



**HAL**  
open science

# Modèles mécaniques de poutre enrichis pour la simulation de tubes minces sous pression

Youri Pascal-Abdellaoui

► **To cite this version:**

Youri Pascal-Abdellaoui. Modèles mécaniques de poutre enrichis pour la simulation de tubes minces sous pression. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UPAST133 . tel-03946794

**HAL Id: tel-03946794**

**<https://theses.hal.science/tel-03946794>**

Submitted on 19 Jan 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modèles mécaniques de poutre enrichis  
pour la simulation de tubes minces sous  
pression  
*Enriched mechanical beam models for the simulation of thin tubes  
under pressure*

**Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay**

École doctorale n° 579 : sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences (SMEMaG)  
Spécialité de doctorat : Mécanique des solides  
Graduate School : Sciences de l'ingénierie et des systèmes, Référent : École Normale Supérieure Paris-Saclay

Thèse préparée dans l'unité de recherche IMSIA (EDF,ENSTA,CNRS,CEA), sous la direction de Philippe LAFON, Ingénieur de recherche sénior HDR à EDF, la co-direction de Claude STOLZ, Directeur de recherche au CNRS et le co-encadrement de Frédéric DAUDE, Ingénieur de recherche à EDF.

**Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 17 novembre 2022, par**

**Youri PASCAL-ABDELLAOUI**

**Composition du jury**

Membres du jury avec voix délibérative

<b>Djimédo KONDO</b> Professeur des universités, Institut Jean Le Rond d'Alembert, Sorbonne Université (UPMC-Paris VI)	Président
<b>Jean-Michel BERGHEAU</b> Professeur des universités, LTDS/ECL, Université de Lyon	Rapporteur & Examineur
<b>Delphine BRANCHERIE</b> Professeur des universités, Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur & Examinatrice
<b>Damien DURVILLE</b> Chargé de recherche HDR, CNRS/LMPS/ECP, Université Paris-Saclay	Examineur
<b>Martin GUITON</b> Ingénieur de recherche, Direction Physico-chimie et Mécanique appliquées, IFP Energies nouvelles (EPIC-Institut de recherche)	Examineur

**Titre :** Modèles mécaniques de poutre enrichis pour la simulation de tubes minces sous pression

**Mots clés :** Poutre enrichie, Ovalisation de section, Séries de Fourier, Coque, Dynamique, Fouettement de tuyauterie.

**Résumé :** Le phénomène de fouettement est une des conséquences potentielles de la rupture accidentelle d'une tuyauterie haute énergie (RTHE). Le fouettement doit être pris en compte dans les études sur la sûreté des installations industrielles puisqu'il suppose de grands déplacements de la tuyauterie sectionnée qui pourrait, en fonction de l'encombrement, impacter les structures et composants avoisinants. S'agissant de phénomènes physiques complexes, la caractérisation de la rupture de la tuyauterie et du fouettement associé est fondée actuellement sur des approches simplifiées reposant sur des hypothèses conservatives. Ces hypothèses peuvent alors conduire à des difficultés, ce qui est résolu par l'introduction de modifications au niveau de ces installations, modifications qui peuvent s'avérer coûteuses. De façon à répondre à ces enjeux, il est proposé dans ce projet de recherche un travail d'amélioration des outils et méthodes actuellement disponibles pour la simulation du phénomène de fouettement afin de rendre plus réaliste la modélisation des phénomènes physiques prépondérants et en particulier leur couplage. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte dans la modélisation un grand nombre de phénomènes. Il s'agit, en particulier, de modéliser les événements suivants : la rupture de la tuyauterie, la force du jet initié à la brèche, le déplacement de la tuyauterie sectionnée, l'impact de celle-ci avec les structures avoisinantes, les déformations plastiques suite à cet impact et la formation éventuelle d'une rotule plastique ainsi que l'interaction entre le fluide contenu dans la tuyauterie et la structure. De nombreuses études ont été réalisées en modélisation tridimensionnelle, laquelle s'avère coûteuse en temps de calcul et de simulation.

Il est donc souhaité de modéliser de façon simplifiée la dynamique de la tuyauterie rompue afin de permettre une évaluation rapide des conditions de sûreté. Il a en particulier été montré, qu'en l'état actuel des modélisations, il était nécessaire de modéliser la zone d'impact de la tuyauterie en éléments coques non-linéaires pour retrouver une estimation correcte de la force d'impact de la tuyauterie sur l'obstacle. Ainsi un élément fini de type poutre enrichi permettant de prendre en considération l'ovalisation de sa section transverse est développé, que ce soit sur une poutre droite ou sur une poutre ayant une courbure initiale comme dans le cas d'un coude. La cinématique retenue est une cinématique classique de poutre d'Euler-Bernoulli à laquelle s'ajoute une cinématique de coque de type Love-Kirchhoff, développée au premier ordre dans l'épaisseur du tube et en séries de Fourier selon la variable tangentielle afin de rester dans un formalisme filaire. De plus un couplage non linéaire, entre les rotations de type poutre et les déplacements de la section de type coque, est introduit afin de permettre au tube de s'ovaliser même sur une partie droite. Le modèle décrit est alors discrétisé et implémenté dans le code de calcul industriel de dynamique rapide explicite Europlexus. Afin de vérifier et de valider le modèle, la tuyauterie est soumise à différents cas de chargement tels que l'extension simple, la flexion pure, le tube sous pression interne ou encore l'application d'une force surfacique localisée sur la section transverse permettant de grandes déformations de la section. Les résultats numériques obtenus sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques ou numériques issues d'autres codes industriels.

**Title :** Enriched mechanical beam models for the simulation of thin tubes under pressure

**Keywords :** Enriched beam, Cross-section ovalisation, Fourier's series, Shell, Dynamic, Pipe-whip

**Abstract :** The phenomenon of whipping is one of the potential consequences of the accidental of a high energy ligne break (HELB), it is part of the loading cases taken into account in the framework of internal aggression files of nuclear power plants. Whipping consequences must be evaluated for the safety of industrial installations since it involves large displacements of the severed piping which could, depending on the size, impact the neighbouring structures and components. As these are complex physical phenomena, the characterization of the pipe rupture and the associated whipping is currently based on simplified approaches using conservative assumptions. In some cases, these assumptions make difficulties, which can lead to costly modifications. In order to answer these stakes, it is proposed in this research project to improve the tools and methods currently available for the simulation of the whipping phenomenon in order to make more realistic the modeling of the preponderant physical phenomena and in particular their coupling. The final objective is thus to quantify the displacements of the broken piping as well as its impact on the structures and on the materials implying a potential loss of integrity or operability. For this, it is necessary to take into account in the modeling a large number of phenomena. In particular, it is necessary to model the following events : the rupture of the pipe, the force of the jet initiated at the breach, the displacement of the severed pipe, the impact of the latter with the neighbouring structures, the plastic deformations following this impact and the possible formation of a plastic hinge as well as the interaction between the fluid contained in the pipe and the structure. Numerical studies have been carried out using three-dimensional modeling, which is costly in terms of calculation and simulation time. It

is therefore desired to model in a simplified way the dynamics of the ruptured pipe in order to allow a quick evaluation of the safety conditions. In particular, it has been shown that, in the current state of modelling, it is necessary to model the impact zone of the pipe with non-linear shell elements in order to find a correct estimation of the impact force of the pipe on the obstacle. This is why it is first proposed to develop a simplified model of enriched beam type (i.e. one-dimensional wire type), taking into account the ovalization of the pipe according to different loading cases. Thus an enriched beam type finite element taking into account the ovalization of its transverse section is developed, whether it is a straight beam or one with an initial curvature as is the case of an elbow. The kinematics retained is a classical Euler-Bernoulli beam kinematics to which is added a Love-Kirchhoff type shell kinematics, developed to the first order in the thickness of the tube and in Fourier series according to the tangential variable in order to remain in a wire formalism. Moreover, a non-linear coupling, between the beam rotations and the shell displacements of the section, is introduced in order to allow the tube to ovalize even on a straight part. The described model is then discretized and implemented in the industrial dynamic explicit calculation code Europlexus. In order to verify and validate the model, the pipe is subjected to different loading cases such as simple extension, pure bending, the pipe under internal pressure or the application of a localized surface force on the transverse section allowing large deformations of the cross-section. The numerical results obtained are in good agreement with the corresponding analytical or numerical solutions obtained with other simulation codes.





## Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude au professeur Delphine Brancherie et au professeur Jean-Michel Bergheau, qui ont accepté la pénible tâche d'être les rapporteurs de ma thèse. Je remercie vivement le professeur Djimedo KONDO qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Mais également Damien DURVILLE et Martin GUITON d'avoir été les examinateurs de mon jury de thèse. Merci à tous les membres du jury de m'avoir posé des questions pertinentes qui ont permis de rendre la soutenance de thèse encore plus intéressante qu'elle ne l'était déjà.

Je tenais à remercier profondément mes deux directeurs de thèse, Philippe LAFON et Claude STOLZ de m'avoir fait confiance en m'acceptant pour ce projet de thèse puis de m'avoir accompagné durant ces trois années en corrigeant mes divers rapports de leurs yeux experts. Merci à maître Claude pour ces cours et sa patience.

Comment pourrais-je oublier mon encadrant Frédéric DAUDE avec qui j'ai pu discuter sur des sujets passionnants autant scientifiques que sportifs et culturels. Un grand merci pour son accompagnement quotidien, sa bonne humeur, sa gentillesse et son expertise scientifique. J'espère qu'il passera rapidement son HDR afin de pouvoir encadrer des thésards en son nom. Je lui souhaite pleins de réussites pour cette épreuve qu'il passera haut la main j'en suis certain. Je remercie également Pascal, Robert et Bob GALON les trois frères du CEA pour leurs bonnes humeurs, leurs singeries, leurs t-shirts extraordinaires et leurs conseils.

Cette thèse sans l'ensemble de mon encadrement aurait été bien différente.

Je tiens à remercier chaleureusement l'ensemble des personnes que j'ai pu rencontrer au cours de mes trois années de doctorat passées au sein du département ERMES de la R&D d'EDF et du laboratoire IMSIA.

C'est un plaisir pour moi que d'avoir pu appartenir au groupe T6A et d'avoir pu échanger quotidiennement avec Thomas DOUILLET-GRELLIER, Eliass ZAFATI, Hassan BERRO, Patrick VAUGRANTE, les contributeurs de l'équipe EUROPLEXUS et de l'équipe ASTER. Sans oublier le projet dynamique rapide piloté par Annaelle TORRE et mes collègues de la DT où j'ai effectué mon stage, grâce notamment à la confiance que Damijan MARKOVIC a pu m'exprimer. Un grand merci également aux collègues de T6B et T6C mais aussi aux assistantes Patricia DOUMAS, Malika REHIAOUI, Myriam ROBERT, Sylvie ROUAIX et Marie-Line Bonnialy pour leurs aides et leurs conseils.

Je remercie vivement les doctorants que j'ai pu rencontrer durant mon parcours, en commençant forcément par mon co-bureau Idrissa mais aussi Zouhair, Mouhamadou, Amine, Ana-clara, Antoine, Mihaja, Eki, Hao, Thibault, Anthony et Goustan. Je leur souhaite bon courage pour terminer leur manuscrit et pour leurs soutenances de thèse.

Mes pensées se tournent désormais vers ma famille et mes amis qui ont supporté mes explications techniques sans probablement ne rien y comprendre. Un merci au rugby, à l'US Meyzieu et au CA Orsay, qui m'ont permis de m'évader et de me changer les idées. Et bien évidemment pour clôturer ces remerciements, je tiens à apporter ma reconnaissance totale à celle qui me supporte le plus quotidiennement pour son infailible soutien : Aurélie.



# Table des matières

<b>Nomenclature</b>	<b>9</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>11</b>
<b>Table des figures</b>	<b>14</b>
<b>Introduction</b>	<b>15</b>
<b>1 Modélisation tridimensionnelle du tube</b>	<b>21</b>
1.1 Théorie des surfaces et modèles de coques	21
1.1.1 Théorie générale des surfaces	21
1.1.2 Application aux coques	22
1.1.3 Mouvement d'une coque, variations de métrique et de courbure	23
1.1.4 Écriture des équations d'équilibre	24
1.2 Développement polynomial en $Z$ et en séries de Fourier en $\theta$ de la cinématique tridimensionnelle	26
1.2.1 Cinématique et tenseur des déformations	26
1.2.2 Développement en séries de Fourier	28
1.2.3 Principe des puissances virtuelles en statique appliqué au tube	29
1.2.4 Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan	30
1.2.5 Ovalisation liée au $2^{nd}$ mode dans le plan	31
1.3 Solutions analytiques tridimensionnelles	32
1.3.1 Extension simple tridimensionnelle	32
1.3.2 Cylindre sous pression interne	33
1.3.3 Flexion pure tridimensionnelle	33
<b>2 Enrichissement d'un modèle de poutre droite classique prenant en compte les variations de sa section transverse</b>	<b>35</b>
2.1 Modèle non-linéaire d'un tube droit	35
2.1.1 Cinématique non linéaire d'un tube droit	35
2.1.2 Principe des puissances virtuelles en dynamique appliqué au tube	36
2.1.3 Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan	36
2.1.4 Ovalisation liée au $2^{nd}$ mode dans le plan	37
2.2 Vérification numérique de l'élément de poutre enrichi permettant de prendre en compte les variations de sa section	40
2.2.1 Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau de différents type de tuyauteries	40
2.2.2 Effet de Poisson lors d'une extension simple uniforme	41
2.2.3 Gonflement uniforme du à une pression interne imposée	44
2.2.4 Fréquence d'oscillation sous pression interne imposée	47
2.2.5 Ovalisation dans le plan en flexion pure	49
2.2.6 Grande déformation de la section obtenue en appliquant une force surfacique localisée	52
2.2.7 Discussion autour de l'efficacité de l'élément proposé	62

<b>3</b>	<b>Enrichissement d'un modèle de poutre présentant une courbure initiale considérant les variations de sa section transverse</b>	<b>65</b>
3.1	Modélisation théorique enrichie d'un tube coudé	65
3.1.1	Cinématique et déformation d'un tube coudé	65
3.1.2	Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan	67
3.1.3	Ovalisation liée au 2 <sup>nd</sup> mode dans le plan	68
3.2	Vérification numérique du tube coudé	70
3.2.1	Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau de différents type de tuyauteries	70
3.2.2	Gonflement du à une pression interne imposée avec encastrement aux deux extrémités	72
3.2.3	Gonflement accompagné d'une ouverture du coude due à une pression interne imposée	79
3.2.4	Gonflement et déplacement radial uniforme du à une pression interne imposée avec des conditions aux limites de type tore	84
3.2.5	Ovalisation dans le plan en flexion liée au second mode de Fourier	89
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>95</b>
4.1	Préambule	95
4.2	Algorithme explicite	95
4.2.1	Discrétisation du problème continu	95
4.2.2	Fonctions de forme	97
4.2.3	Matrice <b>N</b> des fonctions de forme	100
4.2.4	Matrice des dérivées des fonctions de forme et incrément de déformation	103
4.2.5	Efforts généralisés et forces internes	105
4.2.6	Matrice de masse	107
4.2.7	Schéma numérique en temps : Différence centrée finie	109
4.3	Condition de stabilité	110
4.3.1	Calcul général de la condition CFL	110
4.3.2	Condition de stabilité selon le chargement et la géométrie	111
	<b>Conclusion</b>	<b>114</b>
	<b>Annexes</b>	<b>117</b>
A	Tube droit en mouvement plan	117
A.1	Cinématique et tenseur des déformations	117
A.2	Énergie cinétique	120
B	Cinématique et tenseur des déformations du tube droit 3D	122
C	Cinématique et tenseur des déformations non linéaire du tube droit 3D	124
D	Tube coudé en mouvement plan	126
D.1	Cinématique et tenseur des déformations	126
D.2	Énergie cinétique	130
E	Cinématique et tenseur des déformations du tube coudé 3D	133
F	Méthodologie entreprise pour le calcul formel	139
G	Matrice de masse cohérente	140
H	Aide intégration en $\theta$ pour $N$ modes de Fourier	141
I	Réactualisation du rayon du coude	142
	<b>Bibliographie</b>	<b>144</b>

## Nomenclature

Notation	Représentation physique	Dimension
$E$	Module de Young	Pa
$\nu$	Coefficient de Poisson	$\emptyset$
$G$	Module de cisaillement	Pa
$D$	Module élastique plaque/coque	Pa
$U_o, V_o, W_o$	Déplacement de l'axe du tube	m
$\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$	Rotation de la section transversale	rad
$u, v, w$	Déplacement relatif de la section	m
$s$	Abscisse curviligne	m
$\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{H}_\alpha, \mathbf{a}_\alpha, \mathbf{h}_\alpha$	Vecteurs tangents initiaux et transportés au feuillet moyen et à une côte Z	m
$\mathbf{G}, \mathbf{g}$	Tenseur métrique	$m^2$
$\Gamma$	Symboles de Christoffel	$m^{-1}$
$\mathbf{C}$	Tenseur de Cauchy Green-Droit ou des dilatations de Cauchy	$\emptyset$
$\mathbf{F}$	Gradient de la transformation	$\emptyset$
$\boldsymbol{\theta}/\Pi$	Tenseur des contraintes nominales/Piola-Kirchhoff	Pa
$\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_y, \mathbf{E}_z$	Repère cartésien	m
$\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta$	Repère cylindrique	m
$(X, \theta, Z)$	Coordonnées cylindriques	(m, rad, m)
$R$	Rayon de courbure du tube	m
$a$	Rayon moyen de la section transversale	m
$e$	Épaisseur du tube	m
$\mathbf{M}/\mathbf{m}$	Position d'un point du tube avant/après déformation	m
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Tenseur des déformations	$\emptyset$
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur des contraintes de Cauchy	Pa
$\mathbf{K}/\mathbf{k}$	Tenseur de courbure avant/après déformation	$m^{-1}$
$\mathcal{P}_i/\mathcal{P}_e/\mathcal{P}_a$	Puissance des efforts intérieurs/extérieurs/accélératrices	N
$N, T_y, T_z, M_x, M_y, M_z$	Efforts généralisés de poutre	$N.m^{-1}/N$
$n_i, t_i, m_i$	Efforts généralisés de coque	$N.m^{-2}/N.m^{-1}/N$
$\rho$	Masse volumique de l'élément	$kg.m^{-3}$
$S$	Aire de la section transversale du tube	$m^2$
$I_y/I_z$	Moment d'inertie de flexion autour des axes OY et OZ	$m^4$
$J_x$	Moment d'inertie de torsion autour de l'axe OX	$m^4$
$t$	Temps	s
$C$	Nombre de Courant	$\emptyset$
$x, v, a$	Position, vitesse, accélération d'un point	(m, $m.s^{-1}$ , $m.s^{-2}$ )
$\mathbf{M}^e$	Matrice de masse de l'élément	kg
$\mathbf{N}$	Matrice des fonctions de forme	m
$\mathbf{B}$	Matrice des dérivées des fonctions de forme	$\emptyset$
$\mathbf{P}$	Matrice de passage du repère global au repère local	$\emptyset$
$\mathbf{T}$	Matrice de passage du repère cartésien au repère cylindrique	$\emptyset$
$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$	Incrément de déformation	$\emptyset$
$\Delta\boldsymbol{\sigma}$	Incrément de contraintes	Pa
$\Delta\mathbf{U}$	Incrément de déplacement	m
$\mathbf{F}_{gen}$	Matrice colonne des efforts généralisés	voir eff.gen
$\mathbf{F}_{int}/\mathbf{F}_{ext}$	Forces internes/externes	N
$\omega_i/\lambda_i$	Poids/coordonnées des points de Gauss	$m/\emptyset$



## Liste des tableaux

2.1	Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau des trois configurations de tuyauteries . . . . .	40
2.2	Pas de temps de stabilité . . . . .	40
2.3	Déplacement radial théorique lors d'une pression interne de 100 bars . . . . .	45
2.4	Période d'oscillation . . . . .	47
2.5	Résultats analytiques du déplacement $w_2^s$ en flexion pure . . . . .	50
3.1	Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau des trois configurations de tuyauteries . . . . .	70
3.2	Condition de stabilité la plus pénalisante . . . . .	71
3.3	Pas de temps de stabilité pour le coude . . . . .	71
3.4	Déplacement radial théorique lors d'une pression interne de 100 bars avec une solution analytique naïve . . . . .	72
3.5	Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encastré à ces deux extrémités . . . . .	73
3.6	Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encastré à une de ces extrémités et libre de l'autre . . . . .	79
3.7	Déplacement radial uniforme théorique lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encastré à une de ces extrémités et libre de l'autre . . . . .	79
3.8	Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un quart de tore . . . . .	85
3.9	Déplacement radial uniforme théorique lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un quart de tore . . . . .	85
3.10	Déplacements et rotation analytiques lors d'une rotation imposée de -0.1 radian sur un tube coudé encastré à une de ces extrémités et libre de l'autre . . . . .	90





## Table des figures

1.1	Schéma d'une tuyauterie droite : vue plane (gauche), vue transversale (centre et droite)	26
1.2	Déplacements de poutre et de coque	26
1.3	Mouvement plan de poutre	27
1.4	Déplacement de type-coque dans la section	27
1.5	Surfaces du tube	30
2.1	Courbe Moment-Courbure	39
2.2	Extension simple d'une poutre due à un déplacement axial symétrique imposé	41
2.3	Historique de déplacement axial imposé normalisé d'un côté durant une extension simple	42
2.4	Résultat numérique du déplacement radial durant une extension simple pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)	43
2.5	Pression interne imposée uniformément	44
2.6	Historique de pression interne imposée normalisée	45
2.7	Résultat numérique du déplacement radial sous pression interne imposée pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)	46
2.8	Résultat numérique du déplacement radial dynamique d'un tube sous pression interne pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)	48
2.9	Flexion pure, rotation imposée de chaque côté	49
2.10	Historique de la rotation imposée lors d'une flexion pure	50
2.11	Résultat numérique du déplacement d'ovalisation lors d'une flexion pure pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)	51
2.12	Tuyauterie encastree à ses deux extrémités soumise à un chargement surfacique localisée en son centre : vue plane (gauche), vue transversale (droite)	52
2.13	Comparaison du déplacement de la section selon le nombre de modes de Fourier considérés	53
2.14	Erreur relative pour la convergence en mode	54
2.15	Historique de la force surfacique localisée imposée	55
2.16	Comparaison de la solution selon le nombre de modes de Fourier en $X = 0.5L$	55
2.17	Comparaison de la solution avec ou sans prise en compte du gauchissement en $X = 0.5L$	56
2.18	Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.5L$	57
2.19	Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.6L$	58
2.20	Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.6L$	58
2.21	Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.7L$	59
2.22	Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.7L$	59
2.23	Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.8L$	60
2.24	Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.8L$	60
2.25	Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.9L$	61
2.26	Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en $X = 0.9L$	61
2.27	Comparaison avec un maillage grossier et un autre élément dans le cas de la force surfacique localisée en $X = 0.5L$	62
3.1	Tuyauterie coudée selon un seul axe (vue plane à gauche et transversale à droite)	65
3.2	Arc de $90^\circ$	70
3.3	Notations des points sur l'arc	71
3.4	Historique de pression interne imposée normalisée	74
3.5	Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne encastree à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite)	75
3.6	Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne encastree à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite)	76

3.7	Résultat numérique de la rotation pour un tube sous pression interne encastré à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et le point $F$ . . . . .	77
3.8	Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne encastré à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite) . . . . .	78
3.9	Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $C$ et $M$ (de gauche à droite) . . . . .	80
3.10	Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $C$ et $M$ (de gauche à droite) . . . . .	81
3.11	Résultat numérique de la rotation pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $C$ et $M$ (de gauche à droite) . . . . .	82
3.12	Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $C$ et $M$ (de gauche à droite) . . . . .	83
3.13	Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite) . . . . .	86
3.14	Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite) . . . . .	87
3.15	Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points $M$ et $F$ (de gauche à droite) . . . . .	88
3.16	Historique de la rotation imposée lors d'une flexion fermante dans un coude . . . . .	90
3.17	Résultat numérique de la flexion pour la configuration 2 et les points $M$ et $C$ (de gauche à droite) . . . . .	91
3.18	Vue d'en haut de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême $C$ . . . . .	92
3.19	Vue de côté de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême $C$ . . . . .	93
3.20	Vue transversale de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême $C$ . . . . .	93
4.1	Élément filaire à 2 nœuds . . . . .	97

## Introduction

Afin de pouvoir démontrer la bonne tenue de ses équipements et de ses ouvrages, EDF est amené à étudier les conséquences de différents accidents hypothétiques de sûreté. La rupture de tuyauteries à haute énergie, notamment celles du circuit primaire des centrales nucléaires à eau pressurisée, est un de ces accidents hypothétiques. Plusieurs scénarios accidentels peuvent alors être envisagés.

Tout d'abord, il faut considérer le **scénario d'APRP** (Accident de Perte de Réfrigérant Primaire) qui, à partir de la formation d'une brèche dans le circuit primaire, engendre d'une part la génération d'une onde de dépressurisation dans le circuit pouvant se propager jusqu'aux composants internes à la cuve du réacteur et engendrer des chargements mécaniques sur ces éléments pouvant potentiellement menacer leur intégrité, et d'autre part la perte de l'eau de refroidissement du circuit primaire pouvant conduire au dénoyage des crayons combustible et à un défaut de refroidissement de ceux-ci.

Ensuite on peut considérer le scénario de **fouettement de la tuyauterie** rompue. En effet, sous l'effet de la force du jet fluide issu de la tuyauterie rompue, un débattement de celle-ci peut être initié, c'est le fouettement de tuyauterie. Ce phénomène peut avoir une incidence sur la sûreté des installations puisqu'il implique de grands déplacements de la tuyauterie rompue qui pourrait, en fonction de l'encombrement, impacter et endommager les structures et composants avoisinants. S'agissant de phénomènes physiques complexes, la caractérisation de la rupture de la tuyauterie et du fouettement associé est fondée actuellement sur des approches simplifiées reposant sur des hypothèses conservatives. Ces hypothèses peuvent alors conduire à des modifications qui peuvent s'avérer coûteuses.

Ainsi, c'est la problématique du fouettement de tuyauterie qui a motivé ce travail de thèse. En effet, une cascade de phénomènes physiques complexes est alors mise en jeu : la rupture de la tuyauterie, la force du jet fluide à la brèche, le déplacement de la tuyauterie rompue, l'ovalisation de la section, la formation de la rotule plastique et l'impact de la tuyauterie rompue sur les structures voisines. Afin de pouvoir étudier ces phénomènes physiques, plusieurs domaines de la mécanique doivent être sollicités :

- Mécanique de la rupture
- Interaction fluide-structure
- Dynamique des structures en grands déplacements et grandes déformations
- Comportement plastique
- Chocs et contacts

Or il n'existe pas à l'heure actuelle d'outil de modélisation numérique industriel, validé et opérationnel, à même de prendre en compte l'ensemble de ces phénomènes. L'étude du fouettement de tuyauterie peut alors se faire de manière partielle en se concentrant sur une phase du phénomène pour laquelle un outil est disponible ou alors de manière plus globale en adoptant une approche plus conservatrice. C'est cette dernière approche qui est actuellement appliquée dans les études d'ingénierie.

### Problématique industrielle et approche d'ingénierie

Le phénomène de fouettement est une conséquence potentielle de la Rupture d'une Tuyauterie à Haute Énergie (RTHE). Pour le Parc nucléaire, un circuit est considéré comme à "haute énergie" si sa pression est supérieure à 20 bars ou si sa température est supérieure à 100 °C dans des conditions normales d'exploitation.

Le phénomène de fouettement est créé par les efforts de réaction du jet. Lors d'une rupture circonférentielle d'une tuyauterie à "haute énergie", la force de réaction qui s'exerce sur la tuyauterie peut conduire à un recul de cette dernière. Des déformations peuvent alors apparaître. Dans ce cas, ces déformations vont se concentrer au niveau de points singuliers notamment proches des coudes ou des jonctions. À proximité de ces points, la tuyauterie peut subir une déformation plastique avec un phénomène d'ovalisation de sa section. Il y a alors création de *la rotule plastique*, zone ou section totalement plastifiée, engendrant une perte de raideur de la tuyauterie et autour de laquelle celle-ci peut effectuer son mouvement pratiquement sans aucune résistance. Une fois la rotule plastique créée, la partie de la tuyauterie rompue va se déplacer très rapidement autour de celle-ci pouvant endommager gravement les matériels aux alentours.

Le mouvement de la tuyauterie se produit ainsi en trois phases [83, 89] :

- accélération du tuyau lorsque le fluide s'échappe ;
- création de la rotule plastique ;
- déplacement, rotation de la tuyauterie autour de sa rotule plastique jusqu'à que toute l'énergie cinétique soit dissipée.

