rotations et translations comme

$$R_\varepsilon = R_0 e^{\varepsilon \delta \psi} = e^{\varepsilon \delta \psi} = I + \varepsilon \delta \widehat{\psi}, \quad r_\varepsilon = r_0 + \varepsilon \delta r$$

où  $\delta \psi, \delta r \in \mathbb{R}^3$ . Par ailleurs, on néglige les pertes dues à l'amortissement. Les équations d'Euler-Poincaré (IV.31a) s'écrivent alors au premier ordre comme les deux système de trois équations suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_1 \delta \ddot{\psi} &= \mathbb{C}_1 \delta \psi'' + \mathbb{H}_a \delta r' + \mathbb{H}_b \delta \psi \\ \mathbb{J}_2 \delta \ddot{r} &= \mathbb{C}_2 \delta r'' + \mathbb{H}_a \delta \psi' \end{aligned}$$

dans lesquelles ont été introduites les matrices constantes  $\mathbb{H}_a = ((1 + \alpha)GA - \alpha EA) \widehat{E}_1$  et  $\mathbb{H}_b = (1 + \alpha) \mathbb{H}_a \widehat{E}_1$ , où on rappelle que  $\alpha = T_0/EA$ . Ces équations peuvent être développées en un système de six équations des inconnues  $(\varphi, \phi_y, \phi_z) = \delta \psi$  et  $(x, y, z) = \delta r$

$$\begin{cases} EAx'' = \rho A \ddot{x} & (\text{IV.33a}) \\ GI_\rho \varphi'' = \rho I_\rho \ddot{\varphi} & (\text{IV.33b}) \\ GAy'' - \beta \phi_z' = \rho A \ddot{y} & (\text{IV.33c}) \\ EI_a \phi_z'' + \beta y' - (1 + \alpha) \beta \phi_z = \rho I_a \ddot{\phi}_z & (\text{IV.33d}) \\ GAz'' + \beta \phi_y' = \rho A \ddot{z} & (\text{IV.33e}) \\ EI_a \phi_y'' - \beta z' - (1 + \alpha) \beta \phi_y = \rho I_a \ddot{\phi}_y & (\text{IV.33f}) \end{cases}$$

où  $\beta = ((1 + \alpha)GA - \alpha EA)$ . Les conditions limites (IV.31b) à (IV.31c) s'écrivent quand à elles

$$\varphi = 0, \quad \phi'_y = 0, \quad \phi'_z = 0, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad \text{pour } s = 0, s = L \quad (\text{IV.34})$$

### IV.3.2.1 Analyse fréquentielle

Le comportement du déplacement longitudinal et de la torsion, auxquels sont associées les variables  $x$  et  $\varphi$  respectivement, est décrit par les équations des ondes (IV.33a) et (IV.33b), et par des conditions de Dirichlet homogènes. Les solutions analytiques de ces composantes sont donc les fonctions harmoniques de célérités  $c_l = \sqrt{E/\rho}$  et  $c_t = \sqrt{G/\rho}$ , et leurs spectres  $\{f_n^l\}_{n \geq 1}$  et  $\{f_n^t\}_{n \geq 1}$  sont donnés par

$$f_n^{lon} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad f_n^{tor} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Le déplacement transverse dans la direction  $E_2$  (variable  $y$ ) et la rotation dans le plan orthogonal à  $E_3$  (variable  $\phi_z$ ) sont couplés dans les équations (IV.33c) et (IV.33d). Il en est de même pour le couple de variables  $z$  et  $\phi_y$ , le système (IV.33e)–(IV.33f) étant identique au précédent, au signe près de l'angle  $\phi_y$ . La résolution de ces équations par recherche de valeurs propres est établie en annexe B. Les couples de solutions des systèmes d'équations présentent des spectres inharmoniques  $\{f_n^{tr}\}_{n \geq 1}$  et  $\{f_n^{cis}\}_{n \geq 1}$  (transverse et cisaillement respectivement) donnés par

$$f_n^{tr} = \frac{\sqrt{\Omega^-(n)}}{2\pi}, \quad f_n^{cis} = \frac{\sqrt{\Omega^+(n)}}{2\pi} \quad (\text{IV.35})$$

où les réels positifs  $\Omega^-(n) < \Omega^+(n)$  sont racines du polynôme de degré 2

$$ab\Omega^2 - \Omega \left[ \frac{n^2\pi^2}{L^2}(a+b) + ac(1+\alpha) \right] + \left[ \frac{n^2\pi^2}{L^2}c(1+\alpha+d) + \frac{n^4\pi^4}{L^4} \right] = 0$$

pour les paramètres suivants

$$a = \frac{\rho}{G}, \quad b = \frac{\rho}{E}, \quad c = \frac{\beta}{EI_a}, \quad d = -\frac{\beta}{GA}, \quad \alpha = T_0/EA, \quad \beta = (1 + \alpha)GA - \alpha EA.$$

Un développement en série de Taylor du spectre du mouvement transverse pour  $n$  petit donne le comportement limite des premiers modes

$$f_n^{tr} = n f_0^{tr} \left( 1 + \eta^{tr} n^2 \right) + O(n^5) \quad (\text{IV.36})$$

où les constantes  $f_0^{tr}$  et  $\eta^{tr}$  sont données par

$$f_0^{tr} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A \left( 1 + \frac{T_0}{EA} \right)}}, \quad \eta^{tr} = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0 \left( 1 + \frac{T_0}{EA} \right)^2} \quad (\text{IV.37})$$

Les premières fréquences de ce spectre peuvent donc être décrites comme les harmoniques de la fondamentale  $f_0^{tr}$ , perturbées par le terme positif dû à  $\eta^{tr}$  qui a pour conséquence

d'augmenter progressivement les écarts fréquentiels. Lorsque le rang  $n$  tend vers l'infini, les partiels vérifient

$$f_n^{tr} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{G}{\rho}},$$

qui correspond au comportement d'un spectre harmonique de célérité  $\sqrt{G/\rho} \gg \sqrt{T_0/\rho A}$ .

La même analyse peut être effectuée pour le spectre en cisaillement  $\{f_n^{cis}\}_{n \geq 1}$ . Un développement de Taylor donne pour les premières fréquences

$$f_n^{cis} = f_0^{cis} (1 + \eta^{cis} n^2) + O(n^4)$$

avec

$$f_0^{cis} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{T_0}{EA}\right) \left(GA - T_0 \left(1 - \frac{G}{E}\right)\right)}{\rho I_a}}, \quad \eta^{cis} = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{\rho I_a}{\left(1 + \frac{T_0}{EA}\right)^2} \frac{1 - \frac{E}{G} + \frac{T_0}{EA}}{GA - T_0 \left(1 - \frac{G}{E}\right)} \quad (\text{IV.38})$$

Le comportement asymptotique est, lui, donné par

$$f_n^{cis} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Les spectres et les comportements limites du mouvement transverse et de cisaillement, ainsi que le développement limité des premiers partiels du mouvement transverse, sont représentés en figures IV.8 et IV.9 pour les valeurs des paramètres physiques donnés dans le tableau IV.1 (voir p. 127) et une tension  $T_0 = 2161$  N résultant en une longueur au repos  $L_{T_0} = 1.8$  m.

### IV.3.2.2 Comparaison avec d'autres modèles de corde

Sur la base des résultats du paragraphe précédent, une comparaison du modèle de corde géométriquement exact linéarisé avec d'autres modèles connus peut être établie. Nous nous limiterons à trois formulations classiques, à savoir les modèles de d'Alembert, Euler-Bernoulli et Timoshenko.

**IV.3.2.2.1 Équation de corde vibrante** Historiquement proposée par d'Alembert [27], l'équation de corde vibrante modélise la propagation des ondes transverses, correspondant dans notre cas à la variable  $y$  ou  $z$ . Le modèle, valable dans le cas de petits déplacements et sous l'hypothèse d'un diamètre infiniment fin, s'écrit

$$\rho A \ddot{y} - T_0 y'' = 0, \quad y(t, 0) = y(t, L) = 0 \quad (\text{IV.39})$$

Le spectre du mouvement transverse correspond alors au spectre harmonique

$$f_n = n f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}.$$

En posant les mêmes hypothèses, ce résultat peut être obtenu comme cas limite à partir du modèle de poutre géométriquement exacte, donné pour de petits déplacements autour

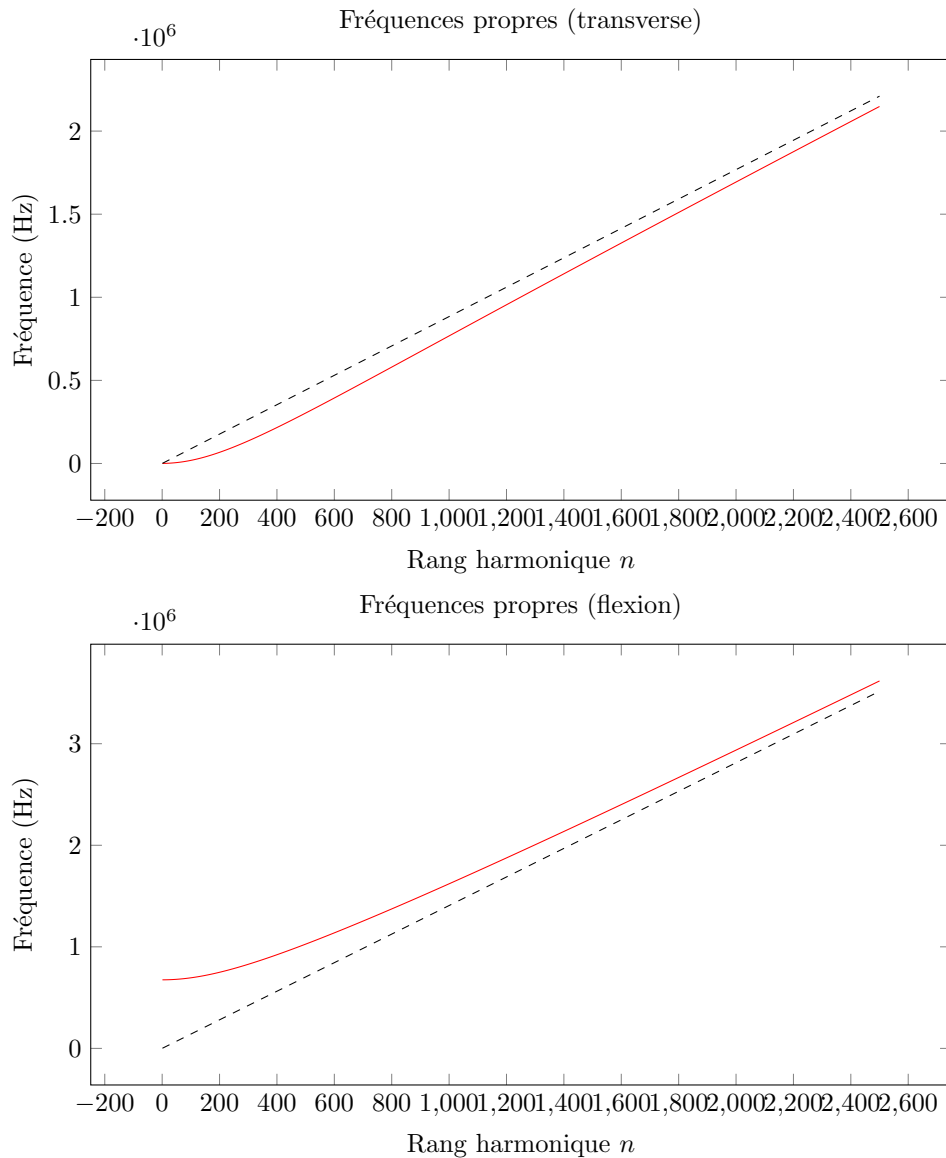


FIG. IV.8 Fréquences propres des spectres du déplacement transverse (haut) et cisaillement (bas) représentées en fonction du rang harmonique. Les droites en pointillés donnent les comportements asymptotiques.

de l'équilibre par (IV.33). Puisque en pratique, dans la lutherie instrumentale, la tension vérifie  $T_0/EA \ll 1$  (de l'ordre de  $10^{-2}$  pour les paramètres en table IV.1), l'expression de la fréquence fondamentale des vibrations transverses (IV.37) se simplifie en

$$f_0^{tr} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A \left(1 + \frac{T_0}{EA}\right)}} \approx \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}.$$

D'autre part, sous l'hypothèse que la corde est infiniment fine, le coefficient  $\eta^{tr}$ , responsable du caractère inharmonique du spectre transverse dans le développement de



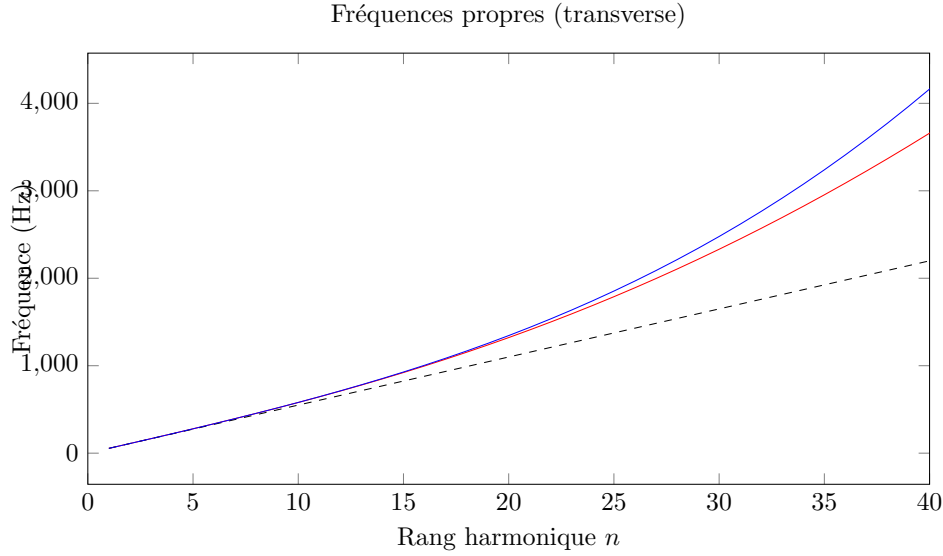


FIG. IV.9 Spectre du déplacement transverse (rouge), développement limité (bleu) et comportement limite (pointillés) pour les premiers partiels.

Taylor (IV.36), s'annule. En effet, en remplaçant le moment d'inertie axial  $I_a$  par son expression  $\pi a^4/4$  dans la définition (IV.37) de  $\eta^{tr}$ , on obtient en faisant tendre le rayon  $a$  de la corde vers zéro

$$\eta^{tr} = \frac{\pi^3}{8L^2} \frac{a^4 E}{T_0 \left(1 + \frac{T_0}{EA}\right)^2} \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$$

On retrouve donc bien les résultats attendus pour le modèle de corde vibrante de d'Alembert.

**IV.3.2.2.2 Euler-Bernouilli** Le modèle d'Euler-Bernouilli est donné par la perturbation de l'équation de corde vibrante (IV.39) en faisant intervenir une dérivée d'ordre quatre et en ajoutant une condition limite de moment nul aux deux extrémités [117]

$$\rho A \ddot{y} + EI_a y'''' - T_0 y'' = 0, \quad y(t, 0) = y(t, L) = 0, \quad y'(t, 0) = y'(t, L) = 0.$$

Les fréquences propres de ce modèle sont données par

$$f_n = n f_0 \sqrt{1 + 2\eta n^2}, \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \eta = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0}.$$

Cette expression admet un développement limité, qui s'écrit pour  $n$  suffisamment petit

$$f_n = n f_0 (1 + \eta n^2) + O(n^5).$$

On constate que le modèle géométriquement exact concorde avec le développement à l'ordre quatre du spectre du modèle d'Euler-Bernouilli, puisque  $T_0$  étant petit devant  $EA$ , on a

$$\eta^{tr} = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0 (1 + T_0/EA)^2} \approx \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0} = \eta$$

**IV.3.2.2.3 Modèle de Timoshenko** On examine en dernier lieu le modèle de Timoshenko proposé par Chabassier et Imperiale [20]. Celui-ci établit un couplage entre le déplacement transverse  $y$  et la rotation planaire  $\phi_z$  selon le système d'équation

$$\begin{cases} \rho A \ddot{y} - T_0 y'' + AG\kappa \phi'_z - AG\kappa y'' = 0 \\ \rho I_a \ddot{\phi}_z - EI_a \phi''_z + AG\kappa \phi_z - AG\kappa y' = 0 \end{cases}$$

assorti des équations aux limites

$$y(t, 0) = y(t, L) = 0, \quad \phi'_z(t, 0) = \phi'_z(t, L) = 0.$$

Ici, le coefficient de Timoshenko  $\kappa$  est un terme arbitraire introduit pour corriger la valeur du cisaillement [25], [128]. Pour la géométrie circulaire de la corde, on a  $\kappa = 0.95$  [20]. Bien que les notations diffèrent légèrement, le système d'équations est en fait très proche des équations (IV.33c) et (IV.33d). En effet, en supposant que (1)  $T_0/EA \ll 1$ , (2)  $T_0/GA \ll 1$  et (3)  $\kappa \approx 1$ , on vérifie les approximations

$$T_0 + GA\kappa \approx GA, \quad GA\kappa \approx \beta, \quad GA\kappa \approx \beta(1 + \alpha)$$

qui permettent de réécrire les équations géométriquement exactes comme le modèle de Timoshenko.

Les fréquences propres du modèle (IV.40) peuvent être obtenues analytiquement, sous une forme similaire à (IV.35) (cf. Chabassier et Imperiale [20]). En particulier, le spectre transverse admet un développement limité sous la forme

$$f_n = n f_0 (1 + \eta n^2) + O(n^5), \quad f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A}}, \quad \eta = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0} \left(1 - \frac{T_0}{EA}\right)$$

qui s'accorde avec (IV.36) à un développement de  $\eta^{tr}$  près.

Les spectres transverses analytiques — et non pas les développements limités — des modèles de d'Alembert, Euler-Bernoulli et Timoshenko sont comparés à celui du modèle géométriquement exact linéarisé pour les mille premiers harmoniques en figure IV.10. On constate que les différents modèles approchent de mieux en mieux le cas géométriquement exacte ; inversement, cette comparaison permet de vérifier que le modèle de corde géométriquement exact construit à partir de la poutre de Simo-Reissner est cohérent en petits déplacements avec les résultats de l'état de l'art.

### IV.3.2.3 Discussion

Pour les valeurs de paramètres physiques données en table IV.1 (voir p. 127), correspondant à une corde d'acier, les fondamentales des différentes composantes valent

$$f_0^{tr} = 55 \text{ Hz}, \quad f_0^{cis} = 675\,070 \text{ Hz}, \quad f_0^{tor} = 884 \text{ Hz}, \quad f_0^{lon} = 1407 \text{ Hz}.$$

Ce jeu de paramètres correspond à une corde de 1.8 m en acier ; la tension  $T_0$  a été choisie de façon à obtenir une fréquence fondamentale (transverse) de 55 Hz.

