Dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique

Achraf Rjeb

▶ **To cite this version:**

Achraf Rjeb. Dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique. Robotique [cs.RO]. Université Clermont Auvergne, 2022. Français. NNT : 2022UCFAC025 . tel-03944777

HAL Id: tel-03944777
https://theses.hal.science/tel-03944777

Submitted on 18 Jan 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Clermont Auvergne
École doctorale des sciences pour l'ingénieur

Thèse présentée par

Achraf RJEB

en vue de l'obtention du grade de

Docteur d'université
Spécialité : informatique

Dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique

Soutenance prévue le 07/06/2022 devant le jury :

Pierre David	*Maître de conférences HDR*	Université de Grenoble	Rapporteur
Thibaud Monteiro	*Professeur des universités*	Université de Lyon	Rapporteur
Jean-Philippe Gayon	*Professeur des universités*	Université Clermont Auvergne	Directeur de thèse
Sylvie Norre	*Professeur des universités*	Université Clermont Auvergne	Directeur de thèse

Ce travail de recherche est cofinancé par l'Union Européenne dans le cadre du Fonds Européen de Développement Régional (FEDER).

Je dédie ce travail...

A mes très chers parents

Affables, honorables, aimables :

Aucune dédicace ne saurait être assez éloquente pour exprimer ce que vous méritez pour tous les sacrifices que vous n'avez cessé de me donner depuis ma naissance, durant mon enfance et même à cet âge.

Que le bonheur, la bonne santé et la paix intérieure soient avec vous en toute heure.

Votre fils, Achraf

A mes très chères sœurs et mon cher frère

En témoignage de l'attachement, de l'amour et de l'affectation que je porte pour vous.

Malgré la distance, vous êtes dans mon cœur.

Je vous dédie ce travail avec mes vœux de bonheur, de santé et de réussite.

A mes chers ami(e)s

Je ne peux trouver les mots justes et sincères pour vous exprimer mon affection et mes pensées, vous êtes pour moi des frères, sœurs et des amis sur qui je peux compter.

Je vous souhaite une vie pleine de santé et de bonheur.

Votre frère, Achraf

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mes directeurs de thèse : **Jean-Philippe Gayon** et **Sylvie Norre** pour tout le temps qu'ils m'ont consacré. Leurs directives précieuses, leur expérience et leurs connaissances ont facilité mon travail. Qu'il voit ici toute ma reconnaissance pour leurs encouragements sans limites et pour la qualité de leur suivi durant toute la période de ma thèse.

Merci aux directeurs du LIMOS **Farouk Toumani** et **Mourad Baiou** ainsi que les personnes du LIMOS pour m'avoir accueilli durant les années de ma thèse. Je tiens à remercier infiniment les personnels administratifs du LIMOS et de l'ISIMA toujours serviables et souriants. Je dis un grand merci à **Bastien Doreau**, **Béatrice Bourdieu**, **Séverine Miginiac**, **Martine Caccioppoli** et **Pascale Granet** pour m'avoir aidé et pour tous les services qu'ils m'ont rendus.

J'exprime toute ma reconnaissance envers l'équipe du **Factolab** ainsi que l'équipe **Michelin** pour les collaborations que nous avons eues ensemble. Je remercie particulièrement **Jean-Christophe Fauroux**, **Zine Elabidine Chebab** et **Jean-Marie Dettorre** pour l'accueil qu'ils nous ont réservé et pour l'attention qu'ils nous ont portée pendant nos visites et nos réunions.

Je ne peux tourner la page sans exprimer ma gratitude envers tous les membres de ma famille, merci à **Mohamed**, **Asma**, **Rihab**, **Ibtihel** et **Nesrine** pour votre soutien et vos encouragements. Je remercie infiniment mes chers parents pour tout ce qu'ils ont fait pour moi et pour leurs invocations et encouragements, ça n'était pas facile de réaliser ce travail loin d'eux.

Résumé

Cette thèse s'intéresse au problème de dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique. L'objectif est de déterminer le nombre de robots nécessaires afin d'exécuter un ensemble d'opérations de transport de la zone de réception vers la zone de stockage.

Dans une première partie, nous considérons le cas d'une flotte homogène, composée de robots identiques. Dans le cas de charges homogènes, le nombre optimal de robots est donné par une simple formule analytique lorsqu'il n'y a pas d'attente pour le chargement et le déchargement. Lorsqu'il peut y avoir de l'attente pour le chargement et le déchargement, nous proposons un algorithme permettant de déterminer le nombre optimal de robots. Dans le cas de charges hétérogènes, le problème peut être vu comme un problème de Bin Packing. Nous considérons également une variante où le transport de charges s'effectue entre la zone de stockage et la zone d'expédition, avec un ou plusieurs transstockeurs.

Dans une deuxième partie, nous considérons une flotte hétérogène, composée de robots de plusieurs types, différenciés par leur vitesse, leur capacité à transporter certaines charges et leurs coûts. Le problème peut être formulé par un programme linéaire en nombres entiers pour des charges homogènes ou hétérogènes. Dans le cas de charges homogènes, nous proposons une heuristique n'utilisant qu'un seul type de robots et nous montrons qu'elle est quasiment optimale lorsque l'horizon de temps est grand devant le temps de transport d'une charge et lorsque le nombre de robots nécessaires est important.

Mots clés : entrepôt logistique automatisé, logistique interne, tâches de transport, robots, programmation linéaire en nombres entiers.

Abstract

This manuscript addresses the problem of sizing a fleet of robots in a logistics warehouse. The goal is to determine the number of robots needed to perform a set of transport operations from the reception area to the storage area.

In the first part, we consider the case of a homogeneous fleet, made up of identical robots. In the case of homogeneous loads, the optimal number of robots is given by a simple analytical formula when there is no waiting for loading and unloading. Where there may be a wait for loading and unloading, we provide an algorithm to determine the optimal number of robots. In the case of heterogeneous loads, the problem can be seen as a Bin Packing problem. We are also considering a variant where the transport of loads takes place between the storage area and the shipping area, with one or more stacker cranes.

In the second part, we consider a heterogeneous fleet, made up of robots of several types, differentiated by their speed, their capacity to transport certain loads and their costs. The problem can be formulated by an integer linear program for homogeneous or heterogeneous loads. In the case of homogeneous loads, we propose a heuristic using only one type of robot and we show that it is almost optimal when the time horizon is large compared to the transport time of a load and when the number of robots needed is important.

Keywords : automated logistics warehouse, internal logistics, transport tasks, robots, integer linear programming.

Table des matières

Remerciements i

Résumé ii

Abstract iii

Liste des figures ix

Liste des tableaux x

1 Contexte et problématique 1

1.1 La robotique industrielle 2

1.1.1 Historique 2

1.1.2 Les systèmes multi-robots 3

1.1.3 Techniques de circulation des robots 4

1.2 Les entrepôts logistiques automatisés 5

1.2.1 Définition 5

1.2.2 Stockage automatisé 6

a. Transstockeur automatisé AS/RS 6

b. Vertical lift module 8

c. Carousel 8

1.2.3 Transport automatisé 9

a. Véhicule à guidage automatique 9

b. Véhicule autonome intelligent 10
c. Drones 10
1.3 Problèmes liés à la gestion d'une flotte de robots dans les entrepôts logistiques 11
1.4 Description du système étudié 13
1.5 Problématique de la thèse 15
1.6 Plan de la thèse 16

2 Etat de l'art **19**
2.1 Modèles déterministes 20
2.2 Modèles stochastiques 34
2.3 Conclusion 53

3 Flotte homogène **55**
3.1 Charges homogènes 56
3.1.1 Mise en stock 56
a. Pas d'attente pour le chargement et le déchargement 58
b. Une seule station de chargement 63
c. Plusieurs stations de chargement 69
3.1.2 Expédition 79
a. Un seul transstockeur 81
b. Plusieurs transstockeurs 85
3.2 Charges hétérogènes 93
3.2.1 Formulation du problème 93
3.2.2 Étude numérique 96
3.3 Conclusion 98

4 Flotte hétérogène **101**
4.1 Charges homogènes 101
4.1.1 Formulation du problème 102

4.1.2 Heuristique et approximation continue 105
4.2 Charges hétérogènes 114
4.3 Conclusion 118

Conclusion et perspectives **121**

Bibliographie **125**

Table des figures

1.1 Évolution de la robotique industrielle 3
1.2 Un AVS/RS 7
1.3 Un SBS/RS 7
1.4 Un VLM 8
1.5 Un carousel vertical 8
1.6 Un AGV 9
1.7 Un AIV 10
1.8 Un drone 10
1.9 Configuration de l'entrepôt logistique à étudier 13

2.1 Configuration du modèle traité par Maxwell et Muckstadt (1982) 22
2.2 Configuration du modèle traité par Egbelu (1987) 24
2.3 Configuration du modèle traité par Mahadevan et Narendran (1990) 26
2.4 Exemple d'un passage à vide d'un AGV 28
2.5 Configuration du modèle traité par Sinriech et Tanchoco (1992) 30
2.6 Configuration et modélisation du système traité par Ilić (1994) 32
2.7 Configurations du modèle traité par Mantel et Landeweerd (1995) 35
2.8 Niveau inférieur du modèle de Mantel et Landeweerd (1995) 36
2.9 Niveau supérieur du modèle de Mantel et Landeweerd (1995) 36
2.10 Configuration du modèle traité par Rajotia *et al.* (1998) 37
2.11 Configuration du modèle traité par Shen et Kobza (1998) 39
2.12 Définition des temps du modèle de Koo *et al.* (2004) 41

2.13 Configuration du modèle traité par Yifei *et al.* (2010) 44
2.14 Configuration du modèle traité par Choobineh *et al.* (2012) 45
2.15 Modélisation du cycle de transport d'un AGV (Choobineh *et al.*, 2012) . . . 46
2.16 Configurations du modèle traité par Vivaldini *et al.* (2016) 47
2.17 Modélisation de Vivaldini *et al.* (2016) 48
2.18 Configuration d'un modèle traité par Chawla *et al.* (2018b) 50

3.1 Transport de charges homogènes entre A et B avec une flotte homogène . . . 56
3.2 Solution équilibrée d'un modèle de transport sans attente 60
3.3 Solution non équilibrée d'un modèle de transport sans attente 61
3.4 Évolution de de m^* et m^A en fonction de l'horizon de planification T 63
3.5 Attente uniquement au premier chargement si $p \geq m \cdot t_l$ 64
3.6 Attente à tous les chargements si $(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l$ 64
3.7 Évolution du nombre maximal de charges transportées 67
3.8 Attente uniquement au premier chargement si $p \geq \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l$ 70
3.9 Attente à tous les chargements si $(\frac{m}{l} - 1) \cdot t_l < p < \frac{m}{l} \cdot t_l$ et $\frac{m}{l} \in \mathbb{N}$ 71
3.10 Attente pour quelques robots si $(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil - 1) \cdot t_l < p < \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l$ et $\frac{m}{l} \notin \mathbb{N}$ 72
3.11 Transport de charges homogènes entre B et C avec une flotte homogène . . . 79
3.12 Modèle de stockage avec un transstockeur 81
3.13 Attente uniquement au premier chargement si $p \geq m \cdot t_s$ 83
3.14 Attente à tous les chargements si $(m-1) \cdot t_s < p < m \cdot t_s$ 83
3.15 Modèle de stockage avec plusieurs transstockeurs 85
3.16 Exemple de transport avec plusieurs transstockeurs et $t_s \geq p$ 86
3.17 Modèle de transport avec $p > t_s$ et $\theta = m^*$ 87
3.18 Attente uniquement au premier chargement si $p \geq \left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil \cdot t_s$ 88
3.19 Attente à tous les chargements si $(\frac{m}{\theta} - 1) \cdot t_s < p < \frac{m}{\theta} \cdot t_s$ 89
3.20 Attente pour quelques robots si $(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l$ 90

3.21 Transport de charges hétérogènes entre A et B avec une flotte homogène et stockage dédié 93
3.22 Évolution de m^*, m^A et m^G en fonction de l'horizon de planification T . . . 97
3.23 Évolution du temps de calcul en fonction de l'horizon de planification T . . . 97

4.1 Transport de charges homogènes entre A et B avec une flotte hétérogène . . 102
4.2 Différentes solutions possibles 107
4.3 Évolution de C^* et C^+ en fonction de T et n 113
4.4 Modèle de transport entre la zone A et la zone B 115
4.5 Répartition des charges selon la solution optimale obtenue 118

Liste des tableaux

1.1 Techniques de circulation de robots dans un SMR (Lynch *et al.*, 2018) 5

2.1 Tableau récapitulatif des modèles déterministes 34

2.3 Tableau récapitulatif des modèles stochastiques 52

3.1 Tableau récapitulatif des modèles traités dans ce chapitre 99

4.1 Instance 106

4.2 Solutions optimales selon les types de robots autorisés 107

4.3 Données de l'étude 112

4.4 Données de l'instance 118

Chapitre 1

Contexte et problématique

Les entrepôts logistiques font partie des maillons les plus importants dans toute chaîne logistique. La bonne gestion des entrepôts est un facteur clé pour la réussite de l'entreprise et pour garantir une haute performance industrielle. Grâce à la performance de l'entrepôt, chaque entreprise peut mettre en place des stratégies logistiques (réguler ou accélérer la production). Aujourd'hui, à travers les Systèmes Multi-Robots (SMR), on parle d'automatisation des systèmes logistiques. Ce concept est devenu une préoccupation essentielle pour tout entrepôt souhaitant avoir des performances élevées dans son avenir industriel. De plus, l'automatisation d'un entrepôt logistique permet d'optimiser l'ensemble des opérations (rapidité, précision, organisation, ...) et de garantir une très grande efficacité industrielle grâce à un traitement rapide des commandes, une grande précision dans la gestion de stock et une capacité de stockage élevée.

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux entrepôts logistiques automatisés en traitant le problème de dimensionnement d'une flotte de robots. Le problème de dimensionnement (appelé en anglais fleet sizing problem) est un problème fondamental dans la gestion des SMR. Dans ce chapitre, nous allons décrire le contexte de notre travail avant de positionner notre problème par rapport à l'état de l'art dans le chapitre suivant.

Dans une première section, nous définissons la robotique industrielle et présentons son évolution dans le monde industriel. Nous nous focalisons en particulier sur les SMR pour

comprendre leur utilité, leurs avantages et les techniques utilisées. Dans une deuxième section, nous présentons les entrepôts logistiques automatisés, leurs avantages et les solutions automatisées de transport et de stockage existant actuellement dans les entrepôts. Dans une troisième section, nous mettons l'accent sur les problèmes d'optimisation liés à la gestion des opérations au sein des entrepôts logistiques et les classer selon les trois niveaux décisionnels : stratégique, tactique et opérationnel. La quatrième section de ce chapitre est consacrée à la description du système étudié. Dans la cinquième section nous expliquons la problématique de notre travail. Dans la dernière section, nous présentons les contributions de notre travail et le plan de ce manuscrit.

1.1 La robotique industrielle

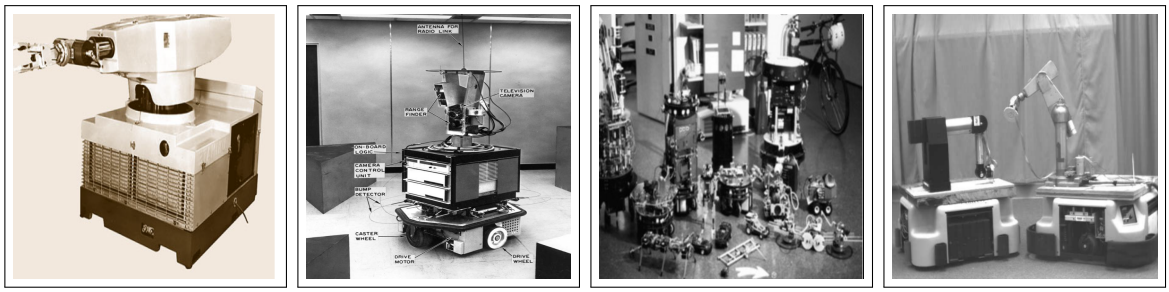
1.1.1 Historique

La robotique est devenue indispensable dans l'industrie et est une préoccupation majeure dans les travaux de recherche. L'usage de la robotique n'est pas limité au domaine industriel. Selon Hazan et Bouyoucef (2013), il y a des applications dans le domaine médical (opérations et diagnostiques), domestique (tâches ménagères), militaire (arme, drones, etc.) et scientifique (exploration spatiale et sous-marine).

Dans un contexte industriel, la robotique permet d'augmenter la robustesse, la flexibilité et l'efficacité du système (Hazan et Bouyoucef, 2013). L'existence de plateformes industrielles robotisées dans une unité industrielle reflète, évidemment, le niveau de sa performance et de sa fiabilité. Le premier robot industriel UNIMATION (figure 1.1(a)) a été créé en 1961 pour manipuler les pièces de fonderie dans l'usine de General Motors. A partir de cette année, les industriels ont réussi à installer des lignes robotisées de production, de peinture, ... , mais on ne parle alors que de robots fixes à bâti statique.

Dans le but d'avoir un système plus flexible et plus adaptatif, la société américaine SRI a présenté le premier robot mobile Shakey (figure 1.1(b)) au Stanford Research Institute en

1969 [1] . Avec la même intention, le laboratoire LAAS (Laboratoire d'Analyse et d'Architecture de Systèmes - CNRS Toulouse) a présenté également le premier robot mobile français en 1977. Après une évolution remarquable de la robotique industrielle, la notion de SMR est apparue en 1989 afin de remplacer un grand robot par un ensemble de petits robots Rovers (figure 1.1(c)) (Mouad, 2014). En 1994, le laboratoire américain GRASP a présenté le premier SMR coopératif (figure 1.1(d)) constitué de deux robots mobiles ayant chacun un bras manipulateur permettant le transport de charges d'une façon collective, c'est-à-dire, les deux robots coopèrent afin de transporter une charge ensemble.



(a) UNIMATION 1961[2] (b) SHAKEY 1969 (Mouad, 2014) (c) SMR Rovers 1989 (Brooks et Flynn, 1989) (d) Robots coopératifs (Adams *et al.*, 1995)

FIGURE 1.1 – Évolution de la robotique industrielle

1.1.2 Les systèmes multi-robots

Un système multi-robots (SMR) est un système composé d'un ensemble de robots connectés entre eux (communication, coopération, ...) afin d'augmenter l'efficacité de l'exécution de tâches ou d'effectuer des tâches impossibles à réaliser avec un seul robot. Ces robots, selon Hazan et Bouyoucef (2013), peuvent être homogènes ou hétérogènes, mobiles ou fixes.

Les SMR présentent plusieurs avantages :

- Mettre en place plusieurs robots simples est plus facile que mettre en place un seul robot complexe et puissant ;
- Augmenter la robustesse du système grâce à la redondance ;

1. 2. International federation of robotics. `https://ifr.org/`, 2019-03. Accessed : 2019-03-11.

– Assurer la flexibilité à travers l'exécution des tâches de plusieurs manières ;

– Diminuer le temps d'exécution des tâches (fonctionnement en parallèle).

1.1.3 Techniques de circulation des robots

La fonction principale des robots dans un SMR est de se déplacer dans leur environnement afin d'effectuer la tâche demandée. La circulation de véhicules est donc, d'une grande importance pour la performance industrielle.

Il existe cinq techniques majeures de circulation de véhicules dans un SMR. Le tableau 2.1 montre les cinq techniques de circulation de robots ainsi que la base de fonctionnement de chaque technique.

Techniques	Description
Filoguidage	Le véhicule a une piste bien déterminée tracée dans/sur le sol à suivre. Le guidage se fait en détectant un signal transmis par la piste. Ce système est adapté aux applications simples ou spécifiques, qui ne prévoit pas de souplesse.
Optoguidage	Le véhicule utilise des caméras embarquées afin de suivre une ligne tracée sur le sol. Le principe est le même que le filoguidage mais avec moins de complexité.
Laser-guidage	Le véhicule est guidé par plusieurs points de référence fixes qui sont détectés par un capteur laser situé au sommet de chaque véhicule. Cette technique permet au véhicule d'avoir une vitesse de circulation élevée et une grande flexibilité de circulation.
Guidage par code-barres / QR	Ce type de robots circule en utilisant un lecteur de codes-barres monté en bas du véhicule capable de lire les codes 2D collés sur le sol. Une fois que les codes collés sur le sol sont usés, le SMR peut rencontrer des problèmes compliqués comme le problème de blocage.
Géoguidage	Le véhicule se repère dans son environnement en reconnaissant les agencements de son environnement : machines, murs, etc. Afin de se localiser, le véhicule effectue une analyse en temps réel de ce qu'il scanne avec la carte de référence fournie lors de l'installation.

TABLEAU 1.1 – Techniques de circulation de robots dans un SMR (Lynch *et al.*, 2018)

Dans la section suivante, nous allons définir les entrepôts logistiques automatisés et présenter des outils d'automatisation qui existent dans ces entrepôts.

1.2 Les entrepôts logistiques automatisés

1.2.1 Définition

L'entrepôt logistique est un endroit de réception et de stockage de tous types de produits. Les entrepôts logistiques sont la base de toute chaîne d'approvisionnement et un facteur de

réussite de toute entreprise (Frazelle, 2002). Ils sont considérés comme un outil indispensable permettant à toute entreprise d'avoir une haute performance pour son avenir industriel (Vivaldini *et al.*, 2016).

Un entrepôt logistique automatisé est un entrepôt dont les opérations de transport et de stockage sont robotisées et digitalisées. Cette automatisation se fait à travers des solutions automatisées développées par différents acteurs industriels dans le but d'obtenir une grande performance industrielle (Baker et Halim, 2007) à travers :

- Une augmentation de la capacité et de l'espace de stockage ;
- Une rapidité de traitement des commandes ;
- Une précision importante dans la gestion des commandes.

Dans les parties suivantes de cette section, nous allons présenter des solutions automatisées utilisées actuellement dans les entrepôts logistiques.

1.2.2 Stockage automatisé

Selon Lenoble (2017), il existe plusieurs systèmes de stockage automatisé dans les entrepôts logistiques tels que : le transstockeur automatisé, le système VLM (Vertical Lift Module) et le système Carousel.

a. Transstockeur automatisé AS/RS

La version la plus basique d'un transstockeur automatisé, appelé aussi AS/RS (Automated Storage and Retrieval System), comprend un ou plusieurs robots manipulant des références entre deux rangées de racks. D'après Lenoble (2017), il existe deux variantes des AS/RS : les systèmes Autonomous Vehicle Storage and Retrieval Systems (AVS/RS) et les systèmes Shuttle Based Storage and Retrieval Systems (SBS/RS).

Autonomous Vehicle Storage and Retrieval Systems

La figure 1.2 montre un Autonomous Vehicle Storage and Retrieval Systems (AVS/RS). Un AVS/RS contient un véhicule autonome pour chaque niveau horizontal effectuant des déplacements pour récupérer ou placer une référence. Une plateforme élévatrice effectue le mouvement vertical dans chaque allée. La référence demandée sera extraite via une coordination entre la plateforme élévatrice (mouvement vertical) et le véhicule (déplacement horizontal) (Lenoble, 2017).

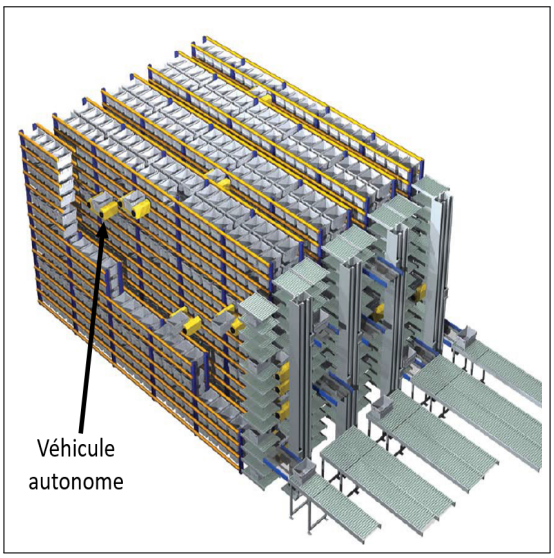


FIGURE 1.2 – Un AVS/RS
(Azadeh *et al.*, 2016)

Shuttle Based Storage and Retrieval Systems

La figure 1.3 montre un Shuttle Based Storage and Retrieval Systems (SBS/RS). Généralement, les SBS/RS sont utilisés pour le stockage de bacs. La différence entre un AVS/RS et un SBS/RS est le type d'équipement utilisé pour le mouvement horizontal. En effet, Les AVS/RS utilisent un véhicule autonome pour chaque niveau horizontal, par contre, les SBS/RS utilisent un équipement appelé nacelle mobile qui couvre plusieurs niveaux horizontaux à la fois. Aux extrémités des allées, un système élévateur récupère le produit de la nacelle pour l'extraire jusqu'à l'opérateur (Lenoble, 2017).

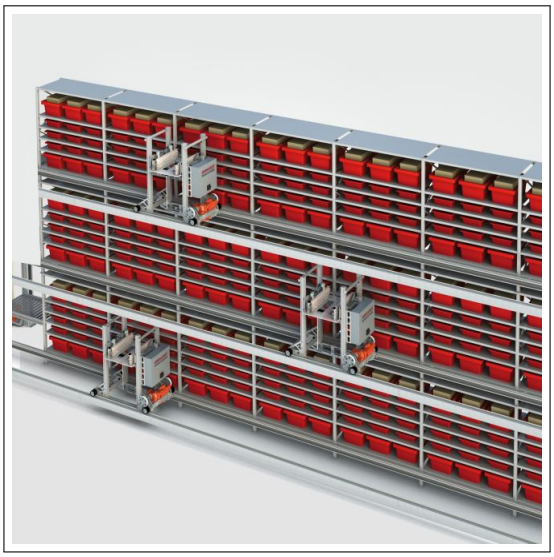


FIGURE 1.3 – Un SBS/RS
(Lenoble, 2017)

b. Vertical lift module

La figure 1.4 montre un Vertical Lift Module (VLM). Le VLM est une solution plus économique et moins encombrante que les systèmes AS/RS. Le VLM est composé d'un ensemble de plateaux de stockage horizontaux. Une plateforme élévatrice se déplace verticalement pour récupérer le produit demandé et stocké sur l'un des plateaux et le positionner au point d'ouverture de la machine où il sera extrait à travers un système horizontal. (Lenoble, 2017).

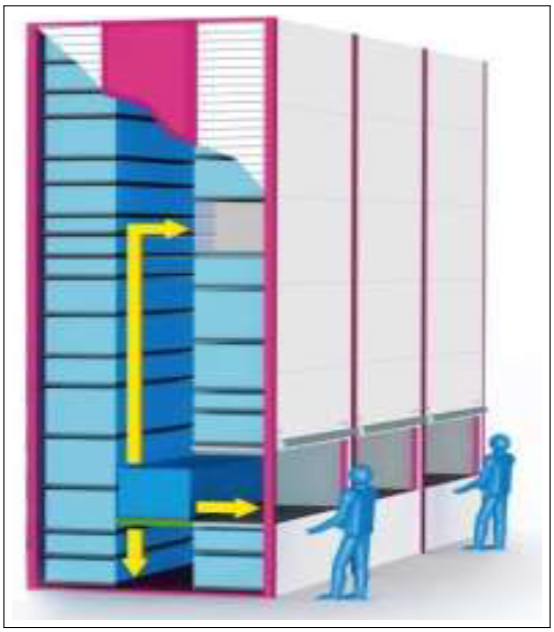


FIGURE 1.4 – Un VLM
(Lenoble, 2017)

c. Carousel

La figure 1.5 montre un type de carousel. Une chaîne relie les plateaux à l'intérieur du carousel effectuant des rotations autour de deux axes parallèles afin de bien positionner le plateau demandé face au point d'ouverture du carousel. Il existe deux types de carousel : le carousel vertical dont les axes sont horizontaux et un carousel horizontal dont les axes sont verticaux.

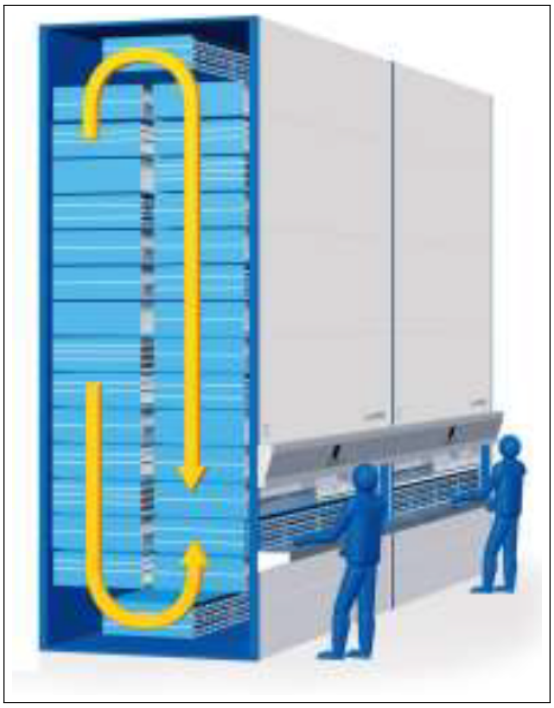


FIGURE 1.5 – Un carousel vertical
(Lenoble, 2017)

Le système le plus utilisé dans les entrepôts est le transstockeur automatisé AS/RS.

1.2.3 Transport automatisé

Pour effectuer les opérations de transport au sein d'un entrepôt logistique, il existe plusieurs solutions automatisées présentées dans les paragraphes suivants, telles que les véhicules à guidage automatique AGV, les véhicules autonomes intelligents AIV et les drones.

a. Véhicule à guidage automatique

Un véhicule à guidage automatique (Automated Guided Vehicle = AGV) est un système de transport autonome utilisé pour le déplacement de produits. Il s'agit d'un robot mobile capable de transporter des charges d'un lieu à un autre selon les demandes de la plateforme logistique dans un entrepôt (Digani *et al.*, 2016). Il utilise le filoguidage ou l'optoguidage comme technique de circulation, c'est-à-dire il ne peut suivre que des itinéraires fixes.

FIGURE 1.6 – Un AGV (IKVROBOT, 2021)

b. Véhicule autonome intelligent

Les véhicules autonomes intelligents (Autonomous Intelligent Vehicle = AIV) sont conçus pour fonctionner de manière dynamique dans des environnements difficiles en se déplaçant dans des passages étroits et des zones à trafic intense. Contrairement aux AGV, un AIV utilise le géoguidage comme technique de circulation, il est capable de circuler en toute sécurité et de planifier des itinéraires alternatifs en cas d'obstacle.

FIGURE 1.7 – Un AIV
(EuropaSystems, 2021)

c. Drones

L'utilisation de drones dans les entrepôts a augmenté ces dernières années. En effet, la notion de drone s'est présentée très récemment dans le secteur logistique et pourrait devenir un élément majeur dans l'automatisation des entrepôts.
Selon Wawrla *et al.* (2019), cette technologie pourra remplir trois fonctions spécifiques au sein de la chaîne logistique :

FIGURE 1.8 – Un drone
(Sorbelli *et al.*, 2019)

- Logistique interne : entre plusieurs zones de l'entrepôt, entre plusieurs entrepôts ou entre l'atelier et l'entrepôt ;
- Inspection et surveillance de l'entrepôt : inspecter l'état des entrepôts ou réaliser une inspection technique des rayonnages et constituer un nouveau système de surveillance, en contrôlant l'accès d'intrus dans l'entrepôt ;
- Gestion de l'inventaire : gérer l'inventaire de manière rapide et efficace.

Dans le but de bien positionner le problème de dimensionnement de flotte dans les entrepôts logistiques, nous allons présenter dans la section suivante quelques problèmes liés à la gestion de flotte dans le contexte industriel.

1.3 Problèmes liés à la gestion d'une flotte de robots dans les entrepôts logistiques

Depuis l'apparition des SMR et son intégration dans les unités industrielles, la littérature s'est enrichie en traitant plusieurs problèmes tels que la conception du système de circulation, le dimensionnement de flottes de véhicules, la planification des opérations de transport, le positionnement de véhicules, la gestion de batteries et la gestion des conflits.

Le-Anh (2005) propose une classification de ces problèmes selon trois niveaux décisionnels : stratégique, tactique et opérationnel. Nous présentons ci-dessous la classification de Le-Anh (2005).

Au niveau stratégique, nous trouvons les décisions qui ont un impact à long terme et qui concernent des investissement élevés (Rouwenhorst *et al.*, 2000). Le problème majeur à ce niveau est la conception de l'entrepôt. D'après Ashayeri et Gelders (1985), la conception de l'entrepôt logistique consiste à choisir la bonne méthode / stratégie de stockage, choisir les équipements et les outils adéquats et déterminer la configuration de l'entrepôt. La conception d'un d'entrepôt logistique est un processus primordial étant donné qu'il a un rôle direct sur la performance de l'entrepôt. Cette conception doit prendre en compte les points suivants : l'exécution des opérations, l'augmentation de l'efficacité et la réduction des dépenses.

Au niveau tactique, nous trouvons les décisions à moyen terme. Les problèmes tactiques concernent le dimensionnement des ressources et les décisions d'organisation (Rouwenhorst *et al.*, 2000). Les problèmes du niveau tactique sont :

- Problème de dimensionnement de flotte : Le problème de dimensionnement d'une flotte (fleet sizing) consiste à déterminer le nombre optimal de véhicules capables d'exécuter

l'ensemble des tâches demandées dans un horizon de planification donné avec un objectif précis : un coût total minimal (Sinriech et Tanchoco, 1992), un temps total d'attente à ne pas dépasser (Koo *et al.*, 2004), etc.

- Problème d'ordonnancement : Ce problème traite l'affectation des tâches aux véhicules pour exécuter un ensemble de tâches de chargement/déchargement pour atteindre certains objectifs sous des contraintes données en fixant leurs dates de début et l'ordre de l'exécutuion.
- Positionnement de dépôt de véhicule : Ce problème consiste à choisir les emplacements des dépôts des véhicules d'une façon optimale permettant d'anticiper les prochaines tâches de transport dans le but de minimiser l'inactivité des véhicules (éviter le déchargement de la batterie).
- Gestion de la batterie : Ce problème consiste à déterminer les intervalles de changement de batteries dans des zones spécifiques et à estimer le nombre nécessaire de batteries pour éviter l'inactivité de véhicules pendant l'exécution des tâches de transport.

Au niveau opérationnel, l'exécution des tâches doit respecter les décisions stratégiques et tactiques. Les problèmes principaux à ce niveau concernent les problèmes de contrôle des ressources et de résolution de problèmes (Rouwenhorst *et al.*, 2000).

- Problème de routage : Le problème de routage du véhicule détermine le trajet à emprunter et l'ordre des tâches à exécuter.
- Résolution de blocage : Ce problème consiste à tracer la stratégie d'intervention en cas de blocage entre les véhicules pour débloquer la situation et éviter des temps d'attente supplémentaires. En utilisant les robots autonomes, la résolution de ce problème ne nécessite pas l'intervention humaine vu qu'ils sont capables de planifier des itinéraire alternatifs pour s'en sortir.

