



HAL
open science

Etude de la rupture et de l'endommagement par choc thermique des matériaux fragiles et de l'influence des effets dynamiques à partir de l'approche champ de phase

Marwa Dhahri

► To cite this version:

Marwa Dhahri. Etude de la rupture et de l'endommagement par choc thermique des matériaux fragiles et de l'influence des effets dynamiques à partir de l'approche champ de phase. Matériaux et structures en mécanique [physics.class-ph]. Université Paris-Nord - Paris XIII; Université de Tunis El Manar, 2022. Français. NNT : 2022PA131007 . tel-03937783

HAL Id: tel-03937783

<https://theses.hal.science/tel-03937783v1>

Submitted on 13 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° attribué par la bibliothèque

Thèse en cotutelle

Pour obtenir le grade de

Docteur des universités Sorbonne Paris Nord et de Tunis El Manar

Spécialité: Sciences des Matériaux

Présentée par

Marwa Dhahri

Etude de la rupture et de l'endommagement par choc thermique des matériaux fragiles et de l'influence des effets dynamiques à partir de l'approche champ de phase

Soutenue le 28 Mars 2022 devant le jury composé de :

Rapporteurs

Kondo Djimédo
Zouari Bassem

Prof. Sorbonne Université Pierre et Marie Curie
Prof. Ecole Nationale d'ingénieurs de Sfax

Examineurs

Amor Hanen
Andrés LEON BALDELLI

Ingénieur chercheur chez IRSN
Chargé de recherche-CNRS

Directeurs de thèse

Abdelmoula Radhi
Maalej Yamen

MC(HDR) Université Sorbonne Paris Nord
Prof. Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Co-directeur de thèse

Li Jia

Prof. Université de Sorbonne Paris Nord

Université Sorbonne Paris Nord
Laboratoire des Sciences des Procédés et des Matériaux(LSPM)
UPR CNRS 3407,99 avenue J.-B .Clément, 93430 Villetaneuse, France
Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
Laboratoire des Mécanique Appliquée et Ingénierie(LMAI)
Campus Universitaire Farhat HACHED el MANAR, BP37, LE BELVEDERE 1002 TUNIS

T
H
E
S
E

Table des matières

0.1	Notations	13
1	Revue Bibliographique	15
1.1	Introduction	16
1.2	Mécanique de la rupture	16
1.3	Approches de la mécanique de la rupture	16
1.3.1	Approche locale	16
1.3.2	La ténacité des matériaux	17
1.3.3	Critère de propagation	18
1.4	Approche énergétique de Griffith	18
1.5	Les principales propriétés de <i>G-law</i> et <i>FM-law</i>	21
1.5.1	Application à l'étude de la propagation régulière d'une fissure	22
1.5.2	Application à l'étude de la propagation non régulière et l'amorçage d'une fissure	22
1.5.3	Intégrale de Rice	25
1.5.4	Formule d'Irwin	25
1.6	Rupture sous chargement cyclique	26
1.7	Les modèles d'endommagement	27
1.7.1	Les modèles d'endommagement fragiles standards non régularisés : Leur construction	28
1.7.2	Les modèles d'endommagement à gradients	30
1.7.3	La régularisation de la rupture fragile	34
1.8	Lois d'évolution de l'endommagement dans le cadre d'un modèle non local : modèle à gradient d'endommagement	34
1.9	Mise en œuvre numérique	37
1.9.1	Minimum local et minimum global	37
1.10	Synthèse et Conclusion	39
2	Étude de l'endommagement et de la rupture des structures dans le cas quasi-statique	40
2.1	Introduction	40
2.2	Présentation du problème mécanique	41
2.2.1	Cas d'une plaque rectangulaire	41
2.2.2	Recherche du minimum global	47
2.2.3	Recherche du minimum global - Simulations numériques	49
2.2.4	Interprétation	50
2.2.5	Cas d'une plaque entaillée contenant un trou	51
2.3	Implémentation numérique	52
2.3.1	Algorithme de minimisation alternée	53

2.4	Résultats numériques	53
2.5	Conclusion	62
3	Endommagement et fissuration par choc thermique dans le cas des matériaux fragiles	63
3.1	Introduction :	63
3.2	Étude du problème du choc thermique pour une plaque rectangulaire	64
3.2.1	Présentation du problème	64
3.2.2	Champ de température appliqué	65
3.2.3	Champs de déformation et de contrainte thermoélastiques	65
3.2.4	Modèle d'endommagement par choc thermique	66
3.2.5	Implémentation numérique	67
3.2.6	Résultats numériques	69
3.3	Étude d'une structure cylindrique	70
3.3.1	Présentation du problème	70
3.3.2	Expression analytique du champ de température dans le matériau	72
3.3.3	Solution thermo-élastique	75
3.3.4	Problème d'endommagement	76
3.3.5	Étude de la branche fondamentale	76
3.3.6	Implémentation numérique	80
3.3.7	Résultats numériques	82
3.4	Conclusion	96
4	Prise en compte des effets dynamique dans l'étude de la rupture des matériaux	97
4.1	Introduction	97
4.2	Principe de la propagation dynamique des fissures	98
4.3	Les équations de l'élastodynamique	98
4.4	Implémentation numérique	101
4.4.1	Ecriture du problème élasto-dynamique sous forme variationnelle	101
4.4.2	Shéma d'intégration de Newmark	102
4.5	Présentation du problème étudié :	103
4.6	Résultats de la simulation numérique	103
4.6.1	Évolution du chemin de la fissure dans le cas dynamique	104
4.6.2	Évolution des énergies dans le cas dynamique	105
4.7	Comparaison entre le cas dynamique et quasi-statique	105
4.8	Etude de la sensibilité à la taille du maillage h et à l'incrément de temps dt	108
4.8.1	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur le chemin de la fissure	108
4.8.2	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse de maillage sur l'évolution des énergies élastique et dissipée	109
4.8.3	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie cinétique	111
4.8.4	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie totale	115
4.9	Conclusion	117

Remerciement

Je tiens, tout d'abord, à remercier l'ensemble des membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à cette étude. Je remercie tout particulièrement Mr Kondi DJIMÉDO pour avoir accepté d'être le rapporteur de mes travaux et pour ses observations qui m'ont permis d'améliorer la qualité de ce mémoire. Je tiens à lui exprimer mes remerciements pour l'honneur qu'il me fait en participant à ce jury.

Je remercie Mr Bassem ZOUARI pour l'honneur qu'il m'a fait pour sa participation à mon jury de thèse en qualité de rapporteur de mon travail, pour le temps consacré à la lecture de cette thèse, et pour les suggestions et les remarques judicieuses qu'il m'a indiquées.

Je suis également honorée de la participation des autres membres Mme Hanen AMOR et Mr Andrés LEON BALDELLI. Je les remercie vivement du temps précieux qu'ils ont accordé à examiner ce travail.

À l'issue de ces années passées en thèse, je souhaite présenter mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

En premier lieu, j'aimerais remercier vivement, mes directeurs de thèse, Mr radhi ABDELMOULA et Mr Yamen MAALEJ pour l'aide compétente qu'ils m'ont apportée, de l'attention et du soutien qu'ils ont porté à mon travail de doctorante.

Je tiens également à remercier très chaleureusement mon co-encadrant Jia Li d'avoir codirigé cette thèse. Tout au long de ce travail, il a veillé au bon déroulement de cette thèse, pour sa disponibilité, son soutien et ses conseils qui ont été nombreux et importants.

Par ailleurs, je tiens à remercier toute l'équipe du Laboratoire LSPM. Je remercie vivement le chef de labo, Dominique VREL, de m'avoir accueillie au laboratoire et d'avoir veillé à la conduite de cette thèse dans des bonnes conditions.

Je remercie mon amie la plus proche Ibtissem Bengeutat pour m'avoir fait partager sa joie de vivre et m'avoir ainsi soutenu dans les moments difficiles. Lorsque j'étais confrontée à des situations difficiles, pouvoir compter sur elle était très réconfortant.

Une mention spéciale pour mes collègues du Laboratoire LSPM : Djoudi, Hatem, Siham, cristiano, wafa, aida, Housseem, Djamel,... Il m'est impossible de citer tout le monde mais je tiens à les remercier pour leur participation aux travaux et pour leurs encouragements. Nous avons passé tant de bons moments ensemble. Merci beaucoup pour les moments très agréables que j'ai pu partager avec vous, les repas, les pauses cafés, les sorties...

Je tiens, aussi, à exprimer mes sincères remerciements à Mme Salma BARBOURA pour ses encouragements, elle

m'a aidé beaucoup dans la préparation de mes slides.

Je souhaite remercier également les différentes personnes que j'ai pu croiser durant ces années de la thèse et qui ont su par leurs questions ou leur conseils me permettre de toujours pousser un peu plus mon raisonnement.

A titre plus personnel, j'adresse ma profonde reconnaissance à ma mère Najoua. Son soutien et ses encouragements sont pour moi les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais. Elle est toujours cru en moi et n'ont jamais cessé de me soutenir pour finaliser ce long travail que je leur dédie. Je ne peux pas omettre de citer mes deux sœurs Hager et Jamila qui m'ont encouragé tout au long de mon parcours.

Finalement, je tiens, aussi, à remercier mes chères amis : Monia, Kawthar, Mariem, Fifi, Chayma et Hanen qui m'ont supporté le temps de ces travaux et m'ont apporté leur soutien constant.

Titre : Étude de la rupture et de l'endommagement par choc thermique des matériaux fragiles et de l'influence des effets dynamiques à partir de l'approche champ de phase.

Mots clés : Champs de phase - Mécanique de la rupture - Modèles d'endommagement non locaux - Éléments finis - Choc thermique - Rupture dynamique.

En français : Le séchage ou le refroidissement induisent un rétrécissement des matériaux entraînant une contrainte thermique qui conduit à des fissures avec une morphologie particulière répétitive conduisant à la rupture par choc thermique. Par conséquent, pour pouvoir exploiter pleinement le potentiel des matériaux, il est essentiel de comprendre la formation, la morphologie, la propagation des fissures complexes et de prédire leurs amorçages dans les matériaux soumis à un choc thermique. En effet, ces fissures peuvent affaiblir le matériau et modifier sa résistance. La présente étude est consacrée à l'étude de l'évolution quasi-statique de l'endommagement et la rupture par choc thermique pour une structure cylindrique mince. Pour cela nous avons utilisé un modèle de gradient d'endommagement pour étudier ces fissures.

Dans un premier temps, une étude comparative est réalisée sur différents modèles d'endommagement à gradients. Nous avons également effectué une étude sur l'algorithme utilisé pour identifier la nature de la solution pour laquelle il converge. On montre en particulier que la solution obtenue par la minimisation alternée est un minimum local de l'énergie totale : élastique+dissipée et que l'obtention du minimum global nécessite l'utilisation de l'algorithme Backtracking.

Nous avons ensuite étudié un problème d'endommagement dans lequel des propagations non régulières des fissures existent. Afin de comprendre ce phénomène, nous avons considéré les équations d'équilibre dynamiques en y incluant les termes inertiels. Des résultats numériques sont présentés et discutés afin de comparer les deux approches dynamique et quasi statique. Nous avons montré en particulier que la prise en compte des termes inertiels conduit à une propagation progressive au lieu de brutal de la fissure.

En anglais : Drying or cooling processes induce shrinking phenomenon of the materials. Those strains are induced by thermal stresses which may lead to cracks formation with a particular repetitive morphology. Therefore, in order to fully exploit the potential applications of thermal-susceptible materials, it is essential to understand the initiation, morphology and propagation of complex cracks. Indeed, thermal cracks make the material weaker and they modify its resistance. The aim of the present work is to study the quasi-static evolution of the damage induced by crack propagation and the thermal shock failure for a thin cylindrical structure. For this a damage gradient model was used to study these crack's behaviors.

First, a comparative study is performed on different gradient damage models. We also performed a study on the algorithm used to identify the nature of the solution for which it converges. In particular, we show that the solution obtained by the alternating minimization is a local minimum of the total energy and to obtain the global minimum, the use of the Backtracking algorithm is needed. The case of traction of a pre-cracked structure was taken as example and it has been

studied to analyze the unsteady crack propagation.

Then, we studied the damage problem in which non-regular crack propagation exist. In order to understand this phenomenon, we have considered the dynamic equilibrium equations by including inertial terms. Numerical results are presented and discussed to compare the two dynamic and quasi-static approaches. We have shown in particular that taking into account the inertial terms leads to a progressive propagation instead of a brutal propagation of the crack.

Remerciement

Je souhaite remercier Jean-Claude Grandidier, directeur du Laboratoire de Mécanique et de Physique des Matériaux (LMPM) de l'Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique (ENSMA) pour sa disponibilité et ses précieux conseils ainsi que pour sa gentillesse. Je remercie aussi l'ensemble des groupes de recherche avec qui j'ai eu la chance de travailler au cours de cette thèse. J'y ai côtoyé des personnes passionnées et d'un niveau scientifique remarquable. Je tiens aussi à exprimer toute ma gratitude à mes deux directeurs de thèse, Yves Nadot et Sylvie Castagnet. Je tiens à souligner à quel point j'ai apprécié de travailler avec eux tant d'un point de vue professionnel qu'humain. Leurs bureaux sont des lieux de discussions ouvertes, sincères et sans concession. Leur grande disponibilité malgré un nombre de sollicitations toujours grandissant, leur rigueur et leur excellence scientifique et pédagogique, leur volonté de considérer chaque doctorant ou stagiaire comme un chercheur à part entière sont des qualités qui méritent d'être soulignées. Je présente aussi mes remerciements à Thierry Palin-Luc pour avoir accepté de présider mon jury de soutenance de thèse. Je tiens également à remercier les rapporteurs de thèse Lucien Laiarinandrasana et Narayanaswami Ranganathan et je remercie Jean-Michel Muracciole et Ezio Gandin d'avoir accepté de participer au jury de thèse. Leurs conseils m'ont permis de prendre un recul considérable à l'égard de mon travail. Par ailleurs, je souhaite également remercier tous mes amis qui m'ont fourni un support exceptionnel notamment Kheireddine, Zouhir, Mohamed et Mustafa. Et je tiens à dédier ce modeste travail à la mémoire de mon père et à toute ma famille qui m'a soutenu moralement, ma mère pour ses prières et ses encouragements et mon oncle Elhousine pour ces conseils.

La rupture est l'une des principaux facteurs de défaillance des matériaux et des structures d'ingénierie. La possibilité de prédire la rupture induite par une fissure est une difficulté majeure pour les conceptions techniques. Comme pour beaucoup d'autres phénomènes physiques, la modélisation numérique de la rupture constitue un outil essentiel pour prédire la défaillance des structures fissurées pour lesquelles les expérimentations à grande échelle sont soit trop coûteuses soit irréalisables. Elle constitue également un moyen pour mieux comprendre les processus de rupture de nombreux matériaux tels que le béton, la roche, la céramique, les verres...

Le domaine a été étudié en profondeur depuis les travaux de Griffith [35] et d'Irwin[38]. Ils ont fondé la théorie de la mécanique linéaire élastique de la rupture. Cependant, la modélisation prédictive de l'initiation et de la propagation des fissures dans les structures et les matériaux reste l'un des plus grands enjeux de la mécanique de la rupture.

Le concept de la mécanique de la rupture est une partie fondamentale de la mécanique des solides dans laquelle la présence des fissures est supposée a priori. Elle fournit des outils permettant de lier les paramètres géométriques, chargement extérieur et matériaux, à la résistance inhérente de la structure tels que la croissance des fissures, le critère de leur propagation ainsi que leur amorçage.

L'idée de Griffith [35] sur la propagation de la fissure est basée sur des considérations énergétiques. Il considère la propagation comme une compétition entre l'énergie de surface pour créer des nouvelles surfaces de fissure et l'énergie élastique stockée dans le matériau. Elle indique que la croissance des fissures se produira lorsqu'il y aura une quantité suffisante d'énergie élastique disponible pour créer de nouvelles surfaces. L'approche du facteur d'intensité de contrainte [38] est une méthode alternative, qui consiste à étudier directement l'état local de contrainte autour de la pointe de la fissure. Cette méthode est plus commode dans la pratique dans la science de l'ingénierie.

Il existe, à côté de la mécanique de la rupture, la mécanique d'endommagement continu, une spécialité lancée par Kachanov [42]. Par opposition à la mécanique de la rupture qui se concentre sur des fissures macroscopiques de longueur finie, la mécanique de l'endommagement continu traite principalement des micro-défauts (c'est-à-dire des microfissures et des microcavités), plus précisément sur leurs évolutions [44], de manière phénoménologique en introduisant des variables d'endommagement. Cela a conduit au développement en grand nombre de théories de régularisation telle que la régularisation avec le modèle du gradient d'endommagement utilisée par [30], [52], [67].

La rupture des structures peut être simulée numériquement en utilisant une approche discontinue (également appelée approche discrète) ou une approche continue. Dans la première, le champ de déplacement est autorisé à être discontinu sur les surfaces de fracture, tandis que dans la seconde, les déplacements sont continus partout, mais les contraintes sont graduellement atténuées pour modéliser le processus de dégradation. Les théories les plus célèbres de l'approche discontinue sont la mécanique de la rupture fragile [35] [38] ainsi que le modèle de zone cohésive introduit par [26], [8].

Bien que des améliorations récentes aient été apportées, la modélisation numérique de problèmes de fracture complexes impliquant de nombreuses fissures qui se croisent reste un problème difficile, en particulier en milieu tridimensionnel [12], [76], [77]. Les difficultés liées à la modélisation discontinue (discrètes) des fissures motivent d'autres techniques de calcul dans lesquelles les chemins de fissures sont obtenus à partir de la simulation numérique. Parmi les modèles très répandus appartenant à cette classe, on peut citer le modèle de rupture à champ de phase [28], [7], [3], [45], [37], [14], [11]. En effet, les modèles de champ de phase sont étroitement liés à l'approche énergétique de la rupture fragile [28] qui a pour objectif de rechercher, à la fois le champ de déplacement et l'ensemble des fissures dans une structure, en minimisant l'énergie totale de celle-ci, en se basant sur l'idée de Griffith.

L'implémentation numérique de l'approche énergétique, appelée également variationnelle, de la fracture a été premièrement présentée dans [15] où la fissure est régularisée par une bande d'endommagement diffus grâce à l'introduction d'un champ de phase scalaire qui permet de différencier le matériau sain de matériau endommagé [16]. La formulation régularisée introduite définit un paramètre de longueur positif ℓ caractérisant la largeur de la bande de localisation. Lorsque $\ell \rightarrow 0$, la solution converge vers le problème de rupture initial selon le théorème Γ convergence [18]. Les modèles de champ de phase sont considérés aujourd'hui, comme étant des problèmes de mécanique de la rupture nécessitant la résolution des équations aux dérivés partielles. Cela conduit à la résolution de deux équations aux dérivées partielles une pour le champ de déplacement et une pour le champ scalaire endommagement. Ainsi, les modèles de champ de phase permettent de traiter les ruptures complexes, fissures de géométries complexes, ramifiées et ce en deux et trois dimensions.

Dans cette thèse, on se concentre sur la mécanique de la rupture fragile, c'est-à-dire sur des comportements des matériaux tels que les fissures apparaissent avec de faibles déformations du matériau, par opposition à la rupture ductile. Un chargement monotone sera considéré où tout comportement cyclique (fissuration par fatigue) est écarté. Cette thèse se focalise sur le modèle de champ de phase pour les ruptures fragiles. Elle traite la propagation des fissures dans des cas quasi-statiques et dynamiques avec la prise en compte des effets inertiels en utilisant la méthode des éléments finis. Nous utilisons pour cela l'approche variationnelle de la rupture [28]. Cette approche permet de traiter des phénomènes complexes comme les processus de l'initiation périodique suivi de la formation de fissures réparties périodiquement dans le cas d'un choc thermique Fig. (1).

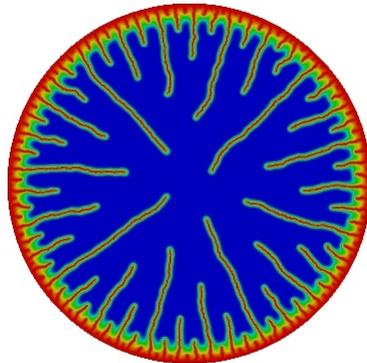


FIGURE 1: Répartition de l'endommagement obtenu dans le cas d'un choc thermique pour un échantillon de matériau ayant une géométrie cylindrique porté à une température initiale informée dans le matériau puis exposé à une température plus froide : les zones bleues indiquent les zones non endommagées, les zones rouges indiquent les zones totalement endommagées et donc fissurées.

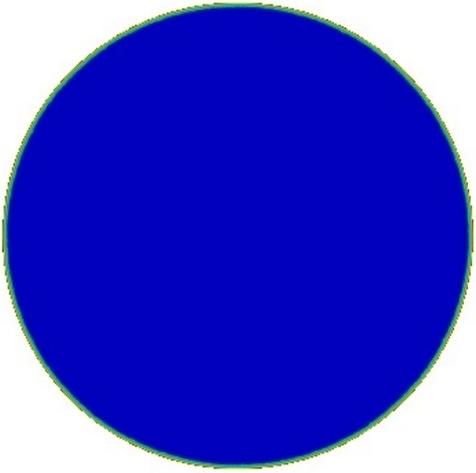
La thèse est organisée comme suit :

Chapitre 1 : *État de l'art* : Dans ce chapitre, nous exposons les concepts inhérents à la mécanique de la rupture et à la mécanique de l'endommagement. Nous donnons un aperçu sur le modèle de champ de phase, en nous concentrant sur ceux qui concernent la rupture fragile, dans le cas bidimensionnel sous chargements quasi-statique et dynamique. Les aspects théoriques des modèles de champ de phase ainsi que la mise en œuvre dans le cadre de la méthode des éléments finis sont présentés. Nous présentons la formulation générale et les équations fondamentales, nous nous intéressons principalement à l'approche variationnelle qui sera utilisée par la suite pour simuler l'amorçage et la propagation des fissures dans différentes structures dans des régimes quasi-statiques et dynamiques. Nous montrerons, que le problème d'évolution, est basé sur trois principes qui sont : l'irréversibilité, stabilité et l'équilibre énergétique.

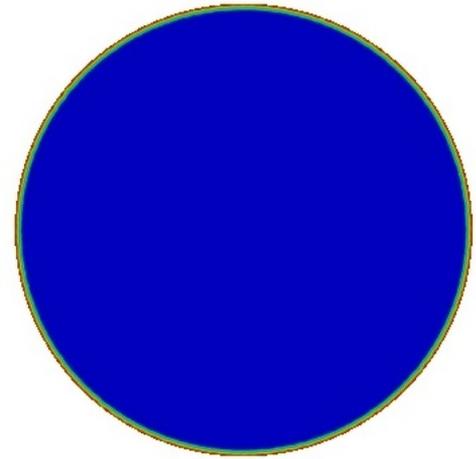
Chapitre 2 : *Étude de modèles d'endommagement dans le cas quasi-statique* : Dans ce chapitre, nous présenterons à travers l'étude d'un exemple théorique d'une plaque en traction les propriétés de deux modèles différents d'endommagement. Dans un premier temps, nous exposerons les résultats analytiques et numériques pour les cas d'exemples étudiés avec deux différents modèles d'endommagement. Cette étude est basée sur l'approche variationnelle et l'algorithme de la minimisation alternée. Dans une seconde partie on se focalise sur la recherche de minimum global de l'énergie totale en utilisant l'algorithme du Backtracking. Dans la troisième partie de ce chapitre, nous étudions l'amorçage et la propagation d'une fissure en fonction du déplacement imposé en effectuant une étude paramétrique, sur une structure rectangulaire préfissurée contenant un trou. Enfin, nous montrons principalement que *le modèle utilisé vérifie le critère de Griffith et valide le critère en contrainte*.

Chapitre 3 : *Étude l'endommagement par choc thermique d'une plaque circulaire* : Dans ce chapitre, le problème de choc thermique avec le modèle d'endommagement à gradient, est décrit en détail. Nous présentons une étude sur un cylindre de faible épaisseur afin d'analyser la fissuration par choc thermique. Nous étudions la bifurcation qui nous permet de mieux comprendre la formation de motifs de fissures périodiques dans des évolutions quasi-statiques. Cela permet d'expliquer le début du processus de localisation ainsi que les paramètres qui influent l'amorçage des fissures à partir d'un matériau sain et homogène. Nous présentons ensuite l'évolution de l'endommagement et la formation périodique de fissures Fig.(2). Nous montrerons qu'elle dépend essentiellement de l'intensité du choc thermique et de la contrainte critique du matériau. *Nous présentons à partir de l'étude numérique du problème thermique, une caractéristique importante : l'espacement des fissures induites par le choc thermique est proportionnel à la longueur interne de matériau et inversement proportionnelle à l'intensité du choc thermique*. Dans une seconde partie de ce chapitre, nous réalisons une comparaison des motifs des fissures obtenus à partir des calculs numériques avec les résultats expérimentaux. Nous démontrons ainsi, que le modèle d'endommagement à gradient utilisé est susceptible de représenter correctement les motifs de fissures provoquées par choc thermique dans des solides fragiles.

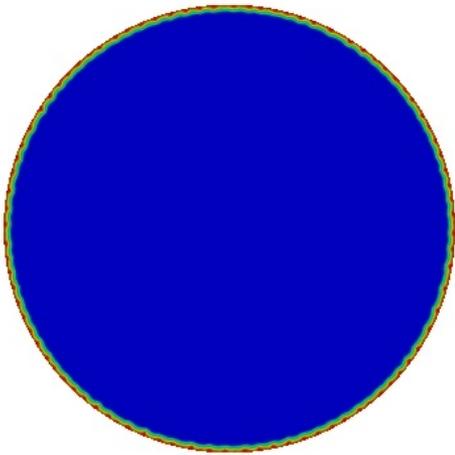
Chapitre 4 : *Étude de modèle d'endommagement dans le cas dynamique* : Dans ce chapitre, nous étudions la propagation de fissure dans un matériau fragile et l'évolution des différentes énergies dans le cas de la rupture dynamique. Afin de comparer l'évolution de la fissuration dynamique avec celle du régime quasi-statique, nous reprenons le cas de la structure préfissurée contenant un trou étudié dans le chapitre 2 en prenant en compte cette fois ci les effets dynamiques. Le problème est résolu en cherchant le champ d'endommagement α vérifiant le critère d'endommagement, ainsi que le champ de déplacement \mathbf{u} vérifiant l'équation élasto-dynamique. Nous utilisons pour cela le schéma de Newmark pour résoudre numériquement l'équation de la dynamique. Nous présentons l'évolution du chemin de fissuration en fonction du déplacement imposé. Nous déterminons aussi l'influence des paramètres numériques tels que le pas du maillage h et le pas de temps dt sur l'évolution des énergies élastique dissipée, cinétique et totale.



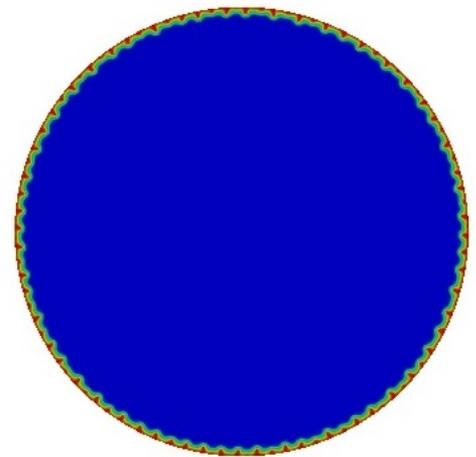
(a) Apparition d'une bande d'endommagement à $t = 0.0001$ sur la surface où se produit le choc thermique.



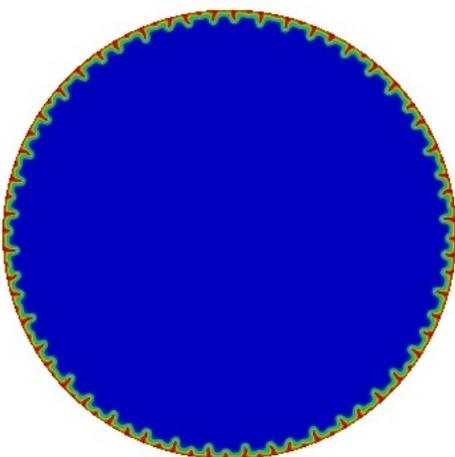
(b) Pour un t faible, l'endommagement reste homogène sur la surface extérieure.



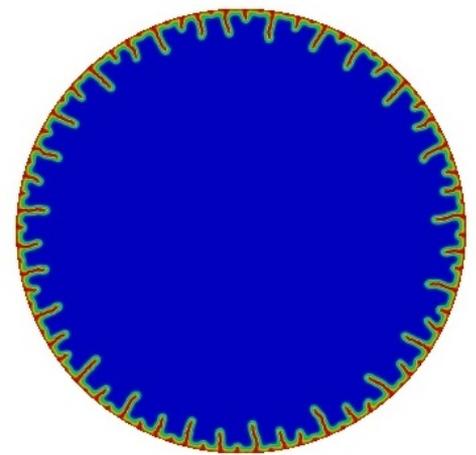
(c) Solution périodique : localisation de l'endommagement avec une répartition périodique



(d) Croissance de l'endommagement jusqu'à atteindre la valeur 1 : fissuration de l'éprouvette



(e) Propagation des fissures : la longueur de toutes les fissures augmentent



(f) L'arrêt de la propagation de certaines bandes d'endommagement alors que les autres continuent à se propager.

FIGURE 2: Un matériau homogène exposé à un choc thermique : les principales étapes obtenus à partir de l'algorithme de la minimisation alternée.

0.1 Notations

Constantes Matériaux :

1. E_0, ν : module de Young et coefficient de Poisson respectivement du matériau supposé isotrope.
2. Θ, k_c : dilatation thermique et la diffusivité thermique.
3. σ_c : contrainte critique du matériau.
4. ℓ : longueur interne du modèle d'endommagement.
5. $w_1 = w(\alpha = 1)$: dissipation totale d'énergie par unité de volume.
6. G_c : ténacité de matériau.
7. ρ : masse volumique.

Champs mécaniques et thermiques :

1. $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$: champ de déplacement.
2. $\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$: champ d'accélération.
3. α : variable scalaire de l'endommagement.
4. $\nabla\alpha$: gradient d'endommagement.
5. T : champ de température.
6. $\mathbf{A}(\alpha) = a(\alpha)\mathbf{A}_0$: tenseur d'élasticité affecté par l'endommagement.
7. \mathbf{A}_0 : tenseur d'élasticité linéaire.
8. \mathbf{S}_0 : tenseur de souplesse de matériaux.
9. $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A}(\alpha)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$: tenseur des contraintes à l'état endommagé.
10. $\boldsymbol{\varepsilon}^{th}(x)$: champ de déformation thermique.
11. $\boldsymbol{\varepsilon}_t(x) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$: champ de déformation totale
12. $\boldsymbol{\varepsilon}^e(x) = \boldsymbol{\varepsilon}_t(x) - \boldsymbol{\varepsilon}^{th}(x)$: champ de déformation élastique.
13. G : taux de restitution d'énergie.
14. J : intégrale de Rice.
15. K_I : facteur d'intensité en mode I : mode d'ouverture de la fissure.

Les énergies

1. $a(\alpha)$: fonction de dégradation de la rigidité.
2. $w(\alpha)$: énergie dissipée dans le modèle local.
3. $\psi_0(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$: densité d'énergie élastique initiale.
4. $\gamma(\alpha, \nabla\alpha)$: densité de surface de fissures.
5. \mathcal{W} : densité d'énergie totale : élastique plus dissipée.
6. $\mathcal{E} = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}(u), \alpha) \, d\mathbf{x}$: énergie élastique globale du milieu.
7. $\mathcal{D} = \int_{\Omega} \Phi(\alpha, \nabla\alpha) \, d\mathbf{x}$: énergie dissipée globale du milieu.
8. \mathcal{K} : énergie cinétique du milieu.
9. \mathcal{J} : fonction d'énergie potentielle externe.
10. \mathcal{W} : énergie totale de la structure composée du modèle d'endommagement non locale.
11. \mathcal{W}^G : énergie totale de la structure pour une énergie de surface de Griffith.
12. F : force de surface appliqué.
13. f : force de volume extérieur.

14. δ : chargement.

Les variables d'espace et du temps

1. $\mathbf{x} : (x_1, x_2)$: coordonnées d'un point matériel.
2. $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$: vecteurs unitaires.
3. (r, θ) : coordonnées polaires.
4. t : variable temps.
5. n_{dim} : dimension de l'espace.
6. \mathcal{C}, \mathcal{D} : espaces pour les champs de déplacement et d'endommagement.

Quantités géométriques

1. Γ : courbe de la fissure.
2. Γ_0 : fissure initiale.
3. Γ_ℓ : surface de fissure régularisée.
4. ξ : paramètre non négatif dans l'équation de la fonction géométrique de la fissure.
5. $\partial\Omega$: bord de la structure.
6. \mathbf{n} : normale unitaire extérieure.

Contents

1.1	Introduction	16
1.2	Mécanique de la rupture	16
1.3	Approches de la mécanique de la rupture	16
1.3.1	Approche locale	16
1.3.2	La ténacité des matériaux	17
1.3.3	Critère de propagation	18
1.4	Approche énergétique de Griffith	18
1.4.0.1	Les deux lois d'évolution <i>G-law</i> et <i>FM-law</i>	20
1.4.0.2	La loi d'évolution de Griffith : <i>G-law</i>	20
1.4.0.3	Une deuxième écriture de la loi d'évolution de Griffith	21
1.4.0.4	La loi d'évolution Francfort-Marigo <i>FM-law</i>	21
1.5	Les principales propriétés de <i>G-law</i> et <i>FM-law</i>	21
1.5.1	Application à l'étude de la propagation régulière d'une fissure	22
1.5.2	Application à l'étude de la propagation non régulière et l'amorçage d'une fissure	22
1.5.2.1	Analyse de la propagation brutale d'une fissure avec <i>G-law</i> et <i>FM-law</i>	22
1.5.3	Intégrale de Rice	25
1.5.4	Formule d'Irwin	25
1.6	Rupture sous chargement cyclique	26
1.7	Les modèles d'endommagement	27
1.7.1	Les modèles d'endommagement fragiles standards non régularisés : Leur construction	28
1.7.1.1	Les principaux choix	28
1.7.1.2	Les caractéristiques de l'érouissage	28
1.7.1.3	Propriétés des tenseurs de rigidité et de souplesse des matériaux endommageables	29
1.7.2	Les modèles d'endommagement à gradients	30
1.7.3	La régularisation de la rupture fragile	34
1.8	Lois d'évolution de l'endommagement dans le cadre d'un modèle non local : modèle à gradient d'endommagement	34
1.9	Mise en œuvre numérique	37
1.9.1	Minimum local et minimum global	37
1.10	Synthèse et Conclusion	39

1.1 Introduction

Une synthèse bibliographique des différents travaux de recherche sur l'endommagement et la mécanique de la rupture est présentée dans ce chapitre. Elle est divisée en quatre parties. La première, un état de l'art de la mécanique linéaire de la rupture est réalisé. Nous citons ainsi, les formalismes qui en découlent et le cadre d'utilisation de certaines approches ainsi que leurs limites. La deuxième est consacrée à l'étude du cas particulier de la rupture par fatigue. La troisième partie aborde les modèles d'endommagement local ainsi que les non local. Enfin, la dernière partie est dédiée à la construction de l'approche variationnelle d'endommagement pour le traitement de la rupture fragile ainsi que sa mise en oeuvre numérique. Une synthèse de l'étude bibliographique conclut ce chapitre et donne les lignes directrices à suivre pour cette thèse.

1.2 Mécanique de la rupture

La mécanique de la rupture a pour objectif l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ de contraintes et des déformations au voisinage de la fissure. L'étude de ces champs mécaniques permet ensuite de définir un critère de propagation. Il est également possible d'aborder la mécanique de la rupture de point de vue énergétique. La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties séparées par les lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité des déplacements. Les déplacements possibles des lèvres d'une fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants Fig. (1.1).

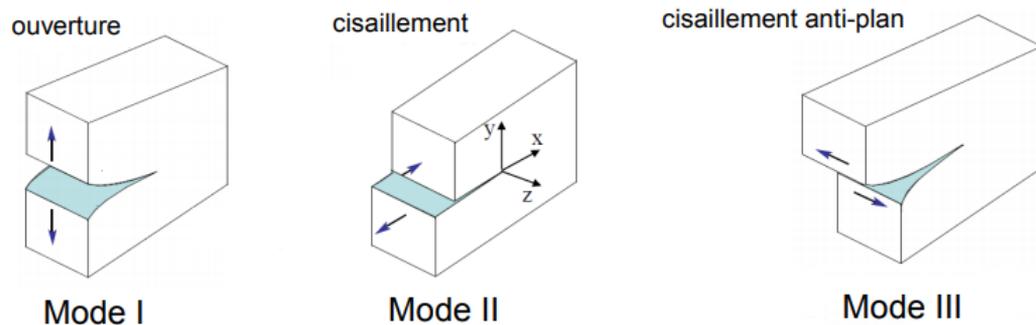


FIGURE 1.1: Champs de déplacements possibles des lèvres de fissure : mode d'ouverture ou clivage (mode I), mode de cisaillement (mode II) et mode de cisaillement anti-plan (mode III)

1.3 Approches de la mécanique de la rupture

1.3.1 Approche locale

En 1954, Irwin et Kies ont remarqué que le champ asymptotique au voisinage de la pointe de fissure contient un terme universel que l'on retrouve dans tous les problèmes de rupture fragile. Ce terme correspond à un mode d'ouverture ainsi que deux modes de cisaillement plan et anti-plan (mode I, II, III). C'est ainsi que le terme facteur d'intensité de contraintes noté K a été introduit. Les facteurs d'intensité de contraintes sont aussi des facteurs de discontinuité des déplacements. En effet, ces facteurs décrivent l'ensemble de la singularité spatiale du champ des contraintes. La détermination de la valeur du facteur d'intensité de contraintes est une étape essentielle dans la résolution d'un problème de la mécanique de la rupture fragile. Ce facteur ne dépend que de la géométrie de la structure et du mode de chargement. Le modèle d'Irwin décrit la fissure comme étant la limite d'un trou elliptique complètement aplati. En se plaçant dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, Williams [78] a montré en 1957 que quelque soit le chargement et la géométrie de la structure, l'expression des contraintes au voisinage de pointe s'écrit sous la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_\alpha}{\sqrt{r}} f_{ij}^\alpha(\theta) + j_\alpha(r, \theta) \quad (1.1)$$

où $\alpha = I, II, III$ représente respectivement les modes d'ouverture, de cisaillement plan et de cisaillement anti-plan et où les variables (r, θ) désignent les coordonnées polaires d'un point de la structure dans le repère local d'origine la pointe de fissure. Les fonctions $j_\alpha(r, \theta)$ sont des fonctions bornées lorsque r tend vers zéro et f_{ij}^α sont des fonctions de l'angle θ , Fig. (1.2).

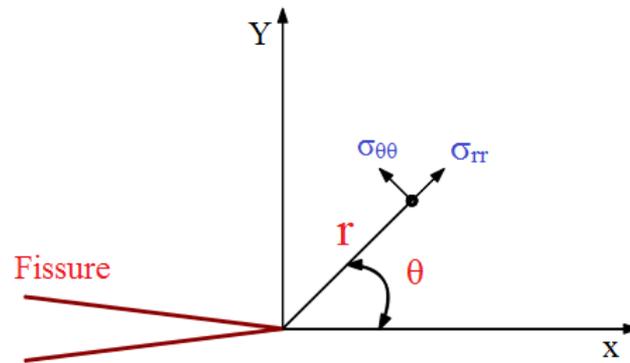


FIGURE 1.2: Fissure dans un système de coordonnées polaires

Une lecture de l'Eq. (1.1) montre la limitation du modèle linéaire, en effet lorsque r tend vers zéro la contrainte va tendre vers l'infini en pointe de fissure ce qui présente une absurdité physique. La prise en compte de la plasticité suppose la présence d'une zone plastique qui se développe au voisinage de la pointe de façon à ce que les contraintes restent bornées. La présence de cette zone va évidemment entraîner une modification du champ de contrainte au voisinage de fissure Fig. (1.3).

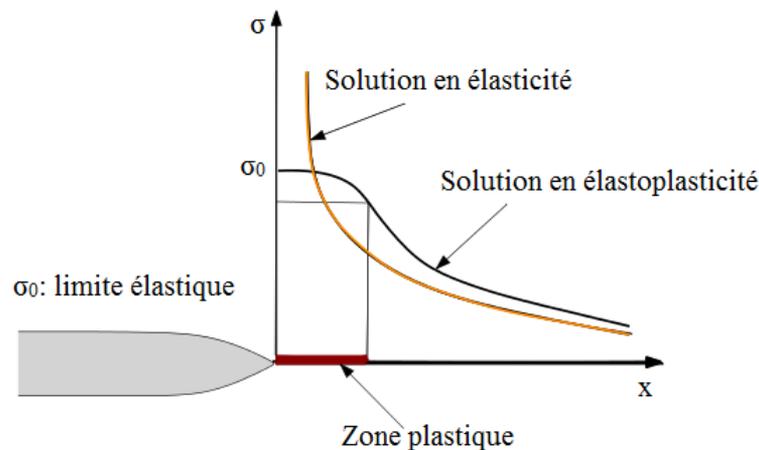


FIGURE 1.3: Correction Elastoplastique

1.3.2 La ténacité des matériaux

La correction élastoplastique permet d'avoir des contraintes bornées au voisinage de la pointe de fissure. Le modèle de fissure en élasticité linéaire est à la base de la plupart des théories de la rupture fragile au sens macroscopique du terme. En mode d'ouverture symétrique, le mode I est le plus important en pratique. En effet, il conduit à la notion de seuil critique introduit par Irwin [38] en 1957, en terme de *le facteur d'intensité de contrainte K*.

Le critère de propagation de fissure en mode d'ouverture s'écrit alors sous la forme simple :

$$K = K_{IC} \quad (1.2)$$

1. Le facteur d'intensité de contrainte K est uniquement fonction du chargement extérieur et de la géométrie de l'éprouvette, en particulier de la taille de la fissure.

2. K_{IC} est une caractéristique physique du matériau appelé ténacité. La ténacité, dont l'unité de mesure est le $Pa\sqrt{m}$, s'obtient via la relation $K_{IC} = K(\sigma_R, c) \simeq \sigma_R\sqrt{c}$, (c étant la longueur de la fissure) par la détermination expérimentale du chargement critique σ_R provoquant la rupture d'éprouvettes normalisées pré-entailées dont la forme analytique de la fonction $K(\sigma, c)$ est connue [38].

1.3.3 Critère de propagation

Les facteurs d'intensité de contraintes sont les paramètres clés de la mécanique linéaire de la rupture. Le champ de contraintes en pointe de fissure s'exprime directement en fonction de ces facteurs. Irwin [38] propose en 1957 un critère de propagation de fissure en mode I qui peut être généralisé comme suit :

$$\begin{cases} K_I < K_{Ic} & \Rightarrow & \dot{l} = 0, \\ K_I = K_{Ic} & \Rightarrow & \dot{l} > 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

où K_{Ic} est la ténacité du matériau, au-delà de laquelle, la fissure se propage. La restriction la plus importante de cette approche est la singularité de la contrainte au fond de la fissure. En outre, dans l'équation (1.1), la contrainte tend vers l'infini lorsqu'elle r tend vers 0. Évidemment, il ne peut en être ainsi dans la réalité, et d'autres mécanismes se manifestent au voisinage de la fissure (plasticité, propagation de la fissure). Le critère d'Irwin est difficile à généraliser. L'approche proposée par Griffith en 1920 rencontre un intérêt croissant.

1.4 Approche énergétique de Griffith

La formulation de la rupture fragile, introduite en 1920 par Griffith [35], postule que la fissure se propagera dans la direction prédéfinie lorsque la taux de restitution d'énergie élastique dû à une croissance virtuelle de fissure compense exactement l'énergie de surface nécessaire à la création d'une nouvelle aire fissurée unité. Cette dernière, est représentée par la ténacité à la rupture, c'est une constante matérielle caractérisant le taux de restitution d'énergie critique du matériau G_c . Pour faire avancer la surface d'une fissure il faut casser des liaisons atomiques, ce qui nécessite une énergie de séparation (dite aussi de surface) proportionnelle à la taille de la fissure. En notant Γ la surface occupée par la fissure (ou la courbe curviligne dans le cas 2D), l'énergie nécessaire à la séparations des lèvres de la fissure s'écrit :

$$\partial U^s = G_c \partial \Gamma \quad (1.4)$$

où ∂U^s représente la fraction de l'énergie de séparation pour créer une fissure.

Notons par \mathcal{W} l'énergie potentielle de la structure, c'est-à-dire l'énergie élastique moins le travail des forces extérieures, les trois "principes" de la loi de Griffith s'écrivent :

1. **Irréversibilité** : La fissuration ne peut que croître (à ne pas confondre avec le fait que certaines fissures peuvent être fermées)

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow \Gamma(t) \quad \text{croissant (au sens de l'inclusion),} \\ t' > t &\implies \Gamma(t') \supset \Gamma(t) \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. **Critère du taux de restitution de l'énergie** : À un niveau de chargement et un état de fissuration donnés, la structure est en équilibre instable s'il existe un "petit incrément virtuel" de fissuration tel que le taux de restitution d'énergie potentielle correspondant soit plus grand que le taux de création d'énergie de surface

$$\text{état instable} \iff \exists \partial \Gamma : -\partial \mathcal{W} > G_c \partial \Gamma \quad (1.6)$$

D'où la condition nécessaire de stabilité :

$$\text{état stable} \implies \forall \partial \Gamma : -\partial \mathcal{W} \leq G_c \partial \Gamma \quad (1.7)$$

Nous posons

$$G = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \Gamma}$$

le taux de restitution d'énergie, c'est -à-dire l'énergie restituée par la structure lors d'une avancée de mesure $\partial\Gamma$ de la fissure. La condition de stabilité s'écrit donc :

$$(G - G_c) \partial\Gamma \leq 0 \quad (1.8)$$

La condition d'irréversibilité entraîne donc :

$$G \leq G_c \quad (1.9)$$

3. **Bilan d'énergie** : Durant toute évolution de la fissuration "stable" (ou régulière) , le taux de restitution d'énergie potentielle est égal au taux de création d'énergie de surface. Soit :

$$(G - G_c) \partial\Gamma = 0 \quad (1.10)$$

Pendant la propagation de la fissure, le taux de restitution d'énergie est égal au taux de restitution d'énergie critique G_c . Son unité est le J/m^2 ou le N/m . Lorsque $G > G_c$, la propagation est instable : la prise en compte des effets dynamiques dans le bilan énergétique est alors nécessaire.

En conclusion, on obtient un critère énergétique de la propagation de la fissure à partir de l'inéquation précédente :

$$\begin{cases} G < G_c & \Rightarrow & \partial\Gamma = 0 \\ \partial\Gamma > 0 & \Rightarrow & G = G_c \end{cases} \quad (1.11)$$

Comme, nous pouvons le remarquer, cette formulation repose sur deux hypothèses :

1. L'existence d'une fissure initiale.
2. La propagation de la fissuration suivant des trajets prédéfinis et stables.

Elle s'avère inapte à traiter :

1. La question de l'apparition de la fissuration.
2. La question de trajets spatio-temporels arbitraires de la fissuration : tels que le branchement ou une évolution brutale de la fissure, ...

Devant l'incapacité de la loi de Griffith de traiter ces deux questions délicates de l'amorçage d'une fissure dans un corps sain et la question de la propagation brutale, Francfort-Marigo ont proposé une nouvelle formulation qui ne plus les deux hypothèses précitées. Nous notons *FM-law* cette loi, on trouve dans [28], [63], [16], [64], [55] une présentation détaillée de cette approche et nous notons par *G-law* celle de Griffith.

Dans les sections suivantes, nous allons présenter les lois *G-law* and *FM-law* et nous effectuerons une comparaison entre elles.

Nous considérons alors un solide contenant ou non une fissure préexistante. Nous notons par ℓ_0 sa longueur initiale : $\ell_0 \geq 0$ avec $\ell_0 = 0$ dans le cas d'un solide sain.

Nous supposons que le solide est soumis à un déplacement vertical, dépendant du temps monotone prescrit sur un bord et fixé sur une partie du bord Fig. (1.4). Plus précisément, nous considérons les conditions aux limites suivantes :

$$u_2 = t \text{ sur } \partial\mathcal{H}^+ \quad u_2 = 0 \text{ sur } \partial\mathcal{H}^- \quad (1.12)$$

Le problème d'évolution consiste à trouver l'évolution de la longueur de la fissure au cours du temps : *i.e.* $t \mapsto \ell(t)$ pour $t \geq 0$ sous la condition initiale : $\ell(0) = \ell_0 \in [0, L]$ ou L est la longueur totale de la fissure quand sa pointe atteint un bord de la structure. Pour cela, nous commençons par remarquer que, pour un chargement $t \geq 0$ et pour une longueur de la fissure donnée $\ell \in [0, L]$, le champ de déplacement vérifiant l'équilibre dans la structure peut s'écrire sous la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \ell) = t\mathbf{u}(\mathbf{x}, \ell), \quad (1.13)$$

où $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \ell)$ est le champ de déplacement à un chargement unitaire.

Du fait que le comportement du matériaux est élastique linéaire, l'énergie potentielle de la structure ainsi que le taux de restitution de l'énergie peuvent s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{P}(t, \ell) = t^2 P(\ell), \quad G(t, \ell) = t^2 \mathcal{G}(\ell), \quad (1.14)$$

$P(\ell)$ et $\mathcal{G}(\ell)$ représentent respectivement l'énergie potentielle et le taux de restitution d'énergie de la structure contenant une fissure de longueur ℓ , soumise à un déplacement unitaire $t = 1$.

D'autre part, les deux lois d'évolutions de Griffith suppose l'existence d'un taux de restitution d'énergie critique G_c , ce qui revient à associer une énergie de surface du milieu contenant une fissure de longueur ℓ de la façon suivante :

$$\mathcal{S}(\ell) = G_c \ell. \quad (1.15)$$

En conséquence, l'énergie totale de la structure à l'équilibre pour chaque chargement t et pour une longueur ℓ s'écrit de la façon suivante :

$$\mathcal{E}(t, \ell) := \mathcal{P}(t, \ell) + \mathcal{S}(\ell) = t^2 P(\ell) + G_c \ell. \quad (1.16)$$

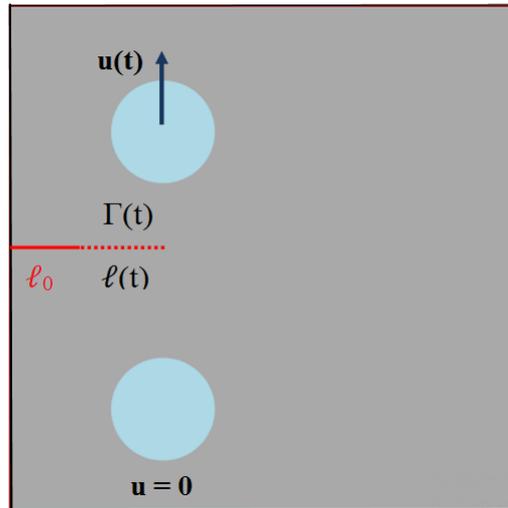


FIGURE 1.4: Structure étudiée et chargement imposé

1.4.0.1 Les deux lois d'évolution *G-law* et *FM-law*

La première, loi de Griffith, a été introduite dans la section précédente. Nous appellerons *G-law*, basée sur le taux de restitution de l'énergie critique et le taux de restitution de la structure [36], [47], [66]. Cette loi ne traite que les évolutions continues de la longueur de la fissure (*i.e.* au minimum continue).

Tout d'abord, nous allons réécrire les trois lois de Griffith Eq. (1.5), Eq. (1.9), Eq. (1.10) sous une forme qui nous permettra de passer naturellement à la loi *FM-law*.

1.4.0.2 La loi d'évolution de Griffith : *G-law*

Definition 1 (*G-law*). Soit $\ell_0 \in [0, L]$. La fonction continue $t \mapsto \ell(t)$ satisfait (ou solution de) la *G-law* dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ avec la condition initiale $\ell(t_0) = \ell_0$, si les trois conditions ci-dessus sont satisfaites :

1. **Irréversibilité** : $t \mapsto \ell(t)$ est croissante ;
2. **Critère du taux de restitution de l'énergie** : $G(t, \ell) \leq G_c, \forall t \in [t_0, t_1]$;
3. **Bilan d'énergie** : Pour toute valeur $\ell(t)$, la conservation de l'énergie s'écrit : $(G(t, \ell) - G_c)\dot{\ell}(t) = 0$.

Écrivons tout d'abord l'expression de la dérivées totale de \mathcal{E} par rapport au temps t :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{E}(t, \ell(t)) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(t, \ell(t)) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \ell}(t, \ell(t))\dot{\ell}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_1]. \quad (1.17)$$

À partir du troisième item, nous déduisons :

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \ell}(t, \ell(t))\dot{\ell}(t) = 0, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Les dérivées partielle et totale sont liées donc par la relation suivante :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(t, \ell(t)) = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(t, \ell(t)). \quad (1.18)$$

1.4.0.3 Une deuxième écriture de la loi d'évolution de Griffith

Un inconvénient majeur de la loi de *G-law* est de ne pas pouvoir prendre en compte les évolutions discontinues en temps (et en espace) des fissures. Elle est donc inapte à résoudre de nombreux problèmes de mécanique de la rupture en calculs des structures comme nous le verrons dans le prochain chapitre. Elle doit être donc remplacée par une autre loi qui permet en particulier de "capter" des solutions discontinues.

Parmi les pistes envisageables, celle qui consiste à modifier le deuxième item dans la loi de *G-law*, en introduisant un critère de stabilité plus général, voir [28], [66], [16] comme nous allons le détailler dans les lignes qui suivent. Considérons alors la condition de stabilité locale suivante

$$\forall t \geq 0, \exists h(t) > 0 \quad : \quad \mathcal{E}(t, \ell(t)) \leq \mathcal{E}(t, l) \quad \forall l \in [\ell(t), \ell(t) + h(t)], \quad (1.19)$$

ce qui nécessite que l'énergie totale à t soit un minimum local « unilatéral ». Le qualificatif unilatéral a été ajouté à cause de la condition d'irréversibilité afin de comparer l'énergie à t avec seulement celle correspondant à une plus grande longueur de fissure, voir [16]. En prenant $l = \ell(t) + h$ avec $h > 0$ dans Eq. (1.19), en divisant par h et en passant à la limite quand $h \rightarrow 0$, nous retrouvons le critère de taux de restitutions d'énergie critique. Ainsi, le second item dans *G-law* peut être vu comme une condition de stabilité du premier ordre, plus faible que Eq. (1.19).

1.4.0.4 La loi d'évolution Francfort-Marigo *FM-law*

La loi d'évolution de Francfort-Marigo *FM-law*, présentée dans [28] consiste à remplacer le minimum local dans Eq. (1.19) par un minimum global. Ainsi, la loi d'évolution *FM-law*, se résume en les trois items suivants :

Definition 2 (*FM-law*). Une fonction $t \mapsto \ell(t)$ (définie pour $t \geq 0$ à valeurs dans $[0, L]$) est dite solution de *FM-law* si elle vérifie les trois items :

1. **Irréversibilité :** $t \mapsto \ell(t)$ est croissante ;
2. **Stabilité globale :** $\mathcal{E}(t, \ell(t)) \leq \mathcal{E}(t, l), \quad \forall t \geq 0$ et $\forall l \in [\ell(t), L]$;
3. **Conservation de l'énergie :** $\mathcal{E}(t, \ell(t)) = \mathcal{E}(0, \ell_0) + \int_0^t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t'}(t', \ell(t')) dt', \quad \forall t \geq 0.$

Notons que la condition d'irréversibilité est inchangée, alors que la condition de bilan énergétique s'écrit maintenant sous la forme intégrée de Eq. (1.18), ce qui ne nécessite pas que $t \mapsto \ell(t)$ soit continue. Il suffit que $t \mapsto \ell(t)$ soit absolument continue¹ pour pouvoir appliquer le bilan énergétique. Notons également que le bilan énergétique implique $\ell(0) = \ell_0$ car $0 = \mathcal{E}(0, \ell(0)) - \mathcal{E}(0, \ell_0) = G_c(\ell(0) - \ell_0)$, et que le deuxième item est automatiquement satisfait à $t = 0$ car $\mathcal{E}(0, l) = G_c l$ et que $S(l)$ est une fonction croissante de l et donc toujours supérieure ou égale à $G_c \ell_0$.

1.5 Les principales propriétés de *G-law* et *FM-law*

Nous allons considérer une structure encastree sur une partie du bord, soumise à un déplacement monotone croissant, noté t , appliqué sur une autre partie du bord, contenant une fissure initiale de longueur initiale ℓ_0 , $\ell_0 \in [0, L[$, comme représentée sur la Fig. (1.4). La longueur de la fissure pour un chargement t , est noté $\ell(t)$. Nous envisageons deux cas de comportement du taux de restitution de l'énergie vis-à-vis de $\ell(t)$: d'abord croissant ensuite décroissant.

1. Soit $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue sur I si et seulement si f est dérivable en presque tout point de I , de dérivée (ainsi définie presque partout) notée f' vérifiant

$$\forall x \in I, \quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt$$

1.5.1 Application à l'étude de la propagation régulière d'une fissure

Dans cette section, nous allons étudier *une propagation régulière* d'une fissure avec les lois *G-law* et *FM-law*.

Nous supposons ici l'existence d'une fissure initiale de longueur $\ell_0 \neq 0$. Nous supposons que l'application $\ell \mapsto \mathcal{G}_\ell$ est une fonction décroissante de t .

Puisque $\ell \mapsto \mathcal{G}_\ell$ diminue de $\mathcal{G}_0 > 0$ à 0 quand ℓ passe de ℓ_0 à L , le *G-law* et le *FM-law* admettent la même et unique solution. Plus précisément, la fissure préexistante commence à se propager au temps t_i tel que $t_i^2 \mathcal{G}_{\ell_0} = G_c$. Alors la fissure se propage continûment et $\ell(t)$ est tel que $t^2 \mathcal{G}_{\ell(t)} = G_c$. Puisque $\mathcal{G}_L = 0$, la fissure n'atteindra pas la fin L en un temps fini.

1.5.2 Application à l'étude de la propagation non régulière et l'amorçage d'une fissure

Nous allons étudier dans la sous section suivante, *l'amorçage et la propagation brutale* d'une fissure avec les lois *G-law* et *FM-law*. Nous effectuons ensuite une comparaison entre les deux lois.

La longueur initiale de la fissure ℓ_0 Fig. (1.4), peut être éventuellement nulle $\ell_0 \in [0, \ell]$. Nous supposons que le taux de restitution de l'énergie se comporte comme sur la Fig. (1.5).