Pour ces valeurs, la fondamentale du spectre de cisaillement  $f_0^{cis}$  se situe bien au-delà de la zone sensible de l'oreille humaine. Sachant qu'en pratique  $T_0 \ll GA < EA$ , on peut établir à partir de l'expression (IV.38) que  $f_0^{cis}$  est de l'ordre grandeur de

$$f_0^{cis} \approx \frac{1}{\pi a} \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

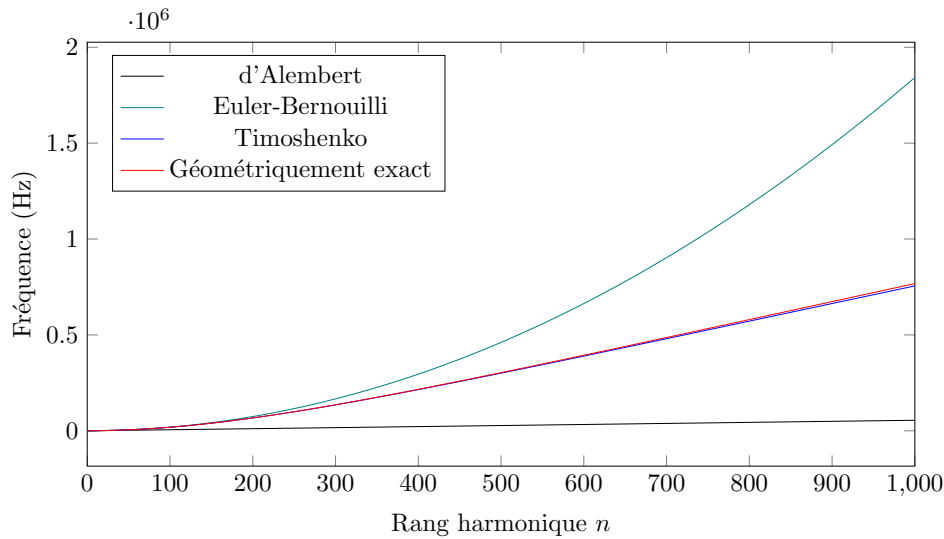


FIG. IV.10 *Comparaison des spectres transverses de différents modèles de cordes.*

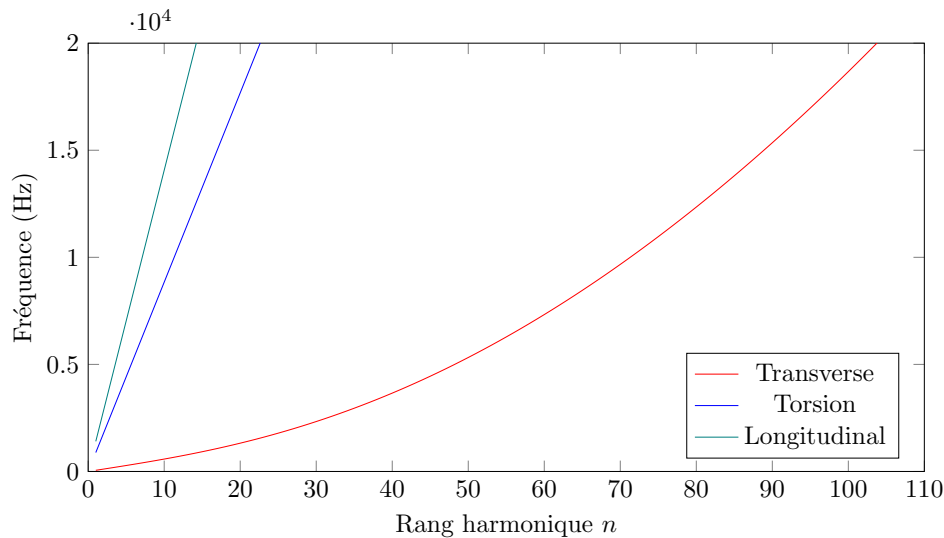


FIG. IV.11 *Spectres transverse, longitudinal et en torsion pour le modèle géométriquement exact dans le domaine audible ; le spectre en cisaillement n'est pas représenté.*

Sa valeur augmente donc en proportion inverse du diamètre de la corde. Dans le cas de cordes en acier (table IV.1), ce spectre sera donc peu susceptible d'être audible.

L'inharmonicité du spectre transverse peut se mesurer qualitativement à partir du coefficient  $\eta^{tr}$ . À partir de l'expression (IV.37), on observe que  $\eta^{tr}$  augmente proportionnellement au carré du rayon  $a^2$ , et diminue de façon inversement proportionnelle à  $L^2$  ; l'inharmonicité augmente donc quadratiquement avec le ratio  $a/L$ . Pour le piano, ce dernier est plus élevé dans les cordes aiguës que dans les cordes graves, comme on peut le

constater aux vues des valeurs données en table IV.3. Pourtant, la perception de l'inharmonicité de cet instrument est plus marquée dans les graves : ceci peut s'expliquer par le fait que les partiels des cordes aiguës sortent rapidement des fréquences audibles, tandis que ceux des cordes graves sont nombreux dans la zone sensible de l'oreille.

Hauteur	F3	C#5	G6	C7
$a/L$	$0.543 \times 10^{-3}$	$1.41 \times 10^{-3}$	$3.53 \times 10^{-3}$	$5.11 \times 10^{-3}$

TABLE IV.3 – Rapport rayon/longueur pour quatre cordes de piano (d'après [17]). Toutes les cordes sont constituées d'une âme d'acier sans filetage.

Le modèle linéarisé (IV.33) présente un certain nombre de limites. L'absence de couplage entre les modes longitudinaux et transverse rend le modèle linéaire inapte à décrire des phénomènes comme les précurseurs, observables dans la dynamique des cordes de piano par exemples. Toutefois, ce modèle simplifié a été établi à partir du modèle général (IV.31) dans le but de permettre une analyse qualitative du comportement en petits déplacements. Les couplages sont eux bien présents dans le modèle de corde géométriquement exact, dûs aux termes  $\text{ad}_\chi^* \pi$  et  $\text{ad}_\epsilon^* \sigma$  de l'équation d'Euler-Poincaré (IV.31a).

## IV.4 Intégrateur multisymplectique par groupe de Lie pour le modèle de corde

Nous donnons maintenant une formulation discrète du modèle de corde (IV.31) à partir de la méthode covariante.

### IV.4.1 Établissement du modèle

Le modèle de corde discret est défini en application la procédure de discrétisation covariante définie au § IV.2. À cette fin, on définit les forces  $F_i^j$  par échantillonnage de  $F$  en  $t_i, s_j$ . Les conditions limites de Dirichlet sont discrétisées en échantillonnant les fonctions continues sur les points du maillage ; à l'inverse, les conditions du premier ordre sont obtenues par application d'un principe variationnel étendu. Le calcul des variations donne finalement le système d'équations suivant

$$\begin{aligned} \text{E.-P.} \quad \frac{1}{h} \left( \pi_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^j)}^* \pi_{i-1}^j \right) - \frac{1}{l} \left( \sigma_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{j-1})}^* \sigma_i^{j-1} \right) \\ = \mathbb{D}\chi_i^j + F_c(t_i, s_j) \end{aligned} \quad (\text{IV.41a})$$

$$t = 0 \quad \begin{cases} g_0^j = \left( \mathbb{I}_3, \frac{s_j}{L} L_{T_0} E_1 \right) \\ B_0^j = 0_6 \end{cases} \quad (\text{IV.41b})$$

$$s = 0 \quad \begin{cases} g_i^0 = \left( \exp(\theta_i^0), 0_3 \right), \quad (\theta_i^0)_1 = 0 \\ \mathbb{P}B_i^0 = 0_2 \end{cases} \quad (\text{IV.41c})$$

$$s = L \quad \begin{cases} g_i^J = \left( \exp(\theta_i^J), L_{T_0} E_1 \right), \quad (\theta_i^J)_1 = 0 \\ \mathbb{P}B_i^J = 0_2 \end{cases} \quad (\text{IV.41d})$$

$$(\text{IV.41e})$$

où on rappelle que la matrice de projection  $\mathbb{P}$  est définie par (IV.32).

#### IV.4.2 Réécriture des conditions limites et intégration numérique

Étant donné que les différents degrés de liberté sont couplés sur les frontières spatiales par effet de la nature non linéaire du groupe  $\text{SE}(3)$ , les conditions de Dirichlet et Neumann ne peuvent pas être implémentées et résolues indépendamment ; les équations limites du modèle discret (IV.41) nécessitent donc une réécriture. De plus, à cause du terme d'amortissement, les équations d'Euler-Poincaré discrètes (IV.41a) et les conditions du premier ordre sont implicites. Pour l'ensemble de ces raisons, les équations décrivant le modèle de corde discret sont reformulées autour de la variable  $\chi_i^j$  et résolues numériquement.

Le moment  $\pi_i^j$  est remplacé dans les équations d'Euler-Poincaré discrètes (IV.41a) par son expression (IV.20). De cette manière, les équations d'Euler-Poincaré sont exprimées à partir de  $\chi_i^j$ . Un principe similaire est appliqué pour les conditions limites (IV.41b), (IV.41c) et (IV.41d), (IV.41e) : en utilisant tout d'abord la relation (IV.16), la variable  $\chi_i^0$  est exprimée sur la frontière spatiale  $j = 0$  comme

$$\chi_i^0 = \frac{1}{h} \text{cay}^{-1} \left( \exp(-\theta_i^0) \exp(\theta_{i+1}^0), 0_3 \right)$$

où  $(\theta_{i+1}^0)_1 = 0$  ; la même opération est appliquée pour  $\chi_i^J$  sur la frontière  $j = J$ . Ensuite,  $\chi_i^0$  (resp.  $\chi_i^J$ ) est remplacé par l'expression précédente dans la condition du premier ordre (IV.41c) (resp. (IV.41e)), à partir de laquelle les composantes 2 et 3 de  $\theta_{i+1}^0$  (resp.  $\theta_{i+1}^J$ ) peuvent être calculées comme solutions implicites par un solveur numérique. Le modèle complet est finalement donné par les équations suivantes

$$\frac{1}{h} \left( \text{d}^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \mathbb{J}\chi_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^j)}^* \pi_{i-1}^j \right) - \frac{1}{l} \left( \sigma_i^j - \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{j-1})}^* \sigma_i^{j-1} \right) = \mathbb{D}\chi_i^j + F_c(t_i, s_j) \quad (\text{IV.42a})$$

$$\left\{ g_0^j = \left( \text{I}_3, \frac{s_j}{L} L_{T_0} E_1 \right) \right. \quad (\text{IV.42b})$$

$$\left. B_0^j = 0_6 \right. \quad (\text{IV.42c})$$

$$\left\{ \chi_i^0 = \frac{1}{h} \text{cay}^{-1} \left( \exp(-\theta_i^0) \exp(\theta_{i+1}^0), 0_3 \right), \quad (\theta_{i+1}^0)_1 = 0 \right. \quad (\text{IV.42d})$$

$$\left. \mathbb{P} \left( \left[ \frac{l}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^0)}^* \pi_{i-1}^0 - \text{d}^R \text{cay}_{h\chi_i^0}^{-1} * \mathbb{J}\chi_i^0 \right) + h\sigma_i^0 \right] + \frac{hl}{2} \left( \mathbb{D}\chi_i^0 + F_c(t_i, 0) \right) \right) = 0_2 \right. \quad (\text{IV.42e})$$

$$\left\{ \chi_i^J = \frac{1}{h} \text{cay}^{-1} \left( \exp(-\theta_i^J) \exp(\theta_{i+1}^J), 0_3 \right), \quad (\theta_{i+1}^J)_1 = 0 \right. \quad (\text{IV.42f})$$

$$\left. \mathbb{P} \left( \left[ \frac{l}{2} \left( \text{Ad}_{\text{cay}(h\chi_{i-1}^J)}^* \pi_{i-1}^M - \text{d}^R \text{cay}_{h\chi_i^J}^{-1} * \mathbb{J}\chi_i^J \right) - h \text{Ad}_{\text{cay}(l\epsilon_i^{J-1})}^* \sigma_i^{J-1} \right] + \frac{hl}{2} \left( \mathbb{D}\chi_i^J + F_c(t_i, L) \right) \right) = 0_2 \right. \quad (\text{IV.42g})$$

équivalentes à (IV.41). L'algorithme 1 permet de calculer la solution numérique de ces équations.

---

**Algorithm 1:** Intégrateur numérique covariant pour le modèle de corde (IV.41)

---

**Entrée :**

Position initiale :  $g_0^j \leftarrow (I_3, \frac{s}{L} L_{T_0} E_1)$  (IV.42b)

Moment initial : calculer  $\pi_0^j$  solution de l'équation du premier ordre (IV.42c)

**Initialisation :**  $(g_0, \pi_0) \mapsto (g_1, \pi_0)$

**for**  $j = 0$  **to**  $J$  **do**

    Célérité : calculer  $\chi_0^j$  solution de  $\pi_0^j = d^R \text{cay}_{h\chi_0^j}^{-1} * \mathbb{J}\chi_0^j$  (IV.20)

    Position :  $g_1^j \leftarrow g_0^j \text{cay}(h\chi_0^j)$  (IV.15)

**end**

**Boucle d'intégration :**  $(g_i, \pi_{i-1}) \mapsto (g_{i+1}, \pi_i)$

**for**  $i = 1$  **to**  $I$  **do**

**for**  $j = 0$  **to**  $J$  **do**

**if**  $j < J$  **then**

            Déformation :  $\epsilon_i^j \leftarrow \frac{1}{l} \text{cay}^{-1} \left( (g_i^j)^{-1} g_i^{j+1} \right)$  (IV.16)

            Contrainte :  $\sigma_i^j \leftarrow d^R \text{cay}_{l\epsilon_i^j}^{-1} * \mathbb{C}(\epsilon_i^j - \epsilon_0)$  (IV.21)

**end**

**if**  $j = 0$  **then**

            Calculer  $\chi_i^0$  solution des conditions limites (IV.42d) et (IV.42e)

**else if**  $1 \leq j \leq J - 1$  **then**

            Calculer  $\chi_i^j$  solution des équations d'Euler-Poincaré (IV.42a)

**else**

            Calculer  $\chi_i^J$  solution des conditions limites (IV.42f) et (IV.42g)

**end**

        Moment :  $\pi_i^j \leftarrow d^R \text{cay}_{h\chi_i^j}^{-1} * \mathbb{J}\chi_i^j$  (IV.20)

        Position :  $g_{i+1}^j \leftarrow g_i^j \text{cay}(h\chi_i^j)$  (IV.15)

**end**

**end**

---

### IV.4.3 Résultats numériques

Les solutions numériques du modèle de corde non linéaire calculées à partir de l'intégrateur implémenté par l'algorithme 1 sont maintenant présentées. Les paramètres physiques donnés en table IV.4 sont utilisés pour toutes les simulations. Deux cas sont examinés : au § IV.4.3.1, les solutions numériques simulant le comportement d'une corde soumise à une petite force d'excitation sont comparées aux résultats analytiques émanant du modèle linéarisé étudié au § IV.3.2. Puis au § IV.4.3.2, la simulation d'une corde soumise à de grandes déformations est discutée.

Paramètre	$\rho$	$E$	$G$	$a$	$T_0$	$L_{T_0}$
Valeur	$7800 \text{ kg m}^{-3}$	$2 \times 10^{11} \text{ Pa}$	$7.9 \times 10^{10} \text{ Pa}$	$1.5 \times 10^{-3} \text{ m}$	2161 N	1.8 m

TABLE IV.4 – Paramètres physiques utilisés pour les simulations numériques correspondant à une corde en acier.

#### IV.4.3.1 Petits déplacements

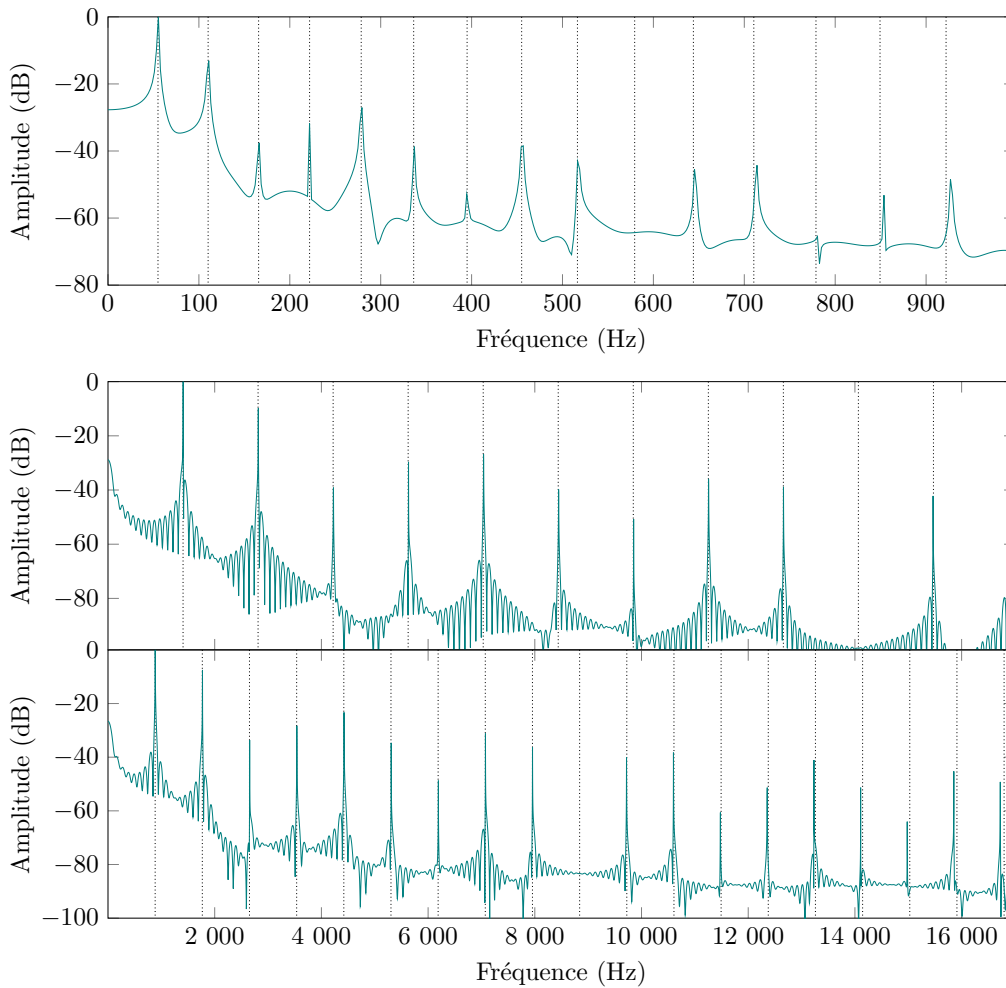


FIG. IV.12 Spectre des déplacements transverse (haut), longitudinal (centre) et de la torsion (bas). Les fréquences propres théoriques du modèle linéarisé sont représentées en pointillés.