Dans la section suivante, nous allons présenter le cadre de notre travail en décrivant la configuration de l'entrepôt étudiée, notre problématique et nos contributions.

1.4 Description du système étudié

Dans cette thèse nous nous intéressons au problème de dimensionnement de robots dans un entrepôt logistique. La figure 1.9 présente la configuration de l'entrepôt logistique que nous allons étudier avec les différentes zones et opérations. Cet entrepôt logistique se compose au minimum de trois zones de base (zone de réception, zone de stockage et zone d'expédition), de deux zones de transport (entre les zones de base), de stations de chargement et de stations de déchargement.

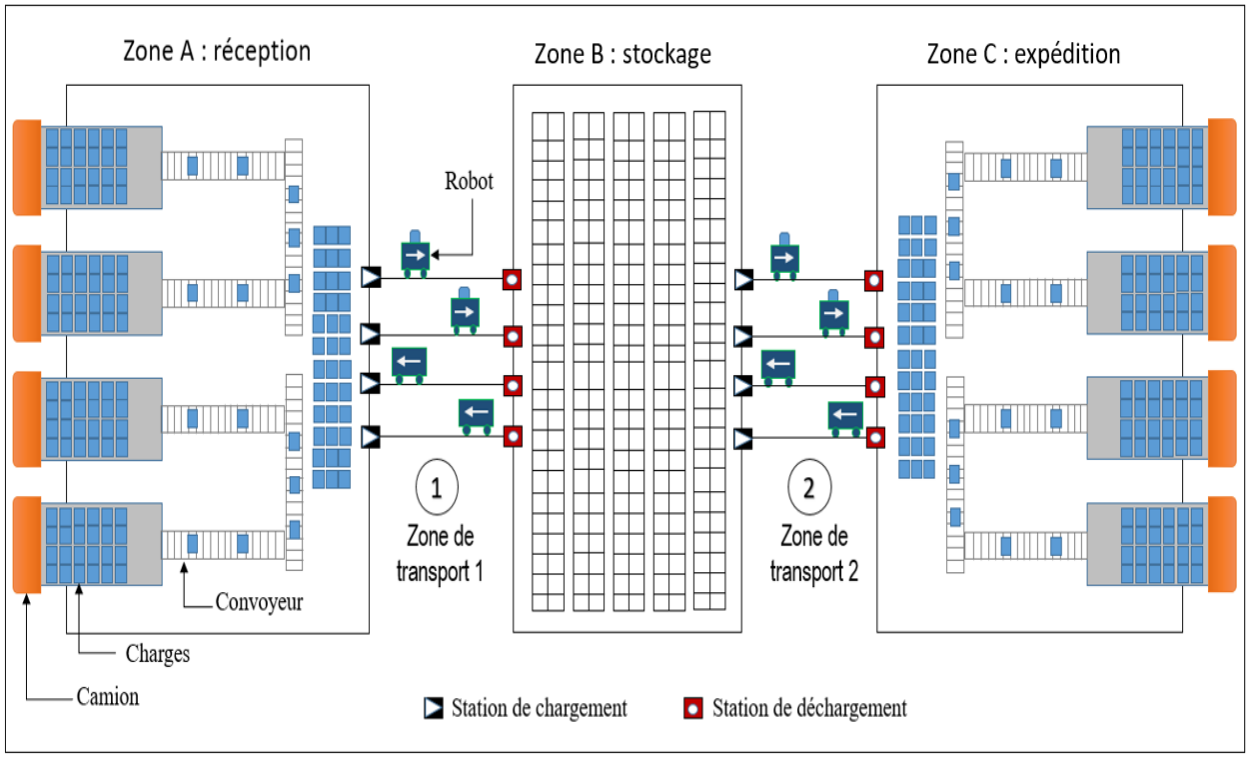


FIGURE 1.9 – Configuration de l'entrepôt logistique à étudier

Zone de réception de produits : C'est une zone de déchargement des camions à travers des quais à l'entrée de la zone. Le déchargement se fait par outil manuel (ouvrier) ou automatisé (robot manipulateur) posant la charge sur un moyen de transport qui les déplace vers la sortie de cette zone pour les envoyer en stock. Il existe d'autres opérations dans cette zone. Il y a la phase de contrôle et d'inspection quantitatif et qualitatif pour signaler les manques en nombre ou des produits défectueux. Ensuite, ces produits sont scannés et triés pour être

référencés et enregistrés dans le système de gestion de stock de l'entrepôt.

Zone de stockage : C'est une zone d'attente pour les produits avant la livraison. A l'entrée de la zone, le système de stockage s'occupe de la mise en stock de toute charge venant de la zone de réception. A la sortie, le système s'occupe de la recherche et de la livraison des charges demandées par la zone de préparation de commandes (expédition). La mise en stock de chaque produit se fait selon une stratégie définie préalablement par l'entreprise. Nous pouvons citer les stratégies de stockage les plus utilisées selon Gu *et al.* (2007) :

- Stockage aléatoire où toutes les places dans l'entrepôt ont une probabilité égale d'être remplies ;
- Stockage dans l'emplacement le plus proche ;
- Stockage dédié où il existe un emplacement spécifique pour chaque produit ;
- Stockage basé sur l'importance des produits où les plus vendus sont les plus proches de la zone d'expédition.

Nous supposons que le stockage dans notre système étudié se fait par un ou plusieurs trans-stockeurs automatisés permettant la mise en stock et le picking des charges.

Zone d'expédition : C'est une zone de départ des produits vers d'autres distributeurs ou clients du réseau de distribution. Dans cette zone, les produits venant de la zone de stockage seront chargés (manuel ou automatisé) dans les camions à destination des clients. Avant d'être chargés, parfois et selon le type de produit, les produits doivent être emballés dans cette zone afin d'assurer leur transport en toute sécurité.

Zone de transport 1 : C'est un flux de transport de charges entre la zone de réception et la zone de stockage. Dans cette zone, le système de transport consiste à mobiliser une flotte de robots pour transporter les charges de la zone de réception vers la zone de stockage.

Zone de transport 2 : C'est un flux de transport de charges entre la zone de stockage et la zone d'expédition. Dans cette zone, le système de transport consiste à mobiliser une flotte de robots pour transporter les charges de la zone de stockage vers la zone d'expédition.

Stations de chargement / déchargement : Ce sont des stations que les robots utilisent pour récupérer / livrer les charges. Les stations de chargement se situent à la sortie de la zone de réception et à la sortie de la zone de stockage. Les stations de déchargement se situent à l'entrée de la zone de stockage et à l'entrée de la zone d'expédition.

1.5 Problématique de la thèse

Dans le contexte des entrepôts logistiques, l'estimation du nombre de robots a une grande importance sur la performance globale du système. Plusieurs problèmes peuvent survenir en fonction de la taille de flotte trouvée. La mise en œuvre d'une flotte plus petite ou plus grande que la taille nécessaire peut endommager le fonctionnement de tout le système industriel et engendrer des pertes économiques importantes. Une sous-estimation de la taille de la flotte peut diminuer l'efficacité et la rapidité du système en augmentant l'utilisation de robots et en créant des temps d'attente supplémentaires des charges dûs à l'indisponibilité des robots. Une sur-estimation de la taille de la flotte peut réduire l'espace de travail requis et créer des problèmes de blocage et de congestion. Cela peut conduire à une diminution de l'utilisation de robots et à une augmentation des temps d'attente des robots devant les stations de chargement/ déchargement.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons au problème de dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique ayant la configuration de la figure 1.9. Le problème de dimensionnement consiste à déterminer le nombre de robots capables d'exécuter un ensemble de tâches dans une zone de transport sur un horizon de planification donné. Pour une flotte de robots homogènes, nous chercherons à déterminer le nombre minimal de robots permettant l'exécution d'un ensemble de tâches sur horizon donné. Pour une flotte

de robots hétérogènes, nous introduisons une fonction de coût intégrant différents aspects (achat, maintenance, fonctionnement, ...). L'objectif est alors de déterminer la taille de la flotte de coût minimal.

1.6 Plan de la thèse

Dans le chapitre 2, nous présentons un état de l'art des travaux traitant le problème de dimensionnement de flotte de robots dans un contexte industriel pour positionner notre travail. Nous classifions les travaux de la littérature en deux catégories : modèles déterministes et modèles stochastiques. Dans chaque catégorie, nous présentons les modèles proposés afin d'identifier le cadre, les hypothèses, les méthodes et les résultats de chaque modèle. A la fin de ce chapitre, nous présentons les points qui seront la base de notre travail par la suite, c'est-à-dire, les points manquants ou non traités dans la littérature et qui donnent une idée sur nos contributions par rapport à ce qui a été déjà fait.

Dans le chapitre 3, nous étudions le problème de dimensionnement pour le cas d'une flotte homogène, c'est-à-dire, des robots complètement identiques. La première section de ce chapitre présente les modèles de transport de charges homogènes. Nous commençons notre étude par des modèles mobilisant une flotte homogène pour transporter des charges de même type entre la zone de réception et la zone de stockage selon le nombre de stations de chargement / déchargement dans le système (le cas sans attente pour le chargement et le déchargement, le cas avec une seule station de chargement dans le système et le cas avec plusieurs stations de chargement). Suite à une formulation analytique, nous proposons un algorithme simple permettant la résolution de chaque modèle. Ensuite, et avec le même principe, nous étudions également le problème de dimensionnement entre la zone de stockage et la zone d'expédition. En présence d'un système de transstockeur automatisé au niveau du stock, un délai de picking sera rajouté au temps de fonctionnement du système. Ce délai est le temps nécessaire pour que le transstockeur cherche et extraie une charge demandée à une station de chargement située à la sortie de la zone de stockage. Nous étudions l'influence de ce délai supplémen-

taire sur l'estimation du nombre de robots entre ces deux zones en fonction du nombre de transstockeurs dans le système. Nous traitons plusieurs cas : le cas avec un seul transstockeur dans le système et le cas avec plusieurs transstockeurs. De la même façon que pour le premier modèle, nous proposons un algorithme permettant la détermination du nombre optimal de robots. Dans la deuxième section de ce chapitre, nous traitons le problème de transport de charges hétérogènes entre la zone de réception et la zone de stockage. Nous étudions un modèle de transport avec un stockage dédié où chaque type est stocké dans un endroit précis de l'entrepôt. Nous formulons ce problème par un Bin Packing. Nous utilisons l'outil Cplex Optimizer pour tester nos approches.

Dans le chapitre 4, nous traitons le problème de dimensionnement d'une flotte de robots hétérogènes. L'existence de plusieurs types de robots dans le système nécessite l'intégration de l'aspect économique dans la procédure de dimensionnement. Dans la première section, nous traitons un modèle de transport entre la zone de réception et la zone de stockage mobilisant une flotte de robots hétérogènes permettant de transporter un ensemble de charges homogènes. Dans la deuxième section, nous reprenons le problème avec plusieurs types de charge avec un stockage dédié. Nous proposons une nouvelle structure de coûts et nous utilisons la programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) pour optimiser la taille de la flotte en se basant sur les expressions des coûts proposées pour chaque modèle. Nous utilisons également l'outil Cplex Optimizer pour mener quelques expérimentations numériques.

Chapitre 2

Etat de l'art

Le problème de dimensionnement de flotte de robots a été abordé, pour la première fois, par Maxwell et Muckstadt (1982). Ce problème a ensuite retenu l'attention de chercheurs scientifiques impliqués dans ce domaine afin de le traiter pour différentes unités industrielles et de proposer aux industriels des nouvelles méthodes et solutions permettant sa résolution.

Les premiers travaux traitent le problème de dimensionnement d'une façon simplifiée avec des méthodes analytiques pour des modèles déterministes dont les tâches à exécuter sont connues à l'avance afin d'obtenir une solution proche de la valeur optimale.

Ganesharajah *et al.* (1998) et Choobineh *et al.* (2012) présentent chacun un état de l'art basé sur deux classifications différentes. D'après Ganesharajah *et al.* (1998), les travaux de dimensionnement de flotte de robots peuvent être classés selon deux catégories :

1. Modèles analytiques
   - Modèles déterministes (programmation linéaire, programmation en nombres entiers) ;
   - Modèles stochastiques (théorie des files d'attente) ;
2. Modèles de simulation.

Choobineh *et al.* (2012) considèrent que les modèles de dimensionnement de flotte peuvent être classés en quatre catégories :

1. Modèles de simulation à événement discret et continu ;
2. Calcul comprenant un ensemble de calculs simples ;
3. Modèles de recherche opérationnelle déterministes, y compris la programmation linéaire et en nombres entiers ;
4. Modèles stochastiques comprenant la théorie des files d'attente.

Nous avons constaté que plusieurs travaux pouvaient être placés dans plusieurs catégories à la fois. Par exemple Koo *et al.* (2004) propose un modèle de simulation basé sur la théorie des files d'attente. Dans ce cas, ce travail peut être classé dans les catégories 1 et 2 de Ganesharajah *et al.* (1998) ou bien dans les catégories 1 et 4 de Choobineh *et al.* (2012). Dans notre travail, nous classifions les travaux en deux catégories : des modèles déterministes et des modèles stochastiques. Les modèles déterministes sont généralement des modèles analytiques simples avec des hypothèses simplificatrices. Les modèles stochastiques sont généralement basés sur la théorie des files d'attente ou la simulation où un ou plusieurs temps sont aléatoires.

Dans les sections 2.1 et 2.2 nous présentons un état de l'art de travaux de recherches traitant le problème de dimensionnement dans un contexte industriel en les classant en modèles déterministes et modèles stochastiques. A travers cet état de l'art, nous voulons suivre l'évolution et la diversification des modèles proposés. Pour chaque travail, nous allons présenter le cadre d'étude, les hypothèses, les méthodes utilisées et les limites de chaque modèle.

2.1 Modèles déterministes

Les modèles déterministes sont généralement des modèles analytiques. Dans les premiers travaux, le nombre minimal d'AGV est le plus petit entier supérieur ou égal au réel obtenu par la division du temps total de fonctionnement par l'horizon de planification

$$m = \left\lceil \frac{\text{temps total de fonctionnement}}{\text{horizon de planification}} \right\rceil . \tag{2.1}$$

Le temps total de fonctionnement est composé du temps de circulation des robots chargés, du temps de circulation des robots à vide, du temps de chargement / déchargement et du temps total d'attente. Le temps total d'attente contient les temps d'attente dûs aux blocages, aux problèmes de batterie et aux temps d'attente devant les stations de chargement et de déchargement.

L'objectif des modèles analytiques est de déterminer le temps total de fonctionnement. Les tâches de transport sont connues au début de l'horizon de planification, ce qui facilite le calcul du temps de circulation des robots chargés. Pour déterminer les autres temps, tous les modèles utilisent des hypothèses simplificatrices qui concernent généralement les temps difficiles à déterminer analytiquement : le temps de circulation à vide et le temps total d'attente. Ces hypothèses consistent à ne pas prendre en compte un ou plusieurs problèmes dans le modèle comme le blocage ou l'inactivité d'un robot suite au déchargement de la batterie.

Maxwell et Muckstadt (1982)

Le premier travail traitant le problème de dimensionnement dans un contexte industriel est celui de Maxwell et Muckstadt (1982). Ils proposent un modèle déterministe pour estimer le nombre minimum d'AGV pour un nombre donné de tâches de transport dans un système de production composé de plusieurs ateliers de fabrication ayant chacun une station de chargement / déchargement avec une circulation unidirectionnelle d'AGV. Chaque produit arrive dans le système à travers une zone de stockage où il attend son tour pour être transporté jusqu'aux ateliers pour entamer son processus de fabrication selon un ordre de routage précis. Une fois le produit fini, il passe de nouveau à la zone de stockage pour attendre son expédition.

La figure 2.1 montre la configuration du modèle traité par Maxwell et Muckstadt (1982).

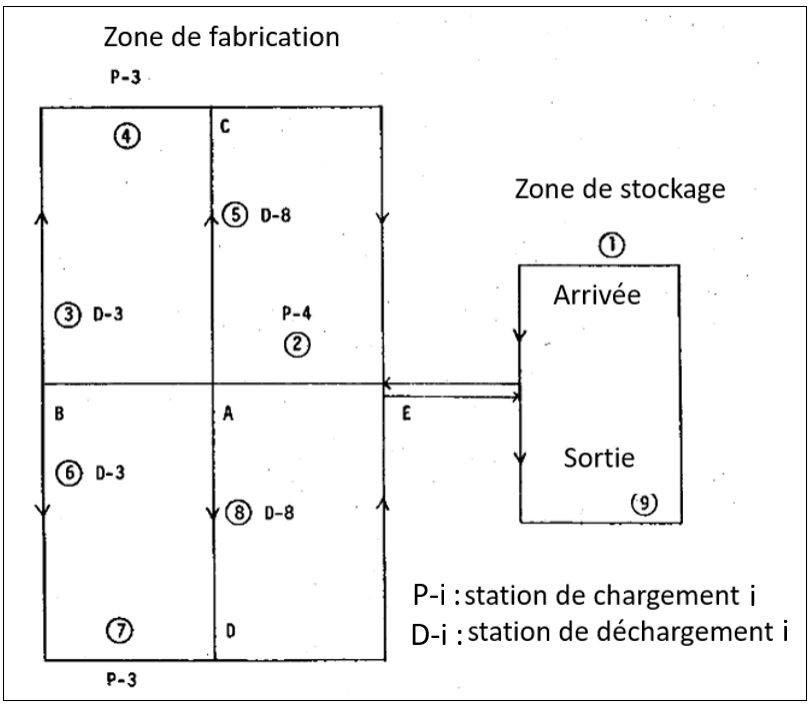


FIGURE 2.1 – Configuration du modèle traité par Maxwell et Muckstadt (1982)

Dans ce modèle, Maxwell et Muckstadt (1982) utilisent un système de contrôle de zone permettant d'éviter le blocage de véhicules au niveau des intersections en autorisant le passage d'un seul AGV à la fois. Avec ce système, les temps de blocage sont éliminés. En plus, ils supposent que les charges à transporter sont toujours disponibles, c'est-à-dire, le temps d'attente de véhicules dans le système est nul. Avec ces hypothèses, il suffit de calculer le temps de circulation des AGV chargés, le temps total de chargement / déchargement et le temps de circulation des AGV à vide. Pour ce faire, le modèle utilise les données du problème pour calculer le temps de circulation des AGV chargés ainsi que le temps total de chargement / déchargement. Concernant le temps de circulation à vide, Maxwell et Muckstadt (1982) développent un programme linéaire permettant la minimisation du nombre total de déplacements à vide des AGV. Une fois les temps déterminés, le nombre d'AGV nécessaires sera obtenu en utilisant la formule 2.1.

A la fin de leur travail, un modèle de simulation déterministe a été développé en tenant compte du problème de blocage. L'objectif de ce modèle est d'utiliser le nombre d'AGV

obtenu analytiquement et de calculer le temps total de fonctionnement. Le temps total de fonctionnement obtenu par le modèle de simulation sera comparé avec l'horizon de planification. Si le temps total de fonctionnement est supérieur à l'horizon de planification, le nombre d'AGV est incrémenté de 1 et le modèle de simulation est relancé jusqu'à ce que le temps de fonctionnement obtenu soit inférieur à l'horizon de planification.

Egbelu (1987)

Egbelu (1987) propose une méthode analytique pour dimensionner une flotte d'AGV permettant le transport de produits entre les zones de travail dans un système de fabrication. Ce système est composé de plusieurs zones de travail ayant chacune une station de chargement et une station de déchargement avec une circulation unidirectionnelle des AGV et avec une zone de stationnement pour les véhicules au repos. Le modèle contient plusieurs types de produits circulant chacun entre les zones de travail selon un ordre de routage connu à l'avance. La figure 2.2 montre la configuration du système étudié par Egbelu (1987) où P est la station de chargement et D est la station de déchargement.

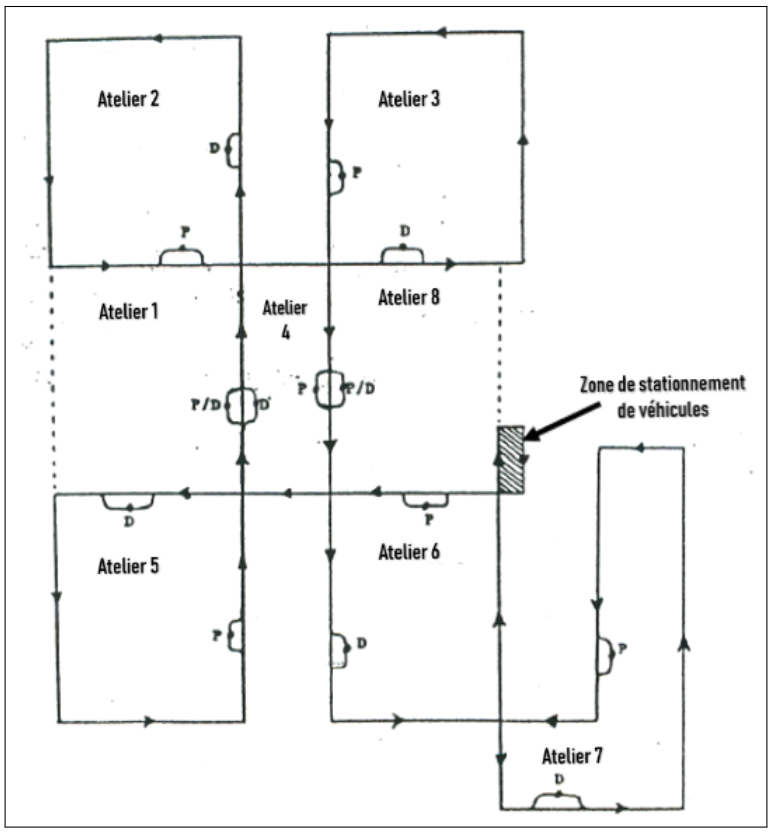


FIGURE 2.2 – Configuration du modèle traité par Egbelu (1987)

Egbelu (1987) présente quatre modèles analytiques d'estimation du nombre d'AGV avec différentes hypothèses :

- Modèle 1 : La istance parcourue par l'AGV chargé est égale à celle parcourue à vide
- Modèle 2 : Intégration des problèmes de blocage et de déchargement
- Modèle 3 : Rajout des déplacements des véhicules entre les postes de travail dans chaque zone
- Modèle 4 : Prise en compte de distances à vide des véhicules (calcul exact)

Le quatrième modèle est considéré comme le modèle le plus réaliste par rapport aux autres modèles. Ce modèle est largement utilisé dans la littérature comme point départ pour la formulation de problèmes de dimensionnement de flotte de robots.

Egbelu (1987) utilise le même principe analytique de calcul du nombre d'AGV en se basant sur l'expression 2.1. Par rapport au travail de Maxwell et Muckstadt (1982), ce modèle

propose une nouvelle méthode analytique pour calculer le temps de déplacement à vide et il prend en compte le temps de chargement de batteries des AGV. Dans son travail, Egbelu (1987) considère que le temps de chargement de batterie est une donnée à soustraire de l'horizon de planification.

Concernant la procédure de dimensionnement, le temps de circulation des AGV chargés et le temps total de chargement / déchargement sont calculés en fonction des données du problème. Le temps de circulation à vide est obtenu par la division de la distance totale de circulation à vide par la vitesse de l'AGV. Pour calculer la distance totale de circulation à vide D'_{ij} entre deux points i et j, une nouvelle démarche analytique a été proposée. Elle consiste à calculer le nombre de déplacements à vide g_{ij} entre deux zones i et j dans le système :

$$g_{ij} = \frac{\text{Nombre de déchargements en } i \times \text{Nombre de chargements en } j}{\text{Nombre total de chargements dans le système}}$$

Ensuite, le modèle estime la distance totale de circulation à vide entre tous les points i et j du système. Cette distance totale D'_{ij} est donnée par l'expression suivante :

$$D'_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \cdot d_{ij}$$

où n est le nombre de zones de travail du système et d_{ij} est la distance entre i et j.

Dans le quatrième modèle, Egbelu (1987) n'a pas pris les temps de blocage et d'inactivité de véhicules en compte. Par contre, il propose dans son deuxième modèle une solution pour intégrer ces deux temps dans l'expression finale du dimensionnement. Cette solution consiste à multiplier le temps total de déplacement des AGV chargés et à vide par l'expression suivante $(1 + b + c)$ où $(0 \leq b \leq 1)$ est le facteur de temps de blocage et $(0 \leq c \leq 1)$ est le facteur de temps d'inactivité.

Dans une deuxième partie, Egbelu (1987) vérifie son quatrième modèle analytique par la simulation en utilisant plusieurs règles de dispatching pour la configuration de la figure 2.2. Cette étude a montré que les modèles analytiques proposés sont trop optimistes. Cela

est dû à la difficulté d'estimer le temps total de chargement de batterie sur un horizon de planification ainsi que les facteurs de blocage et d'inactivité. Cet inconvénient n'empêche pas de dire que le modèle reste utilisable surtout comme point de départ pour lancer une étude de simulation (Ganesharajah *et al.*, 1998).

Mahadevan et Narendran (1990)

Mahadevan et Narendran (1990) présentent un modèle analytique pour estimer la taille de la flotte dans un système de fabrication de pièces de plusieurs types. La figure 2.3 montre la configuration du système étudié. Le système contient plusieurs machines (1 à 6), une station de chargement / déchargement (7) qui présente l'entrée / sortie du système et un tampon central (8) pour les pièces en cours de fabrication. Le système contient une zone de stockage de pièces à l'entrée / sortie de chaque machine avec une capacité limitée. Les flèches montrent le sens de circulation des véhicules, la circulation bidirectionnelle est permise pour quelques segments de circulation seulement. Le transport de pièces aux machines doit suivre le chemin le plus court. Le système utilise un système de contrôle de zone (les points ronds) pour éviter le blocage de véhicules.

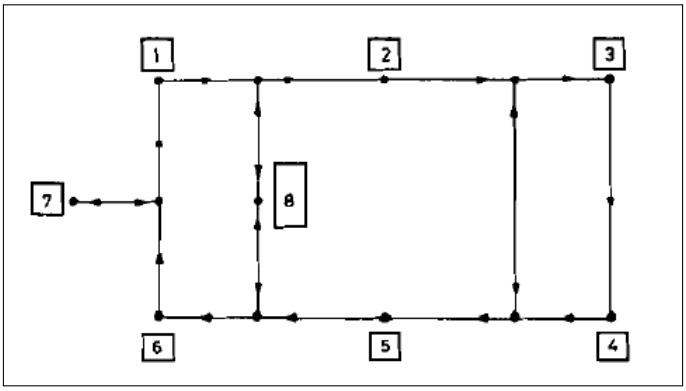


FIGURE 2.3 – Configuration du modèle traité par Mahadevan et Narendran (1990)

Le système fonctionne en se basant sur un plan de production connu à l'avance. La pièce est chargée au niveau de la station de chargement / déchargement. Ensuite, la pièce sera transportée vers les machines selon un ordre de routage. A la sortie de chaque machine, la

pièce attend l'affectation d'un AGV pour la transporter à la machine suivante pour poursuivre sa fabrication. Si le stock à la sortie de la machine est plein, la pièce sortante sera déplacée vers le stock tampon central par un AGV pour attendre son envoi à la machine suivante.

Le modèle de Mahadevan et Narendran (1990) utilise l'expression 2.1 pour trouver la taille de la flotte. Ce modèle analytique propose l'intégration de la notion de probabilités de transition entre machines mais il ne tient pas compte de la circulation à vide des AGV. La première étape consiste à calculer la matrice de flux de pièces entre les machines en se basant sur les données du problème. Ensuite, une autre matrice sera calculée par la normalisation de la matrice de flux déjà obtenue. Cette matrice contient les probabilités de transition entre machines.

Le temps de transport d'une pièce τ_{kl} d'une machine k à une machine l est égal au produit de la probabilité de transition p_{kl} de la pièce entre k et l par le temps de passage de la pièce entre k et l. Ce temps de passage est composé d'un temps de chargement l_k à la machine k, un temps de transport t_{kl} de k vers l et un temps de déchargement u_l à la machine l.

$$\tau_{kl} = p_{kl} \times (l_k + t_{kl} + u_l)$$

En négligeant l'hypothèse du stock tampon, le temps total de fonctionnement de la flotte Tr est donné par

$$Tr = \sum_k n_k \sum_l \tau_{kl}$$

où n_k est le nombre de pièces fabriquées par la machine k.

En utilisant l'hypothèse du stock tampon, parfois la pièce à la sortie de la machine ne trouve pas d'espace dans le stock, elle sera donc déplacée vers le stock tampon par un AGV pour attendre le transport vers la machine suivante. Selon cette hypothèse, il existe deux types de transition de la pièce d'une machine k à une machine l : passage indirect à travers le stock tampon ou bien direct sans passer par le stock tampon. Afin d'intégrer cette notion dans le modèle, Mahadevan et Narendran (1990) utilisent une probabilité α de passage par

le stock tampon. Le temps de fonctionnement de la flotte devient alors

$$Tr = \alpha \left[\sum_k n_k \left(\sum_l p_{kl}(l_k + t_{kb} + u_b + l_b + t_{bl} + u_l) \right) \right] + (1 - \alpha) \left[\sum_k n_k \sum_l \tau_{kl} \right]$$

où

- t_{kb} : est le temps de transport de la pièce de la machine k au stock tampon b ;
- u_b : est le temps déchargement de la pièce dans le stock tampon b ;
- l_b : est le temps chargement de la pièce du stock tampon b ;
- t_{bl} : est le temps de transport de la pièce du stock tampon b à la machine l.

Le nombre d'AGV requis peut être calculé par l'expression 2.1 :

$$N = \left\lceil \frac{Tr}{T} \right\rceil$$

où T est l'horizon de planification.

Mahadevan et Narendran (1993)

Dans un deuxième travail, Mahadevan et Narendran (1993) présentent une nouvelle solution en tenant compte de la circulation à vide des AGV. Si un AGV dépose une pièce dans une machine et va chercher une autre pièce pour la transporter, ce passage est un passage à vide. La figure 2.4 montre un exemple de passage à vide d'un AGV.

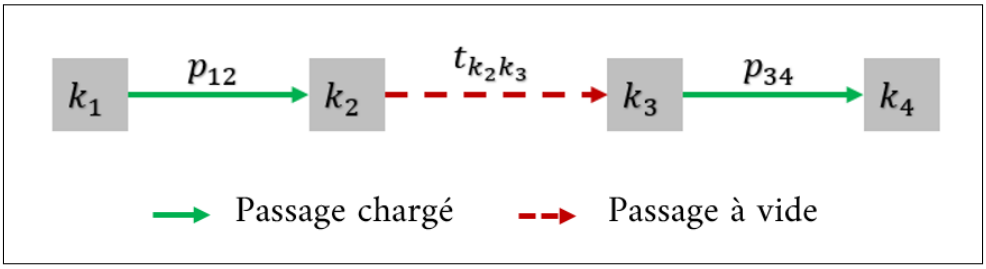


FIGURE 2.4 – Exemple d'un passage à vide d'un AGV

Le temps de ce passage à vide t_v de cet exemple est égal au produit de la probabilité

de transition entre la machine k_1 et la machine k_2, de la probabilité de transition entre la machine k_3 et la machine k_4 et du temps de passage entre k_2 et k_3

$$t_v = p_{12} \cdot p_{34} \cdot t_{k_2 k_3}$$

Le temps total de circulation à vide T_v est égal à la somme de tous les temps de circulation à vide du système.

L'expression du nombre d'AGV requis devient

$$N = \left\lceil \frac{Tr + Tv}{T} \right\rceil .$$

Par rapport à ce nouveau modèle, des études numériques montrent que Mahadevan et Narendran (1990) sous estime la taille de la flotte. En plus, des expériences de simulation avec de très grandes variations des données d'entrée ont été faites afin de confirmer l'utilité du modèle.

Sinriech et Tanchoco (1992)

Sinriech et Tanchoco (1992) présentent un modèle d'optimisation multi-critères déterministes avec deux objectifs : minimiser le coût total du système et maximiser la productivité du système. Le modèle est appliqué sur un système de production de plusieurs types de pièces et de plusieurs zones de travail ayant chacune une station de chargement et une station de déchargement. Dans chaque zone, la circulation est en boucle et unidirectionnelle. L'objectif du modèle est de maximiser la performance de ce système étudié avec un coût total minimal en se basant sur un plan de fabrication connu à l'avance (flux et ordre de routage).

La figure 2.5 présente la configuration du modèle traité par Sinriech et Tanchoco (1992)

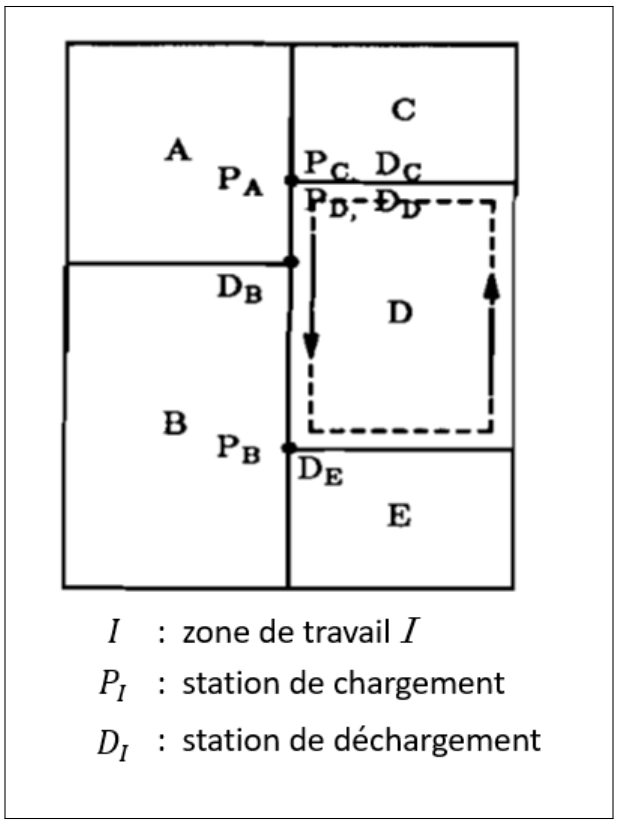


FIGURE 2.5 – Configuration du modèle traité par Sinriech et Tanchoco (1992)

Sinriech et Tanchoco (1992) considèrent que le problème de dimensionnement de flotte doit prendre en compte deux aspects : aspect technique et aspect économique. L'aspect technique consiste à déterminer le nombre d'AGV du système. L'aspect économique consiste à avoir une structure de coûts à intégrer dans la procédure de dimensionnement. L'expression du coût total contient le coût unitaire d'un AGV C_{AGV}, le coût des parties hardware C_{hard} et software C_{soft} du système, le coût des chargeurs des batteries C_b et le coût fixe du système C_{fix}.