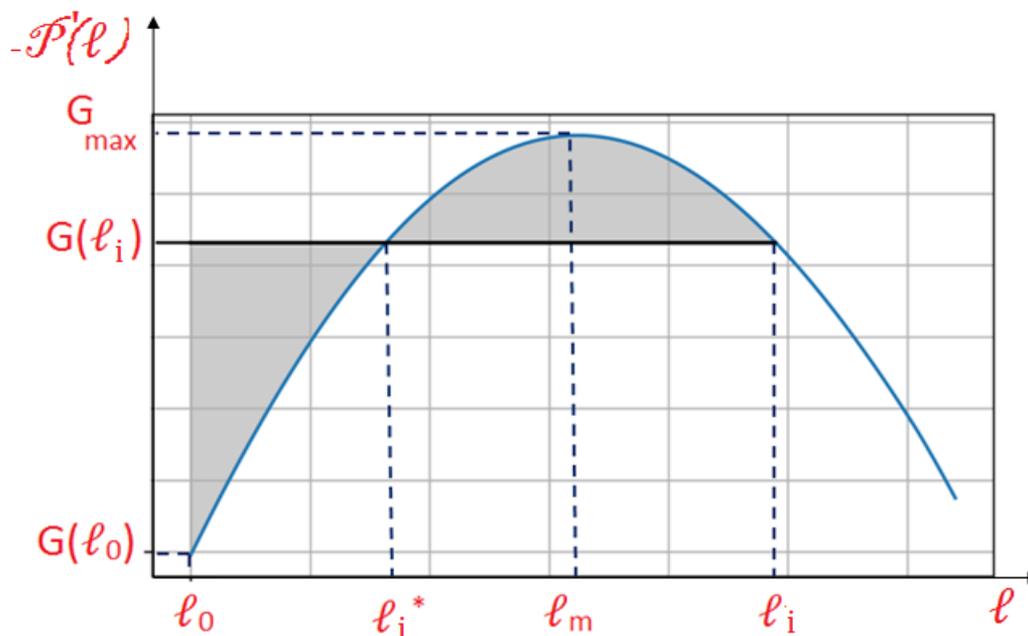


FIGURE 1.5: Interprétation graphique du critère de propagation brutale de fissure, donnée par *FM-law*, et qui obéit à la règle de Maxwell donnée par les égalités des aires.

1.5.2.1 Analyse de la propagation brutale d'une fissure avec *G-law* et *FM-law*

Analyse de la propagation brutale d'une fissure avec *G-law*. On commence par établir une proposition sur l'évolution de la fissure selon la loi de *G-law* en distinguant différents cas de la longueur initiale de la fissure.

Proposition 1. .

1. Si $\ell_0 = 0$ puisque $\mathcal{G}(0) = 0$, l'unique solution de *G-law* est $\ell(t) = 0$ quelque soit le temps t , *i.e.* **il ne peut pas y avoir d'amorçage de fissure** ;
2. Si $\ell_0 \in]0, \ell_m[$, alors la fissure préexistante commence à se propager au temps t_i tel que $t_i^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G_c$ à la suite il n'y a plus de solution continue de *G-law*, **la propagation est nécessairement discontinue**.
3. Si $\ell_0 \in [\ell_m, L[$, puisque $\ell \mapsto \mathcal{G}(\ell)$ est strictement décroissante dans l'intervalle $]\ell_m, \ell[$. Il existe une solution unique pour le *G-law* : la fissure commence à se propager à t_i (toujours donnée par $t_i^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G_c$) puis se propage continuellement jusqu'à L .

Notons que ce cas correspond à l'étude réalisée dans le paragraphe précédent (1.5.1).

PREUVE. Nous donnons une esquisse de la preuve pour les deux premiers items.

1. Puisque $\ell_0 = 0$ et $\mathcal{G}(0) = 0$, alors quelque soit le temps $t \geq 0$, nous avons $0 = \mathcal{G}(t, 0) < G_c$ et par conséquent $\ell(t) = 0$ est une solution.

L'unicité de la solution s'obtient à partir de condition initiale et la conservation de l'énergie.

2. Puisque $0 < \ell_0 < \ell_m$, alors $\mathcal{G}(\ell_0) > 0$ et donc $t^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G(t, \ell_0) \leq G_c$ si et seulement si $t \in [0, t_i]$. Puisque l'inégalité est stricte lorsque $t \in]0, t_i[$, alors $\ell(t) = 0$ est l'unique solution dans cet intervalle à cause de la condition initiale et du bilan énergétique. Par continuité, c'est aussi l'unique solution dans l'intervalle fermé $[0, t_i]$. D'autre part, puisque $G(t, \ell_0) > G_c$ quand $t > t_i$, la fissure doit commencer à se propager à t_i .

Montrons qu'aucune évolution (continue) ne peut satisfaire la *G-law* pour $t > t_i$. En effet, par construction $\mathcal{G}(t_i, \ell(t_i)) = t_i^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G_c$. Mais puisque $\ell(t) \geq \ell_i$ pour $t > t_i$ et que $\ell \mapsto \mathcal{G}(\ell)$ est strictement croissante au voisinage de $\ell_0 < \ell_m$, on obtient pour $t \in]t_i, t_i + h[$ et un $h > 0$ suffisamment petit :

$$\ell_0 < \ell(t) < \ell_m, \quad G(t, \ell(t)) > G(t_i, \ell_0) = G_c.$$

Par conséquent, le critère du taux de restitution de l'énergie ne peut pas être satisfait par une évolution continue au voisinage de t_i . L'unique possibilité est que la longueur de la fissure subit un saut de ℓ_0 jusqu'à $\ell_i > \ell_m$ au temps t_i . Mais cela nécessite de reformuler le *G-law*. Nous utiliserons pour cela *FM-law*. C'est l'objet du paragraphe suivant.

□

Analyse de la propagation brutale d'une fissure avec *FM-law*. Considérons maintenant le *FM-law*.

Lemme 1. Soit $\ell_0 \in [0, L]$ la longueur initiale de la fissure. Une fonction $t \mapsto \ell(t)$ satisfait la *FM-law* si et seulement si, à chaque t , $\ell(t)$ est un minimiseur de $\ell \mapsto \mathcal{E}(t, \ell)$ sur $[\ell_0, L]$. Par conséquent, le *FM-law* admet au moins une solution et chaque solution croît de ℓ_0 à L .

Proposition 2. Dans le cas $\ell_0 \in [0, \ell_m[$ ou $\ell_0 \in [\ell_m, L]$, l'évolution de la fissure préexistante (si $\ell_0 \neq 0$) par la *FM-law* est la suivante :

1. Si $\ell_0 \in [0, \ell_m[$, alors l'amorçage (si $\ell_0 = 0$) ou la propagation de la fissure préexistante (si $\ell_0 \neq 0$) commence au temps $t_i > 0$ et à ce moment la longueur de fissure **saute** instantanément de ℓ_0 à ℓ_i . La longueur ℓ_i est la longueur unique dans (ℓ_m, L) donnée par :

$$\frac{1}{\ell_i - \ell_0} \int_{\ell_0}^{\ell_i} \mathcal{G}(\ell) d\ell = \mathcal{G}(\ell_i), \quad \text{ou d'une manière équivalente} \quad \mathcal{P}(\ell_0) - \mathcal{P}(\ell_i) = (\ell_i - \ell_0) \mathcal{G}(\ell_i) \quad (1.20)$$

où le temps t_i est donné par :

$$t_i^2 \mathcal{G}(\ell_i) = G_c. \quad (1.21)$$

Après ce saut, la fissure se propage continûment de ℓ_i jusqu'à L , l'évolution satisfaisant alors la *G-law*, i.e.

$$t^2 \mathcal{G}(\ell(t)) = G_c, \quad \forall t > t_i.$$

2. Si $\ell_0 \in [\ell_m, L]$, puisque $\ell \mapsto \mathcal{G}(\ell)$ est monotone décroissante dans l'intervalle $]\ell_m, L[$ (il s'agit du cas étudié dans la sous section (1.5.1)). Il existe une solution unique pour le *FM-law* qui est la même que pour le *G-law* : la fissure commence à se propager à t_i tel que $t_i^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G_c$ puis se propage continuellement jusqu'à L qui est atteinte asymptotiquement.

Remarque. Avant de passer à la preuve de cette Proposition, nous allons commenter et interpréter l'équation Eq. (1.20) donnant le saut de la fissure à t_i

- Commençons par prouver que ℓ_i est bien déterminé par Eq. (1.20). Considérons alors la fonction $\ell \mapsto g(\ell)$ définie dans $\ell \in]\ell_m, L[$ par :

$$g(\ell) = \int_{\ell_0}^{\ell} \mathcal{G}(l) dl - (\ell - \ell_0) \mathcal{G}(\ell).$$

Sa dérivée est donnée par $g'(\ell) = -(\ell - \ell_0)\mathcal{G}'(\ell)$ et est donc positive puisque $\mathcal{G}(\ell)$ est décroissante dans (ℓ_m, L) . Puisque $\mathcal{G}(\ell) < G_m := \mathcal{G}(\ell_m)$, nous obtenons $g(\ell_m) < 0$, où $g(L) > 0$ car $\mathcal{G}(L) = 0$. Il existe donc un unique $\ell \in]\ell_m, L[$ tel que $g(\ell) = 0$, ce qui est précisément la définition de ℓ_i .

L'équation Eq. (1.20) donnant ℓ_i a une interprétation graphique. En effet, l'intégrale sur (ℓ_0, ℓ_i) représente l'aire sous le graphe de $\ell \mapsto \mathcal{G}(\ell)$ entre les longueurs ℓ_0 et ℓ_i . D'autre part, le produit $(\ell_i - \ell_0)\mathcal{G}(\ell_i)$ représente l'aire du rectangle dont la hauteur est $G_i := \mathcal{G}(\ell_i)$. Par conséquent, puisque ces deux zones sont égales, les deux zones grises de la Fig. (1.5) sont aussi égales. Cette règle d'égalité des aires détermine ℓ_i . Par conséquent, la droite $\mathcal{G} = G_i$ est la droite de Maxwell classique qui apparaît dans tout problème de minimisation d'une fonction non convexe.

- En vertu de Eq. (1.20) and Eq. (1.21), **le bilan énergétique est maintenu à l'instant t_i** même si la fissure saute à cet instant, *i.e.* l'énergie totale du corps juste avant le saut est égal à l'énergie totale juste l'énergie. En effet, ces énergies sont respectivement données par :

$$\mathcal{E}(t_i^-, \ell_0) = t_i^2 \mathcal{P}_{\ell_0} + G_c \ell_0, \quad \mathcal{E}(t_i^+, \ell_i) = t_i^2 \mathcal{P}_{\ell_i} + G_c \ell_i.$$

En utilisant Eq. (1.20), Eq. (1.21) et l'égalité $\mathcal{P}_{\ell_0} - \mathcal{P}_{\ell_i} = \int_{\ell_0}^{\ell_i} \mathcal{G}_\ell d\ell$, on obtient $\mathcal{E}(t_i^-, \ell_0) = \mathcal{E}(t_i^+, \ell_i)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2. Nous prouvons uniquement la première partie de la Proposition et renvoyons à [55] pour la preuve de la deuxième partie. Soit $\ell_0 \in [0, \ell_m)$, en vertu du lemme 1, $\ell(t)$ est un minimiseur de $\ell \mapsto \mathcal{E}(t, \ell)$ sur $[\ell_0, L]$. (Le minimum existe car l'énergie est continue et l'intervalle est compact.) Soit ℓ_i, t_i donné par Eq. (1.20)-Eq. (1.21), soit $G_i = \mathcal{G}(\ell_i)$ et soit ℓ_i^* l'autre longueur telle que $\mathcal{G}(\ell_i^*) = G_i$, voir Fig. (1.5). Remarquons d'abord que la fonction $\ell \mapsto \bar{g}(\ell)$ définie sur $[\ell_0, L]$ par

$$\bar{g}(\ell) := G_i(\ell - \ell_0) - (\mathcal{P}(\ell_0) - \mathcal{P}(\ell))$$

est non négatif et ne s'annule qu'à ℓ_0 et ℓ_i . En effet, sa dérivée est $\bar{g}'(\ell) = G_i - \mathcal{G}(\ell)$. Par conséquent, \bar{g} augmente d'abord de 0 lorsque ℓ croît de ℓ_0 à ℓ_i^* , puis décroît à 0 lorsque ℓ croît de ℓ_i^* à ℓ_i , et finalement croît à nouveau de 0 lorsque ℓ passe de ℓ_i à L .

Montrons que ℓ_0 est l'unique minimiseur de l'énergie totale lorsque $t < t_i$. De Eq. (1.20) et Eq. (1.21), on obtient pour tout $\ell \in [\ell_0, L]$ et tout $t \leq t_i$:

$$\mathcal{E}(t, \ell) - \mathcal{E}(t, \ell_0) = -t^2(\mathcal{P}(\ell_0) - \mathcal{P}(\ell)) + G_c(\ell - \ell_0) \geq t^2 \bar{g}(\ell) \geq 0.$$

De plus, les inégalités ci-dessus sont des égalités si et seulement si $\ell = \ell_0$ lorsque $t < t_i$ et le résultat suit. En utilisant les mêmes estimations, on en déduit que ℓ_0 et ℓ_i sont les deux minimiseurs de l'énergie totale à $t = t_i$.

Montrons maintenant que le minimiseur est dans l'intervalle ouvert $]\ell_i, L[$ lorsque $t > t_i$. De Eq. (1.20) et Eq. (1.21), on obtient pour tout $\ell \in [\ell_0, \ell_i[$ et quelque soit $t > t_i$:

$$\mathcal{E}(t, \ell) - \mathcal{E}(t, \ell_i) = t^2(\mathcal{P}(\ell) - \mathcal{P}(\ell_i)) - G_c(\ell_i - \ell) > t_i^2(\mathcal{P}(\ell) - \mathcal{P}(\ell_i) - G_i(\ell_i - \ell)) = t_i^2(\bar{g}(\ell) - \bar{g}(\ell_i)) = t_i^2 \bar{g}(\ell) \geq 0.$$

Par conséquent, le minimiseur ne peut pas être dans $[\ell_0, \ell_i[$. Puisque la dérivée de l'énergie totale à $\ell = \ell_i$ est égale à $G_c - t^2 G_i < 0$, ℓ_i n'est pas donc le minimiseur. De la même manière, puisque la dérivée de l'énergie totale à $\ell = L$ est égale à $G_c - t^2 \mathcal{G}(L) = G_c > 0$, L ne peut pas être le minimiseur. Par conséquent, le minimiseur est dans l'intervalle $]\ell_i, L[$ lorsque $t > t_i$. Par conséquent, il doit être tel que la dérivée de l'énergie totale s'annule. Par conséquent, on obtient $t^2 \mathcal{G}(\ell(t)) = G_c$. Puisque $\ell \mapsto \mathcal{G}(\ell)$ est strictement décroissant de G_i à 0 lorsque ℓ passe de ℓ_i à L , il existe un unique $\ell(t) \in]\ell_i, L[$ tel que $\mathcal{G}(\ell(t)) = G_c/t^2 < G_i$. La preuve de la première partie est terminée. □

1.5.3 Intégrale de Rice

Le taux de restitution de l'énergie G a une portée physique. Cette quantité peut être déterminée à partir de l'intégrale de Rice J . Le principe fondamental de ce dernier a été introduit par Eshelby [27], puis approfondi par Cherepanov [23] et enfin par Rice [72]. Cette intégrale curviligne (2-D) est un outil mathématique permettant de calculer le taux de restitution d'énergie. L'intégrale de Rice fait le lien entre l'approche mécanique (en contrainte) de Williams avec l'approche énergétique de Griffith [20]. Cette intégrale se traduit par l'expression suivante :

$$J = \int_{\Gamma} \left(\rho w n_1 - \sigma_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} n_k \right) dS \quad (1.22)$$

où ρ est la masse volumique, et w est la densité massique d'énergie élastique. Les autres quantités présentées dans cette expression sont indiquées sur la Fig. (1.6) : Γ est un contour ouvert orienté aux bords de la fissure, \mathbf{n} est la normale sortante à Γ , et dS désigne un élément de surface élémentaire du contour Γ . La direction x_1 est colinéaire à la fissure.

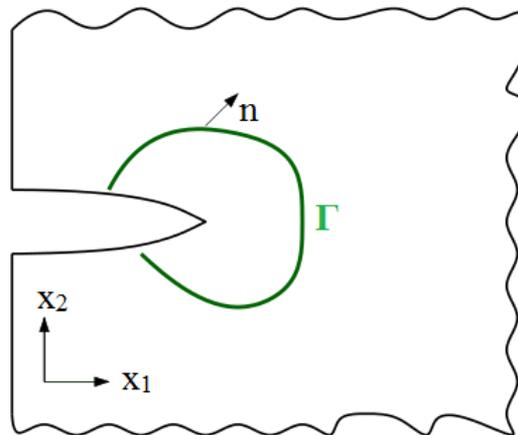


FIGURE 1.6: Contour utilisé dans l'intégrale de Rice

Pour un corps élastique exposé à un champ de déformation bidimensionnel et en l'absence de forces volumiques, l'intégrale de Rice a la caractéristique d'être indépendante du contour d'intégration Γ . On peut donc la calculer aussi bien à proximité de la fissure que sur un contour qui en est éloigné. Cette caractéristique fournit une solution utile pour la simulation numérique de type éléments finis. En outre, Budiansky et Rice [20] ont prouvé que l'intégrale de Rice J peut être interprétée comme le taux de restitution d'énergie au cas où la fissure se propagerait de manière rectiligne et que le chargement soumis est constant, soit :

$$J = G \quad (1.23)$$

Cette relation fournit un outil pratique et rapide pour déterminer le taux de restitution d'énergie sur des matériaux élastiques dans le but de permettre l'application d'un critère de propagation de fissures tel que de Griffith (1.11). Du fait de ses caractéristiques, l'intégrale de Rice est notamment utilisée en mécanique non-linéaire de la rupture.

1.5.4 Formule d'Irwin

Nous rappelons dans cette section, un résultat essentiel qui fait la relation entre les facteurs d'intensité des contraintes et l'énergie de Griffith (le taux de restitution d'énergie) : c'est la formule d'Irwin. En effet, Irwin [38] prouve que dans le cadre de l'élasticité linéaire isotrope homogène en trois dimensions le taux de restitution d'énergie, pour une fissure rectiligne, peut être relié aux facteurs d'intensité des contraintes en mode I, II et III sous la forme suivante :

Formule d'Irwin en déformations planes. Dans un milieu linéaire élastique et isotrope en déformations planes, le taux de restitution d'énergie potentielle G associé à une propagation virtuelle de la fissure dans la direction de la tangente à

la pointe de la fissure et les facteurs d'intensité de contraintes K_I et K_{II} en pointe de la fissure sont reliés par la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.24)$$

avec ν le coefficient de Poisson du matériau.

Formule d'Irwin en déformations anti-planes. Dans un milieu linéaire élastique et isotrope en déformations anti-planes, le taux de restitution d'énergie potentielle G associé à une propagation virtuelle de la fissure dans la direction de la tangente à la pointe de la fissure et les facteurs d'intensités de contraintes K_{III} en pointe de la fissure sont reliés par la formule d'Irwin :

$$G = \frac{1}{2\mu} K_{III}^2 \quad (1.25)$$

Dans la section suivante, on parlera de la rupture suite à des sollicitations cycliques. En effet, la fatigue entraîne le plus souvent des défaillances structurelles qui conduisent à la fissuration et à la destruction des matériaux. L'endommagement dû à la fatigue, se manifeste généralement par l'apparition et la propagation de fissures.

1.6 Rupture sous chargement cyclique

Toute structure subissant à des chargements variables de faible amplitude finira par se fissurer et si ce mode de chargement est conservé, la fissure qui se crée continuera de se propager jusqu'à la rupture complète de la structure. C'est bien entendu l'un des risques qui menacent toutes les structures qui sont soumises à des chargements cycliques et qui exigent des contrôles fréquents. Au point de vue de la modélisation, il est évident que le modèle de Griffith ne permet pas de rendre compte de ce phénomène.

C'est Paris, un ingénieur américain travaillant dans l'aéronautique, qui est le premier à proposer une loi empirique sur la base de résultats expérimentaux. Les résultats sont représentés dans un diagramme $(\frac{dl}{dN}, \Delta K)$, l indique la longueur de la fissure, N représente le nombre de cycles qui est en général assez grand pour être traité comme une variable continue et $\Delta K = K_{max} - K_{min}$ est l'amplitude du chargement exprimée en terme du facteur d'intensité de contraintes. En effet, si on représente dans un diagramme bi-logarithmique, on obtient une courbe de la vitesse de propagation de la fissure en fonction de ΔK , qui a l'allure de celle représentée par la Fig. (1.7)

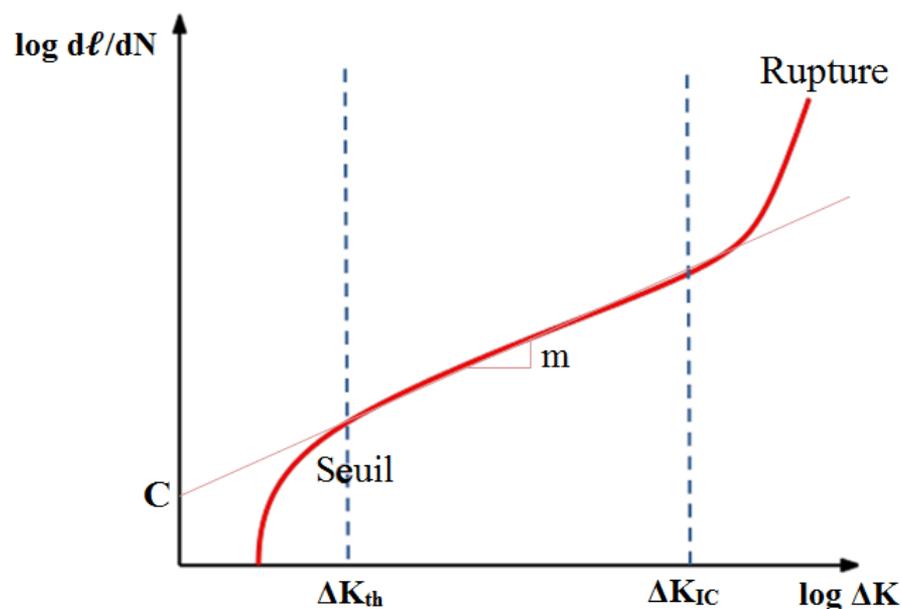


FIGURE 1.7: Courbe expérimentale typique obtenue dans un essai de fatigue sous chargement cyclique

On y distingue plusieurs régions :

1. En dessous d'une certaine valeur K_{th} de ΔK , il n'y a pas de propagation. C'est le domaine dit d'endurance. Théoriquement en dessous de ce seuil, aucun risque n'est à craindre.
2. Pour des valeurs de ΔK légèrement supérieures à K_{th} , la courbe est concave avec des variations rapides de la pente, mais l'avancée de la fissure à chaque cycle reste faible. C'est le régime de la fatigue à très grand nombre de cycles.
3. Pour des valeurs de ΔK intermédiaires entre K_{th} et K_{IC} , où la courbe est linéaire avec une pente m dépendante du matériau et de l'environnement. La loi d'évolution de la fissuration, dite (Régime de Paris), est donc une loi de puissance :

$$\frac{dl}{dN} = C \cdot \Delta K^m \quad (1.26)$$

Où C est une constante permettant de positionner la droite dans le diagramme. Elle dépend aussi du matériau et de l'environnement. C'est le domaine de fatigue à grand nombre de cycles, celui qui est le plus étudié et celui sur lequel est basé la loi de Paris.

4. Pour des valeurs de ΔK proches de la ténacité K_{IC} , la courbe devient convexe avec une variation très rapide de la pente lorsqu'on approche de K_{IC} . On est dans le domaine de la fatigue à petit nombre de cycles.
5. Pour des valeurs de ΔK supérieures à K_{IC} , la fissuration devient instable. En effet, il y a rupture de l'éprouvette lors du premier cycle en conformité avec les résultats sous chargement monotone qui ont inspiré les lois d'Irwin et de Griffith.

De nos jours, la loi de Paris est la base de la méthode de dimensionnement industriel des structures à la fatigue. En effet, au niveau de la modélisation, la loi de Paris est facile à implémenter, par contre elle n'est valable que dans des conditions très particulières (chargement cyclique de forme d'amplitude bien précis). Puisque dans la pratique les structures sont sollicitées de manière variable et sous une forme très compliquée, il est important de définir des méthodes permettant de déterminer un équivalent en termes de charge cyclique pour pouvoir appliquer la loi de Paris.

Il est évident qu'il existe un besoin d'un modèle général qui relie les lois de Griffith et les lois de Paris et qui peut être appliqué à tous les modes de chargement. Une des solutions considérées à ce jour est d'utiliser les modèles de zones cohésives appliqués aux lois de Barenbaltt.

1.7 Les modèles d'endommagement

Le terme d'endommagement a été initié par Kachanov en 1958 [42]. Il a caractérisé l'endommagement comme étant la détérioration des propriétés élastiques en introduisant une variable continue. Par la suite, Lemaître [48] a étendu ce concept en faisant appel à la thermodynamique des processus irréversibles. Ainsi, dans le cas d'un matériau isotrope et d'un endommagement isotrope, les effets de la température et du temps étant négligés, les fissures sont considérées comme des bandes d'épaisseur finie caractérisées par un paramètre d'endommagement α . Ce dernier, est une variable scalaire qui représente la dégradation du matériau. Cette variable est comprise entre les valeurs limites 0 et 1. $\alpha = 1$ correspond à un matériau complètement fissuré et $\alpha = 0$ désigne un matériau sain.

Nous pouvons décrire la rupture des matériaux à travers des modèles d'endommagement locale et non- locale, par exemple ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement pondérés par un paramètre qualifié de longueur caractéristique. Le choix du type de modèle d'endommagement est essentiel pour obtenir des résultats en accord avec l'expérience.

Les modèles d'endommagement local comportent des restrictions considérables, dues principalement à une dépendance importante au maillage lors d'un calcul aux éléments finis. Cette dépendance de la discrétisation spatiale conduit à une concentration des déformations sur une bande très fine qui dépend de la taille de l'élément. Ainsi, en raffinant le maillage, la taille de la zone de localisation tend vers zéro et par la suite l'énergie dissipée par la rupture tend à devenir nulle, ce qui est physiquement inadmissible (voir par exemple [61] et [71]).

1.7.1 Les modèles d'endommagement fragiles standards non régularisés : Leur construction

Rappelons que la construction d'un modèle d'endommagement passe par le choix :

- D'un paramètre d'endommagement qui est représenté par la variable α , dans notre cas, pour les modèles isotropes, cette variable est un scalaire.
- D'une relation contrainte-déformation en fonction de ce paramètre.
- D'une loi d'évolution du paramètre.

Par conséquent, la construction se résume au choix du paramètre α et des deux fonctions consécutives $A(\alpha) = a(\alpha)A_0$ et $w(\alpha)$. Il est ensuite important de spécifier comment les propriétés mécaniques des modèles d'endommagement sont traduites en termes de fonctions $A(\alpha)$ et $w(\alpha)$.

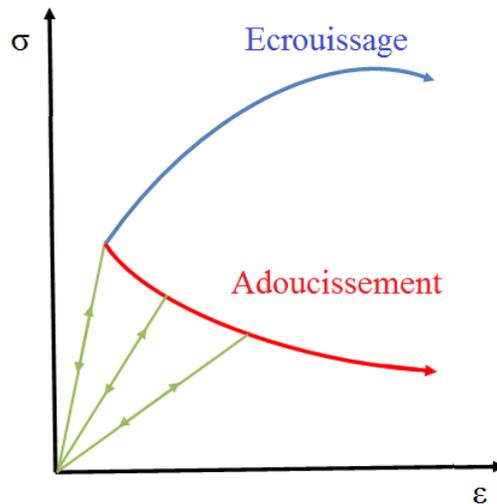


FIGURE 1.8: Courbe contrainte-déformation cas adoucissant et cas durcissant

1.7.1.1 Les principaux choix

1. L'endommagement peut être paramétré par un scalaire α croissant ;
2. À endommagement fixé, le matériau a un comportement élastique linéaire, mais sa rigidité dépend de son degré d'endommagement. Autrement dit le matériau a une élasticité variable caractérisée par la relation $\alpha \mapsto A(\alpha)$ entre le tenseur de rigidité et le paramètre d'endommagement, fonction positive et décroissante : $A(\alpha) \geq 0$, $A'(\alpha) \leq 0$.
3. La loi d'évolution de l'endommagement est régie par une loi à seuil standard basée sur la notion de taux de restitution d'énergie critique. On trouve dans [28] une justification de ce type de loi à partir du postulat de Drecker-Ilyushin). Autrement dit, la loi d'évolution s'écrit

$$-\frac{1}{2}A'(\alpha)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \leq w'(\alpha); \quad \dot{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{1}{2}A'(\alpha)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} < w'(\alpha) \\ 0 & \text{si } -\frac{1}{2}A'(\alpha)\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = w'(\alpha) \end{cases}, \quad (1.27)$$

où $w(\alpha)$, fonction scalaire dépendant de α , $w'(\alpha)$ caractérise, pour un état d'endommagement donné, la taille du domaine d'élasticité dans l'espace des déformations, alors que A' désigne la dérivée de la fonction $A(\alpha)$.

1.7.1.2 Les caractéristiques de l'écroûissage

Au cours de la déformation subie par le matériau, le domaine élastique peut évoluer. Cela veut dire que la limite élastique peut baisser ou augmenter au cours du chargement. Ce phénomène, appelé écroûissage, est dit positif (ou durcissement) si le seuil en contrainte augmente, ou négatif (ou adoucissant) dans le cas contraire.

La Fig. (1.8), représente dans le plan $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ l'évolution de la contrainte en fonction de la déformation pour un essai uniaxial.

Comme on peut le constater sur cette figure, le type d'écroûissage dépend du signe de $(d\sigma/d\varepsilon)$. Un comportement d'écroûissage positif ou durcissant qui se caractérise par l'inégalité $(d\sigma/d\varepsilon > 0)$ alors que qu'un comportement d'écroûissage négative ou adoucissant se caractérise par l'inégalité $(d\sigma/d\varepsilon < 0)$.

1.7.1.3 Propriétés des tenseurs de rigidité et de souplesse des matériaux endommageables

Le comportement local est décrit par la densité de l'énergie totale $W(\varepsilon, \alpha, 0)$ où $\nabla\alpha = 0$. Nous considérons un matériau fortement fragile [69], cela revient à dire que le matériau a un comportement adoucissant mais également pendant le phénomène ou le paramètre d'endommagement α augmente de 0 à 1, l'énergie dissipée est finie. Cette dernière caractéristique est obtenue par le fait que $w(\alpha = 1) < +\infty$. La première caractéristique impose que le domaine élastique dans l'espace de déformation \mathcal{R} est une fonction croissante de α (durcissement des déformations) tandis que le domaine élastique dans l'espace des contraintes \mathcal{R}^* est une fonction décroissante de α (adoucissement des contraintes). Ces domaines élastiques sont alors définis par :

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{M}_s : \frac{\partial W_0}{\partial \alpha}(\varepsilon, \alpha) \geq 0 \right\}, \quad \mathcal{R}^*(\alpha) = \left\{ \sigma \in \mathbb{M}_s : \frac{\partial W_0^*}{\partial \alpha}(\sigma, \alpha) \leq 0 \right\}, \quad (1.28)$$

avec $W_0^*(\sigma, \alpha) = \sup_{\varepsilon \in \mathbb{M}_s} \{\sigma : \varepsilon - W_0(\varepsilon, \alpha)\}$ et \mathbb{M}_s désigne l'espace des tenseurs d'ordre 2 symétriques. Dans ce contexte, on obtient :

$$W_0(\varepsilon, \alpha) = \frac{1}{2}A(\alpha)\varepsilon : \varepsilon + w(\alpha), \quad W_0^*(\sigma, \alpha) = \frac{1}{2}S(\alpha)\sigma : \sigma - w(\alpha). \quad (1.29)$$

En conséquence, les domaines élastiques $\mathcal{R}(\alpha)$ et $\mathcal{R}^*(\alpha)$ se réécrivent par :

$$\mathcal{R}(\alpha) = \left\{ \varepsilon \in \mathbb{M}_s : -\frac{1}{2}A'(\alpha)\varepsilon : \varepsilon \leq w'(\alpha) \right\}, \quad \mathcal{R}^*(\alpha) = \left\{ \sigma \in \mathbb{M}_s : \frac{1}{2}S'(\alpha)\sigma : \sigma \leq w'(\alpha) \right\}, \quad (1.30)$$

où $S(\alpha) = A^{-1}(\alpha)$.

Ainsi le matériau possède la propriété :

- Écroûissage en déformation $\alpha \rightarrow -(A'(\alpha)/w'(\alpha))$ est une fonction décroissante en α ;

$$w'(\alpha) A''(\alpha) - w''(\alpha) A'(\alpha) > 0$$

Cela signifie que le domaine des déformations admissibles dans le régime élastique augmente avec l'augmentation de l'endommagement.

- Adoucissement en contraintes $\alpha \rightarrow (S'(\alpha)/w'(\alpha))$ est une fonction décroissante en α ;

$$w'(\alpha) S''(\alpha) - w''(\alpha) S'(\alpha) > 0$$

Cela signifie que le domaine des contraintes admissibles dans le régime élastique est croissant pour un endommagement croissant.

Lors d'un essai de traction uni-axiale homogène, la définition de la contrainte critique σ_c au-delà de la quelle l'endommagement croît, et la contrainte maximale σ_m , que le matériau peut supporter sont définies par :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2E_0 w'(0)}{S'(0)}}, \quad \sigma_m = \max_{\beta \in [0,1)} \sqrt{\frac{2E_0 w'(\beta)}{S'(\beta)}} \quad (1.31)$$

avec E_0 représente le module d'young de la tenseur de la rigidité initiale A_0 .

Bien évidemment dans le cas d'un matériau adoucissant en contrainte $\sigma_c = \sigma_m$.

Fonction de dégradation de la rigidité : La fonction de la dégradation de la rigidité $a(\alpha)$, relie les champs mécaniques et le champ de phase de la fissure. Elle permet de préciser comment la fonction d'énergie stockée répond aux changements du champ de phase de la fissure. La fonction de dégradation de la rigidité doit satisfaire aux exigences suivantes :

1. $a(\alpha) > 0$: élasticité positive.
2. $a(\alpha = 0) = 1$: l'état initiale ; et $a(\alpha = 1) = 0$: la structure est complètement fissurée.
3. $a'(\alpha) < 0$, $' = d/d\alpha$: assouplissement c'est-à-dire que $a(\alpha)$ est une fonction monotone décroissante.

Les modèles de la fonction de la dégradation $a(\alpha)$	
$(1 - \alpha)^2$	[15]
$3(1 - \alpha)^2 - 2(1 - \alpha)^3$	[43]
$(3 - m)(1 - \alpha)^2 - (2 - m)(1 - \alpha)^3$	[13]
$4(1 - \alpha)^3 - 3(1 - \alpha)^4$	[46]
$\frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha)^2 + T(\alpha)}, \quad T(\alpha) = \alpha + p\alpha^2$	[53], [54]
$\frac{(1 - \alpha)^2}{1 + (k - 1)T(\alpha)}, \quad T(\alpha) = 1 - (1 - \alpha)^2$	[1]
$\frac{(1 - \alpha)^p}{(1 - \epsilon)^p + T(\alpha)}, \quad T(\alpha) = a_1\alpha + a_1a_2\alpha^2 + a_1a_2a_3\alpha^3$	[79]

TABLE 1.1: Les fonctions de dégradation de la rigidité $a(\alpha)$ utilisées dans la littérature.

Le Tab. (1.1) présente les principaux choix pour la fonction de dégradation de la rigidité. Le premier modèle, polynôme quadratique a été introduit dans [15] dans le concept de la régularisation elliptique d'Ambrosio and Tortorelli [4]. Le deuxième, polynôme cubique a été introduit par Karma et al. [43]. Borden et al. [13], ont proposé un troisième polynôme cubique avec un paramètre supplémentaire m , afin de présenter un domaine élastique avant l'amorçage de la fissure. Le quatrième polynôme quartique a été introduit par Kuhn et al. [46]. Bien que les trois dernières fonctions de dégradation de type rationnel peuvent également être appliquées à la rupture fragile, elles ont été proposées dans la littérature principalement pour la rupture cohésive et la rupture quasi fragile. Nous trouverons une analyse de ces fonctions dans [67], [14],[46], [79].

Fonction de la dissipation locale : La fonction de dissipation locale $w(\alpha)$ peut être interprétée comme l'énergie dissipée lorsque le paramètre d'endommagement augmente. La fonction $w(\alpha) \in [0, 1]$ doit également satisfaire certaines propriétés physique [67]. Sa valeur maximale $w(\alpha = 1)$ représente la dissipation complète au cours du processus d'endommagement. Les polynômes supérieurs peuvent être pris également en compte. Cependant Wu. [79] a proposé la forme quadratique suivante :

$$w(\alpha) = \xi\alpha + (1 - \xi)\alpha^2, \quad \forall \alpha \in [0, 1] \quad (1.32)$$

Pour différentes valeurs de $\xi \in [0, 2]$, les modèles de la fonction de la dissipation locale $w(\alpha)$ sont résumés dans le Tab. (1.2).

Les modèles de la fonction de la dissipation locale $w(\alpha)$	
$w(\alpha)$	ξ
α^2	0 [15]
α	1 [67]
$2\alpha - \alpha^2$	2 [1]

TABLE 1.2: Fonction de dissipation locale $w(\alpha)$

1.7.2 Les modèles d'endommagement à gradients

Le problème de la localisation des déformations est généralement traité à l'aide de méthodes de régularisation. Ces méthodes visent à améliorer la description mécanique du milieu pour décrire la rupture. La majorité des méthodes, par exemple, les modèles à gradient introduisent un terme quadratique de l'opérateur gradient, ou des variables internes du

modèle [30].

Les modèles non-locaux ont été utilisés pour un vaste domaine de problèmes, incluant la description de l'endommagement dans les matériaux adoucissants quasi-fragiles [71], la plasticité adoucissante [34], le fluage [73] ou la dégradation des composites [33]. La formulation non-locale utilisée dans notre travail est de type gradient.

Dans les modèles d'endommagement fragiles standards régularisés, l'approche adoptée consiste à rajouter dans l'expression de la dissipation locale $w(\alpha)$ un terme faisant intervenir le gradient d'endommagement $\nabla\alpha$. Ce dernier, est une variable d'état au même titre que la déformation ε et la variable d'endommagement α . Les modèles d'endommagement à gradient se caractérisent par l'approximation géométrique de la fissure par une fissure continue dans une zone d'endommagement \mathcal{K} d'une largeur finie et contrôlée par un paramètre ℓ . En effet, la prédiction de l'évolution des fissures est approchée par une fonction paramétrée par une longueur de faible dimension par rapport à la taille de la structure, notée ℓ .

Energie dissipée par endommagement : Les fissures sont des lignes de discontinuités à travers lesquelles les champs de déplacement sont discontinus. Au cours des dernières années, des recherches ont été menées dont l'objectif est d'approcher ces surfaces de discontinuités par des bandes de faibles épaisseurs à travers lesquelles les champs mécaniques sont à forts gradients en introduisant le gradient d'endommagement dans l'énergie dissipée. Dans la littérature [5], [45], [24], [67], il existe plusieurs modèles d'endommagements à gradients, appelées également phase field. Wu. [79] propose la forme générale suivante :

$$\gamma(\alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{c_w \ell} \left(w(\alpha) + \ell^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \right) \quad (1.33)$$

Par la suite, l'énergie dissipée est formulée comme suit :

$$\mathcal{D} = \int_{\mathcal{K}} \Phi(\alpha, \nabla\alpha) \, d\mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \Phi(\alpha, \nabla\alpha) = G_c \gamma(\alpha, \nabla\alpha) = \frac{G_c}{c_w \ell} \left(w(\alpha) + \ell^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha \right) \quad (1.34)$$

L'énergie dissipée est définie par une fonction de dissipation locale $w(\alpha)$ au cours d'une évolution d'endommagement homogène et une fonction de dissipation non locale. ℓ est un paramètre qui a la dimension d'une longueur, caractéristique du matériau.

Dans le cas bidimensionnel, le coefficient de normalisation c_w qui représente le lien entre la rupture et l'endommagement [67], est définie par :

$$c_w = 4 \int_0^1 \sqrt{w(\alpha)} \, d\alpha \quad (1.35)$$

La localisation du profil d'endommagement le long d'une bande, peut être alors décrite par l'abscisse curviligne de sa ligne moyenne, notée s . Supposons que la bande d'endommagement soit localisée en $s = a$ et posons $x = s - a$. Le champs $\alpha(x)$ s'écrit en première approximation sous la forme :

$$x(\alpha) = \ell \int_{\alpha(x)}^1 \frac{d\alpha}{\sqrt{w(\alpha)}} \quad (1.36)$$

Pour différentes valeurs de $\xi \in [0, 2]$, les champs de phase de fissuration résultants $\alpha(x)$ sont résumés dans le tableau (1.3) et présentés dans la Fig. (1.9).

Les modèles de la fonction de la dissipation locale $w(\alpha)$				
$w(\alpha)$	ξ	c_w	$\alpha(x)$	
α^2	0	2	$\exp(-\frac{ x }{\ell})$	[15]
α	1	$\frac{8}{3}$	$(1 - \frac{ x }{2\ell})^2$	[67]
$2\alpha - \alpha^2$	2	π	$1 - \sin\frac{ x }{\ell}$	[1]

TABLE 1.3: Fonction de dissipation locale $w(\alpha)$ et le champ de phase de la fissure qui en résulte $\alpha(x)$

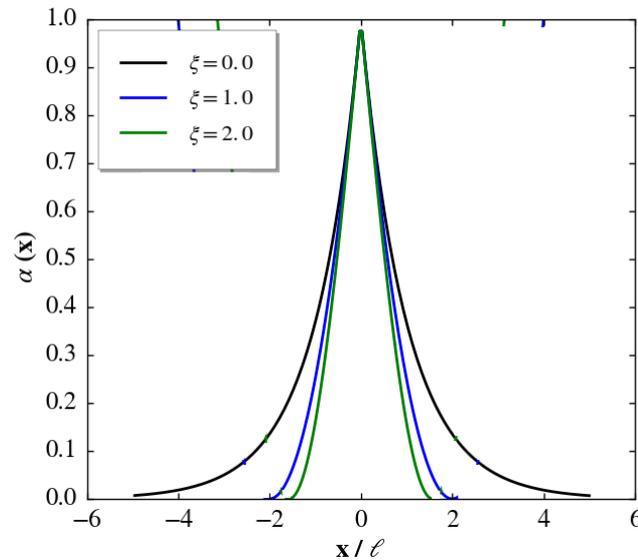


FIGURE 1.9: Le champ d'endommagement $\alpha(x)$ pour différentes fonctions de dissipation locale $w(\alpha)$.

Localisation du champ d'endommagement dans le cas unidimensionnel : nous considérons une barre de longueur L en traction simple où règne une contrainte σ supposée uniforme. Nous cherchons une solution qui s'endommage sur $[-\ell; \ell]$, la taille de la zone de localisation est 2ℓ . Nous allons considérer le cas d'une structure bidimensionnelle, et nous choisissons le cas de la fonction de dégradation de la rigidité $a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$ et la fonction de dissipation locale $w(\alpha) = \alpha^2$. Par conséquent, la densité de l'énergie totale est définie par :

$$W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^2 E_0 \varepsilon \cdot \varepsilon + \frac{G_c}{c_w \ell} (\alpha^2 + \ell^2 \nabla\alpha \cdot \nabla\alpha) = 0 \quad \text{sur } [-\ell; \ell] \quad \text{et } \alpha = 0 \quad \text{en dehors}$$

En considérant que la contrainte $\sigma = (1 - \alpha)^2 E_0 \varepsilon = cte$ sur $[-\ell; \ell]$. En dérivant par rapport à α , la fonction de la densité de l'énergie totale $W(\varepsilon, \alpha, \nabla\alpha)$, nous obtenons :

$$\frac{\sigma^2 c_w \ell}{2E_0 G_c (1 - \alpha^3)} - \alpha + \ell^2 \alpha'' = 0 \quad (1.37)$$

En supposant que la bande d'endommagement est localisée en $x = 0$, $\sigma = 0$, par conséquent nous obtenons à partir de l'Eq. (1.37), l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\ell^2 \alpha''(x) - \alpha(x) = 0 \quad (1.38)$$

Le profil de la bande d'endommagement qui est la solution de l'équation différentielle Eq. (1.38) est décrit par l'équation suivante [56] :

$$\alpha(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{\ell}\right) \quad (1.39)$$

Le champ de phase de la fissure donné par l'Eq. (1.39) répond aux propriétés suivantes :

$$\alpha(x=0) = 1; \quad \forall \frac{|x|}{\ell} \rightarrow +\infty \quad \alpha(x) \rightarrow 0 \quad (1.40)$$

Une présentation du profil du champ de phase $\alpha(x)$ correspondant aux différentes valeurs de ℓ est illustrée sur la Fig. (1.10). La localisation dans une zone de taille caractéristique ℓ avec une décroissance rapide vers 0 [56].

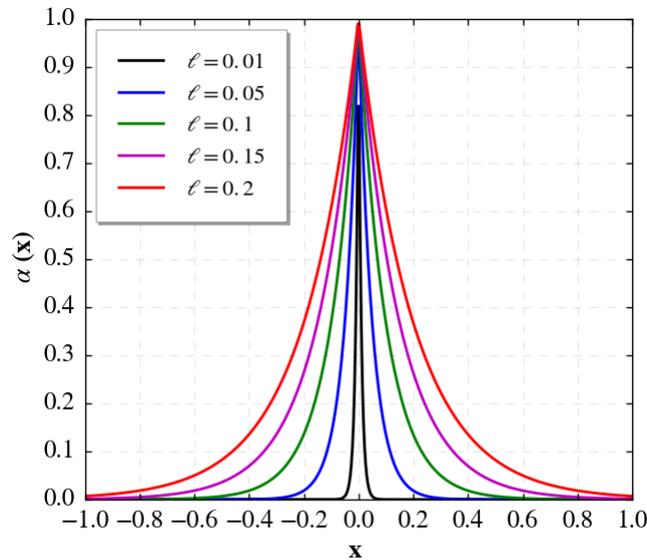


FIGURE 1.10: Représentation approximative d'une fissure à $x = 0$ pour différents paramètres de longueur ℓ

La fonctionnelle énergie élastique : La fonction énergie élastique décrit une transition régulière du volume de matériau non endommagé jusqu'à l'état complètement endommagé. Notons $\psi_0(\varepsilon)$ la fonction densité d'énergie élastique pour le matériau sain et supposons que le matériau soit élastique isotrope, alors $\psi_0(\varepsilon)$ s'écrit :

$$\psi_0(\varepsilon) = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbf{A}_0 : \varepsilon = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(\varepsilon) + \mu \varepsilon : \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma : \mathbf{S}_0 : \sigma = \psi_0^*(\sigma) \quad (1.41)$$

où \mathbf{A}_0 est le tenseur d'élasticité linéaire, défini en fonction des constantes de Lamé λ et μ , \mathbf{S}_0 représente le tenseur de souplesse du matériau. Ainsi $\mathbf{S}_0 = \mathbf{A}_0^{-1}$; $\sigma = \mathbf{A}_0 : \varepsilon$ représente le tenseur de contrainte.

Supposons que le comportement du matériau est de type contrainte plane :

$$\mathbf{A}_{ijkl} = \frac{\nu E_0}{1 - \nu^2} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{E_0}{2(1 + \nu)} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l \in \{1, 2\}, \quad (1.42)$$

où E_0 représente le module d'Young du matériau. Le tenseur de souplesse du matériau s'écrit alors :

$$\mathbf{S}_{ijkl} = -\frac{\nu}{E_0} \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1 + \nu}{2E_0} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad i, j, k, l \in \{1, 2\}, \quad (1.43)$$

Pour le matériau endommagé, la fonction de dégradation de la rigidité est décrite par la fonction $\alpha \rightarrow a(\alpha)$, l'énergie élastique du matériau endommagé s'écrit :

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} \Psi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) \, d\mathbf{x} \quad \text{avec} \quad \Psi = a(\alpha) \psi_0(\varepsilon(\mathbf{u})) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\alpha) \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (1.44)$$

où $\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$ et $\mathbf{A}(\alpha)$ représente le tenseur de rigidité du matériau à l'état endommagé α . Nous supposons que le coefficient de Poisson ν ne se modifie pas au cours du processus d'endommagement, ce qui conduit à :

$$\mathbf{A}(\alpha) = a(\alpha) \mathbf{A}_0 \quad (1.45)$$

Ainsi, $\mathbf{A}(\alpha)$ diminue de \mathbf{A}_0 à 0 lorsque α passe de 0 à la valeur ultime, notée α_m . σ représente le tenseur de contrainte du matériau à l'état endommagé $\sigma = \mathbf{A}(\alpha) : \varepsilon$. D'après l'Eq. (1.44) et l'Eq.(1.34), l'énergie totale régularisée peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} a(\alpha) \mathbf{A}_0 \varepsilon(\mathbf{u}) : \varepsilon(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \frac{G_c}{c_w \ell} (w(\alpha) + \ell^2 \nabla \alpha : \nabla \alpha) \, d\mathbf{x} \quad (1.46)$$

1.7.3 La régularisation de la rupture fragile

Francfort et Marigo [28], [29], ont considéré que le problème de la rupture fragile, est envisagé comme un problème de minimisation de l'énergie totale avec la prise en compte de la condition d'irréversibilité. La fissuration est un phénomène dissipatif qui se caractérise par l'irréversibilité. Cette dernière, est utilisée pour empêcher les fissures de disparaître. En d'autres termes, le couple $(\mathbf{u}(t), \Gamma(t))$ est un minimum global de la fonction énergie potentielle \mathcal{W}^G , c'est-à-dire :

$$(\mathbf{u}(t), \Gamma(t)) = \min_{\mathbf{u} \in C_i} \mathcal{W}^G(\mathbf{u}, \Gamma) \quad \forall \Gamma \supseteq \Gamma_i \quad (1.47)$$

où C_i est l'espace des déplacements admissibles qui prend en compte l'existence des fissures dans la structure, Γ_i est l'état de fissuration au temps t_i . $\Gamma \supseteq \Gamma_i$ représente la condition d'irréversibilité des fissures.

L'Eq. (1.47) est généralement considérée comme un problème de discontinuité libre [18], [31] dans lequel le déplacement \mathbf{u} et les ensembles de sauts des fissures Γ sont des inconnues du problème. La formulation variationnelle présente une difficulté dans l'implémentation numérique du problème de discontinuité résultant. En effet, afin de traiter numériquement ce problème, cette approche doit tenir en compte a priori de tous les états de fissuration possibles (voir [18]).

Pour remédier à ce problème, Bourdin et al. [15] ont proposé d'utiliser le modèle de la rupture variationnelle régularisée basée sur la régularisation d'Ambrosio et Tortorelli [4] dans la segmentation d'images pour le problème de Mumford [60]. Cette régularisation peut être envisagée comme une approximation par des fonctions elliptiques et permet de converger vers le problème initial de rupture fragile.

Une approximation fonctionnelle de l'énergie totale a été proposée et qui consiste à remplacer la fissure par une zone endommagée dont la taille est contrôlée par un petit paramètre ℓ , contenu généralement dans $[0, 1]$. Les paramètres de cette zone sont fonction de la variable d'endommagement α continue et définie sur Ω . Braides [18], [19] a proposé plusieurs méthodes d'approximation de la formulation du problème de rupture fragile décrivant la régularisation.

Il a été démontré à partir de la théorie de Γ -convergence, que lorsque le paramètre $\ell \rightarrow 0$ et avec un maillage suffisamment fin, la surface de la fissure régularisée Γ_ℓ converge vers celle de la surface de la fissure Γ . Comme ℓ tend vers zéro, ce modèle régularisé se rapproche de la rupture fragile de Griffith. Ce qui revient à surestimer la résistance du matériau :

$$G_c^{num} = G_c \left(1 + \frac{h}{c_w \ell} \right) \quad (1.48)$$

où h est la taille caractéristique de la discrétisation de la maille.

En effet, d'après la Γ -convergence, le paramètre ℓ n'est plus à prendre en considération comme un paramètre purement numérique, qui a la dimension d'une longueur introduite par la régularisation, mais devient une longueur caractéristique du matériau. Les erreurs sur l'énergie de surface sont indépendantes du type d'élément (linéaires ou quadratiques) utilisé. En outre, un maillage non structuré est utilisé de telle sorte qu'aucune direction privilégiée ne soit mise en place afin d'éviter de surévaluer l'énergie [62].

1.8 Lois d'évolution de l'endommagement dans le cadre d'un modèle non local : modèle à gradient d'endommagement

Afin de présenter l'évolution d'endommagement dans le cadre d'un modèle non local, nous nous reportons à la Fig. (1.11) où un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega$. La frontière est séparée en deux parties distinctes $\partial_D\Omega$ et $\partial_S\Omega$ sur lesquelles sont appliquées respectivement le déplacement $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \partial_D\Omega$ et la densité de force de surface F_t pour $\mathbf{x} \in \partial_S\Omega$.

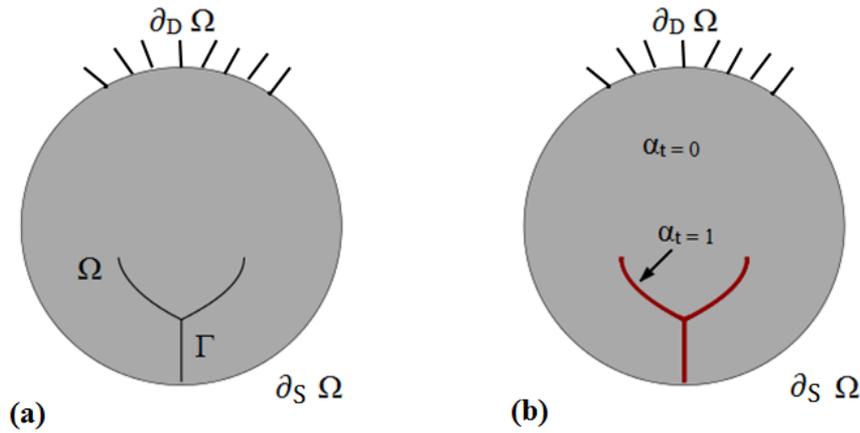


FIGURE 1.11: Domaine occupé par le solide Ω contenant une macrofissure décrite par la courbe Γ , (a) Représentation de la fissure, (b) Approximation de la fissure par une bande d'endommagement.

Le potentiel des forces externes à l'instant t défini dans l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissible, est présenté comme suit :

$$\mathcal{J}_t(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} f_t \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial_S \Omega} F_t \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in C_t \quad (1.49)$$

où f_t indique la densité des forces volumique.

Le comportement de la structure est caractérisé par une densité d'énergie totale W donnée par la relation suivante :

$$W(\varepsilon(\mathbf{v}), \beta, \nabla \beta) = \Psi(\varepsilon(\mathbf{v}), \beta) + \Phi(\beta, \nabla \beta) = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\beta) \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) + G_c \gamma(\beta, \nabla \beta) \quad (1.50)$$

Le critère d'endommagement de la structure est obtenu à partir de la formulation variationnelle du problème. On se propose, dans un premier temps, de rappeler brièvement les ingrédients de base de cette dernière.

On désigne par C_t et \mathcal{D} respectivement l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles et des champs d'endommagement accessibles :

$$C_t = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v} = \mathbf{U}_t \text{ dans } \partial_D \Omega \right\}, \quad \mathcal{D} = \left\{ \beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid 0 \leq \beta \leq 1 \right\}$$

Pour tout couple de champ de déplacement et d'endommagement admissibles à l'instant t : (\mathbf{v}, β) appartenant à l'espace $C_t \times \mathcal{D}_\alpha$, on définit l'énergie totale de la structure par :

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{v}, \beta) = \int_{\Omega} W(\varepsilon(\mathbf{v}), \beta, \nabla \beta) \, d\mathbf{x} - \mathcal{J}_t(\mathbf{v}) \quad (1.51)$$

Il s'agit maintenant d'établir une loi d'évolution de l'endommagement au niveau de la structure. En effet, L'évolution de l'endommagement dans le corps, selon l'approche variationnelle présentée dans [68] et [70], est régie par ces trois principes : irréversibilité, stabilité et conservation de l'énergie. En effet, la loi d'évolution d'un gradient d'endommagement dans le cas quasi-statique s'écrit :

Hypothèse. Loi d'évolution quasi-statique d'un gradient d'endommagement :

1. **L'irréversibilité** : à chaque instant t , l'endommagement est une fonction croissante du temps.
2. **Stabilité** : Le couple (\mathbf{u}_t, α_t) , doit être stable à chaque instant t dans le sens où $\forall (\mathbf{v}, \beta) \in C_t \times \mathcal{D}_\alpha, \exists h > 0$, tel que

$$(\mathbf{u}_t + h(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t), \alpha_t + h(\beta - \alpha_t)) \in C_t \times \mathcal{D}, \quad \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) \leq \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t + h(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t), \alpha_t + h(\beta - \alpha_t)). \quad (1.52)$$

où $\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid \alpha \leq \beta \leq 1 \right\}$

3. **Conservation de l'énergie** : Le bilan énergétique suivant est satisfait à tout moment.

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) = \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_0, \alpha_0) + \int_0^t \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \varepsilon(\dot{\mathbf{U}}_s) \, d\mathbf{x} - \mathcal{J}_s(\dot{\mathbf{U}}_s) - \dot{\mathcal{J}}_s(\mathbf{u}_s) \right) \, ds. \quad (1.53)$$

avec :

α_0 fait référence à l'état d'endommagement donné au début du processus de chargement ;

σ_s représente le champ de contrainte au temps s ;

$\dot{\mathbf{U}}_s$ est le taux du champ de déplacement admissible à l'instant s .

$\dot{\mathcal{J}}_s$ désigne le travail des forces extérieures appliquées à l'instant s .

$$\dot{\mathcal{J}}_s(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \dot{f}_s \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial_S \Omega} \dot{F}_s \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in C_t \quad (1.54)$$

Le problème d'évolution quasi-statique consiste à chercher, à chaque instant t , les champs de déplacement \mathbf{u}_t et les champs d'endommagement α_t , vérifiant les équations d'équilibre, les conditions aux limites, les conditions initiales et la loi d'évolution de l'endommagement.

Il convient de préciser que le principe de stabilité utilisé est celui de la stabilité directionnelle. Pour une direction admissible donnée (\mathbf{v}, β) , l'inégalité (1.52) doit être vérifiée pour une petite perturbation $h > 0$. Pour une direction donnée considérons, pour h petit et développons l'énergie à l'état perturbé par rapport à h jusqu'au second ordre, l'inégalité (1.52) devient :

$$\mathcal{W}'_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta - \alpha_t) + \frac{h}{2} \mathcal{W}''_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta - \alpha_t) + O(h^2) \geq 0 \quad \forall (\mathbf{v}, \beta) \in C_t \times \mathcal{D}_\alpha \quad (1.55)$$

où \mathcal{W}'_t et \mathcal{W}''_t dénotent les premières et deuxièmes dérivées directionnelles de \mathcal{W}_t et $O(h)^2$ des termes d'ordre supérieur à h . La première dérivée de l'énergie totale est présentée par :

$$\mathcal{W}'_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta - \alpha_t) = \int_{\Omega} \sigma_t : \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \, d\mathbf{x} + \int_{\mathcal{K}} \left((\beta - \alpha_t) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \nabla(\beta - \alpha_t) \right) \, d\mathbf{x} - \mathcal{J}(\mathbf{v}) \quad (1.56)$$

En choisissant une fonction test du champ de phase tel que $\beta = \alpha_t$, en jouant sur le signe de $(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t)$ l'inégalité ci dessus devient une égalité. Nous obtenons

$$\mathcal{J}(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \sigma_t : \varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in C_t \quad (1.57)$$

En ce qui concerne, l'équation qui régit le problème d'évolution de l'endommagement, on choisit dans l'inégalité (1.55), $\mathbf{v} = \mathbf{u}_t$, ce qui aboutit à la loi d'évolution pour l'endommagement, sous la forme d'une inéquation variationnelle :

$$\int_{\mathcal{K}} \left((\beta - \alpha_t) \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \nabla(\beta - \alpha_t) \right) \, d\mathbf{x} \geq 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{D}_\alpha \quad (1.58)$$

En passant à la limite lorsque h tend vers 0 et en utilisant le fait qu'il s'agit d'un espace vectoriel, nous en déduits que la condition de stabilité n'est satisfaite que si à chaque fois le corps est à l'équilibre Eq. (1.57) et que le critère d'endommagement Eq. (1.58) est satisfait. Les deux conditions peuvent être envisagées comme des conditions de stabilité de premier ordre. Elles sont nécessaires mais pas toujours suffisantes pour que l'Eq. (1.52) admette une solution. Plus précisément, si la direction β est telle que l'inégalité est stricte dans l'Eq. (1.58), alors l'Eq. (1.55) est stabilisé pour h suffisamment petit. La stabilité est alors garantie dans cette direction.

