



**HAL**  
open science

# Modélisation numérique et expérimentale de la captation d'énergie houlomotrice : application aux essais à échelle réduite en bassin

Romain Lecuyer-Le Bris

► **To cite this version:**

Romain Lecuyer-Le Bris. Modélisation numérique et expérimentale de la captation d'énergie houlomotrice : application aux essais à échelle réduite en bassin. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Université de Bretagne occidentale - Brest, 2022. Français. NNT : 2022BRES0046 . tel-03944339

**HAL Id: tel-03944339**

**<https://theses.hal.science/tel-03944339v1>**

Submitted on 18 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ DE BRETAGNE OCCIDENTALE

ÉCOLE DOCTORALE N° 598

*Sciences de la Mer et du Littoral*

Spécialité : *Mécanique, génie mécanique, mécanique des fluides et énergétique*

Par

**Romain LECUYER-LE BRIS**

**Modélisation numérique et expérimentale de la captation d'énergie houlomotrice : application aux essais à échelle réduite en bassin**

Thèse présentée et soutenue à Brest, le 17 juin 2022

Unité de recherche : Laboratoire de Comportement des Structures en Mer, Unité RDT, Ifremer

## Rapporteurs avant soutenance :

Lili KIMMOUN    Maître de Conférences HDR à l'École Centrale de Marseille  
Elie RIVOALEN    Professeur des universités à l'INSA de Rouen

## Composition du Jury :

Président et examinateur :	Jean-Yves BILLARD	Professeur des universités à l'ENSAM et à l'École Navale
Examineurs :	Lili KIMMOUN	Maître de Conférences HDR à l'École Centrale de Marseille
	Elie RIVOALEN	Professeur des universités à l'INSA de Rouen
	Anne BLAVETTE	Chargée de Recherche du CNRS au SATIE de l'ENS Rennes
Dir. de thèse :	Jean-Frédéric CHARPENTIER	Maître de Conférences HDR à l'ENSAM et à l'École Navale
Co-dir. de thèse :	Mohamed BENBOUZID	Professeur des universités à l'Université de Bretagne Occidentale

## Invité(s) :

Marc LE BOULLUEC    Ingénieur à l'Ifremer de Brest    Co-encadrant de thèse



# REMERCIEMENTS

---

Je tiens à remercier Lili KIMMOUN et Élie RIVOLALEN qui ont rapporté ce travail et qui, par leurs commentaires, m'ont permis d'en améliorer la lisibilité et la compréhension. Je remercie également le président de mon jury Jean-Yves BILLARD et Anne BLAVETTE d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Je remercie bien évidemment mes encadrants sans qui cette thèse n'aurait tout simplement pas existé. Merci à eux d'avoir su m'aider et me soutenir sans m'envahir. Je remercie Marc qui a été un pilier de ce travail et qui a partagé avec moi son savoir et son expérience. Je le remercie également pour les moments de rire, les instants culturels et les discussions amenant à des questionnements profonds qui m'ont permis de m'aérer l'esprit lorsque c'était nécessaire. Je remercie Jean-Frédéric et Mohamed de leur soutien et de m'avoir appris à être moins critique avec mon travail et à prendre du recul.

Je remercie mes amis pour tous les bons moments. Merci à la BNV pour le soutien indéfectible qu'ils ont apporté à cette fameuse thèse sur les dauphins. Merci à Alban, le frerot, qui a été là dans les bons et les mauvais moments. Merci à Gauthier, Antoine, Quentin, Laure, Mathilde, Coline, Zoé, Sabrina, Hugo, Robin, Alexandre, Floriant Saïd, Sacha, Gaspard, Camil et Agathe pour la bonne ambiance. Merci à Pierre-Yves, Maëlen, Benoît, Maël, Seb, Peter, Mick, Nicolas, Christophe, Maria, Justin, Olivier et Christian pour leur accueil et leur gentillesse. Merci à Tom, Guillaume, Quentin et Jean pour les bons moments à l'IreNav et au Ty'Kall. Merci à Alain, Florent, Aurélien, Sébastien et Julien qui m'ont aidé pour la partie expérimentale.

Un merci spécial à Gauthier et Yann pour tous les bons moments que nous avons passé sous le même toit.

Un grand merci à Émilie et à Marion qui m'ont aidé pour la préparation de la soutenance et merci à toutes les personnes qui sont venues y assister.

Finalement, je remercie infiniment ma famille qui m'a soutenu du début à la fin et notamment pendant la rédaction, période pendant laquelle je n'étais pas forcément très agréable, les moments de doute et les jours sans. Je n'y serais pas arrivé sans elle.

---

*À ma mère*

# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Remerciements</b>	<b>3</b>
<b>Table des matières</b>	<b>5</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>9</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>15</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>17</b>
<b>1 État de l'Art</b>	<b>19</b>
1.1 Ressource énergétique de la houle . . . . .	20
1.2 Concepts houlomoteurs existants . . . . .	20
1.3 Modélisation des systèmes houlomoteurs . . . . .	29
1.4 Stratégies de récupération . . . . .	32
1.5 Modélisation des systèmes multicorps . . . . .	36
1.6 Objectifs de la thèse . . . . .	37
<b>2 Dynamique d'un corps dans la houle</b>	<b>39</b>
2.1 Théorie sur la houle . . . . .	41
2.2 Interaction fluide structure . . . . .	47
2.3 Effort de rappel hydrostatique . . . . .	51
2.4 Équation mécanique . . . . .	54
2.5 Effort d'excitation . . . . .	60
2.6 Modèles d'état classique . . . . .	64
2.7 Autre approche par des fonctions de retard continues . . . . .	81
2.8 Cas particulier du pilonnement . . . . .	89
2.9 Conclusion . . . . .	89
<b>3 Dynamique des systèmes multicorps</b>	<b>93</b>
3.1 Formalisme mathématique . . . . .	95
3.2 Liaisons mécaniques . . . . .	99
3.3 Cas simple d'application . . . . .	102
3.4 Liaisons mécaniques en 3D . . . . .	106

3.5	Validation . . . . .	117
3.6	Modèle Hybride . . . . .	126
3.7	Application à un système houlomoteur multicorps . . . . .	132
3.8	Conclusion . . . . .	145
<b>4</b>	<b>Modélisation expérimentale d'un système monocorps</b>	<b>147</b>
4.1	Introduction . . . . .	149
4.2	Campagne expérimentale . . . . .	151
4.3	Modèle linéaire à l'ordre 1 . . . . .	155
4.4	Efforts additionnels sur houle régulière . . . . .	163
4.5	Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre seul sur houle régulière . . . . .	173
4.6	Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre avec collerette sur houle régulière . . . . .	185
4.7	Modèle de correction pour le pilonnement sur houle irrégulière . . . . .	190
4.8	Modèle de correction pour le cavement/tangage sur houle régulière . . . . .	192
4.9	Modèle de correction pour le tangage pur (MCTP) sur houle régulière . . . . .	204
4.10	Conclusion . . . . .	209
<b>5</b>	<b>Réalisation d'un dispositif expérimental de captation d'énergie des vagues à deux corps</b>	<b>211</b>
5.1	Choix du type de système . . . . .	212
5.2	Choix de l'échelle . . . . .	214
5.3	Choix de la machine électrique . . . . .	225
5.4	Contraintes supplémentaires . . . . .	228
5.5	Conclusion . . . . .	229
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>231</b>
	<b>Annexes</b>	<b>237</b>
<b>A</b>	<b>Annexe du chapitre 2</b>	<b>238</b>
A.1	Caractéristiques du cylindre . . . . .	238
A.2	Preuve de l'équation 2.110 . . . . .	239
<b>B</b>	<b>Annexe du chapitre 3</b>	<b>240</b>
B.1	Caractéristiques du Andrew's squeezer mechanism . . . . .	240
B.2	Interfaçage de la routine DGESV . . . . .	241
B.3	Interfaçage de la routine DGELS . . . . .	242
B.4	Interfaçage de la routine DGELSD . . . . .	242

---

B.5	Interfaçage de la routine DGBSV . . . . .	244
B.6	Caractéristiques du RM3 . . . . .	245
B.7	Expression alternative du modèle complet . . . . .	245
B.8	Rotation de $p \geq 2$ vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	246
<b>C</b>	<b>Annexe du chapitre 4</b>	<b>249</b>
C.1	Pendule bifil . . . . .	249
C.2	Rappel hydrostatique d'un cylindre . . . . .	251
C.3	Linéarisation de l'effort d'ancrage . . . . .	256
C.4	Démonstration de l'équation 4.54 . . . . .	259
<b>D</b>	<b>Annexe du chapitre 5</b>	<b>264</b>
D.1	Vérification du respect des contraintes . . . . .	264
D.2	Caractéristiques de la machine électrique . . . . .	266
D.3	Nomenclature et plans de la maquette . . . . .	268
	<b>Bibliographie</b>	<b>279</b>





# TABLE DES FIGURES

---

1.1	Évaluation de la ressource houlomotrice mondiale en kW/m [9] . . . . .	21
1.2	Les différentes familles de concepts houlomoteurs [11] . . . . .	22
1.3	Système de captation Pelamis [13] . . . . .	23
1.4	Système de captation Bilboquet [16] . . . . .	24
1.5	Système de captation OYSTER 800 [18] . . . . .	25
1.6	Système de captation Limpet [20] . . . . .	26
1.7	Système de captation Wave Dragon [22] . . . . .	26
1.8	Système de captation Archimedes Wave Swing [24] . . . . .	27
1.9	Système de captation Searev [26] . . . . .	28
1.10	Système de captation Anaconda [27] . . . . .	29
2.1	Volume fluide, figure tirée de la thèse d'Aurélien BABARIT [92] . . . . .	48
2.2	Convention des mouvements pour les structures marines (ici un navire), figure inspirée de celle de Brosen [94] . . . . .	50
2.3	Exemple d'un cylindre immergé avec une incidence . . . . .	52
2.4	Stabilité pour un mouvement de roulis . . . . .	55
2.5	Rappel hydrostatique pour notre cylindre de référence en tangage/roulis . . . . .	55
2.6	Exemple d'extrapolation pour $B_{11}$ . . . . .	58
2.7	Comparaison entre $K_{11}(t)$ avec et sans extrapolation . . . . .	59
2.8	Exemple d'extrapolation pour $A_{11}$ . . . . .	59
2.9	Effort d'excitation en cavalement . . . . .	61
2.10	Effort d'excitation en pilonnement . . . . .	61
2.11	Moment d'excitation en tangage . . . . .	61
2.12	Fonction de retard pour l'excitation en cavalement avec et sans troncature . . . . .	62
2.13	Fonction de retard pour l'excitation en tangage avec et sans troncature . . . . .	63
2.14	Fonctions de retard pour $K_{11}$ avec et sans extrapolation . . . . .	68
2.15	Comparaison entre SSMP et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	69
2.16	Comparaison entre SSMP et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	69
2.17	Fonctions de retard pour $K_{11}$ avec et sans extrapolation . . . . .	73
2.18	Comparaison entre SSM1 et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	73
2.19	Comparaison entre SSM1 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	74
2.20	Convention utilisée pour l'incidence de la houle . . . . .	74

2.21	Comparaison entre SSM2 et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	75
2.22	Comparaison entre SSM2 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	76
2.23	Comparaison entre SSM3 et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	77
2.24	Comparaison entre SSM3 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	77
2.25	Evolution of $\mathbf{D}^c$ when increasing $n_t$	78
2.26	Temps de calcul pour l'algorithme d'HSVD appliqué à $K_{11}$	79
2.27	Comparaison entre SSM4 et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	85
2.28	Comparaison entre SSM4 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	85
2.29	Comparaison entre SSM5 et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement	86
2.30	Comparaison entre SSM5 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage	87
2.31	Évolution de $\mathbf{D}^a$ et de $\mathbf{D}^b$ en fonction de $n_t$	87
2.32	RAO en pilonnement du cylindre	89
2.33	Comparaison du terme d'action directe pour SSM1 et SSM2	90
3.1	Notations et référentiel pour un pendule simple	103
3.2	Andrew's squeezer mechanism [140]	118
3.3	Résultats de la simulation temporelle	122
3.4	Puissance des actions de liaisons	124
3.5	Matrice $\mathbf{A}$ avant et après permutation	125
3.6	Allures de l'angle $\tilde{\beta}_{cs}$ et de ses dérivées	130
3.7	Déviations du couple « expérimental » avec double dérivation de l'interpolation de $\tilde{\beta}$	130
3.8	Écart entre le couple « expérimental » et le couple de référence	131
3.9	Identification de la raideur du ressort	132
3.10	Système RM3 et repère de travail	133
3.11	Pilonnement du flotteur, de la colonne, pilonnement et mouvement relatifs du flotteur vis-à-vis de la colonne	136
3.12	Cavalement du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier	137
3.13	Tangage du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier	138
3.14	Pilonnement du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier	139
3.15	Zoom sur le cavalement pour les modèles complet et régulier	139
3.16	Déplacement relatif pour les modèles complet et régulier	140
4.1	Coefficients inertiels $\alpha_m$ (a) et d'amortissement $\alpha_d$ (b) d'une décomposition de Morison déterminés par Sarpkaya [159, 160] en fonction de $K_C$ pour différentes valeurs de $\beta$ .	151
4.2	Géométrie du cylindre seul et du cylindre avec collerette testés en bassin (en mm)	152
4.3	RAO expérimentales en cavalement	152
4.4	RAO expérimentales en pilonnement	153

4.5	RAO expérimentales en tangage . . . . .	153
4.6	Nombres de Reynolds pour le mouvement de pilonnement . . . . .	154
4.7	Nombres de Froude pour le mouvement de pilonnement . . . . .	154
4.8	Configuration de l'ancrage . . . . .	156
4.9	Modèle d'ancrage équivalent . . . . .	157
4.10	Résultantes horizontales de $\mathbf{F}_{tot}$ et de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	158
4.11	Erreur relative de la résultante horizontale de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	158
4.12	Résultantes verticales de $\mathbf{F}_{tot}$ et de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	159
4.13	Erreur relative de la résultante verticale de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	159
4.14	Moments de $\mathbf{F}_{tot}$ et de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	160
4.15	Erreur relative du moment de $\mathbf{F}_{tot,lin}$ . . . . .	160
4.16	RAO théorique en cavalemt du cylindre seul . . . . .	161
4.17	RAO théorique en pilonnement du cylindre seul . . . . .	161
4.18	RAO théorique en tangage du cylindre seul . . . . .	162
4.19	RAO théorique en pilonnement du cylindre avec collerette . . . . .	163
4.20	Effort additionnel en cavalemt pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3 . . . . .	165
4.21	Effort additionnel en pilonnement pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3 . . . . .	165
4.22	Effort additionnel en tangage pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3 . . . . .	166
4.23	Effort additionnel en cavalemt pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3 . . . . .	167
4.24	Effort additionnel en pilonnement pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3 . . . . .	167
4.25	Effort additionnel en tangage pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3 . . . . .	168
4.26	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en cavalemt, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul . . . . .	170
4.27	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en pilonnement, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul . . . . .	170
4.28	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en tangage, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul . . . . .	171
4.29	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en cavalemt, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette . . . . .	171
4.30	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en pilonnement, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette . . . . .	172
4.31	Effort additionnel $F_{add}$ , effort d'excitation $F_{ex}$ et effort total $F_{add} + F_{ex}$ en tangage, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette . . . . .	172
4.32	Masse ajoutée additionnelle du cylindre seul avec le ML . . . . .	174

TABLE DES FIGURES

---

4.33	Taux d'amortissement critique du cylindre seul avec le ML . . . . .	174
4.34	RAO en pilonnement du cylindre seul avec le ML . . . . .	175
4.35	Erreur relative des RAOs en pilonnement pour le cylindre seul avec le ML . . . . .	175
4.36	Coefficient d'amortissement pour le cylindre seul avec le MNLVA . . . . .	178
4.37	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MNLVA . . . . .	179
4.38	RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVA . . . . .	180
4.39	Coefficient de frottement et de trainée pour le cylindre seul avec le MNLVA . . . . .	181
4.40	Coefficient d'amortissement pour le cylindre seul avec le MNLVR . . . . .	183
4.41	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MNLVR . . . . .	184
4.42	RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVR . . . . .	184
4.43	Coefficient d'amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA . . . . .	186
4.44	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA . . . . .	186
4.45	RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA . . . . .	187
4.46	Coefficient d'amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR . . . . .	188
4.47	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR . . . . .	189
4.48	RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR . . . . .	189
4.49	RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVR sur houle irrégulière . . . . .	191
4.50	RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR sur houle irrégulière . . . . .	192
4.51	Coefficient de trainée pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue . . . . .	196
4.52	Coefficient de masse ajoutée pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue . . . . .	196
4.53	RAO en cavement du cylindre seul avec vitesse absolue . . . . .	197
4.54	RAO en tangage du cylindre seul avec vitesse absolue . . . . .	197
4.55	Position verticale du point $R$ dans le repère fixe . . . . .	198
4.56	Coefficient de trainée pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse relative . . . . .	201
4.57	Coefficient de masse ajoutée pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse relative . . . . .	202
4.58	RAO en cavement du cylindre seul avec vitesse relative . . . . .	202
4.59	RAO en tangage du cylindre seul avec vitesse relative . . . . .	203
4.60	Position verticale du point $\Omega$ dans le repère fixe . . . . .	203
4.61	Coefficient d'amortissement pour le cylindre seul avec le MCTP . . . . .	205
4.62	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MCTP . . . . .	205
4.63	RAO en cavement pour le cylindre seul avec le MCTP . . . . .	206
4.64	RAO en tangage pour le cylindre seul avec le MCTP . . . . .	206

4.65	Coefficient d'amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MCTP . . . .	207
4.66	Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MCTP . . . .	208
4.67	RAO en cavement pour le cylindre avec collerette avec le MCTP . . . . .	208
4.68	RAO en tangage pour le cylindre avec collerette avec le MCTP . . . . .	209
5.1	Géométrie du système RM3 à l'échelle 1 :1, tirée de [167] . . . . .	213
5.2	Efforts d'excitation en pilonnement du flotteur en présence de la colonne et des différentes plaques . . . . .	218
5.3	Efforts d'excitation en pilonnement de l'ensemble {colonne+plaque} pour les différentes plaques et en présence du flotteur . . . . .	218
5.4	RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 1 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16 . . . . .	219
5.5	RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 2 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16 . . . . .	219
5.6	RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 3 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16 . . . . .	220
5.7	RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 4 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16 . . . . .	220
5.8	Puissances moyennes captées pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle avec une amplitude de vague de 10 cm et sans trainée à l'échelle 1 :16 . . . . .	221
5.9	Puissances moyennes captées pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle avec une amplitude de vague de 10 cm et avec trainée à l'échelle 1 :16 . . . . .	222
5.10	Algorithme d'estimation de la puissance moyenne captée . . . . .	223
5.11	Amplitudes de vague maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle	224
5.12	Puissances moyennes captées maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle . . . . .	225
5.13	Banc d'essai moteur avec la MSAP et une MCC . . . . .	226
5.14	Pertes collectives pour la MCC seule et pour la MCC couplée à la MSAP . . . .	227
5.15	Machines à états pour l'acquisition des données et le pilotage de la machine électrique . . . . .	228
5.16	Boucles cadencées pour la gestion des erreurs et la vérification des états du variateur	229
5.17	Représentation 3D de la maquette avec la machine électrique . . . . .	230
C.1	Repère de l'ancrage . . . . .	257
D.1	Amplitudes d'efforts maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle	264
D.2	Amplitudes de pilonnement maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle . . . . .	264

TABLE DES FIGURES

---

D.3	Amplitudes de vitesse relative maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle . . . . .	265
D.4	Amplitudes de course maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle	265

# LISTE DES TABLEAUX

---

2.1	Matrices du modèle d'état par les séries de Prony . . . . .	68
2.2	Relations entre modèle d'état continu et modèle d'état discret . . . . .	72
3.1	Catégorisation des liaisons classiques . . . . .	107
3.2	Définition des liaisons pour le cas isostatique . . . . .	120
3.3	Définition des liaisons pour le cas isostatique . . . . .	123
4.1	Caractéristiques maquettes . . . . .	151
4.2	Caractéristiques des ancrages . . . . .	157
4.3	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le ML . . . . .	176
4.4	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le MNLVA . . . . .	180
4.5	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le MNLVR . . . . .	185
4.6	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA . . . . .	187
4.7	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR . . . . .	189
4.8	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue . . . . .	198
4.9	Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse relative . . . . .	203
B.1	Coordonnées initiales des points de liaison . . . . .	240
B.2	Caractéristiques inertielles et positions initiales des CdG . . . . .	240
B.3	Caractéristiques des solides . . . . .	245





# NOMENCLATURE

---

## Notations récurrentes

$i$	nombre imaginaire unitaire
$n$	nombre de degrés de liberté
$N$	ordre du modèle d'état
$i, j, k, l, p$	indices
$t$	temps ( $s$ )
$\omega$	pulsation ( $rad \cdot s^{-1}$ )
$f$	fréquence ( $Hz$ )
$\mathbf{Q}(\omega)$	vecteur des coordonnées généralisées dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{V}(\omega)$	vecteur des vitesses généralisées dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{\Gamma}(\omega)$	vecteur des accélérations généralisées dans le domaine fréquentiel
$\mathbf{q}(t)$	vecteur des coordonnées généralisées dans le domaine temporel
$\dot{\mathbf{q}}(t)$	vecteur des vitesses généralisées dans le domaine temporel
$\ddot{\mathbf{q}}(t)$	vecteur des accélérations généralisées dans le domaine temporel
$\lambda(t), \mu(t)$	multiplicateurs de Lagrange
$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matrices des contraintes de liaison
$\mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matrices des contraintes expérimentales
$\mathbf{E}(t)$	vecteurs des contraintes expérimentales
$\mathbf{M}(\mathbf{q})$	matrice masse
$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	matrice des forces centrifuges et centripètes
$\mathbf{A}(\omega)$	matrice de masse ajoutée
$\mathbf{A}_\infty$	matrice de masse ajoutée à fréquence infinie
$\mathbf{B}(\omega)$	matrice d'amortissement d'onde
$\mathbf{A}_c, \mathbf{A}^a, \mathbf{A}^b$	matrices d'état

$B_c, B^a, B^b$	matrices de commande
$C_c, C^a, C^b$	matrices d'observation
$D_c, D^a, D^b$	matrices d'action directe
$X(t), X^a(t), X^b(t)$	vecteurs d'état
$y(t), y^a(t), y^b(t)$	sorties des modèles d'état
$K(t), K^a(t), K^b(t)$	fonctions de retard temporelles
$K_h$	matrice du rappel hydrostatique
$K_a$	matrice du rappel d'ancrage
$K_{h+a}$	matrice du rappel total
$F_{ex}(\omega)$	Effort d'excitation de la houle dans le domaine fréquentiel
$F_{rad}(\omega)$	Effort de radiation dans le domaine fréquentiel
$F_{PTO}(\omega)$	Effort de captation d'énergie dans le domaine fréquentiel
$F_{add}(\omega)$	Effort additionnel dans le domaine fréquentiel
$f_{ex}(\omega)$	Effort d'excitation de la houle dans le domaine temporel
$f_{rad}(\omega)$	Effort de radiation dans le domaine temporel
$f_{PTO}(\omega)$	Effort de captation d'énergie dans le domaine temporel
$f_{add}(\omega)$	Effort additionnel dans le domaine temporel

### Sigles et Acronymes

HSVD	Hankel Singular Value Decomposition
RAO	Response Amplitude Operator
BEM	Boundary Element Method
CFD	Computational Fluid Dynamics
SSM	State Space Model
SDOF	Single Degree of Freedom
MDOF	Multi Degrees of Freedom

# ÉTAT DE L'ART

---

## Sommaire du chapitre

---

<b>1.1</b>	<b>Ressource énergétique de la houle</b>	<b>20</b>
<b>1.2</b>	<b>Concepts houlomoteurs existants</b>	<b>20</b>
1.2.1	Les « Attenuator »	22
1.2.2	Les « Point absorber »	23
1.2.3	Les « Oscillating wave surge converter »	24
1.2.4	Les « Oscillating water column »	25
1.2.5	Les « Overtopping devices »	26
1.2.6	Les « Submerged pressure differential »	26
1.2.7	Les « Rotating mass devices »	27
1.2.8	Les « Bulge wave »	28
<b>1.3</b>	<b>Modélisation des systèmes houlomoteurs</b>	<b>29</b>
1.3.1	Modélisation analytique	29
1.3.2	Modélisation empirique	29
1.3.3	Modélisation par éléments frontières	30
1.3.4	Résolution directe des équations de Navier–Stokes	31
1.3.5	Solutions existantes	31
<b>1.4</b>	<b>Stratégies de récupération</b>	<b>32</b>
1.4.1	Le contrôle Résistif	32
1.4.2	Le contrôle Complexe–conjugué	33
1.4.3	Le contrôle Phase–Amplitude	34
1.4.4	Le contrôle par Latching	34
1.4.5	Le contrôle par Declutching	35
1.4.6	Le contrôle MPC	35
1.4.7	Synthèse	35
<b>1.5</b>	<b>Modélisation des systèmes multicorps</b>	<b>36</b>
<b>1.6</b>	<b>Objectifs de la thèse</b>	<b>37</b>

---

## 1.1 Ressource énergétique de la houle

La houle est un phénomène physique à caractère aléatoire majoritairement induit par les vents. L'interaction du vent avec la surface des mers et des océans crée des ondes gravitaires communément appelées des vagues. Les vagues ne rencontrent que très peu d'obstacles à leur propagation et peuvent donc traverser des milliers de kilomètres avant de venir déferler sur les côtes. En chemin elles interagissent avec d'autres vagues provenant de différentes directions avec des longueurs d'onde différentes ce qui donnent un caractère aléatoire à la houle. Il est toutefois possible d'estimer statistiquement, quelques heures ou quelques jours en amont, les caractéristiques de la houle qui sont la hauteur significative  $H_s$  de vague et la période  $T_p$ . La hauteur significative correspond à la moyenne des hauteurs, crête et creux, du tiers des plus fortes vagues. Elle est parfois notée  $H_{1/3}$ . Des études ont permis de relier le spectre de la houle à ces deux caractéristiques. Les modèles les plus utilisés sont les spectres de Pierson–Moskowitz [1] et de JONSWAP [2]. Ces caractéristiques sont données par des modèles océanographiques [3] qui, corrigés par des données expérimentales de bouées, permettent de prédire avec plus au moins de précision ces caractéristiques. C'est également à partir de modèles océanographiques que l'énergie houlomotrice, dans le monde, est évaluée à environ 80000 *TWh* [4] dont il serait possible de récupérer entre 2000 et 8000 *TWh* par an. En ce qui concerne la France, la façade atlantique dispose d'une ressource exploitable d'environ 40 *TWh* par an. Des pays comme les USA [5], le Royaume Unis [6] et la Norvège [7] ont, compte tenu de leurs potentiels houlomoteurs, investi dans le développement de systèmes houlomoteurs ou WEC<sup>1</sup>. L'ouverture de projets comme l'Open-WARP Challenge et le WavePOD [8] participe également au financement, et donc au développement, de solutions économiquement viables pour la captation de l'énergie des vagues.

La figure 1.1, tirée de [9], présente une estimation de la ressource houlomotrice mondiale en kW/m ainsi que l'emplacement de 4 bouées de mesures utilisées pour corriger le modèle numérique<sup>2</sup>. De même que pour les modèles météorologiques, les modèles océaniques sont extrêmement complexes en raison de la non-linéarité de la mécanique des fluides et de l'incapacité à quantifier en chaque point de l'espace-temps les origines des phénomènes mis en jeu. D'où l'utilisation de bouées de mesure pour tenter de compenser le manque d'information.

## 1.2 Concepts houlomoteurs existants

La mise en place de systèmes houlomoteurs présentent de nombreux inconvénients comme l'agressivité du milieu marin, un coût de maintenance élevé, l'intermittence de la ressource et la difficulté à la quantifier précisément. Ce qui explique le faible développement de la captation d'énergie houlomotrice durant la domination des énergies fossiles. Il y a tout de même eu quelques

---

1. Wave Energy Converter

2. La puissance de la houle est exprimée par unité de largeur frontale

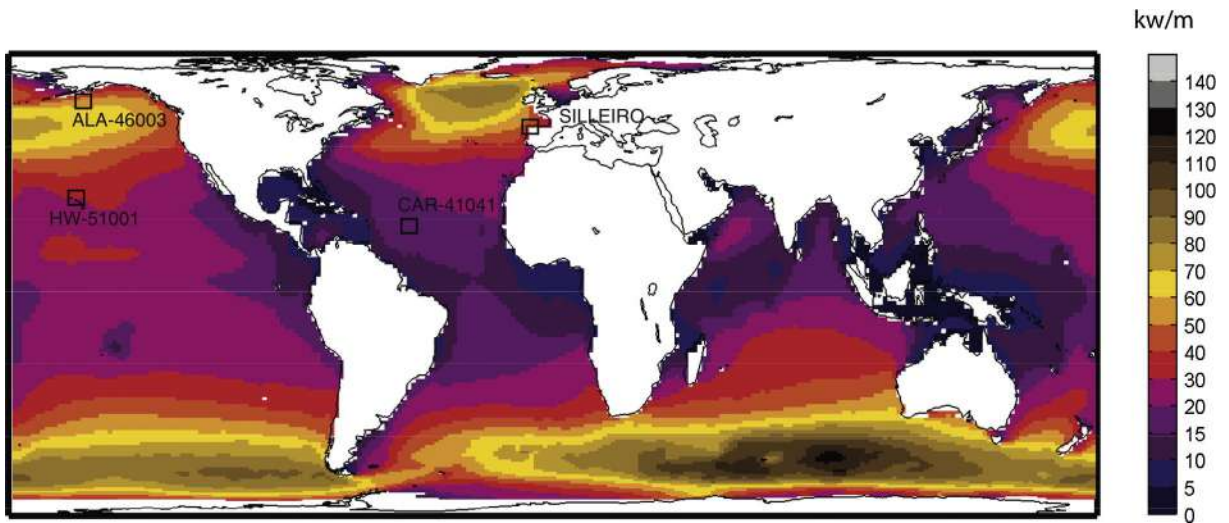


FIGURE 1.1 – Évaluation de la ressource houlomotrice mondiale en kW/m [9]

concepts houlomoteurs développés au *XIX<sup>e</sup>* et au *XX<sup>e</sup>* siècles. Les premiers concepts, dont il reste une trace, date de 1799 où Girard, suivi par Barruet en 1885, a tenté de développer des dispositifs permettant de récupérer de l'énergie à partir du mouvement de cavement. C'est dans les années 1970, suite au premier choc pétrolier, que le houlomoteur s'est vraiment développé avec l'apparition de nombreux concepts houlomoteurs comme, par exemple, le célèbre canard de Salter [10]. Il y a, aujourd'hui, un grand nombre de concepts qu'il est possible de regrouper en 8 familles qui sont illustrées sur la figure 1.2 tirée de [11].

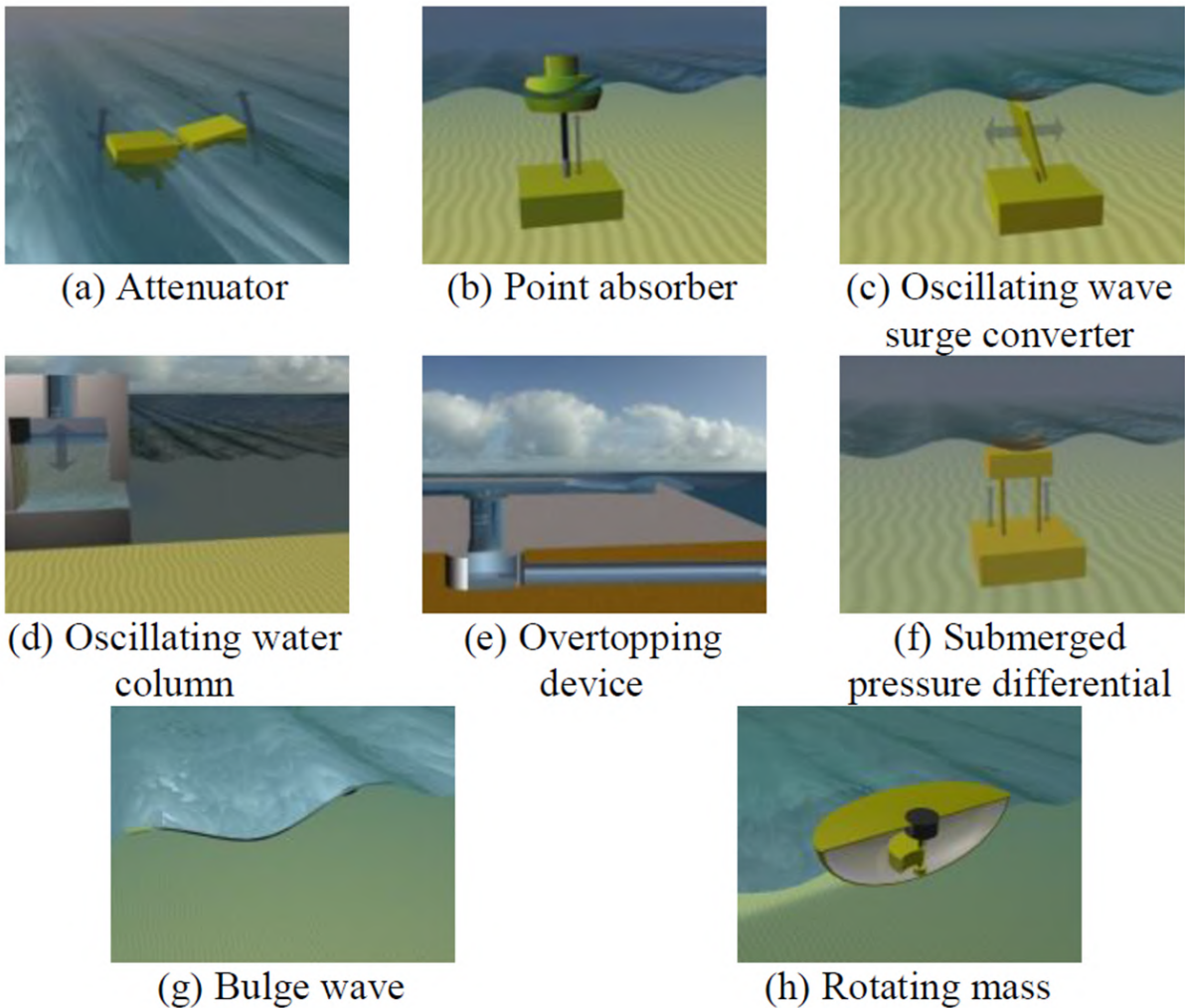


FIGURE 1.2 – Les différentes familles de concepts houlomoteurs [11]

### 1.2.1 Les « Attenuator »

Ces systèmes sont composés d'un ensemble de flotteurs articulés dont le flotteur de tête est ancré au fond marin. La chaîne ainsi formée s'oriente perpendiculairement aux vagues et se déforme en suivant le mouvement de celles-ci. La récupération d'énergie se fait au niveau des articulations entre les flotteurs. Le PELAMIS [12] est un exemple de ce type de système. Sa première version commerciale a été mise en place en 2008 au Portugal pour une puissance maximale de 2.25 MW mais les trois prototypes n'ont pas résisté au passage d'un cyclone en 2014 et le projet a été abandonné. La figure 1.3 montre un photo du système PELAMIS.



FIGURE 1.3 – Système de captation Pelamis [13]

### 1.2.2 Les « Point absorber »

Ce type de système, comme son nom l'indique, est « ponctuel ». Cela signifie que sa taille est faible par rapport aux longueurs d'onde des vagues énergétiques dont est extraite l'énergie. Ces systèmes se composent d'un, ou plusieurs, corps mus par la houle. L'énergie est ensuite récupérée via une liaison mécanique (ou plusieurs). Le mouvement, dont l'énergie est extraite, est dans la majeure partie des cas le mouvement de pilonnement. Au sein de cette famille, se trouvent des systèmes tels que le POWERBUOY [14], le WAVESTAR [15] ou encore le BILBOQUET [16] représenté sur la figure 1.4. Ce dernier système est composé de deux corps. Le premier est le flotteur (en jaune sur la figure 1.4) et le second est une colonne (en gris sur la figure 1.4) munie d'une plaque anti-pilonnement. La colonne est ancrée au fond marin et son centre de gravité est très bas, ce qui permet à l'ensemble { colonne+plaque } d'être très stable. De plus, l'amplitude du mouvement de pilonnement de la colonne est très faible en raison de la présence de la plaque anti-pilonnement. Cela permet de se rapprocher du comportement obtenu avec une base fixe sans pour autant être contraint de déployer le système près des côtes. Le flotteur, quant à lui, oscille le long de la colonne et l'énergie est récupérée via la liaison glissière entre les deux corps. Ce projet a été abandonné en raison de l'incapacité à quantifier les pertes dans la liaison glissière qui étaient trop importantes pour que le prototype fonctionne correctement.



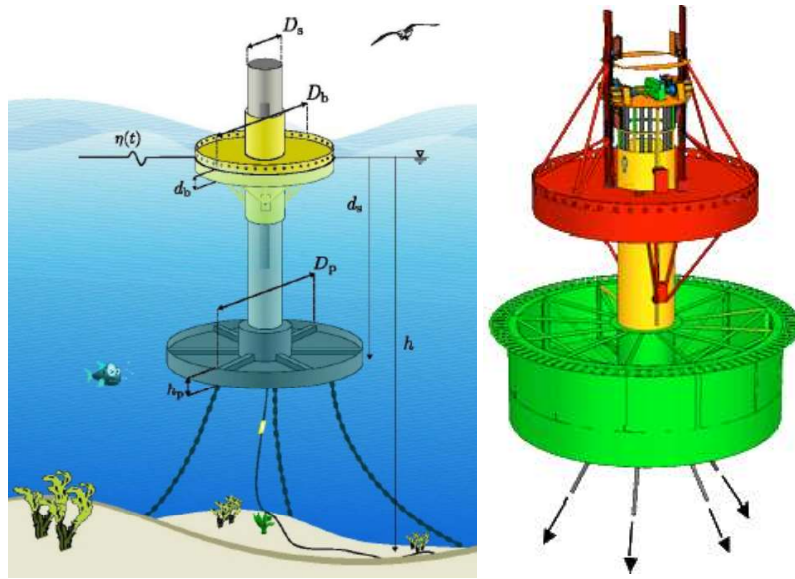


FIGURE 1.4 – Système de captation Bilboquet [16]

### 1.2.3 Les « Oscillating wave surge converter »

Ces systèmes sont généralement composés d'une plaque, qui oscille grâce à la trajectoire orbitale des particules d'eau au passage des vagues, et d'un socle avec lequel elle est en liaison pivot d'axe horizontal. L'énergie est ensuite récupérée par un système hydraulique actionné par la rotation de la plaque. Un exemple de ce type de système est le OYSTER 800 [17] développé par la société Aquamarine Power et illustré sur la figure 1.5. Le système a été mis en place en 2012 et a produit de l'électricité pour le réseau électrique écossais jusqu'à la mise sous administration de l'entreprise en 2015, qui a dû cesser son activité, faute d'acheteurs.



FIGURE 1.5 – Système de captation OYSTER 800 [18]

#### 1.2.4 Les « Oscillating water column »

Les systèmes à colonne d'eau oscillante sont des structures partiellement immergées avec une ouverture sous le niveau de l'eau. Les mouvements des vagues modifient le niveau de l'eau à l'intérieur de la colonne ce qui va comprimer, puis détendre, l'air emprisonné dans la colonne. Ces cycles de compression/décompression activent une turbine qui génère de l'électricité. Les pales de la turbines sont réversibles de manière à ce que la turbine tourne quel que soit le sens de l'écoulement. Le système Limpet [19] en est un exemple. C'est le premier système houlomoteur commercial a avoir été déployé en 2000. La figure 1.6 montre le système Limpet installé sur l'île d'Islay.

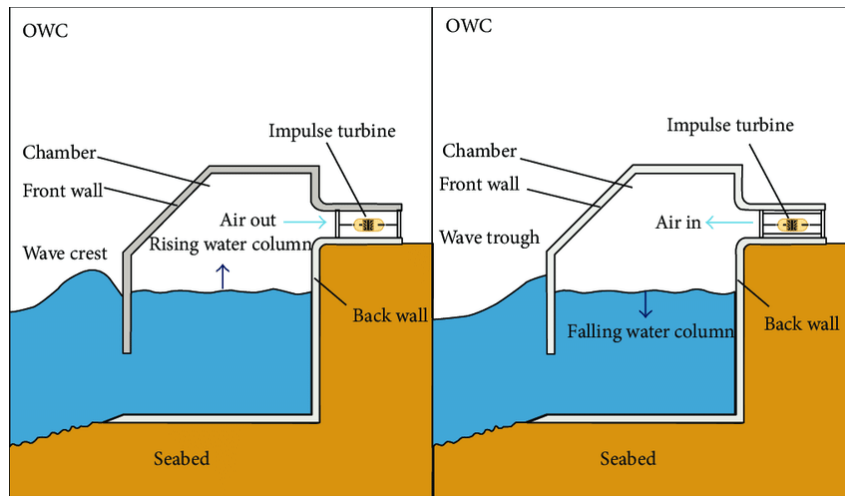


FIGURE 1.6 – Système de captation Limpet [20]

### 1.2.5 Les « Overtopping devices »

Les systèmes à rampe de déferlement capturent l'eau lorsque les vagues déferlent dans un réservoir. Lorsque le niveau de l'eau dans le réservoir est supérieur au niveau de la mer, l'eau en surplus dans le réservoir est turbinée avant d'être rejetée dans la mer. Certains de ces systèmes, tels que le Wave Dragon [21], possèdent des collecteurs. C'est-à-dire que les vagues, avant de déferler, entrent dans un rétrécissement ce qui va augmenter leur amplitude et donc la quantité d'eau récupérée dans le réservoir. Ce système est présenté sur la figure 1.7.

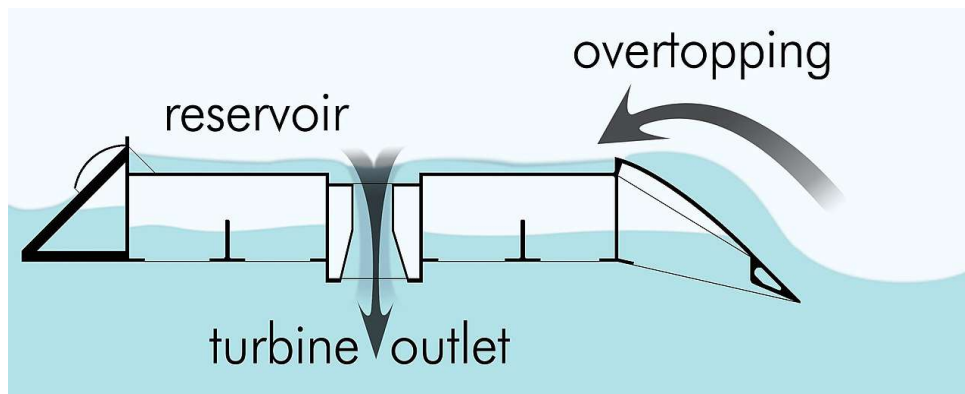


FIGURE 1.7 – Système de captation Wave Dragon [22]

### 1.2.6 Les « Submerged pressure differential »

Les systèmes immergés à différentiel de pression sont de préférence situés près des côtes et ancrés au fond marin. Ces systèmes sont généralement composés de deux parties. La première est la

partie inférieure attachée au fond marin et la seconde est la partie supérieure, en liaison glissière par rapport à la première comme, par exemple, pour le système Archimedes Wave Swing [23]. L'élévation de surface libre au dessus du système entraîne un mouvement de la partie supérieure qui va, en comprimant et déprimant de l'air, créer un différentiel de pression. L'énergie de ce différentiel de pression est ensuite extraite le long de la liaison.

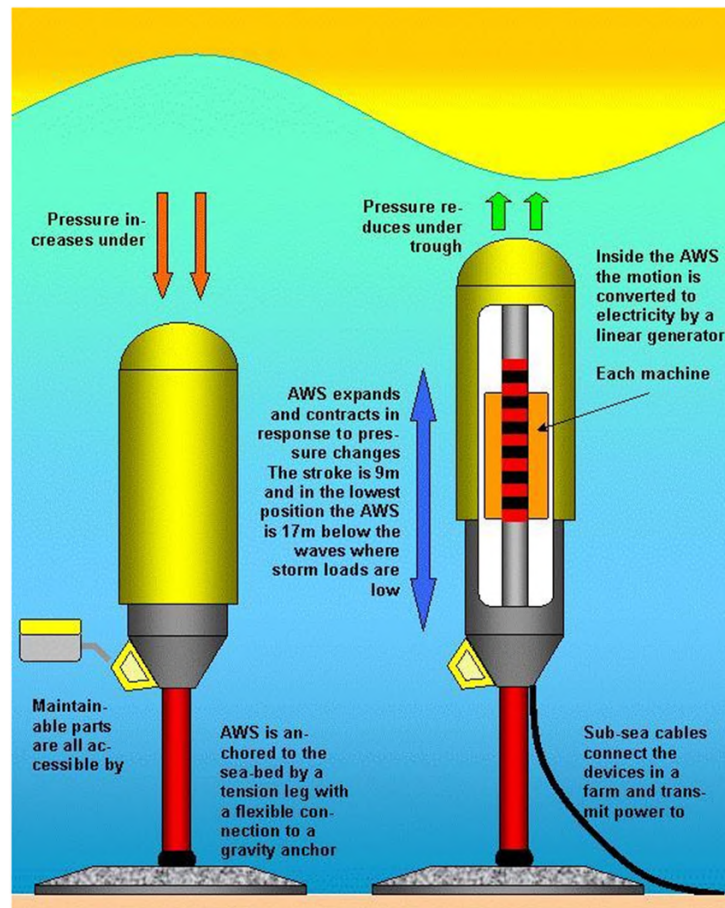


FIGURE 1.8 – Système de captation Archimedes Wave Swing [24]

### 1.2.7 Les « Rotating mass devices »

Les systèmes à rotation de masse utilisent les mouvements de tangage et de roulis pour extraire de l'énergie. Ces systèmes sont composés d'un flotteur et, soit d'une masse excentrée, soit d'un gyroscope. Une machine électrique, ou hydraulique, est installée à la liaison entre les deux parties du système de récupération. Le système Searev [25] est un exemple de ce type de système. Une des principales caractéristiques de ce système est l'augmentation de la période propre du système. En effet, la période propre est liée à la taille du système houlomoteur. Et, puisque les vagues

les plus énergétiques sont celles de grandes périodes, il est nécessaire d'augmenter la taille du système et donc son coût. Or, pour le Searev, la période propre est aussi dépendante de la masse inertielle intérieure ce qui permet d'augmenter la période propre, dans une certaine mesure, sans pour autant avoir à augmenter sa taille.

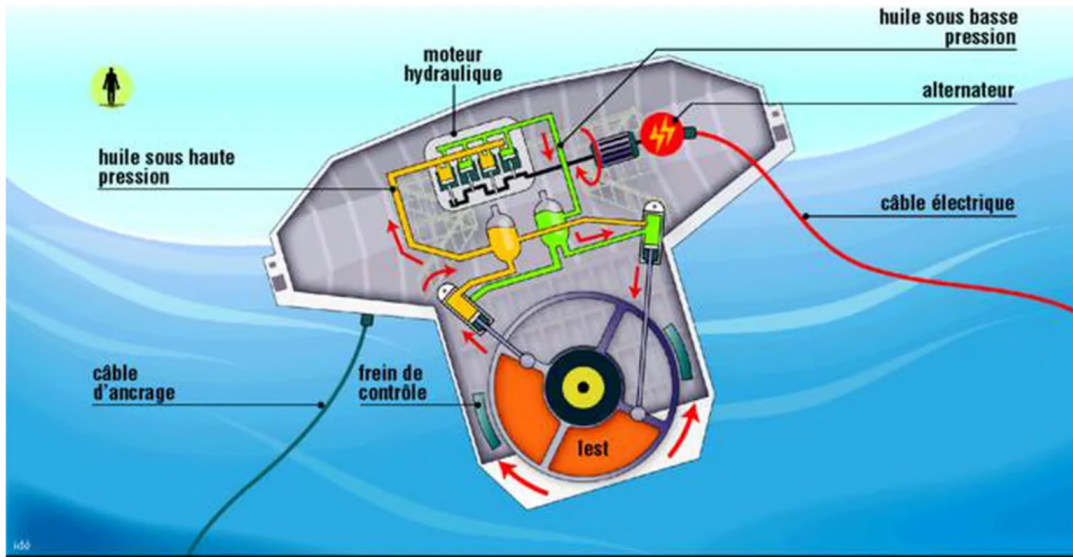


FIGURE 1.9 – Système de captation Searev [26]

### 1.2.8 Les « Bulge wave »

Les systèmes à renflement sont composés d'un tube en caoutchouc ancré, à l'avant, au fond marin. Ce tube se remplit d'eau par son extrémité faisant face aux vagues et le passage des vagues crée des variations de pression le long du tube ce qui entraîne l'apparition d'une onde. Cette onde grandit à mesure qu'elle progresse dans le tube et accumule donc de l'énergie sur son parcours. Une fois arrivée à l'autre extrémité du tube, l'eau actionne une turbine avant d'être rejetée. Ce concept est inspiré de la circulation sanguine dans le corps humain. La théorie sous-jacente, qui a permis le développement des systèmes à renflement, est la théorie des battements ondulatoires. Le tube de caoutchouc serait analogue à un vaisseau sanguin. Les mouvements des vagues correspondraient, quant à eux, à des impulsions cardiaques. Un exemple de ce type de concept est le système Anaconda [27] présenté sur la figure 1.10.

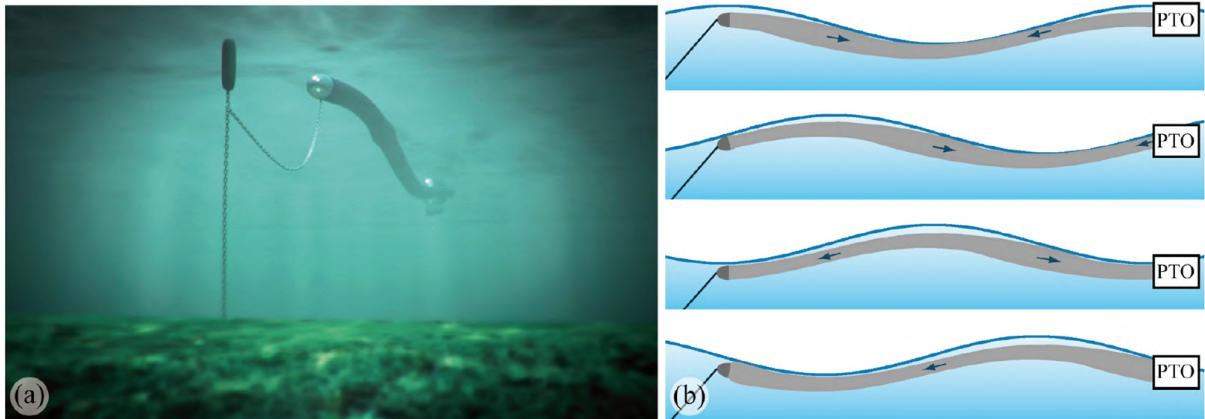


FIGURE 1.10 – Système de captation Anaconda [27]

### 1.3 Modélisation des systèmes houlomoteurs

L'objectif principal de la modélisation hydrodynamique est de pouvoir comprendre et quantifier l'interaction fluide–structure. Li et al. [28] propose un classement des différentes méthodes de modélisation de l'interaction fluide–structure sur lequel nous nous appuyons dans cette section.

#### 1.3.1 Modélisation analytique

La modélisation analytique repose essentiellement sur le calcul de la puissance maximale qu'il est possible d'extraire de la houle. Budal et Falnes [29] sont à l'origine de cette approche. Ils sont partis d'un point absorber pilonnant et ont exprimé la puissance maximale théorique qu'il est possible d'extraire d'un point absorber axisymétrique.

$$P_{max} = \frac{|F_{ex}|^2}{8B_r} \quad (1.1)$$

Avec  $F_{ex}$  l'effort d'excitation de la houle incidente et  $B_r$  l'amortissement de radiation. Cette approche, bien que très rudimentaire, est un très bon outil pour donner une estimation rapide des performances d'un point absorber à géométrie simple. Néanmoins, cet outil ne permet pas de caractériser le comportement d'un système houlomoteur en général.

#### 1.3.2 Modélisation empirique

Une première façon de caractériser l'interaction fluide structure, en terme de comportement, est de construire un modèle empirique basé sur des mesures en bassin ou en mer et des éléments théoriques issus du modèle de fluide parfait. Le modèle le plus populaire est certainement celui développé par Morison et al. [30]. Cette méthode suppose que l'effort hydrodynamique résultant,

appliqué au système<sup>3</sup>, est la somme d'une force de trainée et d'une force inertielle. Concrètement, dans le cas du cylindre, celui-ci est découpé en cylindres infinitésimaux de hauteur  $dz$ . Chaque élément apporte une contribution infinitésimale  $\vec{dF}$ . Dans le cas où les vitesses et les accélérations sont alignées et perpendiculaires à l'axe du cylindre, l'expression de  $\vec{dF}$  est donnée par l'équation suivante :

$$\vec{dF} = \rho \frac{\pi D^2}{4} \left[ \vec{u} + C_a \left( \vec{u} - \vec{U} \right) \right] dz + \frac{1}{2} \rho D C_d \left( \vec{u} - \vec{U} \right) \left| \vec{u} - \vec{U} \right| dz \quad (1.2)$$

Avec  $D$  le diamètre du cylindre et  $\rho$  la masse volumique de l'eau. Les vitesses  $\vec{u}$  et  $\vec{U}$  sont respectivement la vitesse du fluide et la vitesse du centre de l'élément dans le repère absolu. Les coefficients de masse ajoutée  $C_a$  et de trainée  $C_d$  sont alors déterminés expérimentalement ou par le calcul. Il est important de noter que cette méthode suppose implicitement que la force inertielle est en phase avec l'accélération du fluide. Or, cela n'est plus vrai lorsque le rapport, entre le diamètre  $D$  de l'élément et la longueur d'onde  $\lambda$ , devient trop grand ( $D/\lambda > 0.2$ ). L'utilisation de cette méthode n'est donc pertinente que pour les corps dont le diamètre est petit devant la longueur d'onde. A noter que ce modèle a évolué depuis sa création et continue encore d'évoluer de sorte qu'il est possible de le trouver hybridé avec des méthodes plus complexes. Par exemple, Zhang [31] a intégré des éléments de Morison à un modèle fluide parfait développé à l'ordre 2.

### 1.3.3 Modélisation par éléments frontières

Dans le cas de géométries complexes et/ou de tailles importantes, la méthode précédente n'est plus applicable. Plutôt que de résoudre directement l'équation de Navier–Stokes, qui est un problème complexe, une approche plus simple et plus rapide est envisagée. Elle consiste tout d'abord à considérer un fluide parfait en écoulement potentiel. La géométrie est discrétisée en un ensemble de panneaux. Le domaine fluide n'a, quant à lui, pas besoin d'être maillé puisque le problème potentiel peut être résolu en considérant uniquement les conditions aux limites sur la carène. Cela est dû au fait que les conditions de surface libre, de glissement sur le fond, et les conditions de radiation au loin sont prises en compte, par défaut, par les fonctions de Green employées. C'est le principe des modèles par éléments frontières aussi appelés BEM<sup>4</sup>. La méthode la plus ancienne et la plus utilisée est la méthode dite de la diffraction–radiation. Cette méthode consiste à décomposer le potentiel vitesse en plusieurs potentiels ce qui simplifie le calcul. Cette idée vient d'Haskind [32]. Nous reviendrons plus en détail sur cette méthode dans le chapitre 2. Une autre méthode, proposée par Bingham [33], est la méthode des déformations généralisées. Cette méthode consiste à déterminer le potentiel correspondant à une impulsion localisée en un point  $P$  du corps. Dans la pratique, la résolution numérique est plus aisée avec la première

---

3. Il s'agit d'un cylindre vertical en l'occurrence

4. Boundary Element Method

méthode.

La modélisation par éléments frontières a l'avantage d'être rapide et d'offrir des résultats satisfaisants sur la majeure partie du spectre. D'autre part, les coefficients hydrodynamiques peuvent être intégrés dans une équation mécanique ce qui simplifie grandement la mise en place d'un contrôle pour la récupération d'énergie. Toutefois, puisque ce modèle ne tient pas compte de la viscosité, les résultats aux résonances peuvent être éloignés de la réalité.

#### 1.3.4 Résolution directe des équations de Navier–Stokes

Avec l'augmentation des puissances de calcul, la résolution directe des équations de Navier–Stokes est devenue possible. De nombreux travaux ont été menés (et le sont encore) sur le sujet [34–36]. Les résultats obtenus avec cette approche sont plus précis que ceux obtenus avec les codes BEM au détriment du temps de calcul qui est nettement plus important pour la CFD<sup>5</sup>. De plus, ces méthodes ne sont pas limitées par les hypothèses des codes BEM (petits déplacements, houle linéarisée). Toutefois, il est moins simple analytiquement d'intégrer les résultats dans une équation mécanique comme il est possible de le faire avec les codes BEM. Ainsi, nous ne nous appesantirons pas sur cette approche.

#### 1.3.5 Solutions existantes

L'approche la plus couramment utilisée, dans les solutions existantes, est la modélisation par éléments frontières en raison des avantages exposés dans la section 1.3.3. L'outil de modélisation de plus abouti et le plus populaire, pour la modélisation des systèmes houlomoteurs, est certainement la bibliothèque [WEC–SIM](#) [37] écrite en MATLAB par le NREL. Cette bibliothèque intègre les données, issues de codes BEM, à un modèle dynamique [SIMULINK](#). Elle permet aussi de modéliser les ancrages et la captation d'énergie aussi bien pour des houles régulières que pour des houles irrégulières. La bibliothèque WEC–SIM a été confrontée à des résultats expérimentaux afin d'être validée [38, 39]. Une autre solution existante est [openWEC](#) [40] qui est plus orientée sur l'interface utilisateur et est donc, de fait, moins adaptée au développement que ne l'est WEC–SIM.

Des solutions conçues pour la modélisation des structures offshores, comme par exemple [Frydom](#) [41], peuvent aussi être utilisées pour modéliser les comportements des systèmes houlomoteurs. La solution commerciale [OrcaFlex](#) a été utilisée comme référence, pour les calculs d'ancrages, dans le processus de validation de WEC–SIM par Sirnivas et al. [42].

---

5. Computational Fluid Dynamics



## 1.4 Stratégies de récupération

Les vagues les plus énergétiques sont celles avec une longueur d’onde importante et donc une grande période. Pour une vague régulière en profondeur infinie, la puissance par unité de longueur est donnée par l’équation 1.3.

$$P = \frac{\rho g^2}{32\pi} H^2 T \quad (W \cdot m^{-1}) \quad (1.3)$$

Avec  $H$  la hauteur de vague et  $T$  sa période. Il faudrait donc que les systèmes houlomoteurs aient une réponse importante dans l’intervalle de périodes favorables afin de pouvoir récupérer l’énergie des longues vagues. D’après Clément et al. [43], le diamètre optimal d’un point absorber cylindrique dépasserait les 60 mètres<sup>6</sup>. Le coût d’une telle installation serait bien trop important pour qu’elle soit économiquement viable. Des stratégies de récupération sont donc nécessaires afin de pouvoir augmenter la quantité d’énergie récupérée pour des systèmes de taille raisonnable. Une revue assez complète des différentes stratégies existantes, dont nous allons nous inspirer dans cette section, est proposée par Meunier [44]. Avant toute chose, il est nécessaire d’introduire les deux grands critères de classification qui nous permettront de catégoriser les différentes stratégies de récupération. Nous parlerons indifféremment de stratégies et de contrôles pour la récupération d’énergie (aussi appelée PTO pour Power Take Off) des WEC<sup>7</sup>.

### Causal ou non-causal

Un contrôle est dit causal s’il ne nécessite pas de connaître l’avenir de la houle. A l’inverse, un contrôle non-causal présumera de la houle future.

### Passif ou Réactif

Un contrôle est dit passif s’il ne fait que prendre de l’énergie au système. Un contrôle réactif va, quant à lui, injecter de la puissance réactive, de manière transitoire, dans le système afin d’en modifier le comportement et d’en extraire davantage d’énergie au moment favorable. Cette notion de puissance réactive est pensée par analogie avec la puissance réactive électrique mais elles ne doivent pas être confondues.

#### 1.4.1 Le contrôle Résistif

Le contrôle résistif, initialement introduit par Falnes [45], est certainement le contrôle le plus simple. C’est un contrôle passif et causal. Il s’agit de freiner le degré de liberté sur lequel l’énergie est prise (vitesse notée  $V$ ). L’action du PTO est un amortisseur dont le coefficient est adapté

---

6. 60 mètres est la longueur d’onde, en profondeur infinie, d’une vague ayant une période 6.2 secondes

7. Wave Energy Converter

à l'élévation de surface libre afin de maximiser l'énergie récupérée. L'effort s'écrit comme le produit du coefficient d'amortissement et de la vitesse.

$$F_{PTO} = -B_{PTO}V \quad (1.4)$$

Toutefois, ce contrôle ne permet pas d'influencer significativement le déphasage entre la vitesse  $V$  et l'effort de houle. Nous nous retrouvons donc dans la situation où un système, de taille raisonnable, ne peut récupérer efficacement l'énergie contenue dans les vagues de grandes longueurs d'onde.

### 1.4.2 Le contrôle Complexe-conjugué

Un autre contrôle très classique, également introduit par Falnes [45], est le contrôle complexe-conjugué. C'est un contrôle non-causal et réactif. Le principe est d'injecter une puissance réactive pour annuler le déphasage entre l'effort d'excitation de la houle et la vitesse  $V$  du mouvement d'intérêt. Il est possible d'écrire l'équation mécanique comme suit :

$$Z V = F_h \quad Z \in \mathbb{C} \quad V \in \mathbb{C} \quad F_h \in \mathbb{C} \quad (1.5)$$

Où  $Z$  est l'impédance mécanique du système et  $F_h$  l'effort de houle. L'effort de captation d'énergie peut également s'écrire comme le produit d'une impédance et de la vitesse  $V$ , i.e.  $F_{PTO} = -Z_{PTO} V$ . L'équation totale est donc de la forme suivante :

$$(Z + Z_{PTO})V = F_h \quad (1.6)$$

L'énergie récupérée est maximale si l'impédance  $Z_{PTO}$  est égale au conjugué de l'impédance  $Z$ , d'où le nom du contrôle. Ce contrôle est, théoriquement, le meilleur en terme de récupération puisqu'il permet au système d'être constamment en résonance avec la houle incidente. Il y a toutefois un certain nombre d'obstacles à la mise en place d'un tel contrôle. Le premier est sa non-causalité. En effet, comme le démontre Genest [46], le contrôle complexe-conjugué nécessite la connaissance de la houle sur une durée appelée horizon non-causal. La taille temporelle de cet horizon dépend des systèmes et sera d'autant plus importante que le système sera géométriquement grand<sup>8</sup>. Maisondieu [47] a proposé une méthode permettant de réduire l'horizon non-causal. Cette méthode a été adaptée par Genest [46] au houlomoteur permettant ainsi de remédier partiellement au problème. Le deuxième obstacle est la quantité de puissance réactive circulant dans la machine électrique<sup>9</sup>. En effet, la puissance réactive permettant d'an-

8. Les temps caractéristiques augmentent avec l'échelle en similitude de Froude

9. Dans le cas d'une captation électrique directe

nuler le déphasage, entre l'effort excitateur et le vitesse d'intérêt, peut être plusieurs dizaines de fois supérieure à la puissance extraite. De fait, la puissance de dimensionnement de la machine électrique s'avère être bien supérieure à la puissance moyenne récupérée. Le coût devient alors prohibitif. Le troisième obstacle est l'instabilité. Amener le système exactement à la résonance n'est pas une chose aisée. Il est tout à fait possible d'injecter un peu trop de puissance réactive et de basculer dans l'instabilité. Une solution possible est de n'annuler que partiellement le déphasage entre l'effort d'excitation et la vitesse ce qui réduit évidemment l'efficacité de ce contrôle.

### 1.4.3 Le contrôle Phase–Amplitude

Une version sub–optimale du contrôle complexe–conjugué est le contrôle Phase–Amplitude. C'est un contrôle causal, puisque rétroactif, et réactif. Le point de départ reste le même que pour le contrôle complexe–conjugué. Mais cette fois ci, plutôt que de raisonner en terme d'effort, le raisonnement se fait par rapport à la vitesse optimale. Cette vitesse est donnée par l'équation, non–causale, suivante :

$$V_{opti} = \frac{F_{ex}}{2B_r} \quad (1.7)$$

Cette expression est simplifiée afin d'obtenir une consigne causale de la vitesse

$$V_{opti} = \frac{F_{ex}}{2B_{BPTO}} \quad (1.8)$$

L'amortissement  $B_{BPTO}$  est alors choisi de façon à maximiser l'énergie, pour un état de mer donné, et maintenu constant sur une certaine durée de l'ordre de l'heure. Cette valeur peut évoluer d'un état de mer à l'autre ce qui donne un caractère adaptatif à ce contrôle [48].

### 1.4.4 Le contrôle par Latching

Le latching est un contrôle passif non–causal apparu à la fin des années 1970 [49–51]. Son principe est, à l'instar du contrôle complexe–conjugué, de mettre la vitesse en phase avec l'effort d'excitation de la houle incidente. Mais, plutôt que d'injecter de la puissance réactive dans le système, ce dernier se retrouve bloqué lors de l'annulation de sa vitesse et est ensuite relâché au moment opportun. Le calcul analytique initial n'est applicable qu'aux houles régulières. Un formalisme de type Bang–Bang [52, 53] permet d'appliquer ce contrôle à une houle irrégulière. Ce contrôle reste complexe à mettre en place puisqu'il nécessite une prédiction de la houle pour le calcul des instants de blocage et de relâchement. Ce contrôle, bien que sub–optimal, affiche des puissances extraites proches du contrôle complexe–conjugué pour les houles de grandes périodes. Toutefois, la prise en compte des imperfections des organes de blocage réduit l'efficacité de ce

contrôle. D'autre part, une étude de Temiz [54] a montré que l'intérêt économique du Latching était limité.

#### 1.4.5 Le contrôle par Declutching

Le contrôle par Declutching [55] ressemble fortement au Latching. C'est également un contrôle passif et non-causal et il consiste également à alterner des phases de récupération avec des phases où le PTO ne prend plus d'énergie au système. La différence ici est que le système est laissé libre (ou « débrayé ») alors qu'il est bloqué avec le Latching. Ainsi, le problème des imperfections des actionneurs de blocage ne se pose plus. De plus, l'implémentation de cette solution est relativement simple notamment pour les technologies de PTO hydrauliques [56]. La non-causalité de ce contrôle reste toutefois un obstacle majeur. Des études sont donc menées afin de trouver une alternative causale comme par exemple en mettant en place une version adaptative du declutching [57].

#### 1.4.6 Le contrôle MPC

Le contrôle MPC<sup>10</sup>, ou contrôle prédictif, est un contrôle réactif non-causal. Ce type de modèle existe depuis longtemps mais n'a que récemment été appliqué à la récupération de l'énergie des vagues [58]. Son principe est de maximiser une fonction coût. Cette fonction coût est l'énergie absorbée par le système. Cette énergie peut s'exprimer comme étant la différence entre l'énergie de la houle incidente et l'énergie radiée par le système. L'équation mécanique, avec les coefficients hydrodynamiques issus d'un code BEM, est mise sous forme d'états dans le domaine temporel discret. Un développement mathématique permet ensuite de convertir le problème d'optimisation en un problème de minimisation et d'en extraire la solution [59]. Ce type de contrôle a l'immense avantage de permettre l'intégration de contraintes technologiques telles que les limitations en effort, en vitesse, en puissance et les rendements des différentes étapes de la récupération d'énergie. La non-causalité de ce contrôle reste, ici encore, un obstacle majeur. Une version adaptative, et donc causale, de ce contrôle est le contrôle LQG (Linear Quadratic Gaussian) [60].

#### 1.4.7 Synthèse

Le point crucial pour la récupération d'énergie est la stratégie de contrôle utilisée qui doit permettre l'optimisation de la quantité d'énergie renvoyée sur le réseau<sup>11</sup>. Les stratégies de contrôle réactives sont les plus efficaces puisqu'elles permettent de forcer la résonance du système quel que soit l'état de mer. Pour que cette efficacité soit maximale, il est nécessaire de connaître la

10. Model Predictive Control

11. Dans le cas d'un raccordement électrique au réseau

houle à l'avance. La complexité inhérente à la prévision de la houle a encouragé le développement de contrôles adaptatifs [61]. Que le contrôle soit causal ou non, adaptatif ou non, son efficacité est directement liée à la précision avec laquelle le système houlomoteur est modélisé.

## 1.5 Modélisation des systèmes multicorps

L'énergie houlomotrice peut être convertie en énergie hydraulique, électrique, pneumatique ou mécanique [62]. Dans tous les cas, cette prise d'énergie peut être modélisée par une action mécanique. Une grande partie des concepts houlomoteurs, destinés à une implantation off-shore, sont des systèmes composés de plusieurs corps. Les systèmes mécaniques peuvent être étudiés suivants différents principes. Avant de présenter ces principes, il est important d'introduire la notion d'action. L'action est une grandeur physique qui, à elle seule, permet de déduire la dynamique, entre deux instants, d'une quantité qui lui est soumise. Cette action est souvent notée  $\mathcal{S}$ .

- Le principe de d'Alembert : les efforts de contrainte d'un ensemble mécanique, ne travaillent pas lors d'un déplacement virtuel.
- Le principe d'Hamilton ou principe de moindre action de Lagrange : Un système se meut d'une configuration à une autre de telle façon que la variation de l'action, notée  $\delta\mathcal{S}$ , entre la trajectoire naturelle effectivement suivie et toute trajectoire virtuelle infiniment voisine ayant les mêmes extrémités dans l'espace et dans le temps soit nulle.
- La deuxième loi de Newton : Les changements qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice ; et se font dans la direction dans laquelle cette force a été imprimée.

Papegay [63] présente les inconvénients de chacune de ces approches. L'approche de Lagrange résulte généralement en un système d'équation massif et complexe. Les approches de Newton et de d'Alembert sont, quant à elles, difficiles à automatiser puisqu'il est souvent nécessaire de réfléchir sur le choix des ensembles de solides à isoler et sur les points de référence afin d'éliminer les efforts de liaison. Papegay [63] présente donc la mécanique de Kane [64], basée sur le principe de d'Alembert, sur laquelle repose le logiciel [Simscape Multibody](#) [65]. Kane cherche à remédier aux inconvénients susnommés. Pour ce faire, il introduit des vitesses angulaires partielles et des vitesses partielles qui sont des combinaisons linéaires des vitesses généralisées. Or, les vitesses utilisées pour la diffraction-radiation sont les vitesses généralisées. Il apparaît donc plus judicieux de conserver ce système de coordonnées.

Une variante de l'approche lagrangienne classique consiste à ajouter des multiplicateurs de Lagrange [66] associés à des contraintes. Dans la littérature, ces contraintes sont quasiment exclusivement des contraintes géométriques aussi appelées holonomes. Ces contraintes sont très

largement utilisées dans la littérature [67-71]. C'est une méthode assez populaire, puisque très générale, et qui est notamment utilisée dans le moteur multiphysique [ProjectChrono](#) [72] lui-même utilisé dans le logiciel Frydom [41]. Cette méthode a l'avantage d'être automatisable mais résulte en un système d'équation compliqué à comprendre.

Des algorithmes ont été développés, notamment en robotique, pour des systèmes en chaîne ouverte. L'algorithme CRBA<sup>12</sup> [73] en est un exemple. Il est également important de noter que des travaux ont été menés, en robotique, sur les modèles hybrides position/force [74]. Cette possibilité d'hybridation présente un grand intérêt pour l'intégration de données expérimentales dans le modèle numérique. De plus, ces algorithmes présentent l'avantage d'être très rapides. Ce type d'approche a d'ailleurs déjà été utilisé pour modéliser un système houlomoteur [75]. Toutefois, les approches utilisées en robotiques ne sont pas suffisamment générales étant donné que les systèmes étudiés sont isostatiques et en chaîne ouverte.

## 1.6 Objectifs de la thèse

Les solutions existantes sont des outils de modélisation numérique uniquement dédiées à la simulation. En effet, l'aspect expérimental n'est pas pris en compte directement dans ces outils. Il nous apparaît donc nécessaire de développer un nouvel outil permettant de combiner les modèles numériques et expérimentaux. De plus, il serait intéressant que les temps de calculs, de l'outil développé dans ce travail, soient compatibles avec des applications en temps réel. Bien que dépassant le cadre de cette étude, la notion de contrôle en temps réel est très importante pour la maximisation de la récupération d'énergie. Il est donc pertinent de prendre en compte cet aspect afin que l'outil développé ici puisse éventuellement servir à de futurs travaux. Ce choix nous a poussé à retenir la modélisation par éléments frontières qui sera ensuite corrigée par des coefficients semi-empiriques.

Dans le chapitre 2, nous reviendrons sur la modélisation de l'interaction fluide-structure. Au regard des différentes approches explicitées dans la section 1.3, nous avons décidé d'utiliser la diffraction-radiation et plus précisément le code commercial [HydroStar](#) [76] qui propose le filtrage des fréquences irrégulières et la possibilité de paralléliser les calculs. Nous reviendrons également sur le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel et sur l'importance de l'extrapolation des coefficients hydrodynamiques. Il sera ensuite question de la modélisation, sous forme d'un modèle d'états, de l'effort de radiation. Une étude rigoureuse du cheminement, permettant d'établir la fonction de retard de la radiation, nous donnera les clés pour établir une définition complète de cette fonction omniprésente dans la littérature.

---

12. Composite Rigid Body Algorithm

Le chapitre 3 sera consacré à la dynamique des systèmes multicorps intégrant le modèle d’interaction fluide–structure. Comme le laisse pressentir la section 1.5, il y a une grande variété d’approches plus ou moins complexes, valables dans des cas plus ou moins généraux. Un certain nombre de contraintes, induites par l’intégration de l’interaction fluide–structure, peuvent d’ores et déjà se dégager :

- Le modèle utilise le système de coordonnées généralisées cartésiennes.
- Le modèle doit pouvoir se mettre sous la forme d’un modèle d’états.
- Le modèle doit être valable dans le cas général.

L’approche choisie pour la radiation linéaire sera certainement mise en défaut expérimentalement, par des effets non–linéaires comme les frottements, et nécessitera donc une correction. Afin de nous affranchir des lois empiriques, qui ne sont valables que sous certaines conditions, nous souhaitons pouvoir intégrer directement les résultats expérimentaux dans le modèle numérique.

Ainsi :

- Le modèle doit permettre une approche hybride positions/efforts.

De plus, le modèle devra pouvoir être utilisé pour l’élaboration de stratégies de contrôle. Ce modèle sera également distribué à la communauté ce qui implique que :

- L’approche utilisée pour établir le modèle doit être la plus simple possible.
- Le modèle doit être développé avec un langage libre.

Le langage retenu est [Python](#) [77] qui, par souci de cohérence, sera utilisé pour la totalité de ces travaux. Les codes relatifs aux chapitres 2 et 3 sont disponibles sur [github](#)

Le chapitre 4 sera consacré à la mise en application, de ce modèle, dans le cadre d’une campagne expérimentale réalisée dans bassin d’essais de l’Ifremer de Brest. Les écarts observés entre les modèles numérique et expérimental seront analysés. Le modèle hybride permettra de déterminer, et de quantifier, les causes de ces écarts sous la forme d’efforts additionnels<sup>13</sup>. Ces efforts seront analysés et caractérisés par différents paramètres afin d’en déterminer une forme analytique facile à implémenter dans le modèle numérique.

Le chapitre 5 sera consacré au dimensionnement et à la conception d’un système houlomoteur multicorps. Ce chapitre présentera également la solution retenue pour la captation expérimentale d’énergie.

---

13. Nommés ainsi car il s’ajoute au modèle numérique initial.

# DYNAMIQUE D'UN CORPS DANS LA HOULE

---

## Sommaire du chapitre

---

<b>2.1</b>	<b>Théorie sur la houle</b> . . . . .	<b>41</b>
2.1.1	Conditions aux limites . . . . .	42
2.1.1.1	Condition cinématique de surface libre . . . . .	42
2.1.1.2	Condition d'imperméabilité sur une paroi fixe (fond marin) . . . . .	43
2.1.1.3	Première condition dynamique de surface libre . . . . .	43
2.1.1.4	Deuxième condition dynamique de surface libre . . . . .	44
2.1.2	Développement en perturbations . . . . .	44
2.1.2.1	Développement en perturbations à l'ordre 1 . . . . .	45
2.1.2.2	Développement en perturbations à l'ordre 2 . . . . .	46
<b>2.2</b>	<b>Interaction fluide structure</b> . . . . .	<b>47</b>
2.2.1	Mise en équation du problème aux limites . . . . .	47
2.2.2	Effort généralisé de la pression . . . . .	48
2.2.3	Théorie de la diffraction–radiation . . . . .	49
<b>2.3</b>	<b>Effort de rappel hydrostatique</b> . . . . .	<b>51</b>
2.3.1	Définition de l'effort de rappel hydrostatique . . . . .	52
2.3.2	Linéarisation de l'effort de rappel hydrostatique . . . . .	53
<b>2.4</b>	<b>Équation mécanique</b> . . . . .	<b>54</b>
2.4.1	Domaine fréquentiel . . . . .	56
2.4.2	Domaine temporel . . . . .	56
2.4.3	Extrapolation des termes de radiation . . . . .	57
<b>2.5</b>	<b>Effort d'excitation</b> . . . . .	<b>60</b>
2.5.1	Influence de la fréquence de troncature . . . . .	62
2.5.2	Effort d'excitation pour une houle régulière . . . . .	63
2.5.3	Effort d'excitation pour une houle irrégulière . . . . .	63
<b>2.6</b>	<b>Modèles d'état classique</b> . . . . .	<b>64</b>
2.6.1	Modèles d'état à un degré de liberté (SDOF) . . . . .	64
2.6.2	Modèles d'état à plusieurs degrés de liberté (MDOF) . . . . .	65



2.6.3	Approche par les séries de Prony . . . . .	66
2.6.4	Décomposition en valeurs singulières de Hankel . . . . .	70
2.6.4.1	Modèles d'état discret . . . . .	70
2.6.4.2	Modèles d'état continu . . . . .	72
2.6.5	Modèle d'état MDOF (SSM1) . . . . .	72
2.6.6	Modèle d'état corrigé (SSM2) . . . . .	74
2.6.7	Modèle d'état découplé (SSM3) . . . . .	76
2.6.8	Terme d'action directe $D^c$ . . . . .	77
2.6.9	Définition complète de la fonction de retard . . . . .	79
2.6.10	Causalité de la fonction $K$ . . . . .	80
<b>2.7</b>	<b>Autre approche par des fonctions de retard continues . . . . .</b>	<b>81</b>
2.7.1	Domaine temporel . . . . .	81
2.7.2	Expression de $K^a$ à partir de $K^b$ . . . . .	82
2.7.3	Causalité des fonctions $K^a$ et $K^b$ . . . . .	83
2.7.4	Modèle d'état (SSM4) . . . . .	84
2.7.5	Modèle d'état découplé (SSM5) . . . . .	86
2.7.6	Termes d'action directe $D^a$ et $D^b$ . . . . .	87
2.7.7	Réduction du modèle . . . . .	88
<b>2.8</b>	<b>Cas particulier du pilonnement . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>2.9</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>89</b>

---

La dynamique des corps flottants est généralement analysée dans le domaine fréquentiel à l'aide de la méthode de diffraction-radiation linéaire basée sur les méthodes des éléments frontières. Le problème est linéarisé en supposant de petits déplacements de la surface libre et des corps flottants. Plusieurs logiciels ont été développés dans le domaine fréquentiel pour calculer la solution de ce problème tels que HydroStar [76], Nemoh [78], Aqwa [79] et Wamit [80]. Cette théorie au premier ordre permet d'évaluer les matrices d'inerties ajoutées et d'amortissement d'onde, associées à la radiation, ainsi que les efforts de houle associés à la diffraction. La formulation dans le domaine temporel de l'équation dynamique a été introduite par Cummins [81]. Dans cette formulation apparaît un terme de convolution qui demande d'importantes ressources de calcul lorsque son évaluation est faite par simple quadrature. C'est pourquoi plusieurs modèles ont été développés afin d'approcher ce terme de convolution par un modèle d'état comme dans [82] et [83]. Des revues plus exhaustives des différentes approches utilisées pour remplacer le terme de convolution sont proposées par Roessling et al. [84], Unneland [85], Taghipour et al. [86] et Armesto et al. [87]. Pena-Sanchez propose une comparaison entre certaines de ces méthodes [88]. Un autre avantage de l'utilisation d'une représentation dans un espace d'état est de pouvoir utiliser la théorie de l'optimisation pour les modèles d'état tels que le maximum de Pontryagin [89]. Ceci est particulièrement utile pour le contrôle des convertisseurs d'énergie houlomotrice [90].

La théorie de la diffraction-radiation est très spécifique à l'étude du comportement des structures flottantes et utilise des outils mathématiques, tels que le développement en perturbations sur lequel nous reviendrons. Une fois cette théorie expliquée au lecteur, ce chapitre présentera d'autres prérequis avant de se concentrer sur le remplacement du produit de convolution, de l'équation mécanique, par un modèle d'état. Différentes méthodes seront utilisées, et comparées, afin d'obtenir un modèle d'état. Les différences entre les approches continue et discrète seront particulièrement étudiées.

Dans tout ce chapitre, un cylindre sera utilisé pour les cas d'application et sera appelé **cylindre de référence**. Ce cylindre a un diamètre et un tirant d'eau de 10 m. Ses autres caractéristiques sont données en annexe A.1.

## 2.1 Théorie sur la houle

La dynamique des fluides newtoniens est régie par l'équation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad}P + \mu \Delta \vec{V} \quad (2.1)$$

Négliger les effets visqueux permet d'aboutir à l'équation d'Euler :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (2.2)$$

Qu'il est également possible de mettre sous la forme suivante :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{V} \right] = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z) - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (2.3)$$

L'écoulement est supposé irrotationnel. Le fluide est homogène et incompressible. Ce qui implique que :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \text{div} \vec{V} = 0 \quad (2.4)$$

L'écoulement dérive donc d'un potentiel, ce qui se traduit par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad \text{et} \quad \Delta \Phi = 0 \quad (2.5)$$

En utilisant les propriétés suivantes sur les opérateurs vectoriels,

$$\overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{grad}}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}}) = \overrightarrow{\text{rot}} (\text{div}) - \Delta \quad (2.6)$$

il est possible de réécrire 2.2 en utilisant 2.5

$$\overrightarrow{\text{grad}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \Phi)^2 + \frac{P}{\rho} + g z \right) = 0 \quad (2.7)$$

Ce qui donne finalement l'équation de Bernoulli-Lagrange :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{\text{grad}} \Phi)^2 + \frac{P}{\rho} + g z = C(t) \quad (2.8)$$

### 2.1.1 Conditions aux limites

L'équation 2.5 est nécessaire mais n'est pas suffisante pour déterminer le comportement d'un solide dans la houle. Il est nécessaire d'introduire des conditions aux limites afin de pouvoir résoudre. C'est le principe des codes BEM. Ces conditions sont obtenues en traduisant mathématiquement les hypothèses adoptées aux limites.

#### 2.1.1.1 Condition cinématique de surface libre

La surface libre, matérialisée par la fonction  $\eta(x, y, z, t)$ , va permettre de caractériser le problème grâce à plusieurs conditions dont la première est la condition cinématique. Cette condition cinématique de surface libre, consiste à affirmer qu'une particule de fluide présente sur la surface libre y demeure. Ainsi,

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (2.9)$$

### 2.1.1.2 Condition d'imperméabilité sur une paroi fixe (fond marin)

La condition d'imperméabilité traduit le fait qu'une particule de fluide ne peut pas traverser la limite entre le domaine fluide et le fond. Elle s'écrit comme suit :

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial n} \right|_{z=-h} = 0 \quad \vec{n} : \text{la normale au fond} \quad (2.10)$$

Dans le cas particulier d'un fond horizontal, il vient :

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (2.11)$$

### 2.1.1.3 Première condition dynamique de surface libre

L'hypothèse faite ici consiste à considérer que la pression sur la surface libre est constante. L'expression de la pression est donnée par l'équation 2.12.

$$P = \underbrace{P_{atm}}_{\text{atmosphérique}} \underbrace{-\rho gz}_{\text{hydrostatique}} \underbrace{-\rho \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad\Phi})^2 \right)}_{\text{hydrodynamique}} \quad (2.12)$$

Ainsi en  $z = \eta$ , la pression est constante et il est donc possible d'écrire que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{V}^2 + gz \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2} \right) + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{V^2}{2} + \frac{\partial gz}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) gz = 0 \quad (2.14)$$

Avec

$$(\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial t}$$

Et

$$\frac{\partial g\eta}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) g\eta = g \left( \frac{\partial\eta}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \eta \right) = g \frac{d\eta}{dt}$$

Dont se déduit l'équation 2.15.

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} (\vec{V}^2) + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \frac{\vec{V}^2}{2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \Big|_{z=\eta}} \quad (2.15)$$

#### 2.1.1.4 Deuxième condition dynamique de surface libre

Toujours en utilisant la pression, une deuxième condition dynamique sur la surface libre peut être déterminée. Mais cette fois, en plus d'être supposée constante, la pression à la surface est définie égale à la pression atmosphérique  $P_{atm}$ , ce qui permet d'établir l'équation 2.16 à partir de l'équation 2.12.

$$P(z = \eta) = P_{atm} = P_{atm} - \rho g \eta - \rho \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad} \Phi)^2 \right) \quad (2.16)$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\eta = -\frac{1}{g} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{grad} \Phi)^2 \right) \Big|_{z=\eta}} \quad (2.17)$$

### 2.1.2 Développement en perturbations

La section 2.1 a permis d'écrire les équations qu'il convient de résoudre dans le cas simplifié d'un fluide parfait en écoulement potentiel. Néanmoins, en dépit des hypothèses simplificatrices, les équations demeurent non-linéaires (cf équation 2.15 et équation 2.17). Il faut donc faire une autre hypothèse afin de linéariser ces deux équations. Cette hypothèse consiste à considérer l'élévation de surface  $\eta$  très petite devant la longueur d'onde  $\lambda$ . Cela va permettre de procéder à un développement par perturbation. Le principe de ce développement est de considérer le potentiel  $\Phi$  et l'élévation de surface libre  $\eta$  comme étant des sommes de fonctions puissances entières d'ordres croissants d'un petit paramètre  $\varepsilon$  défini comme la cambrure  $H/\lambda$ .

$$\begin{aligned} \Phi &= \underbrace{\Phi^{(1)}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\Phi^{(2)}}_{\text{ordre 2}} + \dots + \underbrace{\Phi^{(n)}}_{\text{ordre n}} + o(\varepsilon^n) \\ \eta &= \underbrace{\eta^{(1)}}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{\eta^{(2)}}_{\text{ordre 2}} + \dots + \underbrace{\eta^{(n)}}_{\text{ordre n}} + o(\varepsilon^n) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Avec

$$\Phi^{(n)}, \eta^{(n)} \propto \varepsilon^n \quad \Phi^{(n)}, \eta^{(n)} = O(n) \quad (2.19)$$

Le développement en perturbations de puissances entières ressemble fortement au développement de Taylor. Pour  $\eta$  petit le développement de Taylor est :

$$\Phi(x, y, z, t) = \eta^0 \left. \frac{\partial^0 \Phi}{\partial z^0} (x, y, z, t) \right|_{z=0} + \eta^1 \left. \frac{\partial^1 \Phi}{\partial z^1} (x, y, z, t) \right|_{z=0} + \eta^2 \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} (x, y, z, t) \right|_{z=0} + \dots \quad (2.20)$$

Afin de simplifier les écritures, nous allons adopter la convention suivante dans toute cette section.

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\partial}{\partial b} \left( \frac{\partial}{\partial c} (F) \right) \right) = F_{ABC} \quad (2.21)$$

### 2.1.2.1 Développement en perturbations à l'ordre 1

Nous commençons par l'ordre 1 car, comme nous allons le voir, il est nécessaire de connaître la solution à l'ordre n-1, n-2, ... pour pouvoir résoudre l'ordre n et ainsi de suite. D'autre part, c'est le cas le plus simple et il est largement utilisé, notamment dans les codes de diffraction-radiation. Pour ce faire, il faut injecter l'équation 2.18 dans l'équation 2.20 et ne conserver que les termes d'ordre 1. Ainsi, le potentiel peut s'écrire comme suit :

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^{(1)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} + \eta^{(1)} \Phi_Z^{(1)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} \quad (2.22)$$

En linéarisant à l'ordre 1, il vient :

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^{(1)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} + o(\varepsilon^2) \quad (2.23)$$

En injectant ensuite cette expression dans les équations 2.15 et 2.17, il vient, une fois linéarisées à l'ordre 1, le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} \Phi_{TT}^{(1)} + g\Phi_Z^{(1)} &= 0 \\ \eta^{(1)} &= -\frac{1}{g}\Phi_T^{(1)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dans le cas d'une onde progressive, ce système d'équations est caractéristique de la houle d'Airy, aussi appelée houle de Stockes d'ordre 1 pour laquelle il existe une solution analytique bien connue donnée par l'équation 2.25.

$$\Phi^{(1)}(M, t) = \text{Re} \left( -\frac{\mathbf{i} g}{\omega} a \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} e^{\mathbf{i}(\omega t - k(x \cos(\beta_w) + y \sin(\beta_w)))} \right) \quad (2.25)$$

Cette onde est caractérisée par son amplitude  $a$ , son angle d'incidence  $\beta_w$ , la profondeur d'eau constante  $h$  et le nombre d'onde  $k$  qui est solution de la relation de dispersion donnée par l'équation 2.26.

$$\omega^2 = gk \tanh(kh) \quad (2.26)$$

Dans le cas particulier d'une profondeur infinie,

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \tanh(kh) = 1 \quad \Rightarrow \quad k = k_0 = \frac{\omega^2}{g} \quad (2.27)$$

Dans le cas particulier d'une profondeur faible,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \tanh(kh) = kh \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\frac{k_0}{h}} = \frac{\omega}{\sqrt{gh}} \quad (2.28)$$

### 2.1.2.2 Développement en perturbations à l'ordre 2

Intéressons nous à présent à l'ordre 2 qui est, lui aussi, utilisé dans les codes BEM de diffraction-radiation comme HydroStar par exemple. La démarche initiale est similaire à celle de l'ordre 1. Il faut tout d'abord injecter le potentiel et l'élévation de surface libre d'ordre 2 (équation 2.18) dans le développement de l'équation 2.20. En ne conservant que les termes d'ordre 2, il vient :

$$\Phi(x, y, z, t) = \Phi^{(1)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} + \Phi^{(2)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} + \eta^{(1)} \Phi_Z^{(1)}(x, y, z, t) \Big|_{z=0} + o(\varepsilon^2) \quad (2.29)$$

Ici encore, en injectant cette expression dans les équations 2.15 et 2.17 qu'il faut ensuite limiter à l'ordre 2, il vient :

$$\begin{aligned} \Phi_{TT}^{(1)} + \Phi_{TT}^{(2)} + \eta^{(1)} \Phi_{TTZ}^{(1)} + 2 \overrightarrow{grad}(\Phi_T^{(1)}) \overrightarrow{grad}(\Phi^{(1)}) + g\Phi_Z^{(1)} + g\Phi_Z^{(2)} + g\eta^{(1)} \Phi_{ZZ}^{(1)} &= 0 \\ \eta^{(1)} + \eta^{(2)} &= -\frac{1}{g} \left( \Phi_T^{(1)} + \Phi_T^{(2)} + \eta^{(1)} \Phi_{TZ}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{grad}(\Phi^{(1)}) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Jusqu'ici la démarche reste exactement la même que pour l'ordre 1. La spécificité de ce développement d'ordre 2 est d'utiliser le système d'équation de l'ordre 1 (équation 2.24) pour simplifier le système à l'ordre 2, qui fait apparaître ces équations d'ordre 1. Ce qui donne finalement :

$$\begin{aligned} \Phi_{TT}^{(2)} + \eta^{(1)} \Phi_{TTZ}^{(1)} + 2 \overrightarrow{grad}(\Phi_T^{(1)}) \overrightarrow{grad}(\Phi^{(1)}) + g\Phi_Z^{(2)} + g\eta^{(1)} \Phi_{ZZ}^{(1)} &= 0 \\ \eta^{(2)} &= -\frac{1}{g} \left( \Phi_T^{(2)} + \eta^{(1)} \Phi_{TZ}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{grad}(\Phi^{(1)}) \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

$\Phi^{(1)}$  et  $\eta^{(1)}$  sont ensuite remplacés par leurs expressions analytiques pour pouvoir résoudre l'ordre 2. En regroupant les termes, il vient :

$$\begin{aligned}
 \Phi_{TT}^{(2)} + g\Phi_Z^{(2)} &= -\eta^{(1)} \left( \Phi_{TTZ}^{(1)} + g\Phi_{ZZ}^{(1)} \right) - 2\overrightarrow{\text{grad}} \left( \Phi_T^{(1)} \right) \overrightarrow{\text{grad}} \left( \Phi^{(1)} \right) \\
 \eta^{(2)} + \frac{1}{g}\Phi_T^{(2)} &= -\frac{1}{g} \left( \eta^{(1)}\Phi_{TZ}^{(1)} + \frac{1}{2} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \left( \Phi^{(1)} \right) \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{2.32}$$

La démarche est exactement la même aux ordres supérieurs. Dans un premier temps, il faut injecter le développement en perturbations linéarisé dans les équations du système (équations 2.15 et 2.17). Ensuite il faut linéariser ce système avant d'en supprimer les termes déjà solutions des ordres inférieurs. Et enfin, il faut injecter les solutions analytiques des ordres inférieurs afin de pouvoir résoudre. Cette méthode est calculatoire et très fastidieuse sans le concours d'un logiciel de calcul formel. George Gabriel Stokes, qui a donné son nom à cette approche analytique, a poussé le développement, à la main, jusqu'à l'ordre 9. Il est à noter que le développement se complique à partir de l'ordre 3 avec l'apparition d'une dépendance du nombre d'onde vis-à-vis de l'amplitude de l'élévation de surface libre [91].

## 2.2 Interaction fluide structure

L'interaction fluide-structure est un problème complexe qui est, encore aujourd'hui, le sujet de nombreuses recherches. Une façon plus simple d'aborder ce problème est de supposer le fluide comme étant parfait et siège d'un écoulement irrotationnel. La section 2.1 a montré les simplifications qu'offre cette hypothèse de travail.

### 2.2.1 Mise en équation du problème aux limites

Comme vu en section 2.1.1, il est possible d'exprimer le problème d'interaction fluide-structure grâce à des conditions aux limites qui sont ensuite linéarisées en section 2.1.2. Par soucis de simplicité, la formulation de BABARIT [92] a été reprise.  $M(x, y, z)$  est un point du domaine fluide. Les différents domaines sont détaillés sur la figure 2.1. Le repère de travail est  $R_{ref} = (P_{ref}, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  où  $P_{ref}$  est le point de référence. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{lll}
 \Delta\Phi(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in \Omega \quad \forall t \geq 0 \\
 \frac{\partial}{\partial n}\Phi(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_F \cup S_\infty \quad \forall t \geq 0 \\
 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(M, t) + g\frac{\partial}{\partial z}\Phi(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_{SL} \quad \forall t \geq 0 \\
 \frac{\partial}{\partial n}\Phi(M, t) & = & \vec{V} \cdot \vec{n} \quad \forall M \in S_{Sc} \quad \forall t \geq 0
 \end{array} \right. \tag{2.33}$$

La dernière équation traduit la condition d'adhérence sur la surface du corps. C'est-à-dire qu'il y a continuité entre la vitesse normale<sup>1</sup> du fluide et celle du solide sur la surface mouillée. Notons que la dérivée directionnelle  $\frac{\partial}{\partial n}\Phi$  est une autre façon d'écrire  $\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) \cdot \vec{n}$ . Ce terme traduit

1. Composante de la vitesse, normale à la surface du corps, au point d'évaluation



donc bien la composante normale de la vitesse du fluide sur la paroi. Et la condition d'adhérence à la paroi impose une égalité entre les composantes normales des vitesses du fluide et du solide sur la paroi. C'est-à-dire  $\vec{V}_{fluide} \cdot \vec{n} = \vec{V}_{solide} \cdot \vec{n}$  en tout point de la paroi.

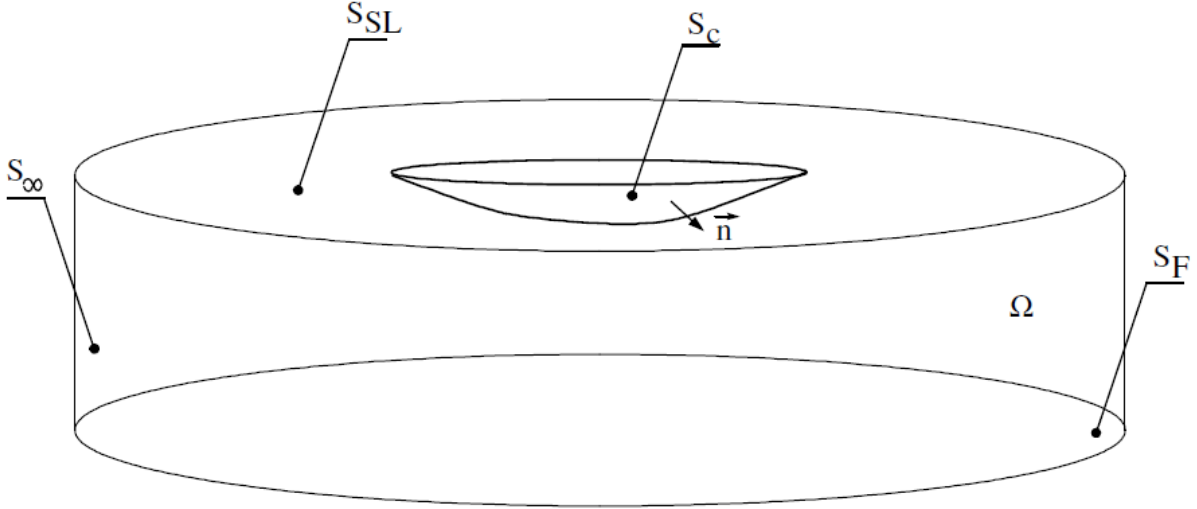


FIGURE 2.1 – Volume fluide, figure tirée de la thèse d'Aurélien BABARIT [92]

### 2.2.2 Effort généralisé de la pression

La section 2.1.1.3 donne l'expression de la pression (explicitée dans l'équation 2.12). Une fois linéarisée à l'ordre 1, cette expression se réduit à :

$$P(M, t) = \underbrace{P_{atm} - \rho g z}_{hydrostatique} - \underbrace{\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}}_{hydrodynamique} \quad (2.34)$$

La résultante de l'effort de pression est donné par :

$$\vec{R}_p = - \iint_{M \in S_c} P(M, t) \vec{n} dS \quad (2.35)$$

Avec  $\vec{n}$  la normale sortante. Le moment de cet effort, au point de référence  $P_{ref}$ , est donné par la relation du transport de moment et s'écrit :

$$\overrightarrow{M(P_{ref}, \vec{R}_p)} = - \iint_{M \in S_c} P(M, t) \overrightarrow{P_{ref}M} \wedge \vec{n} dS \quad (2.36)$$

Par soucis de simplicité, cet effort est mis sous forme dite généralisée. C'est à dire que le torseur d'effort, contenant la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{M}$  calculé au point de référence  $P_{ref}$ , est mis sous forme vectorielle

$$\left\{ \begin{array}{c|c} R_x & M_x \\ R_y & M_y \\ R_z & M_z \end{array} \right\}_{R_{ref}} \equiv \begin{pmatrix} R_x \\ R_y \\ R_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{R_{ref}} \quad (2.37)$$

Il est ainsi possible d'exprimer l'effort généralisé de la pression comme suit :

$$\vec{F}_p = - \iint_{M \in S_c} P(M, t) \vec{N}(M) dS \quad (2.38)$$

Avec

$$\vec{N}(M) = \begin{pmatrix} \vec{n} \cdot \vec{x}_0 \\ \vec{n} \cdot \vec{y}_0 \\ \vec{n} \cdot \vec{z}_0 \\ \left( \overrightarrow{P_{ref} M} \wedge \vec{n} \right) \cdot \vec{x}_0 \\ \left( \overrightarrow{P_{ref} M} \wedge \vec{n} \right) \cdot \vec{y}_0 \\ \left( \overrightarrow{P_{ref} M} \wedge \vec{n} \right) \cdot \vec{z}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \\ y_{ref} \cdot n_z - z_{ref} \cdot n_y \\ z_{ref} \cdot n_x - x_{ref} \cdot n_z \\ x_{ref} \cdot n_y - y_{ref} \cdot n_x \end{pmatrix} \quad (2.39)$$

Et plus particulièrement l'effort hydrodynamique qui se traduit par l'expression suivante :

$$\vec{F}_{dyn} = \rho \int \int_{S_c} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(M, t) \vec{N}(M) dS \quad (2.40)$$

Wehausen [93] a montré que la résolution du problème se résume en fait à résoudre le problème sur la surface mouillée du corps immergé en choisissant des fonctions de Green adaptées.

### 2.2.3 Théorie de la diffraction–radiation

La théorie de la diffraction–radiation est aujourd'hui une méthode classique pour caractériser le comportement des structures marines dans la houle. Elle a été introduite il y a déjà longtemps [32] mais sa complexité n'a pas permis d'obtenir des résultats numériques, pour des corps quelconques en trois dimensions, avant la fin des années 60. Il existe également d'autres façons d'approcher ce problème qui ne seront pas abordées ici. Le principe de cette théorie est de décomposer le potentiel en 8 potentiels indépendants. Le premier, noté  $\Phi_0$  est le potentiel incident qui traduit l'action du champ de vague incident qui peut être décrit comme le potentiel de la houle sans la présence du corps. Le potentiel de diffraction, noté  $\Phi_7$  correspond au champ de vague diffracté par le corps immobile dans la houle. Les potentiels de radiation, notés  $\Phi_1$  à  $\Phi_6$ , correspondent au champ de vague créé par le mouvement du corps solide dans la houle selon ses 6 degrés de

liberté dans l'espace. La solution totale s'obtient alors par superposition :

$$\Phi(M, t) = \underbrace{\Phi_0(M, t)}_{\text{incidence}} + \underbrace{\sum_{i=1}^6 \Phi_i(M, t)}_{\text{radiation}} + \underbrace{\Phi_7(M, t)}_{\text{diffraction}} \quad (2.41)$$

Le potentiel incident est la solution de l'équation 2.24 puisqu'il ne tient pas compte de la présence du corps. Les potentiels de radiation sont quant à eux solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_i(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in \Omega \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_i(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_F \cup S_\infty \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_i(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_i(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_{SL} \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_i(M, t) & = & \dot{\mathbf{q}}_i \cdot \vec{N}_i(M, t) \quad \forall M \in S_{Sc} \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.42)$$

Avec  $\dot{\mathbf{q}}_i = {}^t [x_{ref}, y_{ref}, z_{ref}, \phi, \theta, \psi]$  le vecteur des vitesses généralisées dans le repère  $R_{ref}$ . Ces mouvements sont appelés cavement, embardée, pilonnement, roulis, tangage et lacet. Ils apparaissent sur la figure 2.2 qui illustre les mouvements dans le cas classique d'un navire. Le centre de gravité est souvent choisi comme point de référence.