La fonction de coût est donnée par

$$C_{total} = N_{AGV}C_{AGV} + N_c(C_{soft} + C_{hard}) + N_bC_b + C_{fix}$$

où

– N_{AGV} est le nombre d'AGV dans le système ;

– N_c est le nombre de contrôleurs dans le système ;

– N_b est le nombre de chargeurs de batteries dans le système.

Le premier objectif consiste à minimiser le coût total de la configuration. Le coût total doit être comparé avec la valeur minimale donnée appelé C_{min}. Lorsque le coût de la configuration dépasse le coût minimal C_{min}, une pénalité de dépassement du coût sera appliquée. Le deuxième objectif consiste à maximiser la productivité du système en augmentant au maximum l'utilisation des ressources du système. L'utilisation est définie comme le rapport entre le nombre de pièces finies et le nombre total de pièces arrivées dans le système. La première étape du modèle est de déterminer l'utilisation souhaitée du système. Et comme le premier objectif, toute valeur d'utilisation calculée inférieure à la valeur souhaitée sera présentée par une pénalité d'utilisation.

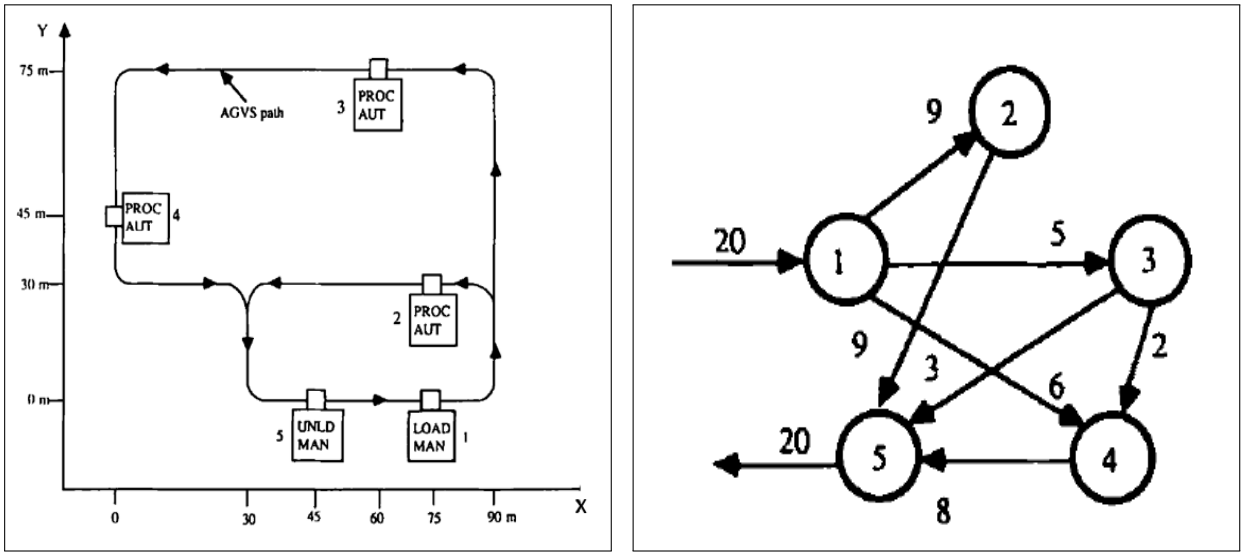
La fonction objectif du modèle consiste à minimiser la somme de pénalités du premier et du deuxième objectif. La première contrainte présente la fonction de coûts et la deuxième contrainte présente l'expression de l'utilisation du système. Dans les deux contraintes, la somme des pénalités des deux objectifs est intégrée. Le reste des contraintes présentent les différentes variables binaires utilisées ainsi que les limites de chaque variable.

A travers ce modèle, Sinriech et Tanchoco (1992) intègrent le côté économique, pour la première fois, dans la procédure de dimensionnement de flotte d'AGV en proposant une structure de coûts pour sa configuration. Selon Sinriech et Tanchoco (1992), le point fort du modèle est sa capacité à résoudre les problèmes importants du système de transport en très peu de temps.

Ilić (1994)

Ilić (1994) propose une méthode analytique déterministe pour dimensionner la taille d'une flotte d'AGV dans un système de production en système de boucles. La figure 2.6(a) présente le système de production traité par Ilić (1994). Ce système est composé d'une station de chargement (1) à travers laquelle les pièces rentrent dans le système, trois machines $(2, 3, 4)$

et une station de déchargement (5) à travers laquelle les pièces quittent le système. La figure 2.6(b) présente les flux de pièces (indiqué au dessus des flèches) dans le système de production selon un ordre de routage précis.



(a) Système de production étudié (b) Flux entre les machines et les stations

FIGURE 2.6 – Configuration et modélisation du système traité par Ilić (1994)

Le modèle analytique utilise la formule suivante pour trouver le nombre d'AGV de la flotte :

$$N = \left\lceil \frac{U}{R} + \frac{U'}{R'} \right\rceil \tag{2.2}$$

où

- U est le nombre total de déplacements chargés pendant T ;
- U' est le nombre total de déplacements à vide pendant T ;
- R est le nombre de déplacements chargés par AGV pendant T ;
- R' est le nombre de déplacements à vide par AGV pendant T.

Le nombre total de déplacements chargés U et le nombre total de déplacements à vide U' sont calculés à partir de l'ordre de routage du système.

Pour arriver à l'expression 2.2, le modèle commence par calculer le travail de transport C et le travail de circulation à vide C'. Le travail entre deux points i et j est donné par le nombre de passages entre ces deux points multiplié par la distance entre i et j.

Le travail global est trouvé par la somme de travaux entre tous les points du système. Le travail de transport C et le travail de circulation à vide C' sont donnés par $C = \sum_i \sum_j q_{ij} \cdot d_{ij}$ et $C^{'} = \sum_i \sum_j q_{ij}^{'} \cdot d_{ij}$ où q_{ij} est le déplacement d'un AGV chargé du point i vers le point j et $q_{ij}^{'}$ est le déplacement à vide d'un AGV du point i vers le point j.

Ensuite, le modèle calcule la distance moyenne d'un déplacement chargé $\bar{d}$ et d'un déplacement à vide $\bar{d}'$ par tournée. Chaque distance est obtenue par la division du travail par le nombre total de déplacements chargés U ou à vide $U^{'}$ pendant T. Les expressions des distances sont données par $\bar{d} = \frac{C}{U}$ et $\bar{d}' = \frac{C'}{U'}$

Une fois les distances déterminées, il suffit de les diviser par la vitesse de circulation de véhicule pour obtenir les temps de circulation d'un AGV par tournée. Ces temps sont donnés par $\bar{t} = \frac{\bar{d}}{v}$ et $\bar{t}' = \frac{\bar{d}'}{v}$. Afin de prendre en compte les temps de chargement et de déchargement, un temps t sera rajouté à l'expression du temps de circulation chargé d'un AGV par tournée.

Pour trouver le nombre de déplacements chargés R et à vide $R^{'}$ par AGV, Ilić (1994) divise l'horizon de planification T par le temps de circulation qui convient. Le modèle définit un facteur de trafic f pour tenir compte des problèmes de blocage et de congestion dans le système. Les expressions de R et $R^{'}$ sont données par

$$R = \frac{T \cdot f}{\bar{t} + t} \qquad \text{et} \qquad R^{'} = \frac{T \cdot f}{\bar{t}'}$$

Bien que son modèle détermine le nombre d'AGV requis pour faire fonctionner le système, Ilić (1994) affirme que sa méthode peut être assez compliquée pour de grands systèmes complexes.

Le tableau 2.1 présente un résumé des travaux déterministes cités dans cette partie :

Travaux	Temps à vide	Temps d'attente	Temps de blocage	Temps de chargement de batterie	Aspect économique
Maxwell et Muckstadt (1982)	Calculer par un PL	Non	Eliminé par un système de contrôle de zone	Non	Non
Egbelu (1987)	Expression analytique	Non	Facteur $b \in [0, 1]$	Facteur $c \in [0, 1]$	Non
Mahadevan et Narendran (1990)	Non	Non	Eliminé par un système de contrôle de zone	Non	Non
Mahadevan et Narendran (1993)	Probabilités de transition	Non	Eliminé par un système de contrôle de zone	Non	Non
Sinriech et Tanchoco (1992)	Non	Non	Non	Non	Oui
Ilić (1994)	Expression analytique	Non	Facteur de trafic	Non	Non

TABLEAU 2.1 – Tableau récapitulatif des modèles déterministes

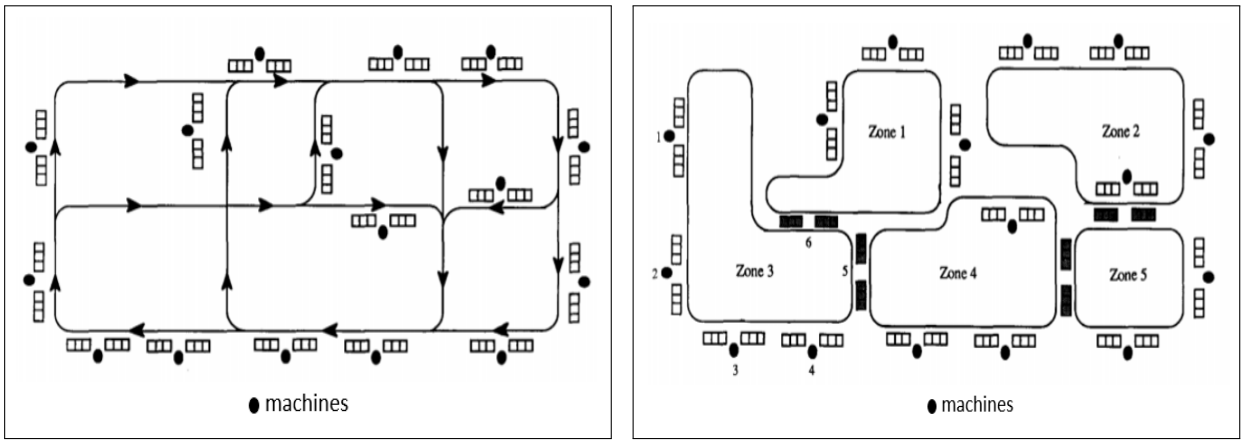
2.2 Modèles stochastiques

Les modèles stochastiques sont généralement des modèles basés sur la théorie des files d'attente ou bien des modèles de simulation. Les dates d'arrivée des tâches dans ces modèles sont aléatoires, ce qui présente l'aspect stochastique.

Mantel et Landeweerd (1995)

Mantel et Landeweerd (1995) traitent le problème de dimensionnement de flotte d'AGV dans un système de production en utilisant une nouvelle approche stochastique, dite file d'attente hiérarchique. Selon Mantel et Landeweerd (1995), ce modèle peut être appliqué sur un système de circulation conventionnel ou tandem. Le système conventionnel est une configuration où les machines de production sont placées dans une seule zone avec un réseau de circulation contenant des croisements et tous les véhicules sont autorisés à desservir n'importe quel poste de travail du système (Bozer et Srinivasan, 1992). Dans un système tandem, tous les postes de travail sont groupés en zones à véhicule unique (Bozer et Srinivasan, 1992). Les zones sont liées uniquement par des points de transfert utilisés pour le chargement / déchargement de pièces.

La figure 2.7 présente deux configurations des modèles étudiés par Mantel et Landeweerd (1995).



(a) Système conventionnel (b) Système tandem

FIGURE 2.7 – Configurations du modèle traité par Mantel et Landeweerd (1995)

Le modèle de Mantel et Landeweerd (1995) se compose de deux niveaux : niveau inférieur et niveau supérieur. Au niveau inférieur, les déplacements des AGV sont affectés aux zones qui sont modélisées par des serveurs uniques avec un temps de processus déterministe. A ce niveau, le modèle cherche à calculer le temps de circulation entre les stations dans chaque

zone. Ce temps est équivalent au temps de service. La figure 2.8 montre la modélisation du niveau inférieur.

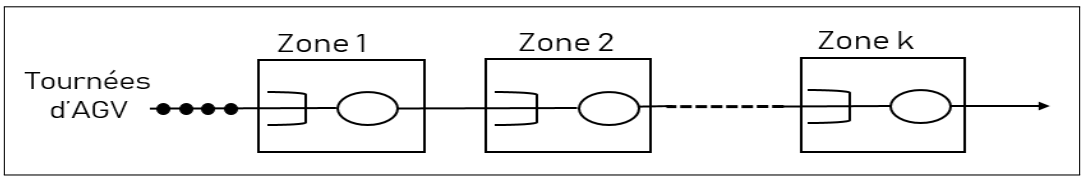


FIGURE 2.8 – Niveau inférieur du modèle de Mantel et Landeweerd (1995)

Au niveau supérieur, les tâches de transport sont affectées à un ensemble d'AGV qui sont modélisés comme un ensemble de serveurs parallèles. La figure 2.9 montre la modélisation du niveau supérieur.

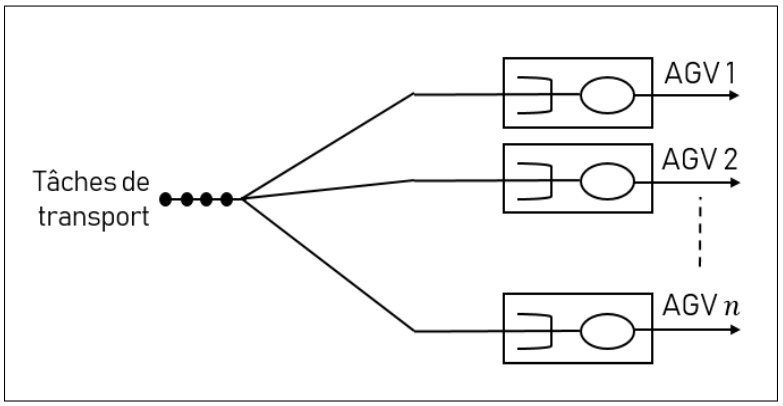


FIGURE 2.9 – Niveau supérieur du modèle de Mantel et Landeweerd (1995)

La procédure commence avec un seul AGV. Ensuite, le problème doit être modélisé au niveau inférieur afin de déterminer le temps de circulation de l'AGV dans chaque zone. Après, le temps de circulation entre les stations sera utilisé pour résoudre le problème au niveau supérieur. Si le nombre d'AGV disponibles ne suffit pas à répondre aux exigences du travail, le nombre d'AGV sera incrémenté par un AGV de plus et la procédure sera relancée encore une fois jusqu'à l'obtention d'une flotte capable de répondre aux performances industrielles du système étudié. Choobineh *et al.* (2012) considèrent que l'application de ce modèle est difficile à résoudre à moins que des hypothèses simplificatrices ne soient formulées.

Rajotia *et al.* (1998)

Rajotia *et al.* (1998) proposent un modèle déterministe pour estimer analytiquement le nombre d'AGV dans un système de production de pièces de plusieurs types. Ce modèle analytique sera suivi d'un modèle de simulation pour affiner la valeur trouvée. Le système étudié se compose de plusieurs centres de travail contenant chacun un ensemble de machines. Les AGV circulent entre les centres afin de livrer / récupérer une pièce à travers une station de chargement / déchargement. Toutes les pièces sont obligées de passer par le premier centre en entrant et en sortant du système. La figure 2.10 présente la configuration du modèle étudié par Rajotia *et al.* (1998)

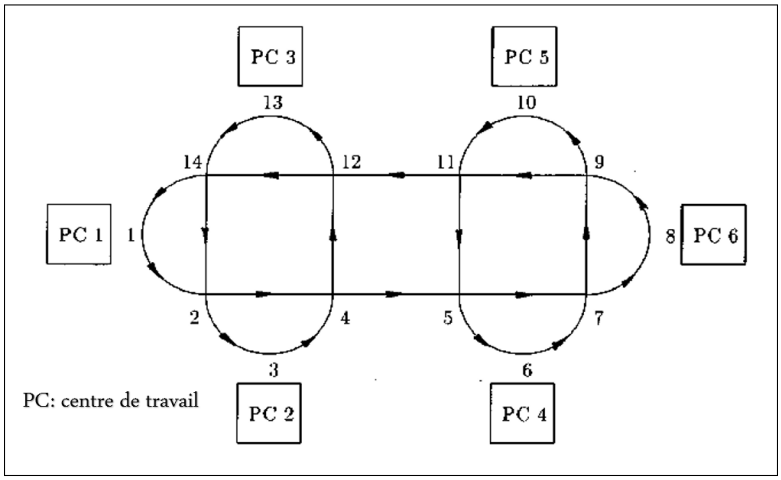


FIGURE 2.10 – Configuration du modèle traité par Rajotia *et al.* (1998)

Pour le modèle déterministe, Rajotia *et al.* (1998) utilisent l'expression 2.1 pour estimer le nombre d'AGV de la flotte. Le temps de fonctionnement contient le temps de circulation de véhicules chargés T_l, le temps de circulation à vide T_e, le temps total d'attente T_w et le temps de blocage T_b. Dans une première étape, le modèle utilise le travail de Mahadevan et Narendran (1990) afin de calculer le temps de circulation de véhicules chargés. Dans une deuxième étape, Rajotia *et al.* (1998) proposent un programme mixte en nombres entiers (Mixed Integer Program ou MIP) dont la fonction objectif consiste à minimiser le temps de circulation à vide des véhicules. Les contraintes de ce programme décrivent le fonctionnement du système :

- Après un déchargement au point i, l'AGV cherche une autre pièce à la sortie du point avant de passer au point suivant. S'il ne trouve pas de pièce à la sortie, nous avons donc :
  - Toute circulation après un déchargement au point i est une circulation à vide ;
  - Toute circulation avant un chargement au point i est une circulation à vide ;

Dans une troisième étape, Rajotia *et al.* (1998) estiment le temps total d'attente et le temps de blocage en utilisant la méthode de Koff (1987). Cette méthode considère que ces temps sont proportionnels au temps de circulation de véhicules chargés. Selon cette méthode, le facteur d'attente et de blocage est compris ente 10% et 15%.

Une fois tous les temps calculés, le nombre d'AGV est donné par l'expression 2.1 :

$$N = \left\lceil \frac{T_l + T_e + T_w + T_b}{T} \right\rceil .$$

En réalité, un système de production est un système dynamique où l'arrivée des tâches à exécuter est aléatoire ce qui rend la procédure d'estimation du temps de circulation à vide difficile. Vu cette difficulté d'estimer le temps de circulation à vide ainsi que le facteur d'attente et de blocage, Rajotia *et al.* (1998) affirment qu'une étape de simulation pour optimiser la valeur trouvée analytiquement sera obligatoire. Dans son modèle de simulation, l'arrivée des pièces est aléatoire. Les AGV doivent suivre le chemin le plus court et sont affectés selon la règle de dispatching premier arrivé, premier servi. Les résultats confirment que le modèle déterministe sous-estime le nombre d'AGV nécessaire pour exécuter l'ensemble des tâches demandées.

Rajotia *et al.* (1998) soulignent que l'utilisation d'une estimation déterministe avant la simulation aide à réduire la complexité du problème en minimisant le temps de simulation et fournit un bon point de départ pour une analyse plus approfondie du système modélisé.

Shen et Kobza (1998)

Shen et Kobza (1998) proposent un modèle stochastique pour calculer le nombre d'AGV dans un système de production. Ce système est composé de plusieurs stations de travail ayant chacune une station de chargement / déchargement. L'arrivée des pièces est générée aléatoirement avec utilisant un processus de poisson. Le temps de déplacement d'un AGV entre les stations est fixe. Après le déchargement d'une pièce et s'il n'y a pas de nouvelle tâche de transport, l'AGV reste devant la station pour attendre son affectation. La figure 2.11 présente la configuration du modèle traité par Shen et Kobza (1998)

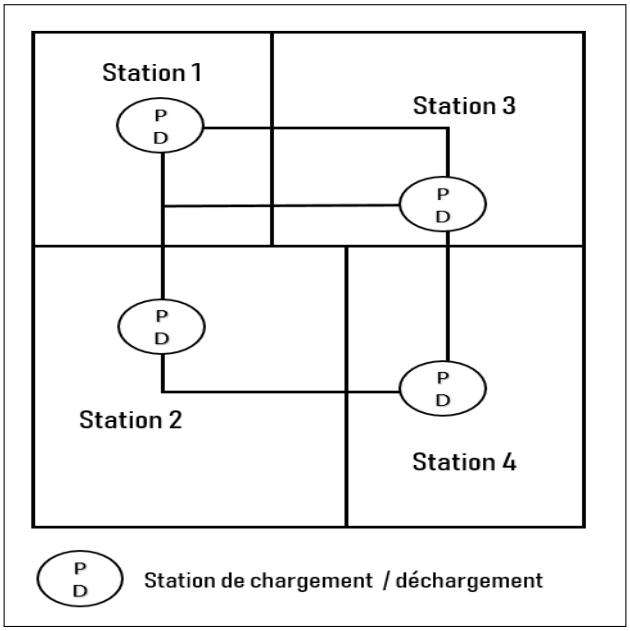


FIGURE 2.11 – Configuration du modèle traité par Shen et Kobza (1998)

Pour ce faire, Shen et Kobza (1998) utilisent un algorithme appelé Dispatching-Rule-Based Algorithm (DRBA). La première étape de cet algorithme consiste à calculer une borne supérieure du nombre d'AGV dans le système. Dans cette étape, le temps de circulation à vide et le temps total d'attente sont estimés à deux fois le temps de circulation de véhicules chargés T_l. Selon cette estimation, le temps total de fonctionnement est égal à trois fois le temps de circulation de véhicules chargés plus le temps total de chargement / déchargement de pièces T_{PD}. Pour calculer la borne supérieure, Shen et Kobza (1998) utilisent aussi l'expression 2.1.

L'expression de la borne supérieure du nombre d'AGV est :

$$N = \left\lceil \frac{3 \cdot T_l + T_{PD}}{T \cdot e} \right\rceil$$

où e est le facteur d'efficacité de véhicules sur l'horizon de planification T. Ce facteur est compris ente 0 et 1 (Egbelu, 1987).

La deuxième étape consiste à formuler le problème en modèle de file d'attente $M/M/N$ afin de déduire le temps de circulation à vide. La lettre M signifie que les processus d'arrivée et de service sont markoviens et la lettre N désigne le nombre de serveurs dans le système. Le but de cette modélisation est de calculer le temps de service avec les N véhicules trouvés dans l'étape précédente. Le temps de service est composé du temps de circulation des AGV chargés, du temps de circulation à vide et du temps total de chargement / déchargement. Le temps de circulation des AGV chargés et le temps total de chargement / déchargement sont faciles à calculer à partir des données du problème. Une fois le temps de service calculé, le temps de circulation à vide sera déterminé.

Ensuite, le modèle calcule la probabilité P_i d'avoir i demandes de transport dans le système. Cette probabilité est obtenue en utilisant le temps de service calculé et en supposant que la distribution du temps de service est exponentielle. Le modèle se base sur cette probabilité pour calculer la probabilité d'attente d'une demande $P^{'} = 1 - \sum_i P_i$. Cette probabilité sera comparée avec une valeur limite appelée α. Le raisonnement suit la logique suivante :

- Si $P^{'} < \alpha$ alors $N = N - 1$ et reprendre la deuxième étape
- Sinon $N_{min} = N + 1$ et passer à la troisième étape.

La troisième étape consiste à calculer le temps d'attente dans le système contenant N_{min} véhicules. Si le concepteur du système voit que le temps d'attente est élevé et ne répond pas aux exigences industrielles de son unité de production, il peut augmenter le nombre d'AGV dans le système à condition que le nombre choisi N_{AGV} soit compris entre N_{min} et N_{max}.

Koo *et al.* (2004)

Koo *et al.* (2004) proposent un modèle analytique stochastique basé sur la théorie des files d'attente pour dimensionner la taille d'une flotte d'AGV dans un système de production composé de plusieurs zones de travail avec un ordre de routage connu pour chaque pièce. Le temps d'arrivée de tâches et la règle de dispatching de véhicules utilisée sont aléatoires, ce qui présente l'aspect stochastique de ce modèle.

Pour ce faire, toute une procédure a été présentée afin d'estimer un nombre de véhicule minimal permettant d'assurer une haute performance du système. Avant d'entamer la procédure, le modèle commence par définir les différents temps du système.

La figure 2.12 montre ces temps pour une tâche de transport affectée pour un AGV disponible de la flotte.

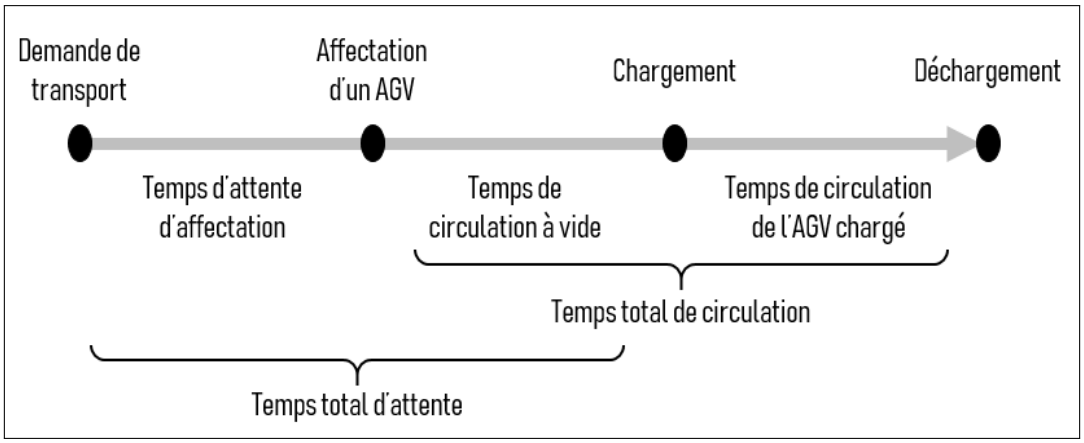


FIGURE 2.12 – Définition des temps du modèle de Koo *et al.* (2004)

La première étape consiste à calculer le temps moyen de circulation de véhicules chargés. Pour calculer ce temps, les auteurs calculent le flux moyen entre chaque couple de zones i et j par le rapport de flux entre ces deux points et le flux total dans le système. Ce flux moyen sera multiplié par la somme des temps de transport t_{ij} et des temps de chargement / déchargement entre ces deux points pour donner le temps moyen de circulation de véhicules chargés entre i et j. Le temps moyen total est donné par la somme de tous les temps moyens pour tout i et j.

Une fois le temps de circulation de véhicules chargés T_l calculé , le modèle calcule un nombre minimal de véhicules dans le système sur un horizon de planification T en utilisant l'expression suivante :

$$m = \left\lceil \frac{T_l}{T} \right\rceil$$

La deuxième étape consiste à calculer le temps moyen de circulation à vide. Ce temps dépend de la disponibilité et de la position de l'AGV au moment de la demande de transport et de la destination de l'AGV affecté. Dans cette partie, Koo *et al.* (2004) proposent une expression analytique pour chaque règle de dispatching en utilisant le nombre minimal d'AGV déjà calculé.

Les règles étudiées dans le modèle de Koo *et al.* (2004) sont :

- Sélection aléatoire du véhicule ;
- Sélection du véhicule le moins utilisé ;
- Sélection du véhicule le plus proche ;
- Sélection du véhicule le plus éloigné.

La somme de temps moyen de circulation de véhicules chargés avec le temps moyen de circulation à vide donne le temps total moyen de circulation de véhicules.

Dans la troisième étape, le modèle calcule le temps d'attente d'affectation du véhicule. S'il y a un AGV disponible pour le transport, il sera affecté. En cas d'indisponibilité d'AGV, la tâche de transport doit attendre. Ce temps est appelé temps d'attente d'affectation du véhicule. Afin de calculer ce temps, Koo *et al.* (2004) utilise la solution d'un modèle de file d'attente proposée par Kimura (1991). Ce modèle est un système de file d'attente $G/G/m$ où le temps d'arrivée de tâches et le temps de circulation de véhicules ont une distribution générale. Le nombre de serveurs est le nombre d'AGV dans le système m.

Le temps total d'attente est le temps qui sépare l'arrivée de la tâche de transport de la pièce de son chargement par l'AGV. Ce temps est égal à la somme de temps d'attente d'affectation et le temps moyen de circulation à vide. Une fois calculé, ce temps sera comparé

avec une valeur référence. Si ce temps dépasse la valeur référence , il faut rajouter un AGV à la flotte et la taille de la flotte devient $m = m + 1$ et reprendre la procédure à partir de la deuxième étape jusqu'à l'obtention d'un temps total d'attente au-dessous de la valeur de référence.

A la fin de leur travail, Koo *et al.* (2004) utilisent un modèle de simulation afin d'évaluer la performance du modèle proposé. Dans ce modèle de simulation, le temps de circulation est stochastique et le problème de blocage est pris en compte. La comparaison du modèle analytique avec le modèle de simulation montre que le modèle fonctionne bien, c'est-à-dire, les erreurs sur les temps sont faibles pour les règles de dispatching suivantes : sélection aléatoire du véhicule et sélection du véhicule le moins utilisé. Pour les autres règles comme la sélection du véhicule le plus proche et la sélection du véhicule le plus éloigné, les erreurs sont plus importantes.

Yifei *et al.* (2010)

Yifei *et al.* (2010) proposent une procédure en deux étapes pour estimer la taille de la flotte d'AGV dans un système de production : étape analytique pour une estimation de la taille de la flotte en utilisant le modèle analytique d'Egbelu (1987) et une deuxième étape de simulation pour optimiser la valeur trouvée analytiquement.

Cette étude a été menée sur un système de production contenant plusieurs zones de production et une zone de stockage pour les pièces. Chaque zone de production contient plusieurs machines et plusieurs stations de chargement / déchargement. Le système de transport est une flotte d'AGV à dimensionner. Chaque type de produit a un ordre de routage bien déterminé et connu à l'avance. La figure 2.13 montre la configuration du modèle traité par Yifei *et al.* (2010).

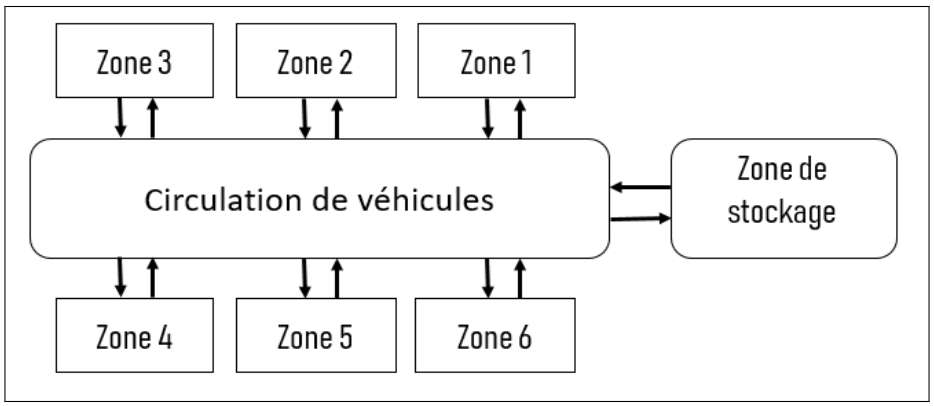


FIGURE 2.13 – Configuration du modèle traité par Yifei *et al.* (2010)

Yifei *et al.* (2010) ont utilisé l'outil eM-Plant pour développer leur modèle de simulation. Ce modèle de simulation utilise la sortie du modèle analytique comme entrée. En plus, ce modèle est basé sur un programme linéaire dont la fonction objectif consiste à maximiser la productivité selon le nombre d'AGV requis. Les contraintes du modèle décrivent la relation entre les taux de productivité de chaque type de produits, le routage de chaque type de produit et la capacité de chaque zone de production. D'autres contraintes décrivant la règle de dispatching choisie et la stratégie de planification sont rajoutées dans le modèle de simulation sur $eM - Plant$.

Le taux de productivité obtenu par simulation sera positionné dans une carte de contrôle définissant deux plages des valeurs de productivité : une plage de valeurs tolérées et une plage d'erreur. La taille de la flotte sera déterminée selon la valeur obtenue par simulation. Si le taux obtenu est situé dans l'intervalle des valeurs tolérées alors le nombre d'AGV est accepté, (2) si le taux est hors de l'intervalle des valeurs tolérées et dans la plage d'erreur alors on change le nombre d'AGV par (± 1) et on relance la simulation, (3) si le taux est hors de la plage d'erreur alors il faut changer un ou plusieurs paramètres du problème et reprendre l'estimation analytique et la simulation à nouveau.

Le résultat de la simulation a montré que l'estimation analytique est un bon point de départ pour une étude de simulation. En plus, elle peut réduire efficacement les temps de simulation.

Choobineh *et al.* (2012)

Choobineh *et al.* (2012) présentent un programme linéaire pour estimer la taille de la flotte d'AGV dans un atelier flexible (Flexible Manufacturing system FMS) modélisé comme un système de Closed Queuing Network. Ce modèle est appliqué sur un système de production de plusieurs centres de travail ayant chacun une station de chargement et une station de déchargement. La figure 2.14 montre un exemple du modèle traité par Choobineh *et al.* (2012).

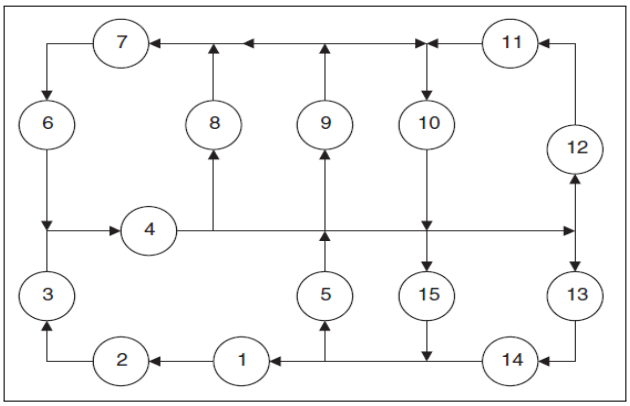


FIGURE 2.14 – Configuration du modèle traité par Choobineh *et al.* (2012)

Dans ce modèle, Choobineh *et al.* (2012) considèrent qu'un cycle de transport d'un AGV se compose de quatre étapes : chargement de la pièce à travers une station de chargement, déplacement chargé, déchargement de la pièce à travers une station de déchargement et déplacement à vide. Pour modéliser le fonctionnement d'un AGV à travers un réseau de file d'attente fermé, ils supposent que chaque étape du cycle est effectuée par un serveur unique avec une capacité infinie. Vu que le temps de chargement est constant pour toutes les stations, le modèle regroupe tous les serveurs de chargement en un seul processeur appelé processeur de chargement. Selon le même raisonnement, un processeur de déchargement est crée pour regrouper tous les serveurs de déchargement. La figure 2.15 montre la modélisation du problème pour le cycle de transport d'un AGV.