Cependant, dans le cas où le calcul directionnel nous donnerait une égalité au lieu d'une inégalité en Eq. (1.58), dans ce cas, il faudra étudier le terme de second ordre alors l'Eq. (1.55) exige que la dérivée seconde soit non négative afin que l'état soit stable par rapport à cette direction de perturbation (et la stabilité dans cette direction est assurée si la dérivée seconde est positive). Sur la base de calcul standard (le théorème de la divergence et le calcul variationnel sont utilisés), nous obtenons les éléments suivants :

$$\mathbf{div} \, \sigma_t + f_t = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \sigma_t \cdot \mathbf{n} = F_t \quad \text{dans } \partial_S \Omega \quad (1.59)$$

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - G_c \partial_\alpha \gamma \leq 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \cdot \mathbf{n} \geq 0 \quad \text{dans } \partial \Omega \quad (1.60)$$

avec $\partial_\alpha \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \right)$ En supposons que la solution est régulière en temps et en espace. En dérivent l'Eq. (1.53) du bilan énergétique par rapport au temps t . On obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{U}}_t) - \mathcal{J}_t(\dot{\mathbf{U}}_t) - \dot{\mathcal{J}}_t(\mathbf{u}_t) = 0 \\ & \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \mathcal{W}_t(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t), \alpha_t, \nabla \alpha_t) \right) \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{U}}_t) \mathbf{d}\mathbf{x} - \mathcal{J}_t(\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{U}}_t) = 0 \\ & \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{U}}_t) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) \dot{\alpha}_t + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \cdot \nabla \dot{\alpha}_t \right) \mathbf{d}\mathbf{x} = 0 \\ & - \int_{\Omega} \left(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot (\dot{\mathbf{u}}_t - \dot{\mathbf{U}}_t) + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - G_c \partial_\alpha \gamma \right) \dot{\alpha}_t \right) \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} (\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \cdot \mathbf{n} \dot{\alpha}_t) \mathbf{d}s = 0 \end{aligned} \quad (1.61)$$

En prenant en compte l'équilibre et la condition limite (1.59), nous aboutissons à :

$$- \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - G_c \partial_\alpha \gamma \right) \dot{\alpha}_t \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\partial \Omega} G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \dot{\alpha}_t \mathbf{d}s = 0 \quad (1.62)$$

En prenant en compte de la condition d'irréversibilité et que l'endommagement ne peut qu'augmenter à chaque instant t ($\dot{\alpha} \geq 0$), et du critère d'endommagement (1.58), l'égalité (1.62) ne peut être réalisée que si et seulement si les égalités suivantes sont respectés :

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - G_c \partial_\alpha \gamma = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \alpha_t}{\partial n} \cdot \dot{\alpha}_t = 0 \quad \text{dans } \partial \Omega \quad (1.63)$$

Les équations de stabilité du premier ordre permettent ainsi de déterminer l'équilibre et le critère d'endommagement. Par contre, dans le cas où les premières dérivées annuleraient les conditions de stabilité du second ordre, il faut étudier les conditions de stabilités du second ordre.

1.9 Mise en œuvre numérique

Dans cette étude, et dans une analyse par éléments finis, nous utilisons un modèle d'endommagement non local. En effet, une loi d'évolution régularisée et discrétisée dans le temps est utilisée pour aborder l'évolution d'endommagement quasi-statique, avec la prise en compte de la condition d'irréversibilité $\alpha_{t_j} \geq \alpha_{t_{j-1}}$. L'évolution quasi-statique de l'endommagement est décrite par la minimisation alternée de l'énergie totale (1.51), en cherchant itérativement les minimiseurs $(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$. Pour le calcul numérique, et afin de trouver à chaque instant de temps l'état du corps, on utilise un algorithme pour la minimisation alternée qui est mentionné dans [10] et [16]. Cela consiste à trouver à chaque instant de temps t_j le couple $(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$ tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{t_j} &= \arg \min_{\mathbf{v} \in C_{t_j}} \mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{v}, \alpha_{t_{j-1}}), \\ \alpha_{t_j} &= \arg \min_{\alpha \in \mathcal{D}: \beta \geq \alpha_{t_{j-1}}} \mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{u}_{t_j}, \beta) \end{aligned} \quad (1.64)$$

avec une condition initiale $\alpha_{t_{j-1}}$. Le problème de la minimisation est discrétisé dans le temps et dans l'espace à travers les éléments fini $P1$ de Lagrange. Pour la mise en œuvre numérique du modèle de gradient d'endommagement, il est très important de faire respecter la limite d'endommagement $\alpha(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ et la condition d'irréversibilité $\dot{\alpha} > 0$ conditions d'irréversibilité. Cela signifie que si une fissure existe à un moment donné, elle doit également exister à tout moment ultérieur.

1.9.1 Minimum local et minimum global

L'approche variationnelle de la rupture dans le modèle de Griffith est basée sur la minimisation globale [28]. En tant qu'un modèle mathématique de la rupture fragile, c'est en effet un postulat pratique pour atteindre les objectifs de

prédiction, de la nucléation et de la trajectoire des fissures dans un cadre unifié. Néanmoins, les mêmes auteurs [28], [22] ont indiqué que la minimisation globale reste loin d'être un principe fondé sur la physique. Les principales difficultés résident dans le fait que ce principe autorise de franchir des barrières énergétiques pour l'énergie potentielle totale \mathcal{W} fonction des fissures Γ , (le point H de la Fig. (1.12) illustre ce type de problème). Admettons que la fissure au stade temporel précédent soit décrite par Γ^{i-1} , en raison de l'augmentation de la charge au pas de temps actuel t_i , la fissure va évoluer vers une nouvelle configuration.

Nous avons tracé sur la Fig. (1.12) un exemple dans lequel l'énergie potentielle admet des minima locaux et globaux. Sur la base de la minimisation globale Eq. (1.47), la fissure se propage dans le domaine Ω décrit par une fissure qui traverse toute la structure Γ_{Glob}^i . Cet état de fissuration nécessite de passer des barrières énergétiques (la Fig. (1.12)) correspondant à un état de fissure intermédiaire à une énergie plus basse que le temps précédent, tout en parvenant continuellement à l'état final Γ_{Glob}^i .

Bien que, l'algorithme permet à la fissure d'effectuer des essais dans toutes les configurations possibles pour minimiser l'énergie potentielle totale, le trajet physiquement réalisable dans l'espace de configuration pour arriver à ce minimum global n'est pas connu.

Une méthode plus intuitive consiste à occuper la configuration Γ_{Loc}^i qui correspond à un minimum local de la courbe énergie potentielle. En revanche, par rapport au principe de la minimisation globale, ou la prédiction du cheminement des fissures est totalement dépourvue de la géométrie, la minimisation locale exige une définition précise de la distance entre deux états de fissure arbitraires, c'est-à-dire une définition d'une certaine topologie de l'espace admissible de la fissure.

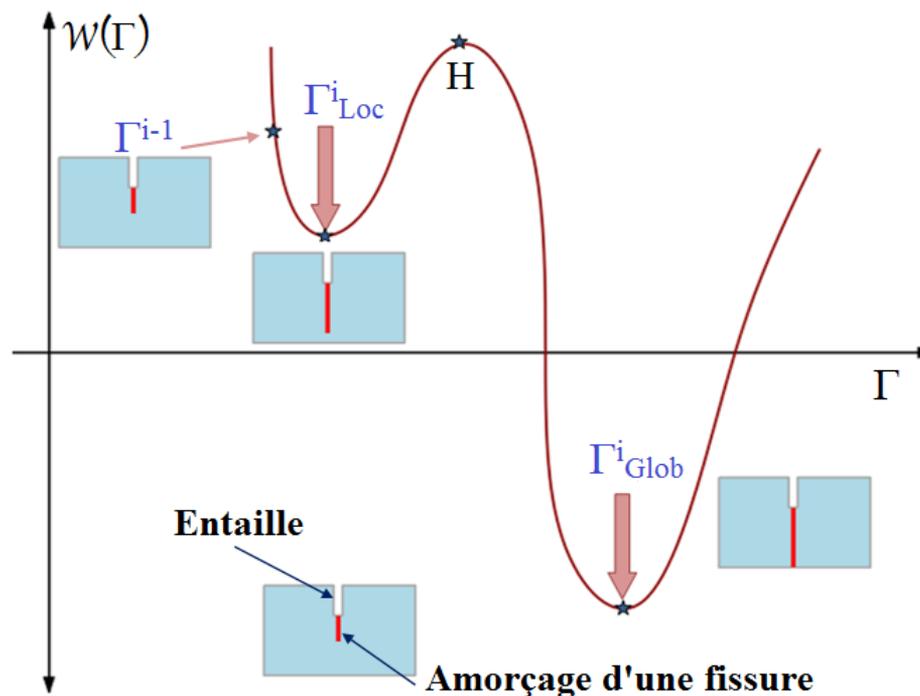


FIGURE 1.12: Minimum local et global

1.10 Synthèse et Conclusion

La rupture et l'endommagement des matériaux font l'objet de nombreuses études dans le domaine industriel tels que le génie civil, l'aéronautique, l'automobile,

Dans ce chapitre, nous avons rappelé et introduit les principaux concepts et résultats de la mécanique de la rupture et de l'endommagement

Dans la première partie, nous avons rappelé les concepts fondamentaux de la mécanique linéaire de la rupture linéaire. Une présentation des différents critères de la mécanique de la rupture linéaire : critères d'IRWIN et de Griffith a été faite.

Nous avons évoqué les lacunes de la théorie de Griffith pour décrire l'évolution de la fissuration dans un matériaux. Elle ne peut pas traiter, par exemple, le phénomène d'amorçage de fissure dans un domaine sain ou de modéliser les évolutions brutales de la propagation de la fissure.

Ensuite, une présentation des deux lois d'évolutions : loi de Griffith *G-law* et loi de Francfort et Marigo *FM-law* a été réalisée. Un brève présentation de la rupture sous chargement cyclique a été également réalisée.

La deuxième partie est consacrée à la mécanique de l'endommagement, thème central de cette thèse. Nous avons décrit les modèles d'endommagement standards ainsi que, les modèles d'endommagement à gradients qui correspond au choix utilisé dans le cadre de cette thèse.

Dans la troisième partie, nous avons présenté les lois d'évolutions de l'endommagement dans le cadre d'un modèle non local. En effet, l'évolution du champ d'endommagement et du champ de déplacement est régie par un principe qui est basé sur trois fondamentaux : l'irréversibilité, la stabilité et le bilan énergétique. Ensuite, nous avons traité la mise en œuvre numérique du modèle à gradient d'endommagement. Ainsi, nous avons décrit l'algorithme de la minimisation alternée pour déterminer l'évolution quasi-statique de l'endommagement. Nous avons présenté les deux types de minimisation globale et locale.

Dans cette thèse l'étude de la rupture et de l'endommagement quasi-statique et dynamique des matériaux fragiles a été réalisée en utilisant un modèle à gradient particulier d'endommagement. Nous avons utilisé pour cela l'algorithme de minimisation alternée pour la mise en œuvre numérique du modèle choisi.

Faisons les deux remarques suivantes à propos du modèle d'endommagement et de l'algorithme de minimisation alternée :

- Deux modèles d'endommagement seront étudiés dans le chapitre suivants pour choisir le modèle d'endommagement, nous retenons à la fin de la thèse, c'est-à-dire chapitre 3 et 4 le modèle qui possède une phase élastique.
- Pour la mise en œuvre numérique du modèle de gradient d'endommagement, nous avons utilisé un algorithme de minimisation alternée. Nous montrerons que la solution obtenue avec cet algorithme est un minimum local et pas un minimum global de l'énergie. Cette constatation est vérifiée dans le chapitre suivant (2) lors de la résolution analytique et numérique d'une plaque soumise à une traction.

Étude de l'endommagement et de la rupture des structures dans le cas
quasi-statique

Contents

2.1	Introduction	40
2.2	Présentation du problème mécanique	41
2.2.1	Cas d'une plaque rectangulaire	41
2.2.1.1	Calculs analytiques	41
2.2.1.2	Étude comparative de deux différents modèles d'endommagement	42
2.2.1.3	Résultats numériques	43
2.2.2	Recherche du minimum global	47
2.2.2.1	Présentation de la méthode	47
2.2.3	Recherche du minimum global - Simulations numériques	49
2.2.3.1	Le minimum global avec la fonction : $w(\alpha) = \alpha^2$	49
2.2.3.2	Le minimum global avec la fonction $w(\alpha) = \alpha$	49
2.2.4	Interprétation	50
2.2.5	Cas d'une plaque entaillée contenant un trou	51
2.2.5.1	Le contexte du problème : le corps et le chargement	51
2.2.5.2	Modèle à gradient d'endommagement	51
2.3	Implémentation numérique	52
2.3.1	Algorithme de minimisation alternée	53
2.4	Résultats numériques	53
2.4.0.1	Étude de la propagation instable de la fissure	55
2.4.0.2	Étude de l'amorçage de la fissure au bord du trou	59
2.5	Conclusion	62

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'endommagement et de la rupture dans le cas quasi-statique. Dans ce cadre, nous présentons les caractéristiques de deux modèles d'endommagement utilisés en prenant le comportement d'une plaque rectangulaire en traction comme cas d'exemple.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les résultats analytiques des variations des énergies de surface, élastique et totale en fonction de la charge de déplacement imposé t . Les résultats obtenus en utilisant les deux familles de modèles d'endommagement envisagées sont comparés entre eux et avec des résultats numériques obtenus. La démarche à suivre pour la recherche du minimum global de l'énergie totale est ensuite détaillée. Nous présentons une combinaison entre les algorithmes de Backtracking et celui de la minimisation alternée dans le but de trouver ce minimum global.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, un exemple de traction d'une plaque entaillée avec un trou décalé au centre soumise à un déplacement imposé est étudiée. Ce dernier était choisi pour montrer diverses caractéristiques des fissures, telles que l'amorçage à partir d'une entaille, la propagation et l'arrêt de la fissure, ainsi que l'influence de la singularité géométrique (trou) sur la fissure.

2.2 Présentation du problème mécanique

2.2.1 Cas d'une plaque rectangulaire

Dans le but de pouvoir analyser l'évolution des énergies et la propagation des fissures, en utilisant la méthode de champ de phase, un exemple du problème plan est utilisé dans cette section. Nous avons étudié ainsi une structure bi-dimensionnelle dont le matériau constitutif est supposé endommageable fragile. La structure soumise à un essai de traction présentée sur la Fig. (2.1) qui correspond au domaine $\Omega = (0, L) \times (0, H)$ avec $L = 2$ et $H = 1$. La plaque est encadrée sur le bord $x_1 = 0$, et soumise à un déplacement imposé $u_1 = t$ sur le bord $x_1 = L$ avec t présente le paramètre de chargement.

Dans un premier lieu, nous abordons, en fonction du chargement t , les résultats analytiques des variations des énergies telles que l'énergie élastique, dissipée et totale. Nous présentons ensuite la charge critique qui provoque l'initiation de l'endommagement. Et afin de comparer les résultats analytiques trouvés avec ceux qui trouvés numériquement, nous utilisons deux modèles de fonctions de dissipation $w(\alpha) = \alpha$ et $w(\alpha) = \alpha^2$.

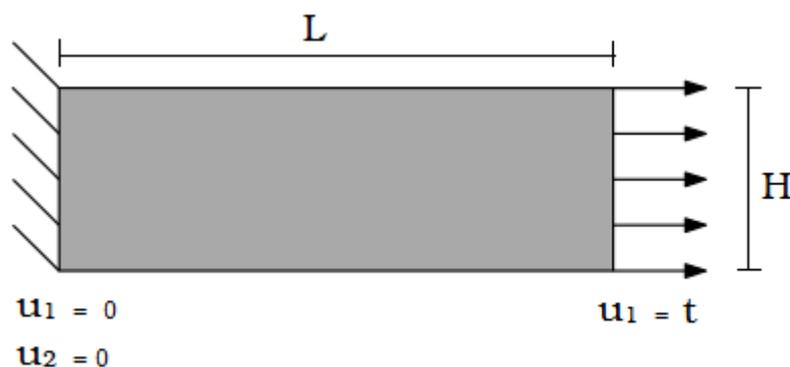


FIGURE 2.1: Problème de traction d'une plaque rectangulaire

2.2.1.1 Calculs analytiques

Afin de pouvoir résoudre le problème analytiquement, nous avons supposé que le coefficient de poisson de matériau est nul $\nu = 0$. Cela semble être une simplification mathématique, qui nous a autorisé à résoudre le problème analytiquement. En effet, nous avons pris un cas d'exemple académique avec une ténacité de matériau $G_c = 1$, et un module d'young initial $E_0 = 1$. Ainsi, le champ de déplacement \mathbf{u} est exprimé comme suit :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_1(x_1) \cdot \mathbf{e}_1 \quad (2.1)$$

Ainsi, l'expression de la déformation est formulée par :

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} = u_1'(x_1) \quad (2.2)$$

En prenant en compte les conditions aux limites suivant :

$$\begin{cases} u_1(x_1 = 0) = 0 \\ u_1(x_1 = L) = t \end{cases}$$

Et à partir de l'équation d'équilibre et de l'intégration de la solution, nous obtenons :

$$u_1 = \frac{t}{L}x_1 \quad (2.3)$$

Par la suite, la déformation ε_{11} et la contrainte σ_{11} sont données par les expressions suivantes :

$$\varepsilon_{11} = \frac{t}{L} \quad \sigma_{11} = E_0 \frac{t}{L} \quad (2.4)$$

En utilisant les équations Eq. (2.3), Eq. (2.4), et pour un champ de déplacement u_1 , les énergies sont présentées par :

1. L'énergie élastique avant la rupture :

$$\mathcal{E} = \int_0^L \frac{1}{2} E_0 \frac{t^2}{L^2} dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \frac{E_0 t^2}{L} H \quad (2.5)$$

2. L'énergie dissipée :

$$\mathcal{D} = \int_0^H G_c dx_2 = G_c H \quad (2.6)$$

3. La conservation de l'énergie :

$$\Delta \mathcal{W} = \Delta \mathcal{E} + \Delta \mathcal{D} = 0$$

ce qui nous donne :

$$\Delta \mathcal{D} = -\Delta \mathcal{E} = \frac{1}{2} \frac{E_0 t^2}{L} H = G_c H$$

Nous avons utilisé l'équilibre énergétique pour déterminer le chargement critique qui cause la rupture de la structure. Ce dernier est exprimé par la relation suivante :

$$t_c^{th} = \sqrt{\frac{2LG_c}{E_0}} \quad (2.7)$$

Ces résultats analytiques trouvés sont comparés avec les résultats numériques, en prenant en compte deux fonctions de l'énergie de dissipation locale $w(\alpha)$.

2.2.1.2 Étude comparative de deux différents modèles d'endommagement

Dans cette partie, il est notamment proposé de présenter deux familles de modèles d'endommagement afin de permettre des calculs numériques dans un premier lieu, puis de faire une étude comparative dans un second lieu. Le problème de la rupture dans le cas quasi-statique est déterminé par la minimisation de la fonctionnelle $\mathcal{W}(\mathbf{u}_t, \alpha_t)$ avec \mathbf{u}_t et α_t désignent le champ de déplacement et le champ d'endommagement respectivement à l'instant considéré. Le problème consiste à chercher, à chaque incrément de temps t , le déplacement $\mathbf{u}_t(x_1, x_2)$ qui vérifie les conditions aux limites et les conditions initiales. Nous avons supposé que le terme $\frac{G_c}{c_w \ell} = w_1$, donc l'énergie régularisé (Eq. (1.46)) s'écrit comme suit :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon(\mathbf{u}_t) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}_t) \, dx + \int_{\Omega} w_1 \left(w(\alpha_t) + \ell^2 \nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha_t \right) \, dx \quad (2.8)$$

avec E_0 représente le module d'Young initial et $A(\alpha) = a(\alpha) E_0$.

Les deux modèles d'endommagement sont présentés comme suit :

Premier modèle d'endommagement : $a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$, $w(\alpha) = \alpha^2$, $c_w = 2$:

Ce modèle a été présenté par Ambrosio and Tortorelli [4] comme une régularisation du problème de Mumford et Shah [60]. Et afin de régulariser le problème de la mécanique de la rupture fragile, ce modèle a été adopté par Bourdin et al. [15]. En utilisant ce dernier, l'énergie totale est exprimée par :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha_t)^2 E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (w_1 \alpha_t^2 + w_1 \ell^2 \nabla \alpha_t \nabla \alpha_t) \, d\mathbf{x} \quad (2.9)$$

Deuxième modèle d'endommagement : $a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$, $w(\alpha) = \alpha$, $c_w = 8/3$:

Ce modèle a été introduit par Pham et al. [67]. En effet, l'énergie totale est exprimée par :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (1 - \alpha_t)^2 E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (w_1 \alpha_t + w_1 \ell^2 \nabla \alpha_t \nabla \alpha_t) \, d\mathbf{x} \quad (2.10)$$

2.2.1.3 Résultats numériques

Afin de vérifier les solutions analytiques (Eq. (2.9) et Eq. (2.10)), des simulations numériques d'une plaque rectangulaire soumise à une traction ont été faites. La structure est présentée sur la Fig. (2.1) où la géométrie et les conditions aux limites sont illustrées. Le chargement de déplacement imposé t est appliqué en utilisant un incrément de temps constant $\Delta t = 10^{-3}$ mm. Le domaine est discrétisé avec 3334 éléments triangulaires. Nous avons utilisé une longueur caractéristique $\ell = 0.1$ mm et un pas de maillage $h = 0.01$ mm. Et comme nous avons indiqué, pour faciliter les calculs, les propriétés du matériau sont choisies comme suit une ténacité de matériau $G_c = 1$, un module d'Young $E_0 = 1$ et un coefficient de poisson $\nu = 0$.

La Fig. (2.2) présente l'évolution de l'endommagement avec une fonction de dissipation ($w(\alpha) = \alpha^2$). La figure montre que la fissure a lieu sur une bande d'endommagement au milieu de la structure. Nous notons, l'absence du domaine purement élastique. En effet, dès qu'il y a un chargement, l'endommagement est évolué.

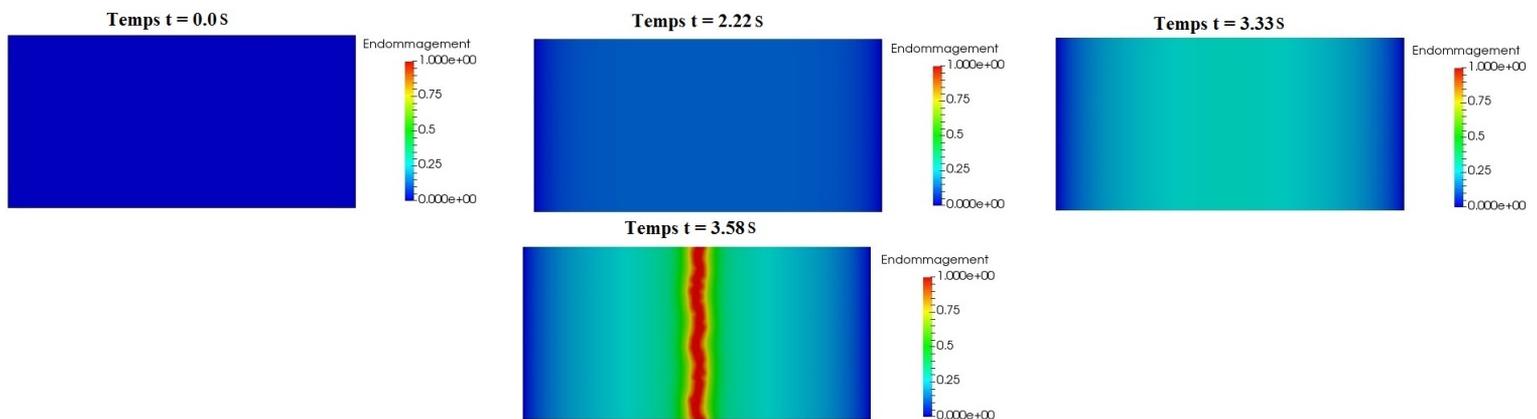


FIGURE 2.2: Répartition de l'endommagement pour une barre en traction avec la fonction de dissipation locale : $w(\alpha) = \alpha^2$

L'évolution de l'endommagement avec une fonction de dissipation locale $w(\alpha) = \alpha$ est illustrée sur la Fig. (2.3). Nous remarquons ainsi, que la bande de localisation de la fissure est située au milieu de la structure. En comparant avec le résultat trouvé dans la Fig. (2.2), nous remarquons que la zone de transition où $0 < \alpha < 1$ est plus marquée.

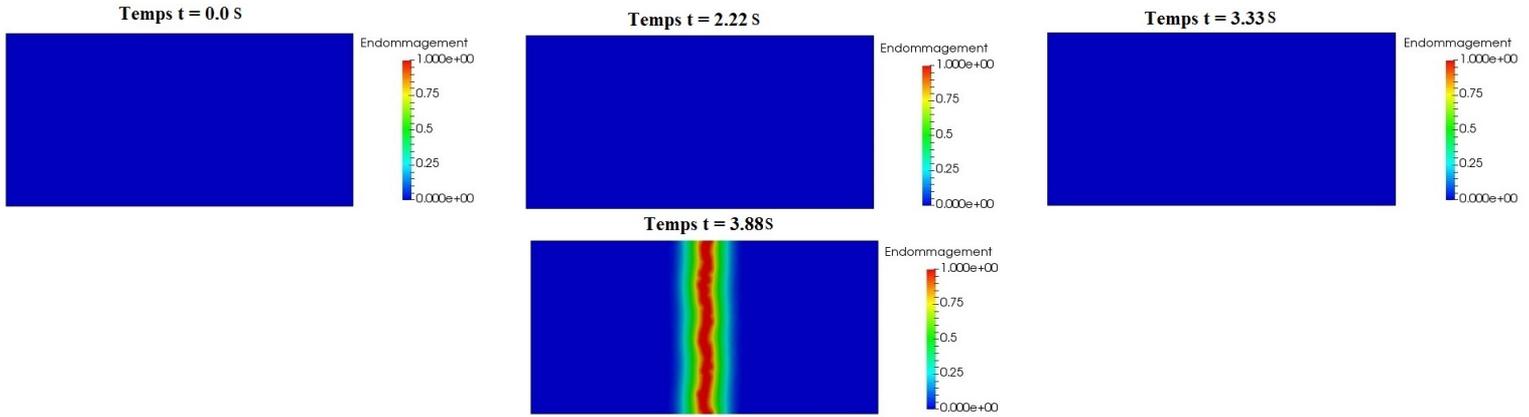


FIGURE 2.3: Répartition de l'endommagement pour une barre en traction avec la fonction de dissipation locale : $w(\alpha) = \alpha$

En utilisant les deux modèles d'endommagement présentés, une étude de la phase élastique et de la phase d'endommagement homogène a été réalisée afin de caractériser la réponse du matériau.

1. **1^{er} cas, le modèle :** $w(\alpha) = \alpha^2$, $a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$:

Étude de la phase élastique :

Afin de caractériser le comportement de la structure dans le domaine élastique, nous avons déterminé la limite élastique σ_c . En effet, d'après l'Eq. (1.31), la contrainte critique pour un exemple uni-axiale s'écrit :

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2 \cdot w_1 w'(0)}{S'_{1111}(0)}} \quad (2.11)$$

Dans ce cas : $w(\alpha) = \alpha^2$, $w'(0) = 0$, et on a $S'(\alpha) = 2/E_0$ avec $S(\alpha) = 1/A(\alpha)$, et nous aboutissons à une contrainte élastique $\sigma_c = 0$. Ainsi, le matériau n'est jamais déformé élastiquement. Par la suite, la structure s'endommage instantanément, sans passer par un état élastique.

Étude de la phase d'endommagement homogène :

Le comportement du matériau, dans la phase d'endommagement homogène ($\alpha > 0$), est déterminé en fonction de la signe de l'expression suivante. Nous avons posé dans ce calcul $w(\alpha) = w_1 \alpha^2$:

$$w'(\alpha) \cdot S''(\alpha) - w''(\alpha) \cdot S'(\alpha)$$

Après le calcul de la dérivée première et la dérivée seconde de chaque fonction de (α) , on obtient

$$w'(\alpha) \cdot S''(\alpha) - w''(\alpha) \cdot S'(\alpha) = \frac{4w_1}{E_0 \cdot (1 - \alpha)^3} \cdot \left(\frac{3 \cdot \alpha}{1 - \alpha} - 1 \right)$$

or, $\frac{4w_1}{E_0(1 - \alpha)^3} > 0$ car ce produit est composé des constantes intrinsèques du matériau. Donc le signe de

l'expression dépend de celui de $\left(\frac{3 \cdot \alpha}{1 - \alpha} - 1 \right)$. Et par la suite, nous obtenons :

$$w'(\alpha) \cdot S''(\alpha) - w''(\alpha) \cdot S'(\alpha) < 0 \Rightarrow \alpha < 0.25$$

$$w'(\alpha) \cdot S''(\alpha) - w''(\alpha) \cdot S'(\alpha) > 0 \Rightarrow \alpha > 0.25$$

Ainsi, le matériau écrouit dans un premier temps pour $0 < \alpha < 0.25$, puis il s'adoucit pour $0.25 < \alpha < 0.5$. Afin de déterminer l'expression de α , nous avons utilisé le critère d'endommagement suivant :

$$-\frac{\partial \Psi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha)}{\partial \alpha} - w'(\alpha) = 0, \quad \text{avec} \quad \Psi(\varepsilon(\mathbf{u}), \alpha) = \frac{1}{2} a(\alpha) E_0 \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \varepsilon(\mathbf{u}) \quad (2.12)$$

Après un développement du calcul, la résolution de l'Eq. (2.12) nous a conduit alors à l'expression suivante du paramètre d'endommagement α :

$$\alpha = \frac{E_0 \cdot \varepsilon^2}{E_0 \cdot \varepsilon^2 + 2 \cdot w_1} \quad (2.13)$$

Nous pouvons ainsi, exprimer la contrainte comme suit : $\sigma = A : \varepsilon = a(\alpha)E_0 : \varepsilon \Rightarrow \sigma = E_0(1 - \alpha)^2 : \varepsilon \Rightarrow \sigma = E_0 \cdot \left(\frac{2 \cdot w_1}{E_0 \cdot \varepsilon^2 + 2 \cdot w_1} \right)^2 \cdot \varepsilon$

En effet, la contrainte est maximale lorsque $\sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon_M)$, et sa détermination revient à résoudre l'équation de dérivée partielle suivante :

$$\frac{\partial \sigma(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = 0, \quad \varepsilon = \varepsilon_M \quad (2.14)$$

La résolution nous a conduit alors à :

$$\varepsilon_M = \sqrt{\frac{2 \cdot w_1}{3 \cdot E_0}} \quad (2.15)$$

Par la suite l'endommagement critique est déterminé en combinant les équations Eq. (2.15) et l'Eq.(2.13) :

$$\alpha_c = 1/4$$

2. 2^ecas, le modèle : $w(\alpha) = \alpha, a(\alpha) = (1 - \alpha)^2$:

L'endommagement n'évolue pas tant qu'une contrainte critique non nulle n'est pas atteinte. Ce qui représente une caractéristique relativement appréciée lors de la modélisation de la rupture fragile. Nous observons d'après la Fig. (2.4) (b) que la courbe est linéaire avant l'apparition de l'endommagement. En effet, le comportement présente une détente lorsque l'endommagement augmente pour $\alpha \in (0, 1)$. Donc, la réponse de la fonction de la dissipation locale $w(\alpha) = \alpha$ est également caractérisée par une stade élastique initial. En vertu de l'expression de la contrainte critique Eq.(2.11), nous avons :

$$\sigma_c = \sqrt{w_1 E_0} = \sqrt{\frac{3 \cdot G_c}{8 \cdot \ell}} E_0, \quad w_1 = \frac{G_c}{c_w \ell} \quad (2.16)$$

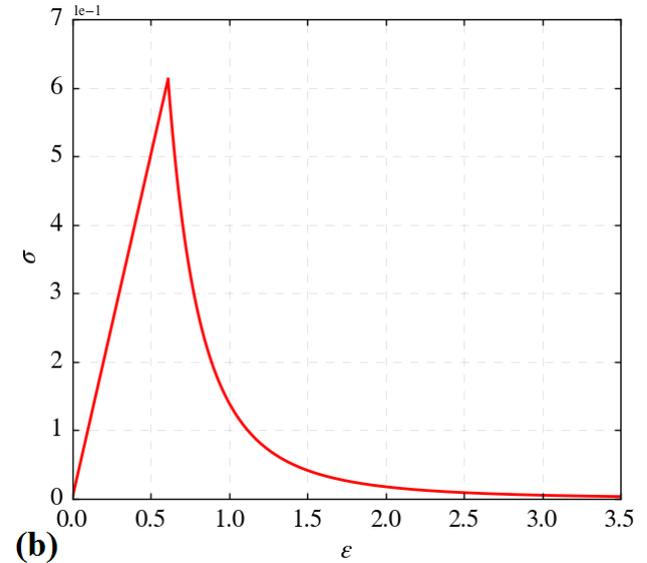
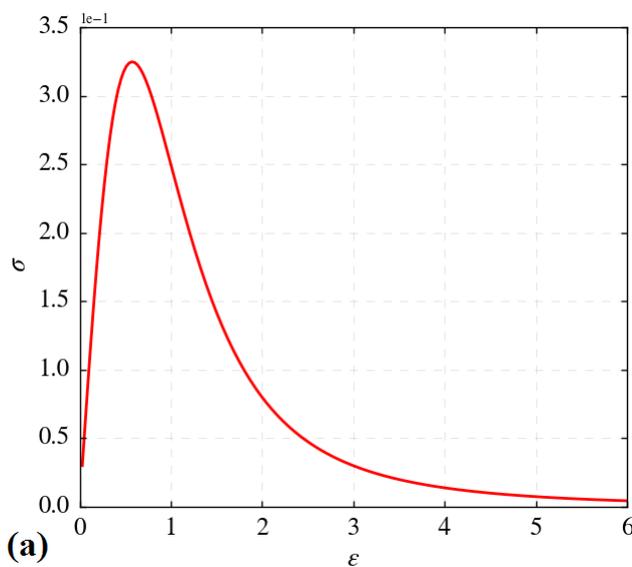


FIGURE 2.4: Comportement du matériau au cours d'une expérience de traction uniaxiale homogène (a) : 1^{er}cas $w(\alpha) = \alpha^2$, (b) : 2^ecas $w(\alpha) = \alpha$

La Fig. (2.5) présente l'évolution du champ d'endommagement α en fonction de la déformation ε . La figure montre que la fonction du champ d'endommagement est une fonction croissante adoptant une asymptote en $\alpha = 1$ et que le champ d'endommagement varie dans l'intervalle $[0, 1]$.

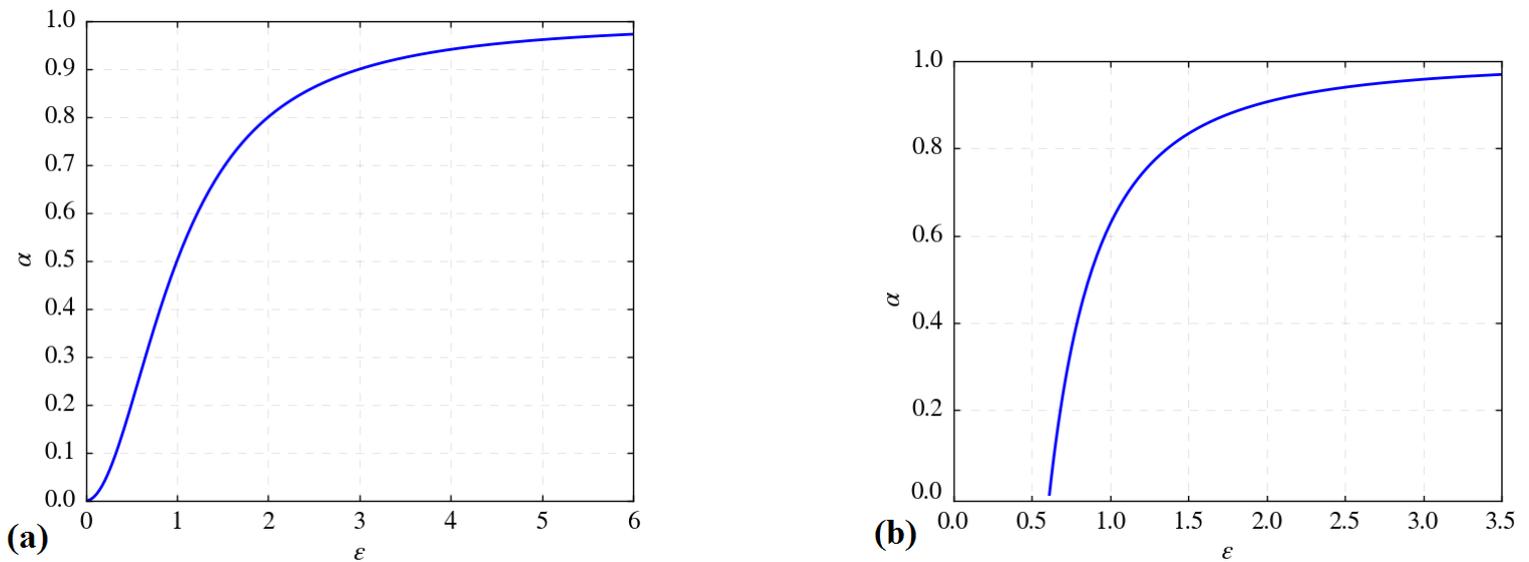


FIGURE 2.5: Allure du paramètre de l'endommagement α_t au cours d'une expérience de traction uniaxiale homogène (a) : 1^{er}cas $w(\alpha) = \alpha^2$, (b) : 2^ecas $w(\alpha) = \alpha$

Les courbes charge-déplacement sont présentées sur la Fig. (2.6). Pour le premier cas avec la fonction de la dissipation $w(\alpha) = \alpha^2$, la courbe présente un écrouissage au chargement (2.6) (a). Pour le deuxième cas, avec la fonction de la dissipation $w(\alpha) = \alpha$, la courbe présente une rupture brutale (2.6)(b).

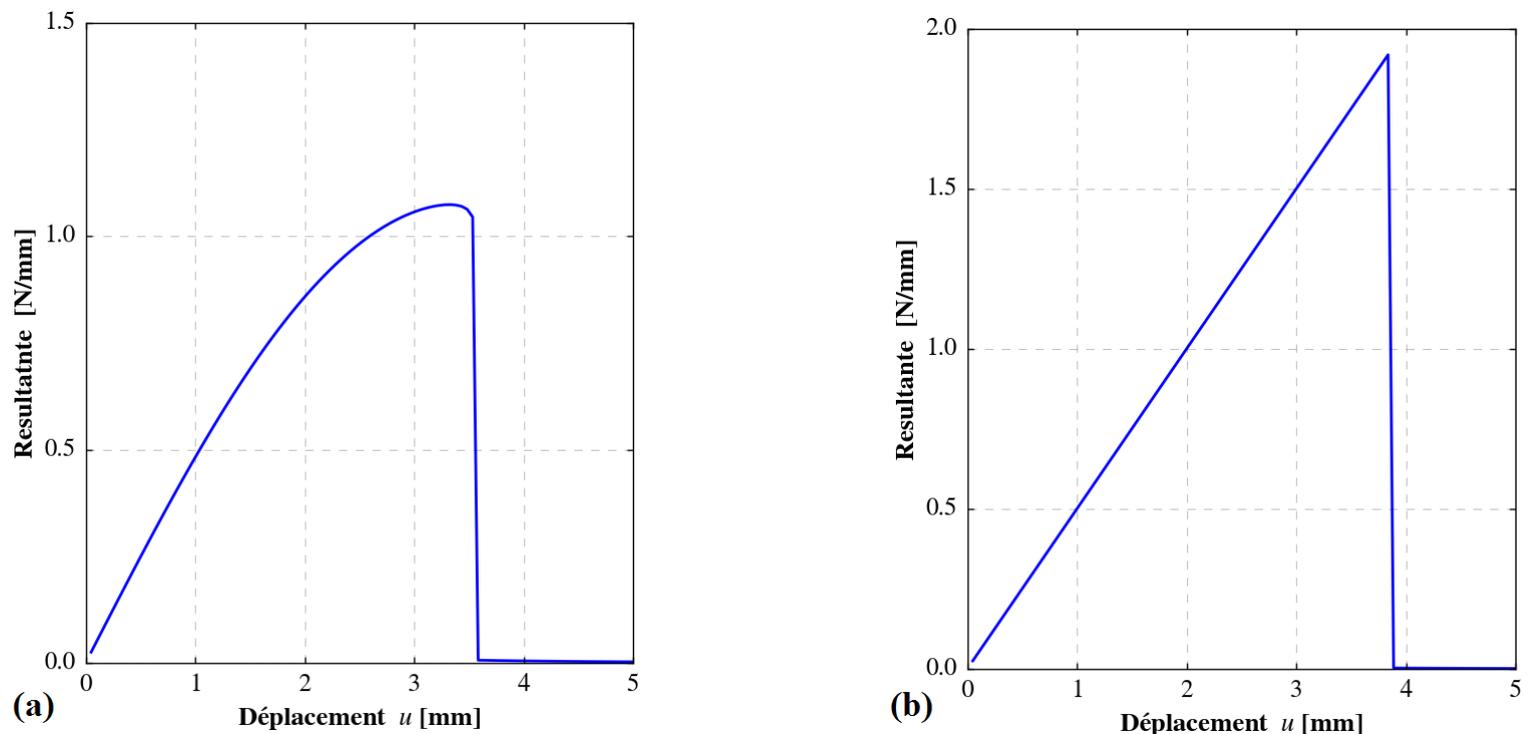


FIGURE 2.6: Plaque rectangulaire : Evolution des résultantes en fonction de chargement en utilisant l'algorithme de la minimisation alternée (a) : 1^{er}cas $w(\alpha) = \alpha^2$, (b) : 2^ecas $w(\alpha) = \alpha$

La Fig. (2.7) montre l'évolution quasi-statique des énergies avec les deux modèles de fonction de dissipation. L'énergie dissipée \mathcal{D} à la fissuration brutale de la structure, l'énergie élastique \mathcal{E} et le chargement critique t_c qui cause la rupture

pour les deux modèles sont présentés dans le Tab. (2.1).

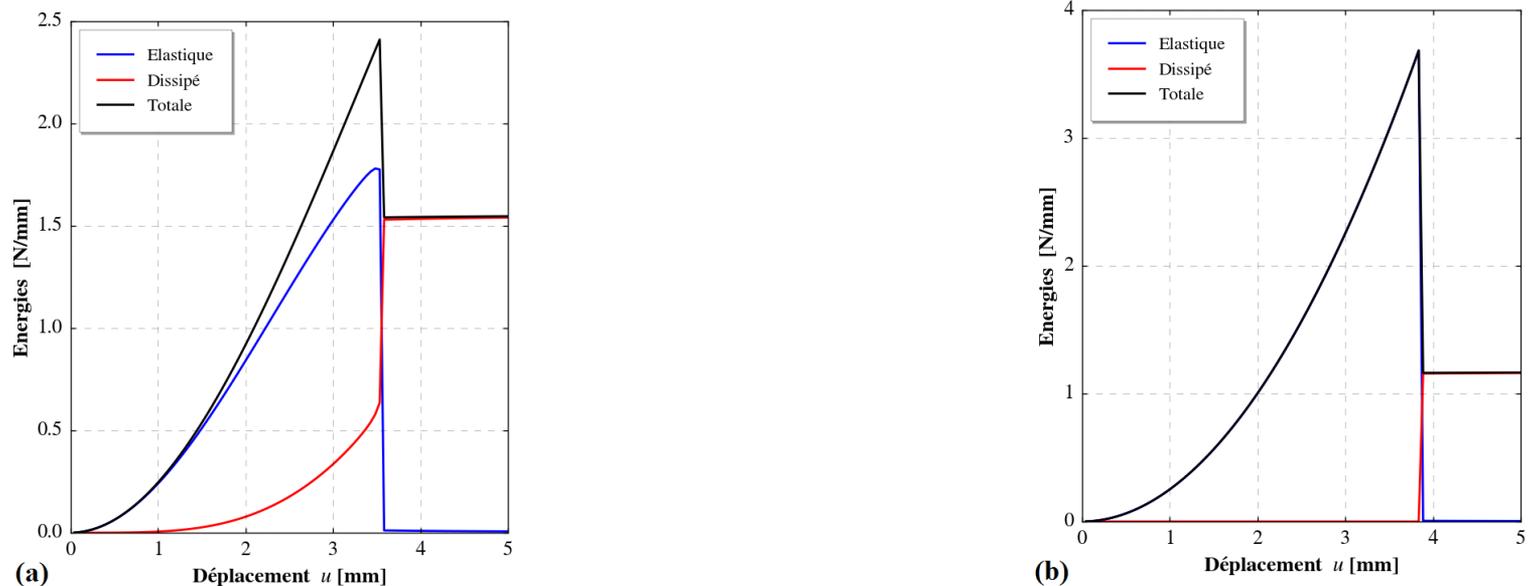


FIGURE 2.7: Plaque rectangulaire : Evolution des énergies en fonction de chargement en utilisant l’algorithme de la minimisation alternée (a) : 1^{er} cas $w(\alpha) = \alpha^2$, (b) : 2^e cas $w(\alpha) = \alpha$

	$w(\alpha) = \alpha^2$	$w(\alpha) = \alpha$
Chargement critique t_c	3.58	3.88
Énergie dissipée \mathcal{D} (N/mm)	1.52	1.15
Énergie élastique \mathcal{E} (N/mm)	1.1210^{-2}	5.6910^{-3}

TABLE 2.1: Calcul numérique en utilisant l’algorithme de la minimisation alternée du chargement critique t_c , l’énergie dissipée \mathcal{D} et élastique \mathcal{E} au moment de rupture pour les deux cas d’étude $w(\alpha) = \alpha^2$ et $w(\alpha) = \alpha$

Nous remarquons ainsi, que les deux modèles fournissent des résultats proches, sauf que le modèle ($w(\alpha) = \alpha^2$) donne une énergie de surface légèrement supérieure, en raison de l’absence du domaine élastique. Nous pouvons constater, que l’énergie dissipée dans les deux cas convergent vers la valeur théorique donnée par l’Eq. (2.6) ($G_c \cdot H = 1$). L’énergie élastique augmente et atteint une valeur maximale au chargement critique t_c . Puis, elle décroît et devient nulle quand la rupture se développe. Le chargement critique trouvé numériquement pour les deux cas est supérieur au chargement théorique $t_c^{th} = 2$ prouvé dans l’Eq. (2.7).

Par ailleurs, le minimum trouvé, en utilisant l’algorithme de la minimisation alternée avec les conditions aux limites du type Dirichlet, est un minimum local qui ne peut pas converger vers le minimum global de la formulation (2.8). D’autre part, nous pouvons remarquer, que le chargement critique t_c dans les deux modèles de la fonction de la dissipation locale est supérieur au chargement critique théorique.

2.2.2 Recherche du minimum global

2.2.2.1 Présentation de la méthode

Dans cette section, nous présentons la définition du minimum global, ensuite nous présentons l’algorithme de Backtracking que nous adoptons pour déterminer le minimum global de la formulation (2.8). Cependant, un déplacement \mathbf{u} qui vérifie les conditions aux limites cinématiquement admissibles d’un corps Ω soumis à un chargement t , est en état d’équilibre globalement stable si l’énergie totale de la structure $\mathcal{W}(\mathbf{u}, \alpha)$ dans cet état soit inférieur à l’énergie totale de

la structure dans tout état admissible.

Prenons une sollicitation monotone croissante dans le temps. Si un couple (\mathbf{u}^i, α^i) est admissible à chaque instant de temps t_i , alors $(\frac{t_j}{t_i}\mathbf{u}^i, \alpha^i)$ est admissible pour chaque instant de temps t_j avec $0 \leq j \leq i$. En effet, nous avons cette égalité :

$$\mathcal{W}(\frac{t_j}{t_i}\mathbf{u}^i, \alpha^i) = \frac{t_j^2}{t_i^2}\mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \alpha^i) + \mathcal{D}(\alpha^i) \quad (2.17)$$

En outre, si le couple (\mathbf{u}^i, α^i) est une solution du problème, donc le couple (\mathbf{u}^i, α^i) doit minimiser l'énergie totale $\mathcal{W}(\mathbf{u}, \alpha)$ pour tout couple admissible (\mathbf{u}, α) et en particulier $0 \leq j \leq i \leq n$, nous obtenant ainsi la condition :

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}^j, \alpha^j) + \mathcal{D}(\alpha^j) \leq \frac{t_j^2}{t_i^2}\mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \alpha^i) + \mathcal{D}(\alpha^i) \quad (2.18)$$

La condition (2.18) est la condition nécessaire pour le problème de la minimisation globale. L'algorithme de Backtracking consiste à vérifier la condition (2.18) par rapport à tous les temps précédents étapes t_j , tels que j varie de 0 à i . Autrement, le Backtracking consiste à comparer l'énergie totale de l'état actuel avec l'énergie totale des états précédents.

En effet, cet algorithme est basé sur le fait que l'énergie total ne peut qu'augmenter. Ainsi, nous effectuons la comparaison entre l'état actuel et les états passés. Si à une itération t_j la condition (2.18) n'est pas atteinte, c'est-à-dire l'énergie totale actuelle est inférieure à celle qui la précédente alors le couple (\mathbf{u}^j, α^j) ne peut pas être le minimum global pour le pas de temps t_j et $(\frac{t_j}{t_i}\mathbf{u}^i, \alpha^i)$ fournit un champ admissible avec une énergie strictement plus faible au temps t_j . Dans cette situation, nous effectuons un « retour en arrière ». En effet, nous revenons à l'étape de temps t_j , et nous relançons le processus de minimisation alternée, en injectant à l'état passé l'endommagement actuel c'est-à-dire en initialisant le champ d'endommagement α avec la valeur de α^i puis on réitère.

Cependant, l'algorithme de minimisation alternée permet de créer des successions avec une énergie monotone décroissante (est inadaptée pour le problème discrétisé en «temps»). Ce problème d'inadaptation est résolu en incluant la minimisation alternée au sein de l'algorithme de «Backtracking». Le retour en arrière répété convergera vers une solution telle que l'Eq. (2.18) soit satisfaite pour ce choix particulier de i et j .

L'algorithme de Backtracking peut être décrit de la manière suivante :

Algorithm 1 Algorithme de Backtracking .

- 1: Donner les conditions initiales \mathbf{u}^0 et α^0
 - 2: Calculer (\mathbf{u}^i, α^i) en utilisant l'algorithme de minimisation alternée
 - 3: Calculer l'énergie élastique ainsi que l'énergie dissipée $\mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \alpha^i)$, $\mathcal{D}(\alpha^i)$
 - 4: *itération*
 - 5: **Pour** $j = 1$ jusqu'au $i - 1$ **Faire**
 - Si** $\mathcal{W}(\mathbf{u}^j, \alpha^j) \leq (t_j^2/t_i^2)\mathcal{E}(\mathbf{u}^i, \alpha^i) + \mathcal{D}(\alpha^i)$
Donc $\alpha^i \rightarrow \alpha^0$ et $j \rightarrow i$
retour à l'étape 2
 - Fin Si**
 - 6: **Fin Pour**
 - 7: $\alpha^i \rightarrow \alpha^0$ et $i + 1 \rightarrow i$
 - 8: jusqu'à $i = n$
-

2.2.3 Recherche du minimum global - Simulations numériques

Dans la section précédente, nous avons prouvé que l'algorithme de la minimisation alternée ne peut pas converger vers le minimum global de la fonctionnelle $\mathcal{W}_l(\mathbf{u}_l, \alpha_l)$. Par ailleurs, le chargement causant la rupture de la structure est supérieur au chargement critique théorique. Afin de trouver le minimum global, un algorithme de Backtracking est ajouté à l'algorithme de la minimisation alternée pour simuler la propagation de la fissure dans la structure rectangulaire illustré sur la Fig. (2.1).

Pour la simulation numérique, et en utilisant les deux modèles de la fonction de la dissipation $w(\alpha)$, le domaine est discrétisé avec 1743 éléments triangulaires d'une taille de maillage $h = 0.04$ mm et avec un pas de chargement $\Delta t = 0.05$ mm. Les propriétés du matériau sont les suivants : la ténacité $G_c = 1$, le module d'Young $E_0 = 1$ et le coefficient de poisson du matériau $\nu = 0$. Et d'après le calcul théorique en considérant ce choix de paramètres du matériau, nous avons trouvé un chargement critique théorique (Eq. (2.7)) $t_c^{th} = 2$.

2.2.3.1 Le minimum global avec la fonction : $w(\alpha) = \alpha^2$

Afin de prouver la convergence du chargement critique vers la valeur théorique $t_c^{th} = 2$. Des simulations numériques ont été réalisés, en utilisant l'algorithme de Backtracking avec les conditions aux limites du type Dirichlet. La Fig. (2.8) (a) représente l'évolution des énergies en fonction du chargement. En effet, l'énergie élastique augmente pour atteindre une valeur maximale au chargement critique $t_c = 2.12$ puis elle diminue et devient nulle au moment de la rupture de la structure.

Nous pouvons constater que ce minimum global est trouvé pour un chargement $t_c \simeq t_c^{th} = 2$. La valeur numérique de l'énergie dissipée est égale à $\mathcal{D} = 0.94$ N/mm et sa valeur théorique qui est donnée par l'Eq. (2.6) est égal à $\mathcal{D}^{th} = 1$ N/mm. Par la suite, les deux valeurs sont proportionnellement égaux. Cependant, l'exigence de l'algorithme de Backtracking dans l'algorithme de la minimisation alternée est nécessaire pour la convergence vers le minimum global de la fonctionnelle $\mathcal{W}(\mathbf{u}, \alpha)$.

2.2.3.2 Le minimum global avec la fonction $w(\alpha) = \alpha$

En prenant les mêmes paramètres géométriques, numériques et mécaniques présentés dans la section précédente. Et en utilisant la fonction de la dissipation $w(\alpha) = \alpha$. Les résultats de la simulation numérique nous a permis de donner un chargement critique théorique $t_c^{th} = 2$. La courbe présentée sur la Fig. (2.8) (b) montre l'évolution des énergies en fonction du chargement. Nous considérons que, l'énergie totale croît pour atteindre une valeur constante au chargement critique. Nous constatons que, le minimum global trouvé en utilisant l'algorithme de Backtracking pour un chargement $t_c \simeq t_c^{th} = 2.22$. Nous remarquons aussi que l'énergie dissipée calculée numériquement vaut $\mathcal{D} = 1,13$ N/mm et sa valeur théorique est $\mathcal{D}^{th} = 1$ N/mm. Par la suite, les deux valeurs sont équivalentes quantitativement.

	$w(\alpha) = \alpha^2$	$w(\alpha) = \alpha$
Chargement critique t_c	2.12	2.22
Énergie dissipée \mathcal{D} (N/mm)	0.944	1.13
Énergie élastique \mathcal{E} (N/mm)	1.8910^{-2}	1.54510^{-2}

TABLE 2.2: Calcul numérique en utilisant l'algorithme de Backtracking du chargement critique t_c , l'énergie dissipée \mathcal{D} et élastique \mathcal{E} pour différentes fonction de $w(\alpha)$

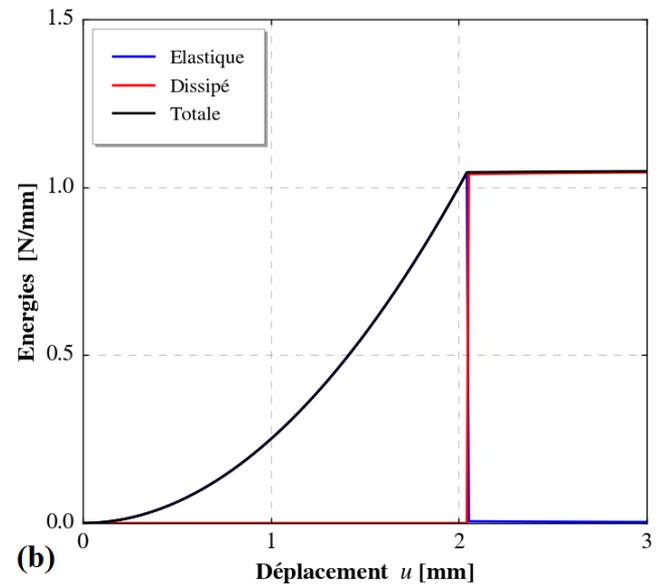
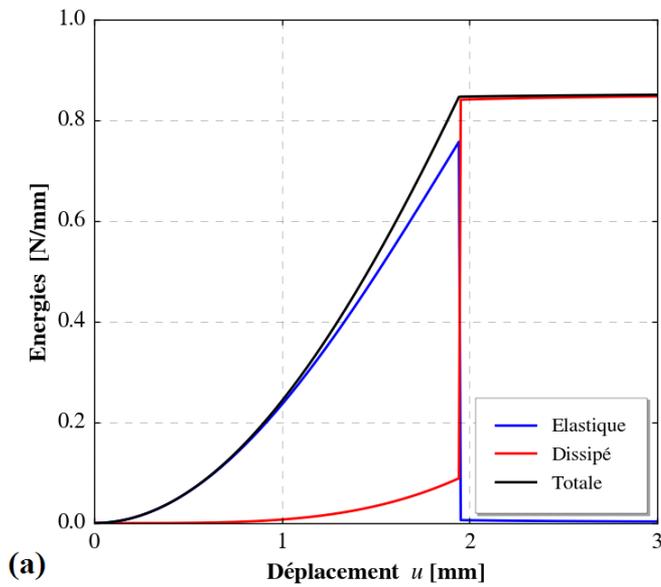


FIGURE 2.8: Plaque rectangulaire : Evolution des énergies en fonction du chargement en utilisant l'algorithme de Backtracking (a) : 1^{er} cas $w(\alpha) = \alpha^2$, (b) : 2^e cas $w(\alpha) = \alpha$

2.2.4 Interprétation

Nous pouvons remarquer d'après les résultats de la Fig. (2.8), obtenus en utilisant l'algorithme Backtracking, qu'il y a conservation de l'énergie dans le deuxième cas mais pas dans le premier. Comme on peut le constater sur ces figures, l'énergie élastique cédée par la structure est transformée intégralement en énergie dissipée Fig. (2.8)-b alors que dans le premier cas Fig. (2.8)-a il y a une légère différence entre les deux énergies. L'algorithme de Backtracking permet de sélectionner le minimum global à partir de l'inégalité (2.18). Pour ce minimum, il y a donc conservation de l'énergie dans le deuxième cas, mais pas dans le premier.