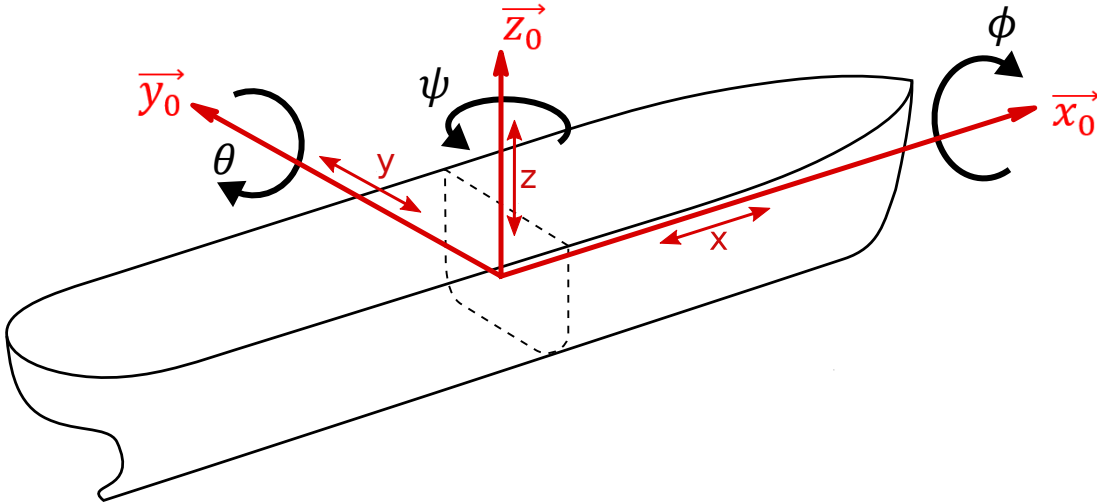


FIGURE 2.2 – Convention des mouvements pour les structures marines (ici un navire), figure inspirée de celle de Brosen [94]

Le potentiel de diffraction traduit la réflexion du champ de vague incident. La vitesse normale associée à ce potentiel est donc opposée à celle associée au potentiel incident. Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta \Phi_7(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in \Omega \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_7(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_F \cup S_\infty \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi_7(M, t) + g \frac{\partial}{\partial z} \Phi_7(M, t) & = & 0 \quad \forall M \in S_{SL} \quad \forall t \geq 0 \\ \frac{\partial}{\partial n} \Phi_7(M, t) & = & -\frac{\partial}{\partial n} \Phi_0(M, t) \quad \forall M \in S_{Sc} \quad \forall t \geq 0 \end{array} \right. \quad (2.43)$$

Les problèmes de radiation sont résolus en imposant des vitesses impulsionnelles  $\dot{q}_i = \delta(t)$ <sup>2</sup>. La résolution de ces problèmes, dans le domaine fréquentiel, conduit à l'apparition d'un terme de masse ajoutée  $\mathbf{A}(\omega)$  et d'un terme d'amortissement  $\mathbf{B}(\omega)$  qui traduisent respectivement l'effort de radiation en phase avec l'accélération et celui en phase avec la vitesse. Ce formalisme est détaillé dans la thèse de DELHOMMEAU [95].

Dans le domaine fréquentiel, l'effort généralisé de la radiation dans  $R_{ref}$  est donné par :

$$\mathbf{F}_{rad}(\omega) = -\mathbf{A}(\omega)\mathbf{\Gamma}(\omega) - \mathbf{B}(\omega)\mathbf{V}(\omega) \quad (2.44)$$

Avec  $\mathbf{\Gamma}(\omega)$  et  $\mathbf{V}(\omega)$  les vecteurs généralisés d'accélération et de vitesse dans le domaine fréquentiel.

Les potentiels  $\Phi_0$  et  $\Phi_7$  vont, quant à eux, engendrer l'effort d'excitation vu par le solide.

$$\vec{f}_{ex}(t) = \rho \iint_{S_c} \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_0(M, t) + \Phi_7(M, t)) \vec{N}(M) dS \quad (2.45)$$

Les calculs de diffraction–radiation sont menés pour une position donnée du solide qui est en général sa position d'équilibre. Ainsi, l'hypothèse que les mouvements du solides sont petits est implicitement faite. Il faut également noter qu'il est nécessaire de respecter une contrainte de maillage pour que les calculs aient un sens physique. En effet, la taille de maille ne doit pas excéder  $\lambda_{min}/6$ , avec  $\lambda_{min}$  la plus petite longueur d'onde du calcul relative à la fréquence la plus grande.

## 2.3 Effort de rappel hydrostatique

Dans la section précédente, nous avons passé sous silence la pression hydrostatique pour nous concentrer sur la pression hydrodynamique uniquement. Nous allons l'aborder dans cette section. La figure 2.3 présente le cas du cylindre de référence partiellement immergé et incliné. Le centre de gravité G, de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  dans la base du référentiel absolu  $B_0$ , est en rouge. Le centre de carène B, de coordonnées  $(x_B, y_B, z_B)$  dans la base du référentiel absolu  $B_0$ , est

2.  $\delta(t)$  est la distribution de Dirac aussi appelée fonction de Dirac

en bleu. Le point d'origine est en noir. Les efforts de pesanteur et de rappel hydrostatatique sont respectivement en rouge et en bleu.

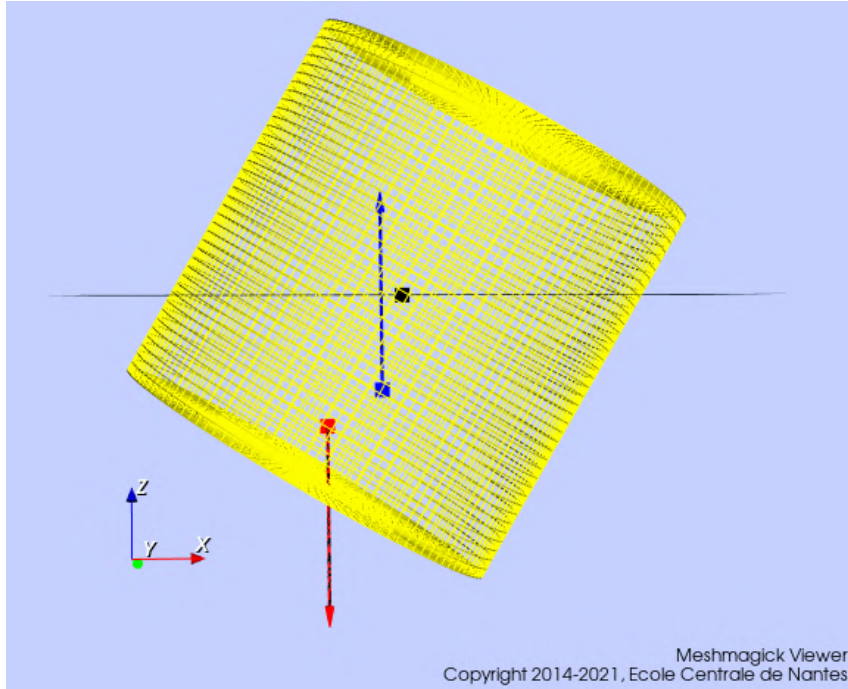


FIGURE 2.3 – Exemple d'un cylindre immergé avec une incidence

### 2.3.1 Définition de l'effort de rappel hydrostatatique

Chaque point de la carène du cylindre est soumis à un effort hydrostatatique élémentaire pouvant s'écrire

$$\overrightarrow{dF} = -\rho g z \overrightarrow{n} dS \quad \forall M \in S_C \quad (2.46)$$

Avec  $\overrightarrow{n}$  la normale sortante et  $S_C$  la surface de la carène.

Le moment de cet effort élémentaire, en un point  $P$  de coordonnées  $(x_p, y_p, y_p)$  dans la base  $B_0$ , s'écrit :

$$\overrightarrow{dM}(P) = -\rho g z \overrightarrow{PM} \wedge \overrightarrow{n} dS \quad \forall M \in S_C \quad (2.47)$$

L'effort total, ainsi que le moment total, s'obtiennent par intégration sur la carène. Ce qui donne les équations 2.48 et 2.49.

$$\vec{F} = - \iint_{M \in S_C} \rho g z \vec{n} dS \quad (2.48)$$

$$\overrightarrow{M(P)} = - \iint_{M \in S_C} \rho g z \overrightarrow{PM} \wedge \vec{n} dS \quad (2.49)$$

Le centre de carène B, de coordonnées  $(x_B, y_B, z_B)$  dans la base  $B_0$ , est alors défini comme étant le point où le moment total de l'effort hydrostatique s'annule :

$$\overrightarrow{M(B)} = - \iint_{M \in S_C} \rho g z \overrightarrow{BM} \wedge \vec{n} dS = 0 \quad (2.50)$$

Le fait de connaître le centre de carène va permettre de calculer le moment de l'effort au point de référence  $P_{ref}$ . Dans le cas du cylindre de référence, pour un mouvement plan, il n'est pas trop ardu de calculer une solution analytique de l'effort hydrostatique généralisé en un point de référence quelconque. Dans la suite, le centre de gravité sera défini comme point de référence.

### 2.3.2 Linéarisation de l'effort de rappel hydrostatique

En revanche, pour les solides aux géométries plus complexes en 3 dimensions, il est difficile, et inutile, d'obtenir une solution analytique étant donné les linéarisations faites en section 2.2. Dans les cas des petits mouvement, l'effort hydrostatique généralisé en  $G$  peut être approché par un terme de rappel :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel hydrostatique}}} = -\mathbf{K}_h [\mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_{eq}] \quad (2.51)$$

Où  $\mathbf{q}_{eq}$  est le vecteur des coordonnées généralisées à l'équilibre qui correspond généralement à l'état initial  $\mathbf{q}(t = 0)$ . Le terme  $\mathbf{K}_h$  est la matrice de raideur hydrostatique. Cette matrice est symétrique, constante et se présente sous la forme

$$\mathbf{K}_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,33} & K_{h,34} & K_{h,35} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,34} & K_{h,44} & K_{h,45} & 0 \\ 0 & 0 & K_{h,35} & K_{h,45} & K_{h,55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

L'expression des termes non nuls de cette matrice est donnée dans la [documentation de mesh-magick](#) [96] qui est une bibliothèque, développée par François Rongère, dédiée aux calculs de stabilité. Ces termes sont également explicités ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 K_{h,33} &= \rho g S_f & a &= z_G - z_B \\
 K_{h,34} &= \rho g \iint_{S_f} y dS & GM_t &= R_t - a \\
 K_{h,35} &= -\rho g \iint_{S_f} x dS & GM_l &= R_l - a \\
 K_{h,44} &= -\rho g \iint_{S_f} xy dS & K_{h,44} &= \rho g \nabla GM_t \\
 K_{h,45} &= -\rho g \iint_{S_f} xy dS & K_{h,55} &= \rho g \nabla GM_l \\
 R_t &= \frac{1}{\nabla} \iint_{S_f} y^2 dS & x_f &= -\frac{K_{35}}{K_{33}} \\
 R_l &= \frac{1}{\nabla} \iint_{S_f} x^2 dS & y_f &= \frac{K_{34}}{K_{33}}
 \end{aligned} \tag{2.53}$$

Avec  $\nabla$  le volume déplacé par le solide,  $S_f$  sa surface de flottaison. Les grandeurs  $R_t$  et  $R_l$  sont respectivement les rayons métacentriques transversal et longitudinal. Les grandeurs  $GM_t$  et  $GM_l$  sont respectivement les hauteurs métacentriques transversal et longitudinal. Les grandeurs  $x_f$  et  $y_f$  sont les positions horizontales du centre de la surface de flottaison. La figure 2.4 illustre le cas de la stabilité en roulis. La distance  $Gz$  correspond au bras de levier de la poussée d'Archimède et est donc lié au couple par la relation suivante :

$$C_{rappel} = -\rho g \nabla Gz(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\approx} -\rho g \nabla GM \theta \tag{2.54}$$

En réalité, l'effort hydrostatique n'est pas exactement linéaire. Néanmoins, pour de faibles incidences, ces forces et ces couples de redressement varient linéairement avec l'angle d'incidence. Il est donc pertinent d'utiliser cette approche pour des petits mouvements. La limite de validité est fonction du solide étudié.

Reprenons le cas du cylindre de référence<sup>3</sup> en tangage. La figure 2.5 montre le bras de levier de redressement du cylindre avec l'approche linéaire (courbe orange). La figure montre également le bras de levier de redressement, à isovolume, en fonction de l'assiette/gîte. Il apparaît que l'approche linéaire est pertinente jusqu'à 50° d'assiette/gîte dans le cas du cylindre de section circulaire.

## 2.4 Équation mécanique

La section 2.2.3 a montré que l'expression de l'effort de radiation dans le domaine fréquentiel était relativement simple. Cependant, les termes de masse ajoutée et d'amortissement de radiation sont fonction de la pulsation  $\omega$ , ce qui implique l'apparition d'un produit de convolution dans l'équation mécanique temporelle.

---

3. Rappel : Les caractéristiques de ce cylindre sont données en annexe A.1

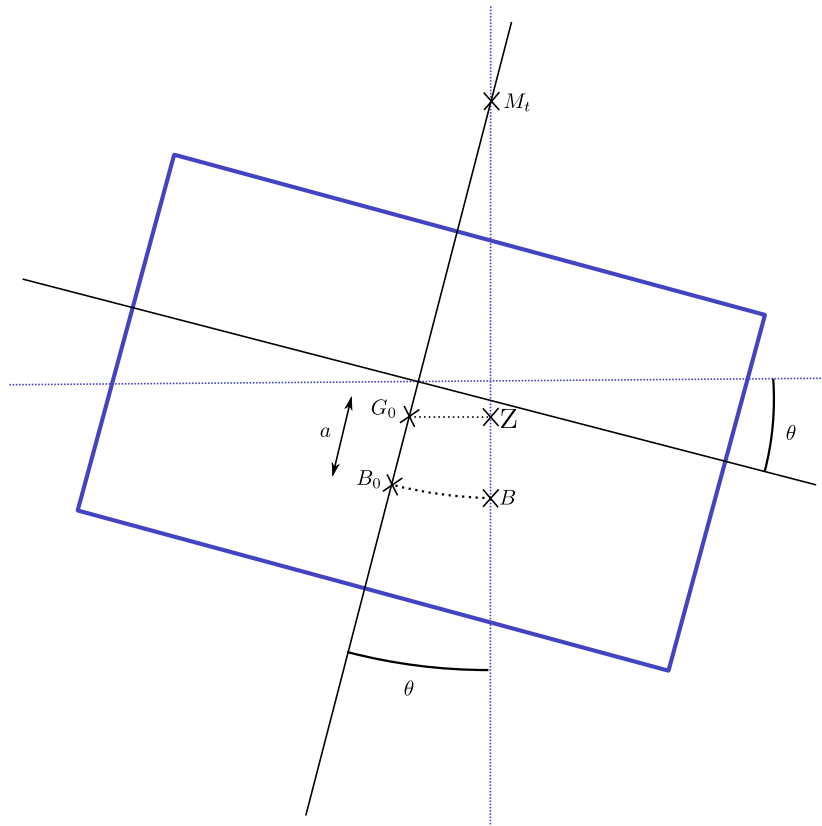


FIGURE 2.4 – Stabilité pour un mouvement de roulis

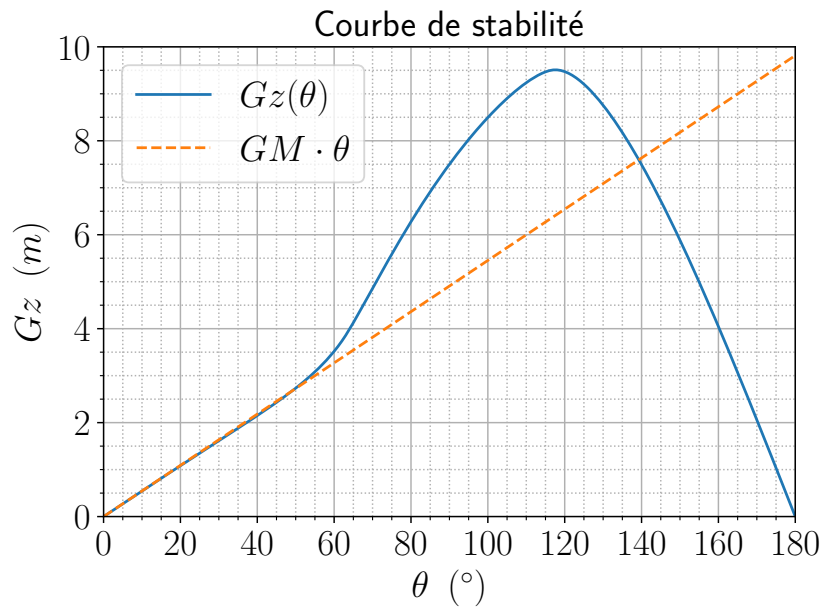


FIGURE 2.5 – Rappel hydrostatique pour notre cylindre de référence en tangage/roulis



### 2.4.1 Domaine fréquentiel

Les section 2.1, 2.2 et 2.3 permettent d'écrire l'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega))\mathbf{\Gamma}(\omega) + \mathbf{B}(\omega)\mathbf{V}(\omega) + \mathbf{K}_h\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (2.55)$$

Avec  $\mathbf{M}$  la matrice masse et  $\mathbf{F}_{ex}$  l'effort d'excitation de la houle. En utilisant une notation complexe<sup>4</sup> l'équation 2.55 devient l'équation 2.56. Résoudre l'équation 2.56, dans le domaine fréquentiel, donne ce qui sera qualifié de **RAO de référence**.

$$\left( (i\omega)^2(\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + (i\omega)\mathbf{B}(\omega) + \mathbf{K}_h \right) \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (2.56)$$

Cette RAO de référence est donnée par l'équation 2.57.

$$\mathbf{RAO}_{ref} = \mathbf{Q}(\omega) = \left( (i\omega)^2(\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + (i\omega)\mathbf{B}(\omega) + \mathbf{K}_h \right)^{-1} \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (2.57)$$

L'équation 2.57 sera le cas de référence, toujours avec le cylindre de référence, pour toute la suite de ce chapitre.

### 2.4.2 Domaine temporel

L'équation, bien connue, de Cummins [81] utilise implicitement la notation complexe de la section 2.4.1. La fonction  $\mathbf{B}(\omega)$  tend vers 0 et  $\mathbf{A}(\omega)$  tend vers  $\mathbf{A}_\infty$  lorsque  $\omega$  tend vers  $\infty$ . Soit la fonction  $\mathbf{A}'$  définie dans l'équation 2.58.

$$\mathbf{A}'(\omega) = \mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty \quad (2.58)$$

Ainsi l'équation 2.55 devient :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}_\infty)\mathbf{\Gamma}(\omega) + (i\omega\mathbf{A}'(\omega) + \mathbf{B}(\omega))\mathbf{V}(\omega) + \mathbf{K}_h\mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (2.59)$$

Et donc, en écrivant 2.59 dans le domaine temporel, l'équation de Cummins apparaît.

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}_\infty)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(t - \tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}_h\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (2.60)$$

En considérant que le solide est immobile pour  $t < 0$  et en tenant compte du principe de causalité, l'équation 2.60 se réduit à :

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}_\infty)\ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}_h\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (2.61)$$

---

4. Où  $i$  est l'unité imaginaire à ne pas confondre avec  $i$  qui lui est un indice

Où  $\mathbf{K}(t)$  est la transformée de Fourier inverse du coefficient d'amortissement de radiation équivalent, introduit dans l'équation 2.59,  $\mathbf{B}_{eq}(\omega) = (i\omega\mathbf{A}'(\omega) + \mathbf{B}(\omega))$  et qui s'écrit :

$$\mathbf{K}(t) = \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega\mathbf{A}'(\omega) + \mathbf{B}(\omega)) e^{i\omega t} d\omega \right) \quad (2.62)$$

Ce qui donne, par symétrie :

$$\mathbf{K}(t) = \text{Re} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (-\omega\mathbf{A}'(\omega) \sin(\omega t) + \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t)) d\omega \right) \quad (2.63)$$

Ogilvie [97] a montré par analyse harmonique qu'il existe un lien<sup>5</sup> entre la masse ajoutée et l'amortissement de radiation donné dans l'équation 2.64.

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega\mathbf{A}'(\omega) \sin(\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (2.64)$$

Ce qui conduit à l'expression suivante, très largement utilisée dans la littérature [86, 98-100].

$$\mathbf{K}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (2.65)$$

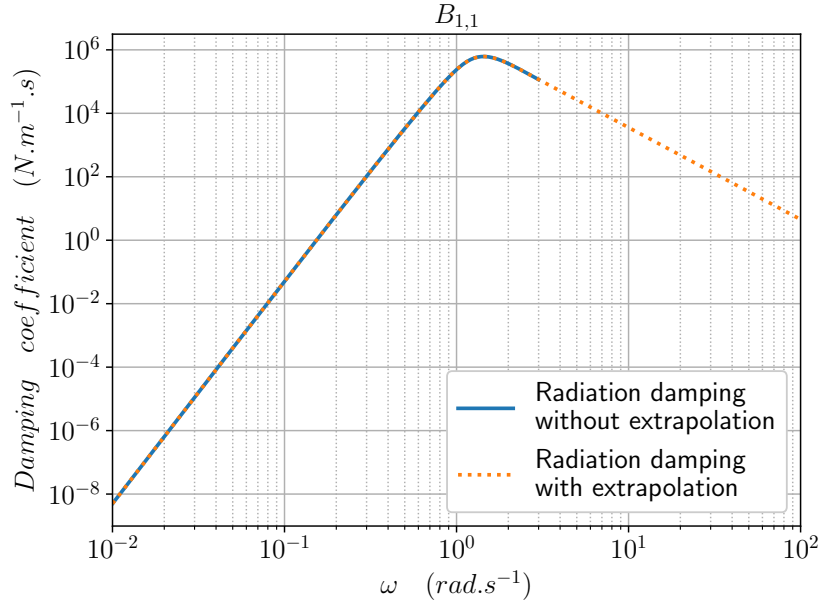
L'intégrale (ou produit de convolution) présente dans l'équation mécanique 2.61 complique la résolution de ce problème, ainsi que son analyse, dans le domaine temporel.

### 2.4.3 Extrapolation des termes de radiation

Le passage du domaine fréquentiel au domaine temporel nécessite l'utilisation de la transformée de Fourier inverse. De par sa définition, la transformée de Fourier inverse d'une fonction requiert la connaissance des valeurs de cette fonction sur  $\mathbb{R}$ . Mais, comme il a été dit en section 2.2.3, il y a une contrainte de maillage à respecter dans le cas d'une résolution numérique. Ainsi, plus la pulsation maximale du calcul sera grande, et plus le maillage devra être fin. Or, contrairement au calcul CFD, les matrices impliquées dans les calculs de diffraction-radiation sont pleines. La mémoire allouée au calcul limite donc rapidement la taille maximale du maillage et donc, par conséquent, la pulsation maximale du calcul. Fort heureusement, il est possible d'extrapoler les termes de radiation. Comme par exemple dans l'article de Bao [101] qui a montré qu'il était possible d'extrapoler l'amortissement de radiation avec un loi puissance.

La figure 2.6 montre l'évolution du terme d'amortissement de radiation  $B_{11}$  avec et sans extrapolation en échelle logarithmique. Il apparaît que l'évolution est linéaire à partir de  $\omega = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il est donc possible d'extrapoler l'amortissement de radiation avec une loi puissance. En l'occurrence, l'extrapolation est conduite jusqu'à une pulsation de  $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette extrapolation permet de limiter l'erreur faite en tronquant l'amortissement de radiation. Le fait de ne pas

5. Pour une linéarisation à l'ordre 1 du problème de diffraction-radiation

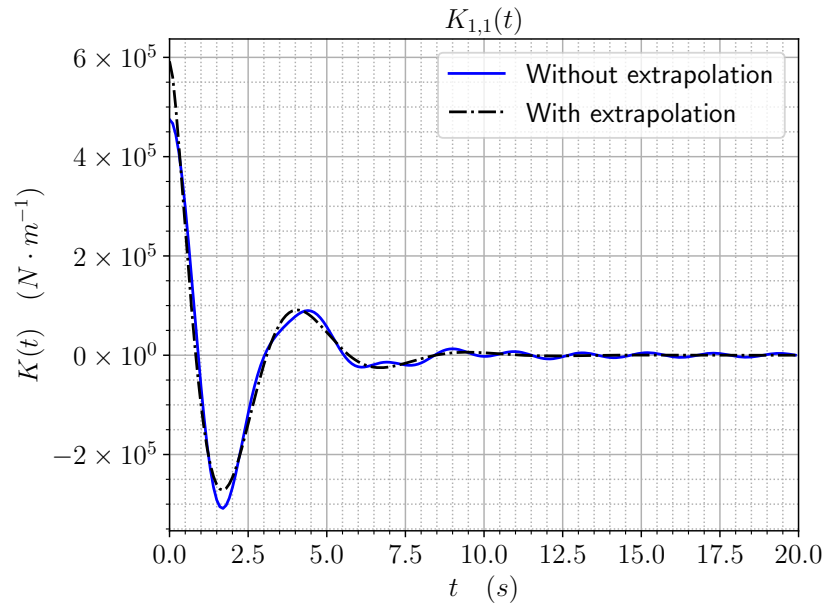
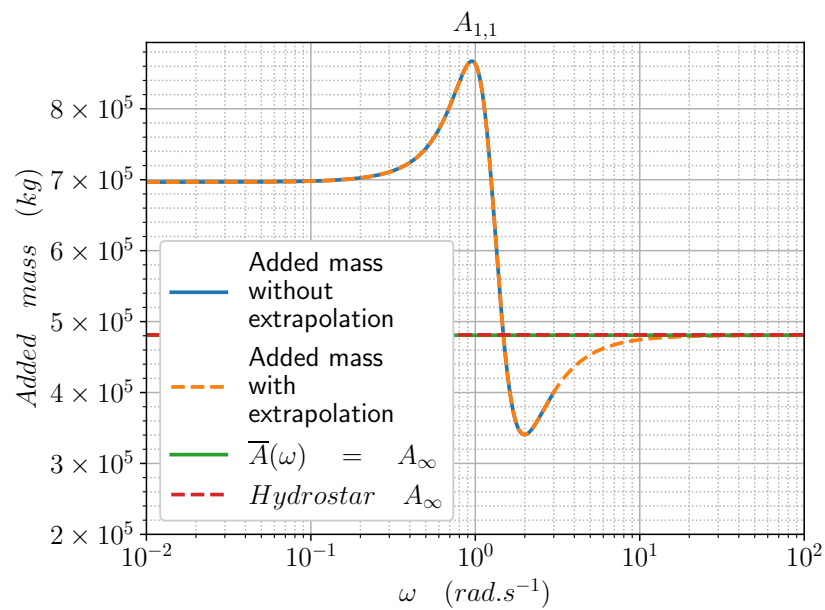

 FIGURE 2.6 – Exemple d'extrapolation pour  $B_{11}$ 

monter suffisamment haut en pulsation ne permet pas d'avoir un amortissement tendant vers 0. Cela implique des erreurs qui peuvent être importantes ainsi que l'apparition de bruits numériques qui déstabilisent les calculs.

Pour extrapoler la masse ajoutée, il est possible d'utiliser les relations de Cramer–Kroening [102] ou les relations d'Ogilvie [97]. Dans la pratique, les relations d'Ogilvie sont plus simples à utiliser. Ces relations seront admises pour l'instant. La véracité de ces relations sera étudiée plus tard dans ce chapitre.

$$\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty = -\frac{1}{\omega} \int_0^{+\infty} \mathbf{K}(t) \sin(\omega t) dt \quad \forall \omega \in \mathbb{R}_+ \quad (2.66)$$

La figure 2.7 montre l'écart entre les fonctions  $\mathbf{K}(t)$  avec et sans extrapolation. L'erreur est loin d'être négligeable et la nécessité d'extrapoler l'amortissement de radiation apparaît clairement. Il apparaît également que la fréquence du bruit numérique correspond à la fréquence de troncature (0.477 Hz en l'occurrence). Ainsi, plus la fréquence de troncature est faible et plus le bruit numérique aura une grande période et une grande amplitude qui peuvent éventuellement fausser la fonction de retard. D'autre part, la valeur de  $\mathbf{K}(0)$  sera également fortement impactée car elle correspond à l'aire sous la courbe. La figure 2.8 montre l'extrapolation de la masse ajoutée. Il apparaît clairement que la dernière valeur obtenue avec le calcul de diffraction–radiation est loin de valeur de la masse ajoutée à pulsation infinie. L'extrapolation a également été conduite jusqu'à un pulsation de  $100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Notons également que le logiciel HydroStar dispose d'un

FIGURE 2.7 – Comparaison entre  $K_{11}(t)$  avec et sans extrapolationFIGURE 2.8 – Exemple d'extrapolation pour  $A_{11}$ 

mode de calcul spécifique à pulsation infinie donnant une valeur qui correspond à celle obtenue avec l'extrapolation.

## 2.5 Effort d'excitation

L'effort d'excitation a été introduit dans l'équation 2.45. Cet effort apparaît dans la section 2.4 sans plus d'explications. Cette section va s'intéresser ici au passage du domaine fréquentiel au domaine temporel. Pour le cas particulier du cylindre de référence (annexe A.1), il existe une expression analytique permettant d'obtenir les efforts d'excitation en profondeur infinie dans le domaine fréquentiel. Finnegan et al. [103] donne les expressions des efforts d'excitation en cavement, en pilonnement et en tangage respectivement notés  $F_{ex,1}$ ,  $F_{ex,3}$  et  $F_{ex,5}$ . Ces expressions sont données, pour une amplitude de vague unitaire, par les équations 2.67, 2.68 et 2.69, où  $a$  est le rayon du cylindre et  $b$  son tirant d'eau.  $k_0$  est le nombre d'onde en profondeur infinie défini dans l'équation 2.28. Les fonctions  $J_m$ ,  $I_m$  et  $H_m^{(1)}$  sont respectivement les fonctions de Bessel de 1<sup>re</sup> espèce, les fonctions de Bessel de 1<sup>re</sup> espèce modifiées et les fonctions de Hankel de 1<sup>re</sup> espèce [104, 105]. Le couple d'excitation en tangage/roulis est initialement calculé au centre de carène  $B$ . Afin d'obtenir le couple au point de référence, le centre de gravité  $G$  en l'occurrence, un terme de transport de moment est ajouté.

$$F_{ex,1}(\omega) = -\frac{2\pi \mathbf{i} \rho g a}{k_0} (1 - e^{-k_0 b}) \left\{ J_1(k_0 a) - J_1'(k_0 a) \frac{H_1^{(1)}(k_0 a)}{H_1^{(1)'}(k_0 a)} \right\} \quad (2.67)$$

$$F_{ex,3}(\omega) = -4\rho a g e^{-k_0 b} \left\{ J_0(k_0 a) - J_0'(k_0 a) \frac{H_0^{(1)}(k_0 a)}{H_0^{(1)'}(k_0 a)} \right\} \int_0^\infty \frac{k_0}{\xi^2 + k_0^2} \frac{I_1(\xi a)}{\xi I_0(\xi a)} d\xi \quad (2.68)$$

$$F_{ex,5}(\omega) = \left\{ J_1(k_0 a) - J_1'(k_0 a) \frac{H_1^{(1)}(k_0 a)}{H_1^{(1)'}(k_0 a)} \right\} \left[ \frac{-2\pi \mathbf{i} \rho g a}{k_0^2} (1 - k_0 b - e^{-k_0 b}) \right. \\ \left. + 4 \mathbf{i} \rho a^2 g e^{-k_0 b} \int_0^\infty \frac{k_0}{\xi^2 + k_0^2} \frac{I_2(\xi a)}{\xi I_1(\xi a)} d\xi \right] + (z_B - z_G) F_{ex,1}(\omega) \quad (2.69)$$

Les figures 2.9, 2.10 et 2.11 montrent les modules et les phases des composantes de l'effort d'excitation, calculés à partir des équations 2.67, 2.68 et 2.69. Ces figures montrent également les résultats d'un calcul de diffraction–radiation effectué avec HydroStar. Il apparaît une assez bonne correspondance entre les deux approches. L'écart de phase pour  $F_{ex,3}$  n'est pas pertinent puisque le module est nul au delà de  $\omega = 2.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

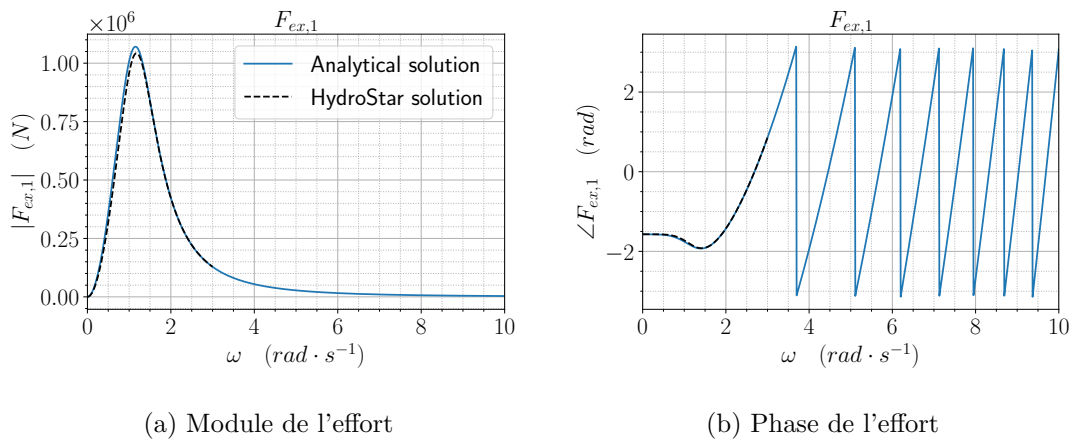


FIGURE 2.9 – Effort d'excitation en cavalemt

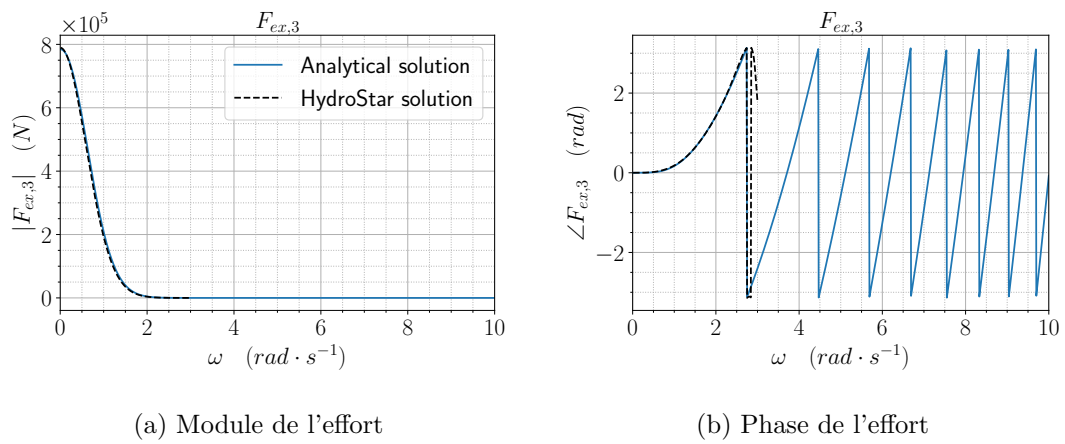


FIGURE 2.10 – Effort d'excitation en pilonnement

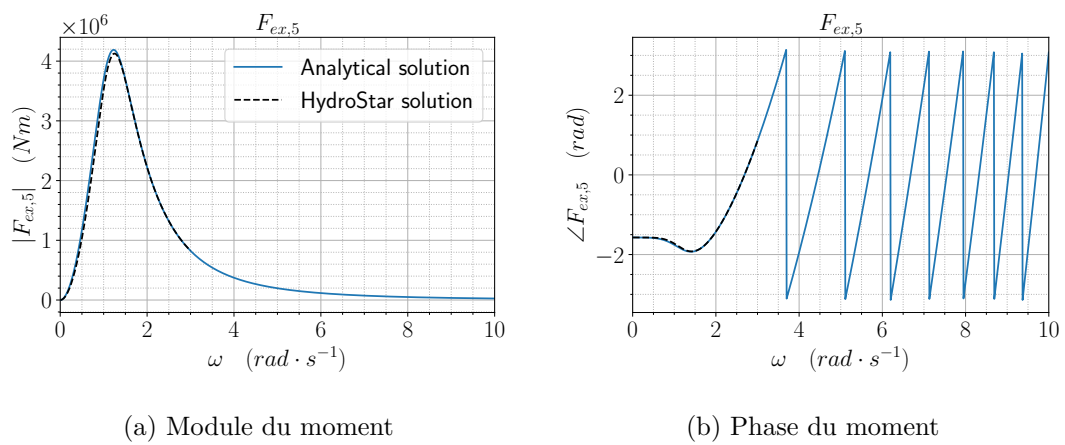


FIGURE 2.11 – Moment d'excitation en tangage

### 2.5.1 Influence de la fréquence de troncature

De même que pour les termes de radiation (section 2.4.3), il est logique de se questionner sur l'influence de la troncature, en fréquence, sur l'effort d'excitation dans le domaine temporel. Pour exprimer cet effort, la transformée de Fourier inverse sera utilisée de même que pour la section 2.4.2.

$$\mathbf{f}_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_{ex}(t - \tau)\eta(\tau)d\tau \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.70)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ex}(t) &= \text{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}_{ex}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right) \\ &= \text{Re} \left( \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{F}_{ex}(\omega)e^{i\omega t} d\omega \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |\mathbf{F}_{ex}(\omega)| \cos(\omega t + \angle \mathbf{F}_{ex}(\omega)) d\omega \end{aligned} \quad (2.71)$$

Concrètement, la borne supérieure de l'intégrale se limite à la dernière pulsation du calcul. Un calcul allant jusqu'à  $3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , pour le cylindre de référence, est encore raisonnable en terme de taille de maillage et donc de temps de calcul.

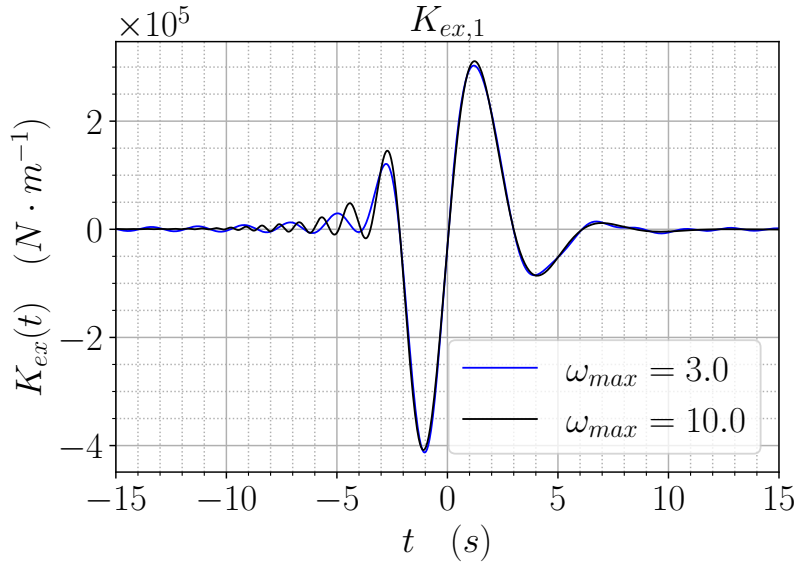


FIGURE 2.12 – Fonction de retard pour l'excitation en cavement avec et sans troncature

La figure 2.12 montre la fonction de retard d'excitation pour le cavement pour une pulsation de coupure à  $\omega = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (courbe bleue) et pour une pulsation de coupure à  $\omega = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

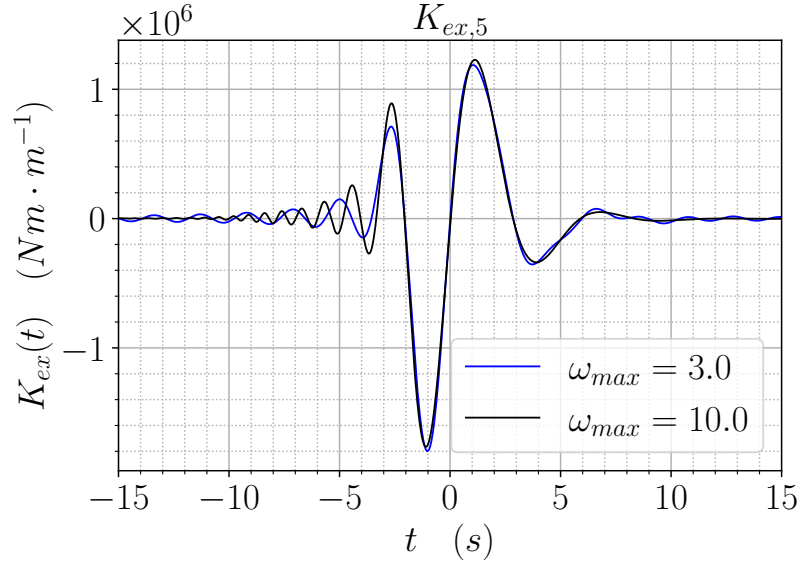


FIGURE 2.13 – Fonction de retard pour l'excitation en tangage avec et sans troncature

La figure 2.13 montre la même chose pour le moment en tangage. Il apparaît premièrement que ces fonctions sont non-causales [106]. Il apparaît également un effet de troncature comme pour la section 2.4.3. Toutefois, il n'est pas aussi aisé d'extrapoler l'effort d'excitation qu'il ne l'est d'extrapoler les termes de radiation. Premièrement, l'effort d'excitation est complexe. Il faut donc extrapoler son module et sa phase, ou ses parties réelle et imaginaire, suivant lequel des deux couples est le plus simple à extrapoler.

### 2.5.2 Effort d'excitation pour une houle régulière

L'extrapolation de l'effort d'excitation est délicate. De plus, sa non-causalité rend la représentation sous forme d'état ardue elle aussi [107, 108]. Il est donc courant de contourner le problème. Pour une houle régulière, i.e. pour une vague monochromatique, il vient assez simplement que :

$$f_{ex}(t) = |F_{ex}(\omega)| \cos(\omega t + \angle F_{ex}(\omega)) \quad \omega \text{ fixé} \quad (2.72)$$

### 2.5.3 Effort d'excitation pour une houle irrégulière

Dans le cas d'une houle irrégulière, l'utilisation du principe de superposition<sup>6</sup> permet d'exprimer l'effort total comme la somme des efforts de chacune des vagues. Il vient alors :

6. Applicable pour la diffraction-radiation linéarisée à l'ordre 1



$$f_{ex}(t) = \sum_k |F_{ex}(\omega_k)| \cos(\omega_k t + \angle F_{ex}(\omega_k) + \phi_k) \quad (2.73)$$

Où  $\phi_k$  est soit un déphasage aléatoire, dans le cas où seul le spectre de houle est connu, soit un déphasage déterminé par la transformée de Fourier dans le cas où l'élévation de surface libre est connue.

## 2.6 Modèles d'état classique

Le terme de convolution, qui pose problème (section 2.4.2), peut être remplacé par un modèle d'état. Pour ce faire, il faut introduire une fonction  $y$  qui correspond à l'opposé de l'effort de radiation. Le mot « classique » renvoie à la manière dont les termes de masse ajoutée et d'amortissement de radiation sont regroupés dans une seule et même fonction de retard. Ce qui permet d'écrire l'équation 2.61.

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = -\mathbf{f}'_{rad}(t) \quad (2.74)$$

Où  $\mathbf{f}'_{rad}(t)$  correspond à l'effort de radiation sans le terme  $-\mathbf{A}_\infty \ddot{\mathbf{q}}(t)$ . Nous appellerons ce terme l'effort de radiation réduit. Le modèle d'état, pour un temps continu, est de type LTI (linear time invariant system) qui permet d'écrire les équations de systèmes linéaires sous forme d'état. Le mot invariant renvoie au fait que les matrices, permettant la mise sous forme d'état, sont constantes.

### 2.6.1 Modèles d'état à un degré de liberté (SDOF)

Dans un cas simple à un seul degré de liberté ou SDOF<sup>7</sup> le modèle s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{X}(t) + \mathbf{B}_c \dot{q}(t) \\ y(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{X}(t) + D_c \dot{q}(t) \end{cases} \quad (2.75)$$

Où  $\mathbf{X}$  est le vecteur d'état du système de taille  $N$ . Le vecteur vitesse  $\dot{q}$  représente la commande de ce système d'état et  $y(t)$  en est la sortie. Ce sont tous deux des scalaires. Et les 4 matrices, constantes, du système d'état définies par :

- $\mathbf{A}_c \in \mathbb{M}_{N,N}(\mathbb{R})$  : la matrice d'état ou matrice d'entrée (state space matrix)
- $\mathbf{B}_c \in \mathbb{M}_{N,1}(\mathbb{R})$  : la matrice de commande (input/control matrix)
- $\mathbf{C}_c \in \mathbb{M}_{1,N}(\mathbb{R})$  : la matrice d'observation ou matrice de sortie (output matrix)
- $D_c \in \mathbb{M}_{1,1}(\mathbb{R})$  : la matrice d'action/transmission directe ou matrice de couplage (feedthrough matrix)

---

7. Single Degree Of Freedom

Où  $N$  est l'ordre du modèle d'état. Plus l'ordre est grand et plus l'approximation de l'effort de radiation est précise<sup>8</sup>, ce qui se fait au détriment des performances de calcul. La solution générale du système 2.75 est donnée, par

$$y(t) = C_c e^{A_c t} + C_c \int_0^t e^{A_c(t-\tau)} B_c \dot{q}(\tau) d\tau + D_c \dot{q}(t) \quad (2.76)$$

### 2.6.2 Modèles d'état à plusieurs degrés de liberté (MDOF)

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté, ou MDOF<sup>9</sup>, le formalisme est modifié. La sortie du modèle est à présent le vecteur des vitesses généralisées  $\dot{\mathbf{q}}(t)$  déjà introduit en section 2.2.3 dans le système d'équations 2.42. Notons  $n$  le nombre de degrés de liberté. L'expression de la sortie  $y_i$  est donnée par :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^n \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \dot{q}_j(\tau) d\tau = -f'_{rad_i}(t) \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; n \rrbracket^2 \quad (2.77)$$

Il y a plusieurs degrés de liberté, ce qui implique que les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement de radiation sont des matrices  $n \times n$ , et par conséquent, la fonction de retard  $K(t)$  est également une matrice  $n \times n$ . Les termes non diagonaux représentent le couplage entre les différents degrés de liberté. Le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  devient un tenseur de degré trois appartenant à l'ensemble  $\mathbb{M}_{n,n,N}(\mathbb{R})$ .

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ijk}(t) = \sum_{l=1}^N A_{c,ijkl} \mathbf{X}_{ijl}(t) + B_{c,ijk} \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l=1}^N C_{c,ijl} \mathbf{X}_{ijl}(t) + D_{c,ij} \dot{q}_j(t) \right) \end{cases} \quad (2.78)$$

Avec cette fois ci :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_c &\in \mathbb{M}_{n,n,N,N}(\mathbb{R}) && : \text{définie par l'ensemble des } (a_{ijkl}) \\ \mathbf{B}_c &\in \mathbb{M}_{n,n,N,1}(\mathbb{R}) && : \text{définie par l'ensemble des } (b_{ijk}) \\ \mathbf{C}_c &\in \mathbb{M}_{n,n,1,N}(\mathbb{R}) && : \text{définie par l'ensemble des } (c_{ijl}) \\ \mathbf{D}_c &\in \mathbb{M}_{n,n,1,1}(\mathbb{R}) && : \text{définie par l'ensemble des } (d_{ij}) \end{aligned}$$

Le formalisme tensoriel de l'équation 2.78 peut être simplifié en considérant les  $N$  sous-vecteurs  $\dot{\mathbf{X}}_{ij}$ , appartenant à  $\mathbb{R}^N$ , ce qui donne l'équation 2.79.

8. Pour un nombre  $N$  raisonnable, des problèmes peuvent apparaître si  $N$  est trop grand.

9. Multi-Degree Of Freedom

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}(t) = \mathbf{A}_{c,ij} \mathbf{X}_{ij}(t) + \mathbf{B}_{c,ij} \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^n (\mathbf{C}_{c,ij} \mathbf{X}_{ij}(t) + D_{c,ij} \dot{q}_j(t)) \end{cases} \quad (2.79)$$

Dans la suite de ce chapitre, nous utiliserons le cylindre de référence, défini dans la section 2.3.2, dont les caractéristiques sont données en annexe A.1. Il y a donc 6 degrés de liberté qui correspondent aux degrés de liberté d'un solide dans l'espace. Différentes approches vont être étudiées afin de construire le modèle d'état de l'équation 2.79. Cette équation est résolue grâce à un algorithme de Runge–Kutta 4 (RK4) [109] pour 300 pulsations entre 0.01 et 3.0  $rad \cdot s^{-1}$  par pas de 0.01  $rad \cdot s^{-1}$ . La résolution se fait pour une durée de 30 périodes ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ) avec un pas de temps de 0.05  $s$ .

### 2.6.3 Approche par les séries de Prony

Une approche très classique, très présente dans la littérature [110–114], consiste à utiliser les séries de Prony directement dans le terme de radiation afin de construire le modèle d'état. La sortie du modèle est la suivante :

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^6 \int_0^t K_{ij}(t-\tau) \dot{q}_j(\tau) d\tau = -f'_{radi}(t) \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \quad (2.80)$$

La fonction de retard est ensuite remplacée par l'interpolation faite avec les séries de Prony. Ainsi les composantes de la fonction de retard s'écrivent comme la partie réelle de la somme d'exponentielles à coefficients complexes suivante :

$$K_{ij}(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{p=1}^{N_p} \alpha_{pij} e^{\beta_{pij} t} \right) \quad (2.81)$$

Ce qui donne :

$$y_i(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{j=1}^6 \int_0^t \sum_{p=1}^{N_p} \alpha_{pij} e^{\beta_{pij}(t-\tau)} \dot{q}_j(\tau) d\tau \right) \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \quad (2.82)$$

Afin de simplifier la notation, une seule intégrale complexe sera considérée pour le développement.

$$I_{pij}(t) = \int_0^t \alpha_{pij} e^{\beta_{pij}(t-\tau)} \dot{q}_j(\tau) d\tau \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6 \rrbracket^2 \quad (2.83)$$

Il a été démontré dans [92] qu'en faisant une intégration par partie, pour une vitesse initiale  $\dot{q}_j(0) = 0$ , il était possible de relier  $I_{pij}(t)$  à sa dérivée  $\dot{I}_{pij}(t)$  par l'équation 2.84.

$$\dot{I}_{pij}(t) = \alpha_{pij}\dot{q}_j(t) + \beta_{pij}I_{pij} \quad (2.84)$$

L'algorithme utilisé pour déterminer les  $\alpha_{pij}$  et les  $\beta_{pij}$  est détaillé par Khazaei et al. [115]. La résolution numérique du problème temporel est programmée en langage Python et le modèle d'état est codé en Pyrex<sup>10</sup>, il est ensuite traduit en langage C et compilé. L'utilisation de nombres complexes en C n'est pas très intéressante en terme de performance. La notation complexe ne sera donc pas conservée. Une méthode proposée dans [92] consiste à conserver la relation complexe et à différencier les parties réelle et imaginaire, repérées par les exposants  $R$  et  $I$ . Il vient alors :

$$\dot{I}_{pij}^R(t) = \lambda_{pij}I_{pij}^R - \omega_{pij}I_{pij}^I + a_{pij}\dot{q}_j(t) \quad (2.85)$$

$$\dot{I}_{pij}^I(t) = \omega_{pij}I_{pij}^R + \lambda_{pij}I_{pij}^I + b_{pij}\dot{q}_j(t)$$

Avec,

$$\begin{aligned} I_{pij}^R &= \text{Re}(I_{pij}) & I_{pij}^I &= \text{Im}(I_{pij}) \\ a_{pij} &= \text{Re}(\alpha_{pij}) & b_{pij} &= \text{Im}(\alpha_{pij}) \\ \lambda_{pij} &= \text{Re}(\beta_{pij}) & \omega_{pij} &= \text{Im}(\beta_{pij}) \end{aligned} \quad (2.86)$$

Ce qui donne, une fois mis sous forme matricielle, le vecteur d'état et les matrices du modèle d'état présentées dans le tableau 2.1. Ce modèle sera appelé SSMP<sup>11</sup> dans la suite.

Le nombre d'exponentielles, nécessaire pour assurer une interpolation de la fonction de retard suffisamment précise, impacte directement le temps de calcul de l'algorithme de résolution temporelle du modèle d'état. Il est donc intéressant de réduire le nombre d'états  $N$  d'autant plus que, compte tenu de la formulation de l'équation 2.86, le nombre d'états  $N$  vaut deux fois le nombre d'exponentielles  $N_p$  utilisé pour l'approximation de la fonction de retard.

La figure 2.14 montre la fonction de retard, et la fonction de retard approchée par les séries de Prony, pour  $N_p = 8$  avec et sans extrapolation. Il apparaît que l'approximation est plus proche de la fonction de retard lorsque celle-ci est calculée à partir des termes de radiation extrapolés. En conséquence, l'extrapolation des termes de radiation conduit à une réduction du nombre d'états nécessaires. De plus, il apparaît que les perturbations dues à la troncature des termes de radiation (section 2.4.3) sont suivies par les séries de Prony et peuvent donc conduire à une instabilité dans la résolution temporelle du modèle d'état.

Les figures 2.15 et 2.16 montrent les RAOs obtenues avec le modèle de référence (courbe noire) et ceux obtenus avec le modèle SSMP (courbe marron). La RAO obtenue avec SSMP est proche de la RAO de référence à partir de l'ordre 10. Il y a donc une dépendance forte à l'ordre pour ce modèle. D'autre part, comme l'a montré Clément dans [116], il est préférable d'interpoler la

10. Langage très proche du langage Python

11. State Space Model Prony

$$\mathbf{X}_{ij}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{I}}_{ij}^R(t) \\ \dot{\mathbf{I}}_{ij}^I(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_{1ij} & (0) & \vdots & -\omega_{1ij} & (0) \\ & \ddots & & & \\ (0) & & \lambda_{N_p ij} & (0) & -\omega_{N_p ij} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{1ij} & (0) & \vdots & \lambda_1 & (0) \\ & & \ddots & & \\ (0) & & \omega_{N_p ij} & (0) & \lambda_{N_p} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1ij} \\ \vdots \\ a_{N_p ij} \\ \cdots \\ b_{1ij} \\ \vdots \\ b_{N_p ij} \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_{ij} = [1 \cdots 1 : 0 \cdots 0] \quad \mathbf{D}_{ij} = 0$$

TABLEAU 2.1 – Matrices du modèle d'état par les séries de Prony

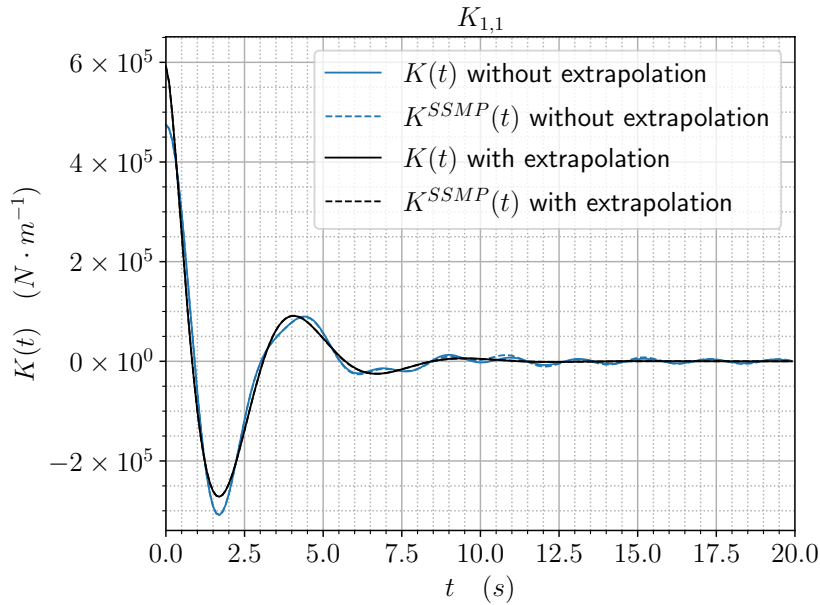


FIGURE 2.14 – Fonctions de retard pour  $K_{11}$  avec et sans extrapolation

courbe par un grand nombre d'exponentielles dans un premier temps et de ne conserver que les plus énergétiques. C'est-à-dire en les triant par  $|\alpha_{pij}|$  décroissants et en ne gardant que les

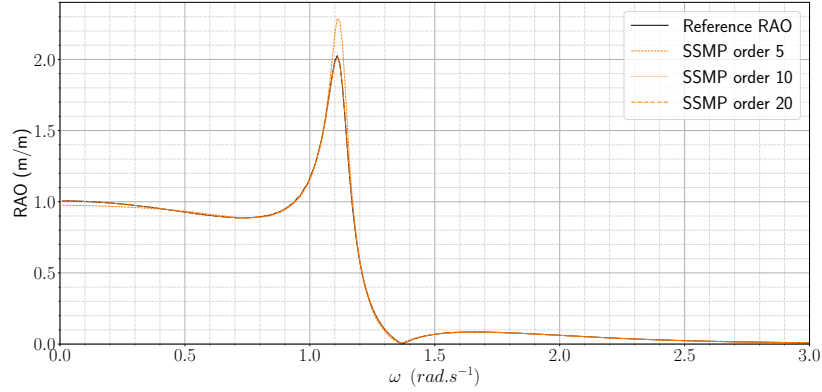


FIGURE 2.15 – Comparaison entre SSMP et la RAO de référence pour le mouvement de cavalement

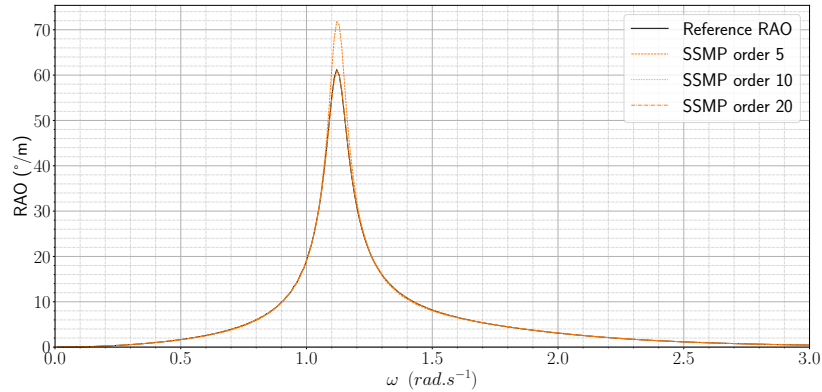


FIGURE 2.16 – Comparaison entre SSMP et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

$N_p$  premières. Le problème de cette méthode est que la qualité du résultat dépend également du nombre initial d'exponentielles, ce qui rend cette méthode difficilement automatisable. Ceci s'ajoute au fait que pour avoir un modèle d'ordre  $N$  il est nécessaire d'allouer des matrices quatre fois plus grandes, puisque  $N = 2N_p$ , en raison de la définition complexe des séries de Prony. Ainsi, les calculs sont, à ordre égal, plus longs avec cette méthode qu'avec une autre, et ce, même en implémentant le modèle pour ne pas tenir compte du grand nombre de 0 présents dans les matrices  $A_{ij}$ . Ces raisons nous ont poussés à ne pas conserver ce modèle. Ce modèle est néanmoins fonctionnel et a le mérite d'être très intuitif à mettre en place. C'est aussi grâce à cette méthode qu'est venue l'idée d'utiliser les séries de Prony pour l'extrapolation de la masse ajoutée, en section 2.4.3.

## 2.6.4 Décomposition en valeurs singulières de Hankel

L'algorithme le plus couramment utilisé pour déterminer les matrices du modèle d'état est la décomposition en valeurs singulières de Hankel <sup>12</sup> introduite par Kung [117]. Une version python de cet algorithme a été développée par le NREL et peut être trouvée dans le [module BEMIO](#). Une version MATLAB peut également être trouvée dans le [module WECSIM](#) [38]. Perez et Fossen [118] détaillent la méthode permettant de calculer les matrices du modèle d'état discret à partir de la matrice de Hankel, puis la transformation bilinéaire <sup>13</sup> permettant de calculer les matrices du modèle d'état continu en utilisant les matrices du modèle d'état discret à partir du travail d'Al-Saggaf [119].

### 2.6.4.1 Modèles d'état discret

La première étape de cette méthode est la détermination du modèle d'état discret. Ce modèle discret est la représentation markovienne d'un modèle d'état et est donné par l'équation 2.87 pour un système à un degré de liberté.

$$\begin{cases} \mathbf{X}_d(t_{k+1}) = \mathbf{A}_d \mathbf{X}_d(t_k) + \mathbf{B}_d \dot{q}(t_k) \\ y_d(t_k) = \mathbf{C}_d \mathbf{X}_d(t_k) + D_d \dot{q}(t_k) \end{cases} \quad t_k = k\Delta t \quad (2.87)$$

Où  $\mathbf{X}_d$  est le vecteur d'état discret et  $y_d$  la sortie du modèle discret. Les matrices  $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d$  et  $D_d$  sont les matrices du modèles d'état discret. Et l'instant discret  $t_k$  avec  $k \in \llbracket 0; n_t - 1 \rrbracket$  avec  $n_t$  le nombre d'éléments du vecteur temps.

Avec

$$K(t_k) = \mathbf{C}_d \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d + D_d \quad (2.88)$$

Pour déterminer les matrices matrices  $\mathbf{A}_d, \mathbf{B}_d, \mathbf{C}_d$  et  $D_d$ , il faut tout d'abord définir la matrice d'Hankel [120] pour la fonction de retard  $K$ .

$$\mathcal{H}_k(K) = \begin{bmatrix} K(t_1) & K(t_2) & K(t_3) & \dots & K(t_k) \\ K(t_2) & K(t_3) & \dots & K(t_k) & K(t_{k+1}) \\ K(t_3) & \dots & K(t_k) & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ K(t_k) & \dots & K(t_{k+1}) & \dots & K(t_{2k-1}) \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

La matrice d'Hankel peut également s'écrire à partir des matrices du modèle d'état discret :

---

12. Aussi appelée HSVD pour Hankel Singular Value Decomposition

13. Qui est un cas particulier de la transformation de Möbius et qui se retrouve parfois appelée transformation de Tustin ou approximation de Tustin

$$\mathcal{H}_k(K) = \begin{bmatrix} C_d \\ C_d A_d \\ C_d A_d^2 \\ \vdots \\ C_d A_d^{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d & A_d^2 B_d & \dots & A_d^{k-1} B_d \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Une décomposition en valeurs singulières permet ensuite de mettre cette matrice sous la forme suivante :

$$\mathcal{H}_k(K) = U \Sigma V^* \quad (2.91)$$

Les matrices  $U, \Sigma$  et  $V^*$  sont carrées et de dimension  $n_t$ . La matrice  $\Sigma$  contient les valeurs propres de la matrice  $M = \mathcal{H}^* \times \mathcal{H}$  où  $\mathcal{H}^*$  est la matrice adjointe à  $\mathcal{H}$ . Ces valeurs propres, ou valeurs singulières, sont classiquement triées par ordre décroissant. Un ordre est alors choisi pour le modèle. C'est-à-dire un nombre de valeurs singulières supposé suffisamment grand pour représenter fidèlement le comportement du système. Cet ordre sera noté  $N$ . Les  $N$  valeurs significatives se retrouvent dans une matrice  $\Sigma_1$  et les valeurs jugées négligeables se retrouvent dans une matrice  $\Sigma_2$ . Il vient alors :

$$\mathcal{H}_k(K) = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{bmatrix} [V_1^* \quad V_2^*] \quad (2.92)$$

Et d'après Kung [117], les matrices du modèle d'état discret sont données par

$$A_d = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{13} \end{bmatrix} \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$$

$$B_d = \Sigma_1^{-\frac{1}{2}} V_{11}^*$$

$$C_d = U_{11} \Sigma_1^{\frac{1}{2}}$$

$$D_d = K(t_0)$$

$$\text{Avec } U_1 = \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \\ U_{13} \end{bmatrix} \text{ et } V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{bmatrix}$$

Les matrices  $U_{ii}$  et  $V_{ii}$  sont des matrices carrées de dimension  $N$ .



### 2.6.4.2 Modèles d'état continu

Al-Saggaf [119] utilise une transformation bilinéaire faisant intervenir un nombre complexe  $\alpha$  tel que  $|\alpha| = 1$  et un nombre réel  $\beta$  qui ne doit pas être une valeur propre de la matrice d'état du modèle continu  $\mathbf{A}_c$ . Les relations entre les modèles discret et continu sont explicitées dans le tableau 2.2

$\mathbf{A}_d = \alpha (\beta \mathbf{I} + \mathbf{A}_c) (\beta \mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}$	$\mathbf{A}_c = \beta (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_d)^{-1} (\mathbf{A}_d - \alpha \mathbf{I})$
$\mathbf{B}_d = 2\sqrt{\alpha\beta} (\beta \mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c$	$\mathbf{B}_c = 2\sqrt{\alpha\beta} (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d$
$\mathbf{C}_d = 2\sqrt{\alpha\beta} \mathbf{C}_c (\beta \mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1}$	$\mathbf{C}_c = 2\sqrt{\alpha\beta} \mathbf{C}_d (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_d)^{-1}$
$\mathbf{D}_d = \mathbf{D}_c + \mathbf{C}_c (\beta \mathbf{I} - \mathbf{A}_c)^{-1} \mathbf{B}_c$	$\mathbf{D}_c = \mathbf{D}_d - \mathbf{C}_d (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{A}_d)^{-1} \mathbf{B}_d$
Modèle discret	Modèle continu

TABLEAU 2.2 – Relations entre modèle d'état continu et modèle d'état discret

### 2.6.5 Modèle d'état MDOF (SSM1)

Nous revenons à présent au cas du cylindre de référence. Il y a 6 degrés de liberté qui correspondent aux 6 degrés de liberté d'un solide dans l'espace. De même que pour la section 2.6.3, le but est de déterminer si l'extrapolation, en fréquence, des termes de radiation permet de réduire le nombre d'états nécessaires à une approximation satisfaisante de la fonction de retard. Soit  $\mathbf{K}^{SSM}$  la fonction, définie par l'équation 2.93, qui correspond à la fonction de retard approchée par le modèle d'état.

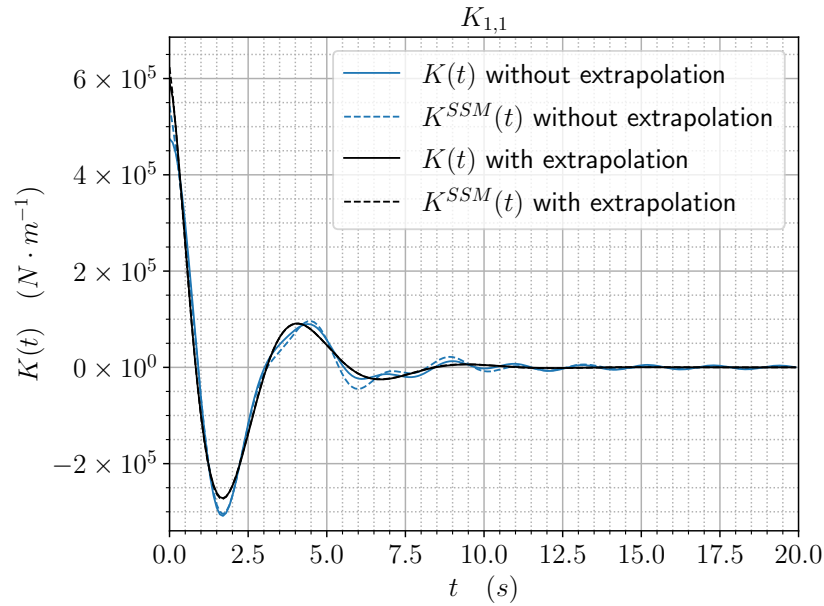
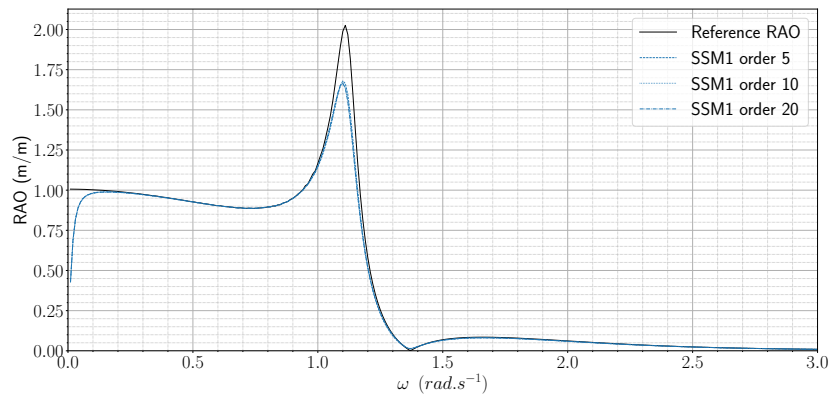
$$\mathbf{K}^{SSM}(t) = \mathbf{C}_c e^{\mathbf{A}_c t} \mathbf{B}_c \quad (2.93)$$

La figure 2.17 montre la fonction de retard, et la fonction de retard du modèle d'espace d'état, pour  $N = 4$  avec et sans extrapolation<sup>14</sup>. Il apparaît que l'approximation est plus proche de la fonction de retard lorsqu'elle est calculée à partir des termes de radiation extrapolés. En conséquence, l'extrapolation des termes de radiation conduit à une réduction du nombre d'états nécessaires.

Les figures 2.18 et 2.19 montrent les RAOs<sup>15</sup> obtenues avec le modèle de référence, défini dans la section 2.4.1, (courbe noire) et celles obtenues avec le modèle d'état de la littérature noté

14. C'est-à-dire que seules les 4 plus grandes valeurs singulières sont conservées pour décrire la fonction noyau

15. Response Amplitude Operator

FIGURE 2.17 – Fonctions de retard pour  $K_{11}$  avec et sans extrapolationFIGURE 2.18 – Comparaison entre SSM1 et la RAO de référence pour le mouvement de cavale-  
ment

SSM1 (courbe bleue). Pour ces deux calculs, la houle considérée est une houle monochromatique ayant une incidence de  $180^\circ$ . La convention suivie pour la définition de l'angle d'incidence est présentée, vue du dessus, sur la figure 2.20 tirée de la documentation d'HydroStar<sup>16</sup>. La RAO en pilonnement n'est pas représentée car elle est identique quel que soit le modèle utilisé<sup>17</sup>. Ce sera également le cas pour le reste de ce chapitre. En ce qui concerne les RAOs en cavale-ment et

16. <https://www.docenti.unina.it/webdocenti-be/allegati/materiale-didattico/576434>, consulté le 13/10/2021

17. Le cas du pilonnement sera traité plus tard dans la section 2.8

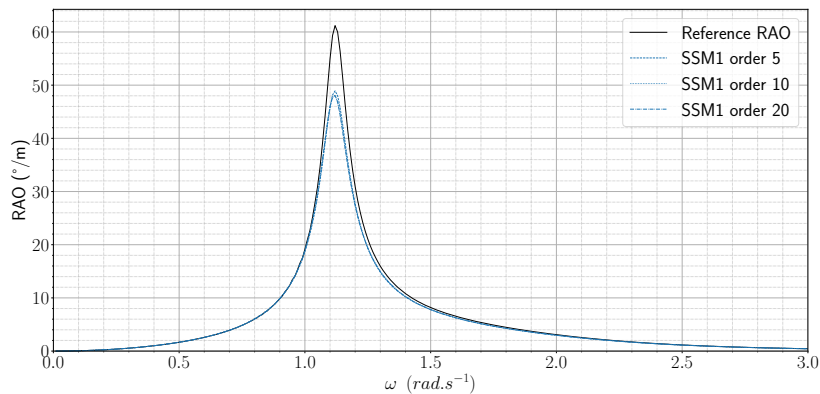


FIGURE 2.19 – Comparaison entre SSM1 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

en tangage, il y a des écarts importants entre les deux courbes. Ces écarts sont très marqués à la résonance et pour les faibles pulsations (dans le cas du cavalement). Après une investigation plus poussée et différents tests, nous avons pu relier ces écarts à une définition incomplète de la fonction de retard  $K(t)$ .

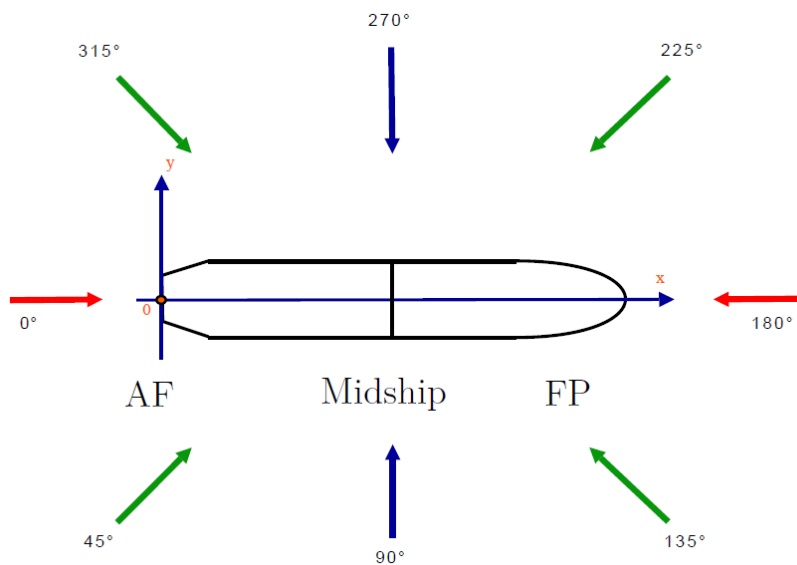


FIGURE 2.20 – Convention utilisée pour l'incidence de la houle

### 2.6.6 Modèle d'état corrigé (SSM2)

En reprenant la relation d'Ogilvie 2.64, il apparaît qu'elle n'est pas vraie en  $t = 0$ . En effet :

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega \mathbf{A}'(\omega) \sin(0) d\omega = 0 \neq \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(0) d\omega \quad (2.94)$$

Ce qui pousse à considérer une nouvelle définition de la fonction de retard [121].

$$\mathbf{K}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & t = 0 \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \neq 0 \end{cases} \quad (2.95)$$

Il convient de noter que la modification de  $\mathbf{K}(0)$  ne change en rien les intégrales faisant intervenir  $\mathbf{K}(t)$  comme par exemple l'équation 2.66. De plus, les calculs sont faits numériquement et sont donc discrets. La conservation de la première définition de la fonction de retard 2.65 donnera de meilleurs résultats lors de l'intégration de cette fonction de retard. A moins de choisir un pas de temps extrêmement faible, il est impossible de ne pas impacter la valeur de l'intégrale avec la modification de  $\mathbf{K}(0)$ . Ainsi, pour ne pas rallonger les temps de calculs, cette nouvelle définition ne sera utilisée que pour le modèle d'état.

D'après ce que a été vu en section 2.6.4, il apparaît que la matrice d'action directe  $\mathbf{D}$  est directement dépendante de  $\mathbf{K}(0)$ . Ainsi, une nouvelle matrice d'action directe est obtenue en ne modifiant que la valeur de  $\mathbf{K}(0)$  en entrée de l'algorithme.

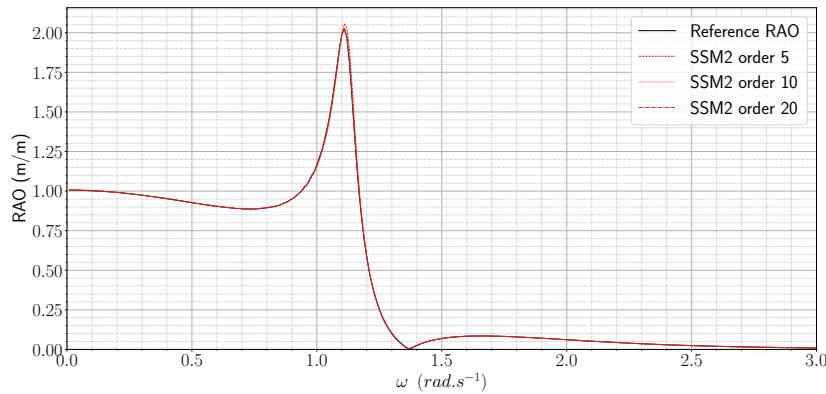


FIGURE 2.21 – Comparaison entre SSM2 et la RAO de référence pour le mouvement de cavale-ment

Les figures 2.21 et 2.22 montrent les RAOs obtenues avec le modèle de référence (courbe noire) et celles obtenues avec le modèle d'état corrigé, noté SSM2, (courbe rouge). Il apparaît que les erreurs, présentes précédemment avec SSM1, ont disparu. La correspondance est excellente avec des erreurs maximales très en dessous du %. Ces résultats confirment que les écarts obtenus avec SSM1 sont dus à une définition erronée de la fonction de retard.

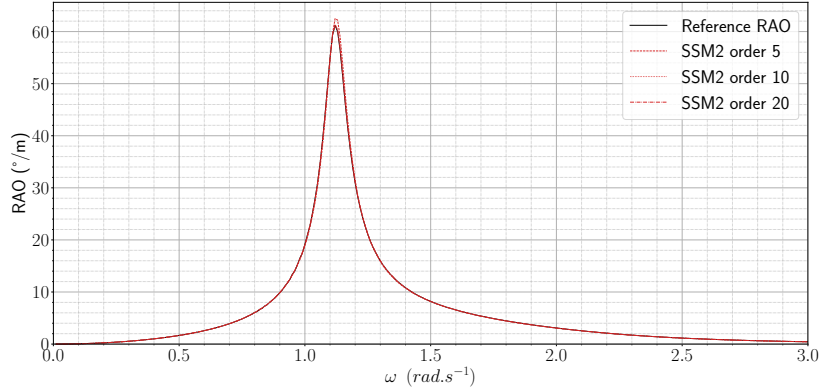


FIGURE 2.22 – Comparaison entre SSM2 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

### 2.6.7 Modèle d'état découplé (SSM3)

Le modèle d'état découplé<sup>18</sup> est très largement utilisé dans différents domaines de la physique car, dans la plupart des cas, la matrice d'action directe est nulle. Pour n'importe quelle représentation d'état de n'importe quel système, le terme d'action directe est nul à moins qu'il n'y ait un lien direct entre l'entrée et la sortie. Or, il apparaît clairement dans l'équation 2.74 que ce n'est pas le cas. De plus, si  $\mathbf{K}(t = 0^+) \neq \mathbf{0}$ , alors le terme d'action directe est nul par application du théorème de la valeur initiale dans le domaine de Laplace [118, 122]. Le terme d'action directe est donc, a priori, nul. C'est d'ailleurs le point de départ de certains auteurs comme par exemple Yu et al. [100] qui supposent d'emblée que  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ . Ils utilisent les propriétés des matrices « compagnons » [123] avec une approche du problème sous forme d'une équation différentielle. Nous continuerons à utiliser la décomposition en valeur singulière d'Hankel par souci de comparabilité avec les modèles déjà proposés. Le modèle découplé, donnée dans l'équation 2.96, est donc assez semblable à celui présenté en section 2.6.2.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}(t) = \mathbf{A}_{c,ij} \mathbf{X}_{ij}(t) + \mathbf{B}_{c,ij} \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^6 \mathbf{C}_{c,ij} \mathbf{X}_{ij}(t) \end{cases} \quad (2.96)$$

Il convient de noter que, puisque la matrice d'action directe n'existe plus, il n'y a plus à se soucier de la valeur de  $\mathbf{K}(0)$ . Ainsi, la première définition de la fonction de retard peut être conservée.

Les figures 2.23 et 2.24 comparent ce modèle découplé, pour différents ordres, au modèle de référence. La RAO obtenue avec le modèle d'état découplé ne correspond pas parfaitement à celle du modèle référence. La correspondance est assez bonne excepté pour les pics. L'erreur maximale

18. Modèle d'état sans matrice d'action directe ou matrice de couplage

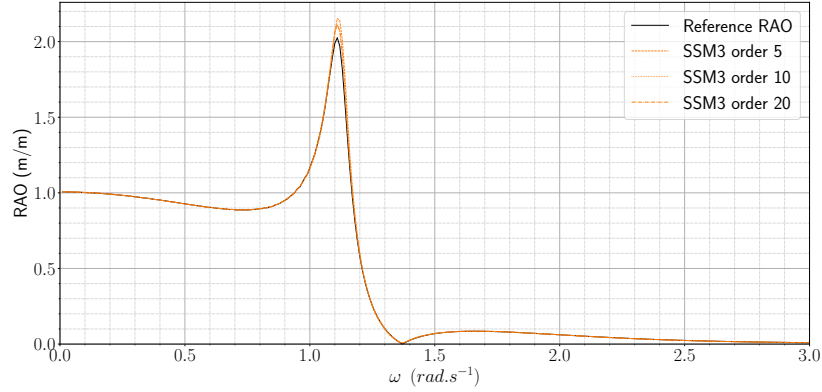


FIGURE 2.23 – Comparaison entre SSM3 et la RAO de référence pour le mouvement de cavale-  
ment

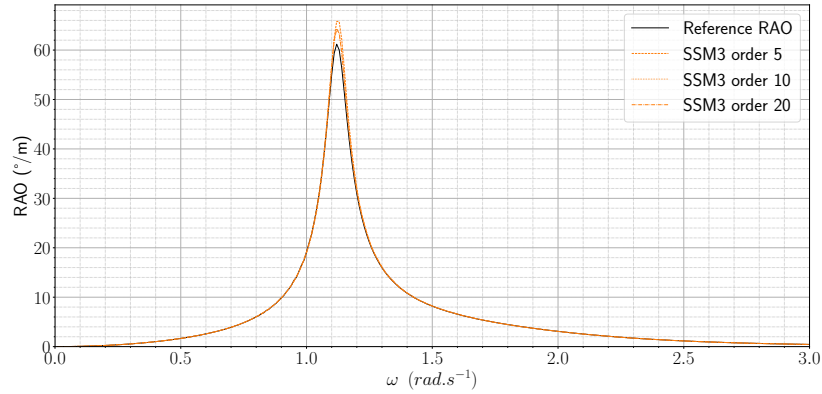


FIGURE 2.24 – Comparaison entre SSM3 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

pour le cavale-ment est de 5 % à son pic ( $1.11 \text{ rads}^{-1}$ ) pour l'ordre 20. L'erreur maximale pour le tangage est également de 5 % à son pic ( $1.12 \text{ rads}^{-1}$ ) pour l'ordre 20.

Dans cette section, deux modèles d'état différents sont testés en considérant ou non la matrice d'action directe  $D^c$ . Deux définitions de la fonction de retard ont également été utilisées. Il apparaît que le meilleur modèle est le modèle SSM2 (2.6.6) qui considère la matrice d'action directe avec la définition améliorée de la fonction de retard (équation 2.95).

### 2.6.8 Terme d'action directe $D^c$

Comme dit dans la section 2.6.7, il n'y a aucune raison d'avoir un terme de couplage puisqu'il n'y a pas de dépendance algébrique directe entre  $\mathbf{y}(t)$  et  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ . Cependant, la section 2.6.6 a montré que conserver la matrice d'action directe donne de meilleurs résultats. Cette section se

concentre donc sur cette matrice d'action directe afin de comprendre ce résultat pour le moins paradoxal.

Le modèle classique construit par HSVD donne de meilleurs résultats en gardant la matrice de couplage  $\mathbf{D}^c$  et en tenant compte de la définition améliorée de la fonction noyau (2.95). Un aspect, qui n'a pas encore été pris en compte, est la taille du vecteur temporel qui est également la taille de la fonction noyau discrète utilisée par l'algorithme HSVD. Soit  $n_t$  la taille du vecteur temps moins 1. Jusqu'à présent, les valeurs du vecteur temporel allaient de 0 à 100 secondes avec  $n_t = 1000$  soit un pas de temps de  $10^{-1}$  s.

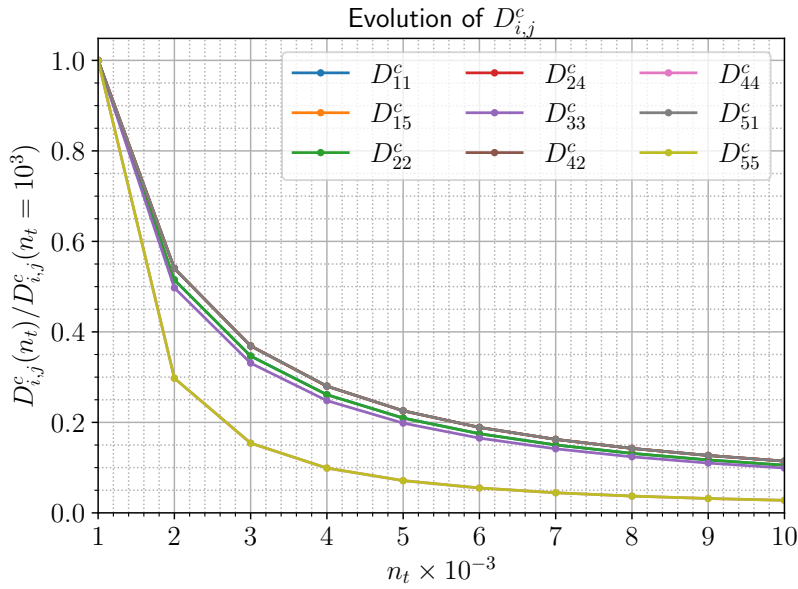
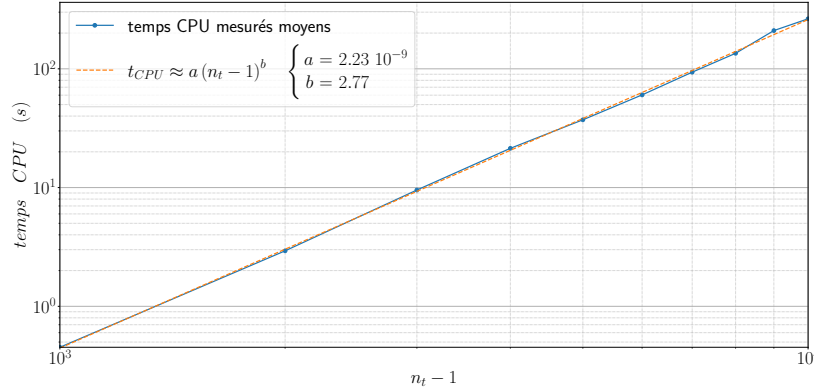


FIGURE 2.25 – Evolution of  $\mathbf{D}^c$  when increasing  $n_t$

La figure 2.25 montre l'évolution des valeurs non nulles de  $\mathbf{D}^c$  lorsque  $n_t$  est augmenté. Il apparaît que ces valeurs tendent vers zéro lorsque  $n_t$  augmente. De nouvelles simulations, avec de nouvelles matrices d'état, pour chaque valeur de  $n_t$ , pour SSM1 et SSM3, donne des RAOs qui tendent vers la RAO de référence lorsque  $n_t$  augmente. La matrice d'action directe est donc un artefact numérique induit par un nombre insuffisant de points dans le vecteur temporel. De plus, la précision des autres matrices du modèle d'état,  $\mathbf{A}^c, \mathbf{B}^c$  et  $\mathbf{C}^c$ , est améliorée par l'augmentation de  $n_t$ .

Cependant, comme le montre la figure 2.26, l'augmentation du nombre de points dans le vecteur temps augmente fortement le temps de calcul de l'algorithme d'HSVD. Le temps de calcul est estimé en calculant la moyenne le temps de 20 calculs pour plusieurs valeurs de  $n_t$ . Le temps de calcul est évalué par le module `timeit` de la bibliothèque native de Python. Il apparaît que

FIGURE 2.26 – Temps de calcul pour l'algorithme d'HSVD appliqué à  $K_{11}$ 

l'évolution de temps CPU suit une loi de puissance représentée sur la figure 2.26. Ainsi, même s'il n'a pas de sens physique, le terme de couplage doit être conservé pour augmenter la précision tout en conservant un temps de calcul raisonnable pour l'algorithme d'HSVD. Il est tout de même pertinent de mentionner le travail de Xu et Qiao [124], portant sur la HSVD, qui a permis de trouver un algorithme plus rapide notamment pour les matrices de grande taille. Toutefois, l'implémentation de cet algorithme<sup>19</sup> et l'interfaçage avec python serait certainement intéressant mais malheureusement trop chronophage.

### 2.6.9 Définition complète de la fonction de retard

La section 2.6.6 montre que l'équation 2.64 n'est pas vraie  $\forall t \in \mathbb{R}$ . En effet, cette relation doit être adaptée en fonction du signe de  $t$ . Le cas pour  $t = 0$  a été traité dans l'équation 2.94. En utilisant les propriétés des fonctions sinus et cosinus, l'équation 2.94 peut être exprimée pour n'importe quelle valeur de  $t$  de  $\mathbb{R}$ . La relation correspondante est donnée dans l'équation 2.97.

$$\frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \omega \mathbf{A}'(\omega) \sin(\omega t) d\omega = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ \mathbf{0} & t = 0 \\ \frac{-1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases} \quad (2.97)$$

En injectant l'équation 2.97 dans l'équation 2.65, nous obtenons une définition complète de la fonction de retard explicitée dans l'équation 2.98.

19. Implémentation avec un langage bas niveau en langage C, C++ ou Fortran



$$\mathbf{K}(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & t = 0 \\ \mathbf{0} & \forall t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases} \quad (2.98)$$

L'équation 2.98 peut être exprimée sous une forme plus compacte, l'équation 2.99, qui souligne la discontinuité de la fonction de retard en  $t = 0$ . Avec  $sgn$  la fonction signe. Cette définition complète de la fonction de retard est la contribution majeure de ce chapitre. D'une part, elle démontre le caractère causal de la fonction de retard et, d'autre part, elle souligne le caractère discontinu de cette fonction en  $t = 0$  sachant que la valeur  $\mathbf{K}(t = 0)$  est importante pour le calcul des matrices du modèle d'état par HSVD.

$$\boxed{\mathbf{K}(t) = \frac{1 + sgn(t)}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad \forall t \in \mathbb{R}} \quad (2.99)$$

### 2.6.10 Causalité de la fonction $K$

L'équation 2.99 souligne également la causalité de l'effort de radiation. En effet, puisque  $K(t < 0) = 0$ , la borne supérieure de l'intégrale, dans le produit de convolution, se réduit à  $t$ .

$$\mathbf{f}'_{rad}(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = - \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (2.100)$$

De plus, si le système est initialement au repos, c'est à dire que  $\dot{\mathbf{q}}(t \leq 0) = \mathbf{0}$ , alors la borne inférieure de l'intégrale est réduite à 0.

$$\mathbf{f}'_{rad}(t) = - \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = - \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (2.101)$$

Les sections 2.6.5 et 2.6.6 ont montré que la matrice d'action directe<sup>20</sup> n'est pertinente, en terme de précision, que si la discontinuité de la fonction de retard en  $t = 0$  est considérée. Ne pas prendre en compte cette discontinuité conduit à des écarts importants entre la RAO obtenue, dans la section dans 2.6.5, et la RAO de référence. En corrigeant  $\mathbf{K}(t) = \mathbf{0}$ , dans 2.6.6, ces écarts disparaissent. Cependant ce terme de couplage n'a pas de sens physique. C'est pourquoi il a été supprimé dans la section 2.6.7. La suppression de ce terme induit une perte de précision. Pour y remédier, la discrétisation temporelle doit être affinée ce qui implique une augmentation significative du temps de calcul pour l'algorithme d'HSVD. Et puisque le meilleur modèle (SSM2) est celui considérant la discontinuité de la fonction de retard, il est légitime de supposer que cette discontinuité est responsable de la perte de précision observée avec le modèle

---

20. Ou matrice de couplage

SSM3. Afin d'en être sûr, une nouvelle approche, considérant des fonctions continues, est étudiée dans la section suivante.

## 2.7 Autre approche par des fonctions de retard continues

Cette section présente d'abord la formulation du modèle d'état en utilisant une formulation originale de la fonction de retard divisée en deux sous-fonctions de retard. Cette formulation est validée puis reliée à la formulation classique afin de mieux comprendre le terme de couplage. Dans cette section, une autre approche sera envisagée afin d'éviter la discontinuité qui apparaît avec l'approche classique.

### 2.7.1 Domaine temporel

Le point de départ est toujours le même, i.e. l'équation mécanique dans le domaine fréquentiel 2.55. La nouveauté consiste à ne pas rassembler les termes de masse ajoutée et d'amortissement, ce qui conduit à l'équation 2.102.

$$(M + A_\infty) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}^a(t - \tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_h \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{ex}(t) \quad (2.102)$$

Avec  $K^a$  la sous-fonction de retard continue pour la masse ajoutée explicitée dans l'équation 2.103.

$$\mathbf{K}^a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}'(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{A}'(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.103)$$

Et  $K^b$  la sous-fonction de retard continue pour l'amortissement d'onde explicitée dans l'équation 2.104.

$$\mathbf{K}^b(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.104)$$

Notons que  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  sont toutes deux paires.

$$\mathbf{K}^a(-t) = \mathbf{K}^a(t) \quad \mathbf{K}^b(-t) = \mathbf{K}^b(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.105)$$

Ainsi l'étude de ces sous-fonctions sur  $\mathbb{R}_+$  sera suffisante pour conclure sur leurs comportements sur  $\mathbb{R}$ .

### 2.7.2 Expression de $K^a$ à partir de $K^b$

Le calcul de  $K^a$  à partir de la masse ajoutée n'est pas pratique. C'est d'ailleurs cela qui a motivé l'utilisation de la relation d'Ogilvie dans le section 2.6. À l'instar de Wehausen [93], qui utilise les propriétés du produit de convolution et dérive  $K$ , nous dérivons  $K^a$ . Après avoir vérifié les différentes hypothèses du théorème de dérivation sous intégrale, il est possible d'obtenir l'expression suivante :

$$\dot{K}^a(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} -\omega \mathbf{A}'(\omega) \sin(\omega t) d\omega, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.106)$$

En utilisant la relation d'Ogilvie de l'équation 2.97, il vient :

$$\dot{K}^a(t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ \mathbf{0} & t = 0 \\ -\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \mathbf{B}(\omega) \cos(\omega t) d\omega & \forall t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases} \quad (2.107)$$

Autrement dit,

$$\dot{K}^a(t) = \begin{cases} \mathbf{K}^b(t) & \forall t \in \mathbb{R}_+^* \\ \mathbf{0} & t = 0 \\ -\mathbf{K}^b(t) & \forall t \in \mathbb{R}_-^* \end{cases} \quad (2.108)$$

Sachant que les sous-fonctions sont symétriques, il suffit de s'intéresser à  $\mathbb{R}_+$ . Ainsi :

$$\mathbf{K}^a(t) = \int_0^t \dot{K}^a(\tau) d\tau + \mathbf{K}^a(0), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.109)$$

Avec,

$$\mathbf{K}^a(0) = \mathbf{0} \quad (2.110)$$

La démonstration de l'équation 2.110 est donnée en annexe A.2. Afin d'alléger la notation, l'intégrale suivante est introduite :

$$\mathbf{I}^a(t) = \int_0^t \mathbf{K}^b(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.111)$$

Puisque  $\mathbf{I}^a(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ , il est possible de prolonger 2.107 par continuité. Il vient alors :

$$\mathbf{K}^a(t) = \int_0^t \mathbf{K}^b(\tau) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.112)$$

Il a été montré dans la section 2.6.3 qu'il est possible d'approcher la fonction de retard  $K$ , définie dans l'équation 2.65, par des séries de Prony. Il est donc également possible de le faire

pour  $\mathbf{K}^b$ .

$$I_{ij}^a(t) = \int_0^t \operatorname{Re} \left( \sum_{p=1}^N \alpha_{pij} e^{\beta_{pij}\tau} \right) d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6n \rrbracket^2 \quad (2.113)$$

Notons que toutes les sous-fonctions de retard  $\mathbf{K}^b$  oscillent autour de zéro. Cela implique que la composante continue de ces sous-fonctions est nulle. Par conséquent, les  $\beta_{pij}$  ne peuvent pas être nuls. Il est donc possible de diviser par  $\beta_{pij}$ .

$$I_{ij}^a(t) = \operatorname{Re} \left( \sum_{p=1}^N \frac{\alpha_{pij}}{\beta_{pij}} \left( e^{\beta_{pij}t} - 1 \right) \right), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (2.114)$$

Dans la pratique, l'utilisation des séries de Prony pour intégrer des expressions contenant  $\mathbf{K}^b$  donne de bien meilleurs résultats que l'intégration numérique pour un pas de temps raisonnable (en l'occurrence un pas de temps de  $10^{-2}$  s). Il faudrait diminuer fortement le pas de temps, et donc augmenter le temps de calcul, pour obtenir des résultats satisfaisants avec une intégration numérique de Simpson (l'intégration par la méthode des trapèzes étant trop imprécise). L'utilisation des séries de Prony permet donc d'obtenir les deux sous-fonctions de retard rapidement et précisément.

### 2.7.3 Causalité des fonctions $K^a$ et $K^b$

Comme l'a montré la section 2.6.10, il n'est possible de réduire la borne supérieure du produit de convolution que si la fonction à convoluer est causale. Or, il apparaît très clairement, en raison de la symétrie des sous-fonctions  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$ , qu'il n'est pas immédiatement possible de le faire dans l'équation 2.102.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'_{rad}(t) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}^a(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\mathbf{K}}^a(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\ &= - \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \dot{\mathbf{K}}^a(t - \tau) + \mathbf{K}^b(t - \tau) \right) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.115)$$

Les sous-fonctions  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  sont donc non-causales. Or, d'après les équations 2.104 et 2.107,

$$\dot{\mathbf{K}}^a(t) + \mathbf{K}^b(t) = \mathbf{K}(t) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.116)$$

Ainsi, l'équation 2.115 peut être développée pour obtenir l'équation 2.117.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{f}'_{rad}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \dot{\mathbf{K}}^a(t-\tau) + \mathbf{K}^b(t-\tau) \right) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t \mathbf{K}(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \tag{2.117} \\
 &= \int_{-\infty}^t \left( \dot{\mathbf{K}}^a(t-\tau) + \mathbf{K}^b(t-\tau) \right) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^t \mathbf{K}^a(t-\tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \mathbf{K}^b(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau
 \end{aligned}$$

De plus, si le système est initialement au repos, l'équation 2.117 devient l'équation 2.118.

$$\mathbf{f}'_{rad}(t) = - \int_0^t \mathbf{K}^a(t-\tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{K}^b(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \tag{2.118}$$

Il est donc possible de réduire les bornes supérieures des produits de convolution en dépit du fait que  $\mathbf{K}^a(t < 0) \neq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{K}^b(t < 0) \neq \mathbf{0}$ .

## 2.7.4 Modèle d'état (SSM4)

Puisque l'effort de radiation réduit<sup>21</sup> est séparé en deux parties, il faut écrire deux modèles d'état. Le premier est pour l'effort de radiation réduit de la masse ajoutée et le second est pour l'effort de radiation de l'amortissement de radiation.

$$\mathbf{f}'_{rad}(t) = - \int_0^t \mathbf{K}^a(t-\tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{K}^b(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \tag{2.119}$$

La fonction  $\mathbf{y}$  est donc décomposée en deux sous-fonctions  $\mathbf{y}^a$  et  $\mathbf{y}^b$  qui auront, chacune, un modèle d'état qui leur sera associé.

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\int_0^t \mathbf{K}^a(t-\tau) \ddot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau}_{\mathbf{y}^a(t)} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{K}^b(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau}_{\mathbf{y}^b(t)} \tag{2.120}$$

Dans le cas du cylindre de référence à 6 degrés de liberté, les modèles d'état sont donnés par les équations 2.121 et 2.122.

$$\text{Pour la masse ajoutée : } \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}^a(t) = \mathbf{A}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) + \mathbf{B}_{ij}^a \ddot{q}_j(t) \\ y_i^a(t) = \sum_{j=1}^6 \left( \mathbf{C}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) + \mathbf{D}_{ij}^a \ddot{q}_j(t) \right) \end{cases} \tag{2.121}$$

---

21. Il s'agit, pour rappel, de l'effort de radiation privé du terme  $-A_\infty \ddot{q}$

$$\text{Pour l'amortissement : } \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}^b(t) = \mathbf{A}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) + \mathbf{B}_{ij}^b \dot{q}_j(t) \\ y_i^b(t) = \sum_{j=1}^6 \left( \mathbf{C}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) + D_{ij}^b \dot{q}_j(t) \right) \end{cases} \quad (2.122)$$

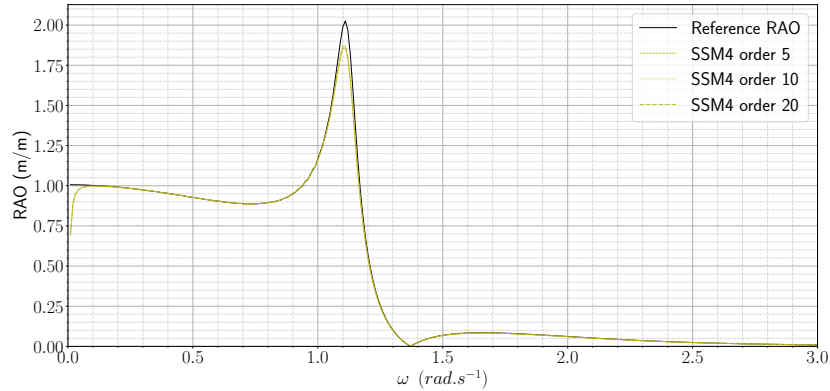


FIGURE 2.27 – Comparaison entre SSM4 et la RAO de référence pour le mouvement de cavale-  
ment

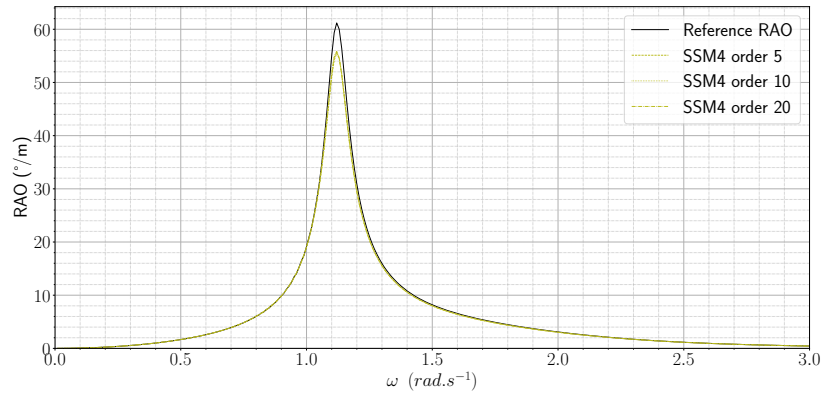


FIGURE 2.28 – Comparaison entre SSM4 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

Les figures 2.27 et 2.28 montrent les RAOs obtenues avec le modèle de référence (courbe noire) et celles obtenues avec le modèle d'état corrigé, noté SSM4, (courbe jaune). Il apparaît un écart entre la RAO de SSM4 et la RAO de référence. La forme de cet écart ressemble beaucoup à celle observée pour les figures 2.18 et 2.19. Il apparaît que l'écart obtenu ici est la moitié de l'écart obtenu avec SSM1. Le fait que les écarts aient la même forme et qu'ils soient localisés aux mêmes endroits, laisse à penser qu'il s'agit encore d'un problème de matrice d'action directe. En l'occurrence les matrices  $D^a$  et  $D^b$ .