Pour les RTHE, l'objectif des études de sûreté est de démontrer que l'installation est conçue de telle façon qu'une rupture de tuyauterie ne contribue pas à la génération d'un accident ayant des conséquences pour la sûreté non acceptables. Aujourd'hui, une approche conservatrice du phénomène de fouettement est appliquée pour les études d'ingénierie. Une fois la rotule plastique formée, tous les composants situés dans la zone de mouvement seront considérés impactés et potentiellement inopérants. Cette zone de mouvement est constituée par la sphère ayant pour centre la localisation de la rotule plastique et pour rayon la longueur libre (distance entre la rotule plastique et la brèche). La détermination précise de la rotule plastique permet de réduire cette zone de mouvement. De plus, en étudiant plus précisément la dynamique de la tuyauterie, il est possible de pouvoir décrire de manière plus réaliste la véritable zone de mouvement et donc de réduire la zone impactée.

En situation industrielle, pour contrôler l'apparition et les conséquences d'un éventuel mouvement de fouettement, il existe des dispositifs anti-fouettement permettant soit de dissiper l'énergie de la tuyauterie avec des amortisseurs, soit de minimiser le débattement de la tuyauterie.

Il est clair qu'un outil de calcul prédictif des phénomènes de fouettement permettrait dans un premier temps de juger s'il faut mettre ou non des dispositifs anti-fouettement, puis ensuite de les installer d'une manière optimale. Il est cependant nécessaire, préalablement à l'utilisation d'un tel outil, de disposer des données expérimentales nécessaires à sa validation.

#### Études et données expérimentales

Le fouettement de tuyauteries étant un phénomène accidentel, il est difficile de recueillir des données expérimentales à partir des installations industrielles. Pourtant les données expérimentales sont primordiales d'une part pour qualifier et quantifier les paramètres physiques caractéristiques du fouettement et d'autre part pour disposer de données de validation pour les modèles théoriques et numériques.

Parmi les campagnes d'essais historiques, on citera d'emblée les tests de fouettement de tuyauteries qui ont été effectués dans le cadre de la campagne expérimentale AQUITAINE II [41, 20] organisée conjointement par EDF, CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives), Framatome et Westinghouse dans les années 70-80. Un exemple type d'essai réalisé lors de cette campagne est l'impact d'une tuyauterie en porte-à-faux, subissant une rupture guillotine déclenchée par un cordon explosif, sur une dalle en béton ou un matériel rigide. Plusieurs autres types d'essais sont référencés dans la référence [20].

Les investigations expérimentales renseignent notamment sur la forme géométrique que la section de la tuyauterie aura lorsqu'elle est soumise à une flexion plane et à une pression interne [64]. Si dans un premier temps on peut supposer une section de forme elliptique, on constate dans la réalité des essais que la forme obtenue est plus quelconque et complexe [51, 52]. Ainsi, C.Thinvongpituk et al [97] ont réalisé des tests expérimentaux sur des tuyauteries minces afin de montrer dans un premier temps la forme obtenue, puis de modéliser géométriquement la section déformée de la tuyauterie afin de pouvoir calculer certaines grandeurs physiques, comme le moment par exemple.

Dans la référence [65] les tuyauteries libres sont étudiées et non les tuyauteries avec des dispositifs anti-fouettement comme ça peut être le cas dans [100]. Dans une approche conservatrice, la poussée des jets provenant d'une rupture brutale peut être modélisée par une force moyenne de jet dans un régime quasi permanent. L'évaluation de la réponse des tuyauteries après une rupture permet de caractériser la capacité du système entier à dissiper de l'énergie accumulée pendant la phase dynamique et à résister à la force fluide du régime permanent. De plus, un rapport détaillé de plusieurs tests a été effectué par JAERI [58].

Pour décrire le phénomène de fouettement, plusieurs grandeurs physiques peuvent être utilisées : le déplacement, la force de réaction du jet, les déformations plastiques au niveau de la rotule plastique, le moment, la courbure, la rotation, le comportement du matériau, ... Parmi ces grandeurs, le moment semble être une notion pertinente pour la validation d'un modèle puisqu'il agrège plusieurs des grandeurs caractéristiques énoncées précédemment. On s'intéressera donc particulièrement au calcul du moment dans les parties théoriques, numériques et expérimentales.

### Approche théorique et modélisation numérique

La modélisation d'un phénomène physique peut s'appuyer sur un modèle empirique ou sur un modèle théorique. Les modèles empiriques, modèles principalement issus des expériences, sont souvent difficiles à appliquer à d'autres configurations, même proches, car ils se fondent sur des paramètres propres à la configuration étudiée. D'un autre côté, les modèles théoriques se fondent sur une approche plus rigoureuse et plus complexe, en s'appuyant sur les lois de la physique et de la mécanique. Afin de simplifier le problème, des hypothèses sont prises en compte. Ensuite, les modèles théoriques doivent être validés avec les données des essais expérimentaux.

Roemer [89] s'intéresse aux dommages causés par un tuyau sur un obstacle. Le tuyau est donc vu comme un missile impactant un autre tuyau ou ici en l'occurrence un mur en béton. D'autres études [114, 113] ont montré l'impact d'une tuyauterie non plus sur un mur mais sur des poutres en béton armé. H.T. Tang et R.B. Duffey ont aussi discuté de la déformation de la tuyauterie après un impact [95].

Z. Plocek et al [77] expliquent comment renforcer la protection des centrales nucléaires face au RTHE. Dans cette étude les auteurs ont considéré les propriétés dues aux grands déplacements et à la non linéarité des armatures et des éléments élastiques modélisant l'énergie visco-plastique dissipative de la structure. L'analyse a montré que la modélisation de la tuyauterie à "haute énergie" dans son ensemble, avec les structures de support, est la condition fondamentale pour obtenir une réponse dynamique fiable à une rupture de tuyauterie [77].

Pour les tuyaux épais le comportement inclut une phase visco-élastique puis un écrouissage plastique [86]. Pour les tuyaux moyens et fins le comportement est élasto-plastique avec écrouissage. Plusieurs expériences avec des ratios diamètre sur épaisseur ont été menées dans la référence [86]. Une approche théorique sur la relation moment-courbure est aussi développée et une comparaison entre les expériences et la théorie est détaillée. Deux modèles sont analysés : rigide parfaitement plastique et elasto-plastique avec prise en compte de l'écrouissage. Le modèle rigide parfaitement plastique surestime le déplacement de la tuyauterie et semble plus proche des essais dans les premiers instants. D'une manière globale, le modèle élasto-plastique avec prise en compte de l'écrouissage semble reproduire le même comportement que celui des essais. Ce modèle de comportement semble donc très pertinent à étudier. Toutefois les rapports  $D/t$  (Diamètre sur épaisseur) sont assez grands (19.5-32) alors que dans le CPP/CSP (Circuit Primaire Principal/Circuit Secondaire Principal) il faut plus s'intéresser à des rapports de l'ordre de 10-20.

S.R. Reid and B. Wang proposent d'étudier un modèle rigide parfaitement plastique et développe ainsi un modèle théorique dans [83]. Leur étude confirme que la localisation de la rotule plastique va dépendre de la géométrie de la tuyauterie mais aussi de la force appliquée, comme c'est aussi le cas dans la référence [11]. Lorsque la rotule plastique est bien créée en un point précis, le cisaillement, le moment fléchissant et la force axiale changent considérablement [86].

S. Ueda [100] a développé une relation moment-rotation, à partir d'essais expérimentaux, et a pu la confronter à d'autres formules de moment existantes. L'importance majeure de cet article est la prise en compte de l'ovalisation de la section au niveau de la rotule plastique. La relation moment-rotation dérive de la relation entre l'ovalisation du tuyau et la déformation obtenue par les essais.

Néanmoins, dorénavant, la simulation numérique peut également être un moyen d'investigation de ce phénomène. Mais on sait aussi que l'étude numérique des structures en 3D peut s'avérer coûteuse en temp de calcul. C'est pourquoi il est utile d'utiliser différentes théories de modélisation mécanique pour réduire la dimension du modèle de structure étudiée afin de faciliter son traitement numérique et diminuer le temps de calcul. C'est le cas notamment des formulations poutre (1D) [90, 28, 31, 4] et des formulations coque (2D) [16, 99].

La théorie des poutres est utile pour déterminer des solutions analytiques, développer des modélisations numériques simples ou obtenir une estimation du comportement mécanique global de la tuyauterie ainsi modélisée. La théorie des poutres s'applique ainsi à des structures élancées. On parle de structures élancées lorsque le rapport longueur sur diamètre est supérieur ou égal à 10.

Dans la théorie des poutres, il existe deux grands modèles de référence :

- Le modèle d'Euler-Bernoulli, qui ne prend pas en compte l'effet du cisaillement
- Le modèle de Timoshenko qui prend en considération l'influence du cisaillement

Dans la théorie d'Euler-Bernoulli, le cisaillement est négligé dans le cas de la flexion. Les hypothèses du modèle d'Euler-Bernoulli sont les suivantes :

- les sections droites sont perpendiculaires à la courbe moyenne ; elles varient de manière continue et lente,

- le matériau est homogène et isotrope,
- les sections droites restent planes.

Timoshenko prend les mêmes hypothèses mais permet la rotation de la section, c'est-à-dire qu'après déformation les sections restent planes mais ne sont plus forcément perpendiculaires à la fibre neutre. Des comparaisons numériques et théoriques sont faites entre ces deux modèles se référant à des cas classiques de poutre cantilever [43, 3]. La prise en compte du cisaillement et de la rotation de la section permet pour des poutres quelconques (pas forcément élancées) d'améliorer les résultats. Dans [43, 3] il y a aussi des comparaisons modales pour enrichir l'étude. Pour des structures peu élancées, la théorie de Timoshenko se rapproche des modèles 2D et 3D et donne de très bons résultats sur des cas où le cisaillement transverse est dominant. Il existe aussi une approche de Rayleigh qui se situe à mi-chemin entre ces deux théories en prenant en compte l'inertie de rotation mais pas le cisaillement.

Certains auteurs prennent en compte l'ovalisation de la section transverse en modifiant l'inertie de la section par un facteur de flexibilité [13, 69, 68]. Il est courant d'utiliser ce procédé dans la théorie des poutres lorsqu'il y a un coude, puisque les sections ne se déforment pas. On obtient une surestimation de la déformation en prenant en compte ce facteur de flexibilité [19]. Un calcul avancé d'un nouveau facteur de flexibilité a été mené dans [69] en améliorant le facteur de flexibilité de Von Karman [102] avec une analyse dans le cas linéaire élastique en flexion dans le plan. Les auteurs négligent le terme de courbure  $k_{xx}$  et cela donne des résultats très proches de ceux qu'ils auraient obtenus en le prenant en compte (voir Fig. (6 & 7) de [69]). Les hypothèses prises en considération sont proches de notre cas de figure et semble donc pertinentes à considérer. En outre d'autres comparaisons analytiques ont été effectuées avec le modèle d'Euler-Bernoulli [96, 34, 107] et le gauchissement des sections [98].

Par ailleurs, des approches numériques ont été faites et permettent d'avoir une localisation de la rotule plastique différente selon la géométrie et les conditions aux limites [65].

Prinja s'intéresse au fouettement de tuyauterie avec prise en compte de l'IFS (Interaction Fluide Structure) [81]. Les auteurs détaillent comment un élément fini a été développé pour répondre à ce problème physique. L'élément combiné est un élément de poutre élastique avec des ressorts inélastiques (approche de type non linéaire). Les hypothèses prises sont des grands déplacements et des grandes rotations. Ils utilisent une approche de type Lagrangien réactualisé avec un schéma d'intégration implicite pour un élément poutre à deux nœuds.

La campagne d'essais AQUITAINE II a permis d'avoir des résultats expérimentaux permettant d'être une base de comparaison pour les simulations numériques. C'est ainsi que des comparaisons numériques entre un modèle filaire et un modèle mixte filaire/3D, en se référant à la campagne expérimentale AQUITAINE II, ont été menées [78]. Le modèle filaire est un modèle unidimensionnel, c'est-à-dire que les mailles sont des segments ; l'ensemble des champs est ramené à sa fibre neutre. Quant au modèle mixte filaire/3D il est aussi majoritairement filaire sauf au niveau des zones d'intérêt où il est remplacé par un maillage tridimensionnel. Dans ce cas précis, la zone d'intérêt est la zone d'impact. Les résultats numériques du modèle mixte filaire/3D sont proches des données expérimentales contrairement aux résultats numériques du modèle purement filaire qui surestiment la force d'impact [78].

Millard et Hoffmann obtiennent de bons résultats en utilisant un modèle poutre qui prend en compte la raideur liée à l'ovalisation de la section par l'intermédiaire d'un ressort non-linéaire. Ils obtiennent une surestimation numérique de l'impact après le premier contact, néanmoins les résultats du modèle numérique sont proches au premier pic près [68]. Cet article fournit des modèles de cas-tests en statique qui pourront servir pour la validation de codes de calcul. Les calculs sont effectués en petites déformations mais en grandes rotations et grands déplacements.

Si l'on examine maintenant la théorie des coques, on constate qu'il existe là aussi deux grands modèles de référence :

- Théorie de Kirchhoff-Love, qui s'apparente à Euler-Bernoulli pour les poutres, le cisaillement est négligé. Elle est mieux adaptée pour les plaques et coques minces [62].
- Théorie Mindlin-Reissner, qui s'apparente à Timoshenko pour les poutres, le cisaillement est non nul. Elle est mieux adaptée et donne de meilleurs résultats pour les plaques et coques épaisses [88, 104].

Dans la théorie des coques, il existe différentes hypothèses, notamment si l'on considère une coque mince ou une coque épaisse. Cette qualification n'est pas quantifiée/qualifiée exactement mais dans le cas d'une tuyauterie de section cylindrique, on peut estimer qu'une coque mince a un rapport diamètre sur épaisseur supérieur à 20 et qu'une coque épaisse a ce même rapport inférieur à 20.

Dans la littérature, il y a de nombreux articles qui traitent des coques minces [105, 91, 51, 75, 115, 42]. Certaines tuyauteries présentes dans les centrales nucléaires peuvent être considérées comme des coques épaisses. En effet elles sont tout d'abord dimensionnées en fonction des chargements hydrauliques qu'elles subissent. Cependant pour simplifier les modélisations la théorie des coques minces est souvent utilisée. Von Karman est l'un des tous premiers à avoir étudié l'ovalisation d'un tube coudé sous flexion pure en négligeant les termes non linéaires et l'inextensibilité de la section [102]. Wood a regardé les instabilités de l'ovalisation de tube initialement droit en appliquant une pression extérieure où la section était considérée une nouvelle fois inextensible [108]

Un élément fini (EF) ayant une partie poutre et une partie coque a été créé dans [82]. Cet élément a été implémenté dans le code de calcul code\_aster. Millard [67] a créé un élément de type poutre enrichi, avec une approche de type coque. Pour enrichir les modèles de poutres les auteurs s'intéressent à ce qui se passe sur la circonférence et dans l'épaisseur de la tuyauterie en développant notamment les variables cinématiques en séries de Fourier [67, 82, 51, 94, 108]. Dans [37] deux formulations d'EF sont utilisées : une première polynomiale avec 6 paramètres et une seconde trigonométrique avec également 6 paramètres, pour un total de 38 ddl. Des calculs numériques de fouettement en flexion plane et hors plane avec un modèle rigide parfaitement plastique ont été menés [1, 93] et les articles [84, 45, 85, 103] permettent de déterminer le lieu de la rotule plastique.

D'autres modélisations de poutres enrichies sont aussi développées dans la littérature. Un élément poutre courbée 3D amélioré avec prise en compte des grandes rotations est développé dans [94]. Dans [75] les auteurs établissent une théorie avec un élément fini de type "ring" basée sur la théorie des coques minces avec les hypothèses de Love-Kirchhoff. Le déplacement radial,  $w$ , est développé en séries de Fourier dans [75]. Une investigation numérique est menée puis comparée aux résultats théoriques et expérimentaux. Dans la thèse [40], l'auteur a élaboré un nouvel élément 3D poutre à section déformable avec des applications dans le domaine du textile. Plus récemment une thèse s'est intéressée à l'élaboration d'éléments coques pour des structures minces et moyennement épaisses avec des applications dans le nucléaire notamment [29]. Une autre étude numérique de tubes minces, avec un modèle aux éléments finis, permet de mesurer les contraintes résiduelles et l'ovalisation du tube [115]. Dans [76] la méthode numérique est de type Lagrangien total appliqué aux plaques et coques pour une poutre courbée et dans [94] l'application est effectuée avec un modèle de poutre. La formulation de [109] est explicite et utilise un modèle 2D de coque dégénéré [46, 47]. Les hypothèses retenues sont les suivantes : les sections restent droites après déformation mais pas forcément perpendiculaires et la longueur de la normale est gardée après déformation, autrement dit les hypothèses de Mindlin-Reissner sont utilisées.

Dans ce travail de thèse, l'objectif principal est de définir, développer et valider un nouveau modèle de poutre enrichi à même de prendre en compte l'ovalisation de la section apparaissant dans les phénomènes de fouettement. Ce travail doit se traduire par l'implémentation de nouveaux éléments finis dans le code de Dynamique Rapide EUROPLEXUS.

Ce rapport de thèse se structure comme suit. Tout d'abord, dans le chapitre 1, on rappelle les notions essentielles de la théorie des surfaces appliquée aux modèles de coques. Pour simplifier la modélisation, on considère une cinématique de type poutre enrichie avec une cinématique de coque permettant la variation de sa section. Puis, dans le chapitre 2, on détaille la méthodologie développée pour enrichir un modèle de poutre droite de type Euler-Bernoulli afin de prendre en compte l'ovalisation de sa section transverse en utilisant les conclusions du chapitre 1 quant à la façon d'enrichir la cinématique. Ensuite, dans le chapitre 3, on applique la méthodologie développée au chapitre 2 pour une tuyauterie droite à une tuyauterie courbée. Enfin, dans le chapitre 4, on détaille la discrétisation des équations continues déterminées dans les chapitres précédents dans le cadre d'une intégration temporelle explicite en temps dans le code EUROPLEXUS. Dans les annexes, on précise notamment l'établissement des équations pour le tube droit et pour le tube coudé, dans le cadre d'un mouvement plan et dans le cadre tridimensionnel. La conclusion synthétise les avancées obtenues dans ce travail de thèse pour le développement d'un nouveau modèle de poutre enrichi. Le paragraphe des perspectives introduit ce que pourraient être les suites à donner à ce travail de thèse notamment par l'introduction du comportement plastique et de l'interaction fluide-structure.





# 1 - Modélisation tridimensionnelle du tube

Pour modéliser une tuyauterie plusieurs approches sont possibles. Ainsi on peut considérer un modèle tridimensionnel ou bien un modèle de type coque, en s'intéressant uniquement au mouvement de la surface moyenne. Dans ce chapitre, on rappelle les notions essentielles de la théorie des surfaces appliquée aux modèles de coques. La théorie des coques est ensuite simplifiée en prenant en compte un modèle de poutre permettant la variation de sa section.

Le modèle proposé prend en compte les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour la partie poutre et la déformée de la section tient compte des hypothèses de Love-Kirchhoff [61, 56]. Pour la partie coque, les déplacements de la section, initialement circulaire, sont décomposés en séries de Fourier selon l'angle polaire dont les coefficients dépendent de l'abscisse curviligne  $s$  le long de l'axe du tube et de la cote  $Z$  par rapport à son rayon moyen  $a$ .

Les déformées du tube ainsi modélisées sont analysées en élasticité linéaire isotrope sur des cas de chargements simples (extension, flexion et pression interne) en les comparant aux résultats analytiques tridimensionnels.

Ces analyses permettent de déterminer les ordres d'approximation nécessaires pour représenter au mieux la déformée d'un tube. Néanmoins, avant d'aborder la modélisation de la tuyauterie, les fondements de la théorie des surfaces et des coques sont rappelés (voir [99, 16, 71, 72, 87, 62, 74, 73, 30, 57, 70, 101]).

## 1.1 . Théorie des surfaces et modèles de coques

### 1.1.1 . Théorie générale des surfaces

Une surface  $\Sigma$  est décrite par deux lignes de coordonnées  $(X^\alpha, \alpha = 1, 2)$  non nécessairement orthogonales. Soit  $\mathbf{M} \in \Sigma$ , les vecteurs tangents en  $\mathbf{M}$  à  $\Sigma$  sont notés  $\mathbf{A}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X^\alpha}$  et le vecteur normal  $\mathbf{N}$  s'exprime comme :

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2}{\|\mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2\|} \quad (1.1)$$

D'une manière générale, la métrique locale associée à la base  $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{N})$  n'est pas orthonormée. La métrique associée dans le plan tangent est alors introduite en considérant le tenseur métrique  $\overset{\circ}{\mathbf{G}}$  qui est défini par :

$$\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} = \mathbf{A}_\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta \quad , \quad \alpha = 1, 2 \quad , \quad \overset{\circ}{G} = \det([\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}]) \quad (1.2)$$

La matrice  $[\overset{\circ}{G}^{\alpha\beta}]$  est l'inverse de la matrice  $[\overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}]$  telle que :

$$\overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \overset{\circ}{G}_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad \text{où } \delta \text{ représente le symbole de Kronecker.} \quad (1.3)$$

La base réciproque notée  $(\mathbf{A}^\alpha, \alpha = 1, 2)$  vérifie les relations suivantes :

$$\mathbf{A}^\alpha \cdot \mathbf{A}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad ; \quad \mathbf{A}^\alpha = \overset{\circ}{G}^{\alpha\beta} \mathbf{A}_\beta \quad ; \quad \mathbf{N} \wedge \mathbf{A}_1 = \sqrt{\overset{\circ}{G}} \mathbf{A}^2 \quad ; \quad \mathbf{N} \wedge \mathbf{A}_2 = -\sqrt{\overset{\circ}{G}} \mathbf{A}^1 \quad ; \quad \mathbf{A}_1 \wedge \mathbf{A}_2 = \sqrt{\overset{\circ}{G}} \mathbf{N} \quad (1.4)$$

La surface moyenne est une surface courbe, de courbure donnée par le tenseur  $\overset{\circ}{\mathbf{K}}$  dont les composantes sont exprimées comme suit :

$$\overset{\circ}{K}_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \mathbf{M}}{\partial X^\alpha \partial X^\beta} \cdot \mathbf{N} \quad (1.5)$$

Les variations de la base  $(\mathbf{A}_\alpha, \mathbf{N})$  le long des lignes de coordonnées sont définies telles que :

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\alpha}{\partial X^\beta} = \partial_\beta \mathbf{A}_\alpha = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{A}_\gamma + \overset{\circ}{K}_{\alpha\beta} \mathbf{N} \quad \text{et} \quad \partial_\beta \mathbf{N} = -\overset{\circ}{K}_{\beta\alpha} \mathbf{A}^\alpha \quad \text{où } \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \text{ sont les symboles de Christoffel} \quad (1.6)$$

Le tenseur de courbure  $\overset{\circ}{\mathbf{K}} = \overset{\circ}{K}_{\alpha\beta} \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta = \overset{\circ}{K}_\alpha^\beta \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}_\beta$  au point  $\mathbf{M}$  et les symboles de Christoffel vérifient :

$$\overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\delta = \frac{1}{2} \overset{\circ}{G}^{\gamma\delta} \left[ \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{\gamma\beta}}{\partial X^\alpha} + \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{\gamma\alpha}}{\partial X^\beta} - \frac{\partial \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta}}{\partial X^\gamma} \right] \quad (1.7)$$

Soit un vecteur  $\mathbf{U} = U^\alpha(\mathbf{M})\mathbf{A}_\alpha + W(\mathbf{M})\mathbf{N}$ , la différentiation de ce vecteur s'écrit :

$$d\mathbf{U} = \left( \frac{\partial U^\alpha}{\partial X^\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha U^\gamma - W \overset{\circ}{K}_{\beta}^\alpha \right) \mathbf{A}_\alpha dX^\beta + \left( \frac{\partial W}{\partial X^\beta} + \overset{\circ}{K}_{\beta\alpha} U^\alpha \right) \mathbf{N} dX^\beta \quad (1.8)$$

Ce qui permet de définir la dérivée covariante :

$$\nabla_\beta U^\alpha = \frac{\partial U^\alpha}{\partial X^\beta} + \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha U^\gamma \quad \text{et} \quad \nabla_\beta W = \frac{\partial W}{\partial X^\beta} \quad (1.9)$$

Le tenseur métrique respecte également la propriété suivante :

$$\nabla_\gamma \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.10)$$

Le tenseur  $\mathbf{K}$  est diagonalisable et ses valeurs principales sont les courbures principales au point  $\mathbf{M}$  de la surface

$$\overset{\circ}{\mathbf{K}}^2 - \text{tr}(\overset{\circ}{\mathbf{K}})\overset{\circ}{\mathbf{K}} + \det(\overset{\circ}{\mathbf{K}})\mathbf{I} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

où  $\text{tr}(\overset{\circ}{\mathbf{K}})$  représente la courbure moyenne,  $\det(\overset{\circ}{\mathbf{K}})$  la courbure de Gauss et  $\mathbf{I}$  l'identité du plan.