Dans le but de comparer le modèle de champ de phase avec le critère de *FM-law*, un autre exemple d'une structure soumise à une traction est analysée. Dans ce cadre, le logiciel COMSOL Multi-Physiques est utilisé, pour l'étude de la propagation de la fissure instable tout en exploitant la théorie de Griffith. En vue de vérifier numériquement les modèles de champ de phase incluent aussi le critère de contrainte, l'étude de l'amorçage de la fissure au bord du trou est élaborée.

2.2.5 Cas d'une plaque entaillée contenant un trou

2.2.5.1 Le contexte du problème : le corps et le chargement

Nous considérons une plaque rectangulaire entaillée avec un trou. Le centre du trou est maintenu décalé par rapport à l'axe médian de la plaque. La géométrie et les conditions aux limites appliquées sont illustrées sur la Fig. (2.9) (a). En effet, la plaque est soumise à un chargement d'un déplacement imposé situé sur le trou supérieur et elle est fixée sur le trou inférieur. Ce problème a été étudié expérimentalement et numériquement par Ambati et al. [2]. Afin de pouvoir comparer nos résultats avec les résultats expérimentaux, nous avons utilisé un matériau qui se comporte de manière linéaire élastique avec une rupture fragile. Les mêmes paramètres mécaniques du matériau choisis par Ambati et al. [2] sont utilisés : un module d'Young $E_0 = 5.98$ GPa, un coefficient de Poisson $\nu = 0.22$, et une ténacité de matériau $G_c = 2.2810^{-3}$ kN/mm.

Les résultats expérimentaux illustrés sur la Fig. (2.9) (b) montrent qu'une fissure droite est initiée à partir de l'entaille, puis elle suit une ligne curviligne avant de joindre le trou. Plus tard, une autre fissure se propage à partir du trou jusqu'au bord de la plaque.

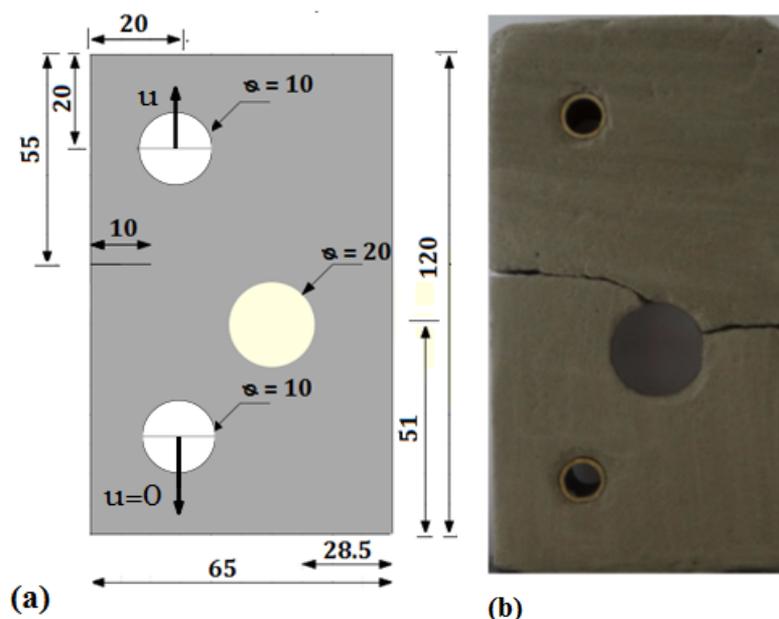


FIGURE 2.9: Cas d'une plaque rectangulaire entaillée avec un trou : (a) géométrie et conditions aux limites (b) mode de fissuration observé expérimentalement

2.2.5.2 Modèle à gradient d'endommagement

Nous considérons une plaque homogène non endommagée (2-D) constituée d'un matériau isotrope dont la configuration de référence naturelle est $\Omega = \Omega^0 / (\mathcal{H}^1 \cup \mathcal{H}^2 \cup \mathcal{H}^3 \cup \mathcal{N})$, où Ω^0 est un rectangle entaillé de longueur 120 mm et de largeur 65 mm :

$$\Omega^0 = \{(x_1, x_2), 0 < x_1 < 65, \quad 0 < x_2 < 120\}$$

où \mathcal{H}^1 , \mathcal{H}^2 , et \mathcal{H}^3 représentent des cercles de diamètres respectifs 10, 10, et 20 mm, et de centre de coordonnées respectifs (20, 20), (20, 100), et (36.5, 51). \mathcal{N} est une entaille de 10 mm localisée au bord gauche de la plaque.

L'évolution de l'endommagement de la structure est caractérisée par l'état d'équilibre (\mathbf{u}_t, α_t) à l'instant t . Le corps est soumis à un déplacement imposé $\mathbf{u}_t = t$ sur le trou supérieur tandis que le trou inférieur est encastré et les autres parties de la structure sont laissées libres. Par la suite nous définissons l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles par :

$$\begin{aligned} C_t &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) | v_{e_1} = v_{e_2} = 0 \quad \subset \quad \mathcal{H}^1, \quad v_{e_1} = 0, v_{e_2} = t \quad \subset \quad \mathcal{H}^2\} \\ C_0 &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) | v_{e_1} = v_{e_2} = 0 \quad \subset \quad \mathcal{H}^1 \cup \mathcal{H}^2\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

À un état d'endommagement α_t , l'ensemble des champs d'endommagement accessible qui vérifie la condition d'irréversibilité est défini par :

$$\mathcal{D}_{\alpha_t} = \{\beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) | \beta(x) \geq \alpha_t\} \quad (2.20)$$

Les espaces auxquels appartient une telle fonction sont appelés $H^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ ce qui représente l'espace de Sobolev d'ordre 1 défini sur (Ω, \mathbb{R}^2) . On définit \mathcal{F} la force globale appliquée sur le trou supérieur \mathcal{H}^1 exercée par la machine de traction.

$$\mathcal{F} = \left(\int_{\mathcal{H}_1} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n} ds \right) \cdot \mathbf{e}_2 \quad (2.21)$$

La construction du modèle d'endommagement présentée dans la section (1.8) a montré que la condition de la stabilité (1.52) n'est satisfaite que si à chaque fois la structure est à l'équilibre et que le critère d'endommagement est satisfait. Plus concrètement, ils se présentent respectivement sous la forme variationnelle suivante (Eq. (1.57), Eq. (1.58)) :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) d\mathbf{x} = 0 \quad \boldsymbol{\sigma}_t = a(\alpha_t) E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \quad \forall (\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \in C_0 \quad (2.22)$$

$$\int_{\Omega} \left(-(\beta - \alpha_t) ((1 - \alpha_t) E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - w_1) + w_1 \ell^2 \nabla \alpha \nabla (\beta - \alpha_t) \right) d\Omega \geq 0 \quad \forall \beta \in \mathcal{D}_{\alpha_t} \quad (2.23)$$

En effet, comme déjà indiqué dans la section (1.8), ces deux conditions peuvent être considérées comme des conditions de stabilité de premier ordre. Et d'après la loi d'évolution d'endommagement ces deux conditions de stabilité de premier ordre sont satisfaites si et seulement si :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t = 0 & \text{dans } \Omega; \\ (1 - \alpha_t) E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - w_1 + w_1 \ell^2 \Delta \alpha_t \leq 0 & \text{dans } \Omega, \quad \frac{\partial \alpha_t}{\partial \mathbf{n}} \geq 0 & \text{dans } \partial \Omega \end{cases} \quad (2.24)$$

2.3 Implémentation numérique

Dans cette partie du chapitre, une description de l'implémentation numérique du problème d'évolution quasi-statique d'endommagement est réalisé. Ce problème consiste à chercher à chaque instant t le couple (\mathbf{u}_t, α_t) en utilisant un algorithme de minimisation alterné. Cet algorithme est une approche de résolution de deux problèmes variationnels. Chaque itération de ce dernier, consiste à minimiser de l'énergie totale en gardant une de deux variables de couple (\mathbf{u}_t, α_t) fixe et en appliquant la condition d'irréversibilité jusqu'à la convergence. Pour l'implémentation numérique nous exploitons la méthode des éléments finis isoparamétriques linéaires (P1 de Lagrange). Dans ce cadre, une discrétisation spatiale des espaces de fonctionnelles de déplacement et d'endommagement est réalisée à partir d'un maillage triangulaire de longueur h du domaine Ω . La taille du maillage doit être uniforme et non structurée pour ne pas privilégier un chemin de fissuration et favorise une excellente modélisation de la rupture par une approche du champ de phase.

En effet, l'évolution quasi-statique du problème d'endommagement consiste à chercher à l'instant t_j , qui est un produit d'un pas de temps supposé constant Δt et un incrément $j : t_j = j\Delta t, \forall j \in \mathbb{N}$, le déplacement \mathbf{u}_{t_j} et le champ d'endommagement α_{t_j} qui vérifient l'équation d'équilibre, les conditions aux limites, les conditions initiales, et la loi d'évolution de l'endommagement.

2.3.1 Algorithme de minimisation alternée

Pour résoudre le problème, nous avons adopté un algorithme de minimisation alternée. La communauté de la mécanique appliquée, a prouvé qu'il est robuste et flexible, avec toutefois un taux de convergence plus lent. L'algorithme de la minimisation alternée pour le modèle de la rupture du champ de phase quasi-statique est présenté dans l'algorithme (2).

Algorithm 2 Algorithme de la minimisation alternée

1: *Initialisation* : $\mathbf{u}_{t_{j-1}}, \alpha_{t_{j-1}}$

2: **Pour** chaque instant t_j

Tant que le convergence n'est pas réalisé **Faire**

 Conditions aux limites du type Dirichlet appliquées pour le déplacement.

 Pour un champ d'endommagement fixé $\alpha_{t_{j-1}}$, calculer le déplacement \mathbf{u}_{t_j} en utilisant l'Eq. (2.22)

 Conditions aux limites de type Dirichlet appliquées pour l'endommagement.

 Pour un champ de déplacement fixé \mathbf{u}_{t_j} , calculer l'endommagement α_{t_j} , en utilisant l'Eq. (2.23)

 Sous réserve de la contrainte d'irréversibilité : $0 \leq \alpha_{t_{j-1}} \leq \alpha_{t_j} \leq 1$

Fin tant que

 Fixer $t_j = t_{j+1}$

3: **Fin Pour**

2.4 Résultats numériques

Afin de réaliser des simulations numériques, nous avons discrétisé le domaine de la plaque avec 947793 éléments triangulaires. Une longueur caractéristique $\ell = 0.1$ mm et un pas de maillage $h = 0.018$ mm sont utilisés. Le maillage est raffiné là où la fissure est censée à se propager, c'est-à-dire dans la région où la fissure devrait être générée près du trou et de l'entaille. L'état du maillage que nous avons adopté est illustrée sur la Fig. (2.10).

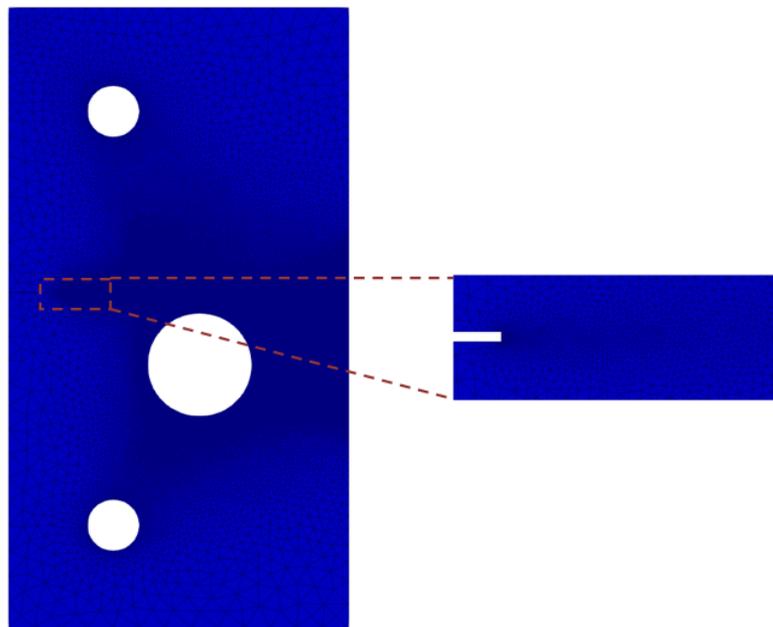


FIGURE 2.10: Maillage de la plaque entaillée contenant un trou

Le déplacement est appliqué avec un incrément du chargement $\Delta t = 10^{-3}$ mm jusqu'à rupture complète de la structure. Le chemin de la fissuration pour différentes valeurs du déplacement est décrit sur la Fig. (2.11). Nous pouvons constater

que la fissure prend une ligne droite à partir de l'entaille. Elle continue ensuite en suivant un chemin courbe avant de rejoindre le trou. Au déplacement imposé ($t = 2.49$ mm), une fissure secondaire est initiée à partir du trou et se propage en ligne droite jusqu'au bord droit situé à gauche de la structure. Nous pouvons constater que les résultats des simulations numériques sont conformes aux résultats observés expérimentalement dans les travaux d'Ambati et al. [2].

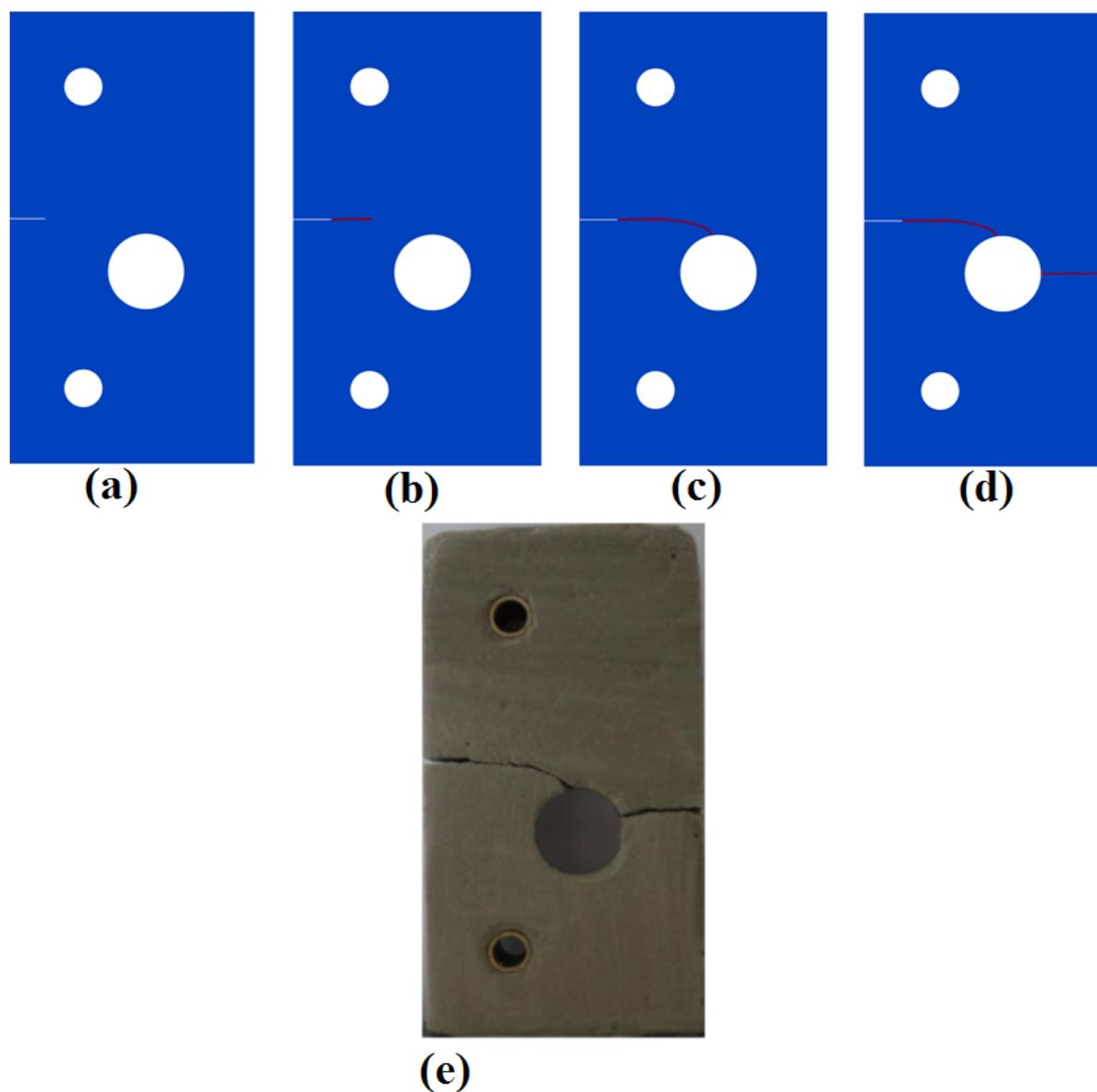


FIGURE 2.11: Chemin de fissuration de la plaque entaillée trouée pour les valeurs du déplacement imposé (a) $t = 0,15$ mm, (b) $t = 0,309$ mm, (c) $t = 0,369$ mm, (d) $t = 2,49$ mm. (e) Résultat expérimental [2]

Les évolutions des énergies en fonction du déplacement imposé, noté t , sont présentés sur la Fig. (2.12) (a). La figure montre que l'énergie élastique diminue, lorsque la première fissure apparaît de l'entaille, ensuite elle augmente à nouveau jusqu'à ce que la deuxième fissure apparaisse du trou vers le bord droit situé à gauche de la structure. Nous avons constaté qu'il y a absence de la conservation d'énergie totale ce qui veut dire que le minimum "capté" par l'algorithme est minimum local.

La Fig. (2.12) (b), montre l'évolution de la force (résultante) en fonction du déplacement imposé, dans laquelle la présence des fluctuations dans la courbe indiquent la présence d'un adoucissement dû à l'évolution quasi-statique de l'endommagement pendant le trajet courbe de la fissure

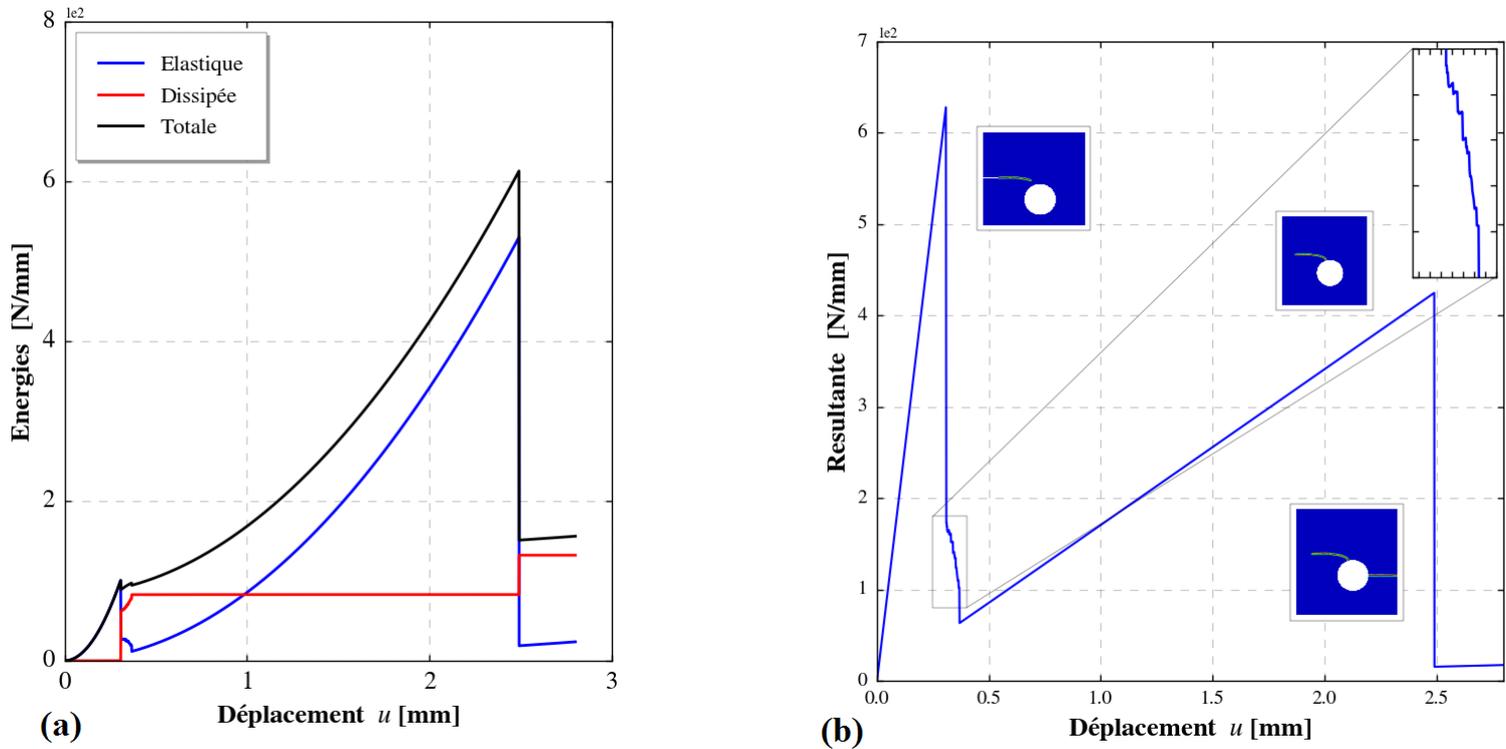


FIGURE 2.12: Plaque entaillée avec un trou :(a) Évolution des énergies. (b) Allure de la résultante.

2.4.0.1 Étude de la propagation instable de la fissure

Nous pouvons observer à partir de la Fig. (2.11) que la propagation de la fissure dans la plaque passe par quatre phases. La première phase (2.11)(a) est une phase élastique. Au déplacement $t = 0,30911$ mm, **une deuxième phase apparaît et est caractérisée par une propagation brutale d'une fissure droite (2.11) (b)**. Dans la troisième phase (2.11) (c), la fissure continue de se propager progressivement en suivant une trajectoire curviligne jusqu'au sommet du trou. La dernière étape commence quand la valeur du déplacement est : $t = 2,49189$ mm est illustrée sur la Fig. (2.11)(d) est décrite par une propagation brutale d'une deuxième fissure, amorcée à partir du trou qui continue à se propager vers le bord droit de la structure.

En considérant la deuxième phase de la propagation de la fissure, nous allons calculer le saut de la fissure $\Delta \ell$ en utilisant trois approches. Nous établirons un lien entre *FM-law* et le champ de phase pour prouver le lien entre ce critère de propagation de la fissure.

1. **Directement à partir de Paraview** : Afin de calculer la longueur de la première fissure initiée à partir de l'entaille, nous avons utilisé le logiciel Paraview (Fig. (2.13)). La longueur de la fissure est illustrée sur la Fig. (2.13). Elle est égale à

$$\Delta \ell = 10,2 \text{ mm}.$$

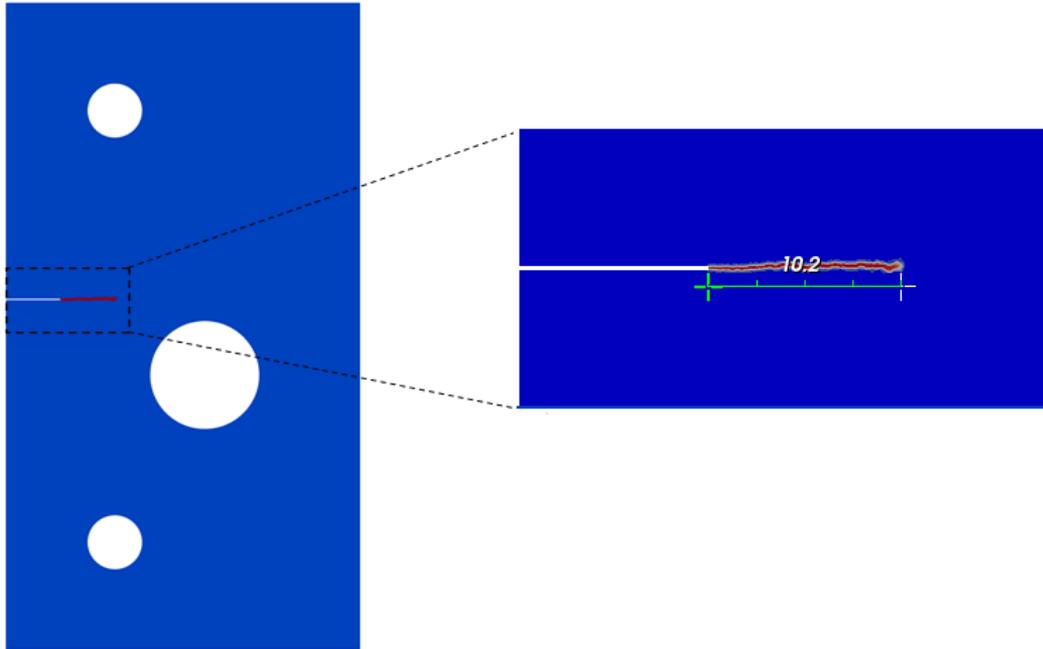


FIGURE 2.13: Calcul de la longueur de la fissure $\Delta\ell$

2. **Champ de phase** Afin de pouvoir calculer la longueur de saut de la fissure en utilisant le modèle de gradient d'endommagement, des simulations numériques sont déterminées, en utilisant ces paramètres : un pas de maillage $h = 0.0186$ mm, une longueur interne (noté η dans cette section) $\eta = 0.1$ mm et une ténacité de matériau $G_c = 2.28$ N/mm. Remarquons tout d'abord que l'énergie régularisée (1.46), considérée comme un modèle d'endommagement et qu'il a été démontré que lorsque le paramètre de la longueur interne $\ell \rightarrow 0$, ce modèle s'approche de la rupture fragile de Griffith. Cela conduit à une surestimation de la ténacité du matériau. Par conséquent, pour calculer la ténacité du matériau estimée nous utilisons l'équation suivante :

$$G_{c_{eff}} = G_c \left(1 + \frac{3h}{8\ell}\right). \quad (2.25)$$

Nous obtenons ainsi, une ténacité du matériau estimée $G_{c_{eff}} = 2.44$ N/mm. Le résultat de la simulation numérique à partir du modèle d'endommagement à gradient montre que l'énergie dissipée \mathcal{D} à l'amorçage de la fissure à partir de l'entaille correspondant au déplacement imposé $t_c = 0,309$ mm est égale à $\mathcal{D} = 33.692$ (N/mm). Par conséquent, nous pouvons déterminer la longueur de la fissure initiée en utilisant l'équation suivante :

$$\mathcal{D} = G_{c_{eff}} \Delta\ell. \quad (2.26)$$

Nous obtenons ainsi, un saut de longueur égale à

$$\Delta\ell = 13.8 \text{ mm}$$

3. **FM-law** Afin d'étudier la propagation de la fissure initiale, nous avons effectué un calcul par éléments finis avec le logiciel COMSOL-Multi-physiques. Le maillage est raffiné près de l'extrémité de l'entaille Fig. (2.14). Le domaine est discrétisé en utilisant des éléments triangulaires à 3 nœuds contenant 340000 degrés de liberté. Nous calculons la solution discrétisée en résolvant un système linéaire.

Ainsi, l'énergie potentielle de la plaque $\mathcal{P}(\ell)$ (ℓ représente la longueur de la fissure) et le taux de restitution d'énergie $G(\ell) = -\mathcal{P}'(\ell)$ sont obtenus. L'énergie est simplement obtenue par une intégration directe de la densité énergétique élastique du corps. La dérivée de l'énergie est déterminée à l'aide de l'intégrale de Rice J :

$$J_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (Wn_1 - \mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}_1) dS, \quad (2.27)$$

où W est la densité d'énergie de déformation, et Γ est une courbe proche de l'extrémité de la fissure.

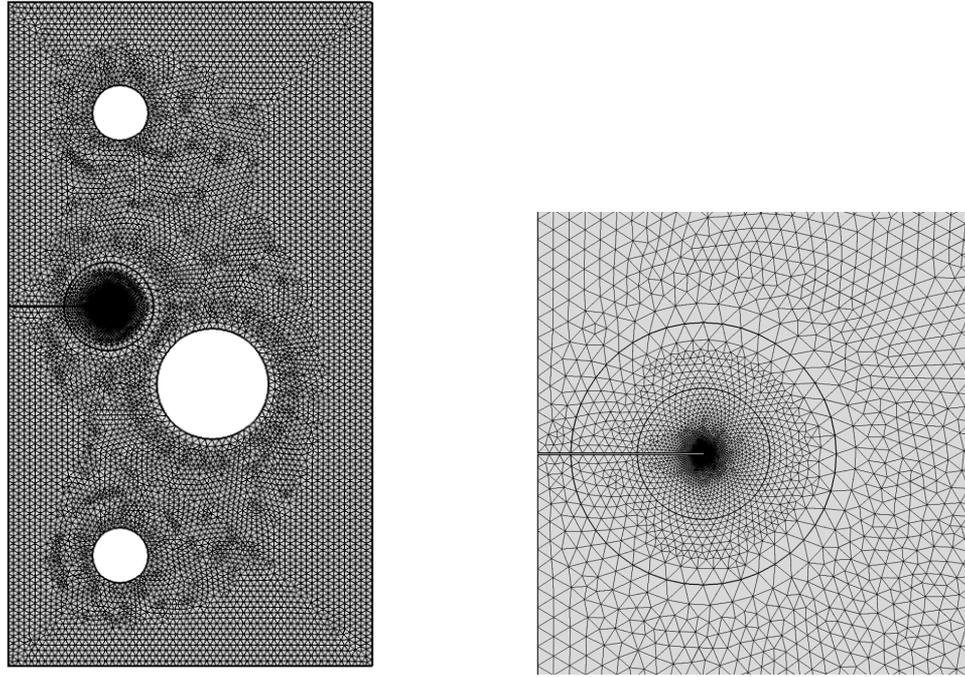


FIGURE 2.14: Plaque entaillée avec un trou : un zoom au voisinage de fissure

Du fait que le comportement est linéaire élastique, l'énergie potentielle du corps à l'équilibre sous le chargement t avec une fissure de longueur ℓ peut s'écrire :

$$\mathcal{P}(t, \ell) = t^2 P(\ell), \quad G(t, \ell) = t^2 \mathcal{G}(\ell), \quad (2.28)$$

$P(\ell)$ et $\mathcal{G}(\ell)$ représentent l'énergie potentielle et le taux de restitution d'énergie pour le déplacement imposé t avec une longueur de fissure ℓ pour un déplacement unitaire $t = 1$. Compte tenu du caractère instable de la propagation de la fissure, la théorie de Griffith ne peut pas être utilisée. Nous utilisons donc la théorie de *FM-law* (1.4.0.4), tels que sa loi d'évolution, se résume en ces trois items suivants :

Une fonction $t \mapsto \ell(t)$ (définie pour $t \geq 0$ à valeurs dans $[0, L]$) est dite solution de *FM-law* si elle vérifie les trois items :

- (a) **Irréversibilité** : $t \mapsto \ell(t)$ est croissante ;
- (b) **Stabilité globale** : $\mathcal{E}(t, \ell(t)) \leq \mathcal{E}(t, \ell)$, $\forall t \geq 0$ et $\forall \ell \in [\ell(t), L]$;
- (c) **Conservation de l'énergie** : $\mathcal{E}(t, \ell(t)) = \mathcal{E}(0, \ell_0) + \int_0^t \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial r}(t', \ell(t')) dt'$, $\forall t \geq 0$.

La fonction *FM-law* consiste à déterminer la fonction $t \rightarrow \ell(t)$. D'après la proposition (2) : la propagation de la fissure préexistante (si $\ell_0 \neq 0$) commence au temps $t_i > 0$ et à ce moment la longueur de fissure **saute** instantanément de ℓ_0 à ℓ_i . La longueur ℓ_i est donnée en résolvant le problème suivant :

Trouver $t \rightarrow \ell(t)$ tel que :

$$\ell(0) = \ell_0, \quad (2.29a)$$

$$\frac{d\ell}{dt}(t) \geq 0 \quad (2.29b)$$

$$\mathcal{P}(\ell_0) - \mathcal{P}(\ell_i) = (\ell_i - \ell_0) \mathcal{G}(\ell_i) \quad (2.29c)$$

$$t_i^2 \mathcal{G}(\ell_i) = G_c. \quad (2.29d)$$

où l'Eq. (2.29-a) est la condition initiale, Eq. (2.29-b) est la condition d'irréversibilité, Eq. (2.29-c) est le critère de *FM-law* et Eq. (2.29-d) est la loi d'évolution de *FM-law*. En effet, posant $\Delta\ell = \ell_i - \ell_0$, Eq. (2.29-c) est devient :

$$\mathcal{P}(\ell_0) - \mathcal{P}(\ell_i) = \Delta\ell \mathcal{G}(\ell_i) \quad (2.30)$$

En utilisant l' équation ci-dessus avec les donnés suivants : $\mathcal{P}(\ell_0) = 1.064\text{N/m}$, $\mathcal{P}(\ell_i) = 0.544\text{ N/m}$, $\mathcal{G}(\ell_i) = 42.69\text{J/m}$ On obtient :

$$\Delta\ell = 12.18\text{mm}$$

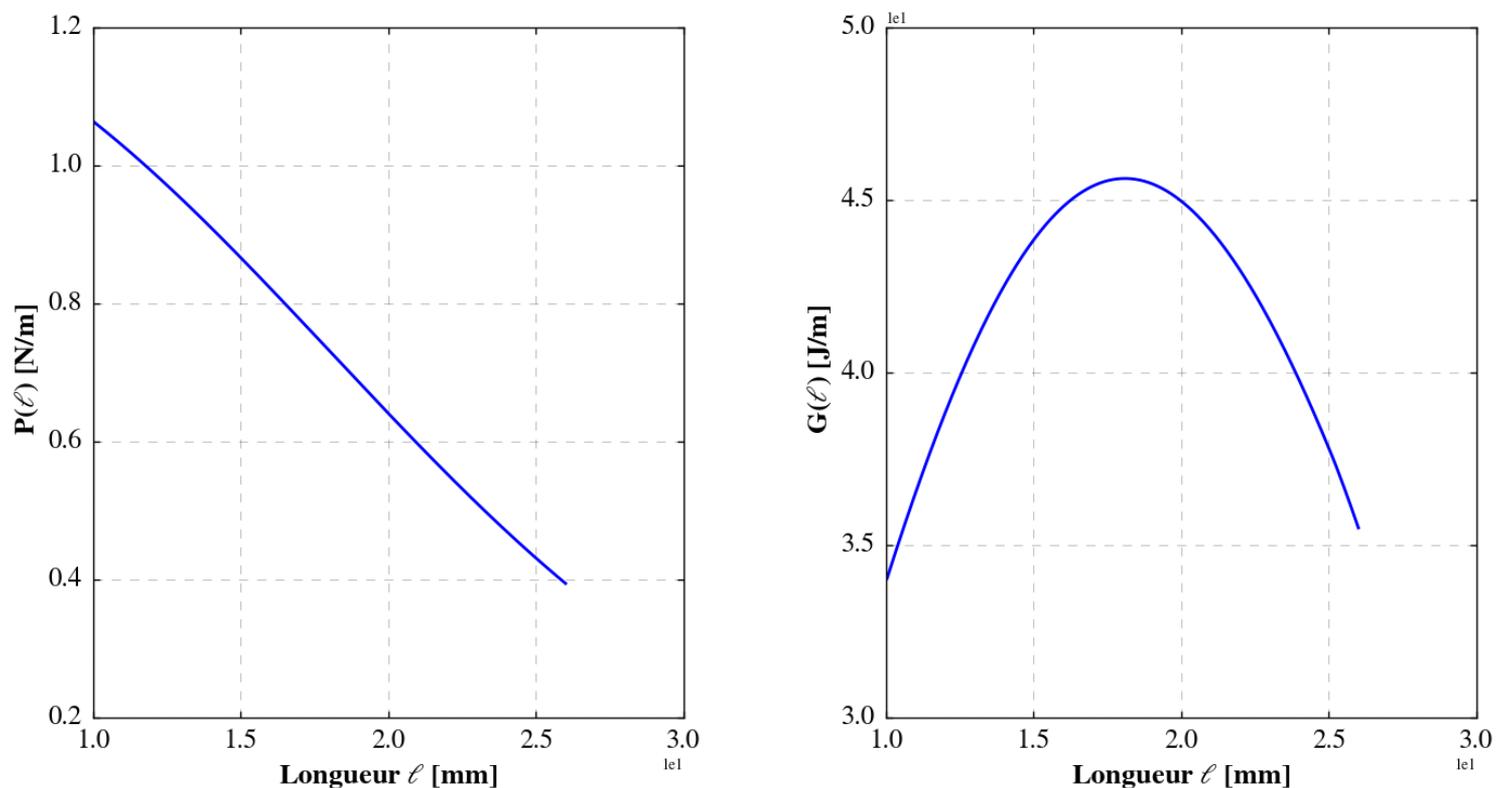


FIGURE 2.15: Courbes d'évolution de l'énergie potentielle $\mathcal{P}(\ell)$ et du taux de restitution d'énergie $\mathcal{G}(\ell)$ pour un déplacement imposé unitaire, et pour différentes longueurs de la fissure ℓ : $\ell_0 = 10\text{mm} \leq \ell \leq \ell_f = 26\text{mm}$

L'évolution du taux de restitution d'énergie $G(\ell)$ et de l'énergie élastique $\mathcal{P}(\ell)$ en fonction du déplacement imposé $\delta(t) = t$ sont illustrées sur la Fig. (2.15). On constate que l'énergie élastique $\mathcal{P}(\ell)$ en fonction de ℓ est une courbe décroissante alors que le taux de restitution d'énergie $\mathcal{G} = -\mathcal{P}'(\ell)$ est une fonction croissante puis décroissante. Cela veut dire que l'énergie élastique (égale à l'énergie potentielle de la structure) est une fonction concave de ℓ dans l'intervalle $[\ell_0, \ell_{max}[$ puis convexe dans l'intervalle $]\ell_{max}, \ell_f]$. Comme nous l'avons expliqué dans la section (1.5), la propagation de la fissure est d'abord instable dans $[\ell_0, \ell_{max}[$ puis devient stable dans l'intervalle $]\ell_{max}, \ell_f]$.

En imposant un déplacement $\delta(t) = t$ croissant, la propagation (instable) de la fissure va commencer pour le chargement t_c tel que $t_c^2 \mathcal{G}(\ell_0) = G_c$.

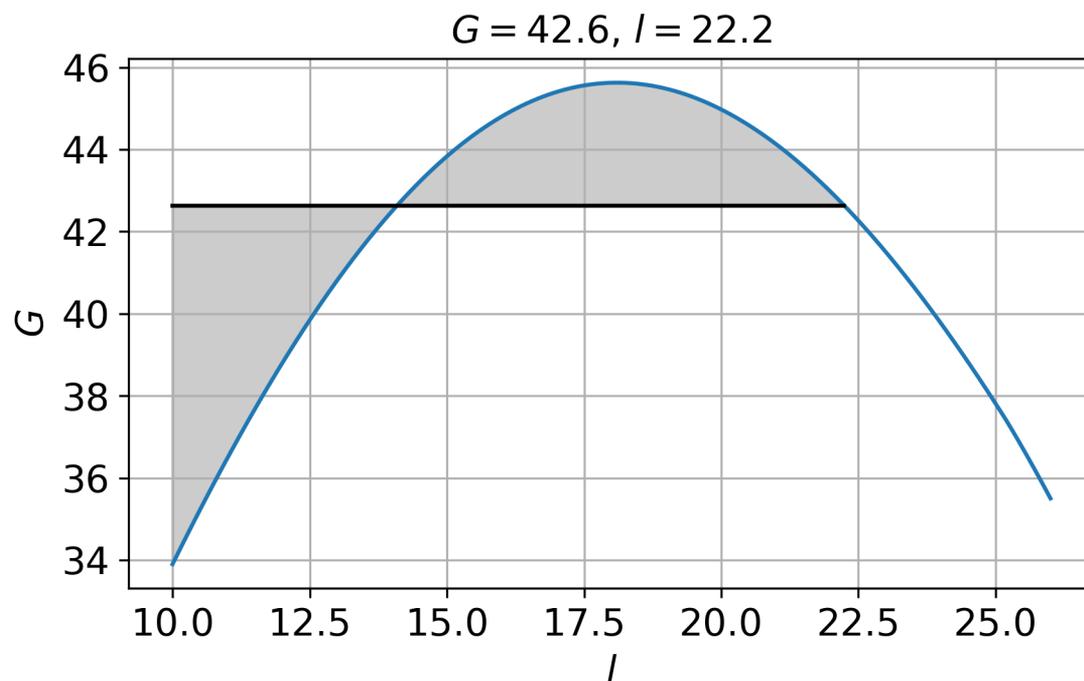


FIGURE 2.16: Interprétation graphique du critère de propagation brutale de fissure, donnée par *FM-law*, qui obéit à la règle de Maxwell donnée par les égalités des aires.

2.4.0.2 Étude de l'amorçage de la fissure au bord du trou

Des simulations numériques ont été réalisées, dans le but d'étudier l'initiation et la propagation de la fissure au bord du trou. Le domaine est discrétisé avec 947793 éléments triangulaires en utilisant un incrément de charge $\Delta t = 10^{-3}$ mm. Une longueur interne $\ell = 0.1$ mm et une taille de maillage $h = 0.018$ mm sont adoptés. La Fig. (2.18) illustre l'évolution des contraintes σ_{11} , σ_{12} le long d'une ligne \mathcal{L} verticale passant par le bord du trou (Fig. (2.17)).

$$\mathcal{L} = \{(x_1, x_2)/x_1 = 46.5; \quad 0 \leq x_2 \leq 120\},$$

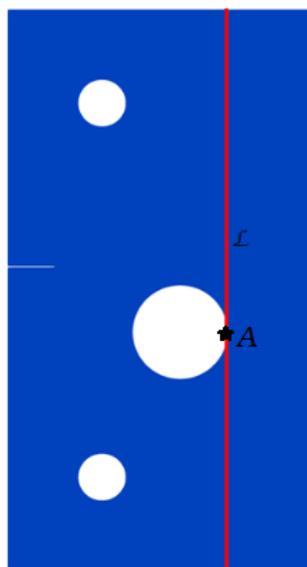


FIGURE 2.17: Définition de la ligne \mathcal{L} passant par le point A appartenant au bord du trou

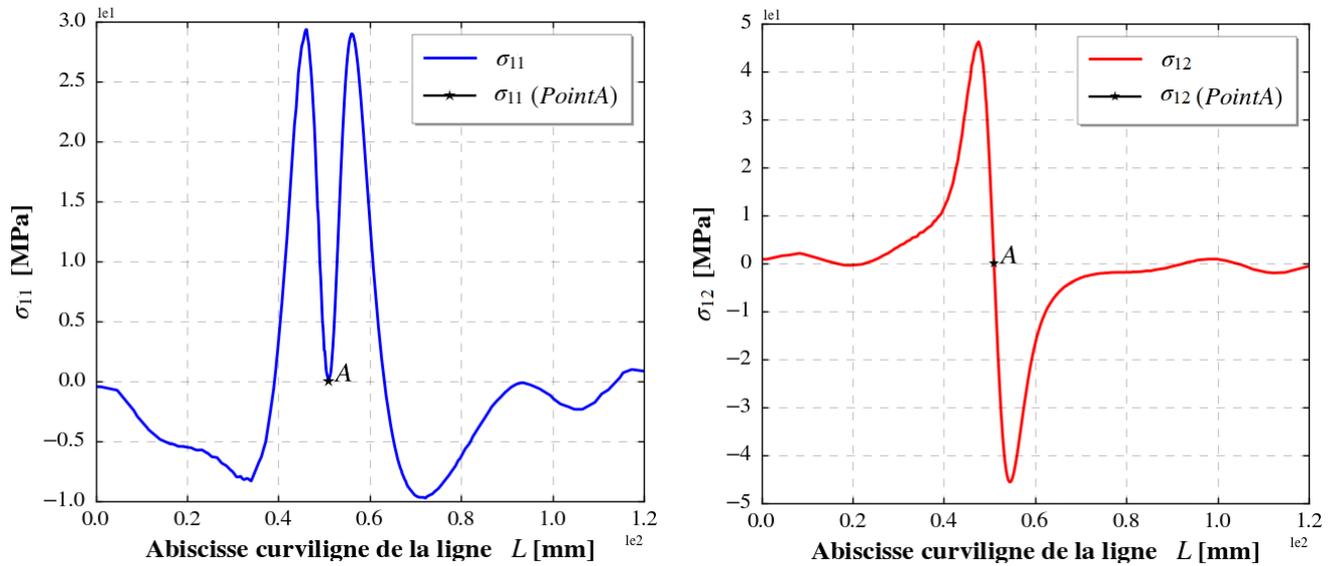


FIGURE 2.18: (a) Contrainte σ_{11} en fonction de la longueur \mathcal{L} , (b) contrainte σ_{12} en fonction de la longueur \mathcal{L}

Les courbes de la Fig.(2.18) montrent qu'au bord du trou situé sur la ligne \mathcal{L} (point A), les deux contraintes σ_{11} et σ_{12} sont nulles, puisque le bord du trou est libre ($\sigma \mathbf{n} = 0$). Les conditions aux limites sont respectées et donc l'état de contrainte au bord du trou (point A) est uni-axial. On a donc : $\sigma = \sigma_{22} \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ au voisinage de A.

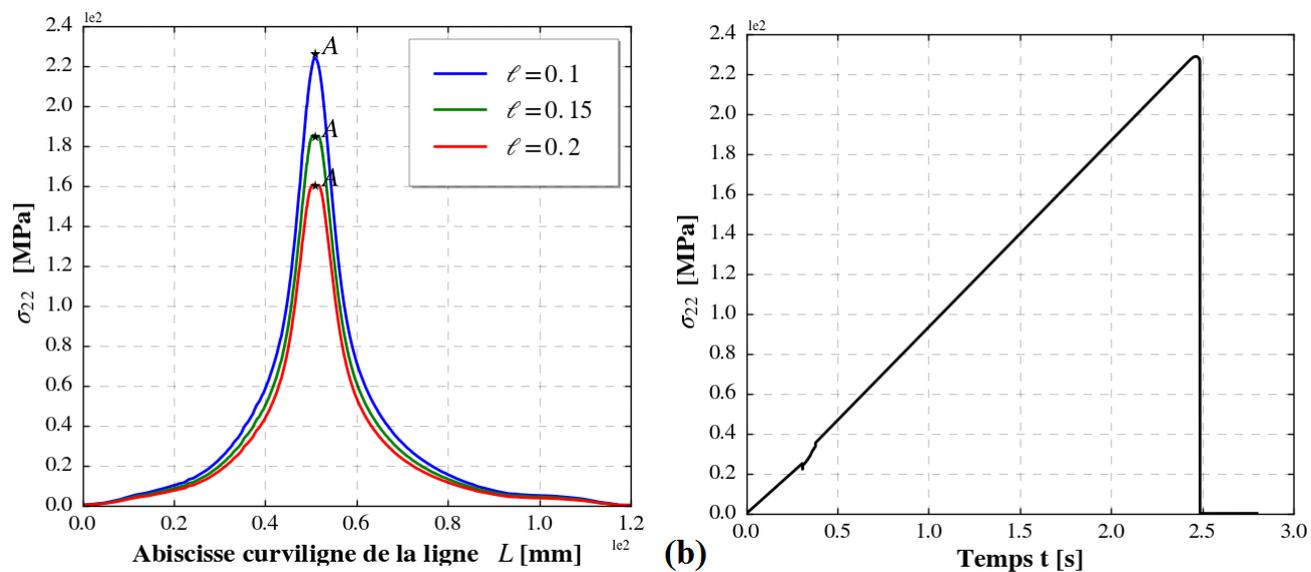


FIGURE 2.19: (a) Contrainte σ_{22} en fonction de la longueur \mathcal{L} , (b) Contrainte σ_{22} en fonction du temps t

À présent, et en considérant un problème uni-dimensionnel, l'endommagement se produit lorsque la contrainte critique du matériau est atteinte. En d'autres termes, la contrainte critique est égale à la contrainte maximale pendant le processus d'endommagement.

Afin de valider le critère en contrainte, différentes simulations numériques sont réalisées avec différentes longueurs internes $\ell = 0.1$ mm, $\ell = 0.15$ mm et $\ell = 0.2$ mm. En effet, le but de ce calcul numérique est pour déterminer la valeur de temps critique t_c et de la contrainte σ_{22} au bord du trou situé sur la ligne \mathcal{L} (point A) pour chaque longueur interne ℓ .

Rappelons l'expression de la contrainte critique σ_c pour un essai uniaxial dans le cas étudié (2.16) ;

$$\sigma_c = \sqrt{w_1 E_0} = \sqrt{\frac{3 \cdot G_c}{8 \cdot \ell} E_0} \quad (2.31)$$

un calcul analytique de la contrainte critique σ_c est effectué pour chaque valeur de longueur interne ℓ pour les comparer avec la valeur de σ_{22} au bord du trou situé sur la ligne \mathcal{L} (point A) à l'instant de la rupture.

Les résultats des calculs sont résumés dans le Tab. (2.3). La courbe de la Fig. (2.19) (a) illustre l'évolution de la contrainte σ_{22} en fonction de l'abscisse curviligne de la ligne \mathcal{L} et la Fig. (2.19) (b) présente l'évolution de la contrainte σ_{22} avec une longueur interne $\ell = 0.1$ en fonction du temps t .

	$\ell = 0.1$	$\ell = 0.15$	$\ell = 0.2$
Temps critique t_c	2.486	2.054	1.799
σ_c (MPa)	226.11	184.623	159.88
σ_{22} (MPa)	226.457	184.653	160.249
Erreur	0.15%	0.016%	0.23%

TABLE 2.3: Calcul de la contrainte σ_c et σ_{22} pour différentes valeurs de ℓ

Les résultats présentés au tableau (2.3) montrent que la contrainte σ_{22} pour différentes valeurs de la longueur interne ℓ est maximale au bord du trou situé sur la ligne \mathcal{L} (point A). La courbe présentée dans la Fig. (2.19) (b) prouve que la contrainte σ_{22} est maximale pour le temps critique t_c , ce qui cause la propagation brutale de la fissure. Nous concluons que le critère en contrainte est vérifié numériquement.

2.5 Conclusion

L'un des objectifs de ce travail de recherche était de faire une étude numérique et théorique sur deux modèles d'endommagement à gradient. On s'intéresse plus précisément aux minima locaux de leur énergie totale et de les comparer par la suite. Pour ce faire, une analyse du problème d'évolution d'un essai de traction d'une plaque rectangulaire saine a été menée. L'objectif final de cette analyse était de choisir le modèle d'endommagement qui sera adopté lors des prochains études. Nous avons obtenu en particulier les résultats suivants :

1. Le modèle d'endommagement utilisant la fonction de dissipation locale $w(\alpha) = \alpha$ admet une phase élastique au cours de l'évolution d'endommagement, par conséquent il y'a amorçage de la fissuration que lorsque la contrainte critique du matériau est atteinte. Cette caractéristique est appréciée lors de la modélisation de la rupture fragile.
2. Les résultats numériques en utilisant les deux modèles d'endommagement ont prouvé que le chargement critique à partir duquel il y a amorçage de la fissuration à une valeur supérieure à celle déterminée analytiquement. Cela montre que le minimum obtenu à partir de l'algorithme de minimisation alternée est un minimum local.

L'algorithme permettant de trouver le minimum global de la fonctionnelle régularisée est détaillée. Il est basé sur un algorithme de Backtracking. En utilisant ce dernier, la conservation de l'énergie totale à la rupture de la structure a été obtenue. Le déplacement critique numérique obtenu coïncide avec la valeur déterminée analytiquement.

Afin de pouvoir valider le modèle d'endommagement choisi, une deuxième étude d'un essai de traction sur une plaque rectangulaire entaillée contenant un trou initial a été étudiée. La comparaison des résultats numérique et théorique nous a permis de valider notre modèle. En effet, *le modèle qu'on a choisi est capable de prédire le phénomène de la fissuration brutale ainsi que le problème de l'amorçage.*

Afin de comparer le modèle de champ de phase avec le critère de Francfort- Marigo, nous avons utilisé le logiciel COMSOL Multi-Physiques pour tracer les courbes de l'énergie potentielle de la plaque et du taux de restitution de l'énergie en faisant varier la longueur de la fissure. Les résultats numériques obtenus montrent qu'à partir d'un chargement critique ($t = t_c$), le taux de restitution de l'énergie est une fonction croissante de la longueur de la fissure. En conséquence la propagation de la fissure ne peut être que brutale sur une longueur finie puis continue à avancer d'une manière progressive. Au chargement critique ($t = t_c$) l'équilibre de la structure est donc instable.

Après le saut de la fissure, et en continuant à augmenter le chargement, la fissure continue à progresser d'une manière quasistatique jusqu'à atteindre le bord haut du trou. Après cette phase, et en continuant à augmenter le chargement, on assiste à l'amorçage d'une fissure à partir du bord libre du trou.

Une étude numérique de cette phase a été donc menée. L'objectif étant de vérifier le critère d'endommagement en contrainte à partir d'un modèle d'endommagement à gradient. La flexibilité de ce modèle permet d'exprimer ce dernier en terme de contrainte au lieu en déformation via la loi de comportement du milieu endommagé. Puisque l'état de contrainte au bord du trou est uniaxial : contrainte de traction, le chargement critique t_c à partir duquel il y a amorçage de fissure, correspond à la contrainte maximale de traction σ_c . Nous avons vérifié ce critère en contrainte pour des différentes valeurs de la longueur caractéristique. Les résultats théoriques et numériques coïncident parfaitement.

Endommagement et fissuration par choc thermique dans le cas des matériaux fragiles

Contents

3.1	Introduction :	63
3.2	Étude du problème du choc thermique pour une plaque rectangulaire	64
3.2.1	Présentation du problème	64
3.2.2	Champ de température appliqué	65
3.2.3	Champs de déformation et de contrainte thermoélastiques	65
3.2.4	Modèle d'endommagement par choc thermique	66
3.2.5	Implémentation numérique	67
3.2.5.1	Résolution numérique du problème d'endommagement : implantation dans FEniCS	67
3.2.5.2	Discrétisation temporelle et algorithme utilisé	68
3.2.6	Résultats numériques	69
3.3	Étude d'une structure cylindrique	70
3.3.1	Présentation du problème	70
3.3.2	Expression analytique du champ de température dans le matériau	72
3.3.3	Solution thermo-élastique	75
3.3.4	Problème d'endommagement	76
3.3.5	Étude de la branche fondamentale	76
3.3.5.1	Réponse élastique	76
3.3.6	Implémentation numérique	80
3.3.7	Résultats numériques	82
3.3.7.1	Phase axisymétrique	82
3.3.7.2	Bifurcation de la branche fondamentale	85
3.3.7.3	Caractéristiques du modèle des fissures	90
3.3.7.4	Comparaison avec les expériences	93
3.4	Conclusion	96

3.1 Introduction :

Au cours des dernières années, plusieurs études ont été développées pour améliorer les performances des matériaux dans des conditions mécanique et thermique sévères. Citons par exemple, le phénomène du séchage ou du

refroidissement. Ils ont la particularité de provoquer le rétrécissement des matériaux et provoquer ainsi une contrainte thermique conduisant à la fissuration du matériau avec une morphologie particulière répétitive. Par conséquent, pour pouvoir exploiter pleinement le potentiel des matériaux, il est essentiel de comprendre la formation, la morphologie et la propagation des motifs de fissures complexes par choc thermique à l'intérieur du matériau.

Dans ce chapitre, l'étude de l'initiation de l'endommagement et de la rupture dans le cas du choc thermique à partir d'une approche variationnelle appliquée à un modèle de gradient d'endommagement dans le cas quasi-static est réalisée.

Le chapitre est organisé comme suit :

Dans la première partie, nous présentons la formulation variationnelle du problème d'endommagement sous choc thermique. Plus précisément, cette approche appliquée à l'énergie mécanique totale (élastique plus dissipée) du système est basée sur trois principes : irréversibilité, stabilité et conservation de l'énergie.

La deuxième partie est consacrée à une brève étude d'une structure rectangulaire chauffée à une température initiale puis mise en contact à une température plus faible sur une partie de son bord.

Dans la troisième partie, le cas d'une structure céramique mince circulaire sous choc thermique est étudié. Dans un premier temps, nous montrerons que, dans le cas d'un choc thermique important, l'endommagement se produit, dès la mise en contact avec le corps froid, avec une évolution d'endommagement sans localisation. Nous appellerons cette phase la *phase axisymétrique ou la branche fondamentale*. Ensuite, nous montrerons l'existence d'une *branche bifurquée avec localisation de l'endommagement* et donc la génération de fissures.

Ensuite, le temps critique à partir duquel la bifurcation apparaît ainsi que la répartition périodique des fissures initiales sont analysés. Nous étudions en particulier l'influence de la longueur interne ℓ et l'intensité du choc thermique, noté ΔT sur l'espacement entre deux fissures consécutives. Nous utiliserons pour cela une analyse de Fourier. Ce chapitre se termine par une comparaison entre les résultats numériques obtenus par le modèle de gradient d'endommagement et les résultats expérimentaux réalisés dans les travaux de [51] dans lesquels des structures en céramiques circulaires chauffées à différentes températures sont trempées dans un liquide froid conduisant ainsi à un choc thermique.

3.2 Étude du problème du choc thermique pour une plaque rectangulaire

3.2.1 Présentation du problème

Nous considérons une plaque rectangulaire mince composée d'un matériau homogène sans précontrainte dont la configuration naturelle de référence est $\Omega = (0, L) \times (0, H)$. Cette plaque est encadrée aux bords suivants : $x_1 = 0$, $x_1 = L$ et $x_2 = H$ alors que le côté $x_2 = 0$ est libre. Les forces de volume sont négligées. La géométrie et les conditions aux limites sont présentées sur la Fig. (3.1) où u_1 et u_2 désignent les deux composantes du champ de déplacement et α le champ d'endommagement.

$$u_1 |_{x_1=0, x_1=L} = 0 \quad u_2 |_{x_2=H} = 0 \quad \alpha |_{x_1=0, x_1=L} = 0 \quad \alpha |_{x_2=0} = 0 \quad (3.1)$$

À l'instant $t = 0$, la plaque est à la température T_i , elle est donc considérée libre de contrainte et d'endommagement :

$$\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = 0; \quad \varepsilon_t^e(\mathbf{x}) = 0; \quad \alpha_t(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_t(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (3.2)$$

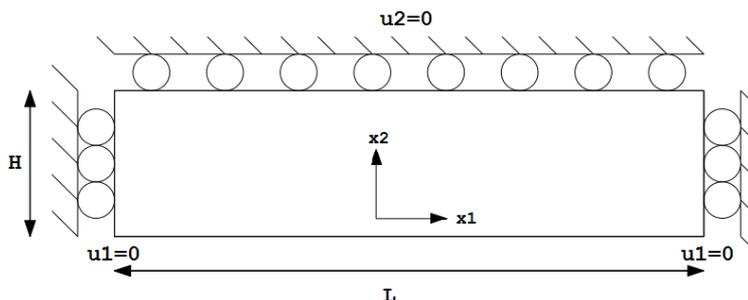


FIGURE 3.1: Géométrie et conditions aux limites de la plaque rectangulaire.