### 2.7.5 Modèle d'état découplé (SSM5)

Nous suspectons donc que les matrices d'action directe soient à l'origine de l'erreur observée pour SSM4. Cependant, l'origine de cette erreur ne peut pas être la même que dans la section 2.6.5. En effet, nous avons soigneusement développé nos calculs en tenant compte de la correction apportée par l'équation 2.94. Nous en venons donc à repenser au modèle d'état découplé ne faisant pas intervenir de terme d'action directe. La suppression de  $D^a$  et  $D^b$  donne les modèles d'état décrits dans les équations 2.123 et 2.124.

$$\text{Pour la masse ajoutée : } \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}^a(t) = \mathbf{A}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) + \mathbf{B}_{ij}^a \ddot{q}_j(t) \\ y_i^a(t) = \sum_{j=1}^6 \left( \mathbf{C}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) \right) \end{cases} \quad (2.123)$$

$$\text{Pour l'amortissement : } \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_{ij}^b(t) = \mathbf{A}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) + \mathbf{B}_{ij}^b \dot{q}_j(t) \\ y_i^b(t) = \sum_{j=1}^6 \left( \mathbf{C}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) \right) \end{cases} \quad (2.124)$$

Les définitions de  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  restent inchangées.

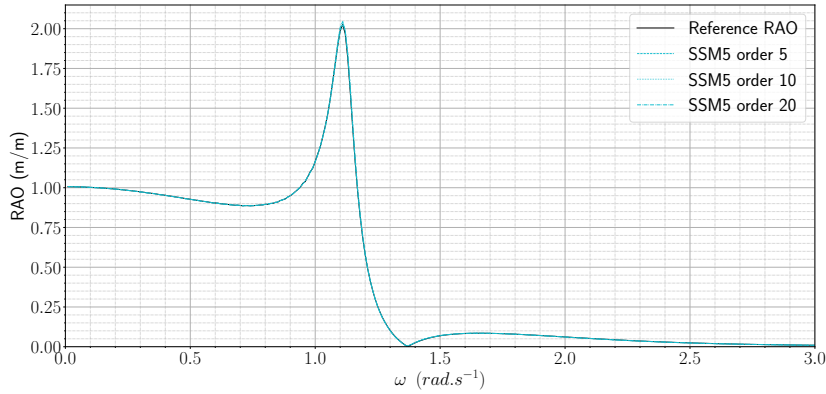


FIGURE 2.29 – Comparaison entre SSM5 et la RAO de référence pour le mouvement de cavale-ment

Les figures 2.29 et 2.30 montrent les RAOs obtenues avec le modèle de référence (courbe noire) et celles obtenues avec le modèle d'état découplé, noté SSM5, (courbe cyan). De même que pour SSM2 (figures 2.21 et 2.22), les RAOs obtenues correspondent aux RAOs de référence.

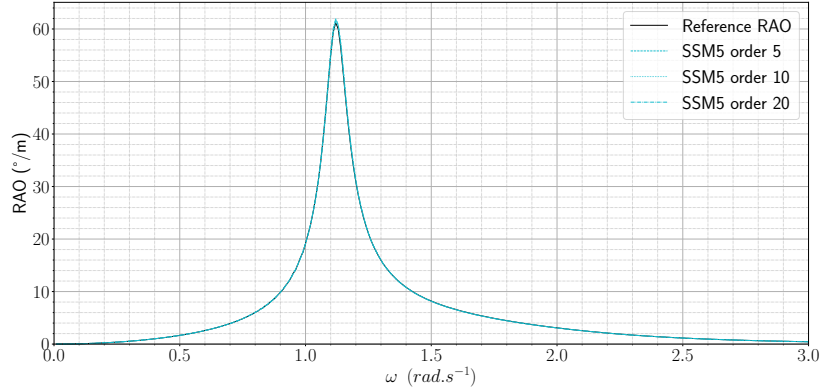
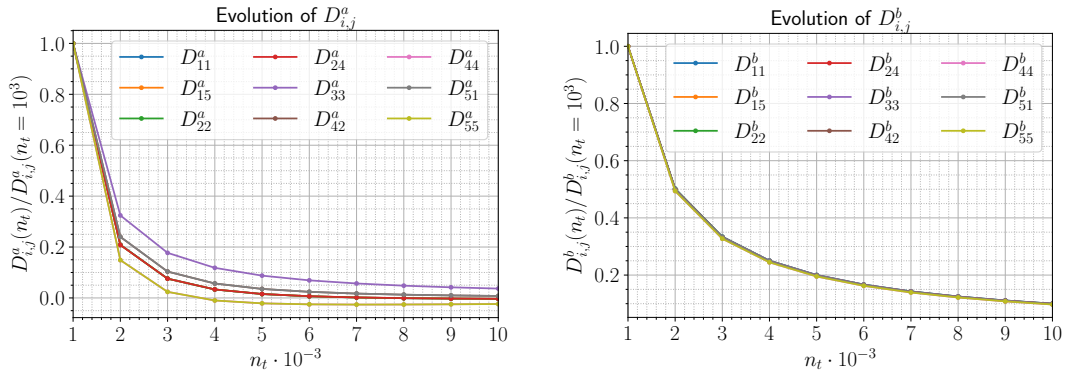


FIGURE 2.30 – Comparaison entre SSM5 et la RAO de référence pour le mouvement de tangage

### 2.7.6 Termes d'action directe $D^a$ et $D^b$

Le modèle découplé, développé en section 2.7.5, donne de meilleurs résultats en supprimant les termes  $D^a$  et  $D^b$ . Le modèle de la section 2.7.4 présente, quant à lui, des écarts avec la RAO de référence qui rappellent fortement ceux de la section 2.6.5. Nous suspectons donc que les termes d'action directe soient la cause de ces écarts.


 (a) Evolution of  $D^a$  when increasing  $n_t$ 

 (b) Evolution of  $D^b$  when increasing  $n_t$ 

 FIGURE 2.31 – Évolution de  $D^a$  et de  $D^b$  en fonction de  $n_t$ 

Les figures 2.31a et 2.31b montrent l'évolution des valeurs non-nulles de  $D^a$  et de  $D^b$  lorsque  $n_t$  est augmenté. Il apparaît que ces valeurs tendent vers zéro lorsque  $n_t$  augmente. Des simulations numériques, réalisées avec les nouvelles matrices du modèle d'état pour SSM4, donnent une réponse qui tend vers la RAO de référence à mesure que  $n_t$  augmente. Les matrices d'action directe sont donc des artefacts numériques, induits par un nombre insuffisant de points dans le vecteur temps, de même que pour la section 2.6.8. Cependant, contrairement au modèle classique, la pré-



cision des autres matrices d'état n'est pas significativement améliorée puisque le modèle SSM5 est déjà proche de la RAO de référence. Il semble donc que le résultat avancé en section 2.6.7, quand à la nullité du terme de couplage lorsque  $\mathbf{K}(t = 0^+) \neq \mathbf{0}$ , soit applicable numériquement (sans augmentation importante de  $n_t$ ) pour les fonctions  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  qui, contrairement à  $\mathbf{K}$ , sont continues.

La taille du modèle obtenu est deux fois plus grande que la taille du modèle classique. En conséquence, les temps de calcul des simulations temporelles sont plus importants avec cette approche qu'avec le modèle classique. Dans la section suivante, nous allons tenter de réduire la taille de ce modèle.

### 2.7.7 Réduction du modèle

Le temps de calcul, pour les simulations dans le domaine temporel, est directement dépendant de l'ordre du modèle. Soit  $N$  l'ordre du modèle classique, l'autre approche de cette section conduit à deux sous-modèles d'ordre  $N$ , soit un modèle d'ordre  $2N$  au total. Pour réduire la taille de ce modèle, les relations entre  $\mathbf{K}^a$  et  $\mathbf{K}^b$  sont utilisées. L'effort de radiation peut être exprimé, selon 2.118, comme suit :

$$\mathbf{f}'_{rad}(t) = - \int_0^t \dot{\mathbf{K}}^a(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau - \int_0^t \mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = -\mathbf{y}(t) \quad (2.125)$$

Où  $\mathbf{y}(t)$  est la sortie du modèle. La fonction  $\mathbf{g}$  est introduite telle que :

$$\mathbf{g} : t \mapsto \begin{cases} -\mathbf{K}^b(t) & , \quad t > 0 \\ \mathbf{0} & , \quad t = 0 \end{cases} \quad (2.126)$$

Il vient alors,

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t (\mathbf{K}^b(t - \tau) + \mathbf{g}(t - \tau)) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \int_0^t \mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (2.127)$$

Et finalement,

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\int_0^t 2\mathbf{K}^b(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau}_{\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{C}_c \mathbf{X}(t)} + \underbrace{\int_0^t \mathbf{g}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau}_{\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{D}_c \dot{\mathbf{q}}(t)} \quad (2.128)$$

L'équation 2.128 renvoie directement au modèle corrigé de la section 2.6.6. Il apparaît que le terme  $\mathbf{y}_2(t)$  disparaît si une expression analytique de la fonction de retard est considérée. C'est le cas par exemple de la méthode utilisant les séries de Prony (section 2.6.3), où la fonction de retard est exprimée comme une somme de fonctions analytiques qui ne tiennent pas compte de la discontinuité en  $t = 0$ . Mais, puisque l'aire sous un point est nulle,  $\mathbf{y}_2(t) = \mathbf{0}$ . Toutefois, ce n'est pas le cas pour les méthodes utilisant une fonction de retard discrète comme c'est le cas pour

la méthode HSVD. En effet, le terme  $\mathbf{y}_2(t)$  demeure et dépend de la discrétisation temporelle. C'est pourquoi une diminution des termes non-nuls de la matrice d'action directe est observée sur la figure 2.25 lorsque le pas de temps diminue.

## 2.8 Cas particulier du pilonnement

Cette section s'intéresse au mouvement de pilonnement du cylindre de référence qui n'est pas abordé dans les sections précédentes en raison de son comportement particulier. Le pilonnement n'a pas été présenté car il ne dépend pas du modèle d'état utilisé. La correspondance entre la RAO de référence et les modèles SSM1 à SSM5 est visible sur la figure 2.32. Il apparaît que cette correspondance est très bonne quel que soit le modèle utilisé.

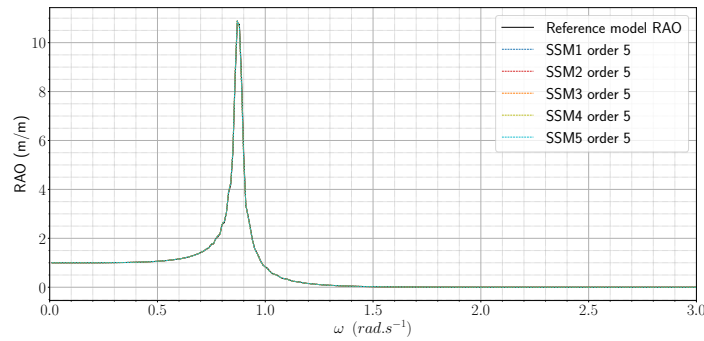
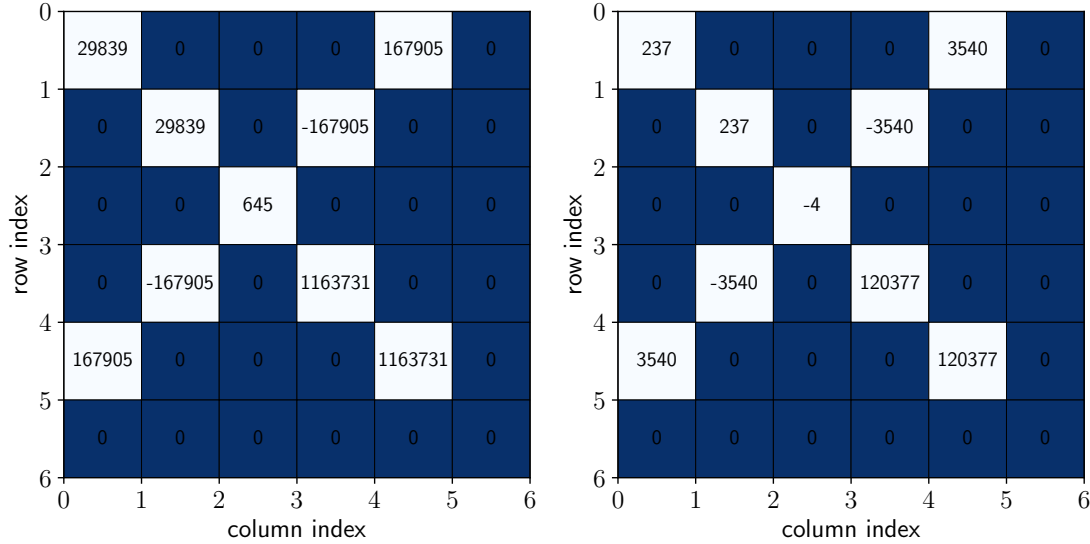


FIGURE 2.32 – RAO en pilonnement du cylindre

La figure 2.33 montre une diminution significative des termes non-nuls de la matrice d'action directe lors du changement de la définition de la fonction retard qui passe de l'équation 2.65 à l'équation 2.95. Ces termes sont déjà relativement faibles avec la première définition. Ainsi, la diminution de ces termes n'a pas d'impact significatif sur la réponse en pilonnement. Cela n'est vrai, a priori, que pour la géométrie étudiée.

## 2.9 Conclusion

Ce chapitre a permis de poser les bases de la modélisation du comportement d'un solide dans la houle. Dans un premier temps, nous avons introduit les conditions aux limites qui, en l'absence de corps solide, conduisent au modèle de houle. L'ajout d'un corps solide, ou de plusieurs, permet ensuite d'introduire l'interaction fluide-structure pour un fluide parfait en écoulement potentiel. Une fois cette théorie linéarisée, la théorie de la diffraction-radiation a été présentée puisqu'elle constitue le modèle qui a été retenu dans le chapitre 1 et qui sera utilisé par la suite. Nous avons ensuite abordé brièvement le rappel hydrostatique, en ne conservant que sa forme linéa-



(a)  $D^c$  pour SSM1 avec  $N = 5$  et  $n_t = 1000$     (b)  $D^c$  pour SSM2 avec  $N = 5$  et  $n_t = 1000$

FIGURE 2.33 – Comparaison du terme d'action directe pour SSM1 et SSM2

risée, et l'effort d'excitation de la houle incidente. Ces efforts sont donc d'ordre 1. Les efforts visqueux ne sont, quant à eux, pas pris en compte. Notons que plus l'échelle est petite, et plus la contribution des effort visqueux à l'amortissement est importante [125]. Ainsi, compte tenu de l'échelle bassin, à laquelle ces travaux sont attachés, il sera impératif de les considérer. Ces efforts, non linéaires, seront présentés plus tard dans le manuscrit car il n'était pas pertinent de les aborder d'emblée. En effet, il est apparu plus judicieux de commencer par un cas simple linéaire avec un seul solide. C'est d'ailleurs cette simplicité qui a permis de mettre en exergue l'omission couramment faite dans la littérature en ce qui concerne la fonction de retard dans la section 2.6.6. Un système plus complexe n'aurait certainement pas permis de déterminer une définition complète de la fonction de retard aussi facilement.

Après avoir introduit les efforts mis en jeu dans la dynamique d'un solide dans la houle, nous nous sommes intéressés à la résolution numérique du problème. Cela a permis de mettre en lumière deux modèles satisfaisants. Premièrement, pour l'approche classique, nous proposons le modèle d'état construit à partir de la nouvelle définition de la fonction de retard établie dans ce chapitre, conservant le terme d'action directe afin de limiter le temps de calcul de la HSVD, et

nommé SSM2 (cf section 2.6.6). Et enfin, nous proposons un modèle plus original, composé de deux sous-modèles d'état en raison de la distinction faite entre le terme de l'effort de radiation en phase avec l'accélération et celui en phase avec la vitesse. Cette distinction est faite afin de travailler avec des sous-fonctions de retard continues. Le modèle, nommé SSM5 (cf section 2.7.5), ainsi obtenu ne comporte pas de terme d'action directe. Le modèle d'état basé sur l'interpolation de la fonction de retard par les séries de Prony a également été utile. Même s'il s'est avéré moins performant, il a permis de réduire les temps de calcul de l'extrapolation de la masse ajoutée, et la sous-fonction  $\mathbf{K}^a$  qui lui est associée, et d'augmenter la précision de façon significative. De plus, il a été démontré que la présence, ou non, d'une matrice d'action directe s'explique par des considérations purement numériques puisque cette dernière n'a aucune justification physique. En effet, pour le modèle utilisant les séries de Prony, il n'y a pas de matrice d'action directe et pourtant les résultats sont corrects alors que pour le modèle linéaire, utilisant le HSVD, cette matrice est indispensable à l'obtention de résultats satisfaisants. Cette différence s'explique par le caractère discret de la HSVD opposé au caractère continu des séries de Prony comme expliqué dans la section 2.7.7.

Le cas étudié dans ce chapitre ne traite, certes, que d'un système mono-corps. Néanmoins, il s'agit d'un cas à plusieurs degrés de liberté qui se transpose très bien à un système multicorps. Il reste à traiter la dynamique du solide pour les systèmes multicorps. Ce qui fera l'objet du prochain chapitre.



# DYNAMIQUE DES SYSTÈMES MULTICORPS

---

## Sommaire du chapitre

---

<b>3.1 Formalisme mathématique</b> . . . . .	<b>95</b>
3.1.1 Choix du centre de gravité comme référence . . . . .	95
3.1.2 Choix d'un autre point référence . . . . .	97
<b>3.2 Liaisons mécaniques</b> . . . . .	<b>99</b>
3.2.1 Contraintes holonomes . . . . .	99
3.2.2 Contraintes non-holonomes . . . . .	101
<b>3.3 Cas simple d'application</b> . . . . .	<b>102</b>
3.3.1 Utilisation de contraintes holonomes . . . . .	103
3.3.2 Utilisation de contraintes non-holonomes . . . . .	104
3.3.3 Utilisation de la deuxième loi de Newton . . . . .	105
3.3.4 Comparaison des trois approches . . . . .	105
<b>3.4 Liaisons mécaniques en 3D</b> . . . . .	<b>106</b>
3.4.1 Catégorisation des liaisons mécaniques . . . . .	106
3.4.2 Première catégorie . . . . .	107
3.4.2.1 Liaison encastrement . . . . .	107
3.4.2.2 Liaison rotule . . . . .	109
3.4.3 Deuxième catégorie . . . . .	110
3.4.3.1 Liaison pivot . . . . .	110
3.4.4 Troisième catégorie : cas 1 . . . . .	111
3.4.4.1 Liaison glissière . . . . .	111
3.4.4.2 Liaison hélicoïdale . . . . .	113
3.4.5 Troisième catégorie : cas 2 . . . . .	114
3.4.5.1 Liaison linéaire annulaire . . . . .	114
3.4.6 Nullité du travail des efforts de liaisons . . . . .	116
3.4.7 Bilan . . . . .	117
<b>3.5 Validation</b> . . . . .	<b>117</b>
3.5.1 Contrainte de la liaison pivot . . . . .	118

3.5.2	Cas isostatique . . . . .	120
3.5.3	Prise en compte des efforts . . . . .	120
3.5.4	Résolution numérique . . . . .	122
3.5.5	Cas hyperstatique . . . . .	122
3.5.6	Dérive numérique . . . . .	124
3.5.7	Réduction du temps de calcul . . . . .	125
<b>3.6</b>	<b>Modèle Hybride . . . . .</b>	<b>126</b>
3.6.1	Définition . . . . .	126
3.6.2	Conflit entre les contraintes $f_j$ et $g_k$ . . . . .	127
3.6.3	Conditions initiales . . . . .	128
3.6.4	Cas d'application . . . . .	129
<b>3.7</b>	<b>Application à un système houlomoteur multicorps . . . . .</b>	<b>132</b>
3.7.1	Description du cas test . . . . .	132
3.7.2	Modèle complet . . . . .	135
3.7.3	Cas particulier de la houle régulière . . . . .	136
3.7.4	Ajout de la captation d'énergie . . . . .	141
3.7.4.1	Contrôle résistif . . . . .	141
3.7.4.2	Contrôle réactif . . . . .	142
3.7.4.3	Contrôle par Latching . . . . .	143
<b>3.8</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>145</b>

---

Les contraintes de modélisation, présentées en section 1.5, montrent la nécessité de pouvoir intégrer des données expérimentales dans le modèle numérique. Ce modèle, associant les aspects théoriques et les données expérimentales, sera appelé modèle hybride. Une possibilité est d'utiliser une approche lagrangienne avec multiplicateurs<sup>1</sup>. Or, d'après l'académicien S.S. Grigoryan : “ we shall call such problems the mixed problems of dynamics since they have the features of both the direct and inverse problems of dynamics”. Cette approche semble donc tout indiquée puisqu'elle est, par nature, déjà hybride [126]. Ce chapitre va donc aborder la modélisation des systèmes multicorps par une approche lagrangienne avec multiplicateurs. Dans un premier temps, les contraintes holonomes sont présentées puisqu'elles sont omniprésentes dans la littérature. Une approche, plus rare, est ensuite étudiée. Il s'agit de l'utilisation de contraintes non-holonomes. Il existe également des travaux traitant à la fois des contraintes holonomes et non-holonomes [127]. Comme ce chapitre va le montrer, cette approche est très générale puisqu'elle fonctionne pour n'importe quel système mécanique. Elle permet également, par sa nature même, l'intégration de données expérimentales. Elle demeure néanmoins complexe et relativement impopulaire. Ce chapitre va donc s'employer à la simplifier afin de la rendre plus intéressante.

### 3.1 Formalisme mathématique

Avant toute chose, il convient d'explicitier les notations et les conventions utilisées pour écrire l'équation dynamique régissant les ensembles de solides.

#### 3.1.1 Choix du centre de gravité comme référence

Dans les problèmes de mécanique, le centre de gravité est très souvent choisi comme point de référence. Cette équation peut être obtenue par application de la 2<sup>e</sup> loi de Newton et est explicitée dans l'équation 3.1.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(G_1, \vec{B}_0) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_n(G_n, \vec{B}_0) \end{pmatrix}}_M \vec{q} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum \vec{F}_{ext \rightarrow 1}(G_1, \vec{B}_0) \\ \vdots \\ \sum \vec{F}_{ext \rightarrow n}(G_n, \vec{B}_0) \end{pmatrix}}_{\sum F} \quad (3.1)$$

Avec  $\mathbf{M}_s(G_s, \vec{B}_0)$ , la matrice masse du solide  $s$ , de taille  $6 \times 6$ , exprimée en son centre de gravité  $G_s$  et dans la base du référentiel absolu  $\vec{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  et  $\sum \vec{F}_{ext \rightarrow s}(G_s, \vec{B}_0)$ , la somme des efforts extérieurs généralisés appliqués sur le solide  $s$ , exprimée en son centre de gravité  $G_s$  et dans la base fixe  $\vec{B}_0$ . Le terme  $\vec{q}$  est le vecteur des accélérations généralisées,

1. Et donc avec des contraintes associées à ces multiplicateurs



$$\ddot{\mathbf{q}} = {}^t[\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \dots, \ddot{q}_{6(n-1)}, \ddot{q}_{6n}]$$

qu'il est aussi possible de mettre sous la forme

$$\ddot{\mathbf{q}} = {}^t[\ddot{x}_1, \ddot{y}_1, \ddot{z}_1, \ddot{\varphi}_1, \ddot{\theta}_1, \ddot{\psi}_1, \dots, \ddot{x}_n, \ddot{y}_n, \ddot{z}_n, \ddot{\varphi}_n, \ddot{\theta}_n, \ddot{\psi}_n]$$

Avec  $\ddot{x}_s, \ddot{y}_s$  et  $\ddot{z}_s$ , les accélérations absolues en translation du solide  $s$  dans la repère  $\vec{R}_0$ . Les termes  $\ddot{\varphi}_s, \ddot{\theta}_s$  et  $\ddot{\psi}_s$  sont les accélérations absolues en rotation du solide  $s$  dans le repère  $\vec{R}_0$ . Le terme  $\ddot{\mathbf{q}}$  correspond au vecteur des vitesses généralisées et s'exprime de la même façon que  $\dot{\mathbf{q}}$ .

Notons que les vecteurs généralisés et les matrices sont exprimés dans le repère  $\vec{R}_0 = (G_s, \vec{B}_0)$ . Or, la matrice d'inertie d'un solide n'est invariante que dans son propre repère  $\vec{R}_s = (G_s, \vec{B}_s)$  où,  $\vec{B}_s = (\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ , est la base du solide<sup>2</sup>.

$$\mathbf{M}_s(G_s, \vec{B}_0) = \begin{pmatrix} m_s & & \vdots & & \\ & m_s & & & (0) \\ & & m_s & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (0) & & & \mathbf{R}(\vec{\alpha}_s) \mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_s) {}^t \mathbf{R}(\vec{\alpha}_s) & \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Avec  $\mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_s)$  la matrice d'inertie du solide  $s$  exprimée dans sa base et  $\mathbf{R}(\vec{\alpha}_s)$  la matrice de rotation qui est également la matrice de passage de la base  $\vec{B}_0$  vers la base  $\vec{B}_s$  qui sera aussi notée  $\mathbf{P}_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_s}$ . Cette matrice est donnée par la formule d'Olinde Rodrigues [128].

$$\mathbf{R}(\vec{\alpha}_s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin(\alpha_s)}{\alpha_s} \begin{pmatrix} 0 & -\psi_s & \theta_s \\ \psi_s & 0 & -\varphi_s \\ -\theta_s & \varphi_s & 0 \end{pmatrix} + \frac{1 - \cos(\alpha_s)}{\alpha_s^2} \begin{pmatrix} 0 & -\psi_s & \theta_s \\ \psi_s & 0 & -\varphi_s \\ -\theta_s & \varphi_s & 0 \end{pmatrix}^2 \quad (3.3)$$

Où  $\vec{\alpha}_s = {}^t[\varphi_s, \theta_s, \psi_s]$  et  $\alpha_s = \|\vec{\alpha}_s\|$

La matrice masse n'est pas constante en raison de la dépendance temporelle de la matrice d'inertie dans l'équation 3.2. Ce qui induit la présence d'un deuxième terme dans l'effort dynamique. D'après Elloumi [129], il est possible d'exprimer ce terme supplémentaire sous forme matricielle

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \sum \mathbf{F} \quad (3.4)$$

2. Sauf si cette matrice est la matrice identité, que multiplie un réel, comme c'est le cas pour la sphère

Avec  $\mathbf{F}$  l'effort total généralisé exprimé dans la base  $\vec{B}_0$ ,  $\mathbf{M}(\mathbf{q})$  la matrice masse totale généralisée exprimée dans la base  $\vec{B}_0$  et  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  la matrice définie par

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) = (m_{ij}) \quad \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (n_{ij}) \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6n \rrbracket^2 \quad (3.5)$$

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^{6n} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k \quad \{i, j\} \in \llbracket 1; 6n \rrbracket^2 \quad (3.6)$$

Il est possible d'obtenir ce terme en calculant le moment dynamique, noté  $\vec{\delta}_s(G_s, \vec{B}_0)$ , du solide  $s$  dans la base  $\vec{B}_0$ .

$$\vec{\delta}_s(G_s, \vec{B}_0) = \frac{d}{dt} \left[ \underbrace{\mathbf{P}_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_s} \mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_s) \mathbf{P}_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_s}}_{\mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_0)} \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_s \\ \dot{\theta}_s \\ \dot{\psi}_s \end{pmatrix} \right] \quad (3.7)$$

En développant cette expression il apparaît la même forme matricielle que celle de l'équation 3.4. Nous pouvons à présent réécrire l'équation 3.1 en incluant le terme  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  qui traduit les efforts centripètes et centrifuges.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{M}_1(G_1, \vec{B}_0) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M}_n(G_n, \vec{B}_0) \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}(\mathbf{q})} \dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{N}_1(G_1, \vec{B}_0) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{N}_n(G_n, \vec{B}_0) \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.8)$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \sum \vec{F}_{ext \rightarrow 1}(G_1, \vec{B}_0) \\ \vdots \\ \sum \vec{F}_{ext \rightarrow n}(G_n, \vec{B}_0) \end{pmatrix}}_{\sum \mathbf{F}}$$

Dans le cas particulier où le problème se limite à une étude en 2 dimensions, ce terme additionnel disparaît. En effet, dans le plan, les rotations se font autour d'un axe fixe.

### 3.1.2 Choix d'un autre point référence

Les centres de gravité ont été choisis comme points de référence dans la section précédente en raison de la simplification qu'ils apportent à la notation. Il est néanmoins possible de choisir d'autres points de référence et de réécrire l'équation 3.4 où  $\mathbf{q}$  devient le vecteur des coordonnées

généralisées de ces nouveaux points de références. Dans le cadre de l'hypothèse des petits déplacements, le formalisme est simplifié et permet de réécrire la matrice masse assez simplement. Ce type de problème se retrouve notamment dans la théorie de la diffraction–radiation linéarisée, raison pour laquelle il est intéressant de le traiter. Soit  $P_s$  le point de référence du solide  $s$ , de coordonnées  $(x_P, y_P, z_P)$  dans la base  $\vec{B}_0$ , et  $G_s$  le centre de gravité, de coordonnées  $(x_G, y_G, z_G)$  dans la base  $\vec{B}_0$ . Soit  $X, Y$  et  $Z$  tels que :

$$\overrightarrow{P_s G_s} = \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} - \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{\vec{B}_s} \approx \left( \begin{pmatrix} \varphi_s \\ \theta_s \\ \psi_s \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \right)_{\vec{B}_0} \quad (3.9)$$

Pour une linéarisation à l'ordre 1, la matrice  $\mathbf{N}$  disparaît puisqu'elle devient négligeable. Nous ne nous intéressons donc qu'à la matrice masse. L'accélération au point  $P_s$  s'obtient alors par double dérivation de l'équation 3.9. L'effort dynamique peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\overrightarrow{f_{dyn}} = m \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \approx m \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & +Z & -Y \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -Z & 0 & +X \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & +Y & -X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ \ddot{z}_P \\ \ddot{\varphi}_s \\ \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\psi}_s \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

La détermination du moment du torseur dynamique peut se faire en utilisant la relation de transport des moments.

$$\overrightarrow{\delta}_s(P_s, \vec{B}_0) = \overrightarrow{\delta}_s(G_s, \vec{B}_0) + \overrightarrow{P_s G_s} \wedge \overrightarrow{f_{dyn}} \quad (3.11)$$

Dans le cas particulier d'une linéarisation à l'ordre 1, le vecteur  $\overrightarrow{P_s G_s}$  peut être linéarisé à l'ordre 0 puisque l'effort  $\overrightarrow{f_{dyn}}$  est d'ordre 1. De même, la matrice d'inertie du solide  $s$  est identique, à l'ordre 1, dans les bases  $\vec{B}_0$  et  $\vec{B}_s$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{\delta}_s(P_s, \vec{B}_0) &\approx \mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_s) \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_s \\ \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\psi}_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \wedge m \begin{pmatrix} \ddot{x}_G \\ \ddot{y}_G \\ \ddot{z}_G \end{pmatrix} \\
 &\approx \underbrace{\left[ \mathbf{I}_s(G_s, \vec{B}_s) + m \begin{pmatrix} Y^2 + Z^2 & -XY & -XZ \\ -XY & X^2 + Z^2 & -YZ \\ -XZ & -YZ & X^2 + Y^2 \end{pmatrix} \right]}_{\mathbf{I}_s(P_s, \vec{B}_s) \text{ d'après Huygens}} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_s \\ \ddot{\theta}_s \\ \ddot{\psi}_s \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 0 & -Z & +Y \\ +Z & 0 & -X \\ -Y & +X & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_P \\ \ddot{y}_P \\ \ddot{z}_P \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Au premier ordre, la matrice masse évaluée dans le repère relatif au corps peut être employée avec les mouvements dans le repère absolu. Cette matrice est donnée par l'équation 3.13.

$$\mathbf{M}_s(P_s, \vec{B}_s) = \begin{pmatrix} m_s & & & \vdots & 0 & -Z & +Y \\ & m_s & & \vdots & +Z & 0 & -X \\ & & m_s & \vdots & -Y & +X & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & -Z & +Y & \vdots & & \\ +Z & 0 & -X & \vdots & \mathbf{I}_s(P_s, \vec{B}_s) & & \\ -Y & +X & 0 & \vdots & & & \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

Il est à noter que cette matrice « masse » contient des termes de masse en  $kg$  dans le quadrant supérieur gauche, des termes d'inertie en  $kg \cdot m^2$  dans le quadrant inférieur droit et des termes en  $kg \cdot m$  dans les deux autres quadrants. L'emploi du mot « masse » est donc un abus de langage qu'il convient de rappeler.

## 3.2 Liaisons mécaniques

Maintenant que l'équation dynamique des systèmes multicorps sans liaisons est établie, il ne reste qu'à ajouter les liaisons mécaniques. Pour ce faire, les liaisons sont d'abords considérées comme des contraintes.

### 3.2.1 Contraintes holonomes

Comme dit en section 1.5, les liaisons sont quasiment systématiquement exprimées sous la forme de contraintes holonomes. Un dossier des Techniques De l'Ingénieur [130-134] présente cette méthode. Les contraintes sont dites holonomes si elles peuvent être mises sous la forme  $f(\mathbf{q}, t) = 0$ . Dans les cas des liaisons mécaniques, les paramètres en question sont les coordonnées généra-

lisées  $\mathbf{q}$ . Étant donné que le temps n'apparaît pas de manière explicite comme paramètre, ces contraintes sont dites scléronomes. Pour un système soumis à  $m$  contraintes, l'expression des contraintes scléronomes est donnée par l'équation 3.14.

$$f_j(\mathbf{q}) = 0 \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.14)$$

Afin d'ajouter ces contraintes dans l'équation initiale, il faut utiliser des multiplicateurs de Lagrange rassemblés dans un vecteur de taille  $m$ , noté  $\boldsymbol{\lambda}$ . Le point de départ reste le Lagrangien classique :

$$L = E_c - E_p \quad (3.15)$$

Auquel s'ajoutent les  $m$  contraintes afin d'obtenir le Lagrangien auxiliaire [135] :

$$L' = E_c - E_p + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(q) \quad (3.16)$$

Le Lagrangien auxiliaire satisfait la même équation que le Lagrangien classique

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_i} = \sum F_i \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad (3.17)$$

Sachant que les multiplicateurs de Lagrange ne dépendent que du temps  $t$ , il est possible de développer l'équation 3.17 afin d'obtenir l'expression suivante

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial}{\partial q_i} f_j(\dot{q}_i, q_i) = \sum F_i \quad (3.18)$$

Il est plus élégant et plus pratique de mettre l'équation 3.18 sous forme matricielle. Pour ce faire, il faut écrire la matrice jacobienne, aussi appelée matrice de contraintes, donnée par l'équation 3.19.

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = (b_{ji}) \quad b_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.19)$$

L'équation 3.18 peut être exprimée sous forme matricielle

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - {}^t\mathbf{B}(\mathbf{q})\boldsymbol{\lambda} = \sum \mathbf{F} \quad (3.20)$$

L'équation matricielle 3.20 compte  $6n$  équations scalaires pour un total de  $6n + m$  inconnues. Il manque donc  $m$  équations pour que le système puisse être résolu. Pour obtenir ces  $m$  équations manquantes, il faut dériver deux fois les contraintes par rapport au temps [130].

$$\frac{d^2 f_j}{dt^2} = 0 \quad \forall j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad \equiv \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{B}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

Le problème peut à présent être mis sous forme d'un modèle d'état en utilisant les équations 3.20 et 3.21.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & {}^t\mathbf{B}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ -\Lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Avec  $\Lambda(t)$  la fonction telle que  $\frac{d\Lambda}{dt} = \lambda(t)$

### 3.2.2 Contraintes non-holonomes

Cette section va s'intéresser aux contraintes non-holonomes idéales de la forme :

$$f_j(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0 \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.23)$$

De même que la section 3.2.1, le point de départ est le Lagrangien classique

$$L = E_c - E_p \quad (3.24)$$

auquel s'ajoutent les  $m$  contraintes pour obtenir le Lagrangien auxiliaire

$$L' = E_c - E_p + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j \quad (3.25)$$

Ce qui donne l'équation 3.26.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \left[ \frac{d}{dt} \left( \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i}(\dot{q}_i, q_i) \right) - \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}(\dot{q}_i, q_i) \right] = \sum F_i \quad (3.26)$$

Il faut cette fois ci définir deux matrices de contraintes pour pouvoir écrire l'équation 3.26 sous forme matricielle.

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (c_{ji}) \quad c_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.27)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (b_{ji}) \quad b_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial q_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.28)$$

Nous pouvons alors réécrire l'équation 3.18 sous forme matricielle

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + {}^t\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\lambda} + \left( {}^t\dot{\mathbf{C}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - {}^t\mathbf{B}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \right) \lambda = \sum \mathbf{F} \quad (3.29)$$

Le travail d’Emam [136] démontre que pour une contrainte non-holonyme  $f_j$  idéale<sup>3</sup> et intégrable suivant  $t$  il est possible de dire que :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f_j}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial f_j}{\partial q_i} = 0 \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad j \in \llbracket 1; m \rrbracket \quad (3.30)$$

Autrement dit, si  $f_j$  est intégrable, alors :

$$\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - B(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

L’équation 3.29 se simplifie alors pour devenir l’équation 3.32.

$$M(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + {}^tC(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\boldsymbol{\lambda}} = \sum F \quad (3.32)$$

L’équation 3.32 peut se retrouver sous le nom d’équation de Lagrange de la première espèce avec coordonnées généralisées ou encore sous le nom d’équation de la seconde espèce avec multiplicateurs. Le livre de Soltakhanov [137] part des équations de Maggi [138] pour établir cette équation avec une approche beaucoup plus théorique et un formalisme mathématique assez lourd. De même que pour les contraintes holonomes, il est nécessaire d’ajouter  $m$  équation supplémentaires en dérivant les contraintes. Ce qui donne naturellement l’équation matricielle 3.33.

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\ddot{\mathbf{q}} + \dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (3.33)$$

Ce qui nous permet de mettre le problème sous la forme d’un modèle d’état en utilisant 3.20 et 3.33

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & {}^tC(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} & I_{6n} & \mathbf{0} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum F \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

### 3.3 Cas simple d’application

Afin d’illustrer les modèles généraux présentés dans la section 3.2, nous allons nous intéresser à un exemple très simple. Il s’agit de l’étude du mouvement d’un pendule simple dans le plan. Puisque le problème est en 2 dimensions, le terme additionnel du moment dynamique  $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  disparaît et la matrice masse est constante. De plus, il n’y a que 3 degrés de liberté au lieu de 6. La figure 3.1 montre les conventions choisies pour la résolution de ce problème. La masse du pendule de longueur  $2L$ , notée  $m_1$ , est uniformément répartie. Les coordonnées absolues du pendule sont notées  $x$ ,  $y$  et  $\theta$ . La matrice masse du système est

---

3. Qu’il est possible d’exprimer par une équation

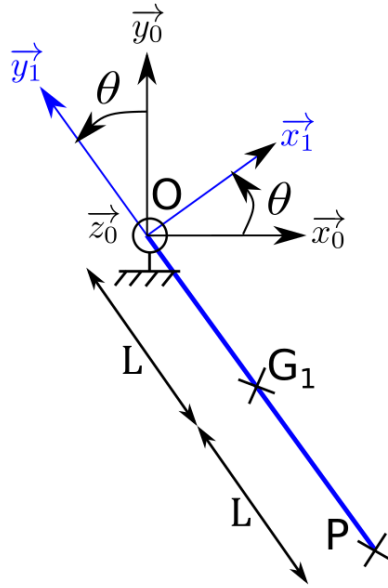


FIGURE 3.1 – Notations et référentiel pour un pendule simple

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix}_G$$

### 3.3.1 Utilisation de contraintes holonomes

Une façon de voir la liaison pivot est de considérer l'invariance de la distance entre le point  $O$  et le centre de gravité du pendule  $G_1$ . Ainsi, il n'y a qu'une seule contrainte donnée par l'équation 3.35.

$$f_1^h = x^2 + y^2 - L^2 = 0 \quad (3.35)$$

La matrice de contraintes  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  est donc :

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

Le seul effort extérieur est celui du poids. Ainsi, l'équation dynamique du système est

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix} \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$



### 3.3.2 Utilisation de contraintes non-holonomes

L'utilisation des torseurs [139] est certainement la manière la plus simple de déterminer les contraintes cinématiques. En effet, la présence d'un 0 dans le torseur cinématique signifie généralement<sup>4</sup> que le mouvement en question est rendu impossible par un effort de liaison. Il s'agit donc d'une contrainte. Dans le cas de la liaison pivot en  $O$  du pendule, le torseur cinématique  $\mathcal{V}(O, 1/0)$  et le torseur des actions de liaison  $\mathcal{T}(O, 0 \rightarrow 1)$  illustrent bien ce lien entre efforts de liaison et contraintes cinématiques.

$$\{\mathcal{V}_{1/0}\}_{O, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} - & 0 \\ - & 0 \\ \dot{\theta} & - \end{array} \right\}_{O, \vec{B}_0} \quad (3.38)$$

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_{O, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{O, \vec{B}_0} \quad (3.39)$$

Les résultantes cinématiques suivant  $\vec{x}_0$  et suivant  $\vec{y}_0$  sont nulles. Cela implique qu'il y a deux contraintes. Ces deux contraintes sont données dans l'équation 3.40.

$$\begin{pmatrix} f_1^{nh} \\ f_2^{nh} \end{pmatrix} = \begin{cases} \overline{V(0, 1/0)} \cdot \vec{x}_0 = 0 \\ \overline{V(0, 1/0)} \cdot \vec{y}_0 = 0 \end{cases} \quad (3.40)$$

En utilisant la relation de transport de moment  $\overline{V(0, 1/0)} = \overline{V(G_1, 1/0)} + \overline{OG_1} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_0$ , il est possible réécrire le système 3.40 en faisant apparaître les coordonnées et les vitesses généralisées.

$$\begin{pmatrix} f_1^{nh} \\ f_2^{nh} \end{pmatrix} = \begin{cases} \dot{x} - \dot{\theta}L \cos(\theta) = 0 \\ \dot{y} - \dot{\theta}L \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

La matrice de contraintes  $\mathbf{C}$  s'en déduit et s'écrit comme suit :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -L \cos(\theta) \\ 0 & 1 & -L \sin(\theta) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

Le seul effort extérieur est celui du poids. Ainsi, l'équation dynamique du système est

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -L \cos(\theta) & -L \sin(\theta) \end{pmatrix} \dot{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

4. Le cas de la liaison hélicoïdal est un peu différent

### 3.3.3 Utilisation de la deuxième loi de Newton

Afin de mieux comprendre les équations établies dans les sections 3.3.1 et 3.3.2, nous allons utiliser une approche Newtonienne qui est plus facile à comprendre. Il faut donc définir le torseur dynamique du pendule  $\mathcal{D}(G_1, 1/0)$  et le torseur de l'action du poids  $\mathcal{T}(G_1, \text{poids} \rightarrow 1)$ .

$$\{\mathcal{D}_{1/0}\}_{G_1, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} m_1 \ddot{x} & - \\ m_1 \ddot{y} & - \\ - & m_1 \frac{L^2}{3} \ddot{\theta} \end{array} \right\}_{G_1, \vec{B}_0} \quad (3.44)$$

$$\{\mathcal{T}_{\text{poids} \rightarrow 1}\}_{G_1, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ -m_1 g & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{G_1, \vec{B}_0} \quad (3.45)$$

Il faut à présent écrire le torseur des actions de liaisons en  $G_1$ .

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\}_{G_1, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} X_{01} & - \\ Y_{01} & - \\ - & -L(X_{01} \cos \theta + Y_{01} \sin \theta) \end{array} \right\}_{G_1, \vec{B}_0} \quad (3.46)$$

En isolant le pendule et en lui appliquant la deuxième loi de Newton au point  $G_1$ , l'équation 3.47 est obtenue.

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \frac{L^2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -L \cos(\theta) & -L \sin(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{01} \\ Y_{01} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

### 3.3.4 Comparaison des trois approches

En comparant les équations 3.37, 3.43 et 3.47 entre elles, le sens physique du terme  $\dot{\lambda}$ , qui n'était jusqu'à présent qu'un objet mathématique, apparaît clairement. Ce terme contient en fait les actions de la liaison pivot au signe près. En effet, les inconnues de liaison  $X_{01}$  et  $Y_{01}$  sont définies comme étant les actions du bâti 0 sur le pendule 1 respectivement projetées suivant  $\vec{x}_0$  et  $\vec{y}_0$ . En utilisant  $-f = 0$  au lieu de  $f = 0$ , nous récupérerions  $\dot{\lambda} = {}^t(X_{01} \ Y_{01})$ . A moins d'avoir réellement besoin du signe des efforts de liaison, la convention choisie n'a pas d'importance. Dans le cas contraire, il suffit de modifier le signe des équations  $f_j$  concernées et donc les signes des  $j$  lignes en question dans la matrice de contraintes  $\mathbf{C}$ . A contrario, le terme  $\lambda$  n'a pas une signification physique très claire. La détermination de sa valeur n'a donc pas réellement d'intérêt. La formulation du problème, faite avec des contraintes non-holonomes, est donc plus claire et plus simple à comprendre que celle faite avec des contraintes holonomes.

### 3.4 Liaisons mécaniques en 3D

Une formulation du comportement d'un système multicorps avec des contraintes permet d'obtenir un problème pouvant être résolu car la dérivation des contraintes (équations 3.33) donne des équations supplémentaires que la deuxième loi de Newton ne donne pas. Toutefois, la notion de matrice de contraintes n'est pas l'approche la plus évidente. Il s'avère que l'approche de la section 3.3.2 donne une matrice de contraintes qui se retrouve également dans l'équation obtenue avec la deuxième loi de Newton (équation 3.47). En fait, cette matrice de contraintes peut également être vue comme une matrice de transport des actions au point de liaison vers le point de référence<sup>5</sup> et vers la base de référence<sup>6</sup>. Cette matrice est donc une matrice de changement de repère. Il n'est donc pas nécessaire de dériver les contraintes pour obtenir la matrice  $\mathbf{C}$ . En effet, le fait que ce soit également une matrice de transport permet de la déterminer simplement en mettant sous forme matricielle l'équation reliant l'effort de liaison, au point de référence, aux inconnues de liaisons. Pour une liaison en un point  $A$  entre deux solides, notés 1 et 2, telle que :

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}} = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_x & -M_x \\ -F_y & -M_y \\ -F_z & -M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}} \quad (3.48)$$

Les efforts généralisés de la liaison sont notés comme suit :

$$\overrightarrow{f}_{2 \rightarrow 1 P_1, \vec{B}_0} = {}^t \mathbf{C}_{2 \rightarrow 1} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{f}_{1 \rightarrow 2 P_2, \vec{B}_0} = {}^t \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Avec  $P_1$  et  $P_2$  les points de références respectifs des solides 1 et 2, et  $\mathbf{C}$  définie telle que :

$$\mathbf{C} = \left( \mathbf{C}_{2 \rightarrow 1} \mid \mathbf{C}_{1 \rightarrow 2} \right) \quad (3.50)$$

#### 3.4.1 Catégorisation des liaisons mécaniques

Les liaisons parfaites peuvent être catégorisées suivant 2 critères. Le premier est la mobilité de la base  $\vec{B}_L$ , dans laquelle est écrit le torseur des actions de liaison, par rapport à la base fixe. Le second est la mobilité relative du point de liaison, noté  $A$ , par rapport aux repères des solides. Le tableau 3.1 montre la catégorisation des 8 liaisons classiques.

5. Il s'agit, en l'occurrence, du centre de gravité du solide en question

6. Il s'agit de la base fixe en l'occurrence

Point A fixe dans $\vec{B}_1$ et dans $\vec{B}_2$		Point A fixe dans $\vec{B}_1$ ou dans $\vec{B}_2$
$\vec{B}_L$ fixe par rapport à $\vec{B}_0$	$\vec{B}_L$ mobile par rapport à $\vec{B}_0$	$\vec{B}_L$ mobile par rapport à $\vec{B}_0$
<ul style="list-style-type: none"> <li>• rotule</li> <li>• encastrement</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pivot</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• ponctuelle</li> <li>• pivot glissant</li> <li>• appui plan</li> <li>• linéaire annulaire</li> <li>• linéaire rectiligne</li> <li>• hélicoïdale</li> <li>• glissière</li> </ul>

TABLEAU 3.1 – Catégorisation des liaisons classiques

La base  $\vec{B}_L$  ne correspond pas forcément à une des trois bases du problème ( $\vec{B}_0$ ,  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$ ). Dans le cas général, il peut être nécessaire de faire une rotation, d'angle constant, pour passer de la base  $\vec{B}_L$  à l'une des trois bases du problème. Ainsi, par souci de simplicité,  $\vec{B}_L$  sera  $\vec{B}_0$  pour la première catégorie,  $\vec{B}_1$  pour la seconde et alternativement  $\vec{B}_1$  et  $\vec{B}_2$  pour la troisième catégorie. D'autre part, les points de références  $P_1$  et  $P_2$  sont attachés à leurs solides respectifs.

### 3.4.2 Première catégorie

#### 3.4.2.1 Liaison encastrement

Les torseurs de la liaison encastrement sont définis dans l'équation 3.51.

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_x & -M_x \\ -F_y & -M_y \\ -F_z & -M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_0} \quad (3.51)$$

Calcul du moment en  $P_1$

Le moment est calculé en  $P_1$  pour  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_0}$ .

$$\vec{M}_{P_1} = \vec{M}_A + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \quad (3.52)$$

Le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\vec{P}_1 \vec{A} = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.53)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{M}_{P_1} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} + \left( P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix} \right)_{\vec{B}_0} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \quad (3.54)$$

La convention suivante est adoptée afin d'alléger la notation,

$$P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} = \begin{pmatrix} a_{0 \rightarrow 1} \\ b_{0 \rightarrow 1} \\ c_{0 \rightarrow 1} \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \quad (3.55)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 1.

$$\overrightarrow{f}_{2 \rightarrow 1}{}_{P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -c_{0 \rightarrow 1} & b_{0 \rightarrow 1} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ c_{0 \rightarrow 1} & 0 & -a_{0 \rightarrow 1} & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -b_{0 \rightarrow 1} & a_{0 \rightarrow 1} & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

### Calcul du moment en $P_2$

Le point A est fixe dans le repère  $P_2, \vec{B}_2$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\overrightarrow{P_2 A} = \begin{pmatrix} X_{2A} \\ Y_{2A} \\ Z_{2A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.57)$$

La convention suivante est adoptée afin d'alléger la notation,

$$P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_2} \begin{pmatrix} X_{2A} \\ Y_{2A} \\ Z_{2A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{0 \rightarrow 2} \\ b_{0 \rightarrow 2} \\ c_{0 \rightarrow 2} \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \quad (3.58)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 2.

$$\overrightarrow{f}_{1 \rightarrow 2 P_2, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{0 \rightarrow 2} & -b_{0 \rightarrow 2} & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ -c_{0 \rightarrow 2} & 0 & a_{0 \rightarrow 2} & \vdots & 0 & -1 & 0 \\ b_{0 \rightarrow 2} & -a_{0 \rightarrow 2} & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{{}^t C_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

### 3.4.2.2 Liaison rotule

La liaison rotule n'est pas contrainte en rotation. Les torseurs sont donnés dans l'équation 3.60.

$$\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{l|l} F_x & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{l|l} -F_x & 0 \\ -F_y & 0 \\ -F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_0} \quad (3.60)$$

Les efforts s'obtiennent à partir de la liaison encastrement en supprimant les moments de liaison et les colonnes associées.

$$\overrightarrow{f}_{2 \rightarrow 1 P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & 1 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & -c_{0 \rightarrow 1} & b_{0 \rightarrow 1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ c_{0 \rightarrow 1} & 0 & -a_{0 \rightarrow 1} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ -b_{0 \rightarrow 1} & a_{0 \rightarrow 1} & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Et

$$\overrightarrow{f}_{1 \rightarrow 2 P_2, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & -1 & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & -1 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} \\ 0 & c_{0 \rightarrow 2} & -b_{0 \rightarrow 2} & -1 & 0 & 0 \\ -c_{0 \rightarrow 2} & 0 & a_{0 \rightarrow 2} & 0 & -1 & 0 \\ b_{0 \rightarrow 2} & -a_{0 \rightarrow 2} & 0 & \color{red}{0} & \color{red}{0} & -1 \end{pmatrix}}_{{}^t C_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

### 3.4.3 Deuxième catégorie

#### 3.4.3.1 Liaison pivot

Les torseurs des actions de liaison pivot d'axe  $\vec{z}_1$  sont définis dans l'équation 3.63.

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_1} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_x & -M_x \\ -F_y & -M_y \\ -F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_1} \quad (3.63)$$

Calcul du moment en  $P_1$

Le moment est calculé en  $P_1$  pour  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_1}$ .

$$\vec{M}_{P_1} = \vec{M}_A + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.64)$$

Le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\vec{P}_1 \vec{A} = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.65)$$

Ainsi,

$$\vec{M}_{P_1} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} + \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.66)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 1.

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1 P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \vdots 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 \quad \vdots P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots 0 & 0 \\ \dots \dots \dots \\ 0 & -Z_{1A} & Y_{1A} & \vdots 1 & 0 \\ Z_{1A} & 0 & -X_{1A} & \vdots 0 & 1 \\ -Y_{1A} & X_{1A} & 0 & \vdots 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

Calcul du moment en  $P_2$

Le point A est fixe dans le repère  $P_2, \vec{B}_2$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\vec{P}_2 \vec{A} = \begin{pmatrix} X_{2A} \\ Y_{2A} \\ Z_{2A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.68)$$

Il est nécessaire de réécrire  $\vec{P}_2 \vec{A}$  dans la base de la liaison. La convention suivante est adoptée afin d'alléger la notation,

$$P_{\vec{B}_1 \rightarrow \vec{B}_2} \begin{pmatrix} X_{2A} \\ Y_{2A} \\ Z_{2A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} = \begin{pmatrix} a_{1 \rightarrow 2} \\ b_{1 \rightarrow 2} \\ c_{1 \rightarrow 2} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.69)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 2.

$$\vec{f}_{1 \rightarrow 2 P_2, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_2} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_2} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{1 \rightarrow 2} & -b_{1 \rightarrow 2} & \vdots & -1 & 0 \\ -c_{1 \rightarrow 2} & 0 & a_{1 \rightarrow 2} & \vdots & 0 & -1 \\ b_{1 \rightarrow 2} & -a_{1 \rightarrow 2} & 0 & \vdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_x \\ M_y \end{pmatrix} \quad (3.70)$$

### 3.4.4 Troisième catégorie : cas 1

Dans ce cas, le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . La base  $\vec{B}_1$  est également la base de la liaison. C'est le cas des liaisons suivantes :

- Liaison pivot glissant
- Liaison appui plan
- Liaison hélicoïdale
- Liaison glissière

#### 3.4.4.1 Liaison glissière

Les torseurs des actions de liaison glissière d'axe  $A, \vec{z}_1$  sont définis dans l'équation 3.71.



$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & M_x \\ F_y & M_y \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_1} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_x & -M_x \\ -F_y & -M_y \\ 0 & M_z \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_1} \quad (3.71)$$

### Calcul du moment en $P_1$

Le moment est calculé en  $P_1$  pour  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_1}$ .

$$\vec{M}_{P_1} = \vec{M}_A + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} + \vec{P}_1 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.72)$$

Le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\vec{P}_1 \vec{A} = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.73)$$

Ainsi,

$$\vec{M}_{P_1} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} + \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \wedge \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.74)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 1.

$$\vec{f}_{2 \rightarrow 1, P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \vdots & P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -Z_{1A} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ Z_{1A} & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -Y_{1A} & X_{1A} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

### Calcul du moment en $P_2$

L'effort de 2 ne se déduit immédiatement cette fois ci. En effet, le point A est mobile dans le repère  $P_2, \vec{B}_2$ . Il est donc nécessaire de définir le vecteur  $\vec{P}_2 \vec{A}$  en faisant apparaître le point  $P_1$ .

$$\overrightarrow{P_2\dot{A}} = \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1\dot{A}} \quad (3.76)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{M_{P_2}} = \begin{pmatrix} -M_x \\ -M_y \\ -M_z \end{pmatrix}_{\overrightarrow{B_1}} + \overrightarrow{P_1\dot{A}} \wedge \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \\ 0 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{B_1}} + \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{B_0}} \wedge \left( P_{\overrightarrow{B_0} \rightarrow \overrightarrow{B_1}} \begin{pmatrix} -F_x \\ -F_y \\ 0 \end{pmatrix} \right)_{\overrightarrow{B_0}} \quad (3.77)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 2.

$$\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}_{P_2, \overrightarrow{B_0}} = \underbrace{\Delta - \begin{pmatrix} P_{\overrightarrow{B_0} \rightarrow \overrightarrow{B_1}} \vdots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \vdots P_{\overrightarrow{B_0} \rightarrow \overrightarrow{B_1}} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & -Z_{1A} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ Z_{1A} & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -Y_{1A} & X_{1A} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.78)$$

Où,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ - \left[ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \wedge P_{0 \rightarrow 1}^{c_1} \right] & - \left[ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \wedge P_{0 \rightarrow 1}^{c_2} \right] & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

Avec,

$$P_{\overrightarrow{B_0} \rightarrow \overrightarrow{B_1}} = \left( P_{0 \rightarrow 1}^{c_1} \mid P_{0 \rightarrow 1}^{c_2} \mid P_{0 \rightarrow 1}^{c_3} \right) \quad (3.80)$$

### 3.4.4.2 Liaison hélicoïdale

Le cas de la liaison hélicoïdale est très similaire à celui de la glissière. Il y a une action de liaison supplémentaire  $F_z$  liée au moment  $M_z$  par la relation  $F_z = \pm p M_z$  où  $p$  est le pas de l'hélice<sup>7</sup>. Ainsi, pour la liaison hélicoïdale, il suffit de reprendre l'équation 3.75 et d'ajouter le terme  $\pm 1/p$ . Ce qui donne l'équation 3.81. L'effort  $\overrightarrow{f_{1 \rightarrow 2}}_{P_2, \overrightarrow{B_0}}$  s'obtient de la même façon.

7. C'est un signe – si le pas de l'hélice est à droite

$$\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}_{P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \vdots 0 \\ \dots\dots\dots \\ 0 \quad \vdots P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_1} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & \pm \frac{1}{p} \\ \dots\dots\dots \\ 0 & -Z_{1A} & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ Z_{1A} & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -Y_{1A} & X_{1A} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

### 3.4.5 Troisième catégorie : cas 2

Dans ce cas, le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . En revanche, c'est la base  $\vec{B}_2$  qui est la base de la liaison. C'est le cas des liaisons suivantes :

- Liaison linéaire annulaire
- Liaison linéaire rectiligne
- Liaison ponctuelle

#### 3.4.5.1 Liaison linéaire annulaire

Les torseurs des actions de liaison d'une liaison linéaire annulaire d'axe  $A, \vec{x}_2$  sont définis dans l'équation 3.82.

$$\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ F_y & 0 \\ F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_2} \quad \{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_2} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ -F_y & 0 \\ -F_z & 0 \end{array} \right\}_{A, \vec{B}_2} \quad (3.82)$$

Calcul du moment en  $P_1$

Le moment est calculé en  $P_1$  pour  $\{\mathcal{T}_{2 \rightarrow 1}\}_{A, \vec{B}_2}$ .

$$\overrightarrow{M}_{P_1} = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{P_1 A} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} = \overrightarrow{P_1 A} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.83)$$

Le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . Il est donc possible d'écrire que :

$$\overrightarrow{P_1 A} = \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} = \left( P_{\vec{B}_2 \rightarrow \vec{B}_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \right) \quad (3.84)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{M}_{P_1} = \left( P_{\vec{B}_2 \rightarrow \vec{B}_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix} \right)_{\vec{B}_2} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.85)$$

La convention suivante est adoptée afin d'alléger la notation,

$$P_{\vec{B}_2 \rightarrow \vec{B}_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{2 \rightarrow 1} \\ b_{2 \rightarrow 1} \\ c_{2 \rightarrow 1} \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.86)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 1.

$$\overrightarrow{f}_{2 \rightarrow 1}_{P_1, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_2} \vdots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \vdots P_{\vec{B}_0 \rightarrow \vec{B}_2} \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -c_{2 \rightarrow 1} & b_{2 \rightarrow 1} \\ 0 & -a_{2 \rightarrow 1} \\ a_{2 \rightarrow 1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (3.87)$$

### Calcul du moment en $P_2$

Le moment est calculé en  $P_2$  pour  $\{\mathcal{T}_{1 \rightarrow 2}\}_{A, \vec{B}_2}$ .

$$\overrightarrow{M}_{P_2} = \overrightarrow{M}_A + \overrightarrow{P}_2 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_y \\ -F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} = \overrightarrow{P}_2 \vec{A} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_y \\ -F_z \end{pmatrix}_{\vec{B}_2} \quad (3.88)$$

Le point A est fixe dans le repère  $P_1, \vec{B}_1$ . Il faut donc écrire :

$$\overrightarrow{P}_2 \vec{A} = \overrightarrow{P}_2 \vec{P}_1 + \overrightarrow{P}_1 \vec{A} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} + \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix}_{\vec{B}_1} \quad (3.89)$$

Ainsi,

$$\overrightarrow{M}_{P_2} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \wedge \left( P_{B_0 \rightarrow B_2} \begin{pmatrix} 0 \\ -F_y \\ -F_z \end{pmatrix} \right) + \left( P_{B_2 \rightarrow B_1} \begin{pmatrix} X_{1A} \\ Y_{1A} \\ Z_{1A} \end{pmatrix} \right) \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ -F_y \\ -F_z \end{pmatrix} \quad (3.90)$$

Ce qui donne, tous calculs faits, l'effort généralisé de la liaison sur le solide 2.

$$\overrightarrow{f}_{1 \rightarrow 2, P_2, \overrightarrow{B}_0} = \underbrace{\left[ \Delta - \begin{pmatrix} P_{B_0 \rightarrow B_2} \vdots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \vdots P_{B_0 \rightarrow B_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -c_{2 \rightarrow 1} & b_{2 \rightarrow 1} \\ 0 & -a_{2 \rightarrow 1} \\ a_{2 \rightarrow 1} & 0 \end{pmatrix} \right]}_{{}^t C_{1 \rightarrow 2}} \begin{pmatrix} F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad (3.91)$$

Où,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ - \left[ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \wedge P_{0 \rightarrow 2}^{c_2} \right] & - \left[ \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{pmatrix} \wedge P_{0 \rightarrow 2}^{c_3} \right] \end{pmatrix} \quad (3.92)$$

Avec,

$$P_{B_0 \rightarrow B_2} = \left( P_{0 \rightarrow 2}^{c_1} \mid P_{0 \rightarrow 2}^{c_2} \mid P_{0 \rightarrow 2}^{c_3} \right) \quad (3.93)$$

### 3.4.6 Nullité du travail des efforts de liaisons

Les liaisons mécaniques sont supposées parfaites et, par conséquent, les efforts associés ne travaillent pas. Le travail élémentaire d'une force  $\vec{F}$  en un point se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  est donné par l'équation 3.94.

$$\delta W = \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (3.94)$$

Pour les efforts de liaisons, il vient :

$$\delta W = {}^t C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\lambda}(t) \cdot \dot{\mathbf{q}}(t) dt = 0 \quad (3.95)$$

Or,

$$\forall A \in \mathbb{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \forall X \in \mathbb{R}^p, \forall Y \in \mathbb{R}^n, \quad AX \cdot Y = {}^t(AX)Y = {}^tX {}^tAY = X \cdot {}^tAY \quad (3.96)$$

D'où,

$$\delta W = \dot{\lambda}(t) \cdot C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}}(t) dt = 0 \quad (3.97)$$

Ce qui donne finalement

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (3.98)$$

### 3.4.7 Bilan

Cette section a montré qu'il était possible de calculer les matrices de contraintes  $\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  en les considérant comme des matrices de changement de repère. Les liaisons classiques sont regroupées dans trois catégories et le développement permettant de calculer  $\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , pour chacune des catégories, a été explicité. Ce développement résulte en un formalisme mathématique relativement léger pour de la dynamique 3D non-linéaire. Le système d'équations résultant est donc plus simple à comprendre puisque la méthode utilisée ici fait appel à des concepts très basiques. De plus, la nullité du travail des forces de liaison donne les  $m$  équations permettant la résolution de l'équation dynamique 3.32. Ainsi, par l'utilisation de concepts simples, nous avons pu retrouver les mêmes résultats qu'avec une approche utilisant des contraintes non-holonomes idéales. Cette section a donc permis de remédier à la complexité, inhérente aux approches lagrangiennes, annoncé par Papegay [63] en section 1.5.

## 3.5 Validation

La section 3.3 a permis de comprendre la manière d'aborder un problème dynamique avec les multiplicateurs de Lagrange et a également permis de comprendre leur sens physique. La section 3.4 a, quant à elle, permis de construire facilement le système d'équations. Néanmoins, le cas du pendule est trop simple (un seul pivot en un point fixe). Il est nécessaire de regarder un cas plus général afin de présenter une méthode robuste et adaptable. D'autre part, il est également nécessaire de valider cette approche en l'appliquant un cas test reconnu. Notre choix s'est porté sur le « Andrew's squeezer mechanism », ainsi nommé car développé par G.C. Andrew en 1961 lors de sa thèse. Il s'agit d'un problème plan à une seule mobilité.

La figure 3.2, tirée de [140], présente le système étudié dans cette section. Il s'agit d'un ensemble de 7 corps reliés par des liaisons pivots aux points O, A, B, D, E, F, G et P où O, A, B et C sont des points fixes. Un couple constant  $T=0.033$  Nm est appliqué sur le solide 1 au point

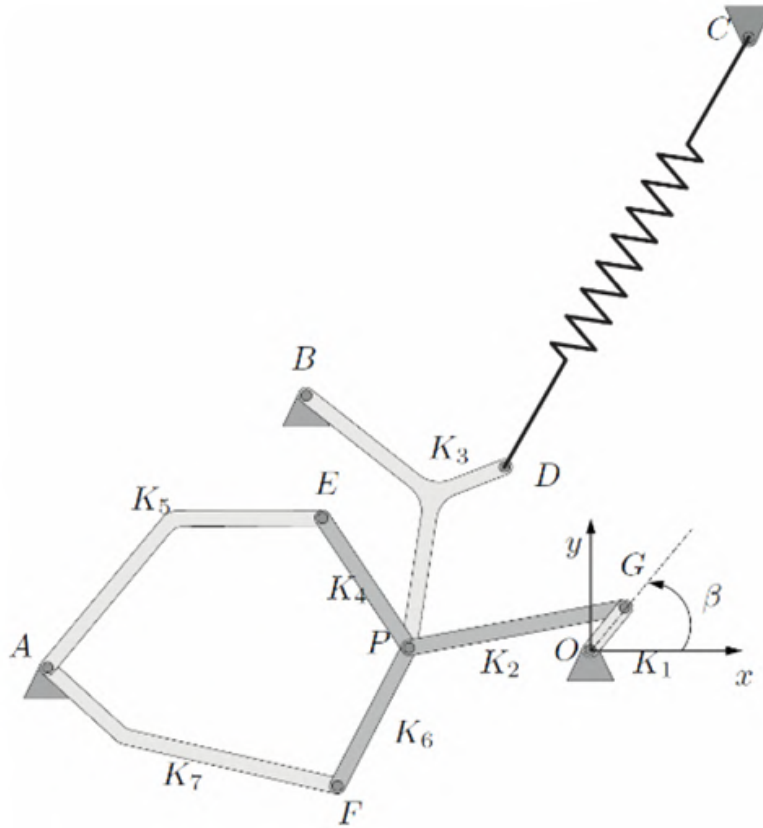


FIGURE 3.2 – Andrew's squeezer mechanism [140]

$O$ . Le ressort reliant les points  $C$  et  $D$  a une raideur  $k=4530$  N/m et une longueur à vide de  $l_0 = 0.07785$  m. La gravité est négligée. Les tableaux B.1 et B.2 de l'annexe B.1 donnent les valeurs numériques nécessaires à la résolution du problème. Elles sont tirées de [140] où il y avait une erreur de signe sur la position suivant  $x$  du centre de gravité du solide 3 à l'instant initial.

### 3.5.1 Contrainte de la liaison pivot

Pour commencer, il faut exprimer les efforts de la liaison pivot d'un solide  $i$  par rapport à un solide  $j$  en un point  $P$  du plan. Contrairement au cas 3D, la liaison pivot dans le plan ne fait pas obligatoirement partie de la seconde catégorie de la section 3.4.3. Le torseur des actions de liaison de la liaison pivot doit être écrit dans une base contenant son axe de rotation. Or, pour un problème plan, l'axe de rotation du pivot est orthogonal au plan et commun à toutes les bases. Il est donc possible d'exprimer les torseurs dans la base fixe.

$$\{\mathcal{T}_{j \rightarrow i}\}_{P, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} F_x & - \\ F_y & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{P, \vec{B}_0} \quad \{\mathcal{T}_{i \rightarrow j}\}_{P, \vec{B}_1} = \left\{ \begin{array}{c|c} -F_x & - \\ -F_y & - \\ - & 0 \end{array} \right\}_{P, \vec{B}_0} \quad (3.99)$$

L'équation 3.99 montre que, dans le cas d'un problème plan, la liaison pivot se rapporte à la première catégorie définie dans le section 3.4.2. Il suffit donc de repartir des équations 3.56 et 3.59 et d'en supprimer les lignes qui n'existent pas dans le plan ainsi que les inconnues de liaison non définies ou nulles. Ce qui donne les équations 3.100 et 3.101.

$$\vec{f}_{j \rightarrow i}_{G_i, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{0 \rightarrow i} & b_{0 \rightarrow i} & 1 & 0 & 0 \\ \hline e_{0 \rightarrow i} & 0 & a_{0 \rightarrow i} & 0 & 1 & 0 \\ -b_{0 \rightarrow i} & a_{0 \rightarrow i} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{{}^t\mathbf{C}_{j \rightarrow i}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \hline F_z \\ M_x \\ M_y \\ \hline M_z \end{pmatrix} \quad (3.100)$$

$$\vec{f}_{i \rightarrow j}_{G_j, \vec{B}_0} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_{0 \rightarrow j} & b_{0 \rightarrow j} & 1 & 0 & 0 \\ \hline e_{0 \rightarrow j} & 0 & a_{0 \rightarrow j} & 0 & 1 & 0 \\ b_{0 \rightarrow j} & -a_{0 \rightarrow j} & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{{}^t\mathbf{C}_{i \rightarrow j}} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ \hline F_z \\ M_x \\ M_y \\ \hline M_z \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

En adaptant les notations de la section 3.4 au cas d'un problème plan, il vient :

$$\begin{pmatrix} a_{0 \rightarrow k} \\ b_{0 \rightarrow k} \\ c_{0 \rightarrow k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) & 0 \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{kP} \\ Y_{kP} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{kP} \cos(\theta_k) - Y_{kP} \sin(\theta_k) \\ X_{kP} \sin(\theta_k) + Y_{kP} \cos(\theta_k) \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = i, j \quad (3.102)$$

Ce qui donne finalement l'équation 3.103.

$$\mathbf{C}_{i \rightarrow j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -X_{iP} \sin(\theta_i) - Y_{iP} \cos(\theta_i) \\ 0 & 1 & +X_{iP} \cos(\theta_i) - Y_{iP} \sin(\theta_i) \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}_{j \rightarrow i} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & +X_{jP} \sin(\theta_j) + Y_{jP} \cos(\theta_j) \\ 0 & -1 & -X_{jP} \cos(\theta_j) + Y_{jP} \sin(\theta_j) \end{pmatrix} \quad (3.103)$$



### 3.5.2 Cas isostatique

Dans un premier temps, nous choisissons un modèle de liaison isostatique. Les différentes liaisons pivot sont définies dans le tableau 3.2. Par convention,  $i < j$  mais cela est tout à fait arbitraire. De plus, si  $i = 0$  (liaison avec le bâti), alors  $C_{j \rightarrow i}$  n'existe pas. La matrice  $C$  est construite à partir de ce tableau et est explicitée dans l'équation 3.104.

n°	point	Solide $i$	Solide $j$	n°	point	Solide $i$	Solide $j$
1	A	0	5	6	F	6	7
2	A	0	7	7	G	1	2
3	O	0	1	8	P	2	3
4	B	0	3	9	P	2	4
5	E	4	5	10	P	2	6

TABLEAU 3.2 – Définition des liaisons pour le cas isostatique

$$C = \begin{pmatrix}
 \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 7} \\
 C_{0 \rightarrow 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{5 \rightarrow 4} & C_{4 \rightarrow 5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{7 \rightarrow 6} & C_{6 \rightarrow 7} \\
 C_{2 \rightarrow 1} & C_{1 \rightarrow 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{3 \rightarrow 2} & C_{2 \rightarrow 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{4 \rightarrow 2} & 0 & C_{2 \rightarrow 4} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{6 \rightarrow 2} & 0 & 0 & 0 & C_{2 \rightarrow 6} & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} n^{\circ} 1 \\ n^{\circ} 2 \\ n^{\circ} 3 \\ n^{\circ} 4 \\ n^{\circ} 5 \\ n^{\circ} 6 \\ n^{\circ} 7 \\ n^{\circ} 8 \\ n^{\circ} 9 \\ n^{\circ} 10 \end{matrix}
 \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$\begin{matrix} \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \dot{\theta}_1 & \dot{x}_2 & \dot{y}_2 & \dot{\theta}_2 & \dot{x}_3 & \dot{y}_3 & \dot{\theta}_3 & \dot{x}_4 & \dot{y}_4 & \dot{\theta}_4 & \dot{x}_5 & \dot{y}_5 & \dot{\theta}_5 & \dot{x}_6 & \dot{y}_6 & \dot{\theta}_6 & \dot{x}_7 & \dot{y}_7 & \dot{\theta}_7 \end{matrix}$

### 3.5.3 Prise en compte des efforts

De même que pour le vecteur des vitesses généralisées, le vecteurs des efforts généralisés est organisé en triplet pour les problèmes plans. Puisqu'il y a 7 solides, il y a 21 composantes dans l'effort généralisé.

$$f_{ext} = {}^t \{f_{x \rightarrow 1}, f_{y \rightarrow 1}, C_{z \rightarrow 1}, f_{x \rightarrow 2}, f_{y \rightarrow 2}, C_{z \rightarrow 2}, \dots, f_{x \rightarrow 6}, f_{y \rightarrow 6}, C_{z \rightarrow 6}, f_{x \rightarrow 7}, f_{y \rightarrow 7}, C_{z \rightarrow 7}\} \quad (3.105)$$

Pour le couple  $T$  imposé en  $O$ , la seule composante non nulle est  $C_{z \rightarrow 1} = T$ . Pour l'effort du ressort appliqué au solide 3, il y a deux façon de procéder. L'effort peut s'écrire sous forme vectorielle.

$$\mathbf{f}_{ressort \rightarrow 3} = -k(l - l_0) \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \quad (3.106)$$

En exprimant la position du point D à partir des coordonnées su solide 3, auquel il est attaché, il vient :

$$\mathbf{f}_{ressort \rightarrow 3} = \frac{-k(l - l_0)}{l} \begin{pmatrix} x_3 + X_{3D} \cos(\theta_3) - Y_{3D} \sin(\theta_3) - x_C \\ y_3 + X_{3D} \sin(\theta_3) + Y_{3D} \cos(\theta_3) - y_C \\ 0 \end{pmatrix}_{D, \vec{B}_0} \quad (3.107)$$

En transportant cet effort en  $G_3$ , un moment apparaît :

$$\mathbf{f}_{ressort \rightarrow 3} = \frac{-k(l - l_0)}{l} \begin{pmatrix} x_3 + X_{3D} \cos(\theta_3) - Y_{3D} \sin(\theta_3) - x_C \\ y_3 + X_{3D} \sin(\theta_3) + Y_{3D} \cos(\theta_3) - y_C \\ C_{z \rightarrow 3} \end{pmatrix}_{G_3, \vec{B}_0} \quad (3.108)$$

Avec,

$$C_{z \rightarrow 3} = \frac{-k(l - l_0)}{l} [(y_3 + X_{3D} \sin(\theta_3) + Y_{3D} \cos(\theta_3) - y_C)(X_{3D} \cos(\theta_3) - Y_{3D} \sin(\theta_3)) - (x_3 + X_{3D} \cos(\theta_3) - Y_{3D} \sin(\theta_3) - x_C)(X_{3D} \sin(\theta_3) + Y_{3D} \cos(\theta_3))]$$

Et

$$l = \sqrt{(X_{3D} \cos(\theta_3) - Y_{3D} \sin(\theta_3) - x_C)^2 + (X_{3D} \sin(\theta_3) + Y_{3D} \cos(\theta_3) - y_C)^2}$$

Une façon plus élégante d'exprimer l'effort généralisé du ressort est de considérer son énergie potentielle élastique.

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k (l - l_0)^2 \quad (3.109)$$

L'effort du ressort est obtenu en calculant le Lagrangien de cette énergie potentielle.

$$f_{x \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial x_3} \quad f_{y \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial y_3} \quad C_{z \rightarrow 3} = -\frac{\partial E_{pe}}{\partial \theta_3} \quad (3.110)$$

La compilation des développements de cette section donne le modèle d'état de l'équation 3.111.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & {}^t C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} & I_{21} & \mathbf{0} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ I_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}_B \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \lambda \end{pmatrix}}_B + \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{couple \rightarrow 1} + \mathbf{f}_{ressort \rightarrow 3}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

### 3.5.4 Résolution numérique

Le système différentiel de l'équation 3.111 est de la forme  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ . Pour résoudre ce système à chaque pas de temps, nous utilisons l'algorithme de résolution de système linéaire `DGESV`<sup>8</sup> de la librairie LAPACK [141]. La bibliothèque `scipy` [142] permet d'appeler cette routine en bas niveau directement dans `Cython`. Le langage `Cython` est très proche de `python`, il permet d'écrire du code, qui est ensuite traduit en langage C, de façon très simple. Le code est ensuite compilé en une bibliothèque directement utilisable dans `Python`. Il est néanmoins nécessaire d'interfacer la routine bas niveau comme le propose Henriksen [143]. Une fonction `Cython` pour la résolution d'un système linéaire pour une matrice  $\mathbf{A}$  carré est donnée en annexe B.2.

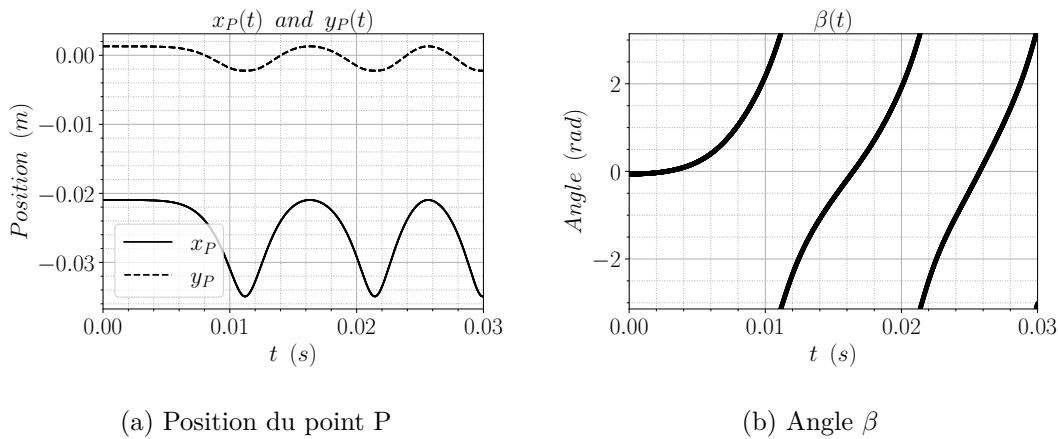


FIGURE 3.3 – Résultats de la simulation temporelle

Les figures 3.3a et 3.3b présentent les résultats d'une simulation temporelle sur une durée de 0.03 seconde avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s en utilisant une méthode de Runge Kutta 45 [144, 145]. Compte tenu de la correction de signe apportée à l'article, les résultats correspondent parfaitement à ceux donnés par Betsh et al. [140].

### 3.5.5 Cas hyperstatique

L'hyperstatisme d'un système mécanique peut s'expliquer comme une redondance des contraintes mécaniques. D'un point de vue mathématique, cela correspond à un nombre supérieur d'inconnues par rapport aux nombres d'équations données par le principe fondamentale de la dynamique (ou 2<sup>e</sup> loi de Newton). Afin de tester la validité du modèle face à ce genre de configuration, nous allons simplement surcharger le cas test en lui rajoutant des liaisons. Toutes les liaisons possibles au point P entre les solides 2, 3, 4 et 6 sont alors utilisées. Il y a donc 6 pivots au point P contre

<sup>8</sup>. Algorithme de résolution d'un système linéaire réelle en double précision par factorisation LU de la matrice A où A est une matrice quelconque

seulement 3 dans le cas isostatique. Le tableau 3.3 présente la nouvelle configuration. La nouvelle matrice  $C$  est donnée par l'équation 3.112.

n°	point	Solide $i$	Solide $j$	n°	point	Solide $i$	Solide $j$
1	A	0	5	8	P	2	3
2	A	0	7	9	P	2	4
3	O	0	1	10	P	2	6
4	B	0	3	11	P	3	4
5	E	4	5	12	P	3	6
6	F	6	7	13	P	4	6
7	G	1	2				

TABLEAU 3.3 – Définition des liaisons pour le cas isostatique

$$C = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 7} \\
 C_{0 \rightarrow 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & C_{0 \rightarrow 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{5 \rightarrow 4} & C_{4 \rightarrow 5} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{7 \rightarrow 6} & C_{6 \rightarrow 7} \\
 C_{2 \rightarrow 1} & C_{1 \rightarrow 2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{3 \rightarrow 2} & C_{2 \rightarrow 3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{4 \rightarrow 2} & 0 & C_{2 \rightarrow 4} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & C_{6 \rightarrow 2} & 0 & 0 & 0 & C_{2 \rightarrow 6} & 0 \\
 0 & 0 & C_{4 \rightarrow 3} & C_{3 \rightarrow 4} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & C_{6 \rightarrow 3} & 0 & 0 & C_{3 \rightarrow 6} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & C_{6 \rightarrow 4} & 0 & C_{4 \rightarrow 6} & 0
 \end{pmatrix} \begin{matrix}
 n^\circ 1 \\
 n^\circ 2 \\
 n^\circ 3 \\
 n^\circ 4 \\
 n^\circ 5 \\
 n^\circ 6 \\
 n^\circ 7 \\
 n^\circ 8 \\
 n^\circ 9 \\
 n^\circ 10 \\
 n^\circ 11 \\
 n^\circ 12 \\
 n^\circ 13
 \end{matrix} \quad (3.112)$$

$\hat{x}_1 \hat{y}_1 \hat{\theta}_1 \quad \hat{x}_2 \hat{y}_2 \hat{\theta}_2 \quad \hat{x}_3 \hat{y}_3 \hat{\theta}_3 \quad \hat{x}_4 \hat{y}_4 \hat{\theta}_4 \quad \hat{x}_5 \hat{y}_5 \hat{\theta}_5 \quad \hat{x}_6 \hat{y}_6 \hat{\theta}_6 \quad \hat{x}_7 \hat{y}_7 \hat{\theta}_7$

Le reste du problème demeure inchangé. L'algorithme utilisé pour le cas isostatique ne fonctionne plus car la matrice  $A$ , du système  $AX = B$ , n'admet plus de décomposition LU [146] en raison de l'hyperstatisme. Notons que la matrice  $C$  reste de plein rang. Nous avons rajouté des liaisons mais elles sont toutes différentes. Le changement des propriétés de la matrice  $A$  est donc due à l'hyperstatisme et non à un doublon dans la matrice  $C$ . Il est alors nécessaire d'utiliser un algorithme minimisant  $|B - AX|$ . Pour cet exemple, la matrice  $A$  est de plein rang et la routine DGELS<sup>9</sup> de la librairie LAPACK [141] convient au problème. Pour le cas où la matrice

9. Algorithme de résolution d'un système linéaire réelle en double précision par factorisation QR ou LQ [147] de la matrice  $A$  où  $A$  est une matrice quelconque

ne serait pas de plein rang, il convient d'utiliser la routine `DGELSD`<sup>10</sup> de la librairie LAPACK [141]. Deux fonctions cython pour la résolution d'un système non-linéaire pour une matrice carrée  $\mathbf{A}$  sont proposées en annexe B.3 et en annexe B.4. L'algorithme est plus lent pour le cas hyperstatique que pour le cas isostatique mais donne rigoureusement les mêmes résultats avec la routine `DGELSD`. En ce qui concerne la routine `DGELS`, elle est plus rapide que la routine `DGELSD` et elle est même plus rapide que la routine `DGESV` utilisée dans le cas isostatique. Cependant, elle est moins versatile, et nous lui préférons donc les routine `DGESV` et `DGELSD` pour la suite, même si elle donne les mêmes résultats pour ce cas particulier.

### 3.5.6 Dérive numérique

Comme pour n'importe quel algorithme de résolution de système différentiel, l'algorithme proposé dérive numériquement. Évidemment, cette dérive est d'autant plus importante que le pas de temps est grand. Afin de pouvoir analyser la pertinence des résultats, il est préférable de pouvoir quantifier cette dérive. A cet effet, nous reprenons l'équation 3.97 qui traduit le fait que les actions de liaison ne travaillent pas.

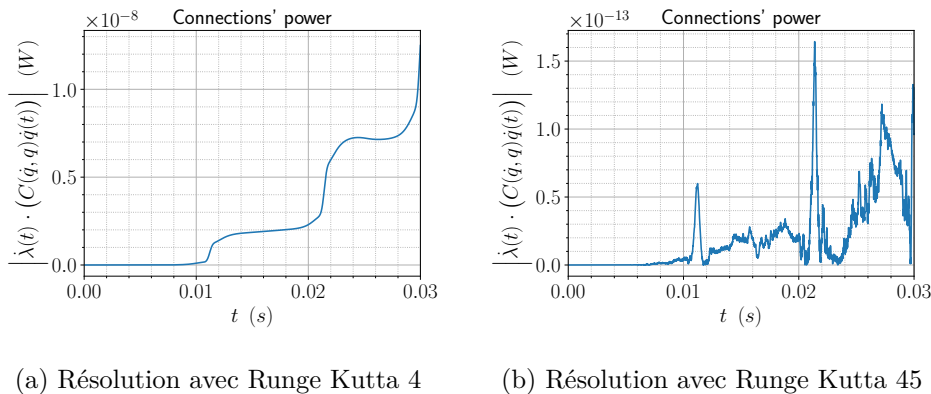


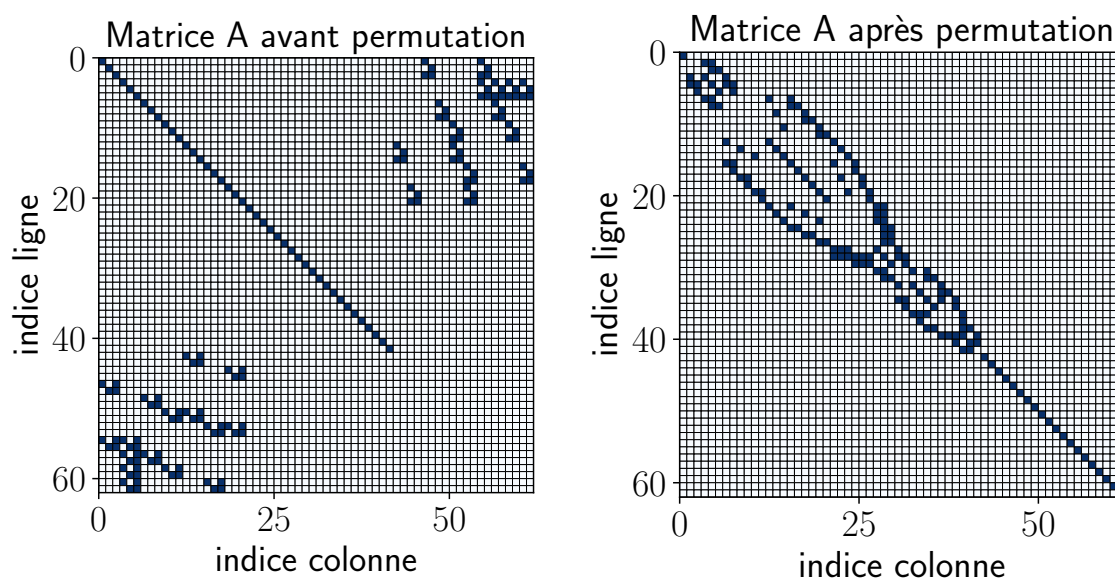
FIGURE 3.4 – Puissance des actions de liaisons

La figure 3.4a montre la puissance des actions de liaison lors d'une résolution temporelle sur une durée de 0.03 s avec un pas de temps de  $10^{-5}$  s en utilisant un algorithme de type Runge Kutta 4 (RK4). La figure 3.4b présente la même puissance pour un algorithme de type Runge Kutta 45 (RK45). La puissance est nettement plus faible avec le RK45 qu'avec le RK4 car le RK45 est plus performant. L'énergie perdue numériquement s'obtient par intégration de cette puissance et permet de quantifier la dérive numérique du calcul.

10. Algorithme de résolution d'un système linéaire réelle en double précision par application d'une SVD divide and conquer [148] à la matrice  $\mathbf{A}$  où  $\mathbf{A}$  est une matrice quelconque

### 3.5.7 Réduction du temps de calcul

L'inconvénient de la méthode retenue dans ce chapitre, i.e. l'utilisation des contraintes non-holonomes, est la taille du système d'équation obtenu. Des trois méthodes proposées dans la section 3.3, c'est celle qui donne le plus grand nombre d'équations. Le temps de calcul est donc, a priori, plus grand que pour les autres méthode. Il convient alors d'essayer de réduire ce temps de calcul afin de remédier partiellement à ce désavantage. Pour la configuration isostatique du cas test, il apparaît que seuls 6 % des termes de la matrice  $\mathbf{A}$  sont non nuls. Il est donc pertinent d'utiliser une routine adaptée aux matrices clairsemées. Pour cela, il est d'abord nécessaire de mettre cette matrice sous forme d'une matrice bande. Différents algorithmes existent mais le plus connu reste celui de Cuthill–McKee [149] ainsi que sa version inverse. La bibliothèque scipy [142] propose une fonction Python pour l'algorithme `reverse-cuthill-mckee` qui a été utilisée ici.

(a) Matrice  $\mathbf{A}$  avant permutation(b) Matrice  $\mathbf{A}$  après permutationFIGURE 3.5 – Matrice  $\mathbf{A}$  avant et après permutation

La figure 3.5a montre la matrice  $\mathbf{A}$  pour la configuration isostatique du cas test. Les termes en bleu foncé correspondent aux valeurs non nulles et les termes en bleu clair sont des 0. La figure 3.5b montre la matrice bande, correspondant à la matrice  $\mathbf{A}$ , après les permutations renvoyées

par l'algorithme reverse-cuthill-mckee. L'algorithme **DGBSV**<sup>11</sup>, de la librairie LAPACK [141], est utilisé pour la résolution du système matriciel. La fonction cython est proposée en annexe **B.5**. Le temps de calcul est réduit d'un facteur 20, par rapport à l'algorithme utilisant la routine DGESV, pour la configuration isostatique du cas test.

## 3.6 Modèle Hybride

L'approche simplifiée, considérant à considérer les matrices de contraintes comme des matrices de changement de repère, ne peut pas s'appliquer pour l'ajout de données expérimentales. Il faut donc reprendre une approche utilisant des contraintes. L'idée de ce modèle hybride est de permettre d'intégrer une trajectoire connue directement dans le modèle. Le modèle doit donc créer un effort assurant le respect de cette contrainte.

### 3.6.1 Définition

Soit une trajectoire, d'un système quelconque, et sa vitesse  $v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  connues. Cette vitesse peut s'écrire comme une fonction du temps.

$$v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \tilde{v}(t) \quad (3.113)$$

La contrainte traduisant la connaissance de cette vitesse est la suivante :

$$g_k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = v(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \tilde{v}(t) = 0 \quad (3.114)$$

Ces contraintes seront appelées des contraintes expérimentales. Soit un système multicorps soumis à  $m$  contraintes de liaisons et dont  $p$  vitesses sont mesurées dans le but de déterminer  $p$  composantes d'efforts inconnues. Le Lagrangien auxiliaire s'écrit alors :

$$L' = E_c - E_p + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j + \sum_{k=1}^p \mu_k g_k \quad (3.115)$$

Les contraintes  $f_j$  et  $g_k$  sont intégrables ce qui permet de simplifier l'équation dynamique, grâce à l'équation 3.30, pour obtenir l'équation 3.116.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^m \left[ \dot{\lambda}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} f_j(\dot{q}_i, q_i) \right] + \sum_{k=1}^p \left[ \dot{\mu}_k \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} g_k(\dot{q}_i, q_i, t) \right] = \sum F_i \quad (3.116)$$

Il faut alors dériver les contraintes expérimentales pour obtenir les  $p$  équations supplémentaires nécessaires à la résolution de l'équation dynamique.

---

11. Algorithme de résolution d'un système linéaire réelle en double précision par factorisation LU de la matrice A où A est une matrice bande quelconque

$$\begin{aligned}
\frac{dg_k}{dt} &= \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial g_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial g_k}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial v_k}{\partial q_i} \dot{q}_i - \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} = 0
\end{aligned} \tag{3.117}$$

De même que pour les contraintes de liaison, des matrices de contraintes sont définies afin de simplifier le formalisme. Ces matrices sont données par les équations 3.118 et 3.119.

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = (d_{ki}) \quad d_{ki} = \frac{\partial v_k}{\partial \dot{q}_i} \quad i \in \llbracket 1; 6n \rrbracket \quad k \in \llbracket 1; p \rrbracket \tag{3.118}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{t}) = (e_k) \quad e_k = \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial t} \quad k \in \llbracket 1; p \rrbracket \tag{3.119}$$

L'équation 3.117 peut alors être réécrite sous forme matricielle :

$$\mathbf{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{E}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \tag{3.120}$$

En complétant l'équation 3.34, il est possible d'écrire le modèle hybride sous la forme d'un modèle d'état. Ce modèle est donné par l'équation 3.121.

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & {}^t C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & {}^t D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ D(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{D}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\mu} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{E}(\mathbf{t}) \end{pmatrix} \tag{3.121}$$

### 3.6.2 Conflit entre les contraintes $f_j$ et $g_k$

Il est impératif de rester prudent avec l'utilisation des contraintes expérimentales  $g_k$ . Il est important de noter que ces contraintes permettent de déterminer un effort inconnu ou mal connu. Il ne faut en aucun cas que ces contraintes entrent en conflit avec les contraintes de liaison déjà présentes. Une double définition de la même contrainte rendra la résolution du système d'équation difficile car la matrice de contraintes totale deviendrait singulière. Il est donc préférable de raisonner sur les mobilités laissées libres par les liaisons. Pour une liaison pivot il est préférable d'utiliser la vitesse de rotation relative. Pour une glissière il est préférable d'utiliser la vitesse relative suivant l'axe de la liaison. Une façon simple de savoir si une mobilité peut supporter une contrainte expérimentale est de regarder le torseur cinématique de la liaison. Si cette mobilité est dans le torseur et qu'elle est non-nulle, alors il est possible de la contraindre.



### Exemple

Reprenons le cas du pendule simple présenté par la figure 3.1. Supposons à présent qu'il y aient des pertes dans la liaison pivot inconnues. Différentes mesures sont faites afin de déterminer ces pertes. La position du point  $G_1$  est mesurée et connue. Soit le torseur cinématique de la liaison pivot noté  $\{\mathbf{v}_{1/0}\}_{O, \vec{B}_0}$  et donné dans l'équation 3.122

$$\{\mathbf{v}_{1/0}\}_{O, \vec{B}_0} = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & - \\ 0 & - \\ - & \dot{\theta}_1 \end{array} \right\}_{O, \vec{B}_0} \quad (3.122)$$

Les vitesses  $\dot{x}_1$  et  $\dot{y}_1$  ne sont pas directement contraintes par la liaison pivot puisque le point de liaison n'est pas le point de référence. Il est possible de les utiliser mais cela implique d'ajouter deux contraintes supplémentaires. En revanche, l'utilisation de la vitesse de rotation  $\dot{\theta}_1$  ne donne qu'une seule contrainte. Il est donc plus intéressant d'utiliser  $\dot{\theta}_1$  pour la contrainte expérimentale. La contrainte s'exprime simplement comme suit :

$$g_1(t) = \dot{\theta}_1 - \frac{d\tilde{\theta}_1}{dt}(t) = 0 \quad (3.123)$$

Les matrices de contraintes s'en déduisent et il vient :

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(t) = \left[ \frac{d^2\tilde{\theta}_1}{dt^2}(t) \right] \quad (3.124)$$

L'effort correspondant, qui sera appelé effort additionnel, est donc

$$\mathbf{f}_{add} = -{}^t\mathbf{D}\dot{\mu}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\mu}(t) \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \text{force suivant } \vec{x}_0 \\ \leftarrow \text{force suivant } \vec{y}_0 \\ \leftarrow \text{couple suivant } \vec{z}_0 \end{array} \quad (3.125)$$

Il s'agit bien d'un couple au niveau de la liaison pivot.

### 3.6.3 Conditions initiales

La matrice de contraintes  $\mathbf{E}(t)$  fait intervenir des dérivées secondes des trajectoires. Les trajectoires mesurées doivent donc être des fonctions de classe  $C^2$  au minimum. De plus, ces fonctions doivent être définies, et  $C^2$ , en tout point de l'intervalle de temps choisi pour la simulation numérique. Le vecteur d'état doit impérativement être initialisé en tenant compte de ces contraintes expérimentales. Dans le cas du pendule, il faut impérativement que  $\mathbf{q}(0)$  et  $\dot{\mathbf{q}}(0)$  correspondent respectivement à  $\tilde{\theta}_1(0)$  et  $\frac{d\tilde{\theta}_1(0)}{dt}$ . Le non-respect de cet impératif entraînerait un conflit rendant

le système insoluble. Une méthode permettant de déterminer les angles, pour un problème en 3 dimensions, à partir de plusieurs vecteurs est donnée en annexe B.8.

### 3.6.4 Cas d'application

Afin d'illustrer ce qui a été dit dans cette section, il est pertinent d'envisager un cas d'application. Fort heureusement, il n'est pas indispensable de disposer de données expérimentales pour utiliser cette méthode. Reprenons le cas de « Andrew's squeezer mechanism » de la section 3.5. Un couple constant est appliqué au point  $O$ . Supposons maintenant que ce couple soit inconnu et que les résultats de calcul, obtenus dans la section 3.5, soient des données expérimentales. De même que pour l'exemple de la section 3.6.2, il est préférable de raisonner sur la mobilité laissée libre par la liaison pivot et qui est pilotée par le couple que nous cherchons à déterminer. Il vient alors la contrainte suivante

$$g_1(t) = \dot{\beta} - \frac{d\tilde{\beta}}{dt}(t) = 0 \quad (3.126)$$

Et les matrices de contraintes associées

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dot{x}_1 & \dot{y}_1 & \dot{\beta} & \dot{x}_2 & \dots & \dot{\theta}_7 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d^2\tilde{\beta}}{dt^2}(t) \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

Le seul terme non nul, de l'effort additionnel généralisé, est le couple appliqué sur le solide 1. L'angle  $\tilde{\beta}$  est approché par des splines cubiques [150] qui sont de classe  $C^2$ . La figure 3.6 montre l'allure  $\beta_{cs}^r$ , de l'angle approché  $\tilde{\beta}_{cs}$ , et celles de ses dérivées.

La figure 3.7 montre l'évolution de l'écart entre le couple déduit, à partir de la contrainte expérimentale, et le couple de référence  $T_{ref} = 0.033 \text{ Nm}$ . Premièrement, il apparaît que cette dérive augmente au cours de la simulation ce qui est tout à fait logique au regard de la section 3.5.6. Une chose plus curieuse est la présence de pics sur cette courbe. Il s'avère en fait que les abscisses de ces pics correspondent aux abscisses pour lesquels l'accélération  $\ddot{\beta}_{cs}^r$  atteint un extremum local.

Dans le cas présent, nous disposons également de la vitesse  $d\tilde{\beta}/dt$  et de l'accélération  $d^2\tilde{\beta}/dt^2$ . Il est donc intéressant d'observer l'influence de la dérivation sur la précision du couple obtenu. La figure 3.8a présente donc l'écart obtenu en dérivant l'interpolation de la vitesse et la figure 3.8b présente l'écart obtenu en utilisant l'interpolation de l'accélération directement. La comparaison entre les figures 3.7, 3.8a et 3.8b montre que les résultats sont très sensibles à la précision des données utilisées pour l'interpolation.