### 1.1.2 . Application aux coques

Une coque est définie par sa surface moyenne  $\Sigma$  et son épaisseur  $e(X^\alpha)$ . La position d'un point  $\mathbf{M}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{M}(X^\alpha, Z) = \mathbf{M}_\Sigma(X^\alpha) + Z\mathbf{N}(X^\alpha) \quad \text{où} \quad -\frac{e(X^\alpha)}{2} \leq Z \leq \frac{e(X^\alpha)}{2} \quad (1.12)$$

A  $Z$  fixé les points  $\mathbf{M}(X^\alpha, Z)$  définissent une surface notée  $\Sigma_Z$  dont les vecteurs tangents  $\mathbf{H}_\alpha$  s'écrivent :

$$\mathbf{H}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial X^\alpha} = \mathbf{A}_\alpha - Z \overset{\circ}{K}_{\alpha}^\beta \mathbf{A}_\beta = (\delta_\alpha^\beta - Z \overset{\circ}{K}_{\alpha}^\beta) \mathbf{A}_\beta = \mu_\alpha^\beta(Z) \mathbf{A}_\beta \quad , \quad \mu = \det([\mu_\alpha^\beta]) \quad (1.13)$$

où la métrique associée est donnée par :

$$G_{\alpha\beta}(Z) = \mathbf{H}_\alpha \cdot \mathbf{H}_\beta = \mu_\alpha^\gamma(Z) \overset{\circ}{G}_{\gamma\delta} \mu_\beta^\delta(Z) = \overset{\circ}{G}_{\alpha\beta} - 2Z \overset{\circ}{K}_{\alpha\beta} + Z^2 \overset{\circ}{K}_{\alpha}^\gamma \overset{\circ}{K}_{\gamma\beta} \quad (1.14)$$

$\mu$  possède les mêmes propriétés que  $\mathbf{K}$  (voir Eq. (1.11)) :

$$\mu^2 - \text{tr}(\mu)\mu + \det(\mu) \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \text{soit encore} \quad \mu^{-1} \det(\mu) = -\mu + \text{tr}(\mu) \mathbf{I} \quad (1.15)$$

Finalement l'inverse de  $\mu$  s'exprime en composantes par :

$$(\mu^{-1})_\alpha^\beta = \frac{1}{\det(\mu)} [\text{tr}(\mu)\delta_\alpha^\beta - \mu_\alpha^\beta] \quad (1.16)$$

Les variations des vecteurs de la base locale  $(\mathbf{H}_\alpha, \mathbf{N})$  deviennent :

$$\frac{\partial \mathbf{H}_\alpha}{\partial X^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda \mathbf{H}_\lambda + K_{\alpha\beta} \mathbf{N} = \left( \overset{\circ}{\Gamma}_{\gamma\beta}^\lambda \mu_\alpha^\gamma + \frac{\partial \mu_\alpha^\lambda}{\partial X^\beta} \right) \mathbf{A}_\lambda + \mu_\alpha^\gamma \overset{\circ}{K}_{\gamma\beta} \mathbf{N} \quad (1.17)$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \mu_\gamma^\lambda &= \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\gamma}^\lambda \mu_\alpha^\gamma + \frac{\partial \mu_\alpha^\lambda}{\partial X^\beta} \\ K_{\alpha\beta} &= \mu_\alpha^\gamma \overset{\circ}{K}_{\gamma\beta} \end{aligned} \quad (1.18)$$

La symétrie donnée par  $\frac{\partial \mathbf{H}_\alpha}{\partial X^\beta} = \frac{\partial \mathbf{H}_\beta}{\partial X^\alpha}$  implique la relation qui suit :

$$K_\alpha^\lambda \overset{\circ}{\Gamma}_{\beta\lambda}^\delta + \frac{\partial K_\alpha^\delta}{\partial X^\beta} = K_\beta^\lambda \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\lambda}^\delta + \frac{\partial K_\beta^\delta}{\partial X^\alpha} \quad (1.19)$$

et le tenseur métrique vérifie la propriété suivante :

$$\nabla_\gamma \mathbf{G}_{\alpha\beta} = 0 \quad (1.20)$$

Le tenseur métrique respecte également les relations classiques :

$$G(Z) = \det(G_{\alpha\beta}) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial Z} [\sqrt{G}] = -\sqrt{G} K_\alpha^\alpha \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial X^\alpha} [\sqrt{G}] = \sqrt{G} \Gamma_{\lambda\alpha}^\lambda \quad (1.21)$$

### 1.1.3 . Mouvement d'une coque, variations de métrique et de courbure

Dans le cas général, la cinématique est définie par les déplacements de chaque point de la coque. La position actuelle  $\mathbf{m}$  d'un point s'écrit alors :

$$\mathbf{m}(X^\alpha, Z) = \mathbf{M}(X^\alpha, Z) + U^\alpha(X^\alpha, Z)\mathbf{A}_\alpha + W(X^\alpha, Z)\mathbf{N} \quad (1.22)$$

Le gradient de la transformation  $\mathbf{F}$  est défini :

$$d\mathbf{m} = \mathbf{F}.d\mathbf{M} \quad \text{avec} \quad d\mathbf{M} = dX^\alpha \mathbf{H}_\alpha + dZ\mathbf{N} \quad \text{et} \quad d\mathbf{m} = dX^\alpha \mathbf{h}_\alpha + dZ \mathbf{h}_3 \quad (1.23)$$

Le gradient de la transformation s'écrit alors sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{h}_\alpha \otimes \mathbf{H}^\alpha + \mathbf{h}_3 \otimes \mathbf{N} \quad (1.24)$$

où les vecteurs de la base locale de la surface déformée sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_\alpha &= (\mu_\alpha^\beta + \nabla_\alpha U^\beta - WK_\alpha^\beta)\mathbf{A}_\beta + (\nabla_\alpha W + K_{\alpha\lambda}U^\lambda)\mathbf{N} \\ \mathbf{h}_3 &= (1 + \frac{\partial W}{\partial Z})\mathbf{N} + \frac{\partial U^\alpha}{\partial Z}\mathbf{A}_\alpha \end{aligned} \quad (1.25)$$

Le tenseur des dilatations de Cauchy  $\mathbf{C}$  est défini tel que :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (1.26)$$

$\mathbf{C}$  exprimé dans la base  $(\mathbf{H}^\alpha, \mathbf{N})$ , a pour composantes :

$$\begin{cases} C_{\alpha\beta} = \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_\beta = (\mu_\alpha^\gamma + \nabla_\alpha U^\gamma - WK_\alpha^\gamma)G_{\gamma\delta}(\mu_\beta^\delta + \nabla_\beta U^\delta - WK_\beta^\delta) + (\frac{\partial W}{\partial X^\alpha} + U^\gamma K_{\gamma\alpha})(\frac{\partial W}{\partial X^\beta} + U^\delta K_{\delta\beta}) \\ C_{\alpha 3} = \mathbf{h}_\alpha \cdot \mathbf{h}_3 = (\mu_\alpha^\gamma + \nabla_\alpha U^\gamma - WK_\alpha^\gamma)G_{\gamma\delta}\frac{\partial U^\delta}{\partial Z} + (\frac{\partial W}{\partial X^\alpha} + U^\gamma K_{\gamma\alpha})(1 + \frac{\partial W}{\partial Z}) \\ C_{33} = \mathbf{h}_3 \cdot \mathbf{h}_3 = (1 + \frac{\partial W}{\partial Z})^2 + \frac{\partial U^\alpha}{\partial Z}G_{\alpha\beta}\frac{\partial U^\beta}{\partial Z} \end{cases} \quad (1.27)$$

Dans ce transport convectif,  $\mathbf{h}_3$  est le transporté de  $\mathbf{N}$ , lequel n'est pas en général la normale  $\mathbf{n}$  de la surface moyenne transportée, qui est la quantité suivante :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2}{\|\mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2\|} \quad (1.28)$$

Soit :

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 \wedge \mathbf{h}_2 &= (\mu_1^\beta + \nabla_1 U^\beta - WK_1^\beta)(\mu_2^\gamma + \nabla_2 U^\gamma - WK_2^\gamma)\mathbf{A}_\beta \wedge \mathbf{A}_\gamma \\ &\quad + (\nabla_1 W + K_{1\lambda}U^\lambda)(\mu_2^\gamma + \nabla_2 U^\gamma - WK_2^\gamma)\mathbf{N} \wedge \mathbf{A}_\gamma \\ &\quad + (\mu_1^\beta + \nabla_1 U^\beta - WK_1^\beta)(\nabla_2 W + K_{2\lambda}U^\lambda)\mathbf{A}_\beta \wedge \mathbf{N} \end{aligned} \quad (1.29)$$

Pour que  $\mathbf{h}_3$  soit la normale  $\mathbf{n}$  à la surface déformée, il est nécessaire d'annuler la distorsion  $C_{\alpha 3}$ , au premier ordre en déplacement, qui représente l'hypothèse de Love-Kirchhoff :

$$(\overset{\circ}{G}_{\alpha\delta} - ZK_{\alpha\delta})\frac{\partial U^\delta}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X^\alpha} + K_{\alpha\gamma}U^\gamma = 0 \quad (1.30)$$

soit en  $Z = 0$  :

$$\overset{\circ}{G}_{\alpha\delta}\frac{\partial U^\delta}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial X^\alpha} + K_{\alpha\gamma}U^\gamma = 0 \quad (1.31)$$

En théorie des coques, les champs de déplacements sont souvent développés suivant  $Z$  tels que :

$$U^\alpha = U_o^\alpha + ZU_1^\alpha \quad ; \quad W = W_o + ZW_1 \quad (1.32)$$

La relation de Love-Kirchhoff, au premier ordre en déplacement, donnée dans l'Eq. (1.31) devient :

$$\overset{\circ}{G}_{\alpha\delta}U_1^\delta + \frac{\partial W_o}{\partial X^\alpha} + K_{\alpha\lambda}U_o^\lambda = 0 \quad (1.33)$$

De plus le vecteur normal s'écrit :

$$\mathbf{n} = (\mathbf{N} - (\nabla_\alpha W_o + K_{\alpha\lambda}U_o^\lambda)\mathbf{A}^\alpha) / \|\cdot\| \quad (1.34)$$

D'autre part la variation d'épaisseur, au premier ordre en déplacement, étant supposée nulle, cela implique que  $W_1 = 0$ .

Dans ce cas, en linéarisant la métrique au premier ordre en déplacement et au premier ordre en  $Z$ , la relation suivante est obtenue :

$$C_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}(Z=0) + 2ZB_{\alpha\beta} \quad (1.35)$$

où  $B_{\alpha\beta}$  est le tenseur de courbure de la surface moyenne transportée :

$$B_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta} + K_{\alpha\delta}(\nabla_\beta U_o^\delta - W_o K_\beta^\delta) + \nabla_\beta [\nabla_\alpha W_o + K_{\alpha\lambda}U_o^\lambda] \quad (1.36)$$

De fait,  $(U_o^\alpha, W_o)$  représente le mouvement de la surface moyenne. Ainsi un point de la coque est défini par :

$$\mathbf{m}(X^\alpha, Z) = \mathbf{m}_o(X^\alpha) + Z\mathbf{n} \quad (1.37)$$

Le vecteur matériel transporté devient :

$$d\mathbf{m} = dX^\alpha \mathbf{h}_\alpha + dZ\mathbf{n} = dX^\alpha (\delta_\alpha^\beta - ZB_\alpha^\beta) \mathbf{a}_\beta + dZ\mathbf{n} \quad (1.38)$$

où  $\mathbf{a}_\beta$  sont les vecteurs tangents à la surface moyenne déformée.

Ainsi il apparaît :

$$\mathbf{h}_\alpha = (\delta_\alpha^\beta - ZB_\alpha^\beta) \mathbf{a}_\beta \quad \text{et} \quad C_{\alpha\beta}(Z) = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta - 2ZB_{\alpha\beta} + Z^2 B_\alpha^\gamma B_{\beta\gamma} \quad (1.39)$$

La variation de la métrique exprimée dans la base  $(\mathbf{H}^\alpha, \mathbf{N})$  se décompose alors en un terme de déformation membranaire  $E_{\alpha\beta}^m$  et un terme de variation de courbure  $b_{\alpha\beta}$  :

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta}^m &= \frac{1}{2}(C_{\alpha\beta} - G_{\alpha\beta}) \\ b_{\alpha\beta} &= B_{\alpha\beta} - K_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (1.40)$$

Le tenseur des déformations  $\mathbf{E}$  s'écrit alors :

$$\mathbf{E} = [E_{\alpha\beta}^m - 2Zb_{\alpha\beta}] \mathbf{H}^\alpha \otimes \mathbf{H}^\beta \quad (1.41)$$

En utilisant la relation  $\mathbf{H}^\alpha = (\mu^{-1})_\beta^\alpha \mathbf{A}^\beta$ , le tenseur peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} = [E_{\alpha\beta}^m - 2Zk_{\alpha\beta}] \mathbf{A}^\alpha \otimes \mathbf{A}^\beta \quad (1.42)$$

En identifiant terme à terme, la relation entre les différentes courbures est donnée par :

$$2k_{\alpha\beta} = 2b_{\alpha\beta} - \left[ \overset{\circ}{K}_\alpha^\lambda E_{\lambda\beta}^m + \overset{\circ}{K}_\beta^\lambda E_{\alpha\lambda}^m \right] \quad (1.43)$$

Deux choix de variations de courbures sont possibles [13, 35], associés au mouvement de la coque. Dans ce manuscrit, la variation de courbure  $k_{\alpha\beta}$  qui correspond à la variation de la métrique de la cote  $Z$  est utilisée.

#### 1.1.4 . Écriture des équations d'équilibre

La variation du gradient de la transformation pour toute variation du champ de déplacement sur la configuration actuelle est exprimée telle que :

$$\delta\mathbf{F} = (\nabla_\alpha \delta U^\beta - \delta W K_\alpha^\beta) \mathbf{A}_\beta \otimes \mathbf{H}^\alpha + \left( \frac{\partial \delta W}{\partial X^\alpha} + \delta U^\gamma K_{\gamma\alpha} \right) \mathbf{N} \otimes \mathbf{H}^\alpha + \frac{\partial \delta U^\alpha}{\partial Z} \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{N} + \frac{\partial \delta W}{\partial Z} \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (1.44)$$

Ces variations sont utiles pour exprimer le principe des puissances virtuelles.

Dans cette partie le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) est appliqué afin d'obtenir les équations d'équilibre. Le Principe des Puissances Virtuelles, en statique, s'énonce comme suit :

$$\mathcal{P}_{ext} + \mathcal{P}_{int} = 0 \quad (1.45)$$

La puissance des efforts intérieurs s'exprime sous la forme de :

$$\mathcal{P}_{int} = - \int_{\Omega_o} \boldsymbol{\theta} : \delta \mathbf{F} \, d\Omega_o = - \int_{\Omega_o} \frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi} : \delta \mathbf{C} \, d\Omega_o = - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \frac{1}{2} (\mathbf{grad} \delta \mathbf{u} + \mathbf{grad} \delta \mathbf{u}^T) \, d\Omega_t \quad (1.46)$$

Où  $\boldsymbol{\theta}$  est le tenseur des contraintes nominales,  $\boldsymbol{\Pi}$  le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de seconde espèce et  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy. Il existe également le tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff de première espèce noté  $\mathbf{P}$ . Les variations  $\delta \mathbf{F}$ ,  $\delta \mathbf{C}$  et  $\mathbf{grad}(\delta \mathbf{u})$  sont réciproquement les variations du gradient de la transformation, du tenseur des dilatations de Cauchy et du gradient du déplacement.

Ces tenseurs sont reliés par les relations suivantes :

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{P}^T = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Pi} \cdot \mathbf{F}^T \quad \text{où } J = \det(\mathbf{F}) \quad (1.47)$$

Les équations d'équilibre sont exprimées à l'aide des contraintes nominales, en notant  $p = \boldsymbol{\theta} : \delta \mathbf{F}$ .  $p$  s'exprime alors :

$$p = \theta_{\beta}^{\alpha} (\nabla_{\alpha} \delta U^{\beta} - \delta W K_{\alpha}^{\beta}) + \theta_3^{\alpha} \left( \frac{\partial \delta W}{\partial X^{\alpha}} + \delta U^{\lambda} K_{\alpha \lambda} \right) + \theta_{\alpha}^3 \frac{\partial \delta U^{\alpha}}{\partial Z} + \theta_3^3 \frac{\partial W}{\partial Z} \quad (1.48)$$

où le tenseur des contraintes nominales,  $\boldsymbol{\theta}$ , est défini par :

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_{\beta}^{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha} \otimes \mathbf{A}^{\beta} + \theta_{\alpha}^3 \mathbf{N} \otimes \mathbf{A}^{\alpha} + \theta_3^{\alpha} \mathbf{H}_{\alpha} \otimes \mathbf{N} + \theta_3^3 \mathbf{N} \otimes \mathbf{N} \quad (1.49)$$

La puissance des efforts extérieurs est définie comme suit :

$$\mathcal{P}_{ext} = \int_{\partial \Omega_T} \mathbf{T} \cdot (\delta U^{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} + \delta W \mathbf{N}) \, d\Omega_T \quad \text{où } d\Omega_T \text{ représente la surface sur laquelle l'effort est appliqué.} \quad (1.50)$$

Le PPV, par unité de volume  $gdZdX^1dX^2$  où  $g = \mu\sqrt{G}$ , s'écrit alors :

$$- \int_{\Omega} pgdX^1dX^2dZ + \int_{\partial \Omega_T} \mathbf{T} \cdot (\delta U^{\alpha} \mathbf{A}_{\alpha} + \delta W \mathbf{N}) \, d\Omega_T = 0 \quad (1.51)$$

Les équations d'équilibre dans le volume s'expriment comme :

$$\begin{cases} \delta U^{\lambda} & : -\frac{\partial}{\partial X^{\alpha}} (g\theta_{\lambda}^{\alpha}) + g\theta_{\beta}^{\alpha} \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha \lambda}^{\beta} + g\theta_3^{\alpha} K_{\alpha \lambda} - \frac{\partial}{\partial Z} (g\theta_{\lambda}^3) = 0 \\ \delta W & : -g\theta_{\beta}^{\gamma} K_{\gamma}^{\beta} - \frac{\partial}{\partial X^{\alpha}} (\theta_3^{\alpha} g) - \frac{\partial}{\partial Z} (g\theta_3^3) = 0 \end{cases} \quad (1.52)$$

Et les conditions aux limites sur  $\partial \Omega_T$  s'écrivent :

$$\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{A}_{\alpha} & = \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}_{\alpha} \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{N} & = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \end{cases} \quad (1.53)$$

**Remarque 1** : Les équations d'équilibre dans le volume expriment la divergence du tenseur  $\boldsymbol{\theta}^T$ .

**Remarque 2** : En théorie des coques, compte tenu du développement en  $Z$ , il faut intégrer suivant l'épaisseur et il est donc commode de remplacer  $\mathbf{H}^{\alpha}$  par  $(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} \mathbf{A}^{\beta}$ .

Les relations d'équilibre dans le cas le plus général ont été déterminées.

Cependant, pour la modélisation du tube, on recherche un modèle pour lequel toutes les quantités ne sont fonctions que

de l'abscisse curviligne  $s$ . Cherchant à reproduire des sections déformables, les modèles classiques de poutre, comme ceux d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko, sont enrichis avec une cinématique de coque, de type Love-Kirchhoff ou Mindlin-Reissner.

Un tuyau est assimilable à un modèle à une dimension portée par son axe. Pour réduire le modèle à cette unique dimension, il convient de développer les variables cinématiques ( $U^\alpha, W$ ) comme des polynômes de  $Z$  dont les coefficients dépendent de  $s$  et de  $\theta$ , puis de développer ces coefficients en séries de Fourier selon  $\theta$ , afin d'obtenir in fine des coefficients ne dépendant que de  $s$ .

## 1.2 . Développement polynomial en $Z$ et en séries de Fourier en $\theta$ de la cinématique tridimensionnelle

Dans un premier temps, on considère un tube droit pour lequel on développe la cinématique précédemment proposée.

### 1.2.1 . Cinématique et tenseur des déformations

Un tube droit orienté le long de l'axe  $\mathbf{E}_X$ , de longueur  $L$ , de rayon moyen  $a$  et d'épaisseur  $e$  est considéré (voir Fig. (1.1)). Les coordonnées axiale, circonférentielle et radiale sont décrites par  $(X, \theta, Z)$ , respectivement.

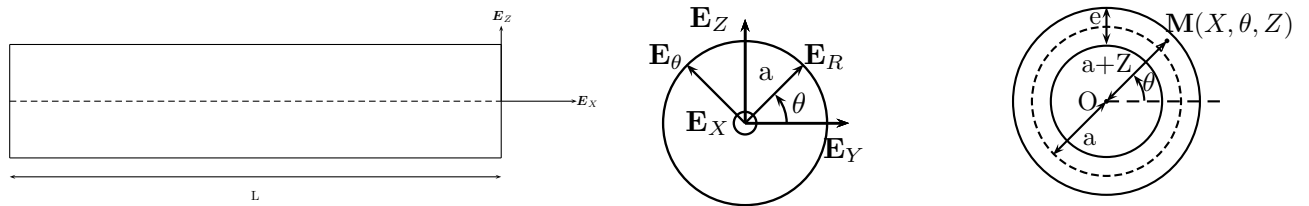


Figure 1.1 - Schéma d'une tuyauterie droite : vue plane (gauche), vue transversale (centre et droite)

La cinématique du tube est décomposée en deux contributions : une partie de type poutre et une partie de type coque. Le déplacement de poutre, qui correspond à un mouvement de corps rigide de la section, est scindé en deux parties :

- les mouvements de translation  $U_o(X)$ ,  $W_o(X)$  et  $V_o(X)$  exprimés dans la base  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y, \mathbf{E}_Z)$ ,
- les rotations de la section droite  $\mathbf{R}(X)$  définies en chaque point de l'axe.

Ensuite, la cinématique de type coque est décrite par  $u(X, \theta, Z)$ ,  $w(X, \theta, Z)$  et  $v(X, \theta, Z)$  exprimés dans la base  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$ , où  $-\frac{e}{2} \leq Z \leq \frac{e}{2}$  (voir Figs. (1.2) & (1.3)). Ces déplacements représentent respectivement le gauchissement (représenté par  $u$ ) et l'ovalisation (représentée par  $v$  et  $w$ ) de la section déformée (voir Figs. (1.2) & (1.4)).

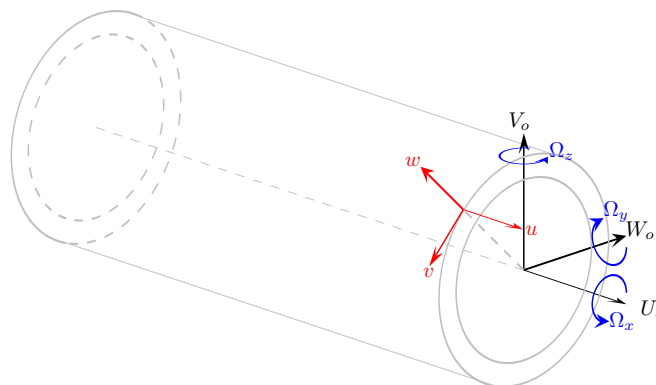


Figure 1.2 - Déplacements de poutre et de coque

Pour simplifier la présentation, le mouvement du tube est considéré plan i.e.  $W_o = 0$  et  $\Omega_x = \Omega_z = 0$  (voir Figs. (1.3))

& (1.4)). Le lecteur intéressé par la modélisation tridimensionnelle complète peut se référer à l'annexe B (page 122). La cinématique dans le plan s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{M} + \mathbf{u} \quad \text{où} \quad \mathbf{M} = X\mathbf{E}_X + (a + Z)\mathbf{E}_R \\ \text{et} \quad \mathbf{u} &= (U_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_y + u)\mathbf{E}_X + (V_o \sin \theta + w)\mathbf{E}_R + (V_o \cos \theta + v)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (1.54)$$

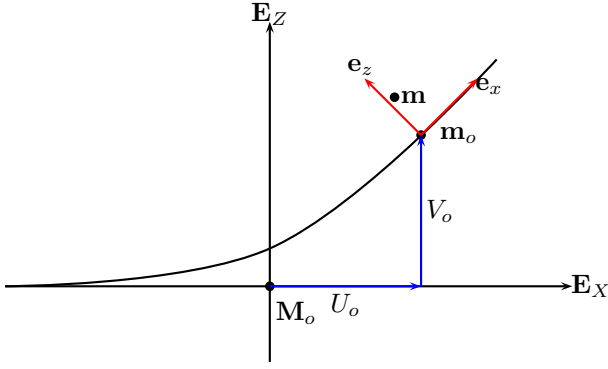


Figure 1.3 - Mouvement plan de poutre

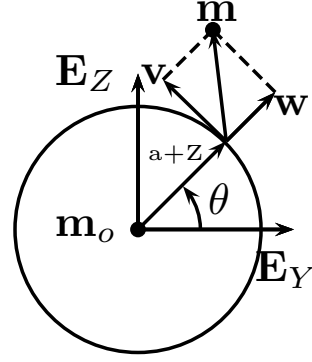


Figure 1.4 - Déplacement de type-coque dans la section

Concernant la cinématique de type coque, la surface moyenne de la coque à la côte  $Z = 0$  est choisie comme surface de référence et les rotations locales par rapport à cette surface sont supposées petites. En conséquence, sous l'hypothèse des petites rotations, la cinématique de coque peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{u}(X, \theta, Z) = \mathbf{u}_o(X, \theta) + \phi(X, \theta) \wedge \mathbf{AM}(Z) \quad (1.55)$$

où dans la base  $(\mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_X)$  :

$$\mathbf{u}(X, \theta, Z) = \begin{pmatrix} w(X, \theta, Z) \\ v(X, \theta, Z) \\ u(X, \theta, Z) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{u}_o(X, \theta) = \begin{pmatrix} w_o(X, \theta) \\ v_o(X, \theta) \\ u_o(X, \theta) \end{pmatrix}; \quad \phi(X, \theta) = \begin{pmatrix} \phi_z(X, \theta) \\ \phi_\theta(X, \theta) \\ \phi_X(X, \theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{AM}(Z) = \begin{pmatrix} Z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.56)$$

$\mathbf{u}_o(X, \theta)$  représente le déplacement de la surface moyenne (i.e. en  $Z = 0$ ),  $\phi(X, \theta)$  la rotation de la surface moyenne et  $\mathbf{A}$  est la projection radiale du point  $\mathbf{M}$  sur la surface moyenne.

Pour plus de clarté dans les notations, on note  $u_1 = \phi_\theta$  et  $v_1 = \phi_X$  qui représentent respectivement les rotations de la normale à la surface moyenne autour de l'axe  $\mathbf{E}_\theta$  et  $\mathbf{E}_X$ . La cinématique de coque est développée classiquement au premier ordre [5, 60] ce qui conduit au champ de déplacement suivant :

$$\begin{aligned} w(X, \theta, Z) &= w_0(X, \theta) \\ v(X, \theta, Z) &= v_0(X, \theta) + Zv_1(X, \theta) \\ u(X, \theta, Z) &= u_0(X, \theta) - Zu_1(X, \theta) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Le tenseur des déformations est exprimé dans l'annexe A (page 117) dans l'Eq. (A.13). Les composantes linéaires non nulles de déformations membranaires sont :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^m &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial u_o}{\partial X} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^m &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right) \\ 2\varepsilon_{x\theta}^m &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial X} \end{aligned} \quad (1.58)$$



et les termes linéaires de courbure vérifient :

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= -\sin\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} \\
k_{\theta\theta} &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\
2k_{x\theta} &= -\frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{\partial v_o}{\partial X} \right)
\end{aligned} \tag{1.59}$$

Il est à noter que les termes de type coque pour la partie membranaire et pour la courbure correspondent exactement à ceux obtenus par Flügge [35]. Une brève synthèse des différentes théories des coques se trouve dans [105] où il est montré que les différentes contributions s'accordent sur la partie membranaire. Cependant, différentes expressions de la courbure sont obtenues, dépendant fortement des hypothèses prises en amont. Par exemple, les termes de courbure de type coque adoptés dans Ohtsubo et Watanabe [75], Kanarachos [50], Millard et Roche [69], Berton [13] ou dans Weicker *et al.* [105] sont différents de la modélisation présentée dans cette thèse et correspondent à ceux développés par Timoshenko [99].

### 1.2.2 . Développement en séries de Fourier

La cinématique de la section peut être développée en séries de Fourier incomplètes comme dans [108, 69, 36, 63, 9, 66, 111, 2] pour des sections circulaires. Les déplacements longitudinaux, tangentiels et radiaux de la surface moyenne, i.e.  $u_o$ ,  $v_o$  et  $w_o$ , sont ici tous développés en séries de Fourier :

$$\begin{aligned}
u_o(X, \theta) &= u_o^c(X) + u_1^c(X) \cos\theta + u_1^s(X) \sin\theta + \sum_{i=2}^{N_f} u_i^c(X) \cos(i\theta) + u_i^s(X) \sin(i\theta) \\
v_o(X, \theta) &= v_o^c(X) + v_1^c(X) \cos\theta + v_1^s(X) \sin\theta + \sum_{i=2}^{N_f} v_i^c(X) \cos(i\theta) + v_i^s(X) \sin(i\theta) \\
w_o(X, \theta) &= w_o^c(X) + w_1^c(X) \cos\theta + w_1^s(X) \sin\theta + \sum_{i=2}^{N_f} w_i^c(X) \cos(i\theta) + w_i^s(X) \sin(i\theta)
\end{aligned} \tag{1.60}$$

$N_f$  représente le nombre de ces modes de Fourier considéré dans le développement. Les coefficients,  $u_i^c(X)$ ,  $u_i^s(X)$ ,  $v_i^c(X)$ ,  $v_i^s(X)$ ,  $w_i^c(X)$  et  $w_i^s(X)$ , de ces séries sont désormais les nouvelles inconnues qui ne dépendent que de la variable longitudinale  $X$ . L'index  $c$  représente les coefficients en cosinus alors que l'index  $s$  les coefficients en sinus.

Les coefficients dans le développement qui produisent un mouvement de corps rigide sont annulés afin d'éviter les redondances avec les degrés de liberté de poutre. En conséquence,  $u_o^c$  correspondant à un mouvement de translation axiale de corps rigide est pris égal à zéro.

De manière similaire  $u_1^c$ ,  $u_1^s$  et  $v_o^c$  sont aussi pris nuls car ces termes correspondent à une rotation de corps rigide autour des axes  $\mathbf{E}_Z$ ,  $\mathbf{E}_Y$  et  $\mathbf{E}_X$ , respectivement.

De plus, le coefficient en  $\cos\theta$  dans le développement de  $v_o$  est fixé comme l'opposé du coefficient en  $\sin\theta$  dans le développement en  $w_o$ , i.e.  $v_1^c(X) = -w_1^s(X)$ . Cette relation permet d'éviter un mouvement de corps rigide de la section dans la direction  $\mathbf{E}_Z$  [53] à travers l'intégration de la variable tangentielle  $\theta$ .

De la même façon le coefficient en  $\sin\theta$  dans le développement de  $v_o$  est pris égal au coefficient en  $\cos\theta$  dans le développement en  $w_o$ , i.e.  $v_1^s(X) = w_1^c(X)$  afin d'éviter un mouvement de corps rigide dans la direction  $\mathbf{E}_Y$ .

Pour les termes d'ordre supérieur, i.e. supérieur ou égal à deux, une hypothèse d'inextensibilité de la section est prise en considération. Ceci implique donc que le périmètre de la section reste inchangé voir [15, 51, 13, 16]. En d'autres termes, la déformation membranaire circonférentielle est nulle, i.e.  $\forall i \geq 2 (\varepsilon_i^m)_{\theta\theta} = 0$ .

$$\forall i \geq 2 (\varepsilon_i^m)_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right)_i = 0 \text{ soit } v_i^s \frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(i\theta)] = -w_i^c \cos(i\theta) \text{ et } v_i^c \frac{\partial}{\partial \theta} [\cos(i\theta)] = -w_i^s \sin(i\theta) \tag{1.61}$$

Finalement les déplacements de type coque s'écrivent :

$$\begin{aligned}
u_o(X, \theta) &= \sum_{i=2}^{N_f} (u_i^c(X) \cos(i\theta) + u_i^s(X) \sin(i\theta)) \\
v_o(X, \theta) &= -w_1^s(X) \cos(\theta) + w_1^c(X) \sin(\theta) + \sum_{i=2}^{N_f} \left( \frac{1}{i} w_i^s(X) \cos(i\theta) - \frac{1}{i} w_i^c(X) \sin(i\theta) \right) \\
w_o(X, \theta) &= w_o^c(X) + w_1^c(X) \cos(\theta) + w_1^s(X) \sin(\theta) + \sum_{i=2}^{N_f} (w_i^c(X) \cos(i\theta) + w_i^s(X) \sin(i\theta))
\end{aligned} \tag{1.62}$$

Le terme  $w_o^c(X)$  représente l'extensibilité radiale de la section. Les termes  $w_1^c(X)$  et  $w_1^s(X)$  sont associés de façon à faire disparaître les termes associés aux déplacements latéraux de corps rigide. Les termes  $w_i^c(X)$  et  $w_i^s(X)$  pour  $i \geq 2$  représentent les déplacements de la section transverse : les termes du second ordre, i.e.  $w_2^c(X)$  et  $w_2^s(X)$  représentent l'ovalisation de la section alors que les termes d'ordre supérieurs représentent des modes supérieurs de distorsion de la section. Enfin, les termes  $u_i^c(X)$  et  $u_i^s(X)$  pour  $i \geq 2$  représentent le gauchissement de la section.