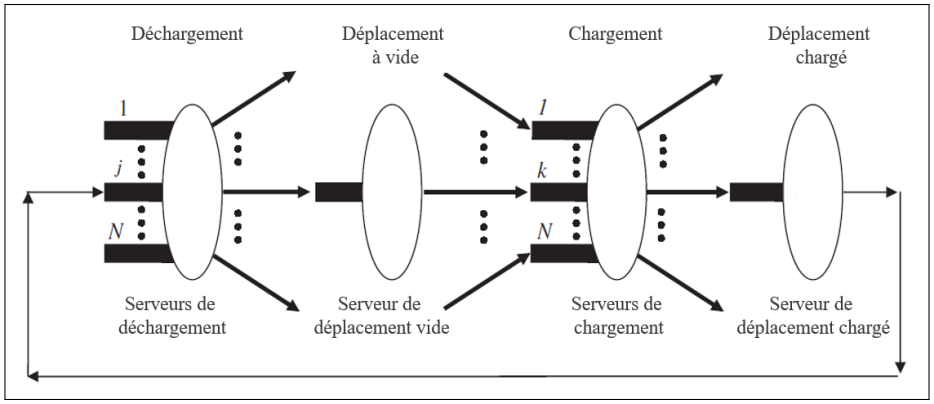


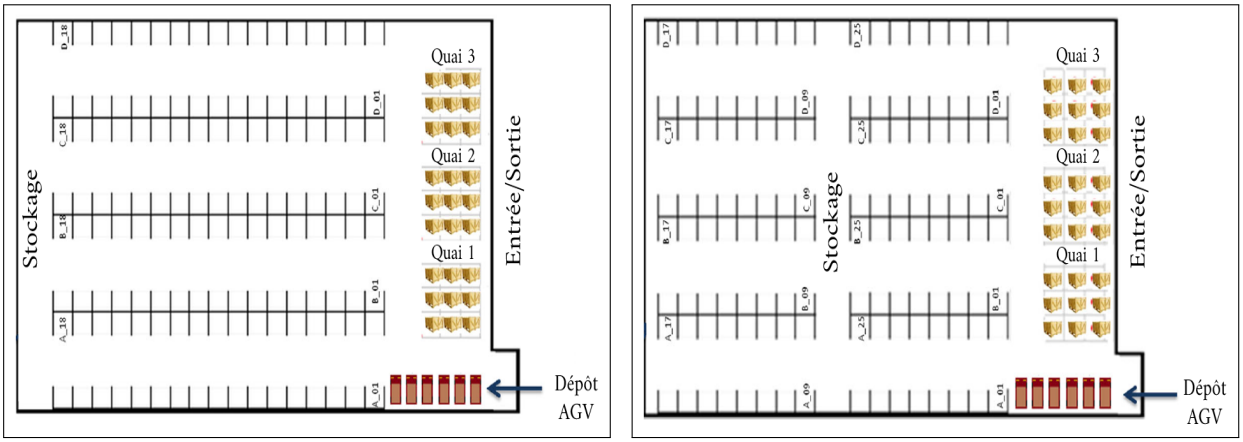
FIGURE 2.15 – Modélisation du cycle de transport d'un AGV (Choobineh *et al.*, 2012)

Le programme linéaire proposé a pour but de minimiser l'utilisation du système d'AGV. L'utilisation du système est la partie nécessaire du système pour atteindre une performance souhaitée. Selon Choobineh *et al.* (2012), le nombre d'AGV requis est égal au plus petit entier supérieur ou égal à l'utilisation du système trouvée par le programme linéaire proposé. L'utilisation du système à minimiser dans le programme linéaire est donnée par le produit des utilisations de tous les serveurs. Les contraintes décrivent les relations entre les débits de tous les serveurs dans le système.

Un modèle de simulation sous SIMAN a été développé par Choobineh *et al.* (2012) afin de comparer les résultats analytiques avec les résultats de simulation. Choobineh *et al.* (2012) affirment que les expériences de simulation montrent que le modèle analytique estime avec précision le nombre d'AGV dans environ 87% des cas étudiés.

Vivaldini *et al.* (2016)

Le travail de Vivaldini *et al.* (2016) est parmi les rares travaux qui traitent le problème de dimensionnement d'une flotte d'AGV pour le cas des entrepôts logistiques. Ce travail estime le nombre minimum des AGV requis pour l'exécution d'un ensemble de tâches de transport avec horizon de planification fini. La figure 2.16 montre deux configurations d'un entrepôt étudiées par Vivaldini *et al.* (2016).



(a) Exemple 1 (b) Exemple 2

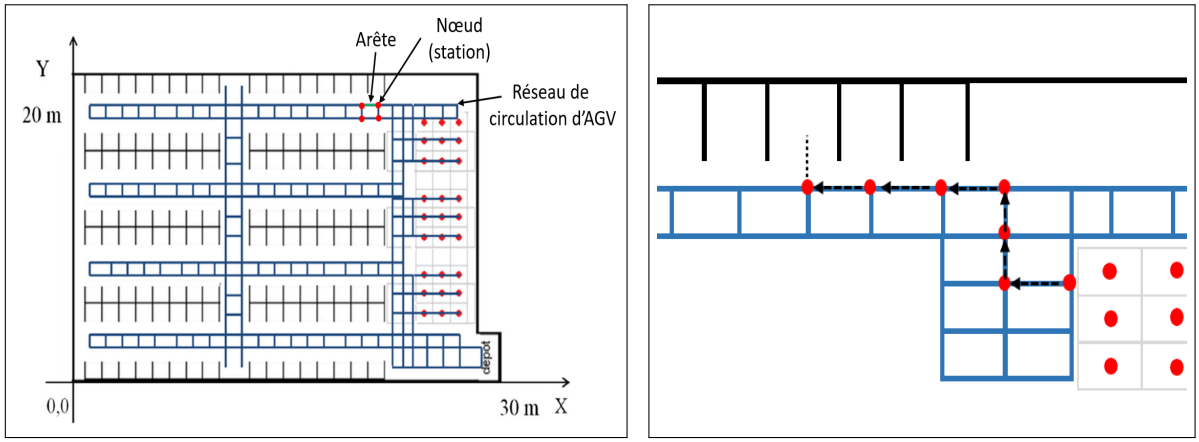
FIGURE 2.16 – Configurations du modèle traité par Vivaldini *et al.* (2016)

Dans ces deux configurations, les palettes à l'entrée de l'entrepôt sont placées dans le stock d'entrée / sortie. Ensuite, elles seront placées dans les rayons de stockage par l'ensemble des AGV de la flotte. Après un certain temps de stockage et au moment de la livraison, les palettes seront placées du stock vers la zone d'entrée / sortie.

Vivaldini *et al.* (2016) considèrent que les points de stockage dans la zone d'entrée / sortie ou dans les rayons de stockage sont des stations où l'AGV peut effectuer une opération de chargement / déchargement.

La première étape du modèle consiste à calculer le temps nécessaire pour exécuter toutes les tâches de transport T_0 à partir de la liste de tâches connue à l'avance. Ce temps est calculé en utilisant le chemin le plus court entre l'origine de la demande de transport et sa destination. Pour ce faire, toute station dans l'entrepôt est considéré comme un nœud et le trajet entre deux nœuds est considéré comme une arête qui présente la distances entre deux stations. En utilisant ces hypothèses, l'entrepôt peut être modélisé par un graphe où les nœuds stations sont les stations et les arêtes sont les trajets entre les stations. Le but de ce modèle est de minimiser le temps total de fonctionnement de la flotte en choisissant toujours le plus court chemin pour exécuter chaque tâche.

La figure 2.17 présente la modélisation de l'entrepôt et d'une tâche de transport.



(a) Modélisation de l'entrepôt (exemple 2.16(b)) (b) Modélisation d'une tâche de transport

FIGURE 2.17 – Modélisation de Vivaldini *et al.* (2016)

Une fois le temps calculé, le modèle estime un nombre d'AGV initial dans la flotte, sur un horizon de planification T, selon l'expression suivante :

$$N = \left\lceil \frac{T_0}{T} \right\rceil .$$

Ensuite, et en utilisant la taille de la flotte estimée, les tâches de transport seront affectées à l'ensemble de véhicules. Pour cette étape, Vivaldini *et al.* (2016) utilisent deux méthodes : Shortest-Job-First et Recherche tabou. La première méthode est une heuristique qui consiste à calculer deux indices qui seront la base de l'affectation de la tâche. Le premier indice concerne l'occupation des quais. Cet indice est donné par le rapport entre le nombre de palettes dans le quai et la capacité du quai. Le deuxième indice concerne l'état de l'AGV au moment de l'affectation. Cet indice est donné par le rapport entre le temps de fonctionnement de l'AGV avant l'affectation et le temps total de disponibilité de l'AGV. L'affectation d'une tâche à un AGV doit prendre en compte ces deux indices, c'est-à-dire, il faut choisir la tâche du quai le moins encombrant afin de le libérer et l'affecter pour l'AGV le moins utilisé. La deuxième méthode est appelée recherche tabou. Cette méthode consiste à choisir une solution (affectation) aléatoire et calculer le temps total de service (de transport). Ensuite, le modèle passe à une autre solution appelée solution de voisinage et calcule le nouveau temps

de service. Si le nouveau temps est inférieur au premier, le deuxième est enregistré comme temps référence, sinon le système garde le premier temps comme référence. Ces deux solutions déjà explorées sont automatiquement placées dans une liste tabou afin de les éliminer dans les prochaines comparaisons. L'algorithme refait cette comparaison en explorant toutes les solutions possibles afin de garder la solution permettant de minimiser le temps de service. Les tâches seront alors affectées selon la solution de la recherche tabou, c'est-à-dire, l'affectation ayant le temps de service minimal.

L'étape suivante du modèle consiste à utiliser un modèle de simulation afin de simuler la circulation des AGV dans le système avec la taille de la flotte et l'affectation de tâches trouvées. Le but de cette étape est de comparer le temps de service obtenu par estimation avec le temps de service obtenu par simulation. Si les résultats répondent aux exigences industrielles le modèle est validé. Sinon, le modèle reprend l'étape d'estimation en incrémentant le nombre d'AGV et refait les autres étapes à nouveau.

Chawla *et al.* (2018b)

Chawla *et al.* (2018b) traitent le problème de dimensionnement de flotte d'AGV dans un FMS. Dans ce travail, ils proposent d'utiliser l'algorithme du loups gris connu par le nom (Grey Wolf Algorithm GWO) et de comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par le modèle analytique de Mahadevan et Narendran (1990). La figure 2.18 présente un exemple du système étudié par Chawla *et al.* (2018b).

Le système est composé de 6 centres de travail ayant chacun une station de chargement / déchargement. Une pièce ne peut pas entrer dans le système ou le quitter que par la station de chargement/déchargement.

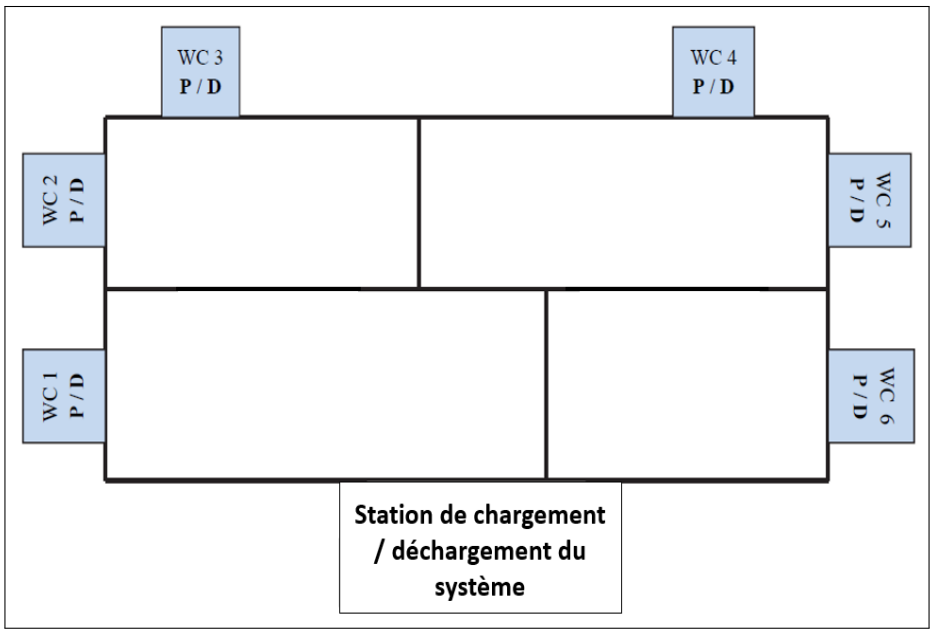


FIGURE 2.18 – Configuration d'un modèle traité par Chawla *et al.* (2018b)

Le GWO est basé sur la hiérarchie de leadership et le processus de chasse de groupe mené par une meute de loups. Dans cet algorithme, la population est divisée en quatre groupes α, β, δ et ω. Les loups α sont les leaders des loups et les responsables qui prennent les décisions. Les β sont des loups qui aident les α dans la prise des décisions et remplacent les α en cas d'absence ou de décès. Ils doivent se soumettre au α et dominer les δ et ω. Les δ sont généralement les chasseurs et les gardiens du groupe. Ils doivent se soumettre aux α et aux β. Les ω doivent se soumettre aux autres catégories des loups et ils sont les plus faibles de la meute. Le processus de la chasse des loups gris est composé de trois étapes :

- Suivre et approcher la proie ;
- Encercler et harceler la proie ;
- Attaquer la proie.

Pour modéliser la hiérarchie de leadership, l'algorithme de GWO considère la meilleure solution comme α, la deuxième et la troisième meilleures solutions sont considérées respectivement comme β et δ. Les autres solutions sont considérées comme des ω.

Pour dimensionner la taille de la flotte du système étudié, les étapes principales de l'al-

gorithme GWO sont les suivantes :

1. Générer une population de loups au hasard sur la base des bornes inférieure et supérieure de chaque variable.
2. Calculer la valeur de la fonction objectif pour chaque loup.
3. Sauvegarder les trois meilleures loups sous α, β et δ.
4. Vérifier si le critère final est satisfait ou non (nombre maximal d'itérations atteint ou non).
   - Si le critère n'est pas satisfait, actualiser le reste de la population et reprendre l'étape 2.
   - Sinon, renvoyer la position de α associé à la solution optimale.

Une comparaison des résultats obtenus par le modèle analytique du Mahadevan et Narendran (1990) et par l'algorithme de GWO pour trois tailles différentes de FMS montre que le GWO optimise davantage la taille de la flotte d'AGV pour les trois exemples traités.

Le tableau 2.3 présente un résumé des travaux stochastiques cités dans cette partie.

Travaux	Méthodes	Remarques
Mantel et Landeweerd (1995)	Modèle de files d'attente hiérarchique à deux niveaux sans simulation	Non adapté aux systèmes complexes
Rajotia *et al.* (1998)	Modèle déterministe de Mahadevan et Narendran (1990) suivi d'un modèle de simulation stochastique	Le modèle de simulation est utilisé pour affiner les résultats du modèle déterministe
Shen et Kobza (1998)	Algorithme DRBA en deux étapes, une étape déterministe pour avoir une borne supérieure et une étape stochastique en modélisant le problème en en une file d'attente	Le modèle des files d'attente est utilisé pour améliorer le résultat du modèle déterministe
Koo *et al.* (2004)	Modèle de files d'attente validé par un modèle de simulation	Le modèle de simulation est utilisé pour évaluer la performance du modèle de files d'attente proposé
Yifei *et al.* (2010)	Modèle de simulation basé sur un programme linéaire pour maximiser la productivité	Le modèle de simulation est utilisé pour optimiser les résultats d'Egbelu (1987)
Choobineh *et al.* (2012)	Modèle de files d'attente appelé Closed Queuing theory avec un programme linéaire permettant de minimiser l'utilisation du système validé par un modèle de simulation	Le modèle de simulation est utilisé pour évaluer la performance du modèle des files d'attente proposé
Vivaldini *et al.* (2016)	Modèle basé sur l'affectation des tâches utilisant l'une de deux méthodes Shortest Job First ou recherche tabou suivi d'un modèle de simulation stochastique	Le modèle de simulation est utilisé pour affiner l'affectation des tâches obtenue par l'une de deux méthodes
Chawla *et al.* (2018b)	Algorithme de GWO	Optimise davantage les résultats de Mahadevan et Narendran (1990)

Tableau 2.3 – Tableau récapitulatif des modèles stochastiques

2.3 Conclusion

A travers ce chapitre, nous avons présenté un état de l'art des travaux traitant le problème de dimensionnement de flotte de véhicules dans le contexte industriel. Nous avons classé les travaux en deux catégories : déterministes et stochastiques. Les travaux déterministes sont des modèles analytiques ayant pour but d'arriver à la formule 2.1 exprimant le nombre d'AGV requis en fonction des différents temps du système. D'autres méthodes sont utilisées (la programmation linéaire, optimisation multi-critères) afin de déterminer des temps difficiles à calculer analytiquement. D'après les travaux présentés, les modèles analytiques ne peuvent pas donner une solution optimale du problème surtout pour des systèmes industriels complexes vu qu'ils sont basés sur des hypothèses simplificatrices considérées comme peu réalistes. Dans la deuxième catégorie, nous avons présenté les modèles stochastiques traitant le problème de dimensionnement. Ces modèles sont basés généralement, sur la théorie des files d'attente ou bien sur un modèle de simulation. Ils considèrent que les dates d'arrivée des tâches sont aléatoires. Quelques modèles de simulation nécessitent une estimation analytique déterministe préalable afin de diriger la simulation et de gagner plus de temps de calcul. Selon les résultats de ces travaux, les modèles stochastiques développés sont plus puissants que les modèles déterministes en terme d'optimalité de la solution vu qu'il y a moins d'hypothèses simplificatrices ce qui rend l'étude plus réaliste.

Au travers de cet état de l'art, nous avons remarqué plusieurs points :

- Le problème de dimensionnement est peu abordé pour le cadre des entrepôts logistiques. Parmi les travaux cités dans ce chapitre, il n'y a que Vivaldini *et al.* (2016) qui ont proposé une solution au problème de dimensionnement dans un entrepôt logistique.
- L'aspect économique est quasiment absent dans la littérature. Le seul travail qui a intégré cet aspect dans la fonction objectif de son modèle est le travail de Sinriech et Tanchoco (1992).
- Les travaux présentés traitent des flottes de véhicules de même type (homogènes). La notion d'hétérogénéité des véhicules n'a été abordée dans aucun travail.

Chapitre 3

Flotte homogène

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de dimensionnement d'une flotte de robots homogènes pour effectuer des tâches de transport de charges dans un entrepôt logistique. Le système étudié a été présenté dans la section 1.4. Les travaux dans la littérature traitent ce problème pour des unités de production avec une flotte de robots identiques. Dans ce chapitre, nous proposons des nouvelles formulations pour le dimensionnement d'une flotte homogène, dans le cadre d'entrepôts logistiques.

Dans la première section, nous traitons le problème de dimensionnement d'une flotte pour le transport de charges homogènes, c'est-à-dire des charges de même type. Nous commençons par le transport entre la zone de réception et la zone de stockage en tenant compte du nombre de stations de chargement / déchargement dans les deux zones. Ensuite, nous étudions le problème de dimensionnement entre la zone de stockage et la zone d'expédition en tenant compte du nombre de transstockeurs dans le système. Dans cette partie, un transstockeur récupère la charge demandée avant son envoi vers la zone d'expédition. Cette opération crée un temps supplémentaire appelé temps de picking.

Dans la deuxième section, nous traitons le problème de dimensionnement pour le cas de charges hétérogènes selon une stratégie de stockage dédié au type de charges où la charge est stockée dans un endroit dédiée à son type. Dans ce cas, la distance dépend du type de charge transportée. Une nouvelle formulation du problème sera proposée en utilisant la

programmation linéaire en nombres entiers.A la fin de ce chapitre, nous présentons une étude numérique permettant la vérification de nos résultats obtenus.

3.1 Charges homogènes

3.1.1 Mise en stock

Dans cette partie, nous étudions le problème de dimensionnement d'une flotte de robots homogènes entre la zone de réception (zone A) et la zone de stockage (zone B) dans un entrepôt logistique.

Ce modèle consiste à mobiliser une flotte homogène de robots pour transporter des charges de même type de la zone A vers la zone B. La figure 3.1 montre la configuration du modèle étudié où le robot se déplace chargé de A vers B avant de traverser la même distance à vide de B vers A.

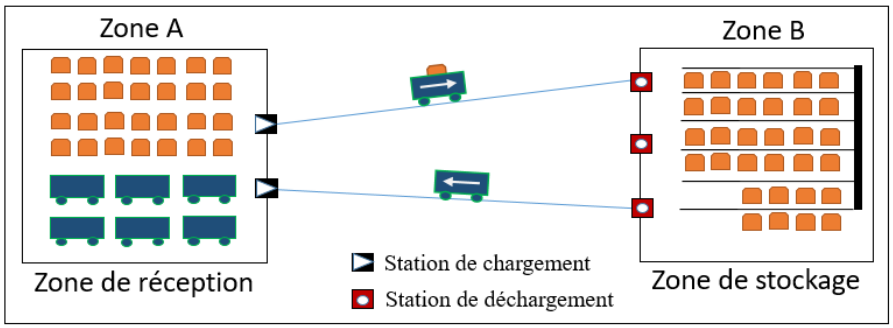


FIGURE 3.1 – Transport de charges homogènes entre A et B avec une flotte homogène

Notations

- t_l : temps de chargement (loading)
- t_u : temps de déchargement (unloading)
- T : horizon de planification
- d_{AB} : distance entre A et B
- n : nombre de charges à transporter de A vers B pendant la période T

- m : nombre de robots
- n_A : nombre de stations de chargement en A
- n_B : nombre de stations de déchargement en B
- v_l : vitesse de circulation du robot chargé (uniforme)
- v_e : vitesse de circulation du robot vide (uniforme)

Hypothèses

- Le lieu de stockage des robots est situé au point A ;
- Le transport est unitaire : chaque robot transporte au plus une seule charge à un instant donné ;
- Le temps de chargement t_l est supérieur ou égal au temps de déchargement t_u ;
- Les charges à transporter sont toujours disponibles ;
- Les problèmes de blocage lors de la circulation et d'inactivité des robots ne sont pas pris en compte ;
- Le problème de chargement de batterie n'est pas pris en compte.

Objectif : Déterminer le nombre minimal de robots m^* permettant de transporter les n charges sur un horizon de temps $[0, T]$, le départ et le retour des robots s'effectuant au point A. Plusieurs ordonnancements peuvent exister pour un même nombre m de robots. Nous noterons C_j la date de fin du dernier cycle de transport pour le robot R_j. Nous noterons par ailleurs $C_{max} = \max_j C_j$ la date à laquelle l'ensemble des charges a été transporté et tous les robots sont de retour en A. Nous nous intéresserons en particulier à l'ordonnancement qui minimise le makespan C_{max} ou encore à celui qui répartit de la manière la plus équilibrée les charges entre les robots.

Pour ce faire, nous noterons $N_{max}(m)$ le nombre maximal de charges transportées et R_j le robot partant en j-ème position, pour $j \in \{1, \cdots, m\}$. Pour chaque robot R_j de la flotte,

nous noterons n_j le nombre de charges transportées et n_j^{max} le nombre maximal de charges que R_j peut transporter sur l'intervalle $[0, T]$

Temps de cycle d'un robot Soit p le temps de cycle pour une charge (chargement, déplacement chargé, déchargement et retour à vide). Nous avons

$$p = d_{AB} \cdot \left(\frac{1}{v_l} + \frac{1}{v_e} \right) + t_l + t_u \tag{3.1}$$

a. Pas d'attente pour le chargement et le déchargement

Supposons dans cette partie qu'il n'y a pas d'attente pour le chargement et le déchargement par exemple si ($n_A \geq m^*$ et $n_B \geq m^*$). L'ordre de passage des robots n'a aucune importance.

Remarquons qu'il y a une solution à ce problème si et seulement si le temps de cycle p est inférieur ou égal à l'horizon de temps T. Nous supposerons dans le reste de cette partie que $p \leq T$ afin de se placer dans le cas où une solution existe.

Nombre optimal de robots Le nombre maximum de charges n^{max} transportées par un robot sur l'horizon $[0, T]$ doit satisfaire l'inégalité $n^{max} p \leq T$. Le nombre n^{max} étant entier, ceci implique que

$$n^{max} = \left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor .$$

où $\lfloor x \rfloor$ correspond à la la partie entière inférieure de x. Nous noterons par ailleurs $\lceil x \rceil$ la partie entière supérieure de x.

Le nombre maximum de charges transportées par m robots, noté $N_{max}(m)$, vaut alors

$$N_{max}(m) = m \left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor .$$

Afin de pouvoir transporter l'ensemble des n charges, il faut que $N_{max}(m) \geq n$, c'est-à-dire

que

$$m \left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor \geq n. \tag{3.2}$$

Le nombre optimal de robots est la plus petite valeur de m qui satisfait (3.2), à savoir

$$m^* = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor} \right\rceil. \tag{3.3}$$

Équilibrage de la charge des robots Il peut y avoir plusieurs façons d'ordonnancer les tâches avec m^* robots. Dans cette partie, nous allons répartir au mieux les charges entre les m^* robots. Si $\frac{n}{m^*}$ est entier, alors il est possible de répartir de manière parfaitement équilibrée les charges entre les robots en affectant $\frac{n}{m^*}$ charges à chaque robot.

Si $\frac{n}{m^*}$ n'est pas un entier, les robots transporteront, dans la solution la plus équilibrée, soit $\lfloor \frac{n}{m^*} \rfloor$ charges, soit $\lceil \frac{n}{m^*} \rceil = \lfloor \frac{n}{m^*} \rfloor + 1$ charges. Soit s le nombre de robots transportant $\lfloor \frac{n}{m^*} \rfloor$ charges. Nous avons alors $(m^* - s)$ autres robots transportant $\lceil \frac{n}{m^*} \rceil = \lfloor \frac{n}{m^*} \rfloor + 1$ charges. Le nombre total de charges à transporter étant n, nous avons alors la relation

$$n = s \left\lfloor \frac{n}{m^*} \right\rfloor + (m^* - s) \left(\left\lfloor \frac{n}{m^*} \right\rfloor + 1 \right).$$

qui implique que

$$s = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil m^* - n.$$

Dans la solution la plus équilibrée, la date de fin pour le dernier robot est

$$C_{max} = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil p.$$

Remarquons que la solution la plus équilibrée est aussi celle qui minimise le C_{max}.

Résumons maintenant nos résultats principaux dans le théorème suivant.

Théorème 1 *Lorsqu'on considère qu'il n'y a pas d'attente pour le chargement et le déchar-*

gement, le nombre optimal de robots est

$$m^* = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor} \right\rceil .$$

Dans la solution la plus équilibrée, en notant $s = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil m^* - n$, *nous avons*

- s *robots transportant* $\left\lfloor \frac{n}{m^*} \right\rfloor$ *charges et*
- $(m^* - s)$ *robots transportant* $\left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil$ *charges.*

Enfin, la solution la plus équilibrée est aussi celle qui minimise le makespan avec

$$C_{max} = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil p.$$

Les figures 3.2 et 3.3 présentent deux solutions pour un exemple de transport de $n = 13$ charges dans un horizon de planification $T = 30$, avec un temps de cycle $p = 7$ et sans attente pour le chargement et le déchargement. Le nombre optimal de robots est $m^* = 4$. Dans la solution optimale la plus équilibrée (figure 3.2), 1 robot transporte 4 charges et 3 robots transportent 3 charges. Dans la solution non équilibrée (figure 3.3), 3 robots transportent 4 charges et 1 robot transporte 1 charge.

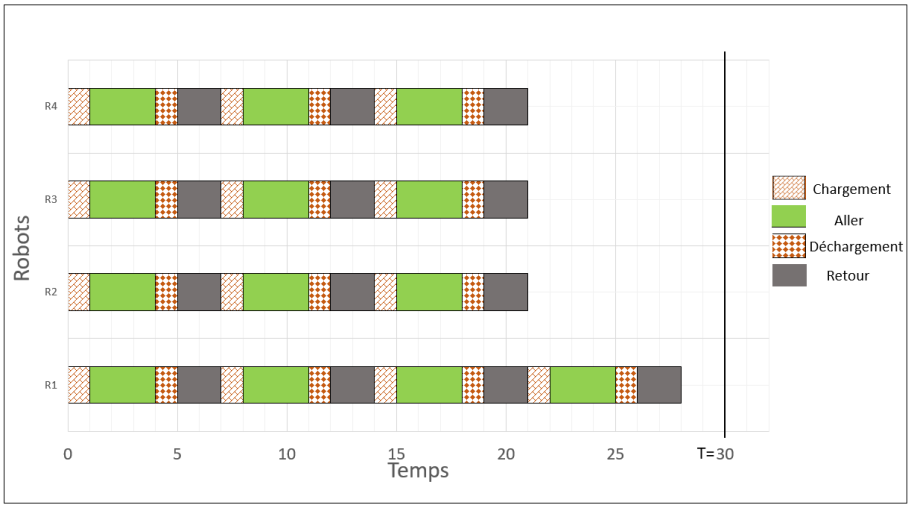


FIGURE 3.2 – Solution équilibrée d'un modèle de transport sans attente ($n = 13$, $t_l = 1$, $p = 7$, $T = 30$, $m^* = 4$)

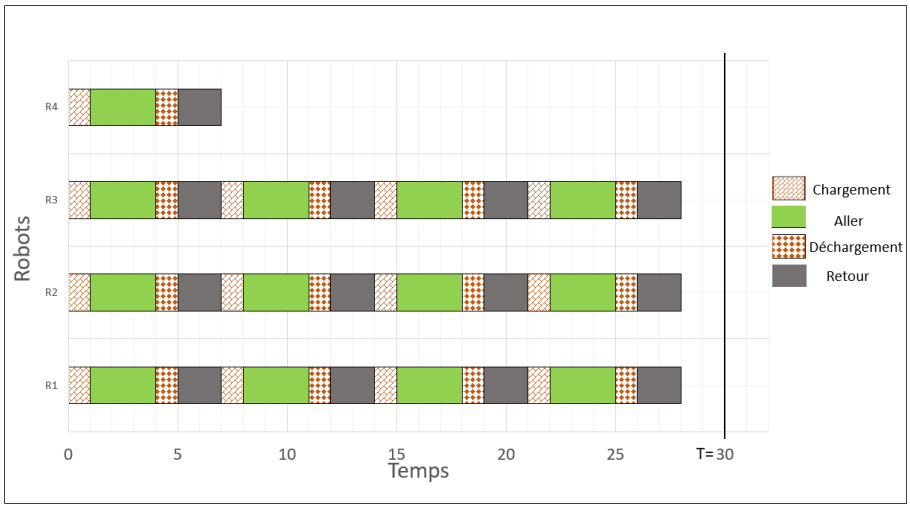


FIGURE 3.3 – Solution non équilibrée d'un modèle de transport sans attente ($n = 13$, $t_l = 1$, $p = 7$, $T = 30$, $m^* = 4$)

Remarquons que les deux solutions ont le même makespan $C_{max} = 28$. Par contre, la solution la plus équilibrée minimise les écarts entre tous les C_j ce qui garantit la bonne utilisation de robots de la flotte pour ce modèle.

Approximation Transposé à notre contexte, les travaux de la littérature (par exemple Egbelu (1987)) propose comme nombre de robots l'approximation suivante

$$m^A = \left\lceil \frac{np}{T} \right\rceil$$

Notons tout d'abord que cette approximation est optimiste, c'est-à-dire, $m^A \leq m^*$. Cette approximation peut être de très mauvaise qualité. Dans le pire cas $\frac{m^*}{m^A} = 2$. Voici un exemple où le pire cas se produit : $T = 2p - \varepsilon$ et $\varepsilon << p$. Sur cet exemple, nous avons

$$m^* = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor 2 - \frac{\varepsilon}{p} \right\rfloor} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil = n$$

et

$$m^A = \left\lceil \frac{np}{T} \right\rceil = \left\lceil \frac{n/2}{1 - \frac{\varepsilon}{2p}} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2p} + o\left(\frac{\varepsilon}{2p} \right) \right) \right\rceil = \frac{n}{2} + 1$$

Alors

$$\frac{m^*}{m^A} = \frac{n}{\frac{n}{2}+1}$$

Si le nombre de charges n tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{m^*}{m^A}$ tend vers 2. Finalement, nous avons

$$1 \leq \frac{m^*}{m^A} \leq 2$$

Pour déterminer la condition sous laquelle l'approximation est bonne, nous essayons tout d'abord de borner l'erreur sur m^A. En utilisant le fait que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$, nous pouvons écrire

$$\frac{T}{p} - 1 < \left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor \leq \frac{T}{p}$$

Puis

$$\frac{np}{T} \leq \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor} < \frac{np}{T} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{T}\right)}$$

Donc

$$\left\lceil \frac{np}{T} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p} \right\rfloor} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{np}{T} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{T}\right)} \right\rceil$$

Finalement

$$m^A \leq m^* \leq \left\lceil \frac{np}{T} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{p}{T}\right)} \right\rceil$$

Ainsi, m^A sera une excellente approximation de m^* lors T grand devant p. Pour $T >> p$, l'erreur sera au plus d'une unité.

Nous pouvons suivre la variation de cet écart en fonction de l'horizon de planification T en traitant un exemple de transport de $n = 50$ charges, avec un temps de cycle $p = 2$. L'horizon de planification T est compris entre p et 16 avec un pas de 0.1. La figure 3.4 présente l'évolution du nombre optimal de robots m^* et le nombre de robots obtenu par l'approximation m^A en fonction de l'horizon de planification T.