Le cas du couple en entrée est très simple puisque ce couple pilote directement la mobilité à contraindre. Un cas moins évident, toujours pour le « Andrew's squeezer mechanism », est

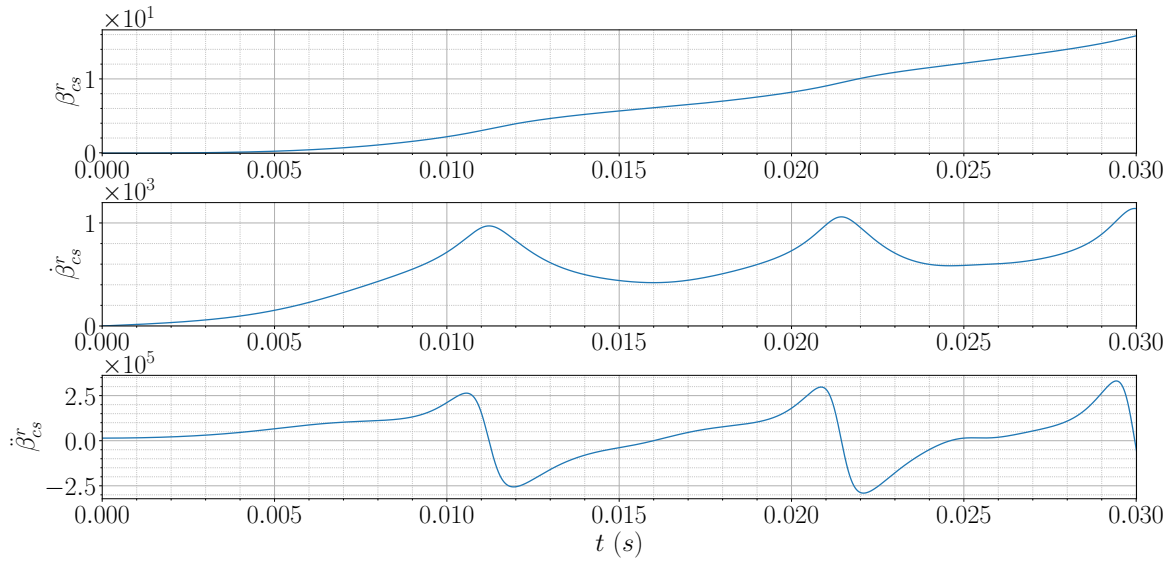


FIGURE 3.6 – Allures de l’angle  $\tilde{\beta}_{cs}$  et de ses dérivées

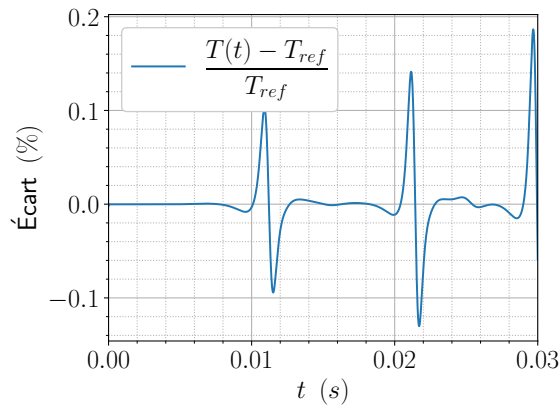


FIGURE 3.7 – Déviation du couple « expérimental » avec double dérivation de l’interpolation de  $\tilde{\beta}$

d’imaginer que la raideur du ressort est inconnue. Dans ce cas, il est possible de contraindre la vitesse au point  $D$  mais ce n’est pas la méthode la plus simple puisqu’il est nécessaire d’exprimer cette vitesse en fonction des coordonnées généralisées et de leurs dérivées. Le ressort est fixé au solide 3. Le plus logique est donc de chercher une mobilité à contraindre pour ce solide. Le plus simple est de s’intéresser à la vitesse de rotation entre le solide 3 et le bâti. Contraindre la mobilité  $d\tilde{\theta}_3/dt$  va donner un couple, au point  $B$ , noté  $C_{add,3}$ . Un couple est défini en tout point puisqu’il est invariant dans l’espace. Le point est précisé car c’est en ce point qu’est la

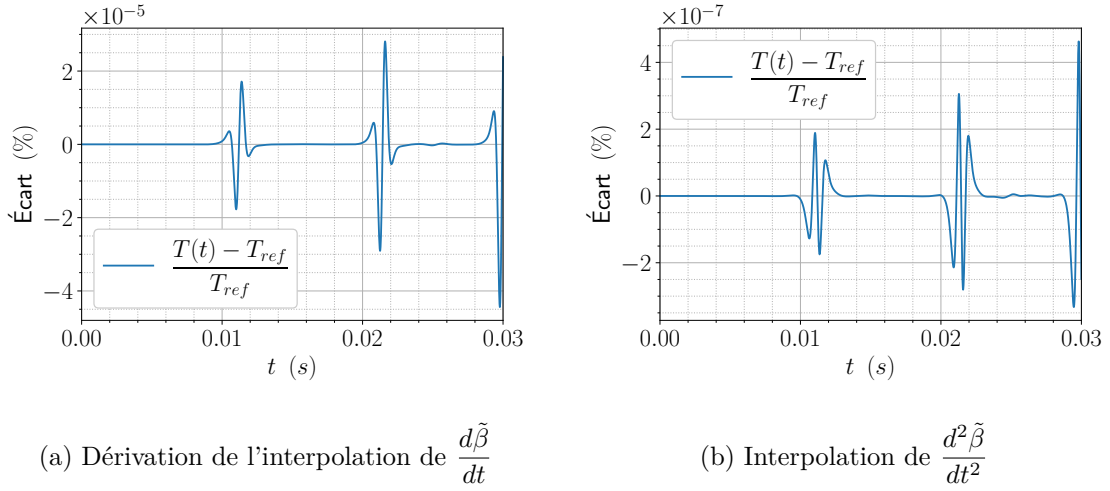


FIGURE 3.8 – Écart entre le couple « expérimental » et le couple de référence

liaison dont la mobilité est contrainte. C'est donc en ce point que le modèle va créer un couple additionnel permettant de respecter la contrainte expérimentale. Les matrices de contraintes associées ressemblent à celles du cas précédent.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dot{x}_1 & \dots & \dot{y}_3 & \dot{\theta}_3 & \dot{x}_4 & \dots & \dot{\theta}_7 \end{bmatrix} \quad \dot{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}(t) = \begin{bmatrix} \frac{d^2\tilde{\theta}_3}{dt^2}(t) \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

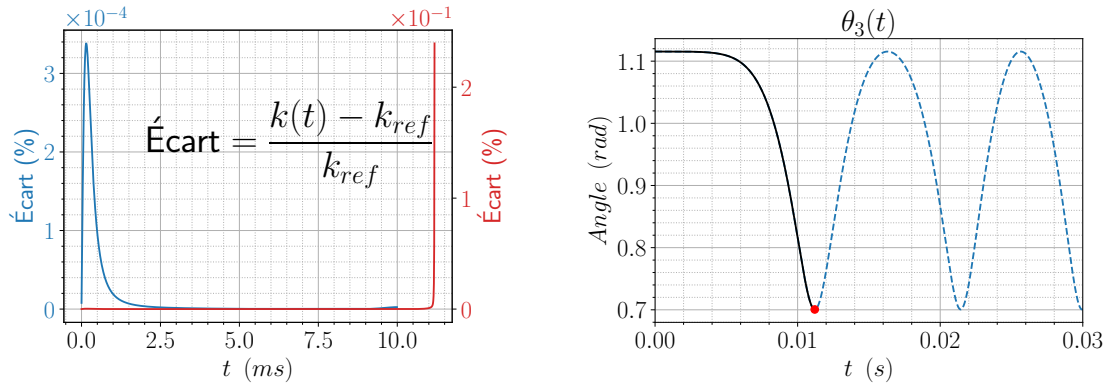
Pour retrouver la raideur du ressort, il faut écrire le moment de l'effort du ressort au point  $B$ <sup>12</sup> et procéder par identification.

$$C_{add,3} = \left[ -k(l - l_0)\overrightarrow{BD} \wedge \frac{\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CD}\|} \right] \cdot \overrightarrow{z_0} \quad (3.129)$$

Il s'avère que la simulation numérique s'arrête brusquement en raison d'une singularité dans la matrice de contrainte. Cette singularité apparaît lors de l'annulation de  $\dot{\theta}_3$  à  $t = 0.0112$  s. A cet instant les points O, G et P sont alignés. Le point précédent la singularité est représenté par un point rouge sur la figure 3.9b. Le traitillé bleu représente l'angle  $\theta_3(t)$  obtenu dans la section 3.5. Le trait noir correspond à l'angle  $\theta_3(t)$  obtenu ici avant que le calcul ne s'arrête.

La figure 3.9a montre l'écart entre la raideur obtenue lors de la simulation et la valeur attendue  $k_{ref} = 4530 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . La courbe rouge montre bien que l'écart augmente très fortement juste avant l'arrêt du calcul. La courbe bleue montre, quant à elle, que cet écart est relativement faible avec néanmoins un pic au début du calcul. Ainsi, en dépit d'un problème de singularité, il est

12. D'où la nécessité de savoir en quel point le modèle va créer le couple.



(a) Écart entre la raideur « expérimentale » et la raideur de référence et la (b) Évolution de l'angle  $\theta_3$  par rapport à sa consigne donnée par la contrainte

FIGURE 3.9 – Identification de la raideur du ressort

possible de retrouver la valeur de la raideur du ressort. A noter que l'utilisation de la vitesse au point  $D$ , pour l'établissement de la contrainte, présente le même problème de singularité.

### 3.7 Application à un système houlomoteur multicorps

Le chapitre 1 a permis d'analyser et d'améliorer une méthode visant à exprimer l'effort de radiation (au premier ordre) dans le domaine temporel. Cette méthode a été validée par comparaison entre les résultats temporels et les résultats fréquentiels auxquels ils doivent correspondre. Dans la section 3.5, le modèle multicorps a été validé. Même si ces deux modèles ont été validés séparément, il est nécessaire de valider le modèle complet formé à partir des ces deux modèles en l'appliquant à un cas test.

#### 3.7.1 Description du cas test

Afin de valider le modèle complet, nous nous intéressons à un cas test de la bibliothèque [WecSim](#) [151]. La figure 3.10a, tirée de [37], montre les dimensions du système RM3. Ce système est un point absorber composé d'un flotteur (couleur or sur la figure) oscillant le long d'une colonne (couleur grise sur la figure) munie d'une plaque anti-pilonnement à sa base. Le développement de ce système est détaillé par Neary et al. [152]. Le repère utilisé pour ce problème diffère de celui utilisé dans la section 3.5 et est présenté sur la figure 3.10b. Les données hydrodynamiques de ce cas test sont disponibles dans les [tutoriaux WecSim](#). Le problème considéré est plan ( $O\vec{x}_0\vec{z}_0$ ), ce qui permet de faire les mêmes simplifications que dans la section 3.5. La captation d'énergie n'est pas considérée pour ce cas test, nous reviendrons dessus plus tard dans le manuscrit. Il en va de même pour les pertes dans les liaisons, dues aux frottements mécaniques, les efforts

hydrodynamiques visqueux et l'effort de rappel qui, pour l'instant, reste linéaire. Les centres de gravité  $G_1$  et  $G_2$  sont repérés, dans le référentiel fixe, par les coordonnées  $x_1, z_1, x_2$  et  $z_2$ . Les positions angulaires des solides sont respectivement notées  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Le vecteur des coordonnées généralisées, noté  $q$ , est défini dans l'équation 3.130.

$$\mathbf{q}(t) = {}^t[x_1(t), z_1(t), \theta_1(t), x_2(t), z_2(t), \theta_2(t)] \quad (3.130)$$

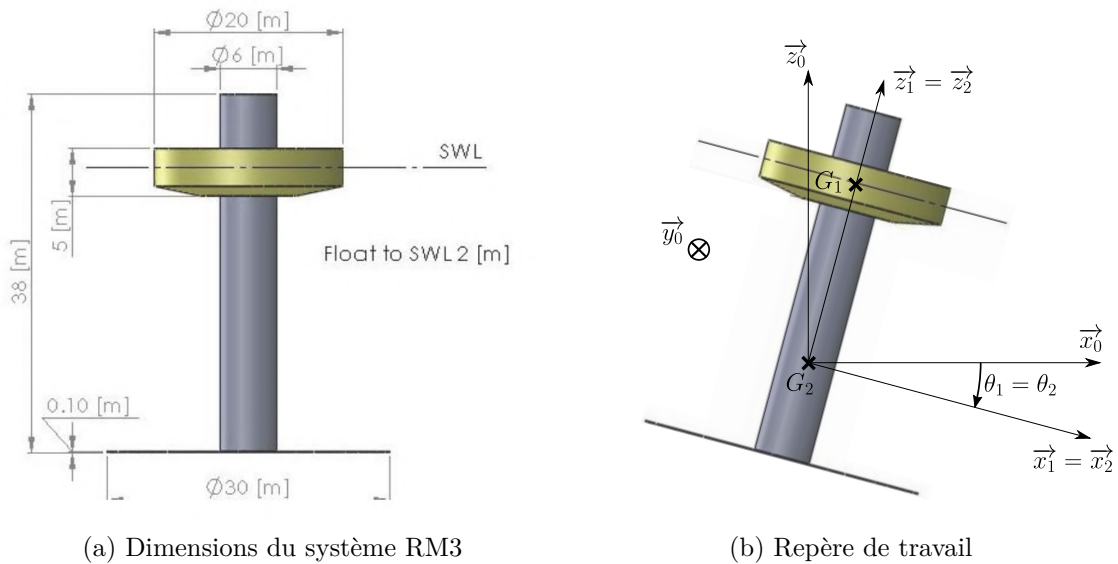


FIGURE 3.10 – Système RM3 et repère de travail

Les caractéristiques mécaniques sont données dans l'annexe B.6. Le flotteur sera le solide 1 et la colonne sera le solide 2. La liaison entre le flotteur 1 et la colonne 2 est modélisée par une liaison glissière.

En adaptant l'équation 3.75, il est très simple d'obtenir l'effort  $\overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}_{G_1, \vec{B}_0}$ .

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{f_{2 \rightarrow 1}}_{G_1, \vec{B}_0} = & \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \cos(\theta_1) & 0 & \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \sin(\theta_1) & 0 & \cos(\theta_1) \end{pmatrix}}_{{}^t C_{2 \rightarrow 1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{1A} & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ Z_{1A} & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ Y_{1A} & X_{1A} & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix} \\
 & (3.131)
 \end{aligned}$$

Sachant que  $G_1$  est sur l'axe de la glissière, il est possible de poser  $Z_{1A} = 0$ . Ce qui donne :

$${}^t C_{2 \rightarrow 1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & \sin(\theta_1) & 0 \\ -\sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{1A} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1) & 0 \\ -\sin(\theta_1) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

Notons que la valeur de  $Z_{1A} = 0$  n'a aucune incidence sur la dynamique du système. Le terme  ${}^t C_{1 \rightarrow 2}$  est obtenu de la même façon

$${}^t C_{1 \rightarrow 2} = \Delta - {}^t C_{2 \rightarrow 1} \quad (3.133)$$

Avec,

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (y_1 - y_2) \sin(\theta_1) & (z_1 - z_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ -(z_1 - z_2) \cos(\theta_1) - (x_1 - x_2) \sin(\theta_1) & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ (y_1 - y_2) \cos(\theta_1) & (x_1 - x_2) & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

Ce qui donne finalement,

$${}^t C_{1 \rightarrow 2} = \begin{pmatrix} -\cos(\theta_1) & 0 \\ +\sin(\theta_1) & 0 \\ -(z_1 - z_2) \cos(\theta_1) - (x_1 - x_2) \sin(\theta_1) & -1 \end{pmatrix} \quad (3.135)$$

### 3.7.2 Modèle complet

Le modèle complet comprenant à la fois la description, non-linéaire, de la dynamique d'un système multicorps et l'effort de radiation, à l'ordre 1, est donné à partir des développements faits dans ce chapitre et de ceux fait dans le chapitre précédent. L'expression de ce modèle est donnée par le système d'équations 3.136. Une version alternative est proposée en annexe B.7.

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} M(q) & \mathbf{0} & {}^t C(q, \dot{q}) \\ \mathbf{0} & I_{6n} & \mathbf{0} \\ C(q, \dot{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(q, \dot{q}) & -K_h & \mathbf{0} \\ I_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(q, \dot{q}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ q \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum F \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\ \dot{X}_{ij}(t) = A_{c,ij} X_{ij}(t) + B_{c,ij} \dot{q}_j(t) \\ y_i(t) = \sum_{j=1}^n [C_{c,ij} X_{ij}(t) + D_{c,ij} \dot{q}_j(t)] \\ f_{rad}(t) = -A_{\infty} \ddot{q}(t) - y(t) \end{array} \right. \quad (3.136)$$

Avec

$$\sum F = f_{rad}(t) + f_{ex}(t) + \dots$$

Étant donné que le problème est plan, le terme  $-N(q, \dot{q})$  disparaît.

La matrice de rappel hydrostatique  $K_h$  est contenue dans les données hydrodynamiques ainsi que la masse ajoutée et l'amortissement de radiation qui permettent la construction du modèle d'état de la radiation. L'effort d'excitation de la houle se trouve également dans ces données. La simulation numérique à reproduire ici est un cas de vague régulière de période  $T = 8$  s. Ainsi, l'effort d'excitation est directement obtenu à partir des données fréquentielles.

$$F_{ex}(t) = \text{Re} \left[ R_f(t) \frac{H}{2} F_{ex}(\omega, \beta) e^{i\omega t} \right] \quad (3.137)$$

Avec  $H$  la hauteur de vague qui vaut 2.5 m,  $\beta$  l'angle d'incidence de la houle qui vaut  $0^\circ$  et  $R_f$  la fonction rampe permettant d'éviter de trop grandes variations lors du régime transitoire. Cette fonction rampe est, en accord avec la [théorie de WecSim](#), donnée par l'équation 3.138.

$$R_f(t) = \begin{cases} 1 - \cos\left(\frac{\pi t}{t_r}\right) & \frac{t}{t_r} < 1 \\ 1 & \frac{t}{t_r} \geq 1 \end{cases} \quad (3.138)$$

Avec  $t_r$  la durée de la rampe qui vaut 100 secondes. La durée totale de la simulation est de 400 secondes. Le système différentiel est résolu par un algorithme de Runge Kutta 45 avec un pas de temps de  $10^{-2}$  seconde.

La figure 3.11 montre le pilonnement du flotteur (float), le pilonnement de la colonne (spar) ainsi



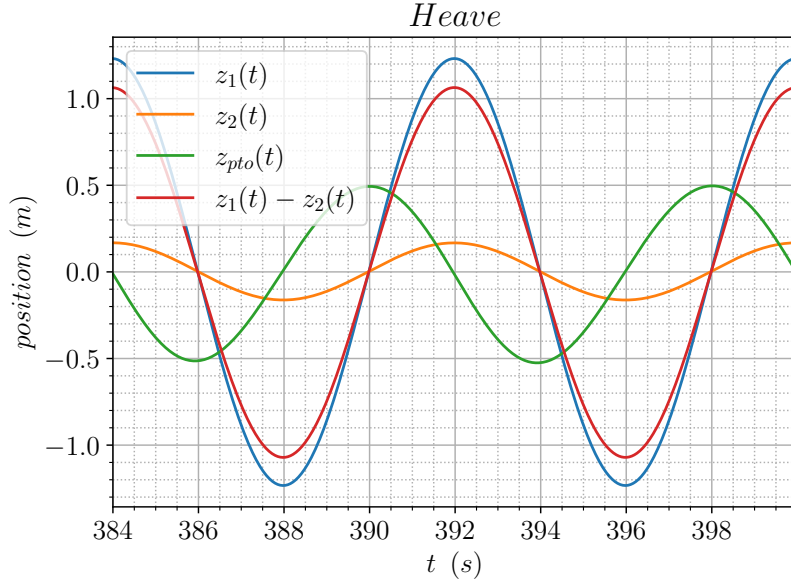


FIGURE 3.11 – Pilonnement du flotteur, de la colonne, pilonnement et mouvement relatif du flotteur vis-à-vis de la colonne

que le pilonnement relatif entre les deux solides sur les deux dernières périodes de la simulation. Ce pilonnement relatif correspond parfaitement à celui donné en Figure du rapport [38]. Cette correspondance valide le modèle complet.

### 3.7.3 Cas particulier de la houle régulière

En revanche, étant donné que nous extrapolons nos données hydrodynamiques et que nous utilisons une autre définition de la fonction de retard (cf chapitre 2), nous n’obtenons pas la même réponse que WecSim pour le tangage et pour le cavement. Il est néanmoins possible de vérifier le modèle complet en le comparant à un modèle plus simple, uniquement valable lorsqu’il y a une seule vague incidente. Ainsi, la pulsation  $\omega$  est fixée et il vient, pour un problème plan, le modèle explicité dans l’équation 3.139 que nous appellerons modèle régulier.

$$\begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) + A(\omega) & \mathbf{0} & {}^t C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -B(\omega) & -\mathbf{K}_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (3.139)$$

La seule modification est l’effort de radiation qui retrouve la forme fréquentielle déjà vue dans le chapitre précédent. Les paramètres de la simulation restent inchangés.

La figure 3.12 montre le cavement des solides 1 et 2 pour le modèle régulier ( $X_{1r}$  et  $X_{2r}$ )

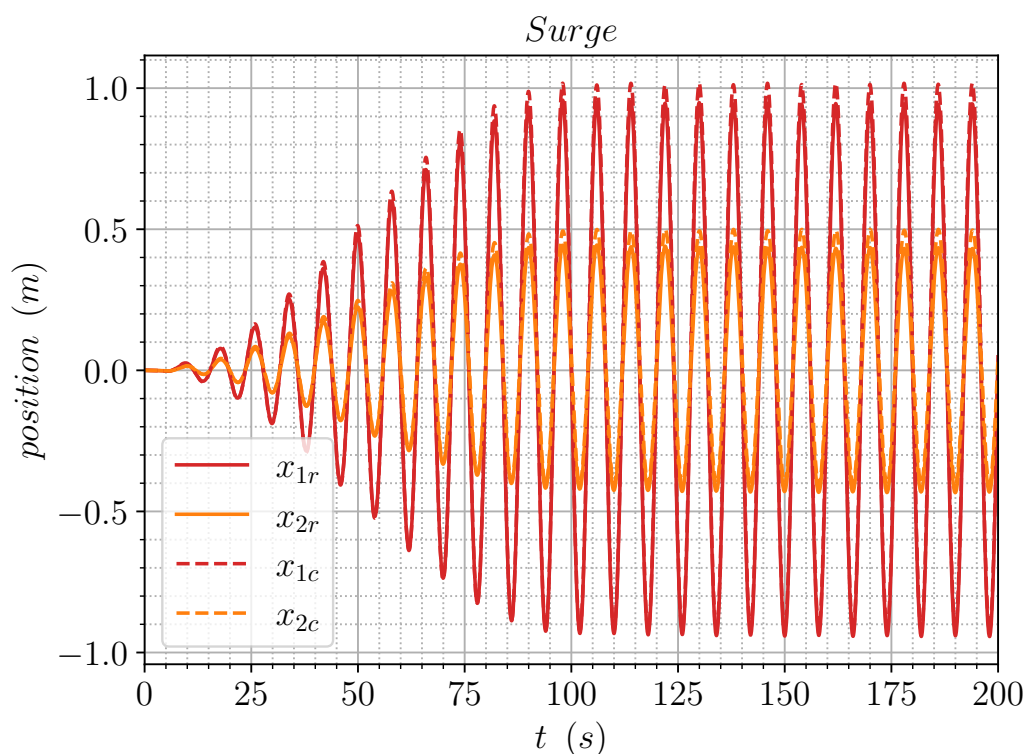


FIGURE 3.12 – Cavalemt du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier

et pour le modèle complet ( $X_{1c}$  et  $X_{2c}$ ) pour les 200 premières secondes de la simulation. Les figures 3.13 et 3.14 montrent respectivement, le tangage et le pilonnement, de façon analogue. Une très bonne correspondance apparaît pour le tangage et le pilonnement. En revanche, il y a des écarts entre les courbes de cavalemt avec une erreur maximale de 7% pour le cavalemt du flotteur et de 12% pour celui de la colonne (en prenant le modèle régulier comme référence). Ces écarts sont trop importants pour être acceptables. Il est nécessaire de regarder ces écarts de plus près.

La figure 3.15 montre le cavalemt des solides 1 et 2 pour le modèle régulier ( $X_{1r}$  et  $X_{2r}$ ) et pour le modèle complet ( $X_{1c}$  et  $X_{2c}$ ) sur les deux dernières périodes de la simulation. Il apparaît clairement que la courbe de cavalemt obtenue, avec le modèle complet, est décalée par rapport à la courbe obtenue avec le modèle régulier. Il ne s'agit donc pas vraiment d'un écart mais plutôt d'une dérive. Cette dérive s'explique par l'absence de radiation dans les premiers pas de temps, pour le modèle complet, car les vecteurs d'état de radiation  $X^{ij}$  sont initialement nuls et sont incrémentés petit à petit. Ainsi, l'effort de radiation ne se met pas en place aussi vite que pour le modèle régulier et, par conséquent, l'effort d'excitation des premiers pas de temps entraîne une légère dérive malgré la présence de la fonction rampe dans le modèle. L'ajout d'un effort

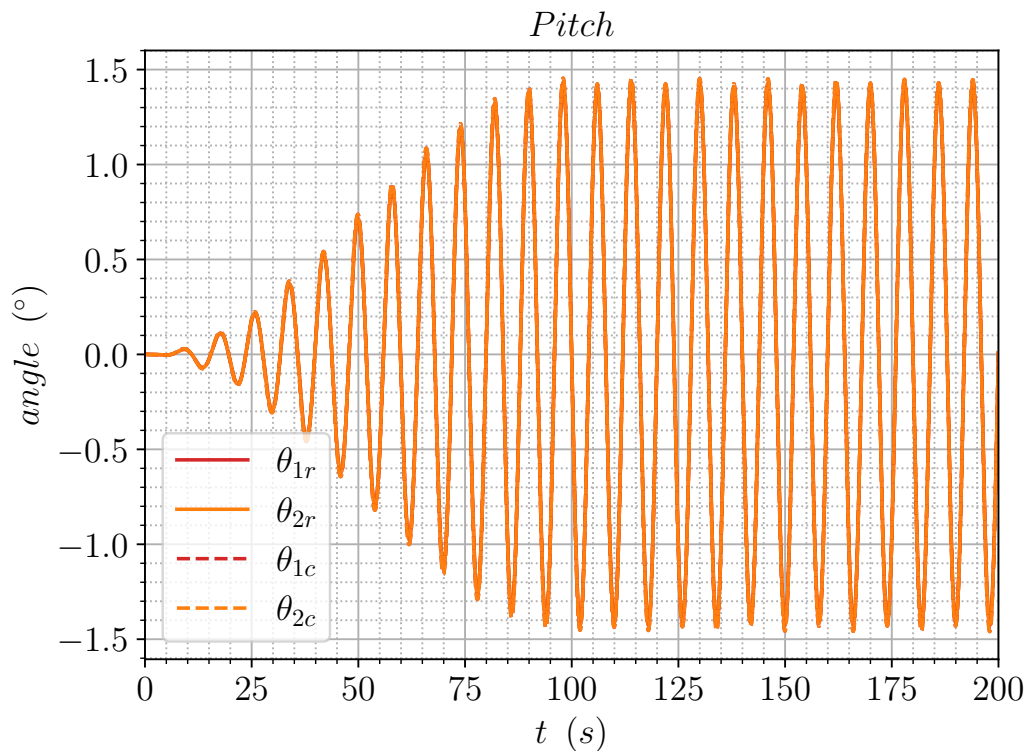


FIGURE 3.13 – Tangage du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier

d’ancrage et/ou d’un amortissement visqueux aura tendance à diminuer, voire à supprimer, cette dérive. En faisant abstraction de cette dérive, tous les écarts sont inférieurs à 5%. Le processus d’extrapolation a été pensé et codé pour des données HydroStar, avec un filtrage des fréquences irrégulières et un contrôle du maillage, pour que les résultats aient un sens physique sur la totalité du spectre de fréquence balayé par le calcul. Les données utilisées dans cette partie sont plus accidentées et le code d’extrapolation n’est pas parfaitement adapté à ce genre de données. Il est donc normal d’avoir des écarts, supérieurs à ceux obtenus dans le chapitre précédent, car nous sous-estimons légèrement l’effort de radiation. Le modèle complet est néanmoins validé. La figure 3.16 montre le déplacement relatif obtenu pour chacun des deux modèles. Il apparaît que, bien qu’il y ait une dérive sur le cavaleme avec le modèle complet, le déplacement relatif n’est que faiblement impacté.

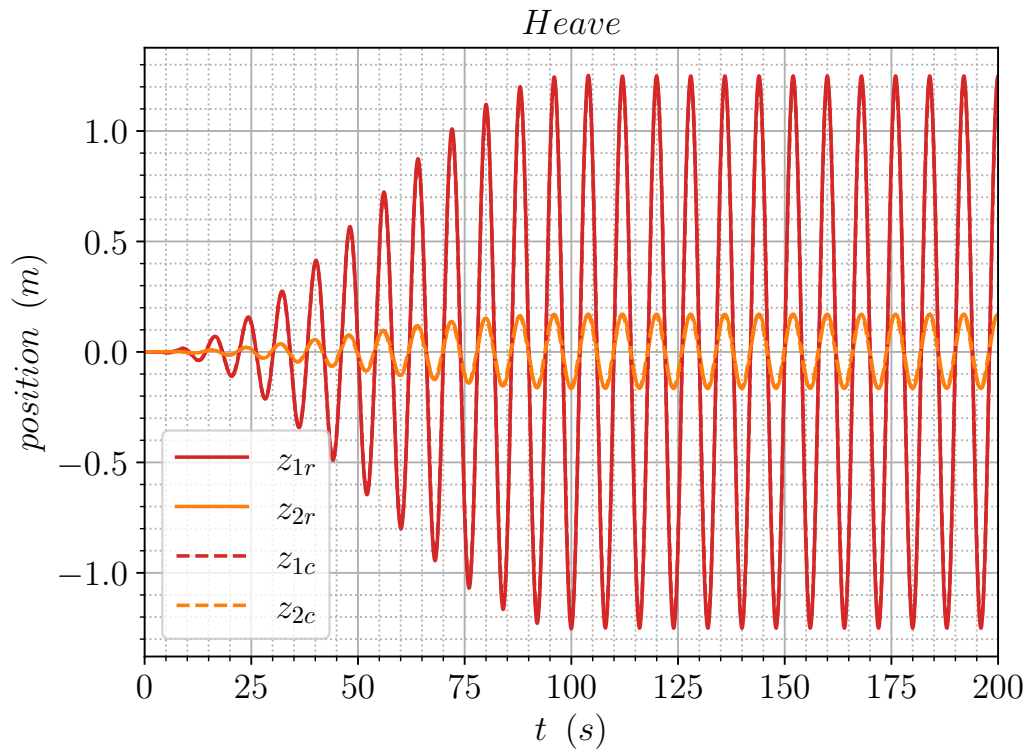


FIGURE 3.14 – Pilonnement du flotteur et de la colonne pour les modèles complet et régulier

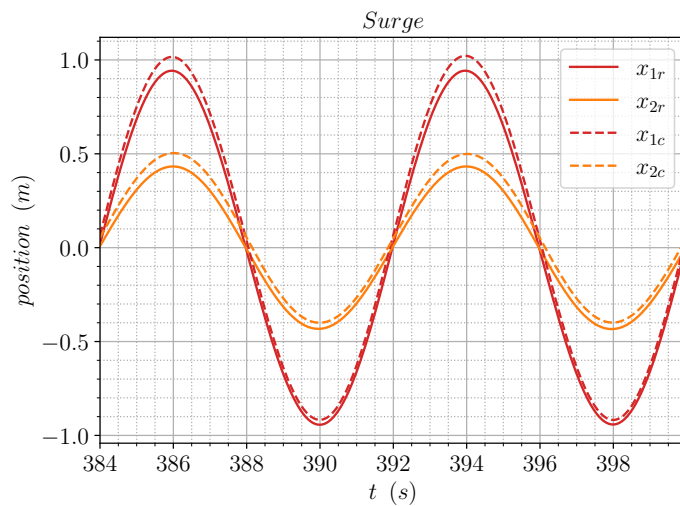


FIGURE 3.15 – Zoom sur le cavalemt pour les modèles complet et régulier

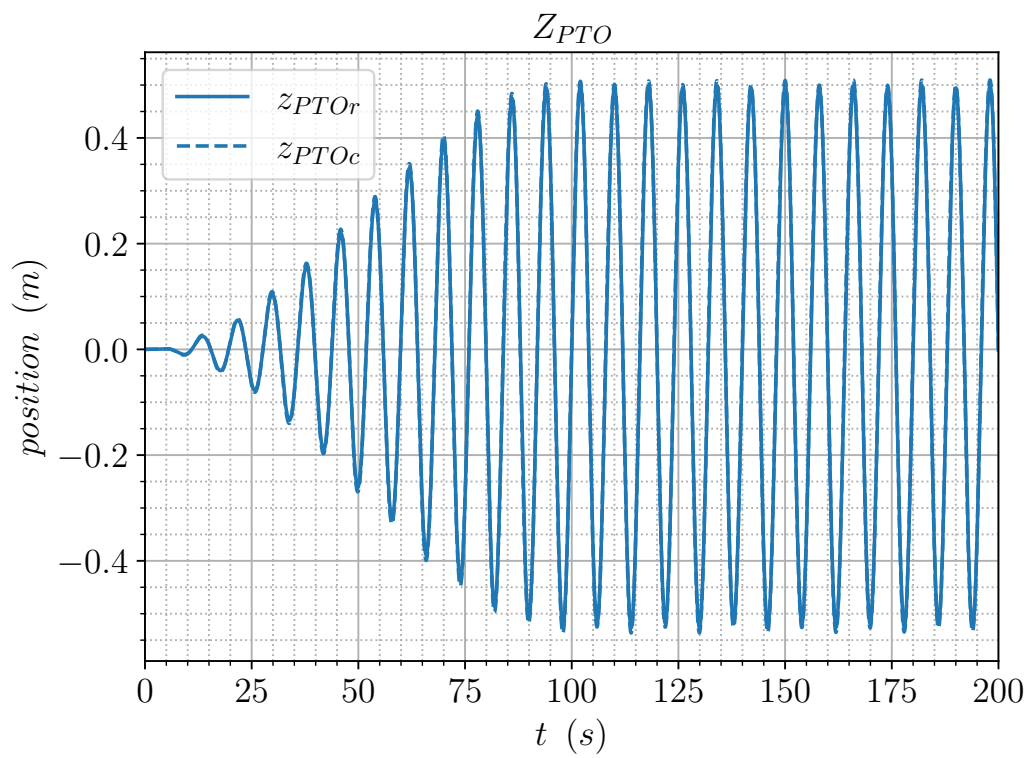


FIGURE 3.16 – Déplacement relatif pour les modèles complet et régulier

### 3.7.4 Ajout de la captation d'énergie

La captation d'énergie, ou PTO, peut être représentée par un effort. Pour un système avec un flotteur seul, cet effort est défini comme étant appliqué par la référence fixe sur le flotteur. Cette convention est conservée pour le système étudié ici. L'effort  $\overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}}_{M, \vec{B}_0}$  est donc défini comme étant appliqué par la référence mobile, i.e. la colonne 2, sur le flotteur 1. L'effort est appliqué en un point  $M$  de l'axe de la glissière. Nous supposons implicitement ici que  $M$  est sur l'axe de révolution du système. Dans la réalité il y a plusieurs points de liaison. Les vecteurs  $\overrightarrow{G_2 G_1}$ ,  $\overrightarrow{M G_1}$  et  $\overrightarrow{G_2 M}$  sont donc colinéaires au vecteur  $\vec{z}_1$ . Soit  $z_{PTO}$  la position relative du flotteur 1 par rapport à la colonne 2 suivant l'axe  $\vec{z}_1$ . Son expression est donnée dans l'équation 3.140.

$$z_{PTO} = \overrightarrow{G_2 G_1} \cdot \vec{z}_1 = \sin(\theta_1)(x_1 - x_2) + \cos(\theta_1)(z_1 - z_2) \quad (3.140)$$

Afin de simplifier la notation, nous posons  $\theta = \theta_1 = \theta_2$ . L'égalité entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$  est implicitement assurée par la contrainte en rotation de la liaison glissière.

#### 3.7.4.1 Contrôle résistif

Pour le contrôle résistif, l'effort est modélisé par un simple amortissement. Le coefficient d'amortissement est noté  $b_{PTO}$ . Ainsi, l'effort s'écrit comme suit :

$$\overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}}_{G_1, \vec{B}_0} = -b_{PTO} \overrightarrow{v_{PTO}} \quad (3.141)$$

Avec  $\overrightarrow{v_{PTO}}$  la vitesse relative entre le flotteur et la colonne suivant l'axe  $\vec{z}_1$ .

$$\overrightarrow{v_{PTO}} \cdot \vec{z}_1 = \dot{z}_{PTO} = \sin(\theta)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2 - \dot{\theta}(z_1 - z_2)) + \cos(\theta)(\dot{z}_1 - \dot{z}_2 + \dot{\theta}(x_1 - x_2)) \quad (3.142)$$

L'effort généralisé du PTO peut alors s'écrire comme suit :

$$\mathbf{f}_{PTO} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}}_{G_1, \vec{B}_0} \\ \overrightarrow{f_{PTO, 1 \rightarrow 2}}_{G_2, \vec{B}_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{PTO} \dot{z}_{PTO} \sin(\theta) \\ -b_{PTO} \dot{z}_{PTO} \cos(\theta) \\ 0 \\ +b_{PTO} \dot{z}_{PTO} \sin(\theta) \\ +b_{PTO} \dot{z}_{PTO} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.143)$$

Une manière élégante de trouver ce résultat est d'utiliser une fonction de dissipation de Rayleigh [153] issue de développements dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Cette fonction, notée  $\mathcal{F}$ , permet de traiter les efforts d'amortissement par une approche énergétique.

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} b_{PTO} (\dot{z}_{PTO})^2 \quad (3.144)$$

L'effort généralisé du PTO s'obtient alors en dérivant partiellement cette fonction par les coordonnées généralisées du système.

$${}^t \mathbf{f}_{PTO} = - \left( \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_1} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{z}_2} \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_2} \right) \quad (3.145)$$

### 3.7.4.2 Contrôle réactif

L'effort du PTO se traite assez simplement pourvu qu'il ne fasse pas intervenir les accélérations généralisées. En effet, les accélérations sont inconnues à un instant  $t$ . Il est donc nécessaire de procéder différemment lorsqu'elles interviennent dans le contrôle. L'exemple du contrôle réactif va permettre d'illustrer ce cas de figure. L'effort du PTO a désormais la forme suivante :

$$\overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}_{G_1, \vec{B}_0}} = (-m_{PTO} \ddot{z}_{PTO} - b_{PTO} \dot{z}_{PTO} - k_{PTO} z'_{PTO}) \vec{z}_1 \quad (3.146)$$

Avec  $z'_{PTO}$  la position relative à laquelle est retranchée la position relative à l'équilibre.

$$z'_{PTO} = z_{PTO}(t) - z_{PTO,eq} \quad (3.147)$$

Et,

$$\begin{aligned} \ddot{z}_{PTO} = & \ddot{\theta} [\cos(\theta) (x_1 - x_2) - \sin(\theta) (z_1 - z_2)] + \sin(\theta) (\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + \cos(\theta) (\ddot{z}_1 - \ddot{z}_2) && \leftarrow a_{PTO,1} \\ & 2\dot{\theta} [\cos(\theta) (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \sin(\theta) (\dot{z}_1 - \dot{z}_2)] - \dot{\theta}^2 [\sin(\theta) (x_1 - x_2) + \cos(\theta) (z_1 - z_2)] && \leftarrow a_{PTO,2} \end{aligned} \quad (3.148)$$

Le terme  $\ddot{z}_{PTO}$  est donc composé d'un terme  $a_{PTO,1}$ , faisant apparaître les accélérations généralisées, et d'un terme  $a_{PTO,2}$  ne faisant apparaître que les vitesses et les coordonnées généralisées. L'effort du PTO se réécrit alors comme suit :

$$\overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}_{G_1, \vec{B}_0}} = \underbrace{-m_{PTO} a_{PTO,1}}_{\text{terme 1}} \vec{z}_1 \quad \underbrace{(-m_{PTO} a_{PTO,2} - b_{PTO} \dot{z}_{PTO} - k_{PTO} z'_{PTO})}_{\text{terme 2}} \vec{z}_1 \quad (3.149)$$

Le **terme 2** est traité de la même façon que pour la section 3.7.4.1. Il en résulte un effort généralisé partiel pour le PTO, noté  $\mathbf{f}'_{PTO}$ , et explicité dans l'équation 3.150.

$$\mathbf{f}'_{PTO} = \begin{pmatrix} -(m_{PTO} a_{PTO,2} + b_{PTO} \dot{z}_{PTO} + k_{PTO} z'_{PTO}) \sin(\theta) \\ -(m_{PTO} a_{PTO,2} + b_{PTO} \dot{z}_{PTO} + k_{PTO} z'_{PTO}) \cos(\theta) \\ 0 \\ +(m_{PTO} a_{PTO,2} + b_{PTO} \dot{z}_{PTO} + k_{PTO} z'_{PTO}) \sin(\theta) \\ +(m_{PTO} a_{PTO,2} + b_{PTO} \dot{z}_{PTO} + k_{PTO} z'_{PTO}) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.150)$$

En revanche, le [terme 1](#) doit être ajouté à la matrice masse. Nous commençons par réécrire le terme  $a_{PTO,1}$  en fonction de  $\ddot{q}$ . Une écriture possible est donnée dans l'équation [3.151](#).

$$a_{PTO,1} = [\sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\theta) (x_1 - x_2) - \sin(\theta) - \cos(\theta) - \sin(\theta) (z_1 - z_2)] \ddot{\mathbf{q}} \quad (3.151)$$

La matrice  $\mathbf{M}_{PTO}$  est alors définie telle que :

$$-\mathbf{M}_{PTO} \ddot{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} -m_{PTO} a_{PTO,1} \sin(\theta) \\ -m_{PTO} a_{PTO,1} \cos(\theta) \\ 0 \\ +m_{PTO} a_{PTO,1} \sin(\theta) \\ +m_{PTO} a_{PTO,1} \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.152)$$

L'expression de  $\mathbf{M}_{PTO}$  est donc la suivante :

$$\mathbf{M}_{PTO} = m_{PTO} \begin{pmatrix} s^2(\theta) & s(\theta)c(\theta) & s(\theta)c(\theta)x_{12} & -s^2(\theta) & -s(\theta)c(\theta) & -s^2(\theta)z_{12} \\ s(\theta)c(\theta) & c^2(\theta) & c^2(\theta)x_{12} & -s(\theta)c(\theta) & -c^2(\theta) & -s(\theta)c(\theta)z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s^2(\theta) & -s(\theta)c(\theta) & -s(\theta)c(\theta)x_{12} & s^2(\theta) & s(\theta)c(\theta) & s^2(\theta)z_{12} \\ -s(\theta)c(\theta) & -c^2(\theta) & -c^2(\theta)x_{12} & s(\theta)c(\theta) & c^2(\theta) & s(\theta)c(\theta)z_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.153)$$

Avec  $c$  et  $s$  les fonctions cosinus et sinus. Les termes  $x_{12}$  et  $z_{12}$  correspondent respectivement aux différences  $(x_1 - x_2)$  et  $(z_1 - z_2)$ .

### 3.7.4.3 Contrôle par Latching

Le contrôle par Latching peut être modélisé numériquement par un amortissement de récupération  $b_{PTO}$  auquel s'ajoute un amortissement très grand, noté  $G$ , activé et désactivé par une commande temporelle binaire  $u(t)$  [52]. Lorsque l'amortissement  $G$  est activé, le système est



freiné brutalement. Le but étant de simuler un blocage du système. L'effort du PTO est donc le suivant :

$$\overrightarrow{f_{PTO, 2 \rightarrow 1}}_{G_1, \vec{B}_0}(t) = -(b_{PTO} + u(t) G) \dot{z}_{PTO}(t) \vec{z}_1 \quad (3.154)$$

L'inconvénient de cette méthode est que l'efficacité du blocage dépend de la valeur de  $G$ . Or, plus la valeur de  $G$  est importante, plus le pas de temps doit être petit afin d'éviter que le calcul ne diverge. Il n'est donc pas aisé de trouver le bon compromis entre précision et temps de calcul. Une façon de contourner le problème est d'utiliser une contrainte, notée  $f_{latching}$ , définie telle que :

$$f_{latching} = \begin{cases} \dot{z}_{PTO}(t) = 0 & u(t) = 1 \\ \dot{z}_{PTO}(t) = \dot{z}_{PTO}(t) & u(t) = 0 \end{cases} \quad (3.155)$$

Ainsi, la matrice de contrainte, notée  $C_{latching}$ , est la suivante :

$$C_{latching} = \begin{bmatrix} s(\theta) & c(\theta) & -s(\theta)z_{12} + c(\theta)x_{12} & -s(\theta) & -c(\theta) & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}_1} & \frac{\partial}{\partial \dot{z}_1} & \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_1} & \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2} & \frac{\partial}{\partial \dot{z}_2} & \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_2} \end{bmatrix}, u = 1 \quad (3.156)$$

Et sa dérivée  $\dot{C}_{latching}$  donnée dans l'équation 3.157.

$$\dot{C}_{latching} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}c(\theta) & -\dot{\theta}s(\theta) & -s(\theta)(\dot{z}_{12} + \dot{\theta}x_{12}) + c(\theta)(\dot{x}_{12} - \dot{\theta}z_{12}) & -\dot{\theta}c(\theta) & -\dot{\theta}s(\theta) & 0 \end{bmatrix}, u = 1 \quad (3.157)$$

Si  $u = 0$ , alors  $C_{latching}$  et  $\dot{C}_{latching}$  sont nulles. Il ne reste alors qu'à incorporer ces matrices dans l'équation dynamique 3.136. La captation d'énergie reste similaire à celle de la section 3.7.4.1.

## 3.8 Conclusion

Ce chapitre part d'une théorie connue afin de retrouver une formulation possible des équations de la dynamique, avec multiplicateurs de Lagrange, pour les systèmes multicorps. L'utilisation de contraintes non-holonomes présente plusieurs avantages.

Premièrement, ces contraintes s'obtiennent immédiatement grâce aux torseurs cinématiques de liaison. Il apparaît que les multiplicateurs de Lagrange sont en fait les actions de liaison. Ainsi, la matrice de contraintes n'est autre qu'une matrice de transport permettant de passer du repère de la liaison au repère dans lequel l'équation dynamique est écrite. Il est donc possible d'exprimer ces matrices simplement pour toutes les liaisons classiques, comme cela a été fait en section 3.4, et ainsi d'automatiser l'écriture de cette matrice. La méthode s'en retrouve grandement simplifiée notamment pour les problèmes à deux dimensions comme l'exemple de la section 3.3. De plus, il est facile d'accéder aux valeurs des actions de liaison afin de pouvoir dimensionner les liaisons mécaniques.

Deuxièmement, puisque tous les degrés de liberté sont conservés, il est possible de mélanger les approches de Lagrange et de Newton pour exprimer les efforts généralisés. Par exemple, les efforts de ressort et les efforts d'amortissement sont plus faciles à exprimer avec le formalisme de Lagrange en écrivant les énergies dont ces efforts dérivent, i.e. énergie potentielle élastique pour le ressort et fonction de dissipation de Rayleigh [153] pour les amortissements. A contrario, l'effort du poids et les efforts hydrodynamiques sont déjà écrits dans la base fixe au centre de gravité. Ces efforts s'insèrent directement et simplement dans l'équation dynamique. C'est la raison principale de l'utilisation des multiplicateurs de Lagrange.

Troisièmement, le modèle obtenu ne se limite ni aux cas directs (efforts connus et accélérations inconnues) ni aux cas indirects (accélérations connues et efforts inconnus). Il ne se limite pas non plus aux cas isostatiques. Il est possible d'utiliser le modèle, développé dans ce chapitre, sur des systèmes hyperstatiques comme l'a montré la section 3.5.5. Il est aussi possible d'intégrer des contraintes issues de mesures expérimentales (ou de résultats de calcul) dans l'équation dynamique comme le montre la section 3.6. Le modèle obtenu est donc à la fois direct et indirect (d'où son nom de modèle hybride) et il est aussi bien adapté aux cas isostatiques qu'aux cas hyperstatiques. Notons également qu'il est tout à fait possible, et relativement simple, d'intégrer les stratégies de contrôle classiques des systèmes houlomoteurs à ce modèle non-linéaire comme l'a montré la section 3.7.4.



# MODÉLISATION EXPÉRIMENTALE D'UN SYSTÈME MONOCORPS

---

## Sommaire du chapitre

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>149</b>
<b>4.2</b>	<b>Campagne expérimentale</b>	<b>151</b>
<b>4.3</b>	<b>Modèle linéaire à l'ordre 1</b>	<b>155</b>
4.3.1	Rappel hydrostatique	155
4.3.2	Effort d'ancrage	156
4.3.3	Effort de rappel total	157
4.3.4	Conditions limites du calcul HydroStar	160
4.3.4.1	Cas du cylindre seul	161
4.3.4.2	Cas du cylindre avec collerette	162
<b>4.4</b>	<b>Efforts additionnels sur houle régulière</b>	<b>163</b>
4.4.1	Domaine temporel	163
4.4.2	Domaine fréquentiel	163
4.4.3	Efforts additionnels du cylindre	164
4.4.4	Efforts additionnels du cylindre avec collerette	167
4.4.5	Analyse des efforts additionnels	168
4.4.6	Approximation de l'amortissement non-linéaire	168
4.4.7	Comparaison entre les efforts additionnels et les efforts d'excitation théoriques	169
<b>4.5</b>	<b>Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre seul sur houle régulière</b>	<b>173</b>
4.5.1	Modèle linéaire (ML)	173
4.5.2	Modèle non-linéaire avec une vitesse absolue (MNLVA)	176
4.5.2.1	Définition des coefficients	176
4.5.2.2	Calcul de la RAO	177
4.5.2.3	Résultats	177
4.5.2.4	Frottements visqueux sur le cylindre	180
4.5.3	Modèle non-linéaire avec une vitesse relative (MNLVR)	181

<b>4.6</b>	<b>Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre avec colle-</b>	
	<b>rette sur houle régulière</b> . . . . .	<b>185</b>
4.6.1	Modèle non-linéaire avec une vitesse absolue (MNLVA) . . . . .	185
4.6.2	Modèle non-linéaire avec une vitesse relative (MNLVR) . . . . .	187
<b>4.7</b>	<b>Modèle de correction pour le pilonnement sur houle irrégulière</b> . .	<b>190</b>
4.7.1	Cas du cylindre seul . . . . .	190
4.7.2	Cas du cylindre avec collerette . . . . .	191
<b>4.8</b>	<b>Modèle de correction pour le cavement/tangage sur houle régulière</b>	<b>192</b>
4.8.1	Modèle avec vitesse absolue . . . . .	193
	4.8.1.1 Identification pour chaque essai . . . . .	194
	4.8.1.2 Calcul de la RAO . . . . .	195
	4.8.1.3 Résultats . . . . .	195
4.8.2	Modèle avec vitesse relative . . . . .	198
	4.8.2.1 Identification pour chaque essai . . . . .	200
	4.8.2.2 Résultats . . . . .	201
4.8.3	Interprétation . . . . .	204
<b>4.9</b>	<b>Modèle de correction pour le tangage pur (MCTP) sur houle régulière</b>	<b>204</b>
4.9.1	Cas du cylindre seul . . . . .	205
4.9.2	Cas du cylindre avec collerette . . . . .	207
<b>4.10</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>209</b>

---

L'utilisation de contraintes expérimentales, introduites dans le chapitre précédent, a pour but de permettre la caractérisation des effets hydrodynamiques négligés par l'approche à l'ordre 1 du chapitre 2. La distinction faite entre les contraintes de liaison et les contraintes de trajectoire permet de ne pas mélanger l'effort additionnel, contenant les effets hydrodynamiques à déterminer, et les efforts dus aux liaisons. Toutefois, il est intéressant d'utiliser cette approche pour un système mono-corps. En effet, dans le cas d'un système mono-corps, l'effort additionnel peut également être obtenu par l'utilisation d'un modèle inverse puisqu'il s'agit du seul effort inconnu. L'objectif de ce chapitre est de caractériser l'écart entre le modèle numérique, fondé sur la diffraction-radiation, et le modèle expérimentale pour une géométrie simple. La caractérisation devrait, idéalement, permettre de passer facilement du domaine fréquentiel à une formulation dans le domaine temporel.

## 4.1 Introduction

L'étude des structures oscillantes, compte tenu de ses applications industrielles, a fait et continue de faire l'objet de nombreuses recherches. Les cylindres verticaux y sont très représentés. Le comportement de ces structures a notamment été étudié dans le cadre d'oscillations forcées en cavement dans un fluide initialement au repos. M. Duclercq [154] en propose une revue très complète. Dans le cadre des énergies marines renouvelables, de nombreuses études portent sur le comportement de colonnes munies de plaques circulaires ou rectangulaires avec ou sans porosités [155, 156]. Les deux nombres adimensionnels les plus importants dans le contexte des structures marines sont le nombre de Froude et le nombre de Reynolds. Ces nombres trouvent leur origine dans l'équation de Navier-Stokes.

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad}) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{grad} P + \mu \Delta \vec{V} \quad (4.1)$$

En introduisant une vitesse de référence  $V_0$  et une longueur de référence  $L$ , il est possible d'adimensionnaliser l'équation de Navier-Stokes pour un fluide donné.

$$\left[ \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} + (\vec{V}^* \cdot \overrightarrow{grad}^*) \vec{V}^* \right] = \frac{1}{F_R^2} \frac{\vec{g}}{g} - \overrightarrow{grad}^* P^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \vec{V}^* \quad (4.2)$$

Avec  $\vec{V}^*$ ,  $t^*$ ,  $P^*$  les grandeurs adimensionnelles et  $\overrightarrow{grad}^*$ ,  $\Delta^*$  les opérateurs adimensionnels définis comme suit :

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_0} \quad t^* = \frac{V_0 t}{L} \quad P^* = \frac{P}{\rho V_0^2} \quad \overrightarrow{grad}^* = \frac{\overrightarrow{grad}}{L} \quad \Delta^* = \frac{\Delta}{L^2} \quad (4.3)$$

Le nombre de Froude et le nombre de Reynolds sont donnés par l'équation suivante :

$$F_R = \frac{V_0}{\sqrt{Lg}} \quad Re = \frac{V_0 L}{\nu} \quad (4.4)$$

Le cas où  $V_0$  est constant correspond à l’étude d’un objet se déplaçant à vitesse constante comme un navire par exemple. C’est notamment le cas pour l’étude de la résistance à l’avancement. Dans le cas où la vitesse est une fonction oscillante, comme pour l’étude de la réponse à la houle, la vitesse de référence est alors remplacée par une vitesse oscillante construite à partir de la pulsation  $\omega$  et de l’amplitude du mouvement  $A$ , i.e.  $V_0 = \omega A$ . C’est notamment le cas de l’étude des cylindre oscillant où la longueur de référence est le diamètre  $D$ . Deux autres nombres adimensionnels sont couramment utilisés pour étudier le comportement des structures oscillantes. Il s’agit du nombre de Keulegan–Carpenter [157] et du nombre de Stokes [158]. Les expressions des quatres nombres adimensionnels sont données dans l’équation 4.5.

$$F_R = \frac{2\pi A f}{\sqrt{gD}} \quad Re = \frac{2\pi A f D}{\nu} \quad K_C = \frac{2\pi A}{D} \quad \beta = \frac{f D^2}{\nu} \quad A : \text{Amplitude du mouvement} \quad (4.5)$$

L’extrapolation du comportement d’une structure dans la houle se fait en utilisant la similitude de Froude. Cette similitude est particulièrement adaptée lorsque seuls les efforts hydrodynamiques linéaire sont considérés, i.e. les efforts de diffraction–radiation linéarisés. Toutefois, il est impossible de se placer à la fois en similitude de Froude et en similitude de Reynolds pour un fluide donné. Or, c’est en fonction du nombre de Reynolds que sont caractérisés les effets visqueux. Dans le cas d’une similitude de Froude, le nombre de Reynolds évolue comme suit :

$$Re \propto E^{3/2} \quad E : \text{rapport d’échelle} \quad (4.6)$$

De nombreux travaux ont été menés afin de caractériser le comportement des structures oscillantes. La figure 4.1, tirée de la thèse de Duclercq [154], présente des coefficients adimensionnels caractérisant les efforts inertiels et d’amortissement pour un cylindre oscillant en eau calme. La définition des paramètres et celle de l’écoulement sont données dans la section 1.3 de la thèse de Duclercq [154].

Les résultats obtenus pour une structure oscillant en eau calme ne sont pas directement applicables à l’étude du comportement d’une structure oscillant dans la houle. Toutefois, la démarche visant à déterminer des coefficients inertiels et d’amortissement et à étudier leurs variations en fonctions des différents nombres adimensionnels reste la même.

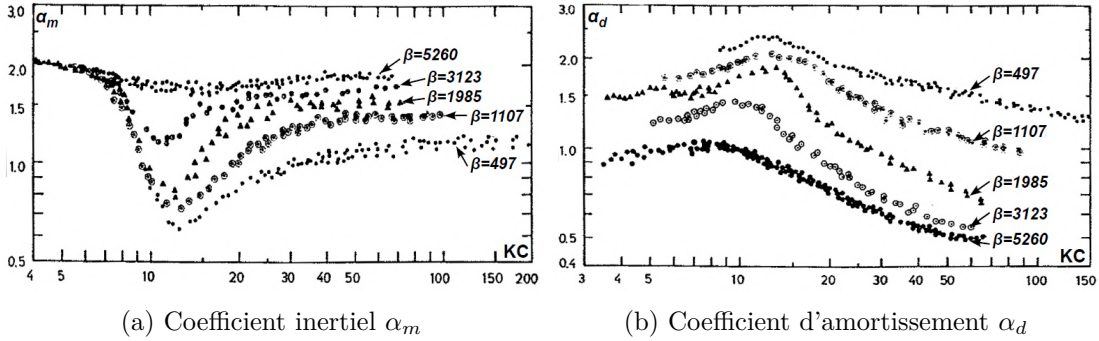


FIGURE 4.1 – Coefficients inertiels  $\alpha_m$  (a) et d'amortissement  $\alpha_d$  (b) d'une décomposition de Morison déterminés par Sarpkaya [159, 160] en fonction de  $K_C$  pour différentes valeurs de  $\beta$ .

## 4.2 Campagne expérimentale

Une campagne expérimentale a été réalisée au bassin océanique de l'Ifremer centre Bretagne. Ce bassin a une longueur de 50 m, une largeur de 12.5 m et une profondeur de 9.7 m pour la zone de travail. Un cylindre a été testé seul, puis avec une collerette. La géométrie des maquettes ainsi que leurs caractéristiques sont données sur la figure 4.2 et dans le tableau 4.1. L'inertie du cylindre a été déterminée expérimentalement avec un pendule bifil dont le principe est détaillé dans l'annexe C.1. Les mesures des mouvements sont réalisées par un système Qualisys. La mesure de la houle est assurée par une sonde placée sur le rebord du bassin à la même position que l'axe du cylindre lorsque celui-ci est à l'équilibre. Une seconde sonde est également placée en amont. Pour certains essais, un effort de dérive éloigne la position horizontale moyenne de la position d'équilibre. Cette position moyenne est alors prise en compte pour la détermination de la phase de la houle. Pour les essais en houle irrégulière, les RAOs sont obtenues avec une fonction similaire à la fonction `tfestimate` de MATLAB écrite en langage python.

cylindre seul		cylindre + collerette	
OG (mm)	540	OG (mm)	540
m (kg)	31.643	m (kg)	31.772
I (kg · m <sup>2</sup> )	4.45	I	4.46
$K_{33}$ (N · m <sup>-1</sup> )	382.23	$K_{33}$ (N · m <sup>-1</sup> )	382.23
$K_{55}$ (Nm · rad <sup>-1</sup> )	41.96	$K_{55}$ (Nm · rad <sup>-1</sup> )	42.18

TABLEAU 4.1 – Caractéristiques maquettes

Les figures 4.3, 4.4 et 4.5 montrent respectivement les RAOs obtenues expérimentalement pour les mouvements de cavement, pilonnement et tangage. La couleur bleu correspond au cylindre seul. La couleur orange correspond au cylindre muni d'une collerette. Les marqueurs  $\blacktriangledown$ ,  $\bullet$  et  $\blacktriangle$  correspondent respectivement à des hauteurs de vagues régulières de 5 cm, 10 cm et 20 cm. Les traitillés, pointillés, traits continus et traits mixtes correspondent à des essais réalisés en houle



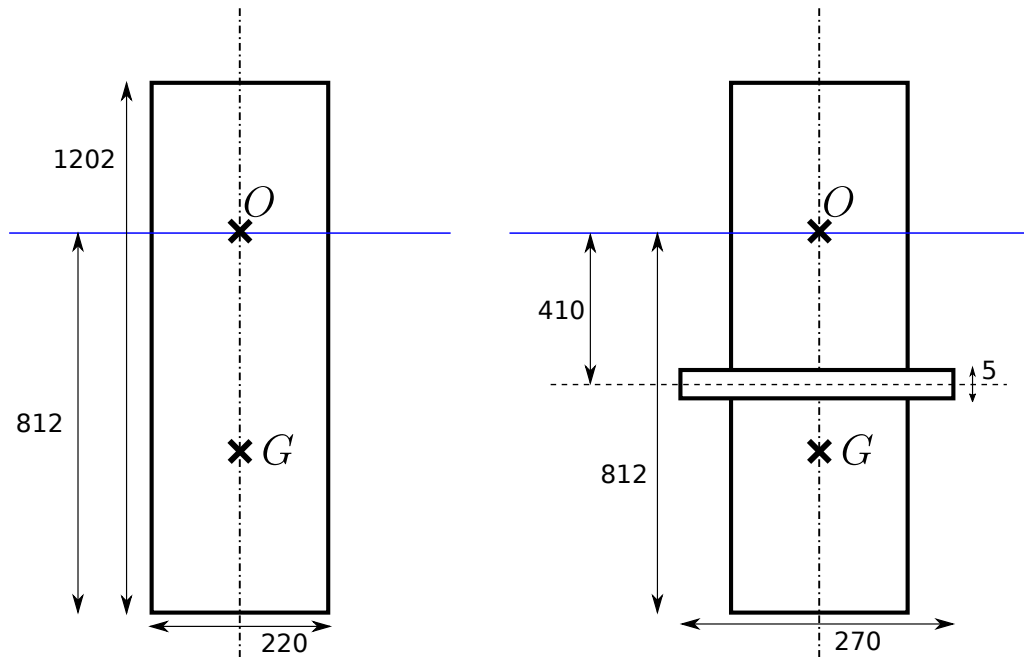


FIGURE 4.2 – Géométrie du cylindre seul et du cylindre avec collerette testés en bassin (en mm)

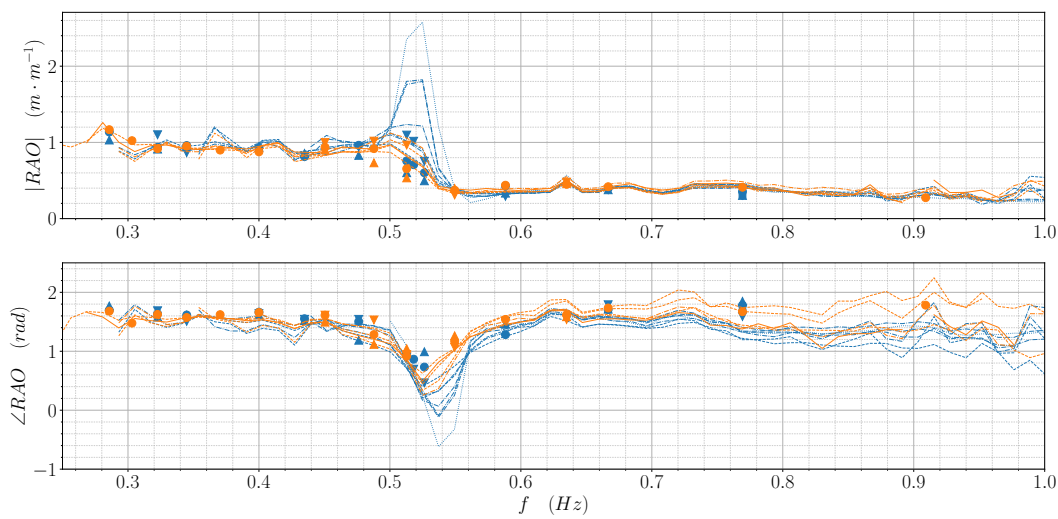


FIGURE 4.3 – RAO expérimentales en cavalement

irrégulière.

Les figures 4.6 et 4.7 présentent respectivement le nombre de Reynolds et le nombre de Froude, correspondant au mouvement de pilonnement, tels que définis dans l'équation 4.5.

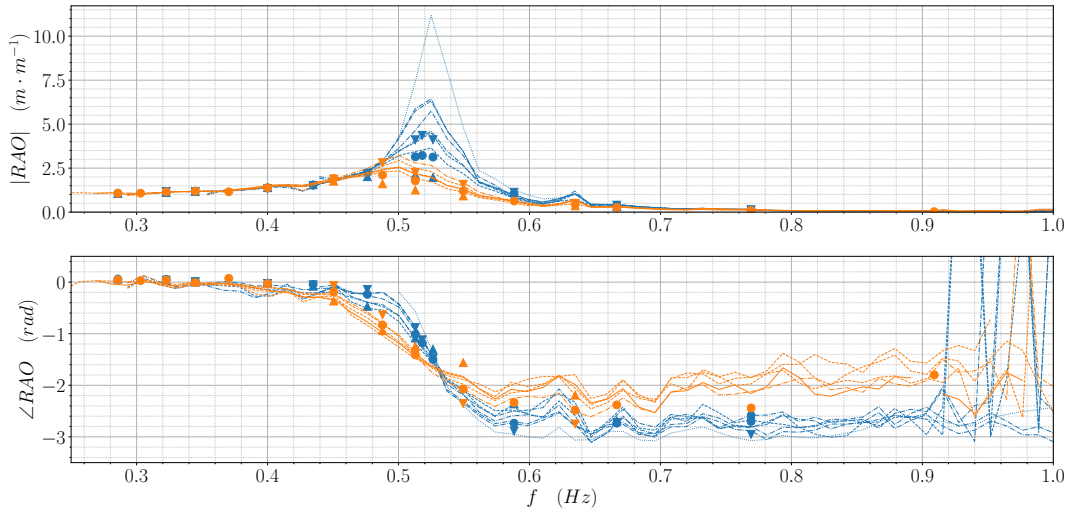


FIGURE 4.4 – RAO expérimentales en pilonnement

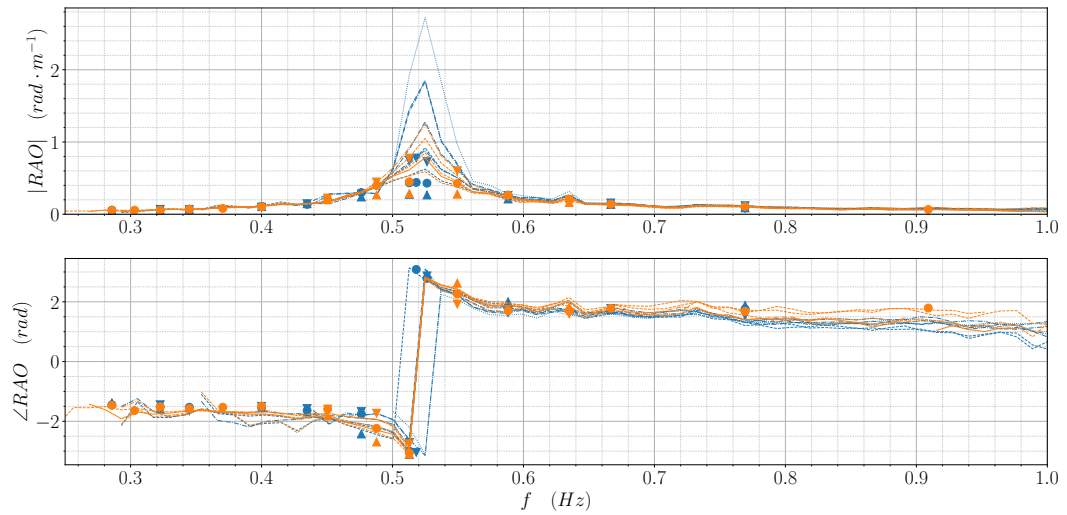


FIGURE 4.5 – RAO expérimentales en tangage

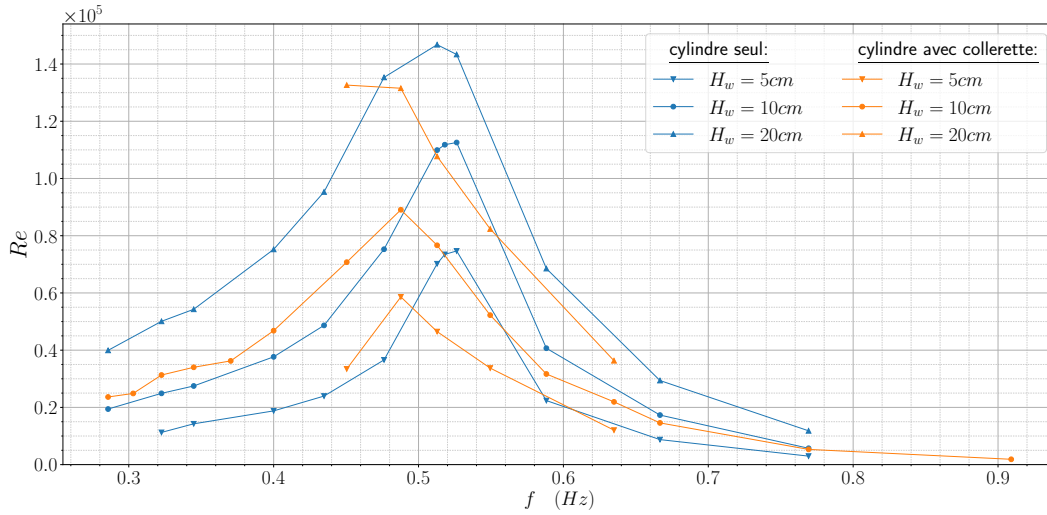


FIGURE 4.6 – Nombres de Reynolds pour le mouvement de pilonnement

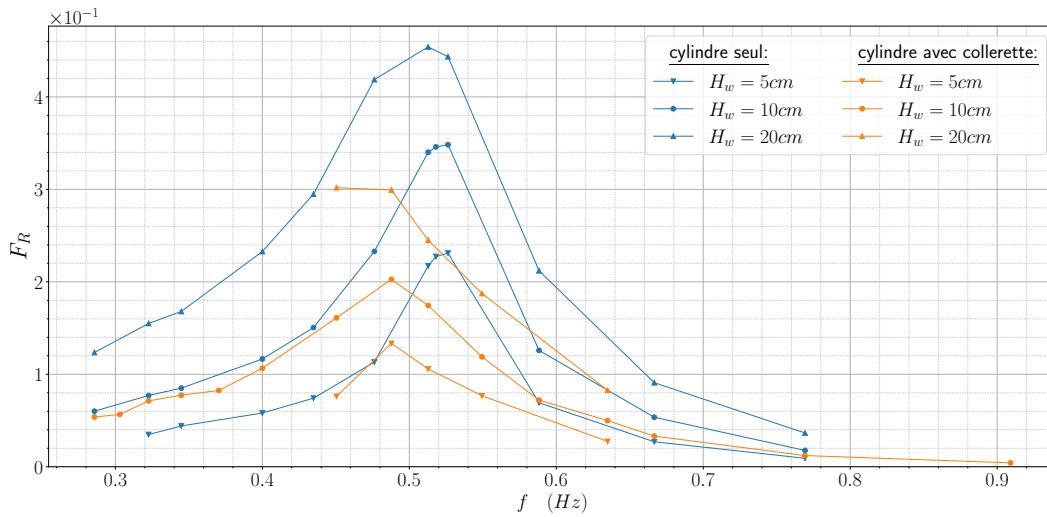


FIGURE 4.7 – Nombres de Froude pour le mouvement de pilonnement

### 4.3 Modèle linéaire à l'ordre 1

Compte tenu de la répartition des masses dans la maquette du cylindre et des raideurs de rappel, les fréquences propres des mouvements de pilonnement et de tangage sont très proches. Ainsi, l'hypothèse des petits déplacements pourrait s'avérer d'autant plus discutable au voisinage des résonances. Il est donc nécessaire de vérifier les hypothèses classiquement faites, dans la mise en place du modèle numérique à l'ordre 1. Il faut également vérifier la linéarité des efforts de rappel hydrostatique et d'ancrage.

L'influence de la profondeur et des parois latérales du bassin sur le problème de diffraction-radiation est de plus étudiée.

#### 4.3.1 Rappel hydrostatique

Le rappel hydrostatique a déjà été abordé dans le chapitre 2. Ainsi, nous ne présentons ici que les matrices de rappel hydrostatique pour les mouvement de cavement, pilonnement et tangage respectivement numérotés 1, 3 et 5.

$$\mathbf{F}_{h,lin} = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{33} & 0 \\ 0 & 0 & K_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G(t) - x_{G,eq} \\ z_G(t) - z_{G,eq} \\ \theta(t) - \theta_{eq} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Avec,

$$\begin{aligned} K_{33} &= \rho g \pi R^2 \\ K_{55} &= \rho g \pi R^2 H \left( \frac{R^2}{4H} - \frac{H}{2} - z_{G,eq} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

Où  $z_G$  est la position du centre de gravité dans le repère fixe,  $H$  est le tirant d'eau du cylindre et  $R$  est le rayon du cylindre. Les valeurs  $x_{G,eq}$ ,  $z_{G,eq}$  et  $\theta_{eq}$  correspondent aux valeurs à l'équilibre de  $x_G$ ,  $z_G$  et  $\theta$ . Une approche non-linéaire du rappel hydrostatique est envisagée. Les détails de cette approche sont donnés en annexe C.2. L'effort non-linéaire est donné dans l'équation 4.9.

$$\mathbf{F}_h = \begin{pmatrix} -\rho g \pi R^2 \left( \frac{z_G}{\cos(\theta)} - \frac{z_{G,eq}}{\cos(\theta_{eq})} \right) \\ -\rho g \pi R^2 H \sin(\theta) \left( \frac{R^2}{4H} \left( 1 + \frac{\tan^2(\theta)}{2} \right) - \frac{H}{2} - \frac{z_{G,eq}}{\cos(\theta_{eq})} \right) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

### 4.3.2 Effort d'ancrage

La configuration de l'ancrage est présentée sur la figure 4.8. Les caractéristiques des ancrages sont données dans le tableau 4.2.

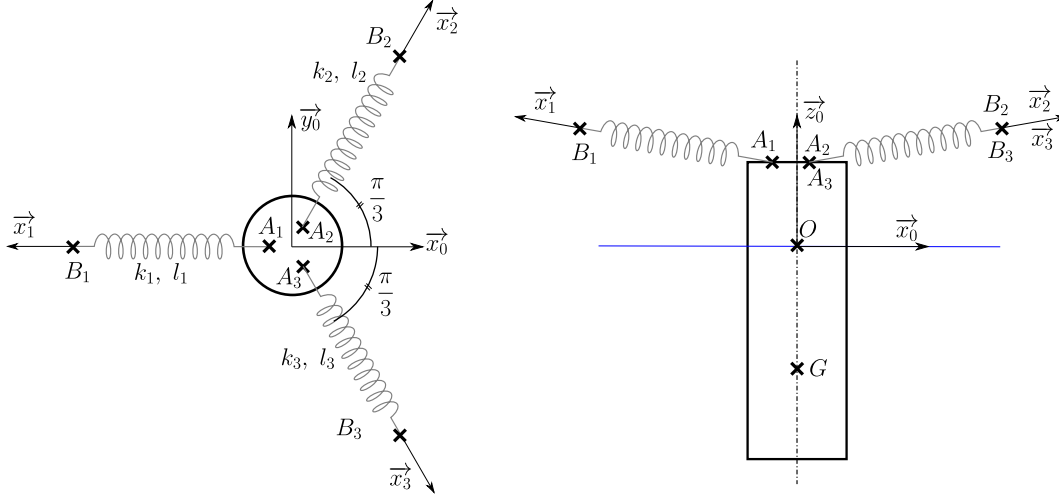


FIGURE 4.8 – Configuration de l'ancrage

L'effort généralisé de l'ancrage, au centre de gravité, est donné par l'équation 4.10.

$$\mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} \sum_i k_i (l_i - l_{0_i}) \vec{x}_i \\ \sum_i k_i (l_i - l_{0_i}) \overrightarrow{GA_i} \wedge \vec{x}_i \end{pmatrix} \quad i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (4.10)$$

Avec  $l_i$  la longueur de la ligne  $i$  sous tension et  $l_{0_i}$  sa longueur à vide. Le problème étant plan, seules la résultante suivant  $\vec{x}_0$ , celle suivant  $\vec{z}_0$  et le moment suivant  $\vec{y}_0$  sont conservés. Ce qui donne l'équation .

$$\mathbf{F}_a = \begin{pmatrix} \left[ \sum_i k_i (l_i - l_{0_i}) \vec{x}_i \right] \cdot \vec{x}_0 \\ \left[ \sum_i k_i (l_i - l_{0_i}) \vec{x}_i \right] \cdot \vec{z}_0 \\ \left[ \sum_i k_i (l_i - l_{0_i}) \overrightarrow{GA_i} \wedge \vec{x}_i \right] \cdot \vec{y}_0 \end{pmatrix} \quad i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (4.11)$$

Une approche linéarisée de cet effort est envisagée et détaillée dans l'annexe C.3. Cette approche permet de considérer un ancrage équivalent, représenté sur la figure 4.9, et d'aboutir à une expression linéarisée de l'effort d'ancrage donnée par l'équation 4.12.

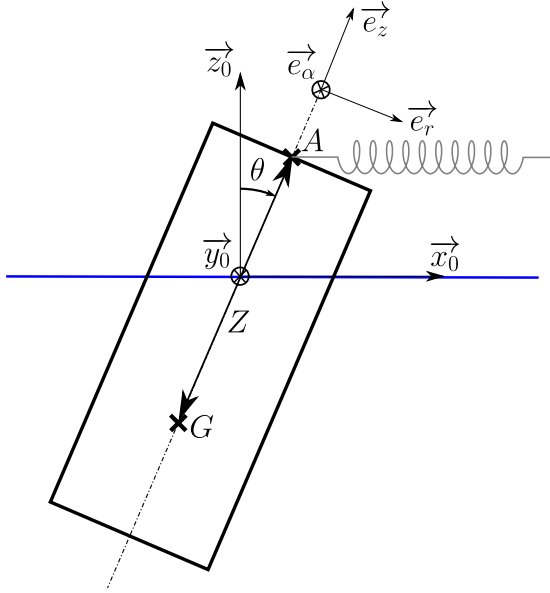


FIGURE 4.9 – Modèle d'ancrage équivalent

$k_1 (N \cdot m^{-1})$	20.3	$A_1 (m)$	$\begin{pmatrix} -0.96 \\ 0 \\ 0.39 \end{pmatrix}$
$k_2 (N \cdot m^{-1})$	20.3	$A_2 (m)$	$\begin{pmatrix} 0.048 \\ -0.083 \\ 0.39 \end{pmatrix}$
$k_3 (N \cdot m^{-1})$	20.3	$A_3 (m)$	$\begin{pmatrix} 0.048 \\ 0.083 \\ 0.39 \end{pmatrix}$
$l_{01} (m)$	6.33	$B_1 (m)$	$\begin{pmatrix} -7.1 \\ 0 \\ 0.59 \end{pmatrix}$
$l_{02} (m)$	6.33	$B_2 (m)$	$\begin{pmatrix} 3.55 \\ -6.15 \\ 0.59 \end{pmatrix}$
$l_{03} (m)$	6.33	$B_3 (m)$	$\begin{pmatrix} 3.55 \\ 6.15 \\ 0.59 \end{pmatrix}$

TABLEAU 4.2 – Caractéristiques des ancrages

$$\mathbf{F}_{a,lin} = - \begin{pmatrix} k_{eq} & 0 & k_{eq}Z \\ 0 & k_{zz} & 0 \\ k_{eq}Z & 0 & k_{eq}Z^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_G - x_{G,eq} \\ z_G - z_{G,eq} \\ \theta - \theta_{eq} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Où  $k_{eq}$  est la raideur équivalente valant  $33.4 N \cdot m^{-1}$  et  $k_{zz}$  la raideur en pilonnement valant  $5.88 N \cdot m^{-1}$ .

### 4.3.3 Effort de rappel total

L'effort de rappel total est la somme des contributions de l'ancrage et du rappel hydrostatique. Le rappel total non linéaire est donc  $\mathbf{F}_{tot} = \mathbf{F}_h + \mathbf{F}_a$  et son approximation linéaire est  $\mathbf{F}_{tot,lin} = \mathbf{F}_{h,lin} + \mathbf{F}_{a,lin}$ .

La figure 4.10 présente les modules des résultantes suivant  $\vec{x}_0$  de l'effort de rappel total, et de l'effort de rappel total linéarisé. La figure 4.11 montre l'erreur relative de l'approche linéaire. Il apparaît que l'effort de rappel total linéarisé est légèrement supérieur sur la majeure partie du spectre, notamment à la résonance, avec des erreurs relatives inférieures à 3.5 %. Il y a cependant une augmentation brutale de cette erreur à  $f = 0.32 Hz$ . Cette augmentation s'explique pour la quasi annulation du mouvement horizontal du disque supérieur du cylindre à cette fréquence. Il apparaît une forte diminution des deux modules à  $f = 0.32 Hz$ . En dépit de ce cas, pour lequel l'erreur relative n'est pas pertinente, les erreurs demeurent faibles et donc acceptables. La figure

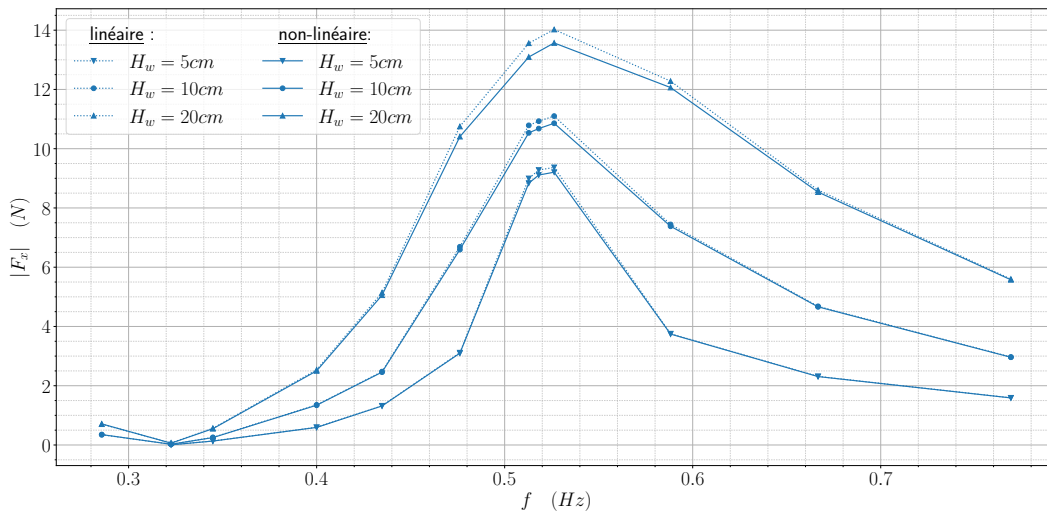


FIGURE 4.10 – Résultantes horizontales de  $\mathbf{F}_{tot}$  et de  $\mathbf{F}_{tot,lin}$

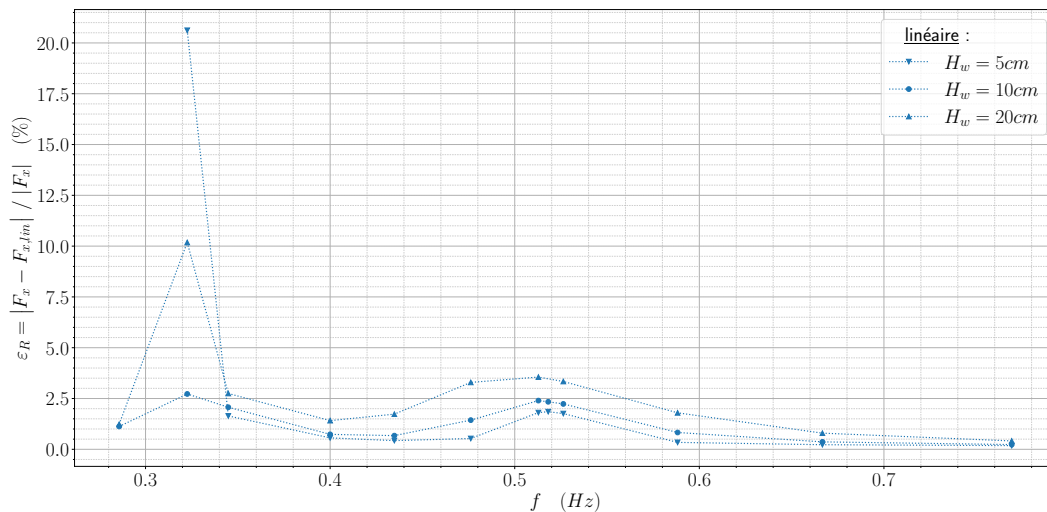
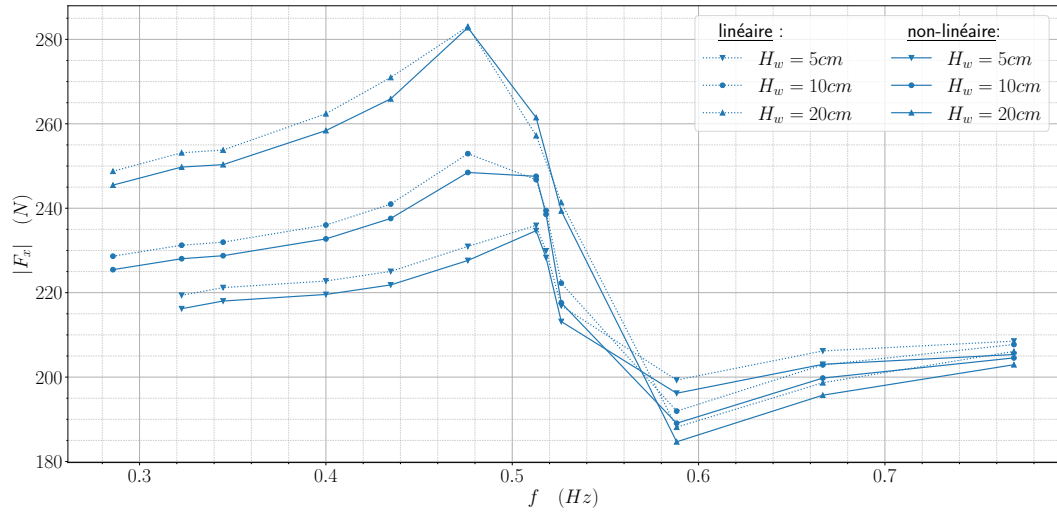
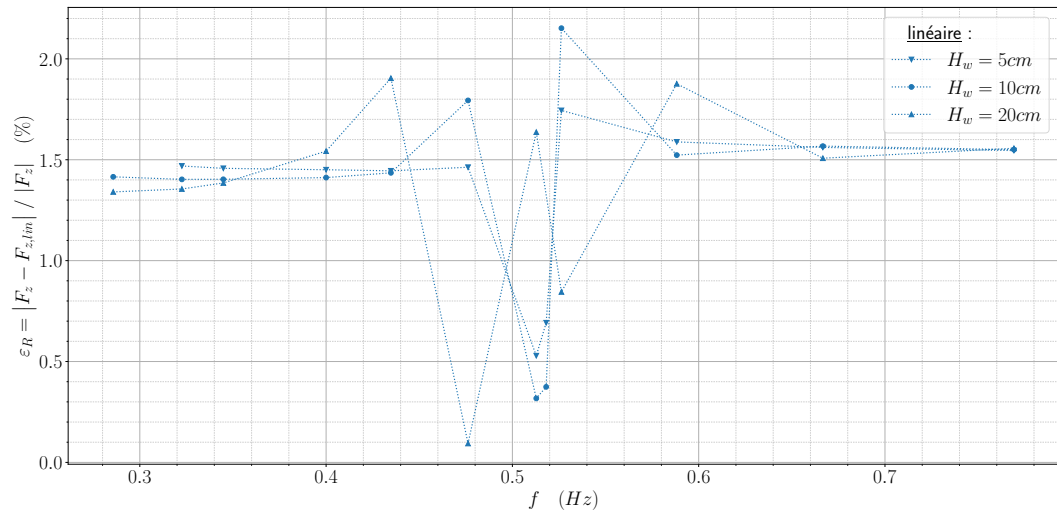


FIGURE 4.11 – Erreur relative de la résultante horizontale de  $\mathbf{F}_{tot,lin}$

4.12 présente les modules des résultantes suivant  $\vec{z}_0$  de l'effort de rappel total, et de l'effort de rappel total linéarisé. La figure 4.13 montre l'erreur relative de l'approche linéaire. Il apparaît que les modules sont très proches avec une erreur relative maximale de 2.15 %. Ces erreurs sont faibles et donc acceptables. La figure 4.14 présente les modules des moments suivant  $\vec{y}_0$  de l'effort de rappel total, et de l'effort de rappel total linéarisé. La figure 4.15 montre l'erreur relative de l'approche linéaire. Il apparaît que les modules sont très proches avec une erreur relative inférieure à 2 % autour de la résonance. L'erreur relative augmente à mesure que la fréquence s'éloigne de la résonance notamment pour les basses fréquences. Cette augmentation

FIGURE 4.12 – Résultantes verticales de  $\mathbf{F}_{tot}$  et de  $\mathbf{F}_{tot,lin}$ FIGURE 4.13 – Erreur relative de la résultante verticale de  $\mathbf{F}_{tot,lin}$ 

est due à une forte diminution des modules des couples de rappel. Les erreurs pertinentes sont donc celles autour de la résonance. Ces erreurs sont faibles et sont donc acceptables.

Les développements de cette section ont permis de vérifier la validité des modèles linéarisés de rappel hydrostatique et d'ancrage. Ces modèles linéarisés seront donc utilisés dans la suite de ce chapitre.



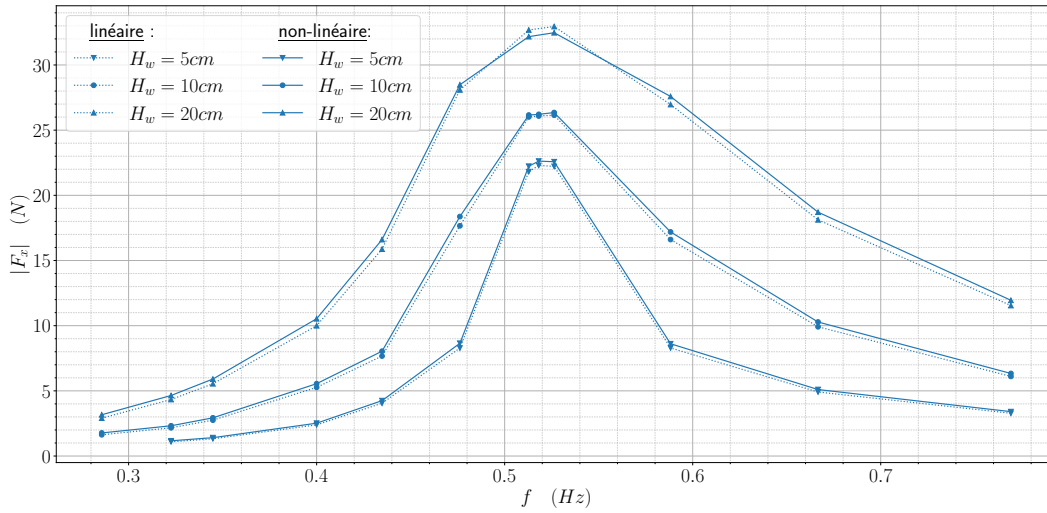


FIGURE 4.14 – Moments de  $F_{tot}$  et de  $F_{tot,lin}$

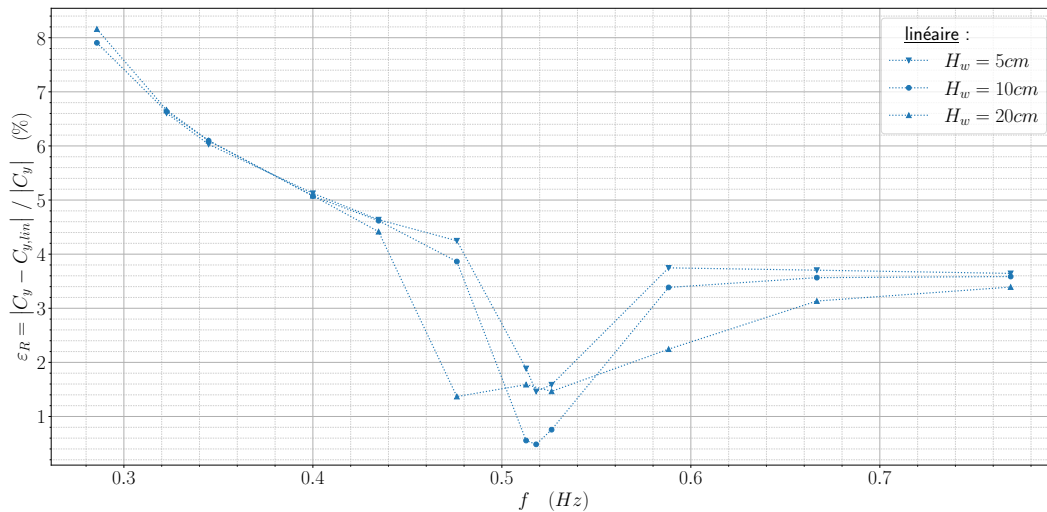


FIGURE 4.15 – Erreur relative du moment de  $F_{tot,lin}$

#### 4.3.4 Conditions limites du calcul HydroStar

La fréquence minimale atteignable pour les essais en houle régulière, dans le bassin océanique de l'Ifremer de Brest, est 0.25 Hz. Compte tenu de la profondeur  $H_B = 9.7$  m, l'hypothèse de profondeur infinie, i.e.  $H_B > \lambda/2$ , est valide. Pour les essais en houle irrégulière, ainsi que pour la construction d'un modèle dans le domaine temporel, il est nécessaire de connaître les coefficients hydrodynamiques et l'effort d'excitation pour toute pulsation. D'autres part, la largeur  $l_B = 12.5$  m du bassin confine l'écoulement et il est légitime de quantifier cette influence. Des calculs de

diffraction–radiation linéarisés à l'ordre 1 ont été effectués, avec le code HydroStar, pour le cylindre seul et le cylindre avec collerette. Ces calculs ont été faits en profondeur finie, en profondeur infinie et en mode canal. Le mode canal ajoute, à la profondeur finie, une condition d'imperméabilité sur les parois du bassin. Les pulsations choisies pour le calcul vont de  $\omega = 0.01 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  à  $\omega = 20 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  avec un pas  $\Delta\omega = 0.01 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

#### 4.3.4.1 Cas du cylindre seul

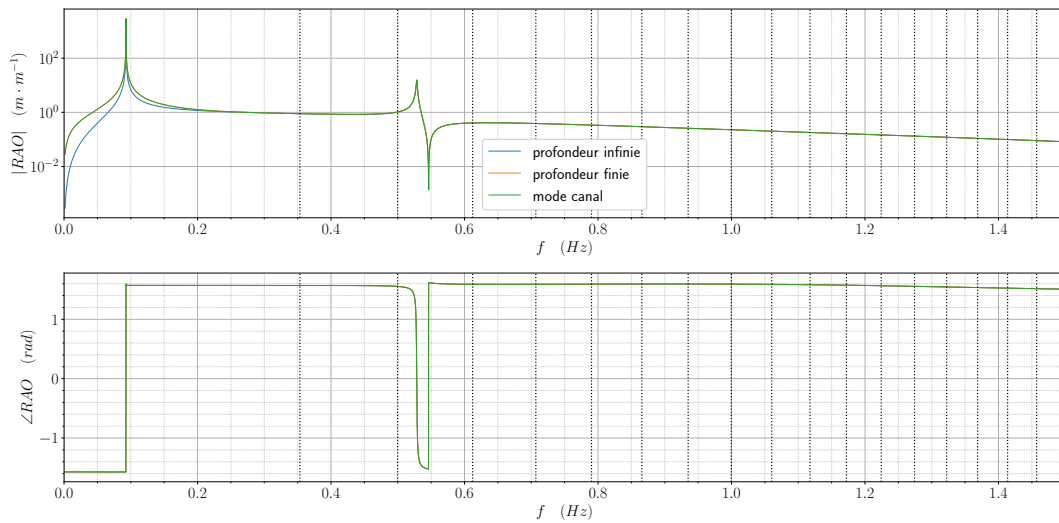


FIGURE 4.16 – RAO théorique en cavement du cylindre seul

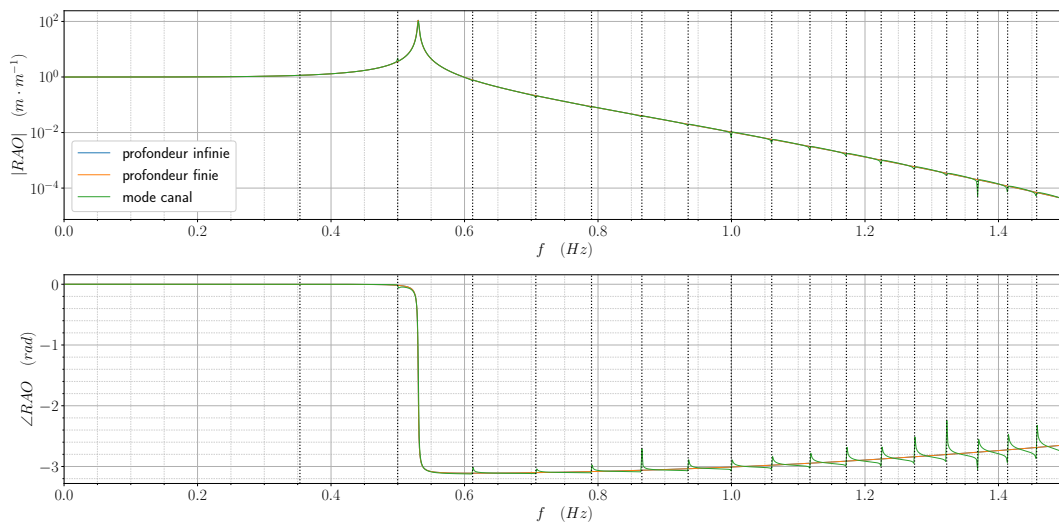


FIGURE 4.17 – RAO théorique en pilonnement du cylindre seul

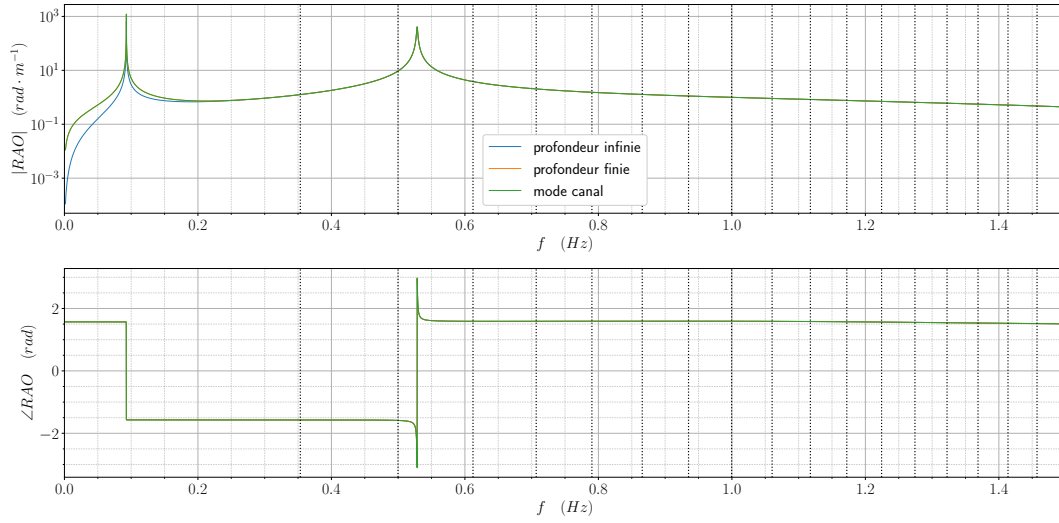


FIGURE 4.18 – RAO théorique en tangage du cylindre seul

Les figures 4.16, 4.17 et 4.18 présentent respectivement les RAOs en cavement, pilonnement et tangage du cylindre seul pour une profondeur infinie, une profondeur finie ainsi que pour le mode canal. Les modes propres latéraux du bassin sont également représentés par des pointillés verticaux. Ces mode propres sont définis par l'équation 4.13.

$$k_n = \frac{2n\pi}{l_B} \Rightarrow \omega_n = \sqrt{g \frac{2n\pi}{l_B} \tanh\left(\frac{2n\pi H_B}{l_B}\right)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_* \quad (4.13)$$

Pour le cavement et le tangage, la profondeur finie n'a d'influence que pour  $f < 0.2$  Hz, i.e. en dessous de la fréquence de coupure basse de la génération du batteur. Il est possible que l'influence de la profondeur soit plus marquée pour les effets du second ordre. Ces effets ne sont pas étudiés ici. De plus, le mode canal ne change rien par rapport au calcul en profondeur finie. Pour le pilonnement, les trois modes de calculs donnent le même résultats à l'exception de petits pics numériques apparaissant, aux fréquences propres du bassin, pour le mode canal. Ces pics sont faibles et seront donc négligés.

#### 4.3.4.2 Cas du cylindre avec collerette

Pour le cylindre avec une collerette, les RAOs pour le cavement et le tangage sont quasiment identiques à celles du cylindre seul et ne sont donc pas représentées.

La RAO en pilonnement, quant à elle, diffère de celle obtenue pour le cylindre seul. Cette RAO est tracée sur la figure 4.19. Il n'y a toujours pas de différences notables entre les différentes conditions limites si ce n'est les pics numériques déjà observés sur la figure 4.17. Une annulation

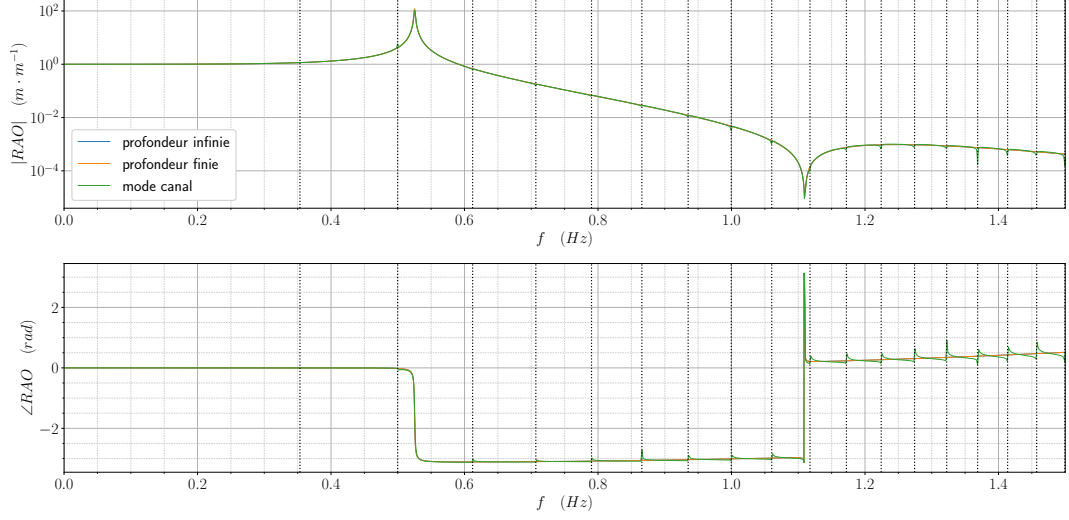


FIGURE 4.19 – RAO théorique en pilonnement du cylindre avec collerette

de la réponse apparaît pour une fréquence de 1.09 Hz. Cette fréquence est appelée fréquence d'équilibrage. A cette fréquence, les efforts d'excitation sur la collerette et sur le disque inférieur s'annulent naturellement. Cette fréquence d'équilibrage est, dans notre cas, supérieure à la fréquence maximale du batteur en houle régulière ( $f_{max} = 1 \text{ Hz}$ ).

Pour la suite de ce chapitre, les résultats utilisés seront les résultats obtenus pour la profondeur finie sans prise en compte des parois latérales.