3.2.2 Champ de température appliqué

Dans cette section, nous évaluons l'évolution de la température dans la plaque. Nous avons supposé que la plaque est initialement à la température uniforme T_i . Les deux cotés $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ sont thermiquement isolés. Nous avons imposé une condition aux limites de température de type Dirichlet T_B sur la coté $x_2 = 0$. Dans les conditions thermiques transitoires, l'équilibre thermodynamique à l'intérieur du matériau peut être exprimé à l'aide de la loi de Fourier [39];[74]. Nous avons supposé qu'il s'agit d'un transfert thermique par conduction. Donc, la répartition de la température à l'intérieur du matériau est contrôlée par l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.3)$$

où λ est la conductivité thermique ($W/m \text{ } ^\circ C$), T est la température ($^\circ C$), ρ (kg/m^3) et c ($J/kg \text{ } ^\circ C$) représentent respectivement la densité et la chaleur spécifique du matériau et, t est le temps exprimé en (s). La condition aux limites de la conduction thermique peut être écrite comme suit :

$$\left\{ T(\mathbf{x}, t = 0) = T_i, \quad T(\mathbf{x} = 0, t) = T_B, \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \infty} T(\mathbf{x}, t) = T_i \right\}$$

À partir de temps $t = 0$, un changement de température $T_B = T_i - \Delta T$ est imposé sur le côté $x_2 = 0$. Après un changement de variable et en utilisant les tables de la transformée de Laplace inverse, nous pouvons déterminer la solution analytique d'un problème de répartition thermique d'une structure homogène avec une condition aux limites de type Dirichlet. Le champ de température s'écrit alors :

$$T(\mathbf{x}, t) = T_i - \Delta T \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{k_c t}} \right) \quad (3.4)$$

où erfc est la fonction d'erreur complémentaire.

$$\operatorname{erfc}(\mathbf{x}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbf{x}}^{\infty} e^{-s^2} ds$$

et $k_c = \frac{\lambda}{\rho c}$ présente la diffusivité thermique, exprimé en (m^2/s). Nous avons supposé que les fissures n'ont pas une influence sur la diffusivité thermique.

3.2.3 Champs de déformation et de contrainte thermoélastiques

Après avoir déterminé le champ de température appliqué, nous déterminons les champs de déformations et les contraintes thermiques en résolvant le problème de thermo-élasticité. La déformation thermique pour les problèmes de couplage thermo-mécanique [9], peut être calculée selon l'équation :

$$\varepsilon^{th} = \Theta(T_i(x) - T_i) \mathbf{I} \quad (3.5)$$

où Θ désigne le coefficient de la dilatation thermique, et \mathbf{I} le tenseur identité. Par la suite, nous pouvons déterminer le champ de déformation totale ε^t et le champ de déformation élastique qui sont exprimées par :

$$\varepsilon^{th} = -\Theta \Delta T \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{k_c t}} \right) \mathbf{I} \quad (3.6)$$

$$\varepsilon^e = \varepsilon^t - \varepsilon^{th} = \varepsilon(\mathbf{u}_t)(\mathbf{x}) + \Theta \Delta T \operatorname{erfc} \left(\frac{x_2}{2\sqrt{k_c t}} \right) \mathbf{I} \quad (3.7)$$

3.2.4 Modèle d'endommagement par choc thermique

Une formulation variationnelle du problème de choc thermique de la structure rectangulaire est présentée dans cette section pour obtenir l'évolution du déplacement et de l'endommagement de la structure ainsi que le critère d'endommagement. Soit C_t l'espace des champs de déplacement cinématiquement admissibles à l'instant t .

$$C_t = \left\{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v}_1 = 0 \text{ à } x_1 = 0, \text{ et } \mathbf{v}_1 = 0 \text{ à } x_1 = L \right\},$$

Nous définissons \mathcal{D} l'ensemble des champs d'endommagement accessible à l'instant t comme suit :

$$\mathcal{D} = \left\{ \beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid 0 \leq \beta \leq 1 \right\}$$

En raison de la condition d'irréversibilité, l'endommagement ne peut que croître et par conséquent, on associe l'ensemble \mathcal{D}_α de champs d'endommagements admissibles qui définit par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid \alpha \leq \beta \leq 1 \right\} \quad (3.8)$$

Ensuite, pour toute paire admissible (\mathbf{v}, β) dans $(C_t, \mathcal{D}_\alpha)$ à l'instant t , nous définissons l'énergie totale de la structure par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t(\mathbf{v}, \beta) &= \int_{\Omega} W \left((\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon^{th})(\mathbf{x}), \beta(\mathbf{x}), \nabla \beta(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} (1 - \beta)^2 \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon^{th}) (\varepsilon(\mathbf{v}) - \varepsilon^{th}) + w_1 \beta + w_1 \ell^2 \nabla \beta \nabla \beta \right) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dans l'approche variationnelle, le problème de l'évolution quasi-statique des champs de déplacement et des champs d'endommagement est formulé comme un problème de minimisation de l'énergie $\mathcal{W}_t(\mathbf{v}, \beta)$ Eq. (3.9) tout en prenant en compte des conditions aux limites, de la loi d'évolution d'endommagement (Eq. (1.8)) et des conditions initiales.

Par la suite, nous utilisons les dérivées directionnelles de l'énergie $\mathcal{W}_t(\mathbf{u}, \alpha)$ qui définis par :

1. Première dérivée directionnelle de \mathcal{W}_t en (\mathbf{u}, α) dans la direction (\mathbf{v}, β) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'_t(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) &= \int_{\Omega} \left((1 - \alpha)^2 \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \left(w_1 - (1 - \alpha) \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \right) \beta d\mathbf{x} + \int_{\Omega} w_1 \ell^2 \nabla \alpha \nabla \beta d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.10)$$

2. Deuxième dérivée directionnelle de \mathcal{W}_t en (\mathbf{u}, α) dans la direction (\mathbf{v}, β) :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}''_t(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) &= \int_{\Omega} \left((1 - \alpha)^2 \mathbf{A}_0 \varepsilon(\mathbf{v}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \right) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \left(4(1 - \alpha_t) \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \cdot \varepsilon(\mathbf{v}) \beta \right) d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\Omega} \left(\mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon_t^{th}) \beta^2 + w_1 \ell^2 \nabla \beta \nabla \beta \right) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

D'après l'hypothèse de l'Eq. (1.8), les conditions de stabilité du premier ordre : Eq. (1.57) et Eq. (1.58) avec la prise en compte de la déformation thermique sont exprimés par :

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot (\varepsilon(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) - \varepsilon_t^{th}) d\mathbf{x} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in C_t \quad (3.12)$$

$$\int_{\Omega} \left((\beta - \alpha_t) \left(w_1 - (1 - \alpha_t) \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}_t) - \varepsilon_t^{th}) (\varepsilon(\mathbf{u}_t) - \varepsilon_t^{th}) \right) + w_1 \ell^2 \nabla \alpha_t \nabla (\beta - \alpha_t) \right) d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}_\alpha \quad (3.13)$$

dans le cas ou $\alpha_t = 0$, l'Eq. (3.13) devient :

$$\int_{\Omega} \left(w_1 - \mathbf{A}_0 (\varepsilon(\mathbf{u}_t) - \varepsilon_t^{th}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}_t) - \varepsilon_t^{th}) \right) \beta d\mathbf{x} \geq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_t = \mathbf{A}_0 \varepsilon(\mathbf{u}_t), \quad \forall \beta \in \mathcal{D}_\alpha \quad (3.14)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \left(w_1 - \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{A}_0^{-1} \boldsymbol{\sigma}_t \right) \beta d\mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \beta \in \mathcal{D}_\alpha \quad (3.15)$$

À partir de la loi d'évolution d'endommagement Hypothèse (1.8), les deux conditions de stabilité de premier ordre : (3.12) et (3.13) sont satisfaits si et seulement si :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad \text{dans} \quad x_2 = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad \text{dans} \quad x_1 = 0 \quad \text{et} \quad x_1 = L \quad (3.16)$$

$$(1 - \alpha_t) \mathbf{A}_0 (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) - w_1 + w_1 l^2 \Delta \alpha_t \leq 0 \quad \text{dans} \quad \Omega; \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \alpha_t}{\partial \mathbf{n}} \geq 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega; \quad (3.17)$$

Dans le cadre de la prise en compte de la déformation thermique, nous utilisons la condition de conservation de l'énergie Eq. (1.53) qui s'écrit :

$$\mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \int_0^t \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{th} \, d\mathbf{x} \right) ds = 0 \quad (3.18)$$

En prenant l'hypothèse d'une solution régulière en temps et en espace et en utilisant la dérivée de l'Eq. (3.18) par rapport au temps t, il vient de noter que :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} W_t(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}, \alpha_t, \nabla \alpha_t) \right) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_s^{th} \, d\mathbf{x} = 0 \\ & \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}_t) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) \dot{\alpha}_t + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \cdot \nabla \dot{\alpha}_t \right) d\mathbf{x} = 0 \\ & - \int_{\Omega} \left(\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot (\dot{\mathbf{u}}_t) + \left(-\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} - G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right) \dot{\alpha}_t \right) d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}_t \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}}_t + G_c \frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \cdot \mathbf{n} \dot{\alpha}_t \right) ds = 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nous rappelons que : $\partial_{\alpha} \gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \nabla \cdot \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \nabla \alpha} \right)$ et $\Psi = \frac{1}{2} \mathbf{A}_0 (1 - \alpha_t)^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t)$.

En prenant en compte de la condition d'équilibre et des conditions aux limites Eq. (3.16), ainsi que la condition d'irréversibilité et les inégalités Eq. (3.17), Eq. (3.19) est vérifié si et seulement si les égalités ci-dessous sont vérifiées :

$$\left(\mathbf{A}_0 (1 - \alpha_t) (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) - w_1 + w_1 l^2 \Delta \alpha_t \right) \dot{\alpha}_t = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \frac{\partial \alpha_t}{\partial \mathbf{n}} \dot{\alpha}_t = 0 \quad \text{dans} \quad \partial\Omega \quad (3.20)$$

3.2.5 Implémentation numérique

Cette section est consacrée à la mise en œuvre numérique du problème thermique. Nous supposons qu'il n'y a pas de forces externes exercées sur le corps, nous rappelons que l'énergie totale du corps de la structure est définie par :

$$\mathcal{W}(u_t, \alpha_t) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \mathbf{A}_0 (1 - \alpha_t)^2 (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) - \boldsymbol{\varepsilon}_t^{th}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(w_1 \alpha_t + w_1 l^2 \nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha_t \right) \, d\mathbf{x} \quad (3.21)$$

L'évolution quasi-statique du problème de la mécanique de la rupture consiste à trouver à chaque instant t le champ de déplacement \mathbf{u}_t et le champ d'endommagement α_t en fonction du chargement. En effet, en s'appuyant sur l'approche variationnelle pour un milieu fragile, le problème est formulé comme un problème de minimisation locale de la fonctionnelle énergétique Eq. (3.21) avec la prise en compte d'irréversibilité. Nous utilisons la méthode des éléments finis P1 de Lagrange, pour avoir une version discrétisée du problème.

3.2.5.1 Résolution numérique du problème d'endommagement : implantation dans FEniCS

Dans cette thèse nous avons utilisé le logiciel FEniCS. C'est un logiciel basé sur la méthode des éléments finis qui permet de résoudre les équations aux dérivées partielles. L'utilisateur doit spécifier la forme variationnelle du problème avec la géométrie correspondante et les informations de maillage. Ce logiciel prend en charge les calculs et l'assemblage de la matrice de rigidité des éléments pour obtenir la matrice de rigidité globale. En effet, il prend directement la formulation faible des deux problèmes variationnels Eq. (3.12) et (3.13). Un code d'éléments finis a été développé. Les espaces fonctionnels de test et d'essai pour le déplacement et l'endommagement sont déterminés, en réalisant des fonctions de forme d'éléments finis sur tous les éléments de Ω . Nous pouvons les réaliser en utilisant les instructions suivantes dans FEniCS :

$V = \text{VectorFunctionSpace}(\text{mesh}, "P", a)$

$du = \text{TrialFunction}(V) \quad v = \text{TestFunction}(V)$

où :

- **mesh** est constitué des éléments triangulaire ou tétraédrique,
- **P** définit la famille des éléments de Lagrange. Dans notre étude nous avons adopté des éléments triangulaires linéaire de Lagrange
- **a** : indique l'ordre du polynôme d'interpolation. (égale à 1 pour notre étude). Nous utilisons le logiciel GMESH pour le maillage de la structure (Fig. (3.2)). Le logiciel Paraview est utilisé pour la visualisation des résultats.

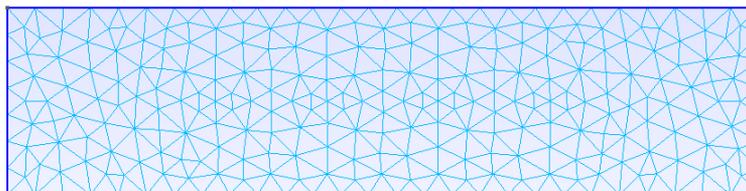


FIGURE 3.2: Maillage de la plaque rectangulaire .

La Fig. (3.3) indique le code Python à utiliser dans FEniCS pour simuler le problème variationnelle en déplacement.

```
V_u=VectorFunctionSpace(mesh, "CG", 1)
u = Function(V_u)
du = TrialFunction(V_u)
def eps(v):
    return sym(grad(v))
def sigma(v, alpha):
    mu = kappa/(2.0*(1.0 + nu))
    lambda = kappa*nu/(1.0 - nu**2)
    return ((1-alpha)**2+Constant(1e-6))* (2.0*mu*(eps(v)) + lambda*tr(eps(v))*Identity(ndim))
problem_u = LinearVariationalProblem(lhs(E_du), rhs(E_du), u, [bc_ub1,bc_ub2,bc_ub3])
solver_u = LinearVariationalSolver(problem_u)
solver_u.parameters["symmetric"] = True
solver_u.solve()
```

FIGURE 3.3: Implémentation sur Fenics pour l'équation de l'élasticité Eq. (3.12).

3.2.5.2 Discrétisation temporelle et algorithme utilisé

La formulation du problème variationnelle présente une variable de temps continue t . La simulation numérique examine la version discrétisée du problème de l'évolution. Le temps est discrétisé en un ensemble d'instant de temps $\{t_j = j\Delta t\}$ avec un pas de temps supposé uniforme Δt et $j \in \mathbb{N}$. Étant donné, le champs de déplacement et le champ d'endommagement $(\mathbf{u}_{t_{j-1}}, \alpha_{t_{j-1}})$ où l'incrément de temps t_{j-1} . La solution du problème qui consiste à chercher le couple $(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$ à l'instant t_j qu'est déterminée en résolvant le problème de minimisation alternée sous la contrainte d'irréversibilité :

$$\text{mini}\{\mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{u}, \alpha) : \mathbf{u} \in \mathcal{C}_{t_j}, \quad \alpha \in \mathcal{D}_{t_j}\} \quad (3.22)$$

Le problème de minimisation consiste à minimiser la fonctionnelle $\mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$ pour chaque instant t_j . Nous rappelons que la fonctionnelle $\mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$ n'est pas convexe pour le paire $(\mathbf{u}_{t_j}, \alpha_{t_j})$, mais convexe pour chacune des deux variables \mathbf{u}_{t_j} et α_{t_j} prises séparément. Ainsi, l'implémentation numérique du problème est basée sur une série de minimisations alternées par rapport à la variable \mathbf{u}_{t_j} avec α_{t_j} fixée puis par rapport à la variable α_{t_j} avec \mathbf{u}_{t_j} fixée jusqu'à la convergence. Nous utilisons l'algorithme de minimisation alternée décrit dans (l'algorithme (3)), pour simuler l'évolution des fissures sous choc thermique de la structure rectangulaire :

Algorithm 3 Implémentation numérique d'un modèle de champ de phase basée sur la minimisation alternée.

- 1: *initialisation* : T_i, T_B
 - 2: Donner les paramètres du matériau et du modèle
 - 3: Donner la condition de l'étape du chargement précédente $\mathbf{u}_{t_{j-1}}$ et $\alpha_{t_{j-1}}$
 - 4: Calculer le champ de température en utilisant l'Eq. (3.4)
 - 5: Calculer la déformation thermique en utilisant l'Eq. (3.6)
 - 6: Minimisation alternée de la fonctionnelle (3.21)
 - 7: **Pour** chaque instant t_j :
 Tandis que la condition de convergence n'est pas assurée faire
 Répéter
 trouver $\mathbf{u}_{t_j} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{C}_{t_j}} \mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{v}, \alpha_{t_{j-1}})$
 trouver $\alpha_{t_j} = \operatorname{argmin}_{\mathcal{D}_{t_j}} \mathcal{W}_{t_j}(\mathbf{u}_{t_j}, \beta)$
 jusqu'à la condition de tolérance
 Fin Tandis que
 - 8: Fixer $t_j = t_{j+1}$
 - 9: **Fin pour**
-

3.2.6 Résultats numériques

Dans cette section, nous présentons les résultats de la simulation numérique de l'évolution de l'endommagement dans un problème du choc thermique d'une plaque rectangulaire fragile. La plaque est de longueur L égale à 40 et de largeur H égale à 10. La taille de la maille utilisé est h égale à 0.2 avec une longueur interne ℓ égale à 1. Afin de faciliter le calcul, nous avons pris une ténacité de matériau $G_c = 1$ et son module d'Young $E_0 = 1$. Dans la Fig. (3.5), nous présentons l'évolution de la fissure dans la structure avec différentes valeurs de $\Delta T / \Delta T_c$ pour mettre en évidence le rôle du chute de la température ΔT . La perte de rigidité du matériau correspond à la valeur $\alpha = 1$ est présenté par la couleur rouge et la couleur bleu indique que la variable d'endommagement α est nul.

Pour ce problème de la rupture soumis à choc thermique, une analyse numérique par le modèle de gradient d'endommagement est réalisée par [17], [75]. Ces derniers ont développé une étude analytique détaillée de l'évolution de la rupture sous le choc thermique. Ils ont montré que si la chute de la température ΔT est inférieure au seuil de la fissuration ΔT_c , la solution est purement élastique sans aucun endommagement comme indique dans la Fig. (3.4), c'est-à-dire la réponse donne toujours une valeur nul pour la variable d'endommagement à chaque instant t ($\alpha_t = 0$).

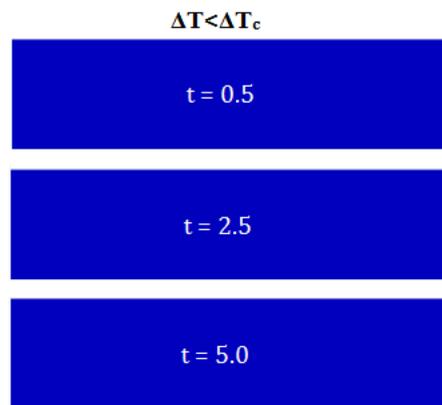


FIGURE 3.4: La phase purement élastique.

Dans le cas où $\Delta T > \Delta T_c$, ils ont montré que la réponse élastique ne reste pas stable. Par la suite comme illustré sur la Fig. (3.5),(a) nous remarquons une présence d'une branche fondamentale d'endommagement parallèle à la surface qui a été exposée au choc thermique. Cette phase axisymétrique poursuivie par une fissuration périodique résultant d'une perte de stabilité de la branche fondamentale. En effet, c'est la bifurcation de la solution homogène vers une solution périodique Fig. (3.5),(b). Enfin, la phase de la propagation se poursuit avec des bandes de fissures orthogonales à la surface exposée au choc thermique et parallèle les uns aux autres Fig. (3.5), (c). Nous remarquons également que certains fissures s'arrêtent de se propager et d'autres continuent à se propager jusqu'à l'arrêt de la fissuration Fig. (3.5),(d), formant ainsi un ordre hiérarchiques de fissures. L'analyse analytique du phénomène de la bifurcation est détaillée dans les travaux de Siscic et al[75].

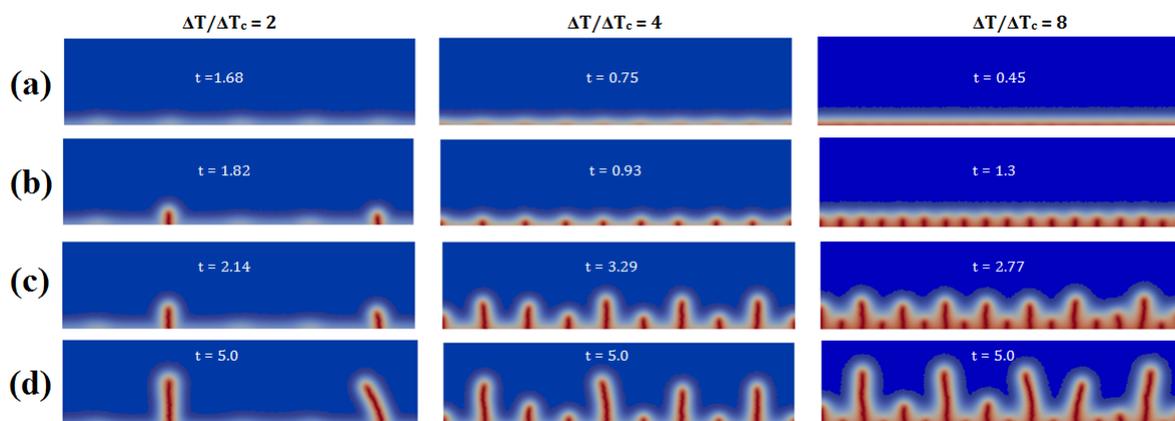


FIGURE 3.5: Modèles de fissures pendant le processus de trempe en différentes valeurs de $\Delta T/\Delta T_c$

Dans le paragraphe suivant, nous abordons la fissuration des plaques en céramiques de formes cylindriques minces soumises au choc thermique. Nous démontrons l'existence d'un temps t_b à partir duquel une bifurcation de la branche fondamentale peut avoir lieu, où la branche fondamentale devient instable. Nous montrons que la solution bifurquée est stable et déterminée par une longueur d'onde finie D proportionnelle à la longueur interne ℓ du matériau et inversement proportionnelle à la température de trempe ΔT . Cette solution bifurquée correspond au début des phénomènes de localisation conduisant à la création du motif périodique des fissures observées dans les expériences.

3.3 Étude d'une structure cylindrique

3.3.1 Présentation du problème

Dans cette section, nous étudions en utilisant un modèle de champ de phase le phénomène de la fissuration sous choc thermique pour des plaques en céramiques circulaires minces de 13 mm de diamètre et de 1 mm d'épaisseur. Dans les expériences [51], les plaques en céramiques circulaires minces ont été empilées de manière serrée par ensembles de quatre, avec deux plaques circulaires épaisses à l'extérieur pour empêcher la distribution de la température par le liquide de refroidissement accédant aux surfaces intérieures des échantillons comme le montre la Fig. (3.6) (a). Le matériau des échantillons est composé de 99% Al_2O_3 . Cinq températures initiales différentes sont appliquées aux échantillons de céramiques circulaires : $T_i = 250^\circ C$, $T_i = 300^\circ C$, $T_i = 350^\circ C$, $T_i = 400^\circ C$ et $T_i = 500^\circ C$. La température de l'eau froide est égale à $15^\circ C$. Les résultats expérimentaux montrent une présentation des motifs des fissures régulières et élégantes. Des caractéristiques périodiques et hiérarchiques sont présentées, ce qui nécessite une compréhension claire du mécanisme de la fissuration sous choc thermique. Afin de comprendre ce phénomène, nous présentons des simulations numériques pour simuler les motifs de fissure du choc thermique.

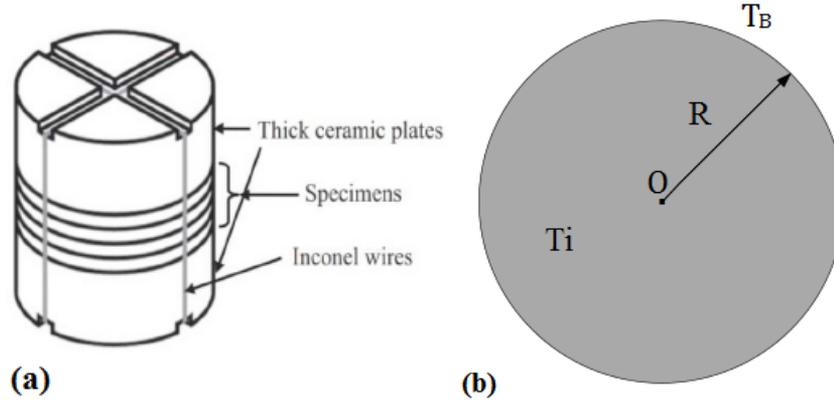


FIGURE 3.6: Conditions géométriques et chargement : (a) schéma de l'expérience [51], (b) géométrie et condition aux limites

La structure est composée d'un corps dont la configuration de référence naturelle est un disque de section circulaire S et de rayon R Fig. (3.6) (b), dans laquelle le plan xy coïncide avec le plan médian de la plaque et la direction z lui est perpendiculaire. La structure est une plaque non endommagée. Aucune condition aux limites imposées sur le champ d'endommagement n'est imposée. Ce dernier peut donc évoluer librement. Le champ de température T et le champ de contrainte σ dépendent uniquement des coordonnées dans le plan, c'est-à-dire $T = T(x, y)$, et $\sigma = \sigma(x, y)$.

Nous avons supposé que le champ de contrainte dans le plan xy est présenté par :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x(x, y), \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y), \quad \sigma_{xy} = \sigma_{xy}(x, y), \\ \sigma_z &= \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Les contraintes thermoélastiques ϵ , correspondant au champ de contrainte dans le cadre de la contrainte plane proviennent de la loi d'Hooke :

$$\epsilon = S\sigma + \epsilon^{th}\tag{3.24}$$

où ϵ^{th} et S désignent respectivement le champ de déformation thermique, et le tenseur de souplesse du matériau. Étant donnée que le matériau est isotrope et en vertu de l'hypothèse des contraintes planes, ϵ^{th} et S peuvent s'écrire :

$$\epsilon^{th} = \Theta(T - T_i)\mathbf{I}, \quad S_{ijkl} = \frac{1}{E_0}\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{\nu}{E_0}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad i, j, k, l \in \{1, 2\},\tag{3.25}$$

où E_0 représente le module d'Young et ν est le coefficient de Poisson (qui ne change pas au cours du processus d'endommagement). Θ est le coefficient de dilatation thermique du matériau, T_i est la température initiale pour le disque, et \mathbf{I} est le tenseur d'identité.

L'étude est réalisée sur le quart du disque où la configuration de référence est définie comme suit :

$$\Omega = \{(x_1, x_2), x_1 > 0, x_2 > 0, 0 \leq x_1^2 + x_2^2 < R^2\}$$

avec des bords Γ_x , Γ_y et Γ défini comme :

$$\Gamma_x = \{(x_1, x_2), x_1 = 0, 0 \leq x_2 < R\}, \quad \Gamma_y = \{(x_1, x_2), x_2 = 0, 0 \leq x_2 < R\}, \quad \Gamma = \{(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 = R^2\}.$$

Nous avons supposé que le rayon R est beaucoup plus grand que la longueur interne ℓ du matériau. Les forces du corps sont négligées. Les côtés Γ_x ou Γ_y sont soumis à des conditions aux limites de sorte que le vecteur normal sortant \mathbf{n} et la contrainte de cisaillement disparaisse, tandis que le côté Γ est libre. En conséquence, les conditions aux limites mécaniques s'écrivent :

$$u_2 = 0, \quad \sigma_{12} = 0 \text{ dans } \Gamma_x, \quad u_1 = 0, \quad \sigma_{21} = 0 \text{ dans } \Gamma_y\tag{3.26}$$

$$\sigma_t \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ dans } \Gamma\tag{3.27}$$

où \mathbf{n} est le vecteur normal sortant au bord Γ . Tout au long de cette partie, nous utilisons le système de coordonnées polaires (r, θ) . La plaque est initialement à la température uniforme T_i jusqu'au temps 0, et donc la plaque est non endommagée et présentée sans contrainte :

$$\mathbf{u}_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \varepsilon_t^e(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \alpha_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \sigma_t(r, \theta) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \forall t \leq 0,$$

3.3.2 Expression analytique du champ de température dans le matériau

Nous avons imposé instantanément au temps $t = 0$, une température T_B de surface du côté $r = R$, et nous avons désigné par $T = T(r, t)$ la température au temps t . La distribution de la température à l'intérieur du corps est régie par l'équation de la chaleur dans un cylindre, nous avons supposé que l'évolution d'endommagement n'influence pas le champ de température. Pour $t \geq 0$ nous avons :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{k_c} \frac{\partial T}{\partial t} & \text{dans } \Omega \\ T(r, t = 0) = T_i & \text{dans } \Omega \\ T(r = R, t) = T_B \quad \forall t > 0 \\ \Delta T = T_i - T_B & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.28)$$

Afin de résoudre l'Eq. (3.28), nous avons effectué le changement de variable suivant : $T^* = T - T_B$ et par la suite les conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} T^*(r, t = 0) = T_i - T_B, & \text{dans } \Omega \\ T^*(r = R, t) = 0, \quad \forall t > 0 \end{cases} \quad (3.29)$$

La résolution est effectuée en utilisant la méthode de fourrier. Nous supposons une méthode de séparation des variables pour le champs de la température par $T^*(r, t) = X(r).Y(t)$. Les opérations de dérivations s'écrivent alors :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} = X(r)Y'(t), \quad \frac{\partial T^*}{\partial r} = X'(r)Y(t), \quad \frac{\partial^2 T^*}{\partial r^2} = X''(r)Y(t)$$

L'équation (3.28) prend la forme suivante :

$$Y'(t).X(r) = k_c.Y(t) \left[X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) \right]$$

Qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{Y'(t)}{k_c.Y(t)} = \frac{X''(r) + \frac{1}{r}.X'(r)}{X(r)} = -\lambda^2$$

où λ est une constante car les deux fonctions X et Y sont indépendantes. Nous obtenons ainsi, le système d'équations différentielles ordinaires suivants :

$$Y'(t) = -k_c\lambda^2 Y(t) \quad (3.30)$$

$$X''(r) + \frac{1}{r}X'(r) + \lambda^2 X(r) = 0 \quad (3.31)$$

L'Eq. (3.30) peut s'écrire :

$$\frac{dY}{Y} = -k_c\lambda^2 dt$$

L'opération d'intégration conduit alors à :

$$\ln Y = k_c\lambda^2 t + \ln A \quad \text{où} \quad Y = A.e^{-k_c\lambda^2 t}$$

Maintenant l'Eq. (3.31) peut s'écrire :

$$X = BJ_0(\lambda r) + CY_0(\lambda r)$$

où J_0 est la fonction de Bessel de 1^{re} espèce non modifiée d'ordre 0, Y_0 la fonction de Bessel de 2^{nde} espèce non modifiée d'ordre 0, et A , B et C sont des constantes arbitraires. Nous pouvons alors déduire que la solution de l'Eq. (3.28) a la forme suivante :

$$T^*(r, t) = A \exp(-k_c \lambda_n^2 t) [B J_0(\lambda r) + C Y_0(\lambda r)] \quad (3.32)$$

Grâce aux principales propriétés des fonctions de Bessel, nous avons $Y_0(0) = -\infty$ qui exige que $C = 0$. En utilisant l'équation de limite $T^*(R, t) = 0 \forall t > 0$, nous obtenons $J_0(\lambda_n R) = 0$. λ_n sont les zéros de l'équation $J_0(\lambda_n R)$.

Le théorème de superposition des solutions nous permet d'écrire la solution générale de l'Eq. (3.28) sous la forme :

$$T^*(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \exp(-k_c \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r) \quad (3.33)$$

Pour $t = 0$ et en utilisant la condition limite $T^*(r, t = 0) = T_i - T_B$ qui s'écrit alors :

$$T_i - T_B = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n J_0(\lambda_n r)$$

La décomposition de $T_i - T_B$ par la fonction de Bessel d'ordre 0 donne :

$$T_i - T_B = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \exp(-k_c \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r) \quad (3.34)$$

En multipliant chaque membre de l'Eq. (3.34) par $r J_0(\lambda_n r)$ et en intégrant entre 0 et R , on obtient :

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) (T_i - T_B) dr = \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \exp(-k_c \lambda_n^2 t) J_0(\lambda_n r) r J_0(\lambda_n r) dr \quad (3.35)$$

L'orthogonalité de la fonction $J_0(\lambda_n r)$ et les propriétés de la fonction de Bessel conduisent à :

$$\int_0^R J_0(\lambda_n r) r J_0(\lambda_m r) dr = 0, \quad \text{for } n \neq m, \quad \int_0^R r [J_0(\lambda_n r)]^2 dr = \frac{R^2}{2} [J_1(\lambda_n R)]^2, \quad (3.36)$$

$$\int_0^R r J_0(\lambda_n r) dr = \frac{R}{\lambda_n} J_1(\lambda_n R)$$

En utilisant la relation $T^* = T - T_B$, la solution de l'Eq. (3.28) s'écrit :

$$T(t, r) = T_B + \sum_{n=1}^N \frac{2(T_i - T_B) J_0(\lambda_n r) \exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)} \quad (3.37)$$

où J_0 et J_1 sont la fonction de Bessel de la première espèce non modifiée d'ordre 0 et 1 respectivement.

λ_n sont les solutions de la fonction $J_0(\lambda_n \cdot R) = 0$;

k_c est la diffusivité thermique qui est une constante du matériau.

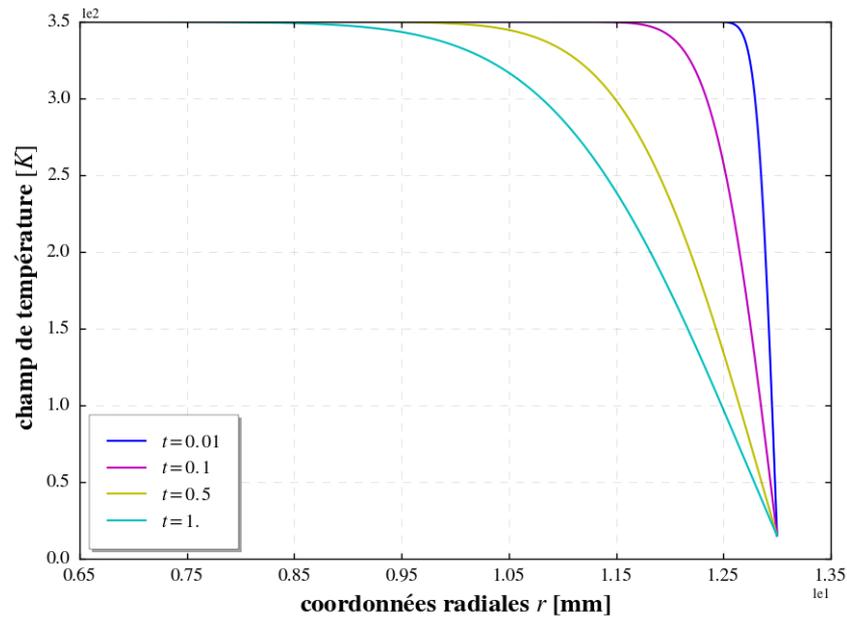


FIGURE 3.7: Le champ de température en fonction du coordonné radial r

En considérant une température initiale $T_i = 350^\circ\text{C}$ et une température de tremp $T_B = 15^\circ\text{C}$ sur le bord du disque, l'évolution du champ de température d'une structure de géométrie cylindrique de rayon $R = 6.5$ mm pour différents temps t est présenté sur les deux figures Fig. (3.7) et Fig.(3.8). Nous pouvons montrer d'après les deux figures que la température diminue progressivement du centre de l'éprouvette vers la périphérie de l'éprouvette circulaire en céramique.

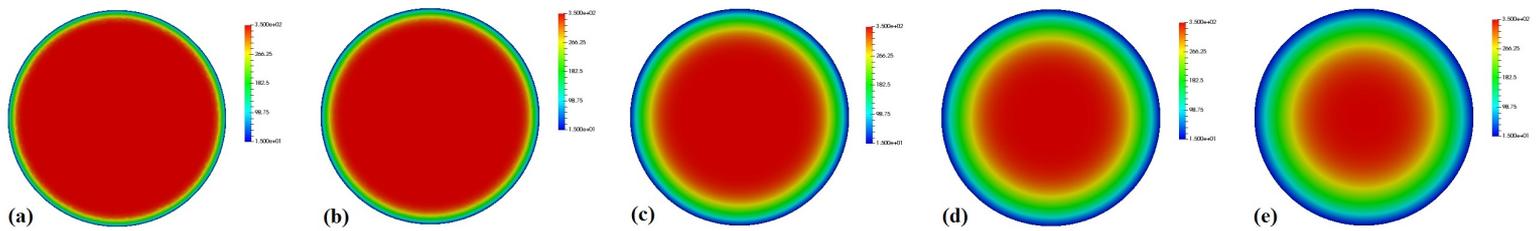


FIGURE 3.8: Évolution de la température lors de l'essai de tremp d'une éprouvette circulaire bidimensionnelle en céramique à la température initiale $T_i = 350^\circ\text{C}$, (a) $t = 0.05$ s, (b) $t = 0.1$ s, (c) $t = 0.5$ s, (d) $t = 1$ s, (e) $t = 1.5$ s

Autrement, la température du bord chute brusquement au cours du temps, ce qui permet de créer un très fort gradient de température (Fig. (3.8)). Ce gradient permet de créer une contrainte de traction sur le bord de la structure. Et d'après la Fig. (3.9) qui présente l'évolution de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction du temps t , la contrainte la plus importante est située à la surface et se désintègre en profondeur jusqu'au le cœur de la structure. Dans un temps très bref, la contrainte de traction peut augmenter d'une façon très rapide ce qui permet de créer le choc thermique.

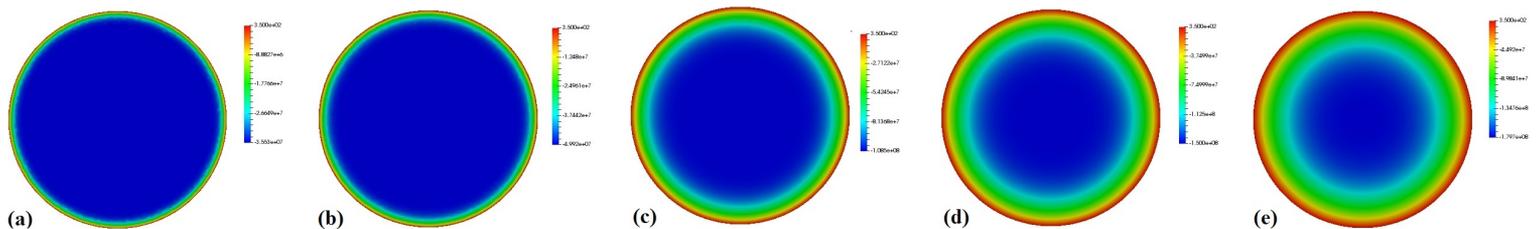


FIGURE 3.9: Évolution de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ lors de l'essai de tremp d'une éprouvette circulaire bidimensionnelle en céramique à la température initiale $T_i = 350^\circ\text{C}$, (a) $t = 0.05$ s, (b) $t = 0.1$ s, (c) $t = 0.5$ s, (d) $t = 1$ s, (e) $t = 1.5$ s

3.3.3 Solution thermo-élastique

Nous avons supposé que le retréssissement est linéaire, car le matériau est isotrope. Le champ de déformation thermique est exprimé par : $\varepsilon^{th} = \Theta(T(t, r) - T_i)\mathbf{I}$ avec Θ et \mathbf{I} représentent respectivement le coefficient de dilatation thermique du matériau et le tenseur d'identité. Le champ de déformation élastique ε_i^e est exprimé à chaque instant t par la différence entre le champ de déformation total ε_i et le champ de déformation thermique ε_i^{th} . En conséquence, les deux expressions des deux champs de déformations thermique et élastique sont données par :

$$\varepsilon_i^{th} = \varepsilon^{th}(t, r) = \Theta(T_B - T_i) \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{2J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 k_c t)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)} \right) \mathbf{I} \quad (3.38)$$

$$\varepsilon_i^e = \varepsilon^e(t, r) = \varepsilon(\mathbf{u})(t, r) - \Theta(T_B - T_i) \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{2J_0(\lambda_n r) \exp(-\lambda_n^2 k_c t)}{\lambda_n R J_1(\lambda_n R)} \right) \mathbf{I} \quad (3.39)$$

Nous étudions maintenant la solution thermo-élastique, en considérant les hypothèses de contraintes planes avec des champs radialement symétriques comme pour le champ de température $T = T(t, r)$ (Eq. (3.37)). Dans ce cas, le tenseur de contrainte ne dépend que des coordonnées radiaux ; soit : $\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(r)$, $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(r)$, et $\sigma_{r\theta}(r) = 0$. Pour obtenir les deux composantes non nulles du tenseur de contrainte, nous introduisons la fonction de contrainte d'Airy notée ϕ (également supposée être une fonction de r), définie en coordonnées polaires par :

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{d^2\phi}{dr^2}. \quad (3.40)$$

En injectant les expressions ci-dessus dans Eq. (3.24), Eq. (3.25), on en déduit l'expression du tenseur de déformation. Utilisons alors l'équation de compatibilité $\frac{d^2}{dr^2} (r\varepsilon_\theta) = \frac{d}{dr} \varepsilon_r$ (cas de contrainte plane) nous obtenons l'équation aux dérivées partielles qui régit $\phi(r)$:

$$\Delta\Delta\phi + E_0\Theta\Delta T = 0, \quad (3.41)$$

Cette équation peut être exprimée en terme de contrainte radiale, en utilisant la première relation dans l'Eq. (3.40) et l'hypothèse axisymétrie. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_{rr}) \right] \right\} + E_0\Theta \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0. \quad (3.42)$$

En intégrant l'équation ci-dessus par rapport à r tout en tenant compte de la condition limite dans $\sigma_{rr}(R) = 0$, et en ne conservant que les termes non-singuliers à l'origine, nous obtenons :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(t, r) = E_0\Theta \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T(t, r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(t, r) r dr \right), \quad (3.43)$$

En combinant les équations Eq. (3.40) et Eq. (3.43), nous obtenons :

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(t, r) = E_0\Theta \left(\frac{1}{R^2} \int_0^R T(t, r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(t, r) r dr - T(t, r) \right) \quad (3.44)$$

En utilisant l'Eq. (3.37) pour le champs de température $T(t, r)$, on obtient :

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}(t, r) = 2E_0\Theta\Delta T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 R^2} \left(1 - \frac{R}{r} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R)} \right) \quad (3.45)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\theta\theta}(t, r) = 2E_0\Theta\Delta T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 R^2} \left(1 + \frac{R J_1(\lambda_n r)}{r J_1(\lambda_n R)} - \lambda_n R \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R)} \right) \quad (3.46)$$

Les déformations thermo-élastiques correspondant au champ de contrainte dans le cadre de la contrainte plane proviennent de la loi de Hooke s'écrivent par :

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E_0} (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\theta\theta}) + \varepsilon_{rr}^{th}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E_0} (\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}) + \varepsilon_{\theta\theta}^{th}, \quad \varepsilon_{r\theta} = 0. \quad (3.47)$$

où ν indique le coefficient de Poisson du matériau. Le champ de contrainte élastique ε_t^e est exprimé par la différence entre le champ de contrainte total ε_t et le champ de contrainte thermique ε_t^{th} : $\varepsilon_t^e = \varepsilon^e(t, r) = \varepsilon(\mathbf{u}_t) - \varepsilon^{th}$.

En incorporant les expressions de σ_{rr} Eq. (3.45) et $\sigma_{\theta\theta}$ Eq. (3.46) dans les relations Eq. (3.47), on obtient l'expression des deux composantes non nulles du tenseur de déformation ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$:

$$\varepsilon_{rr} = \varepsilon_{rr}(t, r) = 2\Theta\Delta T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 R^2} \left((1 - \nu) - (1 + \nu) \frac{R}{r} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R)} + (1 - \nu) \lambda_n R \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R)} \right) - \Theta\Delta T \quad (3.48)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{\theta\theta}(t, r) = 2\Theta\Delta T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 R^2} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R}{r} \frac{J_1(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R)} \right) - \Theta\Delta T \quad (3.49)$$

3.3.4 Problème d'endommagement

Soient \mathcal{D}_α et \mathcal{C}_t représentent respectivement : l'ensemble des champs d'endommagement admissibles à partir de l'état d'endommagement actuel $0 \leq \alpha \leq 1$, et l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles associés qui sont définis par :

$$\mathcal{D}_\alpha = \left\{ \beta \in H^1(\Omega, \mathbb{R}) \mid \alpha \leq \beta \leq 1 \right\}, \quad (3.50)$$

$$\mathcal{C}_t = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^2) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \text{ dans } \Gamma_x, \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \text{ dans } \Gamma_y \}$$

Nous rappelons que le problème de l'évolution quasi-statique des champs de déplacement et des champs d'endommagement est formulé comme un problème de minimisation de l'énergie $\mathcal{W}_t(\mathbf{v}, \beta)$ Eq. (3.9) tout en prenant en compte des conditions aux limites, des conditions initiales et de la loi d'évolution d'endommagement (Eq. (1.8)). En effet, le problème doit vérifier la condition d'irréversibilité $\dot{\alpha} > 0$, les deux conditions de stabilités de 1 ordre (3.12) et (3.13) et la conservation de l'énergie (3.18).

3.3.5 Étude de la branche fondamentale

3.3.5.1 Réponse élastique

Dans cette section, une étude de la phase élastique où il n'y a pas d'endommagement est réalisé. Comme le montre sur la Fig. (3.10) qui présente l'évolution de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction des coordonnées radiales à $t = 0.01$ s, la norme de la contrainte $\|\sigma_{\theta\theta}\|$ atteint un maximum au bord de la structure et prend la valeur de :

$$\sigma_{\theta\theta}(t, R) = 4E_0\Theta\Delta T \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-k_c \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 R^2}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.51)$$

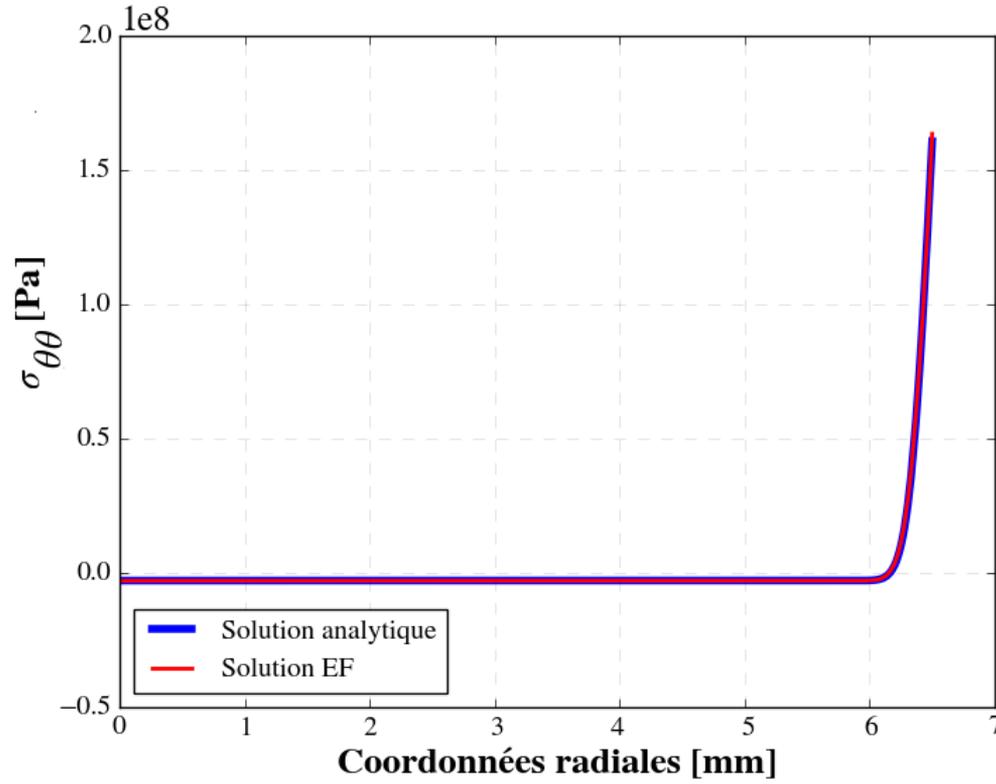


FIGURE 3.10: Évolution de la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ en fonction des coordonnées radiales r à $t = 0,01$ s pour la solution élastique

Pour $t = 0$ s, et grâce aux propriétés des zéros des fonctions de Bessel, (Tab. (3.1)), l'Eq. (3.51) s'écrit :

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2 R^2} \quad (3.52)$$

	$t = 0.0$	$t = 0.0001$	$t = 0.001$	$t = 0.01$	$t = 0.1$
$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{4E_0\Delta T}$	0.25	0.2491	0.2472	0.2413	0.2231

TABLE 3.1: Calcul de $\sigma_{\theta\theta}/4E_0\Delta T$ en $r = R$ et à différents instant t

Par la suite, pour $t = 0$ s, $\sigma_{\theta\theta}$ atteint un maximum au bord $r = R$: $\sigma_{\theta\theta} = E_0\Theta\Delta T$.

Pour chaque $t \geq 0$, le critère d'endommagement Eq. (3.17) est satisfait partout dans Ω si et seulement si :

$$\Delta T \leq \frac{\sigma_c}{E_0\Theta\sqrt{\mathcal{S}(t=0, r=R, \nu)}}$$

où $\sigma_c = \sqrt{w_1 E_0}$ est donné par l'Eq. (2.16). Nous pouvons alors écrire :

1. Si $E_0\Theta^2\Delta T^2\sqrt{\mathcal{S}(t=0, r=R, \nu)} \leq w_1$ et en introduisant les expressions de (3.45), (3.46), (3.48) dans (3.10) avec $\alpha = 0$ ce qui donne :

$$\mathcal{W}'_t(\mathbf{u}_t, 0)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta) = \int_{\Omega} (w_1 - E_0\Theta^2\Delta T^2\mathcal{S}(t, r, \nu)) \beta dx \quad \forall t > 0, \forall(\mathbf{v}, \beta) \in C_t \times \mathcal{D}_{\alpha}$$

Le second terme de l'équation est déterminé à partir de :

$$E_0\Theta^2\Delta T^2\mathcal{S}(t, r, \nu) = \sigma \mathbf{A}^{-1} \sigma$$

$$\sigma \mathbf{A}^{-1} \sigma = \frac{1}{E_0} (\sigma_{rr}^2 + \sigma_{\theta\theta}^2) - \frac{2\nu}{E_0} \sigma_{rr} \sigma_{\theta\theta}$$

Avec $\mathcal{S}(t, r, \nu)$ est exprimé par :

$$\mathcal{S}(t, r, \nu) = \frac{1}{E_0 \Theta^2 \Delta T^2} \left(A_0 (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^{th}) \cdot (\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^{th}) \right) = 8 \sum_{n=1}^N \frac{\exp(-2k_c \lambda_n^2 t)}{r \lambda_n^4 R^4 J_1(\lambda_n R)} \left((1 - \nu) + (1 + \nu) \frac{R^2 J_1^2(\lambda_n r)}{r^2 J_1^2(\lambda_n R)} - \right. \quad (3.53)$$

$$\left. \left(\frac{J_1(\lambda_n r) J_0(\lambda_n r) \lambda_n R^2}{J_1^2(\lambda_n R)} (1 + \nu) + \frac{1}{2} \lambda_n^2 R^2 \frac{J_0^2(\lambda_n r)}{J_1^2(\lambda_n R)} - (1 - \nu) \lambda_n R \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_1(\lambda_n R) R} \right) \right)$$

Le Tableau. (3.2) montre les valeurs de la fonction \mathcal{S} pour différents temps t avec $r = R$ et pour différentes valeurs de ν . Nous pouvons montrer que le coefficient de poisson ν n'a aucun influence sur le calcul de la fonction \mathcal{S} .

	$t = 0.00001$	$t = 0.0001$	$t = 0.01$	$t = 0.5$	$t = 1$
\mathcal{S} with $\nu = 0.25$	0.991743	0.9901165	0.93222	0.58766	0.45865
\mathcal{S} with $\nu = 0.3$	0.991743	0.9901165	0.93222	0.58766	0.45865
\mathcal{S} with $\nu = 0.35$	0.991743	0.9901165	0.93222	0.58766	0.45865

TABLE 3.2: Calcul de la fonction \mathcal{S} en différents temps t et pour différentes valeurs de ν avec $r = R$.

Nous présentons sur la Fig. (3.11) la fonction $\mathcal{S}(t, r, \nu)$. Nous remarquons que la fonction $\mathcal{S}(t, r, \nu)$ diminue de 0.99 à 0 lorsque le rayon r diminue de $R \rightarrow 0$. D'autre part, $\mathcal{S}(t, r, \nu)$ atteint sa valeur maximale à $t = 0$ et sur le bord ou $r = R$.

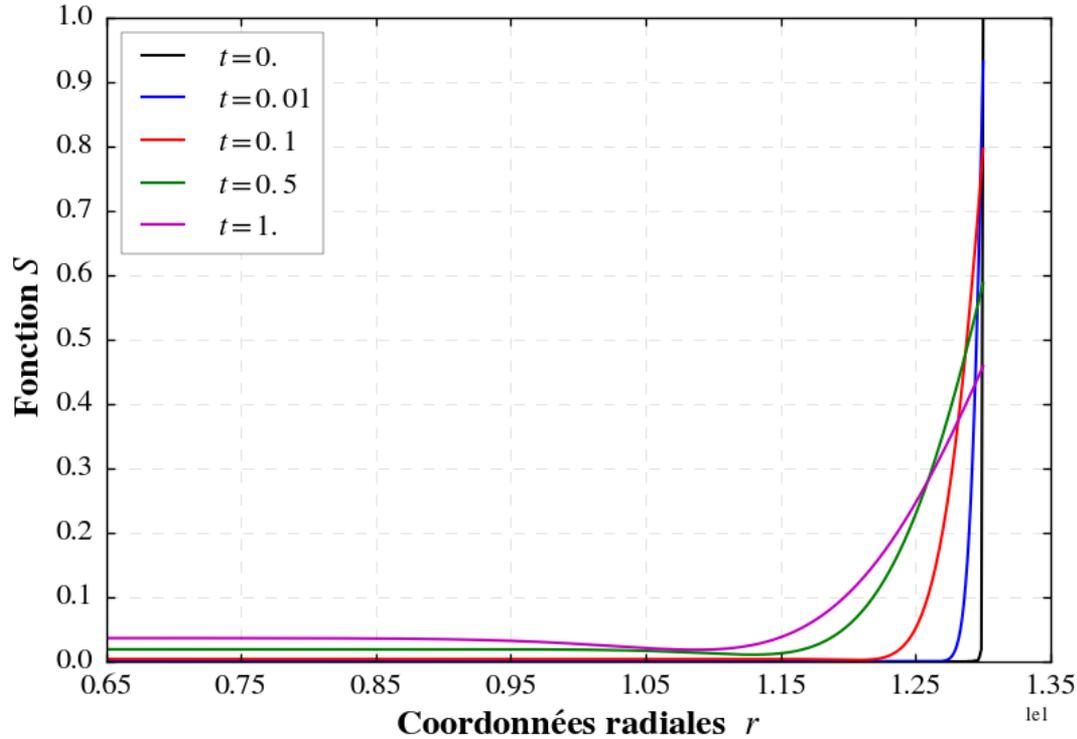


FIGURE 3.11: Évolution de la fonction \mathcal{S} pour différents temps t

Pour pouvoir analyser la stabilité de la réponse élastique, nous évaluons la première dérivée directionnelle de l'énergie totale qui est $\mathcal{W}'_t(\mathbf{u}_t, 0)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta) \geq 0$ et l'égalité est vérifiée si et seulement si $\beta = 0$ partout dans Ω . En prenant $\mathcal{S}^* = \mathcal{S}(t = 0, r = R, \nu)$, le critère d'endommagement qui est également introduit dans l'Eq. (3.17)

doit être satisfait partout dans Ω à chaque instant t , à condition que $\Delta T \leq \frac{\sigma_c}{E_0 \Theta \mathcal{S}^*}$. Avec σ_c est la contrainte critique définie par :

$$\sigma_c = \sqrt{w_1 E_0}, \quad \text{avec} \quad w_1 = \frac{3G_c}{8\ell}. \quad (3.54)$$

Il faut donc passer à la seconde dérivée, de plus en vertu de l'Eq. (3.11), la dérivée seconde s'écrit alors :

$$\mathcal{W}_t''(\mathbf{u}_t, 0)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, 0) = \int_{\Omega} E_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t) dx$$

En conséquence, $\mathcal{W}_t''(\mathbf{u}_t, 0)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, 0) > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in C_t$, donc une phase élastique stable à chaque instant t dans toutes les directions ou aucun endommagement présenté dans la structure $\alpha = 0$.

2. Si $E_0 \Theta^2 \Delta T^2 \sqrt{\mathcal{S}(t=0, r=R, \nu)} > w_1$, à chaque instant t la réponse n'est pas purement élastique, il existe alors une bande d'endommagement axisymétrique sur la surface exposée au choc thermique. Par la suite, la réponse élastique n'est jamais stable. L'endommagement est alors entamé dès que $t > 0$.

Il a été démontré analytiquement qu'il existe un seuil de fissuration, cette intensité thermique critique est déterminée par :

$$\Delta T_c = \frac{\sigma_c}{E_0 \Theta \sqrt{\mathcal{S}(t=0, r=R, \nu)}} = 79,67C \quad \text{avec} \quad \ell = 0.1mm, \quad E_0 = 370GPa, \quad \sigma_c = 220MPa \quad \Theta = 7.510^{-6}K^{-1}, \quad \mathcal{S} = 0.99$$

Un calcul numérique avec une intensité du choc thermique $\Delta T < \Delta T_c$ a été effectué pour vérifier le calcul analytique de la température critique. La Fig. (3.12) présente l'évolution de l'endommagement dans ce cas et le résultat montre que la réponse est purement élastique sans aucun endommagement.

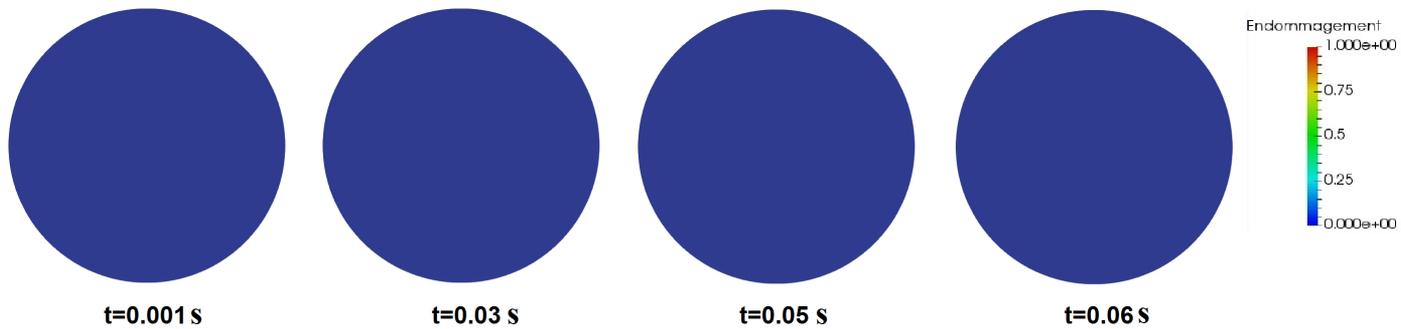


FIGURE 3.12: Évolution d'endommagement dans le cas où $\Delta T \leq \frac{\sigma_c}{E_0 \Theta \sqrt{\mathcal{S}(t=0, r=R, \nu)}}$

La Fig. (3.13) (a), désigne les courbes de la contrainte σ_{rr} en fonction des coordonnées radiales trouvées analytiquement et par éléments finis pour $t = 0.01$ s et au nombre des termes de la série $N = 100$. La courbe obtenue par un calcul éléments finis présente dans le bord de la structure $r = R = 6.5$ mm des perturbations qui sont dues à l'insuffisance du nombre de séries. Dans la Fig. (3.13) (b) nous présentons la courbe de la contrainte σ_{rr} avec $t = 0.01$ s et avec un nombre de séries $N = 500$. Le résultat numérique montre que les perturbations diminuent quand on augmente les termes de la série.