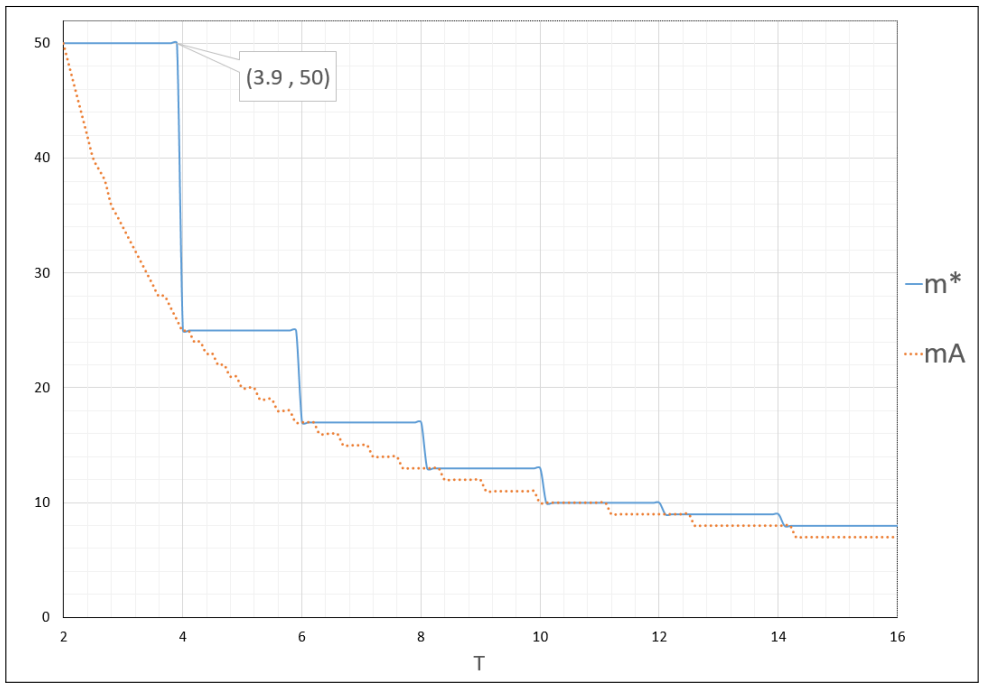


FIGURE 3.4 – Évolution de de m^* et m^A en fonction de l'horizon de planification T ($n = 50$, $p = 2$, $\varepsilon = 0.1$, $p \leq T \leq 16$)

Nous remarquons sur la figure 3.4 que l'écart maximal de cet exemple est $\Delta_A^{max} \approx \frac{50}{2}$ pour $T = 3.9 = 2p - \varepsilon$ avec $\varepsilon = 0.1$. En plus, nous constatons que l'écart tend vers 1 en augmentant l'horizon de planification T, ce qui confirme l'utilité de l'approximation continue pour le cas où $T >> p$.

b. Une seule station de chargement

Supposons dans cette partie que le système contient une seule station de chargement au point A et qu'il n'y a pas d'attente pour le déchargement (par exemple $n_B \geq 1$ et $t_u \leq t_l$). Avec une seule station de chargement, un seul robot peut effectuer le chargement à un instant donné. Nous noterons R_j le robot partant en j-ème position. Lors du premier chargement, R_1 n'attend pas, R_2 attend t_l et plus généralement R_j attend $(j-1)t_l$. Pour les chargements suivants, il nous faut distinguer trois cas de figure.

– $\mathbf{p \geq m \cdot t_l}$: dans cette situation, lorsque le robot R_1 revient pour la première fois en A, les robots $R_2, \cdots, R_m$ ont terminé leur premier chargement. Dans ce cas de figure,

le robot R_1 n'attend jamais pour charger et les autres robots n'attendent que lors de leur premier chargement (voir exemple de la figure 3.5).

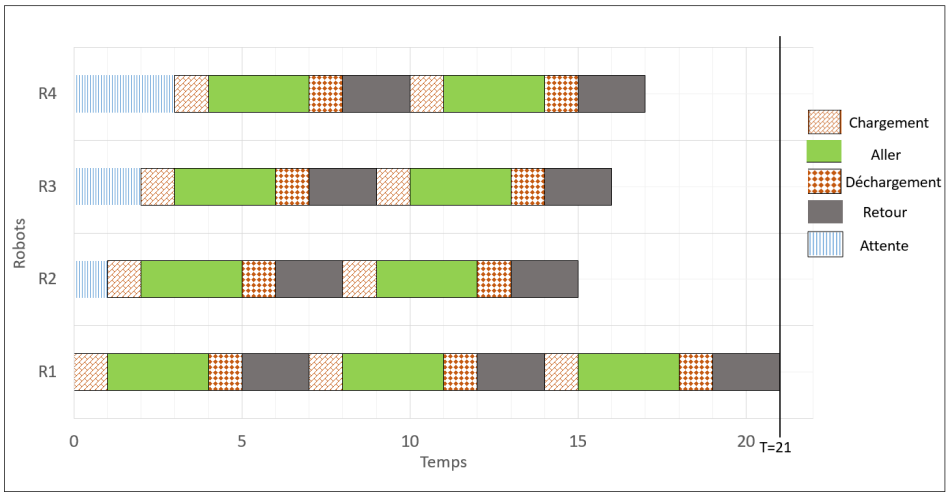


FIGURE 3.5 – Attente uniquement au premier chargement si $p \geq m \cdot t_l$
$(n = 9,\ t_l = 1,\ p = 7,\ T = 21\ ,\ m^* = 4)$

– $\mathbf{(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l}$: dans cette situation, lorsque le robot R_1 revient pour la première fois en A, le robot R_m est en cours de chargement. Les robots attendent $(m \cdot t_l - p)$ à partir de leur 2ème chargement. Nous observons par exemple sur la figure 3.6 que le premier robot R_1 se trouve obligé d'attendre, à son retour en A, la fin de chargement du robot R_5.

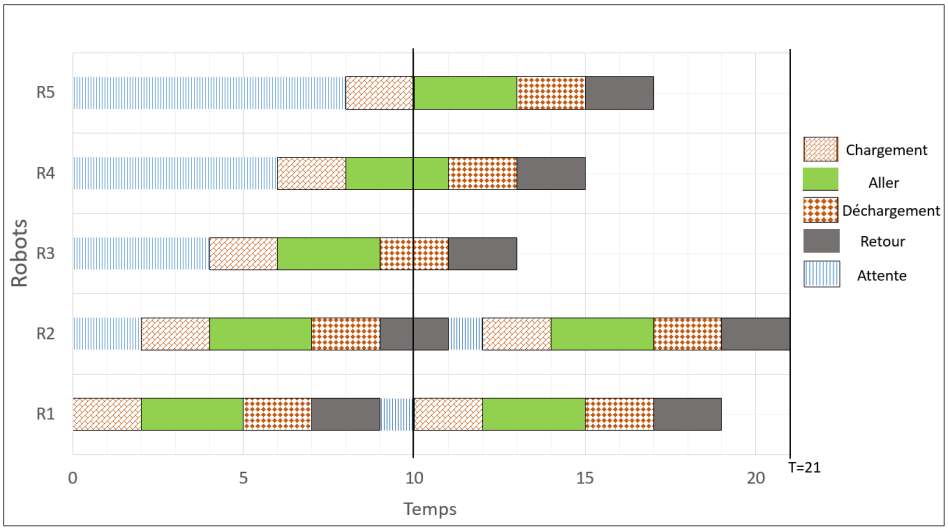


FIGURE 3.6 – Attente à tous les chargements si $(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l$
$(n = 7,\ t_l = 2,\ p = 9,\ T = 21,\ m^* = 5)$

– $\mathbf{p \leq (m-1) \cdot t_l}$: ici, lorsque le robot R_1 revient pour la première fois en A, le robot R_m n'a pas encore commencé son premier chargement. Il y a alors au moins un robot inutile.

Nombre optimal de robots Afin de déterminer le nombre maximal de charges pouvant être transportées par une flotte de m robots, nous distinguons les trois cas de figure identifiés ci-dessus.

– $\mathbf{p \geq m \cdot t_l}$

Le nombre de robots m étant entier, la condition $m \cdot t_l \leq p$ est équivalente à

$$m \leq \left\lfloor \frac{p}{t_l} \right\rfloor$$

Par ailleurs, le temps nécessaire pour que le robot R_j transporte n_j^{max} charges doit être inférieur à T, c'est-à-dire que $p \cdot n_j^{max} + (j-1) \cdot t_l \leq T$. Le nombre maximum de charges transportées n_j^{max} étant entier, cette dernière relation implique que le nombre maximum de charges transportées par R_j vaut

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1)}{p} \right\rfloor .$$

– $\mathbf{(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l}$

Nous avons alors

$$\frac{p}{t_l} < m < \frac{p}{t_l} + 1$$

Comme m est entier, ce cas de figure n'est possible que si $\frac{p}{t_l}$ n'est pas entier. Il suit que la condition est équivalente à

$$m = m_0 \quad \text{où } m_0 = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil .$$

Le temps nécessaire pour que le robot R_j transporte n_j^{max} charges doit être inférieur à T :

$$n_j^{max} \cdot p + (j-1) \cdot t_l + (n_j^{max} - 1)(m_0 \cdot t_l - p) \leq T.$$

Cette dernière relation implique que le nombre maximum de charges transportées par R_j vaut

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1) - p + m_0 \cdot t_l}{m_0 \cdot t_l} \right\rfloor$$

– $\mathbf{p \leq (m-1) \cdot t_l}$

Cette condition équivaut à $m > m_0$. Les robots au-delà des m_0 premiers robots sont inutiles et ne permettent pas d'augmenter le nombre maximum de charges à transporter.

Nous obtenons finalement l'expression de $N_{max}(m)$ selon les cas traités :

$$N_{max}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1)}{p} \right\rfloor & \text{si} \quad m < m_0 \\ \\ \sum_{j=1}^{m_0} \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1) - p + m_0 \cdot t_l}{m_0 \cdot t_l} \right\rfloor & \text{si} \quad m \geq m_0 \end{cases}$$

Le nombre optimal de robots est alors tout simplement

$$m^* = \min \left[m \in \mathbb{N}^* / N_{max}(m) \geq n \right].$$

La figure 3.7 présente le nombre maximal de charges transportées en fonction du nombre de robots m sur le même exemple que celui de la figure 3.6.

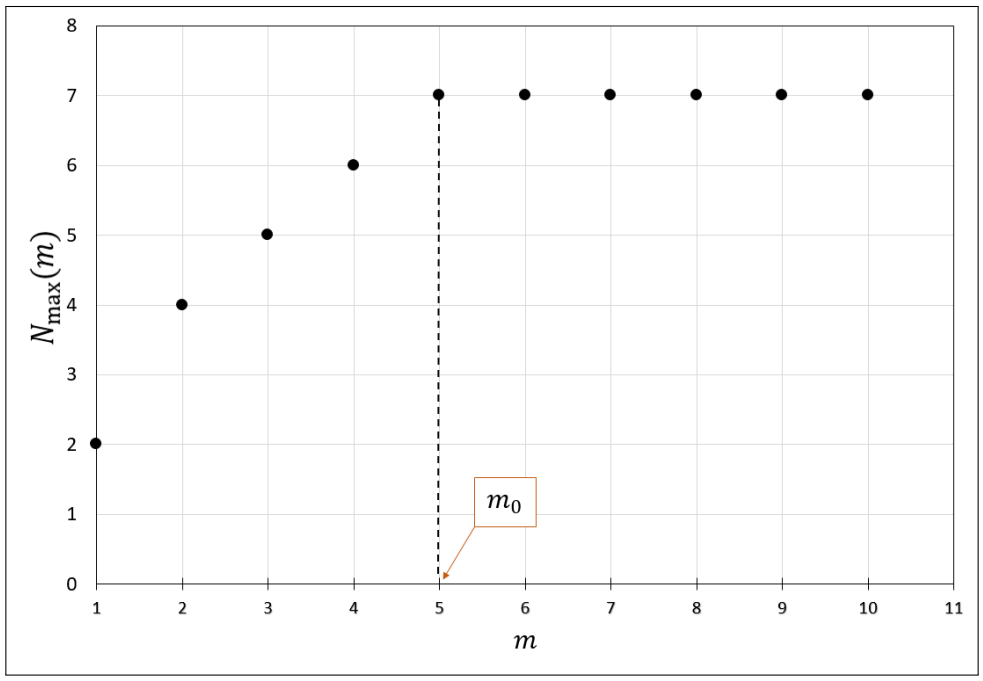


FIGURE 3.7 – Évolution du nombre maximal de charges transportées ($n = 7$, $t_l = 2$, $p = 9$, $T = 21$, $m^* = 5$, $m_0 = 5$)

La courbe montre que la quantité maximale de charges que la flotte peut transporter est $N_{max} = 7$ charges, cela confirme les résultats montrés sur la figure 3.6. Cette quantité optimale est obtenue pour un nombre de robots $m = m_0 = 5$ robots. A partir de m_0, nous nous trouvons dans le troisième cas de notre étude ($p \leq (m-1) \cdot t_l$). Dans ce cas, le système devient saturé, c'est-à-dire, l'existence d'autres robots dans le système ne peut pas augmenter le nombre maximal de charges transportées.

Équilibrage de la charge des robots Dans cette partie, nous utilisons le nombre minimal de robots m^* trouvé et la solution de répartition équilibrée du théorème 1 (page 59) qui reste toujours valable pour le transport avec un seul type de charges. Rappelons que n_j est le nombre de charges transportées par le robot R_j pendant un horizon de temps $[0, T]$ avec

$$n_j = \left\{ \begin{array}{ll} \lceil \frac{n}{m^*} \rceil & \text{si} \quad j \in \{1, \cdots, m^* - s\} \\ \lfloor \frac{n}{m^*} \rfloor & \text{sinon} \end{array} \right\} \text{avec} \quad s = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil m^* - n$$

Avec une flotte de m^* robots on a toujours deux cas à traiter :

- $\mathbf{p \geq m^* \cdot t_l}$

  pour ce cas, l'attente ne se fait qu'au premier chargement pour les robots R_j avec ($j \in \{2; \cdots; m^*\}$). Donc, le temps de fonctionnement du robot R_j contient le temps de transport des charges n_j ainsi que le temps d'attente au premier chargement (voir l'exemple de la figure 3.5). Nous pouvons exprimer C_j comme suit :

$$C_j = n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l$$

- $\mathbf{(m^* - 1) \cdot t_l < p < m^* \cdot t_l}$

  pour ce cas, en dehors de l'attente au premier chargement (sauf le robot R_1 qui n'attend pas au premier chargement), une attente supplémentaire sera provoquée par l'occupation de la station de chargement à partir du deuxième chargement pour tout robot R_j. Donc, le temps de fonctionnement du robot R_j contient le temps de transport de n_j charges, le temps d'attente au premier chargement (autre que le premier robot R_1) qui est proportionnel au temps de chargement t_l et le temps d'attente pour tout autre chargement qui est proportionnel à la quantité $(m^* \cdot t_l - p)$ (voir l'exemple de la figure 3.6). Nous pouvons donc, exprimer C_j comme suit :

$$C_j = n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l + (n_j - 1)(m^* \cdot t_l - p)$$

Au final, nous pouvons exprimer la date de fin de dernier cycle de transport C_{max}

$$C_{max} = \max_{1 \leq j \leq m^*} (C_j)$$

Avec

$$C_j = \begin{cases} n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l & \text{si} \quad m^* < m_0 \\ n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l + (n_j - 1)(m^* \cdot t_l - p) & \text{si} \quad m^* \geq m_0 \end{cases}$$

Théorème 2 *Lorsqu'on considère une seule station de chargement, le nombre optimal de robots est*

$$m^* = \min\left[m \in \{1, \cdots, m_0\} / N_{max}(m) \geq n\right] \quad ; \quad m_0 = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil .$$

Avec

$$N_{max}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1)}{p} \right\rfloor & si \quad m < m_0 \\ \\ \sum_{j=1}^{m_0} \left\lfloor \frac{T - t_l \cdot (j-1) - p + m_0 \cdot t_l}{m_0 \cdot t_l} \right\rfloor & si \quad m \geq m_0 \end{cases}$$

Dans la solution la plus équilibrée du théorème 1 (page 59) le makespan C_{max} est

$$C_{max} = \max_{1 \leq j \leq m^*} (C_j)$$

Avec

$$C_j = \begin{cases} n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l & si \quad m^* < m_0 \\ n_j \cdot p + (j-1) \cdot t_l + (n_j - 1)(m^* \cdot t_l - p) & si \quad m^* \geq m_0 \end{cases}$$

c. Plusieurs stations de chargement

Supposons dans cette partie que le système contient plusieurs stations de chargement l au point A et, au moins, le même nombre de stations de déchargement au point B, c'est-à-dire que $n_A = l$ et $n_B \geq l$. Avec plusieurs stations de chargement, il y a au plus l robots qui peuvent effectuer le chargement à un instant donné. Nous noterons toujours R_j le robot partant en j-ème position. Lors du premier chargement, les l premiers robots entament l'opération de chargement sans attente, les l robots suivants attendent la fin de chargement pour les l premiers, c'est-à-dire, ils doivent attendre t_l avant le chargement. Plus généralement, chaque robot R_j attend $(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1)t_l$ avant son premier chargement. Pour les chargements suivants, il nous faut distinguer trois cas de figure :

– $\mathbf{p \geq \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l}$: dans ce cas, lorsque les l premiers robots reviennent pour la première fois en A, tous les robots de la flotte ont terminé leur premier chargement. Dans ce cas de figure, les l premiers robots n'attendent jamais pour charger et les autres robots n'attendent que lors de leur premier chargement (voir exemple de la figure 3.8).

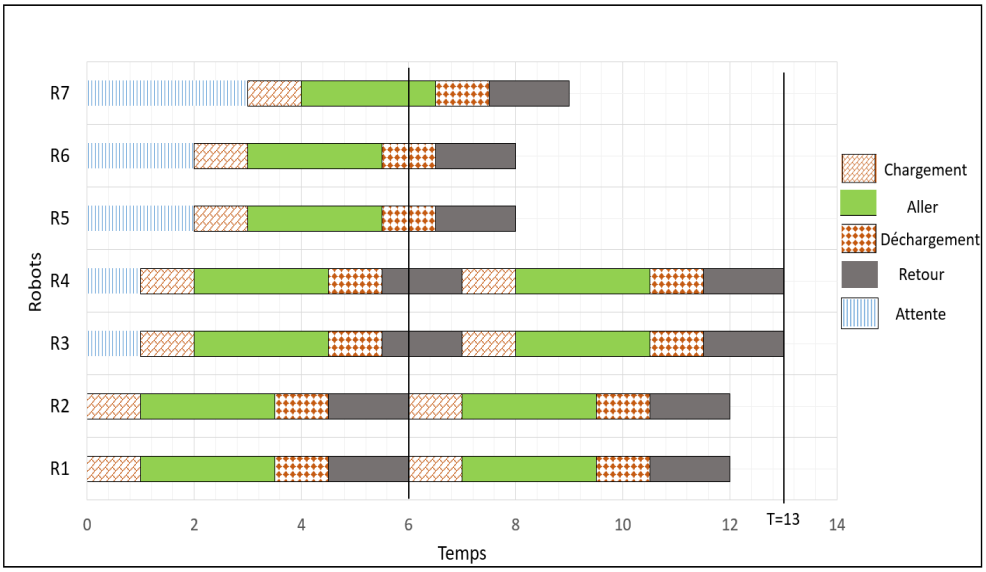


FIGURE 3.8 – Attente uniquement au premier chargement si $p \geq \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l$ ($n = 11$, $l = 2$, $t_l = 1$, $p = 6$, $T = 13$, $m^* = 7$)

– $\mathbf{\left(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil - 1\right) \cdot t_l < p < \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l}$: dans ce cas, lorsque les l premiers robots reviennent pour la première fois en A, un ou plusieurs robots sont en cours de chargement. Les robots R_j en train d'effectuer leur chargement sont donnés par :

$$j \in \left\{ \left(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot l + 1, \cdots, m-1, m \right\}.$$

Pour ce cas, nous constatons deux situations selon que le nombre de robots m est un multiple de nombre de stations ou non :

- $\frac{m}{l} \in \mathbb{N}$: à leur retour pour effectuer le deuxième chargement, les l premiers robots trouvent toutes les stations occupées et doivent attendre que les derniers robots de la flotte finissent leur chargement. Dans ce cas, tous les robots doivent attendre avant tout chargement. Le délai d'attente pour chaque chargement de tous les

robots à partir du deuxième chargement est donné par l'expression $\frac{m}{l} \cdot t_l - p$. (voir exemple de la figure 3.9).

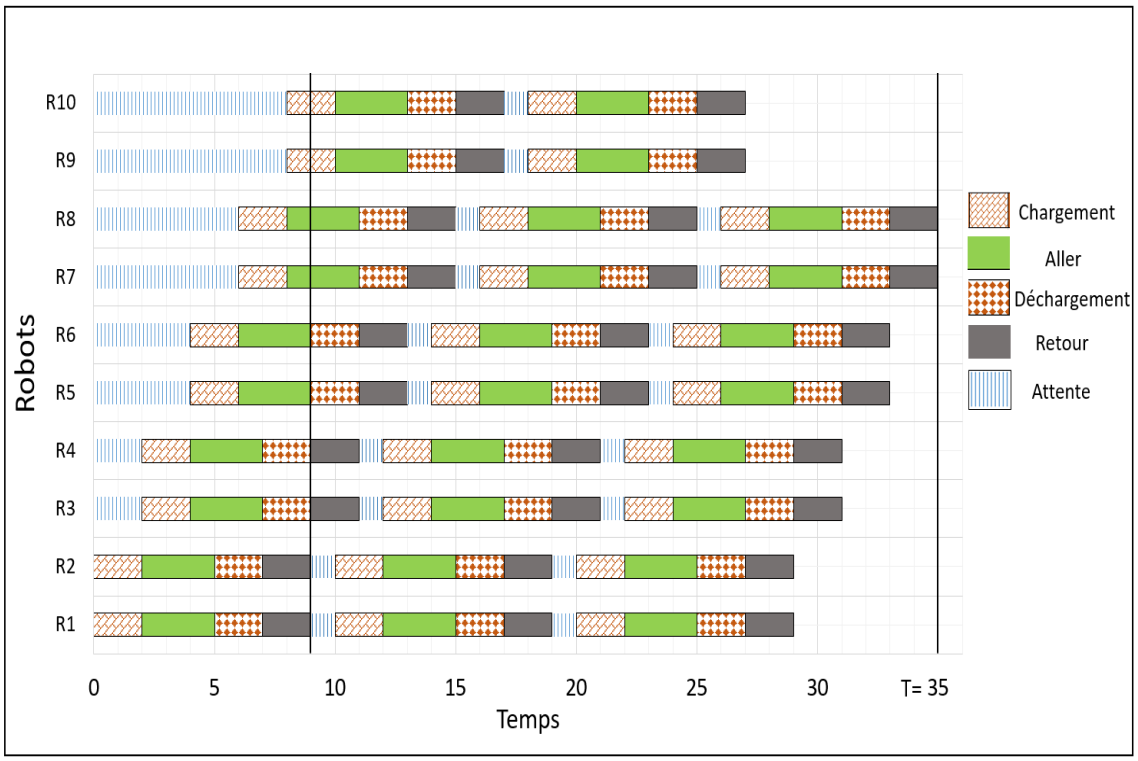


FIGURE 3.9 – Attente à tous les chargements si $(\frac{m}{l} - 1) \cdot t_l < p < \frac{m}{l} \cdot t_l$ et $\frac{m}{l} \in \mathbb{N}$ ($n = 28$, $l = 2$, $t_l = 2$, $p = 9$, $T = 35$, $m^* = 10$)

- $\frac{m}{l} \notin \mathbb{N}$: à leur retour pour effectuer le deuxième chargement, les l premiers robots trouvent certaines stations occupées. Les stations disponibles peuvent recevoir quelques robots parmi les l premiers. Pour simplifier le raisonnement, nous supposons que chaque robot est affecté à une station, cela signifie que l'attente d'un robot s'effectue toujours devant la même station. Sans cette hypothèse, le nombre optimal de robots est inchangé. Les robots affectés aux stations vides n'attendront jamais pour les tâches de transport restantes. Les autres robots, affectés aux stations occupées, doivent attendre la disponibilité de stations avant chaque chargement. Le délai d'attente avant chaque chargement pour ces robots est $\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l - p$. (voir exemple de la figure 3.10).

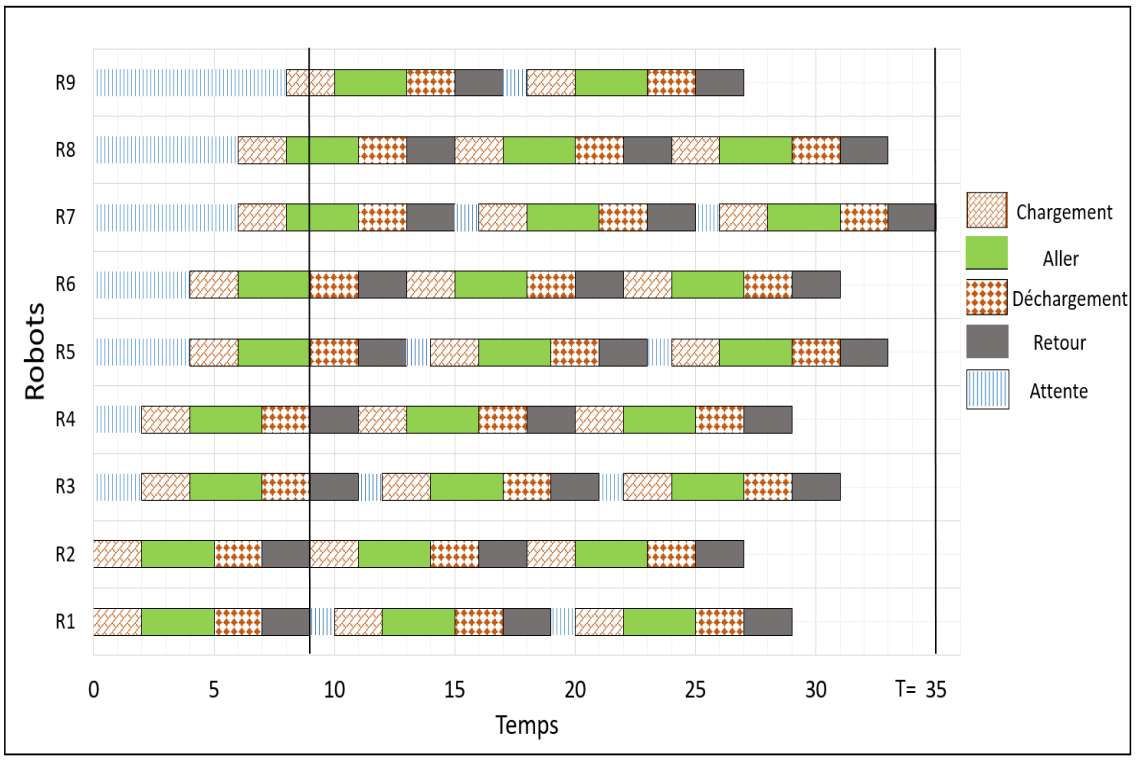


FIGURE 3.10 – Attente pour quelques robots si $(\lceil \frac{m}{l} \rceil - 1) \cdot t_l < p < \lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l$ et $\frac{m}{l} \notin \mathbb{N}$ ($n = 26$, $l = 2$, $t_l = 2$, $p = 9$, $T = 35$, $m^* = 9$)

Sur la figure 3.10, nous présentons un exemple du cas où $\frac{m}{l}$ n'est pas un entier. Le système de cet exemple contient $l = 2$ stations et $n = 26$ charges à transporter. Nous pouvons voir que les robots affectés à la première station R_j, avec $j \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, doivent attendre avant tout chargement contrairement aux robots affectés à la deuxième station Rj, avec $j \in \{2, 4, 6, 8\}$ qui n'attendent qu'au premier chargement (sauf R_2 qui n'attend jamais).

– $\mathbf{p \leq (\lceil \frac{m}{l} \rceil - 1) \cdot t_l}$: Dans ce cas, lorsque les l premiers robots reviennent pour la première fois en A, les derniers robots n'ont pas encore commencé leur premier chargement. Il y a alors au moins un robot inutile.

Nombre optimal de robots Nous allons traiter les deux cas de figure présentés afin de déterminer le nombre maximal de charges pouvant être transportées par une flotte de m robots.

– $\mathbf{p \geq \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l}$

Nous cherchons à exprimer la quantité de charges maximales n_j^{max} que le robot R_j peut transporter dans un horizon de planification T. Pour ce faire, nous exprimons le temps nécessaire pour transporter n_j^{max} par le robot R_j. Ce temps est composé d'un temps de transport de charges et d'un temps d'attente au premier chargement. Ce temps doit être inférieur à T, c'est-à-dire,

$$p \cdot n_j^{max} + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l \leq T.$$

Le nombre maximal de charges transportées par le robot R_j est entier, donc nous exprimons n_j^{max} comme suit

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l}{p} \right\rfloor.$$

– $\mathbf{\left(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l < p < \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l}$

Dans le cas où $\frac{m}{l}$ est entier, tous les robots doivent attendre avant tout chargement (sauf les l premiers robots qui n'attendent pas lors de leur premier chargement). Le temps nécessaire pour transporter une quantité maximale de charges n_j^{max} par le robot R_j doit être inférieur à T. Ce temps est composé d'un temps de transport de charges, d'un temps d'attente au premier chargement et d'un temps total d'attente à partir du deuxième chargement . Nous avons donc,

$$p \cdot n_j^{max} + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l + \left(\frac{m}{l} \cdot t_l - p \right) \left(n_j^{max} - 1 \right) \leq T$$

La quantité maximale de charges transportées par le robot R_j est donnée par :

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l + \frac{m}{l} \cdot t_l - p}{\frac{m}{l} \cdot t_l} \right\rfloor$$

Dans le deuxième cas où $\frac{m}{l}$ n'est pas entier, certains robots n'attendent qu'au premier chargement (sauf les l premiers robots qui n'attendent pas avant leur premier chargement) et d'autres attendent avant tout chargement. Pour le cas des robots qui n'attendent pas, ils transportent une quantité maximale de charges égale à celle trouvée pour le cas ($p \geq \lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l$), c'est-à-dire,

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l}{p} \right\rfloor .$$

Pour les robots qui doivent attendre, le temps total de fonctionnement est composé d'un temps de transport de charges, d'un temps d'attente au premier chargement et d'un temps total d'attente pour tout chargement autre que le premier. Ce temps doit être inférieur à T, c'est-à-dire,

$$p \cdot n_j^{max} + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l + \left(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil \cdot t_l - p \right) (n_j^{max} - 1) \leq T$$

Pour ce cas, la quantité maximale de charges que le robot R_j peut transporter dans T est

$$n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l + \lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l \ - p}{\lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l} \right\rfloor .$$

Nous pouvons déterminer les robots qui doivent attendre à tout chargement et les robots qui n'attendent qu'au premier chargement. Cette détermination se fait en utilisant l'hypothèse d'affectation de robots pour des stations de chargement expliquée en page 71. La première étape consiste à déterminer le nombre de robots R_w du dernier groupe effectuant le chargement. Pour ce cas, le nombre R_w est strictement inférieur à l, c'est-à-dire que pour les stations affectées à ces robots, un délai d'attente sera imposé avant chaque chargement après le premier retour au point A. Nous pouvons calculer R_w comme suit, avec $R_w \in \{1, \cdots, l-1\}$: $R_w = m - \lfloor \frac{m}{l} \rfloor \cdot l$

Donc, les robots affectés aux stations $\{1, \cdots, R_w\}$ doivent attendre avant tout charge-

ment. Les robots affectés aux stations $\{R_w + 1, \cdots, l\}$ n'attendent jamais à partir du deuxième chargement.

Soit I_1 l'ensemble des robots qui doivent attendre à tout chargement. Nous avons

$$I_1 = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \lceil \frac{m}{l} \rceil - 1\}} \{q \cdot l + 1, \cdots, q \cdot l + R_w\}$$

Soit $I_2 = \{1, \cdots, m\} \backslash I_1$, l'ensemble des robots qui n'attendent jamais à partir du deuxième chargement. Nous avons

$$I_2 = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \lceil \frac{m}{l} \rceil - 2\}} \{q \cdot l + R_w + 1, \cdots, (q+1) \cdot l\}$$

- $\mathbf{p \leq (\lceil \frac{m}{l} \rceil - 1) \cdot t_l}$

  Dans ce cas, la condition nous donne $\lceil \frac{m}{l} \rceil \geq \frac{p}{t_l} + 1$, c'est-à-dire, $\lceil \frac{m}{l} \rceil > \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil$. Cela signifie qu'une fois le terme $\lceil \frac{m}{l} \rceil$ dépasse $\left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil$, il existe alors $m_{inutiles}$ robots inutiles dans la flotte qui ne sont pas capables d'augmenter le nombre maximal de charges à transporter. Le nombre de robots inutiles dans la flotte est donné par l'expression suivante :

$$m_{inutiles} = m - \left(\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot l$$

L'expression de la quantité maximale de charges $N_{max}(m)$ transportées par toute la flotte est donnée par

$$N_{max}(m) = \sum_{j=1}^{m} n_j^{max}$$

Nous pouvons maintenant exprimer le nombre optimal de robots m^* de la flotte

$$m^* = \min \left[m \in \mathbb{N}^* | N_{max}(m) \geq n \right].$$

Équilibrage de la charge des robots En utilisant le nombre optimal de robots trouvé m^*, et la solution équilibrée du théorème 1 (page 59) nous répartissons l'ensemble de charges à transporter sur les robots de la flotte. Nous utilisons toujours n_j comme le nombre de charges transportées par le robot R_j pendant un horizon de temps $[0, T]$ avec

$$n_j = \left\{ \begin{array}{ll} \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil & \text{si} \quad j \in \{1, \cdots, m^* - s\} \\ \left\lfloor \frac{n}{m^*} \right\rfloor & \text{sinon} \end{array} \right\} \text{avec} \quad s = \left\lceil \frac{n}{m^*} \right\rceil m^* - n$$

Nous gardons toujours les deux cas d'étude :

- $\mathbf{p \geq \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil \cdot t_l}$

  Dans ce cas de figure, le temps total de fonctionnement C_j d'un robot R_j est composé d'un temps de transport de n_j charges et d'un temps d'attente au premier chargement (voir la figure 3.8)

  $$C_j = p \cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l$$

- $\mathbf{(\left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil - 1) \cdot t_l < p < \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil \cdot t_l}$

  Dans ce cas, et comme pour le calcul du nombre optimal de robots nous distinguons deux :

  - $\frac{m^*}{l} \in \mathbb{N}$: Dans ce cas, le temps de fonctionnement C_j d'un robot R_j est composé d'un temps de transport de n_j charges, d'un temps d'attente au premier chargement et d'un temps total d'attentes pour le reste de chargements (voir la figure 3.9). Ce temps est exprimé comme suit :

    $$\begin{aligned} C_j &= p \cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l + \left(\frac{m^*}{l} \cdot t_l - p \right) (n_j - 1) \\ &= p + \frac{m^*}{l} \cdot t_l (n_j - 1) + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l \end{aligned}$$

  - $\frac{m^*}{l} \notin \mathbb{N}$: Dans ce cas, il existe deux groupes de robots (voir la figure 3.10).

    Le premier groupe contient tout robot R_j où le temps de fonctionnement C_j est

composé d'un temps de transport de n_j charges, d'un temps d'attente au premier chargement et d'un temps total d'attentes pour le reste de chargements.

Ce temps s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} C_j &= p \cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l + \left(\left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil \cdot t_l - p \right) (n_j - 1) \\ &= p + \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil \cdot t_l (n_j - 1) + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l \end{aligned}$$

$$\text{Avec} \quad j \in I_1^* = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil - 1\}} \{q \cdot l + 1, \cdots, q \cdot l + R_w^*\}$$

et R_w^* est le nombre de robots du dernier groupe effectuant le chargement. Ce nombre est donné par

$$R_w^* = m^* - \left\lfloor \frac{m^*}{l} \right\rfloor \cdot l$$

Le deuxième groupe contient tout robot R_j où le temps de fonctionnement C_j est composé d'un temps de transport de n_j charges et d'un temps d'attente au premier chargement seulement.