Afin de valider les solutions numériques en petits déplacements par rapport aux solutions analytiques du modèle de corde linéarisé (IV.33), établis au § IV.3.2.1, nous examinons en premier lieu les résultats de simulation obtenus pour une petite force d'excitation. Pour cela, la corde est excitée successivement par trois forces de magnitude maximale  $f_{\max} = 1 \text{ N}$ , dirigées respectivement selon l'axe de la corde (selon  $E_1$ ), perpendiculaire-

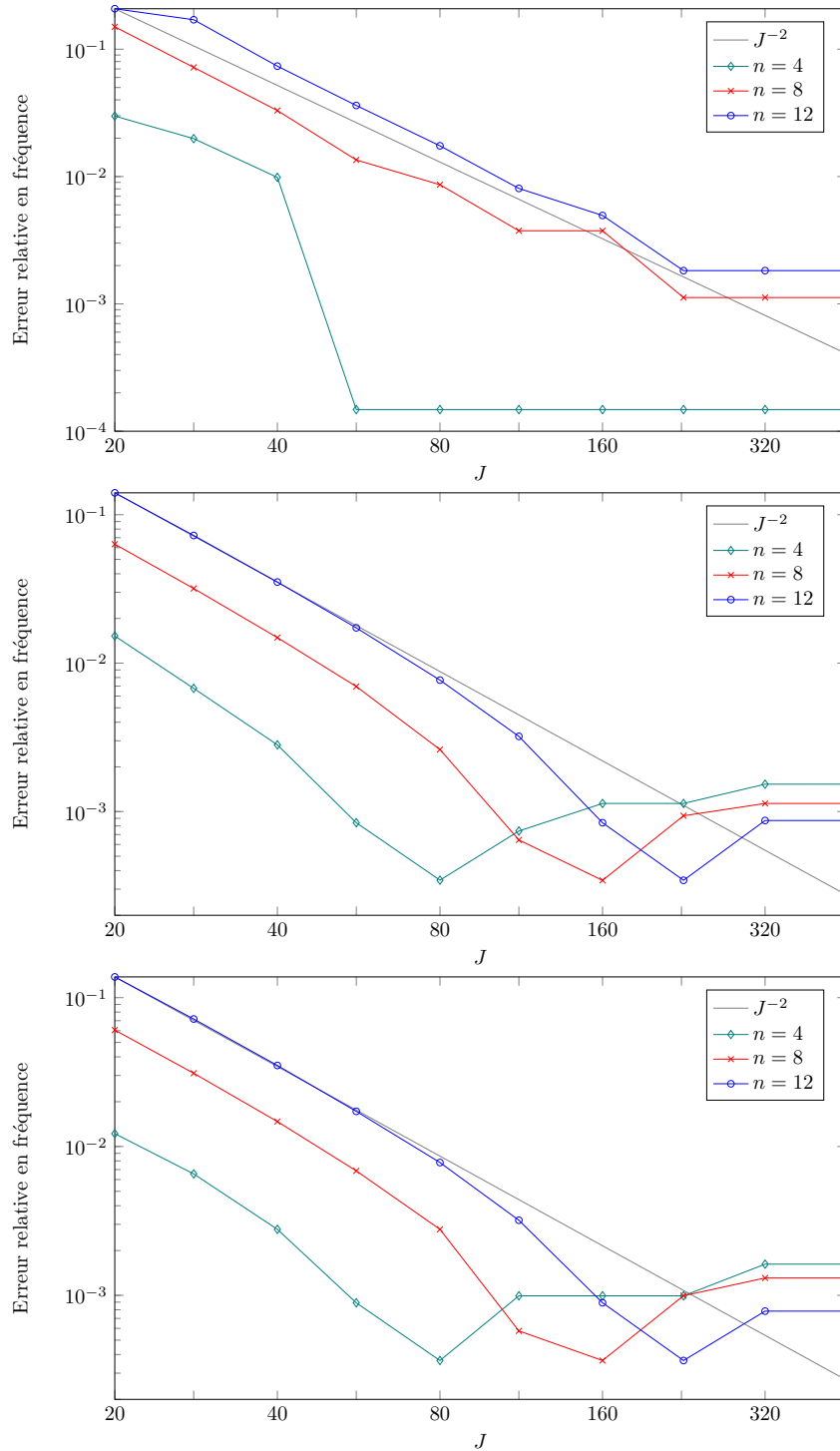


FIG. IV.13 Erreur relative en fréquence  $\tilde{\epsilon}_f$  pour les harmoniques de rang  $n = 4, 8, 12$  en fonction du nombre de pas d'espace  $J$  des modes numériques transverse (haut), longitudinal (milieu) et en torsion (bas).



ment à l'axe (selon  $E_2$ ), et de façon à imprimer un mouvement de rotation autour de l'axe (rotation dirigée par  $E_1$ ). Ceci induit des mouvements longitudinaux, transverse et de torsion de façon indépendante, dont les spectres en fréquences sont représentés en figure IV.12. Les points d'excitation et d'observation sont colocalisés en  $s_c = 0.3L$  pour toutes les simulations, ce qui explique l'absence du mode de rang 10 puisque  $s_c$  est un nœud de ce mode. Les simulations ont été calculées pour un pas de temps  $h = 4.5 \times 10^{-7}$  s et un pas en espace  $l = L/160 = 1.125 \times 10^{-2}$  m. On observe en figure IV.12 une bonne adéquation entre les pics de l'analyse spectrale des résultats de simulation et les fréquences propres théoriques des différentes composantes du mouvement du modèle (IV.33).

La convergence des maxima des spectres en déplacement vers les fréquences propres du modèle linéaire peut être caractérisée en fonction du pas de discrétisation spatiale  $l$ . Pour cela, on introduit la mesure d'erreur en fréquence relative  $\tilde{e}_f$  d'une fréquence numérique  $\tilde{f}$  de rang  $n$  par rapport à la fréquence propre théorique  $f_n$  comme

$$\tilde{e}_f(\tilde{f}; f_n) = \left| (\tilde{f} - f_n) / f_n \right|$$

L'erreur de convergence fréquentielle  $\tilde{e}_f$  est représentée en figure IV.13 en échelle logarithmique en fonction du pas  $l = L/J$  pour trois modes des composantes transverse, longitudinale et de torsion. Les valeurs de  $J$  sont prises dans l'ensemble

$$J \in \{20, 28, 40, 56, 80, 112, 160, 226, 320, 452\}.$$

On constate que les pics fréquentiels convergent à l'ordre 2 vers leur valeur exacte.

#### IV.4.3.2 Grands déplacements

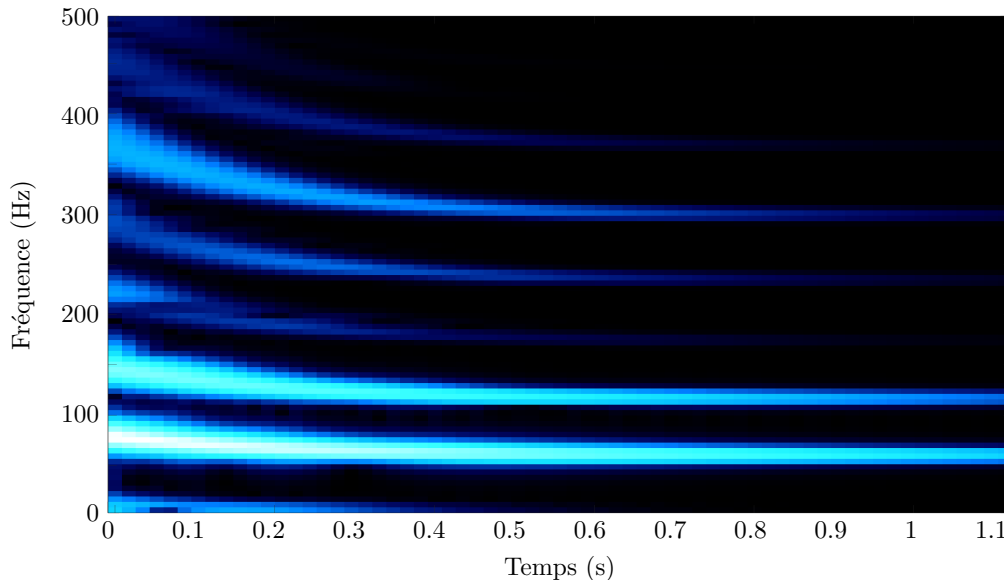


FIG. IV.14 Analyse spectrale du déplacement transverse de la corde en grands déplacements.

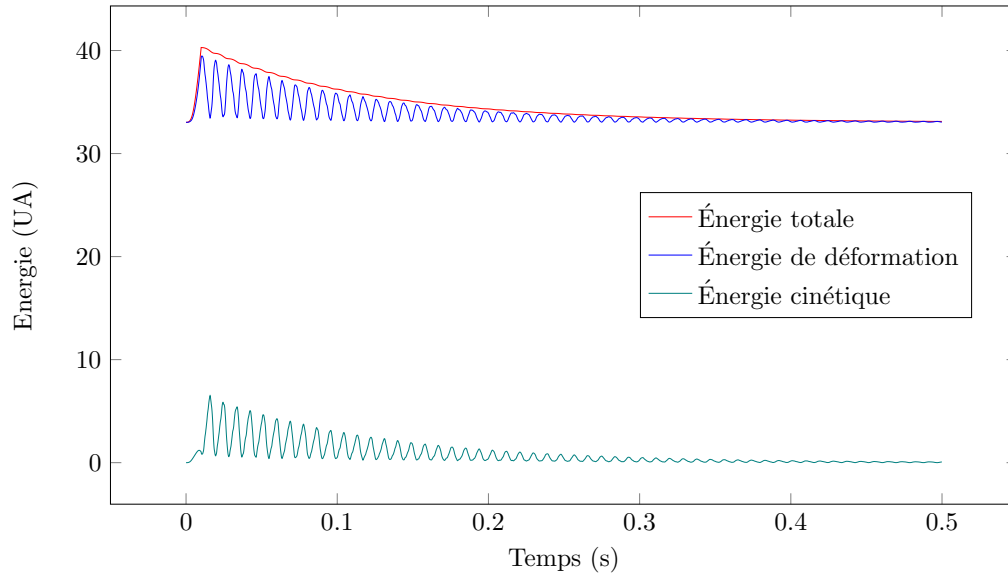


FIG. IV.15 Évolution des énergies de déformation, cinétique et totale au cours du temps pour une corde en grands déplacements.

L'intérêt du modèle de corde géométriquement exact est qu'il est adapté au traitement de la dynamique en grandes déformations prenant correctement en compte la non-linéarité intrinsèque à la description du système. La méthode numérique covariante implémentée par l'algorithme 1 a été testée dans ce contexte en soumettant la corde à une force d'excitation transverse de magnitude  $f_{max} = 50$  N. Les simulations ont été calculées pour  $h = 4.5 \times 10^{-7}$  s et  $M = 40$ . Le mouvement transverse résultant est d'amplitude maximale 2.5 cm et produit une variation de hauteur audible (l'effet *pitch bend*). Ce phénomène peut être observé sur en figure IV.14. L'énergie totale du système, dont l'évolution au cours du temps est représentée en figure IV.15, est dissipée par les frottements fluides modélisés par le terme  $\mathbb{D}\chi_i^j$  dans les équations d'Euler-Poincaré discrètes (IV.42a). Au début de l'expérience, l'énergie cinétique est nulle, tandis que l'énergie de déformation initiale est due à la tension de la corde  $T_0 = 2161$  N à l'équilibre. De  $t = 0$  à  $t = t_c = 0.01$  s, de l'énergie est ajoutée au système sous l'action de la force  $F_c$ , sous la forme d'énergie de déformation principalement. La corde est ensuite lâchée à  $t = 0.01$  s, et entre en vibration. On observe sur la figure IV.15 l'oscillation de l'énergie cinétique au double de la fréquence fondamentale du mouvement transverse.

## IV.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre un modèle de corde non linéaire amortie. Après avoir rappelé la description covariante de la poutre géométriquement exact, les équations d'Euler-Poincaré forcées, rendant compte de l'effet des forces sur le système, ont été obtenues par application d'un principe de Lagrange-d'Alembert. Les conditions limites ont également été traitée à partir d'une extension de la méthode de calcul des variations. Les lois d'évolution locales et globales de l'énergie, de la quantité de mouvement et du

moment cinétique, découlant des symétries du système, ont été mises en évidence. La même démarche, appliquée dans le cadre du calcul variationnel discret, a permis de définir un intégrateur covariant pour le modèle de poutre (§ IV.2). Celui-ci vérifie la version discrète des propriétés mentionnées ci-dessus. La poutre géométriquement exacte a ensuite permis la construction d'un modèle de corde, valide en grandes déformations et réalisant le couplage entre six degrés de liberté. La confrontation en petites déformation de ce modèle à différents modèles éprouvés de la littérature des cordes vibrantes a montré sa pertinence. Enfin, la résolution numérique par un intégrateur covariant a pu être validée contre la solution analytique du modèle linéarisé, et a montré un comportement réaliste lorsque excité par une force de grande magnitude.

Les résultats obtenus ici offrent des perspectives pour l'extension du modèle à des systèmes à deux dimensions spatiales (plaques, coques) ou à des volumes tridimensionnels. La possibilité de traduire correctement la dynamique du système en grandes déformations permettrait par exemple d'envisager la simulation d'instruments comme les cymbales.

## Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous nous sommes attachés à montrer l'intérêt que représentent les méthodes numériques d'inspiration géométrique pour la simulation de systèmes physiques producteurs de son. Plutôt que d'approcher numériquement les équations différentielles modélisant le comportement du système, la démarche commune à ces méthodes consiste à discrétiser les structures mathématiques sous-jacentes. Les notions physiques conservent ainsi un sens précis, et vérifient par construction des lois de conservation ou d'évolution qui apportent des garanties qualitatives sur les résultats de simulation, leur conférant une crédibilité et un réalisme accrus.

La mécanique variationnelle discrète fournit pour les systèmes décrits par un lagrangien un cadre de discrétisation qui établit les lois de conservation pour l'énergie, la forme symplectique et les moments associées à des symétries du système sur des temps d'intégration arbitrairement longs. En prenant en compte les forces à partir d'un principe de Lagrange-d'Alembert, il est possible de caractériser l'influence de ces dernières sur les différentes grandeurs physiques du système. En conclusion du premier chapitre, nous avons illustré les excellentes propriétés numériques des intégrateurs variationnels de Galerkin sur l'oscillateur bidimensionnel, amorti et non amorti. Cette approche a ensuite été étendue au chapitre 2 pour le traitement des systèmes lagrangiens formulés à l'aide de groupes de Lie. La procédure de réduction permet alors automatiquement l'obtention d'une loi de conservation par l'application du théorème de Noether associé à l'action du groupe, ainsi que la conservation par construction de la structure géométrique de l'espace de configuration. L'exemple du solide rigide a permis de valider ces propriétés numériques. L'extension des résultats du premier chapitre à l'aide de la théorie lagrangienne des champs a permis le traitement des équations aux dérivées partielles au chapitre 3. Les lois d'évolution s'expriment alors en fonction des conditions limites. Nous avons ensuite défini une famille d'intégrateurs de Galerkin covariants et établi les équivalents discrets des propriétés de conservation continues. Celles-ci ont ensuite été illustrées sur deux exemples concrets de l'acoustique, en menant tout d'abord une discussion sur la conservation approximative de l'énergie pour l'équation des ondes, puis en vérifiant numériquement la loi d'évolution des moments pour un modèle de corde non linéaire amorti. Les résultats des chapitres 2 et 3 ont été combinés pour proposer un modèle de corde dans le dernier chapitre. Ce modèle, défini à partir d'une poutre géométriquement exacte formulée à l'aide du groupe de Lie  $SE(3)$  et suivant une loi de comportement élastique linéaire, prend en compte une force d'excitation ainsi que l'amortissement fluide. La comparaison de la linéarisation de ce modèle avec des modèles classiques éprouvés montre sa pertinence dans les régimes en petites déformations. Les résultats de l'intégration numérique à l'aide d'une méthode covariante ont été capables de restituer la solution analytique du modèle linéarisé, et donnent

en grandes déformations des résultats convaincants.

Le travail mené dans ce mémoire présente de nombreuses perspectives :

1. Le chapitre 1 a mis en évidence sur l'exemple de l'oscillateur harmonique amorti les propriétés de convergence numérique du moment angulaire pour les intégrateurs variationnels de Galerkin en présence de forces extérieures au système. Toutefois, l'étude théorique de la convergence numérique des systèmes forcés dans le contexte de la mécanique variationnelle discrète n'a pas fait l'objet de travaux approfondis à notre connaissance.
2. L'équation des ondes a été l'occasion, au chapitre 3, de vérifier la conservation approximative de l'énergie par les intégrateurs covariants. Cette propriété a également été mise en évidence pour le modèle de corde construit au chapitre 4. À chaque fois, cette conservation numérique a été démontrée par un recours au caractère symplectique de l'intégrateur, discuté en fonction des conditions limites [31]. Toutefois, il serait pertinent d'étudier d'une manière plus générale la vérification approximative des équations d'évolutions locales covariantes en rapport avec le caractère multisymplectique des solutions de simulation. Notre conjecture est que, tout comme le *backward error analysis* permet d'établir la conservation approximative de l'énergie à partir de la préservation de la forme symplectique, une approche similaire pourrait faire le lien entre vérification approximative des équations d'évolution locales et caractère multisymplectique des solutions covariantes.
3. Dans ce mémoire, les méthodes covariantes ont été systématiquement été exploitées de façon à faire apparaître un intégrateur numérique temporel. Toutefois, puisque le traitement des variables de temps et d'espace par les méthodes covariantes est identique, il est tout aussi bien possible de définir, en suivant la même approche que pour l'intégration temporelle, une méthode procédant par intégration spatiale à partir des équations d'Euler-Lagrange discrètes. Cette démarche, étudiée dans deux cas particulier par Demoures *et al.* [29], [31], permettrait par exemple de modéliser la propagation d'une onde dans un milieu dont on connaît à tout instant les conditions de Dirichlet et Neumann sur un bord spatial.
4. La méthode numérique proposée au chapitre 4 pour la résolution de la dynamique du modèle de corde est construite à partir d'un lagrangien qui discrétise de manière élémentaire l'intégrale d'action. Ce choix limite l'ordre de la méthode. En définissant un intégrateur numérique qui combine la famille de méthodes de Galerkin covariante, proposée au chapitre 3, avec le traitement par groupe de Lie, vue aux chapitres 2 et 4, il serait possible d'obtenir une intégration numérique d'ordre arbitraire. Une méthode de ce type a été proposée par Leitz *et al.* [81] dans un cas particulier, mais une formulation générale reste à être établie.
5. On peut envisager différentes extensions du modèle de corde géométriquement exact du chapitre 4. Ajouter les phénomènes d'amortissement visqueux dans le modèle de corde géométriquement exact permettrait un réalisme accru des sons synthétisés. La résolution numérique pourrait alors par exemple se faire à l'aide d'un traitement similaire à celui proposé pour le modèle de corde du chapitre 3, qui nécessiterait donc l'application d'un intégrateur d'ordre plus élevé, comme celui mentionné au point précédent. Par ailleurs, des hypothèses simplificatrices sur les

propriétés du matériau ont été posées (isotropie, homogénéité, absence de filetage autour de l'âme de la corde, etc.). Celles-ci pourraient être levées pour modéliser avec plus de finesse les systèmes rencontrés dans la réalité. De même, il a été supposé que le système vérifiait une loi de comportement élastique linéaire. Toutefois, à l'aide de la même description (géométriquement exacte), d'autres lois de comportement peuvent être modélisées pour permettre le traitement de situations pour lesquelles l'hypothèse d'élasticité linéaire n'est plus valide. D'autre part, il serait souhaitable de traiter, en étendant le nombre de variables spatiales indépendantes, d'autres systèmes de la mécanique des milieux continus en grande déformation. Cette approche serait particulièrement adéquate pour la modélisation des plaques et coques subissant des mouvements de forte amplitude, catégorie dans laquelle se rangent par exemple les cymbales. Enfin, l'estimation de la pertinence d'un modèle destiné à la synthèse sonore ne peut faire l'économie d'une évaluation perceptive dans des situations réalistes, évaluation qu'il reste à mener.



# Annexe A

## Formulaires des groupes $SO(3)$ et $SE(3)$

### A.1 Groupe des rotations en trois dimensions $SO(3)$

#### A.1.1 Groupe

Le groupe de Lie  $SO(3)$  est l'ensemble des matrices orthogonales  $R$  de taille  $3 \times 3$  et de déterminant  $\det(R) = 1$ . L'opération du groupe est la multiplication matricielle, et son élément neutre la matrice identité  $I_3$ . L'inverse d'une matrice  $R \in SO(3)$  est sa transposée  $R^{-1} = R^T$ .

#### A.1.2 Algèbre

L'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  associée à  $SO(3)$  est l'ensemble des matrices  $3 \times 3$  antisymétriques. On donne dans le tableau ci-dessous les définitions relatives à  $\mathfrak{so}(3)$  dans leurs formulations matricielle et vectorielle.