La Fig. (3.13), montre aussi que la condition au limite thermique conduit à une valeur maximale de la contrainte à $t = 0.01$ s à la surface exposée au choc thermique $r = R$. Le calcul analytique montre que la contrainte σ_{rr} juste au bord est nulle ($\sigma_{rr}(r=R) = 0$) et la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ au bord de la structure est positive ($\sigma_{\theta\theta} > 0$), donc c'est le cas de la contrainte de traction. Donc, le fort gradient de température situé sur le bord de la structure engendre une contrainte de traction ortho-radiale.

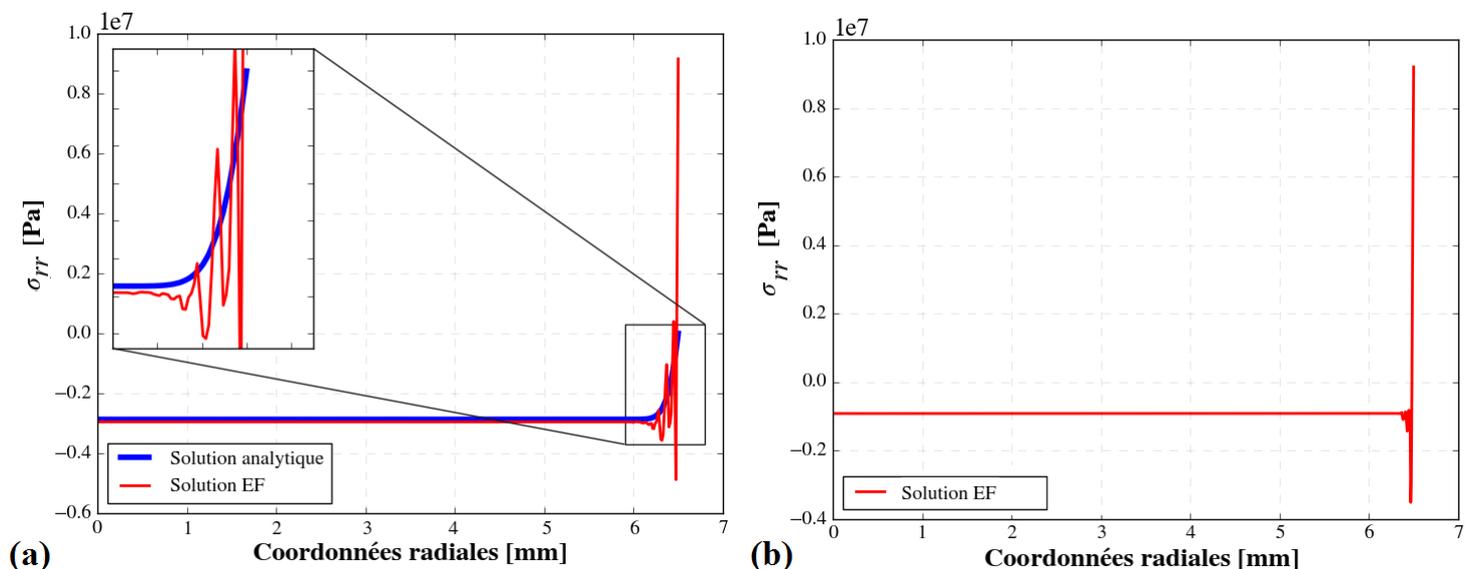


FIGURE 3.13: Contrainte σ_{rr} pendant la phase élastique avec (a) $N = 100$ et $t = 0.01s$, (b) $N = 500$ et $t = 0.01 s$ en différents coordonnées radiales r

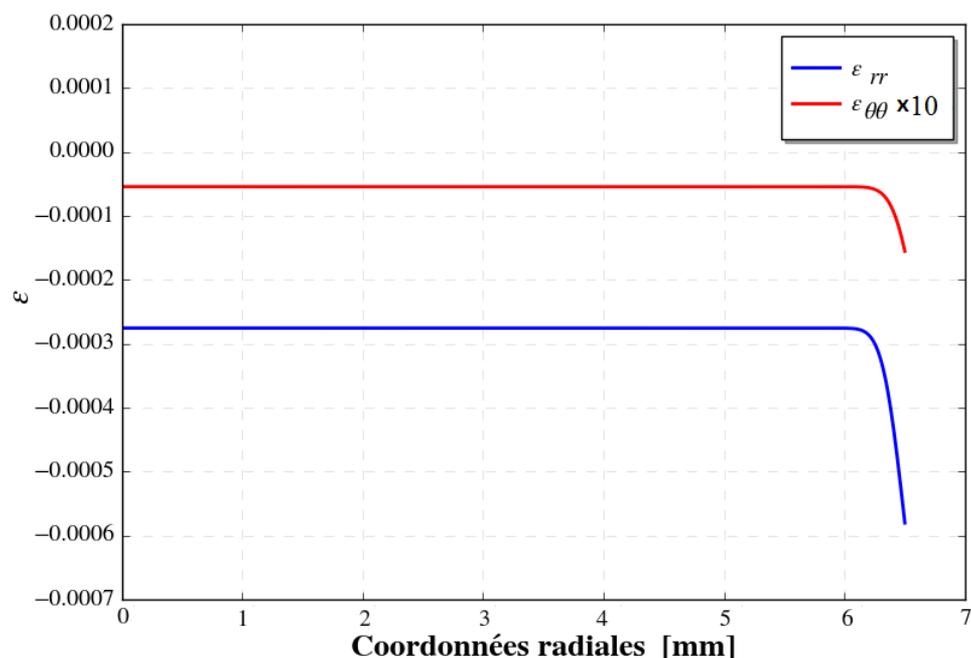


FIGURE 3.14: Déformations ε_{rr} et $\varepsilon_{\theta\theta}$ pendant la phase élastique à $t = 0.01s$

Il ressort de la Fig. (3.14) que la déformation au bord de la structure est négative $\varepsilon_{rr}(r = R) < 0$ et que la déformation ε_{rr} à l'intérieur de la structure est presque nul ce qui entraîne une forte déformation $\varepsilon_{\theta\theta}$ sur le bord du disque, cela induit alors des fissures dans la direction ortho-radiale $\theta\theta$.

3.3.6 Implémentation numérique

Dans la présente étude numérique, cinq disques en céramique sont simulés dans les essais de trempe. Compte tenu de la symétrie des échantillons, seul un quart d'un disque (partie supérieure droite) est simulé en utilisant le modèle numérique proposé. Par la suite, le domaine est un 1/4 de disque de diamètre $R = 6.5$ mm. Afin de garantir la condition de symétrie, nous supposons que la direction horizontale sur la surface inférieur et la direction verticale sur la surface droite

sont adiabatiques. De ce fait, les conditions aux limites de déplacement horizontal null $u_2 = 0$ est imposé sur la surface inférieure. Ainsi qu'un déplacement vertical null $u_1 = 0$, est imposé sur la surface de droite. Les disques en céramiques sont supposés linéaires, élastiques, homogènes et isotropes. Sur la base des travaux de [25]; [49]; [32] la dépendance à la température des propriétés mécaniques pour Al_2O_3 reste approximativement inchangée dans la gamme 200 ~ 600°C.

En résumé, l'architecture numérique est décrite comme suit : étant donné un incrément de temps uniforme arbitraire Δt et pour chaque pas de temps $t_j = j\Delta t$ où $j \in \mathbb{N}$, nous recherchons une solution particulière (u_{t_j}, α_{t_j}) qui minimise l'énergie totale Eq. (3.9) et qui satisfait les conditions de stabilité du premier ordre Eq. (3.12), Eq. (3.13).

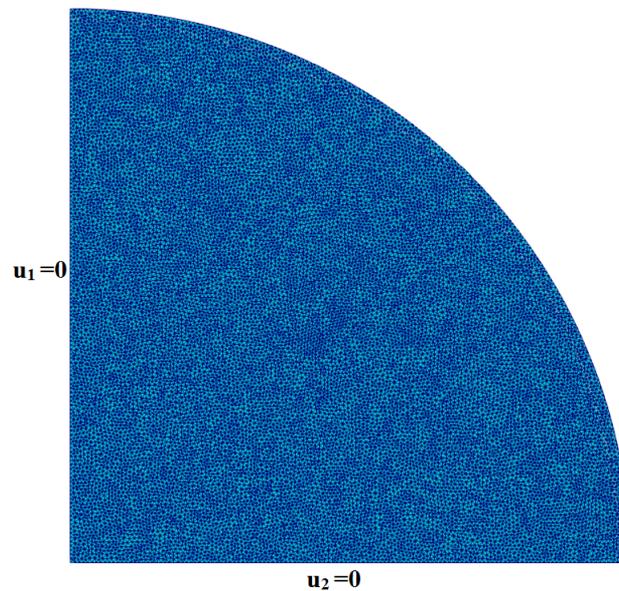


FIGURE 3.15: Le maillage utilisé pour la simulation numérique du (1/4) de disque

La discrétisation spatiale est obtenue par la méthode classique des éléments finis P1 de Lagrange. Le problème est résolu en utilisant la méthode de minimisation alternée résumée dans l'algorithme (4).

Algorithm 4 La mise en œuvre numérique basée sur la minimisation alternée du problème de choc thermique da la structure cylindrique

- 1: *initialisation* : T_i, T_B
 - 2: Donnez les paramètres de matériau et les paramètres du modèle (voir Tab. (??))
 - 3: Donner la condition de l'étape du chargement précédente $\mathbf{u}_{t_{j-1}}$ et $\alpha_{t_{j-1}}$
 - 4: Calculer le champ de température en utilisant l'Eq. (3.37)
 - 5: Calculer le champ de déformation thermique en utilisant l'Eq. (3.39)
 - 6: Minimisation alternée de la fonction Eq. (3.9)
 - 7: **A** chaque pas de temps t_j
 - Tandis que** la convergence n'est pas assurée **Faire**
 - Répéter**
 - Résoudre $\mathbf{u}_{t_j} = \operatorname{argmin} \mathcal{W}(\mathbf{v}, \alpha_{t_{j-1}})$ par min de l'Eq. (3.9) en fixant α
 - Résoudre $\alpha_{t_j} = \operatorname{argmin}_{\alpha \geq \alpha_{t_{j-1}}} \mathcal{W}(\mathbf{u}_{t_j}, \beta)$ par min de l'Eq. (3.9) en fixant \mathbf{u}
 - jusqu'à** la tolérance est satisfaite
 - Fin Tandis que**
 - Fixer $t_j = t_{j+1}$
 - 8: **Fin Pour**
-

L'algorithme est réalisé dans un environnement de calcul basé sur le logiciel FEniCS [6]. Les paramètres mécanique et thermique utilisés dans la simulation numérique sont présentés dans le Tab. (3.3). Comme décrit par [75], l'initiation des fissures n'est pas seulement liée à la géométrie et aux chocs thermiques, mais dépend également de la longueur caractéristique ℓ des matériaux. La longueur interne ℓ est estimée à partir d'une contrainte critique σ_c variant dans la gamme de (180 ~ 240) MPa [40], [50], ce qui conduit à varier de 0.06 à 0.1 mm selon l'Eq.(2.16).

E_0 (Module d'Young, GPa)	ν (Coefficient de Poisson)	Θ (Coefficient de dilatation, K^{-1})
370	0.3	7.5×10^{-6}
ℓ (Longueur interne, mm)	G_c (Ténacité, N/mm)	k_c (Diffusivité thermique, mm^2/s)
0.06 ~ 0.1	24.3×10^{-3}	1

TABLE 3.3: Paramètres thermique et mécanique utilisés dans les simulations numériques

3.3.7 Résultats numériques

Le processus d'évolution des motifs de fissures dû au choc thermique a été reproduit par des simulations numériques. Dans cette section, nous essayons d'évaluer la formation des motifs de fissures et l'influence des paramètres mécaniques et thermiques tels que la longueur interne ℓ et l'intensité du choc thermique $\Delta T = T_i - T_B$ sur les phases d'initiation et de propagation des fissures. L'étude sera donc réalisée pour différentes valeurs de ℓ et ΔT avec un rayon $R = 6.5$ mm. L'étude est menée pour $0 < t < 3$ s. En effet, nous notons l'existence de deux phases :

1. **Une phase d'endommagement axisymétrique** pour $0 < t < t_b$.
2. **Une phase de bifurcation** pour $t > t_b$.

où t_b est le temps critique à partir duquel il y a une localisation des fissures.

3.3.7.1 Phase axisymétrique

L'endommagement axisymétrique ($t < t_b$) peut se produire au bord du disque avant le processus de fissuration. La taille de la zone d'endommagement et son évolution dépendent de l'intensité du choc thermique ΔT . Dans la Fig. (3.16) (a), nous montrons le profil d'endommagement au niveau de la partie du bord du disque. En général, l'épaisseur de la partie endommagée est très faible et dépend de la valeur du paramètre ℓ . La Fig. (3.16) (b) illustre l'évolution temporelle de la distribution d'endommagement pendant la phase axisymétrique pour $\Delta T = 385$ K et pour $\ell = 0.1$ mm. Nous pouvons observer que l'endommagement axisymétrique augmente rapidement avec le temps.

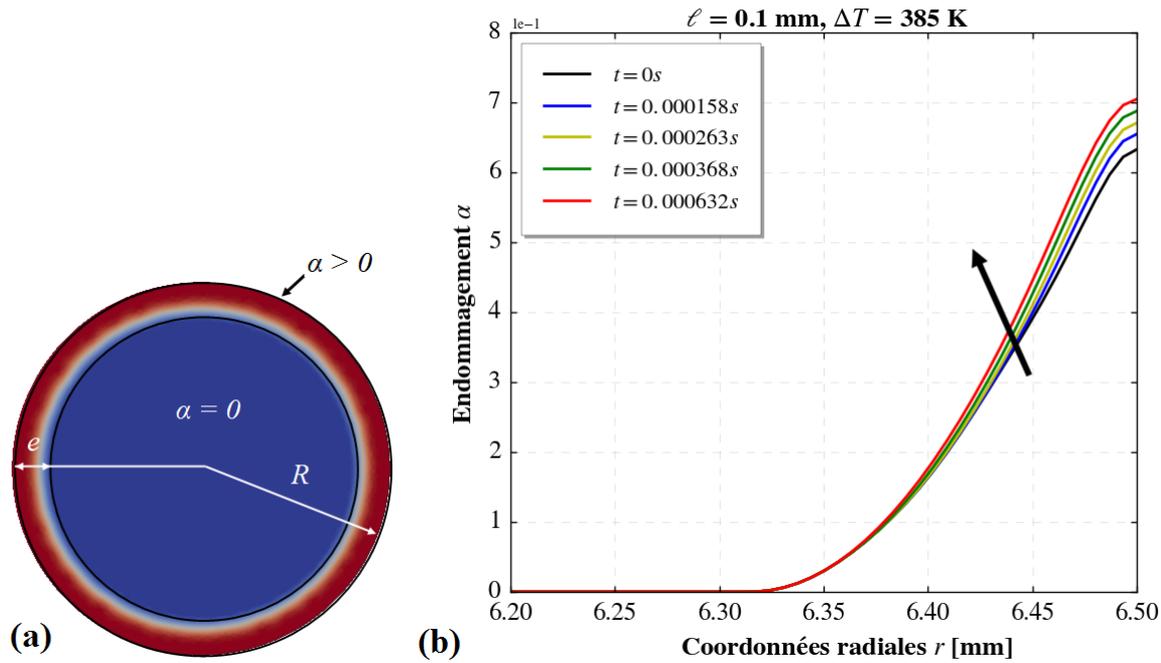


FIGURE 3.16: Réponse d'endommagement axisymétrique : (a) un exemple du profil de l'endommagement axisymétrique dans le disque, (b) Évolution temporelle de la solution d'endommagement axisymétriques pour $\Delta T = 385$ K et $\ell = 0.1$ mm ;

La Fig. (3.17) montre la dépendance de l'intensité du choc thermique ΔT de la solution d'endommagement axisymétrique. À un temps $t = 0,0003$ s et pour $\ell = 0.1$ mm, le champ d'endommagement dans la direction radiale $0 < r < R$ pour cinq intensités de choc thermique est montré dans la Fig. (3.17)(a). L'endommagement maximal produit sur la surface latérale où $r = R$ et augmente avec l'intensité du choc thermique. Comme le montre sur la Fig. (3.17)(b), l'épaisseur d'endommagement dépend également de l'intensité du choc thermique.

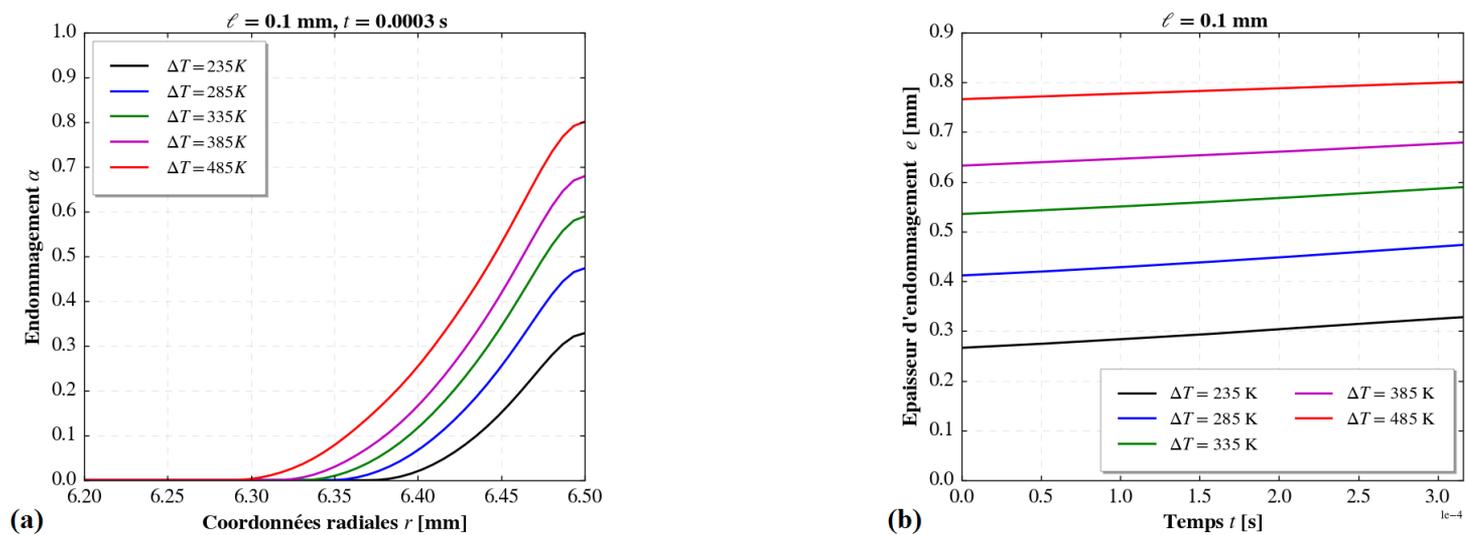


FIGURE 3.17: (a) Évolution de l'endommagement axisymétrique pour différentes intensités thermiques ΔT en [K] à $t = 0.0003$ s, (b) évolution de l'épaisseur d'endommagement

Nous avons tracé dans la Fig. (3.18) l'endommagement en fonction de l'intensité du choc thermique ΔT [235K, 258K, 335K, 385K, 485K] au temps fixe t et à une valeur fixe du longueur interne ℓ . En utilisant l'interpolation avec les fonctions numpy en langage python. Nous avons choisi l'interpolation cubique. Par la suite, l'endommagement dans la

phase axisymétrique peut être approximé dans ce cas par la relation suivante :

$$\alpha(R, \Delta T) \simeq -0.000011\Delta T^2 + 0.007455\Delta T - 0.888775 \text{ pour } R = 6.5\text{mm}, t = 0.0003\text{s}, \ell = 0.1\text{mm} \quad (3.55)$$

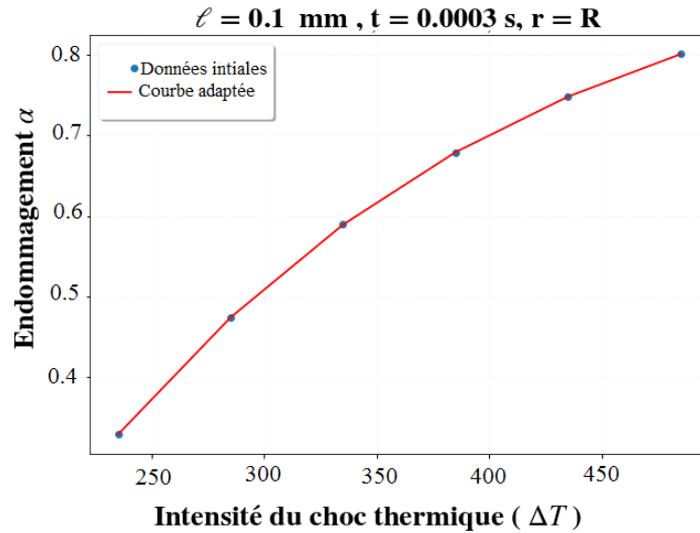


FIGURE 3.18: Endommagement axisymétrique α sur $r = R$ en fonction de l'intensité du choc thermique ΔT avec $\ell = 0.1$ mm à l'instant $t = 0.0003$ s

Dans l'Eq. (3.55), le coefficient du polynôme ΔT^3 est égal à zéro, et nous avons vérifié que les coefficients du polynômes a_n sont nuls à partir de $n > 2$. La Fig. (3.19) illustre la dépendance de la longueur interne ℓ de la solution d'endommagement axisymétrique. Pour un temps t et pour une température de choc thermique ΔT fixe, le champ d'endommagement le long de la direction radiale $0 < r < R$ pour trois longueurs internes ℓ est illustré sur la Fig. (3.19)(a). À partir de la Fig. (3.19), nous pouvons observer que la valeur maximale de l'endommagement et l'épaisseur de la zone endommagée dépendent de la longueur interne ℓ : elles augmentent lorsque ℓ augmente. Selon l'Eq. (3.54), la longueur interne ℓ est inversement proportionnelle à la contrainte critique σ_c . En conséquence, à une intensité de choc thermique ΔT et à un temps t fixés, plus la longueur interne ℓ est petite plus l'endommagement se localise au voisinage du bord comme le montre la Fig.(3.19).

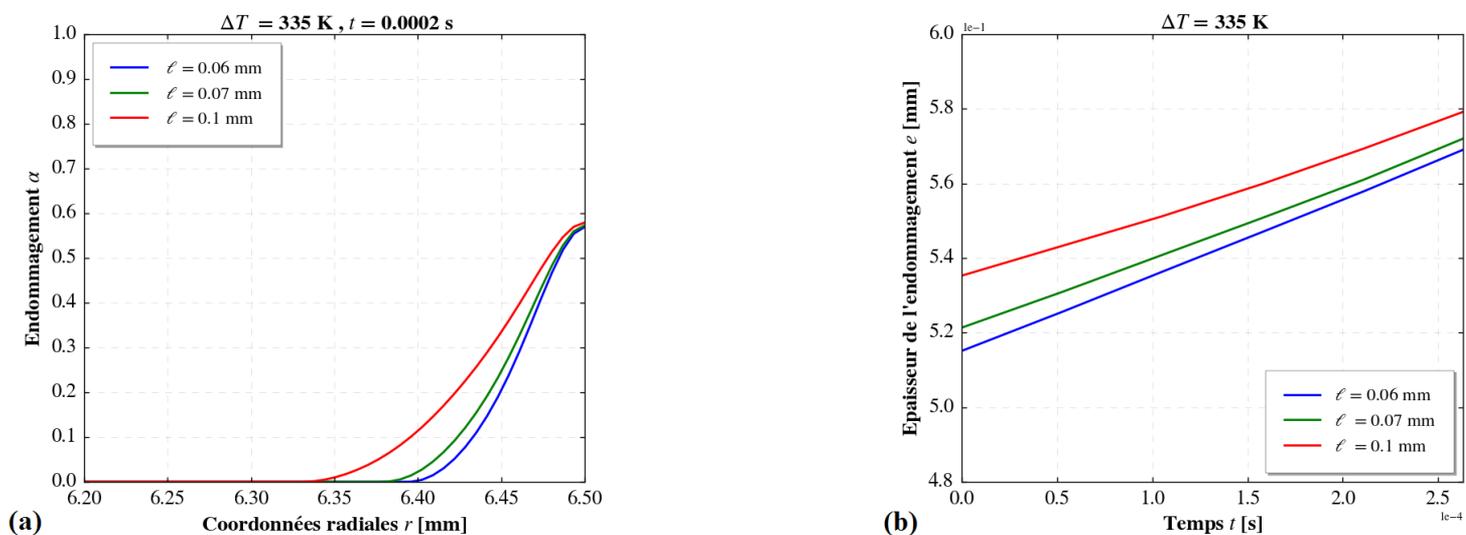


FIGURE 3.19: (a) Évolution de l'endommagement axisymétrique pour différentes longueurs internes ℓ [mm] à $t = 0.0002$ s, (b) évolution de l'épaisseur de l'endommagement

3.3.7.2 Bifurcation de la branche fondamentale

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons au temps $t > t_b$, où t_b est le temps à partir duquel la solution fondamentale devient instable. La bifurcation vers une solution périodique est le début du processus de localisation aboutissant à la formation des schémas de fissures périodiques.

Lorsque la température du choc thermique est inférieure à une température critique $\Delta T < \Delta T_c$, les calculs numériques montrent qu'il y a seulement une phase élastique et aucune initiation de fissure n'est observée dans les échantillons. Cependant, lorsque $\Delta T > \Delta T_c$, et après un temps très court, le phénomène de bifurcation peut se produire. Les fissures sont initiées presque instantanément. En raison du développement rapide des fissures, l'espacement des fissures atteint une valeur minimale, dépendant de la longueur interne ℓ et de la température du choc thermique ΔT . Ensuite, l'espacement augmente avec le temps t car certaines fissures cessent de se propager. Autrement, les fissures se propagent d'abord en gardant l'espacement initial constant. Ensuite, la vitesse de propagation diminue progressivement jusqu'à ce que certaines d'entre elles s'arrêtent à se développer. Seule une partie des fissures continue à se propager avec un doublement de la période spatiale. Ce phénomène peut se répéter et former ainsi un motif de fissures hiérarchique.

Dans un premier lieu, l'étude de la 1ère bifurcation à partir de la solution axisymétrique en fonction de la variation du pas de temps et de la taille du maillage a été réalisée. En effet, selon les valeurs de longueur interne ℓ et du pas de maillage h , il est possible de rater ce phénomène (voir Fig. (3.20)), si le pas de temps est trop grand.

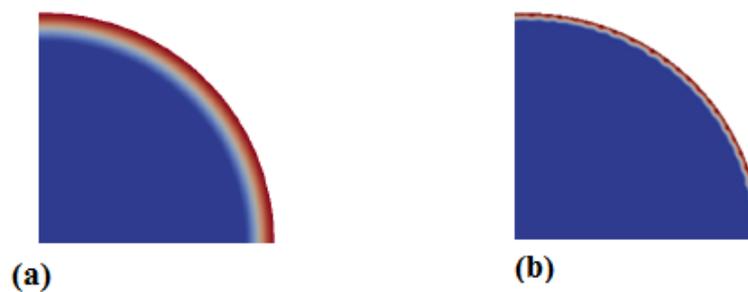


FIGURE 3.20: Évolution de l'endommagement au même pas de temps : (a) Pour dt trop grand : l'état axisymétrique, (b) Pour dt assez petit : l'état de bifurcation

À une longueur interne $\ell = 0.07$ mm fixée, les valeurs prises pour h sont 0.01 mm et 0.005 mm. Nous obtenons les résultats suivants : (**Oui** = 1ère bifurcation visible et **Non** = non visible).

	$h = 0.01$	$h = 0.005$
$dt = 0.01$	Oui	Non
$dt = 0.005$	Oui	Non
$dt = 0.001$	Oui	Oui

TABLE 3.4: Bifurcation en fonction du pas de temps dt et de la taille de maillage h

Nous pouvons constater à partir du Tab.(3.4), que pour le cas $h = 0.01$ mm et, pour toutes les valeurs de dt , nous arrivons à voir la première de bifurcation. Cependant, pour le cas $h = 0.005$ mm et pour $dt = h = 0.005$ mm, on n'arrive pas à capter la bifurcation. Ainsi, plus le pas h du maillage est petit, plus il est important de prendre des pas de temps dt petits.

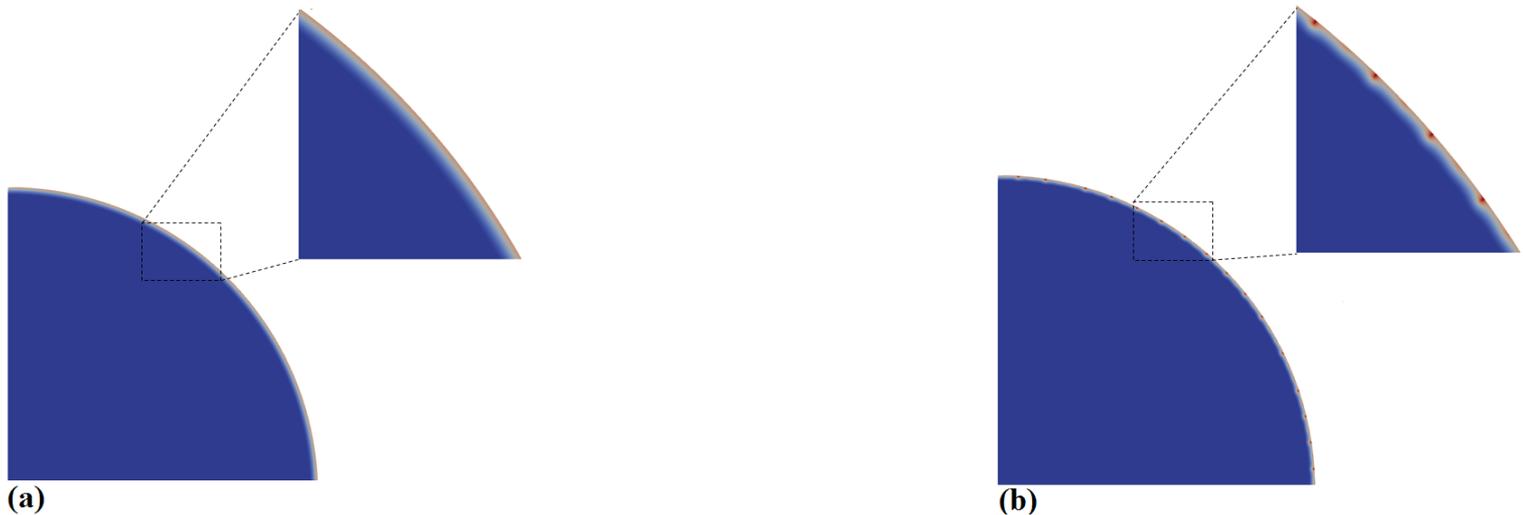


FIGURE 3.21: Champ d'endommagement à $t = 0.0006$ s et $\Delta T = 335$ K : pour a) $\ell = 0.1$ mm et b) $\ell = 0.07$ mm, un zoom du champ d'endommagement est utilisé pour mieux représenter l'endommagement axisymétrique et la variation angulaire après la bifurcation.

La Fig. (3.21) illustre les résultats de la simulation numérique du champ d'endommagement pour $\Delta T = 335K$ et pour deux longueurs internes $\ell = 0.1$ mm et $\ell = 0.07$ mm à $t = 0.0006$ s. La Fig. (3.21) (a) montre que pour $\ell = 0.1$ mm et à $t = 0.0006$ s, l'endommagement est toujours dans la phase axisymétrique. Cependant, comme le montre la Fig. (3.21)(b), une bifurcation de la solution numérique peut être observée pour $\ell = 0.07$ mm au même instant t . Nous notons également l'apparition des oscillations angulaires dans le champ d'endommagement, en particulier pour $r = R$. Cela signifie que la longueur interne ℓ a une influence importante sur le temps de bifurcation. Le Tab. (3.5) présente, pour une intensité du choc thermique $\Delta T = 335K$ fixe, l'influence de la longueur interne ℓ sur le temps de la bifurcation t_b .

	$\ell = 0.05$ mm	$\ell = 0.06$ mm
$\Delta T = 335$ K	$t_b = 0.000368$	$t_b = 0.000473$

TABLE 3.5: Dépendance du temps de bifurcation en fonction de la longueur interne ℓ

Le Tab. (3.6) présente, pour une longueur interne $\ell = 0.07$ mm fixe et pour différentes intensités du choc thermique ΔT les résultats numériques en terme de t_b .

	$\Delta T = 335$ K	$\Delta T = 485$ K
$\ell = 0.07$ mm	$t_b = 0.000631$	$t_b = 0.0000420$

TABLE 3.6: Dépendance du temps de bifurcation en fonction de l'intensité du choc thermique ΔT

Nous pouvons démontrer que l'augmentation de la longueur interne ℓ retarde la fissuration. Et l'augmentation de l'intensité du choc thermique ΔT provoque une fissuration qui commence à se propager tôt. En effet, le temps de bifurcation augmente avec l'augmentation de la longueur interne ℓ et diminue avec l'augmentation de l'intensité du choc thermique ΔT . Après un certain temps t et en fonction de la longueur interne ℓ , une distribution périodique d'endommagement peut être observée dans la zone du bord du disque. Cela indique que la solution numérique a bifurqué de la branche fondamentale qui représente l'endommagement axisymétrique vers une branche particulière qui représente le processus de fissuration.

Afin d'évaluer l'influence du paramètre ℓ et ΔT sur la bifurcation du champ d'endommagement, nous avons tracé la variation du scalaire α au bord du disque et le long du périmètre. Des courbes sinusoidales peuvent être obtenues. Ces

courbes ont été traitées par la méthode de la transformation rapide de Fourier (FFT) afin de déterminer la période de la distribution d'endommagement. Puis la période D a été calculée pour différentes valeurs de ℓ . Cette méthode est appliquée pour des intensités de choc thermique $\Delta T = 235$ K et $\Delta T = 485$ K et pour des longueurs internes $\ell = 0.08$ mm et $\ell = 0.1$ mm.

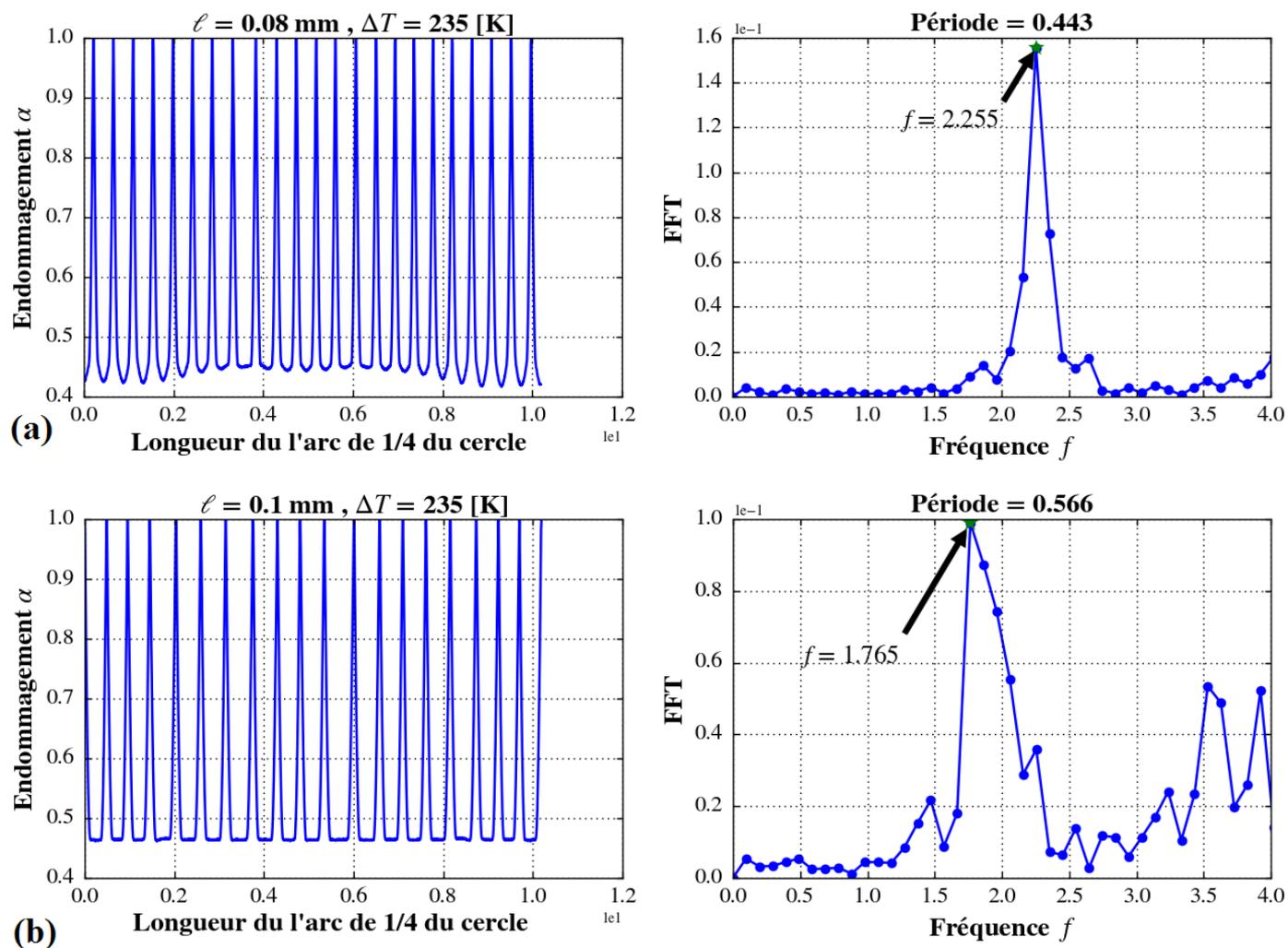


FIGURE 3.22: Localisation de la fissure pour différentes valeurs de ℓ avec $\Delta T = 235$ K et (a) $\ell = 0.08$ mm, (b) $\ell = 0.1$ mm

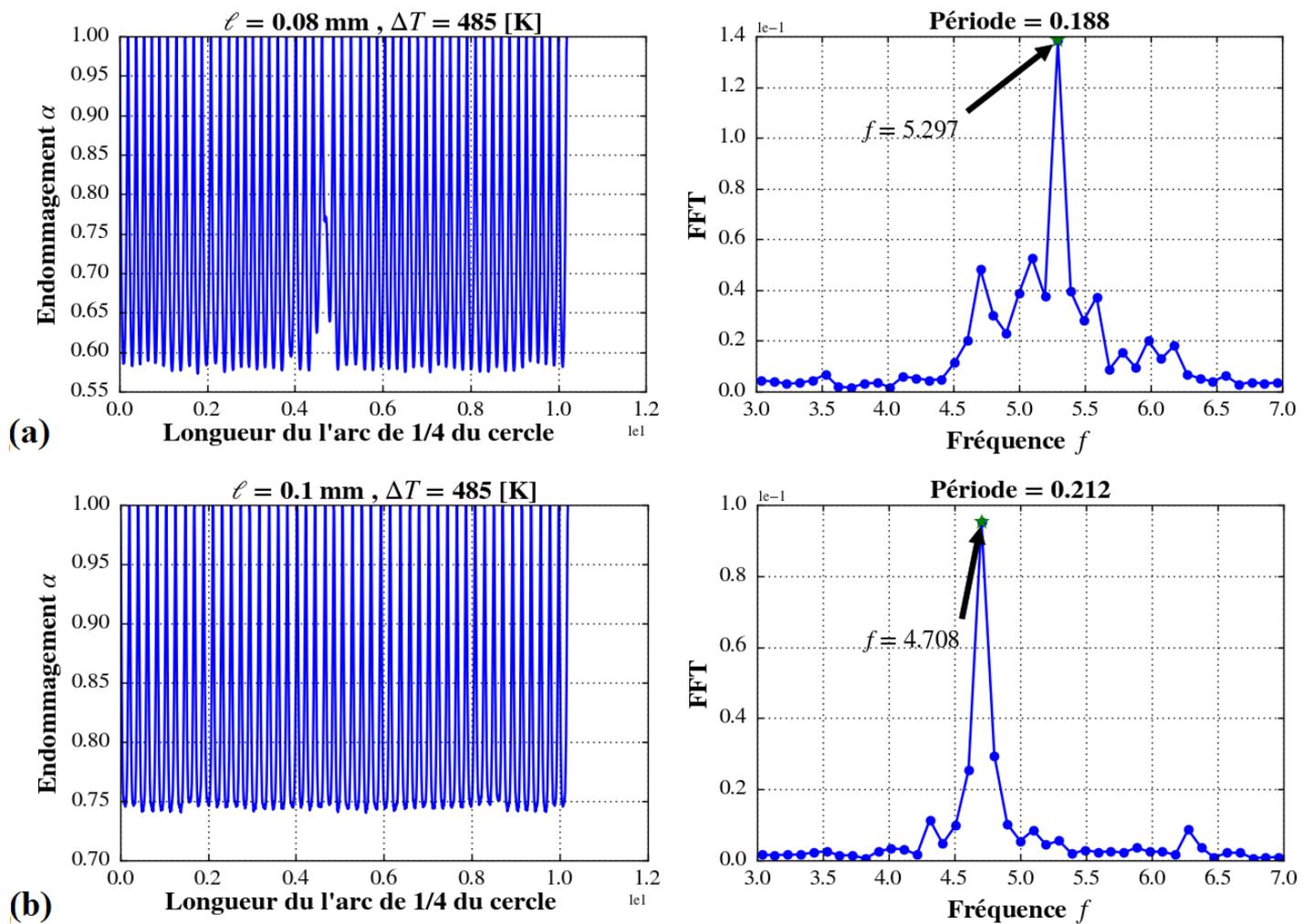


FIGURE 3.23: Localisation de la fissure pour différentes valeurs de ℓ avec $\Delta T = 485 \text{ K}$ et (a) $\ell = 0.08 \text{ mm}$, (b) $\ell = 0.1 \text{ mm}$

Selon les résultats obtenus sur la Fig. (3.22) et sur la Fig. (3.23), nous avons illustré sur la Fig. (3.24), la longueur d'onde (la période) en fonction de la longueur caractéristique ℓ pour chaque température d'impact sur une échelle logarithmique. À partir de ces résultats, nous pouvons clairement observer l'influence de la longueur interne ℓ sur la densité des fissures émises suite à un choc thermique : le nombre de fissures diminue lorsque ℓ augmente, indépendamment de l'intensité du choc thermique ΔT .

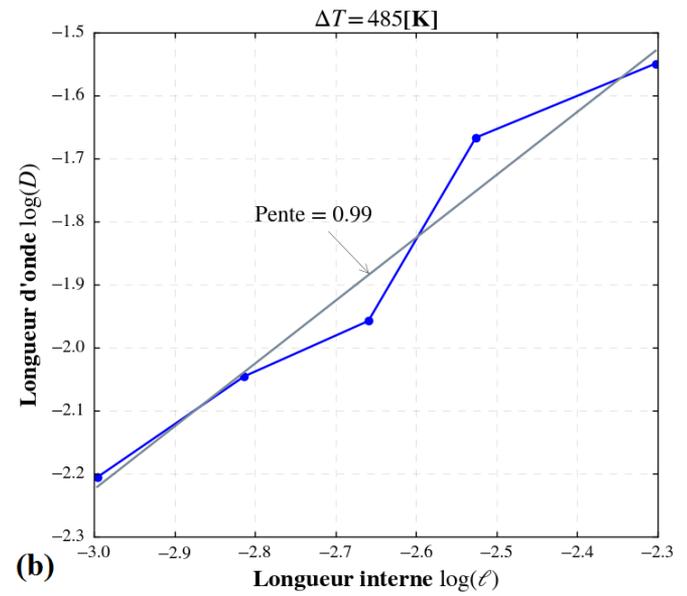
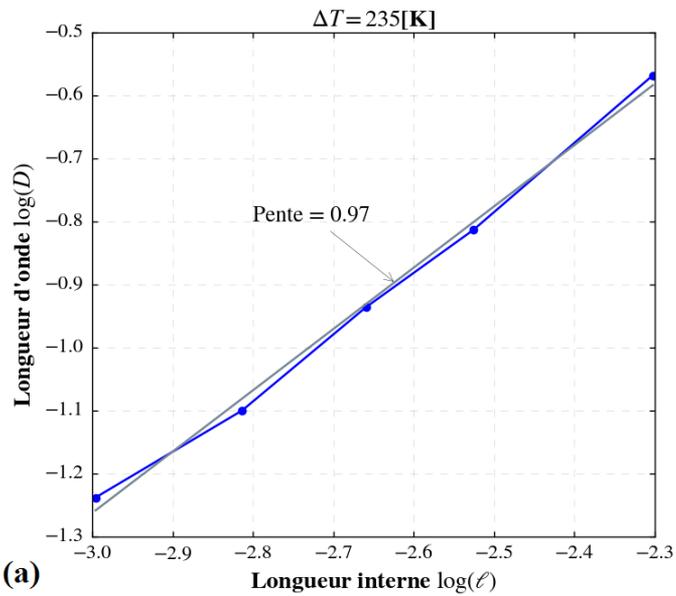


FIGURE 3.24: Distance entre deux fissures consécutives en fonction de la longueur interne ℓ pour, (a) $\Delta T = 235$ K et (b) $\Delta T = 485$ K

La Fig. (3.25) montre le schéma de fissuration pour différentes intensités de choc thermique ΔT avec une longueur interne fixe $\ell = 0.07$ mm à $t = 0.0011$ s. En effet, la figure montre que la densité des fissures augmente avec l'intensité du choc thermique. Afin de vérifier l'influence de l'intensité du choc thermique sur la distance entre deux fissures consécutives, nous avons étudié la distribution de l'endommagement le long du périmètre du disque pour une longueur interne fixe ℓ et pour différentes intensités du choc thermique ΔT .

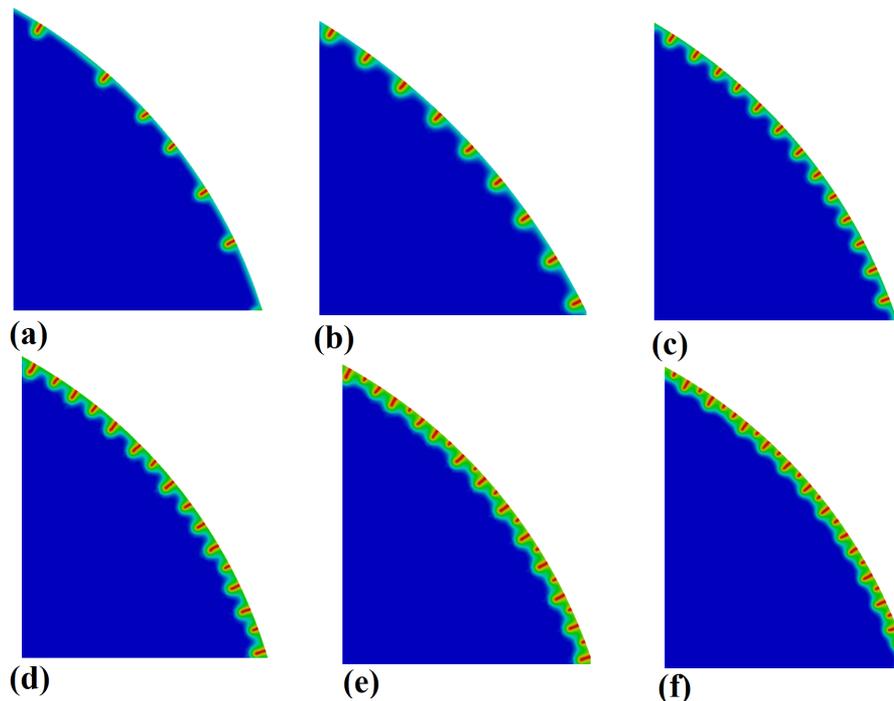


FIGURE 3.25: Espacement des fissures au stade de l'initiation pour différentes intensités du choc thermique ΔT avec $\ell = 0.07$ mm à $t = 0.0011$ s, (a) $\Delta T = 185$ K, (b) $\Delta T = 235$ K, (c) $\Delta T = 285$ K, (d) $\Delta T = 335$ K, (e) $\Delta T = 385$ K et (f) $\Delta T = 485$ K

La méthode FFT a été utilisée pour déterminer la période du motif de fissure. Cette dernière diminue avec l'augmentation de l'intensité du choc thermique ΔT . Ensuite, nous avons représenté sur la Fig. (3.26) la longueur d'onde sur une échelle logarithmique en fonction de l'intensité du choc thermique ΔT .

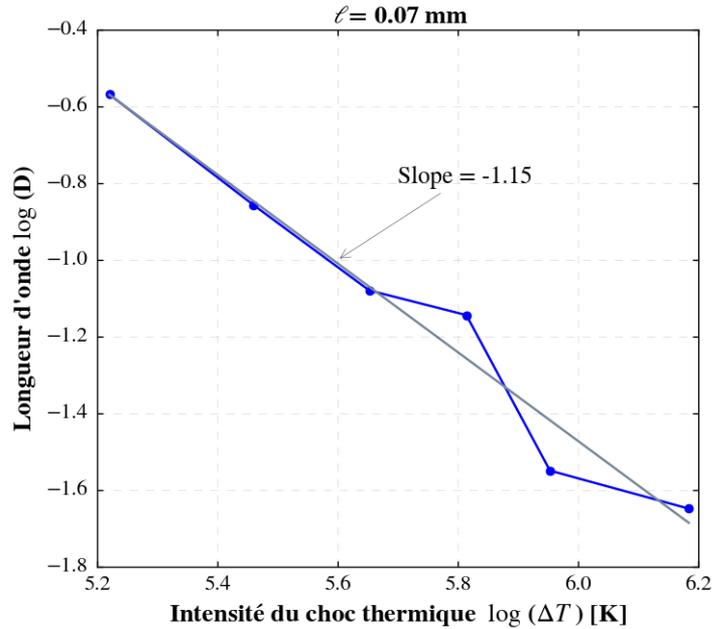


FIGURE 3.26: Distance entre deux fissures consécutives en fonction de l'intensité du choc thermique ΔT avec $\ell = 0.07$ mm

Approximativement, la distance moyenne entre deux fissures consécutives peut être exprimée par la relation suivante :

$$D = \mathcal{F} \frac{\ell}{\Delta T} \quad (3.56)$$

où \mathcal{F} est un coefficient dépendant uniquement des paramètres du matériau. Les résultats mentionnés ci-dessus montrent que la longueur interne ℓ joue un rôle important dans la phase d'endommagement axisymétrique et dans la phase d'initiation de la fissure. La taille de la zone endommagée, le temps critique de la bifurcation et l'intervalle des fissures consécutives sont tous influencés par la valeur de cette longueur interne ℓ . Bien que, la phase de propagation des fissures est essentiellement contrôlée par l'énergie de rupture G_c [40], elle ne semble plus suffisante pour décrire précisément les étapes d'endommagement et d'initiation des fissures. Cette dernière doit être étudiée en utilisant deux paramètres parmi G_c , σ_c et ℓ .

3.3.7.3 Caractéristiques du modèle des fissures

Les motifs de fissures obtenus à l'aide des simulations numériques, en prenant une longueur interne fixe $\ell = 0.1$ mm, une taille du maillage $h = 0.05$ mm et un incrément du temps $dt = 0.005$, sont illustrées sur la Fig. (3.27). Ce dernier présente pour différents temps t , l'évolution des fissures dues à des chocs thermiques de différentes températures. Les caractéristiques périodiques et hiérarchiques des motifs de fissures peuvent être clairement révélées par les simulations numériques. En effet, des fissures multiples sont obtenues pour différentes températures de choc thermique.

Les principales étapes de l'évolution de l'endommagement sont représentées dans la Fig. (3.27). Au début du refroidissement, une bande d'endommagement axisymétrique se crée sur la surface exposée au choc thermique. Ensuite, la Fig. (3.27) (Phase 2), montre que certaines fissures sont initiées à la surface de l'échantillon en contact avec l'eau à $t = 0.01$ s, ce qui est induit par le fort gradient thermique. C'est la phase de bifurcation ou l'apparition d'un réseau de fissures, réparti périodiquement émanant du bord du cylindre. En effet, la Fig. (3.27) (a)(Phase 2), présente la phase de localisation de l'endommagement qui se termine par la construction d'une fissure. Nous pouvons également observer sur la Fig. (3.27) (a)(Phase 2), que les fissures dues au choc thermique, qui sont des fissures de traction, sont perpendiculaires au bord du cercle et pointent vers le centre. Lorsque le front de refroidissement pénètre plus profondément $t = 0.3s - 1.74s$, certaines fissures formées initialement cessent de croître tandis que d'autres continuent à se propager

Fig. (3.27) (a)(Phase 3). La dernière phase, est la phase de l'arrêt des fissures Fig. (3.27)(a) (Phase 4).

Le processus de la fissuration thermique peut être obtenu lorsque la température de la trempe des éprouvettes est égale à $\Delta T = 285K, 335K, 385K, 485K$ comme le montre la Fig. (3.27)(b) (c), (d) et (e). En effet, initialement, à un temps critique, les fissures apparaissent sur le bord avec un espacement presque égal, puis elles se propagent à l'intérieur des structures rapidement et uniformément. Ensuite, la vitesse de propagation diminue progressivement jusqu'à ce que certaines d'entre elles cessent de croître. Seule une partie des fissures continuent à se propager avec un doublement approximatif de la période, de sorte que l'espacement des fissures augmente.

La Fig. (3.27) montre que la distance entre deux fissures diminue lorsque la température de la structure augmente. De plus, une structure hiérarchique des fissures avec plusieurs niveaux de longueur peut être observée dans les modèles de fissures finaux. Ces caractéristiques hiérarchiques de l'espacement et de la longueur des fissures sont causées par les multiples fissures en interaction. Nous pouvons remarquer que les fissures les plus longues continuent à se propager lorsque l'intensité du choc thermique augmente. Ces caractéristiques se retrouvent dans la plupart des essais de trempe des matériaux céramiques.

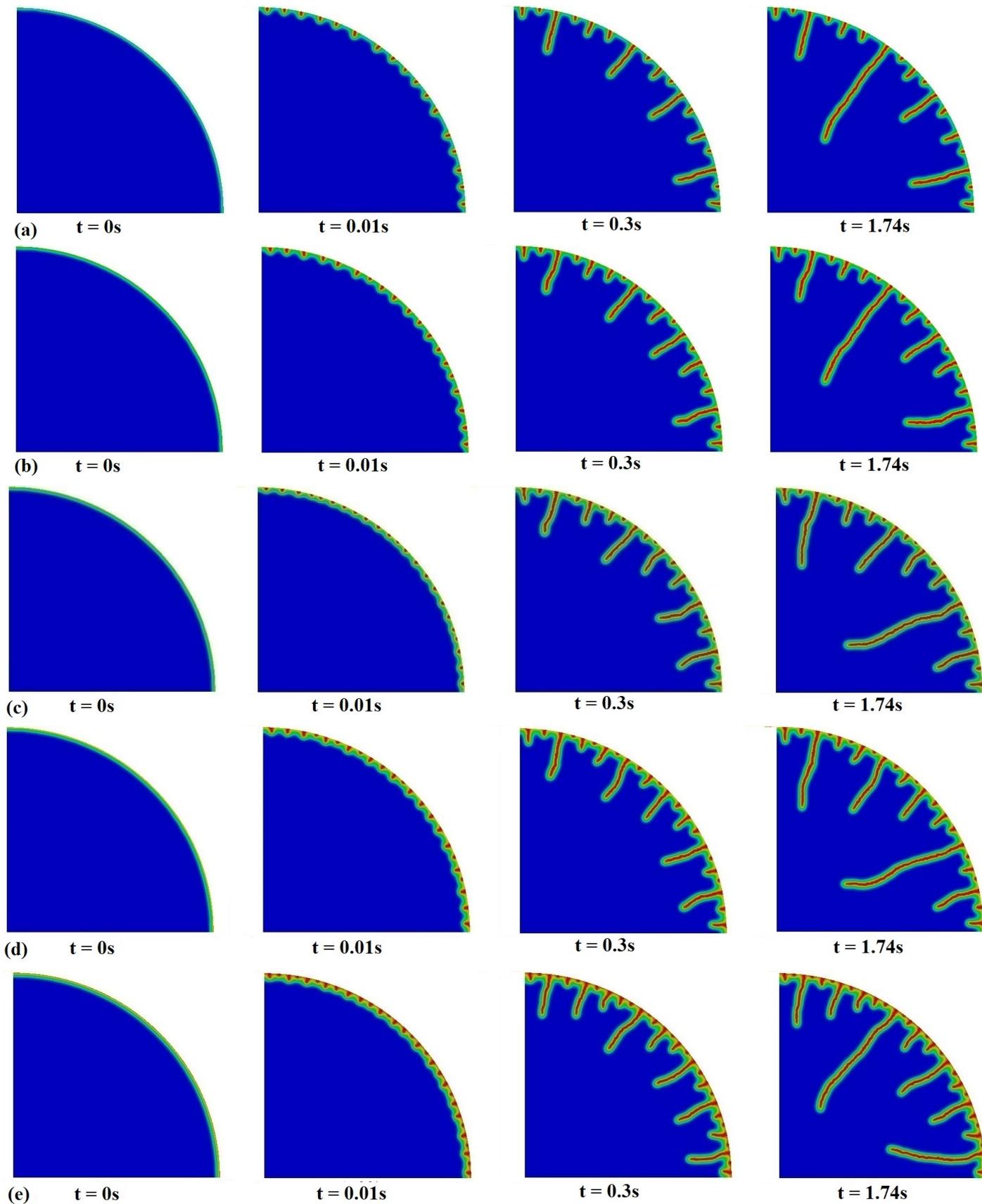


FIGURE 3.27: Modèles de fissures pendant le processus de trempe pour différentes intensités de choc thermique (a) $\Delta T = 235$ K, (b) $\Delta T = 285$ K, (c) $\Delta T = 335$ K, (d) $\Delta T = 385$ K, (e) $\Delta T = 485$ K

3.3.7.4 Comparaison avec les expériences

Afin de réaliser une comparaison avec les expériences, l'ensemble du processus de fissuration a été simulé pour différentes intensités de choc thermique avec une longueur interne fixe $\ell = 0.1$ mm et une taille du maillage $h = 0.05$ mm. La Fig. (3.28) présente la comparaison entre les modèles de fissures finaux obtenus expérimentalement et numériquement. Les résultats indiquent que plusieurs fissures sont initiées à partir du bord et se propagent ensuite dans la structure. Nous pouvons observer que les motifs de fissures de choc thermique obtenus à partir des simulations numériques sont bien en accord avec les observations expérimentales [51].