Ce temps est exprimé de la même façon que le premier cas ($p \geq \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil \cdot t_l$)

$$C_j = p \cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{l} \right\rceil - 1 \right) \cdot t_l$$

$$\text{Avec} \quad j \in I_2^* = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \left\lceil \frac{m^*}{l} \right\rceil - 2\}} \{q \cdot l + R_w^* + 1, \cdots, (q+1) \cdot l\}$$

Nous pouvons exprimer la date de dernier cycle de transport C_{max} comme suit

$$C_{max} = \max_{1 \leq j \leq m^*} (C_j)$$

Théorème 3 *Lorsqu'on considère plusieurs stations de chargement, le nombre optimal de*

robot est

$$m^* = \min\left[m \in \mathbb{N}^* | N_{max}(m) \geq n\right] \;\; où \; N_{max}(m) = \sum_{j=1}^{m} n_j^{max}.$$

Avec

- *Si* $\lceil \frac{m}{l} \rceil < \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil$ *alors* $\quad n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l}{p} \right\rfloor$
- *Si* $\left(\lceil \frac{m}{l} \rceil = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m}{l} \in \mathbb{N}\right)$ *alors* $\quad n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l + \frac{m}{l} \cdot t_l - p}{\frac{m}{l} \cdot t_l} \right\rfloor$
- *Si* $\left(\lceil \frac{m}{l} \rceil = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m}{l} \notin \mathbb{N}\right)$ *alors*

$$n_j^{max} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l + \lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l \; - p}{\lceil \frac{m}{l} \rceil \cdot t_l} \right\rfloor & si \quad j \in I_1 \\ \left\lfloor \frac{T - \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l}{p} \right\rfloor & si \quad j \in I_2 \end{cases}$$

Où

- $I_1 = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \lceil \frac{m}{l} \rceil - 1\}} \{q \cdot l + 1, \cdots, q \cdot l + R_w\}$;
- $I_2 = \bigcup_{q \in \{0, \cdots, \lceil \frac{m}{l} \rceil - 2\}} \{q \cdot l + R_w + 1, \cdots, (q+1) \cdot l\}$;
- $R_w = m - \left\lfloor \frac{m}{l} \right\rfloor \cdot l.$

Dans la solution la plus équilibrée le makespan C_{max} *est*

$$C_{max} = \max_{1 \leq j \leq m^*} (C_j)$$

Avec

- *Si* $\lceil \frac{m^*}{l} \rceil < \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil$ *alors* $\quad C_j = p \cdot n_j + \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l$
- *Si* $\left(\lceil \frac{m^*}{l} \rceil = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m^*}{l} \in \mathbb{N}\right)$ *alors* $\quad C_j = p + \frac{m^*}{l} \cdot t_l (n_j - 1) + \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l$
- *Si* $\left(\lceil \frac{m^*}{l} \rceil = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m^*}{l} \notin \mathbb{N}\right)$ *alors*

$$C_j = \begin{cases} p + \frac{m^*}{l} \cdot t_l (n_j - 1) + \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l & si \quad j \in I_1^* \\ p \cdot n_j + \left(\lceil \frac{j}{l} \rceil - 1\right) \cdot t_l & si \quad j \in I_2^* \end{cases}$$

Où

- $I_1 = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\lceil\frac{m^*}{l}\rceil-1\}}\{q\cdot l+1,\cdots,q\cdot l+R_w^*\}$;
- $I_2 = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\lceil\frac{m^*}{l}\rceil-2\}}\{q\cdot l+R_w^*+1,\cdots,(q+1)\cdot l\}$;
- $R_w^* = m^* - \lfloor\frac{m^*}{l}\rfloor\cdot l$.

3.1.2 Expédition

Le modèle de transport étudié consiste à mobiliser une flotte homogène de robots pour transporter des charges de même type du magazin de stockage automatisé (zone B) vers la zone de livraison (zone C). Le système de picking dans le magasin de stockage est composé d'un ou plusieurs transstockeurs automatisés. Un transstockeur récupère le produit à transporter, puis le déplace vers la station de chargement. Dès que le produit est disponible pour le chargement, le robot le transporte de la zone B vers la zone C avant de parcourir la même distance à vide de C vers B pour effectuer la tâche de transport suivante. La figure 3.11 montre un exemple du modèle de transport étudié entre la zone B et C.

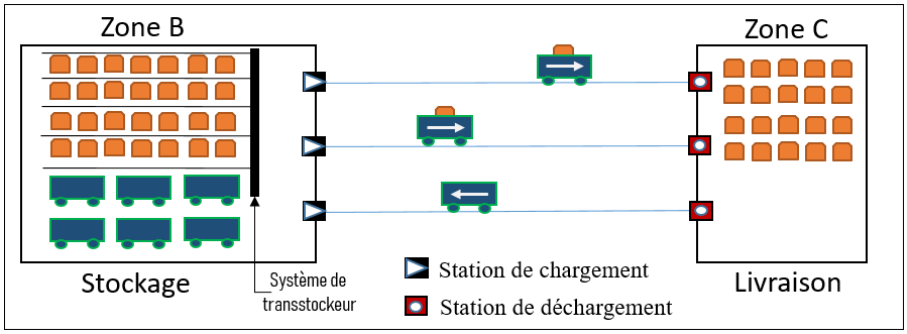


FIGURE 3.11 – Transport de charges homogènes entre B et C avec une flotte homogène

Supposons dans cette partie que chaque transstockeur automatisé nécessite un temps supplémentaire pour récupérer la charge dans le stock et l'envoyer à la station de chargement. Cette hypothèse implique que les robots à leur retour en B ne trouvent pas forcément la charge à transporter disponible, ce qui impose un délai d'attente supplémentaire sur les robots de la flotte.

Les notations utilisées dans cette section sont les mêmes que dans la section 3.1. Nous introduisons quelques notations supplémentaires :

- t_s : temps de picking (indépendant de la charge)
- d_{BC} : distance entre B et C
- θ : nombre de transstockeurs dans le système de stockage automatisé

Le temps de cycle pour une charge p est le temps pour effectuer les opérations suivantes : chargement, déplacement chargé, déchargement et retour à vide. Donc nous avons

$$p = d_{BC} \cdot \left(\frac{1}{v_l} + \frac{1}{v_e} \right) + t_l + t_u.$$

Remarquons qu'il y a une solution à ce problème si et seulement si la somme du temps de cycle p et le temps de picking t_s est inférieure ou égal à l'horizon de temps T. Nous supposerons que $p + t_s \leq T$ afin de se placer dans le cas où une solution existe.

Dans ce modèle, le système de picking est un AS/RS composé d'un ou plusieurs transstockeur de picking ayant besoin, chacun, d'un délai de picking t_s pour fournir la charge aux stations de chargement. Nous distinguons trois cas de figure selon le nombre de transstockeurs dans le système :

- Pas d'attente de picking
- Un seul transstockeur
- Plusieurs transstockeurs

Remarque : Dans le cas où il n'y a pas d'attente pour le picking, le système est capable de fournir toutes les charges aux stations de chargement dans un temps t_s. Cela signifie que les robots n'attendent qu'avant le premier chargement. A partir du deuxième chargement, les charges sont toujours disponibles pour les charger et les transporter vers la zone de livraison sans attente. Ce cas de figure est équivalent au modèle de transport entre la zone A et B avec une infinité de stations de chargements et un horizon de planification égal à $T - t_s$. Nous ne considérerons donc pas ce cas par la suite.

a. Un seul transstockeur

Dans ce cas, nous supposons que la zone de stockage est composé d'une seule allée ayant un seul transstockeur ($\theta = 1$). La figure 3.12 montre un exemple de modèle de stockage avec un seul transstockeur et sans attente pour le chargement et le déchargement

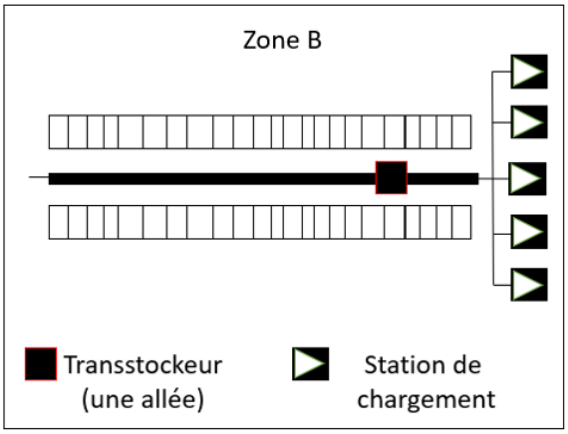


FIGURE 3.12 – Modèle de stockage avec un transstockeur

Ceci implique que le système ne peut fournir aux stations de chargement qu'une seule charge chaque t_s.

- $\mathbf{p \leq t_s}$: le temps de picking t_s est supérieur ou égal au temps de cycle d'une charge p. Dans ce cas, le premier robot attend le picking de la première charge t_s et à son retour trouve tous les autres robots en attente de la deuxième charge. Donc, nous pouvons constater qu'un seul robot sera suffisant pour transporter les charges de B vers C et tous les autres robots seront inutiles. Nous avons donc $m^* = 1$. En plus, le robot R_1 transportant $n_1 = n$ charges subit un délai d'attente supplémentaire équivalent au $(t_s - p)$ avant chaque cycle à partir du deuxième chargement.

  Le temps total de fonctionnement est composé d'un temps d'attente au premier chargement équivalent à t_s, d'un temps de transport de n charges et du temps total d'attente de chargement (à partir du deuxième chargement). Ce temps ne doit pas dépasser

l'horizon de planification T, c'est-à-dire,

$$p \cdot n + t_s + (n-1)(t_s - p) = n \cdot t_s + p \leq T$$

Nous pouvons exprimer la quantité maximale de charges N_{max} que le robot R_1 peut transporter, au delà de cette valeur, le problème n'a pas de solution.

$$N_{max} = \left\lfloor \frac{T-p}{t_s} \right\rfloor$$

La date de fin du dernier cycle de transport du robot est le makespan du système C_{max}

$$C_{max} = N_{max} \cdot t_s + p$$

- $\mathbf{p > t_s}$: le temps de picking t_s est strictement inférieur au temps de cycle d'une charge p. Dans ce cas, chaque robot R_j est obligé d'attendre j fois le temps de picking t_s avant le premier chargement. Pour une flotte de m robots, le premier robot R_1 à son retour peut :
  - trouver la charge à transporter disponible dans la station de chargement ce qui élimine toute attente pour les autres chargements ;
  - trouver la charge à transporter non disponible ce qui engendre un délai d'attente supplémentaire ;
  - trouver d'autres robots en attente du picking de charges ce qui implique l'inutilité de quelques robots.

  Pour bien décrire le système, nous détaillons les trois cas de figure selon le nombre de robots de la flotte :

  - $\mathbf{p \geq m \cdot t_s}$: le premier robot R_1 trouve à son retour la charge à transporter disponible dans la station de chargement. Le robot R_j partant à la j-ème position attend j fois le temps de picking avant le premier chargement et n'attend jamais

aux autres chargements. (figure 3.13)

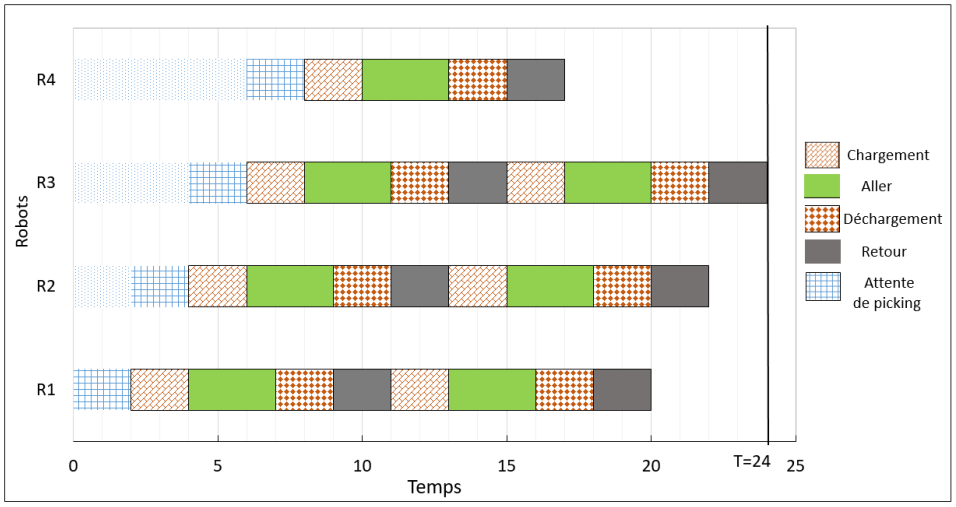


FIGURE 3.13 – Attente uniquement au premier chargement si $p \geq m \cdot t_s$
$(n = 7\ ,\ t_l = 2\ ,\ t_s = 2\ ,\ p = 9\ ,\ T = 24\ ,\ m^* = 4)$

- $\mathbf{(m-1) \cdot t_s < p < m \cdot t_s}$: le premier robot à son retour trouvent le système de picking en train de lui fournir la charge à transporter. Le robot R_1 est obligé d'attendre jusqu'à ce que la charge devienne disponible dans la station de chargement. Ce délai d'attente est équivalent à $(m \cdot t_s - p)$ avant chaque chargement pour chaque robot et à partir du deuxième chargement. (figure 3.14)

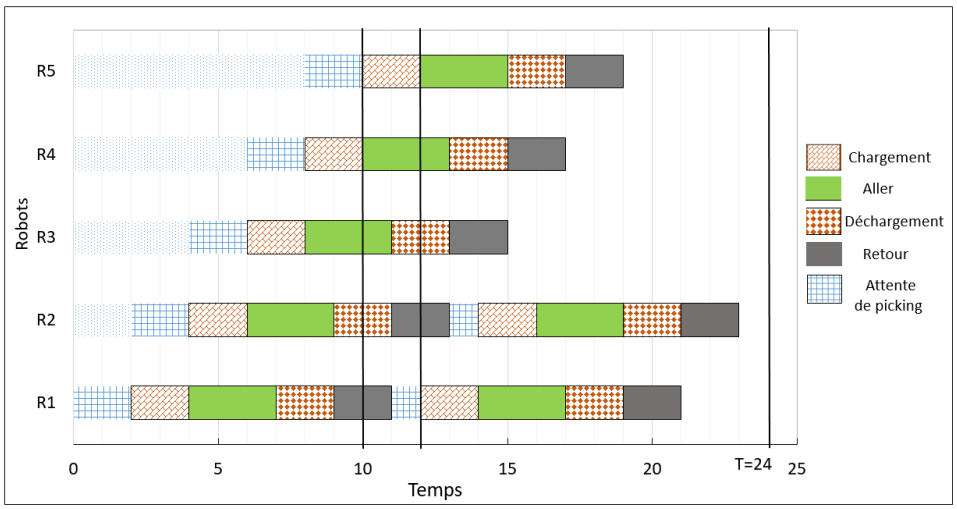


FIGURE 3.14 – Attente à tous les chargements si $(m-1) \cdot t_s < p < m \cdot t_s$
$(n = 7\ ,\ t_l = 2\ ,\ t_s = 2\ ,\ p = 9\ ,\ T = 24\ ,\ m^* = 5)$

- $\mathbf{p \leq (m-1) \cdot t_s}$: le premier robot R_1 à son retour trouve au moins un autre robot en attente du picking. Dans ce cas, les autres robots sont inutiles vu l'attente de plusieurs robots à la fois. Nous ne traitons pas ce cas de figure par la suite.

Remarque Nous constatons que si $p > t_s$, nous obtenons les mêmes cas de figure que le modèle de transport entre la zone A et B avec une seule station de chargement expliquée dans la sous-section 3.1.1. Nous avons donc les mêmes expressions du nombre optimal de robots et de la répartition de charges données par le théorème 2 en remplaçant le temps de chargement t_l par le temps de picking t_s et $m_0 = \left\lceil \frac{p}{t_l} \right\rceil$ par $m_1 = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil$.
Nous présentons ci-dessous le théorème 5 afin de résumer les résultats pour le modèle de transport avec un seul transstockeur

Théorème 4 *Lorsqu'on considère un système avec un seul transstockeur et sans attente pour le chargement et le déchargement*

- *Si $p \leq t_s$, le nombre optimal de robots est $m^* = 1$ avec un nombre maximum de charges à transporter*

$$n^{max} = \left\lfloor \frac{T-p}{t_s} \right\rfloor$$

avec un makespan C_{max} défini par l'expression suivante :

$$C_{max} = n \cdot t_s + p \quad avec \quad n \leq n^{max}$$

- *Si $p > t_s$, le nombre optimal de robots est*

$$m^* = \min[m \in \mathbb{N}^* | N_{max}(m) \geq n] \quad ; \quad m_1 = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil$$

Avec

$$N_{max}(m) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \left\lfloor \frac{T-j \cdot t_s}{p} \right\rfloor & si \quad m < m_1 \\ \sum_{j=1}^{m_1} \left\lfloor \frac{T-p+t_s \cdot (m_1-j)}{m_1 \cdot t_s} \right\rfloor & si \quad m \geq m_1 \end{cases}$$

En utilisant la solution la plus équilibrée le makespan C_{max} est

$$C_{max} = \max_{1 \leq j \leq m^*}(C_j)$$

Avec

$$C_j = \begin{cases} p \cdot n_j + j \cdot t_s & si \quad m < m_1 \\ p \cdot n_j + j \cdot t_s + (n_j - 1)(m^* \cdot t_s - p) & si \quad m \geq m_1 \end{cases}$$

b. Plusieurs transstockeurs

Supposons dans cette partie que le magasin de stockage contient entre 2 et m^* transstockeurs sans attente pour le chargement et le déchargement, cela signifie que $(1 < \theta \leq m^*)$. Dans ce cas, nous supposons que les transstockeurs sont capables de fournir les charges demandées sans conflits de fonctionnement. La figure 3.15 présente un exemple du modèle de stockage avec 3 transstockeurs sans attente pour le chargement et le déchargement.

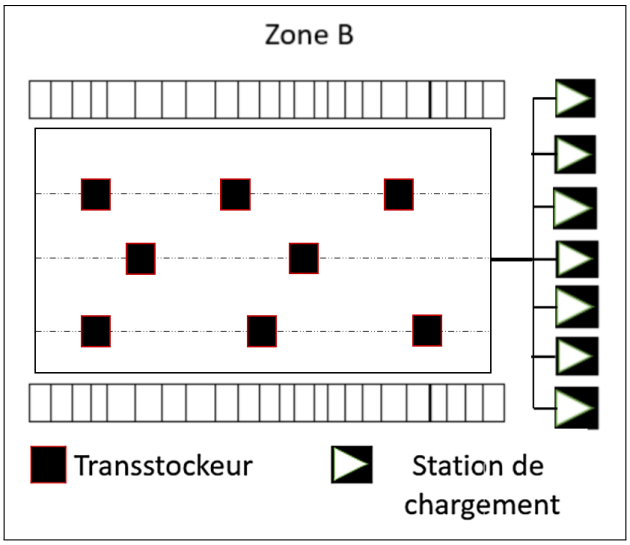


FIGURE 3.15 – Modèle de stockage avec plusieurs transstockeurs

Avec θ transstockeurs, le système ne peut fournir que θ charges chaque t_s. Nous pouvons distinguer deux cas de figure

– $\mathbf{p \leq t_s}$: le temps de picking t_s est supérieur ou égal au temps de cycle d'une charge p. Dans ce cas, les θ premiers robots attendent le picking de charges pendant t_s et à leur retour trouvent tous les autres robots en attente de la deuxième charge. Donc, nous pouvons constater que θ robots seront suffisants pour transporter les charges de B vers C et tous les autres robots seront inutiles. Nous pouvons dire que $m^* = \theta$. Les θ robots de la flotte subissent un délai d'attente supplémentaire équivalent au $(t_s - p)$ avant chaque cycle de transport et à partir de deuxième chargement. La figure 3.16 montre un exemple de transport avec quatre transstockeurs sans attente pour le chargement et le déchargement où $t_s \geq p$.

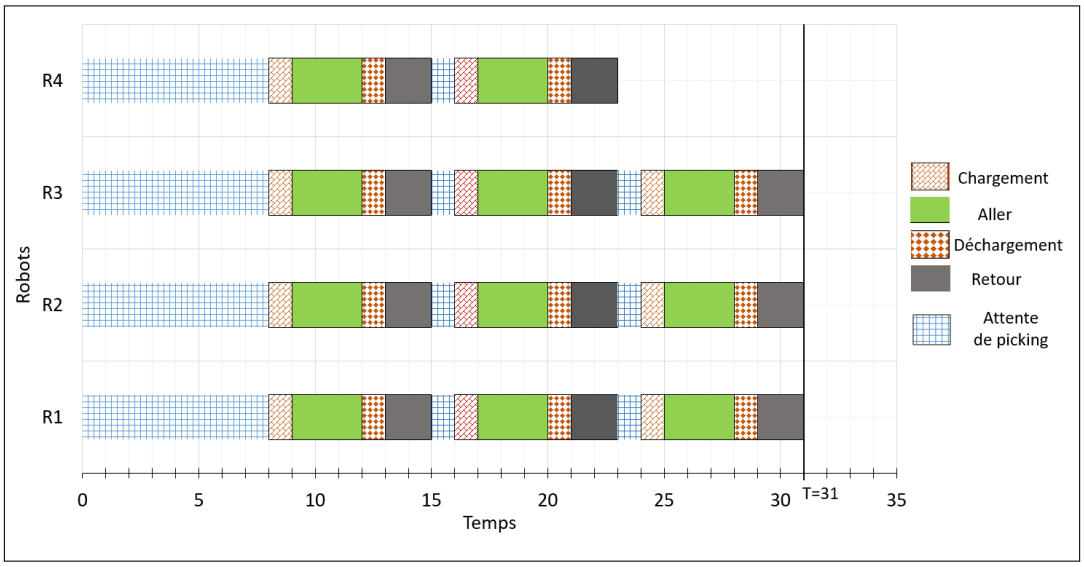


FIGURE 3.16 – Exemple de transport avec plusieurs transstockeurs et $t_s \geq p$ ($n = 11$, $\theta = 4$, $t_l = 1$, $t_s = 8$, $p = 7$, $T = 31$, $m^* = 4$

Le temps nécessaire pour tout robot R afin de transporter un nombre maximal de charges n^{max} ne doit pas dépasser l'horizon de planification T, c'est-à-dire,

$$p \cdot n^{max} + t_s + (n^{max} - 1)(t_s - p) \leq T$$

Nous pouvons exprimer la quantité maximale de charges transportées par chaque robot

R de la flotte

$$n^{max} = \left\lfloor \frac{T-p}{t_s} \right\rfloor$$

Le nombre maximal de charges N_{max} transportées par tout la flotte est

$$N_{max} = \theta \left\lfloor \frac{T-p}{t_s} \right\rfloor \geq n$$

Pour m^* robots dans la flotte, chaque robot transporte $\lfloor \frac{n}{\theta} \rfloor$ ou $\lceil \frac{n}{\theta} \rceil$ charges. Donc, nous pouvons exprimer la date de fin du dernier cycle de transport qui est le makespan du système C_{max}

$$C_{max} = \left\lceil \frac{n}{\theta} \right\rceil \cdot t_s + p$$

– $\mathbf{p > t_s}$: si le nombre de transstockeurs θ est égal au nombre optimal de robots de la flotte m^*, le problème est considéré comme le cas du modèle de transport entre la zone A et B sans attente pour le chargement et le déchargement et un horizon de planification égal à $T - t_s$. La figure 3.17 montre l'exemple de transport avec un nombre de transstockeurs égal au nombre de robots où $p > t_s$.

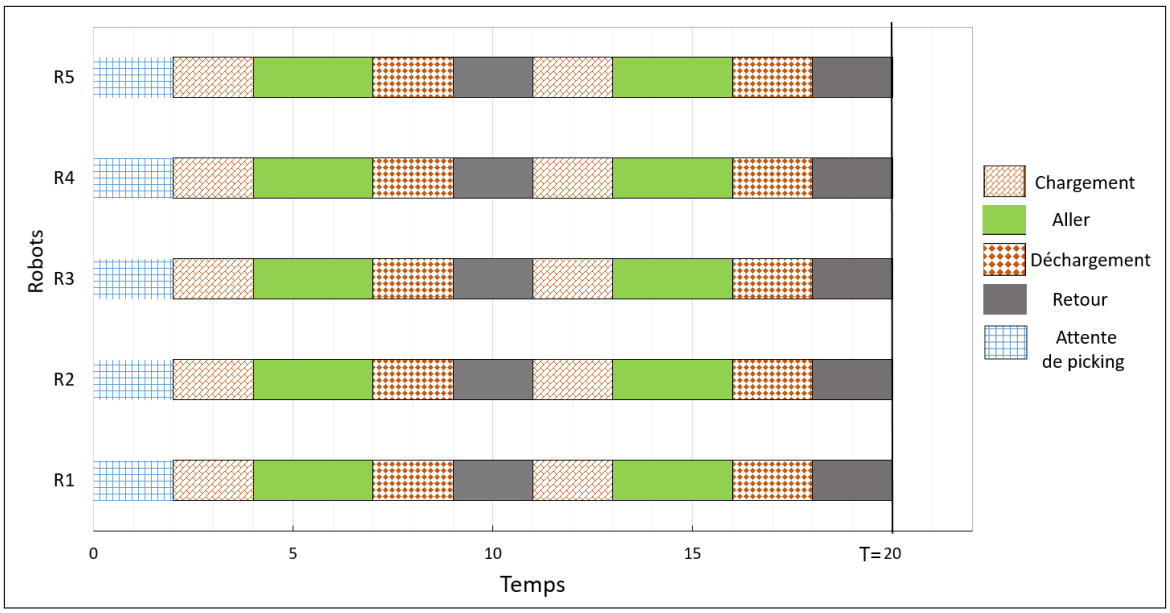


FIGURE 3.17 – Modèle de transport avec $p > t_s$ et $\theta = m^*$
($n = 10$, $\theta = 5$, $t_l = 2$, $t_s = 2$, $p = 7$, $T = 20$, $m^* = 5$)

Dans cette partie, nous traitons le cas où $\theta < m$. Dans ce cas, le temps de picking t_s est inférieur strictement au temps de cycle p d'une charge. Pour les θ premiers robots, chaque robot R_j est obligé d'attendre $\lceil \frac{j}{\theta} \rceil$ fois le temps de picking t_s avant le premier chargement. Pour une flotte de m robots, les θ premiers robots à leur retour peuvent :

- trouver les charges à transporter disponibles dans la station de chargement ce qui élimine toute attente pour les autres chargements ;
- trouver les charges à transporter non disponibles ce qui engendre un délai d'attente supplémentaire ;
- trouver d'autres robots en attente du picking de charges ce qui implique l'inutilité de quelques robots à cause de l'attente de plusieurs robots à la fois.

Nous détaillons alors chaque cas de figure selon le nombre de robots de la flotte :

- $\mathbf{p \geq \lceil \frac{m}{\theta} \rceil \cdot t_s}$: les premiers θ robots trouvent à leur retour les charges à transporter disponibles dans les stations de chargement. Chaque robot R_j partant à la j-ème position attend j fois le temps de picking avant le premier chargement et n'attend jamais aux autres chargements. (figure 3.18)

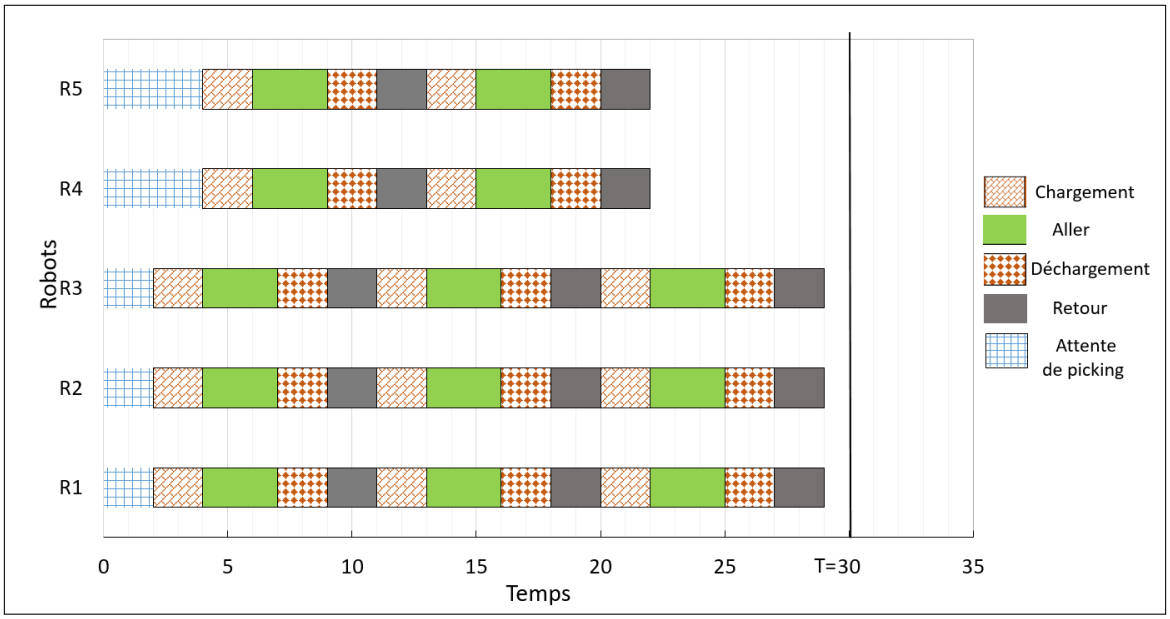


FIGURE 3.18 – Attente uniquement au premier chargement si $p \geq \lceil \frac{m}{\theta} \rceil \cdot t_s$
($n = 13$, $\theta = 3$, $t_l = 2$, $t_s = 2$, $p = 9$, $T = 30$, $m^* = 5$)

- $(\lceil \frac{\mathbf{m}}{\theta} \rceil - \mathbf{1}) \cdot \mathbf{t_s} < \mathbf{p} < \lceil \frac{\mathbf{m}}{\theta} \rceil \cdot \mathbf{t_s}$: les θ premiers robots à leur retour trouvent un ou plusieurs transstockeurs en train de chercher la ou les charges en stock. Les derniers robots R_j sont donnés par l'expression suivante :

$$j \in \left\{ \left(\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil - 1 \right) \cdot \theta + 1, \cdots, m \right\}.$$

Pour ce cas, il existe deux situations au moment de retour de θ premiers robot au point A :

  - ► $\frac{m}{\theta} \in \mathbb{N}$: à leur retour pour effectuer le deuxième chargement, les θ premiers robots trouvent toutes les transstockeurs occupées et doivent attendre la livraison de la charge au niveau de station de chargement. Dans ce cas, tous les robots doivent attendre avant tout chargement. Le délai d'attente de tout les robots à partir du deuxième chargement est donné par l'expression suivante $\left(\frac{m}{\theta} \cdot t_s - p\right)$. (figure 3.19).

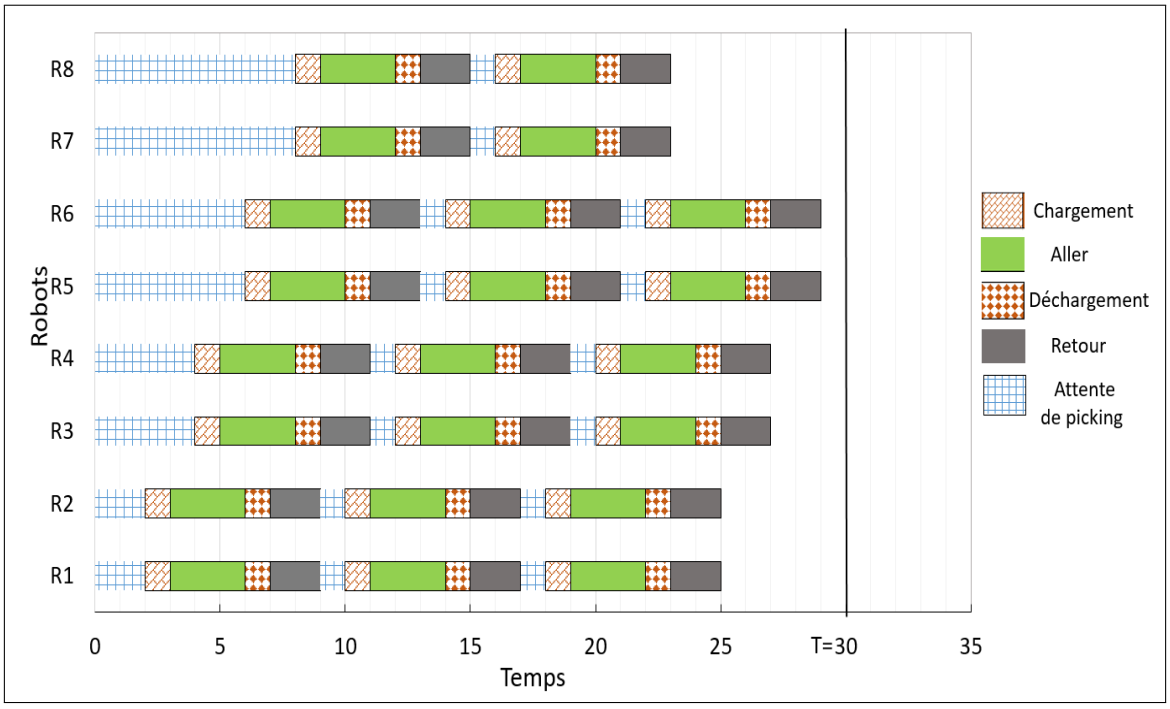


FIGURE 3.19 – Attente à tous les chargements si $(\frac{m}{\theta} - 1) \cdot t_s < p < \frac{m}{\theta} \cdot t_s$ $(n = 22, \theta = 2, t_l = 2, t_s = 2, p = 9, T = 30, m^* = 8)$

► $\frac{m}{\theta} \notin \mathbb{N}$: à leur retour pour effectuer le deuxième chargement, les θ premiers robots trouvent certains transstockeurs en train de chercher les charges demandées. D'autres transstockeurs ont fourni déjà une ou plusieurs charges. Les robots affectés aux transstockeurs qui ont livré les charges n'attendrons jamais pour le reste de tâches de transport. Les robots affectés aux stations occupées doivent attendre la disponibilité de la charge au niveau de stations avant chaque chargement. Le délai d'attente pour ces robots est $\left(\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil \cdot t_s - p\right)$. (figure 3.20).