	Représentation matricielle	Représentation vectorielle
Élément	$\hat{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$	$\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$
Opération	Addition matricielle	Addition vectorielle
Élément neutre	$\hat{e}_{\mathfrak{g}} = 0_{3 \times 3}$	$e_{\mathfrak{g}} = 0_3$
Inverse	$\hat{\omega}^{-1} = \hat{\omega}^T = -\hat{\omega}$	$\omega^{-1} = -\omega$
Crochet de Lie	$[\hat{\omega}, \hat{\eta}] = \hat{\omega}\hat{\eta} - \hat{\eta}\hat{\omega}$	$[\omega, \eta] = \omega \wedge \eta$

#### A.1.2.1 Opérations adjointes

L'opération adjointe  $\text{Ad} : SO(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  du groupe  $SO(3)$  sur l'algèbre  $\mathfrak{so}(3)$  est définie pour tout  $R \in SO(3)$  et  $\hat{\omega} \in \mathfrak{so}(3)$  comme

$$\text{Ad}_R \hat{\omega} = R\hat{\omega}R^{-1}.$$

L'écriture vectorielle de cette définition, obtenue en identifiant  $\mathfrak{so}(3)$  avec  $\mathbb{R}^3$ , s'écrit

$$\text{Ad}_R \omega = R\omega.$$



L'opération adjointe  $\text{ad} : \mathfrak{so}(3) \times \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  de  $\mathfrak{so}(3)$  sur elle-même est exactement le crochet de Lie précédemment défini

$$\text{ad}_{\hat{\omega}} \hat{\eta} = [\hat{\omega}, \hat{\eta}] = \hat{\omega} \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\omega}$$

pour tout  $\hat{\omega}, \hat{\eta} \in \mathfrak{so}(3)$ , ce qui se réécrit en version vectorielle comme

$$\text{ad}_{\omega} \eta = [\omega, \eta] = \omega \wedge \eta.$$

### A.1.2.2 Fonction Cayley

La fonction Cayley  $\text{cay} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \text{SO}(3)$  est un difféomorphisme local défini pour tout  $\hat{\omega} \in \mathfrak{se}(3)$  par

$$\text{cay}(\hat{\omega}) = \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \left( \text{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right) = \text{I}_3 + \frac{4}{4 + |\omega|^2} \left( \hat{\omega} + \frac{\hat{\omega}^2}{2} \right).$$

L'application tangente  $T_{\omega} \text{cay} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow T_{\text{cay}(\omega)} \text{SO}(3)$  est définie pour tout  $\hat{\eta} \in \mathfrak{so}(3)$  par

$$T_{\hat{\omega}} \text{cay}(\hat{\eta}) = \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \hat{\eta} \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1}.$$

La différentielle trivialisée à droite de l'application Cayley  $d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathfrak{so}(3)$  est définie pour tout  $\hat{\eta} \in \mathfrak{so}(3)$  par

$$d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay}(\hat{\eta}) = \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1} \hat{\eta} \left( \text{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right)^{-1}.$$

Vue comme une application linéaire de  $\mathbb{R}^3$ , cette différentielle peut être identifiée à la matrice d'ordre 3

$$d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay} = \frac{4}{4 + |\omega|^2} \left( \text{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right).$$

L'application inverse de  $d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay}$  est définie pour tout  $\hat{\eta} \in \mathfrak{so}(3)$  par

$$d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay}^{-1}(\hat{\eta}) = \left( \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \hat{\eta} \left( \text{I}_3 + \frac{\hat{\omega}}{2} \right).$$

Considérée comme application linéaire de  $\mathbb{R}^3$ , elle peut également s'exprimer comme l'inverse de la matrice  $d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay}$ , ce qui donne

$$d_{\omega}^{\text{R}} \text{cay}^{-1} = \text{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} + \frac{\omega \omega^T}{2}.$$

## A.2 Groupe des rotations et translations en trois dimensions SE(3)

### A.2.1 Groupe

Le groupe spécial euclidien de dimension trois SE(3) est formé par le produit  $\text{SE}(3) = \text{SO}(3) \times \mathbb{R}^3$ . Ses éléments  $g$  sont représentés par des matrices  $4 \times 4$  définies pour tout  $R \in \text{SO}(3)$ ,  $r \in \mathbb{R}^3$  par

$$g = \begin{pmatrix} R & r \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}.$$

On notera par raccourci  $g = (R, r)$ . L'opération du groupe est la multiplication matricielle; on a alors pour tout  $g = (R, r), \tilde{g} = (\tilde{R}, \tilde{r}) \in \text{SE}(3)$

$$g\tilde{g} = \begin{pmatrix} R\tilde{R} & R\tilde{r} + r \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que l'élément neutre est la matrice identité  $I_4$ , et l'inverse d'un élément  $g = (R, r)$  s'écrit  $g^{-1} = (R^{-1}, -R^{-1}r)$ .

### A.2.2 Algèbre

On donne ici les définitions relatives à l'algèbre  $\mathfrak{se}(3)$  associée à  $\text{SE}(3)$  dans leur représentation matricielle et vectorielle.

	Représentation matricielle	Représentation vectorielle
Élément	$\hat{\xi} = \begin{pmatrix} \hat{\omega} & \gamma \\ 0_{1 \times 3} & 0 \end{pmatrix}$	$\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6)^T = (\omega, \gamma)^T$
Opération	Addition matricielle	Addition vectorielle
Élément neutre	$\hat{e}_g = 0_{4 \times 4}$	$e_g = 0_6$
Inverse	$\hat{\xi}^{-1} = -\hat{\xi}$	$\xi^{-1} = -\xi$
Crochet de Lie	$[\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = \hat{\xi}\hat{\zeta} - \hat{\zeta}\hat{\xi}$	$[\xi, \zeta] = (\omega \wedge \eta, \omega \wedge \nu - \eta \wedge \gamma)^T$ pour $\zeta = (\eta, \nu)^T$

#### A.2.2.1 Opérations adjointes

L'opération adjointe  $\text{Ad} : \text{SE}(3) \times \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$  du groupe  $\text{SE}(3)$  sur l'algèbre  $\mathfrak{se}(3)$  est définie pour tout  $g = (R, r) \in \text{SE}(3)$  et  $\hat{\xi} = (\hat{\omega}, \gamma) \in \mathfrak{se}(3)$  comme

$$\text{Ad}_g \hat{\xi} = \begin{pmatrix} R\hat{\omega}R^{-1}, & -R\hat{\omega}R^{-1}r + R\gamma \end{pmatrix}$$

ce qui s'écrit sous forme vectorielle comme

$$\text{Ad}_g \xi = (R\omega, -R\omega \wedge r + R\gamma).$$

L'opération adjointe  $\text{ad} : \mathfrak{se}(3) \times \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$  de  $\mathfrak{se}(3)$  sur elle-même définie pour tout  $\hat{\xi} = (\hat{\omega}, \gamma), \hat{\zeta} = (\hat{\eta}, \nu) \in \mathfrak{se}(3)$  comme

$$\text{ad}_{\hat{\xi}} \hat{\zeta} = [\hat{\xi}, \hat{\zeta}] = (\text{ad}_{\hat{\omega}} \hat{\eta}, \hat{\omega}\nu - \hat{\eta}\gamma)$$

ou encore sous forme vectorielle

$$\text{ad}_{\xi} \zeta = (\text{ad}_{\omega} \eta, \omega \wedge \eta - \eta \wedge \gamma).$$

#### A.2.2.2 Fonction Cayley

La fonction Cayley  $\text{cay} : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \text{SE}(3)$  est un difféomorphisme local défini pour tout  $\hat{\xi} = (\hat{\omega}, \gamma) \in \mathfrak{se}(3)$  par

$$\text{cay}(\hat{\xi}) = \begin{pmatrix} \text{cay}(\hat{\omega}) & \left( I_3 + \frac{2}{4+|\hat{\omega}|^2} \left( \hat{\omega} + \frac{\hat{\omega}^2}{2} \right) \right) \gamma \\ 0_{1 \times 3} & 1 \end{pmatrix}.$$

L'application tangente  $T_\xi \text{cay} : \mathfrak{se}(3) \rightarrow T_{\text{cay}(\xi)}SE(3)$  est définie pour tout  $\hat{\zeta} \in \mathfrak{se}(3)$  par

$$T_\xi \text{cay}(\eta) = \left( \mathbf{I}_4 - \frac{\hat{\xi}}{2} \right)^{-1} \hat{\zeta} \left( \mathbf{I}_4 - \frac{\hat{\xi}}{2} \right)^{-1}.$$

La différentielle trivialisée à droite de l'application Cayley  $d^R_\xi \text{cay} : \mathfrak{se}(3) \rightarrow \mathfrak{se}(3)$  est définie pour tout  $\hat{\zeta} = (\hat{\eta}, \nu) \in \mathfrak{se}(3)$  par

$$d^R_\xi \text{cay}(\hat{\zeta}) = \left( \mathbf{I}_4 - \frac{\hat{\xi}}{2} \right)^{-1} \hat{\zeta} \left( \mathbf{I}_4 + \frac{\hat{\xi}}{2} \right)^{-1}.$$

L'application inverse de  $d^R \text{cay}_\xi$  est définie pour tout  $\hat{\zeta} \in \mathfrak{se}(3)$  par

$$d^R_\xi \text{cay}^{-1}(\hat{\zeta}) = \left( \mathbf{I}_4 - \frac{\hat{\xi}}{2} \right) \hat{\zeta} \left( \mathbf{I}_4 + \frac{\hat{\xi}}{2} \right)$$

Considérée comme application linéaire de  $\mathbb{R}^6$ , elle peut également être identifiée à la matrice d'ordre 6

$$d^R_\xi \text{cay}^{-1} = \begin{pmatrix} d^R_\omega \text{cay}^{-1} & 0_3 \\ -\left( \mathbf{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \right) \frac{\hat{\gamma}}{2} & \mathbf{I}_3 - \frac{\hat{\omega}}{2} \end{pmatrix}.$$

## Annexe B

# Calcul des modes propres du modèle de corde linéarisé

### B.1 Résolution des équations d'Euler-Poincaré linéarisées

On établit ici les fréquences propres des équations couplées (IV.33c) et (IV.33d) portant sur les variables de déplacement transverse  $y$  et de flexion  $\phi_z$ , en suivant une méthode de résolution analogue à celle proposée par Chabassier et Imperiale [20]. Ces équations correspondent à un modèle de corde simplement supportée aux mouvements planaires. On cherche les solutions sous la forme  $y(s, t) = e^{-i\omega t}Y(s)$ ,  $\phi_z(s, t) = e^{-i\omega t}\Phi(s)$ , où  $\omega \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, les équations se réécrivent

$$\begin{aligned}GA\partial_s Y' - \beta\Theta' + \rho A\omega^2 Y &= 0 \\EI_a\partial_s \Phi' + \beta Y' + (\rho I_a\omega^2 - (1 + \alpha)\beta)\Phi &= 0\end{aligned}$$

En définissant  $U = (Y, \Phi, Y', \Phi')^T$ , on peut les mettre sous la forme

$$\partial_s U + AU = 0 \tag{B.1}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ A_1 & 0 & 0 & A_4 \\ 0 & A_2 & A_3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{\rho\omega^2}{G} = a\omega^2 & A_2 &= \frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{(1 + \alpha)\beta}{EI_a} = b\omega^2 - (1 + \alpha)c \\ A_3 &= \frac{\beta}{EI_a} = c & A_4 &= -\frac{\beta}{GA} = d\end{aligned}$$

Les solutions de (B.1) correspondent aux vecteurs propres  $U$  de la matrice  $A$  paramétrée par  $\omega$ . Pour résoudre l'équation, on étudie donc les valeurs propres de  $A$  en fonction de  $\omega$ , données par les scalaires  $\lambda \in \mathbb{C}$  vérifiant  $\det(A - \lambda I) = 0$ , c'est-à-dire

$$\lambda^4 + \lambda^2 \left( (a + b)\omega^2 - c(1 + \alpha + d) \right) + ab\omega^4 - ac(1 + \alpha)\omega^2 = 0$$

En posant les variables  $\Lambda = \lambda^2$  et  $\Omega = \omega^2$ , on obtient à partir de la ligne précédente

$$\Lambda^2 + \Lambda((a+b)\Omega - c(1+\alpha+d)) + ab\Omega^2 - ac(1+\alpha)\Omega = 0 \quad (\text{B.2})$$

Les deux racines de ce polynôme du second degré valent

$$\Lambda^\pm = \frac{c(1+\alpha+d) - (a+b)\Omega \pm \sqrt{\Delta_\Lambda}}{2}$$

où  $\Delta_\Lambda$  est le discriminant du polynôme, s'écrivant en fonction de  $\Omega$  comme

$$\begin{aligned} \Delta_\Lambda &= \left((a+b)\Omega - c(1+\alpha+d)\right)^2 - 4(ab\Omega^2 - ac(1+\alpha)\Omega) \\ &= \left[(a+b)^2 - 4ab\right]\Omega^2 + \left[4ac(1+\alpha) - 2(a+b)c(1+\alpha+d)\right]\Omega + c^2(1+\alpha+d)^2 \end{aligned}$$

Chacune des racines  $\Lambda^+$  et  $\Lambda^-$  donne deux valeurs propres, qu'on écrit

$$(\lambda_\pm^+)^2 = \Lambda^+, \quad (\lambda_\pm^-)^2 = \Lambda^-.$$

On définit également  $\lambda^+ := \lambda_+^+ = -\lambda_-^+$  et  $\lambda^- := \lambda_+^- = -\lambda_-^-$ .

Les conditions aux bords fournissent les équations permettant de déterminer les modes propres. Pour cela, on écrit tout d'abord que toute solution  $\tilde{Y}$  de (B.1) s'écrit dans la base des fonctions exponentielles

$$\tilde{Y}(s) = Ae^{\lambda^-s} + Be^{-\lambda^-s} + Ce^{\lambda^+s} + De^{-\lambda^+s}.$$

À partir des conditions limites (IV.34) et de la troisième ligne de l'équation (B.1), on peut écrire

$$\tilde{Y}(0) = 0, \quad \tilde{Y}(L) = 0, \quad \tilde{Y}''(0) = 0, \quad \tilde{Y}''(L) = 0$$

À partir de l'expression de  $\tilde{Y}$ , ces quatre égalités donnent les conditions suivantes

$$\begin{aligned} A + B + C + D &= 0 \\ Ae^{\lambda^-L} + Be^{-\lambda^-L} + Ce^{\lambda^+L} + De^{-\lambda^+L} &= 0 \\ \Lambda^-(A + B) + \Lambda^+(C + D) &= 0 \\ \Lambda^-(Ae^{\lambda^-L} + Be^{-\lambda^-L}) + \Lambda^+(Ce^{\lambda^+L} + De^{-\lambda^+L}) &= 0 \end{aligned}$$

À partir d'une manipulation des équations, on montre en particulier que, pour que la solution  $\tilde{Y}$  ne soit pas identiquement nulle, l'une des deux conditions suivantes doit être vérifiée

$$e^{\lambda^-L} - e^{-\lambda^-L} = 0 \quad \text{ou} \quad e^{\lambda^+L} - e^{-\lambda^+L} = 0 \quad (\text{B.3})$$

Afin de traduire ces équations en conditions exploitables sur la périodicité des solutions de l'équation différentielle (B.1), on étudie les domaines de définition des valeurs propres  $\lambda^\pm$ . Les solutions oscillatoires sont données pour  $\lambda^\pm$  imaginaires pures ou, de façon équivalente,  $\Lambda^\pm \leq 0$ . Pour cela, étant donné que  $\Lambda^\pm$  est dépend de  $\Omega \geq 0$ , on étudie le signe de  $\Lambda^\pm$  en fonction de cette variable. Tout d'abord, on établit que les racines  $\Lambda^\pm$  sont réelles pour

tout  $\Omega \geq 0$ . Pour cela, on vérifie que  $\Delta(0) \geq 0$ ,  $\Delta'(0) \geq 0$  et  $\Delta''(0) \geq 0$ , et donc que pour tout  $\Omega > 0$ ,  $\Delta(\Omega) > 0$ . On vérifie ensuite que

$$\forall \Omega \geq 0, \Lambda^- \leq 0, \quad \forall \Omega \geq \frac{c(1+\alpha)}{b}, \Lambda^+ \leq 0.$$

Cela permet de traduire les conditions (B.3) par

$$\begin{cases} \sin(\sqrt{|\Lambda^-|}L) = 0 & \text{ou} & \sinh(\sqrt{\Lambda^+}L) = 0 & \text{si } \Omega < \frac{c(1+\alpha)}{b} \\ \sin(\sqrt{|\Lambda^-|}L) = 0 & \text{ou} & \sin(\sqrt{|\Lambda^+|}L) = 0 & \text{si } \Omega \geq \frac{c(1+\alpha)}{b} \end{cases}$$

qui donne finalement

$$\begin{cases} \Lambda^- = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z}^* & \text{ou} & \Lambda^+ = 0 & \text{si } \Omega < \frac{c(1+\alpha)}{b} \\ \Lambda^- = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z}^* & \text{ou} & \Lambda^+ = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}, n \in \mathbb{Z}^* & \text{si } \Omega \geq \frac{c(1+\alpha)}{b} \end{cases}$$

La valeur de  $\Omega$  en fonction du rang  $n$  peut alors être déterminée : en injectant  $\Lambda = -n^2\pi^2/L^2$  dans (B.2), on transforme l'équation en un polynôme du second degré de la variable  $\Omega$

$$ab\Omega^2 + \left[ -\frac{n^2\pi^2}{L^2}(a+b) - ac(1+\alpha) \right] \Omega + \left[ \frac{n^2\pi^2}{L^2}c(1+\alpha+d) + \frac{n^4\pi^4}{L^4} \right] = 0$$

qu'on réécrit  $P_2\Omega^2 + P_1\Omega + P_0 = 0$ . Ce polynôme admet deux racines  $\Omega^\pm$  positives

$$\Omega^\pm = \frac{-P_1 \pm \sqrt{\Delta_\Omega}}{2P_2} \quad (\text{B.4})$$

où le déterminant  $\Delta_\Omega$  s'exprime en fonction du rang  $n$  par

$$\begin{aligned} \Delta_\Omega &= \frac{n^4\pi^4}{L^4}(a+b)^2 + a^2c^2(1+\alpha)^2 + 2\frac{n^2\pi^2}{L^2}(a+b)ac(1+\alpha) \\ &\quad - 4ab\frac{n^4\pi^4}{L^4} - 4ab\frac{n^2\pi^2}{L^2}c(1+\alpha+d) \\ &= n^4 \left[ \frac{\pi^4}{L^4}(a-b)^2 \right] + n^2 \left[ \frac{\pi^2}{L^2} \times 2ac[(a-b)(1+\alpha) - 2bd] \right] + [(ac(1+\alpha))^2] \\ &= D_2n^4 + D_1n^2 + D_0 \end{aligned}$$

et dont on peut montrer qu'il est positif pour tout  $n$ . Finalement, les pulsations propres  $\omega^\pm = \sqrt{\Omega^\pm}$  sont obtenues comme fonction du rang  $n$  à partir de  $\Omega^\pm$ .