Ainsi, le champ de déplacement est donné par :

$$\mathbf{U} = (U_o + u + (a + Z) \sin \theta \Omega_y) \mathbf{E}_X + (V_o \sin \theta + w) \mathbf{E}_R + (V_o \cos \theta + v) \mathbf{E}_\theta \tag{1.63}$$

où la rotation de poutre sous l'hypothèse d'Euler-Bernoulli vérifie :

$$\Omega_y = -\frac{\partial V_o}{\partial X}$$

et le champ de déplacement de type coque est fourni par :

$$\begin{aligned}
w &= w_0 \\
v &= v_0 + Z v_1 \\
u &= u_0 - Z u_1
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Les déplacements membranaires,  $u_0$ ,  $v_0$  et  $w_0$  sont exprimés dans l'Eq. (1.62) et avec les relations suivantes dues à l'hypothèse de Love-Kirchhoff :

$$u_1 = \frac{\partial w_0}{\partial X} \quad \text{et} \quad v_1 = -\frac{1}{a} \left( 2w_1^s \cos \theta - 2w_1^c \sin \theta + \sum_{i=2}^{N_f} \frac{i^2 - 1}{i} (w_i^s \cos(i\theta) - w_i^c \sin(i\theta)) \right) \tag{1.65}$$

### 1.2.3 . Principe des puissances virtuelles en statique appliqué au tube

Les équations d'équilibre peuvent être obtenues en appliquant le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) qui exprime l'équilibre entre les forces externes et internes en statique :

$$\mathcal{P}_e(\delta \mathbf{v}^*) + \mathcal{P}_i(\delta \mathbf{v}^*) = 0 \quad \text{où } \delta \mathbf{v}^* \text{ est un mouvement de vitesse virtuelle.} \tag{1.66}$$

où  $\mathcal{P}_e$  et  $\mathcal{P}_i$  représentent la puissance des efforts externes et internes respectivement.

Pour tout mouvement de vitesse virtuelle rigidifiant :  $\mathcal{P}_i(\delta \mathbf{v}^*) = 0$ .

La puissance des forces extérieures (sans considérer les forces de volumes) est définie telle que :

$$\mathcal{P}_e = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}^* \, d\partial\Omega \tag{1.67}$$

$\mathbf{T}$  est le vecteur des forces appliquées aux limites. Le bord du solide est décomposée en deux surfaces latérales  $S_o$  et  $S_L$  où  $dS = (a + Z)d\theta \, dZ$  que des peaux interne et externe du tube  $A^-$  et  $A^+$  où  $dA^\pm = (a \pm e/2)d\theta dX$  comme indiqué sur la Fig. (1.5).

Finalement la puissance des efforts intérieurs est donnée par :

$$\mathcal{P}_i = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}^*) \, d\Omega \tag{1.68}$$

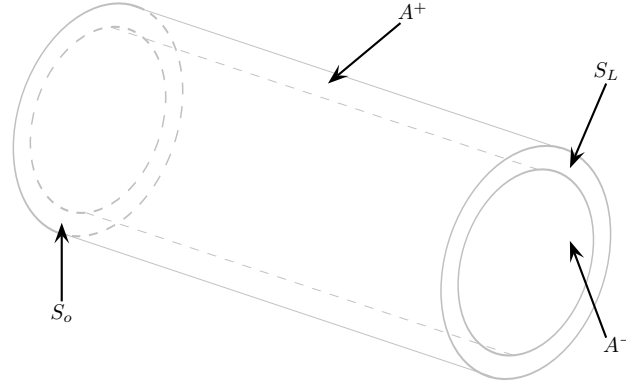


Figure 1.5 – Surfaces du tube

où  $\sigma$  est le tenseur de Cauchy et  $\delta\varepsilon$  le tenseur des déformations virtuel. En utilisant la géométrie cylindrique du tube l'expression de la puissance interne devient :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^L \left( \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \sigma : \varepsilon(\delta \mathbf{v}^*) (a + Z) d\theta dZ \right) dX \quad (1.69)$$

Pour ne pas alourdir les notations, les intégrales sur la surface sont notées :

$$\int_S = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \quad (1.70)$$

Sous l'hypothèse des coques minces, i.e. le rayon est très grand devant l'épaisseur, les intégrations volumiques sont faites en considérant le volume  $a d\theta dZ dX$  plutôt que  $(a + Z) d\theta dZ dX$ . Sous cette hypothèse, il n'y a pas de couplage entre les termes de membrane et ceux de courbure.

Dans la suite de ce chapitre, le PPV sera appliqué en considérant indépendamment le mode 0 puis le mode 2. Les équations d'équilibre ainsi que les efforts généralisés associés en découlent naturellement.

#### 1.2.4 . Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan

Seul le mode 0 (i.e.  $N_f = 0$ ) est considéré, il correspond au gonflement uniforme de la tuyauterie. Par conséquent, la cinématique de coque est portée seulement par  $w_o$  (i.e.  $u_o = v_o = 0$ ). Les composantes non nulles du tenseur des déformations de l'Eq. (1.58) se réduisent aux termes suivants :

$$w_o(X, \theta) = w_o^c(X) ; \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + Z \left( -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial X^2} \right) ; \varepsilon_{\theta\theta} = \left( \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} \right) w_o^c \quad (1.71)$$

La puissance des forces intérieures peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^L \left( \int_S \sigma : \varepsilon(\delta \mathbf{v}^*) a d\theta dZ \right) dX = - \int_0^L \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y \left( -\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2} \right) + n_o^c \delta w_o^c + m_o^c \frac{\partial^2 \delta w_o^c}{\partial X^2} \right) dX \quad (1.72)$$

Les efforts généralisés sont définis tels que :

$$\begin{aligned} N &= \int_S \sigma_{xx} a d\theta dZ ; & M_y &= \int_S \sigma_{xx} (a + Z) \sin \theta a d\theta dZ \\ n_o^c &= \int_S \sigma_{\theta\theta} d\theta dZ ; & m_o^c &= - \int_S \sigma_{xx} Z a d\theta dZ \end{aligned} \quad (1.73)$$

Dans le cas des coques minces, les termes en  $e^3$  sont négligeables et l'inertie de la section se réduit à :  $I_y = \pi a^3 e$

Sans prendre en compte les efforts extérieurs latéraux et volumiques, le principe des puissances virtuelles donnent les équations de la statique :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 m_o^c}{\partial X^2} + n_o^c = 0 \quad (1.74)$$

### Loi de comportement

La relation de contrainte-déformation est une loi de comportement linéaire élastique isotrope en contraintes planes (i.e.  $\sigma_{zz} = \sigma_{xz} = \sigma_{\theta z} = 0$ ) :

$$\boldsymbol{\sigma} = D [\nu \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I} + (1 - \nu) \boldsymbol{\varepsilon}] \quad \text{où } D = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (1.75)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson et  $E$  le module de Young du matériau choisi.

En considérant cette loi, les efforts généralisés deviennent :

$$\begin{aligned} N &= DS \left( \frac{\partial U_o}{\partial X} + \nu \frac{w_o^c}{a} \right) ; \quad M_y = DI_y \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right) \quad \text{où } S = 2\pi a e \quad \text{et } I_y = \pi a^3 e \\ n_o^c &= D \frac{S}{a} \left( \nu \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{w_o^c}{a} \right) ; \quad m_o^c = DS \frac{e^2}{12} \left[ \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial X^2} + \nu \frac{w_o^c}{a^2} \right] \end{aligned} \quad (1.76)$$

Dans les efforts généralisés, on retrouve :

- la flexion classique d'une poutre,
- un effort normal qui contient l'effet de Poisson (ce que ne prévoit pas la théorie classique des poutres),
- et des efforts locaux dus à la déformation de la coque.

Le choix proposé de décomposer la cinématique en cinématique de poutre et cinématique de coque, constitue une approche originale de la cinématique. Cette approche permet de séparer dans les modélisations futures les parties non linéaires globales de type poutre, plus locales de type coque, voire d'introduire un couplage entre modèle poutre et coque. Nous allons montrer que pour modéliser l'ovalisation de la section au sens de Brazier, cette dernière voie est nécessaire.

#### 1.2.5 . Ovalisation liée au 2<sup>nd</sup> mode dans le plan

Le second mode de Fourier, correspondant à l'ovalisation, est maintenant étudié (i.e.  $N_f = 2$ ). L'hypothèse d'inextensibilité est prise en considération (voir Eq. (1.61)) comme c'est le cas dans [15, 13, 69].

En conséquence, la cinématique de type coque s'écrit :

$$u_o(X, \theta) = 0 ; \quad w_o(X, \theta) = w_2^c(X) \cos(2\theta) ; \quad v_o(X, \theta) = -\frac{1}{2} w_2^c(X) \sin(2\theta) \quad (1.77)$$

Le tenseur des déformations donné dans l'Eq. (1.58) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_2^c}{\partial X^2} \cos(2\theta) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= Z \left[ \frac{3}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \right] \\ 2\varepsilon_{x\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) + Z \left[ \frac{3}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) \right] \end{aligned} \quad (1.78)$$

Les termes de courbures de coques sont supposés petits devant les termes de membrane. De manière similaire à ce qui est fait dans [69, 13],  $k_{xx}^c$  et  $k_{x\theta}^c$  sont négligés et le tenseur des déformations devient :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= Z \left[ \frac{3}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \right] \\ 2\varepsilon_{x\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (1.79)$$

Comme précédemment les intégrations sont faites sur le volume  $a d\theta dZ dX$ .

La puissance des efforts intérieurs donnent les expressions suivantes :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^L \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y \left( -\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2} \right) + n_2^c \delta w_2^c + t_2^c \frac{\partial \delta w_2^c}{\partial X} \right) dX \quad (1.80)$$

où les efforts généralisés sont définis tels que :

$$\begin{aligned}
N &= \int_S \sigma_{xx} a d\theta dZ \\
M_y &= \int_S \sigma_{xx} (a + Z) \sin \theta a d\theta dZ \\
n_2^c &= \int_S \sigma_{\theta\theta} Z \frac{3}{a^2} \cos(2\theta) a d\theta dZ \\
t_2^c &= \int_S -\sigma_{x\theta} \frac{1}{2} \sin(2\theta) a d\theta dZ
\end{aligned} \tag{1.81}$$

L'inertie de la section  $I_y$  vaut rigoureusement :  $I_y = \pi \left( a^3 e + a \frac{e^3}{12} \right)$  en intégrant par rapport à  $a d\theta dZ dX$ . Dans le cas des coques minces et pour simplifier son expression l'inertie est prise égale à :  $I_y = \pi a^3 e$ .

**Remarque** : En intégrant selon le volume  $(a + Z)d\theta dZ dX$  et en gardant tous les termes, l'inertie classique d'un tube circulaire est retrouvée :  $I_y = \pi \left( a^3 e + a \frac{e^3}{4} \right)$ .

D'une manière similaire, les équations d'équilibre en statique sont obtenues :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial t_2^c}{\partial X} - n_2^c = 0 \tag{1.82}$$

Avec la loi de comportement en contraintes planes, les efforts généralisés deviennent :

$$\begin{aligned}
N &= DS \frac{\partial U_o}{\partial X} \quad ; \quad M_y = -DI_y \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \\
n_2^c &= D \frac{3\pi e^3}{4a^3} w_2^c \quad ; \quad t_2^c = G \frac{S}{8} \frac{\partial w_2^c}{\partial X}
\end{aligned} \tag{1.83}$$

Les efforts généralisés de coque sont découplés des degrés de liberté de poutre et réciproquement. Dans le cas d'une flexion pure, la résolution de l'équilibre  $n_2^c = 0$  implique un déplacement d'ovalisation  $w_2^c$  nul.

### 1.3 . Solutions analytiques tridimensionnelles

Dans cette partie, les solutions analytiques tridimensionnelles classiques sont comparées à la modélisation de poutre enrichie proposée. L'objectif est d'évaluer la pertinence des hypothèses retenues dans le modèle présenté ici et de l'enrichir si nécessaire.

Pour ce faire, un tube droit de longueur  $L$ , de rayon moyen  $a$  et d'épaisseur  $e$  est soumis à une extension simple, une pression interne et une flexion pure.

#### 1.3.1 . Extension simple tridimensionnelle

Le tube est soumis à une extension simple, i.e. un déplacement de  $\pm \frac{u_D}{2}$  est imposé à chacune de ces extrémités. Le champ de déplacement tridimensionnel  $(u_x, u_r, u_\theta)$  définit dans le repère  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$  est à déterminer.

D'après Salençon [92], le champs de déplacement s'écrit :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{E} \begin{pmatrix} X \\ -\nu(a + Z) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.84}$$

Les conditions aux limites :  $u_x(0, 0, 0) = -\frac{u_D}{2}$  et  $u_x(0, 0, L) = \frac{u_D}{2}$  permettent d'obtenir le déplacement solution :

$$u_x = \frac{u_D}{L} \left( X - \frac{L}{2} \right) \quad ; \quad u_r = -\nu \frac{u_D}{L} (a + Z) \quad ; \quad u_\theta = 0 \tag{1.85}$$

Le déplacement longitudinal est ainsi linéaire en  $X$  et le déplacement radial est quant à lui linéaire en  $Z$ . L'élongation du tube crée une restriction purement radiale (i.e.  $u_r \neq 0$  et  $u_\theta = 0$ ) pilotée par le coefficient de Poisson  $\nu$ . Le modèle de poutre enrichi développé ici est en mesure de capter ce phénomène car dans l'Eq. (1.76), le couplage entre l'effort axial et la restriction de la section est bien présent.

### 1.3.2 . Cylindre sous pression interne

Le tube est désormais soumis à une pression interne  $P_{rint}$ . Sous ce chargement le tube droit à tendance à se déformer radialement (i.e. se gonfler). D'après Salençon [92], le déplacement radial s'exprime comme :

$$u_r(r) = \left(\frac{1-\nu}{E}\right) \frac{P_{rint} \left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2ae} r + \left(\frac{1+\nu}{E}\right) \frac{P_{rint} \left(a - \frac{e}{2}\right)^2 \left(a + \frac{e}{2}\right)^2}{2ae} \frac{1}{r} \quad \text{où } r \in \left[a - \frac{e}{2}, a + \frac{e}{2}\right] \quad (1.86)$$

L'évaluation de  $u_r$  en  $r = a$  mène à :

$$u_r(a) = \frac{P_{rint}}{E} \frac{\left(a - \frac{e}{2}\right)^2}{2e} \left(1 - \nu + (1 + \nu) \frac{\left(a + \frac{e}{2}\right)^2}{a^2}\right) \quad (1.87)$$

En considérant l'hypothèse des coques-minces (i.e.  $e \ll a$ ), le déplacement radial sous l'effet de la pression interne est donné par :

$$u_r(a) = \frac{P_{rint} a^2}{E e} \quad (1.88)$$

La tuyauterie subit une extension radiale sous l'effet de la pression interne et plus l'épaisseur est faible devant le rayon plus ce déplacement est important. De nouveau ce chargement peut être représenté par le modèle de poutre enrichi développé ici.

### 1.3.3 . Flexion pure tridimensionnelle

Pour ce troisième cas de chargement, le cas d'une tuyauterie en flexion pure est étudié. Le champ de déplacement tridimensionnel  $(u_x, u_r, u_\theta)$  défini dans le repère  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$  est à déterminer. D'après Salençon [92], dans le repère cylindrique  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$ , le champs solution s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_r \\ u_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha X(a + Z) \sin \theta \\ -\frac{\alpha}{2} \sin \theta (X^2 + \nu(a + Z)^2) \\ -\frac{\alpha}{2} \cos \theta (X^2 - \nu(a + Z)^2) \end{pmatrix} \quad (1.89)$$

Dans le cas d'une poutre d'Euler-Bernoulli et en considérant les conditions aux limites, le moment fléchissant sur le module de Young et l'inertie s'écrit :  $\alpha = \frac{M_y}{EI_y} = \frac{\Omega}{L}$ . Ainsi le champ de déplacement s'écrit finalement :

$$\begin{cases} u_x = \frac{\Omega}{L} (L - 2X)(a + Z) \sin \theta \\ u_r = -\frac{\Omega}{2L} \sin \theta ((L - 2X)^2 + \nu(a + Z)^2) \\ u_\theta = -\frac{\Omega}{2L} \cos \theta ((L - 2X)^2 - \nu(a + Z)^2) \end{cases} \quad (1.90)$$

Des termes en  $Z$  et  $Z^2$  apparaissent dans le champ de déplacement solution. Les termes en  $(a + Z)^2$  dans les déplacements transversaux représentent la courbure que subit la section transverse et les termes en  $(2X - L)^2$  la courbure longitudinale. Les termes  $u_r$  et  $u_\theta$  représentent les déplacements que subissent la section transverse et ils dépendent de  $\Omega$ . La seule déformation de la section est due au effet de Poisson.

#### Conclusion partielle :

Les résultats analytiques de ces cas de chargement permettent d'identifier la forme des solutions que le modèle de poutre enrichie doit être en mesure de reproduire. La décomposition de la cinématique en une partie poutre et une partie coque est une approche originale qui permet de faciliter la création des couplages à considérer.

Dans le cas de l'extension simple, l'allongement de la tuyauterie s'accompagne de la restriction de sa section transverse.

Une pression interne imposée à un tube implique un gonflement radial ainsi qu'une extension longitudinale. Dans ces deux premiers cas, la modélisation introduite prend en compte les effets globaux de Poisson. Cet effet se perçoit au niveau des efforts généralisés donnés dans l'Eq. (1.76). De plus, les termes de déplacement portés par  $Z^2$  présents dans l'Eq. (1.90) montrent qu'il est important de considérer une déformation au moins linéaire en  $Z$ . Ainsi une déformation purement membranaire n'est pas suffisante pour représenter de la flexion pure. Un développement à l'ordre deux en  $Z$  du modèle proposé permet de retrouver totalement les solutions analytiques de l'Eq. (1.90). Le modèle tridimensionnel de l'Eq. (1.90) ne permet pas de retrouver l'ovalisation telle que décrite par Brazier [15] car celle-ci est essentiellement non-linéaire.

Ce couplage, qui permet un changement d'inertie de la section, n'est pas exhibé naturellement au premier ordre dans la cinématique. L'ovalisation de la section étant un phénomène important à considérer ici, il convient de permettre à la tuyauterie droite de s'ovaliser. Afin de représenter plus fidèlement ce phénomène, des termes de couplage cinématique, permettant aux sections de s'ovaliser lors d'une flexion pure, sont introduits dans le chapitre suivant.

## 2 - Enrichissement d'un modèle de poutre droite classique prenant en compte les variations de sa section transversale

L'objectif de ce chapitre est de détailler la méthodologie développée pour enrichir un modèle de poutre droite classique de type Euler-Bernoulli afin de prendre en compte l'ovalisation de sa section transversale en utilisant les conclusions du chapitre précédent quant à la façon d'enrichir la cinématique : il est nécessaire d'introduire un couplage entre les rotations et les déplacements de la section transversale.

La mise en œuvre de cette modélisation sur des cas analytiques et des simulations numériques est réalisée. Des comparaisons entre des résultats analytiques et numériques sont effectuées sur plusieurs types de chargements : l'extension simple, le tube sous pression interne et la flexion pure. Un autre cas plus complexe, le cas de la force surfacique localisée, est quant à lui comparé à une solution numérique de référence de type coque.

### 2.1 . Modèle non-linéaire d'un tube droit

Dans un premier temps, la cinématique de la tuyauterie est modélisée avec une partie de type poutre et une partie de type coque permettant la variation de sa section. Afin d'ovaliser le tube initialement droit, un couplage entre les déplacements locaux et la rotation globale de la section est introduit. Les degrés de liberté de coque sont ensuite développés linéairement dans l'épaisseur en  $Z$  et en séries de Fourier selon la variable circonférentielle  $\theta$  afin de garder des variables ne dépendant que de la position longitudinale  $X$ . La résolution des équations d'équilibre à travers le principe des puissances virtuelles, fait apparaître des efforts généralisés permettant de résoudre analytiquement différents cas de chargements selon les conditions aux limites imposées.

#### 2.1.1 . Cinématique non linéaire d'un tube droit

La géométrie initiale du tube est celle du chapitre précédent (voir section 1.2). Comme précédemment, pour simplifier la présentation, un mouvement plan du tube est considéré i.e.  $W_o = 0$  et  $\Omega_x = \Omega_z = 0$  (voir Figs. (1.3) & (1.4)). Le lecteur intéressé par la modélisation tridimensionnelle complète peut se référer à l'annexe C (page 124).

Le couplage non linéaire est introduit en considérant des termes du second ordre reliant la rotation de la section  $\Omega$  avec les déplacements de coque de la section  $w$  et  $v$ . Les sections sont supposées être relativement planes après déformation, ceci permet de négliger le couplage entre les termes de gauchissement  $u$  et la rotation de la section. Ainsi, la position actuelle d'un point de la section déformée,  $\mathbf{m}(X, \theta, Z)$ , s'exprime comme :

$$\mathbf{m} = (X + U_o + u + \Omega_y ((a + Z + w) \sin \theta + v \cos \theta)) \mathbf{E}_X + (a + Z + V_o \sin \theta + w) \mathbf{E}_R + (V_o \cos \theta + v) \mathbf{E}_\theta \quad (2.1)$$

Le tenseur des déformations est exprimé dans l'annexe A (page 117) dans l'Eq. (A.13).

Les composantes non nulles de déformations membranaires sont données par :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial u_o}{\partial X} - \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} (w_o \sin \theta + v_o \cos \theta) + Z k_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right) + Z k_{\theta\theta} \\ 2\varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial X} + 2Z k_{x\theta} \end{aligned} \quad (2.2)$$

où les termes de courbure sont donnés par :

$$\begin{aligned} k_{xx} &= -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} + \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \\ k_{\theta\theta} &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\ 2k_{x\theta} &= -\frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{\partial v_o}{\partial X} \right) \end{aligned} \quad (2.3)$$



Il est à noter que les relations obtenues en utilisant les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff restent inchangées par rapport au chapitre précédent. Les termes de couplage ne sont portés que par  $\varepsilon_{xx}$ . Si on choisit  $h = w_o \sin \theta + v_o \cos \theta$  alors le couplage n'est présent que dans la partie membranaire du tenseur des déformations. Le développement en séries de Fourier, en considérant les hypothèses de Love-Kirchhoff, est le même qu'au chapitre précédent (voir Eq. (1.62) et Eq. (1.65)).

### 2.1.2 . Principe des puissances virtuelles en dynamique appliqué au tube

La résolution numérique des équations d'équilibre est effectuée par le biais d'un code de dynamique (voir chapitre n°4), il convient alors d'exprimer ces dernières en dynamique. Les équations d'équilibre en dynamique peuvent être obtenues en appliquant le Principe des Puissances Virtuelles (PPV) qui exprime l'équilibre entre les forces inertielles, externes et internes :

$$\mathcal{P}_a = \mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i \quad (2.4)$$

où  $\mathcal{P}_a$ ,  $\mathcal{P}_e$  et  $\mathcal{P}_i$  représentent la puissance des efforts d'accélération, externes et internes respectivement. La puissance accélératrice est définie dans la configuration courante (déformée) comme :

$$\mathcal{P}_a = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \delta \mathbf{v}^* d\Omega \quad (2.5)$$

où  $\rho$  est la densité,  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$  le vecteur d'accélération et  $\delta \mathbf{v}^*$  la vitesse virtuelle intégrés dans le volume courant  $\Omega$ .

La définition des puissances des forces extérieures et internes sont similaires au chapitre précédent (voir section 1.2.3)

Dans la suite de ce chapitre, le PPV est appliqué en considérant indépendamment le mode 0 puis le mode 2 avec le couplage introduit afin d'obtenir les équations d'équilibre ainsi que les efforts généralisés associés.

### 2.1.3 . Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan

Seul le mode 0 (i.e.  $N_f = 0$ ) est considéré ici, correspondant au gonflement de la section de la tuyauterie (i.e. à la variation de son rayon de manière uniforme dans la section). Par conséquent, la cinématique de coque est portée seulement par  $w_o$  (i.e.  $u_o = v_o = 0$ ), ce qui donne :

$$w_o(X, \theta) = w_o^c(X) ; \quad \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_o}{\partial X} - (a + w_o^c) \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + Z \left( -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial X^2} \right) ; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \left( \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} \right) w_o^c \quad (2.6)$$

La puissance des forces internes peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_i &= - \int_0^L \left( \int_S \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}^*) a d\theta dZ \right) dX \\ &= - \int_0^L \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y \left( -\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2} \right) + n_o^c \delta w_o^c + m_o^c \frac{\partial^2 \delta w_o^c}{\partial X^2} \right) dX \end{aligned} \quad (2.7)$$

où les efforts généralisés sont définis tels que :

$$\begin{aligned} N &= \int_S \sigma_{xx} a d\theta dZ ; \quad M_y = \int_S \sigma_{xx} (a + Z + w_o^c) \sin \theta a d\theta dZ \\ n_o^c &= \int_S \left[ \sigma_{\theta\theta} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \sigma_{xx} \right] d\theta dZ ; \quad m_o^c = - \int_S \sigma_{xx} Z a d\theta dZ \end{aligned} \quad (2.8)$$

Sans prendre en compte les efforts extérieurs, i.e.  $\mathcal{P}_e = 0$ , les équations d'équilibre dynamique déterminée dans la section A.2 de l'annexe A (page 117) s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho S \frac{\partial^2 U_o}{\partial t^2} & - \frac{\partial N}{\partial X} & = 0 \\ \rho S \frac{\partial^2 V_o}{\partial t^2} - \rho \pi a e \left( a \frac{\partial}{\partial X} \left[ (a + w_o^c) \frac{\partial^3 V_o}{\partial t^2 \partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ (a + w_o^c) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ w_o^c \frac{\partial V_o}{\partial X} \right] \right] + \frac{e^2}{12} \frac{\partial^4 V_o}{\partial t^2 \partial X^2} \right) & - \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} & = 0 \\ \rho S \left( \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial t^2} - \frac{e^2}{12} \frac{\partial^4 w_o^c}{\partial t^2 \partial X^2} \right) + \rho \pi a e \left( a \frac{\partial^3 V_o}{\partial t^2 \partial X} \frac{\partial V_o}{\partial X} + \frac{\partial V_o}{\partial X} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ w_o^c \frac{\partial V_o}{\partial X} \right] \right) & + \frac{\partial^2 m_o^c}{\partial X^2} + n_o^c & = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Les équations statiques se déduisent simplement :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 m_o^c}{\partial X^2} + n_o^c = 0 \quad (2.10)$$

En considérant la loi de comportement donnée dans l'Eq. (1.75) et en négligeant les termes en  $e^3$  dans le moment fléchissant, les efforts généralisés deviennent :

$$\begin{aligned} N &= DS \left[ \frac{\partial U_o}{\partial X} + \nu \frac{w_o^c}{a} \right] ; \quad n_o^c = D \frac{S}{a} \left[ \nu \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{w_o^c}{a} + \frac{a}{2} (a + w_o^c) \left( \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)^2 \right] \\ M_y &= -D\pi a e (a + w_o^c)^2 \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} ; \quad m_o^c = DS \frac{e^2}{12} \left( \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial X^2} + \nu \frac{w_o^c}{a} \right) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Dans l'équation du moment fléchissant, l'inertie de la section dépend désormais de la variation radiale  $w_o^c$ . L'effort normal n'a quant à lui pas été modifié alors que l'effort  $n_o^c$  considère le déplacement transversal  $V_o$ . Même sans le terme de couplage non linéaire, le mode 0 de Fourier présente un couplage naturel. Il convient alors de regarder l'effet spécifique de ce couplage sur le second mode de Fourier afin de vérifier si les termes non linéaire induisent une modification de l'inertie .