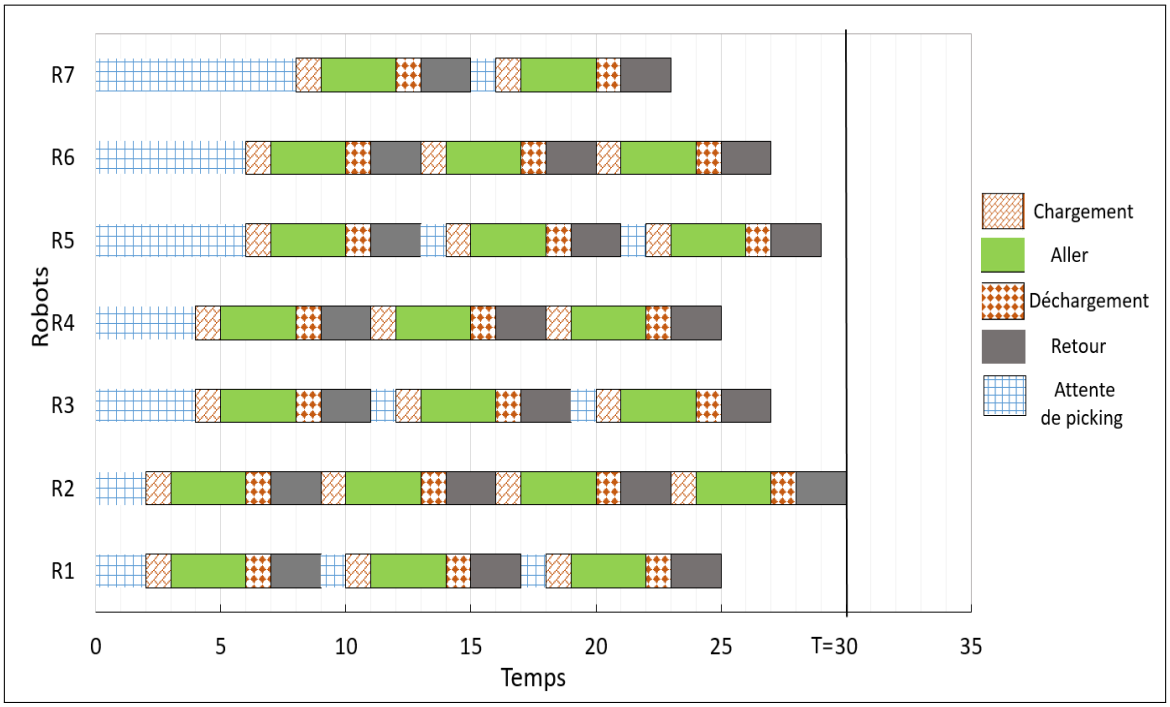


FIGURE 3.20 – Attente pour quelques robots si $(m-1) \cdot t_l < p < m \cdot t_l$ $(n = 21,\ \theta = 2,\ t_l = 1,\ t_s = 2,\ p = 7,\ T = 30,\ m^* = 7)$

- $\mathbf{p \leq \left(\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil - 1\right) \cdot t_s}$: Dans ce cas, lorsque les θ premiers robots reviennent pour la première fois en A, les derniers robots n'ont pas encore commencé leur premier chargement. Il y a alors au moins un robot inutile. Ce cas de figure ne sera pas considéré.

Remarque Pour le cas où $p > t_s$, nous remarquons que le raisonnement est le même que celui de la partie du transport entre la zone A et la zone B avec plusieurs stations de chargement expliquée dans la page (page 69). Nous aurons donc les mêmes résultats adaptés à ce cas de figure. Nous utilisons les expressions du nombre optimal de robots ainsi que le makespan directement du théorème 3 en changeant le nombre de stations de chargement l par le nombre de transstockeurs θ et le temps de chargement t_l par le temps de picking t_s.

Le théorème 5 ci-dessous présente la solution de différents cas pour le modèle de transport avec plusieurs transstockeurs.

Théorème 5 *Lorsqu'on considère un système avec plusieurs transstockeurs et sans attente pour le chargement et le déchargement*

- *Si* $p \leq t_s$, *le nombre optimal de robots est* $m^* = \theta$ *avec un nombre maximum de charges à transporter*

$$N_{max} = \theta \left\lfloor \frac{T-p}{t_s} \right\rfloor$$

avec un makespan C_{max} *défini par l'expression suivante :*

$$C_{max} = \left\lceil \frac{n}{\theta} \right\rceil \cdot t_s + p$$

- *Si* $p > t_s$, *le nombre optimal de robot est*

$$m^* = \min\left[m \in \mathbb{N}^* | N_{max}(m) \geq n\right] \ \ où\ N_{max}(m) = \sum_{j=1}^{m} n_j^{max}.$$

Avec

- *Si* $\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil < \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil$ *alors* $\quad n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil - 1\right) \cdot t_s}{p} \right\rfloor$
- *Si* $\left(\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m}{\theta} \in \mathbb{N}\right)$ *alors* $\quad n_j^{max} = \left\lfloor \frac{T - \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil - 1\right) \cdot t_s + \frac{m}{\theta} \cdot t_s - p}{\frac{m}{\theta} \cdot t_s} \right\rfloor$
- *Si* $\left(\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m}{\theta} \notin \mathbb{N}\right)$ *alors*

$$n_j^{max} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{T-\left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s + \left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil \cdot t_s - p}{\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil \cdot t_s} \right\rfloor & si \quad j \in I_3 \\ \left\lfloor \frac{T-\left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s}{p} \right\rfloor & si \quad j \in I_4 \end{cases}$$

Où

- $I_3 = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil -1\}} \{q\cdot\theta+1,\cdots,q\cdot\theta+R_{ws}\}$;
- $I_4 = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\left\lceil \frac{m}{\theta} \right\rceil -2\}} \{q\cdot\theta+R_{ws}+1,\cdots,(q+1)\cdot\theta\}$;
- $R_{ws} = m - \left\lfloor \frac{m}{\theta} \right\rfloor \cdot \theta$.

Dans la solution la plus équilibrée le makespan C_{max} est

$$C_{max} = \max_{1\leq j\leq m^*} (C_j)$$

Avec

- *Si* $\left\lceil \frac{m^*}{\theta} \right\rceil < \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil$ *alors* $\quad C_j = p\cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s$
- *Si* $\left(\left\lceil \frac{m^*}{\theta} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m^*}{\theta} \in \mathbb{N}\right)$ *alors* $\quad C_j = p + \frac{m^*}{\theta}\cdot t_s(n_j-1) + \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s$
- *Si* $\left(\left\lceil \frac{m^*}{\theta} \right\rceil = \left\lceil \frac{p}{t_s} \right\rceil\right)$ *et* $\left(\frac{m^*}{\theta} \notin \mathbb{N}\right)$ *alors*

$$C_j = \begin{cases} p + \frac{m^*}{\theta}\cdot t_s(n_j-1) + \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s & si \quad j \in I_3^* \\ p\cdot n_j + \left(\left\lceil \frac{j}{\theta} \right\rceil -1\right)\cdot t_s & si \quad j \in I_4^* \end{cases}$$

Où

- $I_3^* = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\left\lceil \frac{m^*}{\theta} \right\rceil -1\}} \{q\cdot\theta+1,\cdots,q\cdot\theta+R_{ws}^*\}$;
- $I_4^* = \bigcup_{q\in\{0,\cdots,\left\lceil \frac{m^*}{\theta} \right\rceil -2\}} \{q\cdot\theta+R_{ws}^*+1,\cdots,(q+1)\cdot\theta\}$;
- $R_{ws}^* = m^* - \left\lfloor \frac{m^*}{\theta} \right\rfloor \cdot \theta$.

3.2 Charges hétérogènes

Dans cette partie, nous souhaitons dimensionner une flotte de robots permettant le transport de charges de plusieurs types de la zone A à la zone B avec un système sans attente pour le chargement et le déchargement et un stockage dédié par type de charges, c'est-à-dire qu'il existe une sous-zone de stockage pour chaque type de charges dans la zone B. La figure 3.21 donne un exemple de transport de trois types de charges avec une flotte homogène et des zones de stockage dédiées à chaque type de charge.

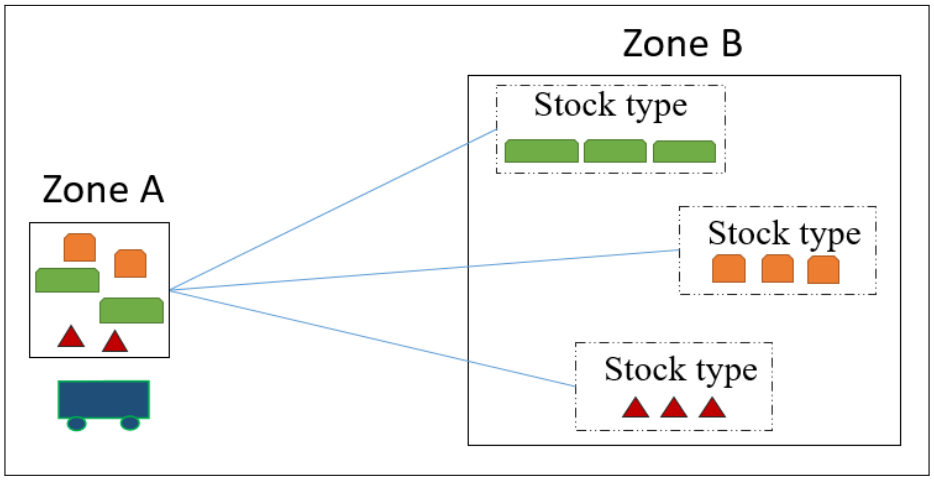


FIGURE 3.21 – Transport de charges hétérogènes entre A et B avec une flotte homogène et stockage dédié

3.2.1 Formulation du problème

Pour ce problème, nous supposons que la vitesse et la distance dépendent du type de la charge transportée. Sans cette hypothèse, le problème reste le même que celui de la section 3.1 vu que nous utilisons le même type de robots. Nous noterons :

- G : nombre de types de charges à transporter
- g : type de charge ($g \in \{1, \cdots, G\}$)
- Pour tout type g, nous définissons :
  - n_g : nombre de charges de type g

- v_{lg} : vitesse de circulation d'un robot transportant une charge de type g
- d_g : distance parcourue par un robot transportant une charge de type g entre A et B
- w_{ig} : paramètre qui vaut 1 si la charge i est de type g, avec $n_g = \sum_{i=1}^{n} w_{ig}$

Après avoir chargé la charge i de type g à la zone A le robot traverse la distance d_g, la décharge dans la zone de stockage et traverse la même distance à vide. A son arrivée à la zone de réception, le robot sera affecté pour transporter une nouvelle charge via une station de chargement. Le temps de cycle de transport de la charge de type g est

$$p_g = d_g \cdot \left(\frac{1}{v_{lg}} + \frac{1}{v_e} \right) + t_l + t_u$$

Nous supposons que $p_g \leq T$, sinon, il n'y a pas de solution au problème.

Avant de procéder à la résolution du problème, nous pouvons encadrer le nombre optimal de robots m^* comme suit :

$$m^A \leq m^* \leq m^G = \sum_{g=1}^{G} m_g^*$$

avec m^A le nombre de robot en utilisant l'approximation expliquée en page 61 et m_g^* le nombre optimal de robots d'une flotte homogène de type g et en utilisant la formule du théorème 1 (page 59). Nous avons alors

$$\left\lceil \frac{\sum_{g=1}^{G} n_g p_g}{T} \right\rceil \leq m^* \leq \sum_{g=1}^{G} \left\lceil \frac{n_g}{\left\lfloor \frac{T}{p_g} \right\rfloor} \right\rceil$$

et nous constatons que :

- si T tend vers p_g (le temps de cycle est légèrement inférieur à T pour tout type g) alors m^* tend vers m^G.
- si T tend vers l'infini, m^A tend vers 1 robot et m^G tend vers G (un robot pour chaque type g).

Pour résoudre ce problème, nous pouvons considérer notre problème de dimensionnement comme un problème de Bin Packing. Dans notre cas de transport, nous pouvons considérer que nous avons n objets (charges). L'objet i de type g est de taille p_g. Le problème consiste à placer tous les objets dans des boîtes (robots) de taille T (horizon de planification). Le plus petit nombre de boîtes représente le nombre optimal de robots m^*. Ce problème peut être formulé par un Programme Linéaire en Nombres Entiers (PLNE).

Nous définissons les deux variables binaires suivantes :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la charge } i \text{ est transportée par le robot } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{si le robot } j \text{ est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PLNE 1

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} y_j \tag{3.4}$$

$$s.c. \quad \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n} p_g \cdot x_{ij} \cdot w_{ig} \leq T \cdot y_j \qquad j = 1, \cdots, n \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, \cdots, n \tag{3.6}$$

$$y_j \in \{0,1\} \quad , \quad x_{ij} \in \{0,1\} \tag{3.7}$$

Signification des contraintes :

- Contrainte (3.5) : chaque robot doit être en mesure de transporter l'ensemble des charges qui lui est affecté dans l'horizon $[0, T]$.
- Contrainte (3.6) : chaque charge doit être transportée par un seul robot.

Remarque : Dans le cas où toutes les charges sont de différents types, notre PLNE 1 peut être adapté en simplifiant la contrainte (3.5) comme suit :

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot x_{ij} \leq T \cdot y_j \qquad j = 1, \cdots, n$$

avec p_i le temps de cycle de transport de la charge i sur une distance de transport d_i.

3.2.2 Étude numérique

Dans cette partie, nous présentons quelques résultats obtenus avec notre modèle. Cette partie numérique est faite avec l'outil informatique d'optimisation Cplex Optimizer.

Qualité des bornes Le modèle de transport étudié se compose de trois types de charges ($G = 3$) à transporter dans un horizon de planification T tel que :

$T \in \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 25, 30, 40, 50, 100, 200, 500, 600, 800, 1000\}$.

Pour chaque valeur de T, nous calculons le nombre optimal de robots m^*, le nombre de robots donné par la borne inférieure m^A et le nombre de robots donné par la borne supérieure m^G et nous notons le temps de calcul (en secondes) donné par Cplex. La figure 3.22 montre l'évolution de m^*, m^A et m^G en fonction de l'horizon de planification.

Nous remarquons sur la figure 3.22 que pour des valeurs faibles de T, l'écart entre les deux bornes m^A et m^G est important et le nombre optimal de robots m^* tend vers la limite supérieure m^G lorsque T tend vers p_g. Si T tend vers l'infini, l'écart entre les deux bornes devient très faible, le nombre optimal de robots m^* tend vers la borne inférieure m^A, la borne inférieure m^A tend vers 1 et la borne supérieure tend vers le nombre de types de charges G.

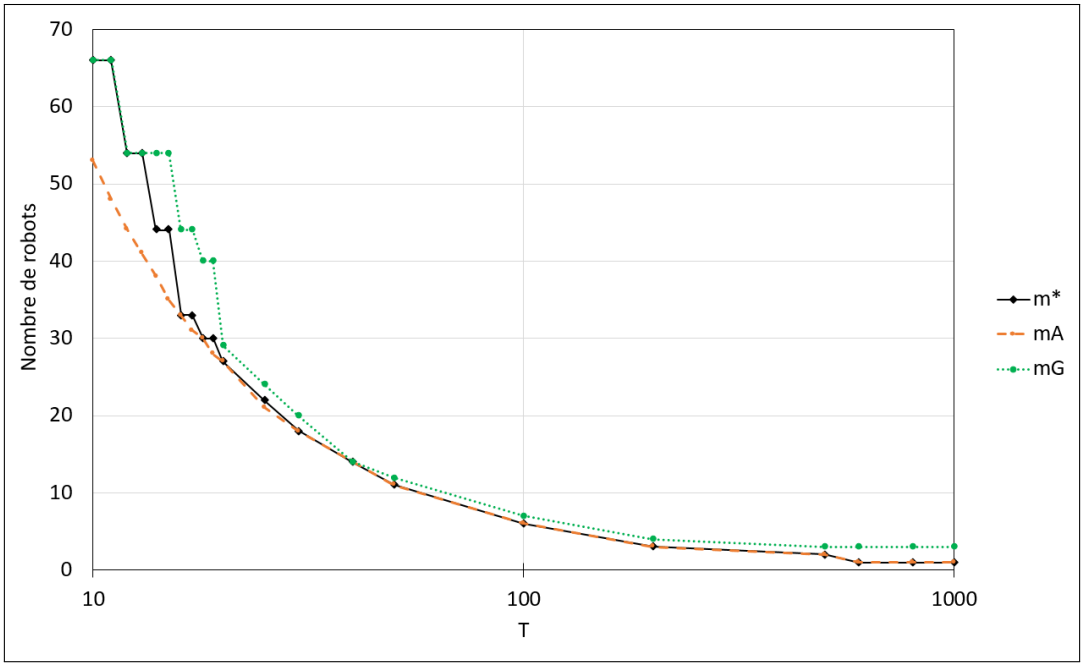


FIGURE 3.22 – Évolution de m^*, m^A et m^G en fonction de l'horizon de planification T (échelle logarithmique , $n_1 = 20$, $n_2 = 24$, $n_3 = 22$, $p_1 = 8$, $p_2 = 6$, $p_3 = 10$)

Temps de calcul Pour les mêmes instances, la figure 3.23 représente le temps de calcul en fonction de l'horizon de planification T.

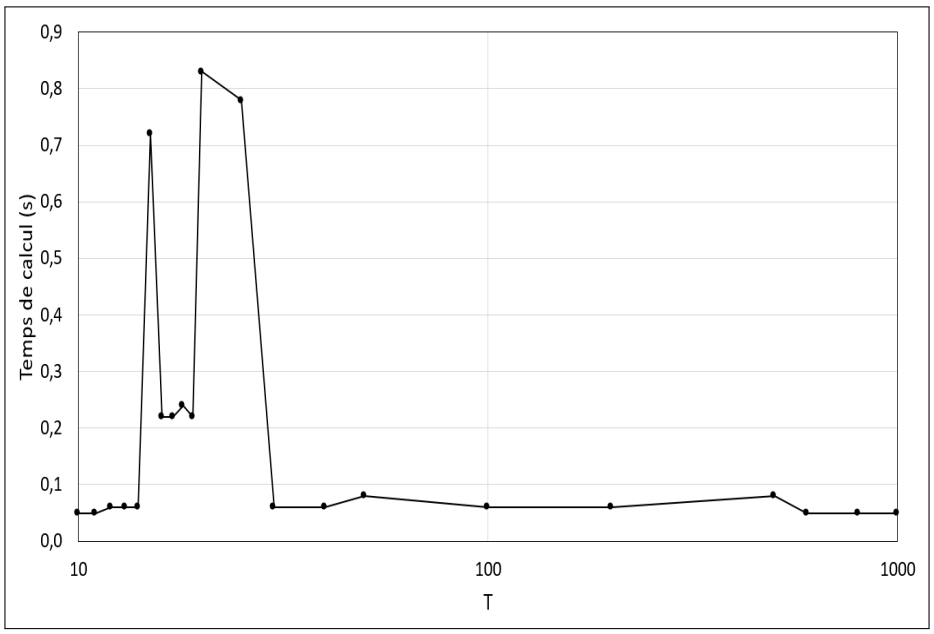


FIGURE 3.23 – Évolution du temps de calcul en fonction de l'horizon de planification T (échelle logarithmique , $n_1 = 20$, $n_2 = 24$, $n_3 = 22$, $p_1 = 8$, $p_2 = 6$, $p_3 = 10$)

Nous remarquons sur la figure 3.23 que le temps de calcul est très faible pour des valeurs de $T \in [10, 14]$ et $T \in [30, 1000]$. Ces deux intervalles présentent les valeurs de T où le nombre optimal de robots m^* tend vers l'une de deux bornes, c'est-à-dire, vers la borne supérieure sur l'intervalle $[10, 14]$ et vers la borne inférieure sur l'intervalle $[30, 1000]$.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité le problème de dimensionnement d'une flotte de robots homogènes pour deux modèles : modèle de transport de charges homogènes et modèle de transport de charges hétérogènes.

La première section est consacrée pour le modèle de transport de charges homogènes. Nous avons résolu le problème pour le cas de transport entre la zone de réception et la zone de stockage, en tenant compte du nombre de stations de chargement / déchargement entre les deux zones. En plus, nous avons résolu le problème de dimensionnement pour le cas de transport entre la zone de stockage et la zone d'expédition en tenant compte du nombre de transstockeurs dans le système.

La deuxième section présente le deuxième modèle de ce chapitre concernant le transport de charges hétérogènes où les charges sont de plusieurs types. Nous avons utilisé une nouvelle méthode de résolution du problème en le modélisant en un problème de Bin packing. Nous avons proposé un PLNE pour résoudre le modèle de transport de charges entre la zone A et B avec un stockage dédié à chaque type de charges. Nous avons également présenté une étude numérique permettant de suivre l'évolution du nombre optimal de robots par rapport à ses bornes et du temps de calcul en fonction de l'horizon de planification.

A travers ce chapitre, nous avons réussi à proposer des nouvelles formulations et méthodes de résolution du problème de dimensionnement pour le modèle de transport de charges homogènes et hétérogènes en utilisant une flotte de robots homogènes.

Les travaux réalisés dans la partie 3.1.1 et dans la section 3.2 ont été publiés dans une conférence internationale (Rjeb *et al.*, 2021a).

Le tableau 3.1 résume les résultats obtenu dans ce chapitre.

Charges homogènes	Mise en stock A-B	Pas d'attente pour le chargement et le déchargement	Théorème 1
		Une seule station	Théorème 2
		Plusieurs de stations	Théorème 3
	Expédition B-C	Pas d'attente pour le picking	Non étudié (équivalent au théorème 1)
		Un seul transstockeur	Théorème 4
		Plusieurs transstockeurs	Théorème 5
Charges hétérogènes	Mise en stock A-B	Pas d'attente pour le chargement et le déchargement avec attente pour le picking	PLNE 1

TABLEAU 3.1 – Tableau récapitulatif des modèles traités dans ce chapitre

Chapitre 4

Flotte hétérogène

Dans ce chapitre, nous allons intégrer la notion d'hétérogénéité de la flotte dans le problème de dimensionnement. L'objectif de ce chapitre consiste à mobiliser une flotte de robots de plusieurs types pour transporter un ensemble de charges homogènes ou hétérogènes entre la zone de réception et la zone de stockage. Chaque type de robots a ses propres caractéristiques (physique, performance, coûts, etc.).

Nous traitons dans la première section le cas de transport de charges homogènes et dans la deuxième section le cas de transport de charges hétérogènes.

4.1 Charges homogènes

Nous souhaitons dimensionner une flotte de robots hétérogènes permettant le transport de charges de même type d'une zone A à une zone B sans attente pour le chargement et le déchargement. Nous considérons K types de robots.

La figure 4.1 montre un exemple du modèle étudié. L'exemple est un modèle de transport de charges homogènes entre la zone de réception et la zone de stockage par une flotte de robots de trois types.

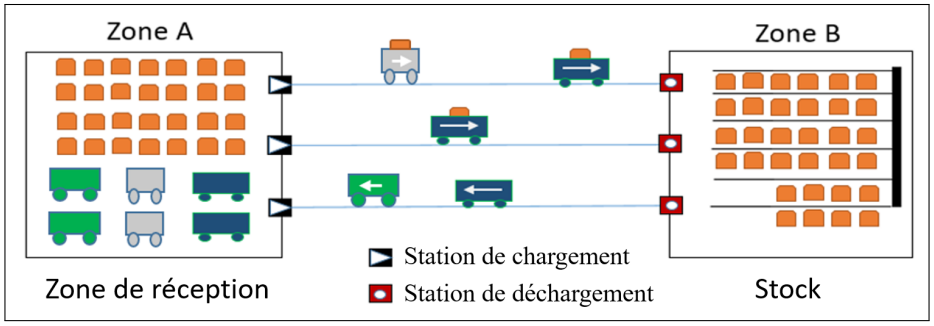


FIGURE 4.1 – Transport de charges homogènes entre A et B avec une flotte hétérogène

4.1.1 Formulation du problème

Notations Nous utilisons les notations suivantes :

- n : nombre de charges homogènes à transporter
- D : distance aller/retour entre A et B ($D = 2 \cdot d_{AB}$)
- T : horizon de planification
- K : nombre de types de robots
- Pour un type k de robot :
  - m_k : nombre de robots de type k
  - n_k : nombre de charges transportées par les robots de type k
  - v_l^k : vitesse de circulation d'un robot de type k transportant une charge
  - v_e^k : vitesse de circulation d'un robot de type k vide
  - t_l^k : temps de chargement d'une charge transportée par un robot de type k
  - t_u^k : temps de déchargement d'une charge transportée par un robot de type k

Hypothèses Nous utilisons les hypothèses suivantes :

- Le lieu de stockage des robots est situé au point A ;
- Le transport est unitaire : chaque robot transporte au plus une seule charge à un instant donné ;

- Les charges à transporter sont toujours disponibles ;
- Le blocage lors de la circulation et l'inactivité des robots ne sont pas pris en compte ;
- Le problème de chargement de batterie n'est pas pris en compte.

Temps de cycle Soit p_k le temps de cycle du transport d'une charge du point A au point B par un robot de type k (chargement, aller chargé, déchargement et retour à vide)

$$p_k = \frac{D}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_l^k} + \frac{1}{v_e^k} \right) + t_l^k + t_u^k$$

Structure des coûts Nous considérons plusieurs types de coûts :

- α_k : coût fixe par robot lié à la partie Hardware du système (connecteurs, chargeurs, batteries, ...).
- β_k : coût fixe lié au type k de robot utilisé, indépendant du nombre de robots. C'est la partie software du système qui gère le fonctionnement des robots utilisés (planification, routage, ...).
- γ_k : coût par distance parcourue par un robot de type k, incluant tous les coûts variables (entretien, consommation d'énergie, amortissement, ...).

Le coût d'une flotte homogène de m_k robots de type k transportant n_k charges est

$$C_k(m_k, n_k) = \underbrace{\alpha_k m_k + \beta_k \mathbb{1}\{m_k > 0\}}_{\text{coût fixe}} + \underbrace{\gamma_k n_k D}_{\text{coût variable}}$$

Nous pouvons, par ailleurs, exprimer le coût d'une flotte constituée de K types de robots :

$$C(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \sum_{k=1}^{K} C_k(m_k, n_k) \tag{4.1}$$

$$= \sum_{k=1}^{K} (\alpha_k m_k + \beta_k \mathbb{1}\{m_k > 0\} + \gamma_k n_k D) \tag{4.2}$$

où $\overrightarrow{m} = (m_1, \cdots, m_K)$ et $\overrightarrow{n} = (n_1, \cdots, n_K)$

Nous utilisons les indices suivants :

- $i = 1, \cdots, n$: pour les charges
- $j = 1, \cdots, n$: pour les robots (il y a en effet besoin de n robots au plus)
- $k = 1, \cdots, K$: pour les types de robots

Nous pouvons modéliser notre problème par un PLNE. Les variables binaires sont :

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la charge } i \text{ est transportée par le robot } j \text{ de type } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si le robot } j \text{ est de type } k \text{ et est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{si un robot de type } k \text{ est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous avons alors :

$$m_k = \sum_{j=1}^{n} y_{jk}$$

$$n_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk}$$

Le problème d'optimisation s'écrit alors sous forme d'un PLNE :

PLNE 2

$$\min \quad \sum_{k=1}^{K} \left(\alpha_k \sum_{j=1}^{n} y_{jk} + \beta_k z_k + \gamma_k D \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \right) \tag{4.3}$$

$$s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \tag{4.4}$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{i=1}^{n} x_{ijk} \cdot p_k \leq T \qquad \forall j \tag{4.5}$$

$$x_{ijk} + x_{i'jk'} \leq 1 \qquad \forall i, \forall i', \forall j, \forall k \neq k' \tag{4.6}$$

$$y_{jk} \geq x_{ijk} \qquad \forall i, \forall j, \forall k \tag{4.7}$$

$$z_k \geq x_{ijk} \qquad \forall i, \forall j, \forall k \tag{4.8}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}, y_{jk} \in \{0,1\}, z_k \in \{0,1\} \tag{4.9}$$

Signification des contraintes :

- Contrainte (4.4) : chaque charge doit être transportée par un seul robot
- Contrainte (4.5) : chaque robot doit être en mesure de transporter l'ensemble des charges qui lui sont affectées dans l'horizon $[0, T]$
- Contrainte (4.6) : chaque robot j est d'un seul type k
- Contrainte (4.7) : si une charge i est transportée par un robot j de type k, ce robot est utilisé
- Contrainte (4.8) : si une charge i est transportée par un robot de type k, les robots de type k sont utilisés

4.1.2 Heuristique et approximation continue

Dans cette partie, nous étudions l'utilité d'une heuristique en utilisant un seul type de robots ainsi que d'une approximation continue en utilisant un nombre continu de robots et de charges.

Heuristique : Utiliser un seul type de robot

Nous proposons comme heuristique simple d'utiliser un seul type de robots, celui minimisant le coût. Si on utilise uniquement des robots de type k, le coût optimal est, d'après la section 3.1, $C_k^* = C_k(m_k^*, n)$ avec $m_k^* = \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p_k} \right\rfloor} \right\rceil$. Ainsi

$$C_k^* = \alpha_k \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p_k} \right\rfloor} \right\rceil + \beta_k + \gamma_k n D$$

L'heuristique consiste alors à choisir un type de robots k' minimisant C_k^* :

$$k' \in \underset{k \in \{1,\cdots,K\}}{\arg\min}\ C_k^*$$

Le coût de l'heuristique C^+ est donné par l'expression suivante

$$C^+ = \min_{k \in \{1,\cdots,K\}} C_k^*.$$

Nous pouvons, à travers un simple exemple, montrer que cette heuristique n'est pas toujours optimale. Le tableau 4.1 présente un contre-exemple. Ce modèle consiste à transporter $n = 3$ charges de même type par des robots de deux types $k = 1, 2$ avec un horizon de planification $T = 10$.

k	p_k	α_k	β_k	γ_k
1	6	3	0	0
2	4	5	0	0

TABLEAU 4.1 – Instance

Le tableau 4.2 présente les solutions optimales selon les types de robots autorisés

	m_1	m_2	n_1	n_2	coût total
Type 1 uniquement	3	0	3	0	9
Type 2 uniquement	0	2	0	3	10
Types 1 et 2 autorisés	1	1	1	2	8

TABLEAU 4.2 – Solutions optimales selon les types de robots autorisés

D'après l'exemple ci-dessus, nous remarquons que la solution optimale consiste à utiliser les deux types de robots.

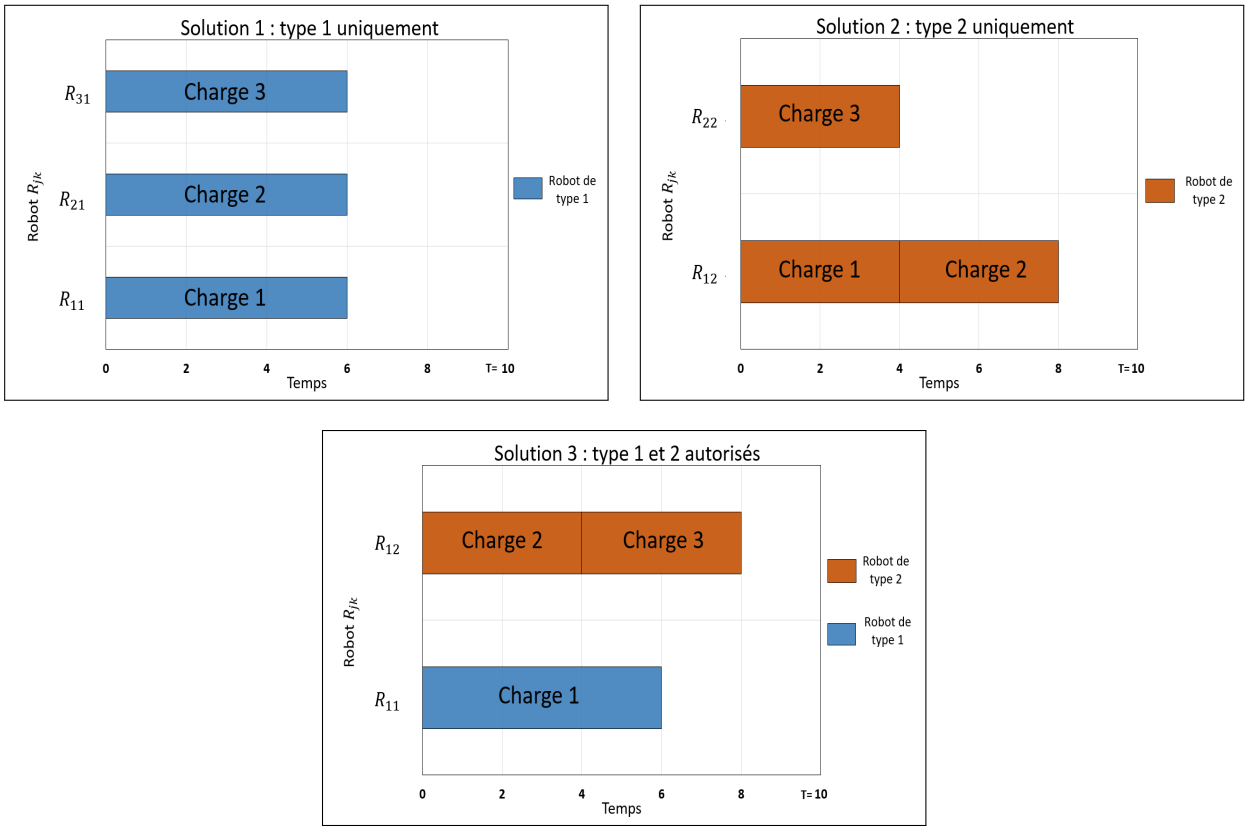


FIGURE 4.2 – Différentes solutions possibles
où R_{jk} est le $j-$ème robot de type k

Approximation continue Si l'on relâche la contrainte d'intégrité sur le nombre de robots et de charges, nous allons montrer qu'il est alors optimal de n'utiliser qu'un seul type de robots. En utilisant un nombre continu de charges et de robots, le nombre de robots m_k

s'exprime en fonction du nombre de charges transportées par les robots de type k :

$$m_k = \frac{n_k \cdot p_k}{T} \tag{4.10}$$

Le coût d'une flotte de m_k robots de type k peut alors s'exprimer comme

$$\begin{aligned} C_k(m_k) &= \left(\alpha_k + \gamma_k D \frac{T}{pk}\right) m_k + \beta_k z_k \\ &= \delta_k m_k + \beta_k z_k \end{aligned}$$

en posant $\delta_k = \alpha_k + \gamma_k D \frac{T}{pk}$.

