



**HAL**  
open science

# Conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires

Jérémy Martin

► **To cite this version:**

Jérémy Martin. Conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Rennes, 2022. Français. NNT : 2022REN1S046 . tel-03911643

**HAL Id: tel-03911643**

**<https://theses.hal.science/tel-03911643v1>**

Submitted on 23 Dec 2022

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par

**Jérémy MARTIN**

## **Conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires**

Thèse présentée et soutenue à Rennes, le 6 juillet 2022

Unité de recherche : UMR CNRS 6625 Institut de Recherche Mathématique de Rennes (IRMAR)

### **Rapporteurs avant soutenance :**

Thomas DUYCKAERTS    Professeur des Universités, Université Sorbonne Paris Nord  
Matthieu LÉAUTAUD    Professeur des Universités, Université Paris-Saclay

### **Composition du Jury :**

Président :	Jérôme LE ROUSSEAU	Professeur des Universités, Université Sorbonne Paris Nord
Rapporteurs :	Thomas DUYCKAERTS Matthieu LÉAUTAUD	Professeur des Universités, Université Sorbonne Paris Nord Professeur des Universités, Université Paris-Saclay
Examineurs :	Karine BEAUCHARD Philippe JAMING Luc MILLER Luc ROBBIANO	Professeur des Universités, École normale supérieure de Rennes Professeur des Universités, Université de Bordeaux Maître de Conférences, Université Paris Nanterre Professeur des Universités, Université de Versailles Saint-Quentin-en-Yvelines
Dir. de thèse :	Karel PRAVDA-STAROV	Professeur des Universités, Université de Rennes 1



# Conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires

Jérémy Martin



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier très chaleureusement Karel Pravda-Starov pour avoir accepté d'encadrer ma thèse. Merci pour votre confiance que vous m'avez très vite accordée. Celle-ci m'a permis d'aborder les sujets qui m'intéressaient avec grande liberté. Merci également pour vos remarques, conseils et nombreuses relectures qui m'ont été très utiles. Sachez que votre rigueur scientifique était très appréciable et est un exemple que je compte suivre dans ma future carrière (quelle qu'elle soit!).

Je remercie grandement Thomas Duyckaerts et Matthieu Léautaud d'avoir accepté de rapporter ma thèse. Je vous suis très reconnaissant pour le temps accordé à la lecture de mes travaux. Merci également à Karine Beauchard, Philippe Jaming, Jérôme Le Rousseau, Luc Miller et Luc Robbiano qui me font le grand honneur de faire partie de mon jury de thèse.

Je suis convaincu que je dois beaucoup mon parcours aux enseignements de grande qualité que j'ai reçus. Je pense à mes professeurs de classe prépa au lycée Camille Guérin (à Poitiers), Violaine Ebrard, Philippe Lonlas et Frédéric Normandin. Vous êtes des professeurs exceptionnels qui ont su faire grandir en moi un attrait certain pour les sciences. L'enseignement que j'ai reçu à l'ENS a été tout aussi exceptionnel. Merci notamment à Karine Beauchard, Benjamin Boutin, Arnaud Debussche, Thibaut Deheuvels et Jérémy Le Borgne dont les cours ont une influence certaine sur ma manière d'enseigner. Un très grand merci, Karine, pour ton soutien et tes encouragements dans ma recherche de post-docs.

Ma présence au labo a été assez inégale mais malgré cela, c'est toujours avec plaisir que je retrouvais mes collègues doctorants. Pour n'en citer que quelques-uns, merci à Grégoire, François, Louis, Maxime, Mériadec, Paul, Pierre, Thomas, Rémi pour votre humour et votre sympathie. Je vous souhaite le meilleur pour la suite.

Je souhaite remercier plus particulièrement mes deux co-bureaux, Mégane et Quentin, qui ont largement contribué à rendre notre bureau convivial et agréable. Qui aurait cru que le groupe de colles que nous formions finirait par partager un bureau dans le cadre d'une thèse? Quentin, merci d'avoir continué à nous adresser la parole après avoir appris qu'on ne faisait que du contrôle « pas optimal ».

Merci Paul pour tes conseils, tes réponses à mes questions et les discussions intéressantes. J'espère que nous aurons de nouveau l'occasion de collaborer.

J'aimerais adresser quelques mots à certains de mes amis qui ont eu un rôle très bénéfique durant mes études. Un immense merci à mes amis d'enfance Corentin, Terry et Rambaud qui m'ont aidé à conserver une bonne santé mentale durant la crise sanitaire. J'ai aussi eu la chance de lier des amitiés sincères à l'ENS. Je pense notamment à Adrian, co-créateur des Recettes Déconfinées et véritable adorateur des fonctions propres, et Dimitri, expatrié à l'autre bout de la France (pour ma sécurité!).

Difficile de trouver les mots pour te remercier, Mégane, après toutes ces années. C'est un euphémisme de dire que j'ai apprécié d'avoir partagé ta route durant ce (long) parcours scolaire. Tu es une mathématicienne brillante mais ce sont bien tes qualités humaines, toutes aussi formidables, qui me rendent si fier d'être ton ami.

Ce manuscrit, ainsi que tout mon parcours qui l'a précédé, n'aurait jamais pu exister sans le soutien indéfectible de ma famille. Merci à mes frères et soeurs Jordan, Jarod, David, Marie et Mélo de m'avoir si bien entouré. J'ai aussi la chance d'avoir des parents formidables qui m'ont offert plus d'amour qu'il est possible d'en donner. Maman, Papa, merci pour absolument tout, je vous dois l'entièreté de ma réussite scolaire et bien d'autres choses.

Florine, merci pour ton amour, ton rire et ta bienveillance au quotidien. Dans tout ce que j'ai pu entreprendre ces 13 dernières années, ta présence à mes cotés a été essentielle. Par ta douceur, tu as su soigner mes moments de doute et mes pertes de motivation. Merci aussi d'avoir été si forte dans les moments difficiles. Bien que je m'évertue à laisser peu de place au hasard dans ma vie, il faut reconnaître que je suis véritablement chanceux de partager la tienne.

## Table des matières

Introduction	1
<b>Partie 1. Principes d'incertitude pour la contrôlabilité</b>	<b>3</b>
Chapitre 1. Principes d'incertitude : des paires annulantes aux inégalités spectrales	5
1.1. Le Théorème de Logvinenko-Sereda	5
1.2. Combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite	11
Chapitre 2. Introduction à la théorie du contrôle linéaire	15
2.1. Contrôlabilité d'équations d'évolution linéaires	15
2.2. Un résultat abstrait d'observabilité	21
2.3. Ensembles épais et contrôlabilité	22
<b>Partie 2. Présentation des résultats obtenus</b>	<b>29</b>
Chapitre 3. Des résultats préliminaires	31
3.1. Ensembles épais par rapport à une densité	31
3.2. Quelques résultats sur les fonctions quasi-analytiques	36
Chapitre 4. Stabilisation et contrôle approché d'une large classe d'équations diffusives	45
4.1. Introduction	45
4.2. Stabilisation des équations diffusives	45
4.3. Contrôlabilité approchée avec coût uniforme	48
Chapitre 5. Inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite et contrôlabilité à zéro	53
5.1. Introduction	53
5.2. Inégalités spectrales à partir d'ensembles faiblement épais	53
5.3. Contrôlabilité des équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique	55
Chapitre 6. Principes d'incertitude dans des espaces de Gelfand-Shilov et contrôlabilité à zéro	59
6.1. Introduction	59
6.2. Des principes d'incertitude avec termes d'erreur	60
6.3. Inégalités spectrales pour des fonctions propres d'opérateurs de Shubin anisotropes	66
6.4. Applications à la contrôlabilité à zéro	68
Chapitre 7. Contrôle des équations de Schrödinger	73
7.1. Introduction	73
7.2. Contrôlabilité des équations de Schrödinger libres fractionnaires	74
7.3. Contrôle des équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires	77
Conclusion et perspectives	83
<b>Partie 3. Démonstrations des résultats obtenus</b>	<b>85</b>



Chapter 8. Stabilization and approximate null-controllability for a large class of diffusive equations from thick control supports	87
8.1. (Rapid) Stabilization of diffusive equations	87
8.2. Proof of the approximate null-controllability results	93
8.3. Examples of functions $F$ generating quasi-analytic sequences	99
8.4. Appendix of Chapter 8	104
Chapter 9. Null-controllability for evolution equations enjoying symmetric Gelfand-Shilov smoothing effects	105
9.1. Quantitative spectral inequalities for finite combinations of Hermite functions	105
9.2. Proof of Theorem 5.3.1	114
9.3. Appendix of Chapter 9	119
Chapter 10. Uncertainty principles in Gelfand-Shilov spaces and null-controllability	123
10.1. Proof of the general uncertainty principles given by Theorem 6.2.1	123
10.2. Application to standard Gelfand-Shilov spaces	128
10.3. Uncertainty principles for weighted Hermite expansions	131
10.4. Spectral inequalities for finite sums of eigenfunctions associated to anisotropic Shubin operators	133
10.5. Null-controllability for evolution equations whose adjoint system enjoys Gelfand-Shilov smoothing effects	139
Chapter 11. Exact controllability for Schrödinger's equations from (weak) thick sets	143
11.1. Thickness condition and exact controllability for fractional free Schrödinger's equations	143
11.2. Hautus test for Hermite functions	144
11.3. Appendix of Chapter 11	152
<b>Annexes</b>	155
Appendix A. Slowly varying metrics	157
Appendix B. Miscellaneous facts about the Gamma function	159
Appendix C. Gelfand-Shilov regularity	161
Appendix D. Semigroup theory	165
Appendix E. Bernstein type estimates for Hermite functions	167
E.1. Proof of the Bernstein type estimates given by Proposition 5.2.2	169
E.2. Proof of Proposition 6.2.3	171
Appendix F. Notations	177
Bibliography	179

# Introduction

La prédiction de l'évolution d'un système physique au cours du temps est un sujet aux innombrables facettes au coeur des sciences modernes. La modélisation mathématique de phénomènes physiques conduit souvent à une équation aux dérivées partielles dont l'étude soulève de nombreuses questions. L'une d'entre elles est la possibilité d'agir sur le système dans le but de lui faire atteindre un état donné. Dans certaines situations, agir sur le système étudié ne peut se faire qu'à partir d'une région limitée de l'espace (par exemple, un radiateur qui chauffe une pièce). Ce domaine d'action peut-être sujet à des contraintes de natures géométriques par exemple, pour assurer l'efficacité du contrôle.

Le sujet de cette thèse est la recherche de conditions géométriques pour assurer la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires posées sur tout l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$ . Les équations d'évolution qui sont traitées dans ce manuscrit sont des équations diffusives qui, pour la plupart, jouissent de forts effets régularisants. Les solutions de ces équations, héritant d'une forte régularité, sont de ce fait très localisées dans le domaine des fréquences et des principes d'incertitude interviennent naturellement dans l'étude du système. Un principe d'incertitude est une propriété qui limite la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformée de Fourier. En exploitant cette notion, des travaux récents ont exhibé une condition géométrique, appelée *épaisseur*, nécessaire et suffisante à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur posée sur  $\mathbb{R}^d$ . Ce présent manuscrit vise à comprendre les liens existant entre ces notions et la contrôlabilité d'équations d'évolution. L'objectif est double. Il s'agit d'établir des principes d'incertitude généraux qui peuvent parfois prendre la forme d'inégalités spectrales et d'en déduire des conditions géométriques, si possible nécessaires et suffisantes, pour assurer la contrôlabilité de larges classes d'équations d'évolution qui jouissent de propriétés régularisantes.

Une partie de ce manuscrit est consacrée à l'étude d'équations purement diffusives et permet de comprendre le rôle que joue l'épaisseur dans leur contrôlabilité, pour différentes notions de contrôle. D'autre part, un large pan de cette thèse se concentre sur la contrôlabilité d'équations diffusives dotées d'un potentiel confinant, telles que l'équation de la chaleur harmonique et les équations d'évolution associées à des opérateurs de Shubin anisotropes. Les solutions associées sont ultra-analytiques et jouissent d'une décroissance de type exponentielle en espace. Cette thèse a pour objet de mettre en exergue l'influence de cette décroissance sur la géométrie du support de contrôle. Enfin, des conditions géométriques pour le contrôle des équations de Schrödinger libre et harmonique sont également établies dans ce manuscrit.

Le corps de ce manuscrit est constitué des quatre travaux [5], [51], [52] et [53]. Son texte est divisé en trois grandes parties. La première présente les notions de principes d'incertitude et de paires annulantes, ainsi qu'une introduction, loin d'être exhaustive, sur la théorie du contrôle pour des équations d'évolution linéaires. À la fin de cette partie, des exemples d'application des principes d'incertitude à la théorie du contrôle sont donnés. La seconde partie, écrite en langue française, présente et énonce l'ensemble des résultats obtenus durant cette thèse. Elle contient de nouveaux principes d'incertitude valables dans des espaces de Gelfand-Shilov, des inégalités spectrales et des applications en théorie du contrôle. Dans cette partie, peu de preuves sont données. La troisième grande partie, plus technique et écrite quant à elle en langue anglaise, est consacrée aux preuves des principaux résultats présentés dans la seconde. Enfin, ce manuscrit contient un appendice dans lequel

le lecteur trouvera des définitions et quelques propriétés sur les espaces de Gelfand-Shilov, les fonctions de Hermite, la fonction Gamma d'Euler, ainsi que sur les métriques lentes.

Première partie

Principes d'incertitude pour la  
contrôlabilité



## Principes d'incertitude : des paires annulantes aux inégalités spectrales

Ce chapitre introduit la notion de *principe d'incertitude* et ses différentes manifestations. La notion de *paires annulantes* est présentée en Section 1.1. Elle permet d'introduire la condition d'*épaisseur* pour un ensemble mesurable, à travers le Théorème de Logvinenko-Sereda. La Section 1.2 s'intéresse à des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite sous différentes conditions géométriques, dont l'épaisseur.

### 1.1. Le Théorème de Logvinenko-Sereda

Il existe de nombreux types de principes d'incertitude. Le plus célèbre est le *Principe d'incertitude de Heisenberg* qui pose l'impossibilité de déterminer précisément et simultanément la position et le moment d'une particule quantique. Mathématiquement, il s'énonce de la manière suivante

$$(1.1.1) \quad \inf_{a \in \mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |x_j - a|^2 |f(x)|^2 dx \right) \inf_{b \in \mathbb{R}^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\xi_j - b|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{4} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^4,$$

pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et pour tout entier  $1 \leq j \leq d$ . Dans l'estimation (1.1.1),  $\hat{f}$  désigne la transformée de Fourier de  $f$  dont le choix de normalisation est le suivant

$$(1.1.2) \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

L'estimation (1.1.1) montre qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément très localisées. Plus généralement, on appelle *principe d'incertitude*, toute propriété imposant une limitation sur la concentration simultanée d'une fonction et de sa transformation de Fourier. Il existe une grande variété de principes d'incertitude dont l'un d'entre eux est donné par la notion de *paires annulantes*.

**DÉFINITION 1.1.1** (Paires annulantes). *Soient  $S, \Sigma$  deux sous-ensembles mesurables de  $\mathbb{R}^d$ .*

- On dit que la paire  $(S, \Sigma)$  est une paire faiblement annulante si l'unique fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  vérifiant  $\text{supp } f \subset S$  et  $\text{supp } \hat{f} \subset \Sigma$  est la fonction nulle  $f = 0$
- On dit que la paire  $(S, \Sigma)$  est une paire fortement annulante s'il existe une constante positive  $C = C(S, \Sigma) > 0$  telle que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(1.1.3) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^d \setminus S} |f(x)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)$$

On remarque, de manière immédiate, qu'une paire fortement annulante est nécessairement faiblement annulante. Nous verrons plus tard que ces deux notions sont bien distinctes en donnant un exemple d'une paire faiblement annulante qui n'est pas fortement annulante. Une caractérisation équivalente, et plus pratique, des paires fortement annulantes est donnée par le lemme suivant :

**LEMME 1.1.2.** *Une paire de sous-ensembles mesurables  $(S, \Sigma)$  est fortement annulante si et seulement s'il existe une constante strictement positive  $D(S, \Sigma) > 0$  telle que pour tout  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$*

$$(1.1.4) \quad \hat{f} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} = 0 \implies \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq D(S, \Sigma) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}.$$

où  $\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}$  désigne la fonction caractéristique de l'ensemble  $\mathbb{R}^d \setminus \Sigma$ .

Ce lemme caractérise la notion de paires fortement annulantes en termes d'équivalence de normes sur un sous-espace de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Il est clair que toute paire fortement annulante vérifie les estimations (1.1.4). Réciproquement, si  $(S, \Sigma)$  est une paire de sous-ensembles mesurables satisfaisant les estimations (1.1.4) alors, par le théorème de Plancherel, nous avons pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|f\mathbf{1}_S\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \|f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \|f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_S}\mathbf{1}_\Sigma\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_S}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

En remarquant que  $\widehat{f\mathbf{1}_S} = \widehat{f} - \widehat{f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}}$ , puis en appliquant une inégalité triangulaire aux deux derniers termes du membre de droite et en utilisant à nouveau le théorème de Plancherel, nous obtenons que pour toute fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(1.1.5) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 5\|f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus S}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{2}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

Il reste alors à appliquer l'hypothèse (1.1.4) à la fonction  $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma})$  pour estimer le troisième terme du membre de droite. Nous obtenons, par une nouvelle utilisation du théorème de Plancherel

$$\frac{2}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = 2\|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma})\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2D(S, \Sigma)^2 \|\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma})\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2.$$

En remarquant que  $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma}) = f - \mathcal{F}^{-1}(\widehat{f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma}})$  et en exploitant à nouveau le théorème de Plancherel, on en déduit par des inégalités triangulaires

$$(1.1.6) \quad \frac{2}{(2\pi)^d} \|\widehat{f\mathbf{1}_\Sigma}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 4D(S, \Sigma)^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 + \frac{4D(S, \Sigma)^2}{(2\pi)^d} \|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus \Sigma)}^2.$$

D'après les estimations (1.1.5) et (1.1.6), on en déduit que l'inégalité (1.1.3) est satisfaite.

Un premier exemple élémentaire de paires annulantes peut être obtenu en considérant deux compacts  $K_1$  et  $K_2$  de  $\mathbb{R}^d$ . En effet, considérons une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  dont la transformée de Fourier s'annule en dehors du compact  $K_2$ . Une telle fonction est nécessairement analytique et si de plus, celle-ci s'annule sur l'ensemble de mesure strictement positive  $\mathbb{R}^d \setminus K_1$ , alors  $f$  est la fonction nulle. Ceci montre que  $(K_1, K_2)$  forme une paire faiblement annulante. De manière générale, il a été montré par Benedicks dans [13] que  $(S, \Sigma)$  forme une paire faiblement annulante dès que les ensembles  $S$  et  $\Sigma$  sont de mesures de Lebesgue finies  $|S|, |\Sigma| < +\infty$ . Sous cette même hypothèse, Amrein et Berthier ont établi dans le papier [7] que la paire  $(S, \Sigma)$  est en réalité une paire fortement annulante. Obtenir des estimations de la constante  $C(S, \Sigma)$  dans l'estimation (1.1.3) en fonction des ensembles  $S$  et  $\Sigma$  est un problème très intéressant qui présente des intérêts en théorie du contrôle, comme nous le verrons dans le Chapitre 2. Lorsque la dimension est égale à 1, et sous la même hypothèse que dans [7], Nazarov a donné l'estimation suivante de cette constante dans le travail [58],

$$C(S, \Sigma) \leq \kappa e^{\kappa|S||\Sigma|},$$

où  $\kappa > 0$  est une constante positive indépendante de  $S$  et de  $\Sigma$ . Ce résultat a été étendu à la dimension supérieure par Jaming [37] qui a démontré l'estimation suivante

$$C(S, \Sigma) \leq \kappa e^{\kappa(|S||\Sigma|)^{\frac{1}{d}}},$$

où  $\kappa > 0$  est une constante indépendante de  $S$  et  $\Sigma$ , valable lorsque l'un des deux ensembles  $S$  et  $\Sigma$  est convexe.

Bien qu'il existe, dans la littérature, une variété d'articles traitant de la notion de paires annulantes, comme les travaux [6, 14, 15, 19, 22, 62], il n'existe pas, pour l'instant,

de description exhaustive de toutes les paires fortement annulantes. Néanmoins, dans le cas particulier où l'ensemble  $\Sigma$  est supposé borné, il existe une description complète des ensembles  $S$  formant une paire fortement annulante avec  $\Sigma$ . Cette catégorie d'ensembles se caractérise par la notion d'épaisseur :

**DÉFINITION 1.1.3** (Ensembles épais). *Soient  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $R > 0$ . On dit que  $\omega$  est  $\gamma$ -épais à l'échelle  $R > 0$  si et seulement si*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, R)| \geq \gamma |B(x, R)|,$$

où  $B(x, R)$  désigne la boule euclidienne centrée en  $x$  et de rayon  $R$  et  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue. On dit que  $\omega$  est épais s'il existe  $0 < \gamma \leq 1$  et  $R > 0$  tels que  $\omega$  est  $\gamma$ -épais à l'échelle  $R$ .

La condition d'épaisseur impose à l'ensemble d'être bien distribué dans l'espace. Le complémentaire d'un ensemble épais ne peut contenir des boules de rayon arbitrairement grand, puisqu'ils sont limités par le paramètre  $R > 0$  dans la Définition 1.1.3. Soulignons le fait que dans la Définition 1.1.3, les boules considérées sont associées à la norme euclidienne, mais le choix d'une autre norme ne change pas la notion d'épaisseur. Par équivalence des normes en dimension finie, un ensemble épais pour la norme euclidienne le sera également pour n'importe quel autre choix de norme sur l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{R}^d$ . Néanmoins, les constantes  $\gamma$  et  $R$  apparaissant dans la Définition 1.1.3 dépendent du choix de cette norme, comme le montre le lemme suivant.

**LEMME 1.1.4.** *Soient  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $R > 0$ , un sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  et  $N$  une norme sur  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^d$ , on note  $B_N(x, R)$  la boule ouverte associée à la norme  $N$  centrée en  $x$  et de rayon  $R$ . Il existe une constante strictement positive  $C_d \geq 1$  dépendant de la dimension  $d \geq 1$  telle que :*

(i) *Si  $\omega$  satisfait*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B_N(x, R)| \geq \gamma |B_N(x, R)|,$$

*alors  $\omega$  est  $(\gamma C_d^{-2d})$ -épais à l'échelle  $RC_d > 0$ .*

(ii) *Si  $\omega$  est  $\gamma$ -épais à l'échelle  $R$  alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B_N(x, RC_d)| \geq \gamma C_d^{-2d} |B_N(x, RC_d)|.$$

Si  $N$  est une norme sur  $\mathbb{R}^d$ , alors, par équivalence des normes, il existe une constante  $C_d \geq 1$  telle que

$$\frac{1}{C_d} N \leq |\cdot| \leq C_d N,$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne. Le Lemme 1.1.4 se déduit alors des inclusions de boules suivantes

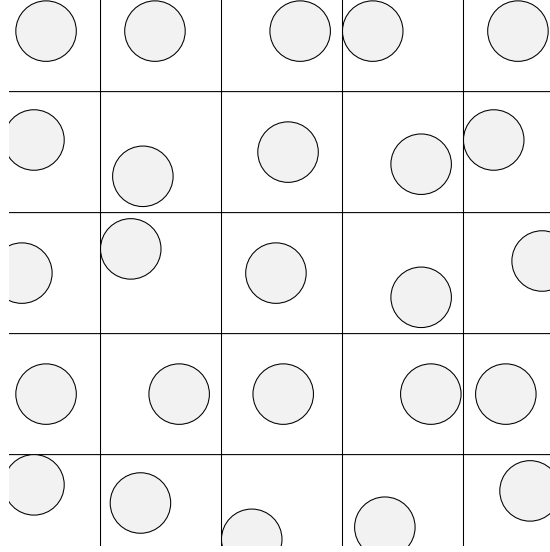
$$\forall R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad B(x, R) \subset B_N(x, RC_d) \text{ et } B_N(x, R) \subset B(x, RC_d).$$

La Figure 1.1 illustre une construction générique d'un ensemble épais de  $\mathbb{R}^2$ . Elle consiste à quadriller le plan et à colorier une fraction fixe de chacun des carrés. Cette construction est facilement adaptable à toutes les dimensions  $d \geq 1$ .

Le Théorème de Logvinenko-Sereda [50] stipule que lorsque  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  est une partie bornée, la notion d'épaisseur est une condition nécessaire et suffisante à imposer au complémentaire de  $S$  pour que la paire  $(S, \Sigma)$  soit fortement annulante :

**THÉORÈME 1.1.5** (Logvinenko-Sereda). *Soient  $S, \Sigma \subset \mathbb{R}^d$  deux sous-ensembles mesurables avec  $\Sigma$  borné et de mesure de Lebesgue strictement positive  $|\Sigma| > 0$ . La paire  $(S, \Sigma)$  est fortement annulante si et seulement si le sous-ensemble  $\mathbb{R}^d \setminus S$  est épais.*



FIGURE 1.1. Exemple d'un ensemble épais dans  $\mathbb{R}^2$ 

Il est intéressant de remarquer que cette condition nécessaire et suffisante ne dépend pas de l'ensemble borné  $\Sigma$  considéré. Cela conduit à la conséquence suivante : si  $S$  forme une paire fortement annulante avec un sous-ensemble borné de mesure strictement positive  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  alors  $S$  forme une paire fortement annulante avec tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{R}^d$ . Nous pouvons à présent donner un exemple unidimensionnel d'une paire d'ensembles mesurables  $(S, \Sigma)$  faiblement annulante qui n'est pas fortement annulante. Supposons que  $\Sigma$  est borné et de mesure strictement positive, et posons  $S = \mathbb{R} \setminus (-R, R)$  où  $R > 0$ . Le complémentaire de  $S$  étant borné, il ne peut satisfaire la condition d'épaisseur. D'après le Théorème 1.1.5, la paire  $(S, \Sigma)$  n'est donc pas fortement annulante. Cependant, la paire  $(S, \Sigma)$  est faiblement annulante puisqu'une fonction non nulle dont la transformée de Fourier s'annule en dehors de  $\Sigma$ , se prolonge nécessairement en une fonction entière qui ne peut donc pas être identiquement nulle sur  $(-R, R)$  d'après le principe des zéros isolés.

Donnons une preuve du caractère nécessaire de la condition d'épaisseur dans le Théorème 1.1.5. On retrouvera le caractère suffisant de cette condition comme cas particulier d'un des résultats de ce manuscrit (voir Théorème 6.2.1 du Chapitre 6).

*Preuve du caractère nécessaire de l'épaisseur dans le Théorème 1.1.5 :* Soient  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble borné de mesure strictement positive  $|\Sigma| > 0$  et  $S \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble tel qu'il existe une constante  $D = D(S, \Sigma) > 0$  vérifiant :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \hat{f} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} = 0 \implies \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq D \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}.$$

Considérons une fonction *non-nulle*  $f$  telle que  $\hat{f} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} = 0$ . Un exemple de telle fonction est donné par  $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathbf{1}_\Sigma) \in L^2(\mathbb{R}^d)$  car  $\mathbf{1}_\Sigma \in L^2(\mathbb{R}^d)$  puisque  $\Sigma$  est borné. Définissons alors la famille de fonction  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}^d} \subset L^2(\mathbb{R}^d)$  donnée par

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_a(x) = f(x - a).$$

Puisque les transformées de Fourier des fonctions  $(f_a)_{a \in \mathbb{R}^d}$  sont obtenues en rajoutant un terme de phase à la transformée de Fourier de  $f$ , nous vérifions immédiatement que

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \hat{f}_a \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} = 0.$$

En appliquant l'hypothèse que  $(S, \Sigma)$  forme une paire fortement annulante, on a

$$\forall a \in \mathbb{R}^d, \quad \|f_a\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq D^2 \|f_a\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus S)}^2 = D^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus S) - a}(x) dx,$$

où l'ensemble  $(\mathbb{R}^d \setminus S) - a$  désigne le translaté de  $\mathbb{R}^d \setminus S$  par  $-a$  donné par

$$(\mathbb{R}^d \setminus S) - a = \{x - a, x \in \mathbb{R}^d \setminus S\}.$$

Soient  $a \in \mathbb{R}^d$  et  $R > 0$ . En scindant en deux l'intégrale apparaissant dans le terme à droite de l'inégalité, nous avons

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|f_a\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq D^2 \int_{B(0,R)} |f(x)|^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus S) - a}(x) dx + D^2 \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |f(x)|^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus S) - a}(x) dx \\ &\leq D^2 \int_{B(0,R)} |f(x)|^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus S) - a}(x) dx + D^2 \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Puisque  $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \setminus \{0\}$ , par théorème de convergence dominée, il existe  $R > 0$  indépendant de  $a \in \mathbb{R}^d$  tel que

$$D^2 \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0,R)} |f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On en déduit que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ , on a

$$(1.1.7) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2D^2 \int_{B(0,R)} |f(x)|^2 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}^d \setminus S) - a}(x) dx.$$

Remarquons que puisque  $\hat{f} \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \setminus \Sigma} = 0$  et que  $\Sigma$  est borné, nous obtenons par le théorème d'inversion de Fourier et le théorème de Plancherel que  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$  et

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Sigma} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \frac{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}{(2\pi)^d} \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \left( \frac{|\Sigma|}{(2\pi)^d} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

On déduit de cette inégalité combinée à l'estimation (1.1.7) que pour tout  $a \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2D^2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}^2 |((\mathbb{R}^d \setminus S) - a) \cap B(0,R)| \\ &\leq \frac{2D^2 |\Sigma|}{(2\pi)^d} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 |(\mathbb{R}^d \setminus S) \cap B(a,R)|. \end{aligned}$$

Puisque  $f$  est non-nulle et que  $|\Sigma| > 0$ , on en déduit que  $\mathbb{R}^d \setminus S$  est  $\frac{(2\pi)^d}{2D^2 |\Sigma| |B(0,R)|}$ -épais à l'échelle  $R > 0$ .

Ainsi, étant donné un ensemble  $S$  dont le complémentaire est épais, le Théorème de Logvinenko-Sereda stipule que pour tout ensemble borné  $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ , il existe une constante  $D(S, \Sigma)$  dépendant fortement de  $S$  et  $\Sigma$  telles que les estimations (1.1.4) sont vérifiées. La question d'estimer la constante  $D(S, \Sigma)$  a été étudiée par Kovrijkine [42, Théorème 3] qui a établi une version quantitative du Théorème de Logvinenko-Sereda :

**THÉORÈME 1.1.6 (Kovrijkine).** *Soient  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $L > 0$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable satisfaisant*

$$(1.1.8) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap (x + [0, L]^d)| \geq \gamma L^d.$$

*Il existe une constante universelle strictement positive  $C_d > 0$  dépendant seulement de la dimension  $d \geq 1$  telle que pour tout  $R > 0$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  avec  $\text{supp } \hat{f} \subset [-R, R]^d$ , nous avons les estimations suivantes*

$$(1.1.9) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left( \frac{C_d}{\gamma} \right)^{C_d(1+LR)} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

La condition (1.1.8) est la notion d'épaisseur obtenue en remplaçant dans la Définition 1.1.3 la métrique euclidienne par la métrique donnée par la norme  $\|\cdot\|_\infty$  définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad |x|_\infty = \max_{i=1, \dots, d} |x_i|,$$

dont les boules associées sont des cubes de  $\mathbb{R}^d$ . Il ressort du Théorème 1.1.6 que la constante dans (1.1.9) ne dépend de  $\omega$  qu'à travers les paramètres  $\gamma$  et  $L > 0$  qui caractérisent l'épaisseur de l'ensemble. Il est également important de noter que l'exposant de cette constante dépend linéairement de  $R$ . Kovrijkine a montré dans [42] que cet exposant est

l'exposant optimal. Dans le cadre de la théorie du contrôle, cette croissance par rapport au paramètre  $R > 0$  joue un rôle clé dans la Section 2.3 du Chapitre 2.

Nous allons terminer cette section en donnant les idées de la preuve du Théorème 1.1.6 donnée par Kovrijkine.

*Idées de la preuve du Théorème 1.1.6 :* Considérons  $R > 0$  et un sous-ensemble épais  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  :

$$\exists 0 < \gamma \leq 1, \exists L > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap (x + [0, L]^d)| \geq \gamma L^d,$$

et fixons une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que  $\text{supp } \widehat{f} \subset [-R, R]^d$ . La preuve donnée par Kovrijkine suit le précepte « diviser pour mieux régner ». En effet, l'idée consiste à diviser l'espace  $\mathbb{R}^d$  en cubes

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{a \in LZ^d} Q_a \quad \text{avec} \quad Q_a = a + [0, L]^d,$$

et à obtenir des estimations de la forme

$$(1.1.10) \quad \forall a \in LZ^d, \quad \|f\|_{L^2(Q_a)} \leq D_R \|f\|_{L^2(\omega \cap Q_a)}$$

pour une certaine constante  $D_R > 0$  indépendante de  $f$  et du point  $a$ . L'obtention de telles estimations permet, en sommant chacune d'entre elles, d'établir une estimation du type (1.1.9). Pour les obtenir, Kovrijkine applique un lemme d'analyse complexe qui nécessite, cependant, d'avoir des estimations de Bernstein localisées sur les domaines  $Q_a$  de la forme :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(Q_a)} \leq C_\beta R^{|\beta|} \|f\|_{L^2(Q_a)}.$$

La preuve proposée par Kovrijkine est constituée de trois étapes :

*Première étape : des bons et des mauvais cubes.* Dans un premier temps, constatons qu'une utilisation du Théorème de Plancherel permet d'obtenir les estimations de Bernstein globales suivantes

$$(1.1.11) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (\sqrt{d}R)^{|\beta|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

A priori, rien n'autorise à penser que ces estimations restent valides en remplaçant l'espace  $\mathbb{R}^d$  par les cubes  $Q_a$  dans (1.1.11). L'idée clé de Kovrijkine est alors de diviser la famille de cubes  $(Q_a)_{a \in LZ^d}$  en de *bons cubes* et *mauvais cubes*. Les bons cubes, seront précisément les cubes  $Q_a$  pour lesquels des estimations de Bernstein dégradées sont vraies

$$(1.1.12) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(Q_a)} \leq 2^{\frac{|\beta|+d+1}{2}} (\sqrt{d}R)^{|\beta|} \|f\|_{L^2(Q_a)}.$$

Ces estimations sont très similaires à (1.1.11) mais dégradées par un facteur  $2^{\frac{|\beta|+d+1}{2}}$  pour assurer que la contribution des mauvais cubes reste petite.

*Deuxième étape : la contribution des mauvais cubes est petite.* Par définition, un mauvais cube est un cube pour lequel il existe  $\beta_0 \in \mathbb{N}^d$  tel que

$$\|\partial_x^{\beta_0} f\|_{L^2(Q_a)} > 2^{\frac{|\beta_0|+d+1}{2}} (\sqrt{d}R)^{|\beta_0|} \|f\|_{L^2(Q_a)}.$$

On remarque alors qu'avec cette définition des mauvais cubes et grâce aux estimations (1.1.11), la contribution des mauvais cubes est petite, puisque nous avons :

$$\begin{aligned} \sum_{\text{mauvais cubes}} \|f\|_{L^2(Q_a)}^2 &\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \sum_{\text{mauvais cubes}} 2^{-(|\beta|+d+1)} (\sqrt{d}R)^{-2|\beta|} \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(Q_a)}^2 \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} 2^{-(|\beta|+d+1)} (\sqrt{d}R)^{-2|\beta|} \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} 2^{-(|\beta|+d+1)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

On en déduit alors facilement que

$$(1.1.13) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \sum_{\text{bons cubes}} \|f\|_{L^2(Q_a)}^2.$$

*Troisième étape : utilisation d'un lemme d'analyse complexe.* Il reste à obtenir des estimations du type (1.1.10) sur chacun des bons cubes. Pour cela, Kovrijkine applique un lemme d'analyse complexe (voir le Lemme 9.1.1 de la Section 9.1), qui permet, en utilisant les estimations (1.1.12), d'obtenir précisément pour tous les bons cubes  $Q_a$  :

$$\|f\|_{L^2(Q_a)} \leq \left(\frac{C_d}{\gamma}\right)^{C_d(1+LR)} \|f\|_{L^2(\omega \cap Q_a)},$$

pour une certaine constante  $C_d > 0$ . La conclusion suit de l'estimation précédente et de (1.1.13), puisque nous obtenons :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \left(\frac{C_d}{\gamma}\right)^{2C_d(1+LR)} \|f\|_{L^2(\omega \cap \bigcup_{\text{bons cubes}} Q_a)}^2 \leq 2 \left(\frac{C_d}{\gamma}\right)^{2C_d(1+LR)} \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

Dans la suite de ce manuscrit, nous mentionnerons cette preuve à plusieurs reprises en se référant à la stratégie à la Kovrijkine. Plusieurs preuves des résultats énoncés dans ce manuscrit s'inspirent de cette stratégie. Lorsqu'un tel résultat se présentera, les différences avec la stratégie originale de Kovrijkine seront expliquées.

## 1.2. Combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite

Le Théorème 1.1.6 dû à Kovrijkine et présenté dans la section précédente montre que sur le sous-espace de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  constitué des fonctions dont les fréquences ont été tronquées à partir de  $|\xi| > R$ , les normes  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  et  $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$  sont équivalentes dès que  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est épais et permet de comparer explicitement ces deux normes. Étant donnée une base hilbertienne  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , nous pouvons considérer le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les  $N$ -premiers modes de la base et se poser une question similaire d'équivalence de normes. Dans cette section, nous nous intéressons au cas de la base hilbertienne donnée par les fonctions de Hermite.

Rappelons que les fonctions de Hermite  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  sont définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}).$$

La famille  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est connue pour former une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ . Dans le cas de la dimension  $d \geq 1$ , les fonctions de Hermite prennent la forme suivante

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^d \phi_{\alpha_j}(x_j),$$

pour  $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{N}^d$ ,  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^d$ . Cette famille  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  forme à son tour une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui est composée de fonctions propres de l'oscillateur harmonique

$$(1.2.1) \quad \mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2 = \sum_{k \geq 0} (2k + d) \mathbb{P}_k, \quad \text{Id} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_k,$$

où  $\mathbb{P}_k$  est la projection orthogonale sur  $\text{Vect}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|=k}$ , avec  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ . Quelques propriétés et estimations utiles sur les fonctions de Hermite sont données en Appendice E. La problématique de cette section est la question de l'équivalence des normes  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  et  $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$  sur le sous-espace  $\mathcal{E}_N = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$  engendré par les modes d'énergie inférieure à  $2N + d$ .

Comme cela a été remarqué par Beauchard, Jaming et Pravda-Starov dans le travail [11, page 30], par des arguments d'analyse complexe et d'équivalence de normes en dimension finie, pour tout entier  $N \geq 1$ , il existe une constante  $C_N(\omega) > 0$  tel que

$$\forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_N(\omega) \|f\|_{L^2(\omega)},$$

dès que  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est de mesure de Lebesgue non-nulle. La situation est donc assez différente par rapport à celle de la section précédente puisque dans le cadre d'une troncature en fréquence, le Théorème de Logvinenko-Sereda stipule que l'équivalence des normes ne peut avoir lieu seulement lorsque l'ensemble  $\omega$  est épais. Lorsque  $\mathbb{R}^d \setminus \omega$  n'est pas de mesure nulle, la quantité  $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$  ne définit pas une norme sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Par conséquent, puisque  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  forme une base hilbertienne de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , la constante  $C_N(\omega)$  doit tendre vers l'infini dans l'asymptotique  $N \rightarrow +\infty$ . A contrario, on s'attend à ce que plus la masse de  $\omega$  occupe l'espace  $\mathbb{R}^d$ , plus cette constante tend à être petite. Ceci est une nouvelle manifestation d'un principe d'incertitude dans lequel la localisation suivant les premiers modes de Hermite entre en compétition avec la localisation en espace. Dans le même travail [11], les auteurs ont étudié la croissance de la constante  $C_N(\omega)$  par rapport au paramètre d'énergie  $N$  sous différentes conditions géométriques sur l'ensemble  $\omega$ . Le résultat principal de [11] (Théorème 2.1) établit les estimations quantitatives suivantes sur la constante positive  $C_N(\omega) > 0$  :

(i) Si  $\omega$  est un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^d$ , alors il existe une constante positive  $C = C(\omega) > 1$  telle que

$$(1.2.2) \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{\frac{1}{2}N \ln(N+1) + CN} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

(ii) Si le sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfait la condition

$$(1.2.3) \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left( \inf_{r \geq R} \frac{|\omega \cap B(0, r)|}{|B(0, r)|} \right) > 0,$$

alors il existe une constante positive  $C = C(\omega) > 1$  telle que

$$(1.2.4) \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C e^{CN} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

(iii) Si le sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfait

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap (x + [0, L]^d)| \geq \gamma L^d,$$

alors il existe une constante positive  $C = C(L, \gamma, d) > 0$  dépendant de la dimension  $d \geq 1$  et des paramètres  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $L > 0$ , et une constante positive universelle  $\kappa = \kappa(d) > 0$  dépendant uniquement de la dimension telles que

$$(1.2.5) \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \left( \frac{\kappa}{\gamma} \right)^{\kappa L \sqrt{N}} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

Dans les deux premiers cas (i) et (ii), les estimations spectrales sont obtenues en appliquant des inégalités de Remez aux polynômes de Hermite. La méthode utilisée par les auteurs est, de ce fait, assez dépendante de la structure même des fonctions de Hermite. Pour ce qui est des inégalités spectrales obtenues à partir d'ensembles épais, assertion (iii), les auteurs de [11] ont adapté la stratégie de Kovrijkine au cas des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite. Pour cela, les auteurs ont établi les inégalités de type Bernstein suivantes (voir [11, Proposition 3.3]) :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \forall 0 < \delta \leq 1, \forall \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\|\partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{\frac{\epsilon}{2\delta^2}} (2\delta)^{|\beta|} |\beta|! e^{\delta^{-1}\sqrt{N}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec  $\forall \beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_d$ , qui sont nécessaires à une définition adaptée des bons cubes, dans une stratégie à la Kovrijkine.

Comme nous le verrons dans la section dédiée aux ensembles épais par rapport à une densité, la condition d'épaisseur est une condition plus forte que la condition (1.2.3).

Ainsi, comme attendu, plus les conditions géométriques imposent à l'ensemble  $\omega$  d'occuper l'espace, plus la croissance exponentielle de la constante  $C_N(\omega)$  par rapport au niveau d'énergie  $N$  est lente. Nous verrons dans la section suivante que pour espérer tirer avantage de ce type d'inégalités spectrales en théorie du contrôle, il est crucial d'avoir un contrôle de la croissance par rapport à  $N$  aussi fin que possible.



## Introduction à la théorie du contrôle linéaire

Ce chapitre propose une courte et non exhaustive introduction à la théorie du contrôle pour des équations d'évolution linéaires. La plupart des résultats de ce chapitre sont donnés sans démonstration. Les Sections 2.1 et 2.2 visent principalement à présenter les notions et résultats abstraits qui seront utilisés dans la suite ce manuscrit. La dernière Section 2.3 fait le lien avec les principes d'incertitude présentés au Chapitre 1.

### 2.1. Contrôlabilité d'équations d'évolution linéaires

Dans ce manuscrit de thèse, nous nous intéressons à la contrôlabilité d'équations d'évolution posées sur tout l'espace  $\mathbb{R}^d$  du type :

$$(E_A) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + Af(t, x) = u(t, x)\mathbf{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur non borné sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de domaine  $D(A)$  générant un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , noté  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ ;  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  désigne une fonction de contrôle et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble mesurable appelé *support de contrôle*. Une des problématiques des travaux de cette thèse est la suivante :

*Quelles conditions géométriques faut-il imposer à l'ensemble de contrôle  $\omega$  pour assurer la contrôlabilité du système  $(E_A)$  ?*

Comme nous le verrons dans les sous-sections suivantes, cette question est imprécise car il existe diverses manières de contrôler une même équation d'évolution et suivant le sens que l'on donnera au mot « contrôler », les conditions géométriques requises sur l'ensemble  $\omega$  peuvent varier. On s'attend, en particulier, à ce que plus la notion de contrôle est faible, moins le support de contrôle doit être contraint géométriquement. Cette section vise à rappeler les différentes notions de contrôlabilité qui sont considérées dans ces travaux de thèse.

Avant de rentrer dans le coeur du sujet, étant donné une donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , nous définissons la *solution semi-groupe* du système  $(E_A)$  comme étant la fonction  $f \in C^0([0, +\infty), L^2(\mathbb{R}^d))$  donnée par :

$$(2.1.1) \quad \forall t \geq 0, \quad f(t, \cdot) = e^{-tA}f_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}(u(s, \cdot)\mathbf{1}_\omega)ds.$$

**2.1.1. Contrôlabilité exacte, contrôlabilité à zéro et contrôlabilité approchée.** La définition suivante fournit quatre notions différentes de contrôlabilité pour le système  $(E_A)$  qui sont classées de la plus forte à la plus faible :

**DÉFINITION 2.1.1.** *Soient  $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur non borné qui génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et  $T > 0$  un temps strictement positif. L'équation d'évolution  $(E_A)$  est dite :*

- *exactement contrôlable* à partir de  $\omega$  et au temps  $T$  si et seulement si pour tout  $f_0, f_1 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe, notée  $f$ , du système  $(E_A)$  satisfait  $f(T, \cdot) = f_1$ .
- *contrôlable à zéro* à partir de  $\omega$  et au temps  $T$  si et seulement si pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe, notée  $f$ , du système  $(E_A)$  satisfait  $f(T, \cdot) = 0$ .



- *approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme* à partir de  $\omega$  et au temps  $T$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_{\varepsilon, T} > 0$  telle que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe, notée  $f$ , du système  $(E_A)$  satisfait

$$(2.1.2) \quad \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

et

$$(2.1.3) \quad \|u\|_{L^2((0, T) \times \omega)} \leq C_{\varepsilon, T} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

La constante  $C_{\varepsilon, T}$  est appelée *coût du contrôle*.

- *approximativement contrôlable à zéro* à partir de  $\omega$  et au temps  $T$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$  et pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe, notée  $f$ , du système  $(E_A)$  satisfait

$$\|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Il est clair que la contrôlabilité exacte de  $(E_A)$  à un temps  $T$  et à partir de  $\omega$  implique la contrôlabilité à zéro de  $(E_A)$  au même temps et à partir de  $\omega$ . De même, si l'équation d'évolution est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme alors celle-ci est approximativement contrôlable à zéro. Le fait que la contrôlabilité à zéro implique la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme résulte de la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.1.2.** *Soient  $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur non borné qui génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et  $T > 0$ . Si le système  $(E_A)$  est contrôlable à zéro au temps  $T > 0$  et à partir de  $\omega$  alors il existe une constante  $C_T > 0$  telle que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe, notée  $f$ , au système  $(E_A)$  satisfait*

$$f(T, \cdot) = 0 \quad \text{et} \quad \|u\|_{L^2((0, T) \times \omega)} \leq C_T \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

La preuve de ce fait bien connu en théorie du contrôle est donnée dans [18, Section 2.3.2] et un résultat similaire pour la contrôlabilité exacte y est également démontré. Rappelons succinctement les idées de la preuve. Supposons que le système  $(E_A)$  est contrôlable à zéro en un temps  $T > 0$  à partir du support de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ . On définit, pour toute donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , le sous-espace affine

$$U^T(f_0) = \left\{ u \in L^2((0, T) \times \omega); f(T, \cdot) = 0 \right\},$$

où  $f \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  désigne la solution du système  $(E_A)$  avec donnée initiale  $f_0$  et contrôle  $u$ . Par hypothèse, le système est contrôlable à zéro donc  $U^T(f_0)$  est non vide et on vérifie, à partir de la formule (2.1.1), que cette partie convexe est fermée. Par théorème de projection sur un convexe fermé dans un espace de Hilbert, nous pouvons définir la projection de la fonction nulle sur  $U^T(f_0)$ , que l'on note  $\mathcal{U}^T(f_0)$ . Il suffit à présent de vérifier que l'application

$$\mathcal{U}^T : f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d) \mapsto \mathcal{U}^T(f_0) \in L^2((0, T) \times \omega),$$

est linéaire et continue. La linéarité est une conséquence directe de la linéarité du système  $(E_A)$  et de l'unicité de la projection. La continuité, quant à elle, peut se déduire du théorème du graphe fermé. En conclusion, il existe une constante  $C_T > 0$ , appelée coût, telle que pour toute donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , le contrôle  $\mathcal{U}^T(f_0)$  amène la solution du système  $(E_A)$  à zéro et vérifie

$$\|\mathcal{U}^T(f_0)\|_{L^2((0, T) \times \omega)} \leq C_T \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En particulier, ce qui précède rend naturel de demander une estimation du contrôle (2.1.3) dans la définition de la contrôlabilité approchée à coût uniforme. Le lecteur pourrait se demander si relaxer l'estimation (2.1.2) par

$$\|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon$$

fournit une nouvelle notion de contrôlabilité. En réalité, la proposition suivante montre qu'une telle définition serait équivalente à de la contrôlabilité à zéro (exacte) :

PROPOSITION 2.1.3. *Soient  $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur non borné qui génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et  $T > 0$ . Supposons qu'il existe une constante positive  $C_T > 0$  telle que pour toute donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  telle que la solution semi-groupe de  $(E_A)$  satisfait*

$$(2.1.4) \quad \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 1,$$

avec de plus

$$(2.1.5) \quad \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt \leq C_T^2 \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Alors pour toute donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe de l'équation  $(E_A)$  satisfait  $f(T, \cdot) = 0$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . D'après (2.1.4) et (2.1.5), il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout entier  $n \geq 1$ , il existe un contrôle  $u_n \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que la solution semi-groupe  $f_n$  de  $(E_A)$  avec la donnée initiale  $nf_0$  et associée au contrôle  $u_n$  satisfait

$$(2.1.6) \quad \|f_n(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 1,$$

et

$$(2.1.7) \quad \int_0^T \|u_n(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt \leq C^2 n^2 \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Pour tout  $n \geq 1$ , nous définissons  $g_n = u_n/n$ . Le reste de la preuve se scinde en quatre étapes.

▷ *Étape 1* : Construisons un contrôle  $u_\infty$ . Puisque la suite  $(g_n \mathbb{1}_\omega)_{n \geq 1}$  est bornée dans  $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  d'après (2.1.7), elle converge faiblement dans  $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ , à une extraction près, vers une fonction  $g_\infty \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ . Remarquons que  $g_\infty \mathbb{1}_{\omega^c} = 0$  p.p., puisque nous avons que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|g_\infty(t, \cdot) \mathbb{1}_{\omega^c}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt &= \int_0^T \langle g_\infty(t, \cdot) \mathbb{1}_{\omega^c}, g_\infty(t, \cdot) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^T \langle g_\infty(t, \cdot) \mathbb{1}_{\omega^c}, g_n(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

▷ *Étape 2* : Nous vérifions à présent que la suite  $(f_n(T, \cdot)/n)_{n \geq 1}$  converge faiblement dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  vers la solution semi-groupe de l'équation  $(E_A)$  avec pour donnée initiale  $f_0$  et associée au contrôle  $g_\infty$  prise au temps  $T$ . Rappelons que par définition de la solution semi-groupe, la fonction  $f_n(T, \cdot)$  est donnée par

$$f_n(T, \cdot) = e^{-TA}(nf_0) + \int_0^T e^{-(T-t)A}(u_n(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega) dt.$$

En notant  $(e^{-(T-t)A})^*$  l'opérateur adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de  $e^{-(T-t)A}$  et en utilisant la convergence faible de la suite  $(g_n \mathbb{1}_\omega)_{n \geq 1}$  vers  $g_\infty$  dans  $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ , nous obtenons alors que

pour tout  $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \langle n^{-1}f_n(T, \cdot), \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \langle e^{-TA}f_0, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \langle e^{-(T-t)A}(g_n(t, \cdot)\mathbb{1}_\omega), \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= \langle e^{-TA}f_0, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \langle g_n(t, \cdot)\mathbb{1}_\omega, (e^{-(T-t)A})^*\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \langle e^{-TA}f_0, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \langle g_\infty(t, \cdot), (e^{-(T-t)A})^*\varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= \langle e^{-TA}f_0, \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^T \langle e^{-(T-t)A}g_\infty(t, \cdot), \varphi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'affirmation, puisque la solution semi-groupe  $f_\infty$  de l'équation  $(E_A)$  avec pour donnée initiale  $f_0$  et associée au contrôle  $g_\infty$  est donnée au temps  $T$  par

$$f_\infty(T, \cdot) = e^{-TA}f_0 + \int_0^T e^{-(T-t)A}(g_\infty(t, \cdot)\mathbb{1}_\omega) dt,$$

et d'après l'étape 1,  $g_\infty\mathbb{1}_\omega = g_\infty$ .

▷ *Étape 3* : La fonction limite  $f_\infty(T, \cdot)$  est égale à zéro, puisque nous déduisons de (2.1.6) et de propriétés basiques de la convergence faible que

$$\|f_\infty(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|n^{-1}f_n(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

En conclusion, la solution semi-groupe  $f_\infty$  de l'équation  $(E_A)$  avec pour donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et associée au contrôle  $g_\infty \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  satisfait  $f_\infty(T, \cdot) = 0$ .  $\square$

**2.1.2. Lien avec l'observabilité.** Dans cette section, nous allons nous intéresser à l'observabilité des équations d'évolution, puisque cette question est très liée à celle de la contrôlabilité. Considérons une équation d'évolution homogène abstraite

$$(H_B) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, x) + Bg(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $B : D(B) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  est un opérateur non borné générant un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble mesurable. L'observabilité de l'équation d'évolution  $(H_B)$  a trait à la possibilité de caractériser la solution de cette équation à partir de la donnée de ses valeurs prises sur un sous-ensemble  $\omega$ . Comme pour la contrôlabilité, cette notion existe sous différentes formes. Voici celles qui vont nous intéresser dans ce manuscrit :

**DÉFINITION 2.1.4.** Soient  $B : D(B) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur non borné qui génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , noté  $(e^{-tB})_{t \geq 0}$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et un temps strictement positif  $T > 0$ . On dit que le système  $(H_B)$  est :

- *exactement observable* au temps  $T$  à partir de  $\omega$  si et seulement s'il existe une constante  $C_T = C_T(\omega) > 0$  telle que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_T^2 \int_0^T \|e^{-tB}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

- *observable* au temps  $T$  à partir de  $\omega$  si et seulement s'il existe une constante  $C_T = C_T(\omega) > 0$  telle que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TB}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_T^2 \int_0^T \|e^{-tB}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

- *approximativement observable* au temps  $T$  à partir de  $\omega$  si et seulement si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une constante  $C_{T,\varepsilon} = C_{T,\varepsilon}(\omega) > 0$  telle que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TB}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{T,\varepsilon}^2 \int_0^T \|e^{-tB}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

D'après la méthode d'unicité de Hilbert, voir [18, 47], la contrôlabilité exacte et la contrôlabilité à zéro d'une équation d'évolution abstraite est liée à l'observabilité du système adjoint

$$(H_{A^*}) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, x) + A^*g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

par la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.1.5** (Méthode d'unicité de Hilbert). *Soient  $A : D(A) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$  un opérateur non borné qui génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , noté  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ ,  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et un temps strictement positif  $T > 0$ .*

- *L'équation d'évolution  $(E_A)$  est exactement contrôlable au temps  $T$  à partir de  $\omega$  si et seulement si le système adjoint  $(H_{A^*})$  est exactement observable au temps  $T$  à partir de  $\omega$ .*
- *L'équation d'évolution  $(E_A)$  est contrôlable à zéro au temps  $T$  à partir de  $\omega$  si et seulement si le système adjoint  $(H_{A^*})$  est observable au temps  $T$  à partir de  $\omega$ .*

Remarquons que les notions d'observabilité données dans la Définition 2.1.4 demandent à l'opérateur non borné  $A^*$  de générer un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Il s'agit d'une conséquence du fait que l'opérateur  $A$  génère lui-même un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . De plus, le semi-groupe généré par  $A^*$  est donné par :

$$\forall t \geq 0, \quad e^{-tA^*} = (e^{-tA})^*.$$

Le lecteur trouvera une démonstration de cette propriété (Proposition D.0.2), ainsi que des rappels concernant les semi-groupes dans l'Appendice D.

Concernant la contrôlabilité approchée à coût uniforme, cette notion est équivalente à l'observabilité approchée du système adjoint :

**THÉORÈME 2.1.6** ([65, Proposition 6]). *Soit  $T > 0$  un temps strictement positif et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- L'équation d'évolution  $(E_A)$  est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme au temps  $T$  à partir du support de contrôle  $\omega$ .*
- Pour tout  $\varepsilon \in (0, 1)$ , il existe une constante positive  $C_{\varepsilon,T} > 0$  telle que pour tout  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$(2.1.8) \quad \|e^{-TA}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon,T}^2 \int_0^T \|e^{-tA}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

*Le cas échéant, le coût du contrôle dans la Définition 2.1.1 peut être pris égal à la constante  $C_{\varepsilon,T} > 0$ .*

Ce résultat découle de la proposition suivante, dont les arguments de la preuve sont dus à Miller (voir [55, Lemme 3.4]) :

**PROPOSITION 2.1.7.** *Soient un temps strictement positif  $T > 0$ , un coût  $C > 0$ , une erreur  $\varepsilon > 0$  et un sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ . Il y a équivalence entre :*

$$\forall f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \exists u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d),$$

$$\frac{1}{C^2} \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

où  $f$  désigne la solution semi-groupe de l'équation  $(E_A)$  avec donnée initiale  $f_0$  et associée au contrôle  $u$ , et

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C^2 \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

DÉMONSTRATION. Considérons  $T > 0$ ,  $C > 0$ ,  $\varepsilon > 0$  et un sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ . Supposons que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , il existe un contrôle  $u \in L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)$  tel que

$$(2.1.9) \quad \frac{1}{C^2} \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Rappelons que la fonction  $f(T, \cdot)$  est donnée par

$$f(T, \cdot) = e^{-TA} f_0 + \int_0^T e^{-(T-t)A} (u(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega) dt.$$

Soit  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . En utilisant le fait que l'adjoint de l'opérateur  $e^{-(T-t)A}$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  est donné par  $e^{-(T-t)A^*}$  (voir Proposition D.0.2) et l'égalité ci-dessus, nous obtenons que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \langle f_0, e^{-TA^*} g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \langle e^{-TA} f_0, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \langle f(T, \cdot), g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_0^T \langle e^{-(T-t)A} (u(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega), g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \\ &= \langle f(T, \cdot), g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} - \int_0^T \langle u(t, \cdot), e^{-(T-t)A^*} g \rangle_{L^2(\omega)} dt. \end{aligned}$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'espace  $L^2((0, T) \times \omega) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ , nous déduisons que pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} |\langle f_0, e^{-TA^*} g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 &\leq \left( \frac{1}{\varepsilon^2} \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{1}{C^2} \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt \right) \\ &\quad \times \left( \varepsilon^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + C^2 \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (2.1.9) et en considérant  $f_0 = e^{-TA^*} g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , nous obtenons alors l'estimation d'observabilité approchée suivante,

$$(2.1.10) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C^2 \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Réciproquement, supposons que l'estimation d'observabilité approchée (2.1.10) est satisfaite. Considérons une fonction  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  fixée, et définissons la fonctionnelle convexe  $J : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  par

$$J(g) = \frac{C^2}{2} \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{\varepsilon^2}{2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \langle e^{-TA^*} g, f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

pour tout  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que la fonctionnelle  $J$  est coercive puisque pour tout  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$J(g) \geq \frac{\varepsilon^2}{2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - K_T \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où  $K_T = \|e^{-TA^*}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ . Ceci a pour conséquence qu'il existe une fonction  $h_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  telle que

$$J(h_0) = \min_{g \in L^2(\mathbb{R}^d)} J(g).$$

En particulier, nous avons

$$(\nabla J)(h_0) = C^2 \int_0^T e^{-tA} (\mathbb{1}_\omega e^{-tA^*} h_0) dt + \varepsilon^2 h_0 + e^{-TA} f_0 = 0.$$

Il résulte de l'égalité ci-dessus que la solution semi-groupe  $f$  de l'équation  $(E_A)$  associée au contrôle

$$u(t, \cdot) = C^2 e^{-(T-t)A^*} h_0,$$

satisfait

$$\begin{aligned} f(T, \cdot) &= e^{-TA} f_0 + \int_0^T e^{-(T-t)A} (u(t, \cdot) \mathbb{1}_\omega) dt \\ &= e^{-TA} f_0 + C^2 \int_0^T e^{-(T-t)A} (\mathbb{1}_\omega e^{-(T-t)A^*} h_0) dt = -\varepsilon^2 h_0. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$(2.1.11) \quad \langle h_0, (\nabla J)(h_0) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = C^2 \int_0^T \|e^{-tA^*} h_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \langle h_0, e^{-TA} f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \frac{1}{C^2} \int_0^T \|u(t, \cdot)\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon^2} \|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= -\langle e^{-TA^*} h_0, f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|e^{-TA^*} h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Il reste à estimer le terme  $\|e^{-TA^*} h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ . Nous déduisons de l'inégalité d'observabilité approchée (2.1.10), de l'égalité (2.1.11) et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} \|e^{-TA^*} h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq C^2 \int_0^T \|e^{-tA^*} h_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon^2 \|h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= -\langle e^{-TA^*} h_0, f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|e^{-TA^*} h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\|e^{-TA^*} h_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Ceci conclut la preuve de Proposition 2.1.7.  $\square$

Les résultats de contrôlabilité présentés dans ce manuscrit seront principalement obtenus à travers des inégalités d'observabilité. C'est pourquoi, dans la section suivante, nous donnons un résultat abstrait d'observabilité qui donne des conditions suffisantes pour assurer l'observabilité du système adjoint.

## 2.2. Un résultat abstrait d'observabilité

Cette section vise à faire le lien entre les principes d'incertitude présentés dans le Chapitre 1 et la contrôlabilité d'équations d'évolution linéaires introduite dans la Section 2.1 en présentant un résultat abstrait d'observabilité qui généralise la méthode de Lebeau-Robbiano. Cette méthode a été introduite par Lebeau et Robbiano dans [45] pour contrôler l'équation de la chaleur posée sur un domaine borné et régulier de  $\mathbb{R}^d$ . Elle consiste à alterner des phases actives et des phases passives de contrôle sur des intervalles de temps de plus en plus petits. Les phases actives consistent à contrôler les basses fréquences et à estimer le coût à l'aide d'inégalités spectrales. Les phases passives consistent, quant à elles, à laisser agir l'équation qui se charge d'écraser les hautes fréquences par ses propriétés diffusives. Le lecteur intéressé pourra également consulter le papier [55] consacré à cette méthode.

Beauchard et Pravda-Starov ont établi, avec des contributions de Miller, une version abstraite de cette méthode dans le cadre de l'observabilité d'une équation d'évolution dans l'article [12, Théorème 2.1]. Ce résultat abstrait d'observabilité dont la preuve s'inspire des travaux [55, 57], a été généralisé dans [10, Théorème 3.2] au cas non-autonome avec des supports de contrôles mouvant et sous des estimations de dissipation autorisant un contrôle de l'explosion en temps petits dans celles-ci. Le résultat suivant est une formulation

simplifiée du Théorème 3.2 dans [10] limitée au cas des semi-groupes avec un support de contrôle fixe :

**THÉORÈME 2.2.1** (Beauchard, Egidi & Pravda-Starov). *Soient  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\Omega$ ,  $(\pi_k)_{k \geq 1}$  une famille de projections orthogonales sur  $L^2(\Omega)$ ,  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  un semi-groupe de contraction fortement continu sur  $L^2(\Omega)$ ;  $c_1, c_2, c'_1, c'_2, a, b, t_0, m_1 > 0$  des constantes positives avec  $a < b$ ;  $m_2 \geq 0$ . Si les inégalités spectrales suivantes*

$$(2.2.1) \quad \forall g \in L^2(\Omega), \forall k \geq 1, \quad \|\pi_k g\|_{L^2(\Omega)} \leq c'_1 e^{c_1 k^a} \|\pi_k g\|_{L^2(\omega)},$$

et les estimations de dissipation suivantes

$$(2.2.2) \quad \forall g \in L^2(\Omega), \forall k \geq 1, \forall 0 < t < t_0, \quad \|(1 - \pi_k)(e^{-tA}g)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{e^{-c_2 t^{m_1} k^b}}{c'_2 t^{m_2}} \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

sont vérifiées, alors il existe une constante  $C > 1$  telle que les inégalités d'observabilité suivantes sont satisfaites

$$\forall T > 0, \forall g \in L^2(\Omega), \quad \|e^{-TA}g\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \exp\left(\frac{C}{T^{\frac{am_1}{b-a}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

Contrairement à la méthode de Lebeau-Robbiano originale, il est important de remarquer que les hypothèses du résultat ci-dessus ne demandent pas aux projections orthogonales  $(\pi_k)_{k \geq 1}$  d'être reliées aux projections spectrales sur les sous-espaces propres du générateur infinitésimal  $A$ , qui peut ne pas être auto-adjoint. D'après ce résultat, pour déduire un résultat d'observabilité, ou de manière équivalente un résultat de contrôlabilité à zéro pour le système adjoint, en utilisant le Théorème 2.2.1, il y a essentiellement deux ingrédients clés qui sont des inégalités spectrales (2.2.1) et des estimations de dissipation (2.2.2). Il est crucial que le paramètre  $k$  apparaisse dans les estimations (2.2.1) à une puissance  $a$  strictement inférieure à la puissance  $b$  à laquelle apparaît ce paramètre dans les estimations (2.2.2).

Remarquons que les estimations (2.2.1) et (2.2.2) sont de natures très différentes. En effet, les inégalités spectrales (2.2.1) ne font pas intervenir le semi-groupe  $A$  mais seulement le support de contrôle  $\omega$  et sont la manifestation d'un principe d'incertitude. La croissance du paramètre  $k$  dans ces estimations est fortement liée aux propriétés géométriques du support  $\omega$ . A contrario, les estimations de dissipation (2.2.2), quant à elles, sont fortement reliées au semi-groupe généré par  $A$  mais ne font pas intervenir le support  $\omega$ . Nous allons voir qu'elles seront obtenues comme conséquence des propriétés de régularisation du semi-groupe et ce sont ces effets régularisants qui nous guideront sur le choix des projections orthogonales  $(\pi_k)_{k \geq 1}$ . La section suivante présente des exemples d'utilisation de ce résultat.

### 2.3. Ensembles épais et contrôlabilité

Cette section présente quelques exemples de résultats de contrôlabilité pour des équations d'évolution paraboliques à partir d'ensembles épais. Les équations considérées dans cette section jouissent d'effets régularisants qui ne permettent pas d'atteindre toute cible dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  et de ce fait, ces propriétés régularisantes sont une obstruction à la contrôlabilité exacte. C'est pourquoi, dans la suite, nous nous intéressons uniquement à la question de la contrôlabilité à zéro de ces équations.

**2.3.1. Contrôle de l'équation de la chaleur.** La condition d'épaisseur définie en Définition 1.1.3 a récemment fait montre de son intérêt en théorie du contrôle et notamment, pour son rôle dans la contrôlabilité de l'équation de la chaleur. Deux groupes de mathématiciens, Egidi et Veselic [23] et Wang, Wang, Zhang et Zhang [67] ont établi que l'épaisseur est une condition nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur  $E_{-\Delta}$ .