#### 2.1.4 . Ovalisation liée au 2<sup>nd</sup> mode dans le plan

Le second mode de Fourier est désormais étudié (i.e.  $N_f = 2$ ). Comme précédemment, l'hypothèse d'inextensibilité est prise en compte (voir Eq. (1.61)). Par conséquent, la cinématique de type coque, en l'absence de gauchissement, est définie par :

$$u_o(X, \theta) = 0 ; \quad w_o(X, \theta) = w_2^c(X) \cos(2\theta) ; \quad v_o(X, \theta) = -\frac{1}{2} w_2^c(X) \sin(2\theta) \quad (2.12)$$

Avec cette cinématique, le tenseur des déformations donné dans l'Eq. (2.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} w_2^c \left( \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \right) \\ &+ Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_2^c}{\partial X^2} \cos(2\theta) + \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \frac{3}{2} w_2^c \sin(2\theta) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= Z \left[ \frac{3}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \right] \\ 2\varepsilon_{x\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) + Z \left[ \frac{3}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) \right] \\ \text{où } \frac{1}{2} \sin(2\theta) \cos \theta - \cos(2\theta) \sin \theta &= \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les termes de courbures de coques sont supposés petits devant les termes membranaires. De manière similaire à ce qui est fait dans [69, 13],  $k_{xx}^c$  et  $k_{x\theta}^c$  sont négligés et le tenseur des déformations s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} w_2^c \left( \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \right) + Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= Z \left[ \frac{3}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \right] \\ 2\varepsilon_{x\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial X} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Comme précédemment les intégrations sont faites sur le volume  $ad\theta dZ dX$ .

La puissance des efforts intérieurs donnent les relations qui suivent :

$$\mathcal{P}_i = - \int_0^L \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + M_y \left( -\frac{\partial^2 \delta V_o}{\partial X^2} \right) + n_2^c \delta w_2^c + t_2^c \frac{\partial \delta w_2^c}{\partial X} \right) dX \quad (2.15)$$

où les efforts généralisés sont définis tels que :

$$\begin{aligned}
N &= \int_S \sigma_{xx} a d\theta dZ \\
M_y &= \int_S \sigma_{xx} \left( (a+Z) \sin \theta - \left( \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \right) w_2^c \right) a d\theta dZ \\
n_2^c &= \int_S \left( \sigma_{xx} \left( \frac{3 \sin \theta - \sin(3\theta)}{4} \right) \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \sigma_{\theta\theta} Z \frac{3}{a^2} \cos(2\theta) \right) a d\theta dZ \\
t_2^c &= \int_S -\sigma_{x\theta} \frac{1}{2} \sin(2\theta) a d\theta dZ
\end{aligned} \tag{2.16}$$

L'inertie de la section  $I_y$  vaut rigoureusement :  $I_y = \pi \left( a^3 e + a \frac{e^3}{12} \right)$  en intégrant par rapport à  $a d\theta dZ dX$ . Dans le cas des coques minces et pour simplifier son expression l'inertie est prise égale à :  $I_y = \pi a^3 e$ .

En l'absence d'efforts extérieurs et en négligeant les termes en  $Z$  dans le déplacement, les équations d'équilibre en dynamique, fournie dans la section A.2 de l'annexe A (page 117), s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho S \frac{\partial^2 U_o}{\partial t^2} - \frac{\partial N}{\partial X} = 0 \\
\rho S \frac{\partial^2 V_o}{\partial t^2} - \rho I_y \frac{\partial^4 V_o}{\partial t^2 \partial X^2} + \rho \frac{3 I_y}{4 a} \left( \frac{\partial^3}{\partial t^2 \partial X} \left[ w_2^c \frac{\partial V_o}{\partial X} \right] + \frac{\partial}{\partial X} \left[ w_2^c \frac{\partial^3 V_o}{\partial t^2 \partial X} \right] \right) \\
-\rho \frac{5 I_y}{8 a^2} \frac{\partial}{\partial X} \left[ w_2^c \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ w_2^c \frac{\partial V_o}{\partial X} \right] \right] - \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 \\
\rho \frac{5 S}{8} \frac{\partial^2 w_2^c}{\partial t^2} - \rho \frac{3 I_y}{4 a} \frac{\partial V_o}{\partial X} \frac{\partial^3 V_o}{\partial t^2 \partial X} + \rho \frac{5 I_y}{8 a^2} \frac{\partial V_o}{\partial X} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ w_2^c \frac{\partial V_o}{\partial X} \right] \right) - \frac{\partial t_2^c}{\partial X} + n_2^c = 0
\end{array} \right. \tag{2.17}$$

D'une manière similaire, les équations d'équilibre en statique sont obtenues :

$$\frac{\partial N}{\partial X} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial t_2^c}{\partial X} - n_2^c = 0 \tag{2.18}$$

Avec la loi de comportement en contraintes planes, les efforts généralisés sont exprimés comme :

$$\begin{aligned}
N &= DS \frac{\partial U_o}{\partial X} \quad ; \quad \xi = \frac{w_2^c}{a} \\
M_y &= DI_y \left( 1 - \frac{3}{2} \xi + \frac{5}{8} \xi^2 \right) \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right) \\
n_2^c &= D \frac{I_y}{a} \left( -\frac{3}{4} + \frac{5}{8} \xi \right) \left( \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)^2 + D \frac{3\pi e^3}{4a^2} \xi \\
t_2^c &= G \frac{I_y}{4a} \frac{\partial \xi}{\partial X}
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Le terme non linéaire introduit permet de coupler la rotation,  $\Omega_y = -\frac{\partial V_o}{\partial X}$ , avec le déplacement d'ovalisation  $w_2^c$ . Ainsi, dans l'écriture du moment de flexion, des termes en  $w_2^c$  apparaissent et de la même façon, dans  $n_2^c$  des termes en  $V_o$  apparaissent.

Si ce couplage non linéaire n'est pas pris en compte (i.e.  $\xi = 0$  et pas de termes du second ordre) alors le moment fléchissant est indépendant de l'ovalisation et les efforts généralisés associés à l'ovalisation ne dépendent pas de la rotation de la section. Ainsi, les efforts généralisés sans les termes de couplage s'écrivent comme dans le chapitre précédent (voir Eq. (1.83)).

Une comparaison entre différentes relations moment-courbure, dont celles mentionnées ci-dessous, est effectuée dans [51]. L'objectif de cette comparaison est de voir l'impact des termes supplémentaires de coque sur le changement d'inertie. Pour faire ces comparaisons il est nécessaire de déterminer la courbure.

Afin de déterminer la courbure,  $\kappa$ , il faut déterminer  $\xi$  en fonction de  $\kappa$  en prenant  $n_2^c = 0$  (voir Eq. (2.19)). Cette dernière égalité permet d'obtenir la relation suivante :

$$\xi = \frac{\kappa^2}{1 + \frac{5}{6}\kappa^2} \quad \text{ou} \quad \kappa = \frac{a^2}{e} \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right) \quad (2.20)$$

Selon la modélisation et les approximations choisies, plusieurs relations moment-courbure sont obtenues avec le modèle de poutre enrichi présenté ici :

- Le moment fléchissant de la solution de Saint-Venant est exprimé comme :  $M_y = DI_y \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)$ . Le moment ainsi défini est une fonction linéaire de la courbure (voir Eq. (2.20)).
- Si  $w_2^c$  est supposé petit, alors l'inertie du moment du premier ordre (i.e. en supprimant les termes en  $\xi^2$ ) est :  $M_y = DI_y \left( 1 - \frac{3}{2}\xi \right) \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)$ .
- Enfin, le moment fléchissant du second ordre de l'Eq. (2.19) est :  $M_y = DI_y \left( 1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{5}{8}\xi^2 \right) \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)$ .

En supposant la courbure  $\kappa$  faible devant l'unité, la valeur de  $\xi$  dans l'Eq. (2.20) se simplifie en :  $\xi = \kappa^2$ . Le moment de flexion  $M_y$  obtenu en supposant  $w_2^c \ll 1$  s'écrit alors :

$$M_y = D\pi a^3 e \left( 1 - \frac{3}{2}\kappa^2 \right) \left( \frac{e}{a^2} \kappa \right) \quad \text{ou} \quad \kappa \text{ est la courbure définie dans l'Eq. (2.20)} \quad (2.21)$$

Le moment est cette fois-ci une fonction cubique de la courbure et contrairement à la solution de Saint-Venant il atteint un maximum local (voir Fig. (2.1)). La résolution de l'équation :  $\frac{\partial M_y}{\partial \kappa} = 0$  permet de déterminer la valeur pour laquelle le moment atteint son unique extremum local positif. Ce maximum est atteint en  $\xi = \frac{2}{9}$  soit en  $w_2^c = \frac{2}{9}a$  (voir [15]). Si le moment continue de croître passé ce maximum, la stabilité du tube n'est pas garantie [15].

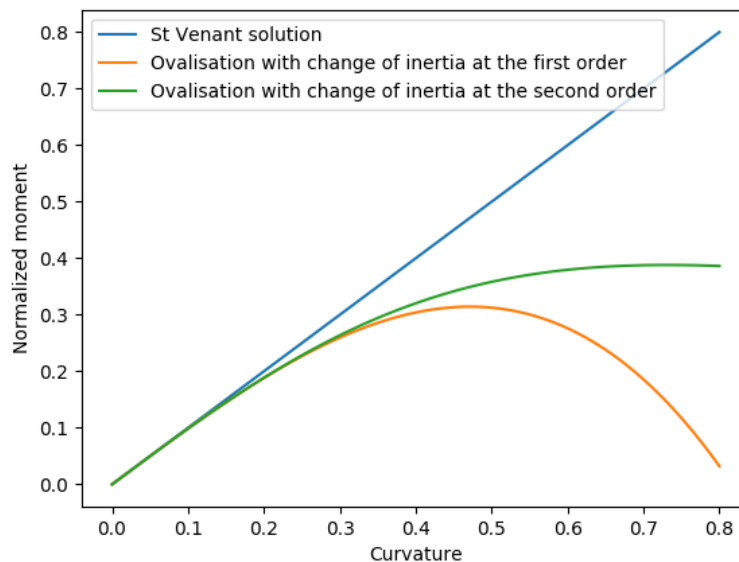


Figure 2.1 - Courbe Moment-Courbure

### Conclusion partielle :

Dans cette section, la modélisation d'un tube droit comme un modèle de poutre enrichi a été présentée. La cinématique a été enrichie par une cinématique de coque permettant une ovalisation de sa section. Ensuite, la cinématique de coque a été développée linéairement en  $Z$  et en séries de Fourier afin de rester dans un formalisme filaire. Le mode 0 ainsi que mode 2 ont été détaillés. Les équations d'équilibre vont pouvoir être résolues analytiquement sur des cas simples et comparées à des résultats numériques afin de vérifier et de valider le modèle implémenté.

## 2.2 . Vérification numérique de l'élément de poutre enrichi permettant de prendre en compte les variations de sa section

Le but de cette section est d'évaluer le modèle de poutre enrichi développé ici avec des comparaisons analytiques mais aussi numériques. Pour vérifier le nouvel élément introduit dans le code de dynamique rapide Europlexus [21], plusieurs cas tests, sur une tuyauterie droite seule sont considérés. Différents cas de chargements sont analysés comme l'extension simple, le tube sous pression interne, la flexion pure ou l'application d'une force surfacique localisée sur la section transverse.

### 2.2.1 . Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau de différents type de tuyauteries

Pour ces comparaisons, le modèle de poutre présenté est évalué sur trois configurations de tuyauteries (voir Tab. (2.1)). La première est définie de sorte à ce qu'elle soit en adéquation avec les hypothèses de coques minces et d'Euler-Bernoulli. Les deux suivantes ont des caractéristiques proches de ce que l'on peut rencontrer dans des installations industrielles comme dans les centrales nucléaires de production d'électricité.

Numéro des configurations des tuyauteries	1	2	3
Longueur $L$ (m)	10.0	5.0	1.0
Diamètre externe $d_{ext}$ (mm)	2100	924.4	114.3
Rayon moyen $a$ (mm)	1000	427.95	50.405
Épaisseur $e$ (mm)	100	68.5	13.49
Ratio $a/L$	0.1	0.08559	0.050405
Ratio $e/a$	0.1	0.16	0.268
Module de Young (MPa)	200	172	195
Coefficient de Poisson	0.3	0.3	0.3
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	7800	7800	7980

Table 2.1 – Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau des trois configurations de tuyauteries

Pour chaque configuration, deux calculs numériques sont effectués : le premier avec un seul élément et le second avec dix éléments afin de vérifier que la solution numérique est indépendante de la taille de maille. L'ensemble des solutions numériques développé ici est effectué avec le code de calcul de dynamique rapide explicite Europlexus [21]. Le schéma explicite est par nature conditionnellement stable. L'obtention de la condition de stabilité est détaillée dans la section 4.3 du dernier chapitre. Pour chaque cas test et toutes les configurations, la contribution la plus pénalisante est la condition sur l'ovalisation (voir Eq. (4.83)). Ainsi les différentes valeurs des pas de temps sont les mêmes peu importe le chargement et sont données dans la Tab. (2.2).

Configurations numéro	1-1 élément	1-10 éléments	2-1 élément	2-10 éléments	3-1 élément	3-10 éléments
Pas de temps (s)	$9.039 \times 10^{-5}$	$9.862 \times 10^{-6}$	$2.607 \times 10^{-5}$	$6.200 \times 10^{-6}$	$1.747 \times 10^{-6}$	$1.634 \times 10^{-6}$

Table 2.2 – Pas de temps de stabilité

### 2.2.2 . Effet de Poisson lors d'une extension simple uniforme

Le premier cas test consiste en une extension simple comme décrit dans la Fig. (2.2). Un déplacement symétrique est imposé à chacune des extrémités du tube, i.e.  $\pm \frac{u_D}{2}$ . Il est bien connu que l'allongement d'un tube est accompagné par la restriction de sa section sous l'effet de Poisson.



Figure 2.2 – Extension simple d'une poutre due à un déplacement axial symétrique imposé

En premier lieu, la solution analytique du présent modèle est déterminée en ne considérant que le mode 0 de Fourier. Dans le cas de l'extension simple, seuls les déplacements axial et radial,  $U_o$  et  $w_o^c$ , sont non nuls. En considérant  $w_o^c$  uniforme, les composantes du tenseur des déformations, exprimées dans l'Eq. (2.2), s'écrivent :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial U_o}{\partial X} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = w_o^c \left( \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} \right) \end{cases} \quad (2.22)$$

Par conséquent, les efforts généralisés, donnés dans l'Eq. (2.11), peuvent s'exprimer comme :

$$\begin{cases} N = DS \left( \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\nu}{a} w_o^c \right) \\ n_o^c = D \frac{S}{a} \left( \nu \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{1}{a} w_o^c \right) \end{cases} \quad (2.23)$$

Ensuite, les équations d'équilibre, exprimées dans l'Eq. (2.10), conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial N}{\partial X} = 0 \\ n_o^c = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

Finalement, en utilisant les deux conditions aux limites :  $U_o(0) = -\frac{u_D}{2}$  et  $U_o(L) = \frac{u_D}{2}$ , les déplacements axial et radial sont donnés par :

$$U_o(X) = u_D \left( \frac{X}{L} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad w_o^c = -a\nu \frac{u_D}{L} \quad (2.25)$$

Il apparaît que la solution théorique du présent modèle, donnée dans l'Eq. (2.25), est exactement la même que celle obtenue en modélisation tridimensionnelle (voir Eq. 1.88). Si on ne fait pas l'hypothèse d'un déplacement radial uniforme et que l'on cherche une solution dépendant de la variable  $\theta$  alors on montre que  $\frac{\partial w}{\partial \theta} = 0$  et donc que la solution uniforme est unique.

Dans chaque configuration de tuyauterie,  $u_D$ , est fixé égal à 1% de la longueur de la tuyauterie afin de rester dans l'hypothèse des petites déformations. En conséquence, le ratio  $w_o^c/a$  a la même valeur constante pour les trois configurations, i.e.  $w_o^c/a = -3.0 \times 10^{-3}$ .

Dans la suite, les solutions numériques, des trois configurations de tuyauterie, sont comparées à la constante  $w_o^c/a$ .

Lors de calculs "pseudo" statiques, l'utilisation d'un code de calcul de dynamique explicite impose le choix d'un temps de montée particulier,  $\tau$ , afin d'éviter les erreurs numériques et les grandes oscillations. Le temps de montée du déplacement imposé, doit être grand comparé au maximum des pas de temps caractéristiques du modèle enrichi, il convient de considérer le minimum à la place du maximum dans l'Eq. (4.84). Le temps de montée est fixé 100 fois plus important que le plus grand des pas de temps caractéristiques, i.e.  $\tau = 100 \max(\Delta t_i)$  voir Eq. (4.83).

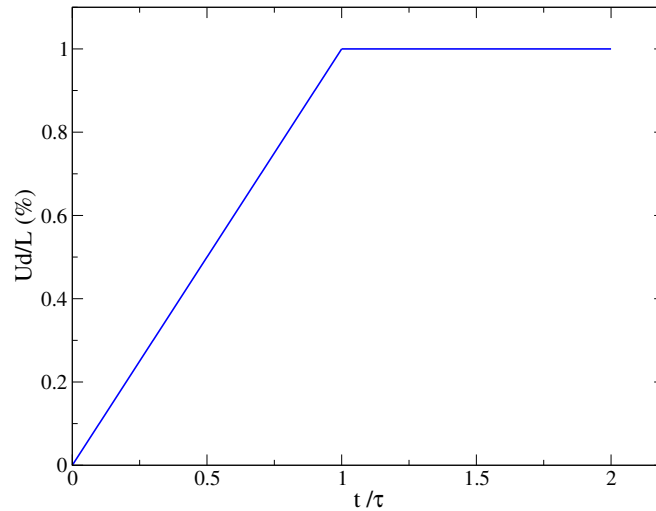


Figure 2.3 – Historique de déplacement axial imposé normalisé d'un côté durant une extension simple

Ainsi, le déplacement axial imposé,  $u_D$ , est décrit dans la Fig. (2.3).

Les déplacements radiaux sont donnés pour chaque configuration dans la Fig. (2.4). Les résultats numériques pour un élément et pour dix éléments sont déterminés à l'extrémité droite du tube.

Comme attendu, les résultats numériques, pour un unique élément et pour dix éléments, sont en très bonne adéquation avec les solutions analytiques associées.

L'extension du tuyau crée une réduction de son rayon due à l'effet de Poisson. L'élément filaire développé dans ce document permet donc de déterminer la réduction de son rayon. Le mode 0 correspond au mode de gonflement, c'est pourquoi il est intéressant d'étudier également le cas de la pression interne afin de vérifier le modèle proposé.

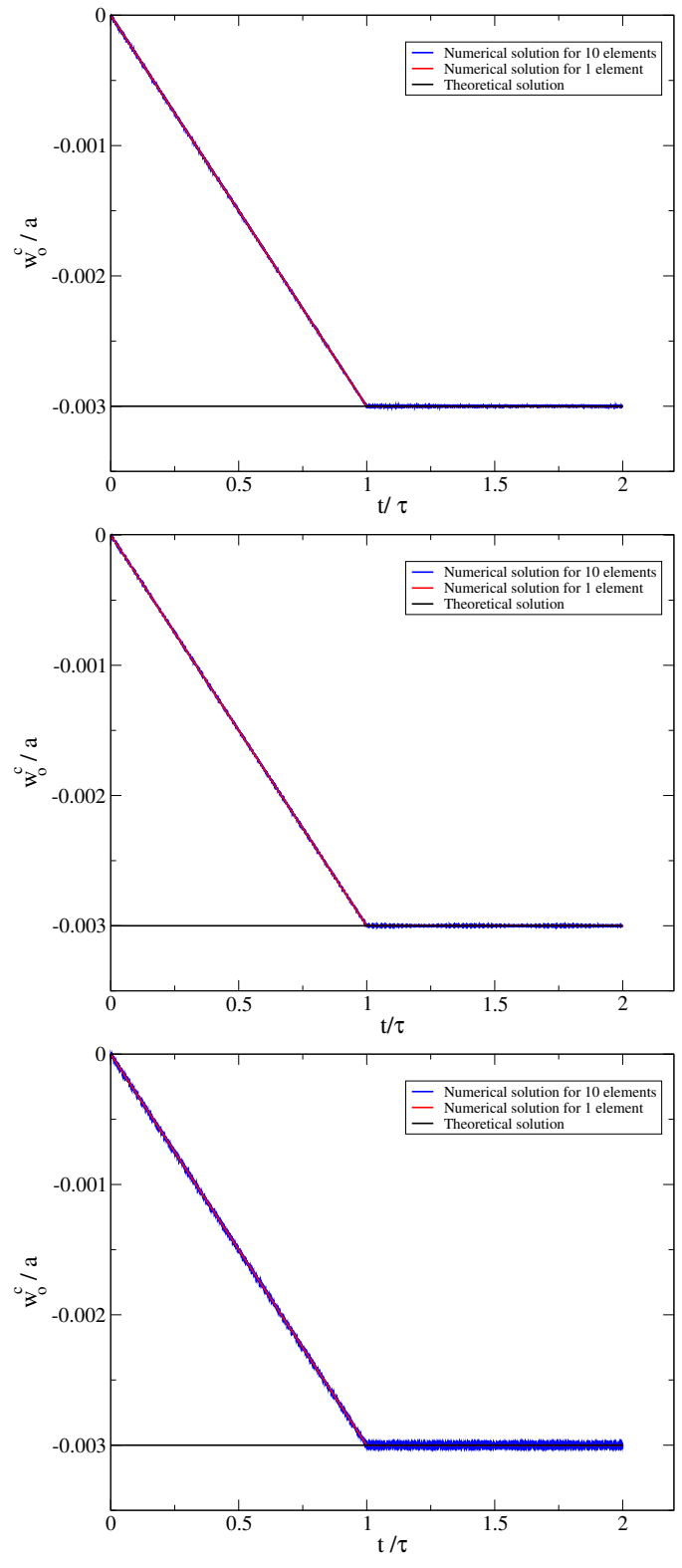


Figure 2.4 – Résultat numérique du déplacement radial durant une extension simple pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)



### 2.2.3 . Gonflement uniforme du à une pression interne imposée

Le second cas test est l'étude d'un tube sous pression interne comme décrit dans la Fig. (2.5). Une pression uniforme,  $P_{rint}$ , est appliquée à l'intérieur de la tuyauterie et crée un gonflement uniforme de la section transverse. De nouveau, seul le mode 0 de Fourier est étudié.

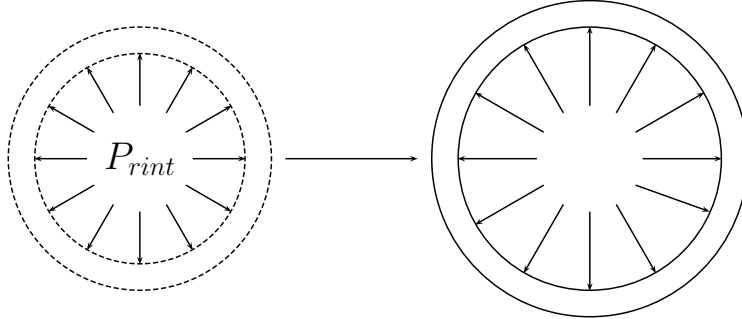


Figure 2.5 – Pression interne imposée uniformément

Une solution analytique est développée avec le modèle de poutre enrichi présenté ici. Dans le cas d'une pression interne, comme pour l'extension simple, seuls le déplacement axial  $U_o$  et le déplacement radial  $w_o^c$  sont non nuls. En considérant que  $w_o^c$  est uniforme et un encastrement de l'axe à chaque extrémité qui conduit à  $U_o = 0$  partout, la seule composante non nulle du tenseur des déformations est le terme circonférentiel exprimé dans l'Eq. (2.2) qui s'écrit :

$$\varepsilon_{\theta\theta} = w_o^c \left( \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} \right) \quad (2.26)$$

De plus, les efforts généralisés exprimés dans l'Eq. (2.11) peuvent s'exprimer sous la forme de :

$$n_o^c = D \frac{S}{a^2} w_o^c \quad (2.27)$$

La pression interne appliquée impose une puissance externe non nulle telle que :

$$\mathcal{P}_e = \int_A P_{rint} \delta w_o^c dA = \int_0^L \int_0^{2\pi} P_{rint} \delta w_o^c \left( a - \frac{e}{2} \right) d\theta dX = \int_0^L 2\pi P_{rint} \left( a - \frac{e}{2} \right) \delta w_o^c dX \quad (2.28)$$

L'équilibre devient alors :

$$n_o^c = 2\pi P_{rint} \left( a - \frac{e}{2} \right) \quad (2.29)$$

En utilisant les Eq. (2.27) et Eq. (2.29), le déplacement radial due à une pression imposée est donné par :

$$w_o^c = \frac{P_{rint}}{D} \frac{a \left( a - \frac{e}{2} \right)}{e} \quad (2.30)$$

La solution est légèrement différente de celle proposée dans le chapitre précédent (voir Eq. (1.88)). La différence vient d'une part du module d'élasticité  $D$  plutôt que le module de Young  $E$  mais aussi par la surface d'application de la pression caractérisé par la surface intérieure ici et par la surface moyenne dans le chapitre précédent. Pour avoir la même solution il suffit de considérer comme condition aux limites un effort axial  $N$  libre aux extrémités plutôt que d'imposer les déplacements de poutre et d'appliquer la pression sur la même surface.

Pour chaque configuration de tuyauterie, une pression uniforme de 100 bars est imposée. Les solutions théoriques de l'Eq. (2.30) sont données dans la Tab. (2.3) :

Comme précédemment, afin d'éviter les grandes oscillations, la pression appliquée est imposée lentement et est décrite dans la Fig. (2.6).

Les déplacements radiaux sont donnés pour chaque configuration dans la Fig. (2.7). Pour ne pas surcharger cette

Configurations numéro	1	2	3
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$4.3225 \times 10^{-4}$	$1.3013102 \times 10^{-4}$	$7.612936051 \times 10^{-6}$

Table 2.3 – Déplacement radial théorique lors d'une pression interne de 100 bars

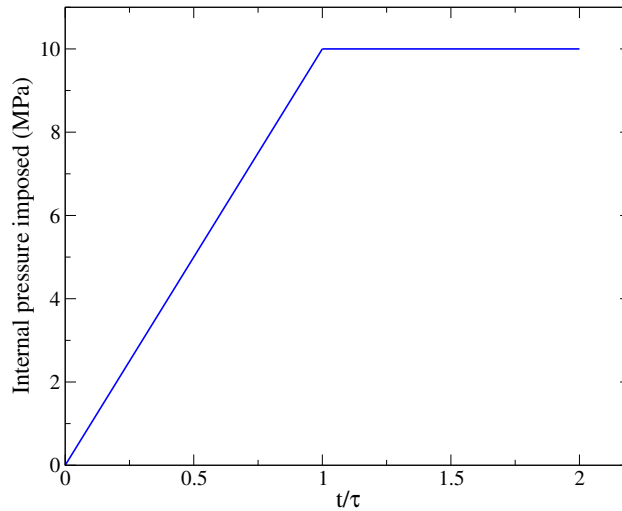


Figure 2.6 – Historique de pression interne imposée normalisée

partie, seuls les résultats numériques à l'extrémité droite du tube sont présentés. Tous les calculs ont été réalisés avec un nombre de Courant  $C = 0.5$  (voir Eq. (4.77)) et avec un pas de temps de stabilité fourni dans la Tab. (2.2). Les deux nœuds aux extrémités sont bloqués dans la direction axiale pour respecter la condition  $U_o = 0$ .

De façon similaire aux résultats de l'extension simple, les résultats numériques sont en très bonne adéquation avec la solution analytique.

Jusqu'ici seuls des cas statiques, plus simples à résoudre, ont été présentés. La modélisation développée ici permet de réaliser des simulations dynamiques. Ainsi le cas de la pression interne est également regardé sous l'aspect dynamique.