## 4.4 Efforts additionnels sur houle régulière

### 4.4.1 Domaine temporel

Il n'y a qu'un seul corps. Il n'y a donc pas d'effort de liaison et un modèle inverse suffit puisque l'effort additionnel est le seul effort inconnu à déterminer.

$$(\mathbf{M} + \mathbf{A}_\infty) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{h+a} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}_{ex}(t) + \mathbf{f}_{add}(t) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{f}_{add}(t) = \mathbf{f}_{ex}(t) - \left[ (\mathbf{M} + \mathbf{A}_\infty) \ddot{\mathbf{q}}(t) + \int_0^t \mathbf{K}(t - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau + \mathbf{K}_{h+a} \mathbf{q}(t) \right] \quad (4.15)$$

### 4.4.2 Domaine fréquentiel

Nous rappelons l'équation dynamique fréquentielle dans le cadre de la théorie de la diffraction-radiation.

$$\left[ \mathbf{K}_{h+a} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + i \omega \mathbf{B}(\omega) \right] \mathbf{Q}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (4.16)$$

Soit  $\tilde{\mathbf{Q}}(\omega)$  la réponse expérimentale du système.

$$\left[ \mathbf{K}_{h+a} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + i \omega \mathbf{B}(\omega) \right] \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) + \mathbf{F}_{add}(\omega) \quad (4.17)$$

L'effort additionnel est donné par l'équation 4.18.

$$\mathbf{F}_{add}(\omega) = \left[ \mathbf{K}_{h+a} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + i \omega \mathbf{B}(\omega) \right] \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) - \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (4.18)$$

Cette expression est valable pour l'harmonique d'ordre 1. Pour les harmoniques d'ordre supérieur, les efforts d'excitation et de radiation disparaissent car seuls les termes d'ordre 1 sont calculés par le code de diffraction-radiation. Ainsi, pour les harmoniques d'ordre  $\geq 2$ , l'expression de l'effort additionnel est modifiée, donnée par l'équation 4.19.

$$\mathbf{F}_{add}^{(k)}(\omega) = \begin{cases} \left[ \mathbf{K}_{h+a} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega)) + i \omega \mathbf{B}(\omega) \right] \tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}(\omega) - \mathbf{F}_{ex}(\omega) & k = 1 \\ \left[ \mathbf{K}_{h+a} - k^2 \omega^2 \mathbf{M} \right] \tilde{\mathbf{Q}}^{(k)}(\omega) & k \geq 2 \end{cases} \quad (4.19)$$

La phase de l'effort, ainsi défini, est ramenée à la phase de la houle. Il est plus utile de ramener la phase à celle du mouvement pour mieux comprendre la nature de l'effort additionnel. Un autre effort additionnel est alors défini tel que sa phase soit ramenée à celle du mouvement et que son module soit ramené à celui de l'élévation de surface libre pour chaque degré de liberté.

$$F_{add_i}^{(k)\star}(\omega) = \frac{|F_{add_i}^{(k)}(\omega)|}{|\tilde{\eta}(\omega)|} e^{i \left( \angle F_{add_i}^{(k)}(\omega) - \angle \tilde{\mathbf{Q}}_i^{(k)}(\omega) \right)} \quad i = 1, 3, 5 \quad (4.20)$$

Avec  $\tilde{\eta}(\omega)$  l'élévation de surface libre expérimentale.

### 4.4.3 Efforts additionnels du cylindre

Les figures 4.20, 4.21 et 4.22 montrent respectivement les efforts additionnels pour les ordres 1 à 3, au centre de gravité, correspondant aux directions de cavement, de pilonnement et à l'axe du tangage pour le cylindre.

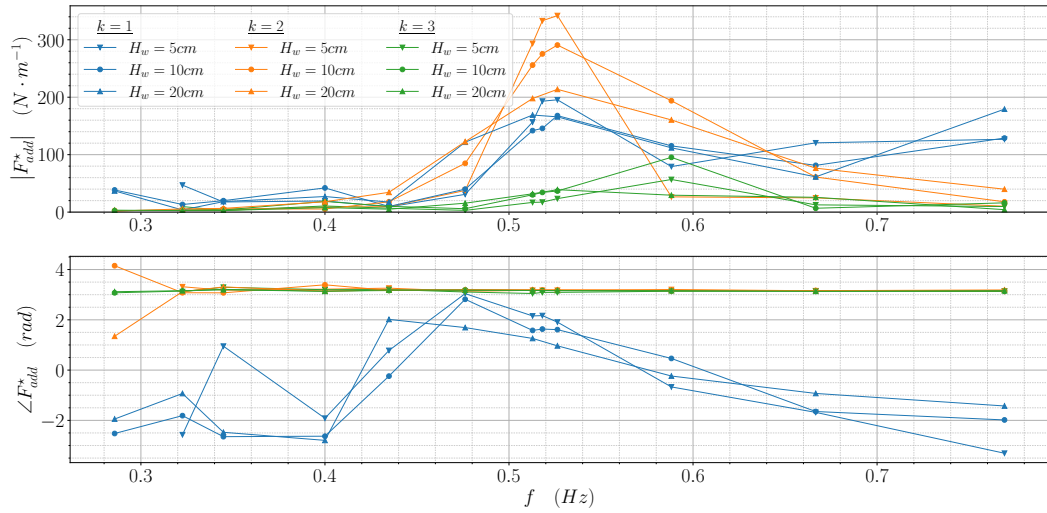


FIGURE 4.20 – Effort additionnel en cavalemt pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3

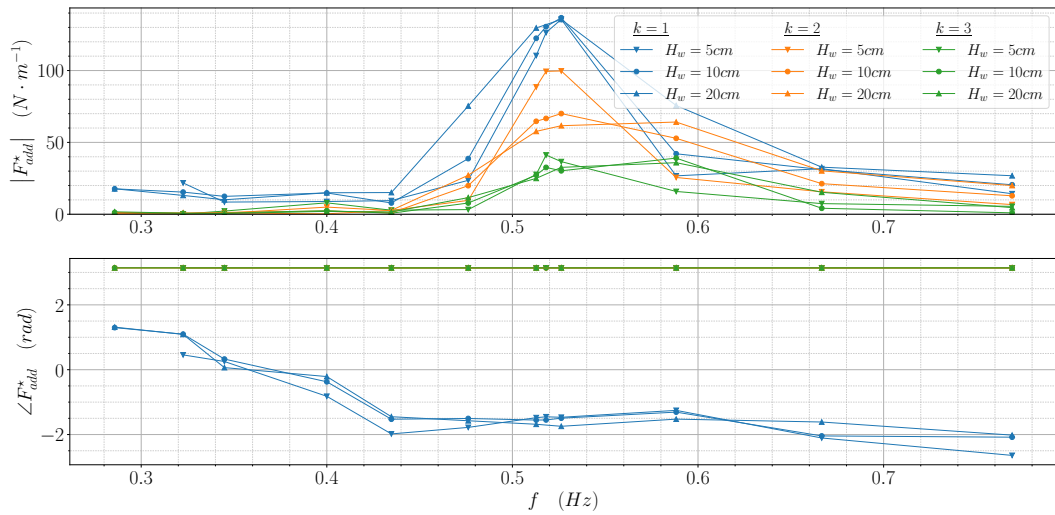


FIGURE 4.21 – Effort additionnel en pilonnement pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3

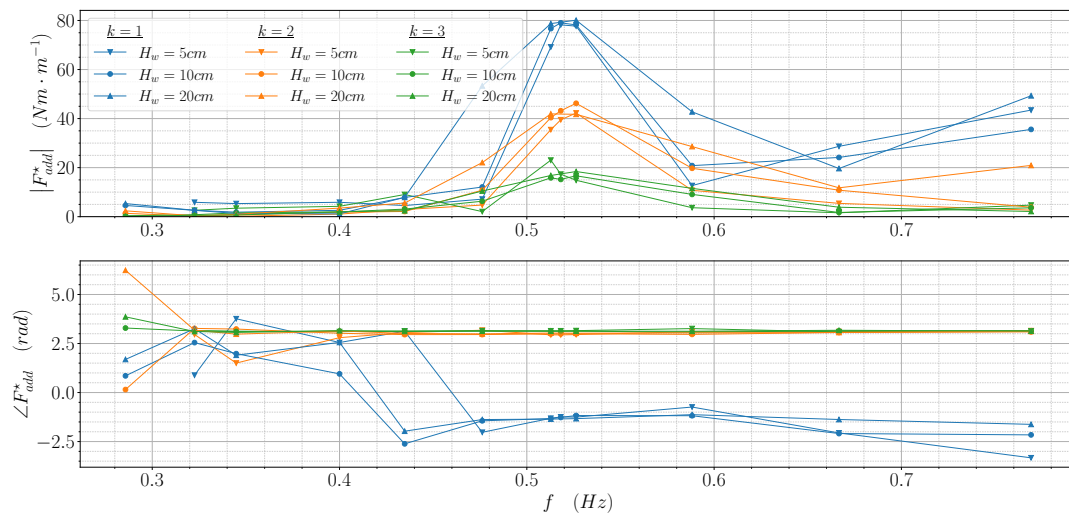


FIGURE 4.22 – Effort additionnel en tangage pour le cylindre seul pour les ordres 1 à 3

## 4.4.4 Efforts additionnels du cylindre avec collerette

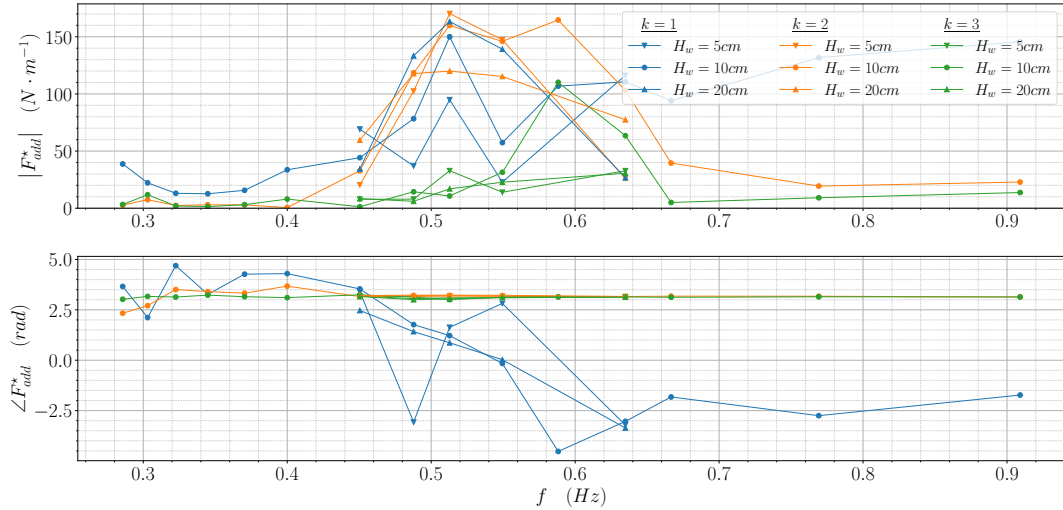


FIGURE 4.23 – Effort additionnel en cavalemt pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3

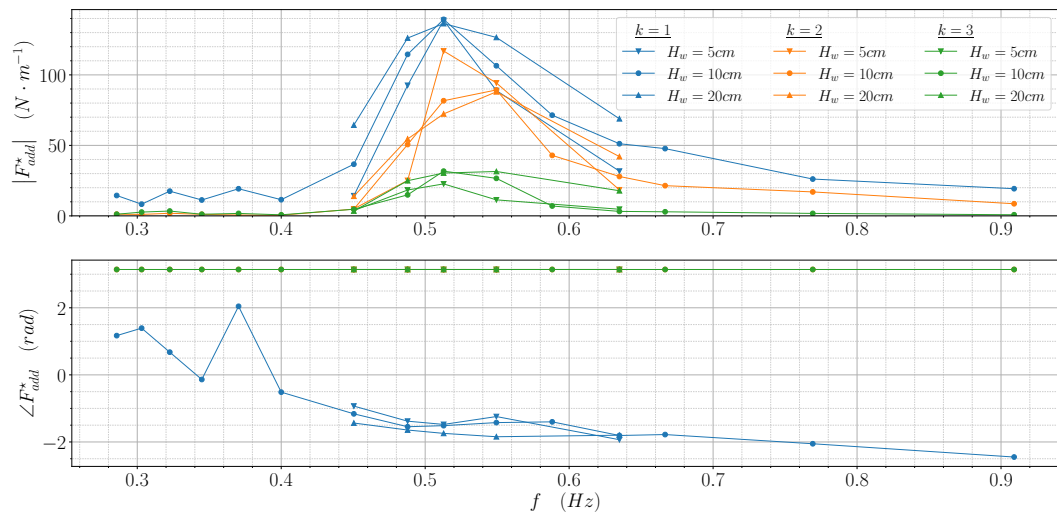


FIGURE 4.24 – Effort additionnel en pilonnement pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3

Les figures 4.23, 4.24 et 4.25 montrent respectivement les efforts additionnels pour les ordres 1 à 3, au centre de gravité, correspondant aux directions de cavalemt, de pilonnement et à l'axe du tangage pour le cylindre.



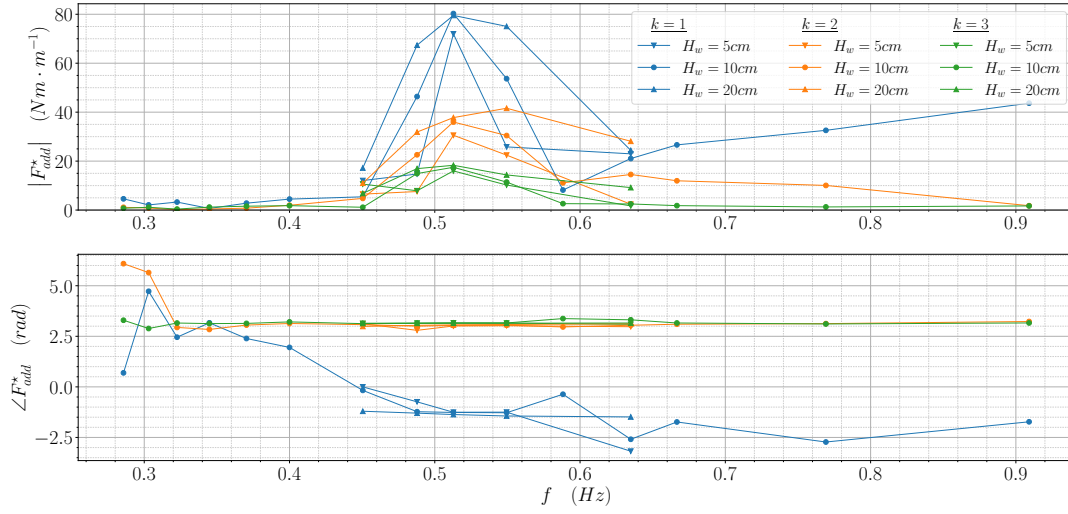


FIGURE 4.25 – Effort additionnel en tangage pour le cylindre avec une collerette pour les ordres 1 à 3

#### 4.4.5 Analyse des efforts additionnels

Pour les deux configurations testées, une tendance apparaît assez clairement avec une augmentation du module de l'effort additionnel au voisinage de la résonance pour chacun des trois harmoniques. De plus il apparaît que les valeurs des modules des efforts additionnels de rang 1 sont groupées à la résonance, notamment pour les mouvements de pilonnement. En ce qui concerne les phases de rang 1, il y a une évolution de cette phase qui laisse penser que l'effort additionnel de rang 1 est composé d'une partie réelle et d'une partie imaginaire. Il a été décidé de modéliser cet effort par un terme de masse ajoutée et un terme d'amortissement. Ce choix implique que l'effort d'excitation retenu est de la même forme que l'effort d'excitation théorique ce qui n'est pas forcément le cas. Les phases d'ordre 2 et 3 sont quant à elles presque parfaitement constantes et en opposition de phase avec leurs mouvements. Les efforts additionnels de rang  $k \geq 2$  seraient donc simplement composés d'une partie réelle. La présence du terme  $k^2\omega^2$  dans l'équation 4.19 explique que l'inversion de phase ne se fasse pas aux résonances mais à des fréquences plus faibles qui s'avèrent être inférieures à la fréquence minimale du batteur.

#### 4.4.6 Approximation de l'amortissement non-linéaire

Pour un système à un degré de liberté de coordonnée généralisée  $q$ , il est assez classique d'exprimer le terme d'amortissement non-linéaire par un terme de trainée quadratique.

$$f_d(t) = -\frac{1}{2}\rho S C_d |\dot{q}(t)| \dot{q}(t) \quad (4.21)$$

Avec  $S$  une surface de référence et  $C_d$  le coefficient de trainée et  $\dot{q}(t)$  la vitesse du point de référence. L'effort linéaire correspondant est le produit d'un amortissement linéaire par la vitesse.

$$f_{d,lin}(t) = -B_{lin}\dot{q}(t) \quad (4.22)$$

L'effort linéaire ne contient que la contribution harmonique de rang 1 et son expression s'obtient en imposant l'égalité entre les travaux moyens des efforts  $f_d$  et  $f_{d,lin}$ .

$$\frac{1}{T} \int_0^T -\frac{1}{2} \rho S C_d |\dot{q}^{(1)}(t)| \left( \dot{q}^{(1)}(t) \right)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T -B_{lin} \left( \dot{q}^{(1)}(t) \right)^2 dt \quad (4.23)$$

Avec

$$\dot{q}^{(1)} = \text{Re} \left( i \omega \left| Q^{(1)}(\omega) \right| e^{i(\omega t + \angle Q^{(1)}(\omega))} \right) \quad (4.24)$$

Ce qui donne

$$B_{lin} = \frac{4}{3\pi} \rho S C_d \omega \left| Q^{(1)}(\omega) \right| \quad (4.25)$$

Cette équivalence énergétique conduit aux mêmes résultats que l'identification des composantes des séries harmoniques.

Dans toutes la suite de ce chapitre, nous ne nous intéressons qu'aux effets d'ordre 1. L'exposant <sup>(1)</sup> devient donc une lourdeur de notation et ne sera donc plus utilisé. Toutes les équations à venir seront d'ordre 1.

#### 4.4.7 Comparaison entre les efforts additionnels et les efforts d'excitation théoriques

Il est intéressant de comparer les efforts additionnels harmoniques aux efforts d'excitation théoriques prévus par la méthode de diffraction–radiation linéarisée afin de pouvoir apprécier l'importance de l'effort additionnel par rapport à l'effort d'excitation théorique.

Les figures 4.26, 4.27 et 4.28 présentent les modules et les phases des efforts  $F_{add}$ ,  $F_{ex}$  et  $F_{add} + F_{ex}$ , pour le cylindre seul, respectivement pour les mouvement de cavement, pilonnement et tangage. Les modules sont rapportés aux amplitudes de vague et les phases sont rapportées aux phases de leurs mouvements relatifs. Même chose pour les figures 4.29, 4.30 et 4.31 avec, cette fois ci, le cylindre muni d'une collerette. Les efforts additionnels en cavement sont relativement faibles devant les efforts d'excitation correspondant et les efforts totaux  $F_{add} + F_{ex}$  sont peu différents des efforts d'excitation. En revanche, les effort additionnels en pilonnement sont du même ordre de grandeur que les efforts d'excitation correspondant et les efforts totaux sont très

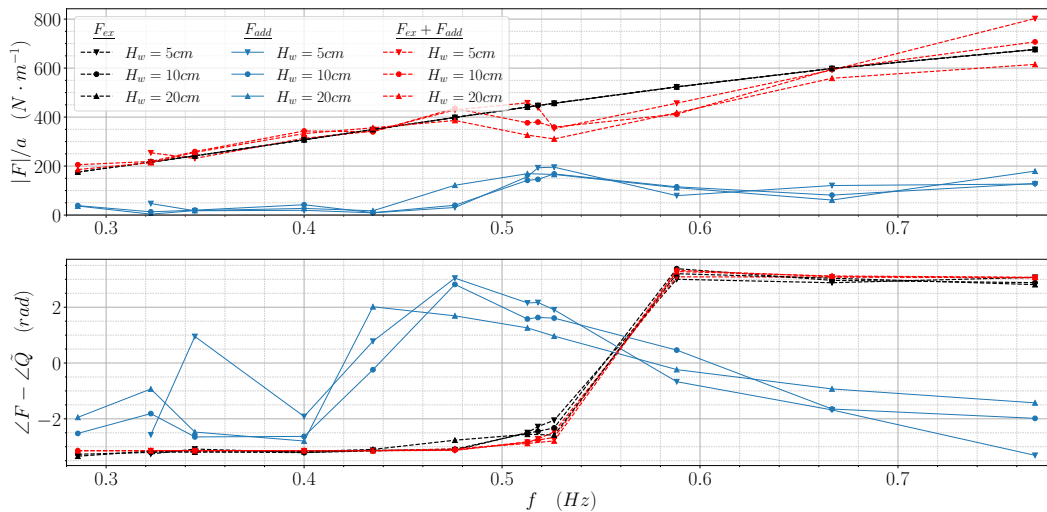


FIGURE 4.26 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en cavalemt, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul

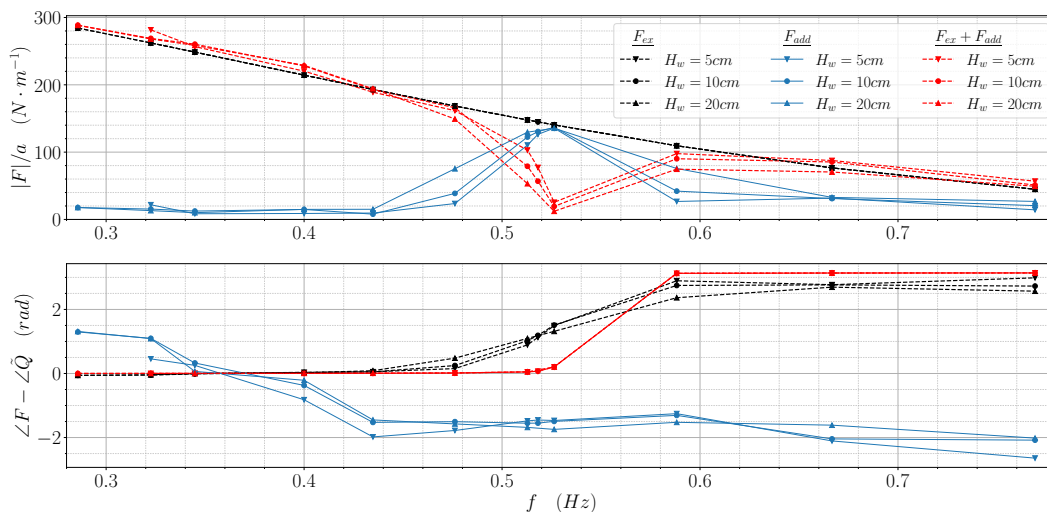


FIGURE 4.27 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en pilonnement, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul

différents des efforts d'excitation au voisinage de la résonance. Il apparaît également que les efforts additionnels en pilonnement sont, au voisinage de la résonance, en opposition de phase avec leurs mouvements relatifs. Les efforts additionnels sont donc, au voisinage de la résonance, des efforts d'amortissement. Le constat fait pour les efforts additionnels en pilonnement est également valable pour les efforts additionnels en tangage.

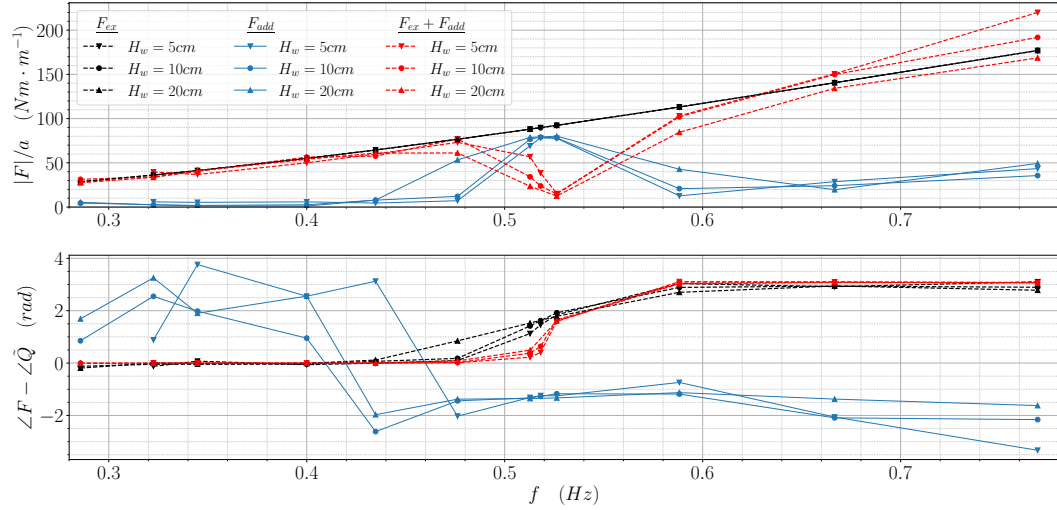


FIGURE 4.28 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en tangage, en fonction de la fréquence, pour le cylindre seul

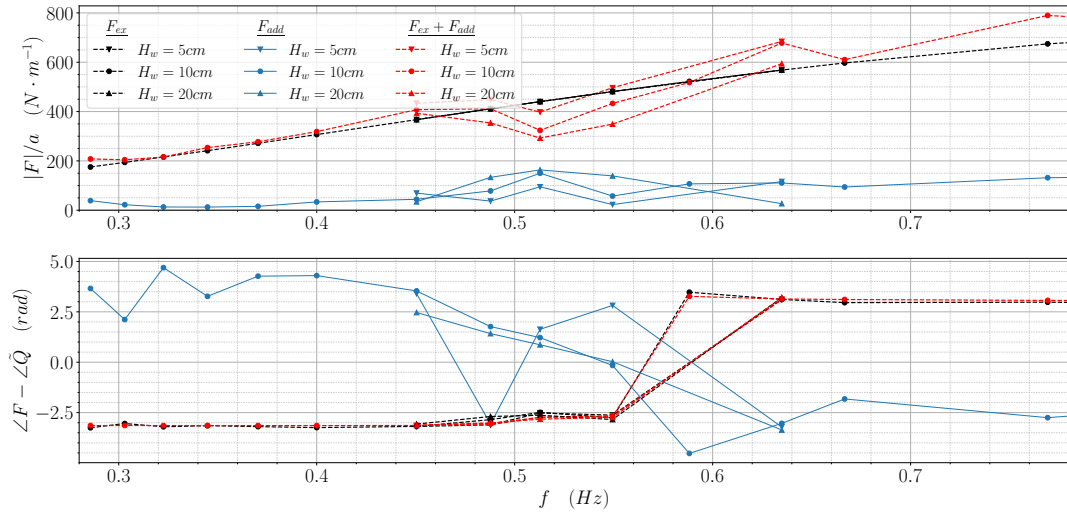


FIGURE 4.29 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en cavement, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette

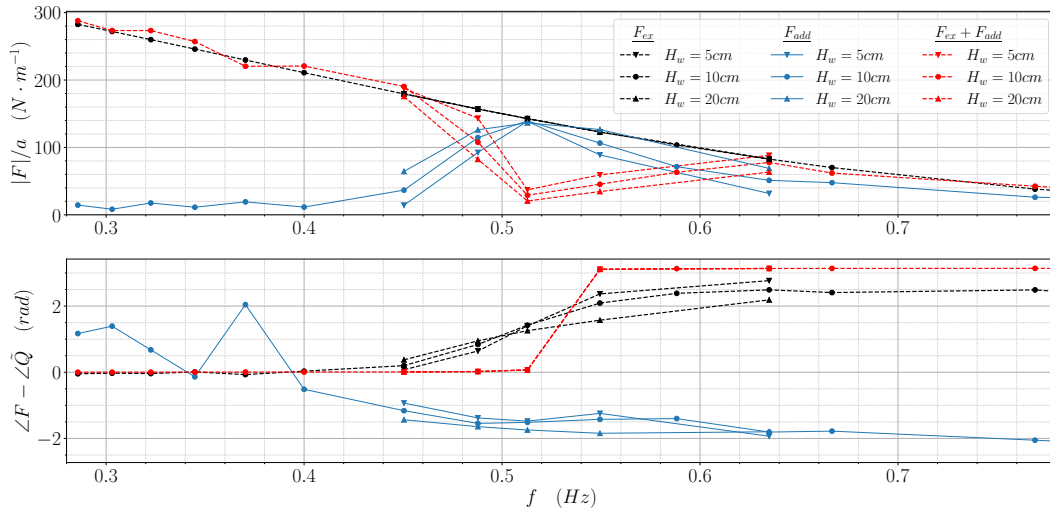


FIGURE 4.30 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en pilonnement, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette

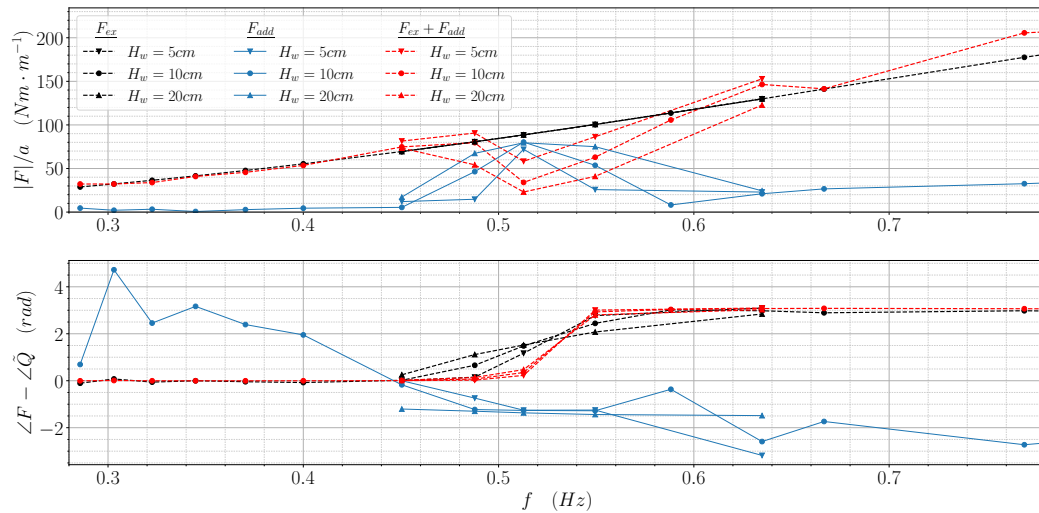


FIGURE 4.31 – Effort additionnel  $F_{add}$ , effort d'excitation  $F_{ex}$  et effort total  $F_{add} + F_{ex}$  en tangage, en fonction de la fréquence, pour le cylindre avec une collerette

## 4.5 Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre seul sur houle régulière

Le mouvement de pilonnement est supposé indépendant des autres mouvements et sera donc traité, dans cette section, sans tenir compte des autres degrés de liberté. L'équation mécanique avant correction est la suivante :

$$\left[ K_{h,33} - \omega^2 (M_{33} + A_{33}(\omega)) + i \omega B_{33}(\omega) \right] Q_3(\omega) = F_{ex,3}(\omega) \quad (4.26)$$

### 4.5.1 Modèle linéaire (ML)

Une manière très simple de corriger le modèle de pilonnement est de rajouter une masse ajoutée additionnelle  $A_{33}^{add}$  et un pourcentage de l'amortissement critique  $B_{c,33}$  défini ci-dessous

$$B_{c,33}(\omega) = 2\sqrt{K_{h,33} (M_{33} + A_{33}(\omega))} \quad (4.27)$$

L'équation mécanique devient alors

$$\left[ K_{h,33} - \omega^2 (M_{33} + A_{33}(\omega) + A_{33}^{add}(\omega)) + i \omega (B_{33}(\omega) + \alpha_{add}(\omega) B_{c,33}(\omega)) \right] \tilde{Q}_3(\omega) = F_{ex,3}(\omega) \quad (4.28)$$

Par identification avec l'équation 4.17, il est possible d'exprimer la masse ajoutée  $A_{33}^{add}$  et le coefficient  $\alpha_{add}$  à partir de l'effort additionnel.

$$A_{33}^{add}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \operatorname{Re} \left( \frac{F_{add,3}}{\tilde{Q}_3(\omega)} \right) \quad \text{et} \quad \alpha_{add}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left( \frac{F_{add,3}}{B_{c,33}(\omega) \tilde{Q}_3(\omega)} \right) \quad (4.29)$$

Les figures 4.32 et 4.33 montrent respectivement la masse ajoutée additionnelle et le coefficient d'amortissement rapporté à l'amortissement critique. Les courbes rouges correspondent aux valeurs identifiées directement grâce à l'équation 4.29. Les courbes noires correspondent à une masse ajoutée additionnelle, ainsi qu'un coefficient d'amortissement critique, constants. Ces coefficients sont obtenus en minimisant, au sens des moindres carrés, l'écart entre la RAO obtenue numériquement et la RAO expérimentale. Ces coefficients sont appelés coefficients optimaux et le seront dans la suite de ce chapitre. Il apparaît, pour le taux d'amortissement critique, que les coefficients obtenus par optimisation sont très proches de ceux obtenus par identification directe au voisinage de la résonance. Cette tendance apparaît également pour la masse ajoutée additionnelle. Cela montre que ce sont les valeurs à la résonance qui ont un fort impact sur la RAO.

La figure 4.34 montre la RAO expérimentale en bleu, la RAO numéroté 1 en rouge et la RAO numéroté 2 en noir pour les différentes hauteurs de vagues. La  $RAO_1$  est obtenue en utilisant les

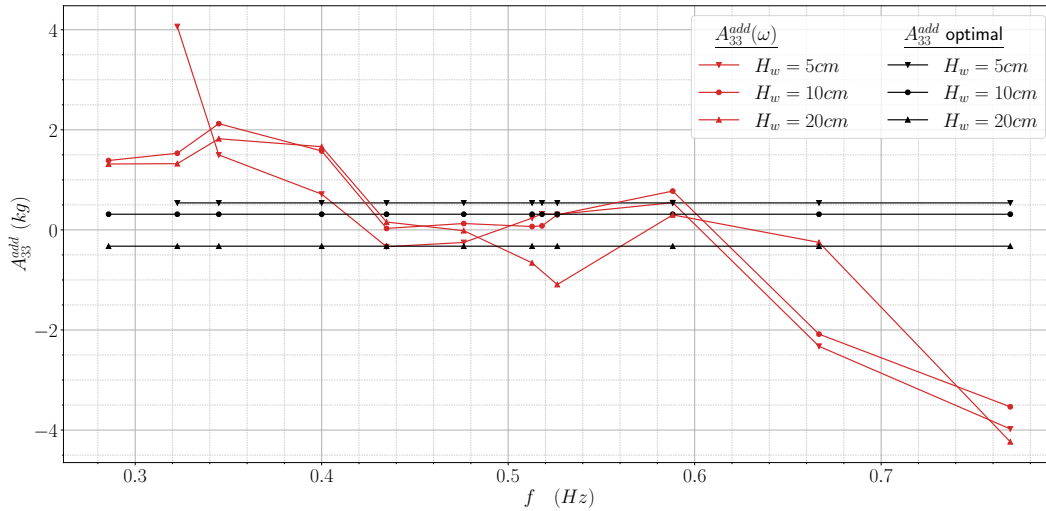


FIGURE 4.32 – Masse ajoutée additionnelle du cylindre seul avec le ML

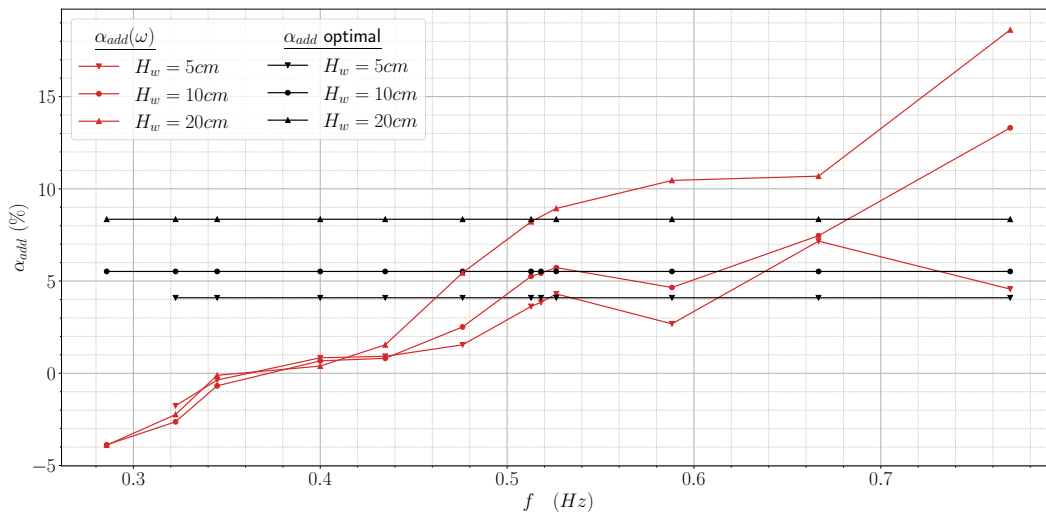


FIGURE 4.33 – Taux d'amortissement critique du cylindre seul avec le ML

coefficients identifiés pour chaque essais. Il est donc logique qu'elle corresponde parfaitement à la RAO expérimentale. La  $RAO_2$  est obtenue en utilisant les coefficients optimaux indépendants de la fréquence de vague mais dépendants de la hauteur de vague. La  $RAO_2$  est relativement proche de la RAO expérimentale. Toutefois, la linéarité de l'amortissement utilisé ne permet pas de s'affranchir de la hauteur de vague. Il n'est donc pas possible de modéliser la masse ajoutée additionnelle et l'amortissement additionnel par des coefficients constants. Les coefficients optimaux sont donnés dans le tableau 4.3.

La figure 4.35 présente l'erreur relative entre les RAOs numériques et la RAO expérimentale.

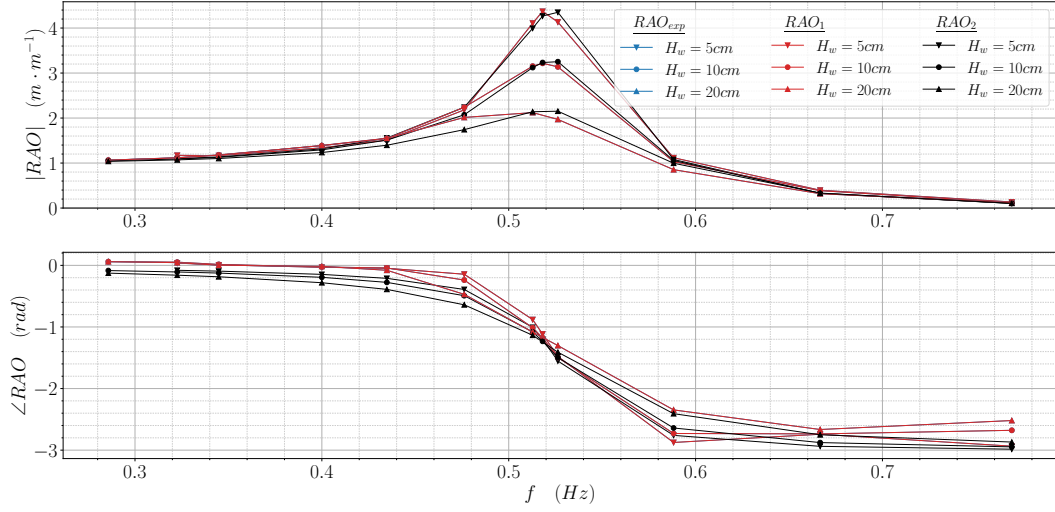


FIGURE 4.34 – RAO en pilonnement du cylindre seul avec le ML

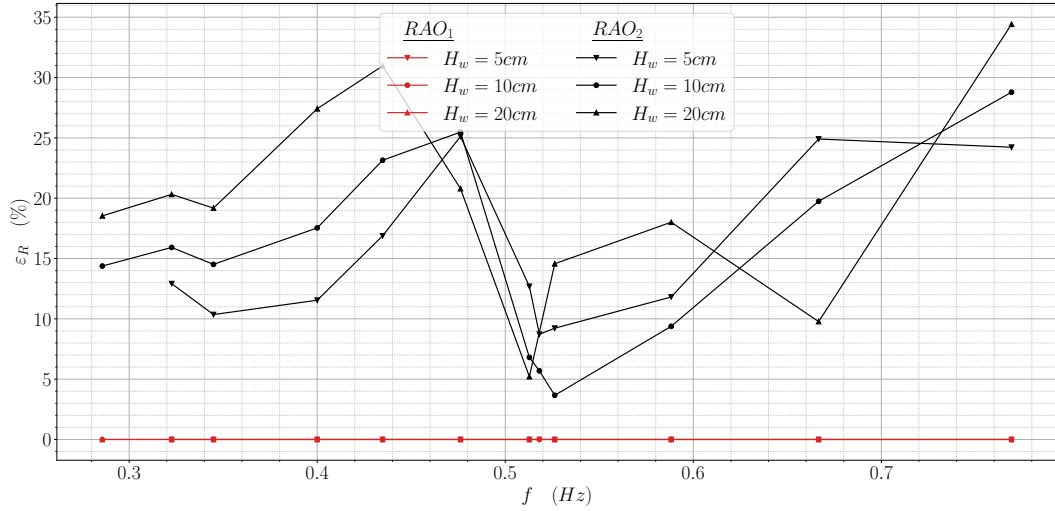


FIGURE 4.35 – Erreur relative des RAOs en pilonnement pour le cylindre seul avec le ML

L'erreur relative est définie dans l'équation 4.30. Cette erreur traduit les différences entre les résultats numériques et expérimentaux.

$$\varepsilon_R(\omega) = \left| \frac{Q_3(\omega) - \tilde{Q}_3(\omega)}{\tilde{Q}_3(\omega)} \right| \quad (4.30)$$

Les erreurs relatives sont importantes. Dans la suite, seules les erreurs relatives moyennes seront considérées. Ces erreurs sont données dans le tableau 4.3.



$H_w$ (cm)	$\alpha_{add}$ optimal (%)	$A_{33}^{add}$ optimal (kg)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_1$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_2$ (%)
5	4.0941	0.5395	$2.61 \cdot 10^{-14}$	15.31
10	5.5213	0.3133	$3.01 \cdot 10^{-14}$	15.42
20	8.3499	-0.3254	$2.37 \cdot 10^{-14}$	19.92

TABLEAU 4.3 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le ML

## 4.5.2 Modèle non-linéaire avec une vitesse absolue (MNLVA)

La section 4.4.5 a montré que l'amortissement additionnel était non-linéaire. De plus, la modélisation linéaire de la section 4.5.1 ne permet pas l'utilisation de coefficients constants. Il est donc nécessaire de s'orienter vers une définition non-linéaire de l'amortissement additionnel. La masse ajoutée est supposée d'ordre 1 d'après l'analyse faite dans la section 4.4.5. L'équation mécanique est la suivante :

$$\left[ K_{h,33} - \omega^2 \left( M_{33} + A_{33}(\omega) + A_{33}^{add}(\omega) \right) + i \omega \left( B_{33}(\omega) + B_{33}^{add}(\omega) \right) \right] \tilde{Q}_3(\omega) = F_{ex,3}(\omega) \quad (4.31)$$

### 4.5.2.1 Définition des coefficients

Les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement linéaire sont définis comme suit :

$$C_m = \frac{A_{33}(\omega) + A_{33}^{add}}{A_{33,th}} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{B_{33}^{add}}{\omega A_{33,th}} \quad (4.32)$$

Où  $A_{33,th}$  est la masse ajoutée théorique prévue par le calcul linéarisé (HydroStar [76]) à la fréquence de résonance expérimentale.

En utilisant l'équation 4.17, il est possible d'exprimer les coefficients hydrodynamiques additionnels en fonction de l'effort additionnel.

$$F_{add,3}(\omega) = - \left( -\omega^2 A_{33}^{add} + i \omega B_{33}^{add} \right) \tilde{Q}_3(\omega) \quad (4.33)$$

Par identification des parties réelle et imaginaire, il vient :

$$A_{33}^{add}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \operatorname{Re} \left( \frac{F_{add,3}}{\tilde{Q}_3(\omega)} \right) \quad \text{et} \quad B_{33}^{add}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left( \frac{F_{add,3}}{\tilde{Q}_3(\omega)} \right) \quad (4.34)$$

Ainsi,

$$C_m = \frac{\omega^2 A_{33}(\omega) + \operatorname{Re}(F_{add,3}/\tilde{Q}_3(\omega))}{\omega^2 A_{33,th}} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{\omega B_{33}(\omega) - \operatorname{Im}(F_{add,3}/\tilde{Q}_3(\omega))}{\omega^2 A_{33,th}} \quad (4.35)$$

En supposant le mouvement de pilonnement décorrélé des autres mouvements, il est possible de définir le coefficient de trainée d'après l'équation 4.25. Compte tenu de la proximité des fréquences propres en pilonnement et en tangage, cette hypothèse est forte et donc discutable. Elle sera néanmoins adoptée. Ce qui donne

$$C_d = \frac{B_{33}^{add}}{\frac{4}{3\pi} \rho S \omega |\tilde{Q}_3|(\omega)} \quad S = \frac{\pi D^2}{4} \quad (4.36)$$

Où  $D$  est le diamètre du cylindre.

#### 4.5.2.2 Calcul de la RAO

Compte tenu de la non-linéarité de l'amortissement, il n'est pas possible de résoudre directement l'équation 4.31. Il a donc été décidé d'utiliser un algorithme itératif. Une valeur initiale, notée  $Q_{3,0}^{in}$ , est utilisée pour le calcul de l'amortissement quadratique. L'équation est ensuite résolue afin d'obtenir  $Q_{3,0}^{out}$ . Cette solution est utilisée pour le calcul de  $Q_{3,1}^{in}$ , qui sera ensuite injectée en entrée du calcul, à l'aide de la relation suivante :

$$Q_{3,i+1}^{in} = Q_{3,i}^{in} + \alpha_{in/out} (Q_{3,i}^{out} - Q_{3,i}^{in}) \quad \alpha_{in/out} \in [0; 1] \quad (4.37)$$

Et ainsi de suite jusqu'à atteindre la convergence dont le critère est défini tel que :

$$|Q_{3,i}^{out} - Q_{3,i}^{in}| < 10^{-14} \quad (4.38)$$

Remarque :

Le critère de convergence  $10^{-14}$  n'a pas de lien avec l'erreur relative  $\varepsilon_R$ .

#### 4.5.2.3 Résultats

De même que pour la section précédente, une approche par des coefficients indépendants de la fréquence est envisagée. Les coefficients  $C_m$  et  $C_d$  optimaux sont obtenus par minimisation, au sens des moindres carrés, de l'écart en la RAO expérimentale et la RAO numérique calculée itérativement. Ces coefficients optimaux ne dépendent que de la hauteur de vague  $H_w$ .

La figure 4.36 présente les coefficients d'amortissement obtenus par identification directe en rouge ainsi que les coefficients d'amortissement correspondants aux coefficients de trainée optimaux, en noir. Les chiffres présents sur la figure, à côté des points, sont les fréquences expérimentales.

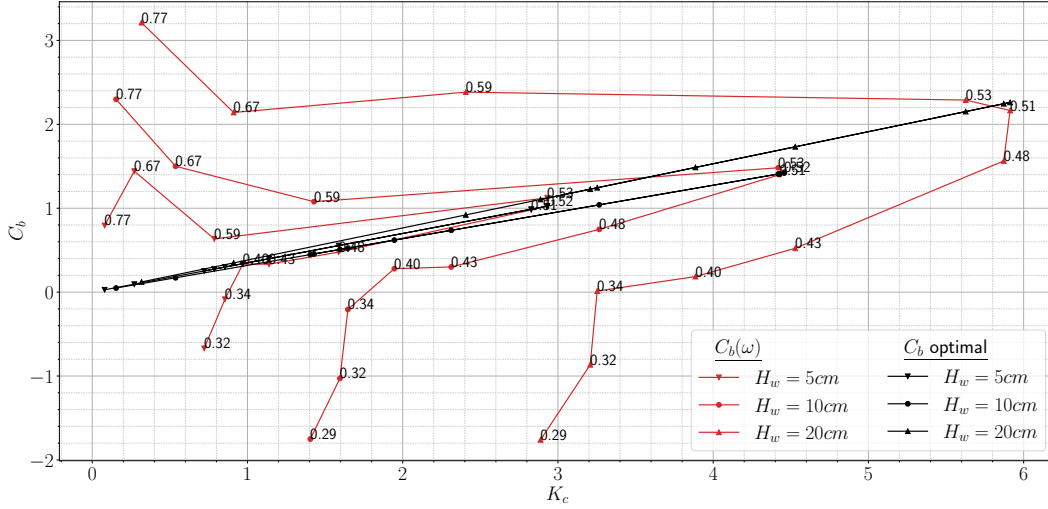


FIGURE 4.36 – Coefficient d'amortissement pour le cylindre seul avec le MNLVA

Un comportement intéressant se remarque pour les coefficients expérimentaux (en rouge). En effet, au delà de la résonance, i.e.  $f > 0.52 Hz$ , les coefficients d'amortissement, pour une même fréquence, peuvent être reliés par des droites dont les coefficients directeurs décroissent à mesure que la fréquence diminue et s'approche de la résonance. En deçà de la résonance, l'observation est similaire. Les coefficients directeurs des droites diminuent à mesure que la fréquence diminue et s'éloigne de la résonance. A partir de  $f = 0.40 Hz$ , les coefficients d'amortissement deviennent négatifs. Cette négativité s'explique par le choix consistant à modéliser l'effort additionnel avec un terme de masse ajoutée et un terme d'amortissement sans que l'effort d'excitation ne soit modifié. En deçà d'une fréquence  $f_b$  le cylindre bouchonne, i.e. il suit le mouvement de la houle. Dans ce cas, l'effort d'excitation théorique de la houle tend vers l'effort de Froude-Krylov. Les termes inertiels, ainsi que le terme d'amortissement, tendent alors vers 0 pour que  $\tilde{Q}_3$  tende vers  $\eta$  comme le montre l'équation 4.39 où  $S_f$  est la surface de flottaison.

$$\left[ \underbrace{K_{h,33}}_{=\rho g S_f} - \underbrace{\omega^2 (M_{33} + A_{33}(\omega) + A_{33}^{add}(\omega)) + i \omega (B_{33}(\omega) + B_{33}^{add}(\omega))}_{\approx 0, f < f_b} \right] \tilde{Q}_3 = \underbrace{F_{ex,3}(\omega)}_{\approx \eta \rho g S_f, f < f_b} \quad (4.39)$$

Les termes  $A_{33}^{add}$  et  $B_{33}^{add}$  sont alors ajustés de manière à respecter l'équation 4.39. Le fait que les coefficients d'amortissement soient négatifs montrent la limite du modèle choisi pour la représentation de l'effort additionnel. Ces points ne sont donc pas pris en compte. L'évolution des pentes des droites reliant les points de même fréquence traduit une évolution du coefficient de traînée qui croît avec la fréquence. Les droites correspondant aux coefficients de traînée

optimaux passent par les résonances car c'est aux résonances que les effets d'amortissement sont les plus importants. Les trois droites, correspondant chacune à une hauteur de vague donnée, sont relativement groupées traduisant ainsi une faible dépendance des coefficients de trainée vis-à-vis la hauteur de vague au niveau de la résonance.

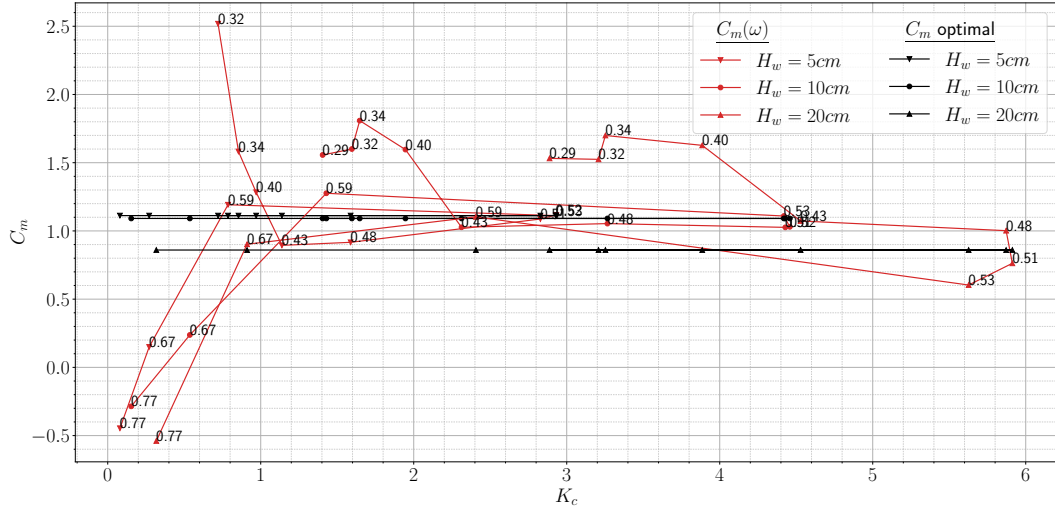


FIGURE 4.37 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MNLVA

La figure 4.37 montre les coefficients de masse ajoutée, de façon analogue à la figure 4.36. Il apparaît que la plupart des points sont groupés entre 0.9 et 1.4. Les points éloignés de la résonance ont des comportements erratiques qu'il convient d'ignorer. En effet, de même que pour l'amortissement quadratique, les points éloignés de la résonance sont bien moins impactés par des variations des coefficients hydrodynamiques que les points à la résonance. Ainsi, un faible écart expérimental, dans une zone de comportement asymptotique, implique des variations importantes des coefficients issus de l'identification directe.

La figure 4.38 présente la RAO expérimentale en bleu, la RAO obtenue avec les coefficients identifiés directement en rouge, la RAO obtenue avec les coefficients optimaux en noir et la RAO obtenue avec le  $C_m$  optimal et le  $C_b$  optimal, correspondant à la hauteur  $H_w = 10cm$ , en gris. La  $RAO_{exp}$  et la  $RAO_1$  correspondent parfaitement ce qui permet de valider la démarche de cette section. La  $RAO_2$  s'avère assez proche de la  $RAO_{exp}$  sauf pour une hauteur de vague  $H_w = 20cm$ , i.e. pour l'amortissement le plus grand. La  $RAO_3$  donne des résultats, certes imparfaits avec un écart maximal de 5% à la résonance pour  $H_w = 20cm$ , mais relativement satisfaisants compte tenu de la simplicité du modèle. Il est toutefois important de noter que la minimisation, au sens des moindres carrés, donne des écart importants pour  $H_w = 10cm$  et aux fréquences  $f = 0.48 Hz$  et  $f = 0.59 Hz$ . Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.4.

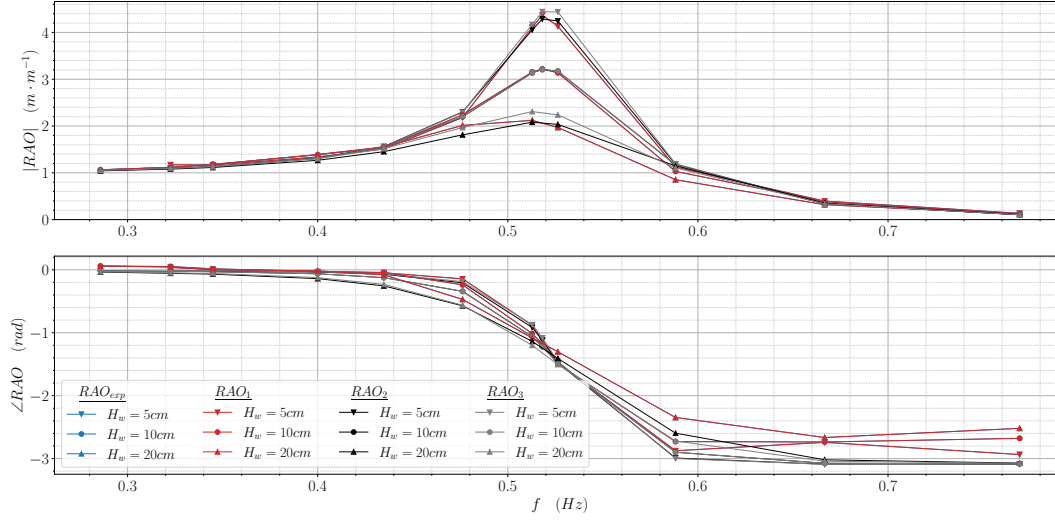


FIGURE 4.38 – RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVA

$H_w$ (cm)	$C_m$ optimal	$C_d$ optimal	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_1$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_2$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_3$ (%)
5	1.1123	1.6649	$6.55 \cdot 10^{-14}$	9.93	10.29
10	1.0914	1.5170	$4.44 \cdot 10^{-14}$	12.82	12.82
20	0.8600	1.8214	$3.95 \cdot 10^{-14}$	20.85	22.41

TABLEAU 4.4 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le MNLVA

#### 4.5.2.4 Frottements visqueux sur le cylindre

Les frottements visqueux n'ont pas été pris en compte jusqu'à présent. Il convient de vérifier leur influence. Il est possible, en première approximation, d'approcher le frottement le long du cylindre par le coefficient de frottement d'une plaque plane. Le nombre de Reynolds est fondé sur la vitesse oscillante et une longueur référence égale à l'amplitude d'oscillation.

$$Re = \frac{\omega |\dot{Q}_3|^2}{\nu} \quad (4.40)$$

Il n'est pas aisé de déterminer si l'écoulement est laminaire, turbulent ou transitoire. La définition, choisie pour le coefficient de frottement, est celle pour un écoulement laminaire donnée par Blasius car la valeur du coefficient de frottement y est supérieure, à Reynolds égal, à celle donnée par les formules des écoulement turbulents. L'effort de frottement est le suivant :

$$F_f = \frac{1}{2} \rho S_{cyl} C_f (\dot{q}_3(t))^2 \quad C_f = \frac{2}{\sqrt{Re}} \quad S_{cyl} = \pi DH \quad (4.41)$$

La surface de référence n'est pas la même que pour la trainée de forme. Une coefficient  $C'_f$  tel que :

$$C'_f S = C_f S_{cyl} \iff C'_f = \frac{C_f S_{cyl}}{S} = \frac{8H}{D\sqrt{Re}} \quad (4.42)$$

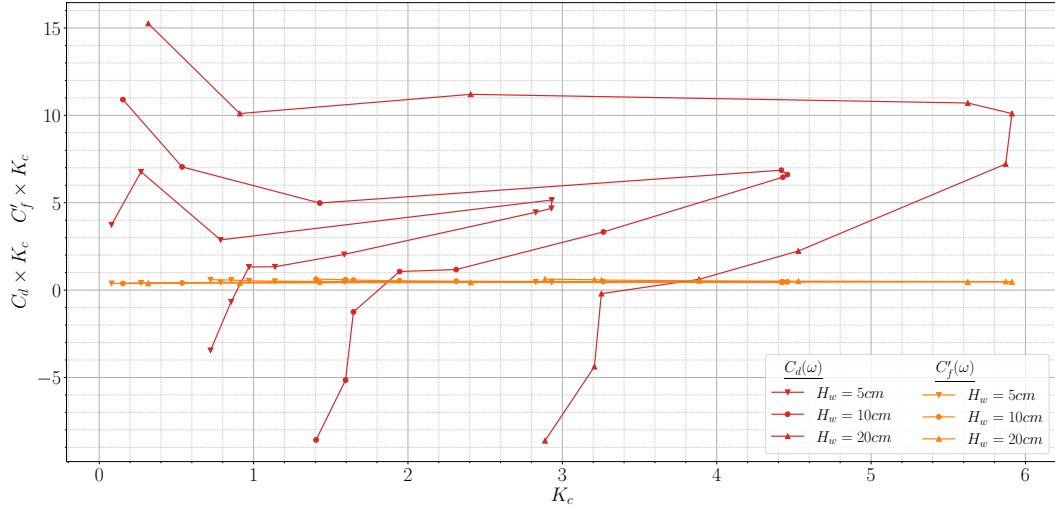


FIGURE 4.39 – Coefficient de frottement et de trainée pour le cylindre seul avec le MNLVA

La figure 4.39 montre les coefficients de trainée identifiés directement ainsi que les coefficients de frottement pour chaque essai. Ces coefficients sont multipliés par le nombre de Keulegan-Carpenter pour une représentation plus visuelle. Il apparaît que les effets de frottement pariétal sont quasiment constants et faibles devant les coefficients de trainée identifiés. Le frottement visqueux sera donc négligé.

### 4.5.3 Modèle non-linéaire avec une vitesse relative (MNLVR)

Pour l'instant, l'amortissement non-linéaire ne tient pas compte de la vitesse du fluide. Il est assez intuitif de supposer que les phénomènes non-linéaires, représentés par l'amortissement quadratique, sont localisés au niveau du disque inférieur du cylindre, i.e.  $z = -812 \text{ mm}$ . En effet, la section 4.5.2.4 a montré qu'il est pertinent de supposer que les effets de frottement sont négligeables. Une façon d'exprimer la localisation des effets non-linéaires est d'utiliser la vitesse relative entre le corps et la vitesse de la houle incidente. Il est alors pertinent d'introduire un nombre de Keulegan-Carpenter adapté [161].

$$K_{c_w} = \frac{2\pi|Q_3 - A_z|}{D} \quad (4.43)$$

Avec  $A_z$  l'amplitude du mouvement vertical de la houle incidente suivant l'axe  $\vec{z}_0$  et à la cote

$z$  correspondant à la position verticale du disque inférieur au repos. D'après les conventions d'Hydrostar, l'élévation de surface libre d'une vague se propageant dans le sens des  $x$  décroissants, en profondeur infinie, est définie comme suit :

$$\eta(x, y, t) = \operatorname{Re} \left( a e^{i(\omega t + kx)} \right) = a \cos(\omega t + kx) \quad (4.44)$$

Avec  $a$  l'amplitude de vague. Le potentiel incident  $\Phi_0$  et la vitesse  $u_z$  se déduisent à partir de l'équation 4.44. L'hypothèse de la profondeur infinie permet d'approcher le nombre d'onde  $k$  par le nombre d'onde en profondeur infinie  $k_0$  et d'écrire le potentiel  $\Phi_0$  comme suit :

$$\Phi_0 = \operatorname{Re} \left( \frac{i g}{\omega} a e^{k_0 z} e^{i(\omega t + kx)} \right) \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g} \quad (4.45)$$

$$u_z(\omega) = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \right) \Big|_{x=0, y=0} = -\omega \underbrace{a e^{k_0 z}}_{A_z} \sin(\omega t + k_0 x) = \operatorname{Re} \left( i \omega A_z a e^{i(\omega t + k_0 x)} \right) \quad (4.46)$$

L'équation mécanique est alors la suivante :

$$\begin{aligned} & \left[ K_{h,33} - \omega^2 \left( m + A_{33}(\omega) + A_{33}^{add}(\omega) \right) + i \omega B_{33}(\omega) \right] \tilde{Q}_3(\omega) \\ & + i \omega B_{33}^{add}(\omega) \left( \tilde{Q}_3(\omega) - a e^{k_0 z} \right) = F_{ex,3}(\omega) \end{aligned} \quad (4.47)$$

Ainsi, par identification avec l'équation 4.17, il est possible d'exprimer l'effort additionnel en fonction des coefficients hydrodynamiques additionnels.

$$F_{add,3}(\omega) = \left( \omega^2 A_{33}^{add}(\omega) - i \omega B_{33}^{add}(\omega) \right) \tilde{Q}_3(\omega) + i \omega B_{33}^{add}(\omega) a e^{k_0 z} \quad (4.48)$$

En regroupant les termes d'accélération et de vitesse :

$$F_{add,3}(\omega) = \omega^2 A_{33}^{add}(\omega) \tilde{Q}_3(\omega) - i \omega B_{33}^{add}(\omega) \left( \tilde{Q}_3(\omega) - a e^{k_0 z} \right) \quad (4.49)$$

Les parties réelle et imaginaire, respectivement repérées par les exposants  $R$  et  $I$ , de cette équation permettent d'écrire le système d'équation suivant

$$\begin{aligned} F_{add,3}^R(\omega) &= \omega^2 A_{33}^{add}(\omega) \tilde{Q}_3^R(\omega) + \omega B_{33}^{add}(\omega) \tilde{Q}_3^I(\omega) \\ F_{add,3}^I(\omega) &= \omega^2 A_{33}^{add}(\omega) \tilde{Q}_3^I(\omega) - \omega B_{33}^{add}(\omega) \left( \tilde{Q}_3^R(\omega) - a e^{k_0 z} \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Ce qui donne, tout calcul fait, les expressions suivantes pour les coefficients hydrodynamiques additionnels.

$$A_{33}^{add}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \frac{F_{add,3}^R (\tilde{Q}_3^R - ae^{k_0z}) + F_{add,3}^I \tilde{Q}_3^I}{\tilde{Q}_3^R (\tilde{Q}_3^R - ae^{k_0z}) + (\tilde{Q}_3^I)^2} \quad (4.51)$$

$$B_{33}^{add}(\omega) = \frac{1}{\omega} \frac{F_{add,3}^R \tilde{Q}_3^I - F_{add,3}^I \tilde{Q}_3^R}{\tilde{Q}_3^R (\tilde{Q}_3^R - ae^{k_0z}) + (\tilde{Q}_3^I)^2} \quad (4.52)$$

Contrairement à la section 4.5.2, l'équation 4.23 n'est pas utilisable en l'état. En effet, en réécrivant l'égalité des travaux, il vient l'équation 4.53.

$$\int_0^T \frac{1}{2} \rho S C_d |\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}| (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt = \int_0^T B_{33}^{add} (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt \quad (4.53)$$

Ainsi, la nouvelle définition du coefficient de trainée est la suivante :

$$C_d = \frac{B_{33}^{add} \int_0^T (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt}{\frac{1}{2} \rho S \int_0^T |\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}| (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt} = \frac{B_{33}^{add}}{\frac{4}{3\pi} \rho S \omega |Q_3 - ae^{k_0z}|} \quad (4.54)$$

L'équation 4.54 n'est pas triviale. Elle fait donc l'objet d'une démonstration donnée en annexe C.4.

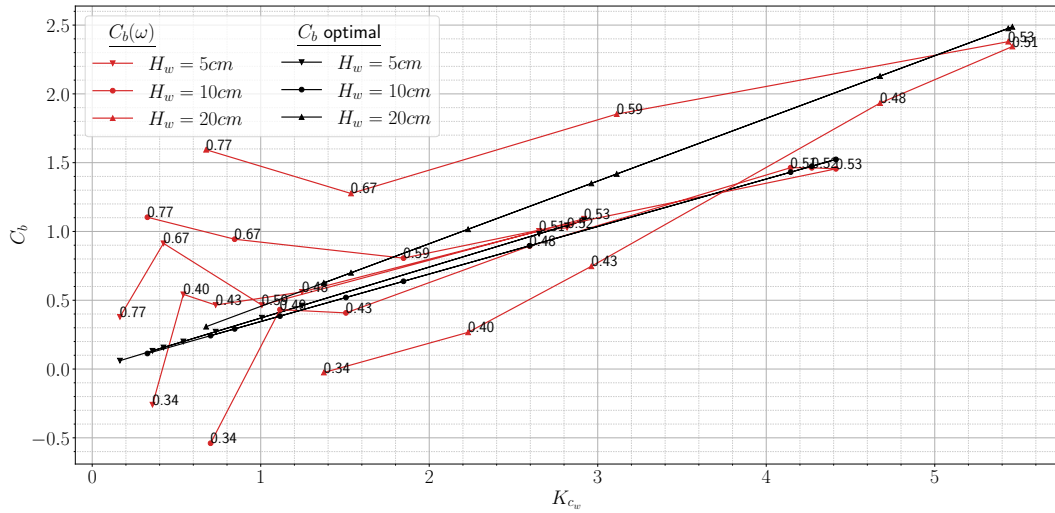


FIGURE 4.40 – Coefficient d'amortissement pour le cylindre seul avec le MNLVR

La figure 4.40 présente les coefficients d'amortissement de façon analogue à la figure 4.36. Il est intéressant de remarquer que les points rouges sont plus groupés que ceux de la figure 4.36. Les écarts entre les droites noires, i.e. la dépendance des coefficients de trainée à la hauteur de



vague, sont sensiblement les mêmes que pour la figure 4.36.

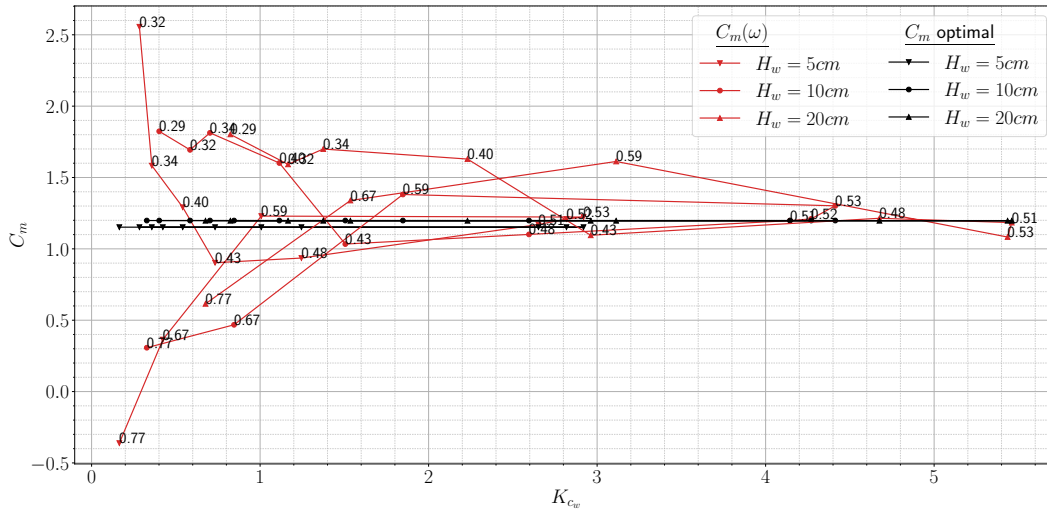


FIGURE 4.41 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MNLVR

La figure 4.41 présente les coefficients d'amortissement de façon analogue à la figure 4.37. La plupart des points sont toujours groupés entre 0.9 et 1.4. Toutefois, les valeurs optimales sont plus grandes et moins groupées que pour la figure 4.37.

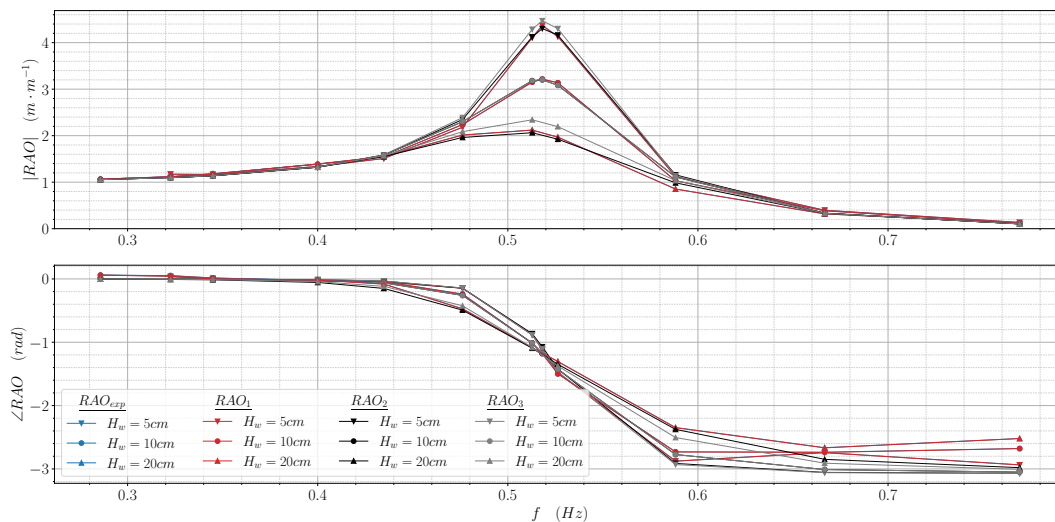


FIGURE 4.42 – RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVR

La figure 4.42 présente la RAO expérimentale en bleu, la RAO obtenue avec les coefficients identifiés directement en rouge, la RAO obtenue avec les coefficients optimaux en noir et la RAO obtenue avec les coefficients optimaux pour  $H_w = 10cm$  en gris. La  $RAO_{exp}$  et la  $RAO_1$

correspondent parfaitement ce qui permet de valider la démarche de cette section. La  $RAO_2$  est également très proche de la  $RAO_{exp}$  et ce même pour  $H_w = 20cm$ . La  $RAO_3$  est également proche de la  $RAO_{exp}$  avec un écart maximal de 5% à la résonance pour  $H_w = 20cm$ . Même si les variations sont minimales par rapport à la section précédente, il est clair que cette approche donne de meilleurs résultats. Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.5. Il apparaît que l'erreur relative de la  $RAO_1$ , i.e. obtenue avec les coefficients identifiés directement, est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-1} \%$  contre seulement  $2 \cdot 10^{-13}$  à  $7 \cdot 10^{-13}$ . Le modèle converge donc vers une valeur qui n'est pas tout à fait la valeur expérimentale. Néanmoins, ce modèle reste globalement meilleur.

$H_w$ (cm)	$C_m$ optimal	$C_d$ optimal	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_1$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_2$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_3$ (%)
5	1.1520	1.7650	$2.81 \cdot 10^{-1}$	9.12	9.41
10	1.1983	1.6445	$2.73 \cdot 10^{-1}$	9.25	9.25
20	1.1968	2.1693	$2.63 \cdot 10^{-1}$	10.87	13.97

TABLEAU 4.5 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre seul avec le MNLVR

## 4.6 Modèle de correction pour le pilonnement du cylindre avec collerette sur houle régulière

Un modèle satisfaisant a été trouvé pour le comportement du cylindre seul. A présent, la démarche précédente va être appliquée au cylindre muni de la collerette.

### 4.6.1 Modèle non-linéaire avec une vitesse absolue (MNLVA)

De même que pour le cylindre, une approche avec la vitesse absolue est d'abord envisagée. Les définitions des coefficients hydrodynamiques sont donc les mêmes que pour la section 4.5.2. La surface de référence est toutefois différente et est à présent la surface de la collerette.

$$S = \pi \frac{D_c^2}{4} \tag{4.55}$$

Où  $D_c$  est le diamètre de la collerette.

La figure 4.43 présente les coefficients d'amortissement obtenus par identification directe en rouge ainsi que les coefficients d'amortissement, correspondant aux coefficients de trainée optimaux, en noir. Les chiffres présents sur la figure sont les fréquences expérimentales. De même que pour la figure 4.36, le coefficient de trainée augmente avec la fréquence. Les coefficients optimaux correspondent à ceux identifiés pour la résonance  $f = 0.5 Hz$ .

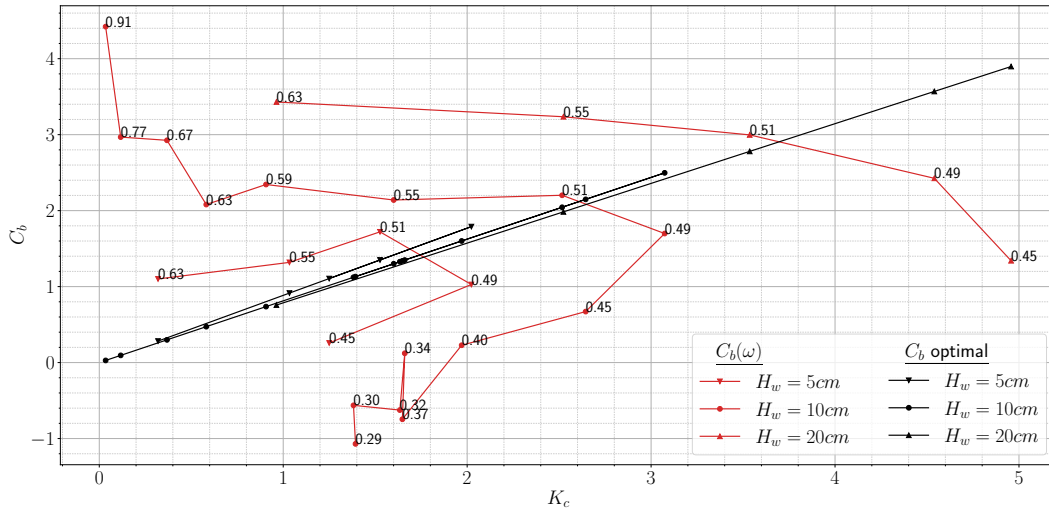


FIGURE 4.43 – Coefficient d'amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA

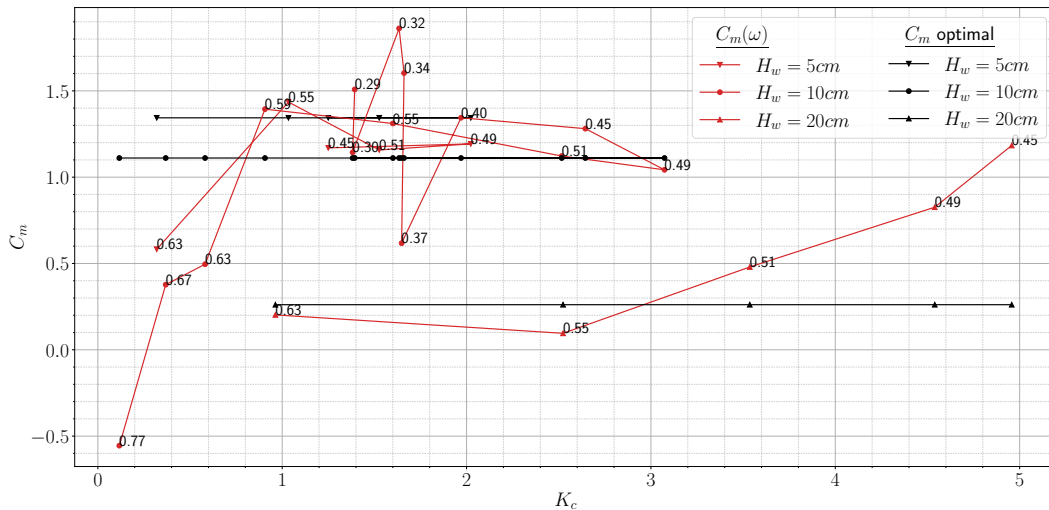


FIGURE 4.44 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA

La figure 4.44 présente les coefficients de masse ajoutée. Contrairement à la figure 4.37, les coefficients ne sont pas groupés pour  $H_w = 20cm$  et la valeur optimale pour cette hauteur de vague ne passe pas par la résonance. Toutefois, les valeurs pour les autres hauteurs sont relativement bien groupées et passent bien par la résonance. Cette diminution du coefficient de masse ajoutée avec l'augmentation du  $K_c$  a été observée par Sarpaka [156] pour un cylindre oscillant dans un fluide au repos. Il est tentant de dire que c'est le même phénomène que nous observons ici. Toutefois, la nature de l'écoulement n'est pas la même. De plus, il convient de garder à l'esprit que la définition de coefficient de masse ajoutée dépend de la prise en compte,

ou non, de la vitesse de la houle incidente comme le montre l'équation 4.51. Il est donc possible que la définition, utilisée ici, ne soit tout simplement pas pertinente.

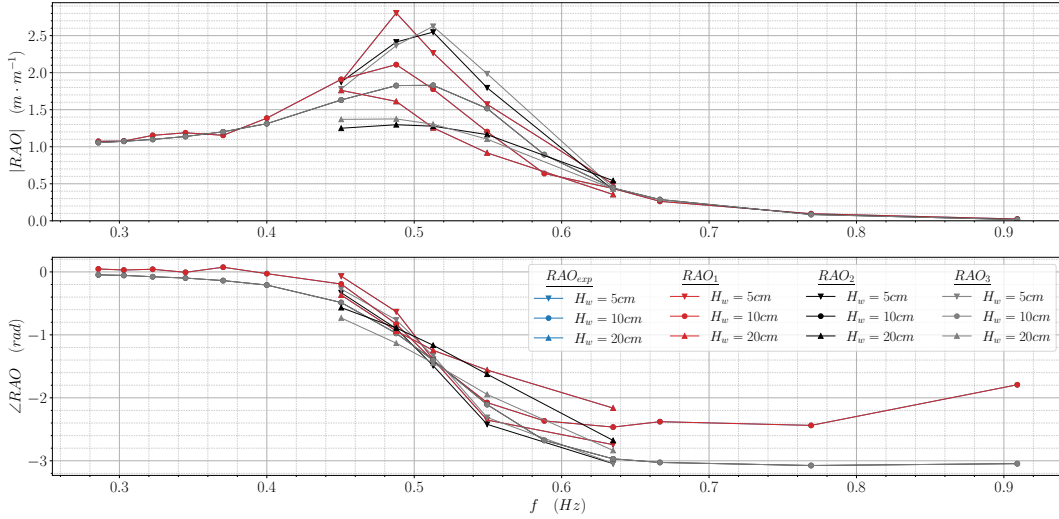


FIGURE 4.45 – RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA

La figure 4.45 présente la RAO expérimentale en bleu, la RAO obtenue avec les coefficients identifiés directement en rouge, la RAO obtenue avec les coefficients optimaux en noir et la RAO obtenue avec les coefficients optimaux pour  $H_w = 10cm$  en gris. La  $RAO_1$  correspond toujours parfaitement à la  $RAO_{exp}$ . La méthode est donc toujours juste. Cependant, les autres RAOs ne correspondent pas du tout à la  $RAO_{exp}$ . L'hypothèse d'un amortissement quadratique ne tenant compte que de la vitesse absolue du corps est donc inadaptée dans le cas du cylindre avec collerette. Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.6.

$H_w$ (cm)	$C_m$ optimal	$C_d$ optimal	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_1$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_2$ (%)	$\overline{\varepsilon}_R$ $RAO_3$ (%)
5	1.3438	3.5245	$6.99 \cdot 10^{-13}$	23.73	22.78
10	1.1110	3.2369	$4.69 \cdot 10^{-13}$	32.89	32.89
20	0.2613	3.1321	$1.96 \cdot 10^{-13}$	34.35	41.04

TABLEAU 4.6 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre avec collerette avec le MNLVA

#### 4.6.2 Modèle non-linéaire avec une vitesse relative (MNLVR)

La prise en compte de la vitesse de la houle incidente est donc envisagée. Les définitions des coefficients sont identiques à ceux présentés en section 4.5.3. La profondeur  $z$  est toutefois

modifiée. Il est en effet plus intuitif de choisir une profondeur correspondant à la position de la collerette, i.e.  $z = -410 \text{ mm}$ .

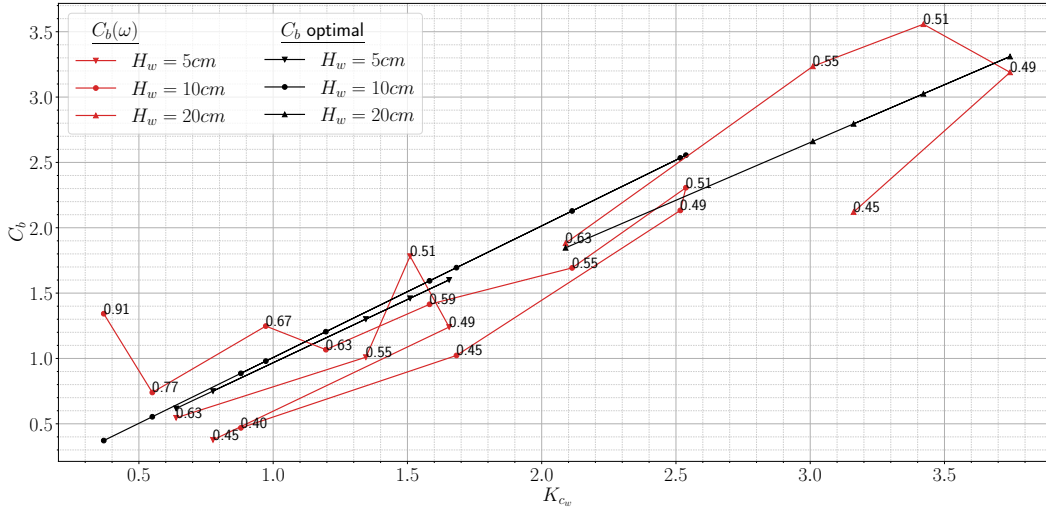


FIGURE 4.46 – Coefficient d’amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR

La figure 4.46 présente les coefficients d’amortissement obtenus par identification directe en rouge ainsi que les coefficients d’amortissement, correspondants aux coefficients de trainée optimaux, en noir. Les chiffres présents sur la figure sont les fréquences expérimentales. Il apparaît que les coefficients sont assez bien groupés. De plus les écarts de pente des droites noires sont faibles ce qui laisse penser que l’influence de la hauteur de vague est assez faible. La figure 4.47 présente les coefficients de masse ajoutée. Un comportement intéressant est observable pour les coefficients issus de l’identification directe. En effet, il semble que le coefficient de masse ajoutée se comporte un peu comme le coefficient de trainée de la figure 4.43. C’est-à-dire que, pour une fréquence donnée, les coefficients de masse ajoutée semblent varier linéairement en fonction du  $K_{c_w}$ . Le groupement des coefficients n’est pas très satisfaisant. Toutefois, il convient de vérifier l’impact de cette dispersion sur la réponse obtenue.

La figure 4.48 présente la RAO expérimentale en bleu, la RAO obtenue avec les coefficients identifiés directement en rouge, la RAO obtenue avec les coefficients optimaux en noir et la RAO obtenue avec les coefficients optimaux pour  $H_w = 10\text{cm}$  en gris. Les correspondances sont bien meilleures que pour la figure 4.45. Ce qui indique la pertinence du modèle choisi pour la représentation de l’amortissement additionnel. Il est toutefois important de noter que les correspondances sont globalement moins satisfaisantes que pour le cas du cylindre seul. Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.7.

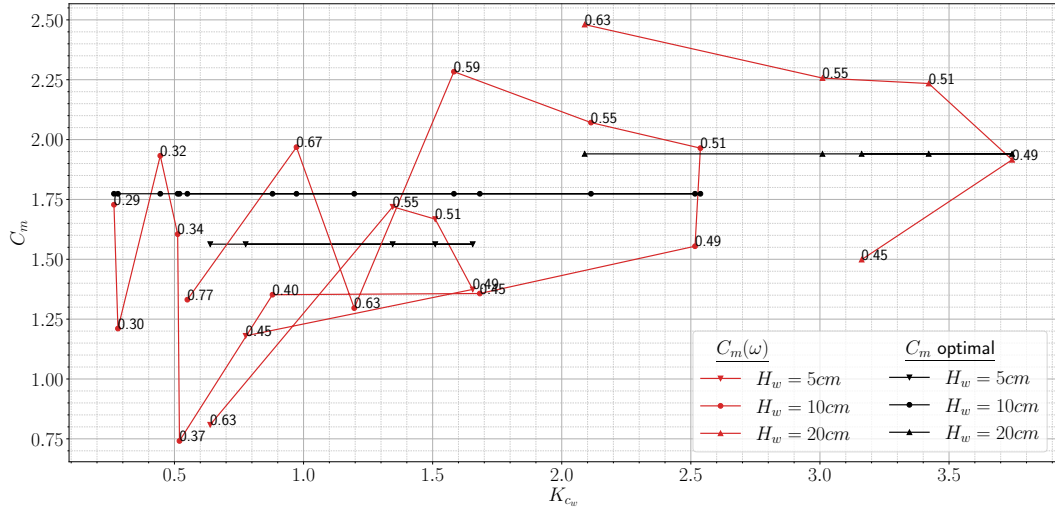


FIGURE 4.47 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR

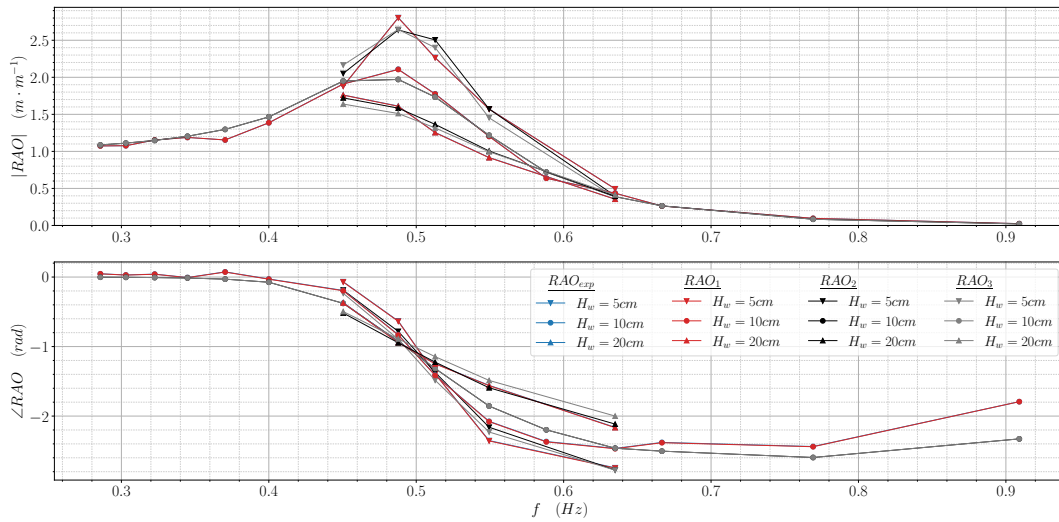


FIGURE 4.48 – RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR

$H_w$ (cm)	$C_m$ optimal	$C_d$ optimal	$\bar{\varepsilon}_R$ $RAO_1$ (%)	$\bar{\varepsilon}_R$ $RAO_2$ (%)	$\bar{\varepsilon}_R$ $RAO_3$ (%)
5	1.5631	3.8539	$4.99 \cdot 10^{-1}$	16.14	19.75
10	1.7737	4.0132	$3.43 \cdot 10^{-1}$	14.54	14.54
20	1.9403	3.5225	$4.46 \cdot 10^{-1}$	9.56	13.70

TABEAU 4.7 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR

## 4.7 Modèle de correction pour le pilonnement sur houle irrégulière

Les modèles de corrections des sections 4.5.3 et 4.6.2 ont montré une certaine indépendance de l'amortissement non-linéaire vis-à-vis de la fréquence et de la hauteur de vague. Il est intéressant de regarder si le modèle de correction, avec prise en compte de la vitesse de la houle incidente, est pertinent pour une houle irrégulière. L'équation dynamique devient :

$$\begin{aligned} & (M_{33} + C_m A_{33,th}) \ddot{q}_3(t) + \frac{1}{2} \rho S C_d |\dot{q}_3(t) - u_z(t)| (\dot{q}_3(t) - u_z(t)) + K_{33} q_3(t) \\ & = f_{ex,3} = \int_{-\infty}^{+\infty} K_{ex,3}(t - \tau) \tilde{\eta}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.56)$$

Où  $K_{ex,3}$  est la fonction de retard de l'effort d'excitation. La définition de cette fonction de retard est donnée dans l'équation 2.71. La vitesse  $u_z$  est toujours la vitesse verticale de la houle incidente, à la profondeur  $z$ , mais la définition diffère légèrement de celle utilisée pour les essais en houle régulière. En effet, le spectre irrégulier contient des fréquences faibles donc il faut, en toute rigueur, revenir à une définition en profondeur finie de la vitesse verticale de la houle incidente.

$$u_z(t) = \frac{\partial \phi_0}{\partial z} = \text{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{ig}{\omega} a \frac{\cosh(k(z + H_B))}{\cosh(kH_B)} \right) e^{i(\omega t + kx)} \right] = \frac{k}{k_0} \frac{\sinh(k(z + H_B))}{\cosh(kH_B)} \dot{\eta}(t) \quad (4.57)$$

Avec  $k$  le nombre d'onde, en profondeur finie, donné par la relation de dispersion et  $k_0$  le nombre d'onde en profondeur infinie.

$$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh(kH_B) \quad \text{et} \quad k_0 = \frac{\omega^2}{g} \quad (4.58)$$

La détermination de  $k$ , pour une fréquence donnée, se fait par dichotomie. L'équation 4.56 est résolue numériquement par un algorithme de Runge-Kutta 4 [109] avec comme paramètres d'entrée les coefficients  $C_m$  et  $C_d$ . Un algorithme de minimisation va déterminer, pour chaque essai, les coefficients minimisant l'écart entre  $q_3(t)$  et  $\tilde{q}_3(t)$ .

### 4.7.1 Cas du cylindre seul

Pour le cylindre seul, la profondeur  $z$  est la profondeur du disque inférieur à l'équilibre, i.e.  $z = -812 \text{ mm}$ .

La figure 4.49 montre les RAOs expérimentales pour chaque essai réalisé en houle irrégulière. Cette figure montre également les RAOs correspondant aux séries temporelles numériques et les coefficients obtenus par minimisation de l'écart entre  $q_3(t)$  et  $\tilde{q}_3(t)$ . Les correspondances sont

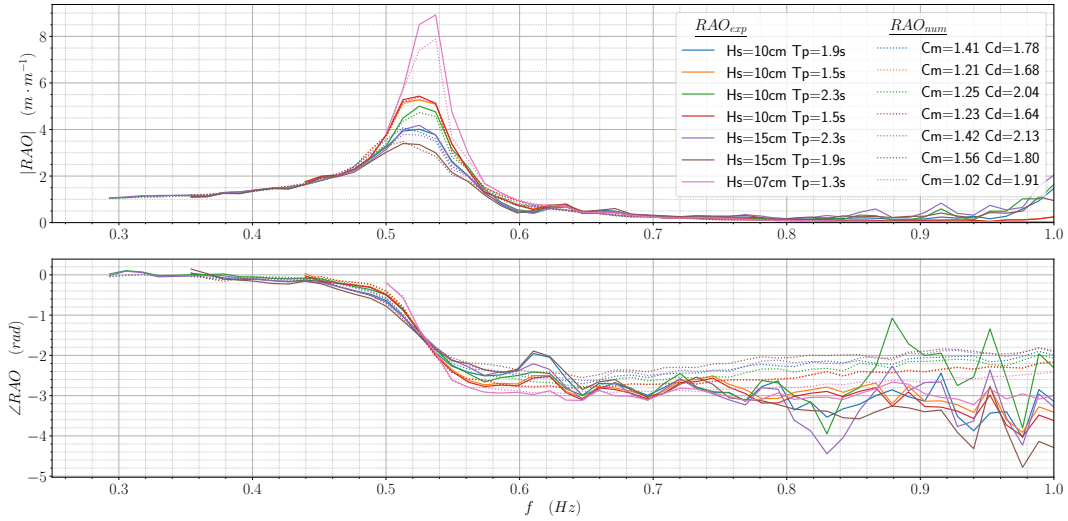


FIGURE 4.49 – RAO en pilonnement pour le cylindre seul avec le MNLVR sur houle irrégulière

assez bonnes compte tenu de la simplicité du modèle. De plus, les coefficients varient peu d'un essai à l'autre et restent du même ordre de grandeur que ceux obtenus en houle régulière. A l'exception du coefficient de masse ajoutée de l'essai de hauteur significative  $H_s = 7 \text{ cm}$ . Cela s'explique par le fait que l'invariance des coefficients vis-à-vis de la hauteur de vague n'est vraie que dans la mesure où la hauteur ne varie pas de façon trop importante d'un essai à l'autre.

#### 4.7.2 Cas du cylindre avec collerette

Pour le cylindre seul, la profondeur  $z$  est la profondeur du plan médian de la collerette à l'équilibre, i.e.  $z = -410 \text{ mm}$ .

La figure 4.50 montre les RAOs expérimentales pour chaque essai réalisé en houle irrégulière. Cette figure montre également les RAOs correspondant aux séries temporelles numériques et les coefficients obtenus par minimisation de l'écart entre  $q_3(t)$  et  $\tilde{q}_3(t)$ . De même que pour la figure 4.49, les correspondances sont assez bonnes compte tenu de la simplicité du modèle. Elles sont toutefois moins bonnes que pour le cas du cylindre seul. Cela confirme ce qui a été observé pour les essais en houle régulière. A savoir que le modèle de correction, avec vitesse relative est moins efficace pour le cylindre avec collerette que pour le cylindre seul. Il demeure que les coefficients varient peu d'un essai à l'autre et restent du même ordre de grandeur que ceux obtenus en houle régulière.



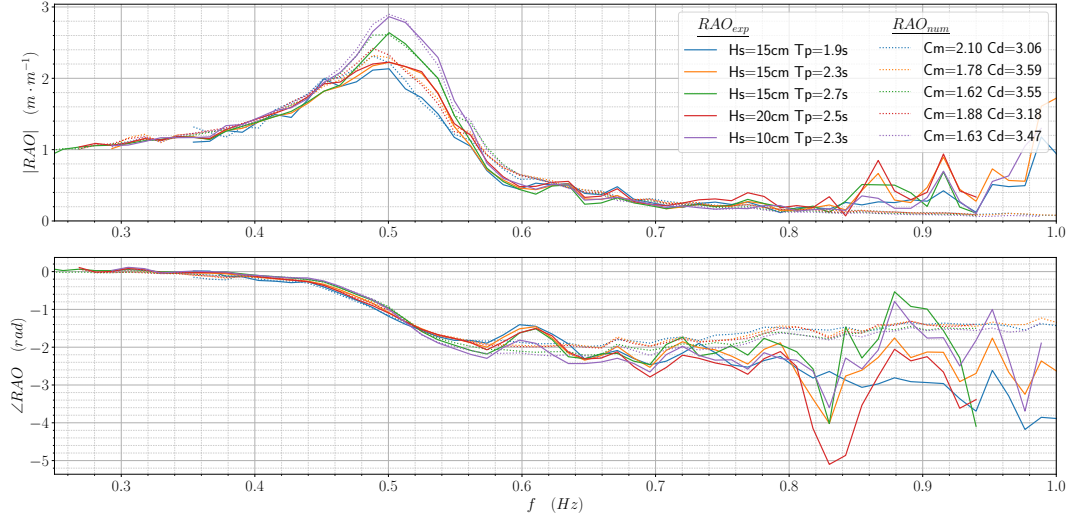


FIGURE 4.50 – RAO en pilonnement pour le cylindre avec collerette avec le MNLVR sur houle irrégulière

## 4.8 Modèle de correction pour le cavement/tangage sur houle régulière

D'après Zan et Lin [162], si  $\frac{D}{\lambda} \leq 0.15$ , alors il est possible de négliger la diffraction et de ne considérer que les potentiels incident et diffracté pour le calcul de l'effort d'excitation. Cette condition est satisfaite pour les essais réalisés avec le cylindre. Il est donc possible d'utiliser le modèle de Morison [30] adapté par Rainey [163] afin de prendre en compte la vitesse du corps.

$$\begin{aligned}
 df_{\text{Morison}} = & \underbrace{-\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m\ddot{x}_M dz}_{\text{masse ajoutée}} - \underbrace{\frac{1}{2}\rho DC_d|\dot{x}_M - u_x(M)|(\dot{x}_M - u_x(M)) dz}_{\text{trainée}} \\
 & + \underbrace{\rho\pi\frac{D^2}{4}(1+C_m)\ddot{u}_x(M) dz}_{\text{excitation}}
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Avec  $C_m$  le coefficient de masse ajoutée,  $C_d$  le coefficient de trainée et  $u_x(M)$  la vitesse horizontale de la houle incidente, i.e. non perturbée par la présence et le mouvement cylindre, évaluée au point  $M$ . Dans cette section, l'effort d'excitation sera celui donné par Hydrostar. L'équation 4.59 suppose implicitement que les efforts inertiels sont en phase avec l'effort d'excitation de la houle incidente diffractée. Cette hypothèse, bien que pertinente, n'est pas toujours rigoureusement vraie même à petite échelle. La formulation résiduelle adoptée sera néanmoins la suivante.

$$df_{\text{Morison}} = -\underbrace{\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m\ddot{x}_M dz}_{\text{masse ajoutée}} - \underbrace{\frac{1}{2}\rho DC_d|\dot{x}_M - u_x(M)|(\dot{x}_M - u_x(M)) dz}_{\text{trainée}} \quad (4.60)$$

De plus, la vitesse du point  $M$  sera exprimée à partir de celle du point de référence, i.e. le centre de gravité  $G$ .

$$\dot{x}_M = \dot{q}_1 + (z - q_3)\dot{q}_5 \quad (4.61)$$

Ce qui donne finalement,

$$df_{\text{Morison}} = -\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m(\ddot{q}_1 + (z - q_3)\ddot{q}_5) dz - \frac{1}{2}\rho DC_d|\dot{q}_1 + (z - q_3)\dot{q}_5 - u_x(M)|(\dot{q}_1 + (z - q_3)\dot{q}_5 - u_x(M)) dz \quad (4.62)$$

Dans la suite de ce chapitre, le mouvement de pilonnement  $q_3$  n'est plus considéré. Ainsi, nous utiliserons  $z_{G,eq}$ , déjà présenté en section 4.3.1, qui est la position verticale du centre de gravité à l'équilibre.

#### 4.8.1 Modèle avec vitesse absolue

Dans un premier temps, l'influence de la vitesse de la houle est négligée afin de simplifier le problème. Cette simplification est discutable tout comme le fait de tenir compte d'une vitesse de houle non perturbée par la présence et le mouvement du cylindre. Cette simplification reste toutefois cohérente avec l'approche de Morison. L'effort inertiel élémentaire, en un point  $M$  du cylindre, de Morison peut être approchés par l'équation suivante :

$$d\mathbf{f}_M = -\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m \begin{pmatrix} (\ddot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\ddot{q}_5) dz \\ (z - z_{G,eq})(\ddot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\ddot{q}_5) dz \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

En intégrant, il vient :

$$\mathbf{f}_m = -\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m \begin{pmatrix} \int_{-H}^0 dz & \int_{-H}^0 (z - z_{G,eq}) dz \\ \int_{-H}^0 (z - z_{G,eq}) dz & \int_{-H}^0 (z - z_{G,eq})^2 dz \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_5 \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Ce qui donne finalement :

$$\mathbf{f}_m = -\rho\pi\frac{D^2}{4}C_m \underbrace{\begin{pmatrix} H & -\frac{H}{2}(2z_{G,eq} + H) \\ -\frac{H}{2}(2z_{G,eq} + H) & \frac{H}{3}(3z_{G,eq}^2 + 3z_{G,eq}H + H^2) \end{pmatrix}}_{M_m} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_5 \end{pmatrix} \quad (4.65)$$

L'effort de trainée élémentaire, sans la vitesse du fluide, de Morison ne dépend que de la vitesse absolue du cylindre et s'écrit comme suit :

$$d\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d \left( |\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5| (\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5) dz \right) \quad (4.66)$$

Soit  $R$  le centre de rotation appartenant à l'axe du cylindre tel que :

$$\dot{x}_R = \dot{q}_1 + (z_R - z_{G,eq})\dot{q}_5 = 0 \quad \iff \quad \dot{q}_1 = -(z_R - z_{G,eq})\dot{q}_5 \quad (4.67)$$

En utilisant l'équation 4.67 et le changement de variable  $Z = z - z_{G,eq}$ , il est possible de faire disparaître les sommes présentes dans les valeurs absolues de l'équation 4.66.

$$d\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d \left( \begin{array}{l} |(Z - Z_R) \dot{q}_5| (\dot{q}_1 + Z\dot{q}_5) dZ \\ Z|(Z - Z_R) \dot{q}_5| (\dot{q}_1 + Z\dot{q}_5) dZ \end{array} \right) \quad Z_R = -\frac{Q_1(\omega)}{Q_5(\omega)} \quad (4.68)$$

En intégrant

$$\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d |\dot{q}_5| \underbrace{\left( \begin{array}{ll} \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} |Z - Z_R| dZ & \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} Z|Z - Z_R| dZ \\ \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} Z|Z - Z_R| dZ & \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} Z^2|Z - Z_R| dZ \end{array} \right)}_{\mathbf{M}_d(Z_R)} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix} \quad (4.69)$$

Dans le cas d'une houle régulière, il est possible d'écrire ces efforts dans le domaine fréquentiel.

$$\mathbf{F}_m = \omega^2 \rho \pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_5(\omega) \end{pmatrix} \quad (4.70)$$

$$\mathbf{F}_d = -i \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |Q_5(\omega)| \mathbf{M}_d \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_5(\omega) \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho \pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) + i \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |Q_5(\omega)| \mathbf{M}_d \right] \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_5(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_h \quad (4.72)$$

#### 4.8.1.1 Identification pour chaque essai

Afin de vérifier la pertinence de ce modèle, il convient de déterminer les coefficient  $C_m$  et  $C_d$  pour chaque essai et de comparer les RAOs expérimentales avec les RAOs obtenues en utilisant les coefficient  $C_m$  et  $C_d$ . Il faut tout d'abord réécrire l'équation 4.72 avec les données expérimentales

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho \pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) + i \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |\tilde{Q}_5(\omega)| \tilde{\mathbf{M}}_d \right] \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}_h \quad (4.73)$$

Où  $\tilde{M}_d = M_d(\tilde{Z}_R)$ . En prenant les parties réelles et imaginaire de cette équation, il vient :

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{Q}}^R - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) \tilde{\mathbf{Q}}^R - \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho D C_d \left| \tilde{Q}_5(\omega) \right| \tilde{M}_d \tilde{\mathbf{Q}}^I = \tilde{\mathbf{F}}_h^R \quad (4.74)$$

$$\mathbf{K}\tilde{\mathbf{Q}}^I - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) \tilde{\mathbf{Q}}^I + \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho D C_d \left| \tilde{Q}_5(\omega) \right| \tilde{M}_d \tilde{\mathbf{Q}}^R = \tilde{\mathbf{F}}_h^I \quad (4.75)$$

En projetant ces équations vectorielles sur les vecteurs  $\tilde{\mathbf{Q}}^R$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}^I$ , il est possible d'isoler  $C_m$  et  $C_d$ .

$$C_d = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_h^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R - \tilde{\mathbf{F}}_h^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I}{\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho D \left| \tilde{Q}_5 \right| \left( \tilde{M}_d \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + \tilde{M}_d \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I \right)} \quad (4.76)$$

$$C_m = \frac{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I - \tilde{\mathbf{F}}_h^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R - \tilde{\mathbf{F}}_h^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I}{\omega^2 \rho\pi \frac{D^2}{4} \left( M_m \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + M_m \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I \right)} \quad (4.77)$$

#### 4.8.1.2 Calcul de la RAO

De même que pour la section 4.5.2.2, la non-linéarité de l'amortissement ne permet pas une résolution directe. Il est donc encore nécessaire d'utiliser un algorithme itératif. Il y a toutefois une différence importante par rapport à la section 4.5.2.2. Il s'agit de la matrice  $\mathbf{M}_d$ , présente dans l'équation 4.72, et de sa dépendance à la grandeur  $Z_R$ . Le calcul de  $Z_R$  directement dans la boucle itérative ne permet pas d'atteindre la convergence avec un temps de calcul raisonnable. Une façon de remédier à cela est d'utiliser deux processus itératifs. Pour le premier, la valeur de  $Z_R$  est fixe. Différentes valeurs ont été testées pour l'initialisation de  $Z_R$ . Il s'avère que la valeur choisie pour l'initialisation importe peu. Pour  $Z_R = -H/2$ ,  $Z_R = 0$  et  $Z_R = -H$ , les résultats sont identiques et la première convergence sur  $\mathbf{Q}$  s'établit en une cinquantaine d'itérations. Une fois ce premier processus itératif convergé, un second démarre. Cette fois, la valeur de  $Z_R$  est modifiée dans le processus, et ce, jusqu'à atteindre la convergence sur  $\mathbf{Q}$  et sur  $Z_R$  en une quarantaine d'itérations.