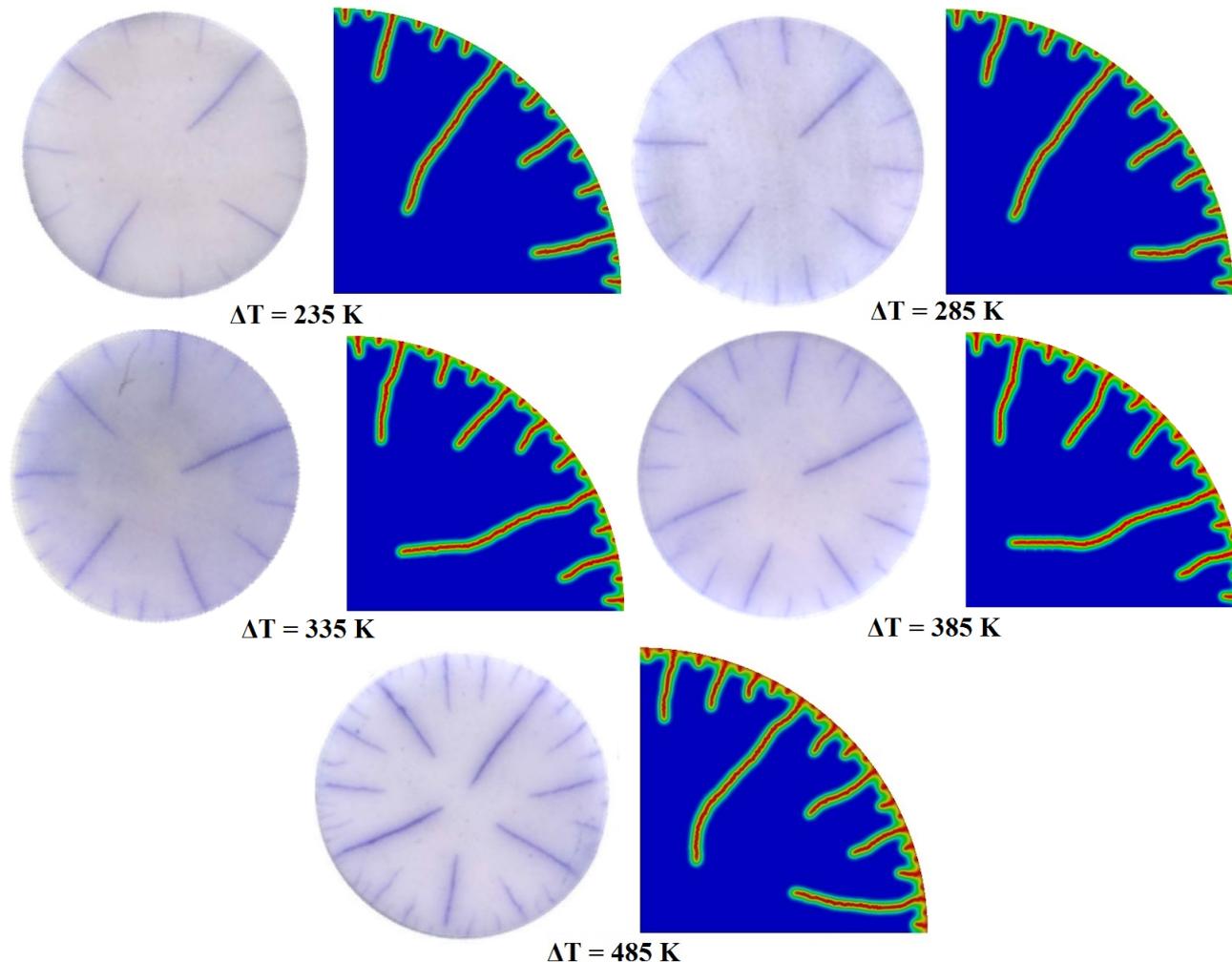


FIGURE 3.28: Comparaison des modèles de fissures de choc thermique finales à différentes températures de choc thermique obtenus à partir des essais numériques et des observations expérimentales [51].

Les résultats de la simulation numérique montrent que de nombreux fissures thermiques sont introduites sur le bord des éprouvettes circulaires en céramiques et se propagent vers le centre des échantillons. Les cheminements de croissance des fissures obtenus par les simulations numériques et par les essais expérimentaux sont similaires. La structure hiérarchique et périodique des motifs de fissures présentée dans les expériences est fidèlement reproduite au moyen des simulations numériques. En effet, le modèle numérique proposé a la capacité de capturer les fissures multiples périodiques et hiérarchiques des solides fragiles dans les essais de trempe.

De même, les différents motifs de fissures dues au choc thermique de cinq échantillons, montrent que le nombre de fissures thermiques augmente avec l'augmentation de la température de la trempe comme le montre la Fig. (3.28). Nous pouvons également constater, que le nombre total de fissures obtenu par les simulations numériques est légèrement supérieur à celui observé dans les expériences. Cette légère différence peut s'expliquer par le fait que les conditions aux limites réelles ne sont pas exactement appliquées dans le modèle numérique. En effet, comme la condition aux limites

de type Dirichlet est utilisée à la place de la condition aux limites de convection thermique, le flux de chaleur à la limite est surestimé de sorte que le nombre calculé de fissures courtes est plus grand que celui observé dans les expériences. Ces fissures courtes sont très rapidement arrêtées pendant la propagation. Par conséquent, le nombre de fissures plus longues est presque le même que dans les échantillons testés.

Nous pouvons noter que, comme dans les expériences, un espacement presque équidistant entre les fissures peut être obtenu dans les simulations. Les variations de l'espacement moyen des fissures D en fonctions des différentes températures de la trempe ΔT obtenus à partir des présentes simulations numériques et à partir des expériences sont représentés dans le Tab. (3.7). En effet, ce tableau de l'espacement moyen des fissures D , correspond à la longueur de l'arc sur la périphérie circulaire extérieure entre deux fissures thermiques consécutives. Nous remarquons que, l'espacement des fissures D diminue avec l'augmentation de la température de la trempe, ce qui est dû à l'augmentation du nombre de fissures thermiques.

	Distance D	
	Expérience	Simulation
$\Delta T = 235$ K	2.97	1.91
$\Delta T = 385$ K	2.07	1.42
$\Delta T = 335$ K	1.5	1.01
$\Delta T = 385$ K	1.22	0.96
$\Delta T = 485$ K	1.12	0.75

TABLE 3.7: Espacement moyen des fissures [mm] : comparaison entre l'expérience et la simulation numérique

Afin d'analyser la structure hiérarchique des motifs de fissures, nous pouvons distinguer un phénomène particulier selon lequel la longueur des fissures suite à des essais de trempe peut être répartie en différents niveaux. Nous pouvons remarquer qu'il existe trois niveaux hiérarchiques différents, classés en fonction de leurs longueurs, à savoir les fissures courtes (< 1.5) mm, les fissures moyennes (1.5 ~ 3.5) mm et les fissures longues > 3.5 mm.

	Longueur courte $P1$		Longueur moyenne $P2$		Longueur long $P3$	
	Expérience	Simulation	Expérience	Simulation	Expérience	Simulation
$\Delta T = 235$ K	1.28	1.47	2.35	2.04	4.05	4.37
$\Delta T = 285$ K	1	0.96	2.2	2.37	4.9	4.55
$\Delta T = 335$ K	0.8	0.81	2.45	2.46	5	4.83
$\Delta T = 385$ K	0.75	0.78	2.35	2.8	5.2	5.18
$\Delta T = 485$ K	0.6	0.63	2.25	3.28	5.15	5.31

TABLE 3.8: Longueurs moyennes des fissures [mm]

La longueur moyenne des fissures thermiques à différents niveaux hiérarchiques obtenue à partir des présentes simulations numériques sont également comparés aux résultats expérimentaux (Tab. (3.8)). Nous constatons un bon accord entre les longueurs des fissures courtes, moyennes et longues prévues par les simulations numériques et les résultats expérimentaux.

Le modèle numérique proposé permet alors de prédire la plupart des caractéristiques des motifs de fissures des échantillons de céramique soumis au choc thermique, et montre un accord global avec les expériences.

En résumé, nous pouvons noter qu'il est très difficile d'observer expérimentalement l'initiation et la croissance des fissures dans un matériau soumis au choc thermique. Par conséquent, la méthode numérique proposée peut être une bonne alternative pour évaluer l'initiation et la croissance rapide des fissures dans des conditions de choc thermique. En outre, la méthode numérique proposée peut fournir des informations supplémentaires pour comprendre les mécanismes de fracture des matériaux soumis au choc thermique.

3.4 Conclusion

Le rétrécissement de matériau induit par le refroidissement ou le séchage, peut conduire à des réseaux de fissures régulièrement espacées. Des exemples d'une telle situation proviennent de divers domaines : génie civil avec le séchage du béton, génie mécanique avec l'exposition du verre ou de la céramique au choc thermique, et géomatériaux avec le séchage des sols... Ces fissures sont importantes car elles peuvent affaiblir le corps ou modifier la résistance du matériau ou compromettre la sécurité de la structure. Le phénomène de choc thermique, est souvent utilisé comme un problème générique pour le séchage et le refroidissement des matériaux. Dans ce chapitre, nous avons étudié en utilisant un modèle d'endommagement par gradient, l'initiation et la propagation des fissures sous un choc thermique.

Les principaux résultats provenant de la méthode numérique sur l'essai de trempe des plaques cylindrique en céramique sont résumés comme suit :

1. *L'existence d'une intensité du choc thermique critique ΔT_c* : il a été démontré que la solution du problème dépend de l'intensité de choc thermique tel qu'il existe une $\Delta T_c = \sigma_c / E\theta S^*$ à partir de la quelle il y a une fissuration. Elle est définie comme le rapport entre la contrainte critique de matériau et le module d'Young E_0 , la dilatation thermique Θ et la fonction \mathcal{S} qui est au maximum à $(t = 0, r = R, \nu)$. En conséquence, pour des chocs thermiques faibles où $\Delta T < \Delta T_c$, la solution reste purement élastique sur la totalité de la structure à chaque instant t .
2. *La branche fondamentale* : nous avons prouvé que, si l'intensité de choc thermique $\Delta T > \Delta T_c$, il existe une solution axisymétrique qui se diffuse dans une bande située à la surface exposée au choc thermique, pour un temps $t > 0$. Cette solution axisymétrique augmente rapidement avec le temps et elle atteint sa valeur maximale au bord de disque pour décroître jusqu'à 0 à une distance du bord qui est en fonction de la longueur interne ℓ . Les valeurs de l'endommagement α en fonction du temps sont illustrées sur la Fig. (3.16). Et les valeurs de l'endommagement α en fonction de l'intensité de choc thermique sont illustrées sur la Fig. (3.17). En outre, la dépendance de la longueur interne ℓ est présentée sur la Fig. (3.19). À partir d'un temps $t > t_b$ la solution devient instable et elle bifurque vers une solution périodique.
3. *Le temps de bifurcation* : nous avons montré que, le temps de bifurcation augmente avec l'augmentation de la longueur interne ℓ . Les résultats numériques illustrés dans les deux tableaux Tab. (3.5) et Tab. (3.6) indiquent que le temps de bifurcation décroît avec la longueur interne ℓ . Et pour une même longueur interne ℓ le temps de la bifurcation diminue avec l'augmentation de l'intensité de choc thermique.
4. *La solution de bifurcation* : nous avons montré que, à un temps t_b , la solution axisymétrique bifurque vers une solution périodique avec une longueur d'onde D .
5. *La longueur d'onde D* : Il a été démontré que la longueur d'onde de la solution de bifurcation augmente avec la longueur interne ℓ et diminue avec l'augmentation de l'intensité du choc thermique ΔT .

Par rapport aux données expérimentales, les présents résultats numériques sont en bon accord avec les observations expérimentales du point de vue quantitatif. Les résultats numériques montrent que le modèle numérique proposé est capable de reproduire fidèlement les schémas de fissures dus aux chocs thermiques dans les solides fragiles.

Prise en compte des effets dynamique dans l'étude de la rupture des matériaux

Contents

4.1	Introduction	97
4.2	Principe de la propagation dynamique des fissures	98
4.3	Les équations de l'élastodynamique	98
4.4	Implémentation numérique	101
4.4.1	Écriture du problème élasto-dynamique sous forme variationnelle	101
4.4.2	Shéma d'intégration de Newmark	102
4.5	Présentation du problème étudié :	103
4.6	Résultats de la simulation numérique	103
4.6.1	Évolution du chemin de la fissure dans le cas dynamique	104
4.6.2	Évolution des énergies dans le cas dynamique	105
4.7	Comparaison entre le cas dynamique et quasi-statique	105
4.7.0.1	Comparaison entre les temps du début de la propagation	105
4.7.0.2	Comparaison entre l'évolution de l'énergie totale	106
4.7.0.3	Comparaison entre les profils d'endommagement	107
4.8	Etude de la sensibilité à la taille du maillage h et à l'incrément de temps dt	108
4.8.1	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur le chemin de la fissure	108
4.8.2	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse de maillage sur l'évolution des énergies élastique et dissipée	109
4.8.3	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie cinétique	111
4.8.3.1	Sensibilité à la taille du maillage	111
4.8.3.2	Sensibilité à l'incrément de temps dt	113
4.8.4	Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie totale	115
4.9	Conclusion	117

4.1 Introduction

La propagation des fissures se produit d'une manière brutale dans plusieurs situations tel que le cas du choc thermique. La prise en compte des effets dynamiques devient donc nécessaire lors de l'étude de la propagation de ces fissures.

Dans le deuxième chapitre, nous avons abordé la propagation des fissures seulement dans des situations quasi-statiques c'est-à-dire en supposant qu'à chaque instant la structure est en équilibre avec le chargement et en négligeant ainsi les effets inertiels.

Dans ce chapitre, nous proposons un concept variationnel du modèle d'endommagement par gradient dans un cadre dynamique afin d'étudier les phénomènes de rupture brutale dans les matériaux fragiles sous déplacement imposé. Nous présentons l'implémentation numérique de la résolution des équations élastodynamiques des matériaux endommageables. Nous réalisons une étude de la sensibilité au maillage et au pas de temps de la solution numérique obtenue. Pour cela, nous traitons les équations qui régissent le champ de phase dans le cadre dynamique. Nous utilisons l'énergie dissipée pour l'évolution de l'endommagement définie dans le chapitre 1. En ce qui concerne les champs mécaniques, ils sont traités à partir des équations élastodynamiques.

4.2 Principe de la propagation dynamique des fissures

Dans ce paragraphe, nous présentons le bilan énergétique de la structure lors de la propagation dynamique des fissures. Dans la phase de propagation brutale, et contrairement au cas quasi-statique, la fissuration est un phénomène dynamique. L'énergie cinétique U^{Cin} doit être prise en compte dans le bilan énergétique. Elle correspond à la mise en mouvement de matière libérée par la propagation de la fissure.

Lorsqu'une fissure se propage d'un incrément de surface da , la conservation de l'énergie totale du système s'écrit :

$$dU^{Ext} = dU^{El} + dU^S + dU^{Cin} \quad (4.1)$$

avec :

1. dU^{Ext} est la variation des efforts externes.
2. dU^{El} est la variation de l'énergie élastique lors de la propagation de la fissure.
3. dU^S est la variation de l'énergie dissipée lors de la propagation de la fissure.
4. dU^{Cin} est la variation de l'énergie cinétique lors de la propagation de la fissure.

En utilisant la variation d'aire de la fissure dans l'équation précédente, on fait apparaître le taux de restitution d'énergie et on obtient un critère énergétique :

$$\frac{dU^{Cin}}{da} = \left(\frac{dU^{Ext}}{da} - \frac{dU^{El}}{da} - \frac{dU^S}{da} \right) \quad (4.2)$$

En utilisant, l'équation de l'énergie dissipée Eq. (1.4) définit dans la section (1.4), L'Eq. (4.2) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{dU^{Cin}}{da} = \left(\frac{dU^{Ext}}{da} - \frac{dU^{El}}{da} - \frac{dU^S}{da} \right) = G - G_c \quad (4.3)$$

G présente le taux de restitution d'énergie défini dans la section (1.4). En effet, la condition de l'amorçage $G = G_c$ s'écrit dans le cas dynamique $dU^{Cin} = 0$ et la condition de la propagation $G > G_c$ est équivalente à $dU^{Cin} > 0$. Les sollicitations externes provoquent ainsi une augmentation de l'énergie cinétique. Seule la fraction de l'énergie dissipée dU^S et de l'énergie mécanique $dU^{Mec} = dU^{Ext} - dU^{El}$ sont utilisées à la rupture des liaisons. La partie $(dU^{Mec} - dU^S)$ est transformée en énergie cinétique dU^{cin} . Ainsi, pour un matériau élastique fragile, l'augmentation de l'énergie cinétique est perdue dans la création de la nouvelle surface et la vitesse de propagation de la fissure augmentera très rapidement jusqu'à la rupture brutale.

4.3 Les équations de l'élastodynamique

Dans cette section, nous allons rappeler le système d'équations de l'élastodynamique, nous établirons ensuite le principe variationnel pour ce système en l'écrivant les champs mécaniques comme points stationnaires d'une intégrale d'action, notée S .

Nous considérons alors un solide occupant le domaine Ω , de frontière $\partial\Omega$. On suppose que $\partial\Omega$ se décompose en deux parties : $\partial_D\Omega$ et $\partial_S\Omega$ tel que : $\partial_D\Omega \cap \partial_S\Omega = \emptyset$ et $\partial_D\Omega \cup \partial_S\Omega = \partial\Omega$. On s'intéresse au problème dynamique pour des temps t appartenant à l'intervalle $t \in [t_1, t_2]$.

Le solide est soumis à des forces de volume $f(\mathbf{x}, t)$ et à des forces de surfaces $F(\mathbf{x}, t)$ sur $\partial_S\Omega$, alors qu'un déplacement $\mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t)$ est imposé sur la partie complémentaire $\partial_D\Omega$. En notant par $\mathbf{u}_{t_1}(\mathbf{x})$, $\mathbf{v}_{t_1}(\mathbf{x})$ respectivement les champs de déplacement et de vitesse à l'instant $t = t_1$, le système d'équations de l'élastodynamique s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} + f(\mathbf{x}, t) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} & \text{dans } \Omega, \forall t \in [t_1, t_2] \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = F(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \partial_S\Omega, \forall t \in [t_1, t_2] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) & \text{sur } \partial_D\Omega, \forall t \in [t_1, t_2] \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t=0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t=0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \\ \boldsymbol{\sigma} = A(\alpha) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{dans } \Omega, \forall t \in [t_1, t_2] \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans la suite, nous utiliserons les notations suivantes : $\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$ et $\dot{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$.

On désigne par C l'espace des champs de déplacements cinématiquement admissible et par C_0 l'espace vectoriel associé.

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{ "régulier", } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^d(\mathbf{x}, t) \text{ sur } \partial_D\Omega \right\} \\ C^0 &= \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{ "régulier", } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \text{ sur } \partial_D\Omega \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En dynamique, afin d'écrire le problème initial (formulation forte) sous forme variationnel, on introduit l'espace des champs de déplacements fonction du temps et de l'espace appartenant à C^0 qui s'annulent en $t = t_1$ et $t = t_2$. Nous notons \mathcal{H} cet espace. On a donc

$$\mathcal{H} = C^0 \cap \{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \text{ tel que } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_1) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t_2) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega \} \quad (4.6)$$

Dans lequel la condition de la régularité est implicitement vérifiée. A l'état d'endommagement arbitraire $0 \leq \alpha \leq 1$, l'ensemble d'endommagement admissible qui vérifie la condition d'irréversibilité est défini comme suit :

$$\mathcal{D} = \{ \beta_t : \Omega \rightarrow [0, 1] \mid 0 \leq \alpha_t \leq \beta_t \leq 1 \} \quad (4.7)$$

Le travail des forces extérieures est s'écrit :

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_t \, d\mathbf{x} + \int_{\partial_S\Omega} F(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}_t \, dS \quad (4.8)$$

A chaque couple $(\mathbf{u}, \alpha) \in C \times \mathcal{D}$, considéré comme un état du corps au temps t , on associe l'énergie totale qui est définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) &= \int_{\Omega} W(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t)(\mathbf{x}), \alpha_t(\mathbf{x}), \nabla \alpha_t(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} - \mathcal{J} \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} A(\alpha_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) + w_1 w(\alpha) + w_1 \ell^2 \nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha_t \right) \, d\mathbf{x} - \mathcal{J} \end{aligned} \quad (4.9)$$

En vertu de ces définitions, le problème de l'évolution peut maintenant être formulé en termes d'irréversibilité, de stabilité et d'équilibre énergétique. En effet, le problème consiste à trouver $t \rightarrow (\mathbf{u}_t, \alpha_t) \in C \times \mathcal{D}$ de telle sorte que, à chaque instant $t > 0$:

$$\begin{cases} \text{La condition d'irréversibilité :} & \dot{\alpha}_t \geq 0, \\ \text{La première condition de stabilité :} & \mathcal{W}'_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t)(\mathbf{v} - \mathbf{u}_t, \beta - \alpha_t) \geq 0, \quad \forall (\mathbf{u}, \alpha) \in C \times \mathcal{D} \\ \text{Conservation de l'énergie :} & \frac{d}{dt} \mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) = - \int_{\Omega} \dot{f}_t \cdot \mathbf{u}_t \, d\mathbf{x} + \int_{\partial_S\Omega} \dot{F}_t \cdot \mathbf{u}_t \, dS + \int_{\partial_D\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}^d \, dS \end{cases} \quad (4.10)$$

En utilisant les arguments standards du calcul des variations et sous réserve que l'évolution soit suffisamment régulière à la fois dans l'espace et dans le temps, on peut montrer que les trois conditions de (4.10) sont satisfaites si et seulement si :

1. Le champ de contrainte satisfait l'équation d'équilibre :

$$\begin{cases} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t + f_t = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma}_t = A(\alpha_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \end{cases} \quad (4.11)$$

2. Le champ d'endommagement satisfait au critère d'endommagement non-local :

$$\frac{1}{2} A'(\alpha_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) + w_1 w'(\alpha_t) - w_1 \ell^2 \Delta \alpha_t \geq 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.12)$$

et la condition de consistance non locale :

$$\left(\frac{1}{2} A'(\alpha_t) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_t) + w_1 w'(\alpha_t) - w_1 \ell^2 \Delta \alpha_t \right) \dot{\alpha}_t = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (4.13)$$

Dans cette étude, on utilise le modèle qui garantit la phase élastique. En effet, l'endommagement n'évolue pas tant qu'une contrainte critique n'est pas atteinte.

$$a(\alpha) = (1 - \alpha)^2, \quad w(\alpha) = \alpha \quad (4.14)$$

Multiplions l'équation d'équilibre dynamique par une fonction $\mathbf{v} \in \mathcal{H}$ et effectuons une intégration sur \mathbf{v} , nous obtenons :

$$\int_{\mathbf{v}} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{v} + f_t \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.15)$$

Effectuons ensuite une intégration par parties sur le premier terme du membre de gauche, nous obtenons :

$$\int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} = \underbrace{\int_{\partial_D \Omega} (\boldsymbol{\sigma}_t \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} dS}_0 + \int_{\partial_S \Omega} F_t \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f_t \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \quad (4.16)$$

Intégrons par rapport au temps $t \in [t_1, t_2]$, effectuons ensuite une intégration par parties en tenant compte des conditions aux temps t_1, t_2 (4.6), nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\left(\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right)}_0 \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{v}} d\mathbf{x} \right) dt = \\ & \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\partial_D \Omega} F_t \cdot \mathbf{v} dS \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_t : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} f_t \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} \right) dt, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H}, \quad \forall t \in [t_1, t_2] \end{aligned} \quad (4.17)$$

Introduisons les deux énergies cinétique $\mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}})$ et potentielles $\mathcal{W}(\mathbf{u})$ de la structure définies comme suit :

$$\mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} d\mathbf{x}, \quad \mathcal{W}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} A(\alpha) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\mathbf{x} - \int_{\Omega} f \cdot \mathbf{u} d\mathbf{x} - \int_{\partial_S \Omega} F \cdot \mathbf{u} dS \quad (4.18)$$

L'Eq. (4.17), se réécrit alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\mathbf{v}} \right) dt = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} \quad (4.19)$$

Ainsi nous venons d'établir que le système (4.4) entraîne l'équation ci-dessus (4.19). Il est aisé de démontrer que cette équation est obtenue en cherchant un "point" stationnaire de l'intégrale d'action définie par :

$$\mathcal{S}(\mathbf{u}, \alpha, \dot{\mathbf{u}}) = \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{W}(\mathbf{u}) - \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}})) dt \quad (4.20)$$

La condition de stabilité du premier ordre de (4.10) est maintenant remplacée par la condition de stationnarité de l'action suivante (\mathcal{S}' désigne la dérivée directionnelle de \mathcal{S}) :

$$\mathcal{S}'(\mathbf{u}, \alpha)(\mathbf{v}, \beta) \geq 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{H} \quad \forall \beta \geq \alpha \quad (4.21)$$

Maintenant, l'énergie mécanique totale du corps au temps t est donnée par $\mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}_t)$ incluant ainsi l'énergie cinétique à l'instant t . En conséquence, le bilan énergétique au temps t s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{W}_t(\mathbf{u}_t, \alpha_t) + \mathcal{K}(\dot{\mathbf{u}}_t)) = - \int_{\Omega} \dot{\mathbf{f}}_t \cdot \mathbf{u}_t dx - \int_{\partial_S \Omega} \dot{\mathbf{F}}_t \cdot \mathbf{u}_t dS + \int_{\partial_D \Omega} \boldsymbol{\sigma}_t n \cdot \dot{\mathbf{u}}_t^d dS \quad (4.22)$$

En effet, elle ne change de l'état quasi-statique que par la présence de l'énergie cinétique.

En conséquence en utilisant les arguments standards de calcul des variations et à condition que l'évolution soit suffisamment régulière, on déduit de la condition d'irréversibilité $\dot{\alpha} \geq 0$, Eq. (4.21) et Eq. (4.22) que l'équation d'équilibre (4.11) est simplement remplacée par l'équation dynamique :

$$\mathbf{div} \boldsymbol{\sigma}_t + \mathbf{f}_t - \rho \ddot{\mathbf{u}}_t = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \quad (4.23)$$

dans lesquels le critère d'endommagement (4.12) et relation de consistance (4.13) demeurent inchangés.

4.4 Implémentation numérique

En raison de l'indépendance de l'énergie cinétique par rapport à la variable d'endommagement α , la résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle de l'énergie totale par rapport à cette variable est similaire au cas quasi-statique. Par contre, la résolution de ce problème n'est pas la même par rapport au champ mécanique \mathbf{u} . En effet, l'obtention de ces champs nécessite une intégration temporelle en temps. Nous utilisons pour cela le schéma de Newmark pour la résolution des équations. Cette procédure contient deux étapes. D'abord l'écriture du problème élasto-dynamique sous forme variationnelle, le discrétiser par éléments finis ensuite intégrer en temps l'équation différentielle du deuxième en temps en utilisant le schéma de Newmark

4.4.1 Ecriture du problème élasto-dynamique sous forme variationnelle

Rappelons les principales étapes dans la construction de ce schéma.

1. Nous écrivons l'équation (4.22) sous forme variationnelle, en choisissant une fonction test $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t^2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx = - \int_{\Omega} \mathbf{K}(\alpha) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) dx + \int_{\partial_S \Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS \quad \forall \mathbf{v} \in C^0 \quad (4.24)$$

2. Le champs de déplacement et d'endommagement sont discrétisés dans l'espace en utilisant les éléments P1 standard de Lagrange.

- La forme bilinéaire $\frac{\partial}{\partial t^2} \int_{\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ s'écrit après discrétisation sous la forme $V \cdot \mathbf{M} \ddot{U}$.

- La forme bilinéaire $\int_{\Omega} \mathbf{K}(\alpha) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$ s'écrit après discrétisation sous la forme $V \cdot \mathbf{K} U$.

- La forme linéaire $\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ s'écrit après discrétisation sous la forme $F(t) \cdot V$ ou \mathbf{M} est la matrice masse, \mathbf{K} est la matrice de rigidité, \mathbf{F} est le vecteur de force extérieure, U est le vecteur de déplacement aux nœuds et \ddot{U} est le vecteur d'accélération aux nœuds.

Ainsi, sous forme discrétisée, l'équation variationnelle (4.24) s'écrit :

$$V \mathbf{M} \ddot{U} + V \mathbf{K} U = F(t) V \quad \forall V \in C^0 \quad (4.25)$$

Nous obtenons alors le système linéaire suivant :

$$\mathbf{M} \ddot{U} + \mathbf{K} U = F(t) \quad (4.26)$$

4.4.2 Schéma d'intégration de Newmark

Après avoir écrit l'équilibre dynamique sous forme matricielle (4.26), la deuxième étape consiste à résoudre ce système d'équations en discrétisant le temps sous la forme $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, où $t_n \in [0, T]$ et Δt désigne le pas de temps. L'équation (4.26) est résolue itérativement en utilisant soit un schéma d'intégration implicite, soit en utilisant un schéma d'intégration explicite. Ces schémas d'intégration en temps permettent de déterminer les valeurs de déplacement U_n , de la vitesse \dot{U}_n et de l'accélération \ddot{U}_n à l'instant t_n en partant des données initiales U_0, \dot{U}_0 et \ddot{U}_0 .

Parmi les schémas existants dans la littérature [41], le schéma de Newmark [65] est retenue dans cette étude puisqu'il est considéré comme l'un des schémas les plus utilisés et les plus robustes dans les structures dynamiques [41]. Cet algorithme utilise un schéma explicite qui permet de déterminer à partir d'un développement limité de Taylor l'état de système (U_{n+1}, \dot{U}_{n+1}) à l'instant t_{n+1} à partir des valeurs à l'instant t_n par la relation suivante :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{U}_n + (\Delta t)^2, \\ \dot{U}_{n+1} &= \dot{U}_n + \Delta t \ddot{U}_n + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Le schéma ci-dessus est explicite puisque il calcule le déplacement et la vitesse à l'instant $n + 1$ à partir de l'expression de leur homologue et l'accélération à l'instant n . Pour le rendre implicite, le schéma de Newmark consiste à remplacer dans (4.27), l'accélération à l'instant n par une expression faisant appel aux accélérations aux instants $n + 1$ et n en utilisant deux paramètres de pondération γ et β déterminés à partir des critères portant sur la consistance et la stabilité du schéma. Pour un pas de temps constant Δt , le déplacements U_{n+1} et la vitesse \dot{U}_{n+1} à l'instant t_{n+1} sont approchés comme suit :

$$U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{(\Delta t)^2}{2} [(1 - 2\beta)\ddot{U}_n + 2\beta\ddot{U}_{n+1}], \quad (4.28)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_n + \Delta t [(1 - \gamma)\ddot{U}_n + \gamma\ddot{U}_{n+1}] \quad (4.29)$$

où $\beta \in [0, 1/2]$ (ne pas confondre avec la fonction test β de α) et $\gamma \in [0, 1]$. Le cas de $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$ relève de la règle trapézoïdale [65], tandis que pour $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$, on aboutit à une méthode de différence centrale explicite.

Le déplacement U_{n+1} et la vitesse \dot{U}_{n+1} à l'instant $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ avec $n = 0, 1, 2, \dots, M - 1$, sont prédits à partir des deux equations suivantes :

$$U_{n+1}^{Pred} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \ddot{U}_n \quad (4.30)$$

$$\dot{U}_{n+1}^{Pred} = \dot{U}_n + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{U}_n \quad (4.31)$$

Ces deux équations sont obtenues à partir de (4.28), (4.29) en omettant les termes d'accélération au t_{n+1} : \ddot{U}_{n+1} . Le déplacement et la vitesse à l'instant s'expriment alors en fonction de (4.30), (4.31) à partir des relations suivantes :

$$U_{n+1} = U_{n+1}^{Pred} + \Delta t^2 \beta \ddot{U}_{n+1} \quad (4.32)$$

$$\dot{U}_{n+1} = \dot{U}_{n+1}^{Pred} + \Delta t \gamma \ddot{U}_{n+1} \quad (4.33)$$

En écrivant le système linéaire (4.26) au temps t_{n+1} et en reportant le champ de déplacement à l'instant t_{n+1} (4.28), nous obtenons l'équation que vérifie l'accélération à l'instant t_{n+1} . Soit :

$$(M + \beta \Delta t^2 K) \ddot{U}_{n+1} = F_{n+1} - K U_{n+1}^{Pred} \quad (4.34)$$

Après avoir obtenu l'accélération à l'instant t_{n+1} , nous reportons son expression dans (4.30), (4.31). Nous obtenons ainsi le déplacement et la vitesse à l'instant t_{n+1} .

En utilisant le champ de déplacement et le chargement à l'instant initial, nous déduisons l'expression de l'accélération à cet initial :

$$M \ddot{U}_0 = F_0 - K U_0 \quad (4.35)$$

\ddot{U}_0, U_0, F_0 représente respectivement les vecteurs accélération, déplacement, et contrainte donnés à l'instant initial t_0 . Le report de ces expressions dans (4.30), (4.31), permet de calculer $U_1^{Pred}, \dot{U}_1^{Pred}$. Dans notre étude et pour assurer la stabilité et la précision de cet l'algorithme nous choisissons les paramètres $\beta = 1/4$ et $\gamma = 0.5$.

Les deux problèmes en \mathbf{u} et α sont résolus séparément. La méthode numérique consiste à itérer entre les champs de déplacement \mathbf{u} en utilisant l'algorithme de Newmark et le champ d'endommagement α qui satisfait le critère d'endommagement (4.12) et la relation de consistance (4.13).

Cette méthode est résumée dans l'algorithme (5) qui sera utilisé pour simuler l'évolution de la fissure dans le cas dynamique. L'algorithme est réalisé dans un sous l'environnement FEniCs [6] présenté dans la section (3.2.5.1).

Algorithm 5 Dynamique explicite pour le modèle d'endommagement à champ de phase

- 1: **Données initiales** : U_0, \dot{U}_0
 - 2: Calculer le champ de phase de la fissure α_0 pour les déplacements initiaux U_0 en utilisant l'équation (4.12) sous réserve de la condition d'irréversibilité : $0 \leq \alpha_0 \leq 1$,
 - 3: Calculer l'accélération initiale en utilisant l'Eq. (4.35),
 - 4: **Pour** temps $n = 1, n > 0$:
 - Prédire le déplacement U_{n+1}^{Pred} en utilisant l'Eq. (4.30),
 - Prédire la vitesse \dot{U}_{n+1}^{Pred} en utilisant l'Eq. (4.31),
 - Calculer l'accélération \ddot{U}_{n+1} en utilisant l'Eq. (4.34),
 - Actualiser les déplacements U_{n+1} en utilisant l'Eq. (4.32) et appliquer les conditions aux limites de type Dirichlet,
 - Actualiser les vitesses \dot{U}_{n+1} en utilisant l'Eq. (4.33) et appliquer les conditions aux limites de type Dirichlet,
 - Calculer le champ d'endommagement α_{n+1} avec les déplacements modifiés U_{n+1} en utilisant (4.12) sous réserve de l'équation d'irréversibilité : $0 \leq \alpha_n \leq \alpha_{n+1} \leq 1$,
 - 5: **Fin Pour**
-

4.5 Présentation du problème étudié :

Nous reconsidérons la structure étudiée dans la section (2.2.5) dans le cadre quasi-statique pour effectuer une étude numérique avec prise en compte des effets dynamique. Il s'agit d'une plaque entaillée trouée, dont la géométrie et les conditions aux limites ont été présentées dans la Fig. (2.9). La plaque est soumise à un incrément de déplacement fixe qui doit être imposé sur le trou supérieur avec un chargement $\delta = u(t)$ et un encastrement sur le trou inférieur. Le champ d'endommagement est supposé nul sur les deux trous. Le matériau utilisé était du mortier de ciment, composé de 22% de ciment, 66% de sable et 12% d'eau, ce qui donne une valeur de masse volumique $\rho = 1427 \text{ kg/m}^3$.

Dans le paragraphe suivant, nous présenterons les résultats du calcul numérique, la performance du modèle de champ de phase pour la rupture dynamique sera étudiée. Ensuite, une étude comparative en terme du motif de fissures et en terme d'évolution des énergies entre les deux cas quasi-statique et dynamique sera présentée. Par la suite, nous présenterons la sensibilité à la taille du maillage et à l'incrément du temps sur le motif de la fissure et sur l'évolution des énergies.

4.6 Résultats de la simulation numérique

Dans l'étude numérique présenté dans cette section, des éléments triangulaires linéaires non structurés et non uniformes sont utilisés pour discrétiser le domaine. Le cas de contrainte plane est considéré, et le schéma de New mark est utilisé. En utilisant un modèle de gradient d'endommagement avec la fonction de l'énergie dissipatif $w(\alpha) = \alpha$, des calculs sont réalisés sur la la structure précitée. En effet, un certain nombre de paramètres est nécessaire : le module d'Young E_0 , le coefficient de poisson ν , la masse volumique ρ , la ténacité du matériau G_c et la longueur interne ℓ . Suite à la discrétisation spatiale et temporelle, deux paramètres numériques complémentaires sont nécessaires : la taille de la maille h , et le pas de temps dt . En synthèse, la modélisation du modèle de champ de phase de la rupture fragile dans le

cas dynamique requiert cinq paramètres matériels E_0 , ν , G_c , ρ et ℓ constantes du matériaux. L'influence des paramètres numériques : h et dt sur les résultats numériques.

4.6.1 Évolution du chemin de la fissure dans le cas dynamique

Afin d'analyser le chemin de la fissure dans le cas dynamique, des simulations numériques sont réalisées. Nous avons utilisé pour le maillage 947793 éléments triangulaires avec une taille de maillage $h = 0.018\text{mm}$ et un incrément de déplacement $\Delta u = 10^{-3}\text{mm}$ est utilisé. Les paramètres mécaniques utilisés pour le calcul sont celles d'Ambati et al. [2] :

E (Module d'Young, GPa)	5.98
ν (Coefficient de Poisson)	0.22
ρ (masse volumique, Kg/m^3)	1427
G_c (La ténacité, KN/mm)	2.28×10^{-3}
λ (Premier coefficient de Lamé, KN/mm^2)	1.94
ℓ (Longueur interne, mm)	0.1

TABLE 4.1: Paramètres mécaniques utilisés dans les simulations numériques

La Fig. (4.1) présente la trajectoire de la fissuration pour différentes valeurs du déplacement imposé $u_2(t)$. Les couleurs bleu et rouge correspondent respectivement au matériau non endommagé et le matériau complètement fissuré. En effet, pour un déplacement $0 < u_2(t) < 0.342\text{ mm}$, il n'y a aucune propagation de la fissure initiale, même si la structure continue à stocker de l'énergie élastique pendant le chargement. À partir de la valeur du déplacement $u_2(t) = 0.342\text{mm}$, nous pouvons observer tout d'abord un amorçage de la fissure à la pointe de l'entaille qui se propage progressivement selon le chemin décrit dans la Fig. (4.1)(b),(c) jusqu'au bord du trou pour $u_2(t) = 0.844\text{mm}$, Fig. (4.1)(d).

Ensuite, un arrêt de la fissure est observé jusqu'à ce que la valeur du déplacement imposé soit comprise dans l'intervalle $0.844 < u_2(t) < 2.421\text{ mm}$ Fig. (4.1)(e). Le comportement de la structure redevient alors élastique sans endommagement. À partir de la valeur du déplacement $u_2(t) = 2.421\text{ mm}$, nous notons l'initiation d'une fissure du bord vertical du trou, puis une propagation horizontale Fig. (4.1)(g) pour atteindre le bord de la structure avec un déplacement $u_2(t) = 2.65\text{mm}$. Nous observons que *la propagation se fait de manière progressive* contrairement à la première étude quasi-statique Fig. (2.11) où la propagation est brutale.

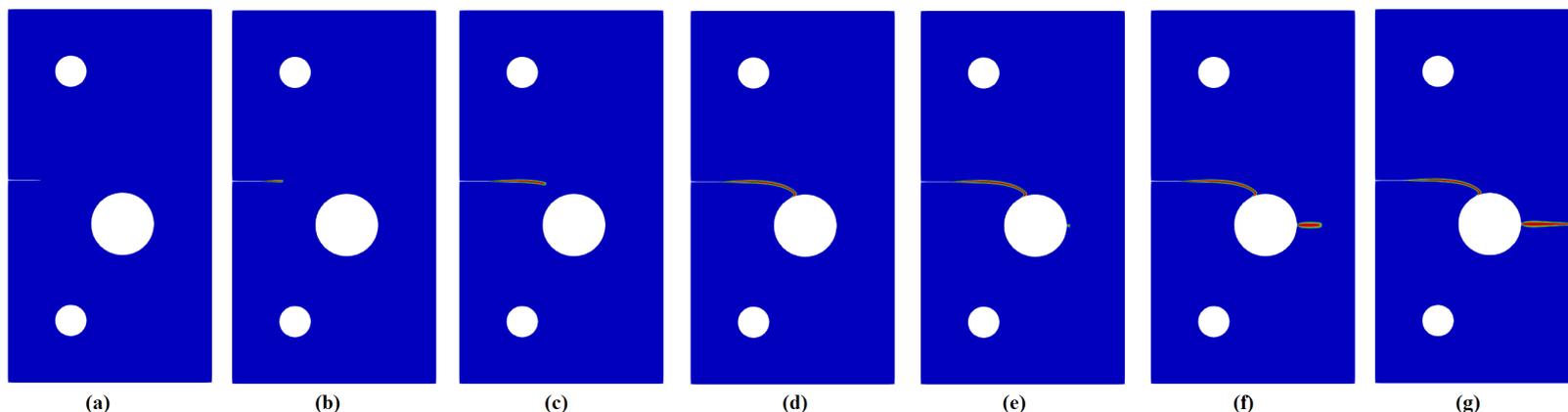


FIGURE 4.1: Plaque entaillée avec trou : état de fissure à un déplacement appliqué en (a) $u = 0.342\text{mm}$, (b) $u = 0.548\text{mm}$, (c) $u = 0.721\text{mm}$, (d) $u = 0.844\text{mm}$, (e) $u = 2.421\text{mm}$, (f) $u = 2.485\text{mm}$, (g) $u = 2.65\text{mm}$

4.6.2 Évolution des énergies dans le cas dynamique

Dans ce paragraphe, nous allons analyser l'évolution des énergies en fonction du temps, nous développons à partir des calculs numériques. Nous retenons comme une taille de maillage $h = 0.1$ mm. Les caractéristiques du matériau sont celles indiquées dans le Tab. (4.1) avec une longueur interne $\ell = 0.5$ mm afin de respecter la hiérarchie $h \ll \ell$. Nous considérons un intervalle de temps $[0, t_f]$ pendant lequel on impose une charge $\delta = u(t)$. Nous discrétisons l'intervalle de chargement en $dt = 1 \times 10^{-4}$ s. Les réponses globales du modèle sont mesurées par l'énergie élastique, l'énergie dissipée et l'énergie cinétique. La Fig. (4.2) représente l'évolution des énergies en fonction du déplacement.

Nous observons qu'à la rupture finale de la structure, l'énergie de surface devient constante. Nous constatons également dans la Fig. (4.2) (a), l'existence des oscillations après la rupture totale de la structure. En effet, une fois que la fissure a atteint le bord droit située à droite de la structure, celle est libre de se déplacer de manière rigide. Ces mouvements de corps rigides apportent une contribution importante à l'énergie cinétique. *En effet, les vibrations libres après la fissuration totale de la structure expriment que le système n'est pas dissipatif.* D'après la Fig. (4.2) (b), nous constatons que la somme de l'énergie élastique et cinétique (Eelas+Ecin) après la rupture est constante.

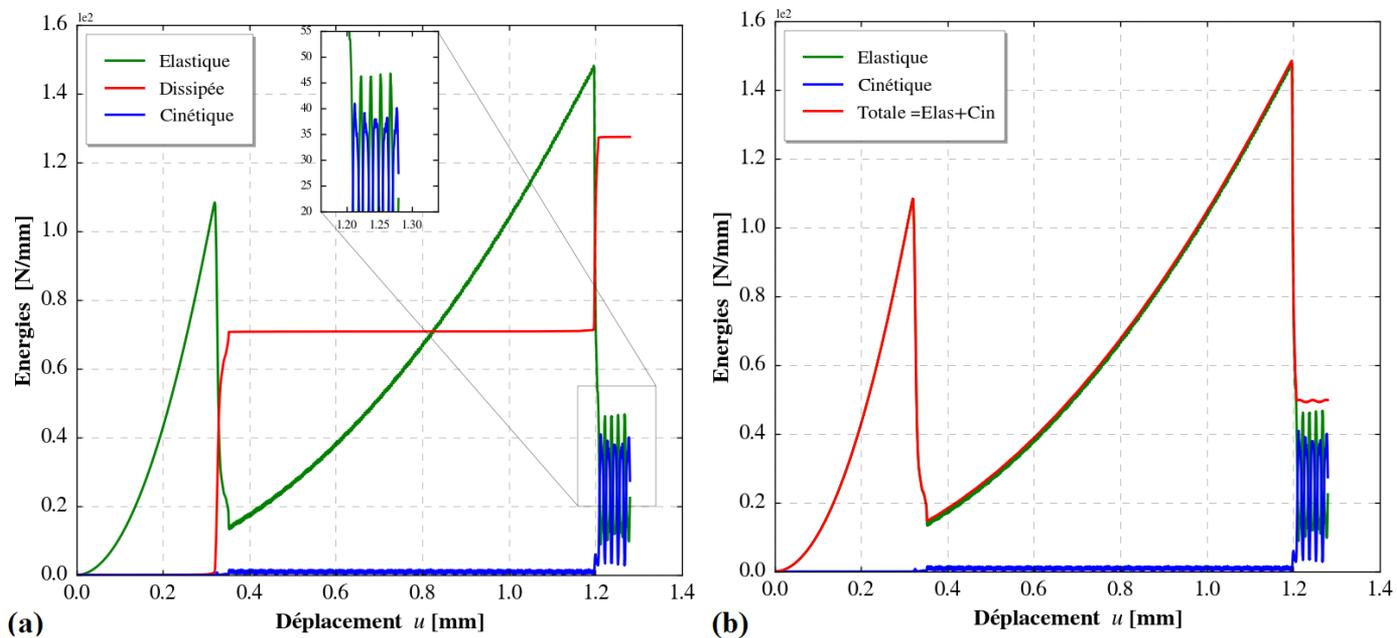


FIGURE 4.2: Plaque entaillée avec trou : (a) évolution des énergies , (b) évolution des énergies : cinétique + élastique

4.7 Comparaison entre le cas dynamique et quasi-statique

Une étude comparative de la propagation des fissures dans les deux cas quasi-statique et dynamique est effectuée dans cette section à partir de la méthode présentée dans la section présentée.

4.7.0.1 Comparaison entre les temps du début de la propagation

Afin de comparer les temps de début de la propagation, nous avons considéré les mêmes paramètres mécaniques et numériques cités dans le paragraphe précédente (voir Tab. (4.1)). Une longueur interne et une taille de maillage sont choisies respectivement par $\ell = 0.5$ mm et $h = 0.1$ mm. La Fig.(4.3) présente l'évolution de l'énergie élastique et dissipée dans les deux cas : quasi-statique (Fig. (4.3) (a)) et dynamique (Fig. (4.3) (b)).

Nous constatons d'après la Fig. (4.3) (a) que le chargement critique, dans le cas quasi-statique, à partir duquel il y a une propagation brutale de la fissure est égale à $\delta_c = 0.3168$ mm. Tandis que, dans le cas dynamique le résultat de la simulation montre que le chargement critique qui cause la fissuration à partir de l'entaille dans le cas dynamique est

égale à $\delta_c = 0.3217\text{mm}$ (voir Fig. (4.3)(b)). Le chargement critique trouvé dans le cas dynamique est supérieur au cas quasi-statique. Donc, *le cas dynamique est plus conservatif et la propagation de la fissure commence plus tard que le cas quasi-statique*. En effet, l'ajout du terme de l'inertie retarde le temps d'initiation de la fissuration.

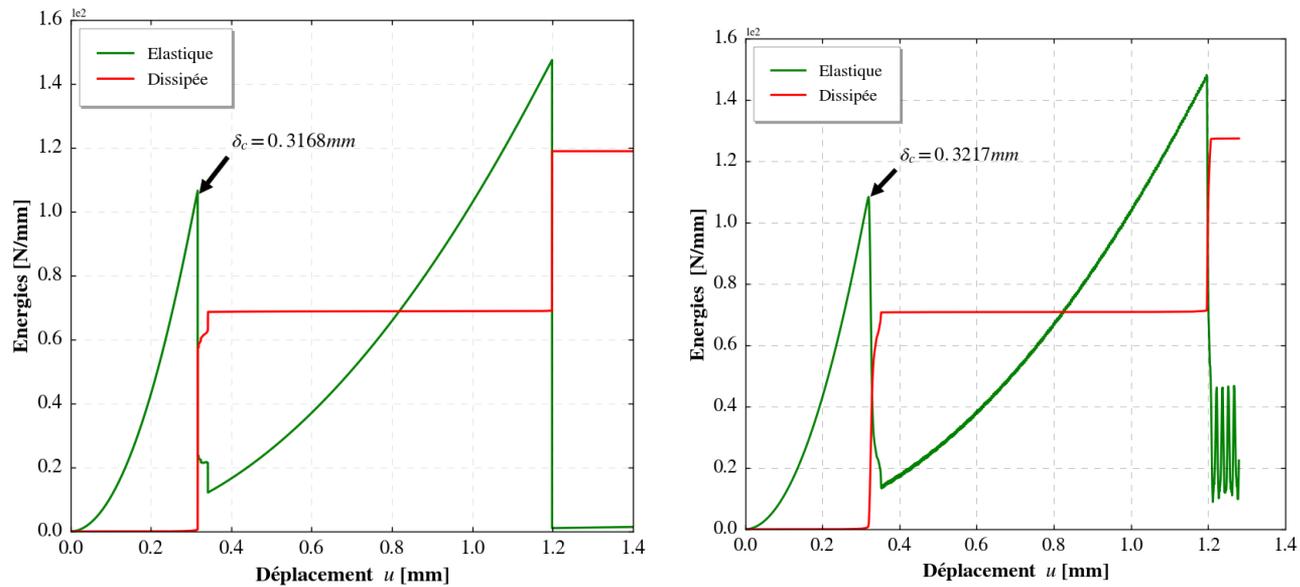


FIGURE 4.3: Plaque entaillée avec trou : (a) évolution des énergies dans le cas quasi-statique, (b) évolution des énergies dans le cas dynamique

4.7.0.2 Comparaison entre l'évolution de l'énergie totale

Afin de comparer l'évolution de l'énergie totale qui est la somme de l'énergie élastique, dissipée et cinétique dans les deux cas quasi-statique et dynamique, plusieurs simulations numériques ont été réalisées en variant le chargement. Les mêmes paramètres mécaniques et numériques utilisés dans le paragraphe précédent sont utilisés.

Afin d'étudier l'influence de la vitesse de chargement sur les énergies, nous avons considéré trois cas différents de chargement : $\delta(t) = 0.2t$, $\delta(t) = t$ et $\delta(t) = 5t$.

La Fig. (4.4) illustre l'évolution de l'énergie totale pour les trois cas de chargement. Nous constatons d'après les courbes (a), (b) et (c) de la Fig. (4.4), que *si on baisse la vitesse de chargement, le cas dynamique se rapproche du cas quasi-statique*.

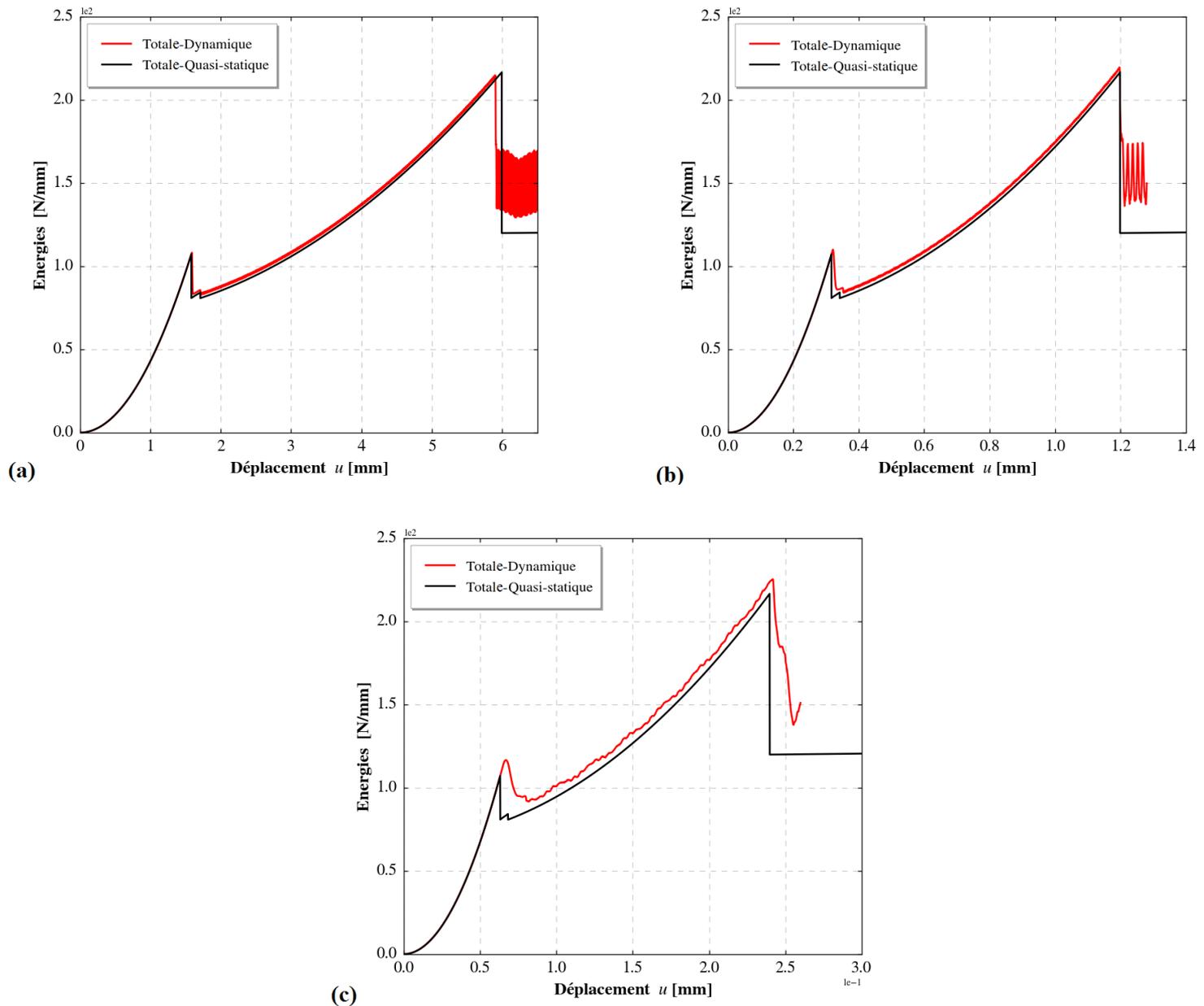


FIGURE 4.4: Plaque entaillée avec trou : évolution des énergies totale dans le cas dynamique et quasi-statique : (a) $\delta = 0.2t$, (b) $\delta = t$, (c) $\delta = 5t$

4.7.0.3 Comparaison entre les profils d'endommagement

Afin de comparer les deux profils d'endommagement entre les analyses dynamique et quasi-statique, des simulations numériques de la plaque soumise aux mêmes conditions aux limites ont été réalisées. Les paramètres du matériau sont présentés dans le Tab. (4.1)). La structure est discrétisée avec 947793 éléments uniformes à trois nœuds. Nous avons considérés une taille de maillage $h = 0.018\text{mm}$. La Fig. (4.5) illustre les deux courbes du profil d'endommagement obtenues le long de la ligne \mathcal{L} dans le cas dynamique et le cas quasi-statique. La figure montre que *le profil de l'endommagement est plus large dans le cas dynamique que dans la cas quasi-statique*. Ce phénomène de la bande d'endommagement plus large peut s'expliquer par les effets des ondes.

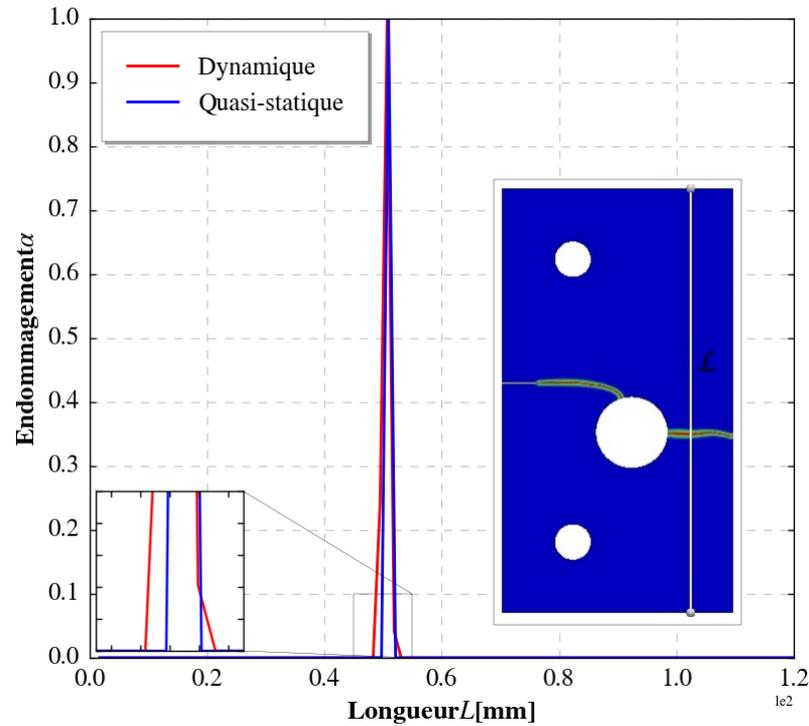


FIGURE 4.5: Plaque entaillée avec trou : Profil d'endommagement

4.8 Etude de la sensibilité à la taille du maillage h et à l'incrément de temps dt

Nous allons, dans cette section, étudier l'influence de h et de dt sur le chemin de fissuration et sur les énergies.

4.8.1 Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur le chemin de la fissure

Dans cet essai, nous avons examiné la même géométrie de la Fig. (2.9) avec différents incréments de temps et différents taille de maillage. Nous avons appliqué un déplacement sur le trou supérieur de la forme $\delta(t) = t$. Nous avons examiné que la partie de la fissure qui commence de l'entaille jusqu'au grand trou comme présenté sur la Fig.(4.6) En prenant les mêmes paramètres mécaniques que dans la table Tab. (4.1), deux simulations numériques ont été élaborées avec deux paramètres numériques différents :

(i) : $h = 0.04\text{mm}$, $dt = 1 \times 10^{-4}\text{s}$.

(ii) : $h = 0.018\text{mm}$ et $dt = 1 \times 10^{-3}\text{s}$.

Les motifs de fissures à la fin de la simulation (jusqu'au $t = 1.4$ s) sont présentés à la Fig. (4.6). En effet, les résultats pour le champ de phase montrent que la fissure se propage horizontalement de l'entaille, ensuite, la fissure prend un chemin curviligne pour atteindre le bord du trou. La Fig. (4.6) montre que les cas dynamique et quasi-statique ont des motifs de fissures similaires. Cependant, la finesse du maillage et le pas de temps n'affectent pas la forme de la fissure. Ainsi, les motifs de fissures sont insensibles à la taille de maillage et à l'incrément de temps dt .