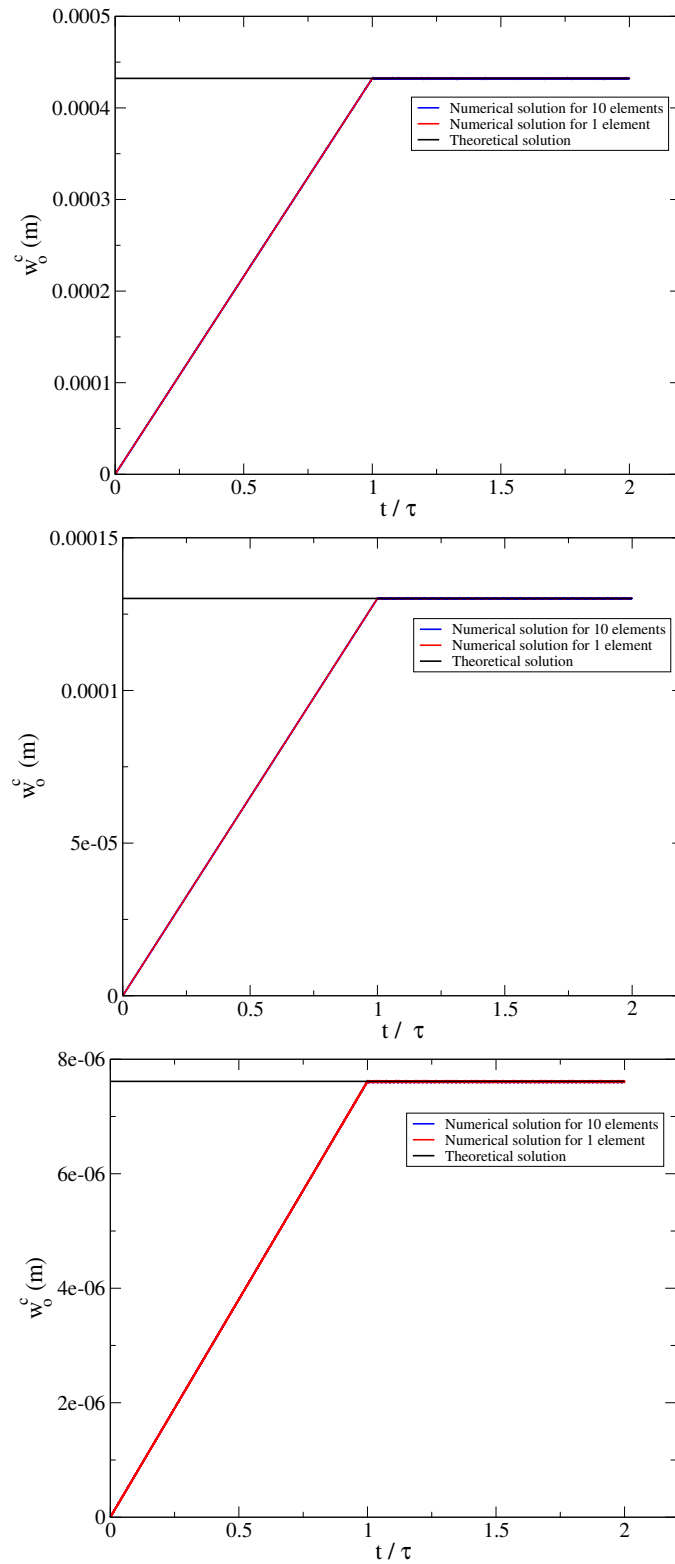


Figure 2.7 – Résultat numérique du déplacement radial sous pression interne imposée pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)

### 2.2.4 . Fréquence d'oscillation sous pression interne imposée

Dans cette sous-section, le cas de la pression interne est étudié sous l'aspect dynamique. La fréquence d'oscillation est comparée entre une solution analytique et les résultats issus de la simulation numérique. Les hypothèses, pour ce cas dynamique, sont les mêmes que celles de la sous-section précédente :  $w_2^c$  uniforme,  $U_o = 0$  et une pression interne imposée  $P_{rint}$ . Sous ces hypothèses, les équations du mouvement définies dans l'Eq. (2.9) se simplifient en une unique équation :

$$\rho S \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial t^2} + n_o^c = 2\pi P_{rint} \left(a - \frac{e}{2}\right) \quad (2.31)$$

En utilisant la relation de l'Eq. (2.27), l'équation différentielle s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial^2 w_o^c}{\partial t^2} + \frac{1}{a^2} \frac{D}{\rho} w_o^c = \frac{2\pi P_{rint}}{\rho S} \left(a - \frac{e}{2}\right) \text{ avec les conditions aux limites en temps } w_o^c(t=0) = 0 \text{ et } \frac{\partial w_o^c}{\partial t}(t=0) = 0 \quad (2.32)$$

Finalement le déplacement radial en fonction du temps s'exprime comme :

$$w_o^c(t) = w_o^{c,part} (1 - \cos(\omega t)) \quad (2.33)$$

La solution particulière est définie comme :  $w_o^{c,part} = \frac{P_{rint}}{D} \frac{a(a - \frac{e}{2})}{e}$  et elle correspond à la solution déterminée précédemment en statique (voir Eq. (2.30)).

La fréquence et la période d'oscillation sont définies de la façon suivante :  $\omega^{pul} = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ . La fréquence déterminée ici vaut alors :  $f = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{D}{\rho}}$  également explicitée dans [14].

Dans la suite, les périodes analytiques des différentes configurations de tuyauterie sont comparées aux périodes de gonflement décrites dans l'Eq. (2.34). Les résultats analytiques sont fournis dans la Tab. (2.4). Les solutions statiques sont fournies dans la Tab. (2.3).

$$T_{th} = 2\pi a \sqrt{\frac{\rho}{D}} \quad (2.34)$$

Contrairement aux simulations précédentes, la pression est imposée au premier pas de temps. Les simulations faites avec dix éléments et un élément sont identiques. Les déplacements radiaux en dynamique sont montrés pour chaque configuration sur la Fig. (2.8) à l'extrémité droite du tube. Les pas de temps de stabilité sont donnés dans la Tab. (2.2).

La période des oscillations obtenue avec la simulation numérique est déterminée en prenant 10 périodes. Les valeurs obtenues sont données dans la Tab. (2.4).

Configurations numéro	1	2	3
Période théorique $T_{th}$ (s)	$1.183676 \times 10^{-3}$	$5.462314 \times 10^{-4}$	$6.111647 \times 10^{-5}$
Période numérique $T_n$ (s)	$1.183688 \times 10^{-3}$	$5.462310 \times 10^{-4}$	$6.111625 \times 10^{-5}$
Erreur relative	$-1.013790 \times 10^{-5}$	$7.322903 \times 10^{-7}$	$3.599684 \times 10^{-6}$

Table 2.4 – Période d'oscillation

Les résultats numériques sont en très bonne corrélation avec les résultats analytiques. La période d'oscillation obtenue correspond à celle donnée par la résolution analytique. Pour les trois configurations de tuyauterie, le déplacement radial oscille autour d'une position moyenne correspondant à la position d'équilibre statique.

Pour le moment, seul le mode 0 de Fourier, correspondant au gonflement radial uniforme, a été étudié dans les simulations numériques proposées. Dans le prochain exemple, le second mode de Fourier associé à l'ovalisation de la section est analysé.

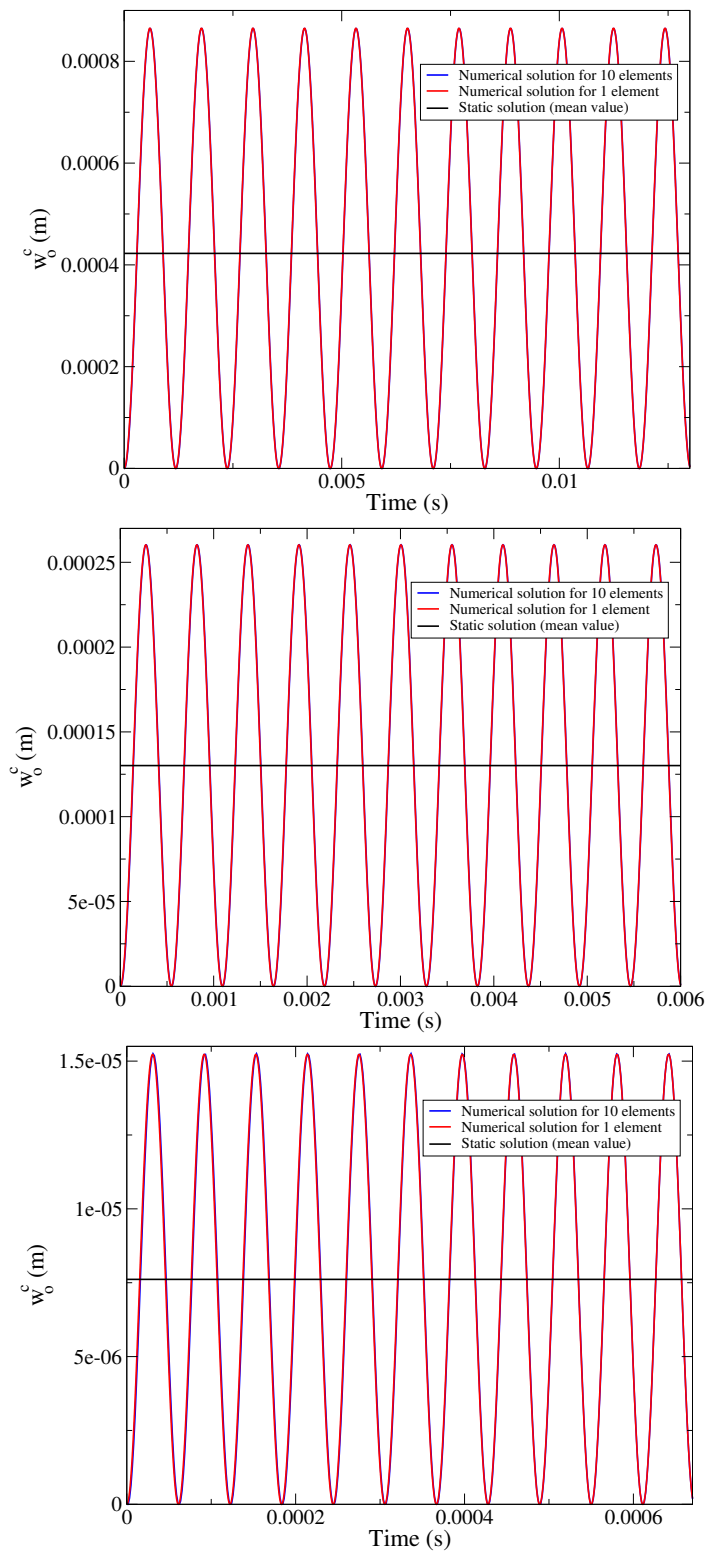


Figure 2.8 – Résultat numérique du déplacement radial dynamique d'un tube sous pression interne pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)

### 2.2.5 . Ovalisation dans le plan en flexion pure

Le quatrième cas test consiste à considérer l'ovalisation de la section durant une flexion pure comme décrit sur la Fig. (2.9). Pour ce faire, une rotation symétrique est imposée aux deux extrémités de la tuyauterie, i.e.  $\pm\Omega$  de chaque côté.

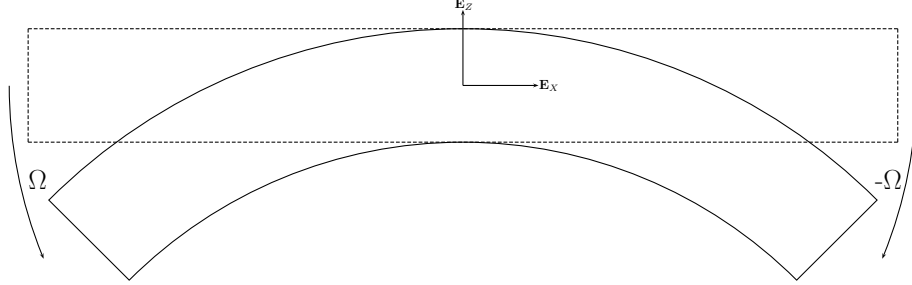


Figure 2.9 – Flexion pure, rotation imposée de chaque côté

Seul le second mode de Fourier sans gauchissement est ici considéré. Pour rappel, le déplacement associé de la coque s'écrit :

$$\begin{cases} u_o(X, \theta) = 0 \\ w_o(X, \theta) = w_2^c \cos(2\theta) \\ v_o(X, \theta) = -\frac{1}{2} w_2^c \sin(2\theta) \end{cases} \quad (2.35)$$

Dans le cas de la présente modélisation (voir Eq. (2.19)) et en considérant  $w_2^c$  uniforme et  $\frac{w_2^c}{a} \ll 1$ , les efforts généralisés non nuls s'écrivent :

$$\begin{aligned} M_y &= D[\pi a^3 e (1 - \frac{3}{2} \frac{w_2^c}{a}) (-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2})] \\ n_2^c &= D[\frac{\pi a^3 e}{a} (-\frac{3}{4}) (-\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2})^2 + \frac{3\pi e^3}{4a^3} w_2^c] \end{aligned} \quad (2.36)$$

Il est à noter que les termes d'ordre 3 dans  $n_2^c$  n'ont pas été gardés pour simplifier la résolution.

Les équations d'équilibre en statique fournies dans l'Eq. (2.18) deviennent :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0 \\ n_2^c = 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

où les conditions aux limites sont prises comme :

$$\begin{cases} V_o(0) = 0 \\ V_o(L) = 0 \\ -\Omega_y(0) = \frac{\partial V_o}{\partial X}(0) = -\Omega \\ -\Omega_y(L) = \frac{\partial V_o}{\partial X}(L) = \Omega \end{cases} \quad (2.38)$$

La relation d'équilibre  $\frac{\partial^2 M_y}{\partial X^2} = 0$  ainsi que les conditions aux limites permettent d'obtenir le déplacement vertical :

$$V_o(X) = \Omega \left( \frac{X^2}{L} - X \right) \quad (2.39)$$

De la seconde équation d'équilibre  $n_2^c = 0$ , le déplacement d'ovalisation,  $w_2^c$  s'écrit :

$$w_2^c = a \frac{a^4}{e^2} \left( -\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \right)^2 \quad \text{où} \quad \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} = \frac{2\Omega}{L} \quad (2.40)$$

Configuration numéro	1	2	3
Déplacement d'ovalisation $w_2^c$ (m)	$4.0 \times 10^{-2}$	$4.8944511 \times 10^{-3}$	$7.151616 \times 10^{-5}$

Table 2.5 – Résultats analytiques du déplacement  $w_2^c$  en flexion pure

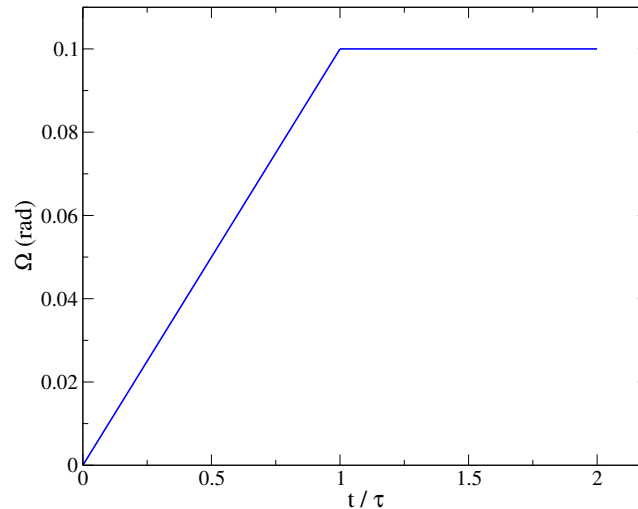


Figure 2.10 – Historique de la rotation imposée lors d'une flexion pure

Pour chaque configuration de tuyauterie, une rotation uniforme  $\pm\Omega$  de  $\pm 0.1$  rad est imposée. Les solutions analytiques sont données dans la Tab. (2.5) :

Comme précédemment les rotations sont imposées de manière progressive (voir Fig. (2.10)).

Les déplacements d'ovalisation de chaque configuration sont fournis dans la Fig. (2.11). Pour ne pas alourdir la présentation, seuls les résultats numériques au nœud de l'extrémité droite pour un élément et dix éléments sont exposés. Tous les calculs numériques sont effectués avec un nombre de Courant  $C = 0.5$  (voir Eq. (4.77)) et avec un pas de temps de stabilité fourni dans la Tab. (2.2). Les deux extrémités sont bloquées dans la direction transversale pour respecter la condition  $V_o = 0$ . Pour ces cas tests le temps de montée,  $\tau$ , vaut pour un seul élément  $\tau = 300 \max(\Delta t_i)$  et pour dix éléments  $\tau = 3000 \max(\Delta t_i)$ . En gardant un temps de montée seulement 100 fois plus grand que le maximum des pas de temps caractéristiques, la solution numérique oscille fortement.

Contrairement aux cas tests précédents, la solution analytique du mode de Fourier considéré (ici  $w_2^c$ ) est quadratique (voir Eq. (2.40)). En effet la solution dépend du carré de la rotation  $\Omega$  imposée pour  $w_2^c$  petit. Ainsi, les résultats numériques n'ont plus une allure linéaire mais bien polynomiale du second ordre. Les résultats numériques pour un ou dix éléments sont en très bonne adéquation avec les solutions théoriques associées.

Même en augmentant le temps de montée, les solutions numériques oscillent beaucoup plus que dans les cas précédent. Lors de la flexion et de l'ovalisation (voir Eq. (4.83) du chapitre n°4) la condition de stabilité est inversement proportionnelle au carré du rapport  $a/L$ . Les oscillations sont donc de plus en plus importantes à mesure que le rapport  $a/L$  diminue. C'est pour cela que les oscillations augmentent entre les configurations 1,2 et 3.

L'ovalisation de la section est dans le cas présent uniforme. Jusqu'alors, seules des solutions uniformes sur les déplacements de la section en ne considérant qu'un seul mode de Fourier ont été réalisées. Ce choix de modélisation a permis de simplifier la résolution théorique et de vérifier le modèle numérique. Le modèle doit être testé sur des exemples plus complexes afin d'évaluer la pertinence des hypothèses du modèle proposé. C'est l'objet de la section suivante où le tube est soumis à un effort localisé. Devant la complexité de la solution, les résultats de simulations du modèles sont comparés à des résultats de simulation d'un code élément fini tridimensionnel.

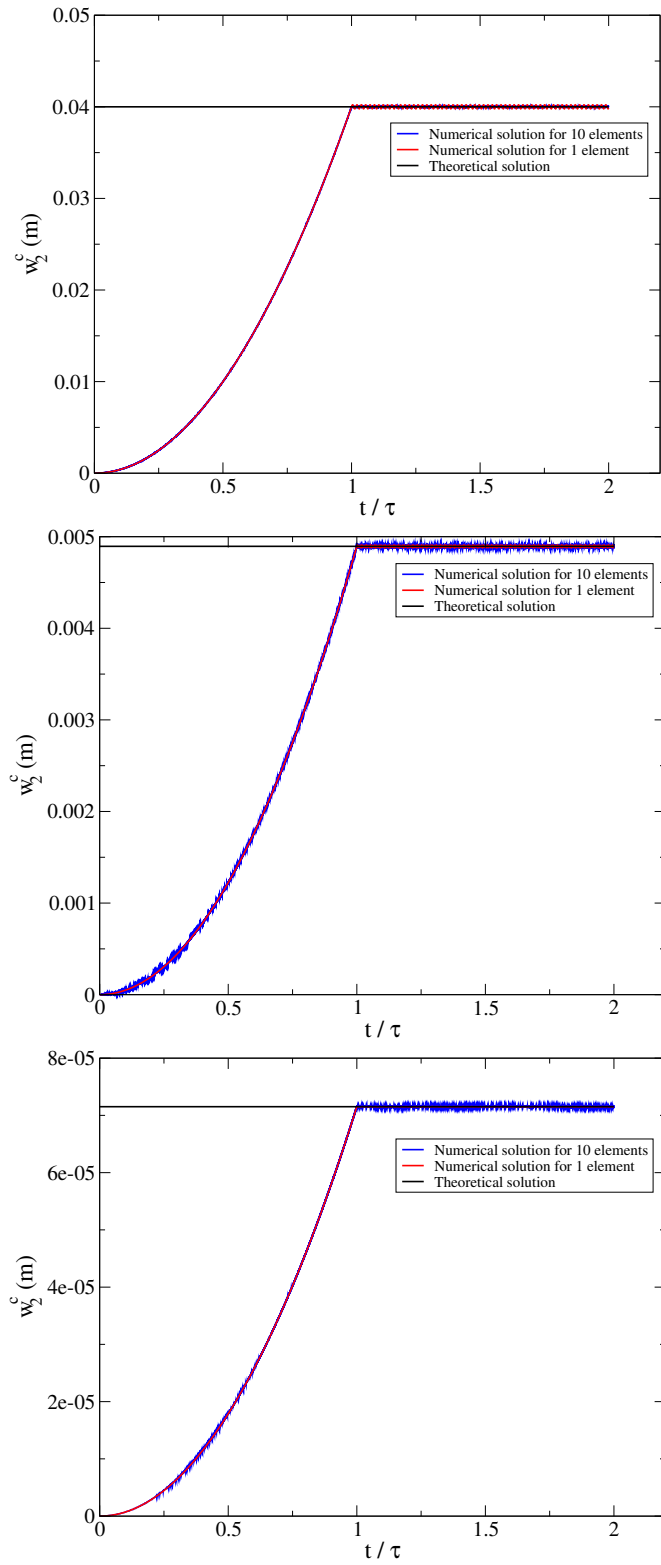


Figure 2.11 – Résultat numérique du déplacement d'ovalisation lors d'une flexion pure pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas)



### 2.2.6 . Grande déformation de la section obtenue en appliquant une force surfacique localisée

Le dernier cas test présenté permet d'évaluer le modèle proposé ici et faisant intervenir plusieurs modes de Fourier tels qu'ils ont été introduits dans l'Eq. (1.62). Ici, la tuyauterie est encastrée à ses deux extrémités et est soumise à une force surfacique localisée notée  $\mathbf{P}(X, \theta, Z)$  d'amplitude  $F_z$  orientée selon  $-\mathbf{E}_Z$  comme décrit sur la Fig. (2.12).

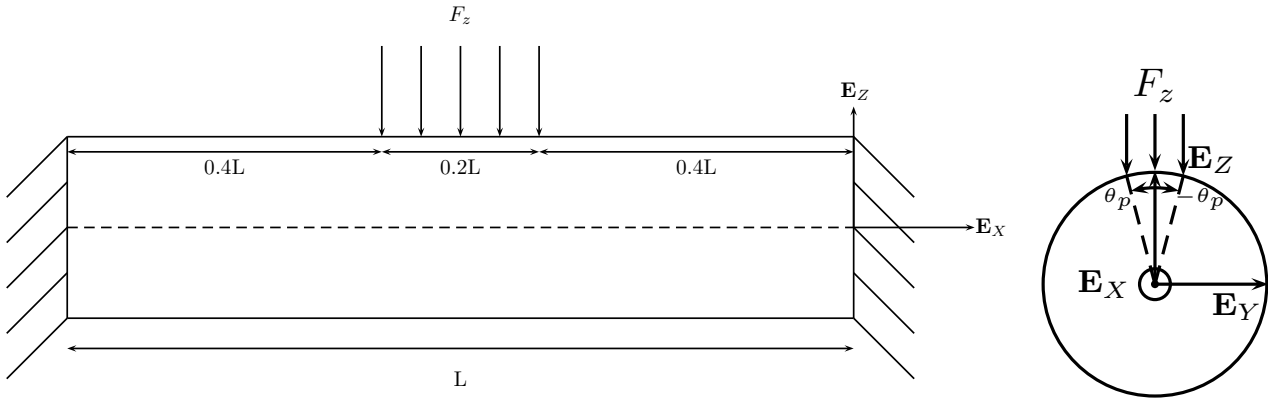


Figure 2.12 – Tuyauterie encastrée à ses deux extrémités soumise à un chargement surfacique localisée en son centre : vue plane (gauche), vue transversale (droite)

#### Analyse préliminaire permettant de fixer le nombre de modes de Fourier à considérer

Jusqu'à présent, le nombre de modes  $N_f$  n'a pas encore été fixé. Le mode 0 ainsi que le mode 2 de Fourier ont été étudiés précédemment mais de façon indépendante et sur des cas où la section se déforme peu et de façon uniforme. Dans cette sous-section l'objectif est ainsi de déterminer le nombre minimal de modes de Fourier à considérer pour obtenir une solution acceptable. Dans la littérature, les auteurs semblent converger vers un nombre maximal et suffisant de modes de Fourier :  $N_f = 6$  [106, 75, 44, 82]. Afin de vérifier si ce nombre de modes est suffisant, une comparaison préliminaire entre une modélisation classique de coque, développée en plusieurs modes de Fourier, et une solution numérique de type coque ainsi qu'une convergence en modes sont proposées. Dans la modélisation classique de coque, seule la contribution membranaire est étudiée et le gauchissement n'est pas pris en compte. Les termes  $w_o$  et  $v_o$  sont développés en séries de Fourier mais ils sont totalement indépendants. En effet, l'hypothèse d'inextensibilité n'est pas considérée et il n'y a pas de mouvements de corps rigides à supprimer car il n'y a pas de mouvement de poutre. L'objectif est de reconstruire la forme de la section avec la famille  $(\cos(i\theta), \sin(i\theta))$ , l'analyse n'est donc pas mécanique mais purement géométrique. Cette comparaison préliminaire permet de vérifier que  $N_f = 6$  représente bien géométriquement la forme de la section déformée. Afin d'obtenir les coefficients de Fourier de la section déformée, la méthode des moindres carrés est utilisée. Cette méthode permet, pour un nombre de modes de Fourier choisi, de déterminer les coefficients correspondants afin de représenter au mieux la déformée de la section en minimisant la distance entre la section construite et celle à approcher.

La solution numérique de référence est donnée par le code de calcul code\_aster<sup>1</sup> pour des éléments de coques appelés Coque\_3D [26]. Les éléments Coque\_3D sont linéaires et bi-quadratiques : des quadrangles à 9 nœuds. Le maillage numérique de référence est fin et il contient 171345 degrés de liberté, 32068 nœuds et 9082 éléments.

Afin d'obtenir une déformation importante de la section, l'angle  $\theta_p$  est choisi petit (voir Fig. (2.12)). Ainsi, on choisit de prendre, de façon arbitraire, un angle  $\theta_p = \frac{\pi}{100}$ .

La force surfacique localisée orientée en  $-\mathbf{E}_Z$  s'écrit alors :

$$\mathbf{P}(X, \theta, Z) = \begin{cases} F_z & : 0.4L \leq X \leq 0.6L; \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{100} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{100}; Z = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.41)$$

1. <https://www.code-aster.org>

La puissance des efforts extérieurs devient dans le cas présent :

$$\mathcal{P}_{ext} = F_z \int_0^L \int_{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{100}}^{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{100}} (\delta V_o + \sin \theta \delta w + \cos \theta \delta v) adX d\theta \quad (2.42)$$

Pour simplifier la présentation, seule la configuration numéro 1 (voir Tab. (2.1)) est étudiée pour ce cas test. La force surfacique, avec  $F_z = 10^{10} \text{N}$ , est appliquée sur la surface moyenne, qui dans le cas de la solution de référence de code\_aster correspond naturellement au maillage puisque seule la surface moyenne a été définie dans la géométrie.

La section fortement déformée obtenue avec code\_aster est alors prise en considération afin d'évaluer le nombre de modes nécessaires à une bonne approximation.

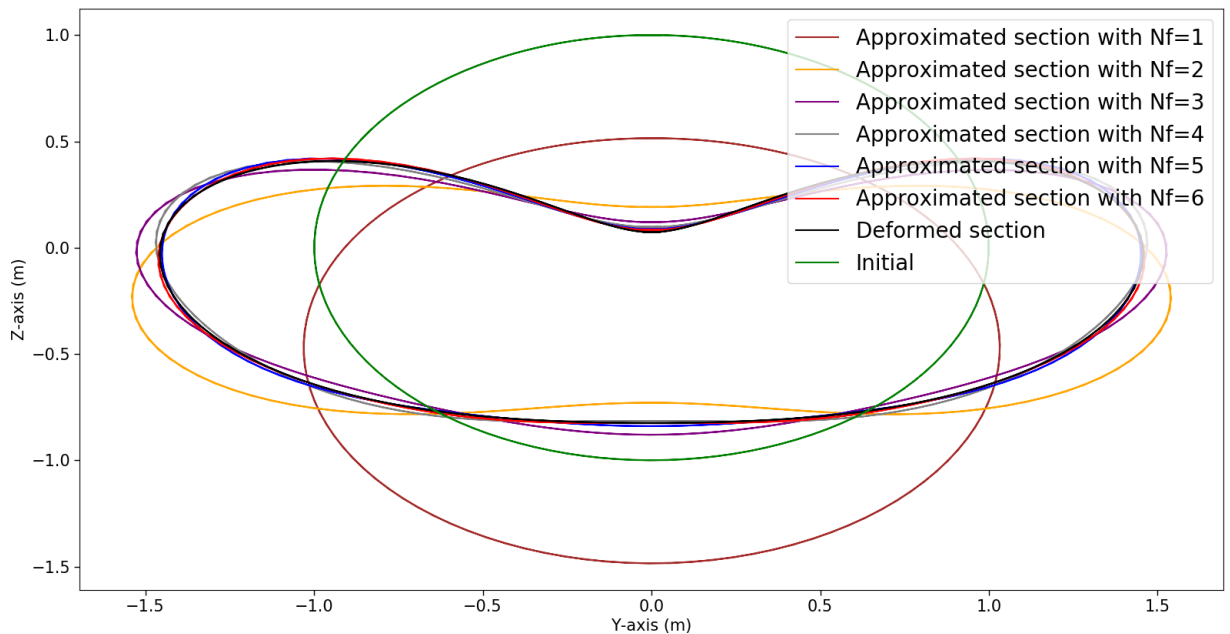


Figure 2.13 - Comparaison du déplacement de la section selon le nombre de modes de Fourier considérés

Comme indiqué sur la Fig. (2.13) à partir de  $N_f = 3$ , la solution par minimisation semble bien représenter les déplacements de la section. Pour valider cette impression, la Fig. (2.14) permet de représenter plus fidèlement la convergence en considérant une erreur relative avec la norme de Frobenius (dénommée également norme euclidienne ou norme 2 pour les vecteurs et s'exprime pour un vecteur quelconque  $\mathbf{x}$  telle que  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ). Le choix de considérer  $N_f = 6$  semble donc être un juste milieu entre une bonne précision et un faible coût en terme de modes de Fourier à retenir.