#### 4.8.1.3 Résultats

De même que précédemment, une approche par des coefficients indépendants de la fréquence est envisagée. Les coefficients  $C_m$  et  $C_d$ , indépendants de la fréquence, sont obtenus par minimisation, au sens des moindres carrés, de l'écart entre les RAOs expérimentales et les RAOs numériques calculées itérativement. Ces coefficients ne dépendent que de la hauteur de vague  $H_w$ . Une minimisation portant à la fois sur les modules et les phases des RAOs de cavement et de tangage donne des résultats aberrants. Nous reviendrons sur les raisons de l'impossibilité de

l'algorithme de minimisation à résoudre l'équation 4.73 dans la section 4.8.3. La minimisation ne porte donc que sur les modules.

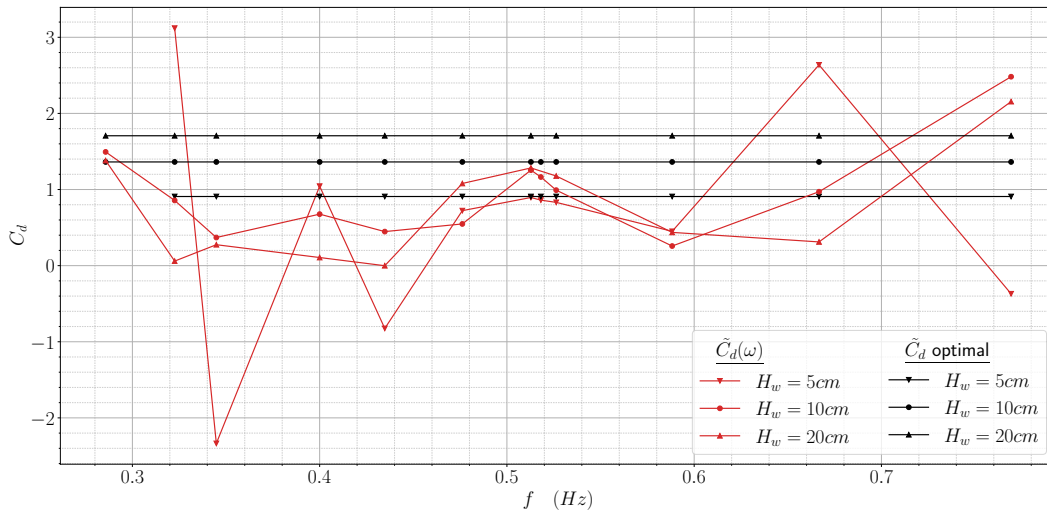


FIGURE 4.51 – Coefficient de trainée pour le cavalemt/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue

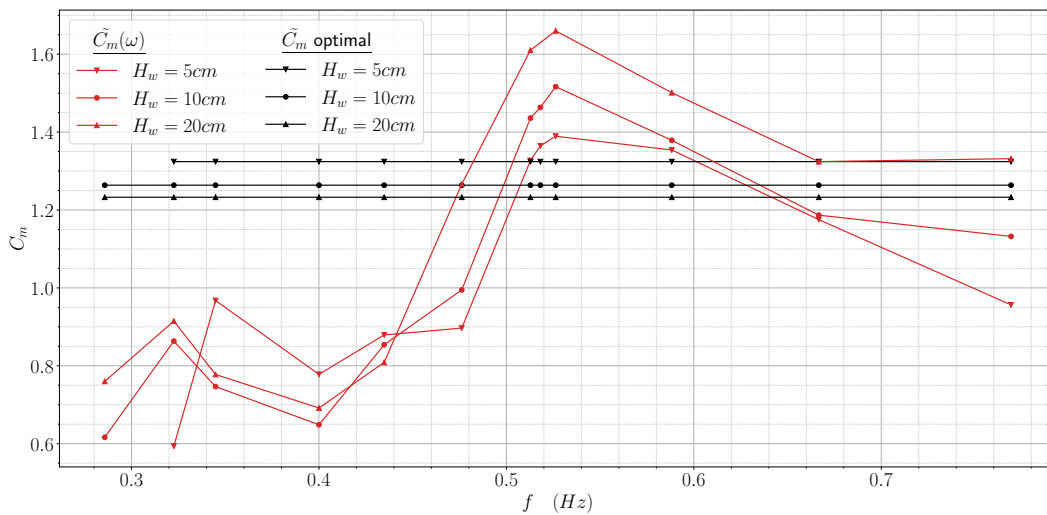


FIGURE 4.52 – Coefficient de masse ajoutée pour le cavalemt/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue

Les figures 4.51 et 4.52 montrent respectivement les coefficients de trainée et de masse ajoutée obtenus par identification, en rouge, et par optimisation, en noir. Il apparaît que les coefficients obtenus par identification ne correspondent pas, autour de la résonance, à ceux obtenus par

minimisation.

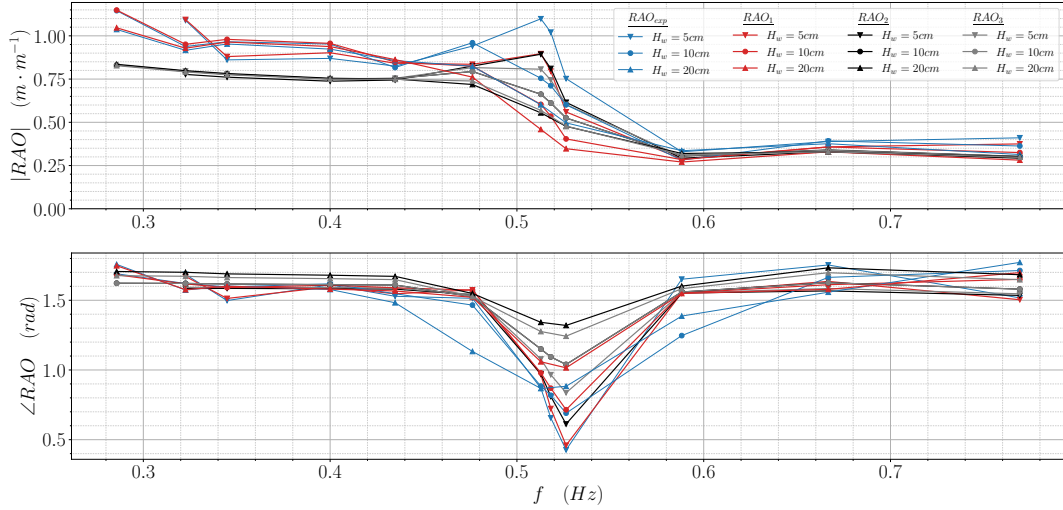


FIGURE 4.53 – RAO en cavement du cylindre seul avec vitesse absolue

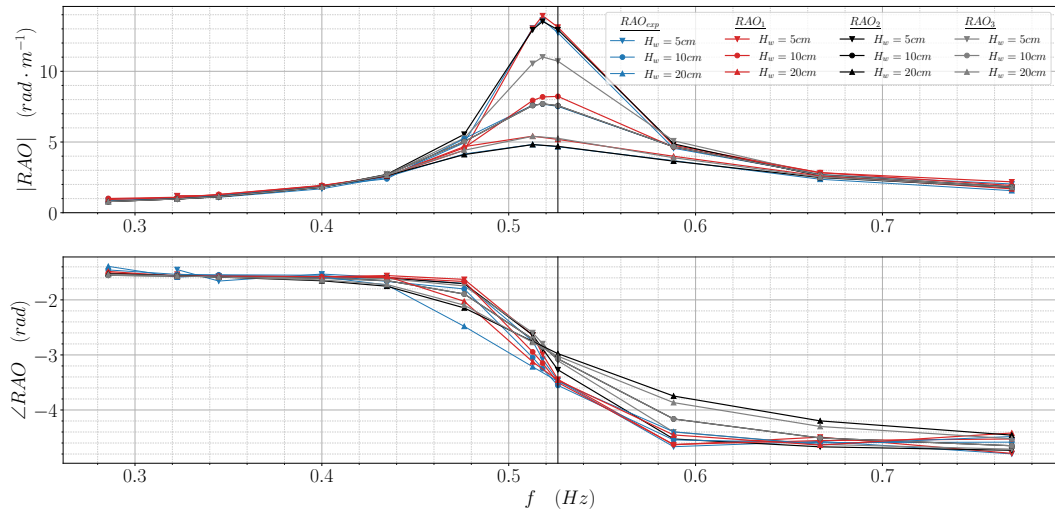


FIGURE 4.54 – RAO en tangage du cylindre seul avec vitesse absolue

La figure 4.53 présente, pour le mouvement de cavement, la RAO expérimentale en bleu, la RAO obtenue avec les coefficients identifiés directement en rouge, la RAO obtenue avec les coefficients optimaux en noir et la RAO obtenue avec les coefficients optimaux pour  $H_w = 10\text{cm}$  en gris. Les correspondances sont insatisfaisantes. La figure 4.54 présente quant à elle les RAOs en tangage. Les seules RAOs s'approchant d'une correspondance acceptable en module, avec les RAOs expérimentales, sont celles obtenues avec les coefficients optimisés. Cependant les phases

ne correspondent pas du tout. Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.8.

$H_w$ (cm)	Cm	Cd	$\overline{\varepsilon}_R$ RAO <sub>1</sub> (%)		$\overline{\varepsilon}_R$ RAO <sub>2</sub> (%)		$\overline{\varepsilon}_R$ RAO <sub>3</sub> (%)	
			$Q_1$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_5$
5	1.40	0.87	12.34	9.69	23.07	11.70	25.55	16.91
10	1.06	1.23	12.31	9.86	23.20	19.46	23.20	19.46
20	0.93	1.78	13.38	13.12	23.75	23.20	23.00	21.96

TABLEAU 4.8 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cavalemt/tangage du cylindre seul avec vitesse absolue

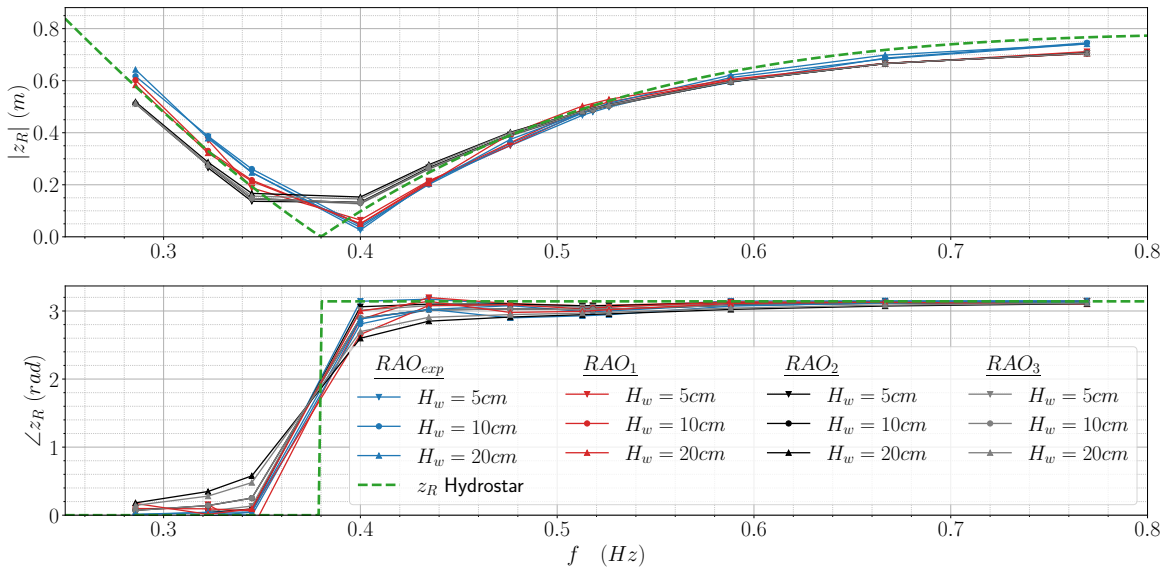


FIGURE 4.55 – Position verticale du point  $R$  dans le repère fixe

La figure 4.55 présente la position  $z_R$ , par rapport au repère fixe, expérimentale pour chaque hauteur de vague et pour chaque RAO. Cette figure présente également la position  $z_R$  prévue par HydroStar. Il apparaît que les prévisions d'HydroStar sont assez proches des valeurs expérimentales. De plus l'influence de la hauteur de vague est très faible. Il apparaît également que les  $z_R$  de toutes les RAOs sont assez bien groupés et confirment ainsi la convergence des calculs de RAO.

#### 4.8.2 Modèle avec vitesse relative

Le modèle avec vitesse absolue de la section précédente s'est avéré peu satisfaisant. Il est possible que cela soit dû à l'omission de la vitesse de la houle incidente. Cette vitesse est donc considérée

dans cette section. Le terme inertiel de l'effort de Morison reste inchangé. L'effort de trainée, en revanche, est modifié et est donné dans l'équation 4.78.

$$d\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d \left( |\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5 - u_x(z)| (\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5 - u_x(z)) dz \right. \\ \left. Z|\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5 - u_x(z)| (\dot{q}_1 + (z - z_{G,eq})\dot{q}_5 - u_x(z)) dz \right) \quad (4.78)$$

Avec  $u_x(z)$  la composante horizontale de la vitesse de la houle incidente à une profondeur  $z$ ,

$$u_x(z) = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \right) = \operatorname{Re} \left( (i\omega) i a e^{k_0 z} e^{i\omega t} \right) \quad (4.79)$$

Nous cherchons à présent le point  $\Omega$ , appartenant à l'axe du cylindre, tel que

$$\dot{q}_1 + (z_\Omega - z_{G,eq})\dot{q}_5 - u_x(z_\Omega, t) = 0 \quad (4.80)$$

Ce qui revient à chercher la solution de l'équation suivante

$$Q_1(\omega) + (z_\Omega - z_{G,eq})Q_5(\omega) - i a e^{k_0 z_\Omega} = 0 \quad (4.81)$$

De même que pour la section précédente, le changement de variable  $Z = z - z_{G,eq}$  est adopté. L'équation précédente devient alors :

$$Q_1(\omega) + Z_\Omega Q_5(\omega) - i a e^{k_0 Z_\Omega} e^{k_0 z_{G,eq}} = 0 \quad (4.82)$$

La solution de cette équation s'obtient en faisant appel aux fonctions de Lambert [164], notées  $W$ .

$$Z_\Omega = -\frac{Q_1}{Q_5} - \frac{1}{k_0} W \left( \frac{-i a k_0 e^{k_0 z_{G,eq}}}{Q_5} e^{-k_0 \frac{Q_1}{Q_5}} \right) \quad (4.83)$$

Il vient alors :

$$d\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d \left( |(Z - Z_\Omega) \dot{q}_5| (\dot{q}_1 + Z\dot{q}_5 - u_x(Z + z_{G,eq})) dZ \right) \\ Z|(Z - Z_\Omega) \dot{q}_5| (\dot{q}_1 + Z\dot{q}_5 - u_x(Z + z_{G,eq})) dZ \right) \quad (4.84)$$

En intégrant

$$\mathbf{f}_d = -\frac{1}{2}\rho DC_d |\dot{q}_5| \mathbf{M}_d(Z_\Omega) \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\rho DC_d |\dot{q}_5| \begin{pmatrix} \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} |Z - Z_\Omega| u_x(Z + z_{G,eq}) dZ \\ \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} Z |Z - Z_\Omega| u_x(Z + z_{G,eq}) dZ \end{pmatrix} \quad (4.85)$$

Dans le cas d'une houle régulière, il est possible d'écrire l'effort de trainée dans le domaine



fréquentiel.

$$\mathbf{F}_d = -i\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |Q_5(\omega)| \mathbf{M}_d \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_5(\omega) \end{pmatrix} \underbrace{-\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |Q_5(\omega)| a e^{k_0 z_{G,eq}} \begin{pmatrix} \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} |Z - Z_\Omega| e^{k_0 Z} dZ \\ \int_{-z_{G,eq}-H}^{-z_{G,eq}} Z |Z - Z_\Omega| e^{k_0 Z} dZ \end{pmatrix}}_{C_d \mathbf{F}_w} \quad (4.86)$$

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) + i\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |Q_5(\omega)| \mathbf{M}_d \right] \begin{pmatrix} Q_1(\omega) \\ Q_5(\omega) \end{pmatrix} = \mathbf{F}_h + C_d \mathbf{F}_w \quad (4.87)$$

#### 4.8.2.1 Identification pour chaque essai

Afin de vérifier la pertinence de ce modèle, il convient de déterminer les coefficients  $C_m$  et  $C_d$  pour chaque essai et de comparer les RAOs expérimentales avec les RAOs obtenues en utilisant les coefficient  $C_m$  et  $C_d$ . Il faut tout d'abord réécrire l'équation 4.87 avec les données expérimentales

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) + i\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |\tilde{Q}_5(\omega)| \tilde{\mathbf{M}}_d \right] \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) = \tilde{\mathbf{F}}_h + C_d \tilde{\mathbf{F}}_w \quad (4.88)$$

Où  $\tilde{\mathbf{M}}_d = \mathbf{M}_d(\tilde{Z}_\Omega)$ . En prenant les parties réelles et imaginaire de cette équation, il vient :

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{Q}}^R - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) \tilde{\mathbf{Q}}^R - \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |\tilde{Q}_5(\omega)| \tilde{\mathbf{M}}_d \tilde{\mathbf{Q}}^I = \tilde{\mathbf{F}}_h^R + C_d \tilde{\mathbf{F}}_w^R \quad (4.89)$$

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{Q}}^I - \omega^2 \left( \mathbf{M} + \rho\pi \frac{D^2}{4} C_m \mathbf{M}_m \right) \tilde{\mathbf{Q}}^I + \omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho DC_d |\tilde{Q}_5(\omega)| \tilde{\mathbf{M}}_d \tilde{\mathbf{Q}}^R = \tilde{\mathbf{F}}_h^I + C_d \tilde{\mathbf{F}}_w^I \quad (4.90)$$

En projetant ces équations vectorielles sur les vecteurs  $\tilde{\mathbf{Q}}^R$  et  $\tilde{\mathbf{Q}}^I$ , il est possible d'exprimer  $C_m$  et  $C_d$ .

$$C_d = \frac{\tilde{\mathbf{F}}_h^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R - \tilde{\mathbf{F}}_h^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I}{\omega^2 \frac{4}{3\pi} \rho D |\tilde{Q}_5| \left( \tilde{\mathbf{M}}_d \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + \tilde{\mathbf{M}}_d \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I \right) - \tilde{\mathbf{F}}_w^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I + \tilde{\mathbf{F}}_w^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R} \quad (4.91)$$

$$C_m = \frac{(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I - (\tilde{\mathbf{F}}_h^R + C_d \tilde{\mathbf{F}}_w^R) \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R - (\tilde{\mathbf{F}}_h^I + C_d \tilde{\mathbf{F}}_w^I) \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I}{\omega^2 \rho \pi \frac{D^2}{4} (M_m \tilde{\mathbf{Q}}^R \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^R + M_m \tilde{\mathbf{Q}}^I \cdot \tilde{\mathbf{Q}}^I)} \quad (4.92)$$

#### 4.8.2.2 Résultats

Le protocole itératif, permettant d'obtenir les RAOs, ainsi que la minimisation, donnant les coefficients optimaux, sont identiques à ceux utilisés dans la section 4.8.1.

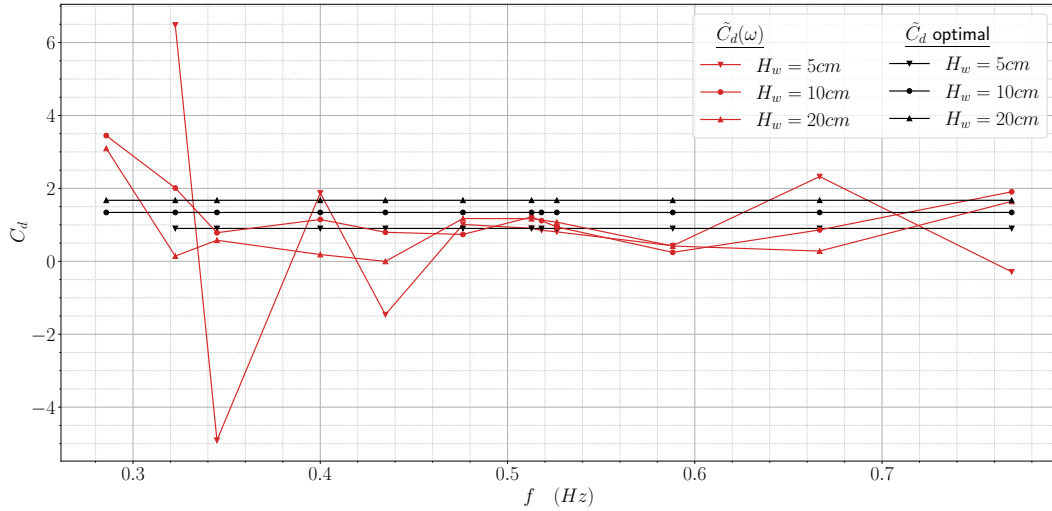


FIGURE 4.56 – Coefficient de trainée pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse relative

Les figures 4.56 et 4.57 présentent respectivement les coefficients de trainée et de masse ajoutée. Le constat reste le même que pour les figures 4.51 et 4.52. C'est-à-dire, qu'autour de la résonance, les coefficients optimaux ne correspondent pas aux coefficients identifiés.

Les figures 4.58 et 4.59 présentent respectivement les RAOs en cavement et en tangage. Les résultats sont très similaires à ceux de la section 4.8.1. Les correspondances sont donc également insatisfaisantes. Les coefficients optimaux ainsi que les erreurs relatives moyennes sont donnés dans le tableau 4.9.

La figure 4.60 présente la position  $z_\Omega$ , par rapport au repère fixe, expérimentale pour chaque hauteur de vague et pour chaque RAO. Cette figure présente également la position  $z_\Omega$  prévue par HydroStar. Il apparaît que les prévisions d'HydroStar sont assez proches des valeurs expérimentales. De plus l'influence de la hauteur de vague est faible. Il apparaît également que les  $z_\Omega$  de toutes les RAOs sont assez bien groupés à l'exception de  $RAO_2$  et de  $RAO_3$  qui, en deçà de

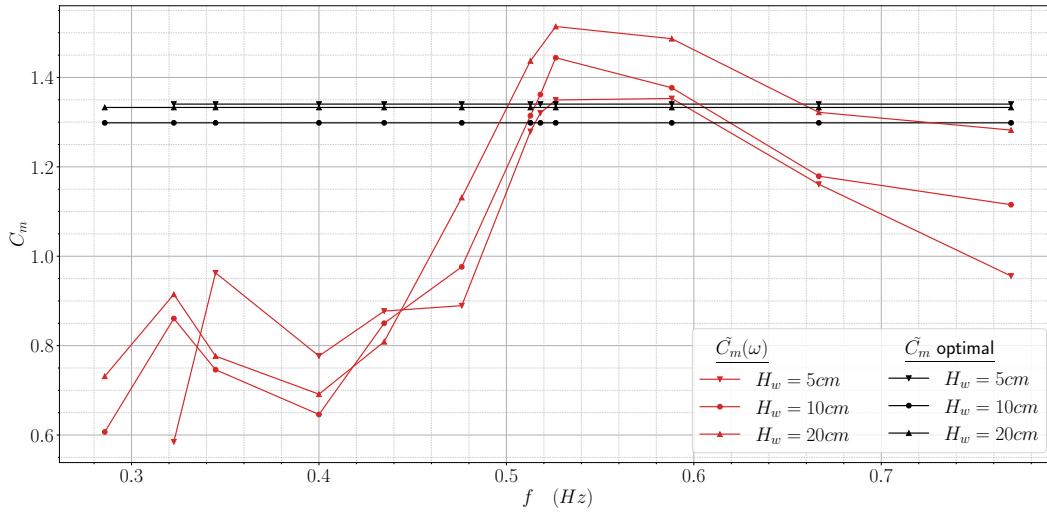


FIGURE 4.57 – Coefficient de masse ajoutée pour le cavalemt/tangage du cylindre seul avec vitesse relative

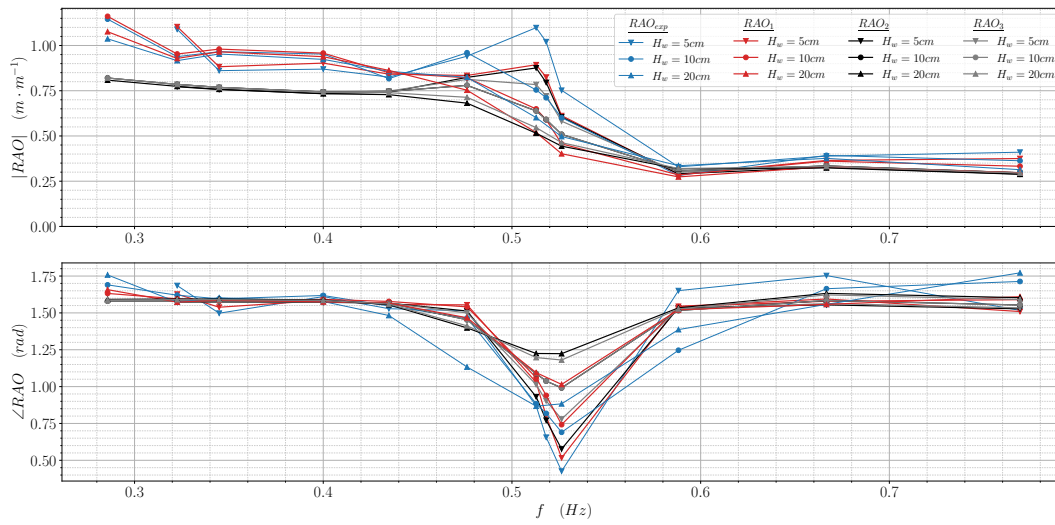


FIGURE 4.58 – RAO en cavalemt du cylindre seul avec vitesse relative

la résonance, donnent un  $z_{\Omega}$  dont le module est surestimé. Cette surestimation ne semble pas avoir d'incidence sur les RAOs et n'est donc pas significative.

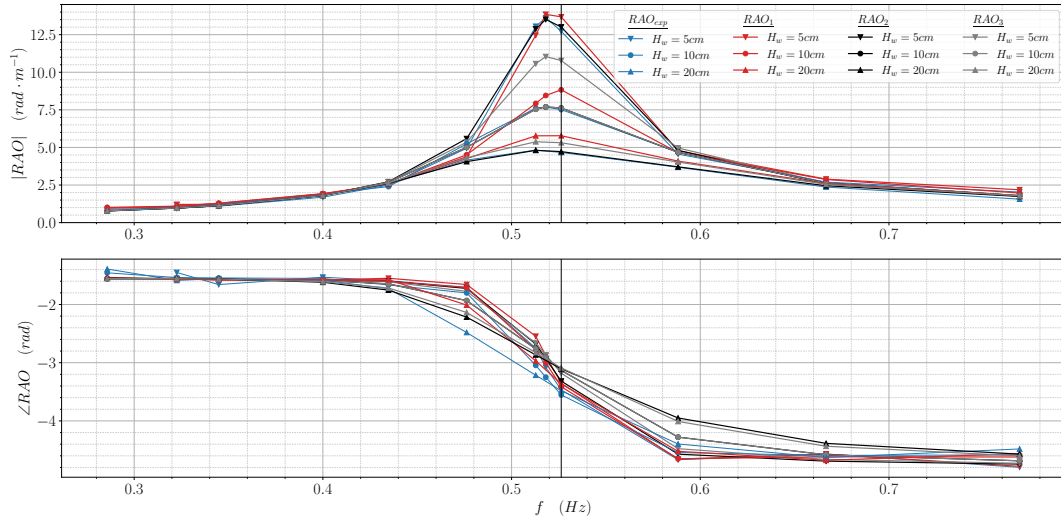


FIGURE 4.59 – RAO en tangage du cylindre seul avec vitesse relative

$H_w$ (cm)	Cm	Cd	$\overline{\varepsilon_R} RAO_1$ (%)		$\overline{\varepsilon_R} RAO_2$ (%)		$\overline{\varepsilon_R} RAO_3$ (%)	
			$Q_1$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_5$	$Q_1$	$Q_5$
5	1.52	0.89	12.90	12.47	23.77	10.49	25.85	15.72
10	1.46	1.32	11.91	14.74	23.27	18.19	23.27	18.19
20	1.48	1.65	12.96	18.99	23.09	17.87	21.82	18.83

TABLEAU 4.9 – Coefficients optimaux et erreurs relatives moyennes pour le cavement/tangage du cylindre seul avec vitesse relative

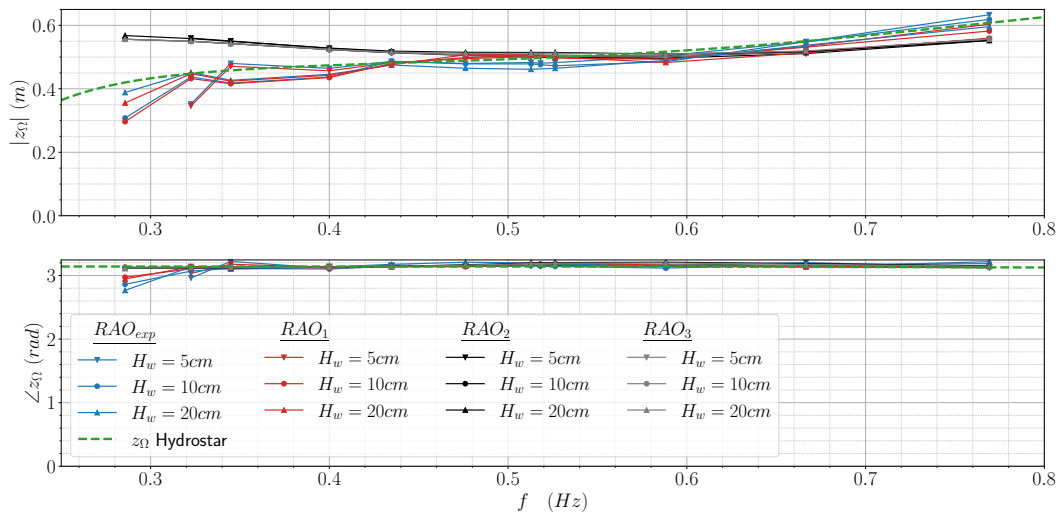


FIGURE 4.60 – Position verticale du point  $\Omega$  dans le repère fixe

### 4.8.3 Interprétation

Les modèles utilisés dans les sections 4.8.1 et 4.8.2 se sont avérés inadéquats. Le fait que l'identification directe ne fonctionne pas implique que les équations 4.73 et 4.88 ne sont pas vérifiées. La construction du terme de masse ajoutée est faite avec le seul paramètre  $C_m$ . Les termes de la matrice  $\mathbf{M}_m$  sont donc contraints les uns par rapport aux autres. Il en est de même pour le terme d'amortissement. La surcontrainte de ces modèles, se limitant à 2 paramètres  $C_m$  et  $C_d$ , ne permet pas une identification pertinente des effets observés expérimentalement. Une optimisation ne permet pas non plus de satisfaire ces équations. Ces modèles ont été appliqués au cylindre avec collerette et donnent des résultats similaires qu'il n'est pas utile de présenter.

## 4.9 Modèle de correction pour le tangage pur (MCTP) sur houle régulière

Il existe, dans la littérature, des modèles pour lesquels l'effort non-linéaire se limite à une composante en tangage pur. Minko et al. [165] propose une équation qui, adaptée à notre problème, peut se traduire par l'équation 4.93.

$$\left[ \mathbf{K} - \omega^2 (\mathbf{M} + \mathbf{A}(\omega) + \mathbf{A}^{add}(\omega)) + i\omega (\mathbf{B}(\omega) + \mathbf{B}^{add}(\omega)) \right] \tilde{\mathbf{Q}}(\omega) = \mathbf{F}_{ex}(\omega) \quad (4.93)$$

Avec  $\mathbf{A}^{add}$  et  $\mathbf{B}^{add}$  définies telles que :

$$\mathbf{A}^{add} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{55}^{add} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{add} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{55}^{add} \end{pmatrix} \quad (4.94)$$

Le couplage entre les mouvements de cavement et de tangage est donc uniquement contenu dans les termes inertiels et d'amortissement linéaires. De plus, aucune correction non-linéaire n'est apportée au cavement pur. De même que pour la section 4.5.2, les  $A_{55}^{add}$  et  $B_{55}^{add}$  sont identifiés à partir de l'effort additionnel et les coefficients de masse ajoutée et d'amortissement sont définis comme suit :

$$C_m = \frac{A_{55}(\omega) + A_{55}^{add}}{A_{55,th}} \quad \text{et} \quad C_b = \frac{B_{55}^{add}}{\omega A_{55,th}} \quad (4.95)$$

Avec,

$$A_{55}^{add}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} \operatorname{Re} \left( \frac{F_{add,5}}{\tilde{Q}_5(\omega)} \right) \quad \text{et} \quad B_{55}^{add}(\omega) = -\frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left( \frac{F_{add,5}}{\tilde{Q}_5(\omega)} \right) \quad (4.96)$$

Le nombre de Keulegan-Carpenter est adapté et est donné par l'équation 4.97.

$$K_C = \frac{2\pi|Q_5|}{D} \quad (4.97)$$

### 4.9.1 Cas du cylindre seul

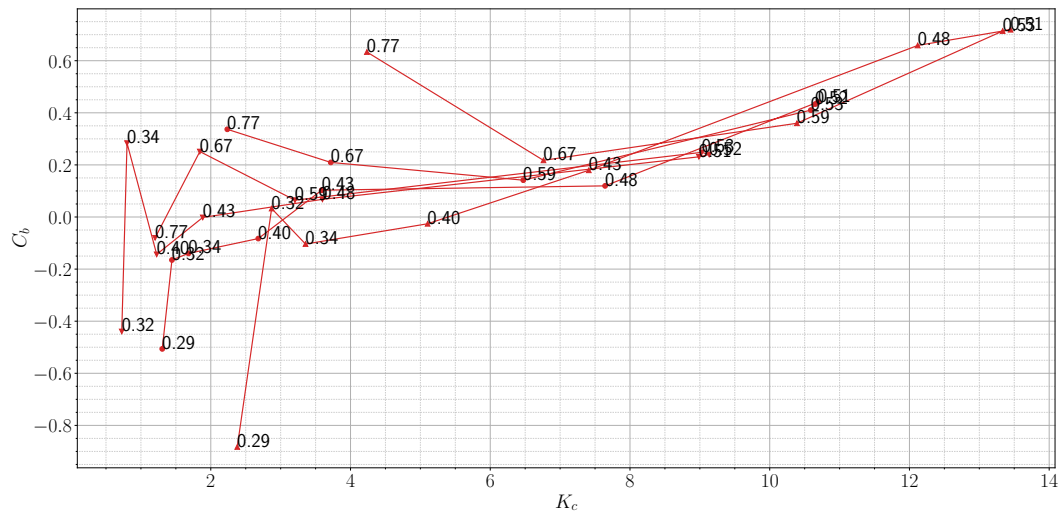


FIGURE 4.61 – Coefficient d’amortissement pour le cylindre seul avec le MCTP

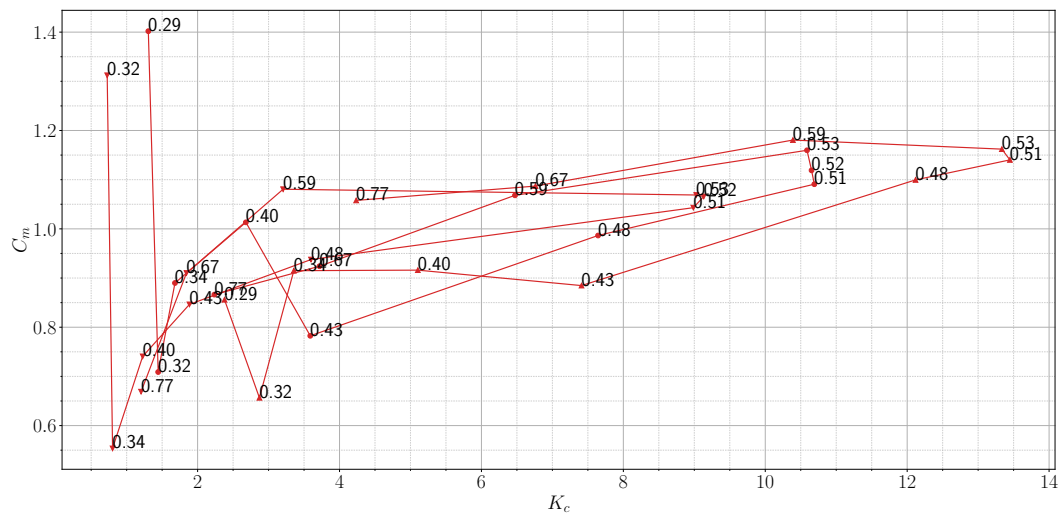


FIGURE 4.62 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre seul avec le MCTP

Les figures 4.61 et 4.62 présentent respectivement les coefficients d’amortissement et de masse ajoutée tels que définis dans l’équation 4.95. Les chiffres présents sur la figure, à côté des points, sont les fréquences expérimentales. Il apparaît que les coefficients, autour de la fréquence de

résonance, sont relativement bien groupés. Pour des fréquences éloignées de la résonance, les coefficients peuvent prendre des valeurs extrêmes. De même que pour la section 4.5.2.3, les valeurs erratiques prises par les coefficients, loin de la résonance, traduisent une limite du modèle utilisé.

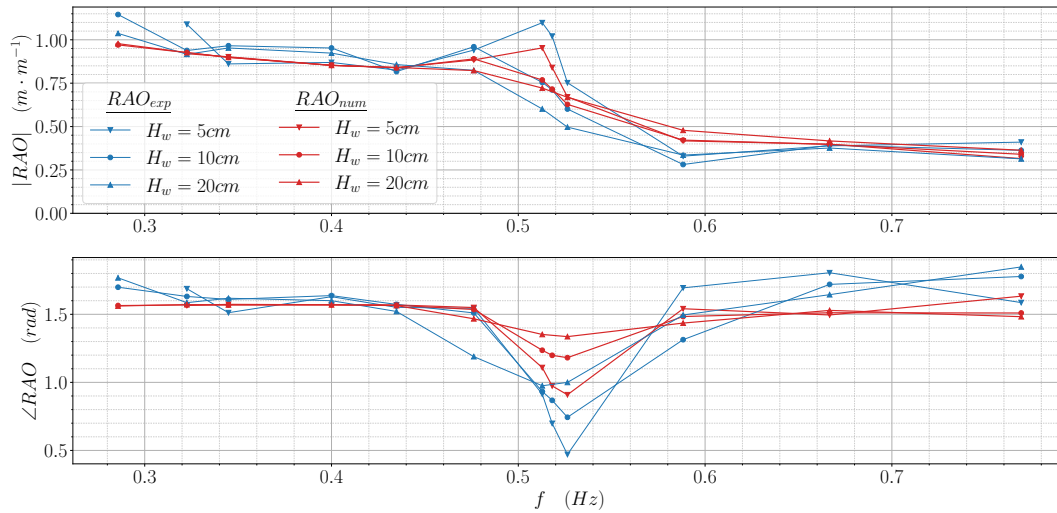


FIGURE 4.63 – RAO en cavement pour le cylindre seul avec le MCTP

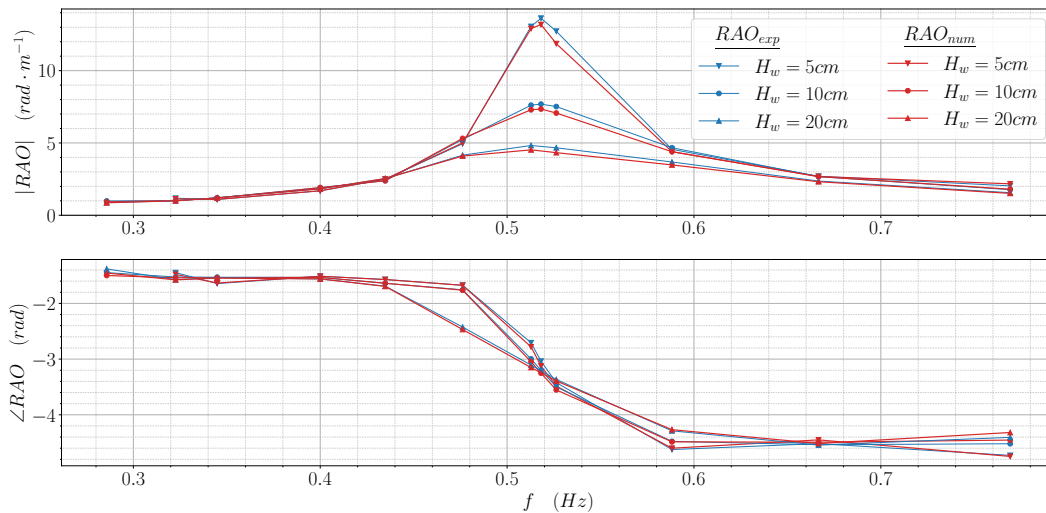


FIGURE 4.64 – RAO en tangage pour le cylindre seul avec le MCTP

Les figures 4.63 et 4.64 présentent respectivement les RAOs en cavement et les RAOs en tangage. La  $RAO_{exp}$ , en bleu, est la RAO expérimentale. La  $RAO_{num}$ , en rouge, est la RAO obtenue en résolvant l'équation 4.93 avec les termes  $A_{55}^{add}$  et  $B_{55}^{add}$  identifiés grâce à l'effort additionnel.

Pour le cavalement, la  $RAO_{num}$  ne correspond pas à  $RAO_{exp}$  de manière satisfaisante. Elle est néanmoins étonnamment proche compte tenu du fait qu'aucune correction n'est appliquée au cavalement. Pour le tangage, la  $RAO_{num}$  correspond à  $RAO_{exp}$  de manière très satisfaisante. Il apparaît donc que la limitation de  $\mathbf{A}^{add}$  et  $\mathbf{B}^{add}$ , à leurs seules composantes  $A_{55}^{add}$  et  $B_{55}^{add}$ , donnent des résultats globalement satisfaisant compte tenu de la simplicité de cette approche.

#### 4.9.2 Cas du cylindre avec collerette

Le modèle précédent est à présent appliqué au cas du cylindre muni d'une collerette.

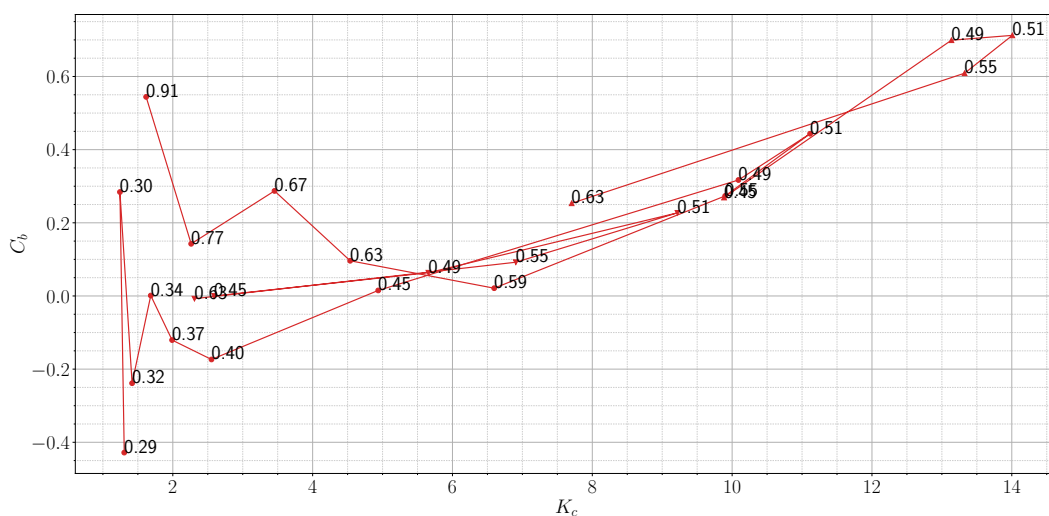


FIGURE 4.65 – Coefficient d'amortissement pour le cylindre avec collerette avec le MCTP

Les figures 4.65 et 4.66 présentent respectivement les coefficients d'amortissement et de masse ajoutée tels que définis dans l'équation 4.95. Les chiffres présents sur la figure, à côté des points, sont les fréquences expérimentales. Le constat est le même que pour la section précédente avec une nette amélioration du groupement des points. Les différences majeures entre le cas du cylindre seul, et le cas du cylindre avec collerette, sont la fréquence propre et l'amplitude du pilonnement. Il donc logique d'imputer cette amélioration à l'évolution du pilonnement par rapport au cas du cylindre seul. Les figures 4.67 et 4.68 présentent respectivement les RAOs en cavalement et les RAOs en tangage. La  $RAO_{exp}$ , en bleu, est la RAO expérimentale. La  $RAO_{num}$ , en rouge, est la RAO obtenue en résolvant l'équation 4.93 avec les termes  $A_{55}^{add}$  et  $B_{55}^{add}$  identifiés grâce à l'effort additionnel. Les constats sont identiques à ceux de la section précédente. Il apparaît une nette amélioration des correspondances entre  $RAO_{exp}$  et  $RAO_{num}$  aussi bien pour la cavalement que pour le tangage. Cette observation conforte la conjecture selon laquelle un pilonnement important ayant une fréquence de résonance très proche de celle du tangage, comme c'est le cas pour le cylindre seul, diminuerait l'efficacité et la pertinence de



cette approche.

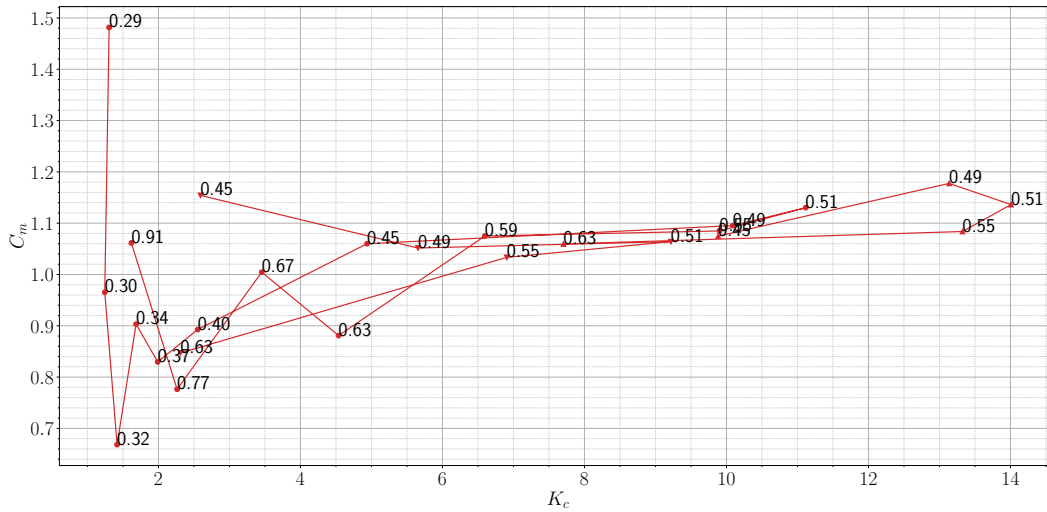


FIGURE 4.66 – Coefficient de masse ajoutée pour le cylindre avec collerette avec le MCTP

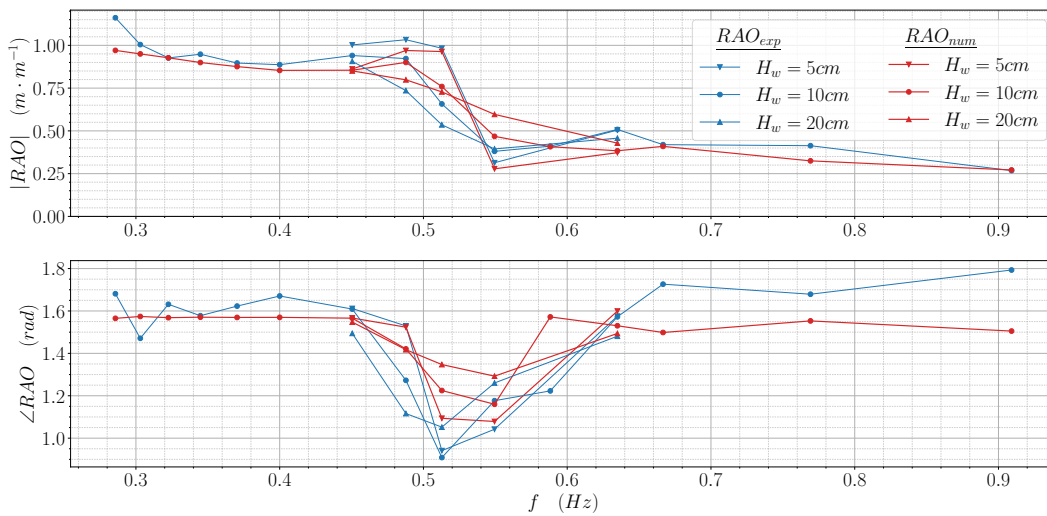


FIGURE 4.67 – RAO en cavalemt pour le cylindre avec collerette avec le MCTP

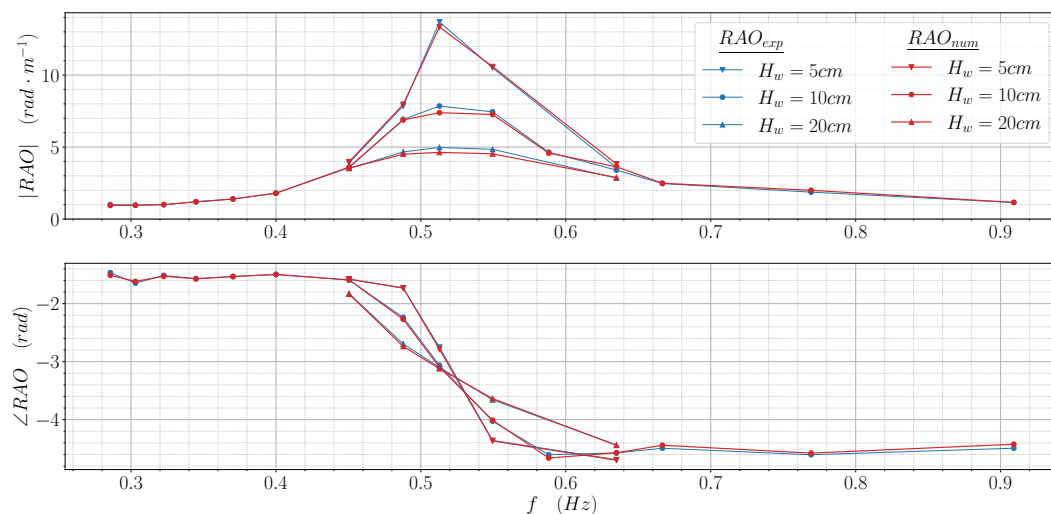


FIGURE 4.68 – RAO en tangage pour le cylindre avec collerette avec le MCTP

## 4.10 Conclusion

Ce chapitre a montré l'intérêt de l'utilisation de l'effort additionnel pour l'analyse des phénomènes non-linéaires non prévus par la théorie de la diffraction-radiation linéarisée à l'ordre 1. Seuls les phénomènes non-linéaires d'ordre 1 ont été étudiés dans ce chapitre. La section 4.4 a permis de déterminer un modèle pertinent en analysant les modules et les phases des efforts additionnels. C'est également dans cette section qu'est apparue une faible dépendance de l'effort additionnel, relatif au mouvement de pilonnement, vis-à-vis de la hauteur de vague. L'analyse s'est d'abord portée sur le mouvement en pilonnement du cylindre seul. Ce mouvement est supposé indépendant des autres mouvements. La section 4.5.1 a montré qu'une approche linéaire ne permettait pas d'exprimer l'effort additionnel, relatif au mouvement de pilonnement, avec des coefficients constants. Une première approche non-linéaire a été introduite dans la section 4.5.2. Les résultats de ce modèle sont acceptables. Néanmoins, la figure 4.36 a montré qu'avec ce modèle, le coefficient d'amortissement dépend de la fréquence. Une autre approche a donc été envisagée en localisant l'amortissement avec une vitesse relative grossièrement approximée à partir de la vitesse verticale de la houle incidente. En dépit de sa simplicité, cette approche s'est avérée plus pertinente que la précédente. L'application des deux méthodes non-linéaires, au cas du cylindre avec collerette, a confirmé le constat fait avec le cylindre seul. Toutefois, le modèle prenant en compte la vitesse relative n'est pas aussi satisfaisant, pour le cylindre avec collerette, qu'il ne l'est pour le cas du cylindre seul. Le modèle prenant en compte la vitesse relative a ensuite été appliqué aux essais en houle irrégulière. Les constats fait en houle régulière se retrouvent également pour la houle irrégulière bien que plus nuancés.

Ce chapitre s'est ensuite intéressé aux mouvements de cavement et de tangage. L'idée première a été d'utiliser des éléments de Morison. Afin de simplifier le problème, une première approche négligeant la vitesse du fluide a été formulée dans la section 4.8.1. Cette première méthode s'est avérée inadéquate. La vitesse horizontale de la houle incidente a donc été ajoutée dans la section 4.8.2. Les RAOs obtenues sont sensiblement les mêmes et ne sont donc pas satisfaisantes. Ce qui laisse penser que les deux modèles ne fonctionnent pas pour la même raison. La raison la plus probable est la surcontrainte induite par l'utilisation de seulement deux coefficients pour la caractérisation de deux mouvements a priori couplés. Il est également possible que la proximité de la fréquence de résonance du pilonnement, avec celle du tangage, complexifie l'écoulement et l'éloigne du cadre de la théorie de Morison.

Une autre approche a donc été envisagée en section 4.9. Cette approche consiste à ne considérer que les termes de masse ajoutée additionnelle, et d'amortissement additionnel, en tangage pur. Les RAOs en tangage, obtenus avec ce modèle simplifié, s'avèrent très proches des RAOs expérimentales notamment pour le cas du cylindre avec collerette. Il est à noter que les RAOs en cavement sont relativement proches en considérant le fait qu'aucune correction n'est directement appliquée au cavement.

Il apparaît clairement que l'utilisation de l'effort additionnel permet de comprendre et de modéliser les effets non-linéaires observés à l'échelle bassin. Les modèles proposés dans les sections 4.5.3 et 4.9 sont, certes perfectibles, mais donnent néanmoins des RAOs proches des RAOs expérimentales.

# RÉALISATION D'UN DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL DE CAPTATION D'ÉNERGIE DES VAGUES À DEUX CORPS

---

## Sommaire du chapitre

---

<b>5.1</b>	<b>Choix du type de système</b> . . . . .	<b>212</b>
<b>5.2</b>	<b>Choix de l'échelle</b> . . . . .	<b>214</b>
5.2.1	Modèle linéaire équivalent . . . . .	214
5.2.2	Modèle linéaire avec captation d'énergie . . . . .	215
5.2.3	Ajout d'un amortissement non-linéaire . . . . .	216
5.2.4	Estimation des coefficients de trainée . . . . .	218
5.2.5	Puissance captée avec et sans trainée . . . . .	221
5.2.6	Estimation de la puissance captée . . . . .	222
<b>5.3</b>	<b>Choix de la machine électrique</b> . . . . .	<b>225</b>
5.3.1	Pertes dans la machine électrique . . . . .	225
5.3.2	Pilotage de la machine électrique . . . . .	227
<b>5.4</b>	<b>Contraintes supplémentaires</b> . . . . .	<b>228</b>
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>229</b>

---

L'utilisation de l'effort additionnel s'est avérée pertinente dans le chapitre précédent pour la modélisation des phénomènes non-linéaires, présents à l'échelle bassin, et non pris en compte par la théorie de la diffraction-radiation linéarisée à l'ordre 1. Dans le cas d'un système à un corps, il n'est pas indispensable d'utiliser l'effort additionnel dans le domaine temporel. Le fait qu'il soit le seul effort inconnu permet l'utilisation d'un modèle inverse pour l'identification des effets non-linéaires. En revanche, pour un système multicorps, les efforts de liaison sont également inconnus. Il n'est donc pas possible d'utiliser un simple modèle inverse. Le modèle hybride, défini dans le chapitre 3, est tout indiqué. L'obtention de l'effort additionnel nécessite donc l'utilisation d'un modèle temporel pour chaque essai. Les efforts, ainsi obtenus, contiennent tout le contenu spectral, i.e. le régime transitoire et les harmoniques. Il faut donc procéder à une analyse fréquentielle pour chaque essai afin d'obtenir les différents harmoniques. Cette méthode est générale et applicable à la majeure partie des systèmes. Afin de mettre le modèle hybride en application, il a été décidé de dimensionner et de concevoir une maquette d'un système houlomoteur multicorps. Il a également été décidé d'équiper cette maquette d'un dispositif de récupération d'énergie afin de quantifier l'influence de la captation d'énergie sur l'effort additionnel. La maquette a été réalisée mais les essais n'ont malheureusement pas pu avoir lieu par indisponibilité du moyen d'essais. Ce chapitre présente donc les grandes étapes de la conception de cette maquette.

## 5.1 Choix du type de système

Le chapitre 1 a donné un aperçu du grand nombre de concepts houlomoteurs existants à ce jour. Il a donc fallu faire un choix parmi ce vaste panel de possibilités. Les concepts complexes impliquant des difficultés et des coûts trop importants ont été mis de côté au profit d'un système relativement simple. Il s'agit d'un point absorbant similaire au BILBOQUET [16] présenté sur la figure 1.4. Le système est composé d'un flotteur oscillant le long d'une colonne. Cette colonne possède une plaque anti-pilonnement à sa base. Le but de cette plaque est double. D'une part, elle abaisse le centre de gravité de la colonne ce qui permet d'augmenter la stabilité du système global. Et d'autre part, elle diminue fortement le mouvement de pilonnement de la colonne ce qui lui permet de s'approcher d'une référence fixe. Le NREL a développé le système RM3, brièvement présenté dans le chapitre 3, qui a fait l'objet de plusieurs études afin d'optimiser les caractéristiques de ce système [14, 42, 166]. La géométrie finale retenue pour ce système est donnée sur la figure 5.1. Les caractéristiques sont données dans l'annexe B.6.

Un choix a également été fait pour la récupération d'énergie. Il est souhaitable que cette machine puisse démarrer seule et qu'elle puisse fournir un couple important tout en restant compacte. Le type de machine choisi est la machine synchrone à aimants permanents sans réducteur. L'utilisation d'un réducteur n'est pas appropriée pour un mouvement oscillant en raison de la variation du rendement et des jeux angulaires. De plus les réducteurs augmentent souvent le couple de

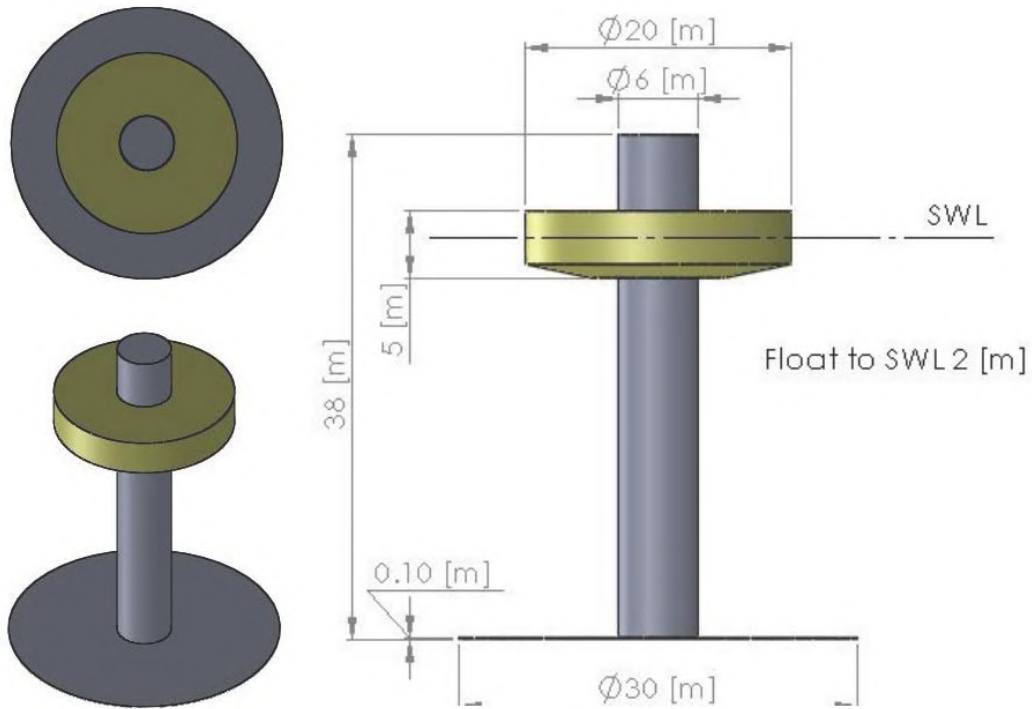


FIGURE 5.1 – Géométrie du système RM3 à l'échelle 1 :1, tirée de [167]

démarrage de la machine. Une machine à mouvement linéaire a été envisagée mais une machine rotative est plus intéressante en terme de coût et est disponible sur étagère. Il a également été décidé que la transmission entre le moteur, fixé sur le flotteur, et la colonne se ferait avec un système de type pignon crémaillère.

Il a aussi été décidé d'utiliser quatre plaques anti-pilonnement dont les diamètres, notés  $D_1$  à  $D_4$ , sont exprimés en fonctions du diamètre de la colonne  $D_c$ .

$$D_1 = 6D_c \quad D_2 = \frac{13}{3}D_c \quad D_3 = \frac{8}{3} \quad D_4 = D_c \quad (5.1)$$

Le code de calcul utilisé, pour la diffraction-radiation linéarisée à l'ordre 1, est Hydrostar [76]. L'hypothèse de profondeur infinie est utilisée dans tout ce chapitre. L'épaisseur de chaque plaque est telle que le poids résiduel dans l'eau est constant et que le tirant d'eau de l'ensemble {colonne+plaque} est également constant.

## 5.2 Choix de l'échelle

Le nombre adimensionnel fondamental pour le choix de l'échelle, d'un système oscillant dans la houle, est le nombre de Froude qui traduit le rapport entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle gravitationnelle. Ce nombre est donné dans l'équation 5.2.

$$F_R = \frac{V}{\sqrt{gL}} \quad (5.2)$$

Avec  $V$  la vitesse de référence,  $L$  la longueur de référence et  $g$  l'accélération de la pesanteur. En similitude de Froude, la puissance est fonction de l'échelle à la puissance 7/2. Un tableau récapitulant les extrapolations en similitude de Froude est donné par Heller [168].

Pour un système réel, un certain nombre de phénomènes ne sont pas mesurés. Les pertes dans la liaison glissière restent inconnues. Même si des essais sont réalisés en air afin de quantifier ces pertes, des phénomènes supplémentaires apparaissent forcément dans l'eau. Dans l'espace entre la colonne et le flotteur, de l'eau circule dans un écoulement fortement confiné. Des pertes sont également à prévoir entre le pignon et la crémaillère. Ces pertes peuvent également être estimées mais une incertitude persiste. Il est donc primordial que ces pertes soient très faibles devant la puissance absorbée par le système. Nous savons d'ores et déjà que la maquette sera de taille importante pour magnifier son énergie cinétique et diminuer le ratio d'échelle. Le dimensionnement de ce système est un processus itératif qui ressemble, sur le principe, à une « boucle navire ». La suite de cette section présente les outils utilisés pour le dimensionnement.

### 5.2.1 Modèle linéaire équivalent

Cette section et la suivante s'appuient, en grande partie, sur le travail d'Olaya [169] qui propose un modèle linéaire équivalent pour un système houlomoteur similaire. Ce modèle équivalent permet de se ramener à une seule équation dynamique sur le mouvement relatif de la structure. Cette idée avait déjà été utilisée par Falnes [170]. Olaya [169] propose une méthode originale en établissant le modèle équivalent à partir du théorème de Thévenin et des analogies entre les équations électriques et mécaniques.

Cette approche est fondée sur deux hypothèses fortes. La première hypothèse est que les mouvements de tangage et de cavalement sont découplés du pilonnement. Ainsi, les seuls mouvements du système sont les pilonnements respectifs du flotteur et de la colonne. La seconde hypothèse est que les corrections éventuelles du modèles se font par l'ajout d'un pourcentage de l'amortissement critique. Ce type de correction a été utilisée en section 4.5.1 du chapitre précédent. Pour assurer un confort de lecture, les notations utilisées par Olaya [169] seront utilisées, dans la mesure du possible, dans cette section. Le système linéaire des équations des mouvements de

pilonnement est donné, dans le domaine fréquentiel et sans captation d'énergie, par l'équation 5.3.

$$\begin{pmatrix} K_{11} - \omega^2 (M_{11} + A_{11}) + i \omega B_{11} & -\omega^2 A_{12} + i \omega B_{12} \\ -\omega^2 A_{21} + i \omega B_{21} & K_{22} - \omega^2 (M_{22} + A_{22}) + i \omega B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ex,1} \\ F_{ex,2} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

Avec  $K_{11}$  le rappel hydrostatique du flotteur 1,  $M_{11}$  sa masse propre,  $A_{11}$  sa masse ajoutée,  $B_{11}$  son amortissement,  $A_{12}$  la masse ajoutée due au mouvement de la colonne 2 et  $B_{12}$  l'amortissement dû au mouvement de la colonne 2. Les termes  $K_{22}$ ,  $M_{22}$ ,  $A_{22}$ ,  $B_{22}$ ,  $A_{21}$  et  $B_{21}$  sont définis de façon analogue. Les efforts  $F_{ex,1}$  et  $F_{ex,2}$  sont respectivement les efforts d'excitation du flotteur et de la colonne. Les mouvements  $Q_1$  et  $Q_2$  sont respectivement le pilonnement du flotteur et celui de la colonne. Afin d'alléger la notation, il est possible d'utiliser la notion d'impédance mécanique définie par l'équation suivante :

$$Z_{i,j}(\omega) = i \omega (M_{ij} + A_{ij}(\omega)) + B_{ij}(\omega) + \frac{K_{ij}}{i \omega} \quad i, j \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2 \quad i^2 = -1 \quad (5.4)$$

L'équation 5.3 devient alors, en utilisant les impédances, l'équation 5.5

$$\begin{pmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ex,1}(\omega) \\ F_{ex,2}(\omega) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_1(\omega) = i \omega Q_1(\omega) \\ V_2(\omega) = i \omega Q_2(\omega) \end{cases} \quad (5.5)$$

En posant  $Z_c = Z_{12} = Z_{21}$  et la vitesse relative  $V_r = V_1 - V_2$ , il est possible de se ramener à une seule équation<sup>1</sup> en introduisant des termes équivalents.

$$Z_{eq} V_r = F_{ex,eq} \quad (5.6)$$

Avec,

$$Z_{eq} = \frac{Z_{11} Z_{22} - Z_c^2}{Z_{11} + Z_{22} + 2Z_c} \quad (5.7)$$

Et

$$F_{ex,eq} = \frac{Z_{22} + Z_c}{Z_{11} + Z_{22} + 2Z_c} F_{ex,1} - \frac{Z_{11} + Z_c}{Z_{11} + Z_{22} + 2Z_c} F_{ex,2} \quad (5.8)$$

### 5.2.2 Modèle linéaire avec captation d'énergie

La section précédente a permis d'établir un modèle équivalent ramenant notre système à un système à un seul corps. Ainsi, il est possible d'utiliser directement les résultats connus pour les

1. Voir la section 3.2.2 de la thèse d'Olaya [169] pour plus de détails.



systèmes à un seul corps. Pour les stratégies résistive et réactive, l'effort du PTO est de la forme

$$F_{PTO} = -Z_{PTO}V_r \quad (5.9)$$

L'impédance optimale pour la stratégie résistive est donnée par le module de l'impédance équivalente.

$$Z_{PTO} = |Z_{eq}| = \left| \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_c^2}{Z_{11}Z_{22} + 2Z_c} \right| \quad (5.10)$$

Pour le contrôle réactif, l'impédance optimale est l'impédance équivalente conjuguée.

$$Z_{PTO} = Z_{eq}^* = \left( \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_c^2}{Z_{11}Z_{22} + 2Z_c} \right)^* \quad (5.11)$$

Ces relations ne sont pas redémontrées ici. Une démonstration est proposée, pour chacun de ces deux contrôles, par Genest [113]<sup>2</sup>. En ajoutant la captation d'énergie à l'équation 5.5, nous obtenons l'équation 5.12.

$$\begin{pmatrix} Z_{11}(\omega) + Z_{PTO}(\omega) & Z_{12}(\omega) - Z_{PTO}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) - Z_{PTO}(\omega) & Z_{22}(\omega) + Z_{PTO}(\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(\omega) \\ V_2(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ex,1}(\omega) \\ F_{ex,2}(\omega) \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

### 5.2.3 Ajout d'un amortissement non-linéaire

L'hypothèse de l'amortissement linéaire, corrigé par un pourcentage de l'amortissement critique, est jugée trop simpliste et il a été décidé d'ajouter des termes non-linéaires au modèle de la section précédente. Nous supposons que les masses ajoutées estimées par le code HydroStar sont proches de la réalité et que seuls des termes d'amortissements additionnels sont nécessaires. En se basant sur les développements du chapitre 4, l'effort de trainée sur l'ensemble {colonne+plaque} est supposé faire intervenir la vitesse de la houle incidente évaluée à la profondeur, à l'équilibre, de la plaque. L'effort de trainée du flotteur, quant à lui, est supposé ne faire intervenir que la vitesse absolue en pilonnement du flotteur.

$$f_{df}(t) = -\frac{1}{2}\rho S_f C_{df} |v_1(t)|v_1(t) \quad (5.13)$$

$$f_{dc}(t) = -\frac{1}{2}\rho S_c C_{dc} |v_2(t) - \dot{\eta}(t)e^{-k_0 H_c}| \left( v_2(t) - \dot{\eta}(t)e^{-k_0 H_c} \right) \quad (5.14)$$

Avec  $S_f$  la surface de référence du flotteur,  $H_f$  le tirant d'eau du flotteur,  $C_{df}$  son coefficient de trainée,  $S_c$  la surface de la plaque anti-pilonnement,  $H_c$  le tirant d'eau de l'ensemble {colonne+plaque} et  $C_{dc}$  le coefficient de trainée de la plaque. En utilisant l'équation 4.54, il est

---

2. Dans les sections 2.3 et 2.4

possible d'écrire ces efforts dans le domaine fréquentiel en ne conservant que la réponse fondamentale.

$$F_{df}(\omega) = -\frac{4}{3\pi}\rho S_f C_{df} |V_1(\omega)| V_1(\omega) \quad (5.15)$$

$$F_{dc}(\omega) = -\frac{4}{3\pi}\rho S_c C_{dc} |V_2(\omega) - i\omega a e^{-k_0 H_c}| (V_2(\omega) - i\omega a e^{-k_0 H_c}) \quad (5.16)$$

Les amortissements quadratiques  $B_{qf}$  et  $B_{qc}$  sont définis tels que :

$$\begin{aligned} B_{qf}(\omega) &= \frac{4}{3\pi}\rho S_f C_{df} |V_1(\omega)| \\ B_{qc}(\omega) &= \frac{4}{3\pi}\rho S_c C_{dc} |V_2(\omega) - i\omega a e^{-k_0 H_c}| \end{aligned} \quad (5.17)$$

En ajoutant la trainée à l'équation 5.12, nous obtenons l'équation 5.18.

$$\begin{pmatrix} Z_{11} + Z_{PTO} + B_{qf} & Z_{12} - Z_{PTO} \\ Z_{21} - Z_{PTO} & Z_{22} + Z_{PTO} + B_{qc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ex,1} \\ F_{ex,2} + i\omega a e^{-k_0 H_c} B_{qc} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

La résolution de l'équation 5.18 se fait numériquement par un processus itératif similaire à celui utilisé dans la section 4.5.2.2. De même que pour le chapitre 4, l'effort d'excitation calculé par HydroStar est supposé conforme à la réalité. Les figures 5.2 et 5.3 présentent le module et la phase de l'effort d'excitation adimensionnel en pilonnement, pour chacune des plaques, respectivement pour le flotteur et la colonne. L'adimensionnalisation se fait en divisant l'effort d'excitation par la raideur hydrostatique en pilonnement. Les surfaces de flottation du flotteur et de la colonne sont respectivement notée  $S_{ff}$  et  $S_{fc}$ .

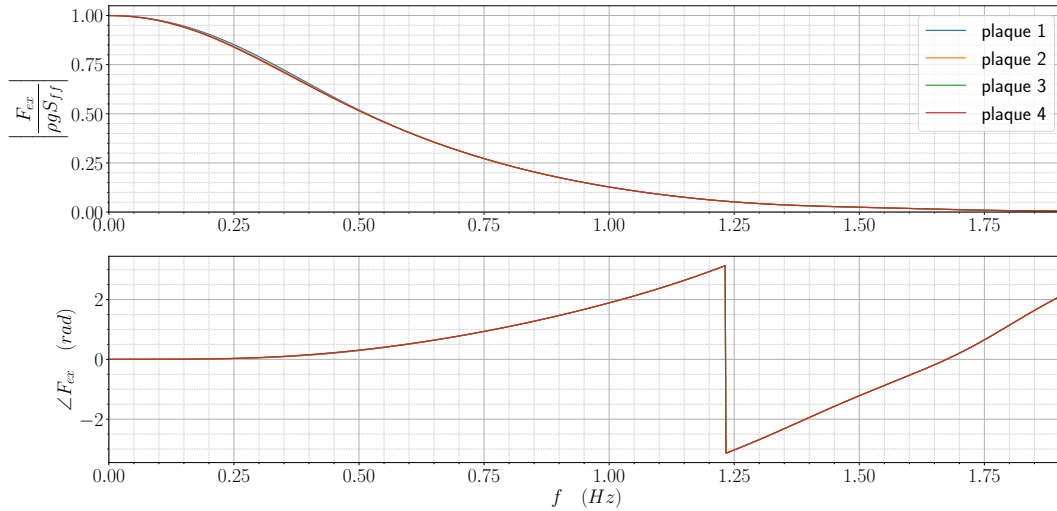


FIGURE 5.2 – Efforts d'excitation en pilonnement du flotteur en présence de la colonne et des différentes plaques

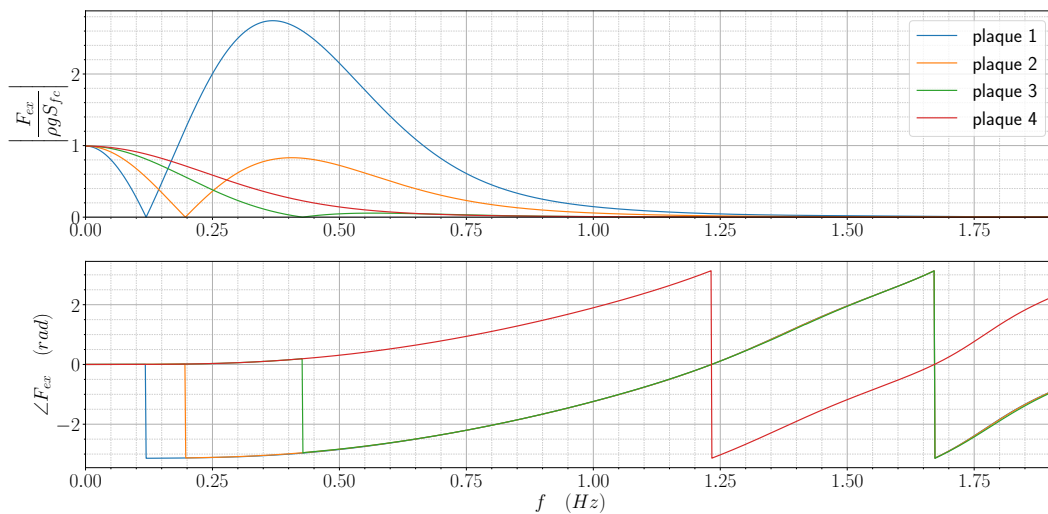


FIGURE 5.3 – Efforts d'excitation en pilonnement de l'ensemble {colonne+plaque} pour les différentes plaques et en présence du flotteur

### 5.2.4 Estimation des coefficients de trainée

A ce stade, il nous faut choisir une première échelle pour le système. Le choix de l'échelle 1 :16 a été fait. Cette échelle est le point de départ et les dimensions ne sont en rien figées pour l'instant. Les coefficients sont supposés constants et réglés de manière à ce que les RAO en pilonnement, du flotteur et de la colonne, soient réalistes. Les coefficients de trainée sont donc estimés à partir d'un critère arbitraire. Ce processus n'est néanmoins pas plus discutable que de prendre les

coefficients de trainée d'un autre système et de les supposer applicables. Les figures 5.4, 5.5, 5.6 et 5.7 présentent, respectivement pour les plaques 1 à 4, les RAOs en pilonnement du flotteur et de l'ensemble {colonne+plaque} ainsi que la RAO du pilonnement relatif. La hauteur de vague utilisée est  $H_w = 10 \text{ cm}$ . Les coefficients de trainée utilisés sont  $C_{df} = 0.5$  et  $C_{dc} = 20$ .

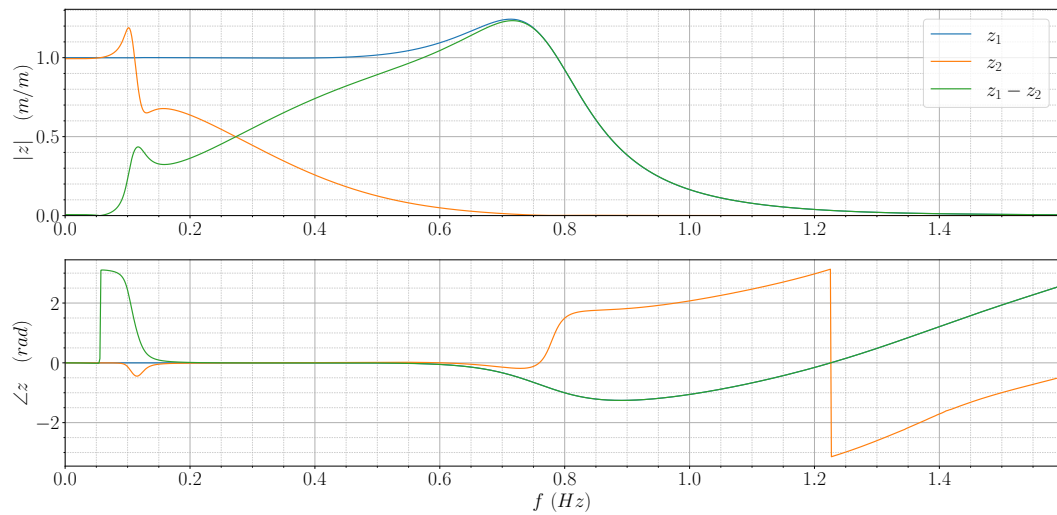


FIGURE 5.4 – RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 1 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16

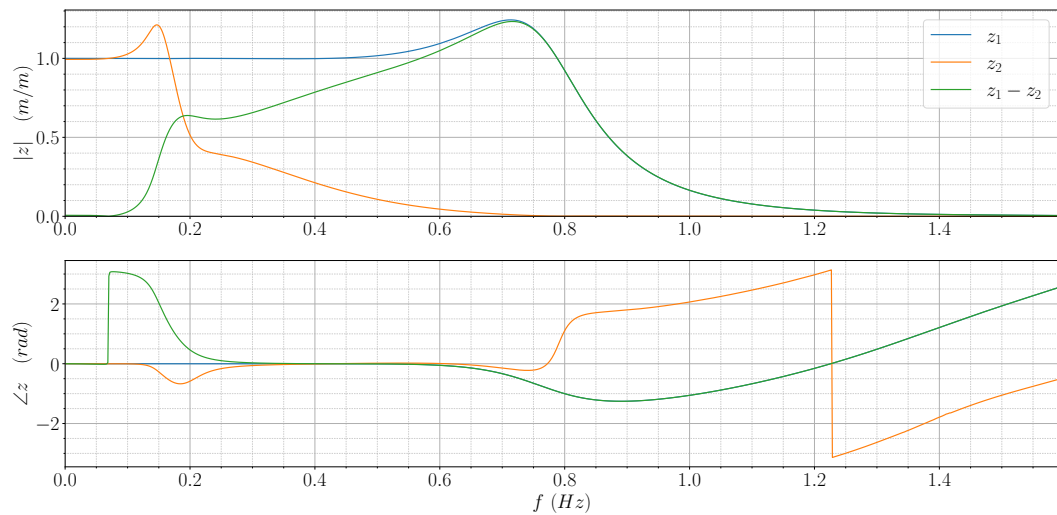


FIGURE 5.5 – RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 2 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16

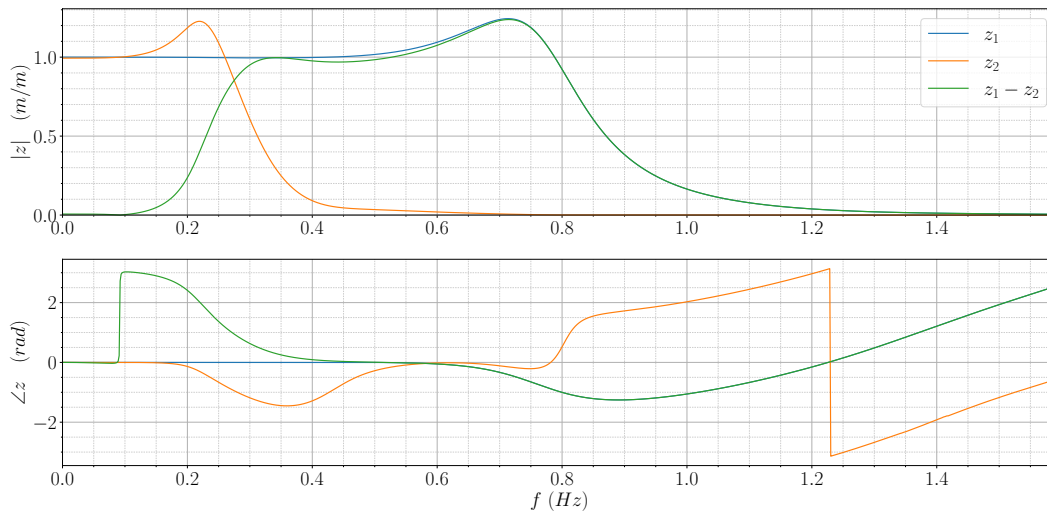


FIGURE 5.6 – RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 3 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16

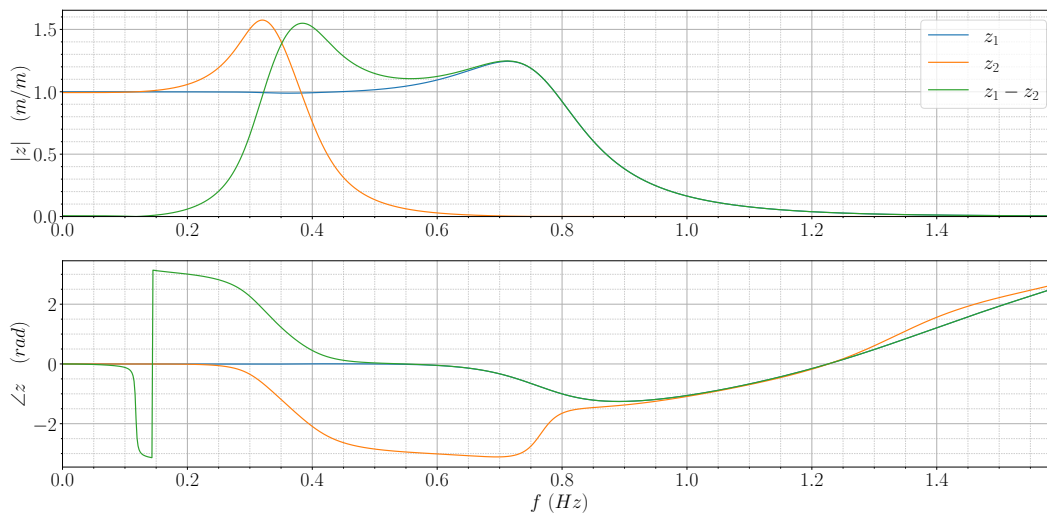


FIGURE 5.7 – RAO en pilonnement du flotteur et de la colonne munie de la plaque 4 sans captation d'énergie à l'échelle 1 :16

En testant le flotteur seul, l'ensemble {colonne+plaque} seul et l'ensemble {colonne+flotteur}, il serait possible d'obtenir un modèle plus pertinent pour la caractérisation des effets non-linéaires. Le modèle fréquentiel ainsi obtenu serait un modèle non-linéaire simplifié qu'il serait intéressant de comparer au modèle temporel non-linéaire.

### 5.2.5 Puissance captée avec et sans trainée

Il est intéressant de regarder l'impact des forces de trainée sur la puissance théorique captée. La puissance moyenne théorique est donc calculée, avec et sans trainée, pour chacune des 4 plaques avec les 3 stratégies de contrôle. La puissance moyenne captée est donnée par l'équation suivante :

$$P_{PTO}(\omega) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z_{PTO}(\omega)) |V_r(\omega)|^2 \quad (5.19)$$

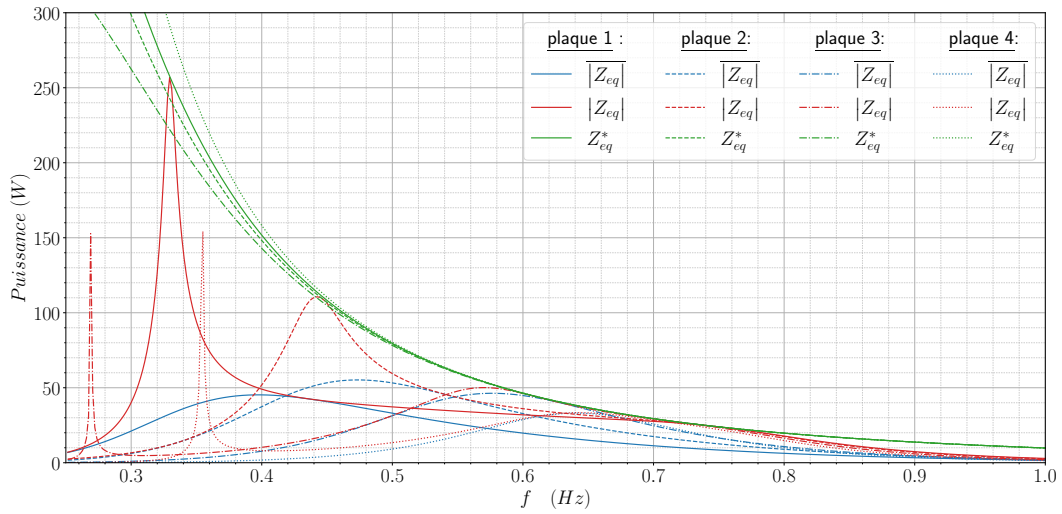


FIGURE 5.8 – Puissances moyennes captées pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle avec une amplitude de vague de 10 cm et sans trainée à l'échelle 1 :16

L'équation 5.12 est résolue pour une amplitude de vague  $a = 10 \text{ cm}$ . La figure 5.8 présente les puissances moyennes captées par chacune des 4 plaques sans trainée. La couleur bleu correspond à l'amortissement constant, la couleur rouge au contrôle résistif et la couleur verte au contrôle réactif. Les traits pleins correspondent à la plaque 1, les traits discontinus à la plaque 2, les traits mixtes à la plaque 3 et les pointillés à la plaque 4. Il apparaît, pour chaque plaque, que le contrôle réactif est plus performant que le contrôle résistif qui est lui-même plus performant que le contrôle par amortissement constant. La stratégie résistive rejoint la stratégie réactive en deux points du spectre qui correspondent aux deux annulations de déphasage entre la vitesse relative et l'effort d'excitation de la houle. L'équation 5.18 est également résolue pour une amplitude de vague  $a = 10 \text{ cm}$ . La figure 5.8 présente les puissances moyennes captées par chacune des 4 plaques avec des termes de trainée calculés à partir des coefficients déterminés dans la section 5.2.4. Il apparaît clairement, pour chacune des 4 plaques, que la stratégie réactive n'est plus forcément celle donnant la plus grande puissance moyenne captée. Il apparaît aussi que la stratégie de

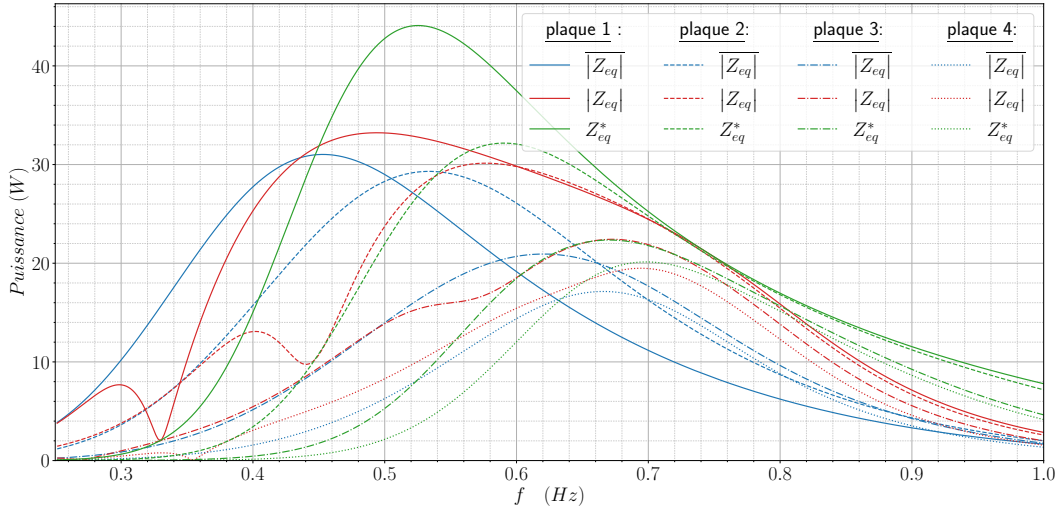


FIGURE 5.9 – Puissances moyennes captées pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle avec une amplitude de vague de 10 cm et avec trainée à l'échelle 1 :16

l'amortissement constant peut s'avérer plus performante que le contrôle réactif pour certaines fréquences. Cela s'explique par le fait que l'effort de trainée n'est pas pris en compte dans le calcul des impédances  $Z_{PTO}$ . A ce stade, compte tenu du fait que les véritables coefficients sont inconnus, il ne serait pas pertinent de tenter une optimisation prenant en compte l'effort de trainée.

### 5.2.6 Estimation de la puissance captée

Afin de pouvoir estimer la puissance captée, il nous faut choisir une machine électrique imaginaire dont les caractéristiques sont plausibles au regard de la masse de la machine et de son coût. En première approximation, nous supposons que notre machine imaginaire peut délivrer un couple de  $30 Nm$  à une vitesse de  $1000 tr/min$ . Le diamètre primitif du pignon, pour la transmission entre la machine électrique et la colonne, est de  $50mm$ . Cela nous permet de déterminer un effort maximal et une vitesse de translation maximale du flotteur par rapport à la colonne. De plus, une contrainte est ajoutée sur l'amplitude maximale de la translation du flotteur par rapport à la colonne. Cette amplitude maximale est fixée  $50 cm$ . L'amplitude de vague  $a$  est également contrainte par les caractéristiques du batteur à houle. Enfin, une contrainte est ajoutée pour que l'amplitude du pilonnement du flotteur ne dépasse pas la valeur de son tirant d'eau. Ces contraintes sont ensuite utilisées pour déterminer une amplitude de vague maximale, pour chacune des 4 plaques, et pour les trois stratégies de contrôle. La première stratégie est le contrôle résistif. La deuxième stratégie est un amortissement constant représentant l'amortissement résistif moyen. La troisième est un contrôle réactif.

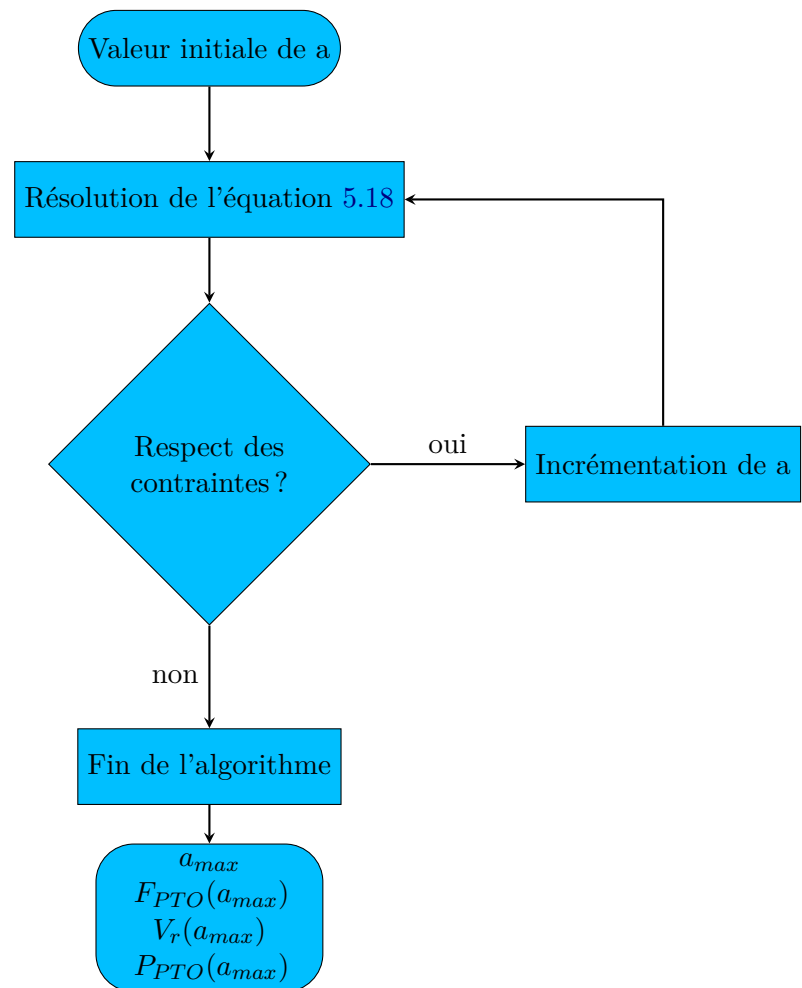


FIGURE 5.10 – Algorithme d'estimation de la puissance moyenne captée

La figure 5.10 représente le principe de l'algorithme permettant l'estimation de la puissance moyenne captée. Cet algorithme est utilisé pour toutes les fréquences allant de  $0.25 \text{ Hz}$  à  $1 \text{ Hz}$  par pas de  $10^{-2} \text{ Hz}$ , et est appliqué pour chacune des 4 plaques avec un amortissement constant, un contrôle résistif et un contrôle réactif. Le pas d'incrément de l'amplitude de vague  $a$  est  $\Delta a = 1 \text{ cm}$ . Ce pas est ensuite diminué à  $\Delta a = 1 \text{ mm}$  à l'approche de l'amplitude maximale. L'amplitude de vague est initialisée à  $3 \text{ cm}$  qui est l'amplitude minimale du bassin.

La figure 5.11 montre l'amplitude maximale possible, pour chaque plaque et pour chaque stratégie de contrôle, compte tenu des contraintes imposées sur la vitesse de la machine électrique, son couple, l'amplitude maximale du mouvement relatif, l'amplitude maximale pour le pilonnement du flotteur et l'amplitude de vague maximale permise par le batteur à houle. Il apparaît, pour la plaque 1, que la stratégie la plus contraignante en terme d'amplitude est le contrôle réactif, suivi



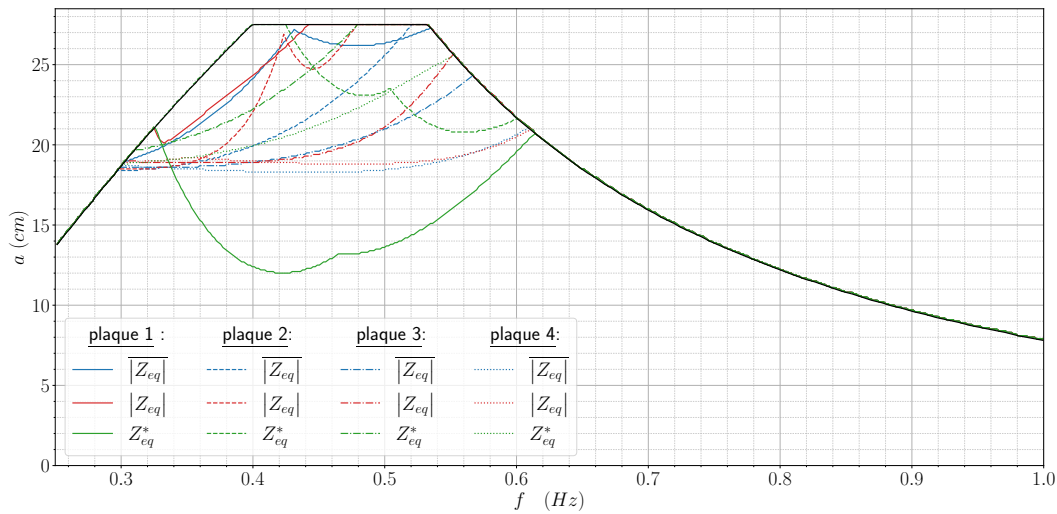


FIGURE 5.11 – Amplitudes de vague maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

du contrôle résistif et de l'amortissement constant. Cette observation n'est pas aussi marquée pour les autres plaques. En effet, la présence de non-linéarité dans l'équation dynamique, ainsi que la présence de contraintes, explique qu'il n'y a pas de résultats communs aux 4 plaques. La figure 5.12 montre la puissance moyenne captée maximale possible, pour chaque plaque et chaque stratégie de contrôle, compte tenu des contraintes imposées. Il apparaît que la puissance moyenne captée maximale est globalement moins bonne pour le contrôle réactif, compte tenu des contraintes. De plus, la puissance moyenne captée maximale augmente avec la taille de la plaque. Cela peut s'expliquer par le fait que l'effort d'excitation de la houle incidente augmente avec la taille de la plaque comme nous l'avons vu sur la figure 5.3. La vérification du respect des contraintes, pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle, est vérifiée et tracée en annexe D.1. Les conventions de tracé y sont les mêmes que pour les figures 5.11 et 5.12.

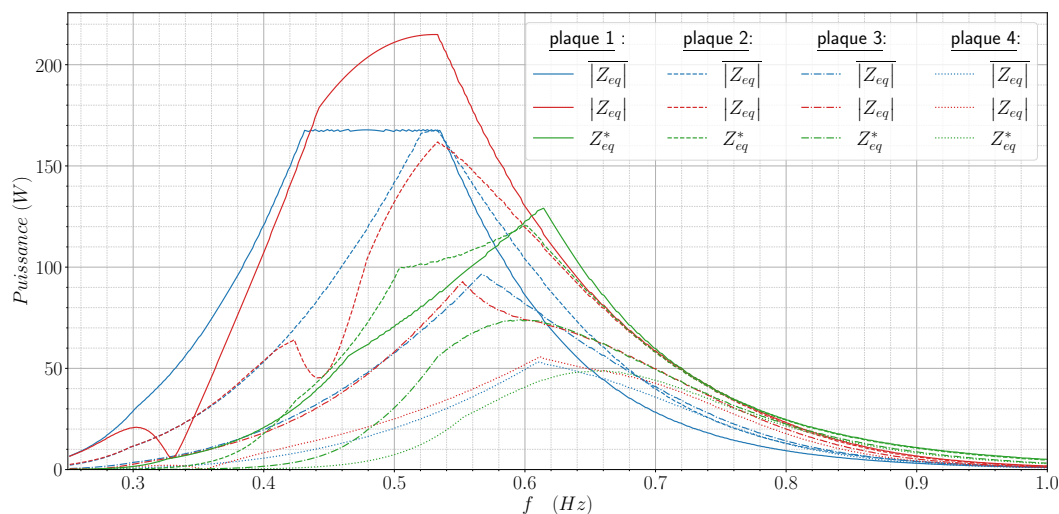


FIGURE 5.12 – Puissances moyennes captées maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

### 5.3 Choix de la machine électrique

La section précédente a montré que la puissance moyenne captée varie, en première approximation, de quelques dizaines à quelques centaines de  $W$ . La puissance captée est donc, a priori, nettement supérieure aux pertes inconnues (évolution du frottement pariétal en eaux, évolution des rendements dans la chaîne d'énergie). De plus, il apparaît que les stratégies « optimales », i.e. les contrôles résistif et réactif, ne le sont pas vraiment car la traînée non-linéaire n'est pas prise en compte. Il est donc envisageable qu'une stratégie adaptée puisse permettre de récupérer davantage d'énergie. Enfin, le modèle choisi pour la traînée est discutable et l'exactitude des résultats, présentés dans la section précédente, n'est pas assurée. Il est donc plus sûr de surdimensionner la machine électrique. La machine choisie est une machine synchrone triphasée à aimants permanents ADM142L8-150S-049-66, vendue par A2V, dont les caractéristiques sont données en annexe D.2. Cette machine fonctionne sur les 4 quadrants et est pilotée en couple par un variateur [FPRO-0244DAF1](#) fabriqué par la société Motorpower.