## B.2 Comportements limites des spectres en fréquence

### B.2.1 Développement limité des premiers modes

Pour obtenir des expressions exploitables des premières pulsations propres  $\omega^\pm$  comme fonctions du rang  $n$ , on se propose d'effectuer un développement limité pour  $n$  petit en

utilisant la définition  $\omega^\pm = \sqrt{\Omega^\pm}$  où  $\Omega^\pm$  est donné par (B.4). Pour cela, on commence par développer la racine du déterminant  $\Delta_\Omega$

$$\begin{aligned}\sqrt{\Delta_\Omega(n)} &= \sqrt{\Delta_\Omega(0)} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\Delta_\Omega(0)}} (\Delta_\Omega(n) - \Delta_\Omega(0)) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{\Delta_\Omega(0)}^3} (\Delta_\Omega(n) - \Delta_\Omega(0))^2 + O\left((\Delta_\Omega(n) - \Delta_\Omega(0))^3\right) \\ &= \sqrt{D_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{D_0}} (D_1 n^2 + D_2 n^4) - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{D_0}^3} D_1^2 n^4 + O(n^6) \\ &= ac(1 + \alpha) + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} (a + b - 2b\lambda) \\ &\quad + n^4 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{2}{ac(1 + \alpha)} (-ab - b^2 \lambda^2 + (a + b)b\lambda) + O(n^6)\end{aligned}$$

On en déduit une expression polynômiale de la racine  $\Omega^-$  en repartant de l'expression (B.4)

$$\begin{aligned}\Omega^-(n) &= \frac{1}{2ab} \left[ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (a + b) + ac(1 + \alpha) - \sqrt{D_0} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{D_0}} (D_1 n^2 + D_2 n^4) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{D_0}^3} D_1^2 n^4 + O(n^6) \right] \\ &= n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \frac{\lambda}{a} + n^4 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{(b\lambda - a)(\lambda - 1)}{a^2 c(1 + \alpha)} + O(n^6)\end{aligned}$$

En notant  $\Omega^-(n) = \alpha^- n^4 + \beta^- n^2 + O(n^6)$ , on calcule le développement de  $\omega^- = \sqrt{\Omega^-}$

$$\begin{aligned}\omega^-(n) &= n \sqrt{\beta^- + \alpha^- n^2} = n \left( \sqrt{\beta^-} + \frac{\alpha^-}{2\sqrt{\beta^-}} n^2 + O(n^4) \right) \\ &= n \sqrt{\beta^-} \left( 1 + \frac{\alpha^-}{2\beta^-} n^2 \right) + O(n^5) = n \omega_0^- (1 + \eta^- n^2) + O(n^5)\end{aligned}$$

où les constantes  $\omega_0^-$  et  $\eta^-$  sont définies par

$$\omega_0^- = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho A (1 + \frac{T_0}{EA})}}, \quad \eta^- = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{EI_a}{T_0 (1 + \frac{T_0}{EA})^2}.$$

Le même calcul pour  $\Omega^+$  donne

$$\begin{aligned}\Omega^+(n) &= \frac{1}{2ab} \left[ \frac{n^2 \pi^2}{L^2} (a + b) + ac(1 + \alpha) + \sqrt{D_0} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{D_0}} (D_1 n^2 + D_2 n^4) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{D_0}^3} D_1^2 n^4 + O(n^6) \right] \\ &= \frac{c(1 + \alpha)}{b} + n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \frac{a + b(1 - \lambda)}{ab} + n^4 \frac{\pi^4}{L^4} \frac{(b\lambda - a)(1 - \lambda)}{a^2 c(1 + \alpha)} + O(n^6)\end{aligned}$$

En écrivant  $\Omega^+(n) = \alpha^+ n^4 + \beta^+ n^2 + \gamma^+ + O(n^6)$ , on calcule pour  $\omega^+ = \sqrt{\Omega^+}$

$$\begin{aligned}\omega^+(n) &= \sqrt{\gamma^+} + \frac{1}{2\sqrt{\gamma^+}}\beta^+ n^2 + O(n^4) = \sqrt{\gamma^+} \left(1 + n^2 \frac{\beta^+}{2\gamma^+}\right) + O(n^4) \\ &= \omega_0^+ \left(1 + \eta^+ n^2\right) + O(n^4)\end{aligned}$$

où

$$\omega_0^+ = \sqrt{\frac{\left(1 + \frac{T_0}{EA}\right) \left(GA - T_0 \left(1 - \frac{G}{E}\right)\right)}{\rho I_a}}, \quad \eta^+ = \frac{\pi^2}{2L^2} \frac{\rho I_a}{\left(1 + \frac{T_0}{EA}\right)^2} \frac{1 - \frac{E}{G} + \frac{T_0}{EA}}{GA - T_0 \left(1 - \frac{G}{E}\right)}$$

### B.2.2 Comportement asymptotique

Lorsque le rang  $n$  tend vers l'infini, les pulsations propres se rapprochent d'une série harmonique. En effet, en partant de l'expression (B.4), il apparaît que  $\Omega^\pm$  se comporte asymptotiquement comme le terme de la variable  $n$  de degré le plus fort, c'est à dire

$$\Omega^\pm \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\frac{\pi^2}{L^2}(a+b) \pm \sqrt{D_2}}{2ab} n^2 = \frac{\pi^2}{L^2} \frac{((a+b) \pm (a-b))}{2ab} n^2$$

ce qui donne respectivement

$$\Omega^- \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2 n^2}{bL^2}, \quad \Omega^+ \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi^2 n^2}{aL^2}$$

et, finalement, le comportement asymptotique des pulsations propres

$$\omega^- \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi n}{\sqrt{b}L}, \quad \omega^+ \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi n}{\sqrt{a}L}$$





# Annexe C

## Librairie C++ Geomi

Geomi (Geometric Integration) est une librairie d'intégration numérique axée sur la préservation des invariants physiques des systèmes modélisés. L'ensemble du code, développé dans le langage C++, ainsi que sa documentation, sont disponible sur GitHub<sup>1</sup>. Cette librairie est née plusieurs besoins :

- mettre en pratique les résultats numériques théoriques
- pérenniser le développement d'intégrateurs numériques effectué au fur et à mesure du travail de recherche en permettant le redéploiement des algorithmes
- minimiser le travail d'implémentation de familles d'intégrateurs apparentés en tirant notamment parti de la formulation unifiée que permet la description lagrangienne discrète de la mécanique
- factoriser le développement de code gérant la résolution des systèmes d'équations non linéaires (qui concerne la grande majorité des intégrateurs variationnels), mais également des fonctions annexes comme les entrées/sorties, la manipulation de données, etc.

Le principe de la librairie est d'offrir un ensemble d'outils d'intégration numériques accessible via l'implémentations de classes définissant un système physique particulier. Les méthodes préprogrammées peuvent alors être instanciées pour calculer une solution numérique au problème (voir figure C.1).

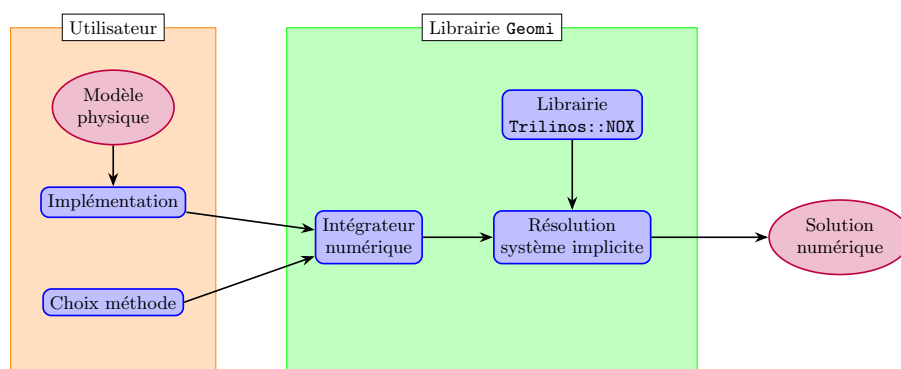


FIG. C.1 Principe d'utilisation de la librairie Geomi.

1. <https://github.com/rdudisk/GeometricIntegration>

Le choix du langage de programmation C++ a été motivé par ses avantages en matière de rapidité de calcul comparativement à des langage à plus haut niveau d'abstraction comme Matlab ou Python, et par son paradigme de langage orienté objet qui en fait un bon candidat pour une implémentation modulaire. Par ailleurs, plusieurs implémentations de solveurs numériques performants sont disponibles dans ce langage. La résolution des systèmes d'équations implicites se fait dans Geomi à l'aide du paquet NOX de la librairie Trilinos [106], qui propose un ensemble d'outils puissants et flexibles pour la recherche de racines et n'a pas d'équivalent dans d'autres langages haut niveau.

Le paragraphe C.1 propose une introduction rapide à la librairie Geomi. Par ailleurs, un tutoriel de prise en main rapide et la documentation sont disponibles en ligne [15]. Le reste du chapitre détaille l'organisation interne de la bibliothèque et son articulation avec les formalismes qu'elle implémente.

## C.1 Introduction pratique

Jusqu'à présent, deux grandes familles d'approches ont été développées dans la librairie : les méthodes variationnelles et les méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas.

### C.1.1 Méthodes variationnelles

Le module Variational implémente un ensemble de méthodes numériques variationnelles basées sur une formulation lagrangienne des systèmes physiques. Deux cas sont pris en charge : celui d'un espace de configuration linéaire  $Q$  (typiquement  $\mathbb{R}^n$ ) équipé d'un lagrangien  $\mathcal{L} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ ; et celui où l'espace de configuration est un groupe de Lie  $G$  équipé d'un lagrangien réduit  $\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$ . La solution numérique est obtenue en définissant une intégrale d'action approchant celle du problème de départ à laquelle on applique un principe variationnel discret. Les équations d'Euler-Lagrange discrètes correspondantes (DEL dans la suite) s'expriment en toute généralité comme une somme pondérée des dérivées partielles du lagrangien évaluées sur des points de quadrature. On renvoie à la lecture des chapitres 1 et 2 pour le détail de cette démarche.

À titre d'exemple, on reprend ici l'exemple de la discrétisation variationnelle par méthode des rectangles exposée au § I.3.1.1. On se place dans le cas où  $\mathcal{M} = [0, T] \subset \mathbb{R}$  et  $\dim(Q) = N$ . Pour définir la méthode, on restreint les trajectoires admises aux polynômes de degré 1 par morceaux, et l'intégrale d'action est approchée par méthode des rectangles à gauche. La DEL correspondante prise pour deux positions successives  $q_i$  et  $q_{i+1}$  séparées d'un pas de temps  $h$  s'écrit alors pour tout  $1 \leq A \leq N$

$$h \frac{\partial L}{\partial q^A} \left( q_i, \frac{q_{i+1} - q_i}{h} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \left( q_{i-1}, \frac{q_i - q_{i-1}}{h} \right) - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^A} \left( q_i, \frac{q_{i+1} - q_i}{h} \right) = 0 \quad (\text{C.1})$$

La DEL (C.1) étant a priori implicite pour la variable  $q_{i+1}$ , il convient de la résoudre par une méthode de recherche de racine. Pour une implémentation efficace, la connaissance de la jacobienne de la DEL est alors nécessaire. Elle peut être construite par combinaison des dérivées secondes du lagrangien ; la donnée de ces dérivées d'ordre deux doit donc être fournie pour l'utilisation des méthodes numériques de la librairie.

La procédure suivante présente la démarche à suivre pour calculer la solution d'un système lagrangien :

1. Implémenter une classe d'objets définissant le système lagrangien, et fournissant les dérivées d'ordres 1 et 2 du lagrangien ; cette classe doit respecter certains modèles pour fonctionner au sein de la librairie (voir § C.2.2.1)
2. Appeler un intégrateur variationnel de la librairie parmi les implémentations disponibles (voir § C.2.2.2).

La procédure est détaillée sur l'exemple du problème de Kepler au § C.2.2.

### C.1.2 Méthodes de Runge-Kutta Munthe-Kaas

Le module RKMK implémente les méthodes numériques basées sur Runge-Kutta Munthe-Kaas. Étant donné un système différentiel du type

$$\dot{y} = A(t, y) y, \quad y(0) = y_0$$

où  $y$  est un élément d'un groupe de Lie matriciel  $G$ , et  $A(t, y) \in \mathfrak{g}$  pour tout  $t, y \in \mathbb{R} \times G$ , les méthodes RKMK consistent à résoudre l'équation différentielle réduite sur l'algèbre  $\mathfrak{g}$

$$\dot{\xi} = d^R \exp_{\xi}^{-1}(A(t, y(t))), \quad \xi(0) = 0, \quad (\text{C.2})$$

à l'aide d'une méthode de Runge-Kutta, puis à obtenir la solution dans le groupe via l'équation de reconstruction  $y_{i+1} = y_i \exp(\xi(h))$ . On s'assure de cette manière de la préservation de la structure de groupe de Lie. L'équation sur l'algèbre (C.2) peut être entièrement construite à partir de la donnée de la matrice  $A$ , qui doit donc être fournie au schéma numérique. La résolution de cette équation nécessite également la jacobienne de  $A$  dans le cas où la méthode de Runge-Kutta utilisée est implicite afin d'effectuer une recherche de zéro numérique. Le principe général d'utilisation du module RKMK est donc le suivant :

- Implémenter une classe d'objets définissant la matrice  $A$  et sa jacobienne (voir § C.2.3.1)
- Appeler un des intégrateurs RKMK de la librairie (voir § C.2.3.2).

Un exemple concret est proposé sur le solide rigide au § C.2.3.

## C.2 Principes généraux de l'implémentation

Le modèle du langage C++ offre plusieurs principes de design utilisés à différents niveaux dans la librairie. Nous supposons que le lecteur est familier des termes de la programmation orientée objet tels que classe, template, classe abstraite ou méthode, ainsi que les descriptions des structures à l'aide de diagrammes UML. Afin de ne pas alourdir la représentation des classes en diagrammes UML, seules ont été indiquées les structures considérées comme essentielles à la compréhension de l'organisation des objets. Pour une description exhaustive, le lecteur est invité à se référer à la documentation [15].

### C.2.1 Le module Common

Avant d'explorer les méthodes numériques implémentées dans Geomi, il est nécessaire de passer rapidement sur quelques éléments importants utilisés par tous les modules de la librairie.

### C.2.1.1 Représentation des systèmes physiques

Les systèmes physiques évoluant dans un espace  $Q$  sur une base  $\mathcal{M}$  discrétisée sont implémentés par une classe template `DiscSyst<T_M, T_Q>`. Cette représentation peut être pensée comme un tableau qui à chaque coordonnée d'indice  $i$  associe la configuration du système correspondante, et elle généralise une représentation qui est sous-tendue dans les différents modules. Le choix de discrétisation de l'espace de coordonnées utilisée pour les différentes méthodes numériques est fait en définissant l'ensemble des coordonnées sur lesquelles évolue l'instance du système discret. Cette classe n'est que rarement utilisée en tant que telle, mais plutôt accédée par des classes qui en héritent.

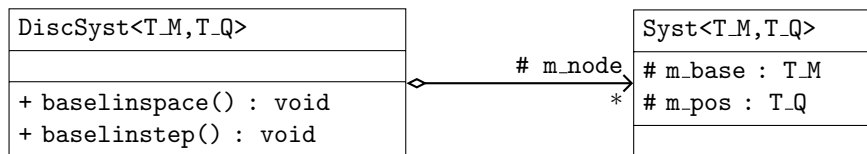


FIG. C.2 Diagramme de la classe template `DiscSyst<T_M, T_Q>`

### C.2.1.2 Représentation des vecteurs et solveurs numériques

Le calcul des racines des systèmes non linéaires, appelé pour toutes les méthodes numériques implicites, est fait par une librairie tierce, NOX, qui est un paquet de la librairie C++ Trilinos. Ce paquet propose de nombreux solveurs, puissants et personnalisables. Afin de permettre la résolution des systèmes non linéaires par cette librairie, certaines conventions de typage ont dû être adoptées dans l'implémentation de Geomi. En particulier, les solveurs de NOX prennent en argument des vecteurs représentés par une implémentation de la classe abstraite `NOX::Abstract::Vector`, et les données du solveur lui-même (solution, système, matrice jacobienne, etc) sont représentés par une implémentation de la class abstraite `NOX::Abstract::Group`. Pour éviter des conversions systématiques de type pour les vecteurs, les représentations internes de ces structures dans la librairie Geomi sont faites par les implémentations `NOXVector` et `NOXGroup` des classes abstraites correspondantes. Pour plus d'information, le lecteur est invité à se référer à la documentation du paquet NOX [106].

## C.2.2 Le module Variational : cas classique

### C.2.2.1 Implémentation des systèmes lagrangiens

La simplicité et la concision de la formulation des problèmes invitent à en proposer un traitement unifié. Dans le module `Variational`, l'accent a été mis sur l'uniformisation de la formulation, la modularité de l'implémentation, et la simplicité d'utilisation.

Comme nous avons pu le voir au § C.1.1, la donnée de quelques objets mathématiques suffit à définir un problème physique :

1. le domaine  $\mathcal{M}$  de définition de ses variables de base (en temps et en espace)
2. l'espace de configuration  $Q$  dans lequel est associé une position pour chaque valeur des variables de base

3. un lagrangien  $L : \mathcal{M} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$  qui traduit la physique du problème.

Il a été vu que les équations d'Euler-Lagrange discrètes sont formées par une somme pondérée de dérivées partielles premières du lagrangien évaluées en différents points. Par ailleurs, afin de construire la matrice jacobienne pour résoudre efficacement le système des équations d'Euler-Lagrange discrètes, il est nécessaire de connaître les dérivées secondes du lagrangien.

L'objectif de la librairie Geomi n'étant pas de proposer de fonctionnalités de calcul formel, il est du ressort de l'utilisateur d'implémenter les dérivées premières et secondes du lagrangien. En résumé, les données que l'utilisateur a à fournir pour définir le problème lagrangien pour la librairie sont les suivantes :

1. une implémentation de l'espace de base
2. une implémentation de l'espace de configuration
3. les dérivées d'ordre 1 et 2 du lagrangien du système.

**C.2.2.1.1 Espaces de base et de configuration** La librairie Geomi propose des implémentations pour des espaces standards ( $\mathbb{R}^n$ ,  $SO(3)$ ,  $SE(3)$ ) auxquelles l'utilisateur peut faire appel ; il est également possible d'en fournir d'autres. Dans le code, on fait de façon générique référence à ces espaces par les paramètres templates conventionnellement nommés `T_M` et `T_Q` respectivement.

**C.2.2.1.2 Système lagrangien** Le système lagrangien est défini en héritant la classe template abstraite `Variational::Abstract::Problem<T_M,T_Q>` qui hérite de la classe `DiscSyst<T_M,T_Q>` décrite plus haut. Six méthodes doivent être implémentées :

1. Les deux dérivées premières `dLdq` et `dLdv` qui retournent respectivement  $\partial L/\partial q$  et  $\partial L/\partial \dot{q}$  dans un vecteur de dimension  $\dim(Q)$ , utilisées pour construire la DEL de la méthode numérique.
2. Les quatre dérivées secondes `JqdLdq`, `JvdLdq`, `JqdLdv` et `JvdLdv` qui retournent respectivement  $\partial^2 L/\partial q^2$  et  $\partial^2 L/\partial \dot{q}\partial q$ ,  $\partial^2 L/\partial q\partial \dot{q}$  et  $\partial^2 L/\partial \dot{q}^2$  sous forme d'une matrice carrée de côté  $\dim(Q)$ , utilisées pour construire la matrice jacobienne de la DEL.

Définir un héritage de cette classe permet de définir un problème lagrangien dans le cadre de la librairie.

Nous donnons ici un exemple d'implémentation pour l'oscillateur harmonique à deux degrés de liberté. L'espace de configuration du système est donc  $\mathbb{R}^2$ , et le lagrangien du système

$$\mathcal{L}(q, v) = \frac{1}{2} \langle v, v \rangle - \frac{1}{2} \langle q, q \rangle.$$

La variable de temps est représentée par un `double`, et l'espace de configuration par une instantiation de classe template `NOXVector<2>` représentant un vecteur de  $\mathbb{R}^2$ .

```
typedef double      M;
typedef NOXVector<2> Q;
```

La classe héritant `Variational::Abstract::Problem<M,Q>` implémente le problème associé à l'oscillateur harmonique bidimensionnel.

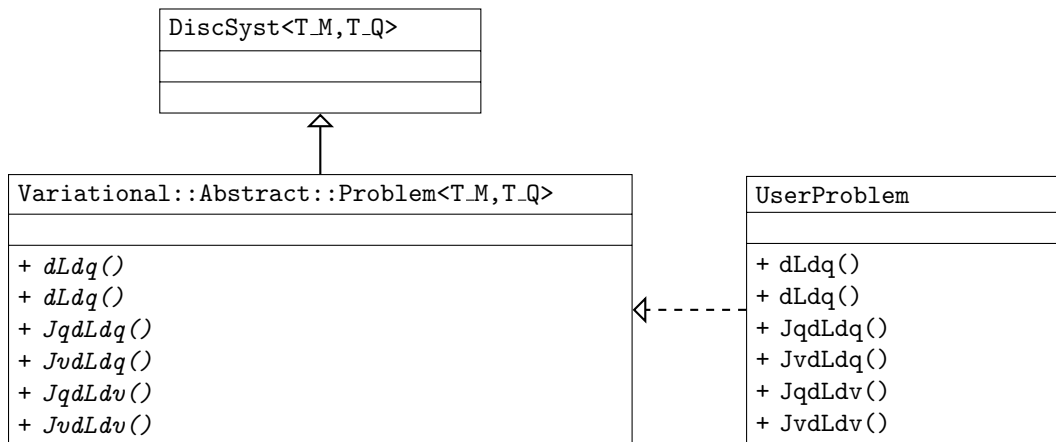


FIG. C.3 Diagramme pour l'implémentation par l'utilisateur d'une classe *UserProblem* représentant un problème lagrangien.

```

class HarmOsc : public Variational::Abstract::Problem<M,Q>
{
public:
    /* ... */

    Eigen::Matrix<double, Q::DOF, 1>
    dLdq (const Q q, const Q v)
    {
        Eigen::Matrix<double, Q::DOF, 1> _dLdq = -q;
        return _dLdq;
    }

    Eigen::Matrix<double, Q::DOF, 1>
    dLdv (const Q q, const Q v)
    {
        Eigen::Matrix<double, Q::DOF, 1> _dLdv = v;
        return _dLdv;
    }

    Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>
    JqdLdq (const Q q, const Q v)
    {
        Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF> _JqdLdq
            = Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>::Zero();
        _JqdLdq(0,0) = -1.0;
        return _JqdLdq;
    }

    Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>
    JvdLdq (const Q q, const Q v)
    { return Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>::Zero(); }

    Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>
    JqdLdv (const Q q, const Q v)
    { return Eigen::Matrix<double, Q::DOF, Q::DOF>::Zero(); }
  
```

```

Eigen::Matrix<double,Q::DOF,Q::DOF>
JvdLdv (const Q q, const Q v)
{
    Eigen::Matrix<double,Q::DOF,Q::DOF> _JvdLdv
        = Eigen::Matrix<double,Q::DOF,Q::DOF>::Zero();
    _JvdLdv(1,1) = 1.0;
    return _JvdLdv;
}
};

```

### C.2.2.2 Intégrateurs variationnels

Chaque méthode numérique variationnelle distincte est implémentée par sa propre paire de classes, héritant respectivement des classes abstraites `Variational::Abstract::Step` pour l'une, et `Variational::Abstract::StepInternals` et `Abstract::NOXStep` pour l'autre. Elles sont généralement nommées par convention `MethodStep` et `MethodStepInternals` où `Method` est le nom de la méthode appropriée.