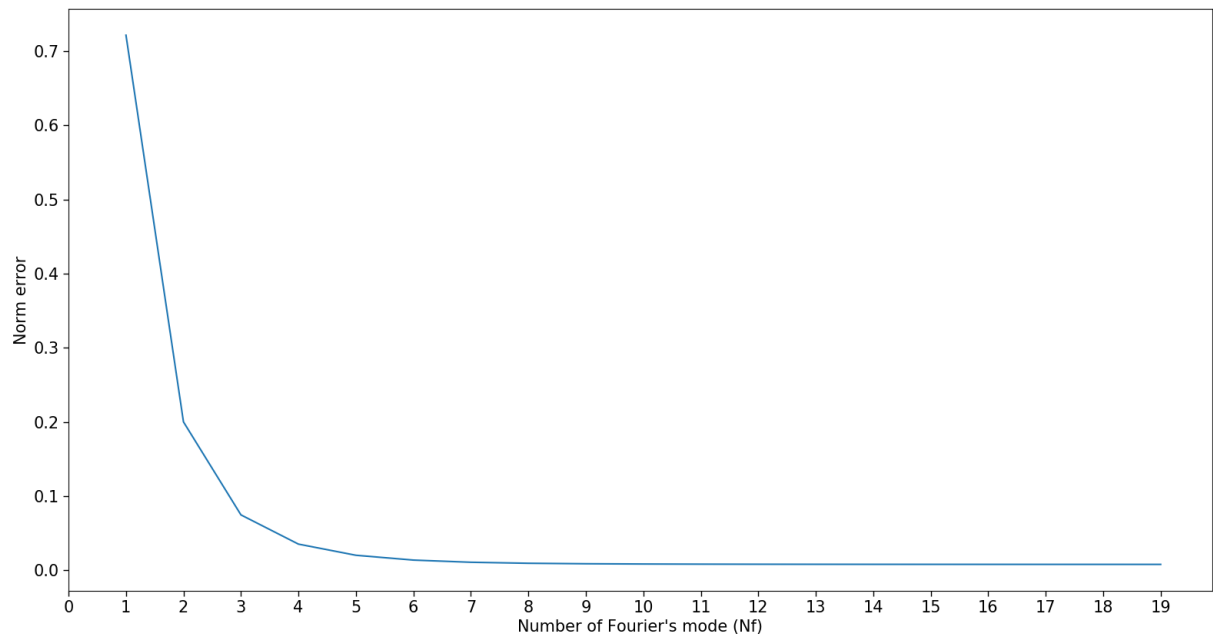


Figure 2.14 – Erreur relative pour la convergence en mode

#### Comparaison avec un calcul coque et convergence en mode

La partie précédente a permis de fixer le nombre de modes de Fourier à retenir. Fort de cette information, le modèle théorique de poutre enrichi peut être désormais déterminé entièrement en prenant  $N_f = 6$ . Le fait de retenir autant de modes de Fourier rend très difficile la résolution analytique de ce problème. Une comparaison entre le modèle de poutre enrichi développé et une solution numérique tridimensionnelle de type coque est maintenant effectuée afin de valider ce cas de chargement complexe.

La solution numérique du modèle proposé ici contient au maximum (i.e. pour  $N_f = 6$ ) 264 degrés de liberté, 11 nœuds et 10 éléments. Il y a 42 degrés de liberté par nœud, mais pour un problème symétrique seuls 24 degrés de liberté suffisent d'où  $24 \times 11 = 264$  degrés de liberté pour 11 nœuds.

La force surfacique localisée est imposée lentement avec le même temps de montée que pour la pression interne imposée et l'extension simple (voir Fig. (2.15)).

Comme mentionné précédemment, l'obtention d'une solution analytique est difficile, car il y a plusieurs modes de Fourier couplés. Afin d'obtenir les efforts généralisés, qui ne seront pas détaillés ici, le calcul formel, par le biais de Sympy<sup>2</sup> et de wxMaxima<sup>3</sup>, a été largement utilisé (voir annexe F (page 139)).

Dans tout ce qui suit, la section avant déformation, parfaitement circulaire, est de couleur verte et la section de référence déformée obtenue avec code\_aster est de couleur noire.

Dans un premier temps, une comparaison entre différents choix de valeur  $N_f$  est entreprise (voir Fig. (2.16)) pour valider le choix retenu précédemment. L'élément fini PTSD (i.e. l'élément développé ici) est considéré avec différentes modélisations non linéaires prenant un nombre différent de modes de Fourier. La section étudiée est la section centrale (i.e. en  $X = 0.5L$ ). De par la symétrie de la géométrie et du chargement, cette section ne subit pas de déformation hors plan, notamment pas de gauchissement, et reste donc plane.

2. <https://www.sympy.org>

3. <https://wxmaxima-developers.github.io/wxmaxima/>

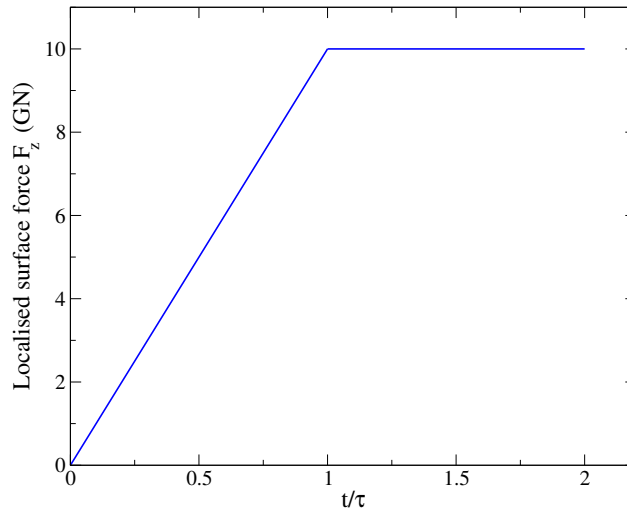


Figure 2.15 - Historique de la force surfacique localisée imposée

En considérant  $N_f = 2$ , la solution numérique est une ellipse avec une légère dissymétrie due à l'hypothèse d'inextensibilité comme discuté dans [51]. Cette solution ne représente donc pas fidèlement la forme de la section de référence. En prenant  $N_f = 4$  ou  $N_f = 6$  la déformée de la section est proche de la section de référence. La solution numérique obtenue avec  $N_f = 6$  est plus proche de la solution de référence que celle obtenue avec  $N_f = 4$ . Ce qui montre bien que plus il y a de modes de Fourier considérés plus la solution numérique se rapproche de la solution de référence. Ainsi dans la suite, tous les résultats numériques présentés seront effectués avec  $N_f = 6$ , sauf mention contraire explicite.

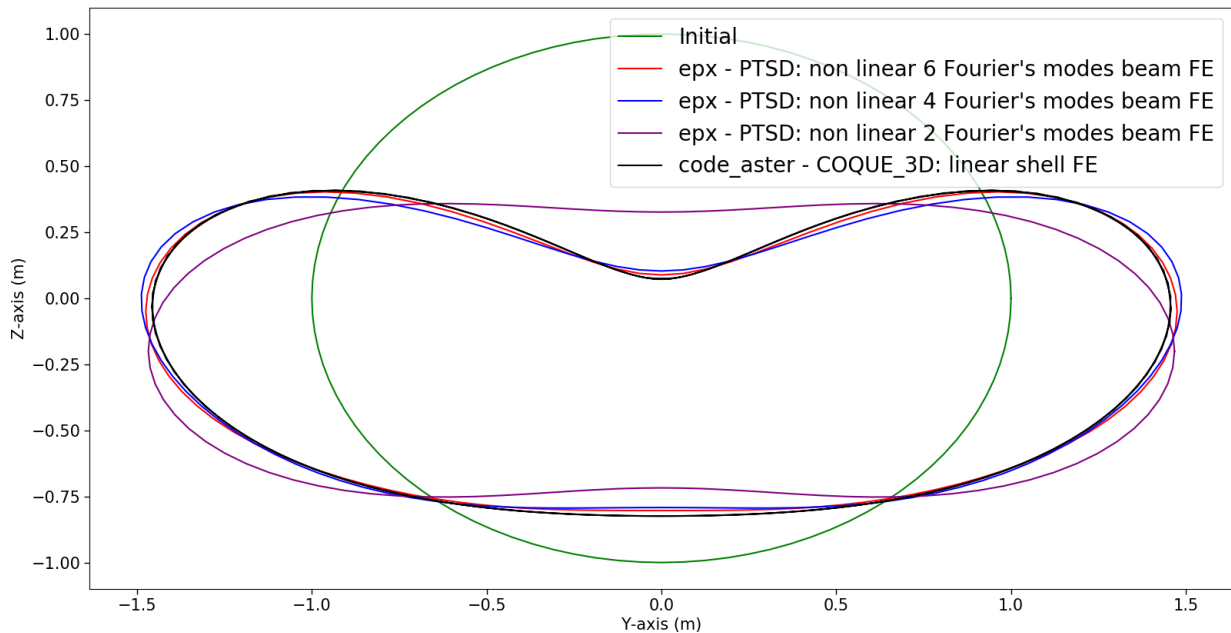


Figure 2.16 - Comparaison de la solution selon le nombre de modes de Fourier en  $X = 0.5L$

### Impact des termes de gauchissement

Le but de cette nouvelle comparaison est de regarder l'impact des termes de gauchissement sur la solution numérique obtenue (voir Fig. (2.17)). La section centrale (i.e. en  $X = 0.5L$ ) est à nouveau étudiée et comme mentionné précédemment la section ne subit pas de gauchissement. Cette étude permet donc de discuter de l'importance des termes de gauchissement, d'un point de vue des déformations dans le plan de la section.

En l'absence de gauchissement, représenté par la courbe violette, la déformation de la section est largement sous estimée et ne représente pas la section déformée obtenue avec code\_aster.

En prenant seulement le second mode de Fourier pour les termes liés au gauchissement, représenté par la courbe bleue, la solution numérique obtenue est proche de la solution de référence. Ceci permet de conclure que le mode 2 de gauchissement est prépondérant.

La courbe rouge, qui prend en compte 6 modes de Fourier pour les termes de gauchissement, représente le mieux la déformée de la section de référence.

Cette analyse permet de mettre en lumière que les termes de gauchissement doivent être considérés. Dans la suite,  $N_f = 6$  est considéré pour le gauchissement ainsi que pour les déplacements dans la section comme évoqué dans la partie précédente.

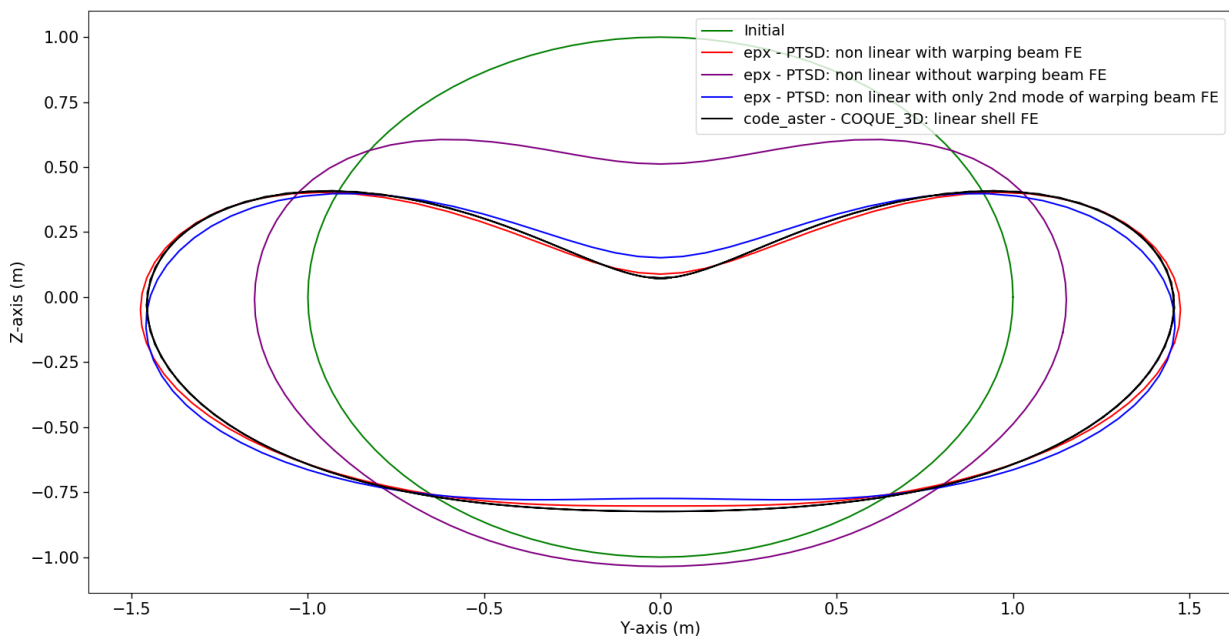


Figure 2.17 – Comparaison de la solution avec ou sans prise en compte du gauchissement en  $X = 0.5L$

### Comparaison entre le modèle linéaire et le modèle non-linéaire

Désormais les comparaisons vont se focaliser sur les différences observées entre le modèle linéaire et non linéaire. Le modèle linéaire ne prend pas en compte les termes de couplage du second ordre. Afin d'évaluer la déformée le long de la tuyauterie, plusieurs sections transversales, avec une position axiale  $X$  différente, sont étudiées.

La section centrale est tout d'abord analysée (i.e. en  $X = 0.5L$ ). Le modèle linéaire sous-estime faiblement la translation verticale ainsi que l'ovalisation de la section transversale comme décrit en Fig. (2.18), la déformée reste tout de même acceptable. Le modèle non linéaire, quant à lui, représente bien la déformée de la section.

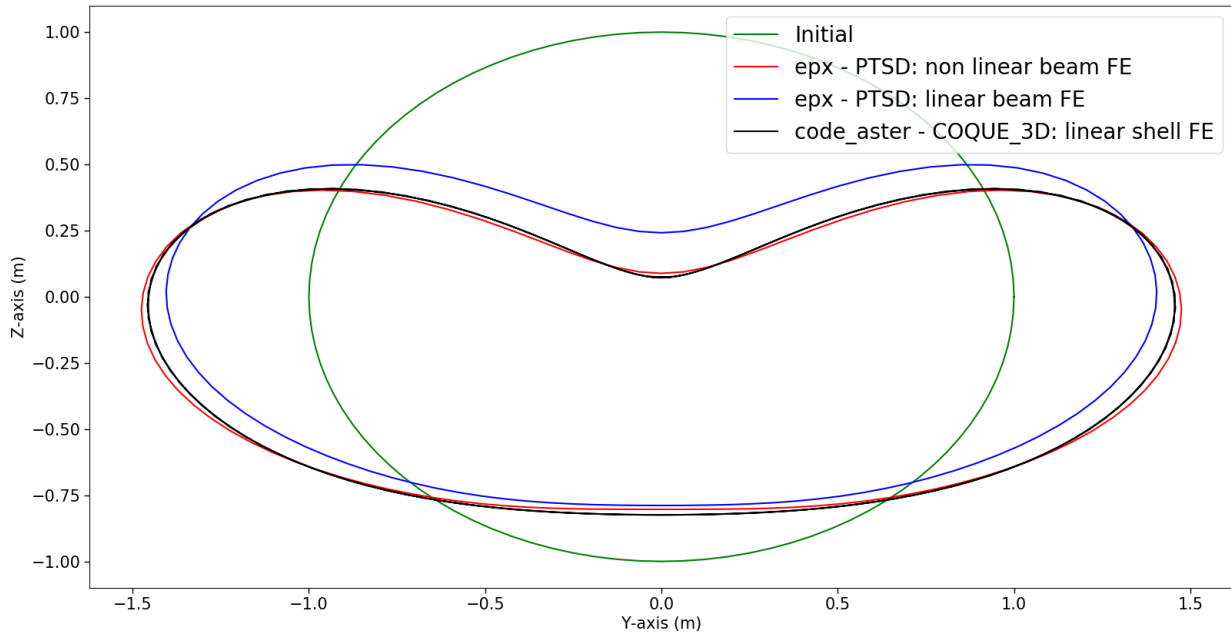


Figure 2.18 – Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.5L$

Plus les sections s'éloignent du centre moins elles sont déformées. La section transversale en  $X = 0.6L$  reste tout de même très déformée (voir Fig. (2.19)). Contrairement à la section centrale, les sections présentent désormais une rotation globale ainsi qu'un gauchissement important comme présenté dans la Fig. (2.20). De nouveau, le modèle numérique linéaire sous-estime légèrement le déplacement vertical ainsi que l'ovalisation comme décrit sur la Fig. (2.19). Cependant le modèle non linéaire surestime l'ovalisation de la section.

Le gauchissement de la section décrit dans la Fig. (2.20) est bien représenté par les deux modèles. Les deux modèles arrivent à représenter la grande déformation causée par le chargement localisé. Le modèle non linéaire décrit une rotation globale plus importante que le modèle de référence de code\_aster alors que le modèle linéaire est en très bonne adéquation au niveau de la rotation.

Le modèle non linéaire s'ovalise plus et a une rotation plus importante. Ceci s'explique simplement par le fait que les termes non linéaire introduits, crée un couplage entre la rotation de la section globale et les déplacements locaux dans la section. Dès lors que la section tourne, la section s'ovalise et vice-versa. Ces termes supplémentaires ajoutent donc au modèle linéaire une ovalisation et une variation d'inertie qui influe sur la rotation globale et l'équilibre du moment de flexion.

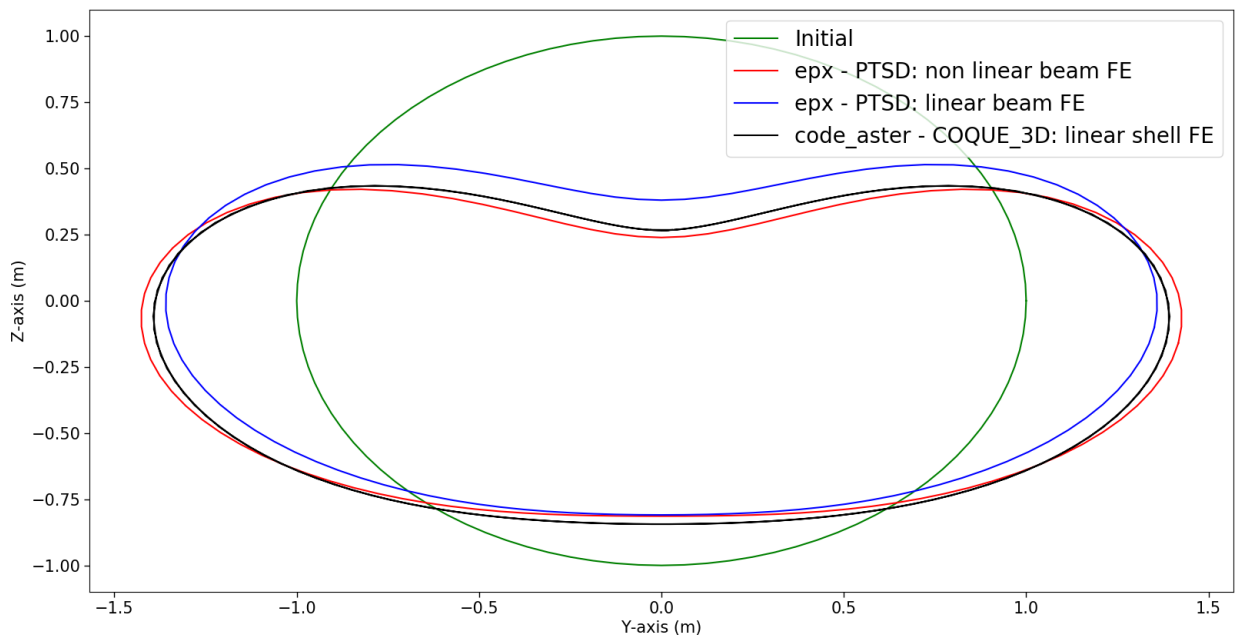


Figure 2.19 - Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.6L$

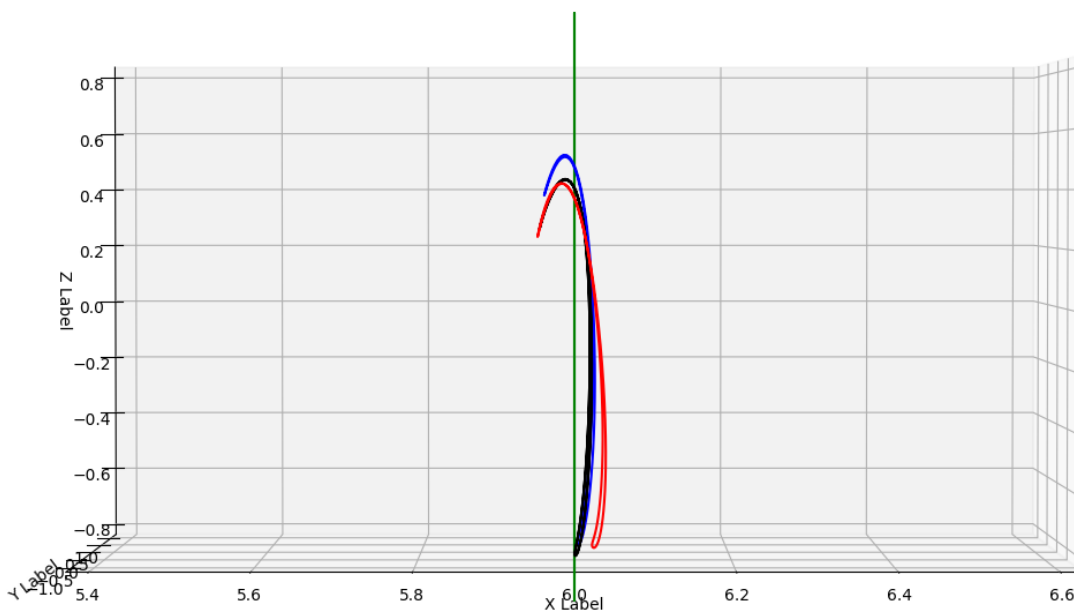


Figure 2.20 - Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.6L$

Les sections transversales qui s'éloignent du milieu de la tuyauterie sont de moins en moins déformées (voir Figs. (2.21, 2.23, 2.25)). Le gauchissement de la section est également de moins en moins important ainsi que la rotation de la section globale (voir Figs. (2.22, 2.24, 2.26)). De la même façon, l'écart entre les modèles linéaire et non linéaire diminue mais également la différence avec la solution de référence. Pour des sections peu déformées, les deux modèles donnent des résultats très satisfaisants.