#### 5.3.1 Pertes dans la machine électrique

Un banc d'essai a été mis en place à l'Institut de Recherche de l'École Navale (IRENAV) afin de caractériser les pertes dans la machine. La figure 5.13 présente ce banc d'essai, constitué de notre machine synchrone à aimants permanents (MSAP) et d'une machine à courant continu (MCC).

Concrètement, l'objectif de ce banc est de caractériser les pertes collectives dans la machine

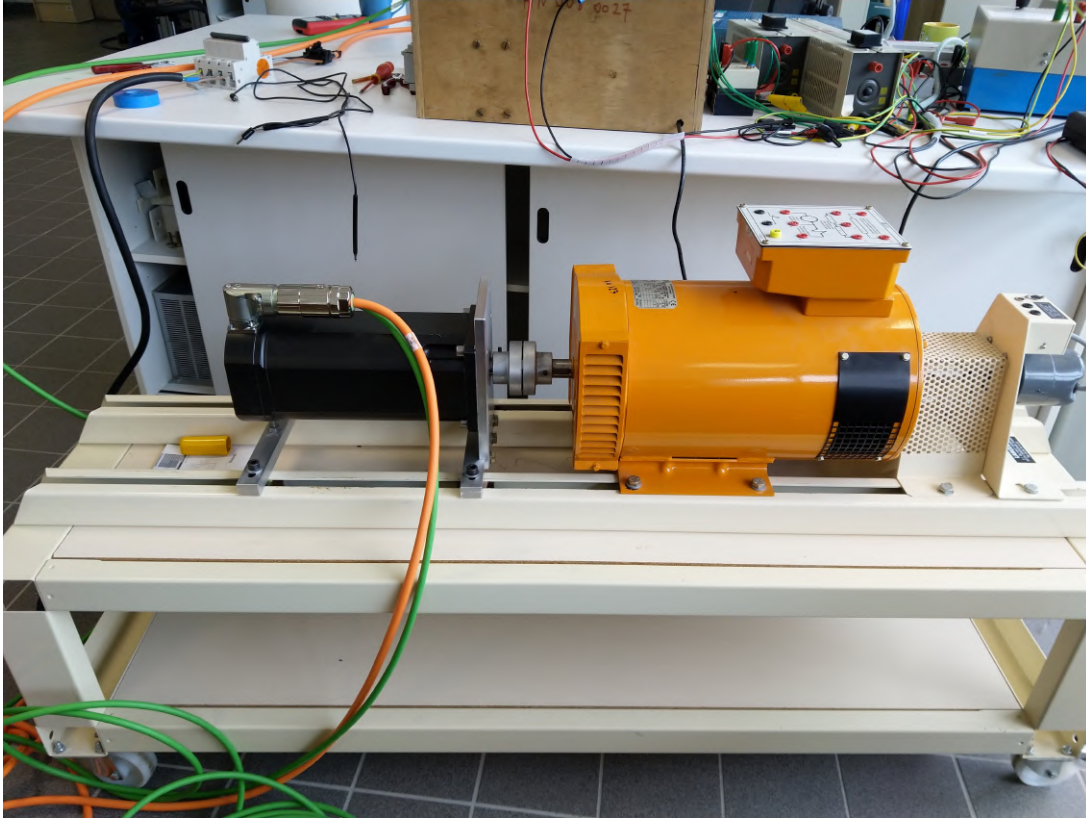


FIGURE 5.13 – Banc d'essai moteur avec la MSAP et une MCC

synchrone, i.e. les pertes fer statoriques auxquelles s'ajoutent les pertes mécaniques. Dans un premier temps, les machines sont découplées. La MCC est alimentée par un générateur de tension variable. Plusieurs tensions sont testées. Pour chaque tension, la vitesse de rotation et la puissance absorbée par la machine sont mesurées. La résistance de l'induit est connue et vaut 0.83 Ohms, il est donc possible d'écrire l'équation 5.20 donnant les pertes collectives de la MCC. En première approximation, ces pertes sont supposées ne dépendre que de la vitesse de rotation  $N$ .

$$P_{col}^{MCC}(N) = P_{abs}(N) - RI^2(N) \quad (5.20)$$

Avec  $P_{abs}$  la puissance absorbée par la MCC,  $R$  la résistance de l'induit et  $I$  le courant. La MSAP est ensuite couplée à la MCC et la même procédure est utilisée afin de déterminer  $P_{col}^{MCC+MSAP}$ . Les pertes collectives de la MSAP seule sont ensuite déduites par soustraction. Les pertes collectives  $P_{col}^{MCC}$  et  $P_{col}^{MCC+MSAP}$  sont représentées sur la figure 5.14. Une approche polynômiale, de degré 3, est également représentée pour chacun des deux cas. Il s'avère que la correspondance est assez satisfaisante. D'autres essais seront nécessaires pour estimer les pertes mécaniques dans le système complet, i.e. {maquette+machine}.

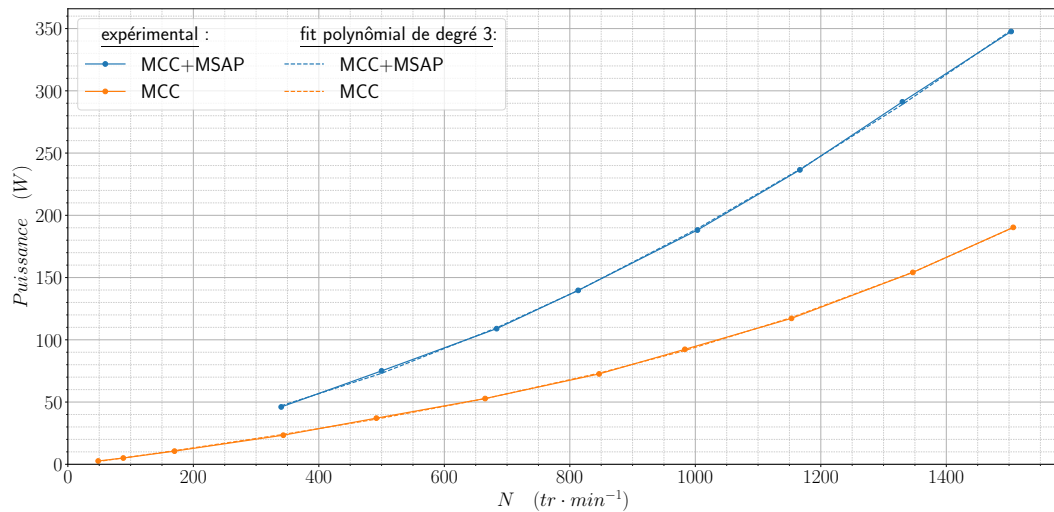


FIGURE 5.14 – Pertes collectives pour la MCC seule et pour la MCC couplée à la MSAP

### 5.3.2 Pilotage de la machine électrique

Les acquisitions au bassin d'essai océanique de l'Ifremer Centre Bretagne sont gérées par le logiciel LabView. Afin d'éviter d'éventuels problèmes de compatibilité, il a été décidé d'utiliser ce logiciel pour le pilotage de la machine et pour l'acquisition de ses données. Un contrôleur cRIO-9049, disposant d'un système d'exploitation en temps réel, a été acheté afin d'assurer le pilotage de la machine électrique, via le variateur, et l'envoi de ses données à la centrale d'acquisition. La structure du code que nous avons développé, pour le pilotage de la machine et l'acquisition de ses données, est d'ailleurs inspiré du code utilisé pour la centrale d'acquisition. Ces codes sont construits en utilisant des Machine à états [171]. Cette structure de programmation permet de gérer les événements, avec ou sans interdépendance, de façon claire. Le code résultant est robuste et facilement modifiable au besoin<sup>3</sup>. La figure 5.15 présentent les machines à états utilisées dans notre code LabView. Une autre structure a été utilisée. Il s'agit des boucles cadencées qui sont idéales pour des vérifications à intervalle de temps régulier et pour des gestions d'erreurs. La figure 5.16 présentent les boucles cadencées utilisées dans notre code LabView.

Le code LabView a été validé et vérifié sur banc d'essai. Le code actuel est fonctionnel mais est certainement perfectible. De plus, une situation expérimentale réelle impliquera certainement des impondérables dont il faudra tenir compte dans le code. D'où l'idée de faire un code robuste et facilement modifiable.

3. Notamment pour la prise en compte des pertes collectives dans le calcul de la consigne de couple

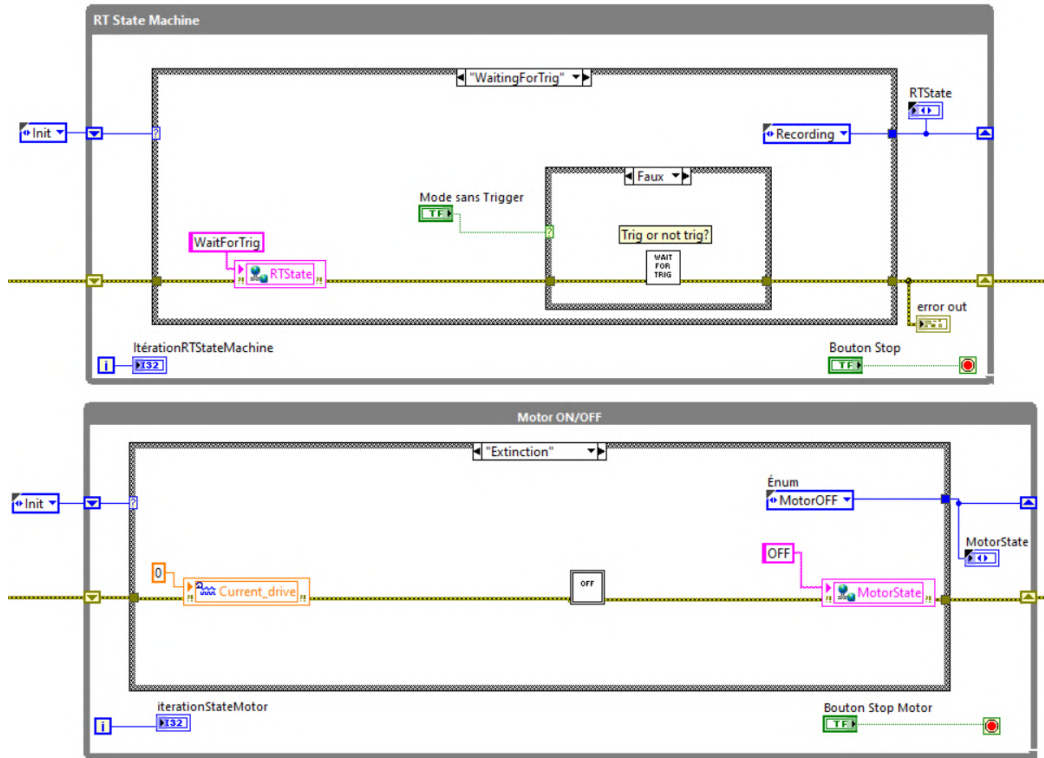


FIGURE 5.15 – Machines à états pour l’acquisition des données et le pilotage de la machine électrique

## 5.4 Contraintes supplémentaires

La section 5.2 a présenté les principaux outils mis en place et utilisés pour le dimensionnement du dispositif expérimental. Il y a cependant un certain nombre de contraintes qui viennent s’ajouter au problème. Il y a avant tout des contraintes de sécurité évidentes compte tenu de la présence d’une machine électrique, par laquelle circulent des courants importants, à proximité de la surface libre. Il est alors préférable d’éloigner la machine de la surface libre en la surélevant. Mais cela a pour conséquence de remonter le centre de gravité du flotteur et donc de perdre en stabilité. Or, la stabilité doit également être assurée par soucis de sécurité. Des considérations technologiques et économiques sont également prises en compte. Il a donc fallu composer avec tous ces aspects de la conception afin d’arriver, après un certain nombre d’itérations du processus, à une maquette finale. Ce travail s’est fait avec le concours de Sacha Le Page qui a fait, entre autres, les plans de la maquette, donnés dans l’annexe D.3, et sa CAO dont une vue 3D est présentée sur la figure 5.17. La machine électrique ADM142L8-150S-049-66 est intégrée à cette CAO.

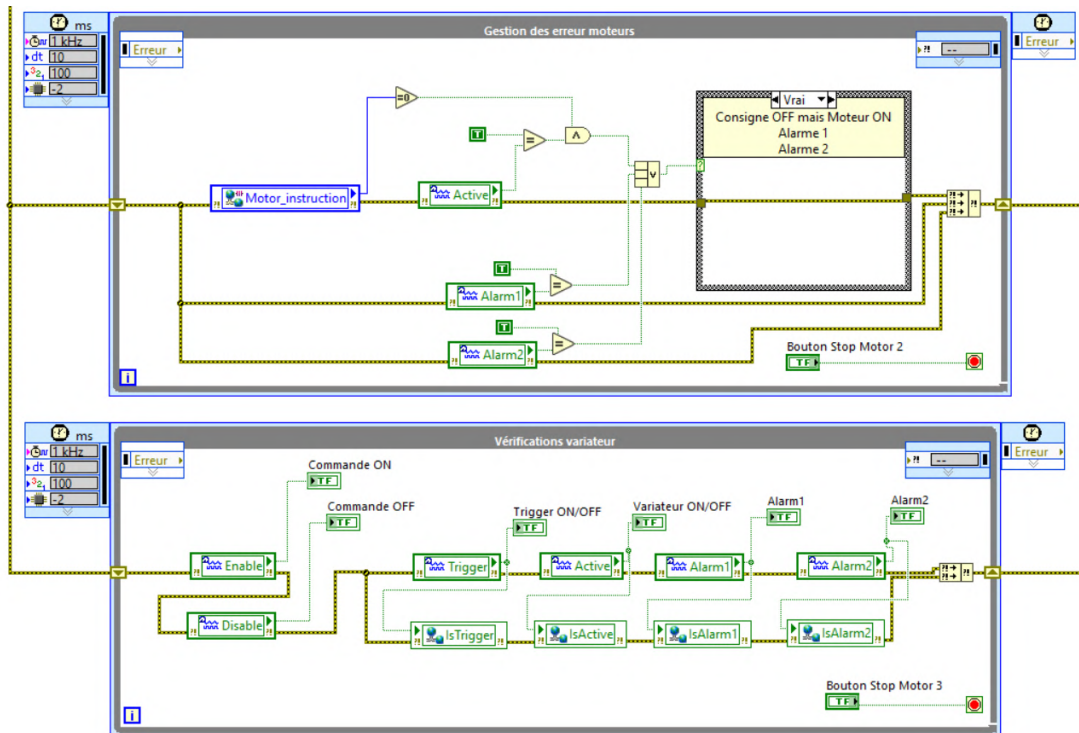


FIGURE 5.16 – Boucles cadencées pour la gestion des erreurs et la vérification des états du variateur

## 5.5 Conclusion

Ce chapitre détaille les hypothèses de travail, parfois discutables mais nécessaires, ainsi que la méthodologie itérative utilisées pour le dimensionnement et la conception de cette maquette à deux corps, intégrant une machine électrique ayant pour but de modéliser la captation d'énergie. Les essais n'ont pu être effectués en raison de l'indisponibilité du moyen d'essais et il demeure intéressant de réaliser ces essais. Il serait également pertinent, en amont d'éventuels essais bassins, de caractériser les pertes de l'ensemble {flotteur+colonne+plaque+machine électrique} pour des commandes de couple sinusoïdales en faisant varier l'amplitude et la fréquence de consigne afin d'avoir une idée plus précise des pertes dans le système total. Le modèle empirique de pertes ainsi obtenu pourrait alors être implémenté dans l'algorithme de contrôle LabView.

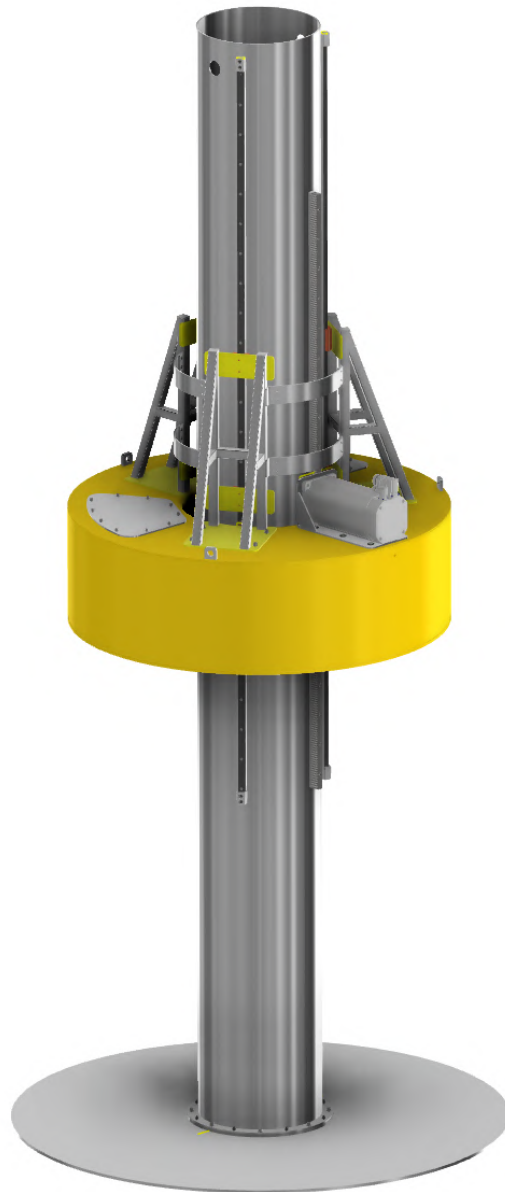


FIGURE 5.17 – Représentation 3D de la maquette avec la machine électrique

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

Le but de ce travail était de développer, vérifier, comparer et appliquer des méthodes permettant la modélisation de la captation de l'énergie des vagues dans le cas particulier de l'échelle réduite en bassin. Un modèle numérique a été développé permettant d'intégrer à la fois l'interaction fluide structure et la dynamique des ensembles de solides. Ce modèle non-linéaire est très général et ne souffre d'aucune restriction quant à la cinématique de ces ensembles. Il est également hybride puisqu'il permet l'intégration de données expérimentales. Il permet également l'intégration de pertes et, bien évidemment, de la captation d'énergie. Ce modèle est compartimenté et assure l'identification des causes entraînant les variations qui peuvent apparaître entre les modèles numérique et expérimental. L'étude de l'interaction fluide-structure a permis à ce travail de donner une définition complète d'une fonction très largement utilisée dans la littérature et, jusqu'ici, incomplète. L'approche choisie pour la modélisation de la dynamique des ensembles multicorps était, jusqu'ici, complexe et assez abstraite. Ce travail a donc étudié et simplifié cette approche la rendant ainsi plus attractive sans perte de généralité. La notion d'efforts additionnels a ainsi été introduite comme étant la cause des écarts expérimentaux. Une première campagne d'essai, sur un système simple, a été conduite pour caractériser ces efforts additionnels. Un dispositif plus ambitieux a été dimensionné, conçu et réalisé mais n'a malheureusement pas pu être testé en bassin.

La première partie de ce travail a porté sur la modélisation de l'interaction fluide structure. L'étude de l'état de l'art a mis en avant la théorie de la diffraction-radiation, linéarisée à l'ordre 1, qui apparaît comme un bon compromis entre précision et temps de calcul. Les bases de cette théorie ont été rappelées afin d'analyser la force des hypothèses sur lesquelles elle est construite. Le code de calcul utilisé est HydroStar. Ce code donne des résultats dans le domaine fréquentiel qui sont directement applicables pour les systèmes oscillant en régime permanent sur une houle régulière. Pour les régimes transitoires, ainsi que pour les houles irrégulières, il est préférable d'écrire le problème dans le domaine temporel. Le passage d'un domaine à l'autre peut être effectué à l'aide de la transformée de Fourier et de son inverse. L'utilisation de cette méthode pour écrire l'équation dynamique, dans le domaine temporel, fait apparaître un produit de convolution dont l'un des termes est appelé fonction de retard. Cette fonction temporelle traduit la dépendance du comportement dynamique, à un instant  $t$ , vis-à-vis des instants qui l'ont précédé. Ce produit de convolution est donc un effort « historique ». Les transformations de Fourier font intervenir des intégrales non bornées nécessitant la connaissance du comporte-



ment asymptotique des fonctions à transformer, i.e. l'effort d'excitation de la houle incidente, les masses ajoutées et les amortissements de radiation. Il a été prouvé qu'une troncature des termes de radiation, dans une transformée de Fourier inverse, implique une perte de précision ainsi que l'apparition de bruits numériques. Les résultats de ces transformations inverses sont appelés fonctions de retard. L'augmentation de la fréquence, ou pulsation, maximale pour le calcul de diffraction–radiation implique la diminution de la longueur d'onde minimale qui conditionne la taille du maillage. Ainsi, l'augmentation de la fréquence maximale du calcul implique une augmentation du temps de calcul. Il est donc préférable de procéder autrement. A cet effet, les masses ajoutées et les amortissements de radiation ont été extrapolés par des lois puissance. L'extrapolation de l'effort d'excitation, quant à elle, est plus complexe. L'établissement de la fonction de retard de l'excitation nécessite donc, a priori, que le calcul soit mené jusqu'à ce que le module de l'effort d'excitation s'approche suffisamment de sa valeur asymptotique. Calculer des fonctions de retard pertinentes et précises est la première difficulté qu'implique le passage dans le domaine temporel. La seconde difficulté est la gestion du terme de convolution présent dans l'équation dynamique temporelle. Une manière de procéder est de remplacer ce terme par un modèle d'état. Il existe plusieurs méthodes permettant de construire ce modèle d'état. Une première approche, dite classique, a été envisagée. Elle consiste à utiliser une seule fonction de retard pour chaque terme de la radiation en utilisant les relations d'Ogilvie. Deux méthodes ont été testées et la première utilise les séries de Prony. Afin de vérifier la qualité du modèle d'état obtenu, il a été décidé de comparer les résultats fréquentiels et temporels pour un grand nombre de fréquences représentatives du spectre de houle. Les résultats sont satisfaisants mais fortement dépendant du nombre d'exponentielles choisi. Une seconde méthode, plus populaire dans la littérature, a alors été envisagée. Il s'agit de la décomposition en valeurs singulières de Hankel qui est une méthode discrète. L'utilisation de la relation d'Ogilvie, telle que proposée couramment dans la littérature, conduit à des écarts importants entre les résultats fréquentiels et temporels. Cette relation a donc été complétée et se révèle être discontinue en zéro, ce qui entraîne une discontinuité similaire pour la fonction de retard. Il a été démontré que le terme d'action directe basé sur le calcul par HSVD, bien que non pertinent d'un point de vue physique, permet de prendre en compte cette discontinuité. Une approche par deux fonctions de retard continues a également été envisagée et a confirmé que la discontinuité de la relation d'Ogilvie, ajoutée au fait que la méthode est discrète, est à l'origine de l'apparition du terme d'action directe pour l'approche n'utilisant qu'une seule fonction de retard pour la radiation. Dans ce travail, nous ne nous sommes intéressés qu'aux principales méthodes utilisées pour la construction du modèle d'état classique à partir d'une définition temporelle de la fonction de retard. Cependant, il existe d'autres méthodes qui construisent le modèle d'état à partir d'une définition fréquentielle de la fonction de retard. Ces méthodes n'ont été que brièvement présentées dans l'état de l'art et il serait intéressant de leur appliquer la même procédure de validation, i.e. la comparaison des

---

RAOs fréquentiels et temporels pour un échantillon représentatif du spectre de houle.

La deuxième partie de ce travail a porté sur la modélisation du comportement dynamique des systèmes multicorps. Plusieurs approches ont été envisagées et comparées dans l'état de l'art (cf section 1.5) et il en est ressorti que l'approche la plus intéressante est une approche lagrangienne utilisant des contraintes incorporées au problème par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. Le terme de contrainte, utilisé ici, renvoie à une contrainte mathématique imposant l'évolution d'une quantité physique en fonction des variables et des paramètres du problème. La première raison ayant guidée ce choix et la volonté de conserver le même système de coordonnées que pour le problème d'interaction fluide structure, traité dans la première partie de ce travail, afin de pouvoir les associer facilement. Les contraintes les plus largement utilisées sont les contraintes holonomes qui ont l'inconvénient d'établir des équations complexes dont le sens physique n'est pas facilement perceptible. Les contraintes non-holonomes sont moins populaires mais elles offrent néanmoins des systèmes d'équations beaucoup plus simples à comprendre et à établir. Il est d'ailleurs possible d'automatiser le processus permettant d'établir ces équations. Ainsi, en utilisant le fait que les multiplicateurs de Lagrange sont les actions de liaison et que les matrices de contraintes sont des matrices de transport des efforts de liaison aux points de référence dans la base fixe, il a été possible d'établir les systèmes d'équations pour toutes les liaisons de base dans le cas général. D'autre part, les éventuels pertes et frottements peuvent être facilement intégrés au modèle. En plus de sa simplicité, cette approche a l'avantage de permettre le traitement des cas hyperstatiques offrant ainsi une méthode permettant de modéliser n'importe quel système mécanique multicorps avec une relative simplicité. L'inconvénient majeur des contraintes non-holonomes est qu'elles donnent des systèmes d'équations de grandes tailles, devant celles des autres approches, qui, une fois mis sous formes matricielle, contiennent un grand nombre de zéros. Cet inconvénient peut être en parti atténué par l'utilisation d'un algorithme adaptée aux matrices clairsemées. L'approche utilisant des contraintes non-holonomes a été validée par son application à un cas test et elle a également pu être appliquée avec succès à un système houlomoteur.

La seconde raison qui nous a poussés à choisir une modélisation faisant intervenir des équations de contrainte est la nécessité de pouvoir intégrer des données expérimentales au problème. Les mesures expérimentales peuvent être traduites en contraintes non-holonomes qu'il est tout à fait possible d'intégrer au modèle existant. De plus, le fait de traiter les contraintes « expérimentales » d'un côté, et les contraintes de liaison de l'autre, assure une dissociation des efforts relatifs à chacune de ces contraintes. Il est donc possible d'identifier les efforts, appelés efforts additionnels, sans qu'ils ne se retrouvent confondus avec les efforts de liaison. L'utilisation de ces contraintes expérimentales, pour le cas test, s'est avérée efficace et a permis de réaliser un premier modèle hybride. Nous avons néanmoins rencontré des problèmes de singularité de

matrice pour l'un des cas hybrides étudiés. Il serait donc intéressant de se pencher sur ce problème afin d'augmenter la robustesse numérique des algorithmes développés dans ce travail. La problématique des conflits entre les contraintes est également un aspect qui mérite attention. Nous l'avons évoqué, sans l'avoir rencontré, et il est très probable que le modèle hybride d'un système multicorps, auquel s'ajoutent des contraintes expérimentales, se retrouve en conflit. Il serait donc nécessaire de traiter les contraintes expérimentales afin qu'elles ne s'opposent pas aux contraintes de liaison. Il est également possible que des singularités apparaissent renforçant donc la nécessité de robustesse.

La troisième partie de ce travail s'est penchée sur la modélisation expérimentale. Une campagne d'essais a été réalisée pour un cylindre circulaire d'axe vertical seul puis muni d'une collerette. La répartition des masses dans la maquette, ainsi que les raideurs des ancrages utilisés, ont conduit à une grande proximité entre la résonance en pilonnement et celle en tangage. Nous avons donc commencé par vérifier que l'hypothèse des petits déplacements était bien applicable. À l'aide des outils introduits dans le chapitre précédent, nous avons été en mesure de déterminer les efforts additionnels. L'étude s'est d'abord portée sur le mouvement de pilonnement que nous avons supposé décorrélé des autres mouvements. L'analyse des RAOs des efforts additionnels, dans la direction du pilonnement, a montré que ceux-ci étaient quasiment indépendants de la hauteur de vague autour de la résonance. Ainsi, nous avons entrepris de caractériser l'effort additionnel en pilonnement par des paramètres constants. L'étude de l'effort additionnel nous a également montré qu'il était pertinent de modéliser cet effort par un terme inertiel linéaire auquel s'ajoute un amortissement non-linéaire. La suite de ce travail s'est articulée autour d'une méthode d'identification directe permettant de déterminer les paramètres, issus de la définition de l'effort additionnel, et de caractériser leurs évolutions en fonction du nombre de Keulegan-Carpenter. Malgré de fortes présomptions sur le caractère non-linéaire de l'amortissement, un premier modèle de correction linéaire a été testé et s'est avéré peu satisfaisant. Un deuxième modèle non-linéaire, ne considérant que la vitesse absolue du cylindre, a ensuite été utilisé et ses résultats, bien que meilleurs que ceux obtenus avec le modèle de correction linéaire, demeurent insatisfaisants. Ce modèle non-linéaire a ensuite été modifié en introduisant une vitesse relative, construite à partir de la vitesse absolue et d'une vitesse verticale théorique de la houle incidente évaluée à une profondeur pertinente, et en la substituant à la vitesse absolue. Les résultats obtenus sont très satisfaisants. De plus, les paramètres identifiés évoluent faiblement en fonction de la fréquence et de la hauteur de vague. Il a donc été décidé d'appliquer ce modèle de correction aux essais réalisés en houle irrégulière. Les paramètres varient davantage pour les essais en houle irrégulière mais restent assez bien groupés. Le modèle de correction est donc satisfaisant. Il serait intéressant de tester la colonne et le flotteur, réalisé lors de cette thèse, dans une configuration similaire afin de vérifier et/ou de corriger l'applicabilité de notre modèle de correction.

---

Notre étude s'est ensuite portée sur les mouvements de cavalement et de tangage que nous avons considérés couplés. Compte tenu du fait que le diamètre du cylindre est faible devant les longueurs d'onde, il a été décidé d'approcher le problème en utilisant la méthode de Morison. Dans un premier temps, afin de simplifier le problème, nous n'avons considéré que la vitesse absolue du cylindre. Une seconde formulation du problème a également été faite en tenant compte de la vitesse horizontale théorique de la houle incidente. Dans les deux cas, les résultats se sont avérés peu satisfaisants. En effet, les modèles ne supposent que deux paramètres pour caractériser les efforts additionnels relatifs aux mouvements de cavalement, de tangage ainsi que les efforts additionnels de couplage. La caractérisation avec seulement deux paramètres suppose des hypothèses fortes que les données expérimentales ne vérifient pas et s'avère donc, pour ce cas d'étude, inappropriée. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'identification directe n'a pas fonctionné avec ces approches et qu'il a fallu la remplacer par une identification par minimisation au sens des moindres carrés. Il est possible que la proximité entre les fréquences de résonance du pilonnement et du tangage invalide l'hypothèse que nous avons faite en supposant le mouvement de pilonnement décorréolé des autres. Il serait donc intéressant d'appliquer les deux méthodes, basées sur la méthode de Morison, à des cas où l'hypothèse de décorrélation du mouvement de pilonnement serait plus pertinente. Il a ensuite été décidé d'essayer une modélisation par identification directe en supposant l'effort additionnel du cavalement, ainsi que l'effort additionnel de couplage entre le cavalement et le tangage, négligeables. Bien que l'hypothèse soit très forte, il s'avère que les résultats obtenus sont assez satisfaisants. Il serait donc intéressant dans un futur travail d'appliquer ce modèle à d'autres configurations et éventuellement d'y ajouter des vitesses théoriques de la houle incidente comme cela a été fait pour l'étude du mouvement de pilonnement.

Dans la dernière partie de ce travail nous avons proposé une méthode de dimensionnement d'un système houlomoteur à deux corps avec des outils développés à la lumière des développements des chapitres précédents et d'une étude bibliographique. Ces outils s'intègrent dans un processus itératif auquel s'ajoutent un certain nombre de contraintes portant sur la sécurité, la puissance captée, la stabilité, le coût, la faisabilité technique et l'intégration d'une machine électrique agissant aussi bien comme moteur, que comme générateur, pour la captation de l'énergie de la houle. Nous sommes partis de travaux existants, qui permettent la détermination de la captation d'énergie optimale et son intégration dans l'équation dynamique linéaire, auxquels nous avons ajouté des amortissements non-linéaires. N'ayant pas de données expérimentales, nous avons estimé les coefficients de trainée de façon assez grossière par appréciation des RAOs obtenues. Une machine électrique a été choisie et testée sur un banc d'essai afin de caractériser ses pertes collectives. Le pilotage de cette machine a été réalisé et présenté. Ce dispositif expérimental n'a malheureusement pas pu être testé pendant la thèse et il demeure intéressant de réaliser

des essais avec ce dispositif. Des essais sur le flotteur seul, sur l'ensemble {colonne+plaque} seul, puis sur l'ensemble {flotteur+colonne+plaque} pourraient être conduits. Une fois ces essais réalisés, une estimation plus précise des coefficients de trainée pourra être effectuée. Une fois ces coefficients connus, il serait alors pertinent d'envisager l'optimisation de la captation d'énergie, pour différentes stratégies, en tenant compte des amortissements non-linéaires. Il est probable que la captation d'énergie ait une influence sur les coefficients de trainée et le processus serait donc itératif.

# Annexes

## ANNEXE DU CHAPITRE 2

### A.1 Caractéristiques du cylindre

Diamètre (m)	10
Hauteur (m)	20
Tirant d'eau (m)	10
Centre de gravité (m)	$\overrightarrow{OG_1}(t=0) = {}^t(0 \ 0 \ -7.5)$
Matrice masse	$\begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_2 \end{pmatrix}$
$m_1$ (kg)	$8.05033 \times 10^5$
$I_1$ (kg · m <sup>2</sup> )	$1.153 \times 10^7$
$I_2$ (kg · m <sup>2</sup> )	$9.94835 \times 10^6$
Matrice de rappel hydrostatique	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$K_{33}$ (N · m <sup>-1</sup> )	$7.89737 \times 10^5$
$K_{44}$ (Nm · rad <sup>-1</sup> )	$2.4679296 \times 10^7$
$K_{55}$ (Nm · rad <sup>-1</sup> )	$2.4679296 \times 10^7$

## A.2 Preuve de l'équation 2.110

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty] \cos(0) d\omega$$

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty] d\omega$$

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \Omega \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega [\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty] d\omega$$

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \left( -\Omega \mathbf{A}_\infty + \Omega \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega \mathbf{A}(\omega) d\omega \right)$$

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} (-\Omega \mathbf{A}_\infty) + \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \left( \Omega \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega \mathbf{A}(\omega) d\omega \right)$$

Nous savons que la valeur moyenne de la masse ajoutée est

$$\overline{\mathbf{A}(\omega)} = \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\Omega} \int_0^\Omega \mathbf{A}(\omega) d\omega \right)$$

Par conséquent,

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \left[ \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} (-\Omega \mathbf{A}_\infty) + \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} (\Omega \overline{\mathbf{A}(\omega)}) \right]$$

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \Omega (-\mathbf{A}_\infty + \overline{\mathbf{A}(\omega)})$$

Nous obtenons une forme indéterminée que nous pouvons réécrire sous la forme

$$\mathbf{K}^a(0) = \frac{1}{\pi} \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \omega (\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty)$$

Et d'après Taghipour [86]

$$\lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \omega (\mathbf{A}(\omega) - \mathbf{A}_\infty) = - \int_0^{+\infty} \mathbf{K}(t) \sin(\omega t) dt = \mathbf{0}$$

Il vient alors,

$$\mathbf{K}^a(0) = \mathbf{0}$$



## ANNEXE DU CHAPITRE 3

### B.1 Caractéristiques du Andrew's squeezer mechanism

Point de liaison	x [m] dans le repère fixe	y [m] dans le repère fixe
O	0	0
A	-0.06934	-0.00227
B	-0.03635	0.03273
C	0.01400	0.07200
D	-0.01047	0.02536
E	-0.03400	0.01646
F	-0.03163	-0.01562
G	0.00699	-0.00043
P	-0.02096	0.00130

TABLEAU B.1 – Coordonnées initiales des points de liaison

Solide	Masse [kg]	Inertie en G [ $kg \cdot m^2$ ]	$x_G$ [m]	$y_G$ [m]
1	0.04325	$2.194 \cdot 10^{-6}$	$9.182 \cdot 10^4$	$5.700 \cdot 10^{-5}$
2	0.00365	$4.410 \cdot 10^{-7}$	$-4.491 \cdot 10^{-3}$	$2.788 \cdot 10^4$
3	0.02373	$5.255 \cdot 10^{-6}$	$-1.874 \cdot 10^{-2}$	$2.048 \cdot 10^{-2}$
4	0.00706	$5.667 \cdot 10^{-7}$	$-3.022 \cdot 10^{-2}$	$1.207 \cdot 10^{-2}$
5	0.07050	$1.169 \cdot 10^{-5}$	$-5.324 \cdot 10^{-2}$	$1.663 \cdot 10^{-2}$
6	0.00706	$5.667 \cdot 10^{-7}$	$-2.854 \cdot 10^{-2}$	$-1.072 \cdot 10^{-2}$
7	0.05498	$1.912 \cdot 10^{-5}$	$-5.926 \cdot 10^{-2}$	$-1.060 \cdot 10^{-2}$

TABLEAU B.2 – Caractéristiques inertielles et positions initiales des CdG

Le signe de la valeur  $x_3$ , en rouge, a été corrigée.

## B.2 Interfaçage de la routine DGESV

```
1 cimport cython
2 cimport scipy.linalg.cython_lapack
3 from libc.stdlib cimport malloc, free
4 import numpy as np
5 cimport numpy as np
6 import scipy
7
8 @cython.boundscheck(False)
9 @cython.wraparound(False)
10 @cython.cdivision(True)
11 cdef csolve_dgesv(double[:,::1] A , double[:,1] B):
12
13     cdef int N = A.shape[0]
14     cdef int NRHS = 1
15     cdef int LDA = N
16     cdef int LDB = N
17     cdef int info = 0
18
19     cdef int* piv_pointer = <int*>malloc(sizeof(int)*N)
20     if not piv_pointer:
21         raise MemoryError()
22
23     try:
24         scipy.linalg.cython_lapack.dgesv(&N,&NRHS,&A[0,0],&LDA,piv_pointer,&B
25 [0],&LDB,&info)
26         if info!=0:
27             raise NameError('error in dgesv')
28     except NameError:
29         raise NameError('error in dgesv')
30
31     finally:
32         free(piv_pointer)
```

### B.3 Interfaçage de la routine DGELS

```
1 @cython.boundscheck(False)
2 @cython.wraparound(False)
3 @cython.cdivision(True)
4 cdef csolve_dgels(double[:,::1] A , double[:,::1] B):
5
6     cdef char* TRANS = 'N'
7     cdef int N = A.shape[1]
8     cdef int NRHS = 1
9     cdef int LDA = A.shape[0]
10    cdef int LDB = A.shape[0]
11    cdef int lwork = 2*N
12    cdef int info = 0
13
14    cdef double* work = <double*>malloc(sizeof(double)*lwork)
15    if not work:
16        raise MemoryError()
17
18    try:
19        scipy.linalg.cython_lapack.dgels(TRANS, &N, &N, &NRHS, &A[0,0], &LDA, &B[0], &
LDB, work, &lwork, &info)
20        if info!=0:
21            raise NameError('error in dgesv')
22    except NameError:
23        raise NameError('error in dgesv')
24
25    finally:
26        free(work)
```

### B.4 Interfaçage de la routine DGELSD

```
1 @cython.boundscheck(False)
2 @cython.wraparound(False)
3 @cython.cdivision(True)
4 cdef csolve_dgelsd(double[:,::1] A , double[:,::1] B):
5
6     cdef int M = A.shape[0]
7     cdef int N = A.shape[0]
8     cdef int NRHS = 1
9     cdef int LDA = A.shape[0]
10    cdef int LDB = A.shape[0]
11    cdef double* s = <double*>malloc(sizeof(double)*N)
12    cdef double rcond = -1
13    cdef double wkopt = 0
14    cdef int rank = 0
```

```

15     cdef int lwork = -1
16
17     cdef int MINMN = np.min([N,M])
18     cdef int SMLSIZ = 25
19     cdef int NLVL = np.max([0, np.int(np.log2(np.double(MINMN)/(np.double(SMLSIZ)
20     +1)))+1])
21     cdef int liwork = np.max([1, 3*MINMN*NLVL+11*MINMN])
22     cdef int* iwork = <int*>malloc(sizeof(int)*liwork)
23     cdef int info = 0
24
25     if not s:
26         raise MemoryError()
27
28     if not iwork:
29         raise MemoryError()
30
31     # Determination de la taille optimale lwork
32     try:
33         scipy.linalg.cython_lapack.dgelsd(&M,&N,&NRHS,&A[0,0],&LDA,&B[0],&LDB,s
34         ,&rcond,&rank,&wkopt,&lwork,iwork,&info)
35         if info!=0:
36             raise NameError('error in dgelsd')
37     except NameError:
38         raise NameError('error in dgelsd')
39
40     lwork = int(wkopt)
41     cdef double* work = <double*>malloc(sizeof(double)*lwork)
42
43     # Resolution de AX=B connaissant lwork
44     try:
45         scipy.linalg.cython_lapack.dgelsd(&M,&N,&NRHS,&A[0,0],&LDA,&B[0],&LDB,s
46         ,&rcond,&rank,work,&lwork,iwork,&info)
47         if info!=0:
48             raise NameError('error in dgelsd')
49     except NameError:
50         raise NameError('error in dgelsd')
51
52     finally:
53         free(s)
54         free(iwork)
55         free(work)

```

## B.5 Interfaçage de la routine DGBSV

```

1 @cython.boundscheck(False)
2 @cython.wraparound(False)
3 @cython.cdivision(True)
4 cdef csolve_dgbsv(double[:,::1] A, double[:,::1] B, dict c_parametres):
5
6     cdef int[:,::1] perm = c_parametres["perm"] # obtenu avec scipy.sparse.csgraph
7     .reverse_cuthill_mckee
8     cdef int KL = c_parametres["KL"] # nombre de sous-diagonales
9     cdef int KU = c_parametres["KU"] # nombre de sur-diagonales
10    cdef int N = A.shape[0], i=0, j=0
11
12    cdef double[:,::1] Ap = np.zeros([N,N])
13    cdef double[:,::1] Bp = np.zeros([N])
14    cdef double[:,::1] AB = np.zeros([2*KL+KU+1,N])
15
16    # permutation
17    for i in range(N):
18        Bp[i]=B[perm[i]]
19        for j in range(N):
20            Ap[i,j]=A[perm[i],perm[j]]
21
22    # ecriture au format bande
23    for j in range(1,N+1):
24        for i in range(max(1,j-KU),min(N,j+KL)+1):
25            AB[KU + KL + i - j , j-1] = Ap[i-1,j-1]
26
27    # resolution
28    scipy.linalg.lapack.dgbsv(KL, KU, AB[:,:], Bp[:,], overwrite_ab=1,
29    overwrite_b=1)
30
31    # reordonnement
32    for i in range(N):
33        B[perm[i]] = Bp[i]

```

## B.6 Caractéristiques du RM3

Caractéristiques du flotteur		
centre de gravité (m) $G_1$	masse (en tonnes)	matrice d'inertie ( $kg \cdot m^2$ )
$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -0.72 \end{pmatrix}$	727.01	$\begin{pmatrix} 2.09 \cdot 10^7 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 2.13 \cdot 10^7 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 3.71 \cdot 10^7 \end{pmatrix}_{G_1, \vec{B}_1}$
Caractéristiques de la colonne		
centre de gravité (m) $G_2$	masse (en tonnes)	matrice d'inertie ( $kg \cdot m^2$ )
$\begin{pmatrix} 0.00 \\ 0.00 \\ -21.29 \end{pmatrix}$	878.30	$\begin{pmatrix} 9.44 \cdot 10^7 & 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 9.44 \cdot 10^7 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 & 2.85 \cdot 10^7 \end{pmatrix}_{G_2, \vec{B}_2}$

TABLEAU B.3 – Caractéristiques des solides

## B.7 Expression alternative du modèle complet

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \begin{pmatrix} M(\mathbf{q}) & \mathbf{0} & {}^t C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \mathbf{0} & I_{6n} & \mathbf{0} \\ C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & -K_h & \mathbf{0} \\ I_{6n} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\dot{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{q} \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Sigma F \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \\
 \dot{\mathbf{X}}_{ij}^a(t) = \mathbf{A}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) + \mathbf{B}_{ij}^a \ddot{q}_j(t) \\
 y_i^a(t) = \sum_{j=1}^{6n} \mathbf{C}_{ij}^a \mathbf{X}_{ij}^a(t) \\
 \dot{\mathbf{X}}_{ij}^b(t) = \mathbf{A}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) + \mathbf{B}_{ij}^b \dot{q}_j(t) \\
 y_i^b(t) = \sum_{j=1}^{6n} \mathbf{C}_{ij}^b \mathbf{X}_{ij}^b(t) \\
 \mathbf{f}_{rad}(t) = -\mathbf{A}_\infty \ddot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{y}^a(t) - \mathbf{y}^b(t)
 \end{array} \right.$$

## B.8 Rotation de $p \geq 2$ vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

Soient  $p$  vecteurs  $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \dots, \vec{U}_p$  unitaires. Soient les  $p$  vecteurs  $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \dots, \vec{V}_p$  leurs images par la rotation d'angle vectoriel  $\vec{\alpha}$ . Les vecteurs  $\vec{U}_i$  et  $\vec{V}_i$  sont connus et l'objectif est de déterminer l'angle vectoriel  $\vec{\alpha}$ .

Soit  $\vec{n}$  l'axe de rotation tel que :

$$\vec{n} = \frac{1}{\alpha} \vec{\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha = \|\vec{\alpha}\| = \sqrt{\varphi^2 + \theta^2 + \psi^2}$$

### B.8.1 Détermination de l'axe de rotation

L'axe de rotation est dans le plan bissecteur de chaque couple de vecteur  $(\vec{U}_i, \vec{V}_i)$ . Un vecteur normal de ce plan est donné par l'équation suivante :

$$\vec{n}_{p_i} = (\vec{U}_i + \vec{V}_i) \wedge (\vec{U}_i \wedge \vec{V}_i)$$

L'intersection de ces plans 2 à 2 donne  $\frac{p(p-1)}{2}$  droites dont les vecteurs directeurs sont donnés par l'équation suivante :

$$\vec{n}_{d_k} = \frac{\vec{n}_{p_i} \wedge \vec{n}_{p_j}}{\|\vec{n}_{p_i} \wedge \vec{n}_{p_j}\|} \quad \forall \{i, j, k\} \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket i, p \rrbracket \times \llbracket 1, p(p-1)/2 \rrbracket$$

L'axe de rotation  $\vec{n}$  est alors obtenu, au sens des moindres carrés, en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} {}^t \vec{n}_{d_1} \\ {}^t \vec{n}_{d_2} \\ \vdots \\ {}^t \vec{n}_{d_{p(p-1)/2}} \end{pmatrix} \vec{n} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$$

Afin de se débarrasser des  $\pm$  dans le terme de droite, il est nécessaire de choisir une convention de signe pour le produit scalaire des  $\vec{n}_{d_k}$  entre eux. Le choix arbitraire suivant est fait :

$$\forall \{k, k'\} \in \llbracket 1, p(p-1)/2 \rrbracket^2 \quad \vec{n}_{d_k} \cdot \vec{n}_{d_{k'}} > 0$$

Les signes des vecteurs sont modifiés en conséquence. Le système à résoudre devient donc

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{n_{d_1}} \\ \overrightarrow{n_{d_2}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{n_{d_{p(p-1)/2}}} \end{pmatrix} \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

### B.8.2 Détermination de $\cos(\alpha)$

Il reste encore à déterminer  $\alpha$ . Pour ce faire, il faut repartir de la relation vectorielle de la rotation (équivalente à la forme matricielle de l'équation 3.3) :

$$\overrightarrow{V}_i = \overrightarrow{U}_i + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \overrightarrow{\alpha} \wedge \overrightarrow{U}_i + \frac{(1 - \cos(\alpha))}{\alpha^2} \overrightarrow{\alpha} \wedge (\overrightarrow{\alpha} \wedge \overrightarrow{U}_i)$$

Qui peut se réécrire

$$\overrightarrow{V}_i = \overrightarrow{U}_i + \sin(\alpha) \overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{U}_i + (1 - \cos(\alpha)) \overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{U}_i)$$

Le produit scalaire de  $\overrightarrow{V}_i$  par  $\overrightarrow{U}_i$  donne

$$\overrightarrow{V}_i \cdot \overrightarrow{U}_i = \overrightarrow{U}_i \cdot \overrightarrow{U}_i + \underbrace{\sin(\alpha) [\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{U}_i] \cdot \overrightarrow{U}_i}_{=0} + (1 - \cos(\alpha)) [\overrightarrow{n} \wedge (\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{U}_i)] \cdot \overrightarrow{U}_i \quad (\text{B.1})$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{U}_i^2}_{=1} + (1 - \cos(\alpha)) \left[ \overrightarrow{n} (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_i) - \overrightarrow{U}_i \underbrace{(\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{n})}_{=1} \right] \cdot \overrightarrow{U}_i \quad (\text{B.2})$$

$$= \cos(\alpha) + (1 - \cos(\alpha)) (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_i)^2 \quad (\text{B.3})$$

Il vient alors que :

$$\left[ 1 - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_i)^2 \right] \cos(\alpha) = \overrightarrow{U}_i \cdot \overrightarrow{V}_i - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_i)^2 \quad \overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{U}_i$$

La détermination de  $\cos(\alpha)$ , au sens des moindres carrés, se fait en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_1)^2 \\ 1 - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_2)^2 \\ \vdots \\ 1 - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_p)^2 \end{pmatrix} \cos(\alpha) = \begin{pmatrix} (\overrightarrow{U}_1 \cdot \overrightarrow{V}_1) - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_1)^2 \\ (\overrightarrow{U}_2 \cdot \overrightarrow{V}_2) - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_2)^2 \\ \vdots \\ (\overrightarrow{U}_p \cdot \overrightarrow{V}_p) - (\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{U}_p)^2 \end{pmatrix}$$



### B.8.3 Détermination de $\sin(\alpha)$

Il reste encore une indétermination sur le signe de l'angle. Une convention a été choisie pour l'axe de rotation et le cosinus ne peut, à lui seul, donner le signe d'alpha correspondant à la convention utilisée pour l'axe de rotation. La projection de l'équation vectorielle, de la rotation, sur la partie antisymétrique de la rotation permet d'écrire :

$$\begin{aligned} (\vec{V}_i - \vec{U}_i) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_i) &= \sin(\alpha) (\vec{n} \wedge \vec{U}_i) \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_i) \\ &+ (1 - \cos(\alpha)) \underbrace{[\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{U}_i)] \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_i)}_{=0} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La détermination de  $\sin(\alpha)$ , au sens des moindres carrés, se fait en résolvant le système suivant :

$$\begin{pmatrix} (\vec{n} \wedge \vec{U}_1)^2 \\ (\vec{n} \wedge \vec{U}_2)^2 \\ \vdots \\ (\vec{n} \wedge \vec{U}_p)^2 \end{pmatrix} \sin(\alpha) = \begin{pmatrix} \vec{V}_1 \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_1) \\ \vec{V}_2 \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_2) \\ \vdots \\ \vec{V}_p \cdot (\vec{n} \wedge \vec{U}_p) \end{pmatrix}$$

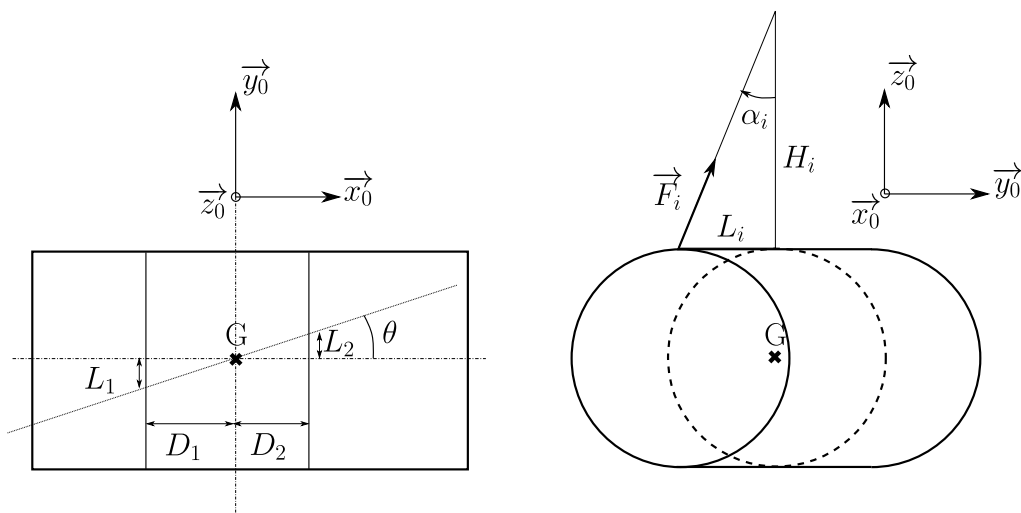
Ainsi,

$$\alpha = \arctan \left( \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right)$$

# ANNEXE DU CHAPITRE 4

## C.1 Pendule bifil

Le pendule bifil est un dispositif qui permet de déterminer l'inertie d'un corps, en son centre de gravité, à partir de la mesure des périodes d'oscillations.



Les angles sont supposés faibles, ce qui permet d'écrire que :

$$\tan(\theta) = \frac{L_i}{D_i} \approx \theta \quad \text{et} \quad \tan(\alpha_i) = \frac{L_i}{H_i} \approx \alpha_i \quad i = 1, 2$$

Les équations statiques donnent les efforts dans les câbles.

$$F_1 + F_2 = P = mg$$

$$F_1 D_1 = F_2 D_2$$

D'où :

$$F_1 = \frac{PD_2}{D_1 + D_2} \quad \text{et} \quad F_2 = \frac{PD_1}{D_1 + D_2}$$

L'énergie cinétique du cylindre est la suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2$$

Les couples de rappels sont donnés par l'équation suivante :

$$C_i = -F_i \sin(\alpha_i) D_i \approx -F_i \frac{L_i}{H_i} D_i \approx -F_i \frac{D_i^2}{H_i} \theta \quad i = 1, 2$$

Ce qui donne :

$$C_1 = -\frac{PD_2 D_1^2}{H_1 (D_1 + D_2)} \theta \quad \text{et} \quad C_2 = -\frac{PD_1 D_2^2}{H_2 (D_1 + D_2)} \theta$$

Le théorème de l'énergie cinétique nous donne l'équation différentielle suivante :

$$I \ddot{\theta} + \frac{PD_1 D_2 (D_1 H_2 + D_2 H_1)}{(D_1 + D_2) H_1 H_2} \theta = 0$$

La pulsation propre du système est la suivante :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{PD_1 D_2 (D_1 H_2 + D_2 H_1)}{I (D_1 + D_2) H_1 H_2}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

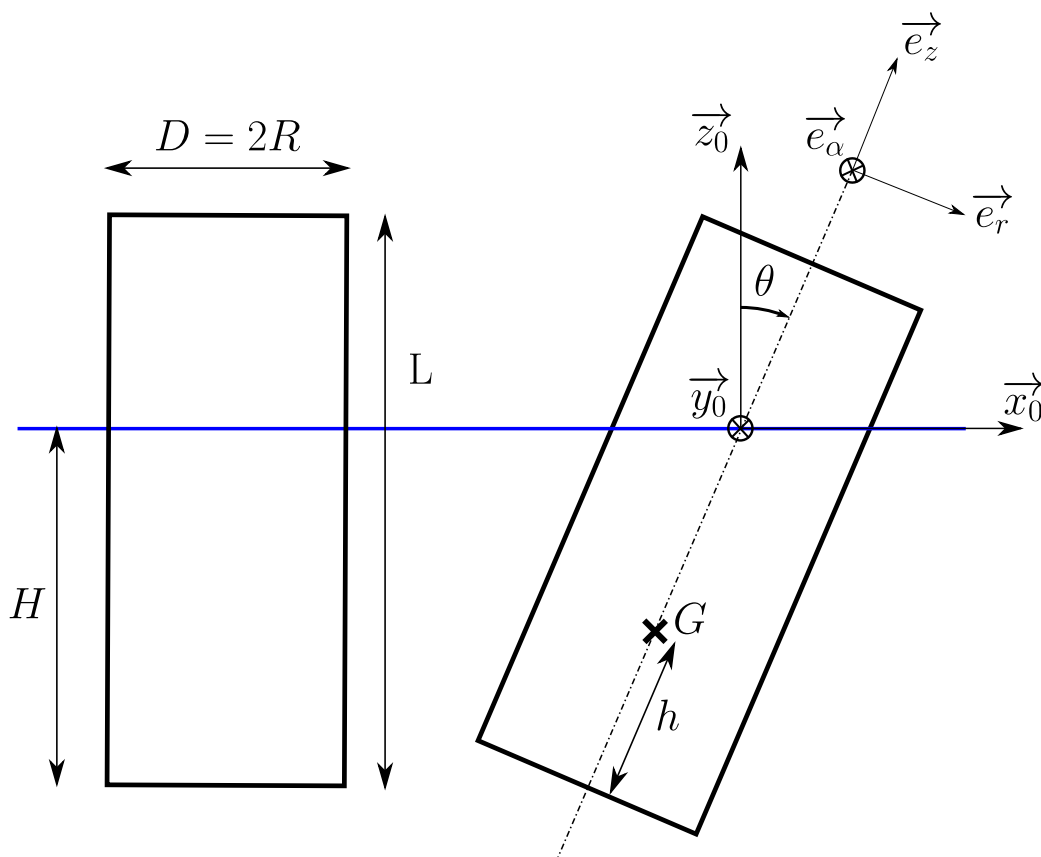
D'où l'expression de l'inertie

$$I = \frac{PT_0^2 D_1 D_2 (D_1 H_2 + D_2 H_1)}{4\pi^2 (D_1 + D_2) H_1 H_2}$$

Pour le cas particulier où  $H_1 = H_2 = H$  et  $D_1 = D_2 = D$ , la formule se simplifie.

$$I = \frac{PD^2}{4\pi^2 H} T_0^2$$

## C.2 Rappel hydrostatique d'un cylindre



### C.2.1 Disque inférieur

A l'équilibre, sans incidence, et dans le repère  $G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ , l'équation paramétrique du disque et la définition de la normale sortante sont données dans l'équation C.1.

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \\ y = r \sin(\alpha) \\ z = -h \end{cases} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \quad (\text{C.1})$$

Après une rotation d'un angle  $\theta$  en  $G$  autour de  $\vec{y}_0$  suivie d'une translation de vecteur  $\vec{OG}$ , l'équation C.1 devient l'équation C.2.

$$\begin{cases} x = r \cos(\alpha) \cos(\theta) - h \sin(\theta) + x_G \\ y = r \sin(\alpha) + y_G \\ z = -r \cos(\alpha) \sin(\theta) - h \cos(\theta) + z_G \end{cases} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ 0 \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \quad (\text{C.2})$$

### C.2.1.1 Résultante de l'effort hydrostatique

L'effort élémentaire est donné par l'équation C.3.

$$dF_z = -PdS \vec{n} \cdot \vec{z}_0 = -\rho g z \cos(\theta) r d\alpha dr \quad (\text{C.3})$$

L'effort total s'obtient alors par intégration

$$F_z = \int_0^{2\pi} \int_0^R -\rho g \cos(\theta) (-r \cos(\alpha) \sin(\theta) - h \cos(\theta) + z_G) r d\alpha dr \quad (\text{C.4})$$

Ce qui donne

$$F_z = -\rho g \cos(\theta) \pi R^2 (z_G - h \cos(\theta)) \quad (\text{C.5})$$

### C.2.1.2 Couple au centre de gravité

Soit  $M$  un point du disque. Le couple élémentaire est donné par l'équation suivante.

$$\begin{aligned} dC_y &= (\overrightarrow{GM} \wedge -PdS \vec{n}) \cdot \vec{y}_0 = \left[ \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \wedge -PdS \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{y}_0 \\ &= \rho g (-r \cos(\alpha) \sin(\theta) - h \cos(\theta) + z_G) r d\alpha dr \\ &= [(-r \cos(\alpha) \sin(\theta) - h \cos(\theta)) - \sin(\theta) (r \cos(\alpha) \cos(\theta) - h \sin(\theta)) - \cos(\theta)] \\ &= -\rho g \sin(\theta) r^3 \cos^2(\alpha) dr d\alpha \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Le couple total s'obtient alors par intégration

$$C_y = \int_0^{2\pi} \int_0^R -\rho g \sin(\theta) r^3 \cos^2(\alpha) dr d\alpha \quad (\text{C.7})$$

Ce qui donne

$$C_y = -\rho g \pi \frac{R^4}{4} \sin(\theta) \quad (\text{C.8})$$

### C.2.2 Corps du cylindre

A l'équilibre, sans incidence, et dans le repère  $G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$ , l'équation paramétrique du corps du cylindre et la normale sortante sont données dans l'équation C.9.

$$\begin{cases} x = R \cos(\alpha) \\ y = R \sin(\alpha) \\ z = u \end{cases} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \quad (\text{C.9})$$

Après une rotation d'un angle  $\theta$  en  $G$  autour de  $\vec{y}_0$  suivie d'une translation de vecteur  $\vec{OG}$ , l'équation C.9 devient l'équation C.10.

$$\begin{cases} x = R \cos(\alpha) \cos(\theta) + u \sin(\theta) + x_G \\ y = R \sin(\alpha) + y_G \\ z = -R \cos(\alpha) \sin(\theta) + u \cos(\theta) + z_G \end{cases} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\theta) \\ \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\theta) \end{pmatrix}_{\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0} \quad (\text{C.10})$$

L'intersection avec la surface libre donne la valeur maximale du paramètre  $u$ .

$$z = -R \cos(\alpha) \sin(\theta) + u \cos(\theta) + z_G = 0 \quad (\text{C.11})$$

Ce qui donne

$$u_{max} = \frac{R \cos(\alpha) \sin(\theta) - z_G}{\cos(\theta)} \quad (\text{C.12})$$

#### C.2.2.1 Résultante de l'effort hydrostatique

L'effort élémentaire est donné par l'équation C.13.

$$dF_z = -PdS \vec{n} \cdot \vec{z}_0 = -\rho g z R \cos(\alpha) \sin(\theta) d\alpha du \quad (\text{C.13})$$

L'effort total s'obtient alors par intégration

$$F_z = -\rho g R \sin(\theta) \int_0^{2\pi} \left( \int_{-h}^{u_{max}} (-R \cos(\alpha) \sin(\theta) + u \cos(\theta) + z_G) du \right) \cos(\alpha) d\alpha \quad (\text{C.14})$$

Ce qui donne

$$F_z = -\rho g R^2 \sin^2(\theta) \pi \left( \frac{z_G}{\cos(\theta)} - h \right) \quad (\text{C.15})$$

#### C.2.2.2 Couple au centre de gravité

Soit  $M$  un point du cylindre. Le couple élémentaire est donné par l'équation suivante.

$$\begin{aligned}
 dC_y &= (\overrightarrow{GM} \wedge -PdS\vec{n}) \cdot \vec{y}_0 = \left[ \begin{pmatrix} x - x_G \\ y - y_G \\ z - z_G \end{pmatrix} \wedge -PdS \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \right] \cdot \vec{y}_0 \\
 &= \rho g (R \cos(\alpha) \sin(\theta) + u \cos(\theta) + z_G) Rd\alpha du \\
 &[(-R \cos(\alpha) \sin(\theta) + u \cos(\theta)) \cos(\alpha) \cos(\theta) + (R \cos(\alpha) \cos(\theta) + u \sin(\theta)) \cos(\alpha) \sin(\theta)] \\
 &= \rho g R \left( (z_G - R \cos(\alpha) \sin(\theta)) u + \cos(\theta) u^2 \right) \cos(\alpha)
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

Le couple total s'obtient alors par intégration

$$C_y = \rho g R \int_0^{2\pi} \left( \int_{-h}^{u_{max}} \left( (z_G - R \cos(\alpha) \sin(\theta)) u + \cos(\theta) u^2 \right) du \right) \cos(\alpha) d\alpha \tag{C.17}$$

Ce qui donne

$$C_y = -\rho g R^2 \pi \sin(\theta) \left( \frac{R^2 \sin^2(\theta) + 4z_G^2}{8 \cos^2(\theta)} - \frac{h^2}{2} \right) \tag{C.18}$$

### C.2.3 Rappel hydrostatique

L'effort hydrostatique total est donné par l'équation suivante

$$F_z = -\rho g \pi R^2 \left( \frac{z_G}{\cos(\theta)} - h \right) \tag{C.19}$$

Le rappel  $\Delta F_z$  s'obtient en ajoutant le poids à l'effort  $F_z$

$$\Delta F_z = F_z - \rho g \pi R^2 H = -\rho g \pi R^2 \left( \frac{z_G}{\cos(\theta)} - h + H \right) \tag{C.20}$$

Le couple hydrostatique total est donné par l'équation suivante

$$C_y = -\rho g \pi R^2 \sin(\theta) \left( \frac{R^2}{4} \left( 1 + \frac{\tan^2(\theta)}{2} \right) + \frac{z_G^2}{2 \cos^2(\theta)} - \frac{h^2}{2} \right) \tag{C.21}$$

Le rappel  $\Delta C_y$  est défini comme étant le couple hydrostatique lorsque le déplacement est égal à la masse, i.e.  $\Delta F_z = 0$ . Ce qui implique  $z_G = (h - H) \cos(\theta)$ .

$$\Delta C_y = -\rho g \pi R^2 H \sin(\theta) \left( \frac{R^2}{4H} \left( 1 + \frac{\tan^2(\theta)}{2} \right) + \frac{H}{2} - h \right) \tag{C.22}$$

En utilisant le fait que  $h = H + z_{G,eq} / \cos(\theta_{eq})$ , il est possible de réécrire les termes de rappel comme suit :

$$\Delta F_z = -\rho g \pi R^2 \left( \frac{z_G}{\cos(\theta)} - \frac{z_{G,eq}}{\cos(\theta_{eq})} \right) \quad (\text{C.23})$$

$$\Delta C_y = -\rho g \pi R^2 H \sin(\theta) \left( \frac{R^2}{4H} \left( 1 + \frac{\tan^2(\theta)}{2} \right) - \frac{H}{2} - \frac{z_{G,eq}}{\cos(\theta_{eq})} \right) \quad (\text{C.24})$$

Remarque :

Notons que les résultats, présentés ici, ne sont valables que si le disque supérieur du cylindre est totalement émergé. Ce qui peut se traduire par l'équation C.25.

$$(H - h) \cos(\theta) > R \sin(\theta) - z_G \quad (\text{C.25})$$



### C.3 Linéarisation de l'effort d'ancrage

Les points d'attache fixes sont légèrement surélevés par rapport aux points d'attache mobiles. Cette élévation est supposée négligeable. De même, les variations de position suivant l'axe  $\vec{y}_0$  sont supposées négligeables. Pour chaque ancrage  $i$ , l'effort de l'ancrage sur le cylindre, appliqué au point  $A_i$ , est donné par l'équation suivante :

$$\vec{F}_{A_i} = k_i (l_i - l_{0_i}) \vec{x}_i = [k_i (l_i - l_{i,eq}) + f_{0,i}] \vec{x}_i \quad i \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \quad (\text{C.26})$$

Avec  $f_{0,i}$  la précontrainte et  $l_{i,eq}$  la longueur à l'équilibre donnée par l'équation suivante :

$$l_{i,eq} = \sqrt{(x_{A_{i,0}} - x_{B_i})^2 + (y_{A_{i,0}} - y_{B_i})^2 + (z_{A_{i,0}} - z_{B_i})^2} \quad (\text{C.27})$$

Et  $l_i$  la longueur de la ligne d'ancrage donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} l_i &= \sqrt{(x_{A_{i,0}} + \Delta x_{A_i} - x_{B_i})^2 + (y_{A_{i,0}} + \Delta y_{A_i} - y_{B_i})^2 + (z_{A_{i,0}} + \Delta z_{A_i} - z_{B_i})^2} \\ &= \sqrt{l_{i,eq}^2 + \underbrace{2\Delta x_{A_i} (x_{A_{i,0}} - x_{B_i}) + 2\Delta y_{A_i} (y_{A_{i,0}} - y_{B_i}) + 2\Delta z_{A_i} (z_{A_{i,0}} - z_{B_i})}_{\text{négligeable}}} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Ainsi, en négligeant les termes correspondant aux déplacements suivant les axes  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  et en appliquant un développement limité à l'ordre 1 au terme dans la racine, il est possible d'approximer l'effort comme suit

$$\vec{F}_{A_i} \approx f_{0,i} + k_i l_{i,eq} \left( \sqrt{1 + \frac{2\Delta x_{A_i} (x_{A_{i,0}} - x_{B_i})}{l_{i,eq}^2}} - 1 \right) \vec{x}_i \approx f_{0,i} + k_i \frac{\Delta x_{A_i} (x_{A_{i,0}} - x_{B_i})}{l_{i,eq}} \vec{x}_i \quad (\text{C.29})$$

Aux petits angles, il est possible d'approximer les variations  $\Delta x_{A_i}$  par la variation  $\Delta x_A$ , où  $A$  est le point situé à l'intersection entre le disque supérieur du cylindre et l'axe de ce dernier. L'effort total peut donc être approximé comme suit :

$$\sum_i \vec{F}_{A_i} \approx \sum_i f_{0,i} \vec{x}_i + k \Delta x_A \left( \vec{x}_1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \vec{x}_2 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \vec{x}_3 \right) \quad (\text{C.30})$$

Les raideurs, les longueurs à l'équilibre et les précontraintes sont les mêmes pour chaque ligne. L'indice  $i$  n'est donc plus nécessaire pour ces grandeurs. La variation  $\Delta x_A$  est faible devant la longueur initiale de la ligne d'ancrage  $i$ .

Il est donc possible, en s'appuyant sur la figure C.1, d'exprimer les variations  $\Delta\varphi_i$  et  $\Delta\psi_i$  comme suit :

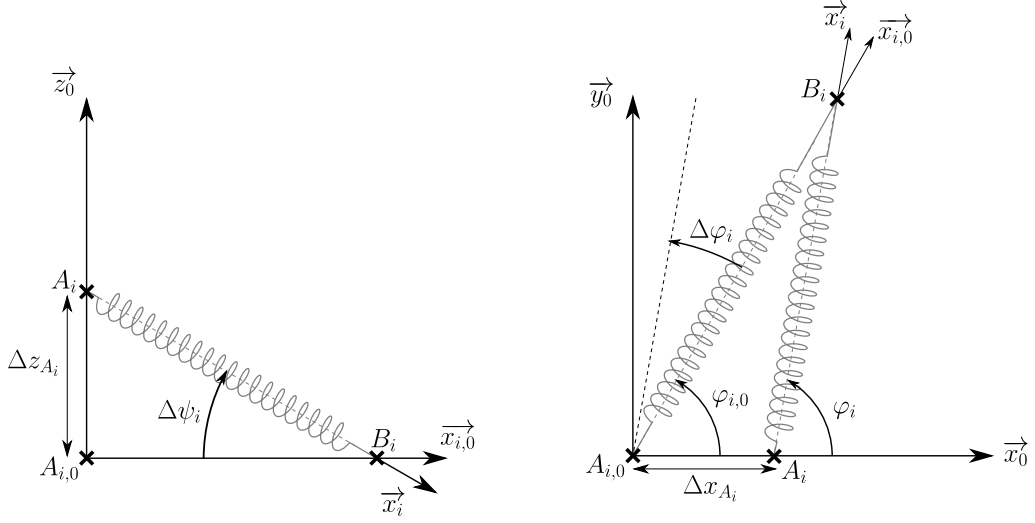


FIGURE C.1 – Repère de l'ancrage

$$l_{i,eq}\Delta\varphi_i \approx \Delta x_A \sin(\varphi_{i,0}) \iff \Delta\varphi_i = \frac{\Delta x_A \sin(\varphi_{i,0})}{l_{eq}} \quad (\text{C.31})$$

$$l_{i,eq}\Delta\psi_i \approx \Delta z_A \sin(\Delta\psi_i) \iff \Delta\psi_i = \frac{\Delta z_A}{l_{eq}} \quad (\text{C.32})$$

La seule composante d'effort non nulle est celle suivant  $\vec{x}_0$ . L'expression de  $\Delta\varphi_i$  permet d'approximer les produits scalaires suivant :

$$\begin{aligned} \vec{x}_i \cdot \vec{x}_0 &= \cos(\varphi_{i,0} + \Delta\varphi_i) = \cos(\varphi_{i,0}) \cos(\Delta\varphi_i) - \sin(\varphi_{i,0}) \sin(\Delta\varphi_i) \\ &\approx \cos(\varphi_{i,0}) - \sin^2(\varphi_{i,0}) \frac{\Delta x_A}{l_{eq}} \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

$$\vec{x}_i \cdot \vec{z}_0 = \sin\left(\underbrace{\psi_{i,0}}_{\approx 0} + \Delta\psi_i\right) \approx \sin(\Delta\psi_i) \approx \Delta\psi_i \approx -\frac{\Delta z_A}{l_{eq}} \quad (\text{C.34})$$

Ce qui donne les expressions suivantes, à l'ordre 1, de l'effort suivant  $\vec{x}_0$  et de celui suivant  $\vec{z}_0$ .

$$\begin{aligned} \sum_i \vec{F}_{A_i} \cdot \vec{x}_0 &\approx -2 \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \frac{\Delta x_A}{l_{eq}} f_0 + k \Delta x_A \left(-1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &\approx -\underbrace{\left(\frac{3k}{2} + \frac{3f_0}{2l_{eq}}\right)}_{k_{eq}} \Delta x_A = -k_{eq} \Delta x_A \end{aligned} \quad (\text{C.35})$$

$$\sum_i \overrightarrow{F_{A_i}} \cdot \vec{z}_0 \approx - \frac{3f_0}{\underbrace{l_{eq}}_{k_{zz}}} \Delta z_A = -k_{zz} \Delta z_A \quad (\text{C.36})$$

Où  $k_{eq}$  est la raideur équivalente et  $k_{zz}$  la raideur en pilonnement. L'ancrage équivalent ainsi obtenu est représenté sur la figure 4.9. L'équation C.37 donne le lien entre les coordonnées du point  $A$  et celles du point de référence  $G$ , ce qui permet d'exprimer l'effort de l'ancrage équivalent en fonction des coordonnées du point de référence dans les équations C.38 et C.40.

$$\overrightarrow{GA} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} - \begin{pmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} = Z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} Z \sin(\theta) \\ 0 \\ Z \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\vec{B}_0} \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{ancrage,A}} &= -k_{eq} \Delta x_A \vec{x}_0 - k_{zz} \Delta z_A \vec{z}_0 \\ &= -k_{eq} (\Delta x_G + Z (\sin(\theta) - \sin(\theta_{eq}))) \vec{x}_0 - k_{zz} (\Delta z_G + Z (\cos(\theta) - \cos(\theta_{eq}))) \vec{z}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

Où

$$\Delta x_G = x_G - x_{G,eq} \quad \text{et} \quad \Delta z_G = z_G - z_{G,eq} \quad (\text{C.39})$$

Avec  $x_{G,eq}$ ,  $z_{G,eq}$  et  $\theta_{eq}$  les valeurs à l'équilibre de  $x_G$ ,  $z_G$  et  $\theta$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{ancrage,G}} &= \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{F_{ancrage,A}} = [-k_{eq} Z (\cos(\theta) - \cos(\theta_{eq})) (\Delta x_G + Z (\sin(\theta) - \sin(\theta_{eq}))) \\ &\quad + k_{zz} Z (\sin(\theta) - \sin(\theta_{eq})) (\Delta z_G + Z (\cos(\theta) - \cos(\theta_{eq})))] \vec{y}_0 \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

En linéarisant à l'ordre 1, il est possible d'écrire cet effort, évalué en  $G$ , sous forme matricielle.

$$\mathbf{F}_a = - \underbrace{\begin{pmatrix} k_{eq} & 0 & k_{eq} Z \\ 0 & k_{zz} & 0 \\ k_{eq} Z & 0 & k_{eq} Z^2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_{anc}} \begin{pmatrix} x_G - x_{G,eq} \\ z_G - z_{G,eq} \\ \theta - \theta_{eq} \end{pmatrix} \quad (\text{C.41})$$

## C.4 Démonstration de l'équation 4.54

Soit  $A = |Q_3|$ ,  $B = ae^{k_0z}$  et  $\varphi = \angle Q_3$ . Ce qui implique que :

$$\dot{q}_3(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \dot{\eta}(t)e^{k_0z} = -\omega B \sin(\omega t)$$

Cet allègement de la notation permet de réécrire le numérateur et le dénominateur de l'équation 4.54.

$$B_{33}^{add} \int_0^T (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt = B_{33}^{add} \omega A I_2$$

$$\frac{1}{2} \rho S \int_0^T |\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}| (\dot{q}_3(t) - \dot{\eta}(t)e^{k_0z}) \dot{q}_3(t) dt = \frac{1}{2} \rho S C_d A \omega^2 I_1$$

Avec,

$$I_1 = \omega \int_0^T |A \sin(\omega t + \varphi) - B \sin(\omega t)| (A \sin(\omega t + \varphi) - B \sin(\omega t)) \sin(\omega t + \varphi) dt$$

$$I_2 = \omega \int_0^T (A \sin(\omega t + \varphi) - B \sin(\omega t)) \sin(\omega t + \varphi) dt$$

En posant le changement de variable  $x = \omega t$ , il est possible de réécrire les intégrales  $I_1$  et  $I_2$  comme suit :

$$I_1 = \int_0^{2\pi} |A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)| (A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)) \sin(x + \varphi) dx$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} (A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)) \sin(x + \varphi) dx$$

La détermination de  $I_2$  ne pose pas de difficultés et donne le résultat suivant :

$$I_2 = \pi [A - B \cos(\varphi)]$$

La détermination de  $I_1$  n'est pas immédiate. Il convient, dans un premier temps, de découper  $I_1$  en deux intégrales.

$$\begin{aligned} I_1 &= A \int_0^{2\pi} |A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)| \sin^2(x + \varphi) dx - B \int_0^{2\pi} |A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)| \sin(x) \sin(x + \varphi) dx \\ &= I_{11} - I_{12} \end{aligned}$$

### C.4.1 Étude du signe dans la valeur absolue

La valeur absolue ne permet pas l'intégration, il est donc nécessaire d'étudier le terme  $A \sin(x + \varphi) - B \sin(x)$ .

$$\begin{aligned} A \sin(x + \varphi) - B \sin(x) &= (A \cos(\varphi) - B) \sin(x) + A \sin(\varphi) \cos(x) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \left( \underbrace{\frac{A \cos(\varphi) - B}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)}}}_{\cos(x_1)} \sin(x) - \underbrace{\frac{A \sin(\varphi)}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)}}}_{\sin(x_1)} \cos(x) \right) \\ &= \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \sin(x - x_1) \end{aligned}$$

Avec,

$$x_1 = -\tan^{-1} \left( \frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi) - B} \right)$$

Soient  $x_2$  et  $x_3$  deux autres racines de  $\sin(x - x_1) = 0$ ,

$$x_2 = \pi - \tan^{-1} \left( \frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi) - B} \right) \quad \text{et} \quad x_3 = 2\pi - \tan^{-1} \left( \frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi) - B} \right)$$

Une étude de signe montre que :

$$\forall \{A, B, \varphi\} \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad \sin(x - x_1) = \begin{cases} +\sin(x - x_1) & x \in [x_1; x_2] \\ -\sin(x - x_1) & x \in [x_2; x_3] \end{cases}$$

### C.4.2 Calcul de $I_{11}$

Notons que  $x_3 - x_1 = 2\pi$ . Ainsi, intégrer entre 0 et  $2\pi$  équivaut à intégrer entre  $x_1$  et  $x_3$ . Il est donc possible de réécrire  $I_{11}$  comme suit :

$$I_{11} = A \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \sin(x - x_1) \sin^2(x + \varphi) dx - \int_{x_2}^{x_3} \sin(x - x_1) \sin^2(x + \varphi) dx \right]$$

En utilisant le changement de variable  $x' = x - \pi$  dans la seconde intégrale et le fait que  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ , il est possible de regrouper les deux intégrales.

$$I_{11} = 2A \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \int_{x_1}^{x_2} \sin(x - x_1) \sin^2(x + \varphi) dx$$

A présent, nous utilisons le changement de variable  $X = x - x_1$ . Ce qui permet d'écrire

$$I_{11} = 2A\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \int_0^\pi \sin(X) \sin^2(X + x_1 + \varphi) dX$$

Ce qui donne finalement,

$$I_{11} = \frac{2}{3}A\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} [3 + \cos(2x_1 + 2\varphi)]$$

### C.4.3 Calcul de $I_{12}$

De même que pour  $I_{11}$ , il est donc possible de réécrire  $I_{12}$  comme suit :

$$I_{12} = B\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \left[ \int_{x_1}^{x_2} \sin(x - x_1) \sin(x) \sin(x + \varphi) dx - \int_{x_2}^{x_3} \sin(x - x_1) \sin(x) \sin(x + \varphi) dx \right]$$

En utilisant le changement de variable  $x' = x - \pi$  dans la seconde intégrale et le fait que  $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$ , il est possible de regrouper les deux intégrales.

$$I_{12} = 2B\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \int_{x_1}^{x_2} \sin(x - x_1) \sin(x) \sin(x + \varphi) dx$$

A présent, nous utilisons le changement de variable  $X = x - x_1$ . Ce qui permet d'écrire

$$I_{12} = 2B\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} \int_0^\pi \sin(X) \sin(X + x_1) \sin(X + x_1 + \varphi) dX$$

Ce qui donne finalement,

$$I_{12} = \frac{2}{3}B\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} [3 \cos(\varphi) + \cos(2x_1 + \varphi)]$$

### C.4.4 Calcul de $I_1$

Les intégrales  $I_{11}$  et  $I_{12}$  sont définies telles que :

$$I_1 = I_{11} - I_{12}$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} [A \cos(2x_1 + 2\varphi) + 3A - B \cos(2x_1 + \varphi) - 3B \cos(\varphi)]$$

En remarquant que

$$A \cos(2x_1 + 2\varphi) - B \cos(2x_1 + \varphi) = [A - B \cos(\varphi)] \cos(2x_1 + 2\varphi) - B \sin(\varphi) \sin(2x_1 + 2\varphi)$$

Il est possible de réécrire  $I_1$  en faisant apparaître le facteur  $[A - B \cos(\varphi)]$  présent dans  $I_2$ .

$$I_1 = \frac{2}{3} \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)} [A - B \cos(\varphi)] \left( 3 + \cos(2x_1 + 2\varphi) - \frac{B \sin(\varphi)}{A - B \cos(\varphi)} \sin(2x_1 + 2\varphi) \right)$$

### C.4.5 Reformulation du problème

L'objectif de cette démonstration est de prouver que :

$$B_{33}^{add} = \frac{4}{3\pi} \rho S C_d \omega |Ae^{i\varphi} - B|$$

Cela revient à démontrer que :

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{8}{3\pi} |Ae^{i\varphi} - B|$$

Sachant que :

$$|Ae^{i\varphi} - B| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB \cos(\varphi)}$$

Le problème se réduit à démontrer que

$$3 + \cos(2x_1 + 2\varphi) - \frac{B \sin(\varphi)}{A - B \cos(\varphi)} \sin(2x_1 + 2\varphi) = 4$$

C'est-à-dire

$$[A - B \cos(\varphi)] \cos(2x_1 + 2\varphi) - B \sin(\varphi) \sin(2x_1 + 2\varphi) = A - B \cos(\varphi)$$

### C.4.6 Résolution du problème

Nous cherchons donc à démontrer l'équation suivante

$$[A - B \cos(\varphi)] \cos(2x_1 + 2\varphi) - B \sin(\varphi) \sin(2x_1 + 2\varphi) = A - B \cos(\varphi) \quad \forall \{A, B, \varphi\} \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

Il est possible de réécrire cette équation comme suit :

$$\cos(2x_1 + 2\varphi + \theta) = \cos(\theta)$$

Avec,

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{B \sin(\varphi)}{A - B \cos(\varphi)} \right)$$

Il faut donc prouver que

$$2x_1 + 2\varphi + \theta = \pm\theta + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Donc,

$$x_1 + \varphi = 0 + k\pi \quad \text{ou} \quad x_1 + \varphi + \theta = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Il s'avère que la première option ne mène nulle part. Il faut donc démontrer que :

$$\forall \{A, B, \varphi\} \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad x_1 + \varphi + \theta = 0 + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Ce revient à démontrer que :

$$\forall \{A, B, \varphi\} \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad \tan(x_1 + \varphi + \theta) = 0$$

Or,

$$\tan(x_1 + \varphi + \theta) = \frac{\tan(x_1) + \tan(\varphi) + \tan(\theta) - \tan(x_1)\tan(\varphi)\tan(\theta)}{1 - \tan(x_1) + \tan(\varphi) - \tan(\varphi) + \tan(\theta) - \tan(\theta)\tan(x_1)} = \frac{f(x_1, \varphi, \theta)}{g(x_1, \varphi, \theta)}$$

Avec,

$$f(x_1, \varphi, \theta) = -\frac{A \sin(\varphi)}{A \cos(\varphi) - B} + \tan(\varphi) + \frac{B \sin(\varphi)}{A - B \cos(\varphi)} + \frac{AB \sin^2(\varphi) \tan(\varphi)}{(A \cos(\varphi) - B)(A - B \cos(\varphi))}$$

En mettant tous les termes de  $f$  au même dénominateur, et en développant, l'équation se simplifie et il ne reste que les termes suivants :

$$\begin{aligned} f(x_1, \varphi, \theta) &= \frac{-AB \tan(\varphi) + AB \cos(\varphi) \sin(\varphi) + AB \sin^2(\varphi) \tan(\varphi)}{(A \cos(\varphi) - B)(A - B \cos(\varphi))} \\ &= \frac{AB \tan(\varphi) [-1 + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)]}{(A \cos(\varphi) - B)(A - B \cos(\varphi))} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement que :

$$B_{33}^{add} = \frac{4}{3\pi} \rho S C_d \omega |Ae^{i\varphi} - B|$$



# ANNEXE DU CHAPITRE 5

## D.1 Vérification du respect des contraintes

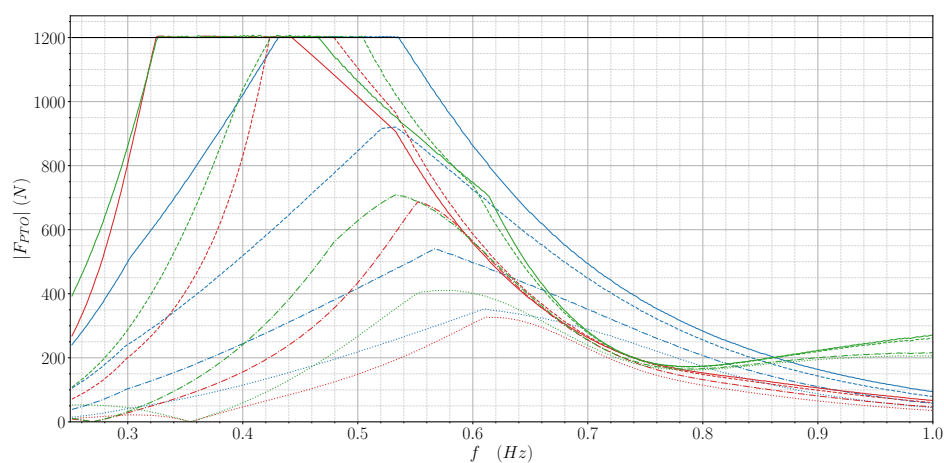


FIGURE D.1 – Amplitudes d’efforts maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

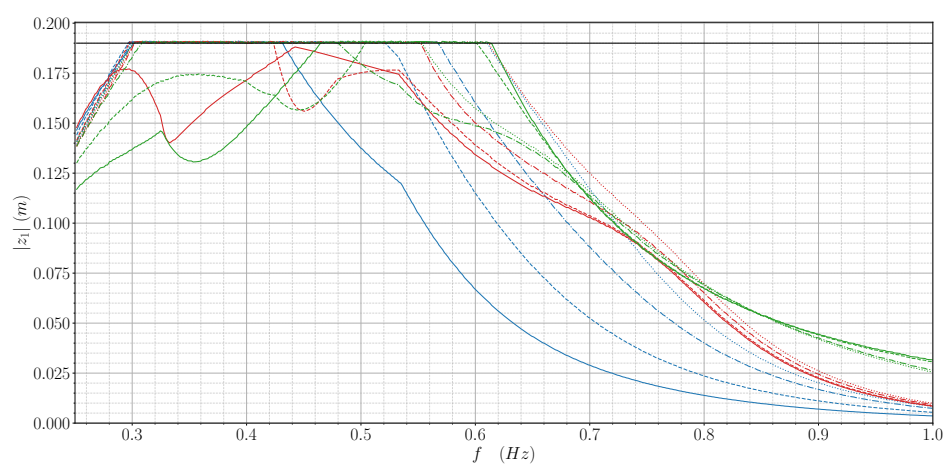


FIGURE D.2 – Amplitudes de pignonement maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

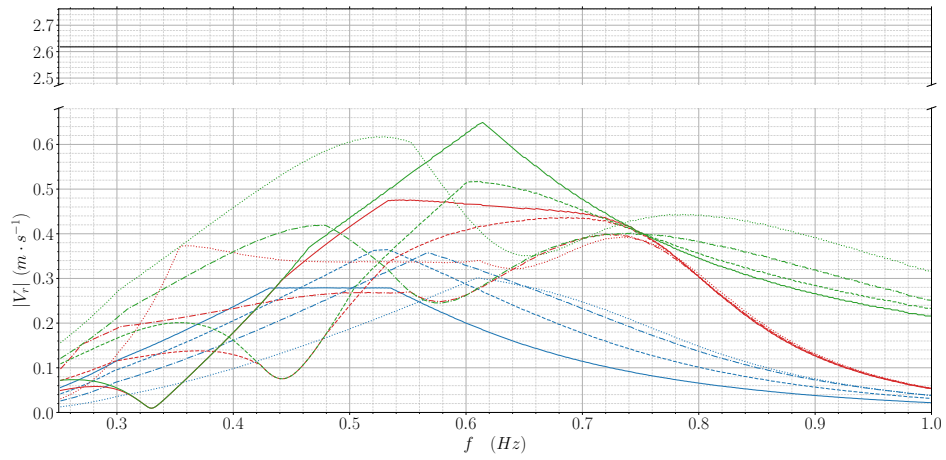


FIGURE D.3 – Amplitudes de vitesse relative maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

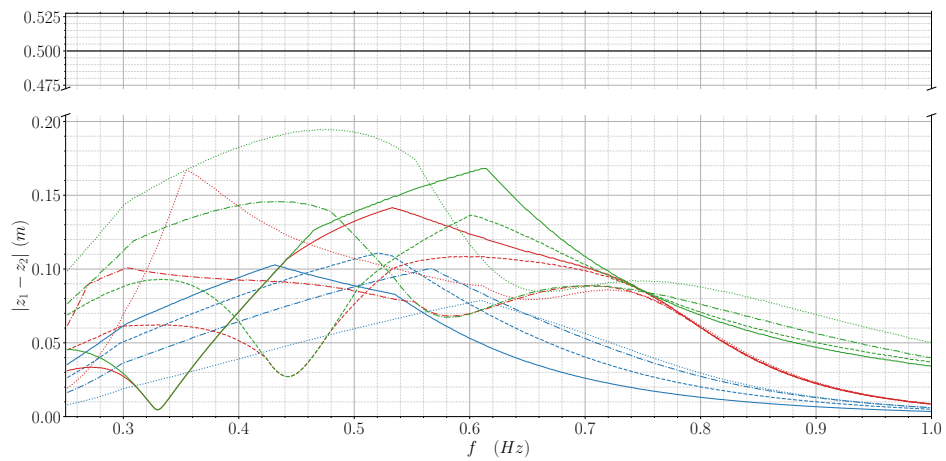


FIGURE D.4 – Amplitudes de course maximales pour les 4 plaques et les 3 stratégies de contrôle

## D.2 Caractéristiques de la machine électrique

### AC BRUSHLESS SERVOMOTORS

ADM142



**ADM142** - Brushless Servomotors are AC PM Synchronous servomotors. They have been designed using the latest generation of magnets and construction techniques to provide very high performance, low cogging and torque ripple. They can be supplied with resolver or Incremental / absolute encoder.

**Their main characteristics are :**

- Frame size 142mm
- Rare earth magnets for high performance
- 8 pole construction for high torque density
- Low cogging and torque ripple
- Sinusoidal back EMF
- Integrated PTC thermal protection
- Rotatable connectors
- Compact design
- High IP rating
- Smooth finish

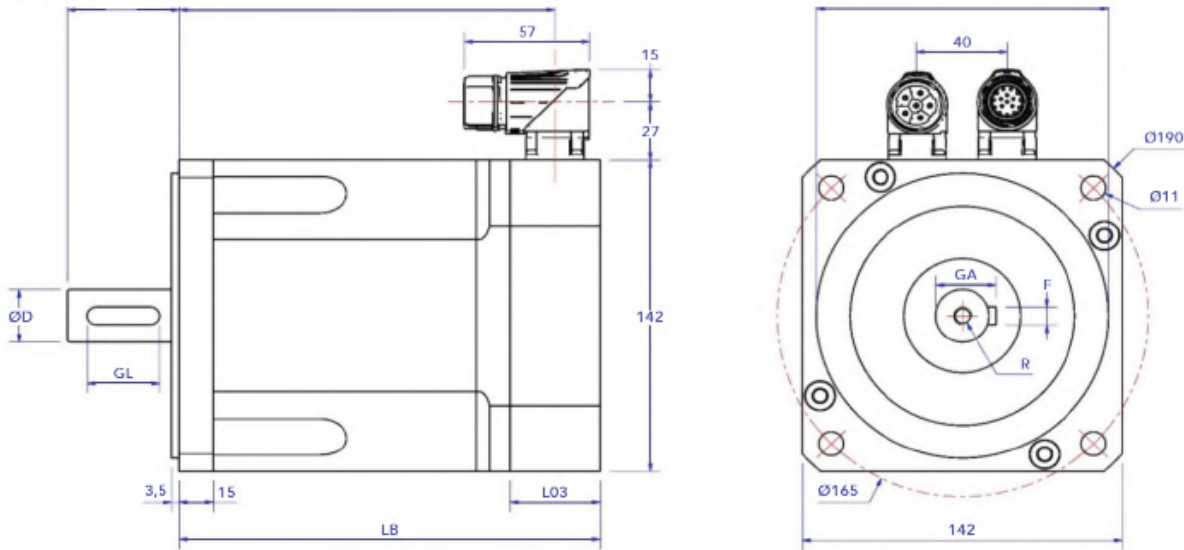
### Technical Data

Description	Symbol	Units	ADM							
			142A8-885	142A8-132S	142E8-102S	142E8-132S	142J8-110S	142J8-150S	142L8-120S	142L8-150S
Standstill Torque	$M_0$	Nm	10		19		27		35	
Maximum Torque	$M_{pk}$	Nm	36	34	65	66	93	93	119	118
Standstill Current	$I_0$	A	10,5	6,5	16	12,3	21	15,4	25	20
Peak current	$I_{pk}$	A	42	26	64	49	84	62	100	80
Maximum mechanical revs	$N_{mes}$	min <sup>-1</sup>	6500		6500		5500		5500	
Maximum revs @ 230Vac	$N_{max}$	min <sup>-1</sup>	3000	1900	2600	2000	2400	1700	2200	1800
Maximum revs @ 400Vac	$N_{max}$	min <sup>-1</sup>	5000	3000	4500	3000	4500	3000	4000	3000
Voltage constant	$K_E$	V/krpm	62	93	72	93	78	106	85	106
Torque constant	$K_T$	Nm/A	1,02	1,54	1,2	1,54	1,3	1,74	1,4	1,74
Rotor Inertia	$J_R$	kg cm <sup>2</sup>	22		43		65		87	
Resistance @ 20°C	$R_{UV}$	Ohm	0,65	1,61	0,34	0,61	0,25	0,46	0,18	0,32
Inductance @ 1 kHz	$L_{UV}$	mH	2,6	7	1,9	3,3	1,7	2,7	1,7	1,9
Mass	m	kg	11		16		21		26	

**Values in this catalogue are true for the following conditions :**

- Ambient temperature range 0-40°C
- Max Altitude 1000 m (above sea level)
- Insulation class F (materials F & H)
- RMS values
- Insulation system conforms to UL
- IP65 enclosure protection with shaft seal
- Motor Installation B5 – V5
- Cooling IC0041
- Typical tolerance value ±10%
- Continuous ratings apply with a rise of  $\Delta T=100K$  on the windings when fitted on an aluminium plate with dimensions 457 x 457 x 15mm

# DRAWING



Dimensions in mm

Feedback device	EQ11130, TTL 2048ppr, Resolver		
Dimensions	LB	L01	L03
ADM142A8	174	154	27
ADM142E8	224	204	
ADM142J8	274	254	
ADM142L8	324	304	
ADM142A8 Brake	227,5	207,5	
ADM142E8 Brake	277,5	257,5	
ADM142J8 Brake	327,5	307,5	
ADM142L8 Brake	377,5	357,5	

Shaft	D	E	GL	GA	F	R
Dimensions	24j6	50	32	27	8	M8 x 15
	32k6	58	45	35	10	M12 x 22

## PART NUMBER COMPOSITION

- ① Square flange (mm)
- ② Motor length with C as the shortest
- ③ Number of poles
- ④ Voltage/ krpm pk
- ⑤ S=Standard  
C = Compact
- ⑥ Holding brake  
0 = Without  
1 = With
- ⑦ Feedback  
0 = Sensor-less  
1 = Encoder EQ11130 Endat Multi Turn  
4 = Incremental Encoder 2048 PPR + hall  
6 = Incremental Encoder 4096 PPR + hall  
7 = Encoder 1Vpp + position sin-cos  
9 = Resolver size 15 2p 7V 10KHz  
W = Sick encoder EKS36 Hiperface DSL Single-turn no SIL 17bit  
Y = Sick encoder EKS36 Hiperface DSL single-turn no SIL 17bit  
Z = Sick encoder SKM36 Hiperface 128ppr multi-turn
- ⑧ Connectors  
7 = M23 connectors 90° rotatable  
9 = M40 connectors 90° rotatable  
I >20A, feedback M23
- ⑨ Special version  
26 = Smooth Shaft  
32 = Shaft 32 x 58  
66 = IP65 Shaft Protection  
90 = Thermal Protection PT1000  
xx = Special Shaft and Flanges (on request)

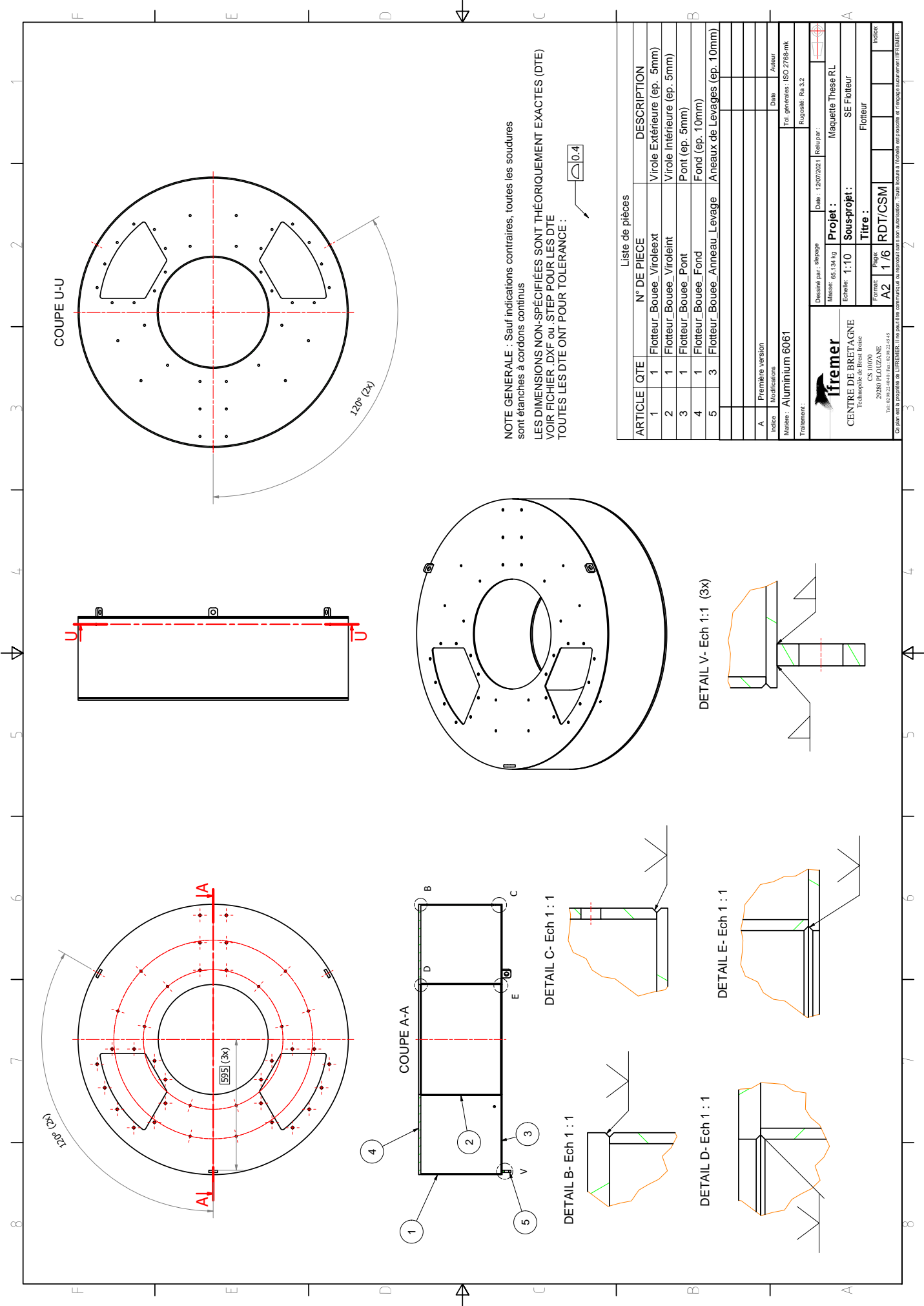


### D.3 Nomenclature et plans de la maquette

Liste de pièces		
ARTICLE	QTE	N° DE PIECE
1	1	Flotteur_Bouee
2	2	Flotteur_Bouee_Trappe
3	1	Colonne
4	1	Colonne_Fond
5	3	Guidage_Support
6	6	Guidage_Lien
7	1	Flotteur_BlocMoteur_Support
8	1	Flotteur_BlocMoteur_M6_Epaulement
9	1	Flotteur_BlocMoteur_Entretoise
10	1	Colonne_Plaque_1
11	1	Colonne_Plaque_2
12	1	Colonne_Plaque_3
13	1	Colonne_Plaque_4

A		Première version		Date	Auteur
Indice		Modifications			
Matière :			Trat. générates :		
Matière :			Régulateur :		
Dessiné par : SJP/age		Date : 26/07/2021		Reçu par :	
Masse: N/A		Projet : Maquette Thèse RL			
Echelle: 1:8		Sous-projet :			
		Titre : NOMENCLATURE			
Format: A2	Page: 1/1	RDT/CSM			Indice

Ce plan est la propriété de IFREMER. Il ne peut être communiqué ni reproduit sans son autorisation. Toute infraction sera poursuivie et sanctionnée conformément à l'article 171 du Code de Commerce.