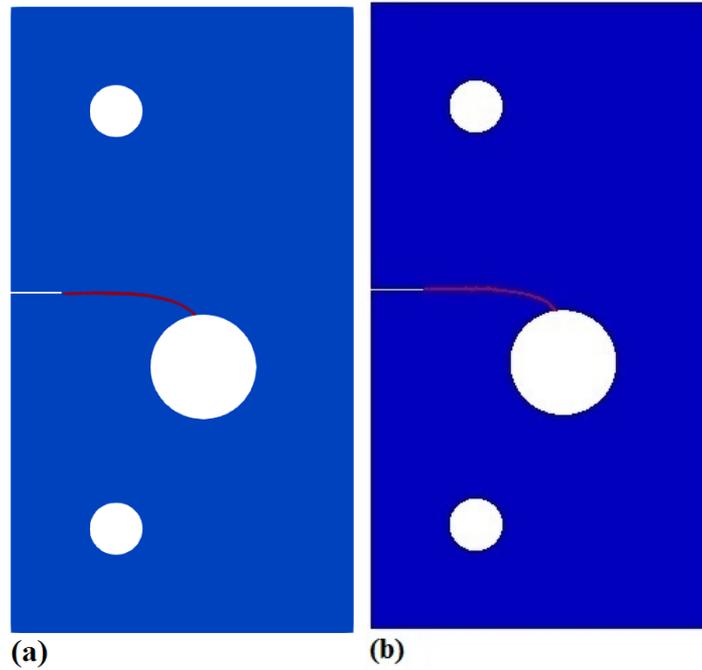


FIGURE 4.6: Champ d'endommagement : (a) : Le cas (i), (b) Le cas (ii)

4.8.2 Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse de maillage sur l'évolution des énergies élastique et dissipée

La dépendance de l'évolution de l'endommagement par rapport à la taille de maillage h et à l'incrément de temps dt , est une question importante qu'il faudrait analyser lors de l'étude. Dans cette section, nous analysons l'influence de ces paramètres sur l'évolution dynamique de l'endommagement et sur les différentes énergies dans le cas de la plaque trouée. Nous avons considéré 3 incréments de temps dt différents :

$$\begin{cases} dt_1 = 1 \times 10^{-5} s \\ dt_2 = 5 \times 10^{-5} s \\ dt_3 = 1 \times 10^{-4} s \end{cases}$$

Ainsi que 3 discrétisations en espace h :

$$\begin{cases} \text{Maillage 1 : } h = 0.04mm \\ \text{Maillage 2 : } h = 0.06mm \\ \text{Maillage 3 : } h = 0.08mm. \end{cases}$$

□ Sur les figures Fig. (4.7)(a), (b) le pas de temps dt vaut $dt = 1 \times 10^{-5} s$ et 3 maillages différents sont considérés ;

□ Sur les figures Fig. (4.8)(a), (b) le pas de maillage h vaut $h = 0.04mm$ et 3 maillages différents sont considérés.

La Fig. (4.7)(a) présente pour différentes tailles de maillage, l'évolution de l'énergie élastique définie par l'équation (1.44). Et la Fig. (4.7)(b) illustre pour différentes tailles de maillage, l'énergie de surface de la fissure définie par l'équation (1.34). Nous constatons d'après la Fig. (4.7)(a) que les trois courbes sont similaires avec une petite différence pendant la fissuration. *L'énergie élastique augmente légèrement avec la taille du maillage h . Elle est donc pratiquement insensible au maillage.*

La Fig. (4.7)(b) montre que, les trois courbes ont la même allure avec une petite différence au moment de l'évolution de l'énergie élastique. L'énergie dissipée diminue avec la diminution de la taille de maillage h . Par conséquent, dans le cas dynamique, il y a une influence numérique sur l'évolution de l'énergie dissipée. Le terme de la ténacité numérique effectif $G_{c_{eff}}$ qui est donné par l'Eq. (1.48) est exprimé en fonction de la taille du maillage h . En effet, *l'énergie de surface est proportionnelle à la taille de maillage h .* Par conséquent, nous constatons que l'énergie dissipée diminue avec la taille h du maillage.

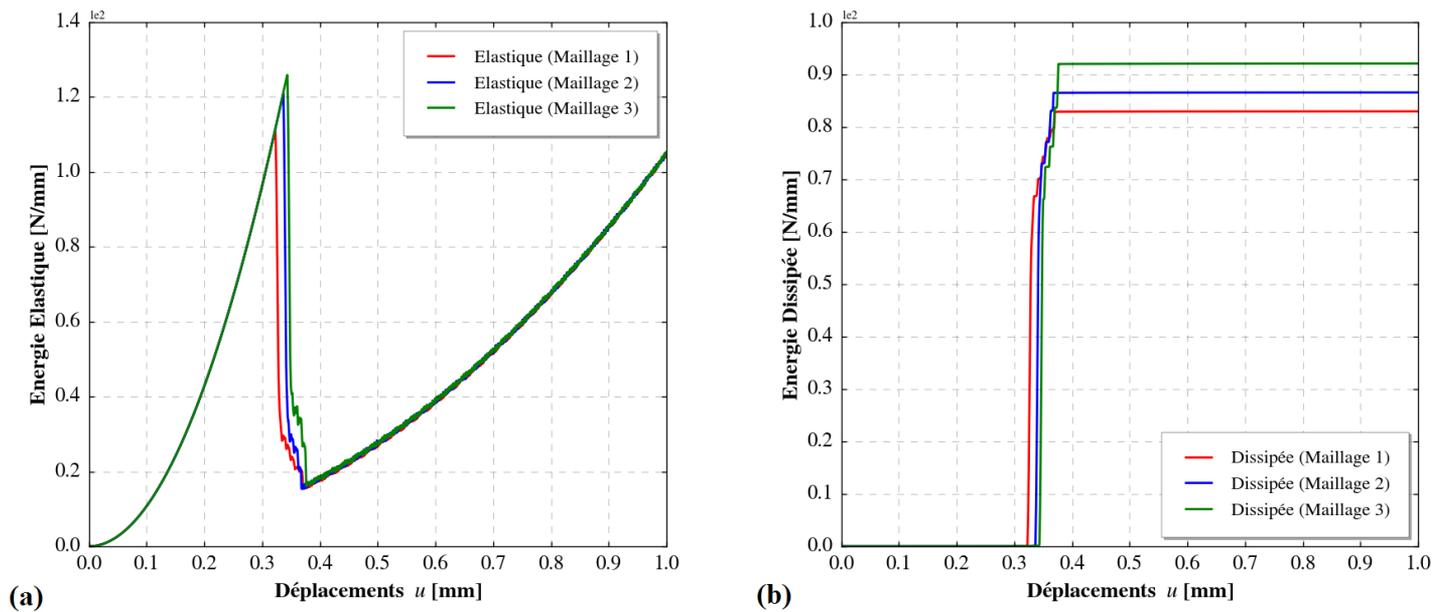


FIGURE 4.7: Plaque entaillée avec trou : analyses de la sensibilité du maillage avec un $dt = 10^{-5}$ s et $\ell = 0.1$ mm, (a) évolution de l'énergie élastique, (b) évolution de l'énergie dissipée.

Une étude paramétrique sur les pas de temps est effectuée pour étudier l'influence de ce paramètre sur les énergies élastique et dissipée. La Fig. (4.8)(a), présente l'évolution de l'énergie élastique en fonction du déplacement pour différentes valeurs du pas de temps dt . La Fig. (4.8)(b), illustre l'évolution de l'énergie dissipée en fonction du déplacement pour différentes valeurs du pas de temps dt .

Nous constatons sur la Fig. (4.8)(a), qu'il n'y a pas d'influence importante du pas de temps dt sur l'énergie élastique. Les courbes ont les mêmes allures avec une petite différence juste au moment de la propagation de la fissure. Nous observons dans la courbe avec l'incrément du temps $dt = 1 \times 10^{-5}$ s qu'il existe des fluctuations qui se propagent jusqu'au bord du trou. On retrouve ces fluctuations dans la cas quasi-statique pour tous les pas de temps. Par contre, elles ne sont présentes dans le cas dynamique que pour le pas de temps $dt = 1 \times 10^{-5}$. Nous constatons d'après la Fig. (4.8)(b), que l'incrément de temps dt a un petit effet sur les résultats numériques de l'évolution de l'énergie dissipée. Nous observons le même phénomène de fluctuations dans l'évolution de l'énergie dissipée. D'après l'Eq. (1.48) de la ténacité, on peut dire que l'énergie dissipée dépend de la taille de maillage. Par contre, l'énergie dissipée est insensible au paramètre pas de temps dt dans le cas dynamique.

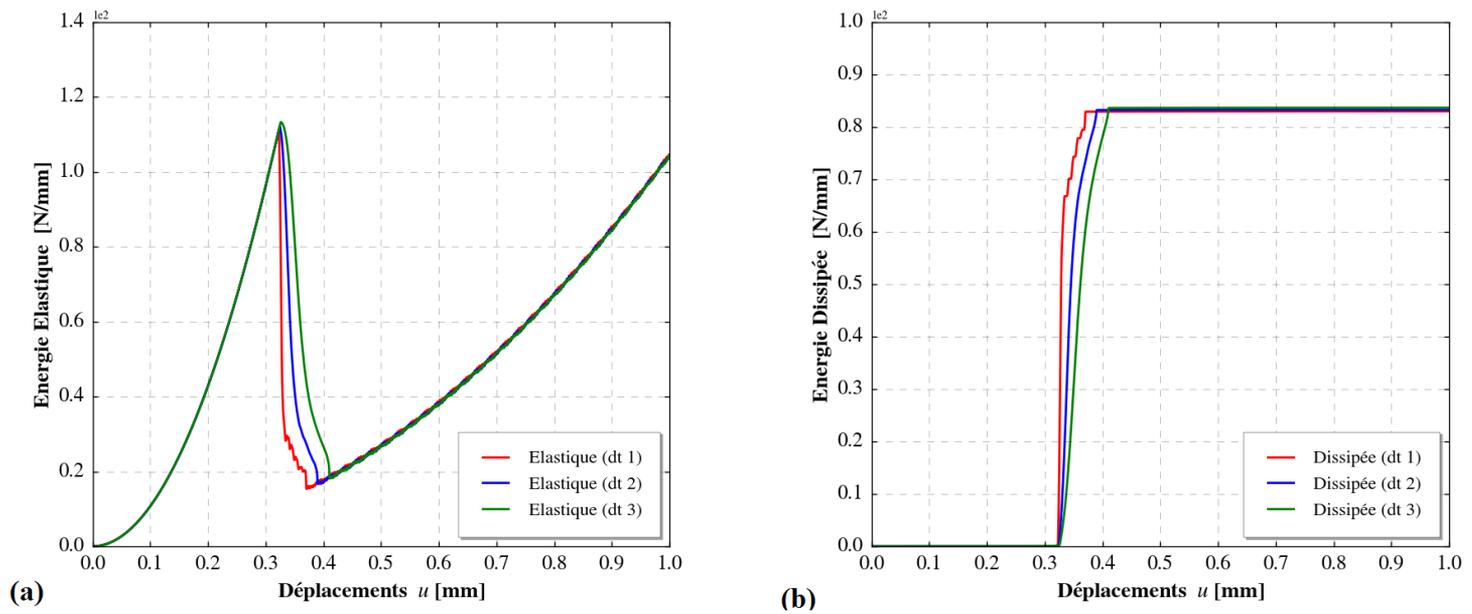


FIGURE 4.8: Plaque entaillée avec trou : analyses de la sensibilité du pas de temps avec $h = 0.04$ mm et $\ell = 0.1$ mm, (a) évolution de l'énergie élastique, (b) évolution de l'énergie dissipée.

4.8.3 Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie cinétique

Pour bien analyser l'influence de la taille du maillage et du pas de temps sur l'évolution de l'énergie cinétique, on a présenté l'évolution pendant les trois phases :

1. **La première phase** : représente la phase avant la propagation de la fissure à partir de l'entaille ($t : 0 \rightarrow 0.323$)s.
2. **La deuxième phase** : représente la phase de la propagation de la fissure jusqu'au bord du trou ($t : 0.323 \rightarrow 0.37$)s.
3. **La troisième phase** : représente la phase avant l'apparition de la fissure horizontale à partir du bord droit du trou ($t : 0.37 \rightarrow 1$)s.

4.8.3.1 Sensibilité à la taille du maillage

Pendant la première phase La Fig. (4.9) présente l'évolution de la première partie de l'énergie cinétique définie par l'équation (4.18) pour plusieurs valeurs du paramètre h correspondant à la finesse du maillage. Nous constatons que, les trois courbes de l'évolution de l'énergie cinétique fournissent des résultats presque identiques. Par conséquent, on peut conclure que pendant cette phase la taille du maillage n'a pas d'influence sur l'énergie cinétique.

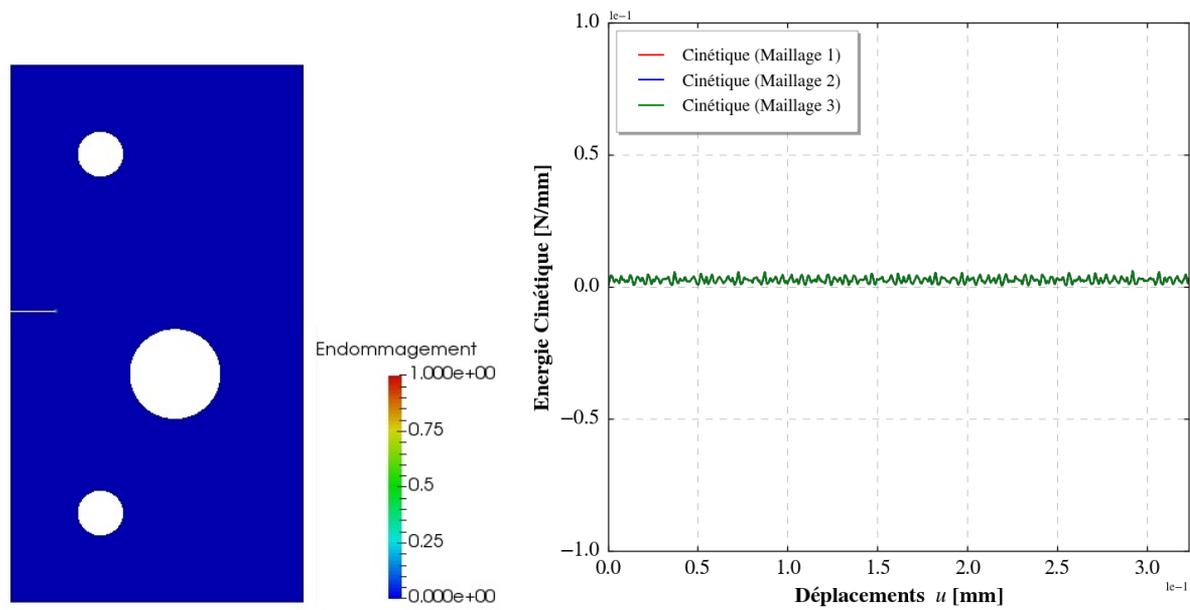


FIGURE 4.9: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie cinétique avant la propagation de la fissure ($t : 0 \rightarrow 0.323$)s (première phase) : analyse de la sensibilité du maillage avec un pas de temps $dt = 1 \times 10^{-5}$ s et $\ell = 0.1$ mm.

Pendant la deuxième phase La Fig. (4.10), montre l'évolution de l'énergie cinétique au cours de la deuxième phase pour plusieurs valeurs de la finesse du maillage h . On peut constater que pendant cette phase de propagation de la fissure, l'énergie cinétique est sensible à la taille du maillage h . Les simulations numériques montrent que le temps t de l'amorçage de la fissure à partir de l'entaille dépend du maillage de la structure. En réalité, plus le maillage fin plus le temps d'amorçage est petit.

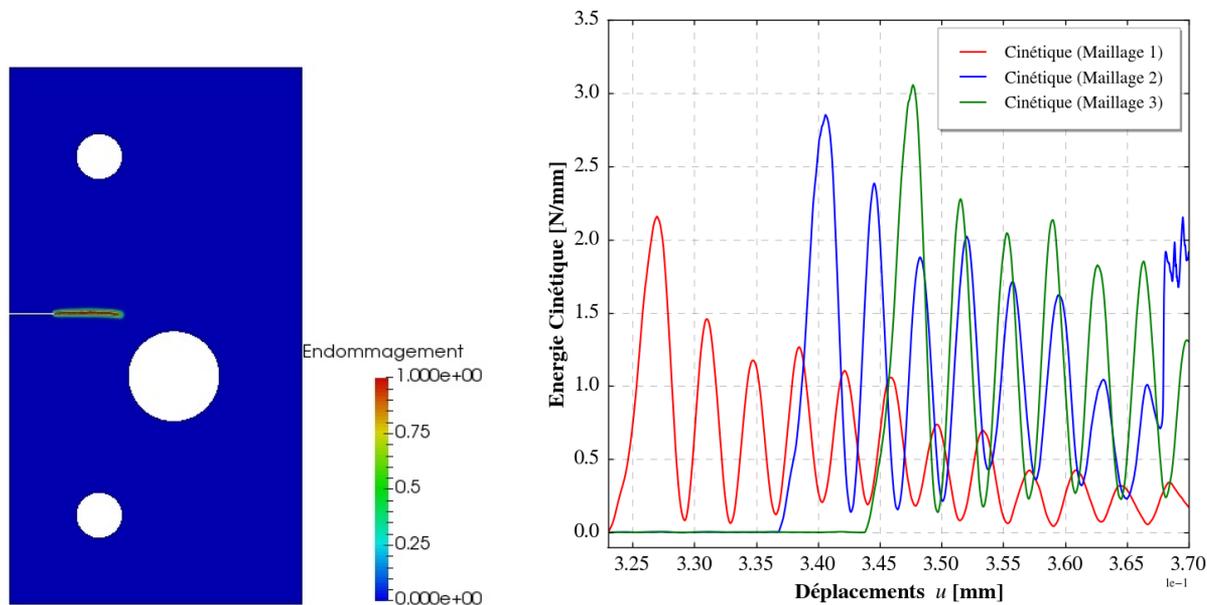


FIGURE 4.10: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie cinétique pendant la propagation de la fissure ($t : 0.323 \rightarrow 0.37$)s (deuxième phase) jusqu'au bord droit du trou : analyse de la sensibilité du maillage avec un pas de temps $dt = 1 \times 10^{-5}$ s et $\ell = 0.1$ mm.

Pendant la troisième phase La Fig. (4.11), montre l'évolution de l'énergie cinétique dans la troisième phase pour différents tailles de maillage h . Nous constatons que les différents maillages donnent les mêmes allures. En effet, les

courbes de l'énergie cinétique présentent une légère variation pour les différentes tailles. Nous observons la présence des oscillations pendant cette phase. Ces oscillations traduisent des vibrations de la structure, une fois que la fissure a atteint le bord du trou. La structure à partir de ce moment présente un bord libre de contrainte. Par conséquent, dans cette phase où l'endommagement ne se propage plus, l'énergie cinétique est pratiquement indépendante de la taille du maillage h .

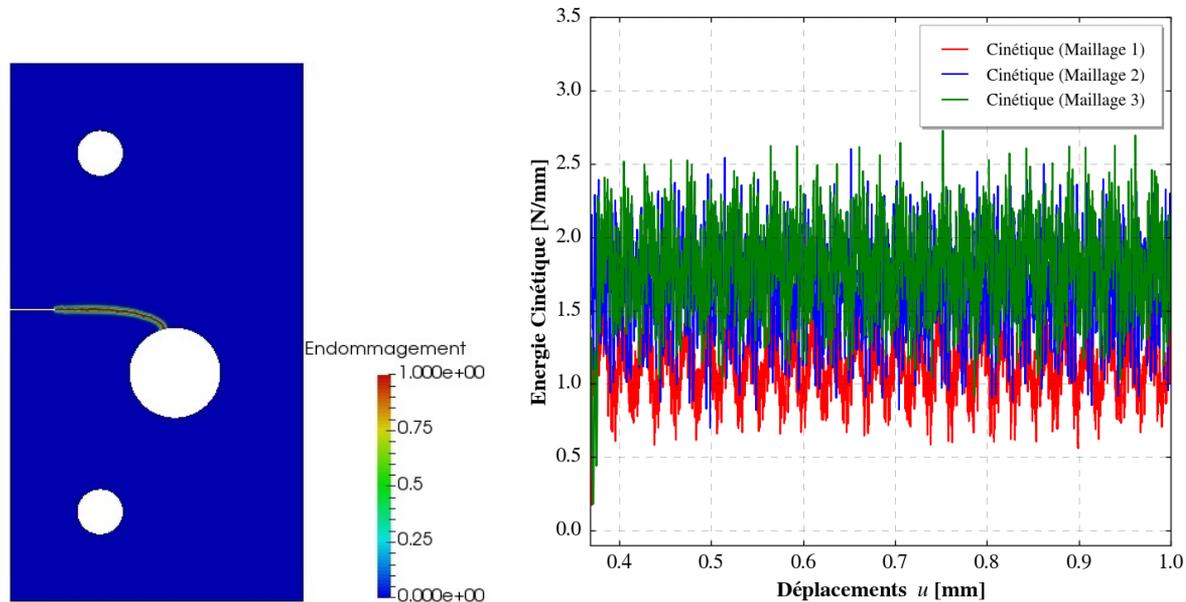


FIGURE 4.11: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie cinétique avant l'apparition de la fissure horizontale à partir du bord situé à droite du trou ($t : 0.37 \rightarrow 1$)s (troisième phase) : analyse de la sensibilité du maillage avec un pas de temps $dt = 1 \times 10^{-5}$ s et $\ell = 0.1$ mm.

4.8.3.2 Sensibilité à l'incrément de temps dt

Pendant la première phase La Fig. (4.12), présente l'évolution de la première phase de l'énergie cinétique en plusieurs pas de temps dt . Nous observons que les différents pas de temps dt fournissent la même allure de la courbe. En effet, avant la propagation de la fissure, l'énergie cinétique est insensible à l'incrément du pas de temps dt .

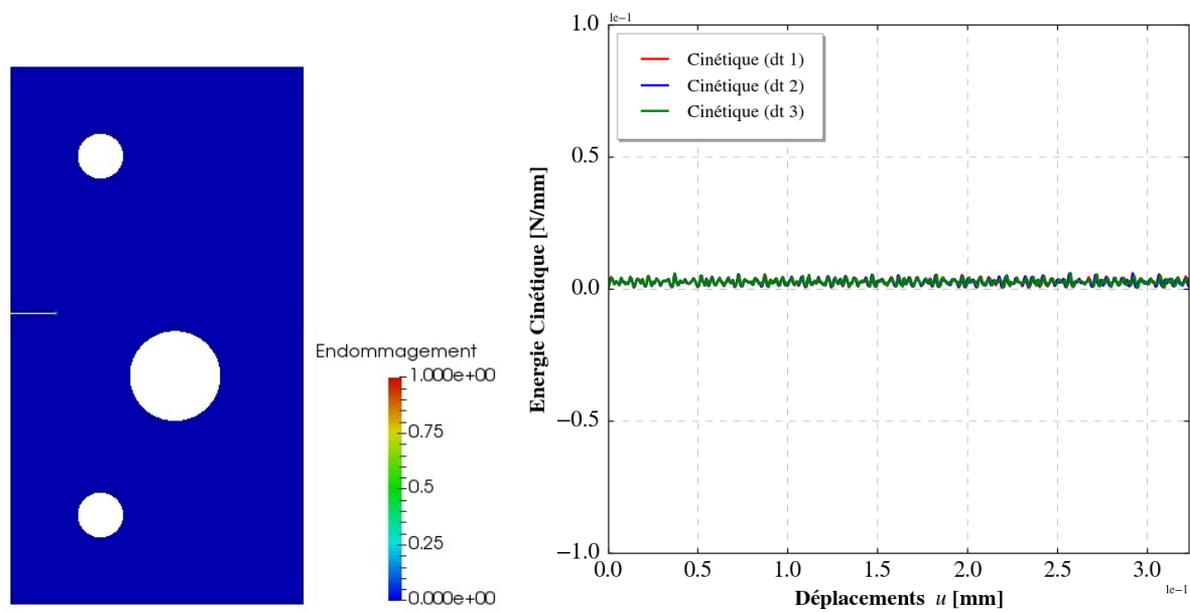


FIGURE 4.12: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie cinétique avant l'apparition de fissure ($t : 0 \rightarrow 0.323$)s (première phase) : analyse de la sensibilité du pas de temps avec un maillage $h = 0.04\text{mm}$ et $\ell = 0.1\text{mm}$.

Pendant la deuxième phase La Fig. (4.13) illustre l'évolution de l'énergie cinétique à partir des simulations numériques pour trois valeurs différentes de dt . À partir de ce résultat, nous observons que l'incrément de temps dt , dans cette phase de la propagation de la fissure à partir de l'entaille, joue un rôle dans l'évolution de l'énergie cinétique. Dans le cas où $dt = 1 \times 10^{-5}\text{s}$, la courbe présente des oscillations. Par contre, dans les deux autres cas de dt , les deux courbes présentent des faibles oscillations. Ainsi, l'énergie cinétique dans la phase de la fissuration est sensible à l'incrément de temps.

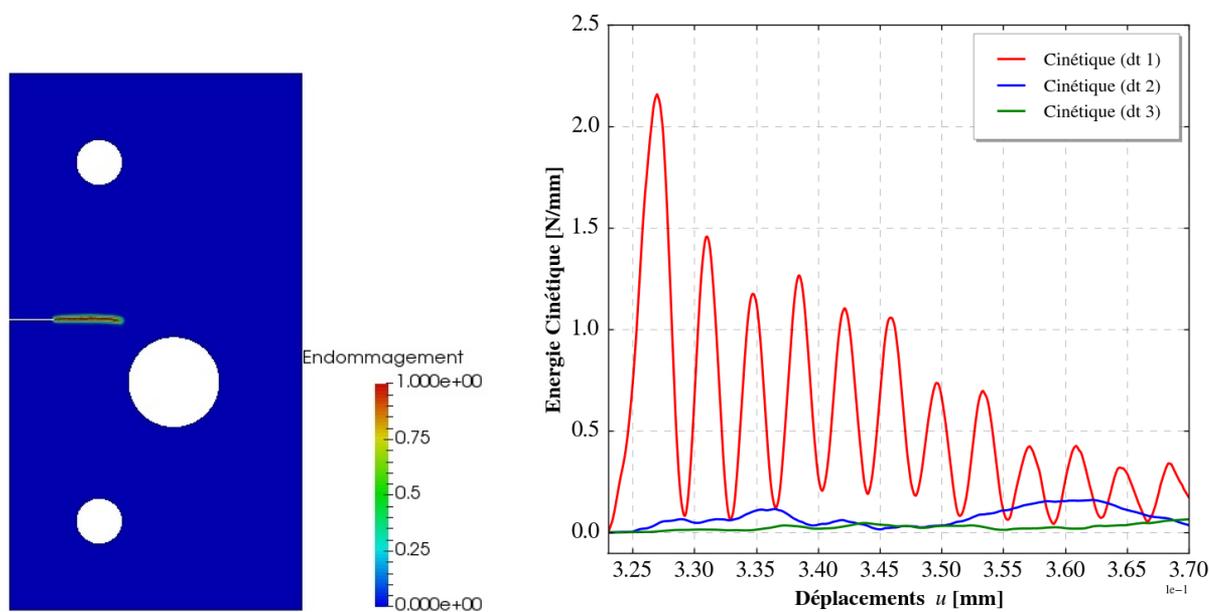


FIGURE 4.13: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie cinétique pendant la propagation de la fissure jusqu'au bord du trou ($t : 0.323 \rightarrow 0.37$)s (deuxième phase) : analyse de la sensibilité du pas de temps avec un maillage $h = 0.04\text{mm}$ et $\ell = 0.1\text{mm}$.

Pendant la troisième phase La Fig. (4.14), illustre l'évolution de l'énergie cinétique dans la troisième phase. Les résultats nous montrent une faible dépendance par rapport à la valeur de l'incrément du temps dt .

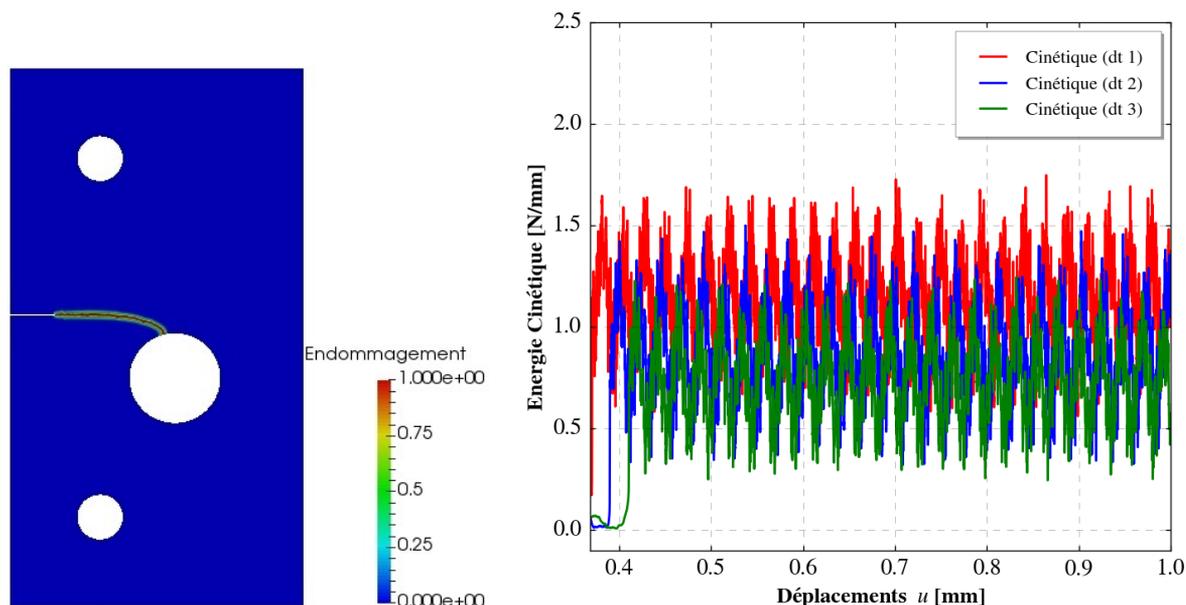


FIGURE 4.14: Évolution de l'énergie cinétique avant l'apparition de la fissure horizontale à partir du bord droit du trou ($t : 0.37 \rightarrow 1$)s (troisième phase) : analyse de la sensibilité du pas de temps avec un maillage $h = 0.04\text{mm}$ et $\ell = 0.1\text{mm}$.

4.8.4 Étude de la sensibilité du pas de temps et de la finesse du maillage sur l'évolution de l'énergie totale

Dans le but d'analyser la dépendance de l'énergie totale par rapport au maillage et à l'incrément du temps, nous avons réalisé des calculs numériques sur la plaque trouée en utilisant trois maillages et trois incréments de temps différents.

La Fig. (4.15)(a), illustre l'évolution de l'énergie totale évaluée avec différentes valeurs de h . On constate une petite influence de la taille du maillage h sur l'évolution de l'énergie totale.

La Fig. (4.15)(b), présente l'évolution de l'énergie totale pour différentes valeurs de l'incrément dt . On peut constater sur cette figure, la présence d'une petite zone plus sensible à l'incrément de temps dt . Il s'agit en effet de la zone de la propagation de la fissure. Au terme de cette étude, nous avons constaté que l'énergie cinétique ne joue pas un rôle important dans l'énergie totale, car elle est petite devant l'énergie élastique.

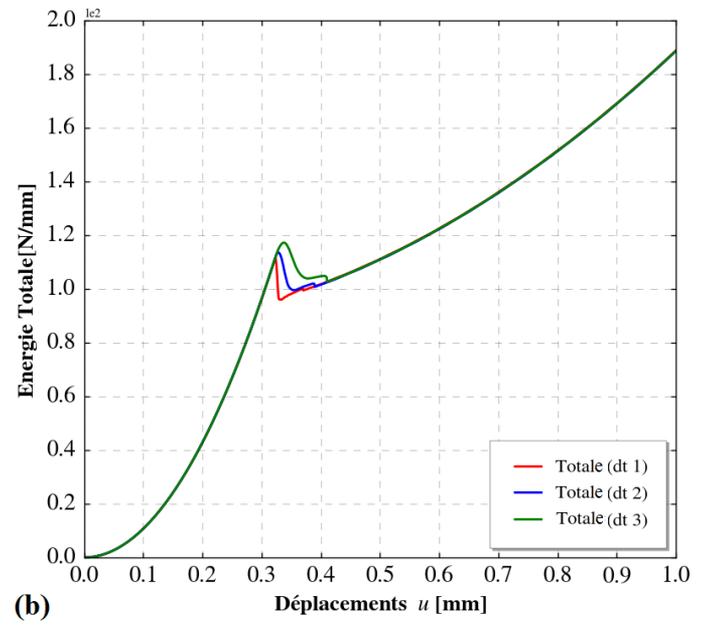
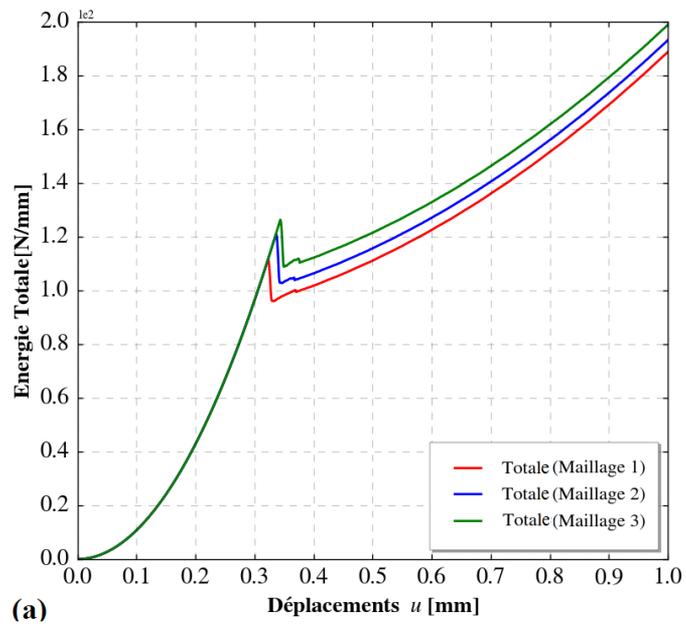


FIGURE 4.15: Plaque entaillée avec trou : évolution de l'énergie totale : analyse de la sensibilité (a) du maillage avec $dt = 1 \times 10^{-5}$ s et $\ell = 0.1$ mm, (b) du pas de temps dt avec $h = 0.04$ mm et $\ell = 0.1$ mm.

4.9 Conclusion

La propagation brutale des fissures est un phénomène dynamique. En conséquence, la prise en compte de l'énergie cinétique est nécessaire dans le bilan énergétique. Dans ce chapitre, nous avons étudié la théorie d'endommagement par champ de phase dans le cas dynamique. La résolution du problème dynamique s'effectue en deux étapes :

1. La résolution de l'équation élasto-dynamique pour déterminer le champ de déplacement en utilisant la méthode des éléments finis combiné avec le schéma de Newmark.
2. La résolution du problème d'endommagement à partir du critère avec condition d'irréversibilité dans lequel le champ de déformation est obtenu dans la première étape.

Après avoir étudié l'exemple quasi statique du problème de rupture d'une plaque rectangulaire entaillée contenant un trou dans le chapitre 2, nous avons étudié numériquement le même problème dans le cas dynamique. Nous avons montré que le terme de l'énergie cinétique ajouté dans le bilan de l'énergie stabilise la propagation de la fissure. En effet, *la propagation de la fissure dans le cas du problème quasi statique est brutale, elle devient progressive dans le cas du problème dynamique*. Il a été démontré que le chemin de la fissure est similaire dans les deux cas et que le terme d'inertie ne modifie que la largeur de la bande de localisation dans le cas étudié.

Nous avons montré, suite à l'étude comparative entre les deux cas quasi statique et dynamique, que *le temps d'amorçage de la fissure n'est pas le même et que la fissuration dans le cas dynamique est retardée par rapport au cas quasi statique*.

L'étude de la sensibilité du maillage h et de l'incrément du temps dt a montré que l'énergie élastique est concrètement insensible à la taille du maillage. En revanche, elle dépend de l'incrément de temps dt . En effet, nous avons constaté que à h fixé, plus le pas de temps est petit, plus il y'a des *fluctuations* dans le problème dynamique dans l'évolution des énergies élastique et dissipée (Fig. (2.12)) au cours de l'intervalle de temps pendant lequel la fissure infléchit pour atteindre le bord de trou. Notons que ce phénomène est toujours présent dans le cas quasi-statique lors de l'évolution de l'énergie élastique et dissipée. Par conséquent, avec un pas du temps faible, l'évolution de la fissuration dans le cas dynamique s'approche au cas quasi statique. Nous avons montré que l'énergie dissipée est très sensible à la taille de maillage h et indépendante de l'incrément de temps dt .

En ce qui concerne l'énergie cinétique, les résultats montrent qu'elle n'est sensible à la taille du maillage et à l'incrément du temps que pendant la phase de la propagation de la fissure.

Conclusion Générale

L'objectif premier de travail de cette thèse a été de proposer une approche numérique pour la simulation de la rupture et de l'endommagement par choc thermique dans les matériaux fragiles. Cette thèse se base sur l'approche variationnelle de la rupture fragile, où l'initiation de la fissure et son évolution quasi-statique sont les résultats de la minimisation d'une fonctionnelle énergétique de type Griffith définie comme la somme de l'énergie élastique et de l'énergie de surface du corps fissuré. En effet, la minimisation s'effectue en utilisant tous les déplacements cinématiquement admissibles et les ensembles de fissures admissibles, et sous réserve des conditions aux limites de type Dirichlet et ainsi que d'une condition d'irréversibilité pour éviter la disparition des fissures. Cette théorie a ensuite été régularisée en un modèle de champ de phase ou d'endommagement par gradient adapté aux calculs numériques et qui converge vers la théorie variationnelle de la rupture fragile. Dans ces modèles de champ de phase, la complexité du suivi et de l'évolution des fissures est abordée en introduisant un champ supplémentaire α qui doit être résolu à l'aide d'une équation différentielle partielle reliée aux équations d'élasticité. En effet, dans cette thèse le modèle est interprété comme un modèle d'endommagement à gradient non local qui présente certains avantages du point de vue numérique et théorique.

Notre première contribution vise à étudier l'endommagement et la rupture pour le cas quasi-statique. Nous avons présenté une étude comparative entre deux différents modèles d'endommagement non-locaux. Nous avons prouvé qu'ils se comportent différemment en terme de minima locaux. Une analyse du problème d'évolution, a été réalisée à travers l'exemple "académique" d'un rectangle en traction. Sur le plan numérique, nous avons implémenté les deux modèles d'endommagement et nous avons prouvé que le modèle où la fonction de la dissipation locale $w(\alpha) = \alpha$ introduit une limite d'élasticité contrairement au premier modèle $w(\alpha) = \alpha^2$. Par conséquent, il se rapproche plus d'un modèle de rupture fragile. Par ailleurs, en raison de la minimisation locale, nous avons trouvé que le chargement critique donné numériquement par les deux modèles étudiés est supérieur à la valeur trouvée analytiquement. D'où l'intérêt de définir l'algorithme de Backtracking pour déterminer le minimum global de la fonction régularisée. Dans la théorie de Griffith, G_c est une constante du matériau qui caractérise l'énergie associée à la création de surface de discontinuité alors que dans l'approche qu'on a utilisée, les paramètres caractérisant le comportement inélastique du matériau sont la contrainte critique σ_c et la longueur interne ℓ . En effet, d'après l'étude de l'amorçage de la fissure au bord du trou, il a été démontré que l'endommagement ne se produit que lorsque la contrainte critique du matériau est atteinte.

Afin de prouver l'efficacité du modèle du gradient d'endommagement non local en terme de simplicité et de la mise en œuvre numérique, nous avons proposé au chapitre 3 l'étude de l'endommagement et de la fissuration par choc thermique des matériaux fragiles. Le problème du choc thermique pour une plaque cylindrique mince bidimensionnelle est présenté. Il a été démontré numériquement et prouvé analytiquement qu'il existe une intensité du choc thermique critique ΔT_c à partir de laquelle il y a une fissuration. Pour une température du choc thermique ($\Delta T < \Delta T_c$), on constate une phase élastique stable sur la totalité de la structure à chaque instant t . Dans le cas contraire, une phase d'endommagement axisymétrique apparaît sur le bord de la structure qui se poursuit par une phase de la bifurcation où il y a une localisation de l'endommagement qui enclenche par la suite une phase de la propagation des fissures. Les résultats numériques ont montré que l'épaisseur de la zone endommagée axisymétrique, appelée également branche fondamen-

tale, augmente rapidement avec le temps. Elle augmente également avec la longueur interne ℓ et avec l'intensité du choc thermique ΔT . L'existence d'un temps t_b à partir duquel une bifurcation de la branche fondamentale peut se produire est prouvée numériquement. Par ailleurs, la solution bifurquée est stable et caractérisée par une longueur d'onde finie D proportionnelle à la longueur interne ℓ du matériau et inversement proportionnel à l'intensité du choc thermique ΔT . Cette solution bifurquée représente le début du phénomène de localisation menant à la création du modèle de fissure périodique observé dans les expériences. En outre, il a été remarqué qu'en utilisant les paramètres matériels, les coûts de calcul restent élevés. En ce qui concerne les paramètres du matériau, la longueur interne est en effet faible devant la taille des structures. Cette longueur régit également la relation entre la ténacité G_c et la contrainte critique σ_c . Par conséquent, un changement de la longueur modifiera l'un de ces paramètres physiques fondamentaux. *Il a été démontré que pour la phase de l'initiation, et pour ne pas "rater" la bifurcation, il est important de prendre un pas de temps dt petit devant la taille de la maille h ce qui conduit à des calculs lourds.*

Les motifs de fissures finales trouvés par des simulations numériques pour différentes intensités du choc thermique prouvent que les simulations du présent travail reproduisent fidèlement les motifs de fissures obtenus lors des essais de trempe. En effet, les motifs de fissures finales obtenus sont très similaires à ceux observés dans les résultats expérimentaux. Par conséquent, le modèle numérique proposé dans cette thèse a la capacité de reproduire fidèlement le processus de fissuration multiple tels que les motifs de fissures dans les échantillons en céramique soumis à des essais de trempe. Les caractéristiques périodiques et hiérarchiques des motifs de fissures ont été prédites avec précision. Les paramètres décrivant les modèles de fissures tels que l'espacement moyen des fissures, les longueurs des fissures ont été correctement estimés à partir des résultats numériques.

Le perfectionnement d'une méthode de simulation de la propagation dynamique des fissures est un axe principale de ce travail. En effet il est important de tenir compte de terme d'inertie dans la formulation et dans la résolution des problèmes où les vitesses de propagation des fissures sont grandes par rapport aux célérités des ondes du matériau. La méthode de résolution numérique du problème dynamique de rupture se base sur la recherche du champ de déplacement solution de l'équation élasto-dynamique. Le schéma de Newmark a été adopté pour la discrétisation du problème élastodynamique. En effet, à chaque pas de temps, les champs de déplacements nodaux solution du problème dynamique permettent de déterminer les champs d'endommagement nodaux qui contrôlent l'endommagement de la structure. Ces études ont montré en particulier que :

- La propagation de fissure n'est pas la même dans les deux cas quasi-statique et dynamique. Elle est brutale dans le cas du problème quasi-statique et progressive dans le cas du problème dynamique.
- Le chargement critique qui cause la rupture de la structure dans le cas dynamique est supérieur à celui du cas quasi-statique. En effet, les conditions d'amorçage et de propagation de fissures ne sont pas les mêmes.
- Les résultats des simulations numériques montrent, que si la vitesse de chargement diminue, le cas dynamique se rapproche du cas quasi-statique.
- L'effet de propagation d'onde rend le profil d'endommagement dans le cas dynamique plus large que dans le cas quasi-statique.

Par ailleurs, et à la suite de l'étude menée, nous avons obtenu les constatations suivantes sur la sensibilité par rapport à la taille du maillage h et à l'incrément du temps dt :

- Le pas du temps dt et le pas du maillage h n'ont aucune influence sur le motif de la fissure dans le cas dynamique.
- L'énergie élastique est pratiquement insensible à la taille de maillage h et à l'incrément de temps dt .
- L'énergie dissipée est influencée numériquement par h et non pas par dt . Elle est proportionnelle à la finesse du maillage h .
- Pendant la phase d'absence de propagation de la fissure, l'évolution de l'énergie cinétique n'est pas affectée ni par la taille du maillage h , ni par l'incrément du temps dt .
- L'énergie cinétique est très sensible à h et dt pendant la phase de la propagation de la fissure.

Le modèle d'endommagement par champ de phase qui est appliqué pour différents cas d'étude en quasi-statique, et thermique a permis de reproduire les mesures expérimentales. L'abondance des théories en mécanique de la rupture et

de l'endommagement et les méthodes de calculs correspondantes s'explique par le fait qu'aucune théorie ou méthode ne se révèle supérieure aux autres, car la rupture est un phénomène très complexe qui implique de multiples échelles spatiales et temporelles. En outre, la rupture reste un véritable enjeu, et de nouvelles méthodes continuent à voir le jour, à l'instar de la mécanique de la rupture quantifiée.

Les perspectives de cette thèse sont diverses. En suivant l'ordre chronologique de la thèse, donnons quelques pistes sur ce qu'elles pourraient être.

Le problème thermique peut être abordée avec des conditions aux limites qui sont plus proches des conditions expérimentaux en remplaçant la condition aux limites de type Dirichlet par des conditions de convection en utilisant le coefficient de convection h étant donné dans [51].

L'étude de la perte de l'unicité de la branche fondamentale caractérisée par la solution d'endommagement axisymétrique est également une piste de recherche intéressante. Ces expériences peuvent également être utilisées pour déduire le paramètre matériel ℓ et le comparer avec la relation $\sigma = \sqrt{w_1 E_0}$ (méthode inverse).

Nous proposons également de développer la formulation variationnelle pour étudier les comportements de fissuration thermique dans des solides fragiles en 3-D soumis à des chocs thermiques. En effet, nous envisageons d'illustrer le potentiel du modèle de champ de phase pour traiter la propagation de fissures dans des domaines 3D.

Nous envisageons d'étendre l'approche quasi-statique à la dynamique pour des pièces de géométries compliquées. Nous envisageons d'étudier des problèmes concrets dont on veut comparer les résultats numériques dans le cas dynamique avec ceux observés expérimentalement. Nous avons confirmé que la formulation variationnelle constitue un bon outil dans le cadre du déplacement imposé. Nous voulons étudier son adaptation à un cadre de forces imposées et le rendre plus flexible pour qu'elle puisse supporter tout type de chargement.

Nous avons l'intention d'examiner les modèles de fissures dans des problèmes dynamiques avec un maillage quadrangulaire au lieu d'un maillage triangulaire.

- [1] R. Alessi, J.J. Marigo, and S.Vidoli. Gradient damage models coupled with plasticity : Variational formulation and main properties. *Mechanics of Materials*,, 80(4) :351–367, 2015.
- [2] M. Ambati, T. Gerasimov, and L. D. Lorenzis. A review on phase-field models of brittle fracture and a new fast hybrid formulation. *Computational Mechanics*, 55(2) :383–405, 2015.
- [3] M. Ambati and L. D. Lorenzis. Phase-field modeling of brittle and ductile fracture in shells with isogeometric nurbs-based solid-shell elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312 :351–373, 2016.
- [4] L. Ambrosio and V.M. Tortorelli. Approximation of functional depending on jumps by elliptic functional via Gamma-convergence. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 43(8) :999–1036, 1990.
- [5] H. Amor. *Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris via des modeles non-locaux d’endommagement : Etude theorique et mise en oeuvre numerique*. PhD thesis, Université Paris 13, 2008.
- [6] L. Anders, K.A. Mardal , and G.N. Wells, editors. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method : The FEniCS Book*, volume 84. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Berlin, 2012.
- [7] I.S. Aranson, V.A. Kalatsky, and V.M. Vinokur. Continuum field description of crack propagation. *Physical Review Letters*, 85(1) :118–121, 2000.
- [8] G.I. Barenblatt. The mathematical theory of equilibrium of cracks in brittle fracture. *Advanced in Applied Mechanics*, 7 :55–129, 1962.
- [9] Z.P. Bazant, H. Ohtsubo, and K. Aoh. Stability and post-critical growth of a system of cooling or shrinkage cracks,. *International Journal of Fracture*, 15(5) :443–456, 1979.
- [10] B.Bourdin. Numerical implementation of the variational formulation for quasi-static brittle fracture. *Interfaces and Free Boundaries*, 9(2-4) :411–430, 2007.
- [11] J. Bleyer, C. Roux-Langlois, and J.F. Molinari. Dynamic crack propagation with a variational phase-field model : limiting speed, crack branching and velocity-toughening mechanisms. *International Journal of Fracture*, 204(11) :79–100, 2017.
- [12] S. Bordas, T. Rabczuk, and G. Zi. Three-dimensional crack initiation, propagation, branching and junction in non-linear materials by an extended meshfree method without asymptotic enrichment. *Engineering Fracture Mechanics*, 75(5) :943–960, 2008.
- [13] M. J. Borden, T. J. Hughes, C. M. Landis, A. Anvari, and I. J. Lee. A phase-field formulation for fracture in ductile materials : Finite deformation balance law derivation, plastic degradation, and stress triaxiality effects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 312(4) :130–166, 2016.
- [14] M.J. Borden, C.V. Verhoosel, M.A. Scott, T.J. Hughes, and C.M.Landis. A phase-field description of dynamic brittle fracture. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 217-220 :77–95, 2012.
- [15] B. Bourdin, G.A. Francfort, and J.J. Marigo. Numerical experiments in revisited brittle fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(4) :797–826, 2000.

- [16] B. Bourdin, G.A. Francfort, and J.J. Marigo. The variational approach to fracture. *Journal of Elasticity*, 91(1) :5–148, 2008.
- [17] B. Bourdin, J.J. Marigo, C. Maurini, and P. Sicsic. Morphogenesis and propagation of complex cracks induced by thermal shocks. *Physical Review Letters*, 112(1-10) :014301–1 –014301–5., 2014.
- [18] A. Braides. *Approximation of free-discontinuity problems*. Springer Science & Business Media, 1998.
- [19] A. Braides. *Gamma-convergence for Beginners*, volume 22. Oxford University Press Oxford, 2002.
- [20] B. Budiansky and J.R. Rice. Conservation laws and energy-release rates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 40(1) :201–203, 1973.
- [21] J.W. Cahn and J.E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i.interfacial free energy. *Journal of Chemical Physics*, 28(2) :258–267, 1958.
- [22] A. Chambolle, G.A. Francfort, and J.J. Marigo. When and how do cracks propagate. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(9) :1614–1622, 2009.
- [23] G.P. Cherepanov. The propagation of cracks in a continuous medium. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 31(3) :503–512, 1967.
- [24] C.Kuhn and R. Müller. A continuum phase field model for fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 77(18) :3625–3634, 2010.
- [25] B.J. De Smet and P.W. Bach. High temperature fracture toughness of alumina, ferrite and silicon carbide. *The Netherlands Energy Research Foundation*, (ECN-C-92-083), 1992.
- [26] D.S. Dugdale. Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2) :100–104, 1960.
- [27] J.D. Eshelby. Energy Relations and the Energy-Momentum Tensor in Continuum Mechanics. In M.F. Kanninen, W. F. Adler, A. R. Rosenfeld, and R. I. Jaffee, editors, *Inelastic behaviour of solids*, pages 77–114. McGraw-Hill, 1970.
- [28] G.A. Francfort and J.J. Marigo. Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(8) :1319 – 1342, 1998.
- [29] G.A. Francfort and J.J. Marigo. Vers une théorie énergétique de la rupture fragile. *Comptes Rendus Mécanique*, 330(4) :225–233, 2002.
- [30] M. Fremond and B. Nedjar. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8) :1083–1103, 1996.
- [31] A. Friedman and J. Spruck. Variational and free boundary problems. *Springer Science and Business Media*, 53 :283–292, 2012.
- [32] M. Fukuhara and I. Yamauchi. Temperature dependence of the elastic moduli, dilational and shear internal frictions and acoustic wave velocity for alumina, (y)tzp and b-sialon ceramics. *Journal of Materials Science*, 28(17) :4681–4688, 1993.
- [33] N. Germain, J. Besson, and F. Feyel. Composite layered materials : Anisotropic nonlocal damage models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(41-44) :4272–4282, 2007.
- [34] P. Grassl and M. Jirasek. Plastic model with non-local damage applied to concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 30(1) :71–90, 2006.
- [35] A. A. Griffith. The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of Londres*, 221 :163–198, 1920.
- [36] H.D.Bui. *Mécanique de la rupture fragile*. 1978.
- [37] M. Hofacker and C. Miehe. A phase field model of dynamic fracture : Robust field updates for the analysis of complex crack patterns. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 93(3) :276–301, 2013.
- [38] G.R. Irwin. Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of applied Mechanics*, 24(3) :361–364, 1957.

- [39] O.B. Isgor and A.G. Rzaqpur. Finite element modeling of coupled heat transfer, moisture transport and carbonation processes in concrete structures. *Cement and Concrete Composites*, 26(1) :57–73, 2004.
- [40] C.P. Jiang, X.F. Wu, J. Li, F. Song, Y.F. Shao, X.H. Xu, and P. Yan. A study of the mechanism of formation and numerical simulations of crack patterns in ceramics subjected to thermal shock. *Acta Materlia*, 60(11) :4540–4550, 2012.
- [41] Thomas J.R.H. *The finit element method, Linear static and dynamic finite element analysis*. prentice-Hall,Inc. A Division of Simon and Schuster Englewood Cliffs, New Jersey 07632, Singapore, 1987.
- [42] L. M. Kachanov. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Teckhnicheskikh Nauk*,, 8 :26–31, 1958.
- [43] A. Karma, D. A. Kessler, and H. Levine. Phase-field model of mode iii dynamic fracture. *Physics Review Letter*, 87(4) :045–501, 2001.
- [44] D. Krajcinovic. Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, 8(2-3) :117–197, 1989.
- [45] C. Kuhn and R. Müller. A phase field model for fracture. *Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 8(1) :10223–10224, 2008.
- [46] C. Kuhn, A. Schuter, and R. Müller. On degradation functions in phase field fracture models. *Computational Materials Science*, 108, Part B(4) :374–384, 2015.
- [47] J. B. Leblond. *Mécanique de la rupture fragile et ductile*, volume 1. 2003.
- [48] J. Lemaitre, J. L. Chabocheand A. Benallal, and R. Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. 1994.
- [49] B. Li, A. Pandolfi, and M. Ortiz. Material-point erosion simulation of dynamic fragmentation of metals. *Mechanics of Materials*, 80- Part B :288–297, 2015.
- [50] J. Li, F. Song, and CP. Jiang. Direct numerical simulations on crack formation in ceramic materials under thermal shock by using a non-local fracture model. *Journal of the European Ceramic Society*, 33(13-14) :2677–2687, 2013.
- [51] Y. Liu, X. Wu, Q. Guo, F. Song C. Jiang, and J. Li. Experiments and numerical simulations of thermal shock crack patterns in thin circular ceramics pecimens. *Ceramic International*, 41 Part B(1) :1107–1114, 2015.
- [52] E. Lorentz and S. Andrieux. A variational formulation for nonlocal damage models. *International Journal of Plasticity*,, 15(2) :119 – 138, 1999.
- [53] E. Lorentz, S. Cuvilliez, and K. Kazymyrenko. Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(1) :20–26, 2011.
- [54] E. Lorentz, S. Cuvilliez, and K. Kazymyrenko. Modelling large crack propagation : from gradient-damage to cohesive zone models. *International Journal of Fracture*, 178(1-2) :85–95, 2012.
- [55] J.J. Marigo. Initiation of cracks in griffith’s theory : an argument of continuity in favor of global minimization. *Journal of Nonlinear Science volume*, 20(6) :831–868, 2010.
- [56] C. Miehe, F. Welschinger, and M. Hofacker. Thermodynamically consistent phase-field models of fracture : Variational principles and multi-field fe implementations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 83(10) :1273–1311, 2010.
- [57] N. Moelans, B. Blanpain, and P. Wollants. An introduction to phase-field modeling of microstructure evolution. *Calphad*, 32(2) :268–294, 2008.
- [58] G. Molnar and A. Gravouil. 2d and 3d abaqus implementation of a robust staggered phase-field solution for modeling brittle fracture. *Finite Elements in Analysis and Design*, 130 :27–38, 2017.
- [59] M. A. Msekh, M. Jamshidian J. M. Sargado, P.M. Areias, and T. Rabczuk. Abaqus implementation of phase-field model for brittle fracture. *Computational Group Materials Science*, 96 Part B :472–484, 2015.
- [60] D. Mumford and J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5) :577–685, 1989.

- [61] A. Needleman. A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal of Applied Mechanics*, 54(3) :525–531, 1987.
- [62] M. Negri. The anisotropy introduced by the mesh in the finite element approximation of the Mumford-Shah functional. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 20(9-10) :957–982, 1999.
- [63] M. Negri. A comparative analysis on variational models for quasi-static brittle crack propagation. *Advances in Calculus of Variations*, 3(2) :149–212, 2008.
- [64] M. Negri and C. Ortner. Quasi-static crack propagation by griffith’s criterion. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 18(11) :1895–1925, 2008.
- [65] N. M. Newmark. *A method of computation for structural dynamics*, volume 1. 1959.
- [66] Q. S. Nguyen. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. 2000.
- [67] K. Pham, H. Amor, J. J. Marigo, and C. Maurini. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20(4) :618–652, 2011.
- [68] K. Pham and J. J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement : I. Les concepts fondamentaux. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :191–198, 2010a.
- [69] K. Pham and J. J. Marigo. From the onset of damage to rupture : construction of responses with damage localization for a general class of gradient damage models. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 25(2-4) :147–171, 2013.
- [70] K. Pham and J.J. Marigo. Approche variationnelle de l’endommagement : II. Les modèles à gradient. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(4) :199–206, 2010b.
- [71] C. G. Pijaudier and Z. P. Bazant. Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(10) :1512–1533, 1987.
- [72] J.R. Rice. A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, 35(2) :379–386, 1968.
- [73] K. Saanouni, J. Chaboche, and P. Lesne. On the creep crack-growth prediction by a non local damage formulation. *European Journal of Mechanics A-solids*, 8(6) :437–459, 1989.
- [74] Q. Shao, R. F. Gonzalez, A. Mikdam, and L. Bouhala. Influence of heat transfer and fluid flow on crack growth in multilayered porous/dense materials using xfm : Application to solid oxide fuel cell like material design. *International Journal of Solids and Structures*, 51(21-22) :3557–3569, 2014.
- [75] P. Sicsic, J. J. Marigo, and C. Maurini. Initiation of a periodic array of cracks in the thermal shock problem : a gradient damage modeling. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 63(256-284), 2014.
- [76] N. Sukumar, J. E. Dolbow, and N. Moës. Extended finite element method in computational fracture mechanics : a retrospective examination. *International Journal of Fracture*, 196(1) :189–206, 2015.
- [77] D. Sutula, P. Kerfriden, T. V. Dam, and S. P. A. Bordas. Minimum energy multiple crack propagation. part i : Theory and state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 191 :205–224, 2018.
- [78] M. L. Williams. On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, 24(1) :109–114, 1956.
- [79] J.Y. Wu. A unified phase-field theory for the mechanics of damage and quasi-brittle failure. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 103 :72–99, 2017.