**C.2.2.2.1 La classe `MethodStepInternals`** Cette classe constitue le cœur de la méthode numérique à proprement parler puisqu'elle encode les équations d'Euler-Lagrange discrètes et la matrice jacobienne correspondante. Trois méthodes héritées de la classe abstraite `Abstract::NOXStep` sont à implémenter :

1. `getInitialGuess` qui retourne une heuristique pour initialiser le solveur avec une configuration du système
2. `computeF` qui à une configuration donnée du système associe le vecteur correspondant aux équations d'Euler-Lagrange en coordonnées
3. `computeJacobian` qui à une configuration donnée du système associe la matrice jacobienne des équations d'Euler-Lagrange.

La classe `Variational::Abstract::StepInternals` implémente elle pour sa part quelques routines, et contient le prototype d'une fonction à implémenter, `posFromVel`, qui transforme un couple position-vitesse en couple position-position en cohérence avec la méthode numérique (cette fonction sert lors de l'initialisation du système pour uniformiser les types de conditions aux bords).

**C.2.2.2.2 La classe `MethodStep`** Elle implémente la classe `Variational::Abstract::Step` qui contient trois méthodes abstraites :

1. `setData` qui permet d'initialiser les données du problème
2. `initialize` qui résout le problème sur le premier intervalle de temps. Cette méthode n'est utilisée que par les méthodes multisteps
3. `makeStep` qui appelle un solveur numérique de la librairie NOX pour résoudre les équations d'Euler-Lagrange discrètes sur un pas de temps.

L'itération de la méthode sur l'ensemble de l'intervalle d'intégration est effectué par un objet d'une instantiation de la classe template `Variational::Integrator`.



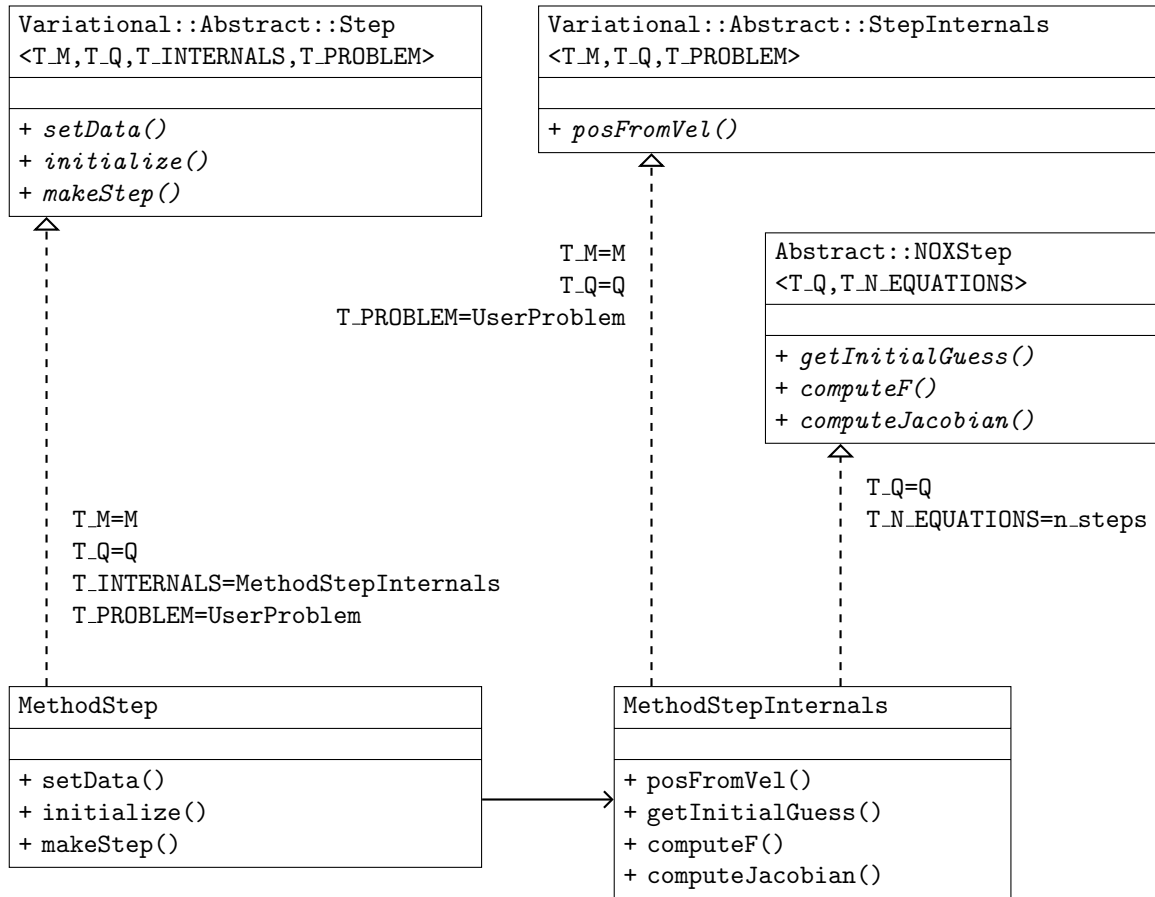


FIG. C.4 Diagramme pour l'implémentation des classes *MethodStep* et *MethodStepInternals*

**C.2.2.2.3 Intégrateurs implémentés** Toutes les méthodes implémentées peuvent être facilement instanciées via la classe `Variational::Factory` dont la méthode `createIntegrator` prend en entrée une chaîne de caractère correspondant à une méthode existante. Les méthodes disponibles sont ici détaillées.

**Méthode basée sur la méthode des rectangles explicite** L'intégrale d'action est approchée par méthode des rectangles à gauche et la solution projetée sur l'espace des polynômes de degré 1 par morceaux dérivables à droite

$$\int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt \approx hL\left(q_0, \frac{q_1 - q_0}{h}\right).$$

**Méthode basée sur la méthode des rectangles implicite** L'intégrale est celle fois approchée par méthodes des rectangles à droite

$$\int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt \approx hL\left(q_1, \frac{q_1 - q_0}{h}\right).$$

**Méthode du point milieu** L'intégrale est évaluée sur le milieu de son intervalle, ce qui donne

$$\int_0^h L(q(t), \dot{q}(t)) dt \approx hL\left(\frac{q_0 + q_1}{2}, \frac{q_1 - q_0}{h}\right).$$

**Méthode de Galerkin** La solution est interpolée par l'ensemble des polynômes de degré  $M$  par morceaux, et pour chaque intervalle est donc fixée par la donnée de  $M + 1$  configurations  $\{q_i^\mu\}_{\mu=0}^M$ . L'intégrale est approchée par une quadrature de Gauss-Legendre  $(c_a, w_a)_{a=1}^A$  à  $A$  points. On définit l'intégrale d'action par un principe d'optimisation local sur les configurations de la solution à l'intérieur de l'intervalle de temps

$$\int_0^h \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t)) dt \approx \underset{\{q_i^\mu\}_{\mu=1}^{M-1} \in Q}{\text{ext}} h \sum_{i=1}^r w_i L(\tilde{q}(c_i h), \dot{\tilde{q}}(c_i h)).$$

Nous proposons un exemple d'utilisation d'intégrateur variationnel en reprenant l'exemple présenté au § C.2.2.1.2 de l'oscillateur harmonique. L'axe temporel est discrétisé en prenant un pas de temps  $h = 0.2$  et un nombre d'échantillons  $I = 250$ . Le problème est initialisé avec les données suivantes

$$q(0) = (0.2, 0.4)^T, \quad \dot{q}(0) = (0.3, -0.5)^T.$$

Un intégrateur de Galerkin basé sur une interpolation par des polynômes de degré 2 et une quadrature de Gauss-Legendre d'ordre 2 est instancié en appelant la méthode `createIntegrator` de la classe `Variational::Factory`.

```
double h = 0.2;
int n_steps = 250;

HarmOsc harm_osc;
harm_osc.baselinstep(0.0, h, n_steps);

Q pos, vel;
pos << 0.2, 0.4;
vel << 0.3, -0.5;
harm_osc.pos(0, pos);
harm_osc.vel(0, vel);

Variational::Abstract::Integrator& integrator =
    Variational::Factory<double, Q, HarmOsc>
        ::createIntegrator(harm_osc, "Galerkin_P2N2Gau");

integrator.initialize();
integrator.integrate();
```

## C.2.3 Le module RKMK

### C.2.3.1 Implémentation du système dynamique

La définition du problème se fait par la donnée des objets mathématiques suivants :

1. La variété  $\mathcal{M}$  sur laquelle est formulée l'équation différentielle

2. L'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  agissant sur l'espace de configuration
3. La matrice  $A \in \mathfrak{g}^*$  associée à chaque configuration

Les espaces standards  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathfrak{so}(3)$ ,  $\mathfrak{se}(3)$  sont implémentés dans la librairie, auxquels l'utilisateur peut également ajouter les siens.

**C.2.3.1.1 Système dynamique** Le système dynamique est défini en héritant la classe abstraite `RKMK::Abstract::Problem<T_LIE_ALGEBRA>` et en implémentant les deux méthodes abstraites suivantes :

1. `computeA` qui retourne la valeur de  $A \in \mathfrak{g}^*$  pour une configuration  $y$  donnée
2. `computeJacobianA` qui retourne la jacobienne de  $A$  pour une configuration  $y$  donnée.

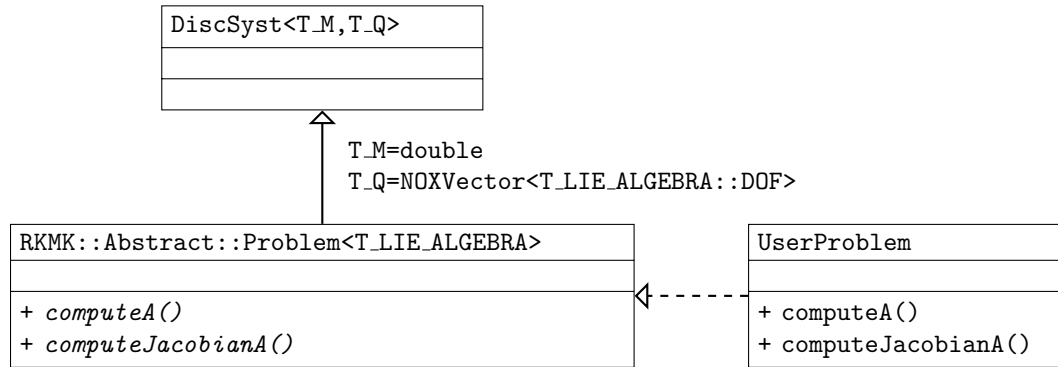


FIG. C.5 Diagramme pour l'implémentation par l'utilisateur d'une classe `UserProblem` représentant un système dynamique pour le module `RKMK`.

Pour illustrer cette définition, nous proposons un exemple d'implémentation du problème du solide indéformable en champ libre. L'équation modélisant ce système est

$$\dot{\pi} = \begin{pmatrix} 0 & \pi_1/I_3 & -\pi_2/I_2 \\ -\pi_3/I_3 & 0 & \pi_1/I_1 \\ \pi_2/I_2 & -\pi_1/I_1 & 0 \end{pmatrix} \pi, \quad \pi(0) = \pi_0$$

où  $\pi \in \mathcal{M} = \mathbb{R}^3$  est le moment cinétique du solide,  $J = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$  est le tenseur d'inertie, et la matrice  $A$  est un élément de  $\mathfrak{so}(3)$ .

Dans le module `RKMK`, la variable de temps est toujours représentée par un `double`. L'espace de configuration  $\mathbb{R}^3$  et l'algèbre de Lie  $\mathfrak{so}(3)$  sont définis par des types implémentés dans la librairie `Geomi`.

```

typedef NOXVector<3> Q;
typedef S03::Algebra<double> Algebra;
  
```

En héritant `RKMK::Abstract::Problem<Algebra>`, la classe `RigidBody` définit le problème du solide indéformable.

```

class RigidBodyProblem : public RKMK::Abstract::Problem<Algebra>
{
private:
  
```

```

        Eigen::Matrix<double,3,1> m_Iinv;

    public:
        /* ... */

        bool
        computeA (Algebra& A, const Q& x)
        {
            A = Algebra((-m_Iinv).asDiagonal()*x);
            return true;
        }

        bool
        computeJacobianA (std::vector<Algebra>& JA, const Q& x)
        {
            Eigen::Matrix<double,3,3> M = (-m_Iinv).asDiagonal();
            for (int i=0; i<3; i++)
                JA.push_back(Algebra(M.col(i)));
            return true;
        }
};

```

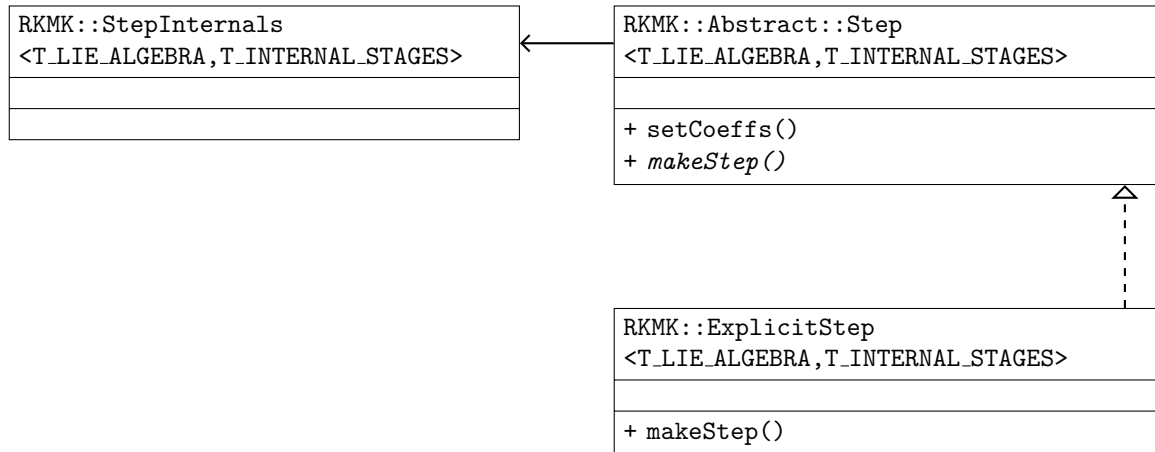
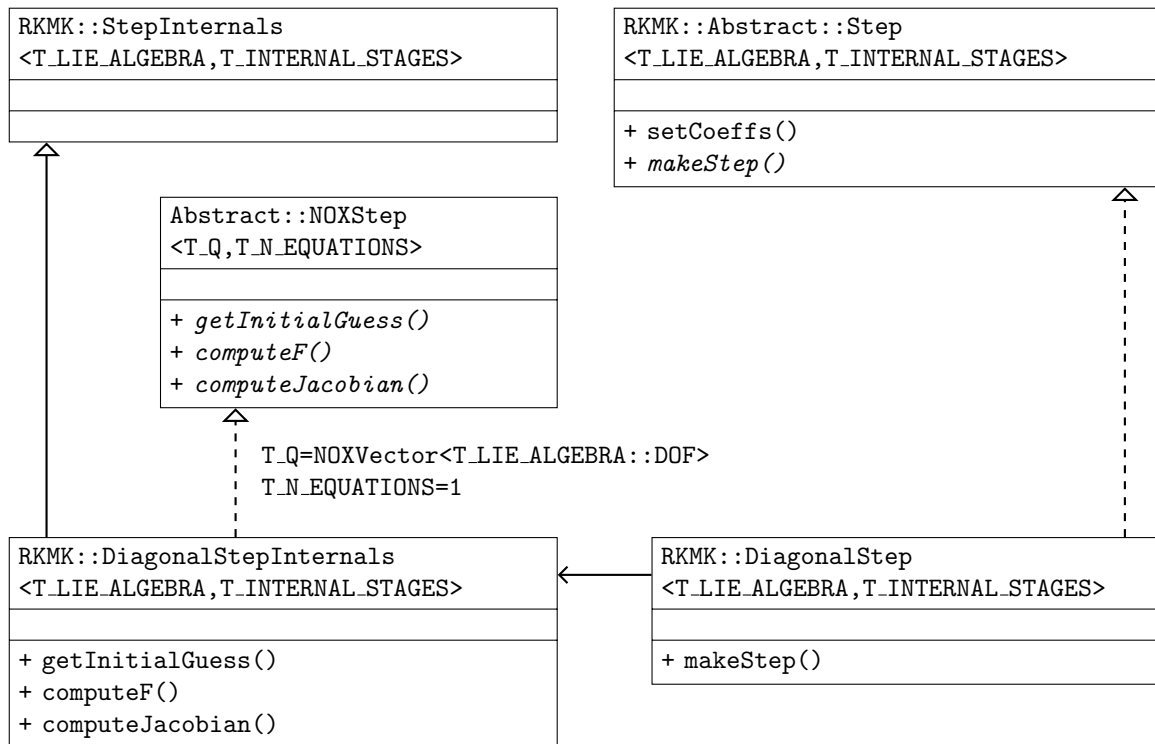
### C.2.3.2 Intégrateurs

Comme pour le module `Variational`, il existe une unique classe implémentant un intégrateur numérique, et celle-ci fait appel aux différentes réalisations de la classe abstraite `RKMK::Abstract::Step`. La différence ici est que la classe représentant l'équation différentielle, `RKMK::StepInternals`, n'est pas abstraite et correspond à une implémentation par défaut pour les méthodes explicites. Pour les méthodes implicites, elle doit être héritée par une autre classe sur le modèle présenté en section [C.2.3.2.2](#).

Deux familles de méthodes ont été implémentées dans des classes séparées. Celles-ci ne regroupent pas toutes les méthodes, mais permettent l'utilisation d'un grand nombre de méthodes classiques. On présente ici leurs légères différences de structure et les méthodes numériques qu'elles encodent.

**C.2.3.2.1 La classe `RKMK::ExplicitStep`** Cette classe représente les méthodes RKMK explicites, c'est à dire dont les tableaux de Butcher sont diagonaux inférieurs stricts ; autrement dit  $\forall i \leq j, a_{i,j} = 0$ . Les coefficients de la méthode peuvent être passés à l'instance de classe via la méthode `setCoeffs` de la classe `RKMK::Abstract::Step`. Étant donné qu'elle est explicite, cette méthode n'a pas besoin de faire appel à un solveur extérieur, et utilise la classe par défaut `RKMK::StepInternals` pour représenter l'équation différentielle.

**C.2.3.2.2 La classe `RKMK::DiagonalStep`** Cette classe encode les méthodes RKMK implicites diagonales, c'est à dire dont les tableaux de Butcher sont diagonaux inférieurs ; autrement dit  $\forall i < j, a_{i,j} = 0$ . La classe a recours à une classe `RKMK::DiagonalStepInternals` héritée de `RKMK::StepInternals` pour représenter l'équation différentielle. La classe `RKMK::DiagonalStep` permet la résolution du système implicite défini par la méthode ; à cette fin, elle hérite également de la classe `Abstract::NOXStep` pour que puisse lui être appliqué un solveur numérique de la librairie NOX.