NOTE GENERALE : Sauf indications contraires, toutes les soudures sont étanches à cordons continus

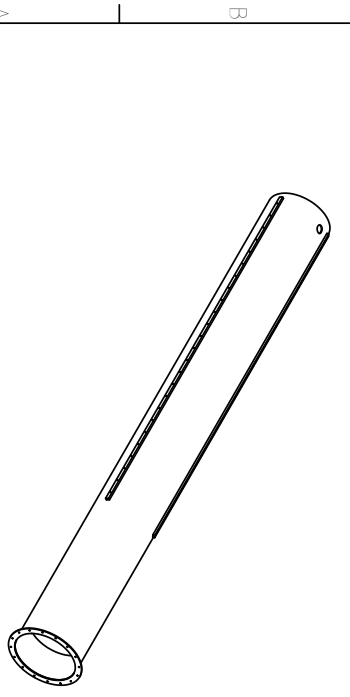
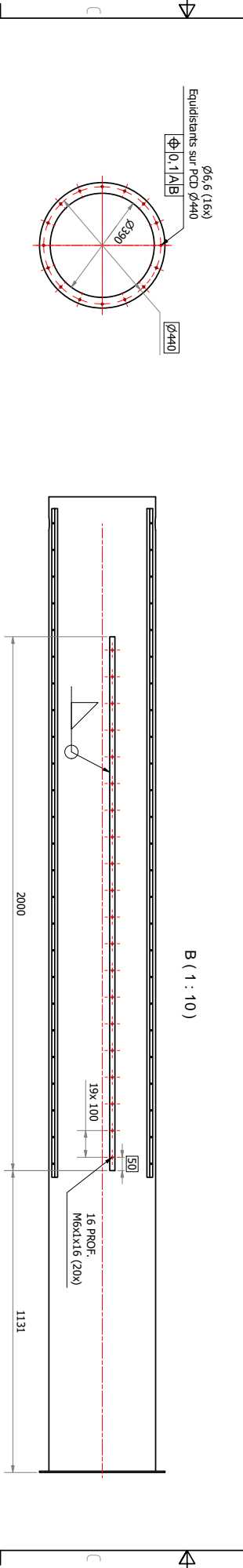
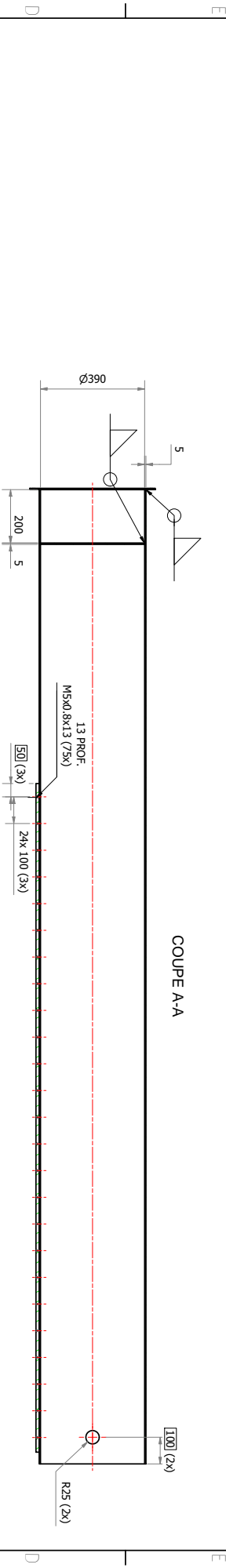
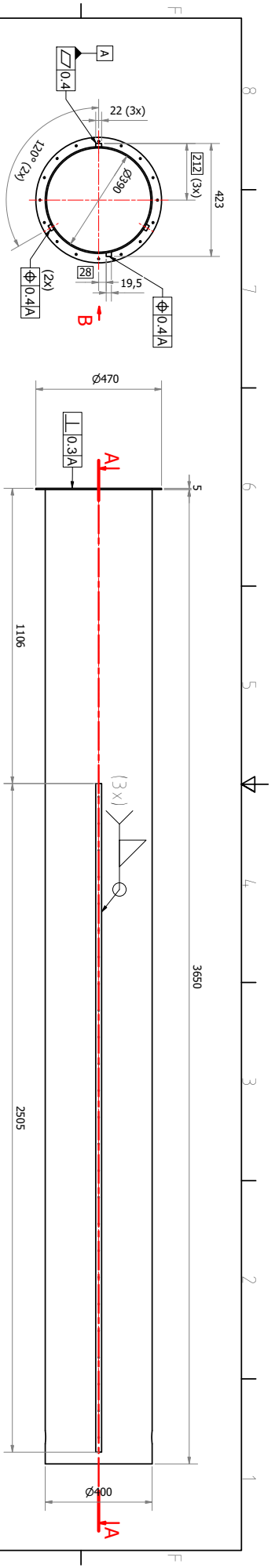
LES DIMENSIONS NON-SPECIFIÉES SONT THÉORIQUEMENT EXACTES (DTE) VOIR FICHER .DXF ou .STEP POUR LES DTE

TOUTES LES DTE ONT POUR TOLERANCE :



ARTICLE		QTE		N° DE PIECE		DESCRIPTION																									
1	1	Flotteur_Bouee_Virolext		Virole Extérieure (ep. 5mm)																											
2	1	Flotteur_Bouee_Viroleint		Virole Intérieure (ep. 5mm)																											
3	1	Flotteur_Bouee_Pont		Pont (ep. 5mm)																											
4	1	Flotteur_Bouee_Fond		Fond (ep. 10mm)																											
5	3	Flotteur_Bouee_Anneau_Levage		Anneaux de Levages (ep. 10mm)																											
<table border="1"> <tr> <td>Indice</td> <td colspan="2">A</td> <td>Première version</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Matériau</td> <td colspan="2">Aluminium 6061</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>Traitement</td> <td colspan="2"></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>								Indice	A		Première version					Matériau	Aluminium 6061							Traitement							
Indice	A		Première version																												
Matériau	Aluminium 6061																														
Traitement																															
Destiné par : stepage		Date : 12/07/2021		Relié par :		Maquette Thèse RL																									
Masse : 65,134 kg		Projet :		Sous-projet :		SE Flotteur																									
Echelle : 1:10		Page :		Titre :		Flotteur																									
Format : A2		1 / 6		RDT/CSM		Indice :																									
ifremer		Centre de Bretagne		Technique de Brest Insee		CS 10070																									
29200 PLOUZANE		Tél : 02 98 22 40 00 Fax : 02 98 22 41 41																													

On peut voir la propriété de L'IFREMER et le pour être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute copie et l'écrit est formellement INTERDIT.



NOTE GENERALE : Sauf indications contraires, toutes les soudures sont étanchées à cordons continus

Indice	A	Première version	Date	Auteur
Modifications				
Matériau	Aluminium 6061		Tol. géométriques	ISO 2768-mK
Traitement			Reposée	pas à z

 <b>Centre de Bretagne</b> Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29200 PLOUZANE Tél. (02) 98 23 44 00 Fax. (02) 98 23 44 44		Destiné part : stepage Matière : N/A Echelle : 1:10 Sous-projet : SE Colonne Titre : Colonne Forme : A2 Page : 1/1 RDT/CSM	Date : 15/07/2021 Rédacteur : Maquette Thèse RL SE Colonne Colonne Indice
--	--	---	---

Où les A et B sont propriétés de l'Ifremer et ne peuvent être commercialisés ou reproduits sans son autorisation. Toute réimpression ou traduction est formellement interdite sans l'autorisation de l'Ifremer.

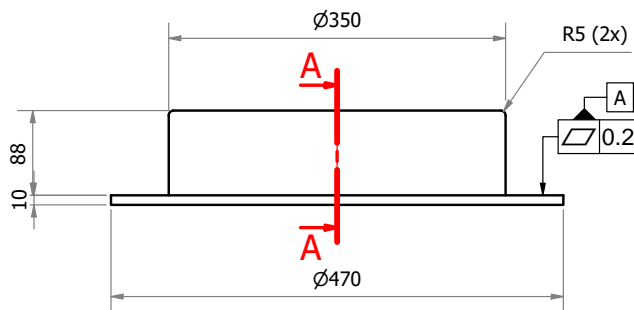
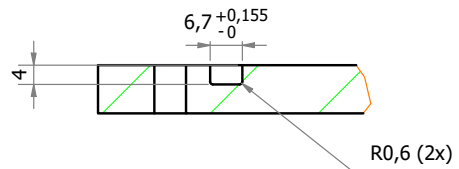
8x Ø6,6  
EQUIDIST. sur PCD Ø440

⊕0,1A

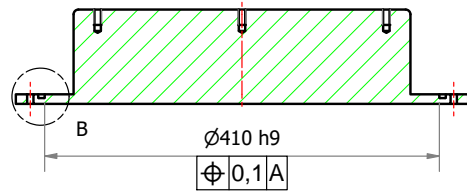
8x Ø6,6  
∠ Ø12,6 X 90°  
EQUIDIST. sur PCD Ø440

⊕0,1A

DETAIL B- Ech 1 : 1



COUPE A-A



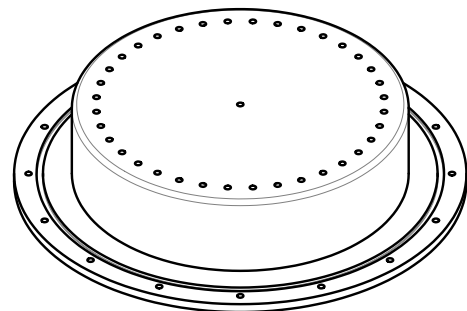
∇22,2  
M8x1.25x16 (x36)  
EQUIS. SUR PCD Ø300

⊕0,1A

∇22,2  
M8x1.25x16

⊕0,1A

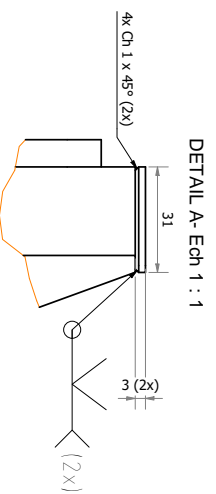
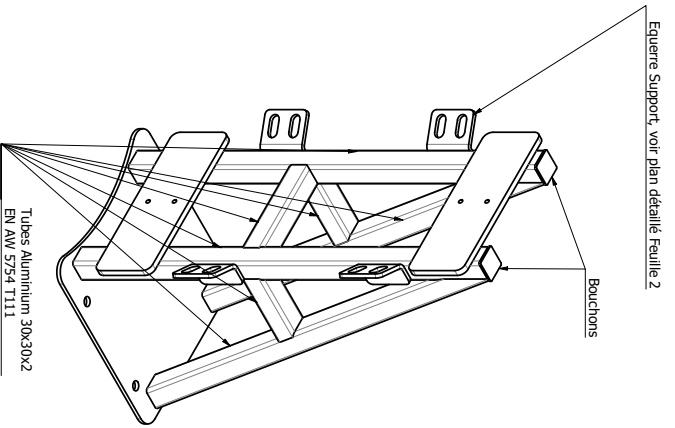
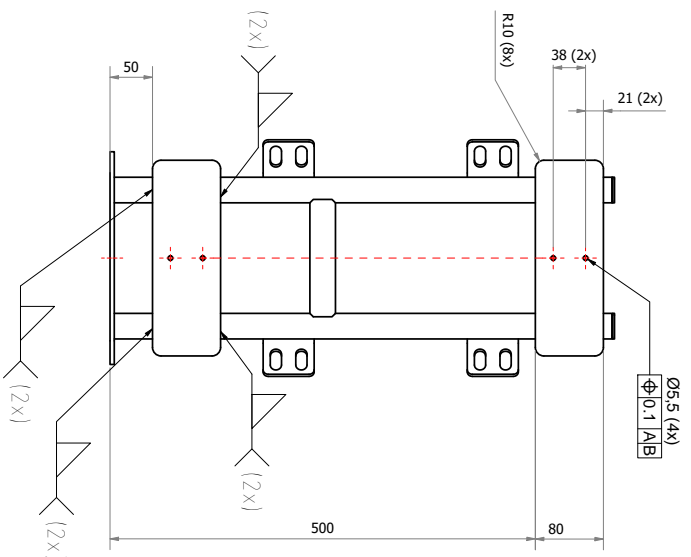
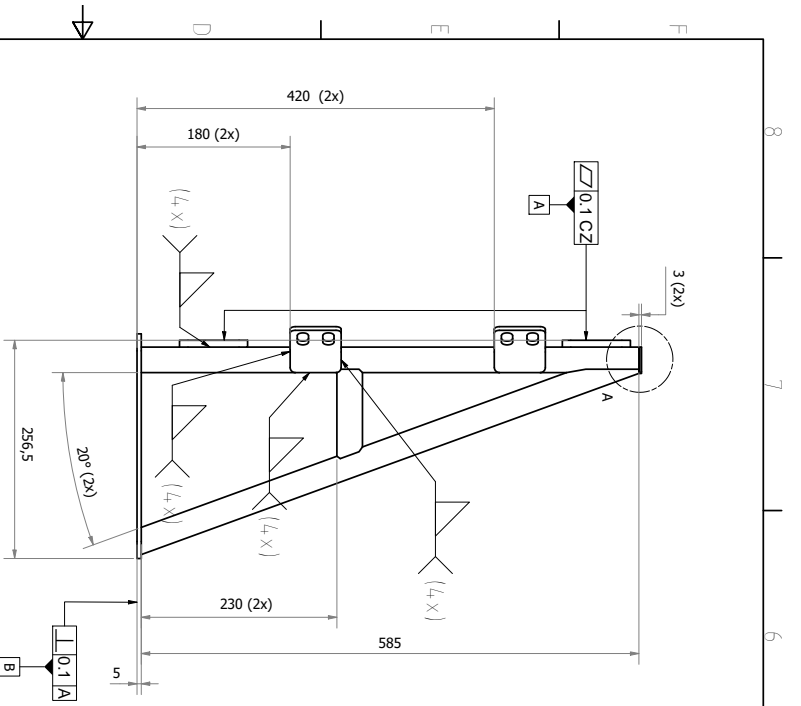
Ø300



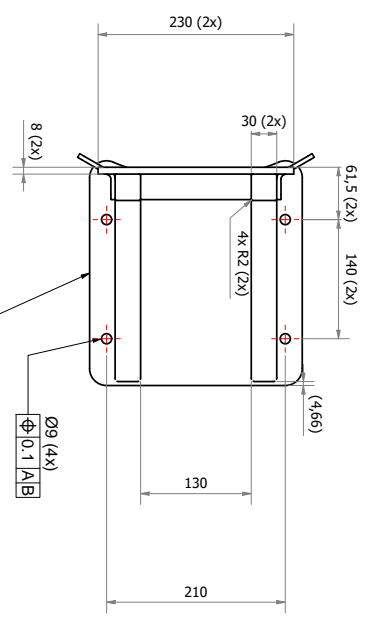
A		Première version		Date	Auteur	
Indice	Modifications			Date	Auteur	
Matière : Acier inoxydable				Tol. générales : ISO 2768-mk		
Traitement :				Rugosité : Ra 3.2		
<p><b>Ifremer</b> CENTRE DE BRETAGNE Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29280 PLOUZANE Tel : 02 98 22 40 40 / Fax : 02 98 22 45 45</p>		Dessiné par : slepage	Date : 16/07/2021	Relu par :		
		Masse: 81,000 kg	<b>Projet :</b> Maquette Thèse RL			
		Echelle:	<b>Sous-projet :</b> SE Colonne			
		<b>Titre :</b> Fond Colonne				
Format: A3	Page: 1 / 1	RDT/CSM			Indice:	

Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est proscrite et n'engage aucunement l'IFREMER.

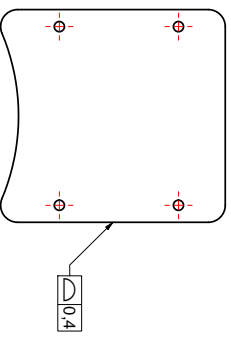




DETAIL A- Ech 1 : 1



Voir vue PIED SUPPORT



VUE PIED SUPPORT

NOTE VUE PIED SUPPORT:  
LES DIMENSIONS NON SPECIFIEES SONT THEORIQUEMENT EXACTES (OTE)  
VOIR FICHER : DXF POUR LES DTE

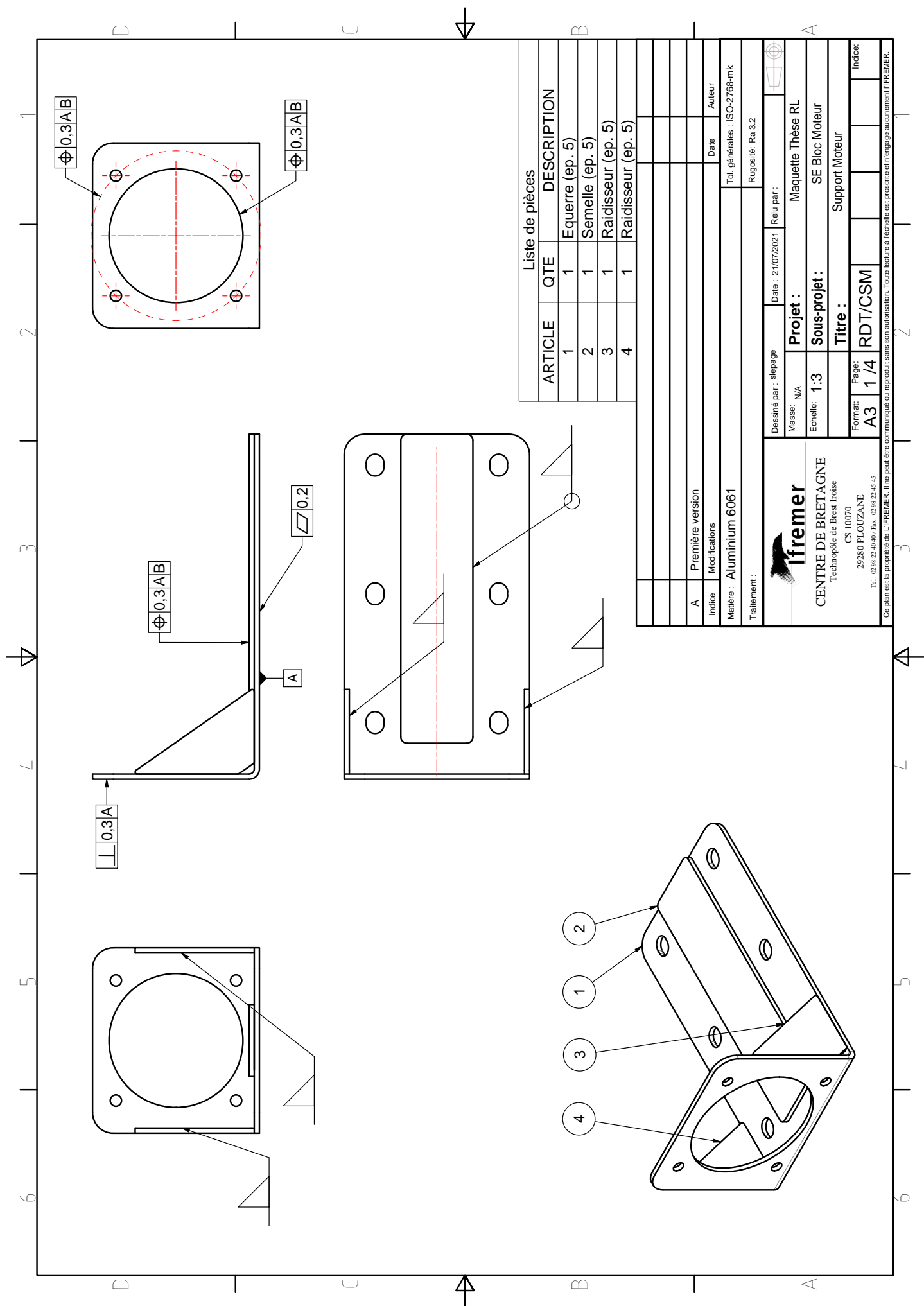
NOTE GÉNÉRALE : Sauf indications contraires, toutes les soudures sont des soudures d'angles à cordon continu

Indice	Première version	Date	Auteur
Modifications			
Matériau	EN AW 5754 T111	Tol. géométriques	ISO 2768-mK
Traitement		Reposée	pas à z

Designé part :	stepage	Date :	13/07/2021	Revisé :	
Masse :	3,879 kg	Projet :	Maquette Thèse RL		
Echelle :	1:4	Sous-projet :	Guidage Colonne		
Forme :	A2	Page :	1/2	Titre :	Support Guide
Forme :	A2	Page :	RDT/CSM		

**Ifremer**  
CENTRE DE BRETAGNE  
Technopôle de Brest France  
CS 10070  
29200 PLOUZANNE  
Tél. 02 98 23 44 00 Fax. 02 98 23 44 43

Order and 3D properties of ISTERRE II in pdf files commencent au chapitre 1 dans son autorisation. Tous droits réservés et réservés en France ISTERRE II



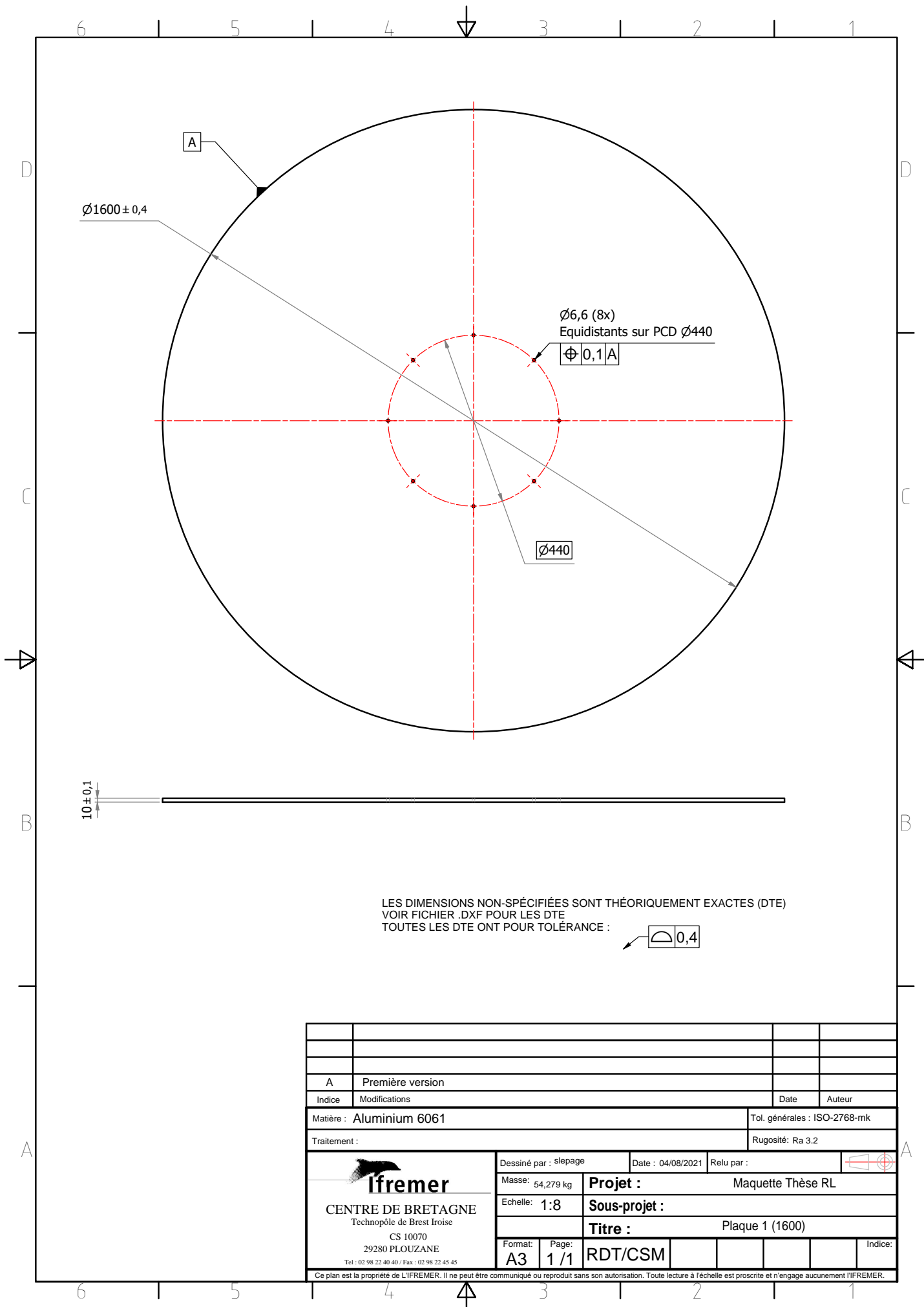
Liste de pièces

ARTICLE	QTE	DESCRIPTION
1	1	Equerre (ep. 5)
2	1	Semelle (ep. 5)
3	1	Raidisseur (ep. 5)
4	1	Raidisseur (ep. 5)

Indice	Première version	Date	Auteur
Matière : Aluminium 6061			
Traitement :			
Dessiné par : slépage		Date : 21/07/2021	Relu par :
Masse: N/A		Projet : Maquette Thèse RL	
Echelle: 1:3		Sous-projet: SE Bloc Moteur	
Forma: A3		Titre : Support Moteur	
Page: 1/4		RDT/CSM	
Indice:			

**Ifremer**  
**CENTRE DE BRETAGNE**  
 Technopôle de Brest Iroise  
 CS 10070  
 29280 PLOUZANE  
 Tel: 02 98 22 4646 / Fax: 02 98 22 45 45

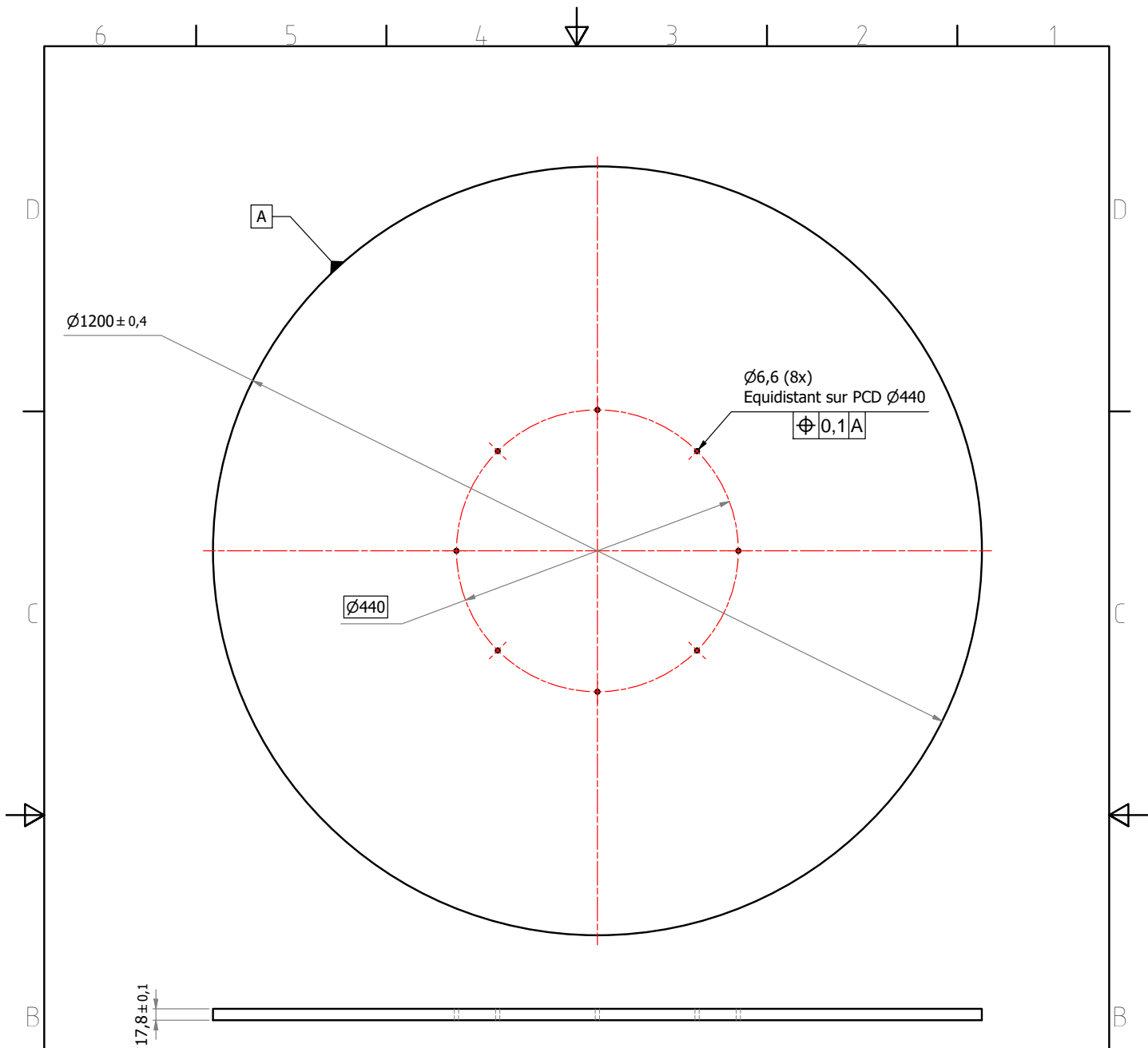
Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est prescrite et n'engage aucunement L'IFREMER.



LES DIMENSIONS NON-SPECIFIÉES SONT THÉORIQUEMENT EXACTES (DTE)  
 VOIR FICHER .DXF POUR LES DTE  
 TOUTES LES DTE ONT POUR TOLÉRANCE :

$\frac{\text{DTE}}{0,4}$

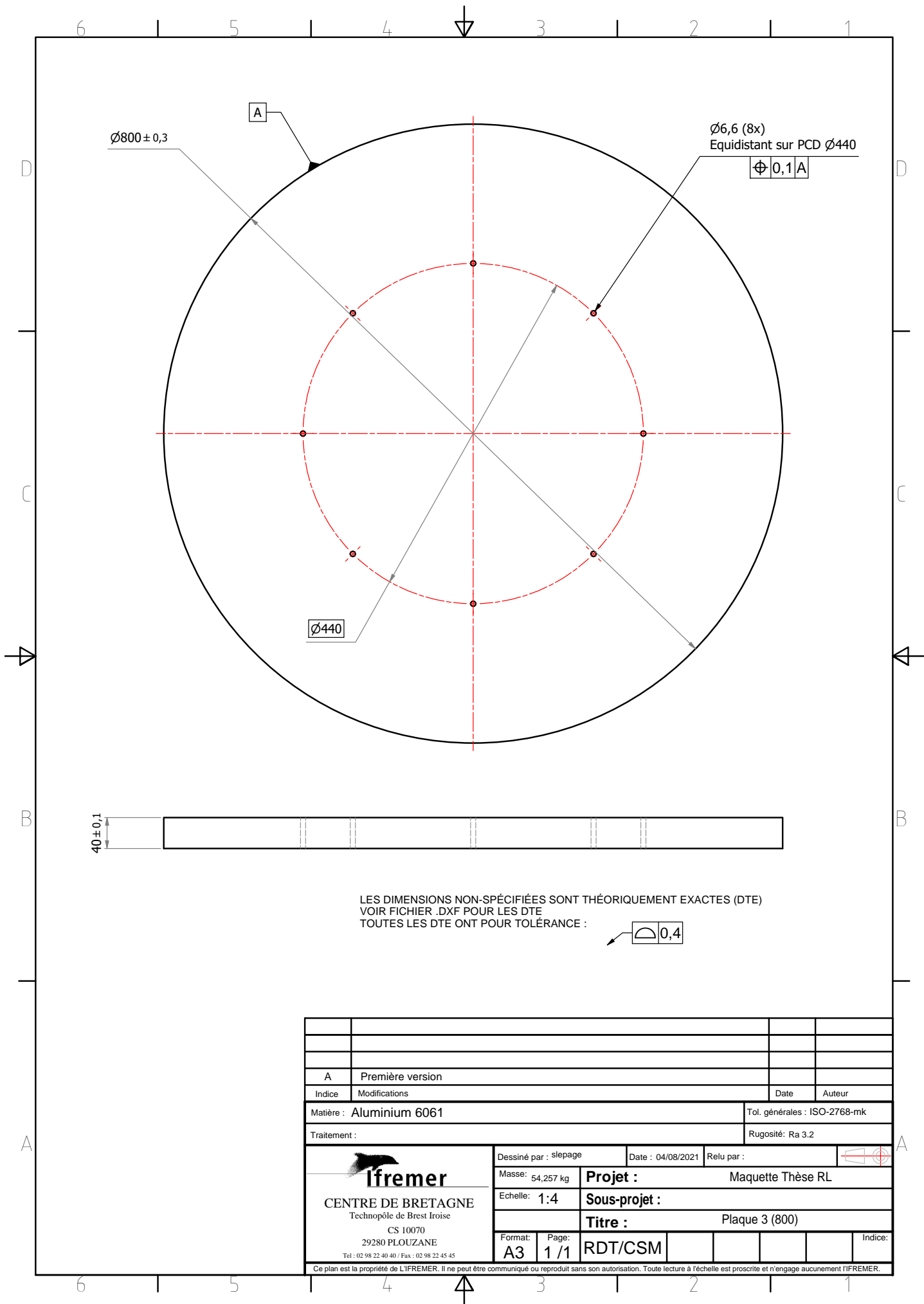
A		Première version					
Indice	Modifications			Date	Auteur		
Matière : Aluminium 6061				Tol. générales : ISO-2768-mk			
Traitement :				Rugosité : Ra 3.2			
 <b>Ifremer</b> CENTRE DE BRETAGNE Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29280 PLOUZANE Tel : 02 98 22 40 40 / Fax : 02 98 22 45 45		Dessiné par : slepage		Date : 04/08/2021	Relu par :		
		Masse: 54,279 kg		<b>Projet :</b> Maquette Thèse RL			
		Echelle: 1:8		<b>Sous-projet :</b>			
				<b>Titre :</b> Plaque 1 (1600)			
Format: A3	Page: 1 / 1	RDT/CSM					Indice:
Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est proscrite et n'engage aucunement l'IFREMER.							



LES DIMENSIONS NON-SPECIFIÉES SONT THÉORIQUÉMENT EXACTES (DTE)  
 VOIR FICHER .DXF POUR LES DTE  
 TOUTES LES DTE ONT POUR TOLÉRANCE :

$\sqrt{0,4}$

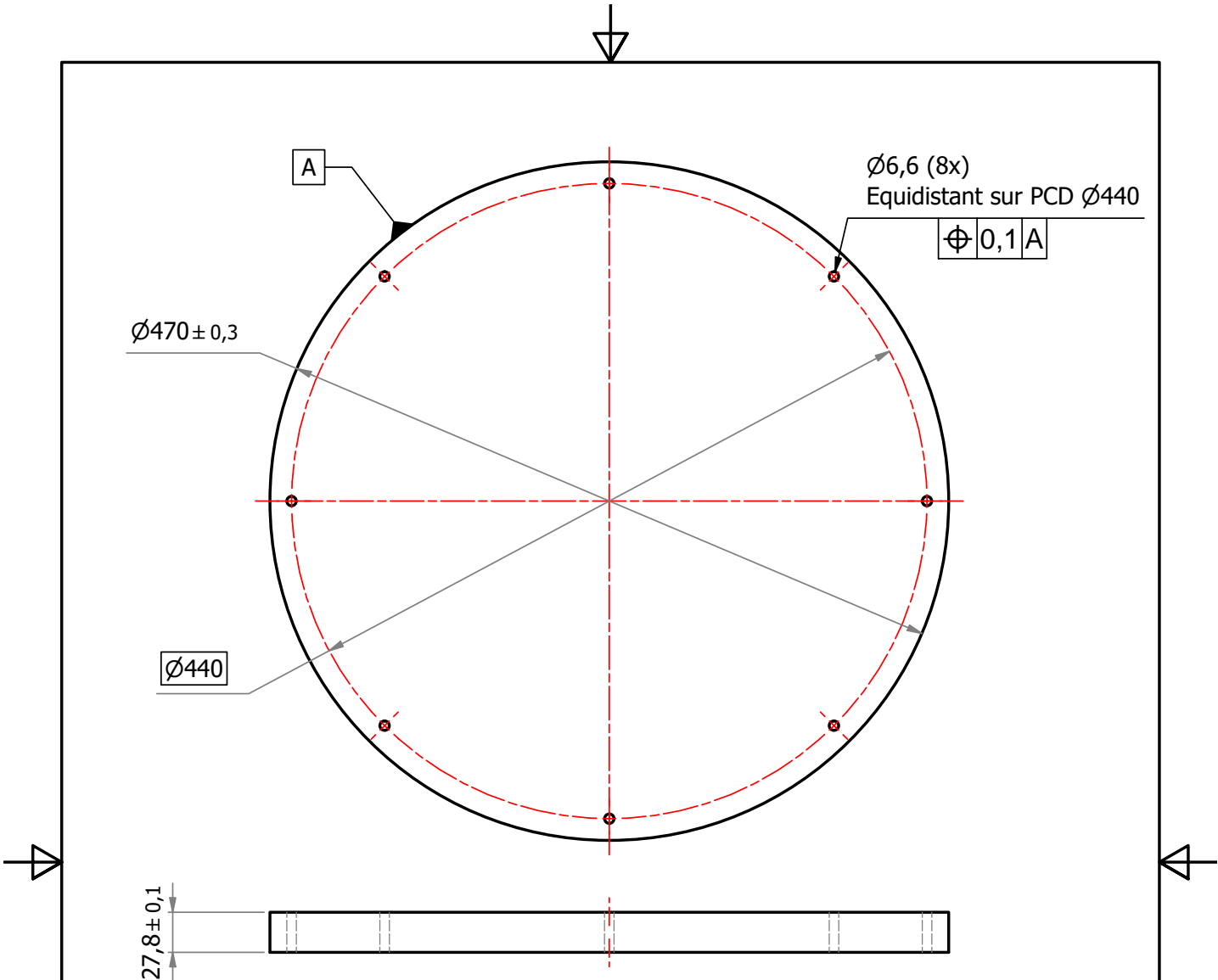
A		Première version		Date	Auteur	
Indice	Modifications			Date	Auteur	
Matière : Aluminium 6061				Tol. générales : ISO-2768-mk		
Traitement :				Rugosité : Ra 3.2		
 <b>Ifremer</b> CENTRE DE BRETAGNE Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29280 PLOUZANE Tel : 02 98 22 40 40 / Fax : 02 98 22 45 45		Dessiné par : slepage		Date : 04/08/2021	Relu par :	
		Masse : 54,280 kg		<b>Projet :</b> Maquette Thèse RL		
		Echelle : 1:6		<b>Sous-projet :</b>		
				<b>Titre :</b> Plaque 2 (1200)		
Format : A3	Page : 1 / 1	RDT/CSM			Indice :	
Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est proscrite et n'engage aucunement l'IFREMER.						



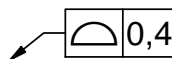
LES DIMENSIONS NON-SPECIFIÉES SONT THÉORIQUÉMENT EXACTES (DTE)  
 VOIR FICHER .DXF POUR LES DTE  
 TOUTES LES DTE ONT POUR TOLÉRANCE :

$\sqrt{0,4}$

A		Première version		Date	Auteur	
Indice	Modifications			Date	Auteur	
Matière : Aluminium 6061				Tol. générales : ISO-2768-mk		
Traitement :				Rugosité : Ra 3.2		
 <b>Ifremer</b> CENTRE DE BRETAGNE Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29280 PLOUZANE Tel : 02 98 22 40 40 / Fax : 02 98 22 45 45		Dessiné par : slepage	Date : 04/08/2021	Relu par :		
		Masse: 54,257 kg	<b>Projet :</b> Maquette Thèse RL			
		Echelle: 1:4	<b>Sous-projet :</b>			
		<b>Titre :</b> Plaque 3 (800)				
Format: A3	Page: 1 / 1	RDT/CSM			Indice:	
Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est proscrite et n'engage aucunement l'IFREMER.						



LES DIMENSIONS NON-SPÉCIFIÉES SONT THÉORIQUÉMENT EXACTES (DTE)  
 VOIR FICHER .DXF POUR LES DTE  
 TOUTES LES DTE ONT POUR TOLÉRANCE :



A		Première version		Date	Auteur
Indice	Modifications			Date	Auteur
Matière : Acier inoxydable				Tol. générales : ISO-2768-mk	
Traitement :				Rugosité : Ra 3.2	
 <b>Ifremer</b> CENTRE DE BRETAGNE Technopôle de Brest Iroise CS 10070 29280 PLOUZANE Tel : 02 98 22 40 40 / Fax : 02 98 22 45 45		Dessiné par : slepage		Date : 04/08/2021	
		Masse: 38.566 kg		Projet : Maquette Thèse RL	
		Echelle: 1:4		Sous-projet :	
				Titre : Plaque 4 (470)	
Format:	Page:	RDT/CSM			Indice:
A4	1 / 1				

Ce plan est la propriété de L'IFREMER. Il ne peut être communiqué ou reproduit sans son autorisation. Toute lecture à l'échelle est proscrite et n'engage aucunement l'IFREMER.



# BIBLIOGRAPHIE

---

- [1] W. J. PIERSON et L. MOSKOWITZ, « A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii », en, *Journal of Geophysical Research*, **69**, 24, page(s): 5181-5190, déc. 1964, ISSN : 01480227. DOI : [10.1029/JZ069i024p05181](https://doi.wiley.com/10.1029/JZ069i024p05181). adresse : <http://doi.wiley.com/10.1029/JZ069i024p05181> (visité le 01/09/2021).
- [2] K. HASSELMANN et al., « Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP) », *Deut. Hydrogr. Z.*, **8**, page(s): 1-95, jan. 1973.
- [3] M. M. de las HERAS, G. BURGERS et P. A. E. M. JANSSEN, « Wave data assimilation in the WAM wave model », en, *Journal of Marine Systems, Data Assimilation in Marine Science*, **6**, 1, page(s): 77-85, jan. 1995, ISSN : 0924-7963. DOI : [10.1016/0924-7963\(94\)00019-8](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924796394000198). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924796394000198> (visité le 01/09/2021).
- [4] B. MULTON, A. H. CLÉMENT, M. RUELLAN, J. SEIGNEURBIEUX et H. BEN AHMED, « Systèmes de conversion des ressources énergétiques marines », in *Les Nouvelles Technologies de l'Energie*, Hermès Publishing, 2006, page(s): pp.221-266. adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00676240>.
- [5] S. AHN, K. A. HAAS et V. S. NEARY, « Wave energy resource classification system for US coastal waters », en, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **104**, page(s): 54-68, avr. 2019, ISSN : 1364-0321. DOI : [10.1016/j.rser.2019.01.017](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032119300279). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032119300279> (visité le 20/09/2021).
- [6] S. JIN et D. GREAVES, « Wave energy in the UK : Status review and future perspectives », en, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, **143**, page(s): 110932, juin 2021, ISSN : 1364-0321. DOI : [10.1016/j.rser.2021.110932](https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032121002240). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1364032121002240> (visité le 20/09/2021).
- [7] J. FALNES, « OCEAN-WAVE ENERGY RESEARCH IN NORWAY », en, in *Renewable Energy, Technology and the Environment (Third Edition)*, A. A. M. SAYIGH, éd., Pergamon, jan. 1992, page(s): 2451-2460, ISBN : 978-0-08-041268-9. DOI : [10.1016/B978-0-08-](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-041268-9)



- 
- 041268-9.50017-1. adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080412689500171> (visité le 20/09/2021).
- [8] D. DIESEL, G. BRYANS, L. VERDEGEM et H. MURRENHOF, « Wavepod a transmission for wave energy converters – set-up and testing », en, *International Journal of Fluid Power*, **16**, 2, page(s): 75-82, mai 2015, ISSN : 1439-9776, 2332-1180. DOI : [10.1080/14399776.2015.1055990](https://doi.org/10.1080/14399776.2015.1055990). adresse : <http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/14399776.2015.1055990> (visité le 20/09/2021).
- [9] B. REGUERO, I. LOSADA et F. MÉNDEZ, « A global wave power resource and its seasonal, interannual and long-term variability », en, *Applied Energy*, **148**, page(s): 366-380, juin 2015, ISSN : 03062619. DOI : [10.1016/j.apenergy.2015.03.114](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2015.03.114). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S030626191500416X> (visité le 01/09/2021).
- [10] S. H. SALTER, « Wave power », en, *Nature*, **249**, 5459, page(s): 720-724, juin 1974, ISSN : 0028-0836, 1476-4687. DOI : [10.1038/249720a0](https://doi.org/10.1038/249720a0). adresse : <http://www.nature.com/articles/249720a0> (visité le 01/09/2021).
- [11] K. KOCA et al., « Recent Advances in the Development of Wave Energy Converters », in *The 10th European Wave and Tidal Energy Conference (EWTEC)*, Aalborg, Denmark, sept. 2013.
- [12] R. HENDERSON, « Design, simulation, and testing of a novel hydraulic power take-off system for the Pelamis wave energy converter », en, *Renewable Energy, Marine Energy*, **31**, 2, page(s): 271-283, fév. 2006, ISSN : 0960-1481. DOI : [10.1016/j.renene.2005.08.021](https://doi.org/10.1016/j.renene.2005.08.021). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148105002259> (visité le 01/09/2021).
- [13] R. G. LAVILLAT Théo, *Le Pelamis : des articulations pour capter l'énergie des vagues*, fr. adresse : <https://www.ecosources.org/82-le-pelamis-des-articulations-pour-capter-l-energie-des-vagues> (visité le 22/09/2021).
- [14] J. van RIJ, Y.-H. YU, K. EDWARDS et M. MEKHICHE, « Ocean power technology design optimization », en, *International Journal of Marine Energy*, **20**, page(s): 97-108, déc. 2017, ISSN : 22141669. DOI : [10.1016/j.ijome.2017.07.010](https://doi.org/10.1016/j.ijome.2017.07.010). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214166917300656> (visité le 26/06/2019).
- [15] E. V. SÁNCHEZ, R. H. HANSEN et M. M. KRAMER, « Control Performance Assessment and Design of Optimal Control to Harvest Ocean Energy », *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, **40**, 1, page(s): 15-26, jan. 2015, Conference Name : IEEE Journal of Oceanic Engineering, ISSN : 1558-1691. DOI : [10.1109/JOE.2013.2294386](https://doi.org/10.1109/JOE.2013.2294386).

- 
- [16] H. TITAH-BENBOUZID et M. BENBOUZID, « An Up-to-Date Technologies Review and Evaluation of Wave Energy Converters », en, *International Review of Electrical Engineering (IREE)*, **10**, 1, page(s): 52, fév. 2015, ISSN : 1827-6679, 1827-6660. DOI : [10.15866/iree.v10i1.5159](https://doi.org/10.15866/iree.v10i1.5159). adresse : [http://www.praiseworthyprize.org/jsm/index.php?journal=iree&page=article&op=view&path\[\]=16901](http://www.praiseworthyprize.org/jsm/index.php?journal=iree&page=article&op=view&path[]=16901) (visité le 19/06/2019).
- [17] L. O'BOYLE, K. DOHERTY, J. van 't HOFF et J. SKELTON, « The Value of Full Scale Prototype Data – Testing Oyster 800 at EMEC, Orkney », in *11th European Wave and Tidal Energy Conference*, Nantes, France, sept. 2015.
- [18] TSPORT100, *Aquamarine Power officially releases Oyster 2 design*. adresse : <http://www.electric-vehiclenews.com/2010/05/aquamarine-power-officially-releases.html> (visité le 21/09/2021).
- [19] T. V. HEATH, « Chapter 334 - The Development and Installation of the Limpet Wave Energy Converter », en, in *World Renewable Energy Congress VI*, A. A. M. SAYIGH, éd., Oxford : Pergamon, jan. 2000, page(s): 1619-1622, ISBN : 978-0-08-043865-8. DOI : [10.1016/B978-008043865-8/50334-2](https://doi.org/10.1016/B978-008043865-8/50334-2). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080438658503342> (visité le 01/09/2021).
- [20] Y. CUI et Z. LIU, « Effects of Solidity Ratio on Performance of OWC Impulse Turbine », *Advances in Mechanical Engineering*, **7**, page(s): 121373-121373, fév. 2014. DOI : [10.1155/2014/121373](https://doi.org/10.1155/2014/121373).
- [21] J. TEDD et J. PETER KOFOED, « Measurements of overtopping flow time series on the Wave Dragon, wave energy converter », en, *Renewable Energy*, **34**, 3, page(s): 711-717, mars 2009, ISSN : 0960-1481. DOI : [10.1016/j.renene.2008.04.036](https://doi.org/10.1016/j.renene.2008.04.036). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S096014810800195X> (visité le 20/09/2021).
- [22] *Wave Dragon*, fr, Page Version ID : 153787533, nov. 2018. adresse : [https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Wave\\_Dragon&oldid=153787533](https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Wave_Dragon&oldid=153787533) (visité le 22/09/2021).
- [23] D. VALÉRIO, P. BEIRÃO et J. Sá da COSTA, « Optimisation of wave energy extraction with the Archimedes Wave Swing », en, *Ocean Engineering*, **34**, 17, page(s): 2330-2344, déc. 2007, ISSN : 0029-8018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2007.05.009](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2007.05.009). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801807001436> (visité le 20/09/2021).
- [24] J. BLACKLEDGE, E. COYLE, D. KEARNEY, R. MCGUIRK et B. NORTON, « Estimation of Wave Energy from Wind Velocity », *Engineering Letters*, **21**, page(s): 158-170, nov. 2013.

- 
- [25] J. CORDONNIER, F. GORINTIN, A. DE CAGNY, A. H. CLÉMENT et A. BABARIT, « SEA-REV : Case study of the development of a wave energy converter », en, *Renewable Energy*, **80**, page(s): 40-52, août 2015, ISSN : 0960-1481. DOI : [10.1016/j.renene.2015.01.061](https://doi.org/10.1016/j.renene.2015.01.061). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148115000798> (visité le 20/09/2021).
- [26] *L'énergie marine testée grandeur nature*, fr, Section : 2008, oct. 2008. adresse : <https://www.lesechos.fr/2008/10/lenergie-marine-testee-grandeur-nature-499557> (visité le 22/09/2021).
- [27] V. HELLER, I. MEMBER, J. CHAPLIN, F. FARLEY, M. HANN et G. HEARN, « Physical model tests of the anaconda wave energy converter », mars 2010.
- [28] Y. LI et Y.-H. YU, « A synthesis of numerical methods for modeling wave energy converter-point absorbers », en, *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, page(s): 13, 2012.
- [29] K. BUDAL et J. FALNES, « A resonant point absorber of ocean-wave power », en, *Nature*, **256**, 5517, page(s): 478-479, août 1975, Bandiera\_abtest : a Cg\_type : Nature Research Journals Number : 5517 Primary\_atype : Research Publisher : Nature Publishing Group, ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/256478a0](https://doi.org/10.1038/256478a0). adresse : <https://www.nature.com/articles/256478a0> (visité le 22/09/2021).
- [30] J. MORISON, J. JOHNSON et S. SCHAAF, « The Force Exerted by Surface Waves on Piles », *Journal of Petroleum Technology*, **2**, 05, page(s): 149-154, mai 1950, ISSN : 0149-2136. DOI : [10.2118/950149-G](https://doi.org/10.2118/950149-G). adresse : <https://doi.org/10.2118/950149-G> (visité le 22/09/2021).
- [31] J. ZHANG, L. CHEN, M. YE et R. E. RANDALL, « Hybrid wave model for unidirectional irregular waves—part I. Theory and numerical scheme », en, *Applied Ocean Research*, **18**, 2, page(s): 77-92, avr. 1996, ISSN : 0141-1187. DOI : [10.1016/0141-1187\(96\)00009-0](https://doi.org/10.1016/0141-1187(96)00009-0). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0141118796000090> (visité le 22/09/2021).
- [32] M. HASKIND, « The hydrodynamic theory of ship oscillations in roll and pitching », in *Prikl. Mat. Mekh.*, t. 10, 1946, page(s): 33-66.
- [33] H. BINGHAM, « Computing the green function for linear wave-body interaction. », en, in *Proceedings of the 13th International Workshop on Water Waves and Floating Bodies*, Netherlands, 1998, page(s): 5-8.
- [34] H. GU, P. STANSBY, T. STALLARD et E. CARPINTERO MORENO, « Drag, added mass and radiation damping of oscillating vertical cylindrical bodies in heave and surge in still water », en, *Journal of Fluids and Structures*, **82**, page(s): 343-356, oct. 2018, ISSN : 0889-9746. DOI : [10.1016/j.jfluidstructs.2018.06.012](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.06.012). adresse : <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.06.012>

---

[//www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974617306552](http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974617306552) (visité le 24/09/2021).

- [35] DEPARTMENT OF NAVAL ARCHITECTURE AND OCEAN ENGINEERING, FACULTY OF ENGINEERING, UNIVERSITY OF STRATHCLYDE, GLASGOW, UK, S.-S. SONG, S.-H. KIM, K.-J. PAIK et DEPARTMENT OF NAVAL ARCHITECTURE AND OCEAN ENGINEERING, INHA UNIVERSITY, INCHEON 22212, REPUBLIC OF KOREA, « DETERMINATION OF LINEAR AND NONLINEAR ROLL DAMPING COEFFICIENTS OF A SHIP SECTION USING CFD », *Brodogradnja*, **70**, 4, page(s): 17-33, déc. 2019, ISSN : 0007215X, 18455859. DOI : [10.21278/brod70402](https://doi.org/10.21278/brod70402). adresse : <https://hrcak.srce.hr/file/330009> (visité le 24/09/2021).
- [36] J.-F. IGBADUMHE, O. SALLAM, M. FÜRTH et R. FENG, « Experimental Determination of Non-Linear Roll Damping of an FPSO Pure Roll Coupled with Liquid Sloshing in Two-Row Tanks », en, *Journal of Marine Science and Engineering*, **8**, 8, page(s): 582, août 2020, ISSN : 2077-1312. DOI : [10.3390/jmse8080582](https://doi.org/10.3390/jmse8080582). adresse : <https://www.mdpi.com/2077-1312/8/8/582> (visité le 24/09/2021).
- [37] Y.-H. YU, M. LAWSON, K. RUEHL et C. MICHELÉN STRÖFER, « Development and Demonstration of the WEC-Sim Wave Energy Converter Simulation Tool », in *2nd Marine Energy Technology Symposium, Seattle, USA*, jan. 2014.
- [38] K. RUEHL, C. MICHELEN, S. KANNER, M. LAWSON et Y.-H. YU, « Preliminary Verification and Validation of WEC-Sim, an Open-Source Wave Energy Converter Design Tool », en, in *ASME 2014 33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, San Francisco, California, USA : American Society of Mechanical Engineers, juin 2014, page(s): V09BT09A040, ISBN : 978-0-7918-4554-7. DOI : [10.1115/OMAE2014-24312](https://doi.org/10.1115/OMAE2014-24312). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2014/45547/San%20Francisco,%20California,%20USA/279010> (visité le 27/07/2020).
- [39] F. WENDT et al., « IEA OES Task 10 WEC Modelling Verification and Validation », en, in *12th European Wave and Tidal Energy Conference European Wave and Tidal Energy Conference, Cork, Ireland*, 2017, page(s): 8.
- [40] R. GUARDEÑO, A. CONSEGLIERE et M. LÓPEZ, « A Study about Performance and Robustness of Model Predictive Controllers in a WEC System », en, *Energies*, **11**, 10, page(s): 2857, oct. 2018, ISSN : 1996-1073. DOI : [10.3390/en11102857](https://doi.org/10.3390/en11102857). adresse : <http://www.mdpi.com/1996-1073/11/10/2857> (visité le 27/09/2021).
- [41] S. KERKENI, F. RONGÈRE et C. CHAUVIGNÉ, « A Novel & Innovative Open-Source Framework for the Design of Challenging DP Operations – Applications and Perspectives », en, page(s): 23, 2017.

- 
- [42] S. SIRNIVAS, Y.-H. YU, M. HALL et B. BOSMA, « Coupled Mooring Analyses for the WEC-Sim Wave Energy Converter Design Tool », in *Volume 6 : Ocean Space Utilization; Ocean Renewable Energy*, Busan, South Korea : American Society of Mechanical Engineers, juin 2016, page(s): V006T09A023, ISBN : 978-0-7918-4997-2. DOI : [10.1115/OMAE2016-54789](https://doi.org/10.1115/OMAE2016-54789). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2016/49972/Busan,%20South%20Korea/281290> (visité le 27/09/2021).
- [43] A. H. CLÉMENT, B. H. WINSHIP, F. H. FABREGAS-FLAVIA et P.-E. MEUNIER, « Optimal scaling of a generic point absorber WEC in a range of production sites », in *3rd Asian WAVE and Tidal Energy Conference (AWTEC2016)*, S. NARASIMALU, éd., sér. Proceedings of the 3rd Asian WAVE and Tidal Energy Conference (AWTEC2016), Backup Publisher : Energy Research Institute @ Nanyang Technological University, t. Vol. 1, Singapour, Singapore : Research Publishing, oct. 2016, page(s): pp.197-201a. DOI : [10.3850/978-981-11-0782-5](https://doi.org/10.3850/978-981-11-0782-5). adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01395856> (visité le 27/09/2021).
- [44] P.-E. MEUNIER, « Contrôle collaboratif d'une ferme de génératrices houlomotrices », These de doctorat, Ecole centrale de Nantes, nov. 2018. adresse : <http://www.theses.fr/2018ECDN0039> (visité le 22/09/2021).
- [45] J. FALNES, *Ocean Waves and Oscillating Systems : Linear Interactions Including Wave-Energy Extraction*. Cambridge : Cambridge University Press, 2002, ISBN : 978-0-521-01749-7. DOI : [10.1017/CB09780511754630](https://doi.org/10.1017/CB09780511754630). adresse : <https://www.cambridge.org/core/books/ocean-waves-and-oscillating-systems/8A3366809DE5C1F916FF87F36C55C459> (visité le 20/09/2021).
- [46] R. GENEST et A. H. CLÉMENT, « Reduction of the Non-Causal Horizon of the Optimal Wave Energy Converter Control », en, in *Volume 9A : Ocean Renewable Energy*, San Francisco, California, USA : ASME, juin 2014, page(s): V09AT09A048, ISBN : 978-0-7918-4553-0. DOI : [10.1115/OMAE2014-23821](https://doi.org/10.1115/OMAE2014-23821). adresse : <http://proceedings.asmedigitalcollection.asme.org/proceeding.aspx?doi=10.1115/OMAE2014-23821> (visité le 26/06/2019).
- [47] C. MAISONDIEU, « L'absorption dynamique des ondes de gravité en régime instationnaire », fr, thèse de doct., Ecole Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, 1993.
- [48] S. R. K. NIELSEN, Q. ZHOU, M. M. KRAMER, B. BASU et Z. ZHANG, « Optimal control of nonlinear wave energy point converters », en, *Ocean Engineering*, **72**, page(s): 176-187, nov. 2013, ISSN : 0029-8018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2013.06.029](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2013.06.029). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801813002758> (visité le 04/10/2021).

- 
- [49] K. BUDAL et J. FALNES, « Interacting point absorbers with controlled motion », in *Power from Sea Waves*, BM Count : Academic Press, 1980.
- [50] D. A. GUENTHER, D. JONES et D. G. BROWN, « An investigative study of a wave-energy device », en, *Energy*, 1978 Midwest Energy Conference, **4**, *2*, page(s): 299-306, avr. 1979, ISSN : 0360-5442. DOI : [10.1016/0360-5442\(79\)90129-4](https://doi.org/10.1016/0360-5442(79)90129-4). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0360544279901294> (visité le 20/09/2021).
- [51] M. J. FRENCH, « A Generalized View of Resonant Energy Transfer », en, *Journal of Mechanical Engineering Science*, **21**, *4*, page(s): 299-300, août 1979, ISSN : 0022-2542, 2058-3389. DOI : [10.1243/JMES\\_JOUR\\_1979\\_021\\_047\\_02](https://doi.org/10.1243/JMES_JOUR_1979_021_047_02). adresse : [http://journals.sagepub.com/doi/10.1243/JMES\\_JOUR\\_1979\\_021\\_047\\_02](http://journals.sagepub.com/doi/10.1243/JMES_JOUR_1979_021_047_02) (visité le 20/09/2021).
- [52] A. BABARIT et A. CLÉMENT, « Optimal latching control of a wave energy device in regular and irregular waves », en, *Applied Ocean Research*, **28**, *2*, page(s): 77-91, avr. 2006, ISSN : 01411187. DOI : [10.1016/j.apor.2006.05.002](https://doi.org/10.1016/j.apor.2006.05.002). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141118706000423> (visité le 24/08/2021).
- [53] J. WU, Y. YAO, L. ZHOU et M. GÖTEMAN, « Real-time latching control strategies for the solo Duck wave energy converter in irregular waves », en, *Applied Energy*, **222**, page(s): 717-728, juill. 2018, ISSN : 03062619. DOI : [10.1016/j.apenergy.2018.04.033](https://doi.org/10.1016/j.apenergy.2018.04.033). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0306261918305750> (visité le 09/09/2021).
- [54] I. TEMIZ, J. LEIJON, B. EKERGÅRD et C. BOSTRÖM, « Economic aspects of latching control for a wave energy converter with a direct drive linear generator power take-off », en, *Renewable Energy*, **128**, page(s): 57-67, déc. 2018, ISSN : 09601481. DOI : [10.1016/j.renene.2018.05.041](https://doi.org/10.1016/j.renene.2018.05.041). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960148118305627> (visité le 09/09/2021).
- [55] S. H. SALTER, J. R. M. TAYLOR et N. J. CALDWELL, « Power conversion mechanisms for wave energy », en, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part M : Journal of Engineering for the Maritime Environment*, **216**, *1*, page(s): 1-27, juin 2002, ISSN : 1475-0902, 2041-3084. DOI : [10.1243/147509002320382103](https://doi.org/10.1243/147509002320382103). adresse : <http://journals.sagepub.com/doi/10.1243/147509002320382103> (visité le 04/10/2021).
- [56] A. BABARIT, M. GUGLIELMI et A. H. CLÉMENT, « Declutching control of a wave energy converter », en, *Ocean Engineering*, **36**, *12*, page(s): 1015-1024, sept. 2009, ISSN : 0029-8018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2009.05.006](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.05.006). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801809001115> (visité le 04/10/2021).

- 
- [57] W. NI, X. ZHANG, W. ZHANG et S. LIANG, « Numerical investigation of adaptive damping control for raft-type wave energy converters », en, *Renewable Energy*, **175**, page(s): 520-531, sept. 2021, ISSN : 0960-1481. DOI : [10.1016/j.renene.2021.04.128](https://doi.org/10.1016/j.renene.2021.04.128). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0960148121006480> (visité le 04/10/2021).
- [58] P. GIESKE, « Model Predictive Control of a Wave Energy Converter : Archimedes Wave Swing », en, Delft University of Technology, Delft,Pays-Bas, MS thesis, 2007. adresse : <https://repository.tudelft.nl/islandora/object/uuid%3Adb8b269c-6f09-4a3d-9378-4e573900c7dd> (visité le 04/10/2021).
- [59] J. HALS, J. FALNES et T. MOAN, « Constrained Optimal Control of a Heaving Buoy Wave-Energy Converter », en, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, **133**, 1, page(s): 011401, fév. 2011, ISSN : 0892-7219, 1528-896X. DOI : [10.1115/1.4001431](https://doi.org/10.1115/1.4001431). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/offshoremechanics/article/doi/10.1115/1.4001431/470536/Constrained-Optimal-Control-of-a-Heaving-Buoy> (visité le 05/10/2021).
- [60] J. T. SCRUGGS, S. M. LATTANZIO, A. A. TAFLANIDIS et I. L. CASSIDY, « Optimal causal control of a wave energy converter in a random sea », en, *Applied Ocean Research*, **42**, page(s): 1-15, août 2013, ISSN : 0141-1187. DOI : [10.1016/j.apor.2013.03.004](https://doi.org/10.1016/j.apor.2013.03.004). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141118713000205> (visité le 05/10/2021).
- [61] J. DAVIDSON, R. GENEST et J. V. RINGWOOD, « Adaptive Control of a Wave Energy Converter », *IEEE Transactions on Sustainable Energy*, **9**, 4, page(s): 1588-1595, oct. 2018, ISSN : 1949-3029, 1949-3037. DOI : [10.1109/TSTE.2018.2798921](https://doi.org/10.1109/TSTE.2018.2798921). adresse : <https://ieeexplore.ieee.org/document/8270607/> (visité le 05/10/2021).
- [62] R. AHAMED, K. MCKEE et I. HOWARD, « Advancements of wave energy converters based on power take off (PTO) systems : A review », en, *Ocean Engineering*, **204**, page(s): 107248, mai 2020, ISSN : 0029-8018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2020.107248](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107248). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801820302985> (visité le 20/09/2021).
- [63] Y. PAPEGAY, « Outils Formels pour la Modélisation en Mécanique », fr, thèse de doct., Université Nice Sophia Antipolis, nov. 1992. adresse : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00784857> (visité le 04/10/2021).
- [64] T. R. KANE et D. A. LEVINSON, *Dynamics : Theory and Applications*, English, F First Edition. New York : McGraw-Hill College, mai 1985, ISBN : 978-0-07-037846-9.

- 
- [65] P. FRANKOVSKÝ, D. HRONCOVÁ, I. DELYOVÁ et I. VIRGALA, « Modeling of Dynamic Systems in Simulation Environment MATLAB/Simulink – SimMechanics », en, *American Journal of Mechanical Engineering*, **1**, 7, page(s): 282-288, jan. 2013, Number : 7 Publisher : Science and Education Publishing. DOI : [10.12691/ajme-1-7-26](https://doi.org/10.12691/ajme-1-7-26). adresse : <http://pubs.sciepub.com/ajme/1/7/26/abstract.html> (visité le 06/10/2021).
- [66] B. D. CRAVEN, « A generalization of Lagrange multipliers », en, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, **3**, 3, page(s): 353-362, déc. 1970, Publisher : Cambridge University Press, ISSN : 1755-1633, 0004-9727. DOI : [10.1017/S0004972700046050](https://doi.org/10.1017/S0004972700046050). adresse : <https://www.cambridge.org/core/journals/bulletin-of-the-australian-mathematical-society/article/generalization-of-lagrange-multipliers/D07C3FC8BDEC60A9E7E71B4CCA2E2843> (visité le 19/10/2021).
- [67] B. PAUL, « Analytical dynamics of mechanisms—a computer oriented overview », en, *Mechanism and Machine Theory*, **10**, 6, page(s): 481-507, jan. 1975, ISSN : 0094-114X. DOI : [10.1016/0094-114X\(75\)90005-1](https://doi.org/10.1016/0094-114X(75)90005-1). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0094114X75900051> (visité le 07/10/2021).
- [68] O. LANTSOGHT, P. FISETTE, F. DUBOIS, O. BRÜLS et N. DOCQUIER, « Coupling multibody system and granular dynamics application to a 2D benchmark », *EPJ Web of Conferences*, **140**, F. RADJAI, S. NEZAMABADI, S. LUDING et J. DELENNE, éd., page(s): 16007, 2017, ISSN : 2100-014X. DOI : [10.1051/epjconf/201714016007](https://doi.org/10.1051/epjconf/201714016007). adresse : <http://www.epj-conferences.org/10.1051/epjconf/201714016007> (visité le 07/10/2021).
- [69] Y. A. KHULIEF, « Constrained Lagrangian Formulation for Multibody Systems using Bond Graphs. », en, *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry*, **34**, 3, page(s): 362-369, 1991, ISSN : 0914-8825. DOI : [10.1299/jsmec1988.34.362](https://doi.org/10.1299/jsmec1988.34.362). adresse : [http://www.jstage.jst.go.jp/article/jsmec1988/34/3/34\\_3\\_362/\\_article](http://www.jstage.jst.go.jp/article/jsmec1988/34/3/34_3_362/_article) (visité le 07/10/2021).
- [70] B. SIMEON, « On Lagrange multipliers in flexible multibody dynamics », en, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **195**, 50-51, page(s): 6993-7005, oct. 2006, ISSN : 00457825. DOI : [10.1016/j.cma.2005.04.015](https://doi.org/10.1016/j.cma.2005.04.015). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0045782505003701> (visité le 13/11/2020).
- [71] S. ŠALINIĆ, « Determination of joint reaction forces in a symbolic form in rigid multibody systems », en, *Mechanism and Machine Theory*, **46**, 11, page(s): 1796-1810, nov. 2011, ISSN : 0094114X. DOI : [10.1016/j.mechmachtheory.2011.06.006](https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2011.06.006). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0094114X11001170> (visité le 07/10/2021).
- [72] H. MAZHAR et al., « CHRONO : A parallel multi-physics library for rigid-body, flexible-body, and fluid dynamics », *Mechanical Sciences*, **4**, page(s): 49-64, fév. 2013. DOI : [10.5194/ms-4-49-2013](https://doi.org/10.5194/ms-4-49-2013).



- 
- [73] R. FEATHERSTONE, *Robot Dynamics Algorithms* (The Springer International Series in Engineering and Computer Science), en. Springer US, 1987, ISBN : 978-1-4757-6437-6. DOI : [10.1007/978-0-387-74315-8](https://doi.org/10.1007/978-0-387-74315-8). adresse : <https://www.springer.com/gp/book/9781475764376> (visité le 07/10/2021).
- [74] R. FEATHERSTONE, « Modeling and Control of Contact Between Constrained Rigid Bodies », en, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, **20**, 1, page(s): 82-92, fév. 2004, ISSN : 1042-296X. DOI : [10.1109/TRA.2003.820930](https://doi.org/10.1109/TRA.2003.820930). adresse : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1266647/> (visité le 07/10/2021).
- [75] F. RONGÈRE et A. H. CLÉMENT, « Systematic Dynamic Modeling and Simulation of Multibody Offshore Structures : Application to Wave Energy Converters », in *Volume 5 : Ocean Engineering*, Nantes, France : American Society of Mechanical Engineers, juin 2013, page(s): V005T06A086, ISBN : 978-0-7918-5539-3. DOI : [10.1115/OMAE2013-11370](https://doi.org/10.1115/OMAE2013-11370). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2013/55393/Nantes,%20France/271551> (visité le 07/10/2021).
- [76] X.-B. CHEN, « Hydrodynamics in Offshore and Naval Applications - Part I », en, in *6th International Conference on HydroDynamics*, The University of Western Australia, Perth, Australia, 2004, page(s): 28.
- [77] Z. SHAW, *Learn Python 3 the Hard Way : A Very Simple Introduction to the Terrifyingly Beautiful World of Computers and Code*, Anglais. Boston : Addison Wesley, 2017, ISBN : 978-0-13-469288-3.
- [78] F. FÀBREGAS FLAVIÀ, C. McNATT, F. RONGÈRE, A. BABARIT et A. CLÉMENT, « A numerical tool for the frequency domain simulation of large arrays of identical floating bodies in waves », en, *Ocean Engineering*, **148**, page(s): 299-311, jan. 2018, ISSN : 00298018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2017.11.026](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2017.11.026). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029801817306935> (visité le 24/06/2019).
- [79] T. GOURLAY, A. von GRAEFE, V. SHIGUNOV et E. LATAIRE, « Comparison of AQWA, GL Rankine, MOSES, OCTOPUS, PDStrip and WAMIT With Model Test Results for Cargo Ship Wave-Induced Motions in Shallow Water », en, in *ASME 2015 34th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*, St. John's, Newfoundland, Canada, American Society of Mechanical Engineers, mai 2015, page(s): V011T12A006, ISBN : 978-0-7918-5659-8. DOI : [10.1115/OMAE2015-41691](https://doi.org/10.1115/OMAE2015-41691). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2015/56598/St.%20John%E2%80%99s,%20Newfoundland,%20Canada/279865> (visité le 15/06/2020).
- [80] J. NEWMAN et P. D. SCLAVOUNOS, « The computation of wave loads on large offshore structures », in *"Boss" Conference*, Trondheim, Norway, 1988, page(s): 1-18. adresse : <https://www.wamit.com/Publications/boss88.pdf> (visité le 15/06/2020).

- 
- [81] W. E. CUMMINS, « The impulse response function and ship motions », David Taylor Model Basin Washington DC, rapp. tech. 1661, 1962.
- [82] Z. YU et J. FALNES, « State-space modelling of dynamic systems in ocean engineering », *Journal of Hydrodynamics B (1)*, page(s): 1-17, 1998.
- [83] N. FAEDO, Y. PEÑA-SANCHEZ et J. V. RINGWOOD, « Moment-Matching-Based Identification of Wave Energy Converters : the ISWEC Device », en, *IFAC-PapersOnLine*, **51**, 29, page(s): 189-194, 2018, ISSN : 24058963. DOI : [10.1016/j.ifacol.2018.09.491](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.09.491). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896318321803> (visité le 07/01/2021).
- [84] A. ROESSLING et J. RINGWOOD, « Finite order approximations to radiation forces for wave energy applications », en, *Proceedings 1st International Conference on Renewable Energies Offshore*, 2014, Publisher : Renew 2014. adresse : <http://mural.maynoothuniversity.ie/6771/> (visité le 16/05/2021).
- [85] K. UNNELAND, « Identification and Order Reduction of Radiation Force Models of Marine Structures », en, thèse de doct., Norwegian University of Science et Technology, Trondheim, Norway, 2007.
- [86] R. TAGHIPOUR, T. PEREZ et T. MOAN, « Hybrid frequency–time domain models for dynamic response analysis of marine structures », en, *Ocean Engineering*, **35**, 7, page(s): 685-705, mai 2008, ISSN : 00298018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2007.11.002](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2007.11.002). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029801807002363> (visité le 26/06/2019).
- [87] J. ARMESTO, R. GUANCHE, F. d. JESUS, A. ITURRIOZ et I. LOSADA, « Comparative analysis of the methods to compute the radiation term in Cummins' equation », en, *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, **1**, 4, page(s): 377-393, nov. 2015, ISSN : 2198-6444, 2198-6452. DOI : [10.1007/s40722-015-0027-1](https://doi.org/10.1007/s40722-015-0027-1). adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s40722-015-0027-1> (visité le 10/08/2021).
- [88] Y. PEÑA-SANCHEZ, N. FAEDO et J. V. RINGWOOD, « A Critical Comparison Between Parametric Approximation Methods for Radiation Forces in Wave Energy Systems », ISOPE-I-19-521, juin 2019. (visité le 26/05/2021).
- [89] K. S. PHOGAT, D. CHATTERJEE et R. N. BANAVAR, « A discrete-time Pontryagin maximum principle on matrix Lie groups », en, *Automatica*, **97**, page(s): 376-391, nov. 2018, ISSN : 00051098. DOI : [10.1016/j.automatica.2018.08.026](https://doi.org/10.1016/j.automatica.2018.08.026). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0005109818304254> (visité le 07/01/2021).

- 
- [90] N. FAEDO, S. OLAYA et J. V. RINGWOOD, « Optimal control, MPC and MPC-like algorithms for wave energy systems : An overview », en, *IFAC Journal of Systems and Control*, **1**, page(s): 37-56, sept. 2017, ISSN : 24686018. DOI : [10.1016/j.ifacsc.2017.07.001](https://doi.org/10.1016/j.ifacsc.2017.07.001). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2468601817301104> (visité le 07/01/2021).
- [91] Z.-y. SONG, H. ZHAO, L. LI et G. LÜ, « On the universal third order Stokes wave solution », *Science China Earth Sciences*, **56**, jan. 2012. DOI : [10.1007/s11430-012-4523-z](https://doi.org/10.1007/s11430-012-4523-z).
- [92] A. BABARIT, « Optimisation hydrodynamique et contrôle optimal d'un récupérateur de l'énergie des vagues », fr, thèse de doct., 2005.
- [93] J. V. WEHAUSEN, « Initial-value problem for the motion in an undulating sea of a body with fixed equilibrium position », en, *Journal of Engineering Mathematics*, **1**, *1*, page(s): 1-17, jan. 1967, ISSN : 0022-0833, 1573-2703. DOI : [10.1007/BF01793635](https://doi.org/10.1007/BF01793635). adresse : <http://link.springer.com/10.1007/BF01793635> (visité le 04/06/2020).
- [94] *Cavalement*, fr, Page Version ID : 168636302, mars 2020. adresse : <https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Cavalement&oldid=168636302> (visité le 12/10/2021).
- [95] G. DELHOMMEAU, « Les problemes de diffraction-radiation et de resistance de vagues : etude theorique et resolution numerique par la methode des singularites », thèse de doct., 1987. adresse : <http://www.theses.fr/1987NANT2032>.
- [96] *Meshmagick User's Guide (3.2) — Meshmagick User's Guide 3.2 documentation*. adresse : <https://lheea.github.io/meshmagick/> (visité le 14/04/2022).
- [97] T. OGILVIE, « Recent progress toward the understanding and prediction of ship motions », in *The Fifth Symposium on Naval Hydrodynamics, Bergen, Norway*, 1964, page(s): 3-128.
- [98] E. KRISTIANSEN, s. HJULSTAD et O. EGELAND, « State-space representation of radiation forces in time-domain vessel models », en, *Ocean Engineering*, **32**, *17-18*, page(s): 2195-2216, déc. 2005, ISSN : 00298018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2005.02.009](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2005.02.009). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0029801805000946> (visité le 26/06/2019).
- [99] T. PEREZ et T. I. FOSSEN, « Joint Identification of Infinite-Frequency Added Mass and Fluid-Memory Models of Marine Structures », en, *Modeling, Identification and Control : A Norwegian Research Bulletin*, **29**, *3*, page(s): 93-102, 2008, ISSN : 0332-7353, 1890-1328. DOI : [10.4173/mic.2008.3.2](https://doi.org/10.4173/mic.2008.3.2). adresse : <http://www.mic-journal.no/ABS/MIC-2008-3-2.asp> (visité le 10/12/2019).

- 
- [100] Z. YU et J. FALNES, « State-space modelling of a vertical cylinder in heave », en, *Applied Ocean Research*, **17**, 5, page(s): 265-275, oct. 1995, ISSN : 01411187. DOI : [10.1016/0141-1187\(96\)00002-8](https://doi.org/10.1016/0141-1187(96)00002-8). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0141118796000028> (visité le 26/06/2019).
- [101] W. BAO et T. KINOSHITA, « Asymptotic solution of wave-radiating damping at high frequency », en, *Applied Ocean Research*, **14**, 3, page(s): 165-173, jan. 1992, ISSN : 01411187. DOI : [10.1016/0141-1187\(92\)90012-9](https://doi.org/10.1016/0141-1187(92)90012-9). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0141118792900129> (visité le 04/06/2020).
- [102] P BRUZZONI, R. M. CARRANZA, J. R. C. LACOSTE et E. A. CRESPO, « Kramers/Kronig transforms calculation with a fast convolution algorithm », en, *Electrochimica Acta*, page(s): 7, 2002.
- [103] W. FINNEGAN, M. MEERE et J. GOGGINS, « The wave excitation forces on a truncated vertical cylinder in water of infinite depth », en, *Journal of Fluids and Structures*, **40**, page(s): 201-213, juill. 2013, ISSN : 0889-9746. DOI : [10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.007](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.04.007). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974613001138> (visité le 18/08/2021).
- [104] Y. L. LUKE, *Integrals of Bessel Functions*, English, Reprint edition. Mineola, New York : Dover Publications, déc. 2014, ISBN : 978-0-486-78969-9.
- [105] F. BOWMAN, *Introduction to Bessel Functions*, English. New York, NY : Dover Publications, oct. 2010, ISBN : 978-0-486-60462-6.
- [106] J. FALNES, « On non-causal impulse response functions related to propagating water waves », en, *Applied Ocean Research*, **17**, 6, page(s): 379-389, déc. 1995, ISSN : 01411187. DOI : [10.1016/S0141-1187\(96\)00007-7](https://doi.org/10.1016/S0141-1187(96)00007-7). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0141118796000077> (visité le 26/06/2019).
- [107] D. KAVRANOGLU et M. BETTAYEB, « A new general state-space representation for discrete-time systems », en, *International Journal of Control*, **58**, 1, page(s): 33-49, juill. 1993, ISSN : 0020-7179, 1366-5820. DOI : [10.1080/00207179308922989](https://doi.org/10.1080/00207179308922989). adresse : <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00207179308922989> (visité le 11/10/2021).
- [108] J. MENDEL et A. HSUEH, « State space modeling of non-causal impulse responses », in *1982 21st IEEE Conference on Decision and Control*, Orlando, FL, USA : IEEE, déc. 1982, page(s): 1300-1302. DOI : [10.1109/CDC.1982.268367](https://doi.org/10.1109/CDC.1982.268367). adresse : <http://ieeexplore.ieee.org/document/4047470/> (visité le 11/10/2021).

- 
- [109] W. JIA et L. LIN, « Fast real-time time-dependent hybrid functional calculations with the parallel transport gauge and the adaptively compressed exchange formulation », en, *Computer Physics Communications*, **240**, page(s): 21-29, juill. 2019, ISSN : 00104655. DOI : [10.1016/j.cpc.2019.02.009](https://doi.org/10.1016/j.cpc.2019.02.009). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S001046551930061X> (visité le 16/06/2020).
- [110] G. DUCLOS, C. CLÉMENT et G. CHATRY, « Absorption of outgoing waves in a numerical wave tank using a self-adaptive boundary condition », *Int. Journal of Offshore and Polar Engineering*, **11**, 3, page(s): 168-175, 2001.
- [111] D. D. BHATTA, « Computation of added mass and damping coefficients due to a heaving cylinder », en, *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **23**, 1-2, page(s): 127-140, jan. 2007, ISSN : 1598-5865, 1865-2085. DOI : [10.1007/BF02831963](https://doi.org/10.1007/BF02831963). adresse : <http://link.springer.com/10.1007/BF02831963> (visité le 10/08/2021).
- [112] F. RONGÈRE, J.-M. KOBUS, A. BABARIT et G. DELHOMMEAU, « Étude comparée de méthodes de calcul des efforts de radiation pour une application à l'aviron », fr, in *12e journées de l'hydrodynamique*, Nantes, 2010. DOI : [10.1051/lhb/2011052](https://doi.org/10.1051/lhb/2011052). adresse : <http://www.shf-lhb.org/10.1051/lhb/2011052> (visité le 10/12/2019).
- [113] R. GENEST, « Développement et validation expérimentale de stratégies de contrôle pour les récupérateurs de l'énergie des vagues », thèse de doct., 2014.
- [114] S. H. HU, X. L. LIU, H. G. WANG et X. D. ZHANG, « Stability Research on Configuration Transformation of the Complex-Surface Cutting Metamorphic Mechanism », *Advanced Materials Research*, **655-657**, page(s): 421-424, jan. 2013, ISSN : 1662-8985. DOI : [10.4028/www.scientific.net/AMR.655-657.421](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.655-657.421). adresse : <https://www.scientific.net/AMR.655-657.421> (visité le 13/07/2020).
- [115] J. KHAZAEI, L. FAN, W. JIANG et D. MANJURE, « Distributed Prony analysis for real-world PMU data », en, *Electric Power Systems Research*, **133**, page(s): 113-120, avr. 2016, ISSN : 03787796. DOI : [10.1016/j.epsr.2015.12.008](https://doi.org/10.1016/j.epsr.2015.12.008). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0378779615003855> (visité le 26/06/2019).
- [116] A. CLÉMENT, « Identification de la fonction de Green de l'hydrodynamique transitoire par des modèles continus », in *5e journées de l'Hydrodynamique*, Rouen, France, 1995.
- [117] S KUNG, « A new identification and model reduction algorithm via singular value decompositions », en, *12th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers*, page(s): 705-714, 1978.

- 
- [118] T. PEREZ et T. I. FOSSEN, « Time- vs. Frequency-domain Identification of Parametric Radiation Force Models for Marine Structures at Zero Speed », en, *Modeling, Identification and Control*, **29**, 1, page(s): 1-19, 2008, ISSN : 0332-7353, 1890-1328. DOI : [10.4173/mic.2008.1.1](https://doi.org/10.4173/mic.2008.1.1). adresse : <http://www.mic-journal.no/ABS/MIC-2008-1-1.asp> (visité le 12/11/2020).
- [119] U. AL-SAGGAF et G. FRANKLIN, « Model reduction via balanced realizations : an extension and frequency weighting techniques », en, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**, 7, page(s): 687-692, juill. 1988, ISSN : 00189286. DOI : [10.1109/9.1280](https://doi.org/10.1109/9.1280). adresse : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1280/> (visité le 04/06/2020).
- [120] B. L. HO et R. E. KALMAN, « Effective construction of linear state-variable models from input/output functions », at - *Automatisierungstechnik*, **14**, 1-12, page(s): 545-548, 1966. DOI : [doi:10.1524/auto.1966.14.112.545](https://doi.org/10.1524/auto.1966.14.112.545). adresse : <https://doi.org/10.1524/auto.1966.14.112.545>.
- [121] R. LECUYER-LE BRIS, M. LE BOULLUEC, J.-F. CHARPENTIER et M. BENBOUZID, « Kernel Function Definition Completion for Time-Domain State-Space Representations of Radiation Forces : Application to the Hankel Singular Value Decomposition », en, *Journal of Marine Science and Engineering*, **9**, 7, page(s): 768, juill. 2021, Number : 7 Publisher : Multidisciplinary Digital Publishing Institute. DOI : [10.3390/jmse9070768](https://doi.org/10.3390/jmse9070768). adresse : <https://www.mdpi.com/2077-1312/9/7/768> (visité le 24/08/2021).
- [122] R. TAGHIPOUR, T. PEREZ et T. MOAN, « Time Domain Hydroelastic Analysis of a Flexible Marine Structure Using State-Space Models », en, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, **131**, page(s): 1-9, 2009. DOI : [10.1115/OMAE2007-29272](https://doi.org/10.1115/OMAE2007-29272). adresse : <https://gasturbinespower.asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2007/42703/519/318273> (visité le 16/05/2021).
- [123] B. EASTMAN, I.-J. KIM, B. SHADER et K. VANDER MEULEN, « Companion matrix patterns », en, *Linear Algebra and its Applications*, **463**, page(s): 255-272, déc. 2014, ISSN : 00243795. DOI : [10.1016/j.laa.2014.09.010](https://doi.org/10.1016/j.laa.2014.09.010). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0024379514005953> (visité le 04/06/2020).
- [124] W. XU et S. QIAO, « A fast symmetric SVD algorithm for square Hankel matrices », en, *Linear Algebra and its Applications*, **428**, 2-3, page(s): 550-563, jan. 2008, ISSN : 00243795. DOI : [10.1016/j.laa.2007.05.027](https://doi.org/10.1016/j.laa.2007.05.027). adresse : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0024379507002443> (visité le 10/12/2019).
- [125] S. KIANEJAD, H. ENSHAEI, J. DUFFY, N. ANSARIFARD et D. RANMUTHUGALA, « Investigation of scale effects on roll damping through numerical simulations », in *32nd Symposium on Naval Hydrodynamics*, Hamburg, Germany, août 2018.

- 
- [126] J. L. ESCALONA et A. M. RECUERO, « A bicycle model for education in multibody dynamics and real-time interactive simulation », en, *Multibody System Dynamics*, **27**, 3, page(s): 383-402, mars 2012, ISSN : 1384-5640, 1573-272X. DOI : [10.1007/s11044-011-9282-7](https://doi.org/10.1007/s11044-011-9282-7). adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s11044-011-9282-7> (visité le 07/10/2021).
- [127] D. DOPICO, F. GONZÁLEZ, J. CUADRADO et J. KÖVECSES, « Determination of Holonomic and Nonholonomic Constraint Reactions in an Index-3 Augmented Lagrangian Formulation With Velocity and Acceleration Projections », en, *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **9**, 4, page(s): 041006, oct. 2014, ISSN : 1555-1415, 1555-1423. DOI : [10.1115/1.4027671](https://doi.org/10.1115/1.4027671). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/computationalnonlinear/article/doi/10.1115/1.4027671/370248/Determination-of-Holonomic-and-Nonholonomic> (visité le 07/10/2021).
- [128] RODRIGUES, « Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire. », fra, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, page(s): 380-440, 1840, ISSN : 0021-7874. adresse : <https://eudml.org/doc/234443> (visité le 19/10/2021).
- [129] H. ELLOUMI, « Commande des plateformes avancées de simulation de conduite », fr, thèse de doct., Paris, 2007.
- [130] M. FAYET, « Simulation des mécanismes - Topologie, géométrie, cinématique », fr, page(s): 27, 2006.
- [131] M. FAYET, « Simulation des mécanismes - Liberté, mobilité et hyperstatisme », fr, page(s): 17, 2007.
- [132] M. FAYET, P. LONJOU et A. SANDEL, « Simulation des mécanismes - Equations de la dynamique - Exemples », fr, page(s): 26, 2007.
- [133] M. FAYET, « Simulation des mécanismes - Équations de liaison. Forces de liaison », fr, page(s): 23, 2007.
- [134] W. MARQUIS-FAVRE, « Simulation des mécanismes - Résolution des équations dans les logiciels », fr, page(s): 15, 2007.
- [135] P. AMIOT et L. MARLEAU, *Mécanique classique 2*, fr, Département de physique, Université Laval. Québec, Canada, 1997.
- [136] S. A. EMAM, « Generalized Lagrange's equations for systems with general constraints and distributed parameters », en, *Multibody System Dynamics*, **49**, 1, page(s): 95-117, mai 2020, ISSN : 1573-272X. DOI : [10.1007/s11044-019-09706-z](https://doi.org/10.1007/s11044-019-09706-z). adresse : <https://doi.org/10.1007/s11044-019-09706-z> (visité le 30/09/2021).

- 
- [137] S. K. SOLTAKHANOV, M. YUSHKOV et S. ZEGZHDA, *Mechanics of non-holonomic systems : A New Class of control systems* (Foundations of Engineering Mechanics), en. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2009, ISBN : 978-3-540-85846-1. DOI : [10.1007/978-3-540-85847-8](https://doi.org/10.1007/978-3-540-85847-8). adresse : <https://www.springer.com/gp/book/9783540858461> (visité le 06/10/2021).
- [138] G. A. MAGGI, *Principii della teoria matematica del movimento dei corpi : Corso di meccanica razionale*, Italian. University of Michigan Library, jan. 1896.
- [139] J.-L. FANCHON, *Guide de mécanique : Sciences et technologies industrielles*, Français. Nathan, mars 1995, ISBN : 978-2-09-176570-9.
- [140] P. BETSCH, C. BECKER, M. FRANKE, Y. YANG et A. JANZ, « A comparison of DAE integrators in the context of benchmark problems for flexible multibody dynamics », en, *Journal of Mechanical Science and Technology*, **29**, 7, page(s): 2653-2661, juill. 2015, ISSN : 1738-494X, 1976-3824. DOI : [10.1007/s12206-015-0511-5](https://doi.org/10.1007/s12206-015-0511-5). adresse : <http://link.springer.com/10.1007/s12206-015-0511-5> (visité le 23/06/2020).
- [141] E. ANDERSON et al., « LAPACK User's Guide Third Edition », *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 1999.
- [142] *SciPy*. adresse : <https://scipy.org/> (visité le 13/04/2022).
- [143] I. HENRIKSEN, « Circumventing The Linker : Using SciPy's BLAS and LAPACK Within Cython », en, Austin, Texas, 2015, page(s): 48-50. DOI : [10.25080/Majora-7b98e3ed-008](https://doi.org/10.25080/Majora-7b98e3ed-008). adresse : [https://conference.scipy.org/proceedings/scipy2015/ian\\_henriksen.html](https://conference.scipy.org/proceedings/scipy2015/ian_henriksen.html) (visité le 26/10/2021).
- [144] J. R. DORMAND et P. J. PRINCE, « A family of embedded Runge-Kutta formulae », en, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **6**, 1, page(s): 19-26, mars 1980, ISSN : 0377-0427. DOI : [10.1016/0771-050X\(80\)90013-3](https://doi.org/10.1016/0771-050X(80)90013-3). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133> (visité le 30/10/2021).
- [145] L. F. SHAMPINE, « Some Practical Runge-Kutta Formulas », *Mathematics of Computation*, **46**, 173, page(s): 135-150, 1986, Publisher : American Mathematical Society, ISSN : 0025-5718. DOI : [10.2307/2008219](https://doi.org/10.2307/2008219). adresse : <https://www.jstor.org/stable/2008219> (visité le 30/10/2021).
- [146] W. H. PRESS, B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY et W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes in C : The Art of Scientific Computing, Second Edition*, English, 2nd edition. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, oct. 1992, ISBN : 978-0-521-43108-8.



- 
- [147] C. L. LAWSON et R. J. HANSON, *Solving Least Squares Problems*, en. Society for Industrial et Applied Mathematics, jan. 1995, ISBN : 978-0-89871-356-5 978-1-61197-121-7. DOI : [10.1137/1.9781611971217](https://doi.org/10.1137/1.9781611971217). adresse : <http://epubs.siam.org/doi/book/10.1137/1.9781611971217> (visité le 26/03/2022).
- [148] S. ZHAO et al., « Divide-and-conquer approach for solving singular value decomposition based on MapReduce : SINGULAR VALUE DECOMPOSITION BASED ON MAPREDUCE », en, *Concurrency and Computation : Practice and Experience*, **28**, 2, page(s): 331-350, fév. 2016, ISSN : 15320626. DOI : [10.1002/cpe.3436](https://doi.org/10.1002/cpe.3436). adresse : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/cpe.3436> (visité le 26/03/2022).
- [149] W.-H. LIU et A. SHERMAN, « Comparative Analysis of the Cuthill–McKee and the Reverse Cuthill–McKee Ordering Algorithms for Sparse Matrices », *Siam Journal on Numerical Analysis - SIAM J NUMER ANAL*, **13**, page(s): 198-213, avr. 1976. DOI : [10.1137/0713020](https://doi.org/10.1137/0713020).
- [150] C. d. BOOR, *A Practical Guide to Splines* (Applied Mathematical Sciences), en. New York : Springer-Verlag, 1978, ISBN : 978-0-387-95366-3. adresse : <https://www.springer.com/gp/book/9780387953663> (visité le 27/04/2021).
- [151] N. TOM, M. LAWSON et Y.-H. YU, « Demonstration of the Recent Additions in Modeling Capabilities for the WEC-Sim Wave Energy Converter Design Tool », en, in *Volume 9 : Ocean Renewable Energy*, St. John's, Newfoundland, Canada : American Society of Mechanical Engineers, mai 2015, page(s): V009T09A035, ISBN : 978-0-7918-5657-4. DOI : [10.1115/OMAE2015-42265](https://doi.org/10.1115/OMAE2015-42265). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2015/56574/St.%20John%E2%80%99s,%20Newfoundland,%20Canada/280095> (visité le 12/12/2019).
- [152] V. S. NEARY et al., « Methodology for Design and Economic Analysis of Marine Energy Conversion (MEC) Technologies », en, Sandia National Laboratories, Albuquerque, New Mexico, USA, Sandia report, 2014, page(s): 262.
- [153] E. MINGUZZI, « Rayleigh's dissipation function at work », *European Journal of Physics*, **36**, 2014. DOI : [10.1088/0143-0807/36/3/035014](https://doi.org/10.1088/0143-0807/36/3/035014).
- [154] M. DUCLERCQ, « Étude de l'interaction entre un fluide et une structure oscillante : régimes d'écoulement et de forces, du cylindre isolé au réseau de cylindres », Theses, Ecole Polytechnique X, déc. 2010. adresse : <https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00545937>.
- [155] M. LE BOULLUEC et al., « Evaluation expérimentale des caractéristiques hydrodynamiques de plaques anti-pilonnement », fr, in *15e journées de l'hydrodynamique*, Brest, nov. 2016, page(s): 21.

- 
- [156] T. SARPKEYA, M. ISAACSON et J. WEHAUSEN, *Mechanics of wave forces on offshore structures*, Van Nostrand Reinhold. New York, 1981.
- [157] G. H. KEULEGAN et L. CARPENTER, « Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid », 1958. DOI : [10.6028/JRES.060.043](https://doi.org/10.6028/JRES.060.043).
- [158] « On the Effect of the Internal Friction of Fluids on the Motion of Pendulums », in *Mathematical and Physical Papers*, sér. Cambridge Library Collection - Mathematics, G. G. STOKES, éd., t. 3, Cambridge : Cambridge University Press, 2009, page(s): 1-10, ISBN : 978-1-108-00264-6. DOI : [10.1017/CB09780511702266.002](https://doi.org/10.1017/CB09780511702266.002). adresse : <https://www.cambridge.org/core/books/mathematical-and-physical-papers/on-the-effect-of-the-internal-friction-of-fluids-on-the-motion-of-pendulums/11038EBC1E2D897D9E5B1297C9AE5D99>.
- [159] T. SARPKEYA, « In-Line and Transverse Forces on Cylinders in Oscillatory Flow at High Reynolds Numbers », en, *Journal of Ship Research*, **21**, 04, page(s): 200-216, déc. 1977, ISSN : 0022-4502, 1542-0604. DOI : [10.5957/jsr.1977.21.4.200](https://doi.org/10.5957/jsr.1977.21.4.200). adresse : <https://onepetro.org/JSR/article/21/04/200/175442/In-Line-and-Transverse-Forces-on-Cylinders-in> (visité le 14/07/2022).
- [160] T. SARPKEYA, « In-line and transverse forces on smooth and sand-roughened circular cylinders in oscillating flow at high Reynolds numbers », Naval Postgraduate School, Monterey CA, USA, Rapport technique NPS- 69SL76062, 1976.
- [161] J. MORENO, K. THIAGARAJAN, M. CAMERON et R. URBINA, « Added mass and damping of a column with heave plate oscillating in waves », avr. 2016.
- [162] X. ZAN et Z. LIN, « On the applicability of Morison equation to force estimation induced by internal solitary wave on circular cylinder », en, *Ocean Engineering*, **198**, page(s): 106966, fév. 2020, ISSN : 0029-8018. DOI : [10.1016/j.oceaneng.2020.106966](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.106966). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0029801820300470> (visité le 17/01/2022).
- [163] R. C. T. RAINEY, « A new equation for calculating wave loads on offshore structures », *Journal of Fluid Mechanics*, **204**, page(s): 295-324, 1989, Edition : 2006/04/26 Publisher : Cambridge University Press, ISSN : 0022-1120. DOI : [10.1017/S002211208900176X](https://doi.org/10.1017/S002211208900176X). adresse : <https://www.cambridge.org/core/article/new-equation-for-calculating-wave-loads-on-offshore-structures/FF8FD10F3D9E66DE5F6740418B42B2C7>.
- [164] I. KESISOGLOU, G. SINGH et M. NIKOLAOU, « The Lambert function should be in the engineering mathematical toolbox », en, *Computers & Chemical Engineering*, **148**, page(s): 107259, mai 2021, ISSN : 0098-1354. DOI : [10.1016/j.compchemeng.2021.107259](https://doi.org/10.1016/j.compchemeng.2021.107259). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098135421000375> (visité le 14/02/2022).

- 
- [165] I. D. MENDOUME MINKO, M. PREVOSTO et M. LE BOULLUEC, « Distribution of Maxima of Non-Linear Rolling in Case of Coupled Sway and Roll Motions of a Floating Body in Irregular Waves », en, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, juill. 2009, page(s): 927-933. DOI : [10.1115/OMAE2008-57935](https://doi.org/10.1115/OMAE2008-57935). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2008/48197/927/331178> (visité le 02/03/2022).
- [166] J. van RIJ, Y.-H. YU et R. G. COE, « Design Load Analysis for Wave Energy Converters », en, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, sept. 2018. DOI : [10.1115/OMAE2018-78178](https://doi.org/10.1115/OMAE2018-78178). adresse : <https://gasturbinespower.asmedigitalcollection.asme.org/OMAE/proceedings/OMAE2018/51319/V010T09A031/278156> (visité le 08/03/2022).
- [167] *Tutorials — WEC-Sim documentation*. adresse : <https://wec-sim.github.io/WEC-Sim/dev/user/tutorials.html#two-body-point-absorber-rm3> (visité le 08/03/2022).
- [168] V. HELLER, « 8.04 - Development of Wave Devices from Initial Conception to Commercial Demonstration », en, in *Comprehensive Renewable Energy*, A. SAYIGH, éd., Oxford : Elsevier, jan. 2012, page(s): 79-110, ISBN : 978-0-08-087873-7. DOI : [10.1016/B978-0-08-087872-0.00804-0](https://doi.org/10.1016/B978-0-08-087872-0.00804-0). adresse : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780080878720008040> (visité le 09/03/2022).
- [169] S. OLAYA, « Contribution à la modélisation multi-physique et au contrôle optimal d'un générateur houlomoteur : application à un système "deux corps" », These de doctorat, Brest, sept. 2016. adresse : <http://www.theses.fr/2016BRES0051> (visité le 09/03/2022).
- [170] J. FALNES, « Wave-Energy Conversion Through Relative Motion Between Two Single-Mode Oscillating Bodies », en, *Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, **121**, 1, page(s): 32-38, fév. 1999, ISSN : 0892-7219, 1528-896X. DOI : [10.1115/1.2829552](https://doi.org/10.1115/1.2829552). adresse : <https://asmedigitalcollection.asme.org/offshoremechanics/article/121/1/32/432585/WaveEnergy-Conversion-Through-Relative-Motion> (visité le 09/03/2022).
- [171] T. BRESS, *Effective Labview Programming*, English. Allendale, NJ : National Technology & Science, jan. 2013, ISBN : 978-1-934891-08-7.



**Titre :** Modélisation numérique et expérimentale de la captation d'énergie houlomotrice : application aux essais à échelle réduite en bassin

**Mot clés :** Dynamique non-linéaire, interaction fluide-structure, modèle d'état hybride

**Résumé :** Le comportement des systèmes houlomoteurs est non-linéaire et complexe à modéliser fidèlement, notamment en raison de l'interaction fluide-structure et du caractère aléatoire de la houle. La capacité d'un système houlomoteur à récupérer une part de l'énergie des vagues dépend de la stratégie de contrôle utilisée ainsi que de la fiabilité du modèle de comportement. Les temps de calcul numérique doivent rester raisonnables afin de permettre un contrôle en temps réel. Dans ce contexte, des calculs en fluide parfait permettent de modéliser l'interaction fluide-structure au premier ordre. Cette approche de diffraction-radiation met en évidence les fonctions de retard du système dont une analyse fine a été menée dans ce travail et illustrée sur un cas de référence. Cette thèse propose

d'établir une méthode applicable à la modélisation de n'importe quel type de système houlomoteur multi-corps. La formulation des efforts hydrodynamiques issue des hypothèses de fluide parfait est alors complétée de termes semi-empiriques afin de tenir compte d'effets non linéaires. Les efforts d'origine visqueuse représentés sont particulièrement influents au voisinage des résonances des mouvements. Cette méthode permet également l'intégration de données expérimentales dans le modèle numérique. Un travail expérimental a donc été mené afin de comprendre, quantifier et intégrer au modèle numérique les effets observés expérimentalement pour un corps ancré. Enfin des éléments en faveur d'une campagne expérimentale d'un système à deux corps sont présentés.

**Title:** Numerical and experimental modelization of the Power Take Off of Wave Energy Converters : application to experiments at basin-scale

**Keywords:** Non-linear dynamic, fluid-structure interaction, hybrid state space model

**Abstract:** The behaviour of wave energy converters (WEC) is non-linear and complex to model accurately, especially due to the fluid-structure interaction and the randomness of the wave. The ability of a WEC to recover some of the wave energy depends on the control strategy used and the reliability of the behaviour model. Numerical computation time must remain reasonable in order to allow real-time control. In this context, perfect fluid calculations are used to model the fluid-structure interaction at first order. This diffraction-radiation approach highlights the delay functions of the system, a detailed analysis of which has been carried out in this work and illustrated on a reference case. This thesis proposes to establish a method applica-

ble to the modelling of any type of multi-body WEC. The formulation of the hydrodynamic forces resulting from the assumptions of perfect fluid is then supplemented with semi-empirical terms in order to take into account non-linear effects. The viscous forces represented are particularly influential in the vicinity of the motion resonances. This method also allows the integration of experimental data into the numerical model. Experimental work was therefore carried out in order to understand, quantify and integrate the effects observed experimentally for an anchored body into the numerical model. Finally, elements in favour of an experimental campaign for a two-body system are presented.