Le PLNE peut alors être reformulé sous la forme d'un MIP (Mixed Integer Programming) :

$$C^- = \min \quad \sum_{k=1}^{K} \delta_k m_k + \beta_k z_k \tag{4.11}$$

$$s.c. \quad \sum_{k=1}^{K} \frac{m_k}{p_k} \geq \frac{n}{T} \tag{4.12}$$

$$n z_k \geq m_k \qquad \forall k = 1, \cdots, K \tag{4.13}$$

$$m_k \geq 0, z_k \in \{0, 1\} \qquad \forall k = 1, \cdots, K \tag{4.14}$$

Signification des contraintes :

- Contrainte (4.12) : le nombre de robots doit transporter toutes les charges
- Contrainte (4.13) : si une charge est transportée par un robot de type k, les robots de type k sont utilisés

Si on utilise uniquement des robots de type k, le nombre optimal de robots est

$$m_k^* = \frac{np_k}{T}$$

et le coût minimum est alors

$$\begin{aligned} C_k^* &= C_k\left(m_k^*\right) \\ &= \frac{n}{T}\delta_k p_k + \beta_k \end{aligned}$$

Le théorème 6 établit qu'il est optimal d'avoir une flotte homogène du type minimisant C_k^*.

Théorème 6 *Avec l'approximation continue, il est optimal d'utiliser un seul type de robots de type k où le coût optimal C^- est donné par l'expression suivante*

$$C^- = \min_{k\in\{1,\cdots,K\}} \left(\frac{n}{T}\delta_k p_k + \beta_k\right).$$

Démonstration : Nous allons d'abord démontrer le résultat dans le cas où $\beta_k = 0$ avant de l'étendre au cas où où $\beta_k \geq 0$.

$\underline{\beta_k = 0 :}$

Supposons que $\beta_k = 0$ pour tout k. Soit $u \in \arg\min_k C_k^*$ et soit $\overrightarrow{m} = (m_1, \cdots, m_K)$ une solution réalisable telle que $m_u > 0$ et $m_v > 0$ avec $v \neq u$. Par définition, nous avons $C_u^* \leq C_v^*$. Ceci implique que $\delta_u p_u \leq \delta_v p_v$. Remarquons que les robots de type v transportent $n_v = \frac{m_v T}{p_v}$ charges.

Soit une autre solution réalisable $\overrightarrow{m'} = (m'_1, \cdots, m'_K)$, identique à $\overrightarrow{m}$ sauf que les n_v charges transportées par des robots de type v sont désormais transportées par des robots de type u. Plus précisément :

$$\begin{aligned} m'_v &= 0 \\ m'_u &= m_u + n_v \frac{p_u}{T} = m_u + \frac{p_u}{p_v} m_v \\ m'_k &= m_k, \quad \forall k \neq u, v \end{aligned}$$

Le coût de la solution $\overrightarrow{m'}$ est alors

$$\begin{aligned} C(\overrightarrow{m'}) &= C(\overrightarrow{m}) + \delta_u \frac{p_u}{p_v} m_v - \delta_v m_v \\ &= C(\overrightarrow{m}) + (\delta_u p_u - \delta_v p_v) \frac{m_v}{p_v} \leq C(\overrightarrow{m}) \end{aligned}$$

car $\delta_u p_u \leq \delta_v p_v$.

Nous avons donc construit une solution $\overrightarrow{m'}$ de coût inférieur à la solution $\overrightarrow{m}$, n'utilisant pas de robots de type v. On peut ré-itérer le procédé ci-dessous pour tous les types de robots. On en déduit qu'il est optimal de n'utiliser que des robots de type u.

$\underline{\beta_k \geq 0}$: Considérons désormais le cas de coûts fixes quelconques. Nous allons montrer que si une solution comporte deux types différents de robots, alors il existe une autre solution de coût inférieur n'utilisant qu'un seul des types de robots.

Soit une solution $\overrightarrow{m} = (m_1, \cdots, m_K)$ avec $m_u > 0$ et $m_v > 0$, $u \neq v$, et telle que $\delta_u p_u \leq \delta_v p_v$. Le coût lié aux robots de types u et v est alors

$$C_u(m_u) + C_v(m_v) = \delta_u m_u + \delta_v m_v + \beta_u + \beta_v$$

D'après ce qui a été démontré précédemment ($\beta_k = 0$), il existe une solution utilisant m'_u robots de type u, et aucun robot de type v, de coût variable inférieur ($\delta_u m'_u \leq \delta_u m_u + \delta_v m_v$). Il vient alors

$$\begin{aligned} C_u(m_u) + C_v(m_v) &\geq \delta_u m'_u + \beta_u + \beta_v \\ &\geq \delta_u m'_u + \beta_u \\ &= C_u(m'_u) \end{aligned}$$

Nous avons donc construit une solution n'utilisant qu'un seul type de robot et de coût inférieur. Nous en concluons qu'il existe une solution optimale n'utilisant qu'un seul type de robots.

□

Heuristique asymptotiquement optimale Nous montrons que l'heuristique introduite dans la sous-section 4.1.2 fonctionne très bien lorsqu'il est nécessaire d'utiliser un grand nombre de robots et que chaque robot transporte beaucoup de charges. Rappelons d'abord quelques notations :

- C^* : coût optimal
- C_k^* : coût optimal pour une flotte homogène de type k
- $C^+ = \min_k C_k^*$: coût de l'heuristique
- C^- : coût de l'approximation continue

La solution de l'heuristique étant une solution réalisable du PLNE 2, le coût de l'heuristique est une borne supérieure du coût optimal. L'approximation continue fournit également une borne inférieure du coût optimal. Donc, nous avons $C^- \leq C^* \leq C^+$ et cela signifie

$$1 \leq \frac{C^+}{C^*} \leq \frac{C^+}{C^-}. \tag{4.15}$$

Rappelons que

$$C^- = \min_k \left(\alpha_k \frac{np_k}{T} + \beta_k + \gamma_k nD \right) \tag{4.16}$$

$$C^+ = \min_k \left(\alpha_k \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p_k} \right\rfloor} \right\rceil + \beta_k + \gamma_k nD \right) \tag{4.17}$$

Si T est un multiple de p_k et n est un multiple de $\frac{T}{p_k}$, alors $C^- = C^+ = C^*$ et l'heuristique est optimale. Sinon, on peut majorer l'erreur en utilisant le fait que $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$ et que $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$.

Nous avons alors

$$\frac{np_k}{T} \leq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p_k} \right\rfloor} \right\rceil \leq \frac{n}{\frac{T}{p_k} - 1} + 1$$

nous pouvons l'écrire aussi

$$\frac{np_k}{T} \leq \left\lceil \frac{n}{\left\lfloor \frac{T}{p_k} \right\rfloor} \right\rceil \leq \frac{np_k}{T} \left(\frac{1}{1 - \frac{p_k}{T}} + \frac{T}{np_k} \right) \tag{4.18}$$

Remarquons que le terme $\left(\frac{1}{1-\frac{p_k}{T}} + \frac{T}{np_k} \right)$ tend vers 1 si simultanément $\frac{p_k}{T}$ tend vers 0 et $\frac{T}{np_k}$ tend vers 0.

Notons $p_{min} = \min_k p_k$ et $p_{max} = \max_k p_k$ et en utilisant les équations (4.15)-(4.18), nous avons alors

$$\frac{C^+}{C^*} \xrightarrow[\frac{np_{min}}{T} \to \infty]{\frac{T}{p_{max}} \to \infty} 1$$

Par conséquent, le coût heuristique sera proche (en valeur relative) du coût optimal si les conditions suivantes sont vraies :

- le nombre de robots requis est grand : $\frac{n\, p_{min}}{T} >> 1$;
- chaque robot peut transporter une grande quantité de charges dans l'horizon de planification : $T >> p_{max}$.

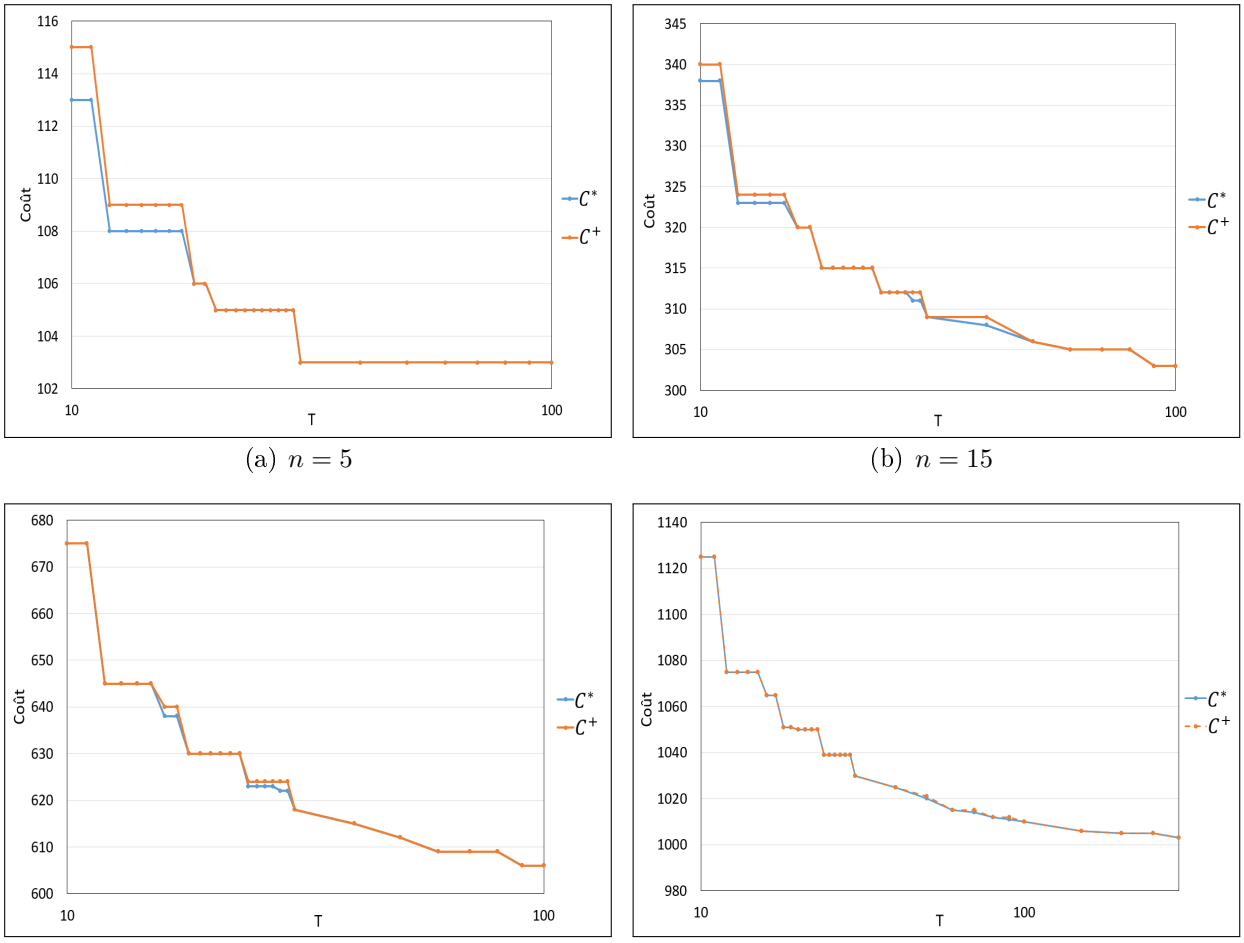
A titre d'exemple, la figure 4.3 représente l'évolution de $C*$ et C^+ en fonction de T pour différentes valeurs de n et pour l'instance décrite dans le tableau 4.3.

D	K
10	2

	p_k	α_k	β_k	γ_k
$k = 1$	6	3	0	2
$k = 2$	4	5	0	2

TABLEAU 4.3 – Données de l'étude

La figure 4.3 montre les résultats obtenus :



(a) $n = 5$ (b) $n = 15$

(c) $n = 30$ (d) $n = 50$

FIGURE 4.3 – Évolution de C^* et C^+ en fonction de T et n (échelle logarithmique)

Nous remarquons que pour un faible nombre de charges (figures 4.3(a) et 4.3(b)), la qualité de l'heuristique n'est pas toujours bonne surtout pour des faibles valeurs de T. Nous observons aussi que si T tend vers $n \cdot p_{max}$ le coût optimal C^* tend vers le coût de l'heuristique C^+. En augmentant n, l'écart entre C^* et C^+ est quasiment nul pour toute valeur de T (figure 4.3(d)). Ces résultats sont cohérents avec les résultats théoriques précédents.

4.2 Charges hétérogènes

Dans cette partie, nous étendons l'approche au cas de charges hétérogènes. Les charges à transporter de la zone A à la zone B sont de plusieurs types sans attente pour le chargement et le déchargement. Dans cette partie, nous considérons que les charges dans la zone B sont stockées par type de charge.

Hypothèses et notations Dans la zone B, il existe plusieurs endroits de stockage et chaque type de charges doit être stocké dans un endroit précis ayant chacun sa propre entrée et sortie. Pour cela, nous supposons que la vitesse et la distance dépendent du type de robot utilisé et du type de la charge transportée. Nous noterons :

- G : nombre de types de charges
- g : type de charge ($g \in \{1, \cdots, G\}$)
- Pour un type de charge g
  - D_g : distance de circulation du robot transportant une charge de type g
  - n_g : nombre de charges de type g
  - w_{ig} : paramètre qui vaut 1 si la charge i est de type g
- Pour un type de robot k
  - v_e^k : vitesse de circulation d'un robot de type k vide (uniforme)
  - t_l^k : temps de chargement d'une charge
  - t_u^k : temps de déchargement d'une charge
- Pour un type de charge g et un type de robot k
  - n_{gk} : nombre de charges de type g transportées par les robots de type k
  - v_l^{gk} : vitesse de circulation d'un robot de type k transportant une charge de type g (uniforme)

Après la définition des notations nous pouvons déduire quelques relations entre les expressions des nombres de charges :

– Nombre total de charges n :

$$n = \sum_{g=1}^{G} n_g = \sum_{k=1}^{K} \sum_{g=1}^{G} n_{gk}$$

– Nombre de charges de type g :

$$n_g = \sum_{i=1}^{n} w_{ig}$$

La figure 4.4 montre un exemple de transport de trois types de charges avec une flotte hétérogène de quatre types de robots entre la zone A et la zone B en utilisant un stockage dédié par type de charge.

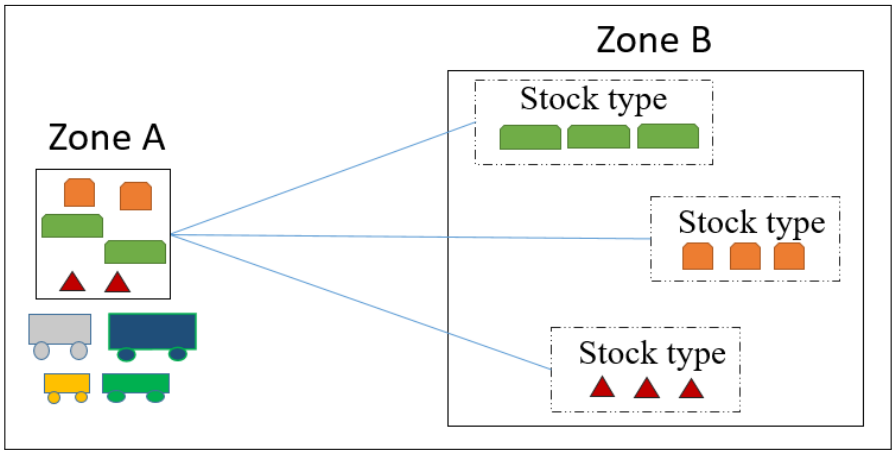


FIGURE 4.4 – Modèle de transport entre la zone A et la zone B
Charges hétérogènes - Flotte hétérogène - Stockage dédié

Temps de cycle Soit p_{gk} le temps de cycle de transport d'une charge de type g transportée par un robot de type k

$$p_{gk} = \frac{D_g}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_l^{gk}} + \frac{1}{v_e^k} \right) + t_l^k + t_u^k$$

Structure de coûts Pour ce modèle de transport, nous gardons la même modélisation de coûts que la section précédente. Nous rappelons donc l'expression (4.2) décrivant le coût

total de la configuration

$$C(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \sum_{k=1}^{K} \left(\alpha_k m_k + \beta_k \mathbb{1}\{m_k > 0\} + \gamma_k \sum_{g=1}^{G} D_g \cdot n_{gk} \right)$$

Nous utilisons les indices suivants :

- $i = 1, \cdots, n$: pour les charges
- $j = 1, \cdots, n$: pour les robots
- $k = 1, \cdots, K$: pour les types des robots
- $g = 1, \cdots, G$: pour les types des charges

Nous pouvons formuler notre problème en un programme linéaire en nombres entiers PLNE. En utilisant les variables binaires suivantes :

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si la charge } i \text{ est transportée par le robot } j \text{ de type } k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$y_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si le robot } j \text{ est de type } k \text{ et est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$z_k = \begin{cases} 1 & \text{si un robot de type } k \text{ est utilisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

PLNE 3

$$\min \quad C(\overrightarrow{m}, \overrightarrow{n}) = \sum_{k=1}^{K} \left(\alpha_k \sum_{j=1}^{n} y_{jk} + \beta_k z_k + \gamma_k \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ijk} \cdot w_{ig} \cdot D_g \right)$$

$$s.c. \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{K} x_{ijk} = 1 \qquad \forall i \qquad (4.19)$$

$$\sum_{k=1}^{K} \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n} x_{ijk} \cdot p_{gk} \cdot w_{ig} \leq T \qquad \forall j \qquad (4.20)$$

$$x_{ijk} + x_{i'jk'} \leq 1 \qquad \forall i, \forall i', \forall j, \forall k' \neq k \qquad (4.21)$$

$$y_{jk} \geq x_{ijk} \qquad \forall i, \forall j, \forall k \qquad (4.22)$$

$$z_k \geq x_{ijk} \qquad \forall i, \forall j, \forall k \qquad (4.23)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\}; \quad y_{jk} \in \{0,1\} \quad ; \quad z_k \in \{0,1\} \qquad (4.24)$$

Signification des contraintes :

- Contrainte (4.19) : chaque charge doit être transportée par un seul robot
- Contrainte (4.20) : chaque robot doit être en mesure de transporter l'ensemble des charges qui lui est affecté dans l'horizon T
- Contrainte (4.21) : chaque robot j est d'un seul type k
- Contrainte (4.22) : si une charge i est transportée par un robot j de type k, ce robot est utilisé
- Contrainte (4.23) : si une charge i est transportée par un robot de type k, les robots de type k sont utilisés

Nous présentons maintenant une instance avec la solution optimale obtenue avec le PLNE 3 afin de montrer la forme de la solution obtenue. Le tableau 4.4 présente les données de l'instance.

n_1	n_2	T	D	K	G
9	6	10	10	2	2

p_{gk}	$k=1$	$k=2$
$g=1$	5	2
$g=2$	3	4

Coûts	α_k	β_k	γ_k
$k=1$	3	0	2
$k=2$	6	0	2

TABLEAU 4.4 – Données de l'instance

La solution optimale de l'instance est $m_1^* = 4$ robots, $m_2^* = 1$ robots, $n_{11} = 4$ charges, $n_{12} = 5$ charges, $n_{21} = 6$ charges, $n_{22} = 0$ et $C^* = 318$.

La figure 4.5 présente la répartition des charges sur l'ensemble de robots de la flotte selon la solution optimale obtenue.

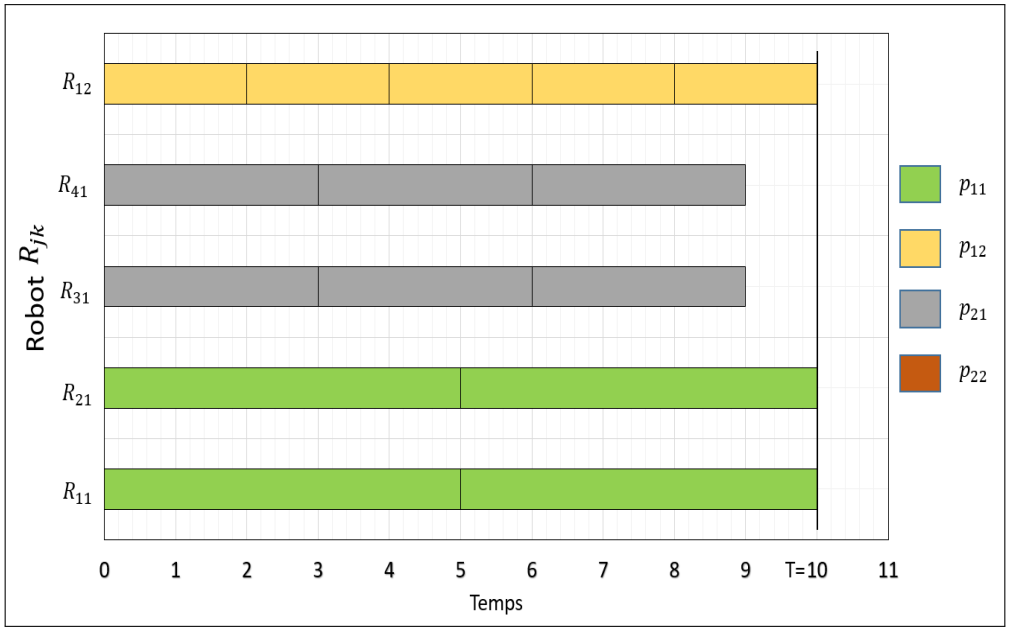


FIGURE 4.5 – Répartition des charges selon la solution optimale obtenue où R_{jk} est le $j-$ème robot de type k

4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le problème de dimensionnement d'une flotte de robots hétérogènes pour le transport de charges homogènes ou hétérogènes.

Dans la première section, nous avons traité le modèle de transport de charges homogènes. Nous avons proposé le PLNE 2 permettant le dimensionnement d'une flotte en tenant compte de l'hétérogénéité de la flotte et de l'aspect économique. Notre solution proposée détermine la combinaison de la flotte en calculant le nombre de robots de chaque type capable de minimiser la formule du coût global. Ensuite, nous avons étudié l'utilité d'une heuristique sous certaines conditions ainsi qu'une approximation continue en nombre de charges et en nombre de robots. A la fin de cette section, une étude numérique a été menée afin de vérifier la qualité de l'heuristique proposée.

Dans la deuxième section, nous avons utilisé le même principe de formulation pour le cas de transport de charges hétérogènes. La solution de ce problème est donnée par le PLNE 3. Notre solution cette fois-ci détermine la combinaison de la flotte et la répartition de charges transportées, c'est-à-dire, elle détermine le nombre de robots de chaque type et l'affectation des charges à chaque type de robots.

A travers ce chapitre, nous avons réussi à proposer une nouvelle formulation du problème de dimensionnement en tenant compte de l'hétérogénéité de la flotte et en proposant une nouvelle structure de coûts modélisant notre flotte.

Les travaux réalisés dans ce chapitre ont été publiés dans une conférence internationale (Rjeb *et al.*, 2021b).

Conclusion et perspectives

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur le problème de dimensionnement d'une flotte de robots dans un entrepôt logistique.

Le premier chapitre présente le contexte général de notre travail. Au début de ce chapitre, nous avons présenté la robotique industrielle et son évolution dans le contexte industriel et nous nous sommes focalisés sur les SMR afin de mettre en valeur leur utilité industrielle et de comprendre leur principe de fonctionnement. Après, nous avons présenté les entrepôts logistiques automatisés, leur apport industriel et les plateformes automatisées de transport et de stockage qui existent dans les entrepôts de nos jours. Ensuite, nous avons identifié les problèmes d'optimisation liés à la gestion d'une flotte de robots dans les entrepôts logistiques y compris le problème de dimensionnement de flotte. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons décrit le système étudié ainsi que la problématique de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre, nous avons présenté un état de l'art des travaux traitant le problème de dimensionnement d'une flotte de robots. Nous avons classé les travaux en deux catégories de modèles : déterministes et stochastiques. Nous avons détaillé les travaux de chaque catégorie en présentant leurs cadres d'étude, leurs hypothèses, leurs méthodes, leurs résultats et les limites de chaque modèle. Cet état de l'art nous a permis d'identifier quelques voies de recherche qui ont été à la base de notre travail par la suite. Tout d'abord, peu de travaux traitent le problème de dimensionnement pour le cas d'entrepôts logistiques. Ensuite, il n'existe qu'un seul travail qui intègre l'aspect économique dans la formulation du problème.

Enfin, dans tous les travaux cités traitant le problème de dimensionnement d'une flotte de robots homogènes, la notion d'hétérogénéité de flotte n'a pas été abordée.

Dans le troisième chapitre, nous avons proposé des nouvelles formulations du problème de dimensionnement adaptées aux entrepôts logistiques. Une démarche analytique nous a permis de traiter ce problème pour un modèle simple de transport des charges de même type entre la zone de réception et la zone de stockage en tenant compte du nombre de stations de chargement dans le système. Pour le cas sans attente pour le chargement et le déchargement, la taille de la flotte est donnée par une expression analytique simple donnée par le théorème 1. Par contre, pour le cas d'une seule station de chargement et le cas de plusieurs stations, la résolution du problème pour chaque cas se fait grâce à un algorithme, donné respectivement par les théorèmes 2 et 3. De la même façon, nous avons traité le modèle de transport de charges homogènes entre la zone de stockage et la zone d'expédition en tenant compte du temps de picking et du nombre de transstockeurs dans le système : un seul transstockeur et plusieurs transstockeurs. La résolution de ce problème se fait à travers un algorithme pour chaque cas, donnés respectivement par les théorèmes 4 et 5. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous avons étudié le même problème de transport mais avec plusieurs types de charges entre la zone de réception et la zone de stockage. Avec un stockage dédié pour chaque type de charges, nous avons formulé le problème en un problème de Bin Packing (voir PLNE 1). A la fin de cette section, nous avons présenté une étude numérique réalisée sous Cplex Optimizer.

Dans le quatrième chapitre, nous avons intégré la notion d'hétérogénéité de la flotte de robots dans la formulation du problème de dimensionnement, c'est-à-dire, le transport de charges se fait grâce à des robots de plusieurs types. Nous avons proposé par la suite une structure de coût pour chaque type de robot. Nous avons traité le cas de transport de charges homogènes et hétérogènes entre la zone de réception et la zone de stockage. Pour

chaque modèle, nous avons proposé un PLNE déterminant le nombre de robots de chaque type permettant de minimiser le coût global de la configuration (voir PLNE 2 et PLNE 3).

Pour conclure, les principales contributions de cette thèse sont les suivantes :

- État de l'art sur les entrepôts logistiques automatisés et le dimensionnement d'une flotte de robots pour le transport de charges dans l'industrie ;
- Proposition de nouveaux modèles et méthodes de résolution du problème adaptés aux entrepôts logistiques ;
- Intégration de la notion d'hétérogénéité d'une flotte de robots ;
- Proposition d'une nouvelle structure de coûts dans le cas d'une flotte hétérogène.

Perspectives

Nous présentons maintenant les limites de nos travaux et les perspectives de recherche.

Premièrement, nos travaux concernent le transport de charges entre une zone de réception et des zones de stockage. Une extension intéressante de nos travaux serait de considérer plusieurs zones de réception et plusieurs zones de stockage. Le problème est alors plus complexe car il faut déterminer dans quel ordre sont visitées les différentes zones afin de minimiser le temps de circulation à vide.

Deuxièmement, dans tous nos modèles, nous considérons que le transport est unitaire et que nous ne pouvons transporter qu'une seule charge à un instant donné. Une deuxième perspective de recherche serait de considérer un robot pourrait transporter plusieurs charges à la fois, éventuellement de types différents. Avec cette hypothèse, il devient possible de mettre en place une tournée de transport avec un trajet plus complexe où le robot effectue plusieurs déchargements dans les différentes zones de stockage avant de revenir à la zone de réception.

Troisièmement, dans nos travaux nous avons utilisé des temps et des ordres de transport déterministes. Il serait intéressant de relaxer ces hypothèses en considérant des modèles de

type file d'attente.

Enfin, dans notre système étudié nous traitons le problème de dimensionnement de deux flottes de robots indépendantes : une pour le transport entre la zone de transport et la zone de stockage et une pour le transport entre la zone de stockage et la zone d'expédition. Il serait intéressant d'intégrer les deux problèmes afin d'optimiser davantage le nombre de robots en leur permettant d'exécuter des tâches de transport dans tout l'entrepôt.

Bibliographie

J. A. Adams, R. Bajcsy, J. Kosecka, V. Kumar, R. Mandelbaum, M. Mintz, R. Paul, C. Wang, Y. Yamamoto et X. Yun : Cooperative material handling by human and robotic agents : Module development and system synthesis. *In Proceedings 1995 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Human Robot Interaction and Cooperative Robots*, vol. 1, p. 200–205. IEEE, 1995.

J. Ashayeri et L. Gelders : Warehouse design optimization. *European Journal of Operational Research*, 21(3):285–294, 1985.

K. Azadeh, D. Roy et R. Koster : Vertical or horizontal transport ? - comparison of robotic storage and retrieval systems. *ERIM report series research in management Erasmus Research Institute of Management*, 2016.

P. Baker et Z. Halim : An exploration of warehouse automation implementations : cost, service and flexibility issues. *Supply Chain Management : An International Journal*, 2007.

Y. Bozer et M. M. Srinivasan : Tandem agv systems : A partitioning algorithm and performance comparison with conventional agv systems. *European Journal of Operational Research*, 63:173–191, 1992.

R. A. Brooks et A. M. Flynn : Fast, cheap and out of control. Rap. tech., Massachusetts Inst of Tech Cambridge Artificial Intelligence Lab, 1989.

V. Chawla, A. Chanda et S. Angra : Automatic guided vehicles fleet size optimization for

flexible manufacturing system by grey wolf optimization algorithm. *Management Science Letters*, 8(2):79–90, 2018b.

F. F. Choobineh, A. Asef-Vaziri et X. Huang : Fleet sizing of automated guided vehicles : a linear programming approach based on closed queuing networks. *International Journal of Production Research*, 50(12):3222–3235, 2012.

V. Digani, L. Sabattini et C. Secchi : A probabilistic eulerian traffic model for the coordination of multiple agvs in automatic warehouses. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 1(1):26–32, 2016.

P. J. Egbelu : The use of non-simulation approaches in estimating vehicle requirements in an automated guided vehicle based transport system. *Material flow*, 4(1):17–32, 1987.

EuropaSystems : Autonomous intelligent vehicle. `https://europasystems.com/product-eng-165-ES-Smart-Autonomous-Mobile-Robot-AMR.html`, 2021.

E. Frazelle : *Supply chain strategy : the logistics of supply chain management*. MCGraw-Hill Education, 2002.

T. Ganesharajah, N. G. Hall et C. Sriskandarajah : Design and operational issues in agv-served manufacturing systems. *Annals of Operations Research*, 76:109–154, 1998.

J. Gu, M. Goetschalckx et L. F. McGinnis : Research on warehouse operation : A comprehensive review. *European journal of operational research*, 177(1):1–21, 2007.

A. Hazan et I. Bouyoucef : Coordination de robots pour le transport d'objets. *Mémoire de master 2 - Université Paris Est Créteil*, 2013.

IKVROBOT : Automated guided vehicle. `https://www.ikvrobot.com/`, 2021.

O. R. Ilić : Analysis of the number of automated guided vehicles required in flexible manufacturing systems. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 9 (6):382–389, 1994.

T. Kimura : Approximating the mean waiting time in the GI/G/s queue. *Journal of the Operational Research Society*, 42(11):959–970, 1991.

G. A. Koff : Automatic guided vehicle systems : applications, controls and planning. *Material flow*, 4(1-2):3–16, 1987.

P.-H. Koo, J. Jang et J. Suh : Estimation of part waiting time and fleet sizing in agv systems. *International journal of flexible Manufacturing Systems*, 16(3):211–228, 2004.

T. Le-Anh : *Intelligent control of vehicle-based internal transport systems.* Num. 51. 2005.

N. Lenoble : *Optimisation de la préparation de commandes dans les entrepôts de distribution.* Thèse de doctorat, Université Grenoble Alpes, 2017.

L. Lynch, T. Newe, J. Clifford, J. Coleman, J. Walsh et D. Toal : Automated ground vehicle (agv) and sensor technologies- a review. *In 2018 12th International Conference on Sensing Technology (ICST)*, p. 347–352, 2018.

B. Mahadevan et T. Narendran : Design of an automated guided vehicle-based material handling system for a flexible manufacturing system. *The International Journal of Production Research*, 28(9):1611–1622, 1990.

B. Mahadevan et T. Narendran : Estimation of number of agvs for an fms : an analytical model. *The International Journal of Production Research*, 31(7):1655–1670, 1993.

R. J. Mantel et H. R. Landeweerd : Design and operational control of an agv system. *International Journal of Production Economics*, 41(1-3):257–266, 1995.

W. L. Maxwell et J. A. Muckstadt : Design of automatic guided vehicle systems. *AIIE Transactions*, 14(2):114–124, 1982.

M. Mouad : *Architecture de COntrôle/COmmande dédiée aux systèmes Distribués Autonomes (ACO^2DA) : application à une plate-forme multi-véhicules.* Thèse de doctorat, Clermont-Ferrand 2, 2014.

S. Rajotia, K. Shanker et J. Batra : Determination of optimal agv fleet size for an fms. *International Journal of Production Research*, 36(5):1177–1198, 1998.

A. Rjeb, J. Gayon et S. Norre : Sizing of a homogeneous fleet of robots in a logistics warehouse : Transport operation between reception area and storage area. *IFAC-PapersOnLine*, 54(1):552–557, 2021a.

A. Rjeb, J.-P. Gayon et S. Norre : Sizing of a heterogeneous fleet of robots in a logistics warehouse. p. 95–100, 2021b.

B. Rouwenhorst, B. Reuter, V. Stockrahm, G.-J. van Houtum, R. Mantel et W. H. Zijm : Warehouse design and control : Framework and literature review. *European journal of operational research*, 122(3):515–533, 2000.

Y.-C. Shen et J. E. Kobza : A dispatching-rule-based algorithm for automated guided vehicle systems design. *Production Planning & Control*, 9(1):47–59, 1998.

D. Sinriech et J. Tanchoco : An economic model for determining agv fleet size. *International Journal of Production Research*, 30(6):1255–1268, 1992.

F. B. Sorbelli, F. Coro, C. M. Pinotti et A. Shende : Automated picking system employing a drone. *In 2019 15th International Conference on Distributed Computing in Sensor Systems (DCOSS)*, p. 633–640. IEEE, 2019.

K. Vivaldini, L. F. Rocha, N. J. Martarelli, M. Becker et A. P. Moreira : Integrated tasks assignment and routing for the estimation of the optimal number of agvs. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 82(1-4):719–736, 2016.

L. Wawrla, O. Maghazei et T. Netland : Applications of drones in warehouse operations. *Whitepaper. ETH Zurich, D-MTEC*, 2019.

T. Yifei, C. Junruo, L. Meihong, L. Xianxi et F. Yali : An estimate and simulation approach to determining the automated guided vehicle fleet size in fms. *In 2010 3rd*

International Conference on Computer Science and Information Technology, vol. 9, p. 432–435. IEEE, 2010.