FIG. C.6 Diagramme d'implémentation de la classe `RKMK::ExplicitStep`FIG. C.7 Diagramme d'implémentation des classes `RKMK::DiagonalStep` et `RKMK::DiagonalStepInternals`

Nous proposons ici un exemple d'utilisation d'intégrateur sur le système du solide rigide. Le système est discrétisé en prenant un pas de  $h = 0.1s$  sur  $n = 1000$  échantillons. Les données du problèmes sont initialisées par

$$\mathbb{J} = \text{diag}(3/2, 1, 1/2), \quad \pi_0 = (\cos(\pi/3), 0, \sin(\pi/3))^T$$

et le système est intégré par une méthode RKMK4 basée sur la méthode explicite de Runge-

Kutta classique d'ordre 4. Cet intégrateur est appelé grâce à la fonction `createIntegrator` de la classe `RKMK::Factory` qui prend en entrée un objet modélisant le système physique et une chaîne de caractère correspondant à une méthode de Runge-Kutta.

```
double h = 0.1;
int n_steps = 1000;
RigidBodyProblem myProblem;
myProblem.baselinstep(0.0,h,n_steps);

Eigen::Matrix<double,3,1> Iinv(3.0/2.0,1.0,0.5);
myProblem.Iinv(Iinv);

Eigen::Matrix<double,3,1> pos(cos(M_PI/3.0), 0.0, sin(M_PI/3.0));
myProblem.pos(0,pos);

RKMK::Abstract::Integrator& integrator =
    RKMK::Factory<Algebra>::createIntegrator(myProblem,"RK4");

bool success = integrator.integrate();
```

## C.3 Perspectives

Nous proposons ici quelques pistes pour étendre et améliorer la librairie.

### C.3.1 Interface haut-niveau

Le bas niveau d'abstraction du langage C++ le rend plus difficile à appréhender que des langages comme Matlab ou Python. Dans l'objectif de rendre les intégrateurs implémentés accessibles "clef en main" à des utilisateurs mathématiciens et physiciens ne maîtrisant pas nécessairement le C++, il serait souhaitable de proposer une interface utilisateur en Python. Les entrées de l'utilisateur pourraient alors se faire dans ce langage, qui appellerait ensuite la librairie Geomi en arrière-plan pour effectuer l'intégration numérique. Cela pourrait par ailleurs permettre de décharger l'utilisateur de la tâche de la double dérivation du lagrangien, nécessaire pour l'utilisation de Geomi. Des paquets de calculs symboliques comme `sympy` peuvent en effet permettre d'effectuer cette étape. Le calcul symbolique offre par ailleurs d'autres avantages qui sont l'objet de la remarque suivante.

### C.3.2 Calcul symbolique

Tous les calculs sont effectués dans Geomi de manière numérique, et la librairie est totalement agnostique vis-à-vis de la notion de calcul symbolique. Or, selon le système modélisé, des simplifications mathématiques peuvent parfois s'opérer. En tirer parti permettrait d'améliorer dans certain cas la vitesse de calcul. Prenons l'exemple de la méthode du rectangle appliquée au pendule simple. Le lagrangien de ce système est défini par  $\mathcal{L}(q, \dot{q}) = \dot{q}^2/2 + \cos(q)$ , et son lagrangien discret par

$$\mathcal{L}_d(q_0, q_1) = \frac{1}{2} \frac{(q_1 - q_0)^2}{h} + h \cos(q_0)$$

À chaque pas  $(q_{i-1}, q_i) \mapsto (q_i, q_{i+1})$ , l'appel à l'intégrateur dans `Geomi` va résoudre implicitement l'équation d'Euler-Lagrange discrète pour la variable  $q_{i+1}$

$$\frac{q_{i+1} - q_i}{h} + h \sin(q_i) - \frac{q_i - q_{i-1}}{h} = 0$$

alors que  $q_{i+1}$  peut s'exprimer explicitement en fonction des variables  $q_{i-1}, q_i$  en réécrivant l'équation ci-dessus comme

$$q_{i+1} = 2q_i - q_{i-1} - h^2 \sin(q_i).$$

En ayant recours à un paquet de calcul comme `sympy` en Python, il est possible d'explicitement l'équation d'Euler-Lagrange et, si besoin est, de définir l'expression de sa matrice jacobienne en vue de sa résolution implicite. Cette expression symbolique peut ensuite être traduite dans le langage C++, puis compilée et résolue à l'aide de solveurs numériques efficaces comme `NOX`. Précisons que l'implémentation de cette proposition nécessiterait une réécriture importante de `Geomi`.

### C.3.3 Méthodes covariantes

Les intégrateurs implémentés dans `Geomi` ne gère actuellement que l'approximation des EDOs. Une piste de développement serait l'implémentation de méthodes covariantes aptes à calculer les solutions numériques des équations aux dérivées partielles formulées à l'aide d'une densité lagrangienne (chapitre 3). Une telle extension nécessite cependant une description générale et flexible de la discrétisation spatio-temporelle de l'espace de base, et de sa prise en charge par les méthodes covariantes ; description qu'il est au préalable nécessaire de formuler dans un cadre théorique, ce qui reste encore à établir.

# Bibliographie

- [1] G. ANAND, « Large-Amplitude Damped Free Vibration of a Stretched String, » *Journal of The Acoustical Society of America - J ACOUST SOC AMER*, t. 45, 1969. DOI : [10.1121/1.1911578](https://doi.org/10.1121/1.1911578).
- [2] S. S. ANTMAN, « Kirchhoff's problem for nonlinearly elastic rods, » *Quarterly of Applied Mathematics*, t. 32, n° 3, p. 221-240, 1974. DOI : [10.1090/qam/667026](https://doi.org/10.1090/qam/667026).
- [3] M. F. ASHBY, *Materials Selection in Mechanical Design*, 4th ed. Burlington, MA : Butterworth-Heinemann, 2011, 646 p.
- [4] H. F. BAKER, « Alternants and Continuous Groups, » *Proceedings of the London Mathematical Society*, t. s2-3, n° 1, p. 24-47, 1905. DOI : [10.1112/plms/s2-3.1.24](https://doi.org/10.1112/plms/s2-3.1.24).
- [5] F.-A. BAUGÉ, « Approche géométrique multi-symplectique pour la synthèse sonore par modèles physiques dans les environnements virtuels 3D interactifs, » UPMC, Paris, 2015.
- [6] J. BENSA, S. BILBAO, R. KRONLAND-MARTINET et J. SMITH, « The Simulation of Piano String Vibration : From Physical Models to Finite Difference Schemes and Digital Waveguides., » *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2003. DOI : [10.1121/1.1587146](https://doi.org/10.1121/1.1587146).
- [7] J. BENSOAM et F.-A. BAUGÉ. « Multisymplectic Geometry and Covariant Formalism for Mechanical Systems with a Lie Group as Configuration Space : Application to the Reissner Beam. » arXiv : [1708.01469 \[math-ph\]](https://arxiv.org/abs/1708.01469). (4 août 2017).
- [8] J. BENSOAM et D. ROZE, « Modelling and Numerical Simulation of Strings Based on Lie Groups and Algebras Applications to the Nonlinear Dynamics of Reissner Beams, » in *International Conference on Acoustics*, Madrid, Spain, 1<sup>er</sup> sept. 2007.
- [9] S. BILBAO, « Conservative Numerical Methods for Nonlinear Strings, » *Journal of The Acoustical Society of America - J ACOUST SOC AMER*, t. 118, p. 3316-3327, 1<sup>er</sup> nov. 2005. DOI : [10.1121/1.2046787](https://doi.org/10.1121/1.2046787).
- [10] S. BILBAO, « Robust Physical Modeling Sound Synthesis for Nonlinear Systems, » *Signal Processing Magazine, IEEE*, t. 24, p. 32-41, 1<sup>er</sup> avr. 2007. DOI : [10.1109/MSP.2007.323262](https://doi.org/10.1109/MSP.2007.323262).
- [11] X. BOUTILLON, J. C. RADIER, C. VALETTE et M. CASTELLENGO, « Étude Expérimentale Des Cordes Pourvues de Raideur, » *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, II, t. 298, p. 815-820, 1984.
- [12] J. BUTCHER, « Coefficients for the Study of Runge-Kutta Integration Processes, » 1963. DOI : [10.1017/S1446788700027932](https://doi.org/10.1017/S1446788700027932).



- [13] J. BUTCHER, « Implicit Runge-Kutta Processes, » 1964. DOI : [10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1964-0159424-9).
- [14] J. A. CADZOW, « Discrete Calculus of Variations, » *International Journal of Control*, t. 11, n° 3, p. 393-407, 1<sup>er</sup> mars 1970. DOI : [10.1080/00207177008905922](https://doi.org/10.1080/00207177008905922).
- [15] P. CARRE. « Geomi Library Documentation. » (2019), adresse : <https://rdudisk.github.io/GeometricIntegration/doc/html/index.html>.
- [16] G. F. CARRIER, « On the non-linear vibration problem of the elastic string, » *Quarterly of Applied Mathematics*, t. 3, n° 2, p. 157-165, 1<sup>er</sup> juill. 1945. DOI : [10.1090/qam/12351](https://doi.org/10.1090/qam/12351).
- [17] J. CHABASSIER, « Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques, » thèse de doct., Ecole Polytechnique X, 12 mars 2012.
- [18] J. CHABASSIER, A. CHAIGNE et P. JOLY, « Time domain simulation of a piano. Part 1 : model description., » *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, t. 48, n° 05, p. 1241-1278, 18 nov. 2013. DOI : [10.1051/m2an/2013136](https://doi.org/10.1051/m2an/2013136).
- [19] J. CHABASSIER, M. DURUFLÉ et P. JOLY, « Time Domain Simulation of a Piano. Part 2 : Numerical Aspects, » *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, t. 50, n° 1, p. 93-133, jan. 2016.
- [20] J. CHABASSIER et S. IMPERIALE, « Stability and Dispersion Analysis of Improved Time Discretization for Simply Supported Prestressed Timoshenko Systems. Application to the Stiff Piano String., » *Wave Motion*, t. 50, n° 3, p. 456-480, nov. 2012. DOI : [10.1016/j.wavemoti.2012.11.002](https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2012.11.002).
- [21] J.-B. CHEN, « Variational Integrators and the Finite Element Method, » *Applied Mathematics and Computation*, t. 196, n° 2, p. 941-958, 1<sup>er</sup> mars 2008. DOI : [10.1016/j.amc.2007.07.028](https://doi.org/10.1016/j.amc.2007.07.028).
- [22] Z. CHEN et T. HOU, « A mixed multiscale finite element method for elliptic problems with oscillating coefficients, » *Mathematics of Computation*, t. 72, n° 242, p. 541-576, 2003. DOI : [10.1090/S0025-5718-02-01441-2](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-02-01441-2).
- [23] D. CHEVALLIER, *Introduction à La Théorie Des Groupes de Lie Réels : Niveau M1 - M2*. Paris : ELLIPSES MARKET, 2006, 370 p.
- [24] D. P. CHEVALLIER et J. LERBET, *Multi-Body Kinematics and Dynamics with Lie Groups* (Mechanical Engineering and Solid Mechanics). London, UK : ISTE Press/Elsevier, 2018, 315 p.
- [25] G. COWPER, « The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, » 1966. DOI : [10.1115/1.3625046](https://doi.org/10.1115/1.3625046).
- [26] P. E. CROUCH et R. GROSSMAN, « Numerical integration of ordinary differential equations on manifolds, » *Journal of Nonlinear Science*, t. 3, n° 1, p. 1-33, 1<sup>er</sup> déc. 1993. DOI : [10.1007/BF02429858](https://doi.org/10.1007/BF02429858).
- [27] J. d'ALEMBERT, « Recherches Sur La Courbe Que Forme Une Corde Tendue Mise En Vibration, » *2017, September 30 ORESME Reading Group Meeting*, 1<sup>er</sup> jan. 1747.

- [28] F. DEMOURES, F. GAY-BALMAZ, M. DESBRUN, T. S. RATIU et A. M. ARAGÓN, « A multisymplectic integrator for elastodynamic frictionless impact problems, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 315, p. 1025-1052, 1<sup>er</sup> mars 2017. DOI : [10.1016/j.cma.2016.11.011](https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.11.011).
- [29] F. DEMOURES, F. GAY-BALMAZ, M. KOBILAROV et T. S. RATIU, « Multisymplectic Lie Group Variational Integrator for a Geometrically Exact Beam in R3, » *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, t. 19, n° 10, p. 3492-3512, 1<sup>er</sup> oct. 2014. DOI : [10.1016/j.cnsns.2014.02.032](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.02.032).
- [30] F. DEMOURES, F. GAY-BALMAZ, J. NEMBRINI, T. RATIU et Y. WEINAND, « Flexible Beam in R3 under Large Overall Motions and Asynchronous Variational Integrators, » jan. 2011.
- [31] F. DEMOURES, F. GAY-BALMAZ et T. S. RATIU, « Multisymplectic Variational Integrators and Space/Time Symplecticity, » *Analysis and Applications*, t. 14, 17 oct. 2013. DOI : [10.1142/S0219530515500025](https://doi.org/10.1142/S0219530515500025).
- [32] M. DUCCESCHI et S. BILBAO, « Non-Iterative, Conservative Schemes for Geometrically Exact Nonlinear String Vibration, » 30 août 2019.
- [33] A. ECHEVERRÍA-ENRÍQUEZ, M. C. MUÑOZ-LECANDA et N. ROMÁN-ROY, « Geometry of Lagrangian First-order Classical Field Theories, » *Fortschritte der Physik/Progress of Physics*, t. 44, n° 3, p. 235-280, 1996. DOI : [10.1002/prop.2190440304](https://doi.org/10.1002/prop.2190440304). arXiv : [dg-ga/9505004](https://arxiv.org/abs/dg-ga/9505004).
- [34] E. EICH-SOELLNER et C. FUHRER, *Numerical Methods in Multibody Dynamics*. Wiesbaden : Vieweg Verlag, Friedr. & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, 1998.
- [35] D. C. P. ELLIS, F. GAY-BALMAZ, D. D. HOLM, V. PUTKARADZE et T. S. RATIU, « Symmetry Reduced Dynamics of Charged Molecular Strands, » *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, t. 197, n° 3, p. 811-902, 1<sup>er</sup> sept. 2010. DOI : [10.1007/s00205-010-0305-y](https://doi.org/10.1007/s00205-010-0305-y).
- [36] N. ELLIS, J. BENSOAM et R. CAUSSÉ, « Modalys Demonstration, » 1<sup>er</sup> sept. 2005.
- [37] D. ESTEP et D. FRENCH, « Global error control for the continuous Galerkin finite element method for ordinary differential equations, » *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, t. 28, n° 7, p. 815-852, 1994.
- [38] L. EULER, « Sur la vibration des cordes, » *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, t. 4, p. 69-85, 1750.
- [39] A. FALAIZE, « Modélisation, Simulation, Génération de Code et Correction de Systèmes Multi-Physiques Audios : Approche Par Réseau de Composants et Formulation Hamiltonienne à Ports, » Theses, Université Pierre & Marie Curie - Paris 6, juill. 2016.
- [40] A. FALAIZE et T. HÉLIE, « Passive Guaranteed Simulation of Analog Audio Circuits : A Port-Hamiltonian Approach, » *Applied Sciences*, t. 6, n° 10, p. 273, 24 sept. 2016. DOI : [10.3390/app6100273](https://doi.org/10.3390/app6100273).

- [41] A. FALAIZE et T. HÉLIE, « Passive simulation of the nonlinear port-Hamiltonian modeling of a Rhodes Piano, » *Journal of Sound and Vibration*, t. 390, p. 289-309, mars 2017. DOI : [10.1016/j.jsv.2016.11.008](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.11.008).
- [42] R. C. FETECAU, J. E. MARSDEN et M. WEST, « Variational Multisymplectic Formulations of Nonsmooth Continuum Mechanics, » in *Perspectives and Problems in Nonlinear Science*, E. KAPLAN, J. E. MARSDEN et K. R. SREENIVASAN, éd., New York, NY : Springer New York, 2003, p. 229-261. DOI : [10.1007/978-0-387-21789-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-0-387-21789-5_7).
- [43] F. GALLISSOT, « Les Formes Extérieures En Mécanique, » 1952. DOI : [10.5802/AIF.49](https://doi.org/10.5802/AIF.49).
- [44] F. GALLISSOT, « Les Formes Extérieures et La Mécanique Des Milieux Continus, » *Annales de l'Institut Fourier*, t. 8, p. 291-335, 1958. DOI : [10.5802/aif.82](https://doi.org/10.5802/aif.82).
- [45] C. F. GAUSS, *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* (Nineteenth Century Collections Online (NCCO) : Science, Technology, and Medicine : 1780-1925.). Gottingae : H. Dieterich, 1815, 1 online resource (40 p.).
- [46] N. GIORDANO et J. P. WINANS, « Plucked strings and the harpsichord, » *Journal of Sound and Vibration*, t. 224, n° 3, p. 455-473, 15 juill. 1999. DOI : [10.1006/jsvi.1999.2187](https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2187).
- [47] E. HAIRER, C. LUBICH et G. WANNER, *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations* (Springer Series in Computational Mathematics), 2<sup>e</sup> éd. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2006.
- [48] E. HAIRER et G. WANNER, « Implementation of Implicit Runge-Kutta Methods, » in *Solving Ordinary Differential Equations II : Stiff and Differential-Algebraic Problems*, sér. Springer Series in Computational Mathematics, E. HAIRER et G. WANNER, éd., Berlin, Heidelberg : Springer, 1996, p. 118-130. DOI : [10.1007/978-3-642-05221-7\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7_8).
- [49] J. HALL, « Convergence of Galerkin Variational Integrators for Vector Spaces and Lie Groups, » UCSD, 2013.
- [50] J. HALL et M. LEOK, « Spectral variational integrators, » *Numerische Mathematik*, t. 130, n° 4, p. 681-740, août 2015. DOI : [10.1007/s00211-014-0679-0](https://doi.org/10.1007/s00211-014-0679-0).
- [51] J. HALL et M. LEOK, « Lie Group Spectral Variational Integrators, » *Foundations of Computational Mathematics*, t. 17, n° 1, p. 199-257, 1<sup>er</sup> fév. 2017. DOI : [10.1007/s10208-015-9287-3](https://doi.org/10.1007/s10208-015-9287-3).
- [52] W. R. HAMILTON et F. BEAUFORT, « On a General Method in Dynamics, » *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, t. 124, p. 247-308, 1834. DOI : [10.1098/rstl.1834.0017](https://doi.org/10.1098/rstl.1834.0017).
- [53] F. HÉLEIN. « Systèmes Différentiels Extérieurs. » (2009), adresse : <https://webusers.imj-prg.fr/~frederic.helein/cours/sdem1.pdf>.
- [54] T. HÉLIE et D. ROZE, « Sound Synthesis of a Nonlinear String Using Volterra Series, » *Journal of Sound and Vibration - J SOUND VIB*, t. 314, 1<sup>er</sup> juill. 2008. DOI : [10.1016/j.jsv.2008.01.038](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.01.038).