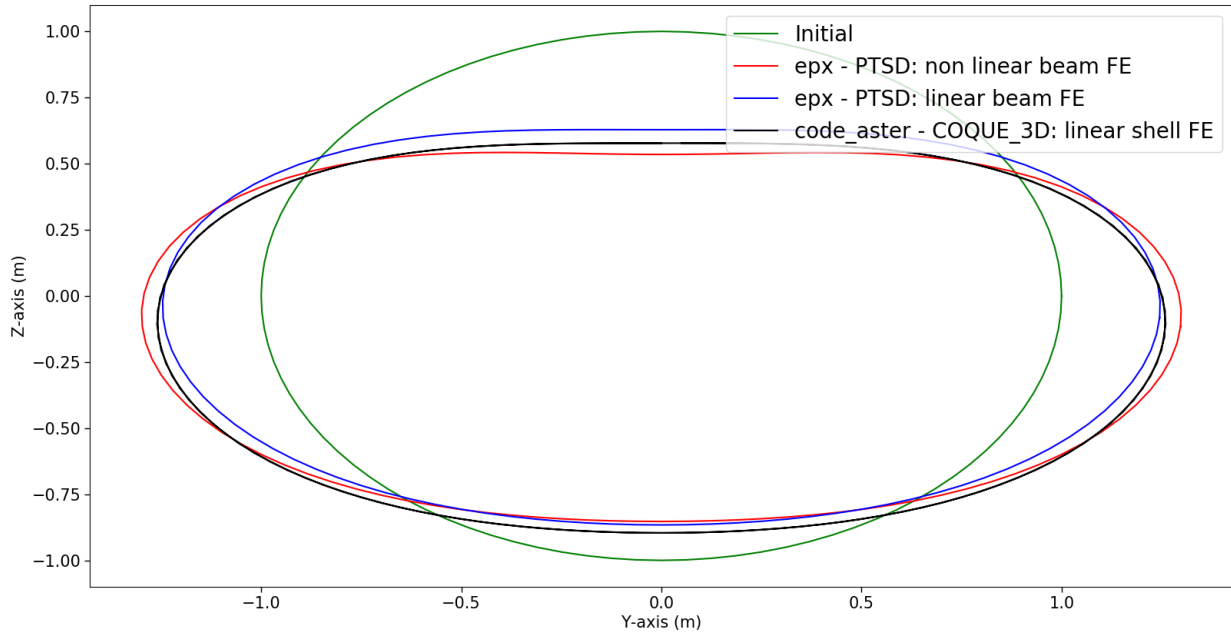


Figure 2.21 - Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.7L$

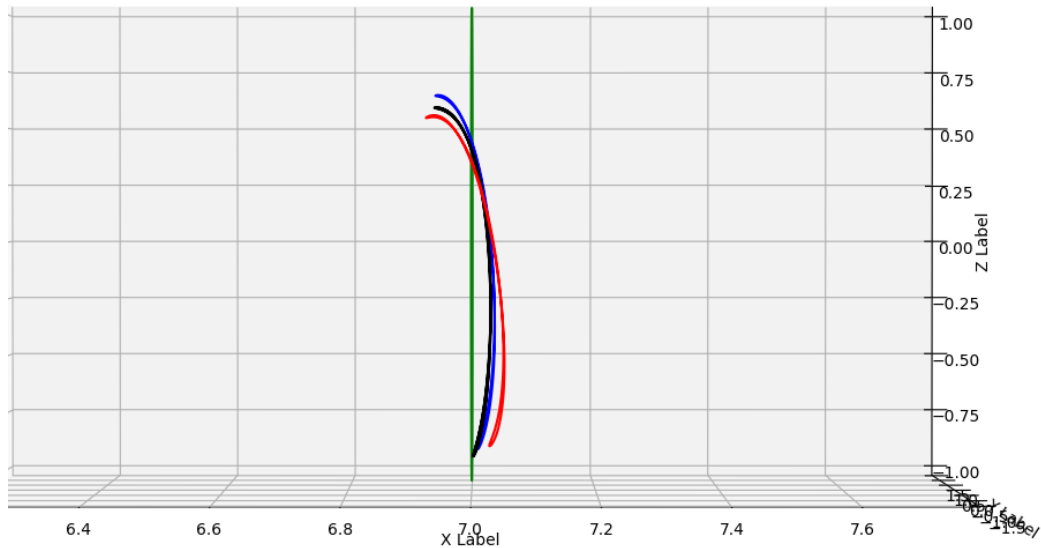


Figure 2.22 - Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.7L$



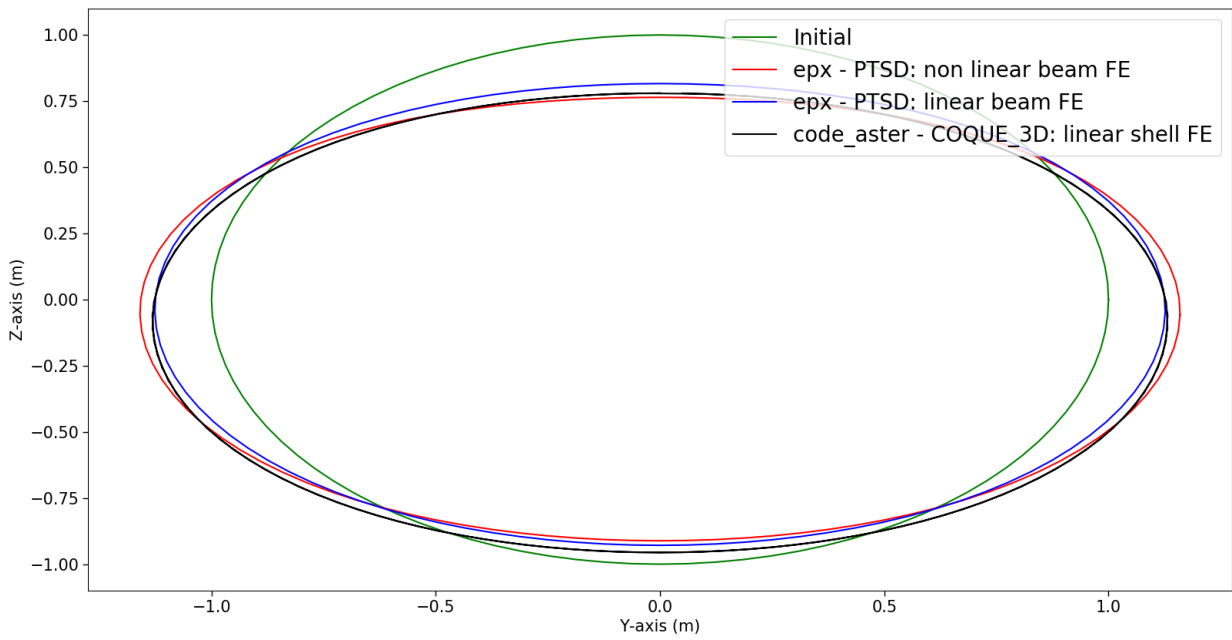


Figure 2.23 - Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.8L$

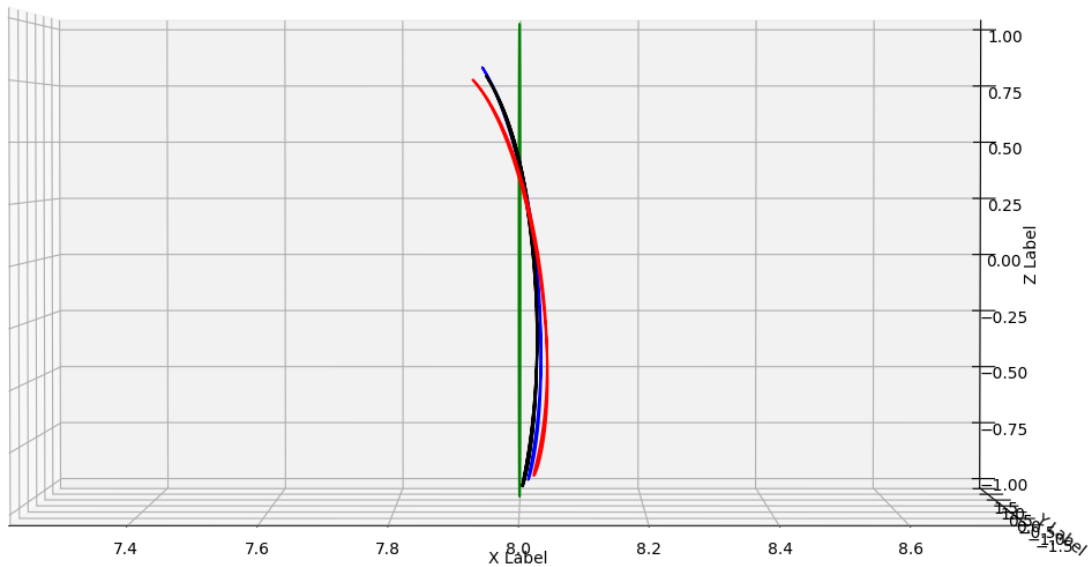


Figure 2.24 - Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.8L$

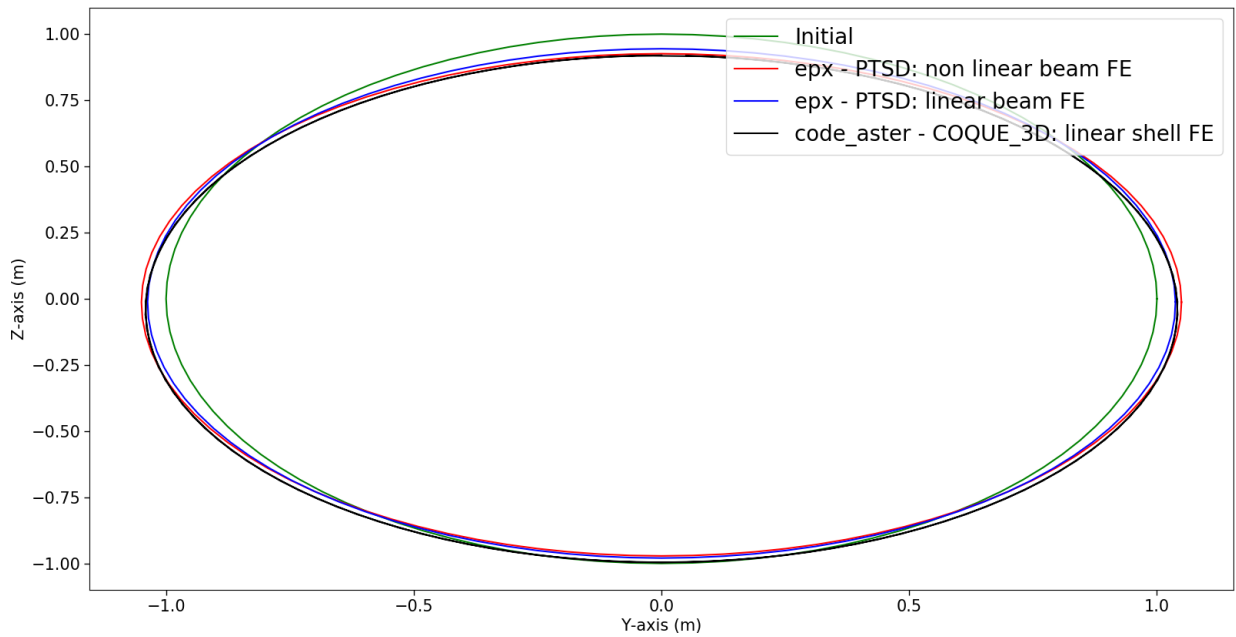


Figure 2.25 - Comparaison de la solution entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.9L$

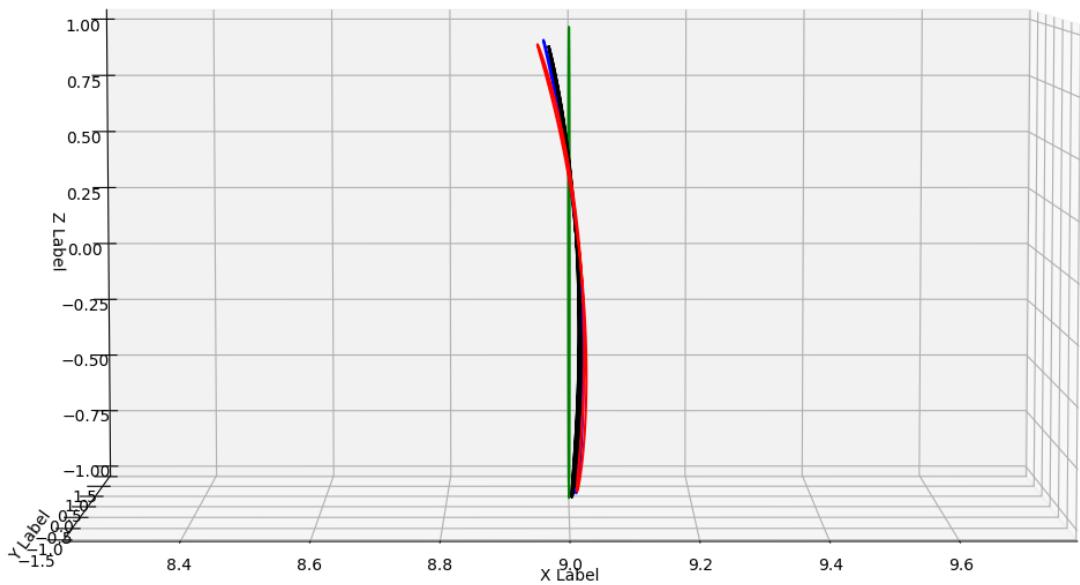


Figure 2.26 - Comparaison du gauchissement entre le modèle linéaire et non linéaire en  $X = 0.9L$

L'élément développé a été éprouvé par une force surfacique localisée permettant des variations importantes de la section. Les analyses menées permettent de valider le modèle linéaire et non linéaire qui donnent des résultats satisfaisants comparés à une solution de référence tridimensionnelle de type coque.

### 2.2.7 . Discussion autour de l'efficacité de l'élément proposé

Le choix de considérer un élément de type filaire permet de simplifier la modélisation de sa géométrie et son maillage. L'un des autres objectifs, à utiliser un modèle de poutre, est, en réduisant le nombre de degrés de liberté, de diminuer le temps de calcul.

Il est assez difficile de comparer directement le temps de calcul, entre deux modélisations de nature différente (ici poutre enrichie et coque), dans un algorithme explicite. En effet pour faire une comparaison rigoureuse, il faudrait comparer le nombre de degrés de liberté de chaque modèle, le coût numérique de chaque degré de liberté, le pas de temps de stabilité associé à chaque élément et déterminer le nombre d'éléments minimums nécessaires à chaque modélisation pour obtenir une solution numérique, qui au delà de ce nombre d'éléments ne dépend plus de la finesse du maillage.

Dans cette sous-section, une comparaison entre l'efficacité du modèle développé ici et celui d'un modèle de coque est entreprise. L'analyse se focalise autour du nombre de degrés de liberté et du pas de temps de stabilité associés pour les différents cas de chargement analysés précédemment. La démarche qui suit permet de se donner un ordre de grandeur de l'efficacité de l'élément pour connaître a priori le gain en coût de calcul.

L'élément Coque\_3D utilisé précédemment est coûteux d'un point de vue du nombre de degrés de liberté, puisque cet élément à 9 nœuds et 51 degrés de liberté : 8 nœuds avec 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) et un nœud avec 3 degrés de liberté (3 translations) ( $8no \times 6ddl_s + 1no \times 3ddl_s = 51ddl_s$ ). Un autre élément, DKT (Discrete Kirchhoff Triangle)[27], a été également utilisé et donne de très bon résultats comme décrit sur la Fig. (2.27). Dans le cas présent, DKT, peut utiliser des quadrangles à 4 nœuds avec 6 degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) par nœuds soit 24 degrés de liberté au total ( $4no \times 6ddl_s = 24ddl_s$ ). Dans la Fig. (2.27), il y a également une comparaison faite avec un maillage grossier avec l'élément Coque\_3D et DKT, représentée par la courbe jaune et bleue respectivement. Le maillage est dit grossier car la solution obtenue n'est pas "lisse" du fait qu'il y a peu d'éléments et de nœuds. Les deux solutions numériques (Coque\_3D et DKT) obtenues avec ce maillage grossier sont très proches l'une de l'autre et elles donnent des résultats plutôt satisfaisants.

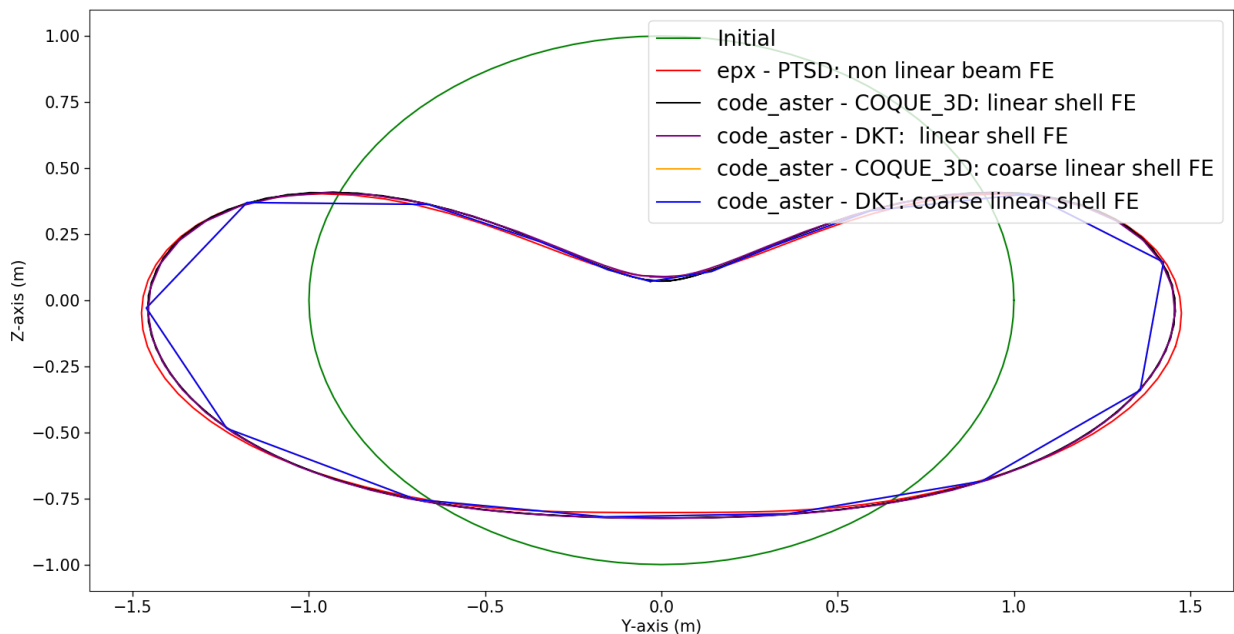


Figure 2.27 – Comparaison avec un maillage grossier et un autre élément dans le cas de la force surfacique localisée en  $X = 0.5L$

Afin de faire une comparaison pertinente, il est judicieux de choisir la modélisation la moins riche (i.e. celle avec le

moins de degrés de liberté). Ainsi, le cas le plus pénalisant est la modélisation comprenant le maillage grossier et l'élément DKT. C'est autour de cette modélisation que les comparaisons sont faites en se comparant à la modélisation de poutre enrichie développée ici.

Pour la suite de cette analyse, une portion de tube de longueur  $L = 1\text{m}$ , de rayon moyen  $a = 1\text{m}$  et d'épaisseur  $e = 0.1\text{m}$  est considérée. Cette portion correspond exactement à un élément de l'élément de poutre enrichi développé ici. Les propriétés du matériau sont celles de la configuration n° 1 (voir Tab. (2.1)). Chaque élément de poutre ou de coque a une longueur de  $1\text{m}$ .

Le maillage grossier contient 4 éléments par quart de cercle, soit 16 éléments et 16 arêtes de 2 nœuds par portion. Ainsi une portion contient 192 degrés de liberté  $16 \times 2 \times 6 = 192$ .

Dans le cas du modèle développé ici, la condition de stabilité est pilotée par la condition de stabilité sur l'ovalisation (voir Eq. (4.83)). Pour une coque, la modélisation devrait également être pilotée par différentes contributions comme la traction, la torsion, la flexion, le gonflement ou l'ovalisation par exemple. Cependant, pour les modèles de coque développés dans un code de dynamique explicite, il est commode de simplifier le calcul de la matrice de masse afin de faciliter son inversion, en commençant par la diagonaliser. Ensuite, les termes associés aux degrés de liberté de rotation sont modifiés de façon à ce que la condition de stabilité du schéma soit pilotée uniquement par la condition de stabilité sur la traction [48, 49].

Le pas de temps pour le modèle de poutre enrichi étudié ici est de  $9.039 \times 10^{-5}\text{s}$  (voir Tab. (2.2)). Pour celui de la coque on considère alors que le pas de temps doit être plus petit que :

$$C \times \frac{L}{\sqrt{\frac{D}{\rho}}} = 9.419 \times 10^{-5} \text{ s} \quad (2.43)$$

Les différents cas de chargement précédemment étudiés avec le modèle de poutre enrichi sont comparés au modèle de coque grossier.

Le nombre de courant,  $C$ , est supposé le même entre la poutre enrichie et la coque.

Dans le cas de l'extension simple et de la pression interne imposée, le modèle présenté ne comporte qu'un seul degré de liberté supplémentaire,  $w_o^c$ , si le gonflement est uniforme et deux sinon (i.e.  $w_o^c$  et  $\frac{\partial w_o^c}{\partial X}$ ). De ce fait, si le gonflement est uniforme, l'élément a deux nœuds avec 7 degrés de liberté par nœuds soit 14 degrés de liberté par élément.

Il convient alors de comparer le ratio du nombre de degrés de liberté ainsi que le ratio du pas de temps entre les deux modélisations, exprimés dans l'Eq. (2.44) :

$$\begin{aligned} - \text{Le ratio des degrés de liberté} &: \frac{14}{192} = 7.29 \times 10^{-2} \\ - \text{Le ratio des pas de temps} &: \frac{9.039 \times 10^{-5}}{9.419 \times 10^{-5}} = 0.96 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Le calcul effectué avec le modèle de poutre enrichi est donc a priori 13 fois plus efficace que celui de coque ( $\frac{0.96}{0.0729} = 13.16$ ).

De la même façon dans le cas de la flexion pure dans le plan, seul un degré de liberté est ajouté, le second mode  $w_2^c$ , si l'ovalisation est uniforme et deux sinon (i.e.  $w_2^c$  et  $\frac{\partial w_2^c}{\partial X}$ ). Soit 14 (ou 16) degrés de liberté par élément. Il y a de nouveau un gain d'efficacité de calcul 13 fois supérieur à celui du modèle coque.

Dans le cas de la force surfacique localisée, en considérant  $N_f = 6$ , l'élément comprend 24 degrés de liberté par nœud quand le chargement ainsi que la géométrie sont symétriques, sinon 42 degrés de liberté par nœuds.

Les ratios, pour ces deux configurations, sont exprimés comme suit :

$$\begin{aligned} - \text{Les ratio des degrés de liberté} &: \frac{48}{192} = 0.25; \frac{84}{192} = 0.44 \\ - \text{Le ratio des pas de temps} &: \frac{9.039 \times 10^{-5}}{9.419 \times 10^{-5}} = 0.96 \end{aligned} \quad (2.45)$$

Pour des efforts importants entraînant une grande déformation de la section, le modèle permet au minimum de faire a priori le calcul numérique deux fois plus rapidement ( $\frac{0.96}{0.44} = 2.18$ ) voire même jusqu'à quatre fois plus vite ( $\frac{0.96}{0.25} = 3.84$ ) si le chargement et la géométrie sont symétriques.

Cette sous-section a permis de comparer l'efficacité de différents modèles soumis à différents chargements. Il apparaît que l'élément développé semble a priori plus rapide que le modèle de coque. De plus le modèle de coque étudié dans cette analyse est très grossier. Pour avoir une solution plus continue, il faudrait avoir au moins 64 éléments par section soit quatre fois plus de degrés de liberté. En conséquence, les temps de calcul utilisant le modèle numérique de coque ayant un maillage relativement fin sont quatre fois plus long et donc les temps de calculs pour notre modèle seraient a priori encore plus rapide : 52 fois plus rapide pour la pression interne imposée, l'extension simple et la flexion pure ( $13 \times 4 = 52$ ) et de 8 à 16 fois plus rapide pour la force surfacique localisée ( $2 \times 4 = 8$  et  $4 \times 4 = 16$ ).

Néanmoins, la comparaison exacte du temps de calcul n'a pas été entreprise dans cette partie. Les gains d'efficacité ne sont vrais que si le coût de calcul par degré de liberté est le même (que ce soit poutre ou coque) et qu'il y a suffisamment d'éléments dans la longueur pour que le calcul numérique soit indépendant de la taille de maille au delà d'un certain seuil. Dans la pratique, il est plutôt rare de voir des éléments de coque ayant une longueur très importante par rapport à leur largeur. Il serait plus pertinent de prendre au moins 10 éléments de coque sur la longueur de la portion afin de réduire la longueur de chaque élément. Ce raffinement de maillage, entraînerait un facteur 100 supplémentaire sur l'efficacité. En effet, il y aurait d'une part 10 fois plus de degrés de liberté et d'autre part le temps de stabilité serait divisé également par 10 car il est piloté par la longueur de l'élément. Pour le coût de calcul par degré de liberté il est assez difficile de donner une estimation car cela dépend de la manière dont les forces internes sont calculées et cette information est spécifique à chaque type d'élément de poutre ou de coque.

Le modèle théorique du tube droit a été testé sur différents cas de chargements : l'extension simple, le gonflement en statique et dynamique ainsi que la flexion pure afin de permettre à la section de se gonfler et de s'ovaliser par le biais du mode 0 et du second mode de Fourier respectivement. Le couplage non linéaire s'est avéré être primordial pour ovaliser la section d'un tube droit. Les résultats numériques sont en très bonne adéquation avec les résultats analytiques correspondants.

Dans le but d'aller au delà de ces cas tests simples, un dernier cas test plus complexe, celui de la force surfacique localisée, a été introduit afin de valider le modèle implémenté en se comparant à une solution tridimensionnelle coque de référence. La section est fortement déformée et afin de pouvoir représenter sa déformée, le développement en séries de Fourier a été étendu jusqu'à  $N_f = 6$ . Il apparaît que prendre  $N_f = 4$  ou  $N_f = 6$  permet d'obtenir une bonne précision sans considérer trop de degrés de liberté. Les termes de gauchissement doivent être pris en compte pour obtenir une bonne déformée de la section. Enfin une comparaison entre les modèles linéaire et non linéaire a été effectuée. Les résultats numériques sont très satisfaisants comparés aux solutions de référence. L'élément développé ici est a priori nettement moins coûteux en temps de calcul que les modélisations de type coque.

Dans ce chapitre, les tubes initialement droits ont été tout d'abord modélisés théoriquement, puis ils ont été comparés à des cas tests analytiques et numériques afin de vérifier et de valider le modèle introduit.

Néanmoins les circuits de tuyauteries présentent des changements de direction qui se traduisent notamment par la présence de coude. Dans le chapitre suivant, les tuyauteries présentant une courbure initiale sont alors modélisées puis éprouvées par des cas tests judicieusement choisis.

### 3 - Enrichissement d'un modèle de poutre présentant une courbure initiale considérant les variations de sa section transverse

Dans ce chapitre, l'objectif est de modéliser une tuyauterie courbée prenant en compte les variations de sa section transverse par le biais d'un enrichissement de sa cinématique. La méthodologie développée est similaire à celle du chapitre précédent sur la poutre droite.

Le tube est tout d'abord modélisé en prenant en compte sa courbure initiale, puis l'enrichissement lui permettant d'ovaliser sa section transverse est ajouté. La cinématique est ensuite développée en séries de Fourier suivant la variable circonférentielle  $\theta$ . Les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour la partie poutre et de Love-Kirchhoff pour la partie coque sont considérées de nouveau. Finalement, pour expliciter ce développement, le mode 0 ainsi que le second mode de Fourier sont étudiés indépendamment afin d'obtenir les équations d'équilibre ainsi que les efforts généralisés permettant de déterminer les variations de la section transverse.

Enfin, plusieurs cas tests numériques permettent de vérifier le modèle théorique. Les vérifications numériques sont comparées aux résultats analytiques, de la tuyauterie en extension simple, du tube coudé sous pression interne avec et sans ouverture du coude et du cas de la flexion pure dans le plan.

#### 3.1 . Modélisation théorique enrichie d'un tube coudé

La cinématique de la tuyauterie est décomposée en une partie poutre, prenant en compte les hypothèses d'Euler-Bernoulli, et en une partie coque, qui permet à la section transverse de s'ovaliser, considérant les hypothèses de Love-Kirchhoff. Un couplage non linéaire entre la rotation globale de la section et les déplacements locaux dans la section est introduit. Les degrés de liberté de coque sont développés linéairement selon la variable locale  $Z$  et en séries de Fourier selon la variable circonférentielle  $\theta$  dans le but d'obtenir des quantités ne dépendant que de la variable longitudinale  $s$ . Comme dans le chapitre précédent le principe des puissances virtuelles est utilisé afin d'obtenir les équations d'équilibre et les efforts généralisés associés à différentes type de modélisations.

##### 3.1.1 . Cinématique et déformation d'un tube coudé

Dans ce chapitre, une tuyauterie coudée est considérée. Contrairement au premier chapitre, où l'abscisse curviligne peut être quelconque, la tuyauterie décrite ici présente une courbure circulaire uniforme dans le plan ( $\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y$ ). La position de sa fibre neutre et de sa section transverse sont engendrées par une rotation  $\phi_{max}$ , autour de l'axe  $\mathbf{E}_Z$ , de rayon de courbure noté  $R$ , comme décrit dans la Fig. (3.1).

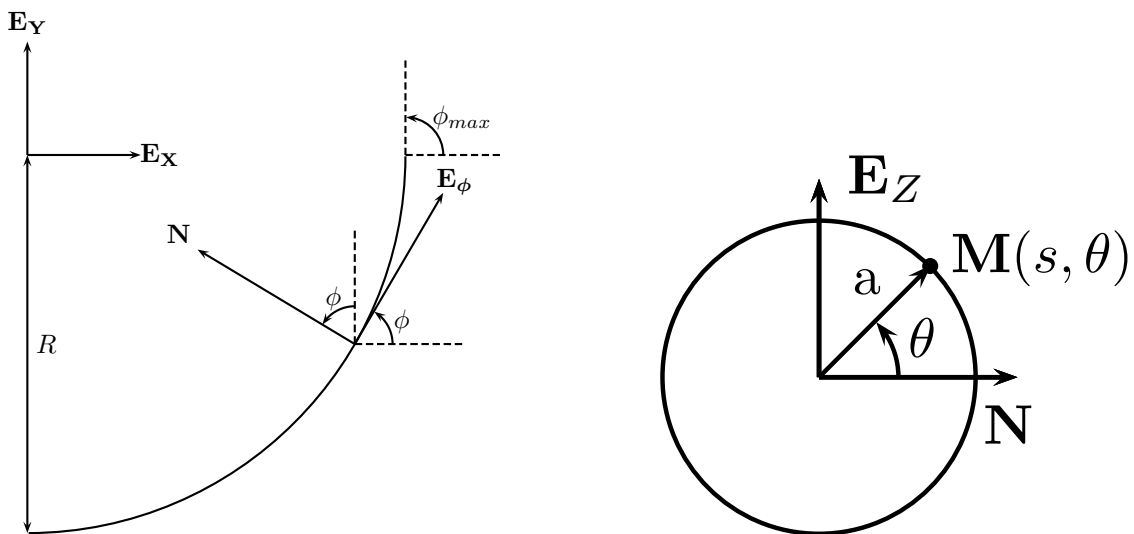


Figure 3.1 - Tuyauterie coudée selon un seul axe (vue plane à gauche et transversale à droite)

L'angle  $\phi$  permet de se repérer sur la fibre neutre de la tuyauterie et l'abscisse curviligne  $s$  est définie telle que :

$$s = R\phi \quad (3.1)$$

La longueur de l'arc de la fibre neutre notée  $L_{arc}$  découle de l'Eq. (3.1) :

$$L_{arc} = R\phi_{max} \quad (3.2)$$

Le tube coudé est ainsi orienté le long de l'axe  $\mathbf{E}_\phi$ , de longueur  $L_{arc}$ , de rayon moyen  $a$  et d'épaisseur  $e$ . Les coordonnées axiale, circonférentielle et radiale sont décrites par  $(\phi, \theta, Z)$  ou  $(s, \theta, Z)$  respectivement. Ainsi les variables de poutre exprimées dans la base  $(\mathbf{E}_\phi, \mathbf{N}, \mathbf{E}_Z)$  et celles de coque exprimées dans la base  $(\mathbf{E}_\phi, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$  dépendent désormais de la variable  $\phi$  ou  $s$ . La signification physique de ces variables ne change pas avec celle introduite dans le chapitre précédent :  $U_o$ ,  $W_o$  et  $V_o$  représentent les translations de la section,  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  décrivent les rotations de la section,  $u$  représente le gauchissement local et  $v$  et  $w$  décrivent l'ovalisation de la section.

De la Fig. (3.1) les relations suivantes découlent naturellement :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\phi = \cos \phi \mathbf{E}_X + \sin \phi \mathbf{E}_Y \\ \mathbf{N} = \cos \phi \mathbf{E}_Y - \sin \phi \mathbf{E}_X \\ \mathbf{E}_R = \cos \theta \mathbf{N} + \sin \theta \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{E}_\theta = \cos \theta \mathbf{E}_Z - \sin \theta \mathbf{N} \end{cases} \quad (3.3)$$

Il est intéressant de noter que le repère  $(\mathbf{E}_\phi, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$  est un repère mobile.

#### Mouvement Plan

Afin de simplifier la présentation, le mouvement est considéré dans le plan du tube i.e.  $V_o = 0$  et  $\Omega_x = \Omega_y = 0$ . Le lecteur intéressé par la modélisation tridimensionnelle complète peut se référer à l'annexe E (page 133).

Les coordonnées du point initial  $\mathbf{M}(\phi, \theta, Z)$  et actuel  $\mathbf{m}(\phi, \theta, Z)$  sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{M} + \mathbf{u} \quad \text{où} \quad \mathbf{M} = -R\mathbf{N} + (a + Z)\mathbf{E}_R \\ \text{et} \quad \mathbf{u} &= (U_o + u - (a + Z) \cos \theta \Omega_z + \Omega_z (-w \cos \theta + v \sin \theta))\mathbf{E}_\phi + (W_o \cos \theta + w)\mathbf{E}_R + (-W_o \sin \theta + v)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (3.4)$$

Le tenseur des déformations du tube coudé qui est utilisé dans ce manuscrit est fourni dans l'Eq. (D.24) de l'annexe D (page 126).

$$\begin{cases} \epsilon_{ss} = \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} + \frac{\partial u_o}{\partial s} - \frac{w_o}{R} \cos \theta + \frac{v_o}{R} \sin \theta \\ + \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] (-w_o \cos \theta + v_o \sin \theta) \\ + Z \left[ -\cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial s^2} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial s} \right] - \frac{1}{aR} \sin \theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \sin \theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\ \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\ 2\epsilon_{s\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial s} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \\ + Z \left[ -\frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \left( \sin \theta \frac{\partial w_o}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{a} u_o + \frac{\cos \theta \sin \theta}{R} u_o \right) \right] \end{cases} \quad (3.5