THÉORÈME 2.3.1. *Soient  $d \geq 1$ ,  $T > 0$  un temps strictement positif et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ . L'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) - \Delta_x f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

*est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  au temps  $T$  si et seulement si  $\omega$  est épais.*

Il est intéressant de noter que si l'équation de la chaleur est contrôlable à un temps strictement positif  $T_0 > 0$  alors elle l'est à tout temps strictement positif. Le caractère nécessaire de l'épaisseur s'obtient en niant l'inégalité d'observabilité du système adjoint par propagation d'une gaussienne. Nous verrons cette méthode en détails dans le Chapitre 8 lorsque nous nous intéresserons à d'autres notions de contrôlabilité pour une large classe d'équations diffusives. La contrôlabilité de l'équation de la chaleur à partir des ensembles épais peut se déduire du résultat abstrait d'observabilité donné par le Théorème 2.2.1 et du principe d'incertitude donné par le Théorème 1.1.6 démontré par Kovrijkine. D'après la méthode d'unicité de Hilbert (Proposition 2.1.5), la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur  $E_{-\Delta}$  est équivalente à l'observabilité du système adjoint  $H_{-\Delta}$ . Le semi-groupe de la chaleur est connu pour régulariser dans une classe de Gevrey qui se caractérise par un gain de décroissance exponentielle côté Fourier, comme le montrent les estimations explicites suivantes

$$(2.3.1) \quad \widehat{(e^{t\Delta_x} g)}(t, \xi) = \widehat{g}(\xi) e^{-t|\xi|^2}, \quad t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Pour cette raison, il est naturel de considérer comme projections orthogonales des opérateurs de coupe-fréquences donnés par les projections orthogonales  $\pi_k : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow E_k$  sur les sous-espaces vectoriels fermés

$$E_k = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{supp } \widehat{f} \subset [-k, k]^d\}, \quad k \geq 1.$$

Avec ce choix, les estimations de dissipation découlent directement des estimations (2.3.1) et de la formule de Plancherel. Elles sont données par

$$(2.3.2) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall k \geq 1, \forall t > 0, \quad \|(1 - \pi_k)(e^{t\Delta_x} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-tk^2} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Concernant les inégalités spectrales, elles se déduisent de la version quantitative du théorème de Logvinenko-Sereda établie par Kovrijkine (Théorème 1.1.6). Puisque le paramètre  $R$  apparaît à la puissance 1 dans les estimations (1.1.9) et que le paramètre  $k$  apparaît à la puissance 2 dans les estimations (2.3.2), le Théorème 2.2.1, appliqué avec les paramètres  $a = 1$  et  $b = 2$  qui satisfont la condition  $0 < a < b$ , assure que l'équation de la chaleur  $H_{-\Delta}$  est observable en temps  $T > 0$  arbitrairement petit et à partir de tout ensemble épais  $\omega$ .

Concernant les équations de la chaleur fractionnaires  $E_{(-\Delta)^s}$ , associées aux laplaciens fractionnaires  $(-\Delta)^s$  avec  $s > 0$ , Alphonse et Bernier ont établi que l'épaisseur est une condition nécessaire pour la contrôlabilité à zéro de ces équations ([4, Théorème 1.14]) et est suffisante dès que  $s > \frac{1}{2}$  ([4, Théorème 1.8]). En revanche, sous ce régime critique, Koenig a démontré que les équations de la chaleur fractionnaires posées en dimension 1 ne sont pas contrôlables si l'ensemble de contrôle n'est pas dense dans  $\mathbb{R}$  :

THÉORÈME 2.3.2 ([40, Théorèmes 2.8 et 2.11]). *Soient  $0 < s \leq \frac{1}{2}$  et  $\omega \subset \mathbb{R}$  un ouvert. Si l'équation de la chaleur fractionnaire*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta_x)^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

*est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  à un certain temps  $T > 0$  alors  $\omega$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .*

Mentionnons qu'il n'y a pas de résultat donnant une condition géométrique suffisante qui permette de contrôler à zéro les équations de la chaleur fractionnaires en basse diffusion,  $0 < s \leq \frac{1}{2}$ .

Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons au rôle des ensembles épais dans la contrôlabilité de ces équations peu diffusives, pour des notions de contrôlabilité plus faibles.



Plus précisément, on étudie la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme et la stabilisation d'une large classe d'équations diffusives à partir d'ensembles épais.

**2.3.2. Contrôle de l'équation de la chaleur harmonique.** Intéressons-nous à présent à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur harmonique. Il n'existe pour l'instant que très peu de conditions nécessaires pour la contrôlabilité à zéro de cette équation. Mentionnons celle établie par Miller dans [54, Théorème 1.10], qui montre que l'équation de la chaleur harmonique  $E_{(-\Delta+|x|^2)}$  n'est pas contrôlable à partir d'un demi-espace :

**THÉORÈME 2.3.3.** *Soient  $d \geq 1$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable inclus dans un demi-espace :*

$$\exists a \in \mathbb{R}^d, \exists \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in \omega, \quad \langle a, x \rangle \leq \alpha,$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire euclidien. L'équation de la chaleur harmonique

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta_x + |x|^2)f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

n'est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  pour aucun temps strictement positif  $T > 0$ .

Ce théorème fournit des exemples de supports de contrôle à partir desquels il n'est pas possible de contrôler l'équation de la chaleur harmonique. En particulier, cela justifie la recherche de conditions géométriques suffisantes pour la contrôlabilité à zéro de cette équation.

Suite au Théorème 2.3.1 sur la contrôlabilité de l'équation de la chaleur, la contrôlabilité de l'équation  $E_{(-\Delta+|x|^2)}$  à partir des ensembles épais a été naturellement étudiée. Le théorème suivant, dû à Beauchard, Jaming et Pravda-Starov, assure que l'épaisseur est une condition suffisante pour la contrôlabilité de l'équation de la chaleur harmonique :

**THÉORÈME 2.3.4.** *Soient  $d \geq 1$ ,  $T > 0$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. Si  $\omega$  est épais alors l'équation de la chaleur harmonique*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta_x + |x|^2)f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  au temps  $T > 0$ .

Ce résultat est un cas particulier d'un théorème, présenté en section suivante, qui assure la contrôlabilité à zéro d'une large classe d'équations d'évolution associées à des opérateurs quadratiques accréatifs à partir des ensembles épais. Comme nous le verrons dans la section suivante, l'oscillateur harmonique appartient à une classe d'opérateurs quadratiques générant des semi-groupes jouissant d'effets régularisants dans des espaces de Gelfand-Shilov symétriques. Cela se traduit par une forte décroissance des solutions du système homogène  $H_{-\Delta+|x|^2}$  en fréquence et en espace. Du fait de cette propriété de décroissance en espace, il est attendu que la condition d'épaisseur ne soit pas nécessaire à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur harmonique et que l'on puisse contrôler cette équation à partir d'ensembles moins distribués à l'infini que ce que requiert la condition d'épaisseur.

**2.3.3. Contrôle d'équations d'évolution associées à des opérateurs quadratiques accréatifs.** Dans l'article [11], les auteurs ont étudié plus généralement la contrôlabilité d'équations d'évolution associées à une large classe d'opérateurs quadratiques accréatifs à partir d'ensembles épais. Les opérateurs quadratiques sont des opérateurs pseudo-différentiels définis selon la quantification de Weyl

$$q^w(x, D_x)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^{2d}} e^{i(x-y)\cdot\xi} q\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi,$$

où les symboles  $q(x, \xi)$ , avec  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ ,  $d \geq 1$  sont des formes quadratiques à valeurs complexes

$$\begin{aligned} q : \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d &\rightarrow \mathbb{C} \\ (x, \xi) &\mapsto q(x, \xi). \end{aligned}$$

Ces opérateurs sont en fait des opérateurs seulement différentiels puisque la quantification de Weyl du symbole quadratique  $x^\alpha \xi^\beta$ , avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2d}$ ,  $|\alpha + \beta| = 2$ , est explicitement donné par l'opérateur différentiel

$$\frac{x^\alpha D_x^\beta + D_x^\beta x^\alpha}{2}, \quad D_x = i^{-1} \partial_x.$$

Remarquons que ces opérateurs ne sont pas auto-adjoints dès que leur symbole de Weyl a une partie imaginaire non nulle. La réalisation maximale de l'opérateur quadratique  $q^w(x, D_x)$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , c'est à dire, l'opérateur équipé avec le domaine

$$D(q^w) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : q^w(x, D_x)f \in L^2(\mathbb{R}^d)\},$$

où  $q^w(x, D_x)f$  est défini au sens des distributions, est connue pour coïncider avec la fermeture de sa restriction à l'espace de Schwartz [33] (pp. 425-426),

$$q^w(x, D_x) : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

À toute forme quadratique  $q : \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d \rightarrow \mathbb{C}$  définie sur l'espace des phases est associée une matrice  $F \in M_{2d}(\mathbb{C})$  appelée matrice fondamentale, qui est l'unique matrice satisfaisant l'identité

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2d}, \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2d}, \quad q((x, \xi), (y, \eta)) = \sigma((x, \xi), F(y, \eta)),$$

où  $q(\cdot, \cdot)$  est la forme polaire associée à la forme quadratique  $q$ , et où  $\sigma$  est la forme symplectique

$$\sigma((x, \xi), (y, \eta)) = \langle \xi, y \rangle - \langle x, \eta \rangle = \sum_{j=1}^n (\xi_j y_j - x_j \eta_j),$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_d)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_d)$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ ,  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbb{C}^d$ . La notion d'espace singulier a été introduite dans [30] par Hitrik et Pravda-Starov qui ont mis en évidence l'existence d'un sous-espace vectoriel particulier de l'espace des phases  $S \subset \mathbb{R}^{2d}$ , qui est intrinsèquement lié au symbole quadratique  $q$ . Ce sous-espace vectoriel est défini comme l'intersection finie de noyaux suivante :

$$S = \left( \bigcap_{j=0}^{2d-1} \text{Ker}[\text{Re } F(\text{Im } F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2d},$$

où  $\text{Re } F$  et  $\text{Im } F$  sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de la matrice fondamentale  $F$  associée au symbole quadratique  $q$ ,

$$\text{Re } F = \frac{1}{2}(F + \bar{F}), \quad \text{Im } F = \frac{1}{2i}(F - \bar{F}).$$

Les auteurs de l'article [11] se sont intéressés à la contrôlabilité à zéro des équations d'évolution associées à un opérateur quadratique dont le symbole de Weyl est à partie réelle positive  $\text{Re } q \geq 0$  et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$ . Sous ces hypothèses, ces opérateurs quadratiques sont connus [31] (Théorème 1.2) pour générer un semi-groupe de contraction fortement continu  $(e^{-tq^w})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui régularise dans l'espace de Gelfand-Shilov  $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$  (dont une définition est donnée en Appendice C) :  $\exists C > 0, \exists t_0 > 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall 0 < t \leq t_0$ ,

$$(2.3.3) \quad \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tq^w} f)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{\frac{2k_0+1}{2}(|\alpha|+|\beta|+2d+s)}} (\alpha!)^{1/2} (\beta!)^{1/2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où  $s$  est un entier fixé tel que  $s > d/2$ , et où  $0 \leq k_0 \leq 2d-1$  est le plus petit entier vérifiant

$$(2.3.4) \quad \left( \bigcap_{j=0}^{k_0} \text{Ker} [\text{Re } F (\text{Im } F)^j] \right) \cap \mathbb{R}^{2d} = \{0\}.$$

Comme expliqué dans l'Appendice C, les fonctions appartenant aux espaces de Gelfand-Shilov symétriques peuvent se caractériser par une décroissance exponentielle des coefficients de leur décomposition selon la base de Hermite. Dans le but d'appliquer le Théorème 2.2.1, les auteurs ont alors considéré la famille de projecteurs  $(\pi_k)_{k \geq 0}$  donnée par les projections orthogonales sur les sous-espaces fermés

$$(2.3.5) \quad \mathcal{E}_k = \text{Vect}_{\mathbb{C}} \{ \Phi_\alpha \}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

où les  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  désignent les fonctions de Hermite et où  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ , lorsque  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ . Ces projections orthogonales sont explicitement données par

$$(2.3.6) \quad \pi_k = \sum_{j=0}^k \mathbb{P}_j, \quad \mathbb{P}_k g = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|=k}} \langle g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha, \quad k \geq 0.$$

Grâce aux effets régularisants de type Gelfand-Shilov (2.3.3), Beauchard et Pravda-Starov ont établi dans [12] (Proposition 4.1) les estimations de dissipation suivantes, valables pour toute forme quadratique  $q : \mathbb{R}_{x,\xi}^{2d} \rightarrow \mathbb{C}$  de partie réelle positive  $\text{Re } q \geq 0$  et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$ ,

$$\exists C_0 > 1, \exists t_0 > 0, \forall t \geq 0, \forall k \geq 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\| (1 - \pi_k)(e^{-tq^w} f) \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_0 e^{-\delta(t)k} \| f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$\delta(t) = \frac{\inf(t, t_0)^{2k_0+1}}{C_0} \geq 0, \quad t \geq 0,$$

où  $0 \leq k_0 \leq 2d-1$  est le plus petit entier satisfaisant (2.3.4). En combinant ces estimations de dissipation avec les inégalités spectrales pour les combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite (1.2.5), Beauchard, Jaming et Pravda-Starov ont déduit du résultat abstrait d'observabilité (Théorème 2.2.1) le résultat suivant de contrôlabilité [11] (Théorème 4.1) :

**THÉORÈME 2.3.5** (Beauchard, Jaming & Pravda-Starov). *Soit  $q : \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d \rightarrow \mathbb{C}$  une forme quadratique à valeurs complexes de partie réelle positive  $\text{Re } q \geq 0$ , et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$ . Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable épais de  $\mathbb{R}^d$ , alors l'équation d'évolution*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + q^w(x, D_x) f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $q^w(x, D_x)$  est l'opérateur différentiel défini par la quantification de Weyl du symbole  $q$ , est contrôlable à zéro à partir de l'ensemble  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .

Soulignons que les opérateurs quadratiques présentés ne sont en général pas auto-adjoints. Néanmoins, l'opérateur adjoint dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de l'opérateur quadratique  $(q^w, D(q^w))$  est l'opérateur quadratique  $(\bar{q}^w, D(\bar{q}^w))$ , dont le symbole de Weyl est la forme quadratique  $\bar{q}$ , obtenue de  $q$  par conjugaison complexe. Puisque le symbole  $\bar{q}$  est aussi une forme quadratique complexe de partie réelle positive et d'espace singulier nul, le Théorème 2.3.5 s'obtient en appliquant le résultat abstrait d'observabilité (Théorème 2.2.1) à l'opérateur  $(\bar{q}^w, D(\bar{q}^w))$ .

Ce résultat de contrôlabilité s'applique en particulier à l'équation de la chaleur harmonique dont le symbole de Weyl associé est donné par

$$\forall (x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, \quad q(x, \xi) = |x|^2 + |\xi|^2$$

et à l'équation parabolique associée à l'opérateur de Kramers-Fokker-Planck

$$K = -\Delta_v + \frac{v^2}{4} + v\partial_x - \partial_x V(x)\partial_v, \quad (x, v) \in \mathbb{R}^2,$$

avec le potentiel quadratique

$$V(x) = \frac{1}{2}ax^2, \quad a \in \mathbb{R}^*,$$

dont le symbole de Weyl associé est donné par

$$\forall (x, v) \in \mathbb{R}^2, \forall (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2, \quad q((x, v), (\xi, \eta)) = \eta^2 + \frac{v^2}{4} + i(v\xi - ax\eta),$$

qui est un exemple d'opérateur quadratique de partie réelle positive et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$  (voir [12, Section 1.2]).

Dans le Chapitre 5, ce résultat est généralisé par le Théorème 5.3.3 qui montre que l'épaisseur n'est pas une condition nécessaire.



Deuxième partie

Présentation des résultats obtenus



## Des résultats préliminaires

**RÉSUMÉ.** Le premier chapitre de cette deuxième partie présente des résultats préliminaires clés pour la suite de ce manuscrit. La première section se concentre sur les ensembles épais par rapport à une densité. Cette notion généralise l'épaisseur définie dans la première partie et permet de définir une large classe de sous-ensembles mesurables à partir desquels nous obtiendrons des résultats de contrôlabilité. La seconde section introduit la notion de suites et de fonctions quasi-analytiques. Une version multi-dimensionnelle d'un Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg y est présentée et jouera un rôle important dans l'obtention des différents principes d'incertitude établis dans ce manuscrit.

### 3.1. Ensembles épais par rapport à une densité

Cette section a pour but de présenter les différentes conditions géométriques qui vont nous intéresser dans les chapitres suivants. On rappelle que  $B(x, R)$  désigne la boule euclidienne de  $\mathbb{R}^d$  centrée en un point  $x \in \mathbb{R}^d$  et de rayon  $R > 0$ . Commençons par définir la notion d'épaisseur par rapport à une densité, qui généralise la condition d'épaisseur introduite en Définition 1.1.3 :

**DÉFINITION 3.1.1.** Soient  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable,  $0 < \gamma \leq 1$  et une densité  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  continue strictement positive. On dit que  $\omega$  est  $\gamma$ -épais par rapport à la densité  $\rho$  si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))|,$$

où  $|\cdot|$  désigne la mesure de Lebesgue. On dit que  $\omega$  est épais par rapport à  $\rho$  s'il existe  $0 < \gamma \leq 1$  tel que  $\omega$  est  $\gamma$ -épais par rapport à la densité  $\rho$ .

Remarquons que les ensembles épais définis en Définition 1.1.3 sont exactement les ensembles épais par rapport à une densité constante. Suivant le comportement qualitatif de la densité  $\rho$ , la géométrie autorisée pour un ensemble  $\omega$  épais par rapport à cette densité peut être très différente de celle des ensembles épais. En particulier, le comportement asymptotique de la densité  $\rho$  joue un rôle important dans cette notion. Dans ce manuscrit, nous allons plus spécifiquement nous intéresser à des densités à croissances quasi-linéaires :

**DÉFINITION 3.1.2.** Soient  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable et  $0 \leq \delta \leq 1$ . On dit que  $\omega$  est  $\delta$ -faiblement épais si et seulement si  $\omega$  est épais par rapport à une densité  $\rho$  continue satisfaisant

$$\exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta,$$

où  $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$  avec  $|\cdot|$  désignant la norme euclidienne.

Le qualificatif « faible » dans cette définition souligne le fait que, contrairement à la condition d'épaisseur donnée par la Définition 1.1.3 qui traduit une équirépartition de la masse de  $\omega$  dans  $\mathbb{R}^d$ , un ensemble faiblement épais peut se distribuer plus faiblement au voisinage de l'infini. Insistons sur le fait que le paramètre  $\delta$  permet de quantifier l'adverbe « faiblement » et ne joue, de ce fait, pas le même rôle que le paramètre  $\gamma$  dans la Définition 3.1.1. Remarquons que le cas  $\delta = 0$  est l'unique cas qui n'autorise pas le complémentaire d'un ensemble  $\delta$ -faiblement épais à contenir des boules de rayons arbitrairement grands. Il est clair que pour  $0 \leq \delta \leq \delta' \leq 1$ , tout ensemble  $\delta$ -faiblement épais est  $\delta'$ -faiblement épais. En fait, la classe des ensembles  $\delta'$ -faiblement épais est strictement plus grande que celle des ensembles  $\delta$ -faiblement épais lorsque  $0 \leq \delta < \delta' \leq 1$ , comme le montrent les exemples suivants.



Commençons par donner des exemples d'ensembles faiblement épais en dimension 1. Pour  $0 \leq \delta < 1$ , on définit le sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  donné par

$$\omega_\delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[ n^{\frac{1}{1-\delta}}, \frac{n^{\frac{1}{1-\delta}} + (n+1)^{\frac{1}{1-\delta}}}{2} \right] \cup \left[ -\frac{n^{\frac{1}{1-\delta}} + (n+1)^{\frac{1}{1-\delta}}}{2}, -n^{\frac{1}{1-\delta}} \right].$$

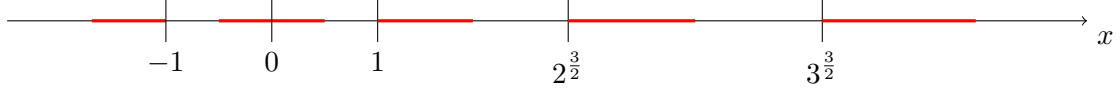


FIGURE 2.1. Représentation de  $\omega_{\frac{1}{3}}$ .

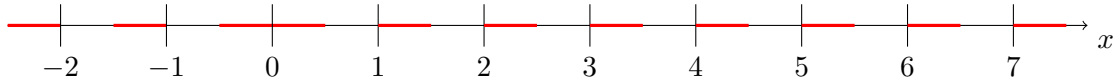


FIGURE 2.2. Représentation de  $\omega_0$ .

On vérifie aisément que pour  $0 \leq \delta < 1$ , l'ensemble  $\omega_\delta$  est  $\delta$ -faiblement épais. En revanche, lorsque  $0 < \delta < 1$ , le complémentaire de  $\omega_\delta$  contient des intervalles de la forme

$$\left] \frac{n^{\frac{1}{1-\delta}} + (n+1)^{\frac{1}{1-\delta}}}{2}, (n+1)^{\frac{1}{1-\delta}} \right[, \quad n \in \mathbb{N},$$

de longueur

$$\frac{(n+1)^{\frac{1}{1-\delta}} - n^{\frac{1}{1-\delta}}}{2} \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{\delta}{1-\delta}}}{2(1-\delta)}.$$

Par conséquent,  $\omega_\delta$  n'est pas  $\delta'$ -faiblement épais pour  $0 \leq \delta' < \delta$ .

En dimension  $d \geq 2$ , pour  $0 \leq \delta \leq 1$ , il est possible d'obtenir un ensemble  $\delta$ -faiblement épais en considérant

$$\omega'_\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}; |y| \geq \langle x \rangle^\delta\}.$$

Pour  $0 < \delta \leq 1$ , nous constatons que le complémentaire de  $\omega'_\delta$  contient des boules de rayons arbitrairement grands et n'est donc pas épais au sens de la Définition 1.1.3. Plus généralement, cet ensemble n'est pas  $\delta'$ -faiblement épais pour tout  $0 \leq \delta' < \delta$ .

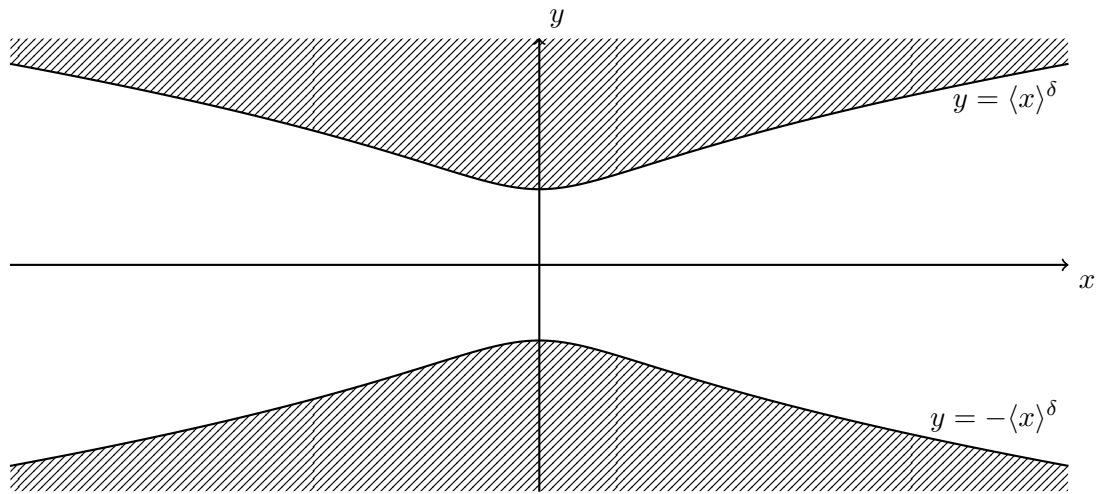
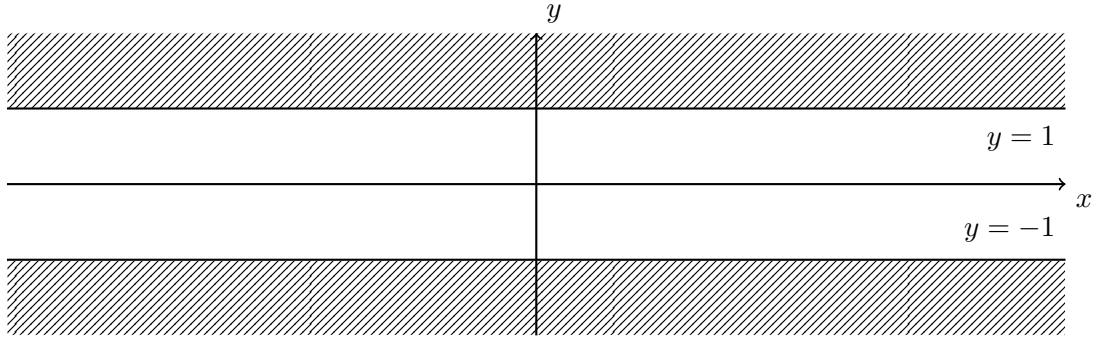


FIGURE 2.3. Représentation de  $\omega'_\delta$  avec  $0 < \delta \leq 1$  en dimension 2.

À présent, nous énonçons deux lemmes techniques. Le premier nous assure que lorsqu'un ensemble est faiblement épais, nous pouvons toujours nous ramener à une densité de la forme  $R\langle \cdot \rangle^\delta$ .

FIGURE 2.4. Représentation de  $\omega'_0$  en dimension 2.

LEMME 3.1.3. Soient  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable  $\gamma$ -épais par rapport à une densité continue  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  satisfaisant

$$\exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta.$$

Alors  $\omega$  est  $\frac{\gamma}{9^d}$ -épais par rapport à la densité  $\rho_{R,\delta}$  définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_{R,\delta}(x) = 3R\langle x \rangle^\delta.$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, nous avons

$$(3.1.1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))|.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^d$ . Commençons par remarquer que

$$\overline{B(x, R\langle x \rangle^\delta)} \subset \bigcup_{\substack{y \in \overline{B(x, R\langle x \rangle^\delta)}, \\ \rho(y) \leq 2R\langle x \rangle^\delta}} B(y, \rho(y)).$$

En effet, si

$$y \in \overline{B(x, R\langle x \rangle^\delta)} \quad \text{et} \quad \rho(y) > 2R\langle x \rangle^\delta,$$

alors la fonction continue définie pour tout  $t \in [0, 1]$  par  $f(t) = \rho(ty + (1-t)x)$  satisfait

$$f(0) = \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta \quad \text{et} \quad f(1) = \rho(y) > 2R\langle x \rangle^\delta.$$

On déduit qu'il existe un réel  $0 < t_0 < 1$  tel que

$$\rho(z) = 2R\langle x \rangle^\delta \quad \text{avec} \quad z = t_0 y + (1-t_0)x \in B(x, R\langle x \rangle^\delta)$$

et  $y \in B(z, \rho(z))$ , puisque

$$|z - x| = t_0|x - y| < R\langle x \rangle^\delta$$

et

$$|y - z| = (1-t_0)|x - y| < R\langle x \rangle^\delta \leq \rho(z).$$

Par compacité, il existe une suite finie  $(x_{i_k})_{0 \leq k \leq N}$  de  $\overline{B(x, R\langle x \rangle^\delta)}$  telle que

$$(3.1.2) \quad \overline{B(x, R\langle x \rangle^\delta)} \subset \bigcup_{k=0}^N B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k})) \quad \text{et} \quad \forall 0 \leq k \leq N, \quad \rho(x_{i_k}) \leq 2R\langle x \rangle^\delta.$$

Nous pouvons à présent utiliser le lemme de recouvrement suivant [61] (Lemme 7.3) :

LEMME 3.1.4 (Lemme de recouvrement de Vitali). Soient  $(y_i)_{0 \leq i \leq N}$  une suite finie de  $\mathbb{R}^d$  et  $(r_i)_{0 \leq i \leq N} \subset (0, +\infty)^{N+1}$ . Il existe une partie  $S \subset \{0, \dots, N\}$  telle que

(i) Les boules  $(B(y_i, r_i))_{i \in S}$  sont deux à deux disjointes

(ii)  $\bigcup_{i=0}^N B(y_i, r_i) \subset \bigcup_{i \in S} B(y_i, 3r_i)$

On déduit du Lemme 3.1.4 et de (3.1.2) qu'il existe une partie  $S \subset \{0, \dots, N\}$  telle que les boules  $(B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k})))_{k \in S}$  sont deux à deux disjointes et satisfont

$$(3.1.3) \quad B(x, R\langle x \rangle^\delta) \subset \bigcup_{k \in S} B(x_{i_k}, 3\rho(x_{i_k})).$$

Nous remarquons de plus que

$$(3.1.4) \quad \bigsqcup_{k \in S} B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k})) \subset B(x, 3R\langle x \rangle^\delta),$$

puisque, si  $y \in B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k}))$  alors

$$|y - x| \leq |y - x_{i_k}| + |x_{i_k} - x| < \rho(x_{i_k}) + R\langle x \rangle^\delta \leq 3R\langle x \rangle^\delta.$$

D'après (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4), nous obtenons alors

$$\begin{aligned} |\omega \cap B(x, 3R\langle x \rangle^\delta)| &\geq \sum_{k \in S} |\omega \cap B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k}))| \geq \gamma \sum_{k \in S} |B(x_{i_k}, \rho(x_{i_k}))| \\ &= \frac{\gamma}{3^d} \sum_{k \in S} |B(x_{i_k}, 3\rho(x_{i_k}))| \geq \frac{\gamma}{3^d} \left| \bigcup_{k \in S} B(x_{i_k}, 3\rho(x_{i_k})) \right| \\ &\geq \frac{\gamma}{3^d} |B(x, R\langle x \rangle^\delta)| = \frac{\gamma}{9^d} |B(x, 3R\langle x \rangle^\delta)|. \end{aligned}$$

□

Le second lemme permet de se ramener à une densité  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne lorsque  $0 \leq \delta < 1$ , qui est une hypothèse technique faite dans plusieurs résultats énoncés dans les chapitres suivants.

LEMME 3.1.5. Soient  $0 \leq \delta < 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable  $\gamma$ -épais par rapport à une densité continue  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  satisfaisant

$$\exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta.$$

Il existe une constante strictement positive  $M = M(R, \delta) > 0$  et une fonction  $\tilde{\rho} : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$   $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne satisfaisant

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < 3R\langle x \rangle^\delta \leq \tilde{\rho}(x) \leq M\langle x \rangle^\delta,$$

telle que  $\omega$  est  $\frac{\gamma}{M^d}$ -épais par rapport à  $\tilde{\rho}$ .

DÉMONSTRATION. D'après le Lemme 3.1.3, l'ensemble  $\omega$  est  $\frac{\gamma}{9^d}$ -épais par rapport à la densité définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_{R,\delta}(x) = 3R\langle x \rangle^\delta.$$

On remarque que

$$\nabla \rho_{R,\delta}(x) = 3R\delta \frac{x}{\langle x \rangle^{2-\delta}} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0,$$

car  $0 \leq \delta < 1$ . Il existe donc une constante strictement positive  $L = L(R, \delta) > 0$  telle que

$$(3.1.5) \quad \forall |x| \geq L, \quad |\nabla \rho_{R,\delta}(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

Définissons alors la densité auxiliaire suivante

$$(3.1.6) \quad \tilde{\rho}(x) = \begin{cases} 3R\langle x \rangle^\delta & \text{si } |x| \geq L, \\ 3R(1 + L^2)^{\frac{\delta}{2}} & \text{si } |x| \leq L. \end{cases}$$

D'après (3.1.5),  $\tilde{\rho}$  est une fonction  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne et de plus, nous avons

$$(3.1.7) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < 3R \leq 3R\langle x \rangle^\delta \leq \tilde{\rho}(x) \leq 3R(1 + L^2)^{\frac{\delta}{2}} \langle x \rangle^\delta.$$

Il suffit à présent de vérifier que  $\omega$  est épais par rapport à la nouvelle densité  $\tilde{\rho}$ . Soit  $x \in \mathbb{R}^d$ . Puisque  $\omega$  est  $\frac{\gamma}{9^d}$ -épais par rapport à la densité  $\rho_{R,\delta}$ , nous avons en utilisant (3.1.7)

$$\begin{aligned} |\omega \cap B(x, \tilde{\rho}(x))| &\geq |\omega \cap B(x, 3R\langle x \rangle^\delta)| \geq \frac{\gamma}{9^d} |B(x, 3R\langle x \rangle^\delta)| \\ &\geq \frac{\gamma}{9^d(1+L^2)^{\frac{\delta d}{2}}} |B(x, \tilde{\rho}(x))|. \end{aligned}$$

Il suffit alors de poser  $M(R, \delta) = 9(1+L^2)^{\frac{\delta}{2}} \max(1, R)$  et cela conclut la preuve du Lemme 3.1.5.  $\square$

Donnons à présent une nouvelle caractérisation des ensembles 1-faiblement épais, c'est à dire les ensembles épais par rapport à une densité à croissance au plus linéaire :

PROPOSITION 3.1.6. *Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. L'ensemble  $\omega$  est 1-faiblement épais si et seulement si*

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} > 0.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par supposer que  $\omega$  est 1-faiblement épais. D'après le lemme 3.1.3, il existe deux réels  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $R_0 > 0$  tels que

$$(3.1.8) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, R_0\langle x \rangle)| \geq \gamma |B(x, R_0\langle x \rangle)|.$$

Soient  $R \geq R_0$  et  $x_R \in \mathbb{R}^d$  tels que

$$|x_R| + R_0\langle x_R \rangle = R.$$

On remarque que

$$|x_R| \leq R \quad \text{et} \quad \langle x_R \rangle \geq \frac{R}{R_0 + 1},$$

d'où il résulte

$$\forall R \geq R_0 + 1, \quad \frac{R^2 - (R_0 + 1)^2}{(R_0 + 1)^2} \leq |x_R|^2 \leq R^2.$$

Puisque  $|x_R| + R_0\langle x_R \rangle = R$ , nous avons l'inclusion suivante

$$B(x_R, R_0\langle x_R \rangle) \subset B(0, R).$$

On déduit alors de ce qui précède et de (3.1.8) que

$$\begin{aligned} |\omega \cap B(0, R)| &\geq |\omega \cap B(x_R, R_0\langle x_R \rangle)| \\ &\geq \gamma |B(x_R, R_0\langle x_R \rangle)| = \gamma |B(0, 1)| R_0^d \langle x_R \rangle^d \\ &\geq \frac{\gamma R_0^d}{(R_0 + 1)^d} R^d |B(0, 1)| = \frac{\gamma R_0^d}{(R_0 + 1)^d} |B(0, R)|. \end{aligned}$$

Ceci implique

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} \geq \frac{\gamma R_0^d}{(R_0 + 1)^d} > 0.$$

Réciproquement, supposons

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} > 0.$$

Ceci fournit l'existence de deux réels  $\delta > 0$  et  $R_0 > 0$  tels que

$$\forall R \geq R_0, \quad |\omega \cap B(0, R)| \geq \delta |B(0, R)|.$$

Soit  $x \in \mathbb{R}^d$ . Puisque  $|x| \leq \langle x \rangle$ , nous avons l'inclusion suivante

$$B(0, R_0\langle x \rangle) \subset B(x, (R_0 + 1)\langle x \rangle).$$

Et puisque  $R_0\langle x \rangle \geq R_0$ , il résulte

$$\begin{aligned} |\omega \cap B(x, (R_0 + 1)\langle x \rangle)| &\geq |\omega \cap B(0, R_0\langle x \rangle)| \\ &\geq \delta |B(0, R_0\langle x \rangle)| \\ &= \frac{\delta R_0^d}{(R_0 + 1)^d} |B(x, (R_0 + 1)\langle x \rangle)|. \end{aligned}$$

Ceci établit que  $\omega$  est 1-faiblement épais et termine la preuve de la Proposition 3.1.6.  $\square$

Notons que cette caractérisation montre qu'un demi-espace  $[a, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$ , où  $a \in \mathbb{R}$ , est un ensemble 1-faiblement épais. Il est intéressant de souligner que la condition d'épaisseur faible autorise à l'ensemble d'être contenu dans un demi-espace si et seulement si le paramètre  $\delta$  dans la Définition 3.1.2 vaut 1. À partir de la Proposition 3.1.6, nous obtenons un nouvel exemple d'ensemble 1-faiblement épais en dimension 2 en considérant un cône de la forme

$$\mathcal{C}_\theta = \left\{ (r \cos t, r \sin t) \in \mathbb{R}^2 : r > 0, |t| \leq \frac{\pi}{2} - \theta \right\},$$

où  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ .

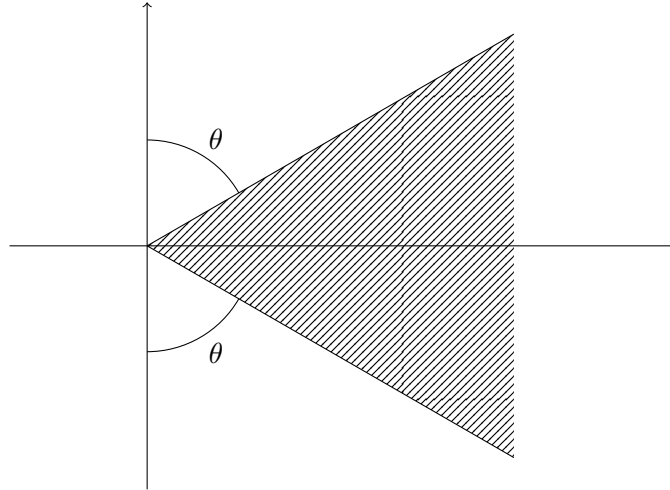


FIGURE 2.5. Représentation du cône  $\mathcal{C}_\theta$ . L'ensemble  $\mathcal{C}_\theta$  est une partie 1-faiblement épais contenu dans un demi-plan.

### 3.2. Quelques résultats sur les fonctions quasi-analytiques

Cette seconde section introduit la notion de quasi-analyticité. Le résultat principal de cette section est une version multi-dimensionnelle du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg qui établit des estimations quantitatives pour des classes de fonctions quasi-analytiques.

**3.2.1. Suites et fonctions quasi-analytiques.** Dans cette partie, nous présentons la notion de suites et fonctions quasi-analytiques. Tout d'abord, on dit qu'une suite de réels strictement positifs  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$  est *logarithmiquement convexe* ou *log-convexe* si et seulement si

$$\forall p \geq 1, \quad M_p^2 \leq M_{p+1} M_{p-1}.$$

Une telle suite n'est pas nécessairement croissante mais satisfait les inégalités suivantes :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p \leq \frac{M_0}{M_1} M_{p+1}.$$

En particulier, une suite log-convexe est croissante si et seulement si  $M_0 \leq M_1$ . Considérons à présent un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \geq 1$ . Associée à la suite  $\mathcal{M}$ , nous définissons la classe de fonctions régulières définies sur  $U$  suivante :

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C}) : \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(U)} \leq M_{|\beta|} \right\}.$$

Dans le cas où l'ouvert est donné par un intervalle ouvert  $(a, b)$ , avec  $a < b$ , remarquons que par définition de  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((a, b))$ , les fonctions de cette classe ainsi que toutes leurs dérivées sont bornées. En particulier, par théorème de prolongement des applications uniformément continues, les fonctions de  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((a, b))$  se prolongent en des fonctions  $\mathcal{C}^\infty([a, b])$  qui satisfont les estimations

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \|f^{(p)}\|_{L^\infty([a, b])} \leq M_p.$$

Pour cette raison, la classe de fonctions  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((a, b))$  sera parfois dénotée  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b])$  dans certains chapitres de ce manuscrit.

Une suite log-convexe  $\mathcal{M}$  est dite quasi-analytique si la classe de fonctions à une variable  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  associée à  $\mathcal{M}$  est quasi-analytique, c'est à dire, si l'unique fonction  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  dont toutes les dérivées s'annulent en un même point de  $(0, 1)$  est la fonction nulle :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1)), \quad \left( \exists x_0 \in (0, 1), \forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(x_0) = 0 \right) \implies f = 0.$$

Un exemple élémentaire est donné lorsque la suite  $\mathcal{M}$  est définie par  $\mathcal{M} = (p!)_{p \in \mathbb{N}}$ . Dans ce cas, la classe de fonctions associée  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  est composée de fonctions réelles analytiques et définit donc une classe de fonctions quasi-analytique. Cette notion de quasi-analyticité est une généralisation de la notion de fonctions analytiques. Ces classes de fonctions héritent en particulier d'une propriété fondamentale des fonctions analytiques : la propriété des zéros isolés. En effet, considérons une classe de fonctions quasi-analytique  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  et une fonction  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  qui admet un zéro non isolé, noté  $x_0 \in (0, 1)$ . Quitte à considérer les parties réelle et imaginaire de  $f$ , on peut supposer que  $f$  est à valeurs réelles. Par définition d'un zéro non isolé, il existe une suite de zéros  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (0, 1) \setminus \{x_0\}$  de la fonction  $f$  qui converge vers  $x_0$ . Sans perdre en généralité, nous pouvons supposer que la suite de zéros est strictement décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_0 < y_{n+1} < y_n.$$

Puisque  $f$  est à valeurs réelles, une application du Théorème de Rolle fournit immédiatement une nouvelle suite de zéros  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la fonction dérivée  $f'$ , strictement décroissante et convergeant également vers  $x_0$ . Le point  $x_0$  est alors un zéro non isolé de la fonction dérivée  $f'$  et par un raisonnement par récurrence, on obtient que  $x_0$  est un point d'annulation de toutes les dérivées de  $f$ . Puisque par hypothèse,  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  est une classe de fonctions quasi-analytique,  $f$  est la fonction nulle.

Il est intéressant de pouvoir identifier les suites  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  qui génèrent ou non une classe de fonctions quasi-analytiques. Une telle caractérisation des suites log-convexes quasi-analytiques est donnée par le Théorème de Denjoy-Carleman (voir par exemple [41]) qui fournit une condition nécessaire et suffisante sur la suite  $\mathcal{M}$  pour générer une classe de fonctions quasi-analytique :

**THÉORÈME 3.2.1 (Denjoy-Carleman).** *Soit  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs logarithmiquement convexe. La suite  $\mathcal{M}$  est une suite quasi-analytique si et seulement si*

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} = +\infty.$$

Notons qu'étant donnée une classe  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((a, b))$  de fonctions définies sur un intervalle ouvert  $(a, b)$ , avec  $a < b$ , cette classe est quasi-analytique si et seulement si la classe de fonctions  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0, 1))$  associée à la même suite  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  mais constituée de fonctions

définies sur  $(0, 1)$  est elle-même quasi-analytique. Ceci est une conséquence du fait que le difféomorphisme

$$x \in (0, 1) \mapsto a + x(b - a) \in (a, b)$$

envoie la classe de fonctions  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}((a, b))$  sur la classe de fonctions  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}'}((0, 1))$  associée à la suite log-convexe  $\mathcal{M}' = ((b - a)^p M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  dont la quasi-analyticité se déduit de celle de la suite  $\mathcal{M}$  et du Théorème de Denjoy-Carleman.

De manière générale, lorsque l'ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$  est connexe, nous vérifions à travers la proposition suivante que lorsque la suite  $\mathcal{M}$  est quasi-analytique, alors la classe de fonctions associée  $C_{\mathcal{M}}(U)$  hérite également d'une propriété de quasi-analyticité :

**PROPOSITION 3.2.2.** *Soient  $U \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert connexe et  $\mathcal{M}$  une suite quasi-analytique de nombres réels strictement positifs. Alors, la classe de fonctions associée  $C_{\mathcal{M}}(U)$  est quasi-analytique, c'est à dire, que l'unique fonction  $f \in C_{\mathcal{M}}(U)$  dont toutes les dérivées partielles à tout ordre s'annulent en un même point de  $U$  est la fonction nulle.*

**DÉMONSTRATION.** Cette preuve est basée sur des arguments topologiques élémentaires. Soit  $f \in C_{\mathcal{M}}(U)$  vérifiant :

$$\exists x_0 \in U, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \partial_x^\beta f(x_0) = 0.$$

Nous définissons l'ensemble suivant

$$(3.2.1) \quad \Omega = \{x \in U : \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \partial_x^\beta f(x) = 0\}.$$

L'ensemble  $\Omega$  est non vide et fermé dans  $U$ , puisque  $f$  est une fonction régulière. Vérifions que cet ensemble est aussi ouvert dans  $U$ . Puisque  $U$  est connexe, cela impliquera que  $\Omega = U$  et donc que la fonction  $f$  est identiquement nulle. Soit  $x \in \Omega$ . Puisque  $U$  est ouvert, il existe un rayon  $r > 0$  tel que  $\overline{B(x, r)} \subset U$ . Fixons  $y \in B(x, r)$  et considérons la fonction  $g_y : [-2r, 2r] \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$g_y(t) = f\left(x + \frac{t(y - x)}{2r}\right), \quad t \in [-2r, 2r].$$

Puisque  $f \in C_{\mathcal{M}}(U)$ , nous obtenons que  $g_y \in C_{\mathcal{M}}([-2r, 2r])$ . En effet, il résulte d'un calcul direct que pour tout  $k \geq 0$  et  $-2r \leq t \leq 2r$ ,

$$\begin{aligned} |g_y^{(k)}(t)| &= \left| d^k f\left(x + \frac{t(y - x)}{2r}\right) \cdot \left(\frac{y - x}{2r}, \dots, \frac{y - x}{2r}\right) \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} \left| \frac{\partial^k f}{\partial_{x_{i_1}} \dots \partial_{x_{i_k}}}\left(x + \frac{t(y - x)}{2r}\right) \right| \left| \left(\frac{y - x}{2r}\right)_{i_1} \right| \dots \left| \left(\frac{y - x}{2r}\right)_{i_k} \right| \\ &\leq \left( \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_k \leq d} \frac{1}{2^{i_1 + \dots + i_k}} \right) M_k \leq \left( \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \right)^k M_k = M_k. \end{aligned}$$

De plus, puisque  $x \in \Omega$ , nous déduisons de la définition (3.2.1) de l'ensemble  $\Omega$  que

$$\forall k \geq 0, \quad g_y^{(k)}(0) = 0.$$

La suite  $\mathcal{M}$  étant quasi-analytique par hypothèse, ceci implique que la fonction  $g_y$  est identiquement nulle sur  $[-2r, 2r]$ , d'où  $f(y) = g_y(2r) = 0$ . Il en résulte que l'ensemble  $\Omega$  est un ouvert de  $U$ .  $\square$

Introduisons à présent la notion de degré de Bang définie dans [9] et [59], et utilisée par Jaye et Mitkovski dans [38],

$$(3.2.2) \quad \forall 0 < t \leq 1, \forall r > 0, \quad 0 \leq n_{t, \mathcal{M}, r} = \sup \left\{ N \in \mathbb{N} : \sum_{-\log t < n \leq N} \frac{M_{n-1}}{M_n} < r \right\} \leq +\infty,$$

où la somme est prise égale à 0 lorsque  $N = 0$ . Le Théorème de Denjoy-Carleman nous assure que si  $\mathcal{M}$  est logarithmiquement convexe et quasi-analytique, alors le degré de Bang  $n_{t, \mathcal{M}, r}$  est fini pour tout  $0 < t \leq 1$  et  $r > 0$ . Ce degré de Bang permet aux auteurs de [38]

d'obtenir des estimées uniformes pour des fonctions  $L^2$  dont la transformée de Fourier décroît rapidement et d'établir des principes d'incertitude pour une classe générale d'espaces de fonctions à transformées de Fourier fortement décroissantes. Ces auteurs définissent également

$$(3.2.3) \quad \forall p \geq 1, \quad \gamma_{\mathcal{M}}(p) = \sup_{1 \leq j \leq p} j \left( \frac{M_{j+1} M_{j-1}}{M_j^2} - 1 \right) \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathcal{M}}(p) = 4e^{4+4\gamma_{\mathcal{M}}(p)}.$$

Avant de présenter le Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg, nous allons donner quelques exemples.

**3.2.2. Exemples de suites log-convexes quasi-analytiques.** Commençons avec un premier exemple qui donne des suites log-convexes quasi-analytiques avec des estimations des quantités définies en (3.2.2) et (3.2.3).

EXEMPLE 3.2.3. Soient  $0 \leq s \leq 1$ ,  $A \geq 1$  et  $\mathcal{M}_s = (A^p(p!)^s)_{p \in \mathbb{N}}$ . La suite  $\mathcal{M}_s$  est log-convexe et quasi-analytique. De plus, si  $0 \leq s < 1$ , alors pour tout  $0 < t \leq 1$ ,  $r > 0$ ,

$$n_{t, \mathcal{M}_s, r} \leq 2^{\frac{1}{1-s}} (1 - \log t + (Ar)^{\frac{1}{1-s}}).$$

Si  $s = 1$ , alors pour tout  $0 < t \leq 1$ ,  $r > 0$ ,

$$(3.2.4) \quad n_{t, \mathcal{M}_1, r} \leq (1 - \log t) e^{Ar}.$$

De plus,

$$\forall 0 \leq s \leq 1, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \gamma_{\mathcal{M}_s}(p) \leq s.$$

La log-convexité de la suite  $\mathcal{M}_s$  se vérifie aisément, tandis que sa propriété de quasi-analyticité est une conséquence du Théorème de Denjoy-Carleman et de l'estimation

$$\sum_{p \geq 1} \frac{A^{p-1} ((p-1)!)^s}{A^p (p!)^s} = A^{-1} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^s} = +\infty,$$

puisque  $0 \leq s \leq 1$ . Ces suites définissent en réalité des classes de fonctions analytiques puisque qu'on a l'inclusion d'espaces

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}_s}((0, 1)) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{M}_1}((0, 1))$$

et jouent un rôle important dans la suite de ce manuscrit. En particulier, cet exemple intervient dans l'obtention des principes d'incertitude valables dans des espaces de Gelfand-Shilov présentés dans le Chapitre 6. Il est démontré en Section 10.2.1 du Chapitre 10.

Dans cette section, nous donnons également une manière générique d'obtenir des suites log-convexes quasi-analytiques, à partir de la donnée d'une fonction. Considérons une fonction  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  continue et bornée inférieurement. On associe à la fonction  $F$  la suite  $\mathcal{M}^F$  dont les éléments  $M_p^F$  sont supposés être des nombres réels strictement positifs définis par

$$(3.2.5) \quad 0 < M_p^F = \sup_{r \geq 0} r^p e^{-F(r)} < +\infty, \quad p \geq 0.$$

On remarque que la suite  $\mathcal{M}^F$  possède la propriété de log-convexité. En effet, si  $p \in \mathbb{N}^*$  alors

$$(M_p^F)^2 = \sup_{r \geq 0} r^{2p} e^{-2F(r)} = \sup_{r \geq 0} r^{p-1} e^{-F(r)} r^{p+1} e^{-F(r)} \leq M_{p-1}^F M_{p+1}^F.$$

Dans le cas où  $F$  est donnée par

$$F(t) = t^{2s}, \quad t \geq 0,$$

avec  $\frac{1}{2} \leq s$ , la suite associée  $\mathcal{M}^F$  est donnée par

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathcal{M}_k^F = \left( \frac{k}{2es} \right)^{\frac{k}{2s}} \leq \left( \frac{1}{2s} \right)^{\frac{k}{2s}} (k!)^{\frac{1}{2s}},$$

et est donc quasi-analytique d'après l'Exemple 3.2.3 et l'inclusion d'espace

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}^F}((0, 1)) \subset \mathcal{C}_{\mathcal{M}_{\frac{1}{2s}}}((0, 1)),$$



où  $\mathcal{M}_{\frac{1}{2s}} = \left( \left( \frac{1}{2s} \right)^{\frac{k}{2s}} (k!)^{\frac{1}{2s}} \right)_{k \geq 0}$ . Il est également possible d'obtenir des suites quasi-analytiques à partir d'une fonction dont la croissance est sous linéaire, comme le montre la proposition suivante :

EXEMPLE 3.2.4. Soit  $p \geq 1$  un entier strictement positif et  $F_p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction continue positive définie pour tout  $t \geq 0$  par

$$F_p(t) = \frac{t}{g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ p}(t)}, \quad \text{où } g(t) = \log(e + t),$$

avec  $g^{\circ p} = g \circ \dots \circ g$  ( $p$  compositions). La suite associée  $\mathcal{M}^{F_p}$  définie en (3.2.5) est une suite log-convexe quasi-analytique de nombres réels strictement positifs.

Cet exemple est démontré dans le Chapitre 8 où il est présenté en tant que Proposition 8.3.3 et permet d'obtenir des exemples d'équations d'évolution dont la diffusion est moins forte que l'équation de la demi-chaleur et pour lesquelles l'épaisseur du support de contrôle est une condition nécessaire et suffisante pour assurer leur contrôlabilité approchée à coût uniforme. De cet exemple, on peut en déduire le suivant :

EXEMPLE 3.2.5. Soient  $s \geq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$  et  $F_{s,\delta} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction continue positive définie par

$$F_{s,\delta}(t) = \frac{t^s}{\log^\delta(e + t)}, \quad t \geq 0.$$

La suite associée  $\mathcal{M}^{F_{s,\delta}}$  définie en (3.2.5) est une suite log-convexe quasi-analytique de nombres réels strictement positifs.

Ce résultat est démontré en Section 8.3 où il est présenté en tant que Corollaire 8.3.4.

Mentionnons que Jaye et Mitkovski ont établi des conditions suffisantes, assez générales, sur la fonction  $F$  pour assurer à la suite log-convexe  $\mathcal{M}^F$  d'être quasi-analytique :

PROPOSITION 3.2.6 ([38]). Soit  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue satisfaisant

- (i)  $F(0) = 0$  et  $F$  est croissante avec  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ ,
- (ii)  $s \in \mathbb{R} \mapsto F(e^s)$  est convexe.

Alors, la suite log-convexe  $\mathcal{M}^F$  associée à la fonction  $F$  définie en (3.2.5) est quasi-analytique si et seulement si

$$\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{1+t^2} dt = +\infty.$$

**3.2.3. Le Théorème de Nazarov-Sodin-Volberg.** Dans cette section, nous présentons le résultat principal de ce chapitre, à savoir, une généralisation au cas multi-dimensionnel du Théorème de Nazarov-Sodin-Volberg. Ce résultat est central dans le reste de ce manuscrit et est à la base des principes d'incertitude présentés par la suite.

Le Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg [59] établit un principe de continuation unique quantitatif. Il donne un contrôle uniforme des fonctions d'une classe quasi-analytique par leurs valeurs prises sur un sous-ensemble mesurable. Établi en premier lieu dans [59, Théorème B], il a été utilisé par Jaye and Mitkovski ([38]) sous la forme suivante :

THÉORÈME 3.2.7 ([38, Théorème 2.5]). Soit  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite log-convexe quasi-analytique avec  $M_0 = 1$  et  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1]) \setminus \{0\}$ . Pour tout intervalle  $I \subset [0, 1]$  et sous-ensemble mesurable  $\mathcal{J} \subset I$  avec  $|\mathcal{J}| > 0$ ,

$$\sup_I |f| \leq \left( \frac{\Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{\|f\|_{L^\infty([0,1])}, \mathcal{M}, e)} |I|)}{|\mathcal{J}|} \right)^{2n_{\|f\|_{L^\infty([0,1])}, \mathcal{M}, e}} \sup_{\mathcal{J}} |f|,$$

avec  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  définie en (3.2.3).

La constante qui apparaît dans le Théorème 3.2.7 fait intervenir le degré de Bang de la suite  $\mathcal{M}$  et la mesure du sous-ensemble  $\mathcal{J}$ . En revanche, il est intéressant de noter que cette constante ne dépend pas de la manière dont se distribue l'ensemble  $\mathcal{J}$ . Dans le but d'avoir

des estimées uniformes sur les fonctions d'une classe quasi-analytique, nous utiliserons le résultat suivant, qui est un corollaire immédiat du Théorème 3.2.7 :

**COROLLAIRE 3.2.8.** *Soit  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite log-convexe quasi-analytique avec  $M_0 = 1$  et  $0 < s, t \leq 1$ . Pour tout intervalle  $I \subset [0, 1]$  et sous-ensemble mesurable  $\mathcal{J} \subset I$  avec  $|\mathcal{J}| \geq s > 0$ ,*

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1]) \text{ avec } \|f\|_{L^\infty([0, 1])} \geq t, \quad \sup_I |f| \leq \left( \frac{\Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, e})|I|}{s} \right)^{2n_{t, \mathcal{M}, e}} \sup_{\mathcal{J}} |f|,$$

avec  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  définie en (3.2.3).

Le Corollaire 3.2.8 se déduit directement du Théorème 3.2.7 en remarquant que pour tout  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}([0, 1])$  satisfaisant  $\|f\|_{L^\infty([0, 1])} \geq t$ ,

$$n_{\|f\|_{L^\infty([0, 1])}, \mathcal{M}, e} \leq n_{t, \mathcal{M}, e}.$$

Dans le but d'utiliser ce résultat pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles posées sur  $\mathbb{R}^d$ , nous établissons dans ce manuscrit une version du Corollaire 3.2.8 valable en toute dimension  $d \geq 1$  :

**PROPOSITION 3.2.9.** *Soient  $d \geq 1$  et  $U$  un ouvert convexe, borné et non vide de  $\mathbb{R}^d$  vérifiant  $|\partial U| = 0$ . Soit  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite log-convexe quasi-analytique avec  $M_0 = 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $0 < t \leq 1$ . Pour tout sous-ensemble mesurable  $E \subset U$  satisfaisant  $|E| \geq \gamma|U| > 0$ , nous avons*

$$\forall f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U) \text{ avec } \|f\|_{L^\infty(U)} \geq t,$$

$$\sup_U |f| \leq \left( \frac{d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, d \text{ diam}(U)_e}) \right)^{2n_{t, \mathcal{M}, d \text{ diam}(U)_e}} \sup_E |f|,$$

avec  $\Gamma_{\mathcal{M}}$  définie en (3.2.3) et où le diamètre euclidien de  $U$  est défini par  $\text{diam}(U) = \sup_{x, y \in U} |x - y|$ .

**DÉMONSTRATION.** Soient  $0 < \gamma \leq 1$  et  $0 < t \leq 1$ . Considérons  $E$  un sous-ensemble mesurable de  $U$  satisfaisant  $|E| \geq \gamma|U| > 0$  et  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U)$  avec  $\|f\|_{L^\infty(U)} \geq t$ . Puisque  $\bar{U}$  est compact et que  $f$  admet un prolongement continu sur  $\bar{U}$ , il existe  $x_0 \in \bar{U}$  tel que

$$(3.2.6) \quad \sup_U |f| = |f(x_0)|.$$

En utilisant les coordonnées sphériques, nous avons

$$|E| = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x_0 + x) dx = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}_E(x_0 + t\sigma) d\sigma t^{d-1} dt.$$

Puisque  $\bar{U}$  est convexe, il résulte

$$\begin{aligned} 0 < |E| &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^{J_{\bar{U}}(\sigma)} \mathbf{1}_E(x_0 + t\sigma) t^{d-1} dt d\sigma \\ &= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d \int_0^1 \mathbf{1}_E(x_0 + J_{\bar{U}}(\sigma)t\sigma) t^{d-1} dt d\sigma \\ &\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d \int_0^1 \mathbf{1}_E(x_0 + J_{\bar{U}}(\sigma)t\sigma) dt d\sigma \leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d |I_\sigma| d\sigma, \end{aligned}$$

où

$$(3.2.7) \quad J_{\bar{U}}(\sigma) = \sup\{t \geq 0 : x_0 + t\sigma \in \bar{U}\} \quad \text{et} \quad I_\sigma = \{t \in [0, 1] : x_0 + J_{\bar{U}}(\sigma)t\sigma \in E\},$$

pour  $\sigma \in \mathbb{S}^{d-1}$ . Remarquons

$$\forall \sigma \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad J_{\bar{U}}(\sigma) < +\infty,$$

puisque  $\bar{U}$  est un ensemble borné. Nous déduisons qu'il existe  $\sigma_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$  tel que

$$(3.2.8) \quad |E| \leq |I_{\sigma_0}| \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d d\sigma.$$

En utilisant l'hypothèse  $|\partial U| = 0$  et que  $U$  est ouvert, nous obtenons

$$|U| = |\bar{U}| = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d \int_0^1 t^{d-1} dt d\sigma = \frac{1}{d} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} J_{\bar{U}}(\sigma)^d d\sigma.$$

En utilisant le fait que  $|E| \geq \gamma|U|$ , l'estimation (3.2.8) et la formule ci-dessus fournissent la borne inférieure

$$(3.2.9) \quad |I_{\sigma_0}| \geq \frac{\gamma}{d} > 0.$$

Définissons une fonction auxiliaire

$$(3.2.10) \quad \forall t \in [0, 1], \quad g(t) = f(x_0 + J_{\bar{U}}(\sigma_0)t\sigma_0),$$

qui est bien définie puisque  $x_0 + J_{\bar{U}}(\sigma_0)t\sigma_0 \in \bar{U}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . Nous déduisons du fait que  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U)$ , de l'estimation

$$J_{\bar{U}}(\sigma_0) \leq \text{diam}(\bar{U}) = \text{diam}(U),$$

où  $\text{diam}(U)$  désigne le diamètre, au sens euclidien, de  $U$ , et de la formule du multinôme que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} \|g^{(p)}\|_{L^\infty([0,1])} &\leq \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta|=p}} \frac{p!}{\beta!} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(\bar{U})} (J_{\bar{U}}(\sigma_0))^p \\ &\leq \left( \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ |\beta|=p}} \frac{p!}{\beta!} \right) \text{diam}(U)^p M_p = (d \text{diam}(U))^p M_p. \end{aligned}$$

Remarquons que la nouvelle suite

$$\mathcal{M}' := \left( (d \text{diam}(U))^p M_p \right)_{p \in \mathbb{N}},$$

hérite de  $\mathcal{M}$  sa log-convexité et sa propriété de quasi-analyticité avec l'identité suivante pour les degrés de Bang associés

$$n_{t, \mathcal{M}', e} = n_{t, \mathcal{M}, d \text{diam}(U)e}.$$

En utilisant le fait que  $|I_{\sigma_0}| > 0$  d'après (3.2.9) et  $\|g\|_{L^\infty([0,1])} \geq |g(0)| = \|f\|_{L^\infty(U)} \geq t$ , nous pouvons appliquer le Corollaire 3.2.8 à la fonction  $g \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}'}([0, 1])$  pour obtenir

$$(3.2.11) \quad \sup_{[0,1]} |g| \leq \left( \frac{\Gamma_{\mathcal{M}'}(2n_{t, \mathcal{M}', e})}{|I_{\sigma_0}|} \right)^{2n_{t, \mathcal{M}', e}} \sup_{I_{\sigma_0}} |g|.$$

En remarquant

$$\Gamma_{\mathcal{M}} = \Gamma_{\mathcal{M}'},$$

nous déduisons de (3.2.6), (3.2.7), (3.2.9), (3.2.10) et (3.2.11) que

$$\begin{aligned} \sup_U |f| = |f(x_0)| = |g(0)| &\leq \sup_{[0,1]} |g| \leq \left( \frac{d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, d \text{diam}(U)e}) \right)^{2n_{t, \mathcal{M}, d \text{diam}(U)e}} \sup_{I_{\sigma_0}} |g| \\ &\leq \left( \frac{d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, d \text{diam}(U)e}) \right)^{2n_{t, \mathcal{M}, d \text{diam}(U)e}} \sup_E |f|. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 3.2.9.  $\square$

De cette version multi-dimensionnelle du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg, nous pouvons en déduire une version  $L^2$  qui permet d'estimer la norme  $L^2$  des fonctions d'une classe quasi-analytique par leur norme  $L^2$  sur un sous-ensemble mesurable :

PROPOSITION 3.2.10. Soient  $d \geq 1$  et  $U$  un ouvert convexe et borné de  $\mathbb{R}^d$  vérifiant  $|\partial U| = 0$ . Soient  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  une suite log-convexe quasi-analytique avec  $M_0 = 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $0 < t \leq 1$ . Si  $E \subset U$  est un sous-ensemble mesurable satisfaisant  $|E| \geq \gamma|U|$ , alors pour tout  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U)$  avec  $\|f\|_{L^\infty(U)} \geq t$ ,

$$\int_U |f(x)|^2 dx \leq \frac{2}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}) \right)^{4n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}} \int_E |f(x)|^2 dx.$$

DÉMONSTRATION. Soient  $0 < t \leq 1$ ,  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(U)$  telle que  $\|f\|_{L^\infty(U)} \geq t$  et  $E$  un sous-ensemble mesurable de  $U$  satisfaisant  $|E| \geq \gamma|U| > 0$ . En posant

$$\tilde{E} = \left\{ x \in E : |f(x)|^2 \leq \frac{2}{|E|} \int_E |f(y)|^2 dy \right\},$$

nous remarquons

$$(3.2.12) \quad \int_E |f(x)|^2 dx \geq \int_{E \setminus \tilde{E}} |f(x)|^2 dx \geq \frac{2|E \setminus \tilde{E}|}{|E|} \int_E |f(x)|^2 dx.$$

Montrons par l'absurde que l'intégrale

$$\int_E |f(x)|^2 dx > 0,$$

est strictement positive. Supposons par l'absurde

$$\int_E |f(x)|^2 dx = 0.$$

Dans ce cas, l'ensemble

$$E_{\mathcal{Z}} = \left\{ x \in E : f(x) = 0 \right\},$$

satisfait  $|E_{\mathcal{Z}}| = |E| > 0$ . On déduit alors de la Proposition 3.2.9, puisque  $\|f\|_{L^\infty(U)} \geq t$  et  $|E_{\mathcal{Z}}| > 0$ , que  $f = 0$  sur  $U$ . Ceci contredit le fait que  $\|f\|_{L^\infty(U)} \geq t > 0$  et on a donc

$$\int_E |f(x)|^2 dx > 0.$$

Nous déduisons de (3.2.12) que

$$|\tilde{E}| = |E| - |E \setminus \tilde{E}| \geq \frac{|E|}{2} \geq \frac{\gamma}{2}|U| > 0.$$

Une application de la Proposition 3.2.9 fournit

$$\begin{aligned} \sup_U |f| &\leq \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}) \right)^{2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}} \sup_{\tilde{E}} |f| \\ &\leq \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}) \right)^{2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{|E|}} \left( \int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_U |f(x)|^2 dx &\leq |U| \left( \sup_U |f| \right)^2 \leq \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}) \right)^{4n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}} \frac{2|U|}{|E|} \int_E |f(x)|^2 dx \\ &\leq \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}) \right)^{4n_{t,\mathcal{M},d \operatorname{diam}(U)e}} \frac{2}{\gamma} \int_E |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Cela conclut la preuve de la Proposition 3.2.10.  $\square$

Dans l'article [38], les auteurs ont aussi établi une version multi-dimensionnelle et une version  $L^2$  du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg (Théorème 3.2.7) mais les constantes obtenues sont moins explicites que celles données par les Propositions 3.2.9 et 3.2.10. Le fait d'avoir des constantes quantitatives sera essentiel pour établir les résultats présentés dans le Chapitre 6, dont les preuves sont données dans le Chapitre 10. Nous terminons cette section en illustrant les résultats ci-dessus avec l'exemple suivant :

EXEMPLE 3.2.11. Soient  $0 \leq s \leq 1$ ,  $A \geq 1$ ,  $R > 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $0 < t \leq 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$  et  $\mathcal{M} = (A^p(p!)^s)_{p \in \mathbb{N}}$ . Soit  $E \subset B(0, R)$  un sous-ensemble mesurable de la boule euclidienne centrée en 0 de rayon  $R$  tel que  $|E| \geq \gamma|B(0, R)|$ . Il existe une constante  $K = K(s, d) \geq 1$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(B(0, R))$  avec  $\|f\|_{L^\infty(B(0, R))} \geq t$ ,

$$\|f\|_{L^\infty(B(0, R))} \leq C_{t, A, s, R, \gamma, d} \|f\|_{L^\infty(E)} \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^2(B(0, R))} \leq C_{t, A, s, R, \gamma, d} \|f\|_{L^2(E)},$$

où lorsque  $0 \leq s < 1$ ,

$$0 < C_{t, A, s, R, \gamma, d} \leq \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{K(1 - \log t + (AR)^{\frac{1}{1-s}})}$$

et lorsque  $s = 1$ ,

$$0 < C_{t, A, 1, R, \gamma, d} \leq \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{K(1 - \log t)e^{KAR}}.$$

Vérifions que l'Exemple 3.2.11 est une conséquence des Propositions 3.2.9 et 3.2.10, et de l'Exemple 3.2.3. Nous déduisons des Propositions 3.2.9 and 3.2.10 que pour tout  $f \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}(B(0, R))$  avec  $\|f\|_{L^\infty(B(0, R))} \geq t$ ,

$$\|f\|_{L^\infty(B(0, R))} \leq \left(\frac{d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, 2Rde})\right)^{2n_{t, \mathcal{M}, 2Rde}} \|f\|_{L^\infty(E)}$$

et

$$\|f\|_{L^2(B(0, R))} \leq \sqrt{\frac{2}{\gamma}} \left(\frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}, 2Rde})\right)^{2n_{t, \mathcal{M}, 2Rde}} \|f\|_{L^2(E)}.$$

De plus, l'Exemple 3.2.3 donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_{\mathcal{M}}(n) \leq e^{4+4s}$$

et si  $0 \leq s < 1$ , alors

$$n_{t, \mathcal{M}, 2Rde} \leq 2^{\frac{1}{1-s}} (1 - \log t + (2ARde)^{\frac{1}{1-s}}),$$

et si  $s = 1$ , alors

$$n_{t, \mathcal{M}, 2Rde} \leq (1 - \log t)e^{2ARde}.$$

Le résultat de l'Exemple 3.2.11 est alors une conséquence des estimations ci-dessus.

## Stabilisation et contrôle approché d'une large classe d'équations diffusives

**RÉSUMÉ.** Ce chapitre vise à présenter les résultats de l'article [5], écrit en collaboration avec Paul Alphonse. Un des théorèmes principaux a trait à la contrôlabilité approchée avec coût uniforme d'une large classe d'équations diffusives à partir d'ensembles épais en lien avec la notion de quasi-analyticité. Nous nous intéressons également à la notion de stabilisation qui est définie dans ce chapitre. Les résultats obtenus s'appliquent en particulier aux équations de la chaleur fractionnaires. D'autres exemples sont également donnés.

### 4.1. Introduction

Nous avons vu dans la Section 2.3 que les équations de la chaleur fractionnaires

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta_x)^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

avec  $s > \frac{1}{2}$  sont contrôlables à zéro uniquement à partir des ensembles épais, comme l'ont montré Alphonse et Bernier dans [4]. En revanche, le Théorème 2.3.2 dû à Koenig ([40, Théorème 2.8 et 2.11]) montre que l'épaisseur n'est plus une condition suffisante pour contrôler ces équations en basses diffusions  $s \leq \frac{1}{2}$ , au moins dans le cas de la dimension 1. L'objectif de ce chapitre est d'étudier le rôle des ensembles épais pour des notions plus faibles de contrôlabilité de ces équations. Plus précisément, nous allons nous intéresser à la stabilisation (rapide) et à la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme d'une large classe d'équations diffusives de la forme

$$(E_F) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + F(|D_x|)f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, \cdot) = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où l'opérateur  $F(|D_x|)$  est le multiplicateur de Fourier associé au symbole  $F(|\xi|)$ ,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(F(|D_x|)f)(\xi) = F(|\xi|)\hat{f}(\xi).$$

La fonction  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est supposée continue et bornée inférieurement, et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble mesurable. Le multiplicateur de Fourier  $F(|D_x|)$  génère un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  explicitement donné par :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \geq 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(e^{-tF(|D_x|)}f)(\xi) = e^{-tF(|\xi|)}\hat{f}(\xi).$$

Lorsque la fonction  $F$  est donnée par

$$F(t) = t^{2s}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

pour  $s > 0$ , l'équation associée  $(E_F)$  est une équation de la chaleur fractionnaire. En particulier, les résultats de stabilisation et contrôlabilité approchée s'appliqueront à ces équations.

### 4.2. Stabilisation des équations diffusives

Dans cette première section, nous nous intéressons à la stabilisation du système d'évolution  $(E_F)$ . La notion de stabilisation est définie comme suit :

DÉFINITION 4.2.1. *Le système d'évolution  $(E_F)$  est dit exponentiellement stabilisable à partir du support de contrôle  $\omega$  à la vitesse  $\alpha > 0$  s'il existe une constante  $M_\alpha \geq 1$  et un opérateur continu  $K_\alpha \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$  tels que pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$\|e^{-t(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq M_\alpha e^{-\alpha t}.$$

*Lorsque l'opérateur  $K_\alpha$  peut être choisi égal à l'opérateur nul, le système d'évolution  $(E_F)$  est dit stable.*

*Le système d'évolution  $(E_F)$  est dit rapidement stabilisable à partir du support de contrôle  $\omega$  si celui-ci est exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$  à toute vitesse  $\alpha > 0$ .*

L'existence du semi-groupe généré par l'opérateur  $F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha$  est assurée par la théorie des perturbations bornées des semi-groupes, voir par exemple [24] (Théorème III.1.3). Contrairement aux notions de contrôlabilité présentées dans la Section 2.1.1, la stabilisation s'intéresse à des problématiques en temps long. Il s'agit de trouver une manière d'agir sur le système, de façon à revenir à l'équilibre exponentiellement vite, dans l'asymptotique  $t \rightarrow +\infty$ . Une autre différence avec les notions de contrôlabilité vues en Section 2.1.1 est qu'il s'agit d'un système en boucle fermée. L'opérateur  $K_\alpha$  permet d'agir sur l'état du système à chaque instant, via la donnée de l'état du système au même instant.

La stabilisation des équations de la chaleur fractionnaires, posées sur l'espace  $\mathbb{R}^d$ , a récemment été étudiée dans les travaux [36, 49]. Les auteurs de l'article [36] (Théorème 1.1) ont montré que pour tout  $s > 0$ , l'équation de la chaleur fractionnaire  $(E_{t^{2s}})$  est exponentiellement stabilisable à partir du support de contrôle  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais. Il a été également montré dans [49] (Exemple 1) que les mêmes équations  $(E_{t^{2s}})$  sont rapidement stabilisable à partir du complémentaire d'une boule euclidienne de  $\mathbb{R}^d$  lorsque  $0 < s < 1$ . Dans cette section, nous établissons que l'équation d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais lorsque  $\inf F \leq 0$  et  $\liminf_{+\infty} F > -\inf F$ . De plus, contrairement aux travaux [36] et [49], nous donnons une formule explicite pour l'opérateur de stabilisation  $K$ , en fonction de la vitesse de stabilisation et de la fonction  $F$ . En particulier, dans le cas des équations de la chaleur fractionnaires, nous retrouvons le résultat du papier [36] (Théorème 1.1) en fournissant de plus un contrôle explicite et nous généralisons le résultat de l'article [49] (Exemple 1).

Avant d'étudier la stabilisation de l'équation d'évolution  $(E_F)$ , commençons par remarquer que lorsque  $\inf F > 0$ , nous obtenons par le Théorème de Plancherel

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{-tF(|D_x|)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq e^{-(\inf F)t},$$

et donc le système d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stable, à vitesse  $\inf F > 0$ . La question de la stabilisation de ce système est pertinente seulement si  $\inf F \leq 0$ . Dans ce cas, nous prouvons que l'épaisseur pour le support de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est une condition géométrique nécessaire pour assurer la stabilisation de l'équation  $(E_F)$ , et est suffisante lorsque nous supposons de plus que  $\liminf_{+\infty} F > |\inf F|$ . Dans le cadre de cette stabilisation, nous explicitons un opérateur  $K_\alpha$  en fonction de la vitesse de stabilisation  $\alpha > 0$  et de la fonction  $F$ .

THÉORÈME 4.2.2. *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée inférieurement et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable.*

- (i) *Si le système d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$  et  $\inf F \leq 0$ , alors l'ensemble  $\omega$  est épais.*
- (ii) *Si  $\liminf_{+\infty} F > \inf F$  et  $\omega$  est épais, alors il existe des constantes  $C = C(\omega) \geq 1$  et  $R_0 = R_0(F) > 0$  telles que pour tout  $R \geq R_0$  et  $t \geq 0$ ,*

$$(4.2.1) \quad \|e^{-t(F(|D_x|) + C e^{CR}(\alpha_R - \inf F)\mathbb{1}_\omega K_R)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \sqrt{2} C e^{CR} e^{-(\alpha_R + \inf F)t/2},$$

*où on définit  $\alpha_R = \inf_{r \geq R} F(r)$  et où  $K_R$  désigne la projection orthogonale suivante*

$$K_R : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{Supp } \hat{f} \subset \overline{B(0, R)}\},$$

*avec  $\overline{B(0, R)}$  la boule euclidienne fermée centrée en 0 et de rayon  $R > 0$ .*

(iii) Si  $\liminf_{+\infty} F > |\inf F|$  et  $\omega$  est épais, alors le système d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$ .

Vérifions que l'assertion (iii) du Théorème 4.2.2 est une conséquence directe de l'assertion (ii) du même résultat. L'hypothèse  $\liminf_{+\infty} F > |\inf F|$  se lit, bien sûr, comme  $\liminf_{+\infty} F > \inf F$  et  $\liminf_{+\infty} F > -\inf F$ . Premièrement, l'hypothèse  $\liminf_{+\infty} F > \inf F$  implique les estimations (4.2.1) d'après l'assertion (ii). D'autre part, en supposant  $\liminf_{+\infty} F > -\inf F$ , nous obtenons que  $\alpha_R + \inf F > 0$  lorsque  $R \gg 1$  est suffisamment grand. Les estimations (4.2.1) impliquent alors que l'équation d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stabilisable, d'après la Définition (4.2.1) présentée au début de cette section. Notons que dans le cas où  $\liminf_{+\infty} F > \inf F > 0$ , bien que le système  $(E_F)$  soit déjà stable, le Théorème 4.2.2 montre qu'il est possible d'améliorer la vitesse de retour à l'équilibre à partir d'un ensemble épais et de stabiliser le système à toute vitesse  $\alpha$  dans l'intervalle  $(\inf F, \frac{\liminf_{+\infty} F + \inf F}{2})$ .

La preuve du Théorème 4.2.2 est donnée dans la Section 8.1 du Chapitre 8. Elle consiste dans un premier temps à montrer l'assertion (i) (voir Section 8.1.1) en se basant sur une inégalité d'observabilité associée à la notion de stabilisation. Comme pour les autres notions de contrôlabilité présentées dans ce manuscrit, la stabilisation du système d'évolution  $(E_F)$  est équivalente à des inégalités d'observabilité (voir Théorème 8.1.1). En supposant que le système d'évolution  $(E_F)$  est stabilisable, nous déduisons que le support de contrôle  $\omega$  est épais en appliquant les inégalités d'observabilité associées à la notion de stabilisation pour des gaussiennes bien choisies. En ce qui concerne l'assertion (ii), la preuve se base sur la construction d'une fonction de Lyapunov adaptée et utilise les principes d'incertitude établis par Kovrijkine (Théorème 1.1.6).

En rassemblant les résultats des assertions (i) et (iii) du Théorème 4.2.2, nous obtenons directement le corollaire suivant :

**COROLLAIRE 4.2.3.** *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée inférieurement satisfaisant  $\inf F \leq 0$  et  $\liminf_{+\infty} F > -\inf F$ , et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. L'équation d'évolution  $(E_F)$  est exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais.*

Un problème intéressant, qui reste ouvert à l'issue de ce travail, est la question de la stabilisation exponentielle du système d'évolution  $(E_F)$  lorsque  $\inf F \leq 0$  et  $\liminf_{+\infty} F \leq -\inf F$ . Nous apportons une réponse très partielle à cette question dans la Proposition 4.2.6 présentée à la fin de cette section.

Comme conséquence directe des estimations quantitatives de stabilisation (4.2.1), nous obtenons le résultat suivant qui concerne la stabilisation rapide du système d'évolution  $(E_F)$  sous l'hypothèse  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ , en appliquant le Théorème 4.2.2 à la fonction  $F - \inf F$ .

**COROLLAIRE 4.2.4.** *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et bornée inférieurement satisfaisant  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ , et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. Le système d'évolution  $(E_F)$  est rapidement stabilisable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais.*

L'exemple suivant applique le Théorème 4.2.2 au cas des équations de la chaleur fractionnaires :

**EXEMPLE 4.2.5.** *Pour tout réel strictement positif  $s > 0$ , considérons la fonction  $F_s : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  définie pour tout  $t \geq 0$  par  $F_s(t) = t^{2s}$ . Considérons aussi un sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  de mesure strictement positive. Nous déduisons des Corollaires 4.2.3 et 4.2.4 que le système d'évolution  $(E_{F_s})$  est exponentiellement stabilisable à partir du support de contrôle  $\omega$  si et seulement si il est rapidement stabilisable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais. De plus, d'après le Théorème 4.2.2, lorsque  $\omega$  est épais, il existe des constantes  $C \geq 1$  et  $R_0 > 0$  telles que pour tout  $R \geq R_0$  et  $t \geq 0$ ,*

$$\|e^{-t((-\Delta)^s + C e^{CR} R^{2s} \mathbb{1}_{\omega} K_R)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq \sqrt{2} C e^{CR} e^{-R^{2s} t/2},$$



où  $K_R$  désigne la projection orthogonale

$$K_R : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{Supp } \widehat{f} \subset \overline{B(0, R)}\}.$$

Ces estimations explicites de stabilisation permettent, en particulier, de retrouver les résultats [36] (Théorème 1.1) et de généraliser [49] (Exemple 1).

En conclusion de cette section, nous constatons que sous des hypothèses peu contraignantes sur la fonction  $F$ , il est possible de stabiliser rapidement l'équation d'évolution associée, avec un contrôle complètement explicite, à partir des ensembles épais. Ainsi, la stabilisation est une notion de contrôle suffisamment faible pour permettre le contrôle d'équations peu diffusives telles que les équations de la chaleur fractionnaires avec paramètre  $0 < s \leq \frac{1}{2}$ , mais suffisamment forte pour que la condition d'épaisseur continue d'y jouer un rôle clé. Cependant, il existe tout de même des cas où l'épaisseur du support de contrôle ne suffit plus à stabiliser rapidement l'équation d'évolution  $(E_F)$ . L'exemple donné par le résultat suivant montre que si la fonction  $F$  possède une limite finie à l'infini  $+\infty$ , alors l'équation  $(E_F)$  n'est pas rapidement stabilisable à partir de l'ensemble de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ , dès que celui-ci n'est pas dense dans  $\mathbb{R}^d$ .

**PROPOSITION 4.2.6.** *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée inférieurement et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable qui n'est pas dense dans  $\mathbb{R}^d$ . Supposons que la limite  $\lim_{+\infty} F$  existe et est un réel positif (la fonction  $F$  est donc bornée). Alors, si  $\alpha > \sup F$ , l'équation d'évolution  $(E_F)$  n'est pas exponentiellement stabilisable à partir de  $\omega$  à vitesse  $\alpha$ .*

La Proposition 4.2.6 est démontrée dans la Section 8.1.3 du Chapitre 8. Elle consiste à supposer que l'ensemble  $\omega$  n'est pas dense dans  $\mathbb{R}^d$  et à nier les inégalités d'observabilité associées à la notion de stabilisation.

### 4.3. Contrôlabilité approchée avec coût uniforme

Dans cette section, nous nous intéressons à la contrôlabilité approchée avec coût uniforme des équations d'évolution  $(E_F)$ . Comme le stipule la Proposition 8.2.2, que nous énonçons et démontrons dans la Section 8.2.3, cette notion est plus forte que la stabilisation rapide et on s'attend à ce qu'il soit plus difficile d'effectuer un contrôle approché avec un coût uniforme des équations peu diffusives. C'est pourquoi nous n'allons pas étudier le système d'évolution  $(E_F)$  pour des fonctions  $F$  aussi générales que possible, mais seulement pour celles générant une suite quasi-analytique.

Rappelons qu'à la fonction  $F$ , il est possible d'associer une suite log-convexe  $\mathcal{M}^F$  dont les éléments  $M_k^F$ , que nous supposons être des réels strictement positifs, sont définis par

$$(4.3.1) \quad 0 < M_k^F = \sup_{r \geq 0} r^k e^{-F(r)} < +\infty, \quad k \geq 0.$$

On rappelle (voir Section 3.2) que la suite  $\mathcal{M}^F$  est dite *quasi-analytique* lorsque la classe de fonctions associée

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}^F}((0, 1)) = \{f \in \mathcal{C}^\infty((0, 1), \mathbb{C}) : \forall k \geq 0, \forall x \in (0, 1), |f^{(k)}(x)| \leq M_k^F\},$$

est quasi-analytique, ce qui signifie que toute fonction  $f$  de cette classe satisfaisant

$$\exists x_0 \in (0, 1), \forall k \geq 0, \quad f^{(k)}(x_0) = 0,$$

est la fonction nulle. Pour plus de détails concernant cette notion, on se référera à la Section 3.2 où la définition et quelques résultats concernant les suites quasi-analytiques sont présentés, notamment le Théorème de Denjoy-Carleman qui fournit une caractérisation pratique de ces suites.

Lorsque la fonction  $F$  génère une suite quasi-analytique  $\mathcal{M}^F$  de réels strictement positifs, les solutions de l'équation homogène associée à  $(E_F)$  appartiennent à des classes de fonctions quasi-analytiques (voir Section 8.2.1 pour plus de détails). En tirant avantage de

cette régularité quasi-analytique, nous montrons que la notion d'épaisseur est une condition géométrique nécessaire et suffisante qui assure la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme des équations d'évolution  $(E_F)$  en tout temps strictement positif.

**THÉORÈME 4.3.1.** *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée inférieurement et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable. Supposons que la suite  $\mathcal{M}^F$  associée à la fonction  $F$  définie en (4.3.1) est une suite quasi-analytique de réels strictement positifs. Alors, pour tout temps strictement positif  $T > 0$ , l'équation diffusivie  $(E_F)$  est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme à partir du support de contrôle  $\omega$  au temps  $T$  si et seulement si  $\omega$  est épais.*

La partie nécessaire du Théorème 4.3.1 est une conséquence du fait que la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme implique la stabilisation rapide (Proposition 8.2.2), et est donc une conséquence du Corollaire 4.2.4. Remarquons que l'hypothèse sur la fonction  $F$  dans le Théorème 4.3.1 implique que  $\lim_{+\infty} F = +\infty$ , puisque nous avons

$$\forall r \geq 0, \quad r \leq M_1^F e^{F(r)},$$

avec  $0 < M_1^F < +\infty$ .

Concernant la partie suffisante du Théorème 4.3.1, la preuve est donnée dans la Section 8.2.2. L'idée est d'obtenir des inégalités d'observabilité approchées pour le système homogène associé à  $(E_F)$  :

$$(4.3.2) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + F(|D_x|)f(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, \cdot) = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

La preuve consiste en une adaptation de la stratégie à la Kovrijkine, décrite à la fin de la Section 1.1, avec une définition des bons cubes adaptée à la suite  $\mathcal{M}^F$  qui régit la régularité des solutions du système (4.3.2). Le lemme d'analyse complexe utilisé dans la stratégie de Kovrijkine originale (Lemme 9.1.1) est remplacé par la version multi-dimensionnelle du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg (Proposition 3.2.10).

Présentons à présent des exemples explicites de fonction  $F$  qui génèrent une suite quasi-analytique  $\mathcal{M}^F$  et pour lesquelles le Théorème 4.3.1 s'applique.

**EXEMPLE 4.3.2.** *Supposons que la fonction continue positive  $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  satisfait  $\Theta \leq F$ , où le poids  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  vérifie les propriétés suivantes :*

- (i)  $\Theta(0) = 0$ ,  $\Theta$  est croissante avec  $\lim_{+\infty} \Theta = +\infty$ ,
- (ii)  $\Theta$  est semi-continue inférieurement et  $t \in \mathbb{R} \mapsto \Theta(e^t)$  est convexe,
- (iii)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Theta(t)}{1+t^2} dt = +\infty.$$

D'après le travail [38] (voir aussi la Proposition 3.2.6 dans ce manuscrit), la suite  $\mathcal{M}^\Theta$  associée au poids  $\Theta$ , définie en (4.3.1), est quasi-analytique. De plus, nous avons  $\mathcal{M}^F \leq \mathcal{M}^\Theta$ , puisque  $\Theta \leq F$ , et le Lemme 8.3.1 implique que la suite  $\mathcal{M}^F$  est aussi quasi-analytique. Nous en déduisons que pour tout sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  et tout temps strictement positif  $T > 0$ , l'équation d'évolution  $(E_F)$  est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme à partir du support de contrôle  $\omega$  au temps  $T$  si et seulement si  $\omega$  est épais. Un exemple pertinent est donné par  $F(t) = \Theta(t) = t$ . En effet, l'équation d'évolution associée est l'équation de la demi-chaleur  $(E_t)$  posée sur tout l'espace  $\mathbb{R}^d$  associée à l'opérateur  $\sqrt{-\Delta}$ , qui est connue pour ne pas être (exactement) contrôlable à zéro à partir d'un ensemble de contrôle non dense dans  $\mathbb{R}^d$  (au moins dans le cas unidimensionnel  $d = 1$ ), voir [40] (Théorème 2.3) ou [48] (Théorème 1.1). Cette équation d'évolution est donc un exemple pertinent où la condition d'épaisseur échoue à être suffisante pour la contrôlabilité à zéro exacte mais apparaît comme nécessaire et suffisante à la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme.

Remarquons que la contrôlabilité à zéro approchée avec coût uniforme à partir des ensembles épais des équations de la chaleur fractionnaires ( $E_{t^{2s}}$ ), avec  $s > \frac{1}{2}$ , peut se déduire des estimations de stabilisation quantitatives (4.2.1) données par le Théorème 4.2.2 qui fournissent, de plus, un contrôle explicite. En effet, fixons un temps strictement positif  $T > 0$  et une erreur  $\varepsilon > 0$ . Dans le cas où  $s > \frac{1}{2}$ , il est possible de choisir un paramètre  $R_\varepsilon > 0$  suffisamment grand tel que

$$\sqrt{2}C e^{CR_\varepsilon} e^{-R_\varepsilon^{2s}T/2} \leq \varepsilon,$$

où la constante  $C = C(\omega) \geq 1$  est donnée par le Théorème 4.2.2. Considérons alors une donnée initiale  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  et posons

$$f(t, \cdot) = e^{-t((-\Delta)^s + C e^{CR_\varepsilon} R_\varepsilon^{2s} \mathbb{1}_\omega K_{R_\varepsilon})} f_0, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

où  $K_{R_\varepsilon}$  désigne la projection orthogonale

$$K_{R_\varepsilon} : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{Supp } \widehat{g} \subset \overline{B(0, R_\varepsilon)}\}.$$

La fonction  $f$  est solution du système de contrôle

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + (-\Delta_x)^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, \cdot) = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

avec

$$u(t, x) = -C e^{CR_\varepsilon} R_\varepsilon^{2s} K_{R_\varepsilon} f(t, x), \quad t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

On vérifie alors, d'après les estimations (4.2.1), que la solution satisfait

$$\|f(T, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et le contrôle vérifie

$$\|u\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)} \leq C e^{CR_\varepsilon} R_\varepsilon^{2s} \|f\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon C e^{CR_\varepsilon} R_\varepsilon^{2s} \sqrt{T} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Soulignons le fait que cette approche ne peut pas être utilisée dans le cas de la demi-chaleur ou pour les équations moins diffusives présentées par la suite car le terme

$$\sqrt{2}C e^{CR_\varepsilon} e^{-(\alpha_R + \inf F)T/2},$$

ne peut pas être rendu arbitrairement petit. L'intérêt du Théorème 4.3.1 réside dans la possibilité de déduire des résultats de contrôlabilité approchée avec coût uniforme pour des équations moins diffusives que l'équation de la demi-chaleur ( $E_t$ ), comme l'illustrent les deux exemples suivants :

EXEMPLE 4.3.3. Soient  $s \geq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$  et  $F_{s, \delta} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction continue positive définie pour tout  $t \geq 0$  par

$$F_{s, \delta}(t) = \frac{t^s}{\log^\delta(e+t)}.$$

Nous vérifions dans le Corollaire 8.3.4 que la suite associée  $\mathcal{M}^{F_{s, \delta}}$  définie en (4.3.1) est une suite quasi-analytique de nombres réels strictement positifs. On en déduit que pour tout sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  et pour tout temps strictement positif  $T > 0$ , l'équation d'évolution ( $E_{F_{s, \delta}}$ ) est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme à partir du support de contrôle  $\omega$  au temps  $T$  si et seulement si  $\omega$  est épais.

EXEMPLE 4.3.4. Soient un entier  $p \geq 1$  et  $F_p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction continue positive définie pour tout  $t \geq 0$  par

$$F_p(t) = \frac{t}{g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ p}(t)}, \quad \text{où } g(t) = \log(e+t),$$

avec  $g^{\circ p} = g \circ \dots \circ g$  ( $p$  compositions). Nous vérifions à la Proposition 8.3.3 que la suite associée  $\mathcal{M}^{F_p}$  définie en (4.3.1) est quasi-analytique. Cela a pour conséquence que pour tout sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  et tout temps positif  $T > 0$ , l'équation d'évolution ( $E_{F_p}$ ) est approximativement contrôlable à zéro avec coût uniforme à partir du support de contrôle  $\omega$  au temps  $T$  si et seulement si  $\omega$  est épais.

Concernant la notion plus faible de contrôlabilité à zéro approchée présentée dans la Section 2.1.1, la géométrie autorisée pour le support de contrôle est plus simple. En effet, la proposition suivante, démontrée en Section 8.2.1, assure que le système d'évolution  $(E_F)$  est approximativement contrôlable à zéro à tout temps strictement positif  $T > 0$  et à partir de tout ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  de mesure de Lebesgue strictement positive dès lors que la fonction  $F$  génère une suite quasi-analytique  $\mathcal{M}^F$ .

PROPOSITION 4.3.5. *Soient  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue, bornée inférieurement et  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable de mesure de Lebesgue strictement positive. Si la suite  $\mathcal{M}^F$  associée à la fonction  $F$ , définie en (4.3.1), est une suite quasi-analytique de nombres réels strictement positifs, alors pour tout temps strictement positif  $T > 0$ , l'équation diffusives  $(E_F)$  est approximativement contrôlable à zéro à partir du support de contrôle  $\omega$  au temps  $T$ .*

En particulier, les équations diffusives introduites dans les Exemples 4.3.2, 4.3.3 et 4.3.4 sont approximativement contrôlables à zéro en tout temps strictement positif  $T > 0$  à partir de tout sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfaisant  $|\omega| > 0$ .



## Inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite et contrôlabilité à zéro

RÉSUMÉ. Ce chapitre présente les résultats obtenus dans l'article [53], écrit en collaboration avec Karel Pravda-Starov. Le résultat principal, donné par le Théorème 5.2.1, établit des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite à partir d'ensembles faiblement épais. Ces estimations permettent de démontrer un résultat général de contrôlabilité à zéro pour des équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique, donné par le Théorème 5.3.1.

### 5.1. Introduction

Ce chapitre vise à donner des conditions géométriques suffisantes pour la contrôlabilité à zéro des équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique. Plus spécifiquement, nous nous intéressons à des équations d'évolution de la forme

$$(5.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + Af(t, x) = u(t, x)\mathbf{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

associée à  $A$  un opérateur fermé sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction fortement continu  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On demande de plus, à ce que l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  génère un semi-groupe de contraction fortement continu jouissant d'effets régularisants de type Gelfand-Shilov symétrique en tout temps strictement positif, c'est à dire, vérifiant

$$\forall t > 0, \forall u \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad e^{-tA^*} u \in S_{1/(2s)}^{1/(2s)}(\mathbb{R}^d),$$

avec  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ . La définition, ainsi que quelques propriétés des espaces de Gelfand-Shilov sont rappelées en Section C. Comme expliqué dans cette section, les fonctions appartenant aux espaces de Gelfand-Shilov symétriques sont caractérisées par une décroissance de type exponentielle des coefficients de leur décomposition dans la base de Hermite. En vue d'une application du résultat abstrait d'observabilité donné par le Théorème 2.2.1, cette caractérisation invite naturellement à établir des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite. La Section 5.2 est consacrée à l'obtention de telles inégalités spectrales qui quantifient le coût de localisation en termes du niveau d'énergie et des paramètres caractérisant l'épaisseur faible d'un ensemble. Dans la Section 5.3, des applications de ces inégalités spectrales à la théorie du contrôle sont données. Plus précisément, de nouveaux résultats de contrôlabilité sont obtenus pour les équations de la chaleur harmonique fractionnaires et, plus généralement, pour des équations d'évolution dont le semi-groupe adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique.

### 5.2. Inégalités spectrales à partir d'ensembles faiblement épais

Cette section présente des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite à partir d'ensembles faiblement épais. Le principal résultat est donné par le Théorème 5.2.1, issu du travail [53] :

**THÉORÈME 5.2.1.** *Soient  $0 < \gamma \leq 1$  et  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction strictement positive  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne avec  $\mathbb{R}^d$  muni de la norme euclidienne, telle qu'il existe des constantes  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $m > 0$ ,  $R > 0$  telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R\langle x \rangle^{1-\varepsilon}.$$

*Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  qui est  $\gamma$ -épais par rapport à la densité  $\rho$ . Alors, il existe des constantes  $\kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon) > 0$ ,  $\tilde{C}_d(\varepsilon, R) > 0$  et une constante universelle  $\tilde{\kappa}_d > 0$  telles que*

$$\forall N \geq 1, \quad \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon) \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\tilde{C}_d(\varepsilon, R)N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

*où  $\mathcal{E}_N$  est l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de Hermite  $(\Phi_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ .*

Le Théorème 5.2.1 fournit toute une famille d'inégalités spectrales indexée par  $0 < \varepsilon \leq 1$ , le paramètre qui régit la borne sur la croissance de la densité  $\rho$ . Plus cette croissance est proche du cas linéaire, moins la masse de  $\omega$  est contrainte d'occuper l'espace, ce qui se traduit par une plus forte croissance de la constante du coût de localisation en fonction du niveau d'énergie  $N$ .

La preuve de ce résultat est donnée en Section 9.1. Elle est inspirée de la preuve du Théorème 1.1.6 donnée par Kovrijkine dans [42] et de son adaptation dans le cadre de combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite [11] (Théorème 2.1) donnée par Beauchard, Jaming et Pravda-Starov. Elle consiste, tout d'abord, en un découpage de l'espace  $\mathbb{R}^d$  en un nombre dénombrable de boules de la forme  $B(x_k, \rho(x_k))$ . Comme dans la stratégie à la Kovrijkine, l'idée est de séparer cette famille de boules en deux catégories : les bonnes boules et les mauvaises. La définition des bonnes boules est déterminée par les estimations de type Bernstein pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite données par la proposition suivante, démontrées dans la Section E.1 de l'Appendice E :

**PROPOSITION 5.2.2.** *Les combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite satisfont les estimations suivantes :*

$$\forall 0 < \varepsilon \leq 1, \exists K_\varepsilon > 1, \forall 0 < \delta \leq 1, \exists \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} > 1, \forall r > 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N,$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} (\delta K_\varepsilon)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} K_\varepsilon^{|\beta|+r} \delta^{|\beta|} (d+1)^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r+|\beta|}{2-\varepsilon} + 3\right) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

avec  $\mathcal{E}_N = \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$

La suite de la démonstration consiste à établir que la contribution des mauvaises boules est négligeable et que les estimations de type Bernstein sur les bonnes boules permettent d'obtenir des estimées de la forme

$$\|f\|_{L^2(B_k)} \leq C \|f\|_{L^2(B_k \cap \omega)},$$

en utilisant un lemme d'analyse complexe (voir Lemme 9.1.1).

Soulignons une différence importante avec la stratégie originale de Kovrijkine. Contrairement à la preuve donnée par Kovrijkine qui est faite dans un cas où la densité  $\rho$  est constante, le découpage de  $\mathbb{R}^d$  effectué dans cette démonstration nécessite la notion de métrique lente, dont une introduction est donnée en Appendice, Section A. Les hypothèses du théorème demandent à la densité  $\rho$  d'être  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne pour des raisons techniques liées à cette utilisation des métriques lentes. En réalité, bien qu'il soit énoncé ainsi dans l'article [53], cette hypothèse est superflue et nous pouvons écrire le résultat suivant, qui se déduit du précédent :

COROLLAIRE 5.2.3. Soit  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction continue strictement positive, telle qu'il existe des constantes  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $R > 0$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R \langle x \rangle^{1-\varepsilon}$$

et  $0 < \gamma \leq 1$ . Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  qui est  $\gamma$ -épais par rapport à la densité  $\rho$ . Alors, il existe des constantes  $\kappa_d(R, \gamma, \varepsilon) > 0$ ,  $\kappa'_d(R, \varepsilon) > 0$  et  $\tilde{C}_d(\varepsilon, R) > 0$  telles que

$$(5.2.1) \quad \forall N \geq 1, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \kappa_d(R, \gamma, \varepsilon) \left( \frac{\kappa'_d(R, \varepsilon)}{\gamma} \right)^{\tilde{C}_d(\varepsilon, R) N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

où  $\mathcal{E}_N$  est l'espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de Hermite  $(\Phi_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$ .

Le Corollaire 5.2.3 est une conséquence directe du Théorème 5.2.1 et du Lemme 3.1.5 qui permet de se ramener à une densité  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne. Il établit des inégalités spectrales valables pour tous les ensembles  $(1 - \varepsilon)$ -faiblement épais, avec  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Remarquons que substituer formellement  $\varepsilon$  par 0 et 1 dans (5.2.1) fournit la même croissance par rapport au niveau d'énergie  $N$  que dans les estimations (1.2.4) et (1.2.5) démontrées par Beauchard, Jaming et Pravda-Starov dans [11]. Puisque les estimations (1.2.4) et (1.2.5) correspondent respectivement aux cas où  $\omega$  est 1-faiblement et 0-faiblement épais, les inégalités spectrales données par le Corollaire 5.2.3 apparaissent comme des interpolations entre les estimées (1.2.4) et (1.2.5).

### 5.3. Contrôlabilité des équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique

Intéressons-nous à présent à la contrôlabilité des équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans un espace de Gelfand-Shilov symétrique  $S^{\frac{1}{2s}}$ . Le système de contrôle étudié est de la forme

$$(5.3.1) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + A f(t, x) = u(t, x) \mathbf{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $A$  est un opérateur fermé sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui génère un semi-groupe de contraction fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On suppose de plus que l'opérateur adjoint  $A^*$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  génère un semi-groupe de contraction fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant des estimations quantitatives de la forme : il existe des constantes  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ,  $C_s > 1$ ,  $0 < t_0 \leq 1$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  avec  $m_1 > 0$ ,  $m_2 \geq 0$  telles que

$$(5.3.2) \quad \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA^*} g)\| \leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

où la norme ci-dessus  $\|\cdot\|$  désigne la norme  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  ou la norme  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Le Lemme 9.3.1 énoncé en Section 9.3 montre que si les estimées (5.3.2) sont vérifiées avec la norme  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  alors elles le sont aussi avec la norme  $L^2(\mathbb{R}^d)$  avec les mêmes constantes  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ,  $0 < t_0 \leq 1$ , mais pour différentes valeurs des constantes  $C_s > 1$ ,  $m_1 > 0$ ,  $m_2 \geq 0$ . Le résultat suivant fournit des conditions géométriques suffisantes sur l'ensemble de contrôle directement liées à l'indice de régularité Gelfand-Shilov  $\frac{1}{2s}$  pour assurer la contrôlabilité du système (5.3.1) :

THÉORÈME 5.3.1. Soit  $A$  un opérateur fermé sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction fortement continu  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On suppose que l'opérateur adjoint  $A^*$  de  $A$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  génère un semi-groupe de contraction fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant les estimations quantitatives (5.3.2) pour une



certaine valeur du paramètre  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ . Soit  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction continue strictement positive telle qu'il existe des constantes  $0 \leq \delta < 2s - 1$ ,  $R > 0$  vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta.$$

Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$   $\gamma$ -épais par rapport à la densité  $\rho$ , pour un certain  $0 < \gamma \leq 1$ , alors il existe une constante  $C = C_{\gamma, d, R, \delta, s, m_1, m_2} > 1$  telle que l'inégalité d'observabilité suivante est vérifiée :

$$\forall T > 0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \exp\left(\frac{C}{T^{\frac{(1+\delta)m_1}{2s-1-\delta}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

De plus, l'équation d'évolution

$$(5.3.3) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + Af(t, x) = \mathbb{1}_\omega(x)u(t, x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .

La géométrie autorisée pour la contrôlabilité des équations d'évolution (5.3.3) est explicitement corrélée aux effets régularisants (5.3.2). Le Théorème 5.3.1 établit une borne supérieure sur le paramètre  $\delta$  régissant la croissance de la densité  $\rho$  en fonction du paramètre  $s$  qui caractérise l'espace de Gelfand-Shilov  $S_{\frac{1}{2s}}^{\frac{1}{2s}}$  dans lequel régularise le semi-groupe  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$ . On remarque que plus l'indice  $s$  est proche de 1, et donc, plus les effets régularisants sont forts, moins la géométrie de l'ensemble de contrôle est contrainte.

La preuve du Théorème 5.3.1 est une application du résultat abstrait d'observabilité donné par le Théorème 2.2.1 et des inégalités spectrales données par le Corollaire 5.2.3. Les estimations de dissipation nécessaires à l'application du Théorème 2.2.1 sont une conséquence des effets régularisants donnés par les estimations quantitatives (5.3.2). Comme expliqué à la fin de la preuve du Théorème 5.3.1, les conclusions du Théorème 5.3.1 restent vraies si les estimations quantitatives (5.3.2) vérifiées pour un certain  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  sont remplacées par l'hypothèse suivante

$$(5.3.4) \quad \exists m_1, m_2 > 0, \exists C_1, C_2 > 0, \exists 0 < t_0 \leq 1, \forall 0 < t \leq t_0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{\frac{2tm_1}{C_1}(2|\alpha|+d)^s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \leq \frac{C_2^2}{t^{2m_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

avec  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  la base de Hermite sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Comme application de cette remarque, on considère l'oscillateur harmonique fractionnaire

$$\forall u \in D(\mathcal{H}^s), \quad \mathcal{H}^s u = (-\Delta_x + |x|^2)^s u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} (2|\alpha| + d)^s \langle u, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha,$$

avec  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ , équipé du domaine

$$D(\mathcal{H}^s) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d) : \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} (2|\alpha| + d)^{2s} |\langle u, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 < +\infty \right\}.$$

L'oscillateur harmonique fractionnaire  $\mathcal{H}^s$  est un opérateur auto-adjoint générant un semi-groupe de contraction fortement continu  $(e^{-t\mathcal{H}^s})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  explicitement donné par

$$(5.3.5) \quad \forall t \geq 0, \forall u \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad e^{-t\mathcal{H}^s} u = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{-t(2|\alpha|+d)^s} \langle u, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha,$$

voir par exemple [66] (Propositions 2.6.2 et 2.6.5). Comme l'hypothèse (5.3.4) est trivialement vraie pour l'oscillateur harmonique fractionnaire qui est auto-adjoint, le Théorème 5.3.1 permet de déduire le résultat de contrôlabilité à zéro suivant :

COROLLAIRE 5.3.2. Soient  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  et  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction continue strictement positive telle qu'il existe des constantes positives  $0 \leq \delta < 2s - 1$ ,  $R > 0$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta.$$

Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  qui est épais par rapport à la densité  $\rho$ , alors l'équation d'évolution associée à l'oscillateur harmonique fractionnaire  $\mathcal{H}^s = (-\Delta_x + |x|^2)^s$ ,

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + \mathcal{H}^s f(t, x) = \mathbb{1}_\omega(x)u(t, x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .

Pour  $s = 1$ , le Corollaire 5.3.2 permet de contrôler l'équation de la chaleur harmonique à partir de tout ensemble épais par rapport à une densité à croissance quasi-linéaire. En particulier, l'épaisseur (au sens de la Définition 1.1.3) est une condition suffisante mais non nécessaire. En revanche, toujours dans le cas  $s = 1$ , le Corollaire 5.3.2 ne permet pas de conclure à la contrôlabilité de l'équation de la chaleur harmonique à partir des ensembles 1-faiblement épais. En réalité, les ensembles 1-faiblement épais peuvent ne pas être assez bien distribués dans l'espace pour permettre un résultat de contrôlabilité. En effet, le résultat négatif de contrôlabilité de l'équation de la chaleur harmonique donné par Miller (Théorème 2.3.3) montre que les demi-plans ne constituent pas des supports de contrôle efficaces, bien qu'ils soient 1-faiblement épais.

Concernant les opérateurs quadratiques considérés dans la Section 2.3.3, nous avons vu qu'ils satisfaisaient les estimations (2.3.3), c'est à dire, des estimations du type (5.3.2) avec  $s = 1$ ,  $m_1 = \frac{2k_0+1}{2}$  et  $m_2 = \frac{(2d+1)(2k_0+1)}{2}$ . Nous sommes alors en mesure d'énoncer le résultat suivant de contrôlabilité pour des équations d'évolution associées à un opérateur quadratique de partie réelle positive et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$  :

THÉORÈME 5.3.3. Soit  $q : \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_\xi^d \rightarrow \mathbb{C}$  une forme quadratique à valeurs complexes de partie réelle positive  $\operatorname{Re} q \geq 0$ , et d'espace singulier nul  $S = \{0\}$ . Soit  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction continue strictement positive telle qu'il existe des constantes  $0 \leq \delta < 1$ ,  $R > 0$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta.$$

Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  qui est épais par rapport à la densité  $\rho$ , alors l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + q^w(x, D_x)f(t, x) = \mathbb{1}_\omega(x)u(t, x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $q^w(x, D_x)$  est l'opérateur différentiel défini par la quantification de Weyl du symbole  $q$ , est contrôlable à zéro à partir de l'ensemble  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .

Terminons ce chapitre en mentionnant le très récent article [20] dans lequel Dicke, Seelmann et Veselić ont amélioré le résultat de contrôlabilité du Corollaire 5.3.2 dans le cas  $s = 1$ . Dans [20, Théorème 3.2], les auteurs montrent que l'équation de la chaleur harmonique est contrôlable à zéro en tout temps strictement positif à partir de tout ensemble  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfaisant :

$$(5.3.6) \quad \exists 0 < \gamma \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma^{1+|x|^\delta} |B(x, \rho(x))|,$$

où  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  est une densité continue satisfaisant

$$\exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R\langle x \rangle^{1-\varepsilon},$$

avec  $0 \leq \delta < \varepsilon \leq 1$ . En particulier, le travail [20] montre qu'il est possible de construire des ensembles de mesure finie, mais non bornés, permettant de contrôler l'équation de la chaleur harmonique. Leur résultat est une conséquence de nouvelles inégalités spectrales

pour des fonctions de Hermite à partir d'ensemble  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfaisant la condition (5.3.6) ([20, Théorème 2.7]) qui prennent la forme suivante :

$$\exists K > 1, \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{3} \left( \frac{K}{\gamma} \right)^{K^{1+\delta} d^{(11+3\delta)/2} (1+R^2) N^{1-\frac{\varepsilon-\delta}{2}}} \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

## Principes d'incertitude dans des espaces de Gelfand-Shilov et contrôlabilité à zéro

RÉSUMÉ. Ce chapitre présente les résultats obtenus dans l'article [51]. La Section 6.2 présente des principes d'incertitude valables dans des espaces de Gelfand-Shilov généraux, à partir d'ensembles faiblement épais. Nous démontrons également des inégalités spectrales pour des fonctions propres associées à un opérateur de Shubin anisotrope en Section 6.3. Dans la Section 6.4, nous appliquons les principes d'incertitude et les inégalités spectrales à la contrôlabilité à zéro d'équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans des espaces de Gelfand-Shilov.

### 6.1. Introduction

Nous allons à présent aborder le chapitre principal de ce manuscrit. Il contient les résultats établis dans le travail [51]. Un des objectifs de ce chapitre est d'obtenir de nouveaux principes d'incertitude dans une classe générale d'espaces de Gelfand-Shilov, et pas seulement dans le cas symétrique, comme traité dans le Chapitre 5. Il s'agit ici de comprendre le rôle des ensembles épais par rapport à une densité dans ces principes d'incertitude et d'établir des conditions suffisantes sur la croissance de la densité pour leur permettre d'être satisfaits. De ces principes d'incertitude, nous déduisons de nouveaux résultats de contrôlabilité à zéro pour des équations d'évolution dont les systèmes adjoints régularisent dans des espaces de Gelfand-Shilov non nécessairement symétriques.

Dans le Chapitre 4, nous avons étudié des équations purement diffusives, telles que les équations de la chaleur fractionnaires, pour lesquelles nous observons uniquement une forte décroissance en fréquence des solutions du système homogène associé. Dans ce cadre, l'épaisseur du support de contrôle s'est avérée nécessaire et suffisante pour la stabilisation et le contrôle approché avec coût uniforme de ces équations. En revanche, lorsque les solutions du système adjoint de l'équation d'évolution étudiée appartiennent à un espace de Gelfand-Shilov symétrique et jouissent donc de propriétés de décroissance en espace et en fréquence, comme dans le Chapitre 5, la masse du support de contrôle n'est plus contrainte à se distribuer aussi fortement à l'infini et des résultats de contrôlabilité ont pu être obtenus à partir d'ensembles faiblement épais. Néanmoins, les résultats de contrôlabilité à zéro présentés dans le Chapitre 5 sont limités aux équations d'évolutions dont les systèmes adjoints ont des effets régularisants dans des espaces de Gelfand-Shilov symétriques. De ce fait, ces résultats ne permettent pas de discerner les rôles respectifs que jouent la régularité et la décroissance en espace dans la géométrie autorisée pour le support de contrôle. La principale limitation dans le Chapitre 5 vient du fait que le développement dans la base de Hermite permet seulement de caractériser les espaces de Gelfand-Shilov symétriques (voir Section C).

On souhaite à présent étudier des systèmes d'évolution dont les solutions appartiennent à un espace de Gelfand-Shilov  $S_{\nu}^{\mu}$ , non nécessairement symétrique. C'est notamment le cas pour les équations d'évolution associées à un oscillateur (an)harmonique

$$\mathcal{H}_{k,1} = -\Delta_x + |x|^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

ou, plus généralement, à un opérateur de Shubin anisotrope

$$\mathcal{H}_{k,m} = (-\Delta_x)^m + |x|^{2k}, \quad m, k \in \mathbb{N}^*.$$

Les principaux résultats de ce chapitre décrivent comment la géométrie autorisée pour le support de contrôle dépend des paramètres  $\mu$  et  $\nu$  qui caractérisent respectivement la décroissance en fréquence et en espace des solutions du système.

## 6.2. Des principes d'incertitude avec termes d'erreur

Cette section vise à présenter des principes d'incertitude avec termes d'erreur valables dans des espaces de Gelfand-Shilov. Elle se scinde en deux sous-sections. La première s'intéresse à une classe très générale d'espaces de Gelfand-Shilov, tandis que la seconde revient sur le cas des espaces de Gelfand-Shilov symétriques. Sauf mention contraire,  $\mathbb{R}^d$  est muni de la norme euclidienne dans toute la suite.

6.2.0.1. *Principes d'incertitude dans des espaces de Gelfand-Shilov généraux.* Dans cette section, nous étudions des principes d'incertitude valides dans des espaces de Gelfand-Shilov généraux. Nous considérons le sous-espace suivant constitué de fonctions régulières

$$GS_{\mathcal{N},\rho} := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \quad \sup_{k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\rho(x)^k \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{N_{k,|\beta|}} < +\infty \right\},$$

où  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  est une fonction strictement positive mesurable et  $\mathcal{N} = (N_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est une suite à double indice de nombres réels strictement positifs. Nous associons à ces espaces les semi-normes suivantes :

$$\forall f \in GS_{\mathcal{N},\rho}, \quad \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}} = \sup_{k \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\rho(x)^k \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{N_{k,|\beta|}}.$$

Lorsque la densité est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho(x) = \langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}},$$

$|\cdot|$  désignant la norme euclidienne, et  $\mathcal{N} = (C^{p+q}(p!)^\nu(q!)^\mu)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  pour une constante  $C \geq 1$  et où  $\mu, \nu > 0$  sont des réels positifs vérifiant  $\mu + \nu \geq 1$ , la classe de fonctions  $GS_{\mathcal{N},\rho}$  est un sous-espace de l'espace de Gelfand-Shilov classique  $\mathcal{S}_\nu^\mu$ , dont la définition est rappelée dans l'Appendice C. D'autre part, lorsque la densité est constante  $\rho \equiv 1$ , l'espace  $GS_{\mathcal{N},\rho}$  caractérise une régularité de type Gevrey, avec des fonctions seulement régulières mais sans propriétés de décroissance particulières en espace. Ce cadre a déjà été étudié dans le Chapitre 4 mais également dans le travail [38] dans lequel les auteurs établissent des principes d'incertitude pour des classes de fonctions jouissant d'une forte décroissance en fréquence. Dans la suite, une suite à double indice de nombres réels  $\mathcal{N} = (N_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  sera dite croissante par rapport aux deux indices si et seulement si

$$\forall p \leq p', \forall q \leq q', \quad N_{p,q} \leq N_{p',q'}.$$

Nous pouvons à présent énoncer le principal résultat de cette section. Il établit des principes d'incertitude quantitatifs, valides dans les espaces de Gelfand-Shilov  $GS_{\mathcal{N},\rho}$  :

**THÉORÈME 6.2.1.** *Soient  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $\mathcal{N} = (N_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}^2}$  une suite croissante par rapport aux deux indices telle que la suite diagonale  $\mathcal{M} = (N_{p,p})_{p \in \mathbb{N}} \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$  définisse une suite log-convexe quasi-analytique et  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction strictement positive et  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne telle qu'il existe des constantes strictement positives  $m > 0$ ,  $R > 0$  satisfaisant*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R\langle x \rangle.$$

*Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $\omega$  est  $\gamma$ -épais par rapport à  $\rho$ , alors il existe des constantes strictement positives  $K = K(d), r = r(d) \geq 1$  et  $K' = K'(d, m) \geq 1$  telles que pour tout  $0 < \varepsilon \leq N_{0,0}^2$ ,*

$$\forall f \in GS_{\mathcal{N},\rho}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2,$$

où

$$C_\varepsilon = \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t_0, \mathcal{M}, r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{M}, r}}$$

avec  $n_{t_0, \mathcal{M}, r}$  étant défini en (3.2.2) et

$$t_0 = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K' N_{d,d}}.$$

Ce résultat établit un principe d'incertitude avec un terme d'erreur. Le principe d'incertitude se manifeste à travers la constante  $C_\varepsilon$  dont la valeur dépend du support  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ , de  $\varepsilon > 0$  mais également de la suite à double indice  $\mathcal{N}$ . L'intérêt du Théorème 6.2.1 réside principalement dans l'estimation quantitative de la constante  $C_\varepsilon$  en fonction des différents paramètres. Dans des cas spécifiques, le degré de Bang est facilement calculable (voir l'Exemple 3.2.3) et une borne supérieure explicite sur la constante  $C_\varepsilon$  peut être obtenue.

Ce résultat très général permet de retrouver la partie suffisante du Théorème 1.1.5 dû à Logvinenko et Sereda. En effet, considérons une densité constante  $\rho \equiv L$ , où  $L \geq 1$ , un paramètre  $0 < \gamma \leq 1$  et un sous-ensemble  $\omega \subset \mathbb{R}^d$   $\gamma$ -épais à l'échelle  $L \geq 1$ . Fixons un paramètre  $R \geq 1$  et considérons une fonction  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  satisfaisant

$$\text{supp } \hat{f} \subset B(0, R),$$

où  $B(0, R)$  désigne la boule euclidienne centrée en zéro et de rayon  $R$ . Une telle fonction vérifie les estimées de Bernstein suivantes :

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq R^{2|\beta|} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En définissant la suite à double indice croissante  $\mathcal{N}$ , dont les éléments sont donnés par

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad N_{p,q} = L^p R^q,$$

la suite diagonale  $\mathcal{M} = (L^p R^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est quasi-analytique d'après l'Exemple 3.2.3 et le Théorème 6.2.1 donne pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$  :

$$(6.2.1) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_\varepsilon \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

où

$$C_\varepsilon = \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t_0, \mathcal{M}, r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{M}, r}} \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{8de^4}{\gamma} \right)^{8(1 - \log t_0 + rLR)}$$

où  $K = K(d), r(d) \geq 1$  et  $K' = K'(d, L) \geq 1$  sont des constantes et

$$t_0 = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K' L^d R^d}.$$

Pour  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ , les estimations (6.2.1) donnent :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{2K}{\gamma} \left( \frac{8de^4}{\gamma} \right)^{K'' R} \|f\|_{L^2(\omega)}^2,$$

où  $K'' = K''(d, L) \geq 1$  est une nouvelle constante. En particulier, ceci donne la même croissance par rapport au paramètre  $R$  que dans les estimations (1.1.9) données par le Théorème 1.1.6.

Le principe d'incertitude donné par le Théorème 6.2.1 s'applique également aux cas des espaces de Gelfand-Shilov classiques  $S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  et permet d'écrire le résultat suivant :

**THÉORÈME 6.2.2.** *Soient  $A \geq 1$ ,  $0 < \gamma \leq 1$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $\nu > 0$  avec  $\mu + \nu \geq 1$  et  $0 \leq \delta \leq \frac{1-\mu}{\nu} \leq 1$ . Soit  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction strictement positive  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne telle qu'il existe des constantes  $m > 0$ ,  $R > 0$  satisfaisant*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta.$$

Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ . Si  $\omega$  est  $\gamma$ -épais par rapport à  $\rho$ , alors pour tout  $0 < \varepsilon \leq 1$ , il existe une constante strictement positive  $C_{\varepsilon, A} > 0$  telle que pour tout  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(6.2.2) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon, A} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \left( \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} \right)^2,$$

où, lorsque  $\delta < \frac{1-\mu}{\nu}$ , il existe une constante strictement positive  $D = D(d, m, R, \delta, \mu, \nu) \geq 1$  et une constante universelle  $\kappa_d$  dépendant uniquement de la dimension telles que

$$0 < C_{\varepsilon, A} \leq \left( \frac{\kappa_d}{\gamma} \right)^{D(1 - \log \varepsilon + A^{\frac{2}{1-\delta\nu-\mu}})},$$

et, lorsque  $\delta = \frac{1-\mu}{\nu}$ , il existe une constante strictement positive  $D = D(d, m, R, \delta, \mu, \nu) \geq 1$  et une constante universelle  $\kappa_d$  dépendant uniquement de la dimension telles que

$$0 < C_{\varepsilon, A} \leq \left( \frac{\kappa_d}{\gamma} \right)^{D(1 + \log A - \log \varepsilon) e^{DA^2}}.$$

Avant tout, soulignons le fait que les estimations (6.2.2) ont un intérêt uniquement lorsque

$$\sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} < +\infty,$$

c'est à dire, lorsque  $f \in GS_{\mathcal{N}, \tilde{\rho}}$ , avec  $\mathcal{N} = (A^{p+q} (p!)^\nu (q!)^\mu)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  et  $\tilde{\rho} = \langle \cdot \rangle$ . Ce résultat met en exergue une croissance maximale  $\delta^* = \frac{1-\mu}{\nu}$  autorisée pour la densité en dessous de laquelle les principes d'incertitude sont satisfaits. Pour cette densité critique, nous obtenons également un principe d'incertitude mais avec un contrôle plus faible de la constante  $C_{\varepsilon, A}$  du fait de la présence d'un terme exponentiel. Les estimations quantitatives du Théorème 6.2.2 jouent un rôle clé dans l'établissement des résultats de contrôlabilité à zéro de ce chapitre, donnés dans la Section 6.4.

La preuve du Théorème 6.2.1 est donnée en Section 10.1. Elle combine la stratégie développée par Kovrijkine dans [42], la notion de métrique lente utilisée dans la preuve du Théorème 5.2.1 et la version multi-dimensionnelle du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg concernant les fonctions quasi-analytiques, donnée par la Proposition 3.2.10. Concernant le Théorème 6.2.2, sa démonstration est donnée en Section 10.2.2. Il s'agit d'une application directe du Théorème 6.2.1 combiné avec l'Exemple 3.2.3, qui est démontré dans la Section 10.2.1.

6.2.0.2. *Retour sur le cas des espaces de Gelfand-Shilov symétriques.* Dans cette section, nous revenons sur le cas des espaces de Gelfand-Shilov symétriques dans un cadre plus général que celui proposé par les espaces de Gelfand-Shilov symétriques standard  $S_\mu^\mu$ . Il est expliqué en Section C de l'Appendice que les espaces de Gelfand-Shilov standard se caractérisent par une décroissance des coefficients dans la décomposition de la base de Hermite. Considérons une fonction  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  continue positive et définissons l'espace de Gelfand-Shilov symétrique généralisé suivant

$$GS_\Theta = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \|f\|_{GS_\Theta} := \left\| \left( e^{\Theta(|\alpha|)} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \right\|_{l^2(\mathbb{N}^d)} < +\infty \right\},$$

où  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  désigne la base de Hermite de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . On pourra se référer à la Section E pour une définition et propriétés concernant les fonctions de Hermite.

Avant d'expliquer comment les espaces  $GS_\Theta$  sont reliés aux espaces de Gelfand-Shilov standard définis en Section C, nous allons spécifier les hypothèses sur la fonction poids  $\Theta$  avec lesquelles nous travaillerons. À la fonction poids  $\Theta$ , nous associons la suite log-convexe suivante

$$(6.2.3) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p = \sup_{t \geq 0} t^p e^{-\Theta(t)}.$$

Soit  $s > 0$  un réel strictement positif. Nous supposons que la suite  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  satisfait les conditions suivantes :

$$(H1) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 < M_p < +\infty,$$

(H2) Il existe des constantes strictement positives  $C_\Theta > 0$ ,  $L_\Theta \geq 1$  telles que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p^p \leq C_\Theta L_\Theta^p M_p,$$

avec la convention  $0^0 = 1$ ,

(H3)<sub>s</sub> La suite  $(M_p^s)_{p \in \mathbb{N}}$  est quasi-analytique, c'est à dire,

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \left( \frac{M_{p-1}}{M_p} \right)^s = +\infty,$$

d'après le Théorème de Denjoy-Carleman. Sous ces hypothèses, les fonctions de  $GS_\Theta$  satisfont aux estimées de type Bernstein suivantes :

**PROPOSITION 6.2.3.** *Soit  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction continue positive. Si la suite associée  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie en (6.2.3) vérifie les hypothèses (H1) et (H2), alors l'espace  $GS_\Theta$  est inclu dans l'espace de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ , et pour tout  $0 < s \leq 1$ , il existe une constante strictement positive  $D_{\Theta, d, s} \geq 1$  telle que*

$$\forall f \in GS_\Theta, \forall r \in [0, +\infty), \forall \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (D_{\Theta, d, s})^{1+r+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{r+1+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta},$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction partie entière.

**REMARQUE 6.2.4.** *La Proposition 6.2.3 établit en particulier l'inclusion d'espaces  $GS_\Theta \subset GS_{\mathcal{N}, \rho_s}$ , lorsque  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ , avec*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho_s(x) = \langle x \rangle^{2s-1}$$

et

$$\mathcal{N} = \left( (D_{\Theta, d, s}^{(2s-1)p+q+1} M_{\lfloor \frac{(2s-1)p+1+q+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1}^s)_{(p, q) \in \mathbb{N}^2} \right),$$

et donne les estimations suivantes

$$\forall f \in GS_\Theta, \quad \|f\|_{GS_{\mathcal{N}, \rho_s}} \leq \|f\|_{GS_\Theta}.$$

La démonstration de la Proposition 6.2.3 est donnée en Section E.2 de l'Appendice. Afin de déduire de ces estimations des principes d'incertitude pour les fonctions de l'espace  $GS_\Theta$ , la suite  $\mathcal{M}$  doit de plus satisfaire l'hypothèse (H3)<sub>s</sub> pour une certaine valeur du paramètre  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ .

Les estimations quantitatives données dans la Proposition 6.2.3 associées aux principes d'incertitude données par le Théorème 6.2.1 permettent d'obtenir les estimations suivantes :

**THÉORÈME 6.2.5.** *Soient  $0 \leq \delta \leq 1$  et  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  une fonction continue positive. Supposons que la suite associée  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie en (6.2.3) satisfait les hypothèses (H1), (H2) et (H3) <sub>$\frac{1+\delta}{2}$</sub> . Soit  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  une fonction strictement positive  $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne*

$$\exists m > 0, \exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta.$$

Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable  $\mathbb{R}^d$ ,  $\gamma$ -épais par rapport à  $\rho$ , pour un certain  $0 < \gamma \leq 1$ , alors il existe une constante strictement positive  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\Theta, d, \delta) > 0$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , il existe une constante strictement positive  $D_\varepsilon = D(d, \Theta, \varepsilon, \delta, \rho) > 0$  telle que

$$\forall f \in GS_\Theta, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq D_\varepsilon \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_\Theta}^2.$$



De plus, il existe des constantes strictement positives  $K = K(d) \geq 1$ ,  $r = r(d, R, \delta, \Theta) \geq 1$  et  $K' = K'(d, m, R, \delta, \Theta) \geq 1$  telles que

$$D_\varepsilon \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{N}_\delta}(2n_{t_0, \mathcal{N}_\delta, r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{N}_\delta, r}}$$

avec

$$t_0 = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K'} \quad \text{et} \quad \mathcal{N}_\delta = \left( M_p^{\frac{1+\delta}{2}} \right)_{p \in \mathbb{N}}.$$

La preuve de ce résultat est donnée en Section 10.3.1. Le Théorème 6.2.5 peut se voir comme une généralisation du Théorème 5.2.1. En effet, nous pouvons retrouver les inégalités spectrales du Théorème 5.2.1 avec la même croissance de la constante en fonction du niveau d'énergie  $N$ , à l'aide de ce principe d'incertitude. Fixons un paramètre  $0 \leq \delta < 1$ . En choisissant  $\Theta(t) = t^{\frac{1+\delta}{2}}$  pour  $t \in [0, +\infty)$ , nous avons

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p = \sup_{t \geq 0} t^p e^{-t^{\frac{1+\delta}{2}}} = \sup_{t \geq 0} t^{\frac{2p}{1+\delta}} e^{-t} = \left( \frac{2p}{(1+\delta)e} \right)^{\frac{2p}{1+\delta}}.$$

L'hypothèse (H1) est clairement satisfaite. Pour ce qui est de l'hypothèse (H2), il suffit de remarquer que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad M_p \geq \sup_{t \geq 1} t^p e^{-t^{\frac{1+\delta}{2}}} \geq \sup_{t \geq 1} t^p e^{-t} = \left( \frac{p}{e} \right)^p.$$

Vérifions à présent l'hypothèse (H3) $_{\frac{1+\delta}{2}}$ . Pour cela, considérons la suite log-convexe  $\mathcal{N} = (N_p)_{p \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad N_p = M_p^{\frac{1+\delta}{2}}.$$

Nous allons montrer que la suite  $\mathcal{N}$  est quasi-analytique et estimer le degré de Bang associé à cette suite. Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , nous avons

$$\frac{N_{p-1}}{N_p} = \frac{(1+\delta)e}{2} \left( \frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \frac{1}{p},$$

où, par convention,  $0^0 = 1$ . Notons que la suite de terme général  $\left( \frac{p-1}{p} \right)^{p-1}$  est à termes strictement positifs et converge vers le réel strictement positif  $e^{-1}$ . Il existe donc une constante numérique  $C > 0$  telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \left( \frac{p-1}{p} \right)^{p-1} \geq C > 0.$$

Il en résulte

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{N_{p-1}}{N_p} \geq \frac{(1+\delta)eC}{2} \frac{1}{p}.$$

On en déduit alors, d'une part, que

$$\sum_{p \in \mathbb{N}^*} \frac{N_{p-1}}{N_p} = +\infty,$$

ce qui assure que la suite  $\mathcal{N}$  est quasi-analytique d'après le Théorème de Denjoy-Carleman et que l'hypothèse (H3) $_{\frac{1+\delta}{2}}$  est satisfaite pour  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , et d'autre part, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et pour tout  $0 < t \leq 1$ ,

$$\sum_{-\log t < p \leq n} \frac{N_{p-1}}{N_p} \geq \frac{(1+\delta)eC}{2} \sum_{-\log t < p \leq n} \frac{1}{p}.$$

En effectuant une comparaison série-intégrale, comme dans la démonstration de l'Exemple 3.2.3 donnée en Section 10.2.1 du Chapitre 10, on en déduit l'estimation du degré de Bang suivante :

$$\forall r > 0, \forall 0 < t \leq 1, \quad n_{t, \mathcal{N}, r} \leq (1 - \log t) e^{\frac{2r}{(1+\delta)eC}}.$$

Il reste à estimer les quantités  $\Gamma_{\mathcal{N}}$  et  $\gamma_{\mathcal{N}}$  dont les définitions sont données en (3.2.3). Par un développement limité de la fonction log et de la fonction exponentielle, nous avons pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \frac{N_{p-1}N_{p+1}}{N_p^2} &= \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \frac{p+1}{p-1} = e^{p \log(1 - \frac{1}{p^2})} \frac{p+1}{p-1} \\ &= e^{-\frac{1}{p} + o(\frac{1}{p})} \frac{p+1}{p-1} \\ &= \frac{p+1}{p-1} + O\left(\frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

lorsque  $p \rightarrow +\infty$ . Il s'ensuit

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad p \left( \frac{N_{p-1}N_{p+1}}{N_p^2} - 1 \right) = 2 \frac{p}{p-1} + O(1),$$

lorsque  $p \rightarrow +\infty$ . La quantité  $\gamma_{\mathcal{N}}(n)$ , et a fortiori  $\Gamma_{\mathcal{N}}(n)$ , peuvent donc être majorées par une quantité indépendante de l'entier  $n$ . Soit  $C' \geq 1$  une constante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_{\mathcal{N}}(n) \leq C'.$$

Appliquons à présent le Théorème 6.2.5 avec  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ . Si  $\omega$  est un sous-ensemble mesurable  $\gamma$ -épais par rapport à une densité  $\rho$  satisfaisant les hypothèses de ce Théorème, il existe une constante  $\varepsilon_0$  telle que pour tout  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$  :

$$\forall f \in GS_{\Theta}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq D_{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{\Theta}}^2,$$

avec

$$D_{\varepsilon} \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{N}}(2n_{t_0, \mathcal{N}, r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{N}, r}} \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2dC'}{\gamma} \right)^{4(1 - \frac{1}{2} \log \varepsilon + \log K') e^{\frac{2r}{(1+\delta)\varepsilon C}}}$$

Pour terminer, remarquons que pour tout  $N \in \mathbb{N}$  et  $f = \sum_{|\alpha| \leq N} \langle f, \Phi_{\alpha} \rangle_{L^2} \Phi_{\alpha}$ ,

$$\|f\|_{GS_{\Theta}}^2 = \sum_{|\alpha| \leq N} e^{2|\alpha| \frac{1+\delta}{2}} |\langle f, \Phi_{\alpha} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \leq e^{2N \frac{1+\delta}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

En choisissant  $\varepsilon = \frac{1}{2} e^{-2N \frac{1+\delta}{2}}$ , avec  $N$  suffisamment grand, nous obtenons

$$\begin{aligned} \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq 2D \frac{1}{2} e^{-2N \frac{1+\delta}{2}} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 \\ &\leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2dC'}{\gamma} \right)^{4 \left( 1 + \frac{1}{2} \log 2 + \log K' + N \frac{1+\delta}{2} \right)} e^{\frac{2r}{(1+\delta)\varepsilon C}} \|f\|_{L^2(\omega)}^2, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{E}_N = \text{Span}_{\mathbb{C}} \{ \Phi_{\alpha} \}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$ . On observe la même croissance par rapport au paramètre  $N$  dans la constante ci-dessus et dans celle donnée par le Théorème 5.2.1.

Terminons à présent cette section en donnant des exemples de fonctions  $\Theta$ , qui définissent une suite  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  satisfaisant les hypothèses (H1), (H2) et (H3)<sub>s</sub> pour un certain  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ . On rappelle dans le cas  $s = 1$ , l'exemple suivant, déjà vu dans le Chapitre 4 :

**PROPOSITION 6.2.6** ([5], Alphonse & Martin). *Soient  $k \geq 1$  un entier strictement positif et  $\Theta_{k,1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction positive définie pour tout  $t \geq 0$  par*

$$\Theta_{k,1}(t) = \frac{t}{g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ k}(t)}, \quad \text{où } g(t) = \log(e + t),$$

avec  $g^{\circ k} = g \circ \dots \circ g$  ( $k$  compositions). La suite associée  $\mathcal{M}^{\Theta_{k,1}} = (M_p^{\Theta_{k,1}})_{p \in \mathbb{N}}$  définie en (6.2.3) est une suite quasi-analytique de nombres réels strictement positifs.

Remarquons que l'hypothèse (H2) est bien satisfaite puisque

$$\forall k \geq 1, \forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p^{\Theta_{k,1}} = \sup_{t \geq 0} t^p e^{-\Theta_{k,1}(t)} \geq \sup_{t \geq 0} t^p e^{-t} = \left(\frac{p}{e}\right)^p.$$

La Proposition 6.2.6 nous permet de construire les exemples suivants pour les cas  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  :

PROPOSITION 6.2.7. *Soient  $k \geq 1$  un entier strictement positif,  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  et  $\Theta_{k,s} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  la fonction positive définie pour tout  $t \geq 0$  par*

$$\Theta_{k,s}(t) = \frac{t^s}{g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ k}(t)}, \quad \text{où } g(t) = \log(e + t),$$

avec  $g^{\circ k} = g \circ \dots \circ g$  ( $k$  compositions). La suite associée  $\mathcal{M}^{\Theta_{k,s}} = (M_p^{\Theta_{k,s}})_{p \in \mathbb{N}}$  définie en (6.2.3) satisfait les hypothèses (H1), (H2) et (H3)<sub>s</sub>.

La démonstration de la Proposition 6.2.7 est donnée en Section 10.3.2.

### 6.3. Inégalités spectrales pour des fonctions propres d'opérateurs de Shubin anisotropes

Dans cette section, nous allons présenter de nouvelles inégalités spectrales pour les fonctions propres des opérateurs de Shubin anisotropes. Ce sont les opérateurs de la forme

$$\mathcal{H}_{k,m} = (-\Delta_x)^m + |x|^{2k}, \quad m, k \in \mathbb{N}^*,$$

où  $|\cdot|$  désigne la norme euclidienne, équipés des domaines

$$D(\mathcal{H}_{k,m}) = \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) : \mathcal{H}_{k,m}g \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Les opérateurs  $\mathcal{H}_{k,m}$  étant auto-adjoints et à résolvante compacte, ils admettent une base hilbertienne de vecteurs propres, notée  $(\psi_n^{k,m})_{n \in \mathbb{N}}$  de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , où  $\psi_n^{k,m}$  est associé à une valeur propre  $\lambda_n^{k,m} > 0$ . Dans le cas  $k = m = 1$ , il s'agit de l'oscillateur harmonique pour lequel nous avons déjà présenté des inégalités spectrales dans le cadre d'estimation de combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite à partir d'ensembles faiblement épais dans le Chapitre 5. Dans un cadre un peu plus général, Miller a établi des inégalités spectrales pour des fonctions propres de l'oscillateur anharmonique

$$\mathcal{H}_{k,1} = -\Delta_x + |x|^{2k}, \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

à partir de cônes :

THÉORÈME 6.3.1 ([54, Corollaire 1.6]). *Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout cône ouvert non vide*

$$\omega = \{x \in \mathbb{R}^d; |x| > r_0, x/|x| \in \Omega_0\},$$

où  $r_0 \geq 0$  et où  $\Omega_0$  est une partie ouverte de la sphère unité, il existe une constante positive  $C > 0$  telle que

$$\forall \lambda \geq 0, \forall g \in \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{k,1} \leq \lambda}(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \leq C e^{C\lambda^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})}} \int_{\omega} |g(x)|^2 dx.$$

Dans le cas de l'oscillateur harmonique (cas  $k = 1$ ), le résultat de Miller établit une croissance linéaire en  $\lambda$  dans le terme exponentiel. Ceci est cohérent avec les inégalités spectrales obtenues par Beauchard, Jaming et Pravda-Starov dans [11, Théorème 2.1] sous la condition géométrique

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} > 0,$$

satisfaite par les cônes définis dans le Théorème 6.3.1. Nous présentons dans cette section des inégalités spectrales à partir d'ensembles faiblement épais pour les opérateurs  $\mathcal{H}_{k,m}$  qui visent à généraliser le Théorème 6.3.1 et le résultat [11, Théorème 2.1] mentionné ci-dessus. Rappelons qu'un sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est dit  $\delta$ -faiblement épais, pour

$0 \leq \delta \leq 1$ , s'il existe une application continue et strictement positive  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  satisfaisant

$$(6.3.1) \quad \exists R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta,$$

telle que

$$(6.3.2) \quad \exists 0 < \gamma \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))|.$$

Pour deux entiers  $k, m \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons pour  $\lambda > 0$ , le sous-espace vectoriel de dimension finie

$$(6.3.3) \quad \mathcal{E}_\lambda^{k,m} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{k,m} \leq \lambda}(L^2(\mathbb{R}^d)),$$

où

$$(6.3.4) \quad \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \mathbb{1}_{\mathcal{H}_{k,m} \leq \lambda} g = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ \lambda_n^{k,m} \leq \lambda}} \langle g, \psi_n^{k,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \psi_n^{k,m}.$$

Il s'agit de l'espace vectoriel dont les éléments sont des combinaisons linéaires finies de fonctions propres de niveau d'énergie inférieur à  $\lambda$ . Si  $k = m = 1$  et  $N \in \mathbb{N}$ , l'espace  $\mathcal{E}_{2N+d}^{1,1}$  se réduit à  $\mathcal{E}_N$  l'espace vectoriel engendré par les fonctions de Hermite  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$ .

Dans le cadre général des opérateurs de Shubin anisotropes, nous sommes en mesure d'établir le résultat suivant :

**THÉORÈME 6.3.2.** *Soient  $k, m \geq 1$  des entiers strictement positifs et  $0 \leq \delta < 1$ . Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable.*

(i) *Si  $\omega$  est  $\delta$ -faiblement épais, alors il existe des constantes positives  $K = K(d, R, \delta) \geq 1$  et  $D = D(d, R, \delta, k, m) \geq 1$  telles que*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{D(1+\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{\delta}{k} + \frac{1}{m})})} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

où  $R > 0$  et  $0 < \gamma \leq 1$  sont des constantes définies par (6.3.1) et (6.3.2).

(ii) *Si  $\omega$  est 1-faiblement épais, alors il existe une constante  $K_{d,k,m}(\omega) \geq 1$  telle que*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K_{d,k,m}(\omega)^{1+\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

(iii) *Si  $\omega$  est de mesure de Lebesgue strictement positive  $|\omega| > 0$ , alors il existe une constante positive  $K_{d,k,m}(\omega) \geq 1$  telle que*

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K_{d,k,m}(\omega)^{1+\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})} |\log \lambda|} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

Le Théorème 6.3.2 établit une majoration quantitative de la quantité

$$C_\lambda^{k,m}(\omega) = \sup_{f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m} \setminus \{0\}} \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\|f\|_{L^2(\omega)}},$$

en fonction du niveau d'énergie  $\lambda$ . Cette borne supérieure dépend naturellement des entiers  $k, m$  et met en exergue le rôle du paramètre  $\delta$ , qui mesure la distribution de la masse de  $\omega$  à l'infini, dans la croissance du terme exponentielle dans le Théorème 6.3.2 en fonction du niveau d'énergie. Dans le cas où  $\omega$  est  $\delta$ -faiblement épais pour  $0 \leq \delta \leq 1$ , cette croissance fait notamment intervenir le ratio  $\frac{\delta}{k}$  qui met en avant une compétition entre le paramètre  $\delta$  et le paramètre  $k$  caractérisant la croissance du potentiel confinant  $|x|^{2k}$ . Dans le cas limite  $\delta = 1$ , cette croissance est régie par la quantité  $\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$  qui est strictement inférieure à 1 si et seulement si  $(k, m) \neq (1, 1)$ , c'est à dire, lorsque l'opérateur de Shubin considéré n'est pas l'oscillateur harmonique. D'autre part, lorsque l'ensemble  $\omega$  est seulement un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle, il est à noter que la croissance de la constante est comparable à la croissance établie pour le cas  $\delta = 1$ , seulement dégradée d'un facteur  $\log \lambda$ .

Soulignons le fait que ce résultat généralise les résultats connus concernant les inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite et les inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions propres des oscillateurs anharmoniques avec les mêmes croissances des quantités  $C_\lambda^{k,m}(\omega)$  en fonction du niveau d'énergie. En effet, lorsque  $k = m = 1$ , les résultats obtenus pour les combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite par Beauchard, Jaming et Pravda-Starov dans [11, Théorème 2.1] dans le cas où  $\omega$  est épais sont couverts ici par le cas  $\delta = 0$ , tandis que le cas  $\delta = 1$  permet de retrouver leurs résultats obtenus sous la condition géométrique

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B(0, R)|}{|B(0, R)|} > 0,$$

puisque cette condition géométrique correspond exactement aux ensembles 1-faiblement épais (voir Proposition 3.1.6). On observe également la même croissance par rapport au niveau d'énergie dans les estimations (1.2.2) et celles données par l'assertion (iii) dans le Théorème 6.3.2. Concernant les inégalités spectrales pour les oscillateurs anharmoniques obtenues par Miller (Théorème 6.3.1), les cônes à partir desquels l'auteur obtient des inégalités spectrales constituent des ensembles 1-faiblement épais et l'on retrouve la même croissance que dans le Théorème 6.3.1 avec le cas  $\delta = 1$ . Enfin, mentionnons que dans le travail [54], Miller conjecture que dans le cas des oscillateurs anharmoniques, il est peut-être possible d'établir des inégalités spectrales à partir d'ensembles bornés et d'obtenir une constante  $C_\lambda^{k,m}(\omega)$  avec une croissance exponentielle d'exposant  $\lambda^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{k})} \log \lambda$ . Le Théorème 6.3.2 répond positivement à cette question et montre que cette croissance est valable à partir de tout ensemble  $\omega$  de mesure strictement positive.

La démonstration du Théorème 6.3.2 est donnée en Section 10.4.2. Lorsque  $0 \leq \delta < 1$ , les inégalités spectrales sont déduites des principes d'incertitude donnés par le Théorème 6.2.2 combinés à des estimations de type Bernstein (voir Proposition 10.4.1). Dans les cas  $\delta = 1$  ou  $|\omega| > 0$ , la démonstration tire parti de ces mêmes estimations de type Bernstein et utilise la version multi-dimensionnelle du Théorème de Nazarov, Sodin et Volberg donnée par la Proposition 3.2.10.

#### 6.4. Applications à la contrôlabilité à zéro

Cette section a pour objet d'établir des résultats de contrôlabilité à zéro pour des équations d'évolution dont le système adjoint jouit d'effets régularisants dans des espaces de Gelfand-Shilov. Ces résultats seront obtenus comme conséquences des principes d'incertitude donnés par le Théorème 6.2.2 et des inégalités spectrales données par le Théorème 6.3.2.

Considérons un opérateur fermé  $A$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , et intéressons-nous au problème de contrôle associé

$$(6.4.1) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + Af(t, x) = u(t, x) \mathbf{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Nous supposons, de plus, que le semi-groupe adjoint  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$  généré par l'opérateur adjoint  $A^*$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , régularise dans un espace de Gelfand-Shilov en tout temps strictement positif, c'est à dire,

$$\forall t > 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad e^{-tA^*} f \in S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d),$$

pour des paramètres  $\mu, \nu > 0$  satisfaisant  $\mu + \nu \geq 1$ . Plus précisément, nous supposons que les estimations quantitatives suivantes sont vérifiées : il existe des constantes  $C \geq 1$ ,  $r_1 > 0$ ,  $r_2 \geq 0$ ,  $0 < t_0 \leq 1$  telles que

$$(6.4.2) \quad \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA^*} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{r_1(|\alpha|+|\beta|)+r_2}} (\alpha!)^\nu (\beta!)^\mu \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans un travail récent [2], Alphonse a étudié les effets régularisants des semi-groupes générés par des opérateurs de Shubin anisotropes. L'auteur a notamment établi dans [2, Corollaire 2.2] les estimations quantitatives suivantes pour les opérateurs de Shubin fractionnaires : pour tout  $k, m \geq 1$ ,  $s > 0$ , il existe des constantes positives  $C \geq 1$ ,  $r_1, r_2 > 0$ ,  $t_0 > 0$  telles que

$$\forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{r_1(|\alpha|+|\beta|)+r_2}} (\alpha!)^{\nu_{m,k,s}} (\beta!)^{\mu_{m,k,s}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec

$$\nu_{m,k,s} = \max\left(\frac{1}{2sk}, \frac{m}{k+m}\right) \quad \text{et} \quad \mu_{m,k,s} = \max\left(\frac{1}{2sm}, \frac{k}{k+m}\right).$$

En particulier, ces estimations mettent en exergue un indice critique

$$s_{k,m}^* = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{m} \right)$$

tel que pour  $s \leq s_{k,m}^*$ , les indices de régularité valent  $(\nu_{m,k,s}, \mu_{m,k,s}) = \left(\frac{1}{2sk}, \frac{1}{2sm}\right)$  et diminuent jusqu'à saturer et valoir  $(\nu_{m,k,s}, \mu_{m,k,s}) = \left(\frac{m}{k+m}, \frac{k}{k+m}\right)$  lorsque  $s \geq s_{k,m}^*$ . Grâce à ces effets régularisants et au résultat général de contrôlabilité à zéro pour les équations d'évolution dont le système adjoint régularise dans des espaces de Gelfand-Shilov symétriques donné par le Théorème 5.3.1, Alphonse a déduit dans [2, Théorème 2.8] une condition suffisante sur la croissance de la densité  $\rho$  pour assurer la contrôlabilité à zéro des équations d'évolution associées aux opérateurs de Shubin fractionnaires  $\mathcal{H}_{l,l}^s$ , avec  $l \geq 1$  et  $s > \frac{1}{2l}$ , en tout temps strictement positif et à partir de tout ensemble mesurable épais par rapport à  $\rho$ .

Dans cette section, nous généralisons ce résultat à des opérateurs de Shubin généraux  $\mathcal{H}_{k,m}$ , avec  $k, m \geq 1$ , et plus généralement, nous présentons des résultats de contrôlabilité à zéro pour des équations d'évolution dont le système adjoint jouit d'effets régularisants quantitatifs dans des espaces de Gelfand-Shilov  $S_\nu^\mu$ .

Le résultat suivant montre qu'une équation abstraite de la forme (6.4.1) est contrôlable à zéro dès que le paramètre  $\delta$  mesurant l'épaisseur faible du support de contrôle est strictement plus petit qu'un paramètre critique  $\delta^* = \frac{1-\mu}{\nu}$ .

**THÉORÈME 6.4.1.** *Soit  $(A, D(A))$  un opérateur fermé sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contraction fortement continu  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  dont l'opérateur adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  génère un semi-groupe satisfaisant les estimations quantitatives (6.4.2) pour des paramètres  $0 < \mu < 1$ ,  $\nu > 0$  tels que  $\mu + \nu \geq 1$ . Si  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble mesurable  $\delta$ -faiblement épais avec  $0 \leq \delta < \frac{1-\mu}{\nu}$ , alors l'équation d'évolution*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + Af(t, x) = u(t, x) \mathbf{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est contrôlable à zéro à partir du support de contrôle  $\omega$  à tout temps positif  $T > 0$ ; et de manière équivalente, le système adjoint

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + A^*g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est observable à partir du support de contrôle  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ . Plus précisément, il existe une constante positive  $K = K(d, \omega, \delta, \mu, \nu) \geq 1$  telle que

$$\forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall T > 0, \quad \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq K \exp\left(\frac{K}{T^{1-\mu-\delta\nu}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt,$$

où  $r_1 > 0$  est donnée par (6.4.2).

La démonstration du Théorème 6.4.1 est donnée en Section 10.5.1. Elle est déduite des principes d'incertitude donnés par le Théorème 6.2.2 en revisitant l'argument des sommes

téléscopiques issu de la méthode de Lebeau-Robbiano ([12, Section 8.3]); et s'inspire du travail de Miller [55]. Contrairement à la preuve du Théorème 5.3.1, où nous tirons avantage de la caractérisation des espaces de Gelfand-Shilov symétriques à travers les décompositions selon la base de Hermite, la démonstration proposée en Section 10.5.1 ne se fonde pas sur une caractérisation similaire des espaces de Gelfand-Shilov généraux à travers des décompositions selon la base des vecteurs propres d'un certain opérateur. Les arguments de cette démonstration se veulent plus directs et le résultat du Théorème 6.4.1 apparaît comme une conséquence des estimations quantitatives (6.4.2).

Le paramètre de croissance critique  $\delta^* = \frac{1-\mu}{\nu}$  permet de comprendre les rôles respectifs des indices  $\mu$  et  $\nu$  qui caractérisent respectivement la régularité et la décroissance en espace des fonctions de l'espace  $S_{\nu}^{\mu}$ . Il est attendu que plus les solutions du système adjoint sont décroissantes, ce qui se caractérise par la petitesse du paramètre  $\nu$ , plus cet indice critique est proche de 1 et permet au support de contrôle de se distribuer moins fortement au voisinage de l'infini. Il est intéressant de remarquer que le paramètre  $\mu$ , qui régit la régularité, peut compenser le paramètre  $\nu$  lorsque celui-ci est proche de 1. En effet, par exemple, les choix d'indices  $(\mu, \nu) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  et  $(\mu, \nu) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  sont associés au même paramètre critiques  $\delta^* = 1$ . De manière générale, cette croissance critique vaut 1 dès que les indices  $\mu > 0$  et  $\nu > 0$  satisfont  $\mu + \nu = 1$ . Dans le cas symétrique, lorsque le couple d'indices caractérisant l'espace de Gelfand-Shilov est donné par  $(\mu, \nu) = (\frac{1}{2s}, \frac{1}{2s})$ , avec  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ , le paramètre de croissance critique prend la forme  $\delta^* = 2s - 1$ , et on retrouve le résultat donné par le Théorème 5.3.1.

Comme mentionné plus haut, les opérateurs de Shubin  $\mathcal{H}_{k,m}$  sont auto-adjoints et génèrent un semi-groupe fortement continu sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  qui jouit d'effets régularisants quantitatifs du type (6.4.2). En conséquence, le Théorème 6.4.1 peut être directement appliqué pour obtenir les résultats de contrôlabilité à zéro suivants :

COROLLAIRE 6.4.2. *Soient  $m, k \geq 1$  des entiers,  $s > \frac{1}{2m}$  et*

$$\delta_{k,m,s}^* := \begin{cases} 1 & \text{si } s \geq s_{k,m}^*, \\ \frac{k}{m}(2sm - 1) & \text{si } \frac{1}{2m} < s \leq s_{k,m}^*. \end{cases}$$

*Si  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  est un sous-ensemble mesurable  $\delta$ -faiblement épais, avec  $0 \leq \delta < \delta_{k,m,s}^*$ , alors l'équation d'évolution associée à l'opérateur de Shubin fractionnaire*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + \mathcal{H}_{k,m}^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_{\omega}(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

*est contrôlable à zéro à partir de  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .*

Dans le cas de l'oscillateur harmonique,  $k = m = 1$ , les indices critiques valent  $s_{1,1}^* = 1$  et  $\delta_{1,1,s}^* = 2s - 1$  pour  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ , et on retrouve les résultats de contrôlabilité donnés par le Théorème 5.3.2. Ce résultat montre que plus l'indice  $\frac{1}{2m} < s \leq s_{k,m}^*$  est proche de l'indice critique, moins le support de contrôle est contraint. En revanche, passé cet indice critique, le résultat du corollaire précédent ne permet plus de relaxer l'hypothèse sur le support de contrôle. Les inégalités spectrales énoncées dans le Théorème 6.3.2 permettent de compléter ce résultat dans le cas  $s > s_{k,m}^*$  :

THÉORÈME 6.4.3. *Soient  $k, m \geq 1$  des entiers et  $s > \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ . Soit  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  un sous-ensemble mesurable de mesure strictement positive  $|\omega| > 0$ . L'équation d'évolution*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + \mathcal{H}_{k,m}^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_{\omega}(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

*est contrôlable à zéro à partir du support de contrôle  $\omega$  en tout temps strictement positif  $T > 0$ .*

Le Théorème 6.4.3 montre que les équations d'évolution associées aux opérateurs de Shubin fractionnaires  $\mathcal{H}_{k,m}^s$  sont toujours contrôlable à zéro dès que  $\omega$  est de mesure de Lebesgue non nulle et que le paramètre  $s$  est strictement supérieur à l'indice critique  $s_{k,m}^* = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ . En particulier, lorsque le couple  $(k, m) \neq (1, 1)$ , alors  $0 \leq s_{k,m}^* < 1$  et l'équation d'évolution associée à  $\mathcal{H}_{k,m}$  est contrôlable à zéro à partir de tout support de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  de mesure strictement positive en tout temps strictement positif. L'oscillateur harmonique est donc le seul opérateur de Shubin dont l'équation d'évolution associée n'est pas contrôlable à partir d'ensembles bornés. Néanmoins, comme dans ce cas l'indice critique vaut exactement 1, cela nous permet de retrouver un résultat dû à Paul Alphonse ([2, Théorème 2.9]) qui assure que les équations d'évolution associées à un oscillateur harmonique fractionnaire  $\mathcal{H}^s$ , avec  $s > 1$ , sont contrôlables à zéro à partir de tout support de contrôle de mesure de Lebesgue strictement positive en tout temps strictement positif.

La démonstration du Théorème 6.4.3 est donnée en Section 10.5.2. Elle est une conséquence des inégalités spectrales données par le Théorème 6.3.2 et de la stratégie de Lebeau-Robbiano (Théorème 2.2.1).





## Contrôle des équations de Schrödinger

RÉSUMÉ. Ce chapitre est consacré à la contrôlabilité des équations de Schrödinger et présente les résultats obtenus dans l'article [52] écrit en collaboration avec Karel Pravda-Starov. Les résultats principaux fournissent des conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité des équations de Schrödinger libres et harmoniques fractionnaires en dimension 1. Le cas des dimensions supérieures est aussi discuté. Ce chapitre est un peu singulier puisque contrairement au reste du manuscrit, les équations considérées ici ne sont pas paraboliques. De ce fait, les preuves des résultats diffèrent de celles des autres chapitres et ne peuvent tirer parti de la régularité des solutions des équations d'évolution.

### 7.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous établissons des conditions géométriques pour la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger libres fractionnaires

$$(7.1.1) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x)^s f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

et des équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires

$$(7.1.2) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x + |x|^2)^s f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $s > 0$ . Nous allons voir que les ensembles (faiblement) épais jouent également un rôle important dans le contrôle de ces équations. D'après la Proposition 2.1.5 de la Section 2.1.2, la contrôlabilité exacte de ces équations est équivalente à l'observabilité exacte de leur système adjoint. Notre point de départ pour aborder ce problème de contrôle a donc été d'établir des inégalités d'observabilité exacte en utilisant la caractérisation suivante due à Luc Miller :

PROPOSITION 7.1.1 (Miller [56, Corollaire 2.17]). *Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , qui est le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continu  $(e^{itA})_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Si l'équation d'évolution*

$$(7.1.3) \quad \begin{cases} \partial_t g(t, x) + iAg(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

*est exactement observable à partir de l'ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  à un temps  $T > 0$  alors il existe des constantes strictement positives  $r > 0$  et  $D > 0$  telles que*

$$(7.1.4) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbb{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(L^2(\mathbb{R}^d)), \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{r}\|f\|_{L^2(\omega)}.$$

*Réciproquement, lorsque les estimations spectrales (7.1.4) sont vérifiées pour des constantes  $r > 0$  et  $D > 0$ , alors le système (7.1.3) est exactement observable à partir de  $\omega$  en tout temps*

$$T > \pi \sqrt{\frac{1+r}{D}}.$$

Ce résultat stipule que l'observabilité exacte du système (7.1.3) est équivalente aux inégalités spectrales (7.1.4). Il est important de remarquer que ce résultat établit une condition nécessaire et suffisante d'observabilité exacte contrairement au résultat abstrait

d'observabilité du Théorème 2.2.1 qui donne seulement des conditions suffisantes. Les estimations spectrales demandées dans le Théorème 2.2.1 et dans la Proposition 7.1.1 sont également de natures différentes. Dans les inégalités spectrales (2.2.1) du Théorème 2.2.1, la constante dépend du niveau d'énergie  $k$  contrairement à la Proposition 7.1.1 où il est crucial que la constante  $r$  apparaissant dans les inégalités spectrales (7.1.4) ne dépendent pas du niveau d'énergie  $\lambda$ . Enfin, une autre différence majeure est que le Théorème 2.2.1 fournit un résultat d'observabilité en tout temps  $T > 0$  arbitrairement petit à l'inverse de la Proposition 7.1.1 qui fournit un temps seuil à partir duquel l'observabilité exacte est vérifiée.

Lorsque l'opérateur  $A$  associé à l'équation d'évolution (7.1.3) est à résolvante compact, le résultat de Proposition 7.1.1 se réécrit comme une version du test de Hautus en dimension infinie (voir également [66, Section 6.9]) :

**PROPOSITION 7.1.2** (Miller [56, Corollaire 2.18]). *Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , qui est le générateur infinitésimal d'un groupe fortement continu  $(e^{itA})_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . Lorsque l'opérateur  $A$  est à résolvante compacte admettant un trou spectral  $\gamma > 0$  dans le sens suivant :*

$$|\lambda - \mu| \geq \gamma \quad \text{pour toutes valeurs propres distinctes } \lambda \text{ et } \mu,$$

*l'équation d'évolution (7.1.3) est exactement observable à au moins un temps  $T > 0$  à partir de l'ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  si et seulement si*

$$(7.1.5) \quad \exists \delta > 0, \quad \text{pour tout vecteur propre } \psi \text{ de } A, \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta \|\psi\|_{L^2(\omega)}.$$

*De plus, si les estimations (7.1.5) sont valides, l'équation d'évolution (7.1.3) est exactement observable à partir de  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  en tout temps  $T > \pi \frac{\sqrt{1+\delta^2}}{\gamma}$ .*

Lorsque l'hypothèse de trou spectral est satisfaite, il résulte de la Proposition 7.1.2 que l'observabilité exacte de l'équation d'évolution (7.1.3) est seulement caractérisée par des propriétés des vecteurs propres de l'opérateur  $A$ .

## 7.2. Contrôlabilité des équations de Schrödinger libres fractionnaires

Cette section présente les résultats de contrôlabilité exacte pour les équations de Schrödinger libres fractionnaires

$$\begin{cases} (\partial_t - i(-\Delta_x)^s)f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

avec  $s > 0$ , à partir d'un ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ . Les démonstrations des résultats de cette section consistent à établir l'observabilité exacte du système

$$(7.2.1) \quad \begin{cases} (\partial_t + i(-\Delta_x)^s)g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

en appliquant la Proposition 7.1.1. Rappelons que pour  $s > 0$ , l'opérateur  $i(-\Delta_x)^s$  génère un groupe fortement continu  $(e^{it(-\Delta_x)^s})_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  explicitement donné par

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall t \in \mathbb{R}, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(e^{it(-\Delta_x)^s} f)(\xi) = e^{it|\xi|^{2s}} \hat{f}(\xi).$$

Lorsque  $A = (-\Delta_x)^s$ , la famille d'opérateur  $(\mathbb{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}})_{\lambda \in \mathbb{R}}$  qui apparaît dans la Proposition 7.1.1 est donnée par une famille d'opérateurs coupe-fréquences où pour tout  $D > 0$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbb{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(L^2(\mathbb{R}^d)) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d, ||\xi|^{2s} - \lambda| \leq \sqrt{D}\} \right\}.$$

Il résulte de cette remarque que le problème de l'observabilité exacte du système (7.2.1) se ramène à un problème de paires annulantes (voir Définition 1.1.1 du Chapitre 1). Il s'agit

de déterminer les ensembles  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  dont le complémentaire  $S := \mathbb{R}^d \setminus \omega$  forme une paire fortement annulante avec tous les ensembles

$$\Sigma_\lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^d, \|\xi\|^{2s} - \lambda \leq \sqrt{D}\}, \quad \lambda > 0,$$

et tels que la constante  $D(S, \Sigma_\lambda) > 0$  qui apparaît dans les inégalités (1.1.4) peut être prise indépendante de  $\lambda$ . Le premier résultat montre que l'épaisseur est une condition géométrique nécessaire pour la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger libres fractionnaires en toute dimension :

**THÉORÈME 7.2.1.** *Soit  $s > 0$ ,  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  et  $T > 0$ . Si l'équation de Schrödinger libre fractionnaire (7.1.1) est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  à un certain temps  $T > 0$ , alors le sous-ensemble de contrôle  $\omega$  est épais.*

**DÉMONSTRATION.** Les hypothèses du Théorème 7.2.1 impliquent que le système (7.2.1) est exactement observable à partir de  $\omega$  à un temps  $T > 0$ . On déduit de la Proposition 7.1.1 qu'il existe des constantes strictement positives  $r > 0$  et  $D > 0$  telles que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(7.2.2) \quad \text{supp } \widehat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : \|\xi\|^{2s} - \lambda \leq \sqrt{D}\} \implies \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{r} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

En prenant  $\lambda = 0$ , les estimations (7.2.2) impliquent en particulier que les ensembles  $\mathbb{R}^d \setminus \omega$  et la boule euclidienne  $B_d(0, D^{\frac{1}{4s}})$  dans  $\mathbb{R}^d$  forment une paire fortement annulante. Puisque  $B_d(0, D^{\frac{1}{4s}})$  est un ensemble borné, le Théorème de Logvinenko-Sereda (Théorème 1.1.5) assure que l'ensemble de contrôle  $\omega$  est épais.  $\square$

Dans le cas de la dimension 1, l'épaisseur est une condition géométrique suffisante pour contrôler l'équation de Schrödinger libre fractionnaire (7.1.1) lorsque  $s \geq \frac{1}{2}$ .

**THÉORÈME 7.2.2.** *Si  $s \geq \frac{1}{2}$  et  $\omega$  est un sous-ensemble épais de  $\mathbb{R}$ , alors il existe un temps positif  $T_0 > 0$  tel que pour tout temps  $T > T_0$ , l'équation de Schrödinger libre fractionnaire (7.1.1) est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  au temps  $T$ .*

La démonstration du Théorème 7.2.2 est donnée en Section 11.1. Elle s'appuie sur une version plus générale du Théorème 8.1.2 établie par Kovrijkine dans [42]. Nous déduisons des Théorèmes 7.2.1 et 7.2.2 que l'épaisseur est une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité exacte en dimension 1 :

**COROLLAIRE 7.2.3.** *Soient  $s \geq \frac{1}{2}$  et  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$ . L'équation de Schrödinger libre fractionnaire en dimension 1,*

$$\begin{cases} (\partial_t - i(-\Delta_x)^s) f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

*est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est épais.*

Mentionnons le travail [35] dans lequel les auteurs ont établi la même condition géométrique nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger libre en dimension 1 dans le cas non-fractionnaire  $s = 1$ . La preuve donnée dans [35] est cependant différente et exploite des calculs explicites de transformée de Fourier de gaussiennes qui ne peuvent pas directement être utilisés dans le cas fractionnaire.

Il est intéressant de souligner que la condition géométrique nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger libre est la même que celle pour la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur  $E_{-\Delta}$ , bien que ces deux équations aient des comportements très différents. Comme expliqué dans la Section 2.3.1 du Chapitre 2, la condition d'épaisseur est aussi nécessaire et suffisante pour la contrôlabilité à zéro des équations de la chaleur fractionnaires  $E_{(-\Delta)^s}$ , comme l'ont établi Alphonse et Bernier [4, Remarque 1.13], lorsque  $s > \frac{1}{2}$ . Notons toutefois une différence lorsque  $s = \frac{1}{2}$ . L'équation de

Schrödinger libre fractionnaire associée à ce paramètre est exactement contrôlable à partir des ensembles épais contrairement à l'équation de la demi-chaleur  $E_{(-\Delta)^{1/2}}$  en dimension 1 qui n'est pas contrôlable à zéro dès que l'ensemble de contrôle n'est pas dense, comme le stipule le Théorème 2.3.2 démontré par Koenig dans [40].

Dans le cas de la dimension 1, en utilisant le résultat de Koenig (Théorème 2.3.2) qui établit un résultat négatif de contrôlabilité à zéro des équations de la chaleur fractionnaires  $E_{(-\Delta)^s}$ , avec  $0 < s \leq \frac{1}{2}$ , à partir de support de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}$  non dense dans  $\mathbb{R}$ , il est possible d'obtenir un résultat négatif de contrôlabilité exacte pour les équations de Schrödinger libres fractionnaires associées au paramètre  $0 < s < \frac{1}{2}$ , en le combinant au résultat suivant dû à Duyckaerts et Miller :

PROPOSITION 7.2.4 ([21, Corollaire 2]). *Soit un  $A$  un opérateur auto-adjoint positif et  $\gamma > 1$  un paramètre. Si l'équation de Schrödinger (7.1.3) associée à  $A$  est exactement observable à un certain temps  $T_0 > 0$  à partir du support de contrôle  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ , l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + A^\gamma g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

*associé à l'opérateur  $A^\gamma$  est observable à tout temps positif à partir du même support de contrôle.*

Le résultat suivant est une conséquence directe du Théorème 2.3.2 et de la Proposition 7.2.4 :

COROLLAIRE 7.2.5. *Soient  $0 < s < \frac{1}{2}$  et  $\omega \subset \mathbb{R}$  un sous-ensemble mesurable. Si l'équation de Schrödinger libre fractionnaire*

$$\begin{cases} (\partial_t - i(-\Delta_x)^s)f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

*est exactement contrôlable à un certain temps  $T > 0$  à partir de  $\omega$ , alors  $\omega$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .*

Concernant la dimension supérieure, il est possible de donner une condition suffisante, grâce au travail [29], dans lequel Green, Jaye et Mitkovski établissent de nouveaux principes d'incertitude. Leurs résultats peuvent être vus comme une généralisation du Théorème de Logvinenko-Sereda et de sa version quantitative donnée par Kovrijkine. Ils établissent en particulier le principe d'incertitude suivant :

THÉORÈME 7.2.6 (Green, Jaye & Mitkovski [29, Corollaire 3]). *Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  satisfaisant la condition géométrique suivante : il existe des constantes positives  $L > 0$  et  $0 < \gamma \leq 1$  telles que pour toute droite  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  et tout segment  $S \subset \mathcal{D}$  de longueur  $L$ ,*

$$\mathcal{H}(S \cap \omega) \geq \gamma L,$$

*où  $\mathcal{H}$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{D}$ . Alors, pour tous  $\delta > 0$ ,  $\beta > 0$ , il existe une constante strictement positive  $C > 0$  telle que pour tout  $R > 0$  et  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d : R - \beta \leq |\xi| \leq R + \beta\} \implies \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{L^2(\mathcal{U}_\delta(\omega))},$$

*où  $\mathcal{U}_\delta(\omega)$  désigne le  $\delta$ -voisinage de  $\omega$  défini par  $\mathcal{U}_\delta(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d : d(x, \omega) < \delta\}$ .*

Ce résultat associé à la Proposition 7.1.1 et la méthode d'unicité de Hilbert permettent de déduire la condition géométrique suivante sur l'ensemble de contrôle  $\omega$  pour assurer la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger libres fractionnaires (7.1.1) :

PROPOSITION 7.2.7. *Soient  $d \geq 1$ ,  $s \geq \frac{1}{2}$  et  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  tel qu'il existe des constantes strictement positives  $L > 0$  et  $0 < \gamma \leq 1$  telles que pour toute droite  $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  et pour tout segment  $S \subset \mathcal{D}$  de longueur  $L$ ,*

$$(7.2.3) \quad \mathcal{H}(S \cap \omega) \geq \gamma L,$$

où  $\mathcal{H}$  désigne la mesure de Lebesgue de  $\mathcal{D}$ . Alors, pour tout  $\delta > 0$ , il existe un temps  $T_0 > 0$  tel que l'équation de Schrödinger libre fractionnaire

$$\begin{cases} (\partial_t - i(-\Delta_x)^s)f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_{\mathcal{U}_\delta(\omega)}(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est exactement contrôlable à partir de  $\mathcal{U}_\delta(\omega)$  en tout temps  $T \geq T_0$ .

Remarquons que tout sous-ensemble mesurable  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  satisfaisant la condition (7.2.3) est épais au sens de la Définition 1.1.3. Cette condition demande, en un sens, de l'épaisseur dans toutes les directions de l'espace. La condition (7.2.3) est donc plus forte que la condition d'épaisseur.

### 7.3. Contrôle des équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires

Nous nous intéressons à présent à la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x + |x|^2)^s f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

où  $s > 0$ . Comme dans la section précédente, l'étude consiste à établir des inégalités d'observabilité exacte sur le système adjoint

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + i(-\Delta_x + |x|^2)^s g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d). \end{cases}$$

Rappelons que l'oscillateur harmonique

$$\mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2$$

satisfait la condition de trou spectral requise dans la Proposition 7.1.2. Il en est de même pour les oscillateurs harmoniques fractionnaires  $\mathcal{H}^s$ , avec  $s \geq 1$ , puisque les spectres de ces opérateurs sont donnés par

$$\sigma((-\Delta_x + |x|^2)^s) = \{(2n + d)^s : n \in \mathbb{N}\}.$$

Pour  $s > 0$ , l'oscillateur harmonique fractionnaire génère un groupe fortement continu  $(e^{it\mathcal{H}^s})_{t \in \mathbb{R}}$  sur  $L^2(\mathbb{R}^d)$  explicitement donné par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad e^{it\mathcal{H}^s} f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{it(2|\alpha| + d)^s} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha.$$

Afin d'appliquer la Proposition 7.1.2, la stratégie consiste à établir des inégalités spectrales sur les fonctions de Hermite, qui sont connues pour former une base hilbertienne de vecteurs propres de l'oscillateur harmonique. Lorsque la dimension vaut 1, nous avons été en mesure d'établir la proposition suivante :

**PROPOSITION 7.3.1.** *Soit  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  et  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  la base de Hermite sur  $L^2(\mathbb{R})$  définie en Section E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} > 0,$
- (ii)  $\exists c > 0, \forall n \geq 0, \quad 1 = \|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \|\phi_n\|_{L^2(\omega)},$
- (iii)  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega)} > 0.$

Cette proposition fournit une condition nécessaire et suffisante sur  $\omega$  pour assurer des estimations du type (7.1.5) pour la base de Hermite. La démonstration repose sur une formule asymptotique due à Plancherel et Rotach (voir (11.2.4)). La Proposition 7.3.1 est à rapprocher des estimations (1.2.4) établies par les auteurs de [11] qui fournissent des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite sous la même condition géométrique sur  $\omega$ . Contrairement à (1.2.4), il s'agit ici uniquement d'établir des estimations sur les fonctions de Hermite et non d'estimer des combinaisons

linéaires finies de ces fonctions. En contre partie, on demande à ce que la constante  $c > 0$  dans le point (ii) ne dépende pas du niveau d'énergie  $n$ , ce qui est fondamental pour pouvoir appliquer la Proposition 7.1.2. Cette proposition nous permet d'en déduire le résultat de contrôle suivant :

**THÉORÈME 7.3.2.** *Soient  $s \geq 1$  et  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *L'équation de Schrödinger harmonique fractionnaire*

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x + x^2)^s f(t, x) = u(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

*est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  en un certain temps  $T > 0$ ,*

(ii) *L'ensemble de contrôle vérifie la condition géométrique suivante*

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} > 0.$$

*Lorsque l'une des deux conditions est satisfaite dans le cas non-fractionnaire  $s = 1$ , alors l'équation de Schrödinger harmonique est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  au temps  $T = \pi$ .*

Le Théorème 7.3.2 donne une condition géométrique nécessaire et suffisante de contrôlabilité exacte pour l'équation de Schrödinger harmonique. Cette condition assure par exemple que l'équation de Schrödinger harmonique est exactement contrôlable à partir de l'ensemble de contrôle  $\omega = \mathbb{R}_+$ , ce qui n'est pas le cas de son homologue parabolique, à savoir l'équation de la chaleur harmonique, comme le stipule le Théorème 2.3.3. Grâce à la Proposition 3.1.6, nous pouvons réinterpréter cette condition en terme d'épaisseur faible : l'équation de Schrödinger harmonique est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  si et seulement si  $\omega$  est 1-faiblement épais.

Dans l'article [35], les auteurs ont établi la même condition géométrique nécessaire et suffisante pour le contrôle de l'équation de Schrödinger harmonique non fractionnaire en donnant une démonstration différente. Plus généralement, ils ont montré que la même condition géométrique était nécessaire et suffisante à la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger associées à l'opérateur  $P = -\Delta_x + V(x)$ , avec  $V(x) = x^{2m}$ , lorsque  $m \geq 1$ . Néanmoins, aucun résultat de contrôlabilité dans les cas fractionnaires n'est donné dans le travail [35] et les résultats valables en dimensions supérieures présentés dans la suite de cette section ne sont pas couverts par les résultats de [35].

La preuve du Théorème 7.3.2 est une application directe des Propositions 7.1.2 et 7.3.1, en remarquant qu'en dimension 1, les niveaux d'énergie associés à l'oscillateur harmonique ne sont pas dégénérés : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , l'espace propre associé à la valeur propre  $2n + 1$  est l'espace vectoriel de dimension 1 engendré par la  $n$ -ième fonction de Hermite  $\phi_n$ . Vérifions maintenant que lorsque l'équation de Schrödinger harmonique non fractionnaire est exactement contrôlable à un certain temps  $T_0 > 0$  alors elle l'est au temps  $T = \pi$ . Pour cela, nous remarquons que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2,$$

est  $\pi$ -périodique puisque

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \forall f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad e^{-i(t+\pi)(-\Delta_x + x^2)} f_0 &= \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-i(t+\pi)(2n+1)} \langle f_0, \phi_n \rangle_{L^2(\mathbb{R})} \phi_n \\ &= -e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0. \end{aligned}$$

Rappelons que la contrôlabilité exacte à un temps  $T_0 > 0$  est équivalente à l'observabilité exacte de l'équation d'évolution

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + i(-\Delta_x + x^2)f(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \end{cases}$$

au temps  $T_0 > 0$ , c'est à dire,

$$\exists C_{T_0} > 0, \forall f_0 \in L^2(\mathbb{R}), \quad \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq C_{T_0} \int_0^{T_0} \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

La propriété de  $\pi$ -périodicité implique directement l'observabilité exacte et donc, la contrôlabilité exacte, au temps  $T = \pi$ , puisque pour tout  $f_0 \in L^2(\mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &\leq C_{T_0} \int_0^{T_0} \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt \leq C_{T_0} \int_0^{(\lfloor \frac{T_0}{\pi} \rfloor + 1)\pi} \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt \\ &\leq C_{T_0} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T_0}{\pi} \rfloor} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt \leq C_{T_0} \left( \lfloor \frac{T_0}{\pi} \rfloor + 1 \right) \int_0^\pi \|e^{-it(-\Delta_x + x^2)} f_0\|_{L^2(\omega)}^2 dt, \end{aligned}$$

où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la fonction *partie entière*.

En dimension supérieure  $d \geq 2$ , il est naturel de se demander si la condition géométrique

$$(7.3.1) \quad \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap B_d(0, R)|}{|B_d(0, R)|} > 0,$$

où  $B_d(0, R)$  désigne la boule euclidienne de  $\mathbb{R}^d$  centrée en 0 et de rayon  $R$ , est suffisante pour assurer la contrôlabilité exacte. En dimension 2, cette condition est notamment satisfaite par des cônes de la forme

$$(7.3.2) \quad \omega_\delta = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in \mathbb{R}, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

avec  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ .

Le résultat suivant montre que la condition (7.3.1) n'est pas suffisante pour la contrôlabilité exacte de l'équation de Schrödinger harmonique posée sur  $\mathbb{R}^d$  en donnant une condition géométrique nécessaire plus forte. En particulier, en dimension 2, l'équation de Schrödinger harmonique ne peut pas être contrôlée à partir d'un cône (7.3.2), avec  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$  puisque l'ensemble  $\omega_\delta$  ne satisfait pas la condition géométrique suivante

$$\liminf_{R_1 \rightarrow +\infty} \liminf_{R_2 \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]|}{|[-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]|} > 0,$$

qui est nécessaire d'après le résultat suivant :

**THÉORÈME 7.3.3.** *Soient  $s \geq 1$  et  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \geq 1$ . Si l'équation de Schrödinger harmonique fractionnaire*

$$(7.3.3) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x + |x|^2)^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

*est exactement contrôlable à partir de  $\omega$  en un certain temps strictement positif  $T > 0$ , alors l'ensemble de contrôle  $\omega$  doit satisfaire la condition géométrique suivante :*

$$(7.3.4) \quad \forall A \in O(\mathbb{R}^d), \quad \liminf_{R_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{R_d \rightarrow +\infty} \frac{|A(\omega) \cap [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|}{|[-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|} > 0,$$

où  $O(\mathbb{R}^d)$  désigne le groupe orthogonal en dimension  $d$ .

Ce résultat montre que la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires demande à l'ensemble de contrôle d'être distribué dans toutes les directions de l'espace. En particulier, l'équation de Schrödinger harmonique en dimension 2 n'est pas exactement contrôlable si le contrôle est supporté dans le cône  $\omega_\delta$ , pour une certaine valeur du paramètre  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ . En effet, si  $\omega$  est contenu dans  $\omega_\delta$  alors l'estimation suivante est valable pour tous  $R_1, R_2 > 0$ ,

$$\begin{aligned} &|\omega \cap [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]| \\ &\leq \left| \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in \mathbb{R}, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta, |r \cos \theta| \leq R_1 \right\} \right| \leq 2R_1^2 \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right). \end{aligned}$$



Puisque la majoration ci-dessus est indépendante de  $R_2 > 0$ , nous avons pour tout  $R_1 > 0$ ,

$$\liminf_{R_2 \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R_1, R_1] \times [-R_2, R_2]|}{R_1 R_2} = 0.$$

La démonstration du Théorème 7.3.3 est donnée en Section 11.2.2. Le caractère suffisant de la condition (7.3.4) pour la contrôlabilité exacte est une question ouverte en dimension  $d \geq 2$ . En dimension supérieure, la condition de trou spectral est toujours vérifiée par les oscillateurs harmoniques fractionnaires  $(-\Delta_x + |x|^2)^s$ , avec  $s \geq 1$ , puisque leurs spectres sont donnés par

$$\sigma((-\Delta_x + |x|^2)^s) = \{(2n + d)^s : n \in \mathbb{N}\}.$$

La difficulté pour obtenir une condition géométrique suffisante de contrôlabilité exacte réside dans le fait que les valeurs propres sont dégénérées en dimension  $d \geq 2$ . De ce fait, pour appliquer la Proposition 7.1.2, il faut être en mesure d'estimer les normes  $L^2(\mathbb{R}^d)$  de fonctions de la forme

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| = N}} C_\alpha \Phi_\alpha,$$

où  $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = N}$  est une famille de nombres complexes, puisqu'il s'agit de la forme générale des fonctions du niveau d'énergie  $2N + d$ .

On peut néanmoins fournir des exemples de supports de contrôle en dimension  $d \geq 2$  à partir desquels il est possible de contrôler les équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires en utilisant le Théorème 7.3.2 :

EXEMPLE 7.3.4. Soient  $d \geq 1$ ,  $s \geq 1$  et  $\omega$  un sous-ensemble mesurable de  $\mathbb{R}$  satisfaisant

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} > 0.$$

L'équation d'évolution

$$(7.3.5) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) - i(-\Delta_x + |x|^2)^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_{\omega \times \mathbb{R}^{d-1}}(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est exactement contrôlable à partir de  $\omega \times \mathbb{R}^{d-1}$  en un certain temps strictement positif  $T > 0$ .

DÉMONSTRATION. Cet exemple est une conséquence directe des Propositions 7.1.2 et 7.3.1. Soient un entier  $N \in \mathbb{N}$  et  $f$  un vecteur propre de  $(-\Delta_x + |x|^2)^s$  associé à la valeur propre  $(2N + d)^s$ . Un tel vecteur propre s'écrit de manière générale sous la forme

$$f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| = N}} C_\alpha \Phi_\alpha,$$

où  $(C_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| = N}$  est une famille de nombres complexes. Rappelons que

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^d \phi_{\alpha_i}(x_i),$$

pour tout  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\alpha_1, \alpha')$   $\in \mathbb{N}^d$  et pour tout  $x = (x_1, \dots, x_d) = (x_1, x') \in \mathbb{R}^d$ . On a, en intégrant d'abord selon  $x' \in \mathbb{R}^{d-1}$  puis selon  $x_1 \in \omega$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\omega \times \mathbb{R}^{d-1})}^2 &= \int_{\omega} \left( \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=N}} C_{\alpha} \Phi_{\alpha}(x_1, x') \right|^2 dx' \right) dx_1 \\ &= \int_{\omega} \left( \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left| \sum_{\substack{\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1} \\ |\alpha'| \leq N}} C_{N-|\alpha'|, \alpha'} \phi_{N-|\alpha'|}(x_1) \Phi_{\alpha'}(x') \right|^2 dx' \right) dx_1 \\ &= \int_{\omega} \sum_{\substack{\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1} \\ |\alpha'| \leq N}} |C_{N-|\alpha'|, \alpha'}|^2 |\phi_{N-|\alpha'|}(x_1)|^2 dx_1 = \sum_{\substack{\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1} \\ |\alpha'| \leq N}} |C_{N-|\alpha'|, \alpha'}|^2 \|\phi_{N-|\alpha'}\|_{L^2(\omega)}^2. \end{aligned}$$

Comme  $\omega$  satisfait l'assertion (i) dans la Proposition 7.3.1, cette même proposition donne

$$\exists c > 0, \forall k \geq 0, \quad 1 = \|\phi_k\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \|\phi_k\|_{L^2(\omega)}.$$

Il s'ensuit

$$(7.3.6) \quad \|f\|_{L^2(\omega \times \mathbb{R}^{d-1})}^2 \geq \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{\alpha' \in \mathbb{N}^{d-1} \\ |\alpha'| \leq N}} |C_{N-|\alpha'|, \alpha'}|^2 = \frac{1}{c^2} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha|=N}} |C_{\alpha}|^2 = \frac{1}{c^2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Comme l'opérateur  $(-\Delta_x + |x|^2)^s$  satisfait la condition de trou spectral, la Proposition 7.1.2 permet de déduire de (7.3.6) que le système adjoint

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + i(-\Delta_x + |x|^2)^s g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

est exactement observable. Ceci assure la contrôlabilité exacte de l'équation d'évolution (7.3.5).  $\square$

On déduit de l'exemple ci-dessus que les équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires sont exactement contrôlables à partir d'un demi-espace de la forme  $[a, +\infty) \times \mathbb{R}^{d-1}$ . Considérons un demi-cône

$$\tilde{\omega}_{\delta} = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta) : r \in \mathbb{R}_+, |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \delta \right\} \subset \mathbb{R}^2,$$

avec  $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ . Lorsque  $\delta = 0$ , ce demi-cône est le demi-plan  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  à partir duquel les équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires sont exactement contrôlables. Nous avons néanmoins vu que dès que  $\delta > 0$ , il n'est pas possible de contrôler ces équations à partir de  $\tilde{\omega}_{\delta}$ . Le seul demi-cône à partir duquel les équations de Schrödinger harmoniques fractionnaires sont contrôlables est le cas limite donné par le demi-espace.



## Conclusion et perspectives

La recherche de conditions géométriques pour la contrôlabilité des équations d'évolution est un sujet d'étude d'une grande richesse. Bien que cette thématique de recherche dans le cadre des équations paraboliques et des équations de Schrödinger soit très étudiée sur des domaines bornés de  $\mathbb{R}^d$  ou sur des variétés compactes, comme dans les travaux [26], [43], [44], [45], [46], la géométrie autorisée pour la contrôlabilité de ces mêmes équations posées sur tout l'espace euclidien  $\mathbb{R}^d$  était assez peu comprise. Les travaux présentés dans ce manuscrit sont dans la droite lignée des travaux [4], [11], [23] et [67], et contribuent à la compréhension de la géométrie autorisée pour les supports de contrôle dans le cadre d'équations d'évolution posées sur  $\mathbb{R}^d$  à travers la notion d'épaisseur faible qui généralise la notion d'épaisseur.

### Récapitulatif des conditions géométriques obtenues

Dans le Chapitre 4, nous avons constaté que l'épaisseur jouait un rôle clé pour la stabilisation exponentielle d'équations purement diffusives, autorisant une diffusion plus faible que celle de l'équation de la demi-chaleur. Nous avons également vu que l'épaisseur était nécessaire et suffisante à la contrôlabilité à zéro approchée à coût uniforme de ces équations lorsque la fonction  $F : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  génère une suite quasi-analytique  $\mathcal{M}^F$ .

Dans les Chapitres 5 et 6, nous avons étudié les équations d'évolution associées à l'oscillateur harmonique, et plus généralement à des opérateurs de Shubin anisotropes. En tirant avantage des effets régularisants de type Gelfand-Shilov des semi-groupes générés par ces opérateurs, nous avons pu obtenir des résultats de contrôlabilité pour ces équations à partir d'ensembles faiblement épais, autorisant les supports de contrôle à se distribuer plus faiblement à l'infini. Plus généralement, étant donné un opérateur dont l'adjoint génère un semi-groupe régularisant dans un espace de Gelfand-Shilov, nous avons mis en exergue l'influence de la régularité et des propriétés de décroissance en espace des solutions du système adjoint dans la géométrie autorisée pour la contrôlabilité à zéro de l'équation d'évolution associée à cet opérateur.

Enfin, nous avons également mis en évidence l'importance des ensembles faiblement épais dans la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger, dans le Chapitre 7. Nous avons notamment obtenu des conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger libre et harmonique en dimension 1. Dans le tableau 1, nous regroupons les différentes conditions géométriques connues à l'issue de cette thèse pour les équations étudiées dans les différents chapitres de ce manuscrit.

### Problèmes ouverts et perspectives

Plusieurs questions restent ouvertes à l'issue de nos travaux. Pour les équations de la chaleur associées à l'oscillateur harmonique et à un opérateur de Shubin anisotrope, très peu de conditions géométriques nécessaires à leur contrôlabilité sont connues. En particulier, il semble naturel d'essayer d'obtenir une condition nécessaire à travers la condition d'épaisseur par rapport à une densité. Pour l'équation de la chaleur harmonique, une approche pourrait consister à utiliser une formule de Mehler, qui permet de décrire explicitement l'évolution des gaussiennes soumises à l'équation de la chaleur harmonique. Il s'agirait alors de s'appuyer sur la stratégie de Miller [54] qui consiste à nier les inégalités d'observabilité

et de mettre en évidence une densité  $\rho$  par rapport à laquelle le support de contrôle serait épais.

Concernant les équations de Schrödinger, les conditions géométriques mises en avant dans le Chapitre 7 sont suffisantes pour la contrôlabilité de ces équations seulement lorsque la dimension est égale à 1. A priori, rien n'autorise à penser que l'épaisseur reste une condition suffisante pour la contrôlabilité exacte des équations de Schrödinger libres fractionnaires en dimension supérieure et il n'est pas à écarter que la bonne condition à considérer soit proche de celle donnée par Green, Jaye et Mitkovski dans le Théorème 7.2.6, puisqu'elle apparaît comme une version en domaine non borné de la condition géométrique de contrôle (GCC) exhibée par Lebeau dans [44]. Pour ce qui est de l'équation de Schrödinger harmonique en dimension  $d \geq 2$ , l'approche proposée dans le Chapitre 7 consiste à obtenir des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite. Une approche différente pourrait consister à obtenir des inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies d'harmoniques sphériques. Les harmoniques sphériques permettent de donner une nouvelle description des fonctions dans un niveau d'énergie de l'oscillateur harmonique qui fait intervenir les polynômes de Laguerre et de Legendre. Ceci devrait permettre de suivre une stratégie similaire à celle adoptée pour les polynômes de Hermite. En effet, la méthode employée fait intervenir une formule due à Plancherel-Rotach qui est un cas particulier d'une formule s'appliquant plus généralement aux polynômes orthogonaux (voir [63, Chapitre VIII]), donc aux polynômes de Laguerre et de Legendre.

Opérateur considéré	Conditions géométriques sur $\omega$		
	Épaisseur	Épaisseur faible de paramètre $0 < \delta \leq 1$	$ \omega  > 0$
$F( D_x )$ avec $\lim_{+\infty} F = +\infty$	CNS pour stabilisation rapide	Condition non suffisante	Condition non suffisante
$F( D_x )$ avec $\mathcal{M}^F$ quasi-analytique	CNS pour contrôl. approch. coût unif.	Condition non suffisante	Condition non suffisante
$(-\Delta_x +  x ^2)^s$ avec $s > 0$	Condition suffisante si $s > \frac{1}{2}$	Condition suffisante si $s > \frac{1+\delta}{2}$	CNS si $s > 1$
$((-\Delta_x)^m +  x ^{2k})^s$ avec $s > 0$	Condition suffisante si $s > \frac{1}{2m}$	Condition suffisante si $s > \frac{1}{2}(\frac{\delta}{k} + \frac{1}{m})$	CNS si $s > \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$
$-i(-\Delta_x)^s$ avec $s > 0$	CNS en dim. $d = 1$ si $s \geq \frac{1}{2}$	Condition non suffisante	Condition non suffisante
$-i(-\Delta_x +  x ^2)^s$ avec $s \geq 1$	Condition suffisante en dimension $d = 1$	CNS pour $\delta = 1$ en dimension $d = 1$	Condition non suffisante

TABLE 1. Conditions géométriques pour la contrôlabilité des équations d'évolution associées à différents opérateurs.

Troisième partie

Démonstrations des résultats obtenus



## Stabilization and approximate null-controllability for a large class of diffusive equations from thick control supports

In this chapter, we give the proofs of the results presented in Sections 4.2 and 4.3 of Chapter 4, taken from the article [5] written in collaboration with Paul Alphonse.

**Outline of the chapter.** Section 8.1 deals with the stabilization of a large class of diffusive equations and presents the proofs of the results concerning the stabilization and the rapid stabilization of the control system  $(E_F)$ . Section 8.2 is devoted to the proofs of the results concerning the approximate null-controllability of the evolution equation  $(E_F)$ . In Section 8.3, examples of quasi-analytic sequences are presented. Finally, Section 8.4 is an Appendix concerning the proof of an observability result used in Section 8.1.3.

### 8.1. (Rapid) Stabilization of diffusive equations

The aim of this section is to prove Theorem 4.2.2 and Proposition 4.2.6 concerning the stabilization and the rapid stabilization properties of the following general control system

$$(E_F) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + F(|D_x|)f(t, x) = h(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, \cdot) = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

where  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function bounded from below and  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  is a measurable set.

**8.1.1. Proof of Theorem 4.2.2: assertion (i).** First of all, let us assume that the equation  $(E_F)$  is exponentially stabilizable from the set  $\omega$ , with the additional assumption that  $\inf F \leq 0$ . We aim at proving that the control support  $\omega$  is then thick. To that end, we will use the following nice characterizations of exponential stabilization in terms of observability estimates, taken from the work [65]:

**THEOREM 8.1.1** (Theorem 1 in [65]). *The following assertions are equivalent:*

- (i) *The evolution system  $(E_F)$  is exponentially stabilizable from  $\omega$ .*
- (ii) *For all  $\varepsilon \in (0, 1)$ , there exist  $T > 0$  and  $C > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

- (iii) *There exist  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $T > 0$  and  $C > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

According to the above theorem, assuming that the equation  $(E_F)$  is exponentially stabilizable from  $\omega$  is equivalent to assuming that there exist  $\varepsilon \in (0, 1)$ ,  $T > 0$  and  $C > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.1.1) \quad \|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

The strategy consists in applying this observability estimate for well-chosen functions  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . This approach has especially been used in the works [3, 4, 10, 36], in which exponential stabilization or null-controllability issues are studied for fractional heat



equations or evolution equations associated with (non)-autonomous Ornstein-Uhlenbeck operators posed on the whole space  $\mathbb{R}^d$ .

Fixing  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  and considering  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  together with  $l \gg 1$  whose values will be adjusted later, we consider the Gaussian function  $g_{l,\xi_0}$  defined by

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g_{l,\xi_0}(x) = \frac{1}{l^d} \exp\left(ix \cdot \xi_0 - \frac{|x - x_0|^2}{2l^2}\right).$$

Classical results concerning Fourier transform of Gaussian functions show that

$$(8.1.2) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{g}_{l,\xi_0}(\xi) = (2\pi)^{d/2} \exp\left(-ix_0 \cdot (\xi - \xi_0) - \frac{l^2|\xi - \xi_0|^2}{2}\right).$$

On the one hand, it follows from Plancherel's theorem that the left-hand side of the inequality (8.1.1) applied to the functions  $g_{l,\xi_0}$  is a positive constant independent of the point  $x_0$ , denoted  $\delta_{l,\xi_0} > 0$  in the following and given by

$$(8.1.3) \quad \begin{aligned} \delta_{l,\xi_0} &= \|e^{-TF(|D_x|)} g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-ix_0 \cdot (\xi - \xi_0)} e^{-TF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi - \xi_0|^2/2}|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{l^d} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-TF(|\xi/l + \xi_0|)} e^{-|\xi|^2/2}|^2 d\xi > 0. \end{aligned}$$

On the other hand, we get that the  $L^2$ -norm of the function  $g_{l,\xi_0}$  also does not depend on the point  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  and is given by the following Gaussian integral

$$(8.1.4) \quad \|g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \frac{1}{l^{2d}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|x|^2/l^2} dx = \left(\frac{\pi}{l^2}\right)^{d/2}.$$

Let us check that the point  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  and the large positive parameter  $l \gg 1$  can be adjusted so that  $\delta_{l,\xi_0} - \varepsilon \|g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 > 0$ , that is, by (8.1.3) and (8.1.4),

$$(8.1.5) \quad \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-TF(|\xi/l + \xi_0|)} e^{-|\xi|^2/2}|^2 d\xi > \varepsilon \pi^{d/2}.$$

Since  $\varepsilon \in (0, 1)$  and the function  $F$  satisfies  $\inf F \leq 0$ , we can assume that the point  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  is chosen in order to satisfy  $e^{-2TF(|\xi_0|)} > \varepsilon$ . Since the function  $F$  is bounded from below, the dominated convergence theorem then implies that

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-TF(|\xi/l + \xi_0|)} e^{-|\xi|^2/2}|^2 d\xi &= e^{-2TF(|\xi_0|)} \int_{\mathbb{R}^d} |e^{-|\xi|^2/2}|^2 d\xi \\ &= e^{-2TF(|\xi_0|)} \pi^{d/2} > \varepsilon \pi^{d/2}. \end{aligned}$$

The parameter  $l \gg 1$  can therefore be adjusted so that (8.1.5) holds. The values of  $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$  and  $l \gg 1$  are now fixed. We therefore deduce from (8.1.1) and (8.1.5) that

$$(8.1.6) \quad M_{l,\xi_0} \leq C \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)} g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\omega)}^2 dt \quad \text{with} \quad M_{l,\xi_0} = \delta_{l,\xi_0} - \varepsilon \|g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 > 0.$$

Moreover, by introducing  $\mathcal{F}_\xi^{-1}$  the partial inverse Fourier transform with respect to the variable  $\xi \in \mathbb{R}^d$  and using (8.1.2), the right-hand side of this inequality (up to the constant  $C$ ) writes as

$$\begin{aligned} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)} g_{l,\xi_0}\|_{L^2(\omega)}^2 dt &= (2\pi)^d \int_0^T \int_\omega |\mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-ix_0 \cdot (\xi - \xi_0)} e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi - \xi_0|^2/2})(x)|^2 dx dt \\ &= (2\pi)^d \int_0^T \int_\omega |\mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi - \xi_0|^2/2})(x - x_0)|^2 dx dt \\ &= (2\pi)^d \int_0^T \int_{\omega - x_0} |\mathcal{F}_\xi^{-1}(e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi - \xi_0|^2/2})(x)|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Given  $r > 0$  a positive radius whose value will be chosen later, we split the previous integral in two parts and obtain the following estimate:

$$\begin{aligned}
 (8.1.7) \quad & \int_0^T \left\| e^{-tF(|D_x|)} g_{l,\xi_0} \right\|_{L^2(\omega)}^2 dt \\
 & \leq (2\pi)^d \int_0^T \int_{(\omega-x_0) \cap [-r,r]^d} \left| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) (x) \right|^2 dx dt \\
 & \quad + (2\pi)^d \int_0^T \int_{|x|>r} \left| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) (x) \right|^2 dx dt.
 \end{aligned}$$

Now, we study one by one the two integrals appearing in the right-hand side of (8.1.7). First, notice that for all  $0 \leq t \leq T$ ,

$$\begin{aligned}
 \left\| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} & \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \left\| e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
 & \leq \frac{e^{-T \inf F}}{(2\pi)^d} \left\| e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
 & = \frac{e^{-T \inf F}}{(2\pi)^d} \left( \frac{2\pi}{l^2} \right)^{d/2}.
 \end{aligned}$$

It therefore follows from the invariance by translation of the Lebesgue measure that

$$\begin{aligned}
 (8.1.8) \quad & (2\pi)^d \int_0^T \int_{(\omega-x_0) \cap [-r,r]^d} \left| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) (x) \right|^2 dx dt \\
 & \leq \frac{e^{-2T \inf F}}{l^{2d}} \int_0^T |(\omega-x_0) \cap [-r,r]^d| dt = \frac{T e^{-2T \inf F}}{l^{2d}} |\omega \cap (x_0 + [-r,r]^d)|.
 \end{aligned}$$

In order to control the second integral, we use the dominated convergence theorem which justifies the following convergence

$$\int_0^T \int_{|x|>r} \left| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) (x) \right|^2 dx dt \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0,$$

since

$$\mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d).$$

Thus, we can choose the radius  $r \gg 1$  large enough so that

$$(8.1.9) \quad (2\pi)^d C \int_0^T \int_{|x|>r} \left| \mathcal{F}_\xi^{-1} \left( e^{-tF(|\xi|)} e^{-l^2|\xi-\xi_0|^2/2} \right) (x) \right|^2 dx dt \leq \frac{M_{l,\xi_0}}{2}.$$

Gathering (8.1.6), (8.1.7), (8.1.8) and (8.1.9), we obtain the following estimate

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{M_{l,\xi_0}}{2} \leq \frac{C}{l^{2d}} T e^{-2T \inf F} |\omega \cap (x_0 + [-r,r]^d)|.$$

This proves that the control support  $\omega$  is actually a thick set.

**8.1.2. Proof of Theorem 4.2.2: assertion (ii).** In this second subsection, assuming that  $\omega$  is a thick set and that  $\liminf_{+\infty} F > \inf F$ , we establish the estimate (4.2.1). The strategy consists in constructing an adapted Lyapunov function, inspired by the proof of [68] (Theorem 1.1) in which the author studies the stabilization properties of the heat equation posed on bounded domains of  $\mathbb{R}^d$ .

We consider the function  $G = F - \inf F$ . Since  $\liminf_{+\infty} G > 0$  by assumption, there exists a positive constant  $R_0 > 0$  such that

$$(8.1.10) \quad \forall R \geq R_0, \quad \tilde{\alpha}_R = \inf_{r \geq R} G(r) > 0.$$

Let us fix  $R \geq R_0$  and consider two positive real numbers  $\lambda_R, \mu_R > 0$  to be chosen later. For all initial data  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$  and all time  $t \geq 0$ , we define  $f$  as the mild solution on  $[0, +\infty)$  of the control system (EG) with feedback  $\lambda_R K_R$  at time  $t$ , that is,

$$(8.1.11) \quad \forall t \geq 0, \quad f(t) = e^{-t(G(|D_x|) + \lambda_R \mathbb{1}_\omega K_R)} f_0,$$

where  $K_R$  stands for the following orthogonal projection

$$(8.1.12) \quad K_R : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow \{g \in L^2(\mathbb{R}^d) : \text{Supp } \widehat{g} \subset \overline{B(0, R)}\}.$$

We want to prove that the two constants  $\lambda_R$  and  $\mu_R$  can be adjusted so that the following estimate holds for all  $t \geq 0$ ,

$$(8.1.13) \quad \|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \mu_R e^{-\tilde{\alpha}_R t} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

To that end, we consider the following Lyapunov function

$$V(y) = \mu_R \|K_R y\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|(1 - K_R)y\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad y \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Let us equip the operator  $G(|D_x|) + \lambda_R \mathbb{1}_\omega K_R$  with the following domain

$$D_G = \{u \in L^2(\mathbb{R}^d) : G(|D_x|)u \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

From now, we assume that the Fourier transform of the initial datum  $f_0$  is compactly supported. As a consequence,  $f_0 \in D_G$  and the function  $V \circ f$  is of class  $C^1$  on  $(0, +\infty)$ , with

$$\forall t > 0, \quad \frac{d}{dt} V(f(t)) = \mu_R \frac{d}{dt} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{d}{dt} \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

We shall need to estimate each term of the right-hand side of this equality. On the one hand, noticing that the operators  $G(|D_x|)$  and  $K_R$  commute (they are Fourier multipliers), we have that for all  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mu_R \frac{d}{dt} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= 2\mu_R \text{Re} \langle K_R f(t), K_R f'(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= -2\mu_R \langle K_R f(t), G(|D_x|)K_R f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} - 2\lambda_R \mu_R \|K_R f(t)\|_{L^2(\omega)}^2. \end{aligned}$$

The operator  $G(|D_x|)$  being accretive, we get that for all  $t > 0$ ,

$$\langle K_R f(t), G(|D_x|)K_R f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq 0,$$

and as a consequence

$$\mu_R \frac{d}{dt} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq -2\lambda_R \mu_R \|K_R f(t)\|_{L^2(\omega)}^2.$$

Moreover, O. Kovrijkine established in [42] (Theorem 3) a quantitative version of the Logvinenko-Sereda theorem for thick sets which will allow us to control the right-hand side of the above estimate. Precisely, this result is the following:

**THEOREM 8.1.2** (Theorem 3 in [42]). *There exists a universal positive constant  $C_d \geq e$  depending only on the dimension  $d \geq 1$  such that for all  $\gamma$ -thick at scale  $L > 0$  subset  $\omega \subset \mathbb{R}^d$ ,*

$$\forall R > 0, \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \text{Supp } \widehat{f} \subset [-R, R]^d, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \left(\frac{C_d}{\gamma}\right)^{C_d(1+LR)} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

We therefore deduce from this theorem and the definition (8.1.12) of the orthogonal projection  $K_R$  that there exists a positive constant  $C = C(\omega) \geq 1$  only depending on the thick set  $\omega$  (and not on the positive real number  $R$ ) such that for all  $t > 0$ ,

$$(8.1.14) \quad \mu_R \frac{d}{dt} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq -2\lambda_R \mu_R C^{-1} e^{-CR} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On the other hand, recalling that the operators  $G(|D_x|)$  and  $K_R$  commute, the second term we aim at controlling is given for all  $t > 0$  by

$$(8.1.15) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= 2 \operatorname{Re} \langle (1 - K_R)f(t), (1 - K_R)f'(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= -2 \langle (1 - K_R)f(t), G(|D_x|)(1 - K_R)f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} - 2\lambda_R \operatorname{Re} \langle (1 - K_R)f(t), (1 - K_R)\mathbb{1}_\omega K_R f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

We notice that by definition of the orthogonal projection  $K_R$ , the Fourier transforms of the functions  $(1 - K_R)f(t)$  are supported in  $\mathbb{R}^d \setminus B(0, R)$ , which implies that for all  $t > 0$ ,

$$(8.1.16) \quad 2 \langle (1 - K_R)f(t), G(|D_x|)(1 - K_R)f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq 2\tilde{\alpha}_R \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

By using in addition Cauchy-Schwarz' and Young's inequalities, we obtain that

$$(8.1.17) \quad \begin{aligned} -2\lambda_R \operatorname{Re} \langle (1 - K_R)f(t), (1 - K_R)\mathbb{1}_\omega K_R f(t) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2\lambda_R \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{\lambda_R^2}{\tilde{\alpha}_R} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \tilde{\alpha}_R \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Combining the estimates (8.1.15), (8.1.16) and (8.1.17), we obtain that for all  $t > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{\lambda_R^2}{\tilde{\alpha}_R} \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \tilde{\alpha}_R \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

This inequality and (8.1.14) then imply that for all  $t > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} V(f(t)) \leq -2 \left( \lambda_R \mu_R C^{-1} e^{-CR} - \frac{\lambda_R^2}{\tilde{\alpha}_R} \right) \|K_R f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - \tilde{\alpha}_R \|(1 - K_R)f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

By making the following choices for the constants  $\mu_R$  and  $\lambda_R$ ,

$$\mu_R = 2C^2 e^{2CR}, \quad \lambda_R = C e^{CR} \tilde{\alpha}_R,$$

we get that for all  $t > 0$ ,

$$\frac{d}{dt} V(f(t)) \leq -\tilde{\alpha}_R V(f(t)).$$

This latest estimate and Grönwall's inequality readily imply that for all  $t \geq 0$ ,

$$V(f(t)) \leq e^{-\tilde{\alpha}_R t} V(f(0)),$$

and then, by Pythagore's theorem, since  $\mu_R \geq 1$ , we obtain that for all  $t \geq 0$ ,

$$\|f(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \mu_R e^{-\tilde{\alpha}_R t} \|f_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Since the set of functions of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  with compactly supported Fourier transforms is dense in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , and that the evolution operators  $e^{-t(G(|D_x|) + \lambda_R \mathbb{1}_\omega K_R)}$  are continuous on this space, the above estimate is valid for all  $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . The estimate (8.1.13) therefore holds. Recalling the definitions (8.1.10) and (8.1.11) of  $\tilde{\alpha}_R$  and  $f(t)$  respectively, and also recalling that  $G = F - \inf F$ , we have established that for all  $R \geq R_0$  and  $t \geq 0$ ,

$$\|e^{-t(F(|D_x|) + C e^{CR} (\alpha_R - \inf F) \mathbb{1}_\omega K_R)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))}^2 \leq 2C^2 e^{2CR} e^{-(\alpha_R + \inf F)t},$$

with  $\alpha_R = \inf_{r \geq R} F(r)$ . This ends the proof of assertion (ii) in Theorem 4.2.2.

**8.1.3. Proof of Proposition 4.2.6.** In this last subsection, we prove Proposition 4.2.6 which provides a negative result for the rapid stabilization of the evolution equation  $(E_F)$ . We assume that  $\omega$  is not dense in  $\mathbb{R}^d$ , and also that  $\lim_{+\infty} F$  exists and is a non-negative real number  $L \geq 0$ . Since the function  $F$  is continuous, this implies that  $F$  is bounded, i.e.  $\sup F < +\infty$ . We aim at proving that if  $\alpha > \sup F$ , then the equation  $(E_F)$  is not exponentially stabilizable from  $\omega$  at rate  $\alpha$ . To that end, we will use the following interpretation of exponential stabilization at rate  $\alpha > 0$  in terms of observability.

PROPOSITION 8.1.1 (Theorem 1.1 in [49]). *If the evolution system  $(E_F)$  is exponentially stabilizable from  $\omega$  at rate  $\alpha > 0$ , then there exists a positive constant  $A_\alpha > 0$  such that for all  $T > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\alpha,T} > 0$  satisfying that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\alpha,T} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + A_\alpha e^{-2\alpha T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

The proof of Proposition 8.1.1 is contained in the proof of Theorem 1.1 in [49], although [49] (Theorem 1.1) only states characterizations of complete stabilization. For the sake of completeness, we recall the arguments given by the authors of [49] in Section 8.4.

Proceeding by contradiction, we consider  $\alpha > \sup F$  and assume that the equation  $(E_F)$  is exponentially stabilizable at rate  $\alpha$  from  $\omega$ . According to Proposition 8.1.1, there exists a positive constant  $A_\alpha > 0$  such that for all  $T > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\alpha,T} > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.1.18) \quad \|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\alpha,T} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + A_\alpha e^{-2\alpha T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Since we get that for all  $T > 0$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \geq e^{-T \sup F} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

it follows from (8.1.18) that for all  $T > 0$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.1.19) \quad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\alpha,T} e^{2T \sup F} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + A_\alpha e^{2(\sup F - \alpha)T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Notice that since  $\sup F - \alpha < 0$ , we have  $\lim_{T \rightarrow +\infty} e^{2(\sup F - \alpha)T} = 0$ . Therefore, there exists  $T_0 > 0$  such that  $A_\alpha e^{2(\sup F - \alpha)T_0} < 1/2$ . This fact, together with (8.1.19), imply that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.1.20) \quad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2C_{\alpha,T_0} e^{2T_0 \sup F} \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

Since  $\omega$  is not dense in  $\mathbb{R}^d$  and that the evolution equation  $(E_F)$  is invariant under translations, we can assume that there exists a positive radius  $r > 0$  such that  $B(0, r) \subset \mathbb{R}^d \setminus \omega$ . Let us fix a non-zero  $L^2$ -function  $\psi$  and define the function  $g_h$  for all  $h > 0$  by

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g_h(x) = \psi\left(\frac{x}{h}\right).$$

On the one hand, we have that for all  $h > 0$ ,

$$(8.1.21) \quad \|g_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = h^d \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

On the other hand, we get that for all  $h > 0$ ,

$$(8.1.22) \quad \begin{aligned} \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|)}g_h\|_{L^2(\omega)}^2 dt &\leq \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|)}g_h\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r))}^2 dt \\ &= h^d \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 dt. \end{aligned}$$

It follows from (8.1.20), (8.1.21) and (8.1.22) that for all  $h > 0$ ,

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2C_{\alpha,T_0} e^{2T_0 \sup F} \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 dt.$$

Moreover, since  $L = \lim_{+\infty} F \geq 0$ , we get

$$\begin{aligned} & \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 dt \\ & \leq 2 \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi - e^{-tL}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 dt + 2 \int_0^{T_0} \|e^{-tL}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 dt \\ & \leq 2 \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi - e^{-tL}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt + 2T_0 \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2, \end{aligned}$$

and this implies that

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 & \leq 4C_{\alpha,T_0} e^{2T_0 \sup F} \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi - e^{-tL}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\ & \quad + 4C_{\alpha,T_0} T_0 e^{2T_0 \sup F} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2. \end{aligned}$$

To obtain a contradiction, it remains to check that each term of the right-hand side of the above inequality converges to 0 as  $h \rightarrow 0^+$ . For the first term, we deduce from Plancherel's theorem and the dominated convergence theorem (recall that the function  $F$  is bounded from below) that

$$\int_0^{T_0} \|e^{-tF(|D_x|/h)}\psi - e^{-tL}\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^{T_0} \|e^{-tF(|\xi|/h)}\widehat{\psi} - e^{-tL}\widehat{\psi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

For the second one, the dominated convergence theorem readily implies that

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,r/h))}^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

This concludes the proof of Proposition 4.2.6.

## 8.2. Proof of the approximate null-controllability results

This section is devoted to the proofs of the results stated in Section 4.3, dealing with the (cost-uniform) approximate null-controllability of the evolution equation

$$(E_F) \quad \begin{cases} \partial_t f(t, x) + F(|D_x|)f(t, x) = h(t, x)\mathbb{1}_\omega(x), & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ f(0, \cdot) = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

where the continuous function  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bounded from below is assumed to be associated with a quasi-analytic sequence  $\mathcal{M}^F$  of positive real numbers, defined in (4.3.1), and  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  is a measurable set with positive Lebesgue measure.

**8.2.1. Proof of Proposition 4.3.5.** The purpose of this first subsection is to prove that the evolution equation  $(E_F)$  is approximately null-controllable from the support  $\omega$  in any positive time  $T > 0$  (with no extra assumption on  $\omega$ ). It is well-known, see e.g. [18] (Theorem 2.43, page 56) or [65] (Remark 16), that the approximate null-controllability (without uniform cost) of the system  $(E_F)$  is equivalent to a unique continuation property of the adjoint system. More precisely, the adjoint system

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + F(|D_x|)g(t, x) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ g(0, \cdot) = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

is said to satisfy the unique continuation property from  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  at some time  $T > 0$  if for all initial datum  $g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , we have

$$(\forall t \in [0, T], \mathbb{1}_\omega e^{-tF(|D_x|)}g_0 = 0) \Rightarrow (e^{-TF(|D_x|)}g_0 = 0).$$

Let  $T > 0$  be a fixed positive time. We aim at proving that the unique continuation property holds from the control support  $\omega$ .

Let us first establish that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , the function  $e^{-TF(|D_x|)}g$  belongs to a class of quasi-analytic functions. We consider  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  not being identically equal to zero (the result is straightforward when  $g = 0$ ). Notice that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\xi \rightarrow \xi^\beta \mathcal{F}(e^{-TF(|D_x|)}g) \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

since we have by Plancherel's theorem that

(8.2.1)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\beta \mathcal{F}(e^{-TF(|D_x|)}g)(\xi)| \, d\xi &= \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\beta e^{-TF(|\xi|)} \widehat{g}(\xi)| \, d\xi \\ &\leq (2\pi)^{d/2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2|\beta|} e^{-2TF(|\xi|)} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= (2\pi)^{d/2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(|\xi|^{2|\beta|} + |\xi|^{2|\beta|+2d}) e^{-2TF(|\xi|)}}{1 + |\xi|^{2d}} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_d ((M_{|\beta|}^{TF})^2 + (M_{|\beta|+d}^{TF})^2)^{\frac{1}{2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &< +\infty, \end{aligned}$$

the positive constant  $C_d > 0$  being given by

$$C_d = (2\pi)^{d/2} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + |\xi|^{2d}} \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

Since the sequence  $\mathcal{M}^{TF}$  is log-convex, there exists a positive constant  $A_{TF} > 0$  such that

$$\forall k \geq 0, \quad M_k^{TF} \leq A_{TF} M_{k+1}^{TF},$$

and we get from (8.2.1) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\beta \mathcal{F}(e^{-TF(|D_x|)}g)(\xi)| \, d\xi \leq C_{d,TF} M_{|\beta|+d}^{TF} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

with  $C_{d,TF} = C_d(1 + A_{TF}^{2d})^{\frac{1}{2}}$ . It then follows from the Fourier inverse formula that

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \partial_x^\beta (e^{-TF(|D_x|)}g) \in L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

and that there exists a positive constant  $C'_{d,TF} > 0$  such that

$$(8.2.2) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta (e^{-TF(|D_x|)}g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C'_{d,TF} M_{|\beta|+d}^{TF} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Notice that for all positive real numbers  $\lambda > 0$  and  $C > 0$ , the sequence  $\mathcal{M}_{\lambda,C}$  whose elements  $M_{\lambda,C,k}$  are given for all  $k \geq 0$  by

$$(8.2.3) \quad M_{\lambda,C,k} = C \lambda^k M_{k+d}^{TF},$$

also defines a log-convex sequence which satisfies

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{\lambda,C,k}}{M_{\lambda,C,k+1}} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=d}^{+\infty} \frac{M_k^{TF}}{M_{k+1}^{TF}}.$$

Since the sequence  $\mathcal{M}^F$  is quasi-analytic, so is the sequence  $\mathcal{M}^{TF}$  according to Lemma 8.3.2 and therefore, Theorem 3.2.1 implies that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k^{TF}}{M_{k+1}^{TF}} = +\infty.$$

A second application of this theorem shows that the log-convex sequence  $\mathcal{M}_{\lambda,C}$  is also quasi-analytic. This fact, combined with the estimate (8.2.2) and Proposition 3.2.2, implies that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , the function  $e^{-TF(|D_x|)}g$  belongs to the quasi-analytic class  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}_{1,C'_{d,TF}\|g\|_{L^2}}}(\mathbb{R}^d)$ .

Now, let us check that the unique continuation property holds. To that end, we make a weaker assumption by considering a function  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  not identically equal to zero such that

$$(8.2.4) \quad \mathbb{1}_\omega e^{-TF(|D_x|)} g = 0.$$

The purpose is to prove that  $e^{-TF(|D_x|)} g = 0$ . Since  $|\omega| > 0$ , if we consider the cube  $Q = (-1, 1)^d$ , then

$$\exists \lambda_0 > 0, \forall \lambda \geq \lambda_0, \quad |\omega \cap \lambda Q| > 0.$$

Let us consider  $\lambda \geq \lambda_0$  and define the function  $g_\lambda \in L^2(\mathbb{R}^d)$  by

$$g_\lambda(x) = \frac{(e^{-TF(|D_x|)} g)(\lambda x)}{C'_{d,TF} M_d^{TF} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

It readily follows from the estimate (8.2.2) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|\partial_x^\beta g_\lambda\|_{L^\infty(Q)} \leq \frac{\lambda^{|\beta|} \|\partial_x^\beta (e^{-TF(|D_x|)} g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{C'_{d,TF} M_d^{TF} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \leq \lambda^{|\beta|} \frac{M_d^{TF}}{M_d^{TF}}.$$

Since the sequences  $\mathcal{M}_{\lambda, (M_d^{TF})^{-1}}$  defined in (8.2.3) are quasi-analytic and that  $g_\lambda \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}_{\lambda, (M_d^{TF})^{-1}}}(\mathbb{R}^d)$  from the above estimate, Proposition 3.2.10 implies that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ , there exists a positive constant  $C = C(\lambda, \|g_\lambda\|_{L^\infty(Q)}, \omega, d) > 0$  such that

$$\|g_\lambda\|_{L^2(Q)} \leq C \|g_\lambda\|_{L^2((\lambda^{-1}\omega) \cap Q)}.$$

As a consequence, we get from the assumption (8.2.4) that for all  $\lambda \geq \lambda_0$ ,

$$\|e^{-TF(|D_x|)} g\|_{L^2(\lambda Q)} \leq C \|e^{-TF(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega \cap \lambda Q)} = 0.$$

It follows that  $\mathbb{1}_{\lambda Q} e^{-TF(|D_x|)} g = 0$  for all  $\lambda \geq \lambda_0$ , and therefore  $e^{-TF(|D_x|)} g = 0$ . Then, the unique continuation property holds and the evolution equation ( $E_F$ ) is approximately null-controllable from  $\omega$  at time  $T > 0$ .

**8.2.2. Proof of Theorem 4.3.1: sufficient part.** In this subsection, we aim at proving that when the support control  $\omega$  is thick, then the equation ( $E_F$ ) is cost-uniformly approximately null-controllable from  $\omega$  in any positive time  $T > 0$ . To that end, we shall use the observability characterization of the cost-uniform approximate null-controllability, given by Theorem 2.1.6.

According to Theorem 2.1.6, we need to prove that the observability estimate (2.1.8) holds. The first step consists in establishing the following uncertainty principle:

**PROPOSITION 8.2.1.** *For all time  $T > 0$  and for all  $\varepsilon > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\varepsilon, T} > 0$  such that for all  $t \geq T/2$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,*

$$\|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon, T} \|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon e^{-2t \inf F} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

**PROOF.** This proof is adapted from the one of [38] (Theorem 1.3) which is itself adapted from the Kovrijkine's strategy. Let  $T > 0$  and  $\varepsilon > 0$  fixed. Considering the function  $G = F - \inf F$ , we begin by proving that there exists a positive constant  $C_{\varepsilon, T} > 0$  such that for all  $t \geq T/2$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.2.5) \quad \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon, T} \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Once the estimate (8.2.5) is established, we deduce that for all  $t \geq T/2$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon, T} \|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon e^{-2t \inf F} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

and the proof of Proposition 8.2.1 is therefore ended.



Let us prove the estimate (8.2.5). Setting  $T' = T/2$ , we first check, using Parseval's formula, that the following Bernstein type estimates hold for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq T'$  and  $\beta \in \mathbb{N}^d$ :

$$\begin{aligned}
(8.2.6) \quad \|\partial_x^\beta(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2tG(|\xi|)} |\xi^\beta|^2 |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2T'G(|\xi|)} |\xi|^{2|\beta|} |\widehat{g}(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leq \left( \sup_{r \geq 0} r^{|\beta|} e^{-T'G(r)} \right)^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&= (M_{|\beta|}^{T'G})^2 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
\end{aligned}$$

These estimates will be central later to control the functions  $e^{-tG(|D_x|)}g$  on bad cubes, which we are about to define. Since  $\omega$  is a thick set, by definition, there exist  $\gamma \in (0, 1]$  and a length  $L > 0$  such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap (x + [0, L]^d)| \geq \gamma L^d.$$

For  $\alpha \in LZ^d$ , let us define  $Q(\alpha)$  as the following cube

$$Q(\alpha) = \alpha + [0, L]^d.$$

Notice that the family of cubes  $(Q(\alpha))_{\alpha \in LZ^d}$  covers the space  $\mathbb{R}^d$ :

$$(8.2.7) \quad \mathbb{R}^d = \bigcup_{\alpha \in LZ^d} Q(\alpha).$$

Let  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  and  $t \geq T'$ , where we recall that  $T' = T/2$ . A cube  $Q(\alpha)$  is said to be good if it satisfies the property

$$(8.2.8) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 \leq \frac{2^{2|\beta|+d}}{\varepsilon} (M_{|\beta|}^{T'G})^2 \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2,$$

where the positive real numbers  $M_k^{T'G}$  are the elements of the sequence  $\mathcal{M}^{T'G}$  generated by the function  $T'G$ . We recall that for all  $k \geq 0$ ,

$$M_k^{T'G} = \sup_{r \geq 0} r^k e^{-T'G(r)}.$$

Naturally, a cube  $Q(\alpha)$  is said to be bad if it is not good, that is, when

$$(8.2.9) \quad \exists \beta_0 \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^{\beta_0}(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 > \frac{2^{2|\beta_0|+d}}{\varepsilon} (M_{|\beta_0|}^{T'G})^2 \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2.$$

Notice from the covering property (8.2.7) that

$$(8.2.10) \quad \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{\text{good cubes}} \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 + \sum_{\text{bad cubes}} \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2.$$

We shall estimate independently the two terms of the right-hand side of this equality. Let us begin with the second one. It follows from the definition (8.2.9) that if  $Q(\alpha)$  is a bad cube, there exists  $\beta_0 \in \mathbb{N}^d$  such that

$$\begin{aligned}
(8.2.11) \quad \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 &\leq \frac{\varepsilon}{2^{2|\beta_0|+d} (M_{|\beta_0|}^{T'G})^2} \|\partial_x^{\beta_0}(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 \\
&\leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\varepsilon}{2^{2|\beta|+d} (M_{|\beta|}^{T'G})^2} \|\partial_x^\beta(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(Q(\alpha))}^2.
\end{aligned}$$

By summing over all the bad cubes, we obtain from (8.2.6) and (8.2.11) that

$$\begin{aligned}
(8.2.12) \quad \int_{\bigcup_{\text{bad cubes}} |e^{-tG(|D_x|)}g(x)|^2 dx} &\leq \varepsilon \sum_{\text{bad cubes}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{2^{2|\beta|+d}(M_{|\beta|}^{T'G})^2} \|\partial_x^\beta(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 \\
&\leq \varepsilon \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{2^{2|\beta|+d}(M_{|\beta|}^{T'G})^2} \|\partial_x^\beta(e^{-tG(|D_x|)}g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&\leq \varepsilon \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{2^{2|\beta|+d}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
&\leq \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
\end{aligned}$$

since

$$\sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{1}{2^{2|\beta|+d}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+d-1}{k} \frac{1}{2^{2k+d}} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k+d-1} \frac{1}{2^{2k+d}} = 1.$$

It remains to estimate the first term of the right-hand side of the equality (8.2.10). Let  $Q(\alpha)$  be a good cube. Assuming that the function  $e^{-tG(|D_x|)}g$  is not identically equal to zero on the cube  $Q(\alpha)$ , we define the following function  $\varphi : [0, 1]^d \rightarrow \mathbb{C}$  by

$$(8.2.13) \quad \varphi(z) = \frac{L^{\frac{d}{2}}(e^{-tG(|D_x|)}g)(\alpha + Lz)}{K \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}}, \quad z \in [0, 1]^d,$$

where  $K > 0$  is a positive constant whose value will be chosen later. As the cube  $[0, 1]^d$  satisfies the cone condition, the following Sobolev embedding holds

$$W^{d,2}([0, 1]^d) \hookrightarrow L^\infty([0, 1]^d),$$

see e.g. [1] (Theorem 4.12). This implies that there exists a positive constant  $C_d > 0$ , only depending on the dimension  $d \geq 1$ , such that

$$(8.2.14) \quad \forall u \in W^{d,2}([0, 1]^d), \quad \|u\|_{L^\infty([0,1]^d)} \leq C_d \|u\|_{W^{d,2}([0,1]^d)}.$$

From the definition (8.2.8) of good cube and the estimate (8.2.14), it follows that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\begin{aligned}
(8.2.15) \quad \|\partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty([0,1]^d)}^2 &\leq C_d^2 \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} \varphi\|_{L^2([0,1]^d)}^2 \\
&= \frac{C_d^2}{K^2 \|e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2} L^{2|\beta|} \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} L^{2|\tilde{\beta}|} \|\partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} e^{-tG(|D_x|)}g\|_{L^2(Q(\alpha))}^2 \\
&\leq \frac{C_d^2 (2L)^{2|\beta|} 2^d \varepsilon^{-1}}{K^2} \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} (2L)^{2|\tilde{\beta}|} (M_{|\beta|+|\tilde{\beta}|}^{T'G})^2.
\end{aligned}$$

Since the sequence  $\mathcal{M}^{T'G}$  is log-convex, there exists a positive constant  $A_{T'G} > 0$  such that

$$\forall k \geq 0, \quad M_k^{T'G} \leq A_{T'G} M_{k+1}^{T'G}.$$

Therefore, there exists a new positive constant  $D_{d,L} > 0$  depending on  $d$  and  $L$ , such that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|\partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty([0,1]^d)}^2 \leq \frac{\varepsilon^{-1} A_{T'G}^{2d} D_{d,L}^2}{K^2} (2L)^{2|\beta|} (M_{|\beta|+d}^{T'G})^2.$$

By choosing  $K = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} A_{T',G}^d D_{d,L} M_d^{T'G}$ , it follows that

$$(8.2.16) \quad \|\partial_x^\beta \varphi\|_{L^\infty([0,1]^d)}^2 \leq (2L)^{2|\beta|} \left( \frac{M_{|\beta|+d}^{T'G}}{M_d^{T'G}} \right)^2.$$

Let us recall that by assumption, the sequence  $\mathcal{M}^F$  associated with the function  $F$  defines a quasi-analytic sequence of positive real numbers, and so is  $\mathcal{M}^{T'G}$  according to Lemma 8.3.2. Notice that the slightly modified sequence  $\mathcal{M}$ , whose elements  $M_k$  are given for all  $k \geq 0$  by

$$M_k = (2L)^k \frac{M_{k+d}^{T'G}}{M_d^{T'G}},$$

also defines a log-convex sequence that satisfies

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} = \frac{1}{2L} \sum_{k=d}^{+\infty} \frac{M_k^{T'G}}{M_{k+1}^{T'G}}.$$

Since the sequence  $\mathcal{M}^{T'G}$  is log-convex and quasi-analytic, Theorem 3.2.1 implies that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k^{T'G}}{M_{k+1}^{T'G}} = +\infty,$$

and a second application of this theorem provides that the log-convex sequence  $\mathcal{M}$  is also quasi-analytic. Since  $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}}((0,1)^d)$ , and that this function also satisfies

$$\|\varphi\|_{L^\infty([0,1]^d)} = \frac{L^{\frac{d}{2}} \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^\infty(Q(\alpha))}}{K \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^2(Q(\alpha))}} \geq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{A_{T',G}^d D_{d,L} M_d^{T'G}},$$

we therefore deduce from (8.2.16) and Proposition 3.2.10 that there exists a positive constant  $C_{\varepsilon,\gamma,L,d,T,G} > 0$  independent on  $g$  and  $\alpha$  such that

$$(8.2.17) \quad \|\varphi\|_{L^2([0,1]^d)} \leq C_{\varepsilon,\gamma,L,d,T,G} \|\varphi\|_{L^2(E)},$$

where  $E = \frac{\omega-\alpha}{L} \cap [0,1]^d \subset [0,1]^d$  satisfies  $|E| \geq \gamma > 0$ . It follows directly from (8.2.13) and (8.2.17) that

$$(8.2.18) \quad \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^2(Q(\alpha))} \leq C_{\varepsilon,\gamma,L,d,T,G} \|e^{-tG(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega \cap Q(\alpha))}.$$

Clearly, the above estimate also holds when the function  $e^{-tG(|D_x|)} g$  is identically equal to zero on the cube  $Q(\alpha)$ . By summing over all the good cubes, we deduce from (8.2.7) and (8.2.18) that

$$\int_{\bigcup_{\text{good cubes}} Q(\alpha)} |e^{-tG(|D_x|)} g(x)|^2 dx \leq C_{\varepsilon,\gamma,L,d,T,G}^2 \int_{\omega} |e^{-tG(|D_x|)} g(x)|^2 dx.$$

This estimate, together with (8.2.10) and (8.2.12), imply that the estimate (8.2.5) actually holds. The proof of Proposition 8.2.1 is therefore ended.  $\square$

We can now tackle the proof of the observability estimate (2.1.8). Let  $\varepsilon > 0$  and  $T > 0$ . It follows from Proposition 8.2.1 that there exists a positive constant  $C_{\varepsilon,T} > 0$  such that for all  $t \geq T/2$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon,T} \|e^{-tF(|D_x|)} g\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon' e^{-2t \inf F} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

where we set

$$\varepsilon' = e^{2T \inf F} \varepsilon.$$

By using that for all  $s_1 \geq s_2 \geq 0$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-s_1 F(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{(s_2-s_1) \inf F} \|e^{-s_2 F(|D_x|)} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

it follows that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} & \|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{2}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{2(t-T)\inf F} \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\ & \leq \frac{2C_{\varepsilon,T}}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T e^{2(t-T)\inf F} \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + e^{-2T\inf F} \varepsilon' \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ & \leq \frac{2C_{\varepsilon,T}}{T} e^{-T(\inf F)_-} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

with  $(\inf F)_- = \min(\inf F, 0)$ . This ends the proof of the estimate (2.1.8).

### 8.2.3. Cost-uniform approximate null-controllability vs rapid stabilization.

To end this section, let us quickly check that cost-uniform approximate null-controllability implies rapid stabilization:

**PROPOSITION 8.2.2.** *If the control system  $(E_F)$  is cost-uniformly approximately null-controllable from  $\omega$  at some positive time  $T > 0$ , then is rapidly stabilizable from  $\omega$ .*

**PROOF.** Assume that the system  $(E_F)$  is cost-uniformly approximately null-controllable from  $\omega$  at some positive time  $T > 0$ . According to Theorem 2.1.6, the following observability estimate holds: for all  $\varepsilon > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\varepsilon,T} > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(8.2.19) \quad \|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon,T} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

In order to prove that  $(E_F)$  is rapidly stabilizable, it is sufficient to show that for all  $\mu > 0$ , the system  $(E_{F_\mu})$  is stabilizable, where  $F_\mu = F - \mu$ . To that end, we shall apply Theorem 8.1.1, already used in Section 8.1.1. From (8.2.19), by multiplying by  $e^{2T\mu}$ , we get that for all  $\varepsilon > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\varepsilon,T} > 0$  such that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-TF_\mu(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon,T} \int_0^T \|e^{-tF_\mu(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon e^{2T\mu} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

By taking  $\varepsilon = \frac{e^{-2T\mu}}{2}$  in the above estimate, it follows from the characterization (iii) of Theorem 8.1.1 that the system  $(E_{F_\mu})$  is stabilizable from  $\omega$ . Since  $\mu > 0$  can be chosen arbitrary large, we deduce that the system  $(E_F)$  is rapidly stabilizable from  $\omega$ .  $\square$

## 8.3. Examples of functions $F$ generating quasi-analytic sequences

This section is devoted to establish useful results to construct quasi-analytic sequences and to provide examples of such sequences.

Let us first recall that a sequence  $(M_k)_{k \geq 0}$  of non-negative real numbers is said to be *log-convex* when it satisfies

$$\forall k \geq 1, \quad M_k^2 \leq M_{k+1}M_{k-1}.$$

A relevant example of log-convex sequence is the sequence  $\mathcal{M}^F$  associated with any continuous function  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bounded from below. Let us recall that the elements  $M_k^F$  of the sequence  $\mathcal{M}^F$  are assumed to be positive real numbers and defined for all  $k \geq 0$  by

$$(8.3.1) \quad 0 < M_k^F = \sup_{r \geq 0} r^k e^{-F(r)} < +\infty.$$

Let us also recall that a sequence  $\mathcal{M} = (M_k)_{k \geq 0}$  of positive real numbers is called quasi-analytic when for all real numbers  $a < b$ , the associated Denjoy-Carleman class

$$\mathcal{C}_{\mathcal{M}}([a, b]) = \{f \in C^\infty([a, b], \mathbb{C}) : \forall k \geq 0, \forall x \in [a, b], |f^{(k)}(x)| \leq M_k\},$$

is quasi-analytic, meaning that any function belonging to this class is identically equal to zero when satisfying

$$\exists x_0 \in [a, b], \forall k \geq 0, \quad f^{(k)}(x_0) = 0.$$

Let us consider a straightforward general lemma.

LEMMA 8.3.1. *Let  $\mathcal{M}$  and  $\mathcal{M}'$  be two sequences of positive real numbers satisfying  $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}'$ . Then, if  $\mathcal{M}'$  is a quasi-analytic sequence, so is the sequence  $\mathcal{M}$ .*

PROOF. Since  $\mathcal{M} \leq \mathcal{M}'$  by assumption, we get that  $C_{\mathcal{M}}([a, b]) \subset C_{\mathcal{M}'}([a, b])$  for all real numbers  $a < b$  and the result follows.  $\square$

We now focus on the log-convex sequences of the form  $\mathcal{M}^F$  defined in (8.3.1), which are the ones considered in this work. First, we study the stability of the quasi-analyticity property of the sequence  $\mathcal{M}^F$  when modifying the function  $F$ .

LEMMA 8.3.2. *If the sequence  $\mathcal{M}^F$  associated with a continuous function  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  bounded from below is quasi-analytic, then for all  $c \in \mathbb{R}$  and  $T > 0$ , the sequence  $\mathcal{M}^{TF+c}$  associated with the continuous function  $TF + c$  is also quasi-analytic.*

PROOF. By considering the function  $G = F + c/T$ , whose associated sequence  $\mathcal{M}^G$  is immediately quasi-analytic, we can assume that  $c = 0$ . Let us consider a positive integer  $p \geq 1$  so that  $T \geq 1/p > 0$ . We therefore have that for all  $k \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} M_k^{TF} &= \sup_{r \geq 0} r^k e^{-TF(r)} \leq e^{(\frac{1}{p}-T) \inf F} \sup_{r \geq 0} r^k e^{-\frac{1}{p}F(r)} \\ &= e^{(\frac{1}{p}-T) \inf F} \left( \sup_{r \geq 0} r^{kp} e^{-F(r)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= e^{(\frac{1}{p}-T) \inf F} (M_{kp}^F)^{\frac{1}{p}} =: M_k. \end{aligned}$$

According to Lemma 8.3.1, it is sufficient to check that the sequence  $(M_k)_k$  is quasi-analytic to end the proof of Lemma 8.3.2. To that end, we will use Denjoy-Carleman's theorem, that is Theorem 3.2.1, and prove that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} = +\infty.$$

Notice that since the sequence  $\mathcal{M}^F$  is log-convex, the sequence  $(M_k^F/M_{k+1}^F)_k$  is non-increasing. As a consequence, we get that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \frac{M_{kp}^F}{M_{kp+p}^F} \right)^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \prod_{j=0}^{p-1} \frac{M_{kp+j}^F}{M_{kp+j+1}^F} \right)^{\frac{1}{p}} \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{kp+p-1}^F}{M_{kp+p}^F}.$$

It is therefore sufficient to prove that

$$(8.3.2) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{kp+p-1}^F}{M_{kp+p}^F} = +\infty.$$

By using again that the sequence  $(M_k^F/M_{k+1}^F)_k$  is non-increasing, we obtain by also applying an Euclidean division by the positive integer  $p \geq 1$  that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k^F}{M_{k+1}^F} = \sum_{r=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{kp+r}^F}{M_{kp+r+1}^F} \leq p \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{kp}^F}{M_{kp+1}^F}.$$

Yet, the log-convex sequence  $\mathcal{M}^F$  is quasi-analytic by assumption, and Theorem 3.2.1 implies that

$$(8.3.3) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k^F}{M_{k+1}^F} = +\infty \quad \text{and so} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{kp}^F}{M_{kp+1}^F} = +\infty.$$

Finally, exploiting a last time the non-increasing property of the sequence  $(M_k^F/M_{k+1}^F)_k$ , we obtain that

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{(k+1)p}^F}{M_{(k+1)p+1}^F} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_{(k+1)p-1}^F}{M_{(k+1)p}^F}.$$

This inequality and (8.3.3) show that (8.3.2) holds. This ends the proof of Lemma 8.3.2.  $\square$

It is a very interesting problem to characterize the functions  $F$  that generate quasi-analytic sequences  $\mathcal{M}^F$ . This question has been addressed by B. Jaye and M. Mitkovski in [38] (see Proposition 3.2.6), where these authors provided a necessary and sufficient condition on some functions  $F$  that ensures the associated sequence  $\mathcal{M}^F$  to be quasi-analytic, by exploiting Denjoy-Carleman's theorem.

The following proposition provides some examples of functions  $F$  generating quasi-analytic sequences  $\mathcal{M}^F$ . For the sake of completeness of the present work, we give a proof based only on Theorem 3.2.1, and not on Proposition 3.2.6.

**PROPOSITION 8.3.3.** *Let  $p \geq 1$  be a positive integer and  $F_p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be the non-negative function defined for all  $t \geq 0$  by*

$$F_p(t) = \frac{t}{g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ p}(t)}, \quad \text{where } g(t) = \log(e + t),$$

with  $g^{\circ p} = g \circ \dots \circ g$  ( $p$  compositions). The associated sequence  $\mathcal{M}^{F_p}$  defined in (8.3.1) is a quasi-analytic sequence of positive real numbers.

**PROOF.** We first notice that the sequence  $\mathcal{M}^{F_p}$  is well-defined by (8.3.1) as the supremum of a continuous function on  $[0, +\infty)$  with finite limit when  $t \rightarrow +\infty$ . Define  $\phi_p : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  by

$$\phi_p(t) = g(t)(g \circ g)(t) \dots g^{\circ p}(t), \quad t \geq 0.$$

Let us check that the following convergence holds

$$(8.3.4) \quad \frac{\phi_p(k)}{\phi_p(2k\phi_p(k))} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 1.$$

Indeed, on the one hand, we get that

$$\phi_p(k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} (\log k) \log(\log k) \dots \log^{\circ p} k.$$

On the other hand, we recall that if  $f$  and  $g$  are two numerical functions satisfying  $f \sim_{+\infty} g$  with  $\lim_{+\infty} f = +\infty$ , then  $\log f \sim_{+\infty} \log g$ . As a consequence, we deduce that

$$g(2k\phi_p(k)) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \log(2k(\log k) \log(\log k) \dots \log^{\circ p} k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \log k.$$

Iterating this argument, it follows that for all  $j \geq 1$ ,

$$g^{\circ j}(2k\phi_p(k)) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \log^{\circ j} k.$$

This implies that the convergence (8.3.4) actually holds, since

$$\frac{\phi_p(k)}{\phi_p(2k\phi_p(k))} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{(\log k) \log(\log k) \dots \log^{\circ p} k}{(\log k) \log(\log k) \dots \log^{\circ p} k} = 1.$$

Moreover, by direct computations, we have that for all  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
(8.3.5) \quad \frac{\phi'_p(t)}{\phi_p(t)} &= \sum_{i=1}^p \frac{(g^{\circ i})'(t)}{g^{\circ i}(t)} = \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=1}^i g'(g^{\circ(j-1)}(t)) \\
&= \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=1}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)} \\
&= \frac{1}{e+t} \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)} \\
&\stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right),
\end{aligned}$$

that is

$$(8.3.6) \quad \phi'_p(t) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{\phi_p(t)}{t}\right).$$

For all positive integer  $k \geq 1$ , the supremum  $M_k^{F_p} = \sup_{r \geq 0} r^k e^{-F_p(r)}$  is reached at a point  $t_k > 0$  satisfying the following equation

$$(8.3.7) \quad t_k F'_p(t_k) = k,$$

which is equivalent to

$$\frac{t_k}{\phi_p(t_k)} \left(1 - t_k \frac{\phi'_p(t_k)}{\phi_p(t_k)}\right) = k.$$

Let us prove that  $t_k$  exists and is unique for  $k \gg 1$  sufficiently large. First, notice that the application  $t \mapsto t F'_p(t)$  satisfies  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t F'_p(t) = +\infty$  since  $\phi_p(t) =_{t \rightarrow +\infty} o(t)$  and that (8.3.6) holds. It remains to check that there exists  $T > 0$  such that this application is increasing on  $[T, +\infty)$ . To that end, it is sufficient to prove that the functions

$$F_p : t \rightarrow \frac{t}{\phi_p(t)} \quad \text{and} \quad G_p : t \rightarrow 1 - t \frac{\phi'_p(t)}{\phi_p(t)},$$

are positive and increasing on  $[T, +\infty)$  for some  $T \gg 1$  sufficiently large. The positivity of these functions is ensured by (8.3.6) and the positivity of  $\phi_p$ . Let us prove that  $F_p$  and  $G_p$  are increasing on  $[T, +\infty)$  for  $T$  sufficiently large. On the one hand, this fact holds true for the first function since

$$F'_p(t) = \frac{1}{\phi_p(t)} \left(1 - t \frac{\phi'_p(t)}{\phi_p(t)}\right) \stackrel{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\phi_p(t)} > 0.$$

On the other hand, it follows from (8.3.5) that for all  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
(8.3.8) \quad -G'_p(t) &= \left(\frac{t}{e+t} \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)}\right)' \\
&= \frac{e}{(e+t)^2} \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)} + \frac{t}{e+t} \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)}\right)'.
\end{aligned}$$

It can be checked that there exists a positive function  $h_2$  given by a rational fraction of  $g, g^{\circ 2}, \dots, g^{\circ p}$  such that

$$(8.3.9) \quad \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)}\right)' = -\frac{h_2(t)}{e+t}.$$

We deduce from (8.3.8) and (8.3.9) that

$$-G'_p(t) = \frac{e}{(e+t)^2}h_1(t) - \frac{t}{(e+t)^2}h_2(t) = \frac{t}{(e+t)^2}h_2(t)\left(\frac{e}{t}\frac{h_1(t)}{h_2(t)} - 1\right),$$

with

$$\forall t \geq 0, \quad h_1(t) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{g^{\circ i}(t)} \prod_{j=2}^i \frac{1}{e + g^{\circ(j-1)}(t)}.$$

Since  $h_1/h_2$  is a rational fraction of  $g, g^{\circ 2}, \dots, g^{\circ p}$ , classical lemmas ensure that

$$\frac{h_1(t)}{th_2(t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Therefore, since  $h_2$  is positive, there exists a positive constant  $T > 0$  such that  $G'_p(t) > 0$  for all  $t \geq T$ . It follows that for all  $k \gg 1$  sufficiently large, there exists a unique  $t_k \in (0, +\infty)$  satisfying (8.3.7). By defining  $u_k = 2k\phi_p(k)$ , it follows from (8.3.4) and (8.3.6) that

$$u_k F'_p(u_k) = \frac{u_k}{\phi_p(u_k)} \left(1 - u_k \frac{\phi'_p(u_k)}{\phi_p(u_k)}\right) = 2k \frac{\phi_p(k)}{\phi_p(2k\phi_p(k))} \left(1 - u_k \frac{\phi'_p(u_k)}{\phi_p(u_k)}\right) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} 2k.$$

As a consequence, since  $t_k F'_p(t_k) = k$  from (8.3.7) and that the application  $t \mapsto tF'_p(t)$  is increasing on  $[T, +\infty)$ , we get that for all  $k \gg 1$  sufficiently large,

$$t_k \leq u_k = 2k\phi_p(k).$$

We deduce that for all  $k \gg 1$ ,

$$\frac{M_{k-1}^{F_p}}{M_k^{F_p}} \geq \frac{t_k^{k-1} e^{-F_p(t_k)}}{t_k^k e^{-F_p(t_k)}} = \frac{1}{t_k} \geq \frac{1}{2k\phi_p(k)}.$$

It is well-known that the series  $\sum \frac{1}{2k\phi_p(k)}$  is divergent and then, we obtain

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M_k^{F_p}}{M_{k+1}^{F_p}} = +\infty.$$

Since the sequence  $\mathcal{M}^{F_p}$  is log-convex by construction, we deduce from Theorem 3.2.1 that the sequence  $\mathcal{M}^{F_p}$  is quasi-analytic. This ends the proof of Proposition 8.3.3.  $\square$

**COROLLARY 8.3.4.** *Let  $s \geq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$  be non-negative real numbers and  $F_{s,\delta} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be the non-negative continuous function defined by*

$$F_{s,\delta}(t) = \frac{t^s}{\log^\delta(e+t)}, \quad t \geq 0.$$

*The associated sequence  $\mathcal{M}^{F_{s,\delta}}$  defined in (8.3.1) is a quasi-analytic sequence of positive real numbers.*

**PROOF.** Notice that there exists a positive constant  $C_{s,\delta} > 0$  such that for all  $t \geq 0$ ,

$$\frac{t^s}{\log^\delta(e+t)} \geq \frac{t}{\log(e+t)} - C_{s,\delta}.$$

Corollary 8.3.4 is then a consequence of Lemma 8.3.1, Lemma 8.3.2 and Proposition 8.3.3.  $\square$



### 8.4. Appendix of Chapter 8

This appendix is devoted to the proof of Proposition 8.1.1. The following arguments are due to Liu, Wang, Xu and Yu and are originally presented in [49] (Section 2). Let  $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  be a continuous function bounded from below and  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  be a Borel set. Assume that the control system  $(E_F)$  is stabilizable from  $\omega$  at rate  $\alpha > 0$ . We aim at proving that there exists a positive constant  $A_\alpha > 0$  such that for all  $T > 0$ , there exists a positive constant  $C_{\alpha,T} > 0$  satisfying that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\alpha,T} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + A_\alpha e^{-2\alpha T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

By definition of stabilization, there exist a positive constant  $M_\alpha \geq 1$  and a linear feedback  $K_\alpha \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$  such that

$$(8.4.1) \quad \forall t \geq 0, \quad \|e^{-t(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \leq M_\alpha e^{-\alpha t}.$$

Let  $T > 0$  fixed. First notice from Duhamel's-type formula for bounded perturbations of semigroups, see e.g. [24] (Corollary III.1.7), that for all  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$e^{-T(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f = e^{-TF(|D_x|)}f - \int_0^T e^{-(T-t)F(|D_x|)} \mathbb{1}_\omega K_\alpha e^{-t(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f dt.$$

By using the fact that the evolution operators  $e^{-tF(|D_x|)}$  are selfadjoint on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , the above formula and (8.4.1) imply that for all  $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} & |\langle e^{-TF(|D_x|)}g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| = |\langle g, e^{-TF(|D_x|)}f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \\ & \leq |\langle g, e^{-T(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| + \left| \int_0^T \langle g, e^{-(T-t)F(|D_x|)} \mathbb{1}_\omega K_\alpha e^{-t(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} dt \right| \\ & \leq |\langle g, e^{-T(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| + \int_0^T |\langle \mathbb{1}_\omega e^{-(T-t)F(|D_x|)}g, K_\alpha e^{-t(F(|D_x|) + \mathbb{1}_\omega K_\alpha)}f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| dt \\ & \leq M_\alpha e^{-\alpha T} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + M_\alpha \|K_\alpha\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)} dt. \end{aligned}$$

By applying the above inequality to  $f = e^{-TF(|D_x|)}g$ , it follows that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq M_\alpha \|K_\alpha\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))} \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)} dt + M_\alpha e^{-\alpha T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Finally, we deduce from Hölder's inequality and the classical convexity inequality

$$\forall a, b > 0, \quad (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2),$$

that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-TF(|D_x|)}g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2M_\alpha^2 \|K_\alpha\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))}^2 T \int_0^T \|e^{-tF(|D_x|)}g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + 2M_\alpha^2 e^{-2\alpha T} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

and this concludes the proof of Proposition 8.1.1.

## Null-controllability for evolution equations enjoying symmetric Gelfand-Shilov smoothing effects

In this chapter, we give the proofs of the results presented in Sections 5.2 and 5.3 of Chapter 5, taken from the article [53] written in collaboration with Karel Pravda-Starov.

**Outline of the chapter.** Section 9.1 gives the proof of the spectral inequalities stated in Theorem 5.2.1. This proof follows the Kovrijkine’s strategy with some new ingredients as slowly varying metrics. The null-controllability result given in Theorem 5.3.1 is then proved in Section 9.2. In Section 9.3, the appendix gathers the proof of instrumental lemmas.

### 9.1. Quantitative spectral inequalities for finite combinations of Hermite functions

This section is devoted to the proof of Theorem 5.2.1. Let  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  be a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz positive function with  $\mathbb{R}^d$  equipped with the Euclidean norm, such that there exist some positive constants  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $m > 0$ ,  $R > 0$  satisfying

$$(9.1.1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R\langle x \rangle^{1-\varepsilon}.$$

Let  $\omega$  be a measurable subset of  $\mathbb{R}^d$  which is  $\gamma$ -thick with respect to the density  $\rho$ , that is,

$$(9.1.2) \quad \exists 0 < \gamma \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))| = \gamma \rho(x)^d |B(0, 1)|,$$

where  $B(x, r)$  denotes the Euclidean ball centered at  $x \in \mathbb{R}^d$  with radius  $r > 0$ , and where  $|A|$  denotes the Lebesgue measure of  $A$ . Since  $\rho$  is a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz positive function, Lemma A.0.1 in appendix shows that the family of norms  $(\|\cdot\|_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  given by

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \|y\|_x = \frac{\|y\|}{\rho(x)},$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the Euclidean norm in  $\mathbb{R}^d$ , defines a slowly varying metric on  $\mathbb{R}^d$ .

**9.1.1. Step 1. Bad and good balls.** By using Theorem A.0.1 in appendix, we can find a sequence  $(x_k)_{k \geq 0}$  in  $\mathbb{R}^d$  such that

$$(9.1.3) \quad \exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_{N_0+1}) \in \mathbb{N}^{N_0+1} \text{ with } i_k \neq i_l \text{ if } 1 \leq k \neq l \leq N_0 + 1, \quad \bigcap_{k=1}^{N_0+1} B_{i_k} = \emptyset$$

and

$$(9.1.4) \quad \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k,$$

where

$$(9.1.5) \quad B_k = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_k\|_{x_k} < 1\} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_k\| < \rho(x_k)\} = B(x_k, \rho(x_k)).$$

Let us notice from Theorem A.0.1 that the non-negative integer  $N_0$  only depends on the dimension  $d$  and the constant  $C \geq 1$  appearing in slowness condition (A.0.1) which can be taken equal to  $C = 2$  here, as  $\rho$  is a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz function. The integer  $N_0 = N_0(d)$

is therefore independent on the function  $\rho$  and depends only on the dimension  $d \geq 1$ . It follows from (9.1.3) and (9.1.4) that

$$(9.1.6) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{B_k}(x) \leq N_0,$$

where  $\mathbb{1}_{B_k}$  denotes the characteristic function of  $B_k$ . We deduce from (9.1.6) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} |g(x)|^2 dx \leq N_0 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Let  $N \in \mathbb{N}$  be a non-negative integer and  $f \in \mathcal{E}_N \setminus \{0\}$ , with  $\mathcal{E}_N$  being the finite dimensional vector space spanned by the Hermite functions  $(\Phi_\alpha)_{|\alpha| \leq N}$  defined in (2.3.5). Let  $0 < \delta \leq 1$  be a positive constant to be chosen later on. We divide the family of balls  $(B_k)_{k \geq 0}$  into families of good and bad balls. A ball  $B_k$ , with  $k \in \mathbb{N}$ , is said to be good if it satisfies

$$(9.1.7) \quad \forall (\beta, \tilde{\beta}) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, \quad |\tilde{\beta}| \leq d, \\ \int_{B_k} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f(x)|^2 dx \leq 4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2 \int_{B_k} |f(x)|^2 dx,$$

where the positive constants  $M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta) > 0$  also depend on the fixed positive parameter  $0 < \varepsilon \leq 1$  and the dimension  $d \geq 1$ , and are defined by

$$(9.1.8) \quad M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta) \\ = \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} K_\varepsilon^{(2-\varepsilon)|\beta|+(1-\varepsilon)d+|\tilde{\beta}|} \delta^{|\beta|+|\tilde{\beta}|} (d+1)^{\frac{(1-\varepsilon)(d+|\beta|)}{2}} \Gamma\left(|\beta| + \frac{(1-\varepsilon)d+|\tilde{\beta}|}{2-\varepsilon} + 3\right) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}},$$

with the constants  $\tilde{K}_{\varepsilon, \delta} > 1$  and  $K_\varepsilon > 1$  defined in Proposition 5.2.2. On the other hand, a ball  $B_k$ , with  $k \in \mathbb{N}$ , which is not good, is said to be bad, that is, when

$$(9.1.9) \quad \exists (\beta, \tilde{\beta}) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, \quad |\tilde{\beta}| \leq d, \\ \int_{B_k} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f(x)|^2 dx > 4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2 \int_{B_k} |f(x)|^2 dx.$$

If  $B_k$  is a bad ball, it follows from (9.1.9) that there exists  $(\beta_0, \tilde{\beta}_0) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ ,  $|\tilde{\beta}_0| \leq d$  such that

$$(9.1.10) \quad \int_{B_k} |f(x)|^2 dx \\ \leq \frac{1}{4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta_0|+1} M_{\beta_0, \tilde{\beta}_0, N}(\delta)^2} \int_{B_k} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta_0|+d)} \partial_x^{\beta_0+\tilde{\beta}_0} f(x)|^2 dx \\ \leq \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d, \\ \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d}} \frac{1}{4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2} \int_{B_k} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f(x)|^2 dx.$$

By summing over all the bad balls and by using from (9.1.3) that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \mathbb{1}_{\cup_{\text{bad balls}} B_k} \leq \sum_{\text{bad balls}} \mathbb{1}_{B_k} \leq N_0 \mathbb{1}_{\cup_{\text{bad balls}} B_k},$$

we deduce from (9.1.10) and the Fubini-Tonelli theorem that

$$\begin{aligned}
 (9.1.11) \quad & \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{\text{bad balls}} \int_{B_k} |f(x)|^2 dx \\
 & \leq \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d}} \frac{N_0}{4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2} \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f(x)|^2 dx \\
 & \leq \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d}} \frac{N_0}{4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f(x)|^2 dx.
 \end{aligned}$$

By using that the number of solutions to the equation  $\beta_1 + \dots + \beta_d = k$ , with  $k \geq 0$ ,  $d \geq 1$  and unknown  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ , is given by  $\binom{k+d-1}{k}$ , we obtain from the Bernstein type estimates in Proposition 5.2.2, (9.1.8) and (9.1.11) that

$$\begin{aligned}
 (9.1.12) \quad & \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx \leq \left( \sum_{\substack{\beta \in \mathbb{N}^d \\ \tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d}} \frac{N_0}{4^d (2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1}} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 & = \left( \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{N_0}{(2(2^d N_0 + 1))^{|\beta|+1}} \right) \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \frac{1}{4^d} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 & = \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+d-1}{k} \frac{N_0}{2^{k+1} (2^d N_0 + 1)^{k+1}} \right) \left( \sum_{j=0}^d \frac{1}{4^d} \binom{j+d-1}{j} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 & \leq 2^{d-2} \left( \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{N_0}{(2^d N_0 + 1)^k} \right) \left( \sum_{j=0}^d \frac{2^{j+d-1}}{4^d} \right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{4} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
 \end{aligned}$$

since

$$(9.1.13) \quad \binom{k+d-1}{k} \leq \sum_{j=0}^{k+d-1} \binom{k+d-1}{j} = 2^{k+d-1}.$$

Recalling from (9.1.4) that

$$1 \leq \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} + \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k},$$

we notice that

$$(9.1.14) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx + \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx.$$

It follows from (9.1.12) and (9.1.14) that

$$(9.1.15) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{4}{3} \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx.$$

**9.1.2. Step 2. Properties on good balls.** As the ball  $B(0, 1)$  is an Euclidean ball, the Sobolev embedding

$$W^{d,2}(B(0, 1)) \hookrightarrow L^\infty(B(0, 1)),$$

see e.g. [1] (Theorem 4.12), implies that there exists a positive constant  $C_d > 0$  depending only on the dimension  $d \geq 1$  such that

$$(9.1.16) \quad \forall u \in W^{d,2}(B(0, 1)), \quad \|u\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C_d \|u\|_{W^{d,2}(B(0,1))}.$$

By translation invariance and homogeneity of the Lebesgue measure, it follows from (9.1.1), (9.1.5) and (9.1.16) that for all  $u \in W^{d,2}(B_k)$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(B_k)}^2 &= \|x \mapsto u(x_k + x\rho(x_k))\|_{L^\infty(B(0,1))}^2 \leq C_d^2 \|x \mapsto u(x_k + x\rho(x_k))\|_{W^{d,2}(B(0,1))}^2 \\ &= C_d^2 \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} \rho(x_k)^{2|\alpha|-d} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx = C_d^2 \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} m^{2|\alpha|-d} \left(\frac{\rho(x_k)}{m}\right)^{2|\alpha|-d} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} (9.1.17) \quad \|u\|_{L^\infty(B_k)}^2 &\leq C_d^2 \max(m, m^{-1})^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} \left(\frac{\rho(x_k)}{m}\right)^d |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \\ &= C_d^2 \max(1, m^{-1})^{2d} \rho(x_k)^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

We deduce from (9.1.17) that for all  $u \in W^{d,2}(B_k)$ ,

$$(9.1.18) \quad \|u\|_{L^\infty(B_k)} \leq C_d \max(1, m^{-1})^d \rho(x_k)^{\frac{d}{2}} \|u\|_{W^{d,2}(B_k)}.$$

Let  $B_k$  be a good ball. By using the fact that the mapping  $\rho$  is a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz positive function, we notice that

$$(9.1.19) \quad \forall x \in B_k = B(x_k, \rho(x_k)), \quad 0 < \rho(x_k) \leq 2\rho(x).$$

We deduce from (9.1.18) and (9.1.19) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $B_k$  is a good ball

$$\begin{aligned} (9.1.20) \quad &\rho(x_k)^{|\beta|+\frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^d \rho(x_k)^{|\beta|+d} \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_d \max(1, m^{-1})^d \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\rho(x_k)^{|\beta|+d} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^d 2^{|\beta|+d} \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\rho(x)^{|\beta|+d} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

By using (9.1.1) and the definition of good balls (9.1.7), it follows from (9.1.20) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $B_k$  is a good ball

$$\begin{aligned} (9.1.21) \quad &\rho(x_k)^{|\beta|+\frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^d (2R)^{|\beta|+d} \left( \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, \\ |\tilde{\beta}| \leq d}} \|\langle x \rangle^{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^d (2R)^{|\beta|+d} 2^d \sqrt{2(2^d N_0 + 1)}^{|\beta|+1} \left( \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, \\ |\tilde{\beta}| \leq d}} M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^2(B_k)}. \end{aligned}$$

By using the fact that the Gamma function is increasing on  $[2, +\infty)$  (see Appendix B), we obtain from (9.1.8) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d$ ,  $|\tilde{\beta}| \leq d$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ,

$$(9.1.22) \quad M_{\beta, \tilde{\beta}, N}(\delta) \leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} K_\varepsilon^{(2-\varepsilon)|\beta|+d(1-\varepsilon)+|\tilde{\beta}||\beta|+|\tilde{\beta}|} (d+1)^{\frac{(1-\varepsilon)(|\beta|+d)}{2}} \Gamma(|\beta|+d+3) e^{\frac{N^{1-\varepsilon}}{\delta^{2-\varepsilon}}}.$$

Recalling that  $K_\varepsilon > 1$  and  $0 < \delta \leq 1$ , it follows from (9.1.21) and (9.1.22) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $B_k$  is a good ball

$$(9.1.23) \quad \begin{aligned} \rho(x_k)^{|\beta| + \frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)} \\ \leq C_d(\delta, \varepsilon, m, R) (\delta \tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} \Gamma(|\beta| + d + 3) e^{\frac{N^{1-\frac{\delta}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \|f\|_{L^2(B_k)}, \end{aligned}$$

with

$$C_d(\delta, \varepsilon, m, R) = \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} C_d \max(1, m^{-1})^d (4R)^d K_\varepsilon^{(2-\varepsilon)d} (d+1)^{(1-\varepsilon)\frac{d}{2}} \sqrt{2(2^d N_0 + 1)} > 0$$

and

$$\tilde{C}_d(\varepsilon, R) = 2R \sqrt{2(2^d N_0 + 1)} K_\varepsilon^{2-\varepsilon} (d+1)^{\frac{1-\varepsilon}{2}} > 0.$$

Let  $B_k$  be a good ball. Recalling that  $f$  is a finite combination of Hermite functions, we deduce from the continuity of the function  $f$  and the compactness of  $\overline{B_k}$  that there exists  $y_k \in \overline{B_k}$  such that

$$(9.1.24) \quad \|f\|_{L^\infty(B_k)} = |f(y_k)|.$$

By using spherical coordinates centered at  $y_k \in \overline{B_k}$  and the fact that the Euclidean diameter of the ball  $B_k = B(x_k, \rho(x_k))$  is  $2\rho(x_k)$ , we observe that

$$(9.1.25) \quad \begin{aligned} |\omega \cap B_k| &= \int_0^{+\infty} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}_{\omega \cap B_k}(y_k + r\sigma) d\sigma \right) r^{d-1} dr \\ &= \int_0^{2\rho(x_k)} \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}_{\omega \cap B_k}(y_k + r\sigma) d\sigma \right) r^{d-1} dr \\ &= (2\rho(x_k))^d \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}_{\omega \cap B_k}(y_k + 2\rho(x_k)r\sigma) d\sigma \right) r^{d-1} dr, \end{aligned}$$

where  $\mathbb{1}_{\omega \cap B_k}$  denotes the characteristic function of the measurable set  $\omega \cap B_k$ . By using the Fubini-Tonelli theorem, we deduce from (9.1.25) that

$$(9.1.26) \quad \begin{aligned} |\omega \cap B_k| &\leq (2\rho(x_k))^d \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbb{1}_{\omega \cap B_k}(y_k + 2\rho(x_k)r\sigma) d\sigma \right) dr \\ &= (2\rho(x_k))^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left( \int_0^1 \mathbb{1}_{\omega \cap B_k}(y_k + 2\rho(x_k)r\sigma) dr \right) d\sigma \\ &= (2\rho(x_k))^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \left( \int_0^1 \mathbb{1}_{I_\sigma}(r) dr \right) d\sigma = (2\rho(x_k))^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |I_\sigma| d\sigma, \end{aligned}$$

where

$$(9.1.27) \quad I_\sigma = \{r \in [0, 1] : y_k + 2\rho(x_k)r\sigma \in \omega \cap B_k\}.$$

The estimate (9.1.26) implies that there exists  $\sigma_0(k) \in \mathbb{S}^{d-1}$  such that

$$(9.1.28) \quad |\omega \cap B_k| \leq (2\rho(x_k))^d |\mathbb{S}^{d-1}| |I_{\sigma_0(k)}|.$$

Recalling that  $B_k = B(x_k, \rho(x_k))$  and using the property (9.1.2), it follows from (9.1.28) that

$$(9.1.29) \quad 0 < \frac{\gamma |B(0, 1)|}{2^d |\mathbb{S}^{d-1}|} \leq \frac{|\omega \cap B(x_k, \rho(x_k))|}{(2\rho(x_k))^d |\mathbb{S}^{d-1}|} \leq |I_{\sigma_0(k)}| \leq 1.$$

**9.1.3. Step 3. Recovery of the  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -norm.** Let  $B_k$  be a good ball. We first notice that  $\|f\|_{L^2(B_k)} \neq 0$ , since  $f$  is a non-zero entire function. We consider the entire function

$$(9.1.30) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \phi(z) = |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{f(y_k + 2\rho(x_k)z\sigma_0(k))}{\|f\|_{L^2(B_k)}},$$

where  $y_k$  and  $\sigma_0(k)$  are defined in (9.1.24) and (9.1.28). We observe from (9.1.24) that

$$|\phi(0)| = |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{|f(y_k)|}{\|f\|_{L^2(B_k)}} = |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\|f\|_{L^\infty(B_k)}}{\|f\|_{L^2(B_k)}} \geq 1.$$

Instrumental in the proof of Theorem 5.2.1 is the following lemma proved by Kovrijkine in [42] (Lemma 1):

LEMMA 9.1.1. *Let  $I \subset \mathbb{R}$  be an interval of length 1 such that  $0 \in I$  and  $E \subset I$  be a subset of positive measure  $|E| > 0$ . There exists a positive constant  $C > 1$  such that for all analytic function  $\Phi$  on the open ball  $B_{\mathbb{C}}(0, 5)$  centered in zero with radius 5 such that  $|\Phi(0)| \geq 1$ , then*

$$\sup_{x \in I} |\Phi(x)| \leq \left( \frac{C}{|E|} \right)^{\frac{\ln M}{\ln 2}} \sup_{x \in E} |\Phi(x)|,$$

with  $M = \sup_{|z| \leq 4} |\Phi(z)| \geq 1$ .

Applying Lemma 9.1.1 with  $I = [0, 1]$ ,  $E = I_{\sigma_0(k)} \subset [0, 1]$  verifying  $|E| = |I_{\sigma_0(k)}| > 0$  according to (9.1.29), and the analytic function  $\Phi = \phi$  defined in (9.1.30) satisfying  $|\phi(0)| \geq 1$ , we obtain that

$$(9.1.31) \quad |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\sup_{x \in [0,1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))|}{\|f\|_{L^2(B_k)}} \leq \left( \frac{C}{|I_{\sigma_0(k)}|} \right)^{\frac{\ln M}{\ln 2}} |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\sup_{x \in I_{\sigma_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))|}{\|f\|_{L^2(B_k)}},$$

with

$$(9.1.32) \quad 1 \leq M = |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\sup_{|z| \leq 4} |f(y_k + 2\rho(x_k)z\sigma_0(k))|}{\|f\|_{L^2(B_k)}}.$$

It follows from (9.1.29) and (9.1.31) that

$$(9.1.33) \quad \sup_{x \in [0,1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))| \leq \left( \frac{2^d C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0,1)|} \right)^{\frac{\ln M}{\ln 2}} \sup_{x \in I_{\sigma_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))| \\ \leq M^{\frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{2^d C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0,1)|} \right)} \sup_{x \in I_{\sigma_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))|.$$

According to (9.1.27), we notice that

$$(9.1.34) \quad \sup_{x \in I_{\sigma_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))| \leq \|f\|_{L^\infty(\omega \cap B_k)}.$$

On the other hand, we deduce from (9.1.24) that

$$(9.1.35) \quad \|f\|_{L^\infty(B_k)} = |f(y_k)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\sigma_0(k))|.$$

It follows from (9.1.33), (9.1.34) and (9.1.35) that

$$(9.1.36) \quad \|f\|_{L^\infty(B_k)} \leq M^{\frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{2^d C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0,1)|} \right)} \|f\|_{L^\infty(\omega \cap B_k)}.$$

By using the analyticity of the entire function  $f$ , we observe that

$$(9.1.37) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad f(y_k + 2\rho(x_k)z\sigma_0(k)) = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{(\partial_x^\beta f)(y_k)}{\beta!} \sigma_0(k)^\beta (2\rho(x_k))^{\beta|z|} z^{|\beta|}.$$

By using that  $B_k = B(x_k, \rho(x_k))$  is a good ball,  $y_k \in \overline{B_k}$  and the continuity of the functions  $\partial_x^\beta f$ , we deduce from (9.1.23) and (9.1.37) that for all  $|z| \leq 4$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.1.38) \quad & |B_k|^{\frac{1}{2}} |f(y_k + 2\rho(x_k)z\sigma_0(k))| = \rho(x_k)^{\frac{d}{2}} |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} |f(y_k + 2\rho(x_k)z\sigma_0(k))| \\
 & \leq |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \rho(x_k)^{|\beta| + \frac{d}{2}} \frac{|(\partial_x^\beta f)(y_k)|}{\beta!} 8^{|\beta|} \leq |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \rho(x_k)^{|\beta| + \frac{d}{2}} \frac{\|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)}}{\beta!} 8^{|\beta|} \\
 & \leq |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} C_d(\delta, \varepsilon, m, R) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \left( \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\Gamma(|\beta| + d + 3)}{\beta!} (8\delta\tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} \right) \|f\|_{L^2(B_k)}.
 \end{aligned}$$

We recall the following estimate

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad |\beta|! \leq d^{|\beta|} \beta!,$$

which is obtained by using the Newton formula, see formula (0.3.3) in [60]. By using anew that the number of solutions to the equation  $\beta_1 + \dots + \beta_d = k$ , with  $k \geq 0$ ,  $d \geq 1$  and unknown  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ , is given by  $\binom{k+d-1}{k}$ , and that

$$\Gamma(|\beta| + d + 3) = (|\beta| + d + 2)!, \quad (|\beta| + d + 2)^{d+2} \leq (d + 2)! e^{|\beta| + d + 2},$$

according to (B.0.3) and (E.1.1), we notice from (9.1.13) that

$$\begin{aligned}
 (9.1.39) \quad & \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\Gamma(|\beta| + d + 3)}{\beta!} (8\delta\tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} = \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} \frac{(|\beta| + d + 2)!}{\beta!} (8\delta\tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} \\
 & \leq \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} (|\beta| + d + 2)^{d+2} \frac{|\beta|!}{\beta!} (8\delta\tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} \leq e^{d+2} (d + 2)! \sum_{\beta \in \mathbb{N}^d} (8\delta d e \tilde{C}_d(\varepsilon, R))^{|\beta|} \\
 & = e^{d+2} (d + 2)! \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k + d - 1}{k} (8\delta d e \tilde{C}_d(\varepsilon, R))^k \leq e^{d+2} (d + 2)! 2^{d-1} \sum_{k=0}^{+\infty} (16\delta d e \tilde{C}_d(\varepsilon, R))^k.
 \end{aligned}$$

We can now make the following choice for the positive parameter  $0 < \delta \leq 1$ , which is fixed from now and taken to be equal to

$$(9.1.40) \quad 0 < \delta = \delta_{d,\varepsilon,R} = \min \left( 1, \frac{1}{32 d e \tilde{C}_d(\varepsilon, R)} \right) \leq 1.$$

Setting  $D_d(\varepsilon, m, R) = C_d(\delta_{d,\varepsilon,R}, \varepsilon, m, R) > 0$ , it follows from (9.1.32), (9.1.38), (9.1.39) and (9.1.40) that

$$(9.1.41) \quad 1 \leq M \leq |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} (d + 2)! D_d(\varepsilon, m, R) e^{d+2} 2^d e^{\delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2}} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

We notice from (9.1.29) that

$$(9.1.42) \quad \frac{2^d C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0, 1)|} > 1,$$

since the positive constant given by Lemma 9.1.1 satisfies  $C > 1$ . With this choice, we deduce from (9.1.36) and (9.1.41) that

$$\|f\|_{L^\infty(B_k)} \leq \left( \frac{2^d C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0, 1)|} \right)^{\frac{\ln(D_d(\varepsilon, m, R) e^{d+2} 2^d |B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} (d+2)!) + \frac{\delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2}}{\ln 2} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\ln 2}} \|f\|_{L^\infty(\omega \cap B_k)}.$$

Recalling from the property (9.1.2) that

$$(9.1.43) \quad |\omega \cap B_k| \geq \gamma |B_k| > 0,$$

as  $B_k = B(x_k, \rho(x_k))$ , and setting

$$(9.1.44) \quad \tilde{\omega}_k = \left\{ x \in \omega \cap B_k : |f(x)| \leq \frac{2}{|\omega \cap B_k|} \int_{\omega \cap B_k} |f(y)| dy \right\},$$



we observe that

$$\int_{\omega \cap B_k} |f(x)| dx \geq \int_{(\omega \cap B_k) \setminus \tilde{\omega}_k} |f(x)| dx \geq \frac{2|(\omega \cap B_k) \setminus \tilde{\omega}_k|}{|\omega \cap B_k|} \int_{\omega \cap B_k} |f(x)| dx.$$

By using that the integral

$$\int_{\omega \cap B_k} |f(x)| dx > 0,$$

is positive<sup>1</sup>, since  $f$  is a non-zero entire function and  $|\omega \cap B_k| > 0$ , we obtain that

$$|(\omega \cap B_k) \setminus \tilde{\omega}_k| \leq \frac{1}{2} |\omega \cap B_k|,$$

which implies that

$$(9.1.45) \quad |\tilde{\omega}_k| = |\omega \cap B_k| - |(\omega \cap B_k) \setminus \tilde{\omega}_k| \geq \frac{1}{2} |\omega \cap B_k| \geq \frac{1}{2} \gamma |B_k| = \frac{1}{2} \gamma \rho(x_k)^d |B(0, 1)| > 0,$$

thanks to (9.1.43). By using again spherical coordinates as in (9.1.25) and (9.1.26), we observe that

$$(9.1.46) \quad |\tilde{\omega}_k| = |\tilde{\omega}_k \cap B_k| = (2\rho(x_k))^d \int_0^1 \left( \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{1}_{\tilde{\omega}_k \cap B_k}(y_k + 2\rho(x_k)r\sigma) d\sigma \right) r^{d-1} dr \\ \leq (2\rho(x_k))^d \int_{\mathbb{S}^{d-1}} |\tilde{I}_\sigma| d\sigma,$$

where

$$(9.1.47) \quad \tilde{I}_\sigma = \{r \in [0, 1] : y_k + 2\rho(x_k)r\sigma \in \tilde{\omega}_k \cap B_k\}.$$

As in (9.1.28), the estimate (9.1.46) implies that there exists  $\tilde{\sigma}_0(k) \in \mathbb{S}^{d-1}$  such that

$$(9.1.48) \quad |\tilde{\omega}_k| \leq (2\rho(x_k))^d |\mathbb{S}^{d-1}| |\tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}|.$$

We deduce from (9.1.45) and (9.1.48) that

$$(9.1.49) \quad 1 \geq |\tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}| \geq \frac{\gamma |B(0, 1)|}{2^{d+1} |\mathbb{S}^{d-1}|} > 0.$$

Applying anew Lemma 9.1.1 with  $I = [0, 1]$ ,  $E = \tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)} \subset [0, 1]$  verifying  $|E| = |\tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}| > 0$ , and the analytic function  $\Phi = \phi$  defined in (9.1.30) with  $\sigma_0(k)$  replaced by  $\tilde{\sigma}_0(k)$  satisfying  $|\phi(0)| \geq 1$ , we obtain that

$$(9.1.50) \quad |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\sup_{x \in [0, 1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))|}{\|f\|_{L^2(B_k)}} \\ \leq \left( \frac{C}{|\tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}|} \right)^{\frac{\ln M}{\ln 2}} |B_k|^{\frac{1}{2}} \frac{\sup_{x \in \tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))|}{\|f\|_{L^2(B_k)}},$$

where  $M \geq 1$  denotes the constant defined in (9.1.32). It follows from (9.1.49) and (9.1.50) that

$$(9.1.51) \quad \sup_{x \in [0, 1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))| \\ \leq \left( \frac{2^{d+1} C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0, 1)|} \right)^{\frac{\ln M}{\ln 2}} \sup_{x \in \tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))| \\ \leq M^{\frac{1}{\ln 2} \ln \left( \frac{2^{d+1} C |\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma |B(0, 1)|} \right)} \sup_{x \in \tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))|.$$

According to (9.1.47), we notice that

$$(9.1.52) \quad \sup_{x \in \tilde{I}_{\tilde{\sigma}_0(k)}} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))| \leq \|f\|_{L^\infty(\tilde{\omega}_k \cap B_k)}.$$

<sup>1</sup>This property can also be seen as a consequence of the Remez inequality, see e.g. [11] (Section 4.4).

It follows from (9.1.24), (9.1.51) and (9.1.52) that

$$(9.1.53) \quad \|f\|_{L^\infty(B_k)} = |f(y_k)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(y_k + 2\rho(x_k)x\tilde{\sigma}_0(k))| \\ \leq M^{\frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|}\right)} \|f\|_{L^\infty(\tilde{\omega}_k \cap B_k)}.$$

On the other hand, it follows from (9.1.44) that

$$(9.1.54) \quad \|f\|_{L^\infty(\tilde{\omega}_k \cap B_k)} \leq \frac{2}{|\omega \cap B_k|} \int_{\omega \cap B_k} |f(x)| dx.$$

We deduce from (9.1.53), (9.1.54) and the Cauchy-Schwarz inequality that

$$(9.1.55) \quad \|f\|_{L^2(B_k)} \leq |B_k|^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^\infty(B_k)} \\ \leq \frac{2|B_k|^{\frac{1}{2}}}{|\omega \cap B_k|} M^{\frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|}\right)} \int_{\omega \cap B_k} |f(x)| dx \\ \leq \frac{2|B_k|^{\frac{1}{2}}}{|\omega \cap B_k|^{\frac{1}{2}}} M^{\frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|}\right)} \|f\|_{L^2(\omega \cap B_k)}.$$

By using the property (9.1.43), it follows from (9.1.41), (9.1.42) and (9.1.55) that

$$(9.1.56) \quad \|f\|_{L^2(B_k)}^2 \leq \frac{4}{\gamma} M^{\frac{2}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|}\right)} \|f\|_{L^2(\omega \cap B_k)}^2 \\ \leq \frac{4}{\gamma} \left( |B(0,1)|^{\frac{1}{2}} (d+2)! D_d(\varepsilon, m, R) e^{d+2} 2^d e^{\delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2}} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \right)^{\frac{2}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|}\right)} \|f\|_{L^2(\omega \cap B_k)}^2.$$

Setting

$$\kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon) = \frac{4}{\sqrt{3}\gamma^{\frac{1}{2}}} \left( \frac{2^{d+1}C|\mathbb{S}^{d-1}|}{\gamma|B(0,1)|} \right)^{\frac{\ln(|B(0,1)|^{\frac{1}{2}}(d+2)!D_d(\varepsilon, m, R)e^{d+2}2^d)}{\ln 2}} > 0,$$

we deduce from (9.1.56) that there exists a positive universal constant  $\tilde{\kappa}_d > 1$  such that for any good ball  $B_k$ ,

$$(9.1.57) \quad \|f\|_{L^2(B_k)}^2 \leq \frac{3}{4} \kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon)^2 \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\ln 2} \delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \|f\|_{L^2(\omega \cap B_k)}^2.$$

By using anew from (9.1.3) that

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} \leq \sum_{\text{good balls}} \mathbb{1}_{B_k} \leq N_0 \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k},$$

it follows from (9.1.15) and (9.1.57) that

$$(9.1.58) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{4}{3} \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx \leq \frac{4}{3} \sum_{\text{good balls}} \|f\|_{L^2(B_k)}^2 \\ \leq \kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon)^2 \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\ln 2} \delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{\text{good balls}} \|f\|_{L^2(\omega \cap B_k)}^2 \\ \leq N_0 \kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon)^2 \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\ln 2} \delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \int_{\omega \cap (\bigcup_{\text{good balls}} B_k)} |f(x)|^2 dx \\ \leq N_0 \kappa_d(m, R, \gamma, \varepsilon)^2 \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\frac{2}{\ln 2} \delta_{d,\varepsilon,R}^{\varepsilon-2} N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

This ends the proof of Theorem 5.2.1.

### 9.2. Proof of Theorem 5.3.1

This section is devoted to the proof of Theorem 5.3.1. Let  $A$  be a closed operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  which is the infinitesimal generator of a strongly continuous contraction semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  satisfying the assumptions of Theorem 5.3.1. According to Lemma 9.3.1, we can assume that there exist some constants  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ,  $C_s > 1$ ,  $0 < t_0 \leq 1$ ,  $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$  with  $m_1 > 0$ ,  $m_2 \geq 0$  such that

$$(9.2.1) \quad \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Let  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  be a continuous function satisfying that there exist some constants  $0 \leq \delta < 2s - 1$ ,  $R > 0$  such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta.$$

Let  $\omega$  be a measurable subset of  $\mathbb{R}^d$  which is  $\gamma$ -thick with respect to the density  $\rho$ , that is,

$$\exists 0 < \gamma \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))|.$$

Thanks to the Hilbert Uniqueness Method, the null-controllability of the system (5.3.3) is equivalent to the observability of the adjoint system

$$\begin{cases} (\partial_t + A^*)g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

from the control subset  $\omega$  in any positive time  $T > 0$ . We shall prove that Theorem 5.3.1 can be deduced from the abstract observability result given by Theorem 2.2.1. In order to apply Theorem 2.2.1, it is therefore sufficient to check that the spectral inequality (2.2.1) and the dissipation estimate (2.2.2) hold when using the Hermite orthogonal projections  $(\pi_k)_{k \geq 0}$  defined in (2.3.6). It follows from Corollary 5.2.3 that there exist some positive constant  $\kappa_d(R, \gamma, \delta) > 0$ ,  $\tilde{C}_d(\delta, R) > 0$  and  $\tilde{\kappa}_d(R, \delta) > 0$  such that for all  $k \geq 1$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|\pi_k f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \kappa_d(R, \gamma, \delta) \left( \frac{\tilde{\kappa}_d}{\gamma} \right)^{\tilde{C}_d(\delta, R) k^{\frac{1+\delta}{2}}} \|\pi_k f\|_{L^2(\omega)}.$$

This establishes the spectral inequality (2.2.1) with the parameter  $0 < a = \frac{1+\delta}{2} < s$ . Let us now prove that the dissipation estimate (2.2.2) holds true as well. To that end, we begin by establishing that there exists a positive constant  $\tilde{C}_s(d) > 1$  such that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$(9.2.2) \quad \|(\mathcal{H} + d)^k (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\tilde{C}_s(d)^{1+k}}{t^{2m_1 k + m_2}} (k!)^{\frac{1}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

where  $\mathcal{H} = \sum_{j=1}^d \mathcal{H}_j$  denotes the harmonic oscillator with

$$(9.2.3) \quad \mathcal{H}_j + 1 = -\partial_{x_j}^2 + x_j^2 + 1 = (\partial_{x_j} + x_j)(-\partial_{x_j} + x_j), \quad 1 \leq j \leq d.$$

Let  $k \in \mathbb{N}^*$ . We deduce from (9.2.3) and Lemma 9.3.2 that there exists a finite family of real numbers  $(C_{l_1, l_2}^{2k-1})_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq 2k}}$  independent on the parameter  $1 \leq j \leq d$  such that

$$(\mathcal{H}_j + 1)^k = \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq 2k}} C_{l_1, l_2}^{2k-1} x_j^{l_1} \partial_{x_j}^{l_2}$$

and

$$(9.2.4) \quad \forall l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq l_1 + l_2 \leq 2k, \quad |C_{l_1, l_2}^{2k-1}| \leq 3^{2k-1} (2k)^{\frac{2k-l_1-l_2}{2}}.$$

By using that  $[\mathcal{H}_j + 1, \mathcal{H}_k + 1] = 0$  for all  $0 \leq j, k \leq d$ , we deduce from the multinomial formula that

$$\begin{aligned}
 (9.2.5) \quad & (\mathcal{H} + d)^k \\
 &= \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \prod_{j=1}^d (\mathcal{H}_j + 1)^{\gamma_j} = \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \prod_{j=1}^d \sum_{\substack{l_j, \tilde{l}_j \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_j + \tilde{l}_j \leq 2\gamma_j}} C_{l_j, \tilde{l}_j}^{2\gamma_j-1} x_j^{l_j} \partial_{x_j}^{\tilde{l}_j} \\
 &= \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ \alpha + \beta \leq 2\gamma}} \left( \prod_{j=1}^d C_{\alpha_j, \beta_j}^{2\gamma_j-1} \right) x^\alpha \partial_x^\beta = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, |\gamma|=k, \\ \alpha + \beta \leq 2\gamma}} \frac{k!}{\gamma!} \left( \prod_{j=1}^d C_{\alpha_j, \beta_j}^{2\gamma_j-1} \right) x^\alpha \partial_x^\beta.
 \end{aligned}$$

It follows from (9.2.5) that

$$(9.2.6) \quad (\mathcal{H} + d)^k = \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} c_{\alpha, \beta}^k x^\alpha \partial_x^\beta,$$

with

$$(9.2.7) \quad c_{\alpha, \beta}^k = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, |\gamma|=k, \\ \alpha + \beta \leq 2\gamma}} \frac{k!}{\gamma!} \left( \prod_{j=1}^d C_{\alpha_j, \beta_j}^{2\gamma_j-1} \right).$$

It follows from (9.2.4) and (9.2.7) that for all  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$  with  $|\alpha + \beta| \leq 2k$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.8) \quad |c_{\alpha, \beta}^k| &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, |\gamma|=k, \\ \alpha + \beta \leq 2\gamma}} \frac{k!}{\gamma!} \left( \prod_{j=1}^d 3^{2\gamma_j-1} (2\gamma_j)^{\frac{2\gamma_j - \alpha_j - \beta_j}{2}} \right) \\
 &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} 3^{2|\gamma|-d} (2k)^{\frac{2k - |\alpha + \beta|}{2}} = 3^{2k-d} d^k (2k)^{\frac{2k - |\alpha + \beta|}{2}}.
 \end{aligned}$$

We deduce from (9.2.1), (9.2.6) and (9.2.8) that for all  $k \geq 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.9) \quad & \|(\mathcal{H} + d)^k (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} |c_{\alpha, \beta}^k| \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k (2k)^{\frac{2k - |\alpha| - |\beta|}{2}} \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
 &\leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k (2k)^{\frac{2k - |\alpha| - |\beta|}{2s}} \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (|\alpha|)^{\frac{|\alpha|}{2s}} (|\beta|)^{\frac{|\beta|}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},
 \end{aligned}$$

when using above the convention  $0^0 = 1$ . With this convention, we directly notice from Lemma B.0.2 that

$$\forall x, y \geq 0, \quad x^y \leq e^x \Gamma(y+1) \quad \text{and} \quad \forall x, y \geq 1, \quad \Gamma(x)\Gamma(y) \leq \frac{B(1,1)}{2} \Gamma(x+y+1).$$

By using that  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  and the above estimates, it follows from (9.2.9) that for all  $k \geq 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

(9.2.10)

$$\begin{aligned}
& \|(\mathcal{H} + d)^k (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k e^{(2k)^s} \Gamma\left(\frac{2k - |\alpha| - |\beta|}{2s} + 1\right) \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|} e^{|\alpha+\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} \Gamma\left(\frac{|\alpha|}{2s} + 1\right) \Gamma\left(\frac{|\beta|}{2s} + 1\right) \|g\|_{L^2} \\
& \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k e^{4k} \Gamma\left(\frac{2k - |\alpha| - |\beta|}{2s} + 1\right) \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} \Gamma\left(\frac{|\alpha|}{2s} + 1\right) \Gamma\left(\frac{|\beta|}{2s} + 1\right) \|g\|_{L^2} \\
& \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k e^{4k} \frac{B(1,1)^2}{4} \Gamma\left(\frac{k}{s} + 5\right) \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} \|g\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Thanks to Stirling formula (B.0.5), we can find a positive constant  $C'_s > 1$  such that for all  $k \geq 1$ ,

$$(9.2.11) \quad \Gamma\left(\frac{k}{s}\right) \leq C'_s \sqrt{\frac{2\pi s}{k}} s^{-\frac{k}{s}} e^{-\frac{k}{s}} k^{\frac{k}{s}} \leq C'_s \sqrt{\frac{2\pi s}{k}} s^{-\frac{k}{s}} (k!)^{\frac{1}{s}},$$

since

$$\forall k \geq 1, \quad \frac{k^k}{k!} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k^j}{j!} = e^k.$$

By using from (B.0.2) that

$$\Gamma\left(\frac{k}{s} + 5\right) = \left(\frac{k}{s} + 4\right) \left(\frac{k}{s} + 3\right) \left(\frac{k}{s} + 2\right) \left(\frac{k}{s} + 1\right) \frac{k}{s} \Gamma\left(\frac{k}{s}\right),$$

it follows from (9.2.10) and (9.2.11) that for all  $k \geq 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

(9.2.12)

$$\begin{aligned}
& \|(\mathcal{H} + d)^k (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k e^{4k} \frac{B(1,1)^2}{4} \Gamma\left(\frac{k}{s} + 5\right) \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \sum_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha + \beta| \leq 2k}} 3^{2k-d} d^k e^{4k} \frac{B(1,1)^2}{4} \left(\frac{k}{s} + 4\right)^5 C'_s \sqrt{\frac{2\pi s}{k}} s^{-\frac{k}{s}} \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (k!)^{\frac{1}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq (2k+1)^{2d} 3^{2k-d} d^k e^{4k} \frac{B(1,1)^2}{4} \left(\frac{k}{s} + 4\right)^5 C'_s \sqrt{\frac{2\pi s}{k}} s^{-\frac{k}{s}} \frac{C_s^{1+2k}}{t^{2m_1 k + m_2}} (k!)^{\frac{1}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

We deduce from (9.2.12) that there exists a positive constant  $\tilde{C}_s(d) > 1$  such that for all  $k \geq 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$(9.2.13) \quad \|(\mathcal{H} + d)^k (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\tilde{C}_s(d)^{1+k}}{t^{2m_1 k + m_2}} (k!)^{\frac{1}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

The estimate (9.2.13) holds as well when  $k = 0$  since  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$  is a contraction semigroup on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\tilde{C}_s(d) > 1$  and  $0 < t_0 \leq 1$ . This ends the proof of the estimates (9.2.2).

With  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  the  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -Hermite basis, we next notice that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.14) \quad & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1 s+1}(2|\alpha|+d)^s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)(2|\alpha|+d)^{sk}}{k!} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} |\langle e^{-tA^*} g, (2|\alpha|+2d)^{\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 1} \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2,
 \end{aligned}$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denotes the floor function. By using the selfadjointness property of the harmonic oscillator  $\mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2$ , we deduce from (9.2.13), (9.2.14) and (E.0.2) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.15) \quad & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1 s+1}(2|\alpha|+d)^s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &\leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} |\langle e^{-tA^*} g, (\mathcal{H} + d)^{\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 1} \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} |\langle (\mathcal{H} + d)^{\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 1} (e^{-tA^*} g), \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} \|(\mathcal{H} + d)^{\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 1} (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
 \end{aligned}$$

It follows from (9.2.2) and (9.2.15) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.16) \quad & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1 s+1}(2|\alpha|+d)^s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} \frac{\tilde{C}_s(d)^{2\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 4}}{t^{4m_1(\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor + 1) + 2m_2}} \left( \left( \left\lfloor \frac{ks}{2} \right\rfloor + 1 \right) ! \right)^{\frac{2}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
 \end{aligned}$$

By using that  $\lfloor \frac{ks}{2} \rfloor \leq \frac{ks}{2}$  and that the Gamma function is increasing on  $[2, +\infty)$ , see Appendix B, we deduce from (9.2.16) and (B.0.3) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$\begin{aligned}
 (9.2.17) \quad & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1 s+1}(2|\alpha|+d)^s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \\
 &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k (2m_1 s+1)}{k!} \frac{\tilde{C}_s(d)^{4+ks}}{t^{2m_1 ks + 4m_1 + 2m_2}} \left( \left( \left\lfloor \frac{ks}{2} \right\rfloor + 1 \right) ! \right)^{\frac{2}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \frac{\tilde{C}_s(d)^{4+ks}}{t^{4m_1 + 2m_2}} \Gamma \left( \left\lfloor \frac{ks}{2} \right\rfloor + 2 \right)^{\frac{2}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
 &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \frac{\tilde{C}_s(d)^{4+ks}}{t^{4m_1 + 2m_2}} \Gamma \left( \frac{ks}{2} + 2 \right)^{\frac{2}{s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.
 \end{aligned}$$

By using Lemma B.0.2 (assertion (iii)) and  $\frac{2}{s} \geq 1$  since  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ , we can find a positive constant  $C_s'' > 1$  such that

$$(9.2.18) \quad \forall x \geq 1, \quad \Gamma(x)^{\frac{2}{s}} \leq C_s'' \Gamma\left(\frac{2x}{s}\right).$$

With the notation  $\tilde{C}_s = \tilde{C}_s(d)$ , we deduce from (9.2.17), (9.2.18) and (B.0.3) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_0$ ,

$$\begin{aligned}
(9.2.19) \quad & \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1s+1}(2|\alpha|+d)s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2}|^2 \leq C_s'' \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \frac{\tilde{C}_s^{4+ks}}{t^{4m_1+2m_2}} \Gamma\left(k + \frac{4}{s}\right) \|g\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_s'' \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \frac{\tilde{C}_s^{4+ks}}{t^{4m_1+2m_2}} \Gamma(k+8) \|g\|_{L^2}^2 \leq C_s'' \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k t^k}{k!} \frac{\tilde{C}_s^{4+ks}}{t^{4m_1+2m_2}} (k+7)! \|g\|_{L^2}^2 \\
& \leq C_s'' \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k t^k \frac{\tilde{C}_s^{4+ks}}{t^{4m_1+2m_2}} (k+7)^7 \|g\|_{L^2}^2 \leq C_s'' \left( \sum_{k=0}^{+\infty} (2\tilde{C}_s^s e t)^k \right) \frac{\tilde{C}_s^4}{t^{4m_1+2m_2}} 7! e^7 \|g\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

since  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  and

$$\frac{(k+7)^7}{7!} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(k+7)^j}{j!} \leq e^{k+7}.$$

It follows from (9.2.19) that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $0 < t \leq t_1$ ,

$$(9.2.20) \quad \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{2t^{2m_1s+1}(2|\alpha|+d)s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \leq \frac{2C_s'' \tilde{C}_s^4}{t^{4m_1+2m_2}} 7! e^7 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

with

$$0 < t_1 = \min(t_0, (4\tilde{C}_s^s e)^{-1}) \leq 1.$$

For any  $0 < t \leq t_1$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , the series

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{t^{2m_1s+1}(2|\alpha|+d)s} \langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha,$$

is therefore convergent in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  and defines a  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -function satisfying

$$(9.2.21) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\sqrt{2C_s'' 7!} \tilde{C}_s^2 e^{\frac{7}{2}}}{t^{2m_1+m_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad e^{-t^{2m_1s+1}\mathcal{H}^s} f = e^{-tA^*} g,$$

according to (5.3.5). It follows from (9.2.21) that for all  $0 < t \leq t_1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}
(9.2.22) \quad & \|(1 - \pi_k)(e^{-tA^*} g)\|_{L^2} = \|(1 - \pi_k)(e^{-t^{2m_1s+1}\mathcal{H}^s} f)\|_{L^2} = \|e^{-t^{2m_1s+1}\mathcal{H}^s} (1 - \pi_k) f\|_{L^2} \\
& \leq e^{-t^{2m_1s+1}(2k+d)s} \|(1 - \pi_k) f\|_{L^2} \leq e^{-t^{2m_1s+1}k^s} \|f\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

We deduce from (9.2.21) and (9.2.22) the following dissipation estimate

$$(9.2.23) \quad \forall 0 < t \leq t_1, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall k \geq 1,$$

$$\|(1 - \pi_k)(e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\sqrt{2C_s'' 7!} \tilde{C}_s^2 e^{\frac{7}{2}}}{t^{2m_1+m_2}} e^{-t^{2m_1s+1}k^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

It establishes the dissipation estimate (2.2.2) with the parameter  $0 < a = \frac{1+\delta}{2} < b = s$ . We can therefore deduce from Theorem 2.2.1 that the following observability estimate holds in any positive time

$$\exists C > 1, \forall T > 0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \exp\left(\frac{C}{T^{\frac{(1+\delta)(2m_1s+1)}{2s-1-\delta}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

This ends the proof of Theorem 5.3.1.

We close this section by noticing that the conclusions of Theorem 5.3.1 hold true as well when the quantitative regularizing estimates (5.3.2) holding for some  $\frac{1}{2} < s \leq 1$  are

replaced by the following assumption

$$\begin{aligned} \exists \frac{1}{2} < s \leq 1, \exists m_1, m_2 > 0, \exists C_1, C_2 > 0, \exists 0 < t_0 \leq 1, \forall 0 < t \leq t_0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{\frac{2t^{m_1}}{C_1}(2|\alpha|+d)s} |\langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 \leq \frac{C_2^2}{t^{2m_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

By resuming the above proof from (9.2.20), we indeed notice that for any  $0 < t \leq t_0$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , the series

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} e^{\frac{t^{m_1}}{C_1}(2|\alpha|+d)s} \langle e^{-tA^*} g, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha,$$

is convergent in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  and defines a  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -function satisfying

$$(9.2.24) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_2}{t^{m_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1} \mathcal{H}^s} f = e^{-tA^*} g,$$

according to (5.3.5). It follows from (9.2.24) that for all  $0 < t \leq t_0$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $k \geq 1$ ,

$$(9.2.25) \quad \begin{aligned} \|(1 - \pi_k)(e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= \|(1 - \pi_k)(e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1} \mathcal{H}^s} f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1} \mathcal{H}^s} (1 - \pi_k) f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1}(2k+d)s} \|(1 - \pi_k) f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1} k s} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

We deduce from (9.2.24) and (9.2.25) the following dissipation estimate

$$\forall 0 < t \leq t_0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall k \geq 1, \quad \|(1 - \pi_k)(e^{-tA^*} g)\|_{L^2} \leq \frac{C_2}{t^{m_2}} e^{-\frac{t^{m_1}}{C_1} k s} \|g\|_{L^2}.$$

It establishes the dissipation estimate (2.2.2) with the parameter  $0 < a = \frac{1+\delta}{2} < b = s$ . We can therefore deduce from Theorem 2.2.1 that the following observability estimate holds in any positive time

$$\exists C > 1, \forall T > 0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \exp\left(\frac{C}{T^{\frac{(1+\delta)m_1}{2s-1-\delta}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

### 9.3. Appendix of Chapter 9

**9.3.1. Instrumental lemmas.** This section is devoted to the proofs of instrumental lemmas:

LEMMA 9.3.1. *Let  $\frac{1}{2} < s \leq 1$ ,  $0 < t_0 \leq 1$  and  $A$  be a closed operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  which is the infinitesimal generator of a strongly continuous contraction semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . If the estimates*

$$(9.3.1) \quad \begin{aligned} \exists C > 1, \exists m_1 > 0, \exists m_2 \geq 0, \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA} g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|)+m_2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

hold, then the estimates

$$(9.3.2) \quad \begin{aligned} \exists \tilde{C} > 1, \exists \tilde{m}_1 > 0, \exists \tilde{m}_2 \geq 0, \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \\ \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\tilde{C}^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{\tilde{m}_1(|\alpha|+|\beta|)+\tilde{m}_2}} (\alpha!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

hold.



PROOF. We assume that the estimates (9.3.1) hold. It follows that there exist some positive constants  $(C_{\tilde{\alpha}}(d))_{\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\alpha}| \leq 2d}$  such that for all  $0 < t \leq t_0$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} & \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{(1+|x|^2)^{2d}} \right)^{\frac{1}{2}} \|(1+|x|^2)^d x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA} g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \sum_{\substack{\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^d, \\ |\tilde{\alpha}| \leq 2d}} C_{\tilde{\alpha}}(d) \|x^{\alpha+\tilde{\alpha}} \partial_x^\beta (e^{-tA} g)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq \sum_{\substack{\tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^d, \\ |\tilde{\alpha}| \leq 2d}} C_{\tilde{\alpha}}(d) \frac{C^{2d+1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{m_1(|\alpha|+|\beta|+2d)+m_2}} ((\alpha+\tilde{\alpha})!)^{\frac{1}{2s}} (\beta!)^{\frac{1}{2s}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

By using that

$$\forall \alpha, \tilde{\alpha} \in \mathbb{N}^d, \quad |\tilde{\alpha}| \leq 2d,$$

$$(\alpha + \tilde{\alpha})! = \prod_{j=1}^d (\alpha_j + \tilde{\alpha}_j)! \leq \prod_{j=1}^d (\alpha_j + 2d)! \leq \prod_{j=1}^d 2^{\alpha_j+2d} (\alpha_j)! (2d)! \leq (4^d (2d)!)^{d+|\alpha|} \alpha!,$$

we obtain that the estimates (9.3.2) hold with  $\tilde{m}_1 = m_1 > 0$  and  $\tilde{m}_2 = 2dm_1 + m_2 > 0$ .  $\square$

LEMMA 9.3.2. *For any  $k \in \mathbb{N}$ , there exists a finite family of real numbers  $(C_{l_1, l_2}^k)_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+1}}$  satisfying*

$$\prod_{j=0}^k ((-1)^j \partial_x + x) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+1}} C_{l_1, l_2}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

and

$$\forall l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+1, \quad |C_{l_1, l_2}^k| \leq 3^k (k+1)^{\frac{k+1-l_1-l_2}{2}},$$

while using for short the following abusive notation for possibly non-commutative differential operators

$$\prod_{j=0}^k A_j(x, D_x) := A_0(x, D_x) \dots A_k(x, D_x).$$

PROOF. We proceed by induction on  $k \in \mathbb{N}$ . For  $k = 0$  or  $k = 1$ , the result of Lemma 9.3.2 readily holds. Let us assume that it holds true for  $k \in \mathbb{N}$ . We observe that

$$\begin{aligned} (9.3.3) \quad & \prod_{j=0}^{k+1} ((-1)^j \partial_x + x) = \left( \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+1}} C_{l_1, l_2}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2} \right) ((-1)^{k+1} \partial_x + x) \\ & = \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+1}} (-1)^{k+1} C_{l_1, l_2}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2+1} + C_{l_1, l_2}^k x^{l_1+1} \partial_x^{l_2} + l_2 C_{l_1, l_2}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2-1} \\ & = \sum_{\substack{l_1 \geq 0, l_2 \geq 1, \\ 1 \leq l_1 + l_2 \leq k+2}} (-1)^{k+1} C_{l_1, l_2-1}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2} + \sum_{\substack{l_1 \geq 1, l_2 \geq 0, \\ 1 \leq l_1 + l_2 \leq k+2}} C_{l_1-1, l_2}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2} \\ & \quad + \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k}} (l_2 + 1) C_{l_1, l_2+1}^k x^{l_1} \partial_x^{l_2}. \end{aligned}$$

By setting for all  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$  with  $0 \leq l_1 + l_2 \leq k + 2$ ,

$$C_{l_1, l_2}^{k+1} = (-1)^{k+1} C_{l_1, l_2-1}^k \mathbb{1}_{[1, +\infty)}(l_2) + C_{l_1-1, l_2}^k \mathbb{1}_{[1, +\infty)}(l_1) + (l_2 + 1) C_{l_1, l_2+1}^k \mathbb{1}_{[0, k]}(l_1 + l_2),$$

we deduce from (9.3.3) that

$$\prod_{j=0}^{k+1} ((-1)^j \partial_x + x) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ 0 \leq l_1 + l_2 \leq k+2}} C_{l_1, l_2}^{k+1} x^{l_1} \partial_x^{l_2}.$$

By using the induction property, we deduce that for all  $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$  with  $0 \leq l_1 + l_2 \leq k + 2$ ,

$$\begin{aligned} & |C_{l_1, l_2}^{k+1}| \\ & \leq 3^k (k+1)^{\frac{k+1-l_1-(l_2-1)}{2}} + 3^k (k+1)^{\frac{k+1-(l_1-1)-l_2}{2}} + 3^k (k+1)^{\frac{k+1-l_1-(l_2+1)}{2}+1} \mathbb{1}_{[0, k]}(l_1 + l_2) \\ & \leq 3^k (k+2)^{\frac{k+2-l_1-l_2}{2}} + 3^k (k+2)^{\frac{k+2-l_1-l_2}{2}} + 3^k (k+2)^{\frac{k+2-l_1-l_2}{2}} = 3^{k+1} (k+2)^{\frac{k+2-l_1-l_2}{2}}. \end{aligned}$$

This ends the proof of Lemma 9.3.2.  $\square$



## Uncertainty principles in Gelfand-Shilov spaces and null-controllability

In this chapter, we give the proofs of the results presented in Sections 6.2, 6.3 and 6.4 of Chapter 6, taken from the article [51].

**Outline of the chapter.** In Section 6.2.1, we first establish general uncertainty principles given by Theorem 6.2.1. This result is then apply to the case of standard Gelfand-Shilov spaces in order to deduce Theorem 6.2.2 in Section 10.2. Section 10.3 focuses on functions with weighted Hermite expansions. It contained the proof of Theorem 6.2.5 in Subsection 10.3.1 and deals with examples given by Proposition 6.2.7, in Subsection 10.3.2. Section 10.4 is devoted to the proof of the spectral inequalities given by Theorem 6.3.2. The last Section 10.5 gives the proofs of Theorem 6.4.1 and Theorem 6.4.3 concerning the null-controllability of evolution equations whose adjoint system enjoys Gelfand-Shilov smoothing effects.

### 10.1. Proof of the general uncertainty principles given by Theorem 6.2.1

This section is devoted to the proof of Theorem 6.2.1. Let  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  be a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz positive mapping, with  $\mathbb{R}^d$  equipped with the euclidean norm, such that there exist some positive constants  $m > 0$ ,  $R > 0$  so that

$$(10.1.1) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R \langle x \rangle.$$

Let  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  be a measurable subset  $\gamma$ -thick with respect to the density  $\rho$ , that is,

$$\exists 0 < \gamma \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |\omega \cap B(x, \rho(x))| \geq \gamma |B(x, \rho(x))| = \gamma \rho(x)^d |B(0, 1)|,$$

where  $B(x, r)$  denotes the Euclidean ball centered at  $x \in \mathbb{R}^d$  with radius  $r > 0$ , and where  $|\cdot|$  denotes the Lebesgue measure. Since  $\rho$  is a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz positive mapping, Lemma A.0.1 in Appendix shows that the family of norms  $(\|\cdot\|_x)_{x \in \mathbb{R}^d}$  given by

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall y \in \mathbb{R}^d, \quad \|y\|_x = \frac{\|y\|}{\rho(x)},$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the Euclidean norm in  $\mathbb{R}^d$ , defines a slowly varying metric on  $\mathbb{R}^d$ .

**10.1.1. Step 1. Bad and good balls.** By using Theorem A.0.1 in appendix, we can find a sequence  $(x_k)_{k \geq 0}$  in  $\mathbb{R}^d$  such that

$$(10.1.2) \quad \exists K_0 \in \mathbb{N}, \forall (i_1, \dots, i_{K_0+1}) \in \mathbb{N}^{K_0+1} \text{ with } i_k \neq i_l \text{ if } 1 \leq k \neq l \leq K_0 + 1,$$

$$\bigcap_{k=1}^{K_0+1} B_{i_k} = \emptyset$$

and

$$(10.1.3) \quad \mathbb{R}^d = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k,$$

where

$$(10.1.4) \quad B_k = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_k\|_{x_k} < 1\} = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y - x_k\| < \rho(x_k)\} = B(x_k, \rho(x_k)).$$

Let us notice from Theorem A.0.1 that the non-negative integer  $K_0 = K_0(d)$  only depends on the dimension  $d$ , since the constant  $C \geq 1$  appearing in slowness condition (A.0.1) can be taken equal to  $C = 2$ . It follows from (10.1.2) and (10.1.3) that

$$(10.1.5) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 1 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{B_k}(x) \leq K_0,$$

where  $\mathbb{1}_{B_k}$  denotes the characteristic function of  $B_k$ . We deduce from (10.1.5) and the Fubini-Tonelli theorem that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{B_k} |g(x)|^2 dx \leq K_0 \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Let  $f \in GS_{\mathcal{N},\rho} \setminus \{0\}$  and  $\varepsilon > 0$ . We divide the family of balls  $(B_k)_{k \geq 0}$  into families of good and bad balls. A ball  $B_k$ , with  $k \in \mathbb{N}$ , is said to be good if it satisfies

$$(10.1.6) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \int_{B_k} |\rho(x)^p \partial_x^\beta f(x)|^2 dx \leq \varepsilon^{-1} 2^{2(p+|\beta|)+d+1} K_0 N_{p,|\beta|}^2 \int_{B_k} |f(x)|^2 dx.$$

On the other hand, a ball  $B_k$ , with  $k \in \mathbb{N}$ , which is not good, is said to be bad, that is, when

$$(10.1.7) \quad \exists (p_0, \beta_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d, \quad \int_{B_k} |\rho(x)^{p_0} \partial_x^{\beta_0} f(x)|^2 dx > \varepsilon^{-1} 2^{2(p_0+|\beta_0|)+d+1} K_0 N_{p_0,|\beta_0|}^2 \int_{B_k} |f(x)|^2 dx.$$

If  $B_k$  is a bad ball, it follows from (10.1.7) that there exists  $(p_0, \beta_0) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d$  such that

$$(10.1.8) \quad \int_{B_k} |f(x)|^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2^{2(p_0+|\beta_0|)+d+1} K_0 N_{p_0,|\beta_0|}^2} \int_{B_k} \rho(x)^{2p_0} |\partial_x^{\beta_0} f(x)|^2 dx \\ \leq \sum_{(p,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d} \frac{\varepsilon}{2^{2(p+|\beta|)+d+1} K_0 N_{p,|\beta|}^2} \int_{B_k} \rho(x)^{2p} |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx.$$

By summing over all the bad balls and by using from (10.1.2) that

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} \leq \sum_{\text{bad balls}} \mathbb{1}_{B_k} \leq K_0 \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k},$$

we deduce from (10.1.8) and the Fubini-Tonelli theorem that

$$(10.1.9) \quad \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx \leq \sum_{\text{bad balls}} \int_{B_k} |f(x)|^2 dx \\ \leq \sum_{(p,\beta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^d} \frac{\varepsilon}{2^{2(p+|\beta|)+d+1} N_{p,|\beta|}^2} \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |\rho(x)^p \partial_x^\beta f(x)|^2 dx.$$

By using that the number of solutions to the equation  $p + \beta_1 + \dots + \beta_d = m$ , with  $m \geq 0$ ,  $d \geq 1$  and unknowns  $p \in \mathbb{N}$  and  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ , is given by  $\binom{m+d}{m}$ , we obtain from (10.1.9) that

$$(10.1.10) \quad \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx \leq \varepsilon \sum_{m \geq 0} \frac{\binom{m+d}{m}}{2^{d+1} 4^m} \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2 \\ \leq \varepsilon \sum_{m \geq 0} \frac{2^{m+d}}{2^{d+1} 4^m} \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2 = \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2,$$

since

$$\binom{m+d}{m} \leq \sum_{j=0}^{m+d} \binom{m+d}{j} = 2^{m+d}.$$

Recalling from (10.1.3) that

$$1 \leq \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} + \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k},$$

we notice that

$$(10.1.11) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx + \int_{\bigcup_{\text{bad balls}} B_k} |f(x)|^2 dx.$$

It follows from (10.1.10) and (10.1.11) that

$$(10.1.12) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx + \varepsilon \|f\|_{GS_{N,\rho}}^2.$$

**10.1.2. Step 2. Properties on good balls.** As the ball  $B(0, 1)$  is an Euclidean ball, the Sobolev embedding

$$W^{d,2}(B(0, 1)) \hookrightarrow L^\infty(B(0, 1)),$$

see e.g. [1] (Theorem 4.12), implies that there exists a positive constant  $C_d \geq 1$  depending only the dimension  $d \geq 1$  such that

$$(10.1.13) \quad \forall u \in W^{d,2}(B(0, 1)), \quad \|u\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C_d \|u\|_{W^{d,2}(B(0,1))}.$$

By translation invariance and homogeneity of the Lebesgue measure, it follows from (10.1.1), (10.1.4) and (10.1.13) that for all  $u \in W^{d,2}(B_k)$ ,

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(B_k)}^2 &= \|x \mapsto u(x_k + x\rho(x_k))\|_{L^\infty(B(0,1))}^2 \leq C_d^2 \|x \mapsto u(x_k + x\rho(x_k))\|_{W^{d,2}(B(0,1))}^2 \\ &= C_d^2 \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} \rho(x_k)^{2|\alpha|-d} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx = C_d^2 \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} m^{2|\alpha|-d} \left(\frac{\rho(x_k)}{m}\right)^{2|\alpha|-d} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

and

$$(10.1.14) \quad \begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(B_k)}^2 &\leq C_d^2 \max(m, m^{-1})^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} \left(\frac{\rho(x_k)}{m}\right)^d |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx \\ &= C_d^2 \max(1, m^{-1})^{2d} \rho(x_k)^d \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq d}} \int_{B_k} |\partial_x^\alpha u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

We deduce from (10.1.14) that for all  $u \in W^{d,2}(B_k)$ ,

$$(10.1.15) \quad \|u\|_{L^\infty(B_k)} \leq C_d \max(1, m^{-1})^d \rho(x_k)^{\frac{d}{2}} \|u\|_{W^{d,2}(B_k)}.$$

Let  $B_k$  be a good ball. By using the fact that  $\rho$  is a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz function, we notice that

$$(10.1.16) \quad \forall x \in B_k = B(x_k, \rho(x_k)), \quad 0 < \rho(x_k) \leq 2\rho(x).$$

We deduce from (10.1.15) and (10.1.16) that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $B_k$  is a good ball

$$(10.1.17) \quad \begin{aligned} &\rho(x_k)^{|\beta|+\frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^d \rho(x_k)^{|\beta|+d} \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_d \max(1, m^{-1})^d \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\rho(x_k)^{|\beta|+d} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_d \max(1, m^{-1})^{d2^{|\beta|+d}} \left( \sum_{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, |\tilde{\beta}| \leq d} \|\rho(x)^{|\beta|+d} \partial_x^{\beta+\tilde{\beta}} f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

By using (10.1.1) and the definition of good balls (10.1.6), it follows from (10.1.17) and the fact that  $\mathcal{N}$  is non-decreasing with respect to the two indexes that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that  $B_k$  is a good ball

$$(10.1.18) \quad \begin{aligned} & \rho(x_k)^{|\beta|+\frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)} \\ & \leq C_d \max(1, m^{-1})^d 2^{|\beta|+d} \left( \sum_{\substack{\tilde{\beta} \in \mathbb{N}^d, \\ |\tilde{\beta}| \leq d}} \varepsilon^{-1} 2^{2(2|\beta|+|\tilde{\beta}|)+3d+1} K_0 N_{|\beta|+d, |\beta|+|\tilde{\beta}|}^2 \|f\|_{L^2(B_k)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq \varepsilon^{-\frac{1}{2}} K_{d,m} 8^{|\beta|} N_{|\beta|+d, |\beta|+d} \|f\|_{L^2(B_k)}, \end{aligned}$$

with

$$K_{d,m} = C_d \max(1, m^{-1})^d \sqrt{2K_0} (8\sqrt{2})^d (d+1)^{\frac{d}{2}} \geq 1,$$

since  $C_d \geq 1$ .

**10.1.3. Step 3 : Recovery of the  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -norm.** Let  $B_k$  be a good ball. Let us assume that  $\|f\|_{L^2(B_k)} \neq 0$ . We can therefore define the following function

$$(10.1.19) \quad \forall y \in B(0, 1), \quad \phi(y) = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho(x_k)^{\frac{d}{2}} \frac{f(x_k + \rho(x_k)y)}{K_{d,m} N_{d,d} \|f\|_{L^2(B_k)}}.$$

We observe that

$$\|\phi\|_{L^\infty(B(0,1))} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho(x_k)^{\frac{d}{2}} \frac{\|f\|_{L^\infty(B_k)}}{K_{d,m} N_{d,d} \|f\|_{L^2(B_k)}} \geq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{|B(0, 1)|^{\frac{1}{2}} K_{d,m} N_{d,d}},$$

and

$$(10.1.20) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta \phi\|_{L^\infty(B(0,1))} = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \rho(x_k)^{|\beta|+\frac{d}{2}} \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(B_k)}}{K_{d,m} N_{d,d} \|f\|_{L^2(B_k)}}.$$

It follows from (10.1.18) and (10.1.20) that

$$(10.1.21) \quad \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta \phi\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq 8^{|\beta|} \frac{N_{|\beta|+d, |\beta|+d}}{N_{d,d}}.$$

We deduce from (10.1.21) that  $\phi \in \mathcal{C}_{\mathcal{M}'}(B(0, 1))$  with

$$\mathcal{M}' = (M'_p)_{p \in \mathbb{N}} = \left( 8^p \frac{N_{p+d, p+d}}{N_{d,d}} \right)_{p \in \mathbb{N}}.$$

The assumption that the diagonal sequence  $\mathcal{M} = (N_{p,p})_{p \in \mathbb{N}}$  is logarithmically-convex and quasi-analytic implies that these two properties hold true as well for the sequence  $\mathcal{M}'$ . Indeed, the logarithmic convexity of  $\mathcal{M}'$  is straightforward and since

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{M'_p}{M'_{p+1}} = \frac{1}{8} \sum_{p=d}^{+\infty} \frac{N_{p,p}}{N_{p+1, p+1}},$$

we deduce from the quasi-analyticity of  $\mathcal{M}$  and from the Denjoy-Carleman's Theorem (Theorem 3.2.1) that the sequence  $\mathcal{M}'$  is also quasi-analytic. Furthermore, we observe from the definition of the Bang degree (3.2.2) and the equality

$$\forall 0 < t \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{-\log t < p \leq n} \frac{M'_{p-1}}{M'_p} = \frac{1}{8} \sum_{-\log(te^{-d}) < p \leq n+d} \frac{N_{p-1, p-1}}{N_{p,p}},$$

that

$$(10.1.22) \quad \forall 0 < t \leq 1, \quad n_{t, \mathcal{M}', 2ed} = n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de} - d \leq n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de}.$$

Setting

$$E_k = \left\{ \frac{x - x_k}{\rho(x_k)} \in B(0, 1) : x \in B_k \cap \omega \right\} \subset B(0, 1),$$

we notice from (10.1.4) that

$$(10.1.23) \quad |E_k| = \frac{|\omega \cap B_k|}{\rho(x_k)^d} \geq \frac{\gamma|B_k|}{\rho(x_k)^d} \geq \gamma|B(0,1)| > 0,$$

since  $\omega$  is  $\gamma$ -thick with respect to  $\rho$  and  $B_k = B(x_k, \rho(x_k))$ . From now on, we shall assume that

$$(10.1.24) \quad 0 < \varepsilon \leq N_{0,0}^2.$$

We deduce from (10.1.22) and Proposition 3.2.10 applied with the function  $\phi$  and the measurable subset  $E_k$  of the bounded convex open ball  $B(0,1)$  that there exists a positive constant  $D_\varepsilon = D(\varepsilon, \mathcal{N}, d, \gamma, m) > 1$  independent on  $\phi$  and  $k$  such that

$$(10.1.25) \quad \int_{B(0,1)} |\phi(x)|^2 dx \leq D_\varepsilon \int_{E_k} |\phi(x)|^2 dx,$$

with

$$D_\varepsilon = \frac{2}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}'}(2n_{t, \mathcal{M}', 2ed}) \right)^{4n_{t, \mathcal{M}', 2ed}},$$

and

$$t = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{\max(1, |B(0,1)|^{\frac{1}{2}}) K_{d,m} N_{d,d}}.$$

Notice that from (10.1.24), we have

$$0 < t \leq 1,$$

since  $K_{d,m} \geq 1$  and  $\mathcal{N}$  is non-decreasing with respect to the two indexes. Let us also notice from the definitions in (3.2.3) that

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq \Gamma_{\mathcal{M}'}(n) \leq \Gamma_{\mathcal{M}}(n+d).$$

We deduce from (10.1.22) and the non-decreasing property of  $\Gamma_{\mathcal{M}'}$  that

$$(10.1.26) \quad \begin{aligned} D_\varepsilon &\leq \frac{2}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t, \mathcal{M}', 2ed} + d) \right)^{4n_{t, \mathcal{M}', 2ed}} \\ &\leq \frac{2}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de}) \right)^{4n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de}}. \end{aligned}$$

Let us denote

$$C_\varepsilon = \frac{2}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de}) \right)^{4n_{te^{-d}, \mathcal{M}, 16de}}.$$

We deduce from (10.1.19), (10.1.23), (10.1.25) and (10.1.26) that

$$(10.1.27) \quad \int_{B_k} |f(x)|^2 dx \leq C_\varepsilon \int_{\omega \cap B_k} |f(x)|^2 dx.$$

Let us notice that the above estimate holds as well when  $\|f\|_{L^2(B_k)} = 0$ . By using anew from (10.1.2) that

$$\mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} \leq \sum_{\text{good balls}} \mathbb{1}_{B_k} \leq K_0 \mathbb{1}_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k},$$



it follows from (10.1.12) and (10.1.27) that

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \int_{\bigcup_{\text{good balls}} B_k} |f(x)|^2 dx + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2 \\
&\leq \sum_{\text{good balls}} \|f\|_{L^2(B_k)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2 \\
&\leq C_\varepsilon \sum_{\text{good balls}} \int_{\omega \cap B_k} |f(x)|^2 dx + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2 \\
&\leq K_0 C_\varepsilon \int_{\omega \cap (\bigcup_{\text{good balls}} B_k)} |f(x)|^2 dx + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2.
\end{aligned}$$

The last inequality readily implies that

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq K_0 C_\varepsilon \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{\mathcal{N},\rho}}^2.$$

This ends the proof of Theorem 6.2.1.

## 10.2. Application to standard Gelfand-Shilov spaces

This section is devoted to proof of Theorem 6.2.2. The first subsection presents the proof of a useful lemma. The core of the proof of Theorem 6.2.2 is given in the second subsection.

**10.2.1. Examples of quasi-analytic sequences.** This section is devoted to provide some examples of quasi-analytic sequences with quantitative estimates on the Bang degree  $n_{t,\mathcal{M},r}$  defined in (3.2.2):

LEMMA 10.2.1. *Let  $0 \leq s \leq 1$ ,  $A \geq 1$  and  $\mathcal{M}_s = (A^p(p!)^s)_{p \in \mathbb{N}}$ . If  $0 \leq s < 1$ , then for all  $0 < t \leq 1$ ,  $r > 0$ ,*

$$n_{t,\mathcal{M}_s,r} \leq 2^{\frac{1}{1-s}} (1 - \log t + (Ar)^{\frac{1}{1-s}}).$$

If  $s = 1$ , then for all  $0 < t \leq 1$ ,  $r > 0$ ,

$$(10.2.1) \quad n_{t,\mathcal{M}_1,r} \leq (1 - \log t)e^{Ar}.$$

Moreover,

$$\forall 0 \leq s \leq 1, \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq \gamma_{\mathcal{M}_s}(p) \leq s.$$

PROOF. Let  $0 \leq s \leq 1$  and  $0 < t \leq 1$ . The sequence  $\mathcal{M}_s$  is logarithmically convex. By using that the Riemann series

$$A^{-1} \sum \frac{1}{p^s} = \sum \frac{A^{p-1}((p-1)!)^s}{A^p(p!)^s}$$

is divergent, we notice that for all  $r > 0$ ,  $n_{t,\mathcal{M}_s,r} < +\infty$ . When  $0 \leq s < 1$ , we have that for all integers  $p \geq 1$ ,

$$\frac{1}{1-s} ((p+1)^{1-s} - p^{1-s}) = \int_p^{p+1} \frac{1}{x^s} dx \leq \frac{1}{p^s}.$$

It follows that for all  $N \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{1}{1-s} ((N+1)^{1-s} - (-\log t + 1)^{1-s}) \leq \sum_{-\log t < p \leq N} \frac{1}{p^s}.$$

By taking  $N = n_{t,\mathcal{M}_s,r}$  and since  $0 < 1-s \leq 1$ , it follows that

$$n_{t,\mathcal{M}_s,r} \leq \left( (1 - \log t)^{1-s} + Ar \right)^{\frac{1}{1-s}}.$$

The result then follows by using the basic estimate

$$\forall x, y \geq 0, \quad (x+y)^{\frac{1}{1-s}} \leq 2^{\frac{1}{1-s}} \max \left( x^{\frac{1}{1-s}}, y^{\frac{1}{1-s}} \right) \leq 2^{\frac{1}{1-s}} \left( x^{\frac{1}{1-s}} + y^{\frac{1}{1-s}} \right).$$

By proceeding in the same manner in the case when  $s = 1$ , we deduce the upper bound (10.2.1) thanks to the formula

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \log(p+1) - \log p = \int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p}.$$

By noticing that

$$\forall 0 \leq s \leq 1, \forall j \in \mathbb{N}^*, \quad (j+1)^s - j^s = \int_j^{j+1} \frac{s}{x^{1-s}} dx \leq s \frac{1}{j^{1-s}},$$

we finally obtain that for all  $0 \leq s \leq 1$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\gamma_{\mathcal{M}_s}(p) = \sup_{1 \leq j \leq p} j \left( \frac{M_{j+1} M_{j-1}}{M_j^2} - 1 \right) = \sup_{1 \leq j \leq p} j^{1-s} ((j+1)^s - j^s) \leq s < +\infty.$$

□

**10.2.2. Proof of Theorem 6.2.2.** Let  $A \geq 1$ ,  $0 < \mu \leq 1$ ,  $\nu > 0$  with  $\mu + \nu \geq 1$  and  $0 \leq \delta \leq \frac{1-\mu}{\nu} \leq 1$ . Let  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ . We first notice that if the quantity

$$\sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} = +\infty,$$

is infinite, then the result of Theorem 6.2.2 clearly holds. We can therefore assume that

$$(10.2.2) \quad \sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} < +\infty.$$

By assumption, we have

$$(10.2.3) \quad \exists m, R > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta.$$

We deduce from (10.2.2), (10.2.3) and Lemma C.0.2 that

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad & \|\rho(x)^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq R^p \|\langle x \rangle^{\delta p} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq R^p (4^\nu e^\nu A)^{p+|\beta|} (p!)^{\delta\nu} (|\beta|!)^\mu \sup_{q \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^q \partial_x^\gamma f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{q+|\gamma|} (q!)^\nu (|\gamma|!)^\mu} \\ & \leq (4^\nu e^\nu \max(1, R) A)^{p+|\beta|} (p!)^{\delta\nu} (|\beta|!)^\mu \sup_{q \in \mathbb{N}, \gamma \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^q \partial_x^\gamma f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{q+|\gamma|} (q!)^\nu (|\gamma|!)^\mu}, \end{aligned}$$

which implies that

$$\|f\|_{GS_{\mathcal{N}, \rho}} \leq \sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} < +\infty,$$

with the non-decreasing sequence

$$\mathcal{N} = \left( (4^\nu e^\nu \max(1, R) A)^{p+q} (p!)^{\delta\nu} (q!)^\mu \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}.$$

The assumption  $0 \leq \delta \leq \frac{1-\mu}{\nu}$  implies that the diagonal sequence

$$\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}} = \left( (4^\nu e^\nu \max(1, R) A)^{2p} (p!)^{\delta\nu + \mu} \right)_{p \in \mathbb{N}},$$

is a logarithmically convex quasi-analytic sequence thanks to the Denjoy-Carleman's theorem (Theorem 3.2.1) and since  $\delta\nu + \mu \leq 1$ . Since  $\omega$  is assumed to be  $\gamma$ -thick with respect to  $\rho$  for some  $0 < \gamma \leq 1$ , we deduce from Theorem 6.2.1 that there exist some

constants  $K = K(d) \geq 1$ ,  $r = r(d) \geq 1$  and  $K' = K'(d, m, R, \delta, \mu, \nu) \geq 1$  so that for all  $0 < \varepsilon \leq M_0^2 = 1$ ,

$$(10.2.4) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon, A} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{N, \rho}}^2 \\ \leq C_{\varepsilon, A} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \left( \sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\| \langle x \rangle^p \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu} \right)^2,$$

where

$$(10.2.5) \quad C_{\varepsilon, A} = \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{M}}(2n_{t_0, \mathcal{M}, r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{M}, r}}$$

with

$$0 < t_0 = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K' A^{2d}} \leq 1.$$

Direct computations

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{p > -\log t_0}^N \frac{M_{p-1}}{M_p} = (4^\nu e^\nu \max(1, R) A)^{-2} \sum_{p > -\log t_0}^N \frac{((p-1)!)^{\delta\nu+\mu}}{(p!)^{\delta\nu+\mu}},$$

show that

$$n_{t_0, \mathcal{M}, r} = n_{t_0, \mathcal{M}_{\delta\nu+\mu}, r' A^2},$$

with

$$\mathcal{M}_{\delta\nu+\mu} = ((p!)^{\delta\nu+\mu})_{p \in \mathbb{N}} \quad \text{and} \quad r' = r 16^\nu e^{2\nu} \max(1, R^2).$$

By using from Lemma 10.2.1 that  $\Gamma_{\mathcal{M}_{\delta\nu+\mu}}$  is bounded, it follows that there exists a positive constant  $D \geq 1$  independent on  $\delta$ ,  $\nu$  and  $\mu$  such that

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Gamma_{\mathcal{M}}(n) = \Gamma_{\mathcal{M}_{\delta\nu+\mu}}(n) \leq D.$$

By using anew Lemma 10.2.1 and (10.2.5), we deduce that when  $0 \leq \delta\nu + \mu < 1$ ,

$$(10.2.6) \quad 0 < C_{\varepsilon, A} \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{4n_{t_0, \mathcal{M}_{\delta\nu+\mu}, r' A^2}} \\ \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{2^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}+2} (1-\log t_0 + (A^2 r')^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}})} \\ = \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{2^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}+2} (1+\log K' + 2d \log A - \frac{1}{2} \log \varepsilon + (A^2 r')^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}})}.$$

Since  $0 \leq \log A \leq A \leq A^{\frac{2}{1-\delta\nu-\mu}}$  and  $\log \varepsilon \leq 0$ , it follows from (10.2.6) that

$$0 < C_{\varepsilon, A} \leq \left( \frac{\kappa_d}{\gamma} \right)^{D' (1-\log \varepsilon + A^{\frac{2}{1-\delta\nu-\mu}})},$$

with  $D' = 2^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}+2} \max \left( 1 + \log K', 2d + r'^{\frac{1}{1-\delta\nu-\mu}}, \frac{1}{2} \right) + 1$  and  $\kappa_d = \max(K, 2dD)$ . On the other hand, when  $\delta\nu + \mu = 1$ , Lemma 10.2.1 and the estimates (10.2.5) imply that

$$(10.2.7) \quad 0 < C_{\varepsilon, A} \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{4n_{t_0, \mathcal{M}_1, r' A^2}} \\ \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{4(1-\log t_0) e^{r' A^2}} \\ \leq \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} D \right)^{4(1+\log K' + 2d \log A - \frac{1}{2} \log \varepsilon) e^{r' A^2}}.$$

While setting  $D' = 4 \max(1 + \log K', 2d, r', \frac{1}{2}) + 1$ , we obtain from (10.2.7) that

$$0 < C_{\varepsilon, A} \leq \left( \frac{\kappa_d}{\gamma} \right)^{D'(1 + \log A - \log \varepsilon) e^{D'A^2}},$$

where  $\kappa_d = \max(K, 2dD)$ . This ends the proof of Theorem 6.2.2.

### 10.3. Uncertainty principles for weighted Hermite expansions

**10.3.1. Proof of Theorem 6.2.5.** Let  $0 \leq \delta \leq 1$  and  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be a non-negative continuous function such that the associated sequence  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  in (6.2.3) satisfies the assumptions (H1), (H2) and (H3) $_{\frac{1+\delta}{2}}$ . Beforehand, let us notice that the logarithmic convexity property of the sequence  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$ , that is,

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad M_p^2 \leq M_{p+1} M_{p-1},$$

implies that

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{M_p}{M_{p+1}} \leq \frac{M_{p-1}}{M_p} \leq \frac{M_0}{M_1},$$

since  $M_p > 0$  for all  $p \in \mathbb{N}$ . It follows that the modified sequence  $(M'_p)_{p \in \mathbb{N}} = \left( \left( \frac{M_0}{M_1} \right)^p M_p \right)_{p \in \mathbb{N}}$  is a non-decreasing logarithmically convex sequence. Let  $f \in GS_\Theta$  and  $s = \frac{1+\delta}{2}$ . According to Proposition 6.2.3, there exists a positive constant  $D_{\Theta, d, \delta} \geq 1$  independent on  $f$ , such that for all  $r \geq 0$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq (D_{\Theta, d, \delta})^{1+r+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{r+1+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta} \\ &= (D_{\Theta, d, \delta})^{1+r+|\beta|} \left( \frac{M_1}{M_0} \right)^s \left\lfloor \frac{r+1+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \right\rfloor + s \left( M'_{\lfloor \frac{r+1+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta} \\ &\leq D'^{1+r+|\beta|} \left( M'_{\lfloor \frac{r+1+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}, \end{aligned}$$

where  $D' = D'(\Theta, d, \delta) \geq 1$  is a new positive constant. Since the sequence  $(M'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  is non-decreasing and  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ , we deduce that

$$\forall r \geq 0, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq D'^{1+r+|\beta|} \left( M'_{\lfloor \frac{r+|\beta|}{2s} \rfloor + d+3} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.$$

Since

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta,$$

it follows that  $f \in GS_{\mathcal{N}, \rho}$  and

$$\|f\|_{GS_{\mathcal{N}, \rho}} \leq \|f\|_{GS_\Theta}$$

with

$$\mathcal{N} = (N_{p,q})_{p,q \in \mathbb{N}^d} = \left( \max(R, 1)^p D'^{1+p+q} \left( M'_{\lfloor \frac{\delta p+q}{1+\delta} \rfloor + d+3} \right)^{\frac{1+\delta}{2}} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}.$$

We conclude by applying Theorem 6.2.1. To that end, we notice that the non-decreasing property of the sequence  $(M'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  ensures that the sequence  $\mathcal{N}$  is non-decreasing with respect to the two indexes. We deduce from the Denjoy-Carleman Theorem (Theorem 3.2.1) and assumption (H3) $_{\frac{1+\delta}{2}}$  that the diagonal sequence

$$\mathcal{N}' = (N_{p,p})_{p \in \mathbb{N}} = \left( \max(R, 1)^p D'^{1+2p} (M'_{p+d+3})^{\frac{1+\delta}{2}} \right)_{p \in \mathbb{N}},$$

is quasi-analytic since

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{N_{p,p}}{N_{p+1,p+1}} = \frac{M_1}{M_0 \max(R, 1) D'^2} \sum_{p=d+3}^{+\infty} \left( \frac{M_p}{M_{p+1}} \right)^{\frac{1+\delta}{2}} = +\infty.$$

By applying Theorem 6.2.1, it follows that there exist some positive constants  $K = K(d), r = r(d) \geq 1$  and  $K' = K'(d, m) \geq 1$  such that for all  $0 < \varepsilon \leq N_{0,0}^2$ ,

$$(10.3.1) \quad \forall f \in GS_{\Theta}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C_{\varepsilon} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \|f\|_{GS_{\Theta}}^2,$$

where

$$(10.3.2) \quad C_{\varepsilon} = \frac{K}{\gamma} \left( \frac{2d}{\gamma} \Gamma_{\mathcal{N}'}(2n_{t_0, \mathcal{N}', r}) \right)^{4n_{t_0, \mathcal{N}', r}},$$

with  $n_{t_0, \mathcal{N}', r}$  being defined in (3.2.2) and

$$0 < t_0 = \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{K' N_{d,d}} \leq 1.$$

Direct computations

$$\forall N \geq 1, \quad \sum_{p > -\log t_0}^N \frac{N_{p-1, p-1}}{N_{p,p}} = \frac{M_1}{M_0 \max(R, 1) D'^2} \sum_{p > -\log t_0 + d+3}^{N+d+3} \left( \frac{M_{p-1}}{M_p} \right)^{\frac{1+\delta}{2}},$$

show that

$$(10.3.3) \quad n_{t_0, \mathcal{N}', r} = n_{t_1, \mathcal{N}_{\delta}, r'} - d - 3 \leq n_{t_1, \mathcal{N}_{\delta}, r'},$$

with the new positive constants

$$t_1 = t_0 e^{-(d+3)} \quad \text{and} \quad r' = \frac{M_0}{M_1} \max(R, 1) D'^2 r,$$

and where the sequence  $\mathcal{N}_{\delta}$  is given by

$$\mathcal{N}_{\delta} = \left( M_p^{\frac{1+\delta}{2}} \right)_{p \in \mathbb{N}}.$$

Moreover, we notice from the definitions in (3.2.3) that

$$(10.3.4) \quad \forall n \geq 1, \quad 1 \leq \Gamma_{\mathcal{N}'}(n) \leq \Gamma_{\mathcal{N}_{\delta}}(n + d + 3).$$

By gathering the estimates (10.3.1), (10.3.2), (10.3.3) and (10.3.4), we deduce the result of Theorem 6.2.5 follows.

**10.3.2. Examples of weight  $\Theta$ .** Let us now prove Proposition 6.2.7. This proof uses the following lemmas established in Section 8.3:

LEMMA 10.3.1 (See Lemma 8.3.1). *Let  $\mathcal{M} = (M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  and  $\mathcal{M}' = (M'_p)_{p \in \mathbb{N}}$  be two sequences of positive real numbers satisfying*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p \leq M'_p.$$

*If  $\mathcal{M}'$  is a quasi-analytic sequence, so is the sequence  $\mathcal{M}$ .*

LEMMA 10.3.2 (See Lemma 8.3.2). *Let  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be a continuous function. If the associated sequence  $\mathcal{M}^{\Theta}$  in (6.2.3) is quasi-analytic, so is  $\mathcal{M}^{T\Theta+c}$  for all  $c \geq 0$  and  $T > 0$ .*

Let  $k \geq 1$  be a positive integer,  $\frac{1}{2} \leq s \leq 1$  and  $\Theta_{k,s} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be the non-negative function defined in Proposition 6.2.7. We first notice that the assumption (H1) clearly holds for  $\mathcal{M}^{\Theta_{k,s}}$ . Let us check that the assumption (H2) holds as well. To that end, we notice that

$$\forall t \geq 0, \quad \Theta_{k,s}(t) \leq t + 1$$

and we deduce that

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p^{\Theta_{k,s}} \geq \sup_{t \geq 0} t^p e^{-(t+1)} = e^{-1} \left( \frac{p}{e} \right)^p.$$

It remains to check that  $(H3)_s$  holds. Thanks to the morphism property of the logarithm, it is clear that

$$\Theta_{k,s}(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} s\Theta_{k,1}(t^s)$$

and this readily implies that there exists a positive constant  $C_{k,s} > 0$  such that

$$\forall t \geq 0, \quad \Theta_{k,s}(t) + C_{k,s} \geq s\Theta_{k,1}(t^s).$$

It follows that

$$\begin{aligned} \forall p \in \mathbb{N}, \quad \left(M_p^{\Theta_{k,s}}\right)^s &= e^{sC_{k,s}} \left(M_p^{\Theta_{k,s} + C_{k,s}}\right)^s \leq e^{sC_{k,s}} \sup_{t \geq 0} t^{sp} e^{-s^2\Theta_{k,1}(t^s)} \\ &= e^{sC_{k,s}} \sup_{t \geq 0} t^p e^{-s^2\Theta_{k,1}(t)} \\ &= e^{sC_{k,s}} M_p^{s^2\Theta_{k,1}}. \end{aligned}$$

By using Proposition 6.2.6 together with Lemmas 10.3.1 and 10.3.2, the quasi-analyticity of the sequence  $\left((M_p^{\Theta_{k,s}})^s\right)_{p \in \mathbb{N}}$  follows from the quasi-analyticity of  $\mathcal{M}^{\Theta_{k,1}}$ .

#### 10.4. Spectral inequalities for finite sums of eigenfunctions associated to anisotropic Shubin operators

This section aims at establishing the spectral inequalities given by Theorem 6.3.2. In Subsection 10.4.1, we establish some Bernstein type estimates which are used in the proof of Theorem 6.3.2, given in Subsection 10.4.2.

**10.4.1. Smoothing properties and Bernstein type estimates.** This section is devoted to the proof of the following Bernstein type estimates which play a key role in the proof of Theorem 6.3.2:

PROPOSITION 10.4.1. *Let  $k, m \geq 1$  be positive integers and  $0 < s \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ . There exist positive constants  $C = C_{s,k,m,d} \geq 1$ ,  $C' = C'_{s,k,m,d} \geq 1$ ,  $C'' = C''_{s,k,m,d} \geq 1$ ,  $\eta = \eta_{s,k,m,d} > 0$  and  $\eta' = \eta'_{s,k,m,d} > 0$  such that*

$$(10.4.1) \quad \forall \lambda > 0, \forall g \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \\ \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C^{1+p+|\beta|} (p!)^{\frac{1}{2sk}} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\eta'\lambda^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$(10.4.2) \quad \forall \lambda > 0, \forall g \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \\ \|e^{\eta\langle x \rangle^{2sk}} \partial_x^\beta g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C'^{1+|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\eta'\lambda^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

$$(10.4.3) \quad \forall \lambda > 0, \forall g \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C''^{1+|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\eta'\lambda^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

where  $\mathcal{E}_\lambda^{k,m}$  is defined in (6.3.3).

These estimates are derived from quantitative regularizing effects of the semigroup associated to anisotropic Shubin operators. Alphonse investigated the smoothing effects of these semigroups and established the following quantitative estimates in [2] (estimates (2.3)):

THEOREM 10.4.1. *Let  $k, m \geq 1$  be positive integers and  $s > 0$ . Setting  $s^* = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m}) \leq 1$ , when  $s \leq s^*$ , there exist two positive constants  $0 < t_s \leq 1$  and  $C_s \geq 1$  such that*

$$\forall 0 < t \leq t_s, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \\ \|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{\frac{|\alpha|}{2sk} + \frac{|\beta|}{2sm} + \frac{s^*}{s}d}} (\alpha!)^{\frac{1}{2sk}} (\beta!)^{\frac{1}{2sm}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

whereas, when  $s \geq s^*$ , there exist two positive constants  $0 < t_s \leq 1$  and  $C_s \geq 1$  such that

$$\forall 0 < t \leq t_s, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{\frac{m|\alpha|}{k+m} + \frac{k|\beta|}{k+m} + \frac{s^*}{s}d}} (\alpha!)^{\frac{m}{k+m}} (\beta!)^{\frac{k}{k+m}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Let  $k, m \geq 1$  be positive integers, and  $0 < s \leq \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ . According to Theorem 10.4.1, there exist two positive constants  $0 < t_s \leq 1$  and  $C_s \geq 1$  such that

$$(10.4.4) \quad \forall 0 < t \leq t_s, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{\frac{|\alpha|}{2sk} + \frac{|\beta|}{2sm} + \frac{s^*}{s}d}} (\alpha!)^{\frac{1}{2sk}} (\beta!)^{\frac{1}{2sm}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Let  $\lambda > 0$  and  $g_0 \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ . Let us define an auxiliary function

$$g = e^{t_s \mathcal{H}_{k,m}^s} g_0 := \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}, \\ \lambda_n^{k,m} \leq \lambda}} e^{t_s (\lambda_n^{k,m})^s} \langle g_0, \psi_n^{k,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \psi_n^{k,m}.$$

Notice that

$$e^{-t_s \mathcal{H}_{k,m}^s} g = g_0 \quad \text{and} \quad \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

By applying (10.4.4) and the above remark, it follows that for all  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{C_s^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t_s^{\frac{|\alpha|}{2sk} + \frac{|\beta|}{2sm} + \frac{s^*}{s}d}} (\alpha!)^{\frac{1}{2sk}} (\beta!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_{s,k,m,d}^{1+|\alpha|+|\beta|} (\alpha!)^{\frac{1}{2sk}} (\beta!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

with

$$C_{s,k,m,d} = C_s \max \left( t_s^{-\frac{s^*}{s}d}, t_s^{-\frac{1}{2sk}}, t_s^{-\frac{1}{2sm}}, 1 \right) \geq 1.$$

We can now apply the technical Lemmas C.0.1 and C.0.2, stated and proved in Appendix C. First, it follows from Lemma C.0.1 that for all  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(10.4.5) \quad \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq (d+1)^{\frac{p}{2}} C_{s,k,m,d}^{1+p+|\beta|} (p!)^{\frac{1}{2sk}} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

It proves the estimates (10.4.1). Regarding the estimates (10.4.2), we deduce from the fact that  $0 < s \leq 1$ , (10.4.5) and Lemma C.0.2 that for all  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(10.4.6) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^{skp} \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{s,k,m,d} (8^{\frac{1}{2sk}} e^{\frac{1}{2sk}} \sqrt{d+1} C_{s,k,m,d})^{kp+|\beta|} ((kp)!)^{\frac{1}{2k}} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

By direct computations, we have for all  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$(kp)! \leq (kp)^{kp} = (k^k)^p (p^p)^k \leq ((ke)^k)^p (p!)^k,$$

since

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad p^p \leq p! e^p.$$

The above estimate, together with (10.4.6), imply that there exists a new constant  $C' = C'_{s,k,m,d} \geq 1$  such that for all  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|\langle x \rangle^{skp} \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C'^{1+p+|\beta|} (p!)^{\frac{1}{2}} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Let us define  $\eta = \frac{1}{4C'^2}$ . We deduce that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{\eta\langle x \rangle^{2sk}} \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{2\eta\langle x \rangle^{2sk}} |\partial_x^\beta g_0(x)|^2 dx \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} (2\eta)^p \frac{\|\langle x \rangle^{skp} \partial_x^\beta g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{p!} \\ &\leq C'^{2(1+|\beta|)} (|\beta|!)^{\frac{1}{sm}} e^{2t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \\ &\leq 2C'^{2(1+|\beta|)} (|\beta|!)^{\frac{1}{sm}} e^{2t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

which proves the estimates (10.4.2). It remains to establish (10.4.3). First, by the multinomial formula, we have

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad (-\Delta_x)^j = (-\partial_{x_1}^2 - \dots - \partial_{x_d}^2)^j = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=j}} \frac{j!}{\gamma!} (-1)^j \partial_x^{2\gamma}.$$

We deduce from the above equality and (10.4.5) that for all  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} (10.4.7) \quad \|(-\Delta_x)^j g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=j}} \frac{j!}{\gamma!} \|\partial_x^{2\gamma} g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma|=j}} \frac{j!}{\gamma!} C_{s,k,m,d}^{1+2|\gamma|} (|2\gamma|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C_{s,k,m,d}^{1+2j} d^j ((2j)!)^{\frac{1}{2sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq (2^{\frac{1}{2sm}} C_{s,k,m,d})^{1+2j} ((j)!)^{\frac{1}{sm}} e^{t_s \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

since

$$(2j)! = \binom{2j}{j} (j!)^2 \leq 2^{2j} (j!)^2.$$

Thanks to the Fourier inversion formula and Plancherel's formula, it follows that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$

$$\begin{aligned} (10.4.8) \quad \|\partial_x^\beta g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi^\beta \widehat{g_0}(\xi)| d\xi \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\xi|^{|\beta|} + |\xi|^{|\beta|+d}}{1 + |\xi|^d} |\widehat{g_0}(\xi)| d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |\xi|^d)^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \|\xi^{|\beta|} \widehat{g_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|\xi^{|\beta|+d} \widehat{g_0}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |\xi|^d)^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\langle (-\Delta)^{|\beta|} g_0, g_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}} + \sqrt{\langle (-\Delta)^{|\beta|+d} g_0, g_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}} \right). \end{aligned}$$

We therefore deduce from (10.4.8), together with (10.4.7), that for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|\partial_x^\beta g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq 2 \left( \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1 + |\xi|^d)^2} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} (2^{\frac{1}{2sm}} C_{s,k,m,d})^{1+|\beta|+d} ((|\beta|+d)!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\frac{t_s}{2} \lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$



Since for all  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $(|\beta| + d)! \leq 2^{|\beta|+d} d! |\beta|!$ , it follows that there exists a new constant  $C'_{s,k,m,d} \geq 1$  such that

$$\forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta g_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C'_{s,k,m,d} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\frac{ts}{2}\lambda^s} \|g_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

This ends the proof of Proposition 10.4.1.

**10.4.2. Proof of Theorem 6.3.2.** This section is devoted to the proof of the spectral inequalities given by Theorem 6.3.2. Before presenting its proof, we begin by presenting an elementary lemma:

LEMMA 10.4.2. *Let  $k, m \geq 1$  be positive integers and  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  be a measurable subset of positive Lebesgue measure  $|\omega| > 0$ . For all  $\lambda > 0$ , there exists a positive constant  $C_{k,m,\lambda}(\omega) > 0$  such that*

$$\forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{k,m,\lambda}(\omega) \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

PROOF. Let  $\lambda > 0$ . Since  $\mathcal{E}_\lambda^{k,m}$  is a  $\mathbb{C}$ -vector space of finite dimension, it is sufficient to show that  $\|\cdot\|_{L^2(\omega)}$  is a norm on this space. Let  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$  such that  $\|f\|_{L^2(\omega)} = 0$ . By applying (10.4.3) in Proposition 10.4.1 with  $s = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ , we deduce that  $f$  is analytic on  $\mathbb{R}^d$ , since  $\frac{1}{2sm} = \frac{k}{k+m} < 1$ . It follows that  $f = 0$  on  $\omega$  and therefore,  $f = 0$ , since  $|\omega| > 0$ .  $\square$

**10.4.3. First case :  $\omega$  is  $\delta$ -weakly thick with  $0 \leq \delta < 1$ .** In this case, we use the uncertainty principle holding in Gelfand-Shilov spaces stated in Theorem 6.2.2.

On the one hand, since  $\omega$  is  $\delta$ -weakly thick, there exist a continuous density  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  and some parameters  $0 < \gamma \leq 1$  and  $R > 0$  such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < \rho(x) \leq R \langle x \rangle^\delta,$$

so that  $\omega$  is  $\gamma$ -thick with respect to  $\rho$ . By applying Lemma 3.1.5, we deduce that there exists an auxiliary  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz density  $\tilde{\rho}$  satisfying

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < 3R \langle x \rangle^\delta \leq \tilde{\rho}(x) \leq M \langle x \rangle^\delta$$

such that  $\omega$  is  $\frac{\gamma}{M^d}$ -thick with respect to  $\tilde{\rho}$ , for some positive constant  $M = M(R, \delta) > 0$ .

On the other hand, thanks to Proposition 10.4.1 applied with  $s = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{k} + \frac{1}{m})$ , there exist some positive constant  $C = C_{\delta,k,m,d} \geq 1$  and  $\eta' = \eta'_{\delta,k,m,d} > 0$  such that

$$(10.4.9) \quad \forall \lambda > 0, \forall g \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d,$$

$$\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C^{1+p+|\beta|} (p!)^{\frac{1}{2sk}} (|\beta|!)^{\frac{1}{2sm}} e^{\eta'\lambda^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

We can therefore apply Theorem 6.2.2 with the constants  $A = C$ ,  $0 < \mu = \frac{1}{2sm} = \frac{k}{\delta m + k} \leq 1$  and  $\nu = \frac{1}{2sk} = \frac{m}{\delta m + k} > 0$ . Since  $\delta = \frac{1-\mu}{\nu}$ , we obtain that there exist some positive constants  $K = K_{\delta,R,d} \geq 1$  and  $D = D_{\delta,R,k,m,d} \geq 1$  such that for all  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $\lambda > 0$ ,  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{D(1-\log \varepsilon + \log C)} e^{DC^2} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \varepsilon \sup_{p \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}^d} \frac{\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}{C^{2(p+|\beta|)} (p!)^{2\nu} (|\beta|!)^{2\mu}} \\ &\leq \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{D(1-\log \varepsilon + \log C)} e^{DC^2} \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + C^2 e^{2\eta'\lambda^s} \varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

where the last inequality is obtained by using (10.4.9). By setting,  $\varepsilon = \frac{1}{2C^2} e^{-2\eta'\lambda^s}$ , we deduce that there exists a new constant  $D' = D'_{\delta,R,k,m,d} \geq 1$  so that

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \left(\frac{K}{\gamma}\right)^{D'(1+\lambda^s)} \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

By recalling that  $s = \frac{1}{2}(\frac{\delta}{k} + \frac{1}{m})$ , the result follows.

**10.4.4. Second case:  $\omega$  is 1-weakly thick.** In this case, since  $\omega$  is 1-weakly thick, we deduce from Proposition 3.1.6 that there exist  $\gamma > 0$  and  $R_0 > 0$  such that

$$\forall R \geq R_0, \quad |\omega \cap B(0, R)| \geq \gamma |B(0, R)|.$$

As a first step, we establish that there exists a positive constant  $c_{d,k,m} \geq 1$  such that

$$\forall \lambda \geq 1, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}^2.$$

Let  $a > 0$ . Thanks to Proposition 10.4.1 with  $s = \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ , there exist some positive constants  $\eta = \eta(d, k, m) > 0$ ,  $\eta' = \eta'(d, k, m) > 0$  and  $C = C(d, k, m) \geq 1$  such that :  $\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(10.4.10) \quad \|e^{\eta(x)^{1+\frac{k}{m}}} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C^{1+|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{k}{k+m}} e^{\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

and

$$(10.4.11) \quad \|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq C^{1+|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{k}{k+m}} e^{\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

It follows that for all  $\lambda > 0$  and  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ ,

$$(10.4.12) \quad \begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \|f\|_{L^2(B(0,a))}^2 + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d \setminus B(0,a))}^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2(B(0,a))}^2 + e^{-2\eta(1+a^2)^{\frac{1}{2}(1+\frac{k}{m})}} \|e^{\eta(x)^{1+\frac{k}{m}}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \|f\|_{L^2(B(0,a))}^2 + e^{-2\eta a^{1+\frac{k}{m}}} C^2 e^{2\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Let  $c_{d,k,m} > 0$  be a positive constant so that

$$\forall \lambda \geq 1, \quad e^{-2\eta a^{1+\frac{k}{m}}} C^2 e^{2\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \leq \frac{1}{2},$$

with

$$a = c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}.$$

It follows from (10.4.12) that

$$(10.4.13) \quad \forall \lambda \geq 1, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}^2.$$

Let  $\lambda \geq 1$  and  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m} \setminus \{0\}$ . We set

$$\forall x \in B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}), \quad g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{2} C e^{\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}}.$$

By using

$$\|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \leq \sqrt{|B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}})|} \|f\|_{L^\infty(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))},$$

it follows that

$$\|g\|_{L^\infty(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \geq \frac{e^{-\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}}}{\sqrt{2|B(0,1)| c_{d,k,m}^d C \lambda^{\frac{d}{4k}}}} \geq e^{-\eta'' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}},$$

for a suitable constant  $\eta'' = \eta''(d, k, m) \geq 1$  independent on  $\lambda$ . Furthermore, we deduce from the estimates (10.4.11) and (10.4.13) that

$$\begin{aligned} \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\partial_x^\beta g\|_{L^\infty(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} &\leq \frac{\|\partial_x^\beta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{2} C e^{\eta' \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}} \\ &\leq C^{|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{k}{k+m}} \frac{\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}{\sqrt{2} \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}} \\ &\leq C^{|\beta|} (|\beta|!)^{\frac{k}{k+m}}. \end{aligned}$$

The Example 3.2.11 derived from Proposition 3.2.10, implies that there exists a new positive constant  $\tilde{K} = \tilde{K}(d, k, m) \geq 1$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0 = \max\left(\frac{R_0}{c_{d,k,m}}, 1\right)^{2k}$

$$\|g\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \leq \left(\frac{\tilde{K}}{\gamma}\right)^{\tilde{K} \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|g\|_{L^2(\omega \cap B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))}.$$

It follows from (10.4.13) that

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sqrt{2} \|f\|_{L^2(B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{\tilde{K}}{\gamma}\right)^{\tilde{K} \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega \cap B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{\tilde{K}}{\gamma}\right)^{\tilde{K} \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega)}. \end{aligned}$$

When  $0 < \lambda \leq \lambda_0 = \max\left(\frac{R_0}{c_{d,k,m}}, 1\right)^{2k}$ , Lemma 10.4.2 implies that there exists  $C_{k,m,\lambda_0}(\omega) > 0$  such that

$$\forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{k,m,\lambda_0}(\omega) \|f\|_{L^2(\omega)},$$

since

$$\forall 0 < \lambda \leq \lambda_0, \quad \mathcal{E}_\lambda^{k,m} \subset \mathcal{E}_{\lambda_0}^{k,m}.$$

By choosing  $\tilde{\kappa} = \max(C_{k,m,\lambda_0}(\omega), \sqrt{2})$ , it follows that

$$\forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{\kappa} \left(\frac{\tilde{K}}{\gamma}\right)^{\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

**10.4.5. Third case :**  $|\omega| > 0$ . Since  $0 < |\omega| \leq +\infty$ , there exist  $R_0 > 0, \sigma > 0$  such that

$$\forall R \geq R_0, \quad |\omega \cap B(0, R)| \geq \sigma > 0.$$

With the same notation as in Section 10.4.4, Example 3.2.11 implies once again that there exists a positive constant  $\tilde{K} = \tilde{K}(d, k, m) \geq 1$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0 = \max\left(\frac{R_0}{c_{d,k,m}}, 1\right)^{2k}$ ,  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sqrt{2} \left(\frac{\tilde{K} |B(0, 1)| c_{d,k,m}^d \lambda^{\frac{d}{2k}}}{\sigma}\right)^{\tilde{K} \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega \cap B(0, c_{d,k,m} \lambda^{\frac{1}{2k}}))} \\ &\leq \sqrt{2} \left(\frac{\tilde{K} |B(0, 1)| c_{d,k,m}^d \lambda^{\frac{d}{2k}}}{\sigma}\right)^{\tilde{K} \lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})}} \|f\|_{L^2(\omega)}. \end{aligned}$$

It follows that there exists a positive constant  $\tilde{K}' = \tilde{K}'(\omega, d, k, m) \geq 1$  such that for all  $\lambda \geq \lambda_0$  and  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \sqrt{2} \left( \frac{\tilde{K}|B(0,1)|c_{d,k,m}^d}{\sigma} \right)^{\tilde{K}\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}} (\lambda^{\frac{d}{2k}})^{\tilde{K}\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}} \|f\|_{L^2(\omega)} \\ &\leq (\tilde{K}')^{\tilde{K}'\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}} e^{\frac{\tilde{K}d}{2k}\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}\log\lambda} \|f\|_{L^2(\omega)}. \end{aligned}$$

It provides a new positive constant, still denoting by  $\tilde{K}' \geq 1$  such that for all  $\lambda \geq \max(\lambda_0, e)$  and  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ ,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq e^{\tilde{K}'\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}\log\lambda} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

By using the very same lines as in the previous case, we deduce that for all  $\lambda > 0$  and  $f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ ,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{\kappa} e^{\tilde{K}'\lambda^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{m}\right)}|\log\lambda|} \|f\|_{L^2(\omega)},$$

with  $\tilde{\kappa} = \max(C_{k,m,\lambda_0}(\omega), 1)$ . This ends the proof of Theorem 6.3.2.

## 10.5. Null-controllability for evolution equations whose adjoint system enjoys Gelfand-Shilov smoothing effects

This section is devoted to the proofs of the null-controllability results stated in Section 6.4 of Chapter 6.

**10.5.1. Proof of Theorem 6.4.1.** This section is devoted to the proof of the null-controllability result given by Theorem 6.4.1.

Let  $(A, D(A))$  be a closed operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  which is the infinitesimal generator of a strongly continuous contraction semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  that satisfies the following quantitative smoothing estimates: there exist some constants  $0 < \mu < 1$ ,  $\nu > 0$  with  $\mu + \nu \geq 1$  and  $C \geq 1$ ,  $r_1 > 0$ ,  $r_2 \geq 0$ ,  $0 < t_0 \leq 1$  such that

$$(10.5.1) \quad \forall 0 < t \leq t_0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C^{1+|\alpha|+|\beta|}}{t^{r_1(|\alpha|+|\beta|)+r_2}} (\alpha!)^\nu (\beta!)^\mu \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

where  $A^*$  denotes the  $L^2(\mathbb{R}^d)$ -adjoint of  $A$ . Let  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  be a measurable subset that is  $\delta$ -weakly thick with  $0 \leq \delta < \frac{1-\mu}{\nu} \leq 1$ . According to Lemma 3.1.5, there exists a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz density  $\rho : \mathbb{R}^d \rightarrow (0, +\infty)$  satisfying

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad 0 < m \leq \rho(x) \leq R\langle x \rangle^\delta,$$

for some parameters  $m, R > 0$ , such that  $\omega$  is thick with respect to  $\rho$ . Let us show that Theorem 6.4.1 can be deduced from the uncertainty principles given in Theorem 6.2.2. To that end, we deduce from the estimates (10.5.1) and Lemma C.0.1 that there exists a positive constant  $C' = C'(C, d) \geq 1$  such that

$$(10.5.2) \quad \forall 0 < t \leq t_0, \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

$$\|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta (e^{-tA^*} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C'^{1+p+|\beta|}}{t^{r_1(p+|\beta|)+r_2}} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

It follows from (10.5.2) and Theorem 6.2.2 applied with  $f = e^{-tA^*} g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  that there exists a positive constant  $K = K(d, \mu, \nu, \omega) \geq 1$  such that  $\forall 0 < t \leq t_0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall 0 < \varepsilon \leq 1$ ,

$$\|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{K(1-\log\varepsilon+(C't^{-r_1})^{\frac{2}{1-\varepsilon}})} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{C'^2}{t^{2r_2}} \varepsilon \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,$$

with  $0 < s = \delta\nu + \mu < 1$ . Thanks to the contraction property of the semigroup  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$ , we deduce that for all  $0 < \tau \leq t_0$ ,  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{-\tau A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \frac{1}{(1-q)\tau} \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 dt \\ &\leq \frac{e^{K(1-\log \varepsilon + (C'(q\tau)^{-r_1})^{\frac{2}{1-s}})}}{(1-q)\tau} \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \frac{C'^2}{(q\tau)^{2r_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &\leq \frac{e^{K(1-\log \varepsilon + (C'2^{r_1}\tau^{-r_1})^{\frac{2}{1-s}})}}{(1-q)\tau} \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \varepsilon \frac{4^{r_2} C'^2}{\tau^{2r_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

For  $0 < \tau \leq t_0$  and  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ , we choose

$$0 < \varepsilon = \exp\left(-\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}\right) \leq 1.$$

Since  $1 \leq \frac{1}{\tau^{2r_1}}$ , it follows that there exists a new constant  $K' = K'(d, \mu, \nu, \delta, \omega, C', r_1, s) \geq 1$  such that for all  $0 < \tau \leq t_0$ ,  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\|e^{-\tau A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{e^{K'\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}}}{(1-q)\tau} \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + \exp\left(-\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}\right) \frac{4^{r_2} C'^2}{\tau^{2r_2}} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

We follow the strategy developed by Miller in [55]. Let  $0 < t_1 \leq t_0$  such that for all  $0 < \tau \leq t_1$ ,

$$\frac{\exp\left(K'\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}\right)}{\tau} \leq \exp\left(2K'\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}\right)$$

and

$$\exp\left(-\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}\right) \frac{4^{r_2} C'^2}{\tau^{2r_2}} \leq \exp\left(-\frac{\tau^{-\frac{2r_1}{1-s}}}{2}\right).$$

It follows that for all  $0 < \tau \leq t_1$ ,  $\frac{1}{2} \leq q < 1$ ,  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\begin{aligned} (1-q) \exp\left(-\frac{2K'}{\tau^{\frac{2r_1}{1-s}}}\right) \|e^{-\tau A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + (1-q) \exp\left(-\frac{2K' + \frac{1}{2}}{\tau^{\frac{2r_1}{1-s}}}\right) \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

Setting  $f(\tau) = (1-q) \exp\left(-\frac{2K'}{\tau^{\frac{2r_1}{1-s}}}\right)$  and choosing  $q$  so that

$$\max\left(\left(\frac{2K'}{2K' + \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1-s}{2r_1}}, \frac{1}{2}\right) \leq q < 1,$$

we obtain that for all  $0 < \tau \leq t_1$  and  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,

$$(10.5.3) \quad f(\tau) \|e^{-\tau A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \int_{q\tau}^{\tau} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt + f(q\tau) \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Thanks to this estimate, the observability estimate is established as follows: let  $0 < T \leq t_1$  and define the two sequences  $(\tau_k)_{k \geq 0}$  and  $(T_k)_{k \geq 0}$  as

$$\forall k \geq 0, \quad \tau_k = q^k(1-q)T \quad \text{and} \quad \forall k \geq 0, \quad T_{k+1} = T_k - \tau_k, \quad T_0 = T.$$

By applying (10.5.3) with  $e^{-T_{k+1}A^*} g$ , it follows that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$  and  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} f(\tau_k) \|e^{-T_k A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 - f(\tau_{k+1}) \|e^{-T_{k+1} A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_k} \|e^{-(t+T_{k+1})A^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt = \int_{\tau_{k+1}+T_{k+1}}^{\tau_k+T_{k+1}} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt \leq \int_{T_{k+1}}^{\tau_k+T_{k+1}} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

By summing over all the integers  $k \in \mathbb{N}$  and by noticing that

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} f(\tau_k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} T_k = T - \sum_{k \in \mathbb{N}} \tau_k = 0,$$

and

$$\forall k \geq 0, \quad \|e^{-T_k A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

by the contraction property of the semigroup  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$ , it follows that

$$\|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{1-q} \exp\left(\frac{2K'}{((1-q)T)^{\frac{2r_1}{1-\mu-\delta\nu}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

By using anew the contraction property of the semigroup  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$ , we deduce that for all  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $T \geq t_1$ ,

$$\begin{aligned} \|e^{-TA^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq \|e^{-t_1 A^*} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{1}{1-q} \exp\left(\frac{2K'}{((1-q)t_1)^{\frac{2r_1}{1-\mu-\delta\nu}}}\right) \int_0^{t_1} \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt \\ &\leq \frac{1}{1-q} \exp\left(\frac{2K'}{((1-q)t_1)^{\frac{2r_1}{1-\mu-\delta\nu}}}\right) \int_0^T \|e^{-tA^*} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt. \end{aligned}$$

This ends the proof of Theorem 6.4.1.

**10.5.2. Proof of the Theorem 6.4.3.** This section is devoted to the proof of the Theorem 6.4.3. Let  $k, m \geq 1$ ,  $s > 0$  and  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  be a measurable subset of positive Lebesgue measure  $|\omega| > 0$ . Thanks to the Hilbert Uniqueness Method, the null-controllability of the evolution equation

$$\begin{cases} \partial_t f(t, x) + ((-\Delta_x)^m + |x|^{2k})^s f(t, x) = u(t, x) \mathbb{1}_\omega(x), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ f|_{t=0} = f_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

is equivalent to the final state observability of the adjoint system

$$\begin{cases} \partial_t g(t, x) + ((-\Delta)^m + |x|^{2k})^s g(t, x) = 0, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ g|_{t=0} = g_0 \in L^2(\mathbb{R}^d), \end{cases}$$

Let us assume that  $s > \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ . Thanks to Theorem 6.3.2, there exists a positive constant  $K = K(\omega, d, k, m) \geq 1$  such that

$$\forall \lambda > 0, \forall f \in \mathcal{E}_\lambda^{k,m}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K^{1+\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})} |\log \lambda|} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

Since  $s > \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$ , there exists a positive parameter  $s > s' > \frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})$  and a new positive constant  $K' = K'(\omega, d, s, s', k, m) > 0$  such that

$$\forall \lambda \geq 1, \quad K^{1+\lambda^{\frac{1}{2}(\frac{1}{k} + \frac{1}{m})} \log(\lambda)} \leq K e^{K' \lambda^{s'}}.$$

We deduce that the spectral estimates required by Theorem 2.2.1 hold with the following choice of parameters :  $c_1 = K'$ ,  $c'_1 = K$ ,  $a = s'$  and  $\pi_\lambda$  defined as the orthogonal projection onto  $\mathcal{E}_\lambda^{k,m}$ . Moreover, we have the following dissipation estimates

$$\forall \lambda > 0, \forall t > 0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|(1 - \pi_\lambda)(e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} g)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq e^{-2t\lambda^s} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Since  $s > s'$ , it follows from Theorem 2.2.1 that there exists a positive constant  $C > 1$  such that the following observability estimate holds

$$\forall T > 0, \forall g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|e^{-T\mathcal{H}_{k,m}^s} g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq C \exp\left(\frac{C}{T^{\frac{s'}{s-s'}}}\right) \int_0^T \|e^{-t\mathcal{H}_{k,m}^s} g\|_{L^2(\omega)}^2 dt.$$

This ends the proof of Theorem 6.4.3.



## Exact controllability for Schrödinger's equations from (weak) thick sets

In this chapter, we give the proofs of the results presented in Sections 7.2 and 7.3 of Chapter 7, taken from the article [52] written in collaboration with Karel Pravda-Starov.

**Outline of the chapter.** In Section 11.1, we derive spectral estimates from a Kovrijkine's theorem and prove Theorem 7.2.2. Section 11.2 provides the proofs of Proposition 7.3.1 and Theorem 7.3.3. They are based on a Hautus test for Hermite functions and make the use of a Plancherel-Rotach formula. Section 11.3 is an appendix containing the proof of a technical lemma used in Section 11.2.1 and the proof of Miller's result stated in Proposition 7.1.1.

### 11.1. Thickness condition and exact controllability for fractional free Schrödinger's equations

This section is devoted to the proof of Theorem 7.2.2. We will use the following uncertainty principle established by Kovrijkine :

**THEOREM 11.1.1** (Kovrijkine [42, Theorem 2]). *Let  $\omega \subset \mathbb{R}$  be a measurable subset  $\gamma$ -thick at scale  $L > 0$ , that is, satisfying*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |\omega \cap (x + [-L, L])| \geq 2\gamma L > 0,$$

*with  $0 < \gamma \leq 1$ . There exists a universal positive constant  $C > 0$  such that for all  $f \in L^2(\mathbb{R})$  satisfying  $\text{supp } \hat{f} \subset \bigcup_{k=1}^m J_k$ , with  $(J_k)_{1 \leq k \leq m}$  a finite family of intervals with length  $|J_k| = b$  for all  $1 \leq k \leq m$ ,*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c(\gamma, m, L, b) \|f\|_{L^2(\omega)},$$

*with*

$$c(\gamma, m, L, b) = \left(\frac{C}{\gamma}\right)^{2Lb\left(\frac{C}{\gamma}\right)^m + m - \frac{1}{2}}.$$

Let  $\omega \subset \mathbb{R}$  be a measurable subset  $\gamma$ -thick at scale  $L > 0$ . Let  $D > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $f \in L^2(\mathbb{R})$  such that

$$\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R} : \|\xi\|^{2s} - \lambda \leq \sqrt{D}\}.$$

If  $|\lambda| > \sqrt{D} + 1$ , the Fourier transform  $\hat{f}$  is supported in the union of two intervals

$$\text{supp } \hat{f} \subset \left[-(\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}, -(-\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}\right] \cup \left[(-\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}, (\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}\right]$$

and

$$\left| \left[-(\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}, -(-\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}\right] \right| = \left| \left[(-\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}, (\sqrt{D} + |\lambda|)^{\frac{1}{2s}}\right] \right| \leq \frac{\sqrt{D}}{s},$$

since  $s \geq \frac{1}{2}$  and  $|\lambda| \geq \sqrt{D} + 1$ . It follows from Theorem 11.1.1 that there exists a universal positive constant  $C' > 0$  such that

$$(11.1.1) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{C'}{\gamma}\right)^{2L\frac{\sqrt{D}}{s}\left(\frac{C'}{\gamma}\right)^2 + \frac{3}{2}} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

On the other hand, we notice that  $\text{supp } \hat{f} \subset [0, (2\sqrt{D} + 1)^{\frac{1}{2s}}]$  when  $|\lambda| \leq \sqrt{D} + 1$ . We deduce from Theorem 1.1.6 that there exists a universal positive constant  $C > 0$  such that



$$(11.1.2) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \left(\frac{C}{\gamma}\right)^{C(1+2L(2\sqrt{D}+1)\frac{1}{2s})} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

By setting

$$d = \max \left( \left(\frac{C'}{\gamma}\right)^{2L\frac{\sqrt{D}}{s}(\frac{C'}{\gamma})^2 + \frac{3}{2}}, \left(\frac{C}{\gamma}\right)^{C(1+2L(2\sqrt{D}+1)\frac{1}{2s})} \right)^2,$$

it follows from (11.1.1) and (11.1.2) that for all  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $f \in L^2(\mathbb{R})$  with  $\text{supp } \hat{f} \subset \{\xi \in \mathbb{R} : \|\xi\|^{2s} - \lambda \leq \sqrt{D}\}$ ,

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sqrt{d} \|f\|_{L^2(\omega)}.$$

Theorem 7.2.2 is then a direct consequence of the Hilbert uniqueness method and Proposition 7.1.1.

## 11.2. Hautus test for Hermite functions

**11.2.1. Proof of Proposition 7.3.1.** This section is devoted to the proof of Proposition 7.3.1. Let  $\omega \subset \mathbb{R}$  be a measurable subset. Let us show that the three following assertions are equivalent:

- (i)  $\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} > 0,$
- (ii)  $\exists c > 0, \forall n \geq 0, \quad 1 = \|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq c \|\phi_n\|_{L^2(\omega)},$
- (iii)  $\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega)} > 0.$

Recall that Hermite functions are normalized  $L^2(\mathbb{R})$ -functions defined as

$$(11.2.1) \quad \forall n \geq 0, \quad \phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x),$$

where  $H_n$  stands for the Hermite polynomial of degree  $n \geq 0$ , see e.g. [63], formula (5.5.1). The family  $(\phi_n)_{n \geq 0}$  defines a Hilbert basis of  $L^2(\mathbb{R})$ . The assertions (ii) and (iii) are clearly equivalent. Indeed, (ii) implies (iii) by passing to the limit inferior

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega)} \geq \frac{1}{c} > 0.$$

On the other hand, we readily deduce from formula (11.2.1) that for any measurable set  $\omega \subset \mathbb{R}$  of positive measure  $|\omega| > 0$ ,

$$(11.2.2) \quad \forall n \geq 0, \quad \|\phi_n\|_{L^2(\omega)} > 0,$$

since  $H_n$  is a polynomial of degree  $n$ . Then, assertion (ii) directly follows from (iii) and (11.2.2). It is therefore sufficient to prove the equivalence of assertions (i) and (iii).

As a preliminary step, we begin by establishing that

$$(11.2.3) \quad \forall 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(I_{\varepsilon, n})} = \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}},$$

where  $I_{\varepsilon, n}$  stands for the open interval  $(-\sqrt{2n+1} \cos \varepsilon, \sqrt{2n+1} \cos \varepsilon)$ . Let  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ . The Plancherel-Rotach formula for Hermite polynomials [63] (Theorem 8.22.9) provides that for all  $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$ ,

$$(11.2.4) \quad e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) = \frac{2^{\frac{n}{2} + \frac{1}{4}} \sqrt{n!}}{(\pi n)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sin \theta}} \left[ \sin \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right) + R_n(x) \right],$$

with  $x = \sqrt{2n+1} \cos \theta$ , where the remainder term satisfies

$$(11.2.5) \quad \exists C > 0, \forall n \geq 0, \forall y \in [-\sqrt{2n+1} \cos \varepsilon, \sqrt{2n+1} \cos \varepsilon], \quad |R_n(y)| \leq \frac{C}{n+1}.$$

It follows from (11.2.1) and (11.2.4) that the Hermite function

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{n}{2}} \sqrt{n!}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad \|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1, \quad n \geq 0,$$

satisfies that for all  $\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon$  and  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.6) \quad \phi_n(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi n^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sin \theta}}} \left[ \sin \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right) + R_n(x) \right],$$

with  $x = \sqrt{2n+1} \cos \theta$ . We obtain from (11.2.6) that for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.7) \quad \|F_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} - \|G_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} \leq \|\phi_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} \leq \|F_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} + \|G_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})},$$

where the two functions  $F_n$  and  $G_n$  are defined for all  $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$ ,

$$(11.2.8) \quad F_n(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi n^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sin \theta}}} \sin \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right)$$

and

$$(11.2.9) \quad G_n(x) = \frac{2^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi n^{\frac{1}{4}} \sqrt{\sin \theta}}} R_n(x),$$

with  $x = \sqrt{2n+1} \cos \theta$ . We deduce from (11.2.5) that for all  $n \geq 1$ ,

$$\|G_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})}^2 = \frac{\sqrt{2(2n+1)}}{\pi \sqrt{n}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} |R_n(\sqrt{2n+1} \cos \theta)|^2 d\theta \leq \frac{C^2 \sqrt{2(2n+1)} (\pi - 2\varepsilon)}{\pi \sqrt{n} (n+1)^2},$$

implying that

$$(11.2.10) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|G_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} = 0.$$

On the other hand, we deduce from (11.2.8) that for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.11) \quad |F_n(x)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2n\pi} \sin \theta} \left[ 1 - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{2} \right) \right].$$

It follows from (11.2.11) that for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.12) \quad \int_{I_{\varepsilon,n}} |F_n(x)|^2 dx = \int_{I_{\varepsilon,n}} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi} \sqrt{(2n+1) - x^2}} dx \\ - \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{2} \right) d\theta,$$

since  $\sin^2 \theta = 1 - \frac{x^2}{2n+1}$ , when  $x = \sqrt{2n+1} \cos \theta$ . We have for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.13) \quad \int_{I_{\varepsilon,n}} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi} \sqrt{(2n+1) - x^2}} dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \int_{-\cos \varepsilon}^{\cos \varepsilon} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \\ = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \arcsin(\cos \varepsilon) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \left( \frac{\pi}{2} - \arccos(\cos \varepsilon) \right) = \sqrt{\frac{2n+1}{2n}} \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{\pi} \right),$$

since

$$\forall -1 \leq x \leq 1, \quad \arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

It follows from (11.2.13) that

$$(11.2.14) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{I_{\varepsilon,n}} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi} \sqrt{(2n+1) - x^2}} dx = 1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}.$$

On the other hand, we have for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.15) \quad \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sin(2\theta)-2\theta)+\frac{3\pi}{2}\right) d\theta \\ = \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\pi-\varepsilon)} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{3\pi}{2}\right) dt,$$

where  $\varphi(\theta) = 2\theta - \sin(2\theta)$  is an increasing  $C^\infty$ -diffeomorphism from  $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$  to

$$[\varphi(\varepsilon), \varphi(\pi - \varepsilon)] = [2\varepsilon - \sin(2\varepsilon), 2\pi - 2\varepsilon + \sin(2\varepsilon)].$$

An integration by parts shows that for all  $n \geq 1$ ,

$$\int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\pi-\varepsilon)} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{3\pi}{2}\right) dt = \left[ \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{3\pi}{2}\right)}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))\left(n+\frac{1}{2}\right)} \right]_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\pi-\varepsilon)} \\ - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\pi-\varepsilon)} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \right) \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{3\pi}{2}\right) dt,$$

implying that

$$(11.2.16) \quad \left| \int_{\varphi(\varepsilon)}^{\varphi(\pi-\varepsilon)} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t-\frac{3\pi}{2}\right) dt \right| \leq \frac{C_0}{n+\frac{1}{2}} (2+2\pi-4\varepsilon+2\sin(2\varepsilon)),$$

with

$$0 < C_0 = \sup_{t \in [2\varepsilon - \sin(2\varepsilon), 2\pi - 2\varepsilon + \sin(2\varepsilon)]} \left\{ \left| \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \right| + \left| \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \right) \right| \right\} < +\infty.$$

We deduce from (11.2.15) and (11.2.16) that

$$(11.2.17) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n\pi}} \int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)(\sin(2\theta)-2\theta)+\frac{3\pi}{2}\right) d\theta = 0.$$

It follows from (11.2.12), (11.2.14) and (11.2.17) that

$$(11.2.18) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|F_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})} = \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}}.$$

Thanks to (11.2.7), (11.2.10) and (11.2.18), we obtain that (11.2.3) holds.

Let us assume that the measurable subset  $\omega \subset \mathbb{R}$  verifies

$$(11.2.19) \quad \delta = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega)} > 0.$$

Let  $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$  satisfying

$$0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2} \delta^2.$$

By using that  $\|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$ , we observe that for all  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  and  $n \geq 0$ ,

$$(11.2.20) \quad \|\phi_n\|_{L^2(\omega)}^2 = \|\phi_n\|_{L^2(\omega \cap I_{\varepsilon,n})}^2 + \|\phi_n\|_{L^2(\omega \cap (\mathbb{R} \setminus I_{\varepsilon,n}))}^2 \\ \leq \|\phi_n\|_{L^2(\omega \cap I_{\varepsilon,n})}^2 + \|\phi_n\|_{L^2(\mathbb{R} \setminus I_{\varepsilon,n})}^2 = \|\phi_n\|_{L^2(\omega \cap I_{\varepsilon,n})}^2 + 1 - \|\phi_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})}^2.$$

It follows from (11.2.3), (11.2.19) and (11.2.20) that for all  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ ,

$$(11.2.21) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega \cap I_{\varepsilon,n})} > 0.$$

On the other hand, we deduce from (11.2.6), (11.2.8) and (11.2.9) that for all  $n \geq 1$  and  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ,

$$(11.2.22) \quad \|F_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} - \|G_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} \leq \|\phi_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} \leq \|F_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} + \|G_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})},$$

with

$$(11.2.23) \quad \omega_{\varepsilon,n} = \omega \cap I_{\varepsilon,n}.$$

By using that  $\|G_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} \leq \|G_n\|_{L^2(I_{\varepsilon,n})}$ , it follows from (11.2.10) that

$$(11.2.24) \quad \forall 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|G_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} = 0.$$

We deduce from (11.2.11) and (11.2.23) that for all  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.25) \quad \begin{aligned} \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} |F_n(x)|^2 dx &\leq \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} \frac{2\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2n}\pi\sqrt{(2n+1)-x^2}} dx \\ &\leq \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}\pi\sqrt{1-\cos^2\varepsilon_0}} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{\pi\sin\varepsilon_0} \frac{|\omega \cap (-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})|}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

By using (11.2.21), (11.2.22), (11.2.23), (11.2.24) and (11.2.25), it follows that

$$(11.2.26) \quad \begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap (-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1})|}{\sqrt{n}} &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi\sin\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} |F_n(x)|^2 dx \\ &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi\sin\varepsilon_0}{\sqrt{2}} \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} |\phi_n(x)|^2 dx > 0. \end{aligned}$$

We readily obtain from (11.2.26) that

$$(11.2.27) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{\sqrt{n}} > 0.$$

Since the floor function satisfies

$$\forall R > 0, \quad [R] \leq R < [R] + 1,$$

it follows that for all  $R \geq 2$ ,

$$(11.2.28) \quad \sqrt{2n+1} \leq R < \sqrt{2n+3},$$

with  $n = n(R) = \lfloor \frac{R^2-1}{2} \rfloor \in \mathbb{N}$ . We obtain that for all  $R \geq 2$ ,

$$(11.2.29) \quad \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} \geq \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{2R} = \frac{\sqrt{n}}{2R} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{\sqrt{n}}.$$

Notice that (11.2.28) implies that

$$(11.2.30) \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}}{2R} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

It follows from (11.2.27), (11.2.29) and (11.2.30) that

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{\sqrt{n}} > 0.$$

It proves that assertion (ii) implies assertion (i).

Conversely, let us assume that the measurable subset  $\omega \subset \mathbb{R}$  verifies

$$\liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R, R]|}{|[-R, R]|} > 0$$

and define

$$\tilde{\delta} = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{\sqrt{n}} > 0.$$

In order to prove (iii), it follows from (11.2.23) that it is actually sufficient to show that

$$\exists 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|\phi_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} > 0.$$

According to (11.2.22) and (11.2.24), it is then sufficient to show that

$$(11.2.31) \quad \exists 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \|F_n\|_{L^2(\omega_{\varepsilon,n})} > 0.$$

While using the substitution rule with  $x = \sqrt{2n+1} \cos \theta$ , we deduce from (11.2.8) and (11.2.23) that for all  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  and  $n \geq 1$ ,

$$(11.2.32) \quad \int_{\omega_{\varepsilon,n}} |F_n(x)|^2 dx = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{4n+2}{n}} \int_{\tilde{\omega}_{\varepsilon,n}} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right) d\theta,$$

with

$$(11.2.33) \quad \tilde{\omega}_{\varepsilon,n} = \arccos \left( \frac{\omega_{\varepsilon,n}}{\sqrt{2n+1}} \right) \subset (\varepsilon, \pi - \varepsilon).$$

According to (11.2.31) and (11.2.32), it is then sufficient to show that

$$(11.2.34) \quad \exists 0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\tilde{\omega}_{\varepsilon,n}} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right) d\theta > 0.$$

Let  $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$  verifying

$$0 < 2\sqrt{2}(1 - \cos \varepsilon_0) < \tilde{\delta}.$$

By noticing from (11.2.23) that for all  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  and  $n \geq 1$ ,

$$\frac{|\omega_{\varepsilon,n}|}{\sqrt{n}} \geq \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]|}{\sqrt{n}} - \frac{2\sqrt{2n+1}}{\sqrt{n}}(1 - \cos \varepsilon),$$

we deduce that

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\omega_{\varepsilon_0,n}|}{\sqrt{n}} \geq \tilde{\delta} - 2\sqrt{2}(1 - \cos \varepsilon_0) > 0.$$

It follows that there exist some positive constants  $c_0 > 0$  and  $n_0 \geq 1$  such that

$$(11.2.35) \quad \forall n \geq n_0, \quad |\omega_{\varepsilon_0,n}| \geq c_0 \sqrt{n}.$$

On the other hand, we notice from (11.2.33) and (11.2.35) that for all  $n \geq n_0$ ,

$$(11.2.36) \quad |\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}| = \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} |\kappa'_n(x)| dx = \int_{\omega_{\varepsilon_0,n}} \frac{dx}{\sqrt{(2n+1) - x^2}} \geq \frac{|\omega_{\varepsilon_0,n}|}{\sqrt{2n+1}} \geq c_0 \sqrt{\frac{n}{2n+1}},$$

with  $\kappa_n(x) = \arccos \left( \frac{x}{\sqrt{2n+1}} \right)$ . It follows from (11.2.36) that there exists a positive constant  $c_1 > 0$  such that

$$(11.2.37) \quad \forall n \geq n_0, \quad |\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}| \geq c_1 > 0.$$

By using anew the substitution rule with  $t = 2\theta - \sin(2\theta)$ , we observe that

$$(11.2.38) \quad \int_{\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) (\sin(2\theta) - 2\theta) + \frac{3\pi}{4} \right) d\theta \\ = \int_{\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n})} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) t - \frac{3\pi}{4} \right) dt \geq c_2 \int_{\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n})} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) t - \frac{3\pi}{4} \right) dt,$$

with

$$0 < c_2 = \inf_{t \in [2\varepsilon_0 - \sin(2\varepsilon_0), 2\pi - 2\varepsilon_0 + \sin(2\varepsilon_0)]} \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} < +\infty,$$

where  $\varphi(\theta) = 2\theta - \sin(2\theta)$  is the increasing  $C^\infty$ -diffeomorphism from  $[\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0]$  to  $[2\varepsilon_0 - \sin(2\varepsilon_0), 2\pi - 2\varepsilon_0 + \sin(2\varepsilon_0)]$  already used above. According to (11.2.34) and (11.2.38), it therefore sufficient to prove that

$$(11.2.39) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n})} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) t - \frac{3\pi}{4} \right) dt > 0,$$

where according to (11.2.37), the subset  $\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}) \subset (2\varepsilon_0 - \sin(2\varepsilon_0), 2\pi - 2\varepsilon_0 + \sin(2\varepsilon_0))$  satisfies for all  $n \geq n_0$ ,

$$(11.2.40) \quad |\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n})| = \int_{\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}} |\varphi'(x)| dx \geq \left( \inf_{[\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0]} |\varphi'| \right) |\tilde{\omega}_{\varepsilon_0,n}| \geq c_3,$$

with

$$0 < c_3 = c_1 \inf_{[\varepsilon_0, \pi - \varepsilon_0]} |\varphi'| < +\infty.$$

By using anew the substitution rule with  $x = \left(\frac{n}{2} + \frac{1}{4}\right)t - \frac{3\pi}{4}$ , we observe that

$$(11.2.41) \quad \int_{\varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0, n})} \sin^2 \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) t - \frac{3\pi}{4} \right) dt = \frac{4}{2n+1} \int_{\Omega_{\varepsilon_0, n}} \sin^2 x \, dx,$$

where according to (11.2.33) and (11.2.40), the subset

$$\Omega_{\varepsilon_0, n} = \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \varphi(\tilde{\omega}_{\varepsilon_0, n}) - \frac{3\pi}{4} \subset \left( \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \varphi(\varepsilon_0) - \frac{3\pi}{4}, \left( \frac{n}{2} + \frac{1}{4} \right) \varphi(\pi - \varepsilon_0) - \frac{3\pi}{4} \right),$$

satisfies

$$(11.2.42) \quad \exists c_4 > 0, \forall n \geq n_0, \quad |\Omega_{\varepsilon_0, n}| \geq c_4 n.$$

According to (11.2.39) and (11.2.41), it is therefore sufficient to check that

$$(11.2.43) \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \int_{\Omega_{\varepsilon_0, n}} \sin^2 x \, dx > 0.$$

Let  $k \geq 1$  be an integer depending only on  $\varepsilon_0$  such that

$$(11.2.44) \quad \forall n \geq n_0, \quad \Omega_{\varepsilon_0, n} \subset \left( -kn\pi + \frac{\pi}{2}, kn\pi + \frac{\pi}{2} \right).$$

We denote  $N_n = \#I_n$  the cardinality of the following set

$$(11.2.45) \quad I_n = \left\{ i \in [-kn, kn-1] \cap \mathbb{Z} : \left| \Omega_{\varepsilon_0, n} \cap \left[ i\pi + \frac{\pi}{2}, \pi(i+1) + \frac{\pi}{2} \right] \right| \geq \frac{c_4}{2k(\pi+1)} \right\},$$

with  $n \geq n_0$ . It follows from (11.2.44) and (11.2.45) that for all  $n \geq n_0$ ,

$$(11.2.46)$$

$$\begin{aligned} |\Omega_{\varepsilon_0, n}| &= \sum_{i=-kn}^{kn-1} \left| \Omega_{\varepsilon_0, n} \cap \left[ i\pi + \frac{\pi}{2}, (i+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] \right| \\ &= \sum_{i \in I_n} \left| \Omega_{\varepsilon_0, n} \cap \left[ i\pi + \frac{\pi}{2}, (i+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] \right| + \sum_{\substack{i \notin I_n, \\ i \in [-kn, kn-1] \cap \mathbb{Z}}} \left| \Omega_{\varepsilon_0, n} \cap \left[ i\pi + \frac{\pi}{2}, (i+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] \right| \\ &\leq \pi N_n + 2kn \frac{c_4}{2k(\pi+1)} = \pi N_n + \frac{nc_4}{\pi+1}. \end{aligned}$$

We deduce from (11.2.42) and (11.2.46) that

$$(11.2.47) \quad \forall n \geq n_0, \quad N_n \geq \frac{nc_4}{\pi+1}.$$

Let us now prove that the estimate (11.2.43) holds. By using the  $\pi$ -periodicity of the function  $x \mapsto \sin^2 x$  and (11.2.44), we obtain that for all  $n \geq n_0$ ,

$$(11.2.48) \quad \begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{\Omega_{\varepsilon_0, n}} \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{n} \sum_{i=-kn}^{kn-1} \int_{\Omega_{\varepsilon_0, n} \cap [i\pi + \frac{\pi}{2}, (i+1)\pi + \frac{\pi}{2}]} \sin^2 x \, dx \\ &\geq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} \int_{(\Omega_{\varepsilon_0, n} - (i+1)\pi) \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

An application of Lemma 11.3.1 in appendix together with (11.2.45), (11.2.47) and (11.2.48) provide that for all  $n \geq n_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{\Omega_{\varepsilon_0, n}} \sin^2 x \, dx &\geq \frac{1}{n} \sum_{i \in I_n} \int_{-\frac{m_{i,n}}{2}}^{\frac{m_{i,n}}{2}} \sin^2 x \, dx \geq \frac{N_n}{n} \int_{-\frac{c_4}{4k(\pi+1)}}^{\frac{c_4}{4k(\pi+1)}} \sin^2 x \, dx \\ &\geq \frac{c_4}{\pi+1} \int_{-\frac{c_4}{4k(\pi+1)}}^{\frac{c_4}{4k(\pi+1)}} \sin^2 x \, dx > 0, \end{aligned}$$

with

$$m_{i,n} = \left| (\Omega_{\varepsilon_0,n} - (i+1)\pi) \cap \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right| = \left| \Omega_{\varepsilon_0,n} \cap \left[ i\pi + \frac{\pi}{2}, (i+1)\pi + \frac{\pi}{2} \right] \right|,$$

for all  $n \geq n_0$  and  $i \in [-kn, kn-1] \cap \mathbb{Z}$ . This establishes (11.2.43) and concludes that assertion (i) implies assertion (iii). This ends the proof of Proposition 7.3.1.

**11.2.2. Necessary geometric condition in higher dimensions.** This section is devoted to the proof of Theorem 7.3.3. For any  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$  and  $\varepsilon \geq 0$ , we consider the parallelepipeds

$$\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon} = \prod_{j=1}^d [-\sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon, \sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon].$$

Let  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ . We deduce from the one-dimensional Plancherel-Rotach formula (11.2.6) that for all  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$ ,  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$  and  $x \in \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}$ ,

$$(11.2.49) \quad \Phi_\alpha(x) = F_\alpha(x) + G_\alpha(x),$$

with

$$(11.2.50) \quad F_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{d}{4}}}{\pi^{\frac{d}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}}} \prod_{i=1}^d \frac{\sin\left(\left(\frac{\alpha_i}{2} + \frac{1}{4}\right)(\sin(2\theta_i) - 2\theta_i) + \frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{\sin \theta_i}}$$

and

$$(11.2.51) \quad G_\alpha(x) = \frac{2^{\frac{d}{4}}}{\pi^{\frac{d}{2}} \alpha^{\frac{1}{4}} \prod_{i=1}^d \sqrt{\sin \theta_i}} R_\alpha(x),$$

with  $x = (\sqrt{2\alpha_1+1} \cos \theta_1, \dots, \sqrt{2\alpha_d+1} \cos \theta_d) \in \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}$ . The remainder terms  $R_\alpha$  satisfy

$$(11.2.52) \quad \exists C_\varepsilon > 0, \forall \alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d, \forall x \in \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon}, \quad |R_\alpha(x)| \leq C_\varepsilon \sum_{i=1}^d \frac{1}{\alpha_i + 1}.$$

By using the preliminary step in the proof of Proposition 7.3.1, we obtain from (11.2.3) that for all  $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ,

$$(11.2.53) \quad \begin{aligned} & \lim_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \lim_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon})}^2 \\ &= \lim_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \lim_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^d \|\phi_{\alpha_j}\|_{L^2([- \sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon, \sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon])}^2 \\ &= \prod_{j=1}^d \lim_{\alpha_j \rightarrow +\infty} \|\phi_{\alpha_j}\|_{L^2([- \sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon, \sqrt{2\alpha_j+1} \cos \varepsilon])}^2 = \left(1 - \frac{2\varepsilon}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned}$$

Let us assume that the fractional harmonic Schrödinger equation (7.3.3) with  $s \geq 1$  is exactly controllable from a measurable subset  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  for some time  $T > 0$ . The spectral gap condition in Proposition 7.1.2 is satisfied by the fractional harmonic oscillator  $(-\Delta_x + |x|^2)^s$  since its spectrum is given by

$$\sigma((-\Delta_x + |x|^2)^s) = \{(2n+d)^s : n \in \mathbb{N}\}.$$

We can deduce from the infinite dimensional Hautus test [56, Corollary 2.18] recalled in Proposition 7.1.2 that there exists  $\delta > 0$  such that

$$(11.2.54) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \delta = \delta \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega)}.$$

Let  $0 < \varepsilon_0 < \frac{\pi}{2}$  such that

$$\delta - \left(1 - \left(1 - \frac{2\varepsilon_0}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\right) > 0.$$

By writing for all  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega)}^2 = \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon_0})}^2 + \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \setminus \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon_0})}^2 \leq \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon_0})}^2 + 1 - \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\mathcal{C}_{\alpha,\varepsilon_0})}^2,$$

we deduce from (11.2.53) and (11.2.54) that

$$\liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} \geq \sqrt{\delta^2 - \left(1 - \left(1 - \frac{2\varepsilon_0}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}}\right)} > 0.$$

It follows from (11.2.51) and (11.2.52) that

$$\forall \alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d, \quad \|G_\alpha\|_{L^2(\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})}^2 \leq C_{\varepsilon_0}^2 \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \left(\sum_{i=1}^d \frac{1}{\alpha_i + 1}\right)^2 \left(\prod_{i=1}^d \sqrt{2\alpha_i + 1}\right) \left(1 - \frac{2\varepsilon_0}{\pi}\right)^d$$

and

$$(11.2.55) \quad \limsup_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \limsup_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \|G_\alpha\|_{L^2(\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} = 0.$$

We can therefore deduce from (11.2.49) and (11.2.55) that

$$(11.2.56) \quad \begin{aligned} & \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \|F_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} \\ & \geq \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} [\|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} - \|G_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})}] \\ & \geq \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} [\|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} - \|G_\alpha\|_{L^2(\mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})}] \\ & \geq \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \|\Phi_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})} > 0. \end{aligned}$$

On the other hand, we notice from (11.2.50) that for all  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$ ,

$$\forall x \in \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0}, \quad |F_\alpha(x)|^2 \leq \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\pi^d \alpha^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^d \frac{\sqrt{2\alpha_i + 1}}{\sqrt{2\alpha_i + 1 - x_i^2}}$$

and this implies that for all  $\alpha \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^d$ ,

$$(11.2.57) \quad \begin{aligned} \|F_\alpha\|_{L^2(\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0})}^2 & \leq \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\pi^d \alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{\omega \cap \mathcal{C}_{\alpha, \varepsilon_0}} \prod_{i=1}^d \frac{\sqrt{2\alpha_i + 1}}{\sqrt{2\alpha_i + 1 - x_i^2}} dx \\ & \leq \frac{2^{\frac{d}{2}}}{\pi^d \sin^d \varepsilon_0} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2\alpha_1 + 1}, \sqrt{2\alpha_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2\alpha_d + 1}, \sqrt{2\alpha_d + 1}]|}{\alpha^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

We deduce from (11.2.56) and (11.2.57) that

$$(11.2.58) \quad \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2\alpha_1 + 1}, \sqrt{2\alpha_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2\alpha_d + 1}, \sqrt{2\alpha_d + 1}]|}{|[-\sqrt{2\alpha_1 + 1}, \sqrt{2\alpha_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2\alpha_d + 1}, \sqrt{2\alpha_d + 1}]|} > 0.$$

It follows from (11.2.28) that for all  $(R_1, \dots, R_d) \in [2, +\infty)^d$ ,

$$(11.2.59) \quad \forall 1 \leq i \leq d, \quad \sqrt{2n_i + 1} \leq R_i < \sqrt{2n_i + 3},$$

where  $n_i = n_i(R_i) = \lfloor \frac{R_i^2 - 1}{2} \rfloor \in \mathbb{N}$  for all  $1 \leq i \leq d$ . We obtain that

$$(11.2.60) \quad \begin{aligned} & \frac{|\omega \cap [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|}{|[-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|} \\ & \geq \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n_1 + 1}, \sqrt{2n_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2n_d + 1}, \sqrt{2n_d + 1}]|}{|[-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|} \\ & = \left(\prod_{i=1}^d \frac{\sqrt{2n_i + 1}}{R_i}\right) \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2n_1 + 1}, \sqrt{2n_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2n_d + 1}, \sqrt{2n_d + 1}]|}{|[-\sqrt{2n_1 + 1}, \sqrt{2n_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2n_d + 1}, \sqrt{2n_d + 1}]|}. \end{aligned}$$

We observe that (11.2.59) implies that

$$(11.2.61) \quad \forall 1 \leq i \leq d, \quad \lim_{R_i \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2n_i + 1}}{R_i} = 1.$$



It follows from (11.2.58), (11.2.60) and (11.2.61) that

$$\begin{aligned} & \liminf_{R_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{R_d \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|}{|[-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|} \\ & \geq \liminf_{\alpha_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{\alpha_d \rightarrow +\infty} \frac{|\omega \cap [-\sqrt{2\alpha_1 + 1}, \sqrt{2\alpha_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2\alpha_d + 1}, \sqrt{2\alpha_d + 1}]|}{|[-\sqrt{2\alpha_1 + 1}, \sqrt{2\alpha_1 + 1}] \times \dots \times [-\sqrt{2\alpha_d + 1}, \sqrt{2\alpha_d + 1}]|} > 0. \end{aligned}$$

It establishes (7.3.4) with  $A = I_d$ . Let  $A \in O(\mathbb{R}^d)$ . By using the invariance of the Weyl quantization under affine symplectic transformations (see e.g. [34, Theorem 18.5.9]), we notice that

$$(11.2.62) \quad R_A \circ \mathcal{H} = \mathcal{H} \circ R_A,$$

with  $\mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2$ , where  $R_A$  is the unitary operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  defined by  $R_A f = f(A \cdot)$  for  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . The identity (11.2.62) implies in particular that  $(R_A \Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  is a Hilbert basis of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  satisfying

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \quad \mathcal{H}(R_A \Phi_\alpha) = (2|\alpha| + d)R_A \Phi_\alpha,$$

when  $A \in O(\mathbb{R}^d)$ . By using that the operator

$$R_A : \text{Span}((\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|=N}) \rightarrow \text{Span}((\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|=N}),$$

is a unitary operator for any  $N \in \mathbb{N}$ , we notice that for all  $s \geq 1$  and  $f \in \mathcal{D}(\mathcal{H}^s)$ ,

$$\begin{aligned} (R_A \circ \mathcal{H}^s)f &= (R_A \circ \mathcal{H}^s) \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \langle f, R_{A^{-1}} \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} R_{A^{-1}} \Phi_\alpha \right) \\ &= R_A \left( \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} (2|\alpha| + d)^s \langle f, R_{A^{-1}} \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} R_{A^{-1}} \Phi_\alpha \right) \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} (2|\alpha| + d)^s \langle R_A f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha = (\mathcal{H}^s \circ R_A)f, \end{aligned}$$

that is

$$(11.2.63) \quad \forall A \in O(\mathbb{R}^d), \forall s \geq 1, \quad R_A \circ \mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s \circ R_A.$$

Let  $f_0, f_T \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . By assumption, there exists a control function  $u \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  supported in  $\mathbb{R}_+ \times \omega$  such that the semigroup solution  $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  of the system (7.3.3) associated to the initial condition  $f_0(A \cdot)$  satisfies  $g(T, \cdot) = f_T(A \cdot)$ . We deduce from (11.2.63) that the function  $f$  defined on  $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$  by

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(t, x) = g(t, A^{-1}x),$$

is the semigroup solution of (7.3.3) associated to the initial condition  $f_0$  and the control function  $v(t, x) = u(t, A^{-1}x) \in L^2([0, T] \times \mathbb{R}^d)$  supported in  $\mathbb{R}_+ \times A(\omega)$ ; and satisfies  $f(T, \cdot) = f_T(\cdot)$ . It implies that the harmonic Schrödinger equation (7.3.3) is exactly controllable from the control set  $A(\omega)$ . By using the first part of this proof with  $\omega$  replaced by  $A(\omega)$ , we obtain that

$$\liminf_{R_1 \rightarrow +\infty} \dots \liminf_{R_d \rightarrow +\infty} \frac{|A(\omega) \cap [-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|}{|[-R_1, R_1] \times \dots \times [-R_d, R_d]|} > 0.$$

This ends the proof of Theorem 7.3.3.

### 11.3. Appendix of Chapter 11

This appendix contains the proof of two instrumental results. The first part is devoted to the proof of a technical lemma used in the proof of Proposition 7.3.1. The purpose of the second part is to recall the proof of Miller's result stated in Proposition 7.1.1.

**11.3.1. A technical lemma.** The following technical result is used in the proof of Proposition 7.3.1:

LEMMA 11.3.1. *If  $A$  is a measurable subset of  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  and  $\delta = |A|$  denotes its Lebesgue measure then*

$$\int_A \sin^2 x \, dx \geq \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

PROOF. By using that the function  $x \mapsto \sin^2 x$  is even and increasing on  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , we observe that

$$\begin{aligned} (11.3.1) \quad \int_A \sin^2 x \, dx &= \int_{A \cap [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \sin^2 x \, dx + \int_{A \cap ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}])} \sin^2 x \, dx \\ &\geq \int_{A \cap [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \sin^2 x \, dx + \left| A \cap \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \right) \right| \sin^2 \left( \frac{\delta}{2} \right) \\ &\geq \int_{A \cap [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \sin^2 x \, dx + \frac{|A \cap ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}])|}{|[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \cap ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus A)|} \int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \cap ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus A)} \sin^2 x \, dx. \end{aligned}$$

By using that  $\delta = |A| = |[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]|$ , we notice that

$$\begin{aligned} (11.3.2) \quad \left| A \cap \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \right) \right| &= |A| - \left| A \cap \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \right| \\ &= \left| \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \right| - \left| A \cap \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \right| = \left| \left[ -\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2} \right] \cap \left( \left[ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \setminus A \right) \right|. \end{aligned}$$

It follows from (11.3.1) and (11.3.2) that

$$\int_A \sin^2 x \, dx \geq \int_{A \cap [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]} \sin^2 x \, dx + \int_{[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}] \cap ([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus A)} \sin^2 x \, dx = \int_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \sin^2 x \, dx.$$

This ends the proof of Lemma 11.3.1.  $\square$

**11.3.2. Spectral inequalities and exact controllability.** This section is devoted to recall the proof of Miller's result [56, Corollary 2.17] stated in Proposition 7.1.1 which provides necessary and sufficient spectral estimates for the observability of system (7.1.3) to hold. The proof of Proposition 7.1.1 is based on another Miller's result [56, Theorem 2.4] characterizing the observability with resolvent conditions which is recalled below and whose proof is omitted:

PROPOSITION 11.3.2 (Miller [56, Theorem 2.4]). *Let  $(A, \mathcal{D}(A))$  be a selfadjoint operator on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ , which is the infinitesimal generator of a strongly continuous group  $(e^{itA})_{t \in \mathbb{R}}$  on  $L^2(\mathbb{R}^d)$ . The system (7.1.3) is exactly observable from a measurable subset  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  if and only if there exist some positive constants  $M > 0$  and  $m > 0$  such that*

$$(11.3.3) \quad \forall f \in \mathcal{D}(A), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq M \|(A - \lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + m \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

When condition (11.3.3) is satisfied, exact observability holds in any time  $T > \pi\sqrt{M}$ .

We consider the system (7.1.3). If this system is exactly observable from a measurable subset  $\omega \subset \mathbb{R}^d$  at time  $T > 0$ , Proposition 11.3.2 proves that there exist some positive constants  $M > 0$  and  $m > 0$  such that the resolvent estimate (11.3.3) holds. Let  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $0 < D < \frac{1}{M}$  and  $f \in \mathbf{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(\mathcal{D}(A))$ . The functional calculus shows that

$$(11.3.4) \quad \|(A - \lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{D} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

It follows from (11.3.3) and (11.3.4) that

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbf{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(\mathcal{D}(A)), \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq MD \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + m \|f\|_{L^2(\omega)}^2,$$

that is

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathbf{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(\mathcal{D}(A)), \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \frac{m}{1-MD} \|f\|_{L^2(\omega)}^2.$$

It establishes the spectral estimates (7.1.4) for all  $f \in \mathbf{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}(L^2(\mathbb{R}^d))$  since the domain  $\mathcal{D}(A)$  is dense in  $L^2(\mathbb{R}^d)$ .

Conversely, let us assume that there exist some positive constants  $D > 0$  and  $k > 0$  such that the spectral estimates (7.1.4) holds. Let  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $f \in \mathcal{D}(A)$ . With  $f_\lambda = \mathbf{1}_{\{|A-\lambda| \leq \sqrt{D}\}}f$  and  $f_\perp = f - f_\lambda$ , we deduce from (7.1.4) and the functional calculus that for all  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $f \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$(11.3.5) \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|f_\lambda\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|f_\perp\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq k \|f_\lambda\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{1}{D} \|(A-\lambda)f_\perp\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq k \|f_\lambda\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{1}{D} \|(A-\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Let  $T > \pi \sqrt{\frac{1+k}{D}}$  and  $\varepsilon > 0$  such that

$$T^2 > \pi^2 \frac{1 + (1 + \varepsilon^2)k}{D}.$$

The functional calculus shows that for all  $\lambda \in \mathbb{R}$  and  $f \in \mathcal{D}(A)$ ,

$$(11.3.6) \quad \|f_\lambda\|_{L^2(\omega)}^2 = \|f - f_\perp\|_{L^2(\omega)}^2 \leq (1 + \varepsilon^{-2}) \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + (1 + \varepsilon^2) \|f_\perp\|_{L^2(\omega)}^2 \\ \leq (1 + \varepsilon^{-2}) \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + (1 + \varepsilon^2) \|f_\perp\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq (1 + \varepsilon^{-2}) \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{1 + \varepsilon^2}{D} \|(A-\lambda)f_\perp\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ \leq (1 + \varepsilon^{-2}) \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{1 + \varepsilon^2}{D} \|(A-\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

It follows from (11.3.5) and (11.3.6) that

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{D}(A), \quad \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq k(1 + \varepsilon^{-2}) \|f\|_{L^2(\omega)}^2 + \frac{1 + k(1 + \varepsilon^2)}{D} \|(A-\lambda)f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

We can deduce from Proposition 11.3.2 that the system (7.1.3) is exactly observable from  $\omega$  at time  $T$ .

# Annexes



## APPENDIX A

### Slowly varying metrics

This section is devoted to recall basic facts about slowly varying metrics. We refer the reader to [32] (Section 1.4) for the proofs of the following results. Let  $X$  be an open subset in a finite dimensional  $\mathbb{R}$ -vector space  $V$  and  $\|\cdot\|_x$  a norm in  $V$  depending on  $x \in X$ . The family of norms  $(\|\cdot\|_x)_{x \in X}$  is said to define a slowly varying metric in  $X$  if there exists a positive constant  $C \geq 1$  such that for all  $x \in X$  and for all  $y \in V$  satisfying  $\|y - x\|_x < 1$ , then  $y \in X$  and

$$(A.0.1) \quad \forall v \in V, \quad \frac{1}{C} \|v\|_x \leq \|v\|_y \leq C \|v\|_x.$$

LEMMA A.0.1. [32, Example 1.4.8]. *Let  $X$  be an open subset in a finite dimensional  $\mathbb{R}$ -vector space  $V$  and  $d(x)$  a  $\frac{1}{2}$ -Lipschitz continuous function, positive in  $X$  and zero in  $V \setminus X$ , satisfying*

$$\forall x, y \in X, \quad |d(x) - d(y)| \leq \frac{1}{2} \|x - y\|,$$

where  $\|\cdot\|$  is a fixed norm in  $V$ . Then, the family of norms  $(\|\cdot\|_x)_{x \in X}$  given by

$$\|v\|_x = \frac{\|v\|}{d(x)}, \quad x \in X, v \in V,$$

defines a slowly varying metric in  $X$ .

The proof given in [32, Example 1.4.8] shows more generally that result of Lemma A.0.1 holds true as well, when  $d$  is a contraction mapping function, that is, when there exists  $0 \leq k < 1$  such that

$$\forall x, y \in X, \quad |d(x) - d(y)| \leq k \|x - y\|.$$

Let us consider the case when  $X = V = \mathbb{R}^d$  and  $\|\cdot\|$  is the Euclidian norm. If  $0 < \delta \leq 1$  and  $0 < R < \frac{1}{\delta}$ , then the gradient of the function  $\rho_\delta(x) = R \langle x \rangle^\delta$  given by

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \nabla \rho_\delta(x) = R\delta \frac{x}{\langle x \rangle^{2-\delta}},$$

satisfies  $\|\nabla \rho_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leq R\delta < 1$ . The mapping  $\rho_\delta$  is then a positive contraction mapping and Lemma A.0.1 shows that the family of norms  $\|\cdot\|_x = \frac{\|\cdot\|}{R \langle x \rangle^\delta}$  defines a slowly varying metric on  $\mathbb{R}^d$ .

THEOREM A.0.1. [32, Theorem 1.4.10]. *Let  $X$  be an open subset in  $V$  a  $\mathbb{R}$ -vector space of finite dimension  $d \geq 1$  and  $(\|\cdot\|_x)_{x \in X}$  be a family of norms in  $V$  defining a slowly varying metric. Then, there exists a sequence  $(x_k)_{k \geq 0} \in X^{\mathbb{N}}$  such that the balls*

$$B_k = \{x \in V : \|x - x_k\|_{x_k} < 1\} \subset X,$$

form a covering of  $X$ ,

$$X = \bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k,$$

such that the intersection of more than  $N = (4C^3 + 1)^d$  two by two distinct balls  $B_k$  is always empty, where  $C \geq 1$  denotes the positive constant appearing in the slowness condition (A.0.1).



## APPENDIX B

### Miscellaneous facts about the Gamma function

Let  $\mathbb{N}$  be the set of non-negative integers and  $\mathbb{Z}_-$  be the set of non-positive integers. The Gamma function defined as

$$(B.0.1) \quad \forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt > 0,$$

admits an unique analytic extension on  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$  satisfying the functional identity

$$(B.0.2) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-, \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

and interpolating the factorial function

$$(B.0.3) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \Gamma(n+1) = n!.$$

It also satisfies the Legendre duplication formula

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\mathbb{N}\}, \quad \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{p}\right) = (2\pi)^{\frac{p-1}{2}} p^{\frac{1}{2}-z} \Gamma(z),$$

see e.g. [8, Chapter 3]. The Gamma function is strictly convex on  $(0, +\infty)$ , since differentiating under the integral sign provides that

$$\forall x > 0, \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^2 t^{x-1} e^{-t} dt > 0.$$

On the other hand, as  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$  thanks to (B.0.3), Rolle's theorem implies that there exists  $x_0$  in  $]1, 2[$  such that  $\Gamma'(x_0) = 0$ . Since  $\Gamma'$  is an increasing function on  $(0, +\infty)$ , the Gamma function is therefore increasing on  $[2, +\infty)$ . Related to the Gamma function is the Beta function

$$\forall x, y > 0, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt,$$

satisfying the following identity

$$(B.0.4) \quad \forall x, y > 0, \quad B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Instrumental in the core of this work are the two following lemmas:

LEMMA B.0.1. *The Gamma function satisfies the following estimates:*

$$\forall p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists C_p > 0, \forall x \geq 1, \quad \Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \leq C_p (p^{\frac{1}{p}} e^{\frac{1}{p}})^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right).$$

PROOF. By using the Legendre duplication formula, (B.0.2) and the fact that the Gamma function is increasing on  $[2, +\infty)$ , we deduce that for all  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $x \geq 2p$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} p^{x-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{p-1} \Gamma\left(\frac{x+j}{p}\right) \leq (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} p^{x-\frac{1}{2}} \left(\Gamma\left(\frac{x}{p} + 1\right)\right)^p \\ &= (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} p^{x-\frac{1}{2}} \left(\frac{x}{p}\right)^p \left(\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\right)^p \leq (2\pi)^{\frac{1-p}{2}} p! p^{-\frac{1}{2}-p} (pe)^x \left(\Gamma\left(\frac{x}{p}\right)\right)^p, \end{aligned}$$



since  $x^p \leq e^x p!$ . It proves the estimate when  $x \geq 2p$ . We conclude by using the continuity of the function  $x \mapsto \frac{\Gamma(x)^{\frac{1}{p}}}{(p^{\frac{1}{p}} e^{\frac{1}{p}})^x \Gamma(\frac{x}{p})}$  on  $[1, +\infty)$ .  $\square$

LEMMA B.0.2. *The Gamma function and the Beta function satisfy the following estimates:*

- (i)  $\forall x > 0, \forall y > 0, \quad x^y \leq \Gamma(y+1)e^x$
- (ii)  $\forall r > 0, \forall x, y \geq r, \quad \Gamma(x)\Gamma(y) \leq \frac{1}{2r}B(r, r)\Gamma(x+y+1)$
- (iii)  $\forall r \geq 1, \exists C_r > 0, \forall x \geq 1, \quad \Gamma(x)^r \leq C_r\Gamma(rx)$

PROOF. It follows from (B.0.1) that for all  $x, y > 0$ ,

$$\Gamma(y) = \int_0^{+\infty} t^{y-1} e^{-t} dt \geq \int_0^x t^{y-1} e^{-t} dt = x^y \int_0^1 t^{y-1} e^{-tx} dt \geq x^y \int_0^1 t^{y-1} e^{-x} dt = \frac{x^y e^{-x}}{y}.$$

Assertion (i) directly follows from the previous estimate together with the functional identity (B.0.2). On the other hand, since the Beta function is separately non-increasing with respect to the two variables, it follows from the functional identity (B.0.2) and (B.0.4) that for all  $r > 0, x, y \geq r$ ,

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\Gamma(y) &= B(x, y)\Gamma(x+y) \leq B(r, y)\Gamma(x+y) \leq B(r, r)\Gamma(x+y) \\ &= \frac{B(r, r)}{x+y}(x+y)\Gamma(x+y) \leq \frac{B(r, r)}{2r}\Gamma(x+y+1). \end{aligned}$$

It proves that the estimate (ii) holds. By using Stirling formula

$$(B.0.5) \quad \Gamma(x) \sim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left(\frac{x}{e}\right)^x,$$

see e.g. [8], it follows that for all  $r \geq 1$ ,

$$\frac{\Gamma(x)^r}{\Gamma(rx)} \sim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{\frac{r-1}{2}} r^{\frac{1}{2}-rx} = \mathcal{O}_r(1) \text{ when } x \rightarrow +\infty.$$

Since the function  $x \mapsto \frac{\Gamma(x)^r}{\Gamma(rx)}$  is continuous on  $[1, +\infty)$ , there exists a positive constant  $C_r > 0$  such that the estimate (iii) holds.  $\square$

## APPENDIX C

### Gelfand-Shilov regularity

We refer the reader to the works [27, 28, 60, 64] and the references herein for extensive expositions of the Gelfand-Shilov regularity theory. The Gelfand-Shilov spaces  $S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ , with  $\mu, \nu > 0$ ,  $\mu + \nu \geq 1$ , are defined as the spaces of smooth functions  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  satisfying the estimates

$$\exists A, C > 0, \quad |\partial_x^\alpha f(x)| \leq CA^{|\alpha|}(\alpha!)^\mu e^{-\frac{1}{A}|x|^{1/\nu}}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad \alpha \in \mathbb{N}^d,$$

or, equivalently

$$\exists A, C > 0, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^\beta \partial_x^\alpha f(x)| \leq CA^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\mu(\beta!)^\nu, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d,$$

with  $\alpha! = (\alpha_1!) \dots (\alpha_d!)$  if  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ . These Gelfand-Shilov spaces  $S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  may also be characterized as the spaces of Schwartz functions  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  satisfying the estimates

$$\exists C > 0, \varepsilon > 0, \quad |f(x)| \leq Ce^{-\varepsilon|x|^{1/\nu}}, \quad x \in \mathbb{R}^d; \quad |\widehat{f}(\xi)| \leq Ce^{-\varepsilon|\xi|^{1/\mu}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

In particular, we notice that Hermite functions belong to the symmetric Gelfand-Shilov space  $S_{1/2}^{1/2}(\mathbb{R}^d)$ . More generally, the symmetric Gelfand-Shilov spaces  $S_\mu^\mu(\mathbb{R}^d)$ , with  $\mu \geq 1/2$ , can be nicely characterized through the decomposition into the Hermite basis  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$ , see e.g. [64, Proposition 1.2],

$$\begin{aligned} f \in S_\mu^\mu(\mathbb{R}^d) &\Leftrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^d), \exists t_0 > 0, \left\| \left( \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2} \exp(t_0|\alpha|^{1/2\mu}) \right)_{\alpha \in \mathbb{N}^d} \right\|_{l^2(\mathbb{N}^d)} < +\infty \\ &\Leftrightarrow f \in L^2(\mathbb{R}^d), \exists t_0 > 0, \|e^{t_0 \mathcal{H}} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} < +\infty, \end{aligned}$$

where  $\mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2$  stands for the harmonic oscillator. More generally, when the ratio  $\frac{\mu}{\nu} \in \mathbb{Q}$  is a rational number, the Gelfand-Shilov space  $S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  can also be nicely characterized through the decomposition into the orthonormal basis of eigenfunctions of a class of anisotropic Shubin operators, whose basic model is the operator

$$\mathcal{H}_{k,m} = (-\Delta_x)^m + |x|^{2k}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

with  $k, m \geq 1$  two positive integers. Let  $(\psi_n^{k,m})_{n \geq 1}$  be an orthonormal basis of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  composed of eigenfunctions of the above operator  $\mathcal{H}_{k,m}$ . Given a real number  $t \geq 1$ , the Gelfand-Shilov space  $S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$ , with

$$\mu = \frac{kt}{k+m} \quad \text{and} \quad \nu = \frac{mt}{k+m},$$

are characterized in the following way, thanks to the result [17, Theorem 1.4] by Capiello, Gramchev, Pilipović and Rodino,

$$f \in S_{\frac{k+m}{k+m}}^{\frac{kt}{k+m}}(\mathbb{R}^d) \iff \exists \varepsilon > 0, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |\langle f, \psi_n^{k,m} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}|^2 e^{\varepsilon \lambda_n^{\frac{k+m}{2kmt}}} < +\infty,$$

where  $\lambda_n > 0$  is the eigenvalue associated to the eigenfunction  $\psi_n^{k,m} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  for all  $n \geq 1$ . Such a characterization in the case when  $\mu/\nu \notin \mathbb{Q}$  has not been found yet. We end this section by proving two technical lemmas:

LEMMA C.0.1. *Let  $\mu, \nu > 0$  such that  $\mu + \nu \geq 1$ ,  $C > 0$  and  $A \geq 1$ . If  $f \in S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  satisfies*

$$(C.0.1) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^d, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq CA^{|\alpha|+|\beta|}(\alpha!)^\nu(\beta!)^\mu,$$

*then, it satisfies*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(d+1)^{\frac{p}{2}} A^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu.$$

PROOF. Let  $f \in S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  satisfying the estimates (C.0.1). By using Newton formula, we obtain that for all  $p \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(C.0.2) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \sum_{i=1}^d x_i^2\right)^p |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=p}} \frac{p!}{\gamma!} x^{2\tilde{\gamma}} |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=p}} \frac{p!}{\gamma!} \|x^{\tilde{\gamma}} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2, \end{aligned}$$

where we denote  $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$  if  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ . Since for all  $\alpha \in \mathbb{N}^d$ ,  $\alpha! \leq (|\alpha|)!$ , it follows from (C.0.1) and (C.0.2) that

$$\begin{aligned} \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &\leq C^2 \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=p}} \frac{p!}{\gamma!} A^{2(|\tilde{\gamma}|+|\beta|)} (|\tilde{\gamma}|!)^{2\nu} (|\beta|!)^{2\mu} \\ &\leq C^2 (d+1)^p A^{2(p+|\beta|)} (p!)^{2\nu} (|\beta|!)^{2\mu}, \end{aligned}$$

since

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=p}} \frac{p!}{\gamma!} = (d+1)^p.$$

□

LEMMA C.0.2. *Let  $\mu, \nu > 0$  such that  $\mu + \nu \geq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ ,  $C > 0$  and  $A \geq 1$ . If  $f \in S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  satisfies*

$$(C.0.3) \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\langle x \rangle^p \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq CA^{p+|\beta|} (p!)^\nu (|\beta|!)^\mu,$$

*then, it satisfies*

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall \beta \in \mathbb{N}^d, \quad \|\langle x \rangle^{\delta p} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(8^\nu e^\nu A)^{p+|\beta|} (p!)^{\delta\nu} (|\beta|!)^\mu.$$

PROOF. Let  $f \in S_\nu^\mu(\mathbb{R}^d)$  satisfying the estimates (C.0.3). It follows from Hölder inequality that for all  $r \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$  and  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(C.0.4) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} (\langle x \rangle^{2\lfloor r \rfloor} |\partial_x^\beta f(x)|^2)^{\lfloor r \rfloor + 1 - r} (\langle x \rangle^{2(\lfloor r \rfloor + 1)} |\partial_x^\beta f(x)|^2)^{r - \lfloor r \rfloor} dx \\ &\leq \|\langle x \rangle^{\lfloor r \rfloor} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{2(\lfloor r \rfloor + 1 - r)} \|\langle x \rangle^{\lfloor r \rfloor + 1} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{2(r - \lfloor r \rfloor)}, \end{aligned}$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denotes the floor function. Since the above inequality clearly holds for  $r \in \mathbb{N}$ , we deduce from (C.0.3) and (C.0.4) that for all  $r \geq 0$  and  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(C.0.5) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq CA^{r+|\beta|} (\lfloor r \rfloor!)^{(\lfloor r \rfloor + 1 - r)\nu} ((\lfloor r \rfloor + 1)!)^{(r - \lfloor r \rfloor)\nu} (|\beta|!)^\mu \\ &\leq CA^{r+|\beta|} ((\lfloor r \rfloor + 1)!)^\nu (|\beta|!)^\mu \\ &\leq CA^{r+|\beta|} (\lfloor r \rfloor + 1)^{(\lfloor r \rfloor + 1)\nu} (|\beta|!)^\mu \\ &\leq CA^{r+|\beta|} (r+1)^{(r+1)\nu} (|\beta|!)^\mu. \end{aligned}$$

It follows from (C.0.5) that for all  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$(C.0.6) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^{\delta p} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq CA^{p+|\beta|} (p+1)^{(\delta p+1)\nu} (|\beta|!)^\mu \leq CA^{p+|\beta|} (2p)^{(\delta p+1)\nu} (|\beta|!)^\mu \\ &\leq C(2^\nu A)^{p+|\beta|} p^\nu (2p)^{\delta \nu p} (|\beta|!)^\mu \leq C(8^\nu e^\nu A)^{p+|\beta|} (p!)^{\delta \nu} (|\beta|!)^\mu, \end{aligned}$$

since for all positive integer  $p \geq 1$ ,

$$p+1 \leq 2p \leq 2^p \quad \text{and} \quad p^p \leq e^p p!.$$

Notice that from (C.0.3), since  $8^\nu e^\nu \geq 1$ , estimates (C.0.6) also hold for  $p = 0$ . This ends the proof of Lemma C.0.2.  $\square$



## Semigroup theory

This chapter is devoted to recall some basic facts about semigroups. In the following,  $H$  denotes a Hilbert space associated with the scalar product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

DEFINITION D.0.1. *A family  $(T(t))_{t \geq 0}$  of bounded operators on  $H$  is called a semigroup if and only if  $T(0) = \text{Id}_H$  and*

$$\forall t, t' \geq 0, \quad T(t + t') = T(t) \circ T(t').$$

*The semigroup is said to be strongly continuous if, moreover, for all  $x \in H$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0^+} T(t)x = x$  for the strong topology.*

For each strongly continuous semigroup there exist  $M \geq 1$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$  such that

$$\forall t \geq 0, \quad \|T(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\alpha t},$$

by the uniform boundedness principle [25, Proposition I.1.4]. In the case  $M = 1$  and  $\alpha = 0$ , the semigroup  $(T(t))_{t \geq 0}$  is said to be of contraction.

Associated with a semigroup is its *infinitesimal generator* defined as the unbounded linear operator  $A$  on  $H$ , with domain

$$D(A) = \left\{ x \in H; \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(x - T(t)x) \text{ exists} \right\},$$

and given by

$$\forall x \in D(A), \quad Ax = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{-1}(x - T(t)x).$$

This operator  $(A, D(A))$  is necessarily a closed operator with dense domain in  $H$  ([25, Theorem 1.4]).

Given a linear unbounded operator  $(A, D(A))$ , the Hille-Yoshida Theorem provides necessary and sufficient condition on  $A$  to generate a strongly continuous semigroup on  $H$ . Before recalling this theorem, let us recall that the *resolvent*  $\rho(A) \subset \mathbb{C}$  of  $A$  is defined as

$$\lambda \in \rho(A) \iff \begin{cases} \lambda \text{Id} - A : D(A) \longrightarrow H \text{ is bijective and} \\ R_\lambda(A) := (\lambda - A)^{-1} : H \longrightarrow D(A) \subset H \text{ is continuous.} \end{cases}$$

THEOREM D.0.1 ([25, Theorem 3.8]). *Let  $(A, D(A))$  be a linear unbounded operator on  $H$ . It generates a strongly continuous semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  such that  $\|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq Me^{\alpha t}$ , for some  $M \geq 1$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$ , if and only if:*

- (i)  *$A$  is closed and  $D(A)$  is dense in  $H$ .*
- (ii) *The resolvent  $\rho(A)$  of  $A$  contains  $(-\infty, -\alpha)$  and we have the following estimate:*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \lambda < -\alpha, \quad \|R_\lambda(A)^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\alpha + \lambda|^n}.$$

In the case when the unbounded operator  $(A, D(A))$  is densely defined, its adjoint operator on  $H$  can be defined as the unbounded operator  $A^*$  on  $H$  with domain

$$D(A^*) = \{y \in H; x \in D(A) \mapsto \langle y, Ax \rangle \text{ is continuous}\},$$

and for all  $y \in D(A^*)$ ,  $A^*y$  is given as the unique vector satisfying

$$\forall x \in D(A), \quad \langle y, Ax \rangle = \langle A^*y, x \rangle,$$

thanks to the Riesz representation theorem. When  $(A, D(A))$  is closed and densely defined, then  $(A^*, D(A^*))$  is a closed operator with dense domain (see [16, Proposition 2.17 and Theorem 3.24]). Moreover, one can prove that

$$(D.0.1) \quad \rho(A) = \overline{\rho(A^*)} \quad \text{and} \quad \forall \lambda \in \rho(A), R_\lambda(A)^* = R_{\overline{\lambda}}(A^*).$$

The following proposition establishes that the adjoint operator  $A^*$  generates a strongly continuous semigroup as soon as  $A$  generates one.

**PROPOSITION D.0.2.** *Let  $(A, D(A))$  be a linear unbounded operator on  $H$  generating a strongly continuous semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$ . Then, the adjoint operator  $(A^*, D(A^*))$  generates a strongly continuous semigroup  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$  given by*

$$\forall t \geq 0, \quad e^{-tA^*} = (e^{-tA})^*.$$

**PROOF.** First of all, we notice from Theorem D.0.1 that  $(A, D(A))$  is closed and densely defined. This ensures that  $(A^*, D(A^*))$  is well defined, closed and densely defined. Moreover, there exist  $M \geq 1$  and  $\alpha \in \mathbb{R}$  such that for all  $\lambda < -\alpha$ , the bounded operator  $R_\lambda(A) = (\lambda - A)^{-1}$  exists and satisfies

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|R_\lambda(A)^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\alpha + \lambda|^n}.$$

By using (D.0.1) and the fact that for all bounded operator  $B : H \rightarrow H$ ,  $\|B^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|B\|_{\mathcal{L}(H)}$ , we deduce that for all  $\lambda < -\alpha$ , the bounded operator  $R_\lambda(A^*)$  exists and satisfies

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \|R_\lambda(A^*)^n\|_{\mathcal{L}(H)} = \|R_\lambda(A)^n\|_{\mathcal{L}(H)} \leq \frac{M}{|\alpha + \lambda|^n}.$$

It follows from Theorem D.0.1 that the operator  $(A^*, D(A^*))$  generates a strongly continuous semigroup, denoted  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$ , on  $H$ .

Let  $t > 0$ ,  $x \in D(A)$  and  $x' \in D(A^*)$ . We introduce the function defined by

$$\forall s \in [0, t], \quad h(s) = \langle e^{-(t-s)A}x, e^{-sA^*}x' \rangle.$$

Since  $x \in D(A)$  and  $x' \in D(A^*)$ , then for all  $s \in [0, t]$ ,

$$e^{-(t-s)A}x \in D(A) \quad \text{and} \quad e^{-sA^*}x' \in D(A^*).$$

We deduce that the function  $h$  is differentiable and for all  $s \in [0, t]$ ,

$$h'(s) = \langle Ae^{-(t-s)A}x, e^{-sA^*}x' \rangle + \langle e^{-(t-s)A}x, -A^*e^{-sA^*}x' \rangle = 0.$$

Therefore,  $h(0) = h(t)$ , that is,

$$\forall x \in D(A), \forall x' \in D(A^*), \quad \langle x, e^{-tA^*}x' \rangle = \langle e^{-tA}x, x' \rangle.$$

Since  $D(A)$  and  $D(A^*)$  are dense in  $H$ , it follows that  $e^{-tA^*} = (e^{-tA})^*$  for all  $t \geq 0$ .  $\square$

We notice from Proposition D.0.2, together with the fact for all bounded operator  $B : H \rightarrow H$ ,  $\|B^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|B\|_{\mathcal{L}(H)}$ , that

$$\forall t \geq 0, \quad \|e^{-tA^*}\|_{\mathcal{L}(H)} = \|(e^{-tA})^*\|_{\mathcal{L}(H)} = \|e^{-tA}\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

As a consequence, it readily follows that the semigroup  $(e^{-tA})_{t \geq 0}$  is of contraction if and only if the adjoint semigroup  $(e^{-tA^*})_{t \geq 0}$  is of contraction.

## APPENDIX E

### Bernstein type estimates for Hermite functions

This section is devoted to the proof of the Bernstein type estimates given in Propositions 5.2.2 and 6.2.3. To that end, we begin by recalling basic facts about Hermite functions. The standard Hermite functions  $(\phi_k)_{k \geq 0}$  are defined for  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\phi_k(x) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2}) = \frac{1}{\sqrt{2^k k! \sqrt{\pi}}} \left(x - \frac{d}{dx}\right)^k (e^{-\frac{x^2}{2}}) = \frac{a_+^k \phi_0}{\sqrt{k!}},$$

where  $a_+$  is the creation operator

$$a_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{d}{dx}\right).$$

The Hermite functions satisfy the identity

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall k \geq 0, \quad \widehat{\phi_k}(\xi) = (-i)^k \sqrt{2\pi} \phi_k(\xi).$$

The  $L^2$ -adjoint of the creation operator is the annihilation operator

$$a_- = a_+^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{d}{dx}\right).$$

The following identities hold

$$[a_-, a_+] = a_- a_+ - a_+ a_- = \text{Id}, \quad -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 = 2a_+ a_- + 1,$$

$$(E.0.1) \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_+ \phi_k = \sqrt{k+1} \phi_{k+1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_- \phi_k = \sqrt{k} \phi_{k-1} \quad (= 0 \text{ si } k = 0),$$

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right) \phi_k = (2k+1) \phi_k.$$

The family  $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$  is a Hilbert basis of  $L^2(\mathbb{R})$ . We set for  $\alpha = (\alpha_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{N}^d$ ,  $x = (x_j)_{1 \leq j \leq d} \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\Phi_\alpha(x) = \prod_{j=1}^d \phi_{\alpha_j}(x_j).$$

The family  $(\Phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^d}$  is a Hilbert basis of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  composed of the eigenfunctions of the  $d$ -dimensional harmonic oscillator

$$(E.0.2) \quad \mathcal{H} = -\Delta_x + |x|^2 = \sum_{k \geq 0} (2k+d) \mathbb{P}_k, \quad \text{Id} = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}_k,$$

where  $\mathbb{P}_k$  is the orthogonal projection onto  $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha|=k}$ , with  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ .

Instrumental in the sequel are the following basic estimates proved by Beauchard, Jaming and Pravda-Starov in the proof of [11, Proposition 3.3] (formula (3.38)).

LEMMA E.0.1. *With  $\mathcal{E}_N = \text{Span}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$ , we have for all  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{E}_N$ ,*

$$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d, \quad \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Let us recall the proof of this technical lemma.



PROOF. We notice that

$$(E.0.3) \quad x_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,+} + a_{j,-}), \quad \partial_{x_j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{j,-} - a_{j,+}),$$

with

$$a_{j,+} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - \partial_{x_j}), \quad a_{j,-} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + \partial_{x_j}).$$

By denoting  $(e_j)_{1 \leq j \leq d}$  the canonical basis of  $\mathbb{R}^d$ , we obtain from (E.0.1) and (E.0.3) that for all  $N \in \mathbb{N}$  and  $f \in \mathcal{E}_N$ ,

$$\begin{aligned} \|a_{j,+}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \left\| a_{j,+} \left( \sum_{|\alpha| \leq N} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2} \Phi_\alpha \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \left\| \sum_{|\alpha| \leq N} \sqrt{\alpha_j + 1} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2} \Phi_{\alpha+e_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq N} (\alpha_j + 1) |\langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2}|^2 \\ &\leq (N+1) \sum_{|\alpha| \leq N} |\langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2}|^2 = (N+1) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|a_{j,-}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \left\| a_{j,-} \left( \sum_{|\alpha| \leq N} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2} \Phi_\alpha \right) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= \left\| \sum_{|\alpha| \leq N} \sqrt{\alpha_j} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2} \Phi_{\alpha-e_j} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \sum_{|\alpha| \leq N} \alpha_j |\langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2}|^2 \\ &\leq N \sum_{|\alpha| \leq N} |\langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2}|^2 = N \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

It follows that for all  $N \in \mathbb{N}$  and  $f \in \mathcal{E}_N$ ,

$$(E.0.4) \quad \|x_j f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\|a_{j,+}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|a_{j,-}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \leq \sqrt{2N+2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

and

$$(E.0.5) \quad \|\partial_{x_j} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} (\|a_{j,+}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|a_{j,-}f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}) \leq \sqrt{2N+2} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

We notice from (E.0.1) and (E.0.3) that

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \quad x^\alpha \partial_x^\beta f \in \mathcal{E}_{N+|\alpha|+|\beta|},$$

with  $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d}$  and  $\partial_x^\beta = \partial_{x_1}^{\beta_1} \dots \partial_{x_d}^{\beta_d}$ . We deduce from (E.0.4) that for all  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{E}_N$ , and  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ , with  $\alpha_1 \geq 1$ ,

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|x_1 \underbrace{(x^{\alpha-e_1} \partial_x^\beta f)}_{\in \mathcal{E}_{N+|\alpha|+|\beta|-1}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{2} \sqrt{N+|\alpha|+|\beta|} \|x^{\alpha-e_1} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

By iterating the previous estimates, we readily obtain from (E.0.4) and (E.0.5) that for all  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{E}_N$  and  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

□

### E.1. Proof of the Bernstein type estimates given by Proposition 5.2.2

This section is devoted to the proof of Proposition 5.2.2. We recall the following basic estimates

$$(E.1.1) \quad \forall t \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}, \quad t^k \leq e^t k!, \quad \forall t > 0, \forall A > 0, \quad t^A \leq A^A e^{t-A},$$

see e.g. [60] (formula (0.3.14)). Let  $0 < \delta \leq 1$  be a positive constant. When  $N \leq |\alpha| + |\beta|$ , with  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$ , we deduce from (B.0.3) and (E.1.1) that for all  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$(E.1.2) \quad \begin{aligned} & 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \leq 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} (N+|\alpha|+|\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \\ & \leq 2^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha|+|\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \leq (2\sqrt{e})^{|\alpha|+|\beta|} \sqrt{(|\alpha|+|\beta|)!} \\ & = (2\delta\sqrt{e})^{|\alpha|+|\beta|} (\Gamma(|\alpha|+|\beta|+1))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\delta^p}\right)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{p}} \\ & \leq (2\delta\sqrt{e})^{|\alpha|+|\beta|} (\Gamma(|\alpha|+|\beta|+1))^{\frac{1}{2}} (|\alpha|+|\beta|)!^{\frac{1}{p}} e^{\frac{1}{p\delta^p}} \\ & = (2\delta\sqrt{e})^{|\alpha|+|\beta|} e^{\frac{1}{p\delta^p}} (\Gamma(|\alpha|+|\beta|+1))^{\frac{1}{2}} (\Gamma(|\alpha|+|\beta|+1))^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

The above estimate also holds when  $|\alpha| + |\beta| = 0$ . By using Lemma B.0.1 and Lemma B.0.2 (assertion (ii)), we deduce from (E.1.2) that for all  $|\alpha| + |\beta| \geq N$ ,  $0 < \delta \leq 1$  and  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,

$$(E.1.3) \quad \begin{aligned} & 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \\ & \leq C_2 C_p e^{\frac{1}{p\delta^p}} \sqrt{2ee^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}}} (2\sqrt{2ee^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} \delta})^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|+1}{p}\right) \\ & \leq \frac{p}{2} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}\right) C_2 C_p e^{\frac{1}{p\delta^p}} \sqrt{2ee^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}}} (2\sqrt{2ee^{\frac{1}{p}} p^{\frac{1}{p}} \delta})^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left((|\alpha|+|\beta|)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p} + 1\right)\right). \end{aligned}$$

Let  $0 < \varepsilon \leq 1$ . We can choose the positive integer  $p = p_\varepsilon$  such that

$$p_\varepsilon \geq 2, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{p_\varepsilon} \leq \frac{1}{2 - \varepsilon}, \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{p_\varepsilon} + 1 \leq 2.$$

Since the Gamma function is convex on  $(0, +\infty)$  and  $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ , we have  $\Gamma(x) \leq \Gamma(2)$  for all  $1 \leq x \leq 2$ . On the other hand, by using the fact that the Gamma function is increasing on  $[2, +\infty)$ , we deduce that  $\Gamma(2) \leq \Gamma(y) \leq \Gamma(z)$  for all  $2 \leq y \leq z$ . It implies that

$$(E.1.4) \quad \forall 1 \leq x \leq 2 \leq y \leq z, \quad \Gamma(x) \leq \Gamma(y) \leq \Gamma(z).$$

It follows from (E.1.3) that  $|\alpha| + |\beta| \geq N$ ,  $0 < \delta \leq 1$  and  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,

$$(E.1.5) \quad 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} (D_\varepsilon \delta)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right),$$

with

$$\tilde{K}_{\varepsilon, \delta} = \frac{p_\varepsilon}{2} B\left(\frac{1}{p_\varepsilon}, \frac{1}{p_\varepsilon}\right) C_2 C_{p_\varepsilon} e^{\frac{1}{p_\varepsilon \delta^{p_\varepsilon}}} \sqrt{2ee^{\frac{1}{p_\varepsilon}} p_\varepsilon^{\frac{1}{p_\varepsilon}}} > 0 \quad \text{and} \quad D_\varepsilon = 2\sqrt{2ee^{\frac{1}{p_\varepsilon}} p_\varepsilon^{\frac{1}{p_\varepsilon}}} > 0.$$

On the other hand, when  $N \geq |\alpha| + |\beta| > 0$ , we deduce from (E.1.1) and Lemma B.0.2 (assertion (i)) that for all  $0 < \delta \leq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,

$$\begin{aligned}
(E.1.6) \quad & 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \leq 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} (N+|\alpha|+|\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \\
& \leq (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} (\delta^{-1}\sqrt{N})^{|\alpha|+|\beta|} = (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} (\delta^{\varepsilon-2}N^{1-\frac{\varepsilon}{2}})^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \\
& \leq (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} \left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon}\right)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon}} e^{\delta^{\varepsilon-2}N^{1-\frac{\varepsilon}{2}} - \frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon}} \\
& \leq (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 1\right) e^{\delta^{\varepsilon-2}N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}.
\end{aligned}$$

By using (E.1.4), we deduce from (E.1.6) that for all  $0 < \delta \leq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,

$$(E.1.7) \quad 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} \leq (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right) e^{\delta^{\varepsilon-2}N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}},$$

when  $N \geq |\alpha| + |\beta| > 0$ . Let us also notice from (E.1.4) that

$$(E.1.8) \quad 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(N+|\alpha|+|\beta|)!}{N!}} = 1 \leq (2\delta)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right) e^{\delta^{\varepsilon-2}N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}},$$

when  $|\alpha| + |\beta| = 0$ , since  $\Gamma(2) = 1$ . It follows from Lemma E.0.1, (E.1.5), (E.1.7) and (E.1.8) that for all  $0 < \varepsilon \leq 1$ , there exists a positive constant  $K_\varepsilon > 1$  such that

$$\begin{aligned}
(E.1.9) \quad & \forall 0 < \delta \leq 1, \exists \tilde{K}_{\varepsilon,\delta} > 1, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d, \forall N \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{E}_N, \\
& \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \tilde{K}_{\varepsilon,\delta} (\delta K_\varepsilon)^{|\alpha|+|\beta|} \Gamma\left(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

By using Newton formula, we obtain that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
(E.1.10) \quad & \|\langle x \rangle^k \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 + \sum_{i=1}^d x_i^2\right)^k |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx \\
& = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} x^{2\tilde{\gamma}} |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \|x^{\tilde{\gamma}} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
\end{aligned}$$

where we denote  $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$  if  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ . It follows from (E.1.4), (E.1.9) and (E.1.10) that for all  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $0 < \delta \leq 1$ ,  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $f \in \mathcal{E}_N$ ,

$$\begin{aligned}
(E.1.11) \quad & \|\langle x \rangle^k \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \tilde{K}_{\varepsilon,\delta}^2 (\delta K_\varepsilon)^{2|\tilde{\gamma}|+2|\beta|} \left(\Gamma\left(\frac{|\tilde{\gamma}|+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right)\right)^2 e^{\frac{2N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
& \leq \tilde{K}_{\varepsilon,\delta}^2 \left(\Gamma\left(\frac{k+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right)\right)^2 e^{\frac{2N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} K_\varepsilon^{2|\beta|+2k} \delta^{2|\beta|} \left(\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!}\right) \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
& = \tilde{K}_{\varepsilon,\delta}^2 \left(\Gamma\left(\frac{k+|\beta|}{2-\varepsilon} + 2\right)\right)^2 e^{\frac{2N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} K_\varepsilon^{2|\beta|+2k} \delta^{2|\beta|} (d+1)^k \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
\end{aligned}$$

since

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} = (d+1)^k,$$

thanks to Newton formula. Let  $r \in [0, +\infty) \setminus \mathbb{N}$ . We can write  $r = \theta k + (1 - \theta)(k + 1) > 0$  with  $k \in \mathbb{N}$  and  $\theta \in ]0, 1[$ . By using Hölder inequality, it follows from (E.1.11) that

$$(E.1.12) \quad \begin{aligned} \|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|\langle x \rangle^k \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^\theta \|\langle x \rangle^{k+1} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \\ &\leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} \left( \Gamma\left(\frac{k + |\beta|}{2 - \varepsilon} + 2\right) \right)^\theta \left( \Gamma\left(\frac{k + 1 + |\beta|}{2 - \varepsilon} + 2\right) \right)^{1-\theta} e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} K_\varepsilon^{|\beta|+r} \delta^{|\beta|} (d+1)^{\frac{r}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

By using that the Gamma function is increasing on  $[2, +\infty)$  and that  $k \leq r$ , we deduce from (E.1.12) that

$$\begin{aligned} &\|\langle x \rangle^r \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} \left( \Gamma\left(\frac{r + |\beta|}{2 - \varepsilon} + 2\right) \right)^\theta \left( \Gamma\left(\frac{r + 1 + |\beta|}{2 - \varepsilon} + 2\right) \right)^{1-\theta} e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} K_\varepsilon^{|\beta|+r} \delta^{|\beta|} (d+1)^{\frac{r}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \tilde{K}_{\varepsilon, \delta} \Gamma\left(\frac{r + |\beta|}{2 - \varepsilon} + 3\right) e^{\frac{N^{1-\frac{\varepsilon}{2}}}{\delta^{2-\varepsilon}}} K_\varepsilon^{|\beta|+r} \delta^{|\beta|} (d+1)^{\frac{r}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \end{aligned}$$

since  $0 < \frac{1}{2-\varepsilon} \leq 1$ , as  $0 < \varepsilon \leq 1$ . This ends the proof of Proposition 5.2.2.

## E.2. Proof of Proposition 6.2.3

This section is devoted to the proof of Proposition 6.2.3 which provides general Bernstein type estimates used in Section 10.3.1. Let  $\Theta : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  be a non-negative continuous function such that the associated sequence  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  in (6.2.3) satisfies the assumptions (H1) and (H2). Let  $f \in GS_\Theta$ ,  $0 < s \leq 1$  and  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d$ . We begin by proving that there exist some positive constants  $C'_\Theta > 0$ ,  $\tilde{C}_\Theta > 0$ , independent on  $f$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  such that

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C'_\Theta \tilde{C}_\Theta^{|\alpha|+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.$$

It is sufficient to prove that there exist some positive constants  $C'_\Theta > 0$ ,  $\tilde{C}_\Theta > 0$ , independent on  $f$ ,  $\alpha$  and  $\beta$  such that for all  $N \geq |\alpha| + |\beta| + 1$ ,

$$(E.2.1) \quad \|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C'_\Theta \tilde{C}_\Theta^{|\alpha|+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta},$$

with  $\pi_N f$  the orthogonal projection of the function  $f$  onto the space  $\text{Span}_{\mathbb{C}}\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^d, |\alpha| \leq N}$  given by

$$(E.2.2) \quad \pi_N f = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha| \leq N}} \langle f, \Phi_\alpha \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \Phi_\alpha.$$

Indeed, by using that  $(\pi_N f)_{N \in \mathbb{N}}$  converges to  $f$  in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  and therefore in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , we obtain that the sequence  $(x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f)_{N \in \mathbb{N}}$  converges to  $x^\alpha \partial_x^\beta f$  in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ . If the estimates (E.2.1) hold, the sequence  $(x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f)_{N \in \mathbb{N}}$  is bounded in  $L^2(\mathbb{R}^d)$  and therefore weakly converges (up to a subsequence) to a limit  $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Thanks to the uniqueness of the limit in  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ , it follows that  $g = x^\alpha \partial_x^\beta f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ . Moreover, we have

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_{\phi(N)} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C'_\Theta \tilde{C}_\Theta^{|\alpha|+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.$$

Let us prove that the estimates (E.2.1) hold. Since  $\pi_{|\alpha|+|\beta|}$  is an orthogonal projection on  $L^2(\mathbb{R}^d)$  and therefore satisfies

$$\|\pi_{|\alpha|+|\beta|} f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

we deduce from Lemma E.0.1 and (E.2.2) that for all  $N \geq |\alpha| + |\beta| + 1$ ,

$$\begin{aligned} \|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f\|_{L^2} &\leq \|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_{|\alpha|+|\beta|} f\|_{L^2} + \|x^\alpha \partial_x^\beta (\pi_N - \pi_{|\alpha|+|\beta|}) f\|_{L^2} \\ &\leq 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(2(|\alpha| + |\beta|))!}{(|\alpha| + |\beta|)!}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|+|\beta|+1 \leq |\gamma| \leq N}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| \|x^\alpha \partial_x^\beta \Phi_\gamma\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned}$$

By using anew Lemma E.0.1, it follows that for all  $N \geq |\alpha| + |\beta| + 1$ ,

(E.2.3)

$$\begin{aligned} &\|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 2^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|+|\beta|+1 \leq |\gamma| \leq N}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| 2^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \sqrt{\frac{(|\gamma| + |\alpha| + |\beta|)!}{|\gamma|!}} \\ &\leq 2^{|\alpha|+|\beta|} (|\alpha| + |\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|+|\beta|+1 \leq |\gamma| \leq N}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| 2^{|\alpha|+|\beta|} |\gamma|^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}}. \end{aligned}$$

On the first hand, it follows from  $0 < s \leq 1$  that for all  $N \geq |\alpha| + |\beta| + 1$ ,

(E.2.4)

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|+|\beta|+1 \leq |\gamma| \leq N}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| |\gamma|^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \\ &\leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma| \geq 1}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| e^{s\Theta(|\gamma|)} |\gamma|^{-\frac{(2-s)(d+1)}{2}} |\gamma|^{\frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2}} e^{-s\Theta(|\gamma|)} \\ &\leq \left( M \left[ \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \right]_{+1} \right)^s \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma| \geq 1}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| e^{s\Theta(|\gamma|)} |\gamma|^{-\frac{(2-s)(d+1)}{2}} \\ &\leq \left( M \left[ \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \right]_{+1} \right)^s \|(\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2})_{\gamma \in \mathbb{N}^d}\|_{l^\infty(\mathbb{N}^d)}^{1-s} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma| \geq 1}} \left( |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| e^{\Theta(|\gamma|)} \right)^s |\gamma|^{-\frac{(2-s)(d+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Hölder's inequality implies that for all  $0 < s \leq 1$ ,

$$(E.2.5) \quad \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma| \geq 1}} \left( |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| e^{\Theta(|\gamma|)} \right)^s |\gamma|^{-\frac{(2-s)(d+1)}{2}} \leq D_{d,s} \left\| \left( e^{\Theta(|\gamma|)} \langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2} \right)_{\gamma \in \mathbb{N}^d} \right\|_{l^2(\mathbb{N}^d)}^s,$$

with

$$D_{d,s} = \left( \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\gamma| \geq 1}} |\gamma|^{-(d+1)} \right)^{1-\frac{s}{2}} < +\infty.$$

Since  $\Theta(|\gamma|) \geq 0$  for all  $\gamma \in \mathbb{N}^d$ , it follows that

$$(E.2.6) \quad \|(\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2})_{\gamma \in \mathbb{N}^d}\|_{l^\infty(\mathbb{N}^d)} \leq \|(\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2} e^{\Theta(|\gamma|)})_{\gamma \in \mathbb{N}^d}\|_{l^\infty(\mathbb{N}^d)} \leq \|f\|_{GS_\Theta}.$$

We deduce from (E.2.4), (E.2.5) and (E.2.6) that

$$(E.2.7) \quad \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^d, \\ |\alpha|+|\beta|+1 \leq |\gamma| \leq N}} |\langle f, \Phi_\gamma \rangle_{L^2}| |\gamma|^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \leq D_{d,s} \left( M \left[ \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \right]_{+1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.$$

On the other hand, the assumption (H2) implies that there exist  $C_\Theta \geq 1$  and  $L_\Theta \geq 1$  such that if  $|\alpha| + |\beta| \geq 1$  then

$$\begin{aligned}
 \text{(E.2.8)} \quad (|\alpha| + |\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} &= (2s)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \left( \frac{|\alpha| + |\beta|}{2s} \right)^{s \frac{|\alpha|+|\beta|}{2s}} \\
 &\leq (2s)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \left( \left\lfloor \frac{|\alpha| + |\beta|}{2s} \right\rfloor + 1 \right)^s \left( \left\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|}{2s} \right\rfloor + 1 \right) \\
 &\leq (2s)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} C_\Theta^s L_\Theta^s L_\Theta^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|}{2s} \rfloor + 1} \right)^s.
 \end{aligned}$$

The last inequality holds true as well when  $|\alpha| + |\beta| = 0$  with the convention  $0^0 = 1$  since  $C_\Theta M_1 \geq 1$  and  $L_\Theta \geq 1$ . The logarithmical convexity of the sequence  $(M_p)_{p \in \mathbb{N}}$  gives

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad M_p \leq \frac{M_0}{M_1} M_{p+1}$$

and therefore,

$$\forall 0 \leq p \leq q, \quad M_p \leq \left( \frac{M_0}{M_1} \right)^{q-p} M_q.$$

By using this estimate together with the following elementary inequality

$$\forall x, y \geq 0, \quad \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1,$$

we obtain

$$\text{(E.2.9)} \quad \forall 0 \leq r \leq r', \quad M_{\lfloor r \rfloor} \leq \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\lfloor r' - r \rfloor + 1} M_{\lfloor r' \rfloor}.$$

It follows from (E.2.8) and (E.2.9) that

$$\begin{aligned}
 \text{(E.2.10)} \quad (|\alpha| + |\beta|)^{\frac{|\alpha|+|\beta|}{2}} &\leq C_\Theta^s L_\Theta^s \left( \sqrt{2sL_\Theta} \right)^{|\alpha|+|\beta|} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{s \left( \left\lfloor \frac{(2-s)(d+1)}{2s} \right\rfloor + 1 \right)} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \\
 &\leq C_\Theta^s L_\Theta^s \left( \sqrt{2sL_\Theta} \right)^{|\alpha|+|\beta|} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{d+2} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s,
 \end{aligned}$$

since  $0 < s \leq 1$ . We deduce from (E.2.3), (E.2.7) and (E.2.10) that for all  $N \geq |\alpha| + |\beta| + 1$ ,

$$\|x^\alpha \partial_x^\beta \pi_N f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K_{\Theta,s} K'_{\Theta,s}{}^{|\alpha|+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta},$$

with  $K_{\Theta,s} = D_{d,s} + C_\Theta^s L_\Theta^s \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{d+2} \geq 1$  and  $K'_{\Theta,s} = 2 \max(1, \sqrt{2sL_\Theta}) \geq 1$ . This implies that  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  and for all  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\text{(E.2.11)} \quad \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K_{\Theta,s} K'_{\Theta,s}{}^{|\alpha|+|\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{|\alpha|+|\beta|+(2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.$$

By using Newton formula, we obtain that for all  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned}
 \| \langle x \rangle^k \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( 1 + \sum_{i=1}^d x_i^2 \right)^k |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} x^{2\tilde{\gamma}} |\partial_x^\beta f(x)|^2 dx = \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma|=k}} \frac{k!}{\gamma!} \|x^{\tilde{\gamma}} \partial_x^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2,
 \end{aligned}$$

where we denote  $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_d) \in \mathbb{N}^d$  if  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{d+1}) \in \mathbb{N}^{d+1}$ . It follows from (E.2.9) and (E.2.11) that for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $\beta \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\begin{aligned}
(E.2.12) \quad & \| \langle x \rangle^k \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \\
& \leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma| = k}} \frac{k!}{\gamma!} K_{\Theta, s}^2 K_{\Theta, s}^{\prime 2(|\tilde{\gamma}| + |\beta|)} \left( M_{\lfloor \frac{|\tilde{\gamma}| + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^{2s} \|f\|_{GS_\Theta}^2 \\
& \leq \sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma| = k}} \frac{k!}{\gamma!} K_{\Theta, s}^2 K_{\Theta, s}^{\prime 2(k + |\beta|)} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{k - |\tilde{\gamma}| + 2} \left( M_{\lfloor \frac{k + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^{2s} \|f\|_{GS_\Theta}^2 \\
& \leq K_{\Theta, s}^2 (d+1)^k \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{k+2} K_{\Theta, s}^{\prime 2(k + |\beta|)} \left( M_{\lfloor \frac{k + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^{2s} \|f\|_{GS_\Theta}^2,
\end{aligned}$$

since

$$\sum_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{d+1}, \\ |\gamma| = k}} \frac{k!}{\gamma!} = (d+1)^k,$$

thanks to Newton formula. Let  $r \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$ . There exist  $0 < \theta < 1$  and  $k \in \mathbb{N}$  such that

$$r = \theta k + (1 - \theta)(k + 1).$$

By using Hölder inequality, it follows from (E.2.12) that

$$\begin{aligned}
(E.2.13) \quad & \| \langle x \rangle^r \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \| \langle x \rangle^k \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^\theta \| \langle x \rangle^{k+1} \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^{1-\theta} \\
& \leq K_{\Theta, s} (d+1)^{\frac{r}{2}} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{r}{2} + 1} K_{\Theta, s}^{\prime r + |\beta|} \\
& \quad \times \left( M_{\lfloor \frac{k + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^{s\theta} \left( M_{\lfloor \frac{k+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^{s(1-\theta)} \|f\|_{GS_\Theta}.
\end{aligned}$$

By using anew (E.2.9), we have

$$M_{\lfloor \frac{k + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \leq \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{r+1-k}{2s} + 1} M_{\lfloor \frac{r+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1}$$

and

$$M_{\lfloor \frac{k+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \leq \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{r-k}{2s} + 1} M_{\lfloor \frac{r+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1},$$

since  $k \leq r$ . We deduce from (E.2.13) that

$$\begin{aligned}
& \| \langle x \rangle^r \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq K_{\Theta, s} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{2r+\theta-k}{2} + 1 + s} (d+1)^{\frac{r}{2}} K_{\Theta, s}^{\prime r + |\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{r+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta} \\
& \leq K_{\Theta, s} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{r}{2} + 3} (d+1)^{\frac{r}{2}} K_{\Theta, s}^{\prime r + |\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{r+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta},
\end{aligned}$$

since  $0 < s \leq 1$ ,  $k \leq r < k + 1$  and  $0 < \theta < 1$ . Let us notice that the above inequality also holds for  $r \in \mathbb{N}$ . Indeed, it follows from (E.2.9) and (E.2.12) that

$$\begin{aligned}
& \| \langle x \rangle^k \partial_x^\beta f \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq K_{\Theta, s} (d+1)^{\frac{k}{2}} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{k}{2} + 1} K_{\Theta, s}^{\prime k + |\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{k + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta} \\
& \leq K_{\Theta, s} (d+1)^{\frac{k}{2}} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{k}{2} + 1 + \frac{1}{2} + 1} K_{\Theta, s}^{\prime k + |\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{k+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta} \\
& \leq K_{\Theta, s} (d+1)^{\frac{k}{2}} \max \left( 1, \frac{M_0}{M_1} \right)^{\frac{k}{2} + 3} K_{\Theta, s}^{\prime k + |\beta|} \left( M_{\lfloor \frac{k+1 + |\beta| + (2-s)(d+1)}{2s} \rfloor + 1} \right)^s \|f\|_{GS_\Theta}.
\end{aligned}$$

This ends the proof of Proposition 6.2.3.





## APPENDIX F

### Notations

**Euclidean structure:**

1. The Euclidean norm on  $\mathbb{R}^d$  is denoted by  $|\cdot|$ . The associated Japanese bracket  $\langle \cdot \rangle$  is defined for all  $x \in \mathbb{R}^d$  by

$$\langle x \rangle = \sqrt{1 + |x|^2}.$$

2. For all  $x \in \mathbb{R}^d$  and  $R > 0$ , the open Euclidean ball centered at  $x$  with radius  $R$  is denoted by  $B(x, R)$ .
3. For all  $x \in \mathbb{R}^d$  and  $y \in \mathbb{R}^d$ , the Euclidean scalar product between  $x$  and  $y$  is denoted by  $x \cdot y$ .

**Lebesgue integration:**

1. For all measurable subset  $A \subset \mathbb{R}^d$ , the Lebesgue measure of  $A$  is denoted by  $|A|$ .
2. The Hermitian inner product of  $L^2(\mathbb{R}^d)$  is defined by

$$\forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} \, dx,$$

while  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$  stands for its associated norm.

**Fourier transform:**

1. For all function  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , the Fourier transform of  $f$  is denoted by  $\hat{f}$ , or  $\mathcal{F}(f)$ , while  $\mathcal{F}^{-1}(f)$  stands for the inverse Fourier transform. When  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  is a Schwartz function, its Fourier transform and its inverse Fourier transform are given by

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix \cdot \xi} f(x) \, dx,$$

and

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi} f(\xi) \, d\xi.$$

With this convention, the Plancherel formula states as

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = (2\pi)^d \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

2. For any continuous function  $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , we denote by  $F(D_x)$  the Fourier multiplier of symbol  $F(\xi)$ , that is,

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d), \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad \mathcal{F}(F(D_x)f)(\xi) = F(\xi)\hat{f}(\xi).$$

**Partial derivatives:**

Let  $f : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function. We denote:

1.  $\partial_t f$  the partial derivative of the function  $f$  with respect to the time variable  $t$ .
2.  $\partial_{x_j} f$  the partial derivative of the function  $f$  with respect to the space variable  $x_j$ .
3.  $\nabla_x f$  the gradient of the function  $f$  with respect to the space variable  $x$  and  $D_x f = \frac{1}{i} \nabla_x f$ .

4.  $\Delta_x f = \partial_{x_1}^2 f + \cdots + \partial_{x_d}^2 f$  the Laplacian operator applied to the function  $f$ .

5. For  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ ,

$$\partial_x^\beta f = \frac{\partial^{|\beta|} f}{\partial_{x_1}^{\beta_1} \cdots \partial_{x_d}^{\beta_d}}.$$

**Multi-indexes:**

1. For any multi-index  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , we use the notations

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j \quad \text{and} \quad \alpha! = \prod_{j=1}^d \alpha_j!.$$

2. For all multi-indexes  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ , we use the notations

$$\alpha^\beta = \prod_{j=1}^d \alpha_j^{\beta_j} \quad \text{and} \quad \binom{\beta}{\alpha} = \prod_{j=1}^d \binom{\beta_j}{\alpha_j},$$

with the convention  $0^0 = 1$ .

## Bibliography

- [1] R.A. Adams, J.J.F. Fournier, *Sobolev spaces*, Second edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam (2003)
- [2] P. Alphonse, *Null-controllability of evolution equations associated with fractional Shubin operators through quantitative Agmon estimates*, (2020), arXiv:2012.04374v1
- [3] P. Alphonse, *Régularité des solutions et contrôlabilité d'équations d'évolution associées à des opérateurs non-autoadjoints*, PhD Thesis, Université de Rennes 1 (2020)
- [4] P. Alphonse, J. Bernier, *Smoothing properties of fractional Ornstein-Uhlenbeck semigroups and null-controllability*, Bull. Sci. Math. 165 (2020), 102914, 52 pp.
- [5] P. Alphonse, J. Martin, *Stabilization and approximate null-controllability for a large class of diffusive equations from thick control supports*, ESAIM: COCV 28 (2022), no. 16, 30 pp.
- [6] T. Amit, A. Oleviskii, *On the annihilation of thin sets*, preprint (2017), arXiv:1711.04131
- [7] W.O. Amrein, A.M. Berthier, *On support properties of  $L^p$ -functions and their Fourier transforms*, J. Funct. Anal. 24 (1977), no. 3, 258-267
- [8] E. Artin, *The gamma function*, Translated by Michael Butler. Athena Series: Selected Topics in Mathematics Holt, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London (1964)
- [9] T. Bang, *The theory of metric spaces applied to infinitely differentiable functions*, Math. Scand. 1 (1953), no. 1, 137-152
- [10] K. Beauchard, M. Egidi, K. Pravda-Starov, *Geometric conditions for the null-controllability of hypoelliptic quadratic parabolic equations with moving control supports*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 358 (2020), n. 6, 651-700
- [11] K. Beauchard, P. Jaming, K. Pravda-Starov, *Spectral inequality for finite combinations of Hermite functions and null-controllability of hypoelliptic quadratic equations*, Studia Math. 260 (2021), no. 1, 1-43
- [12] K. Beauchard, K. Pravda-Starov, *Null-controllability of hypoelliptic quadratic differential equations*, J. Éc. polytech. Math. 5 (2018), 1-43
- [13] M. Benedicks, *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure*, J. Math. Anal. Appl. 106 (1985), no. 1, 180-183
- [14] J. Bourgain, S. Dyatlov, *Fourier dimension and spectral gaps for hyperbolic surfaces*, Geom. Funct. Anal. 27 (2017), 744-771
- [15] J. Bourgain, S. Dyatlov, *Spectral gaps without the pressure condition*, Ann. of Math. 187 (2018), no. 3, 825-867
- [16] H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*, Universitext. Springer, New York, 2011
- [17] M. Cappiello, T. Gramchev, S. Pilipovic, L. Rodino, *Anisotropic Shubin operators and eigenfunctions expansions in Gelfand-Shilov spaces*, J. Anal. Math. 138 (2019), no. 2, pp. 857-870
- [18] J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs 136, AMS, Providence, RI (2007)
- [19] B. Demange, *Uncertainty principles associated to non-degenerate quadratic forms*, Mém. Soc. Math. Fr. 119 (2009)
- [20] A. Dicke, A. Seelmann, I. Veselić, *Uncertainty principle for Hermite functions and null-controllability with sensor sets of decaying density*, preprint, (2022), arXiv:2201.11703
- [21] T. Duyckaerts, L. Miller, *Resolvent conditions for the control of parabolic equations*, J. Funct. Anal. 263 (2012), no. 11, 3641-3673
- [22] S. Dyatlov, L. Jin, *Dolgopyat's method and the fractal uncertainty principle*, Anal. PDE, 11 (2018), no. 6, 1457-1485
- [23] M. Egidi, I. Veselić, *Sharp geometric condition for null-controllability of the heat equation on  $\mathbb{R}^d$  and consistent estimates on the control cost*, Arch. Math. (Basel) 111 (2018), no. 1, 85-99
- [24] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Graduate Texts in Mathematics, Vol 194, Springer-Verlag, New York (2000).
- [25] K.-J. Engel, R. Nagel, *A short course on operator semigroups*, Springer, New York (2006)
- [26] J. Galkowski, M. Léautaud, *Control from an interior hypersurface*, Trans. Amer. Math. Soc. 373 (2020), 3177-3233
- [27] I.M. Gelfand, G.E. Shilov, *Generalized Functions II*, Academic Press, New York (1968)

- [28] T. Gramchev, S. Pilipović, L. Rodino, *Classes of degenerate elliptic operators in Gelfand-Shilov spaces*, New developments in pseudo-differential operators, 15-31, Oper. Theory Adv. Appl. 189, Birkhäuser, Basel (2009)
- [29] W. Green, B. Jaye, M. Mitkovski, *Uncertainty principles associated to sets satisfying the geometric control condition*, J. Geom. Anal. 32 (2022), no. 80
- [30] M. Hitrik, K. Pravda-Starov, *Spectra and semigroup smoothing for non-elliptic quadratic operators*, Math. Ann. 344 (2009), no. 4, 801-846
- [31] M. Hitrik, K. Pravda-Starov, J. Viola, *From semigroups to subelliptic estimates for quadratic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. 370 (2018), no. 10, 7391-7415
- [32] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 256. Springer-Verlag, Berlin (1990)
- [33] L. Hörmander, *Symplectic classification of quadratic forms and general Mehler formulas*, Math. Z. 219 (1995), no. 3, 413-449
- [34] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential Operators. III. Pseudo-differential operators*, Reprint of the 1994 edition. Classics in Mathematics. Springer, Berlin (2007)
- [35] S. Huang, G. Wang, M. Wang, *Observable sets, potentials and Schrödinger equations*, preprint (2020), arXiv:2003.11263
- [36] S. Huang, G. Wang, M. Wang, *Characterizations of stabilizable sets for some parabolic equations in  $\mathbb{R}^n$* , J. Differential Equations 272 (2021), pp. 255-288
- [37] P. Jaming, *Nazarov's uncertainty principles in higher dimension*, J. Approx. Theory 149 (2007), 30-41
- [38] B. Jaye, M. Mitkovski, *Quantitative uniqueness properties for  $L^2$  with fast decaying, or sparsely supported, Fourier transform*, to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN (2021)
- [39] A. Koenig, *Non-null controllability of the fractional heat equation and of the Kolmogorov equation*, SIAM Journal on Control and Optimization 58.6 (2020)
- [40] A. Koenig, *Contrôlabilité de quelques équations aux dérivées partielles paraboliques peu diffusives*, PhD. thesis (2019), tel-02733032
- [41] P. Koosis, *The Logarithmic Integral I*, Cambridge University Press (1988)
- [42] O. Kovrijkine, *Some results related to the Logvinenko-Sereda Theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. 129, (2001), no. 10, 3037-3047
- [43] C. Laurent, M. Léautaud, *Observability of the heat equation, geometric constants in control theory, and a conjecture of Luc Müller*, Analysis and PDE, Vol. 14 (2021), no. 2
- [44] G. Lebeau, *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, J. Math. Pures et Applic., 71 (1992), 267-291
- [45] G. Lebeau, L. Robbiano, *Contrôle exact de l'équation de la chaleur*, (French) [Exact control of the heat equation], Comm. Partial Differential Equations, 20 (1995), no. 1-2, 335-356
- [46] J. Le Rousseau, *Carleman estimates and controllability results for the one-dimensional heat equation with BV coefficients*, C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 344, issue 3 (2007)
- [47] J.-L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Tome 1 et 2, vol. 8, Recherches en Mathématiques Appliquées, Masson, Paris (1988)
- [48] P. Lissy, *A non-controllability result for the half-heat equation on the whole line based on the prolate spheroidal wave functions and its application to the Grushin equation*, preprint (2020), hal-02420212
- [49] H. Liu, G. Wang, Y. Xu, H. Yu, *Characterizations on complete stabilizability*, preprint (2020), arXiv:2012.07253
- [50] V.N. Logvinenko, J.F. Sereda, *Equivalent norms in spaces of entire functions of exponential type*, Teor. Funkcii Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp. 20 (1974), 102-111, 175
- [51] J. Martin, *Uncertainty principles in Gelfand-Shilov spaces and null-controllability*, preprint (2021), arXiv:2112.01788
- [52] J. Martin, K. Pravda-Starov, *Geometric conditions for the exact controllability of fractional free and harmonic Schrödinger equations*, J. Evol. Equ. 21 (2021), pp. 1059-1087
- [53] J. Martin, K. Pravda-Starov, *Spectral inequalities for combinations of Hermite functions and null-controllability for evolution equations enjoying Gelfand-Shilov smoothing effects*, to appear in J. Inst. Math. Jussieu (2022)
- [54] L. Miller, *Unique continuation estimates for sums of semiclassical eigenfunctions and null-controllability from cones*, preprint (2009), hal-00411840
- [55] L. Miller, *A direct Lebeau-Robbiano strategy for the observability of heat-like semigroups*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 14 (2010), no. 4, pp. 1465-1485
- [56] L. Miller, *Resolvent conditions for the control of unitary groups and their approximations*, J. Spectr. Theory 2 (2012), no. 1, 1-55
- [57] L. Miller, *Spectral inequalities for the control of linear PDEs*, chapter in PDE's, dispersion, scattering theory and control theory, Kas Ammari and Gilles Lebeau, eds, Séminaires et Congrès, SMF, 30 (2017)
- [58] F.L. Nazarov, *Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type*, Algebra i Analiz 5 (1993), 3-66, translation in St. Petersburg Math. J. 5 (1994), 663-717

- [59] F. Nazarov, M. Sodin, A. Volberg, *Lower bounds for quasianalytic functions, I. How to control smooth functions?*, Math. Scand. 95 (2004), no. 1, 59-79
- [60] F. Nicola, L. Rodino, *Global pseudo-differential calculus on Euclidean spaces*, Pseudo-Differential Operators, Theory and Applications, 4, Birkhäuser Verlag, Basel (2010)
- [61] W. Rudin, *Real and complex analysis*, Third edition. McGraw-Hill Book Co., New York (1987)
- [62] C. Shubin, R. Vakilian, T. Wolff, *Some harmonic analysis questions suggested by Anderson-Bernoulli models*, Geom. Funct. Anal. 8 (1998), 932-964
- [63] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Fourth edition, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, R.I. (1975)
- [64] J. Toft, A. Khrennikov, B. Nilsson, S. Nordebo, *Decompositions of Gelfand-Shilov kernels into kernels of similar class*, J. Math. Anal. Appl. 396 (2012), no. 1, 315-322
- [65] E. Trélat, G. Wang, Y. Xu, *Characterization by observability inequalities of controllability and stabilization properties*, Pure Appl. Anal. 2 (2020), no. 1, pp. 93-122.
- [66] M. Tucsnak, G. Weiss, *Observation and control for operator semigroups*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher. Birkhäuser Verlag, Basel (2009)
- [67] G. Wang, M. Wang, C. Zhang, Y. Zhang, *Observable set, observability, interpolation inequality and spectral inequality for the heat equation in  $\mathbb{R}^d$* , J. Math. Pures Appl. 126 (2019), 144-194
- [68] S. Xiang, *Quantitative rapid and finite time stabilization of the heat equation*, preprint (2020), arXiv:2010.04696

---

**Titre :** Conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires

**Mot clés :** Théorie du contrôle, Équations aux dérivées partielles, Contrôlabilité, Observabilité, Espaces de Gelfand-Shilov

**Résumé :** Le sujet de cette thèse a trait à la recherche de conditions géométriques pour la contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles linéaires posées sur l'espace euclidien. Les approches adoptées dans ce manuscrit consistent à établir des inégalités d'observabilité à partir de principes d'incertitude. Dans une première partie, nous étudions des équations purement diffusives, telles que les équations de la chaleur fractionnaires, et mettons en exergue l'importance de la condition d'épaisseur pour assurer leur contrôlabilité. Un large pan de nos travaux est consacré à la contrôlabilité d'équations d'évolution

dont les systèmes adjoints régularisent dans des espaces de Gelfand-Shilov, comme les équations d'évolution associées à l'oscillateur harmonique ou à des opérateurs de Shubin anisotropes. Ces résultats sont obtenus en établissant de nouvelles inégalités spectrales pour des combinaisons linéaires finies de fonctions de Hermite et de nouveaux principes d'incertitude s'appliquant dans des espaces de Gelfand-Shilov généraux. Les équations de Schrödinger libre et harmonique sont également étudiées et des conditions géométriques nécessaires et suffisantes pour leur contrôlabilité sont données.

---

**Title:** Geometric conditions for the controllability of linear partial differential equations

**Keywords:** Control theory, Partial differential equations, Controllability, Observability, Gelfand-Shilov spaces

**Abstract:** The subject of this thesis deals with the research of geometric conditions to ensure the controllability of linear partial differential equations posed on the Euclidean space. The strategies adopted in this manuscript consist in obtaining observability inequalities from some uncertainty principles. In a first part, we study purely diffusive equations, such as fractional heat equations, and point out the relevance of the thickness condition to ensure their controllability. A large part of our works is devoted to the controllability of evolution

equations whose adjoint systems enjoy smoothing effects in Gelfand-Shilov spaces, such as evolution equations associated to the harmonic oscillator or anisotropic Shubin operators. These results are obtained from new spectral estimates for finite combinations of Hermite functions and new uncertainty principles holding in general Gelfand-Shilov spaces. Free and harmonic Schrödinger equations are also studied and necessary and sufficient geometric conditions to ensure their controllability are given.