- [55] D. D. HOLM, *Geometric Mechanics*. London : Hackensack, NJ : Imperial College Press ; Distributed by World Scientific, 2008, 2 p.
- [56] T. Y. HOU et X.-H. WU, « A Multiscale Finite Element Method for Elliptic Problems in Composite Materials and Porous Media, » *Journal of Computational Physics*, t. 134, n° 1, p. 169-189, 1<sup>er</sup> juin 1997. DOI : [10.1006/jcph.1997.5682](https://doi.org/10.1006/jcph.1997.5682).
- [57] B. L. HULME, « Discrete Galerkin and Related One-Step Methods for Ordinary Differential Equations, » *Mathematics of Computation*, t. 26, n° 120, p. 11, 1972.
- [58] B. L. HULME, « One-Step Piecewise Polynomial Galerkin Methods for Initial Value Problems, » *Mathematics of Computation*, t. 26, n° 118, p. 12, 1972.
- [59] D. Q. HUYNH, « Metrics for 3D Rotations : Comparison and Analysis, » *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, t. 35, n° 2, p. 155-164, oct. 2009. DOI : [10.1007/s10851-009-0161-2](https://doi.org/10.1007/s10851-009-0161-2).
- [60] C. L. HWANG et L. T. FAN, « A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle, » *Operations Research*, t. 15, n° 1, p. 139-146, 1967. JSTOR : [168518](https://www.jstor.org/stable/168518).
- [61] A. ISERLES, « On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals I : Fourier transforms, » *IMA Journal of Numerical Analysis*, t. 24, n° 3, p. 365-391, 1<sup>er</sup> juill. 2004. DOI : [10.1093/imanum/24.3.365](https://doi.org/10.1093/imanum/24.3.365).
- [62] A. ISERLES, « On the numerical quadrature of highly-oscillating integrals II : Irregular oscillators, » *IMA Journal of Numerical Analysis*, t. 25, n° 1, p. 25-44, 1<sup>er</sup> jan. 2005. DOI : [10.1093/imanum/drh022](https://doi.org/10.1093/imanum/drh022).
- [63] A. ISERLES et S. P. NØRSETT, « Efficient Quadrature of Highly Oscillatory Integrals Using Derivatives, » *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2005. DOI : [10.1098/rspa.2004.1401](https://doi.org/10.1098/rspa.2004.1401).
- [64] A. ISERLES, H. Z. MUNTHER-KAAS, S. P. NØRSETT et A. ZANNA, « Lie-group methods, » *Acta Numerica 2000*, t. 9, n° 0, p. 215-365, jan. 2000. DOI : [10.1017/S0962492900002154](https://doi.org/10.1017/S0962492900002154).
- [65] A. ISHIKAWA, D. MICHELS et T. YAGUCHI, « Geometric-Integration Tools for the Simulation of Musical Sounds, » *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, t. 35, 13 jan. 2018. DOI : [10.1007/s13160-017-0292-6](https://doi.org/10.1007/s13160-017-0292-6).
- [66] B. W. JORDAN et E. POLAK, « Theory of a Class of Discrete Optimal Control Systems, » *Journal of Electronics and Control*, t. 17, n° 6, p. 697-711, 1<sup>er</sup> déc. 1964. DOI : [10.1080/00207216408937740](https://doi.org/10.1080/00207216408937740).
- [67] O. JUNGE, J. MARSDEN et S. OBER-BLÖBAUM, « Discrete Mechanics and Optimal Control, » 2005. DOI : [10.3182/20050703-6-CZ-1902.00745](https://doi.org/10.3182/20050703-6-CZ-1902.00745).
- [68] O. JUNGE, J. E. MARSDEN et S. OBER-BLÖBAUM, « Optimal Reconfiguration of Formation Flying Spacecraft - a Decentralized Approach, » in *In 45th IEEE Conference on Decision and Control*, 2006, p. 5210-5215.
- [69] C. KANE, J. E. MARSDEN et M. ORTIZ, « Symplectic-Energy-Momentum Preserving Variational Integrators, » *Journal of Mathematical Physics*, t. 40, p. 3353-3371, 1<sup>er</sup> juill. 1999. DOI : [10.1063/1.532892](https://doi.org/10.1063/1.532892).

- [70] C. KANE, J. E. MARSDEN, M. ORTIZ et M. WEST, « Variational Integrators and the Newmark Algorithm for Conservative and Dissipative Mechanical Systems, » *Internat. J. Numer. Methods Engrg*, t. 49, p. 1295-1325, 1999.
- [71] G. KIRCHHOFF, *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*, avec la coll. d'OXFORD UNIVERSITY. Leipzig, 1877, 489 p.
- [72] M. B. KOBILAROV et J. E. MARSDEN, « Discrete Geometric Optimal Control on Lie Groups, » *IEEE Transactions on Robotics*, t. 27, n° 4, p. 641-655, août 2011. DOI : [10.1109/TR0.2011.2139130](https://doi.org/10.1109/TR0.2011.2139130).
- [73] W. KUTTA, *Beitrag Zur Näherungsweise Integration Totaler Differentialgleichungen ...* Lpz. : Teubner, 1901, 19 pages.
- [74] T. LEE, M. LEOK et N. H. MCCLAMROCH, « Optimal Attitude Control of a Rigid Body Using Geometrically Exact Computations on  $SO(3)$ , » *Journal of Dynamical and Control Systems*, t. 14, n° 4, p. 465-487, oct. 2008. DOI : [10.1007/s10883-008-9047-7](https://doi.org/10.1007/s10883-008-9047-7).
- [75] T. D. LEE, « Can time be a discrete dynamical variable? » *Physics Letters B*, t. 122, n° 3, p. 217-220, 10 mars 1983. DOI : [10.1016/0370-2693\(83\)90687-1](https://doi.org/10.1016/0370-2693(83)90687-1).
- [76] T. D. LEE, « Difference equations and conservation laws, » *Journal of Statistical Physics*, t. 46, n° 5, p. 843-860, 1<sup>er</sup> mars 1987. DOI : [10.1007/BF01011145](https://doi.org/10.1007/BF01011145).
- [77] T. LEE, M. LEOK et N. H. MCCLAMROCH. « Lie Group Variational Integrators for the Full Body Problem. » arXiv : [math/0508365](https://arxiv.org/abs/math/0508365). (19 août 2005), adresse : <http://arxiv.org/abs/math/0508365> (visité le 18/09/2019).
- [78] T. LEE, N. H. MCCLAMROCH et M. LEOK, « Optimal Attitude Control for a Rigid Body with Symmetry, » in *2007 American Control Conference*, New York, NY, USA : IEEE, juill. 2007, p. 1073-1078. DOI : [10.1109/ACC.2007.4282362](https://doi.org/10.1109/ACC.2007.4282362).
- [79] T. LEITZ, « Variational Lie Group Formulation of Geometrically Exact Beam Dynamics : Synchronous and Asynchronous Integration, » in 26 juin 2014, p. 175-203. DOI : [10.1007/978-3-319-07260-9\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-319-07260-9_8).
- [80] T. LEITZ et S. LEYENDECKER, « Galerkin Lie-group Variational Integrators Based on Unit Quaternion Interpolation, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 338, p. 333-361, 15 août 2018. DOI : [10.1016/j.cma.2018.04.022](https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.022).
- [81] T. LEITZ, R. T. SATO MARTÍN DE ALMAGRO et S. LEYENDECKER, « Multisymplectic Galerkin Lie group variational integrators for geometrically exact beam dynamics based on unit dual quaternion interpolation — no shear locking, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 374, p. 113475, 1<sup>er</sup> fév. 2021. DOI : [10.1016/j.cma.2020.113475](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113475).
- [82] M. LEOK, « Foundations of Computational Geometric Mechanics, » thèse de doct., California Institute of Technology, 2004. DOI : [10.7907/KDVO-WR34](https://doi.org/10.7907/KDVO-WR34).
- [83] M. LEOK. « Generalized Galerkin Variational Integrators. » arXiv : [math/0508360](https://arxiv.org/abs/math/0508360). (18 août 2005), adresse : <http://arxiv.org/abs/math/0508360> (visité le 15/04/2019).
- [84] M. LEOK, « An overview of Lie group variational integrators and their applications to optimal control, » p. 30,

- [85] M. LEOK et T. SHINGEL. « Prolongation-Collocation Variational Integrators. » arXiv : [1101.1995 \[math\]](https://arxiv.org/abs/1101.1995). (10 jan. 2011), adresse : <http://arxiv.org/abs/1101.1995> (visité le 19/09/2021).
- [86] A. LEW, J. MARSDEN, M. ORTIZ et M. WEST, « Asynchronous Variational Integrators, » *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, t. 167, 1<sup>er</sup> avr. 2003. DOI : [10.1007/0-387-21791-6\\_3](https://doi.org/10.1007/0-387-21791-6_3).
- [87] A. LEW, J. E. MARSDEN, M. ORTIZ et M. WEST, « Variational time integrators, » *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, t. 60, n<sup>o</sup> 1, p. 153-212, 2004. DOI : [10.1002/nme.958](https://doi.org/10.1002/nme.958).
- [88] S. LEYENDECKER, P. BETSCH et P. STEINMANN, « Objective Energy–Momentum Conserving Integration for the Constrained Dynamics of Geometrically Exact Beams, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 195, n<sup>o</sup> 19, p. 2313-2333, 1<sup>er</sup> avr. 2006. DOI : [10.1016/j.cma.2005.05.002](https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.05.002).
- [89] J. D. LOGAN, « First integrals in the discrete variational calculus, » *aequationes mathematicae*, t. 9, n<sup>o</sup> 2, p. 210-220, 1<sup>er</sup> juin 1973. DOI : [10.1007/BF01832628](https://doi.org/10.1007/BF01832628).
- [90] S. MAEDA, « Canonical Structure and Symmetries for Discrete Systems, » *Mathematica Japonica*, t. 25, p. 405-420, 1980.
- [91] S. MAEDA, « Extension of Discrete Noether Theorem, » *Mathematica Japonica*, t. 26, p. 85-90, 1981.
- [92] S. MAEDA, « Lagrangian Formulation of Discrete Systems and Concept of Difference Space, » *Mathematica Japonica*, t. 27, p. 345-356, 1982.
- [93] J. MARSDEN, S. PEKARSKY et S. SHKOLLER, « Discrete Euler-Poincaré and Lie-Poisson Equations, » 1999. DOI : [10.1088/0951-7715/12/6/314](https://doi.org/10.1088/0951-7715/12/6/314).
- [94] J. E. MARSDEN, G. W. PATRICK et S. SHKOLLER, « Multisymplectic Geometry, Variational Integrators, and Nonlinear PDEs, » *Communications in Mathematical Physics*, t. 199, n<sup>o</sup> 2, p. 351-395, 1<sup>er</sup> déc. 1998. DOI : [10.1007/s002200050505](https://doi.org/10.1007/s002200050505). arXiv : [math/9807080](https://arxiv.org/abs/math/9807080).
- [95] J. E. MARSDEN, S. PEKARSKY et S. SHKOLLER, « Symmetry Reduction of Discrete Lagrangian Mechanics on Lie Groups, » version 1, *Journal of Geometry and Physics*, t. 36, n<sup>o</sup> 1-2, p. 140-151, nov. 2000. DOI : [10.1016/S0393-0440\(00\)00018-8](https://doi.org/10.1016/S0393-0440(00)00018-8). arXiv : [math/0004018](https://arxiv.org/abs/math/0004018).
- [96] J. E. MARSDEN et T. S. RATIU, *Introduction to Mechanics and Symmetry : A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems*, 2<sup>e</sup> éd. 1999.
- [97] J. E. MARSDEN et S. SHKOLLER, « Multisymplectic Geometry, Covariant Hamiltonians, and Water Waves, » *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, t. 125, n<sup>o</sup> 3, p. 553-575, jan. 1999. DOI : [10.1017/S0305004198002953](https://doi.org/10.1017/S0305004198002953). arXiv : [math/9807086](https://arxiv.org/abs/math/9807086).
- [98] J. E. MARSDEN et J. M. WENDLANDT, « Mechanical Systems with Symmetry, Variational Principles, and Integration Algorithms, » in *Current and Future Directions in Applied Mathematics*, M. ALBER, B. HU et J. ROSENTHAL, éd., Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1997, p. 219-261. DOI : [10.1007/978-1-4612-2012-1\\_18](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2012-1_18).



- [99] J. E. MARSDEN et M. WEST, « Discrete mechanics and variational integrators, » *Acta Numerica 2001*, t. 10, p. 357-514, mai 2001. DOI : [10.1017/S096249290100006X](https://doi.org/10.1017/S096249290100006X).
- [100] B. MASCHKE, A. SCHAFT et P. BREEDVELD, « An Intrinsic Hamiltonian Formulation of Network Dynamics : Non-standard Poisson Structures and Gytrators, » 1991. DOI : [10.1016/S0016-0032\(92\)90049-M](https://doi.org/10.1016/S0016-0032(92)90049-M).
- [101] B. M. MASCHKE et A. J. van der SCHAFT, « Port-controlled Hamiltonian systems : modelling origins and systemtheoretic properties, » 1991.
- [102] H. MUNTHER-KAAS, « Lie-Butcher theory for Runge-Kutta methods, » *BIT Numerical Mathematics*, t. 35, n° 4, p. 572-587, déc. 1995. DOI : [10.1007/BF01739828](https://doi.org/10.1007/BF01739828).
- [103] H. MUNTHER-KAAS, « Runge-Kutta methods on Lie groups, » *BIT Numerical Mathematics*, t. 38, n° 1, p. 92-111, mars 1998. DOI : [10.1007/BF02510919](https://doi.org/10.1007/BF02510919).
- [104] H. MUNTHER-KAAS, « High order Runge-Kutta methods on manifolds, » *Applied Numerical Mathematics*, t. 29, n° 1, p. 115-127, jan. 1999. DOI : [10.1016/S0168-9274\(98\)00030-0](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(98)00030-0).
- [105] E. NOETHER, « Invariante Variationsprobleme, » *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische Klasse*, t. 1918, p. 235-257, 1918.
- [106] « NOX Documentation Page. » (), adresse : <https://docs.trilinos.org/dev/packages/nox/doc/html/index.html>.
- [107] S. OBER-BLÖBAUM, O. JUNGE et J. E. MARSDEN. « Discrete Mechanics and Optimal Control : An Analysis. » arXiv : [0810.1386 \[math\]](https://arxiv.org/abs/0810.1386). (8 oct. 2008), adresse : <http://arxiv.org/abs/0810.1386> (visité le 26/09/2021).
- [108] S. OBER-BLÖBAUM, O. JUNGE et J. E. MARSDEN, « Discrete mechanics and optimal control : An analysis, » *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, t. 17, n° 2, p. 322-352, 1<sup>er</sup> avr. 2011. DOI : [10.1051/cocv/2010012](https://doi.org/10.1051/cocv/2010012).
- [109] S. OBER-BLÖBAUM et N. SAAKE. « Construction and analysis of higher order Galerkin variational integrators. » arXiv : [1304.1398 \[math\]](https://arxiv.org/abs/1304.1398). (4 avr. 2013), adresse : <http://arxiv.org/abs/1304.1398> (visité le 26/02/2019).
- [110] G. W. PATRICK, C. CUELL, R. J. SPITERI et W. ZHANG, « On Converting Any One-Step Method to a Variational Integrator of the Same Order, » in *Volume 4 : 7th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control, Parts A, B and C*, San Diego, California, USA : ASME, 2009, p. 341-349. DOI : [10.1115/DETC2009-87061](https://doi.org/10.1115/DETC2009-87061).
- [111] R. PIÉCHAUD. « Modalys Documentation. » (), adresse : <https://support.ircam.fr/docs/Modalys/current/> (visité le 27/10/2021).
- [112] L. POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps*, avec la coll. d'OXFORD UNIVERSITY. Bachelier, 1851, 198 p.
- [113] F. A. POTRA et W. C. RHEINBOLD, « On the Numerical Solution of Euler-Lagrange Equations, » *Mechanics of Structures and Machines*, t. 19, n° 1, p. 1-18, 1<sup>er</sup> jan. 1991. DOI : [10.1080/08905459108905135](https://doi.org/10.1080/08905459108905135).
- [114] W. H. PRESS, éd., *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing*, 2nd ed. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1992, 994 p.

- [115] D. PRIMAULT, W. KHALIL et F. BOYER, « Modélisation géométriquement exacte de poutres fines (application à la robotique), » 2003.
- [116] L. PTÁČKOVÁ et L. VELHO, « A simple and complete discrete exterior calculus on general polygonal meshes, » *Computer Aided Geometric Design*, t. 88, p. 102 002, 1<sup>er</sup> juin 2021. DOI : [10.1016/j.cagd.2021.102002](https://doi.org/10.1016/j.cagd.2021.102002).
- [117] J. W. S. RAYLEIGH, *The Theory of Sound*. London, Macmillan and co., 1877, 370 p.
- [118] S. REICH, « Backward Error Analysis for Numerical Integrators, » *SIAM Journal on Numerical Analysis*, t. 36, n<sup>o</sup> 5, p. 1549-1570, jan. 1999. DOI : [10.1137/S0036142997329797](https://doi.org/10.1137/S0036142997329797).
- [119] E. REISSNER, « On one-dimensional finite-strain beam theory : The plane problem, » *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, t. 23, n<sup>o</sup> 5, p. 795-804, 1<sup>er</sup> sept. 1972. DOI : [10.1007/BF01602645](https://doi.org/10.1007/BF01602645).
- [120] D. ROZE, « Simulation de la propagation d'onde non linéaire par les séries de Volterra, » Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2006.
- [121] D. ROZE, X. MERLHIOT, J. BENSOAM et T. HÉLIE, « Simulation de La Dynamique d'une Poutre de Reissner Par Les Séries de Volterra, » 12 avr. 2010.
- [122] C. RUNGE, « Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen, » *Mathematische Annalen*, t. 46, n<sup>o</sup> 2, p. 167-178, 1<sup>er</sup> juin 1895. DOI : [10.1007/BF01446807](https://doi.org/10.1007/BF01446807).
- [123] J. SELIG, « Cayley Maps for SE(3), » 1<sup>er</sup> jan. 2007.
- [124] J. C. SIMO, « A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 49, n<sup>o</sup> 1, p. 55-70, 1<sup>er</sup> mai 1985. DOI : [10.1016/0045-7825\(85\)90050-7](https://doi.org/10.1016/0045-7825(85)90050-7).
- [125] J. C. SIMO et L. VU-QUOC, « A three-dimensional finite-strain rod model. part II : Computational aspects, » *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, t. 58, n<sup>o</sup> 1, p. 79-116, 1<sup>er</sup> oct. 1986. DOI : [10.1016/0045-7825\(86\)90079-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(86)90079-4).
- [126] J. C. SIMO, J. E. MARSDEN et P. S. KRISHNAPRASAD, « The Hamiltonian structure of nonlinear elasticity : The material and convective representations of solids, rods, and plates, » *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, t. 104, n<sup>o</sup> 2, p. 125-183, 1<sup>er</sup> juin 1988. DOI : [10.1007/BF00251673](https://doi.org/10.1007/BF00251673).
- [127] V. THOMEE, *Galerkin Finite Element Methods for Parabolic Problems* (Springer Series in Computational Mathematics). Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 1997. DOI : [10.1007/978-3-662-03359-3](https://doi.org/10.1007/978-3-662-03359-3).
- [128] S. TIMOSHENKO, « X. On the Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-Section, » *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, t. 43, n<sup>o</sup> 253, p. 125-131, 1<sup>er</sup> jan. 1922. DOI : [10.1080/14786442208633855](https://doi.org/10.1080/14786442208633855).
- [129] A. TORIN, B. HAMILTON et S. BILBAO, « An Energy Conserving Finite Difference Scheme for the Simulation of Collisions in Snare Drums, » 1<sup>er</sup> jan. 2014. DOI : [10.13140/2.1.3596.6080](https://doi.org/10.13140/2.1.3596.6080).
- [130] L. W. TU, *An Introduction to Manifolds* (Universitext), 2nd ed. New York : Springer, 2011, 410 p.



- [131] Z. TUKOVIC, P. JAEGER, P. CARDIFF et A. IVANKOVIC, « A Finite Volume Solver for Geometrically Exact Simo-Reissner Beams, » 8 sept. 2019.
- [132] A. P. VESELOV, « Integrable discrete-time systems and difference operators, » *Functional Analysis and Its Applications*, t. 22, n° 2, p. 83-93, 1<sup>er</sup> avr. 1988. DOI : [10.1007/BF01077598](https://doi.org/10.1007/BF01077598).
- [133] A. P. VESELOV, « Integrable Lagrangian correspondences and the factorization of matrix polynomials, » *Functional Analysis and Its Applications*, t. 25, n° 2, p. 112-122, 1<sup>er</sup> avr. 1991. DOI : [10.1007/BF01079590](https://doi.org/10.1007/BF01079590).
- [134] A. WATZKY, « Non-linear three-dimensional large-amplitude damped free vibration of a stiff elastic stretched string, » *Journal of Sound and Vibration*, t. 153, n° 1, p. 125-142, 22 fév. 1992. DOI : [10.1016/0022-460X\(92\)90632-8](https://doi.org/10.1016/0022-460X(92)90632-8).
- [135] T. WENGER, S. OBER-BLÖBAUM et S. LEYENDECKER, « Construction and analysis of higher order variational integrators for dynamical systems with holonomic constraints, » *Advances in Computational Mathematics*, t. 43, n° 5, p. 1163-1195, 1<sup>er</sup> oct. 2017. DOI : [10.1007/s10444-017-9520-5](https://doi.org/10.1007/s10444-017-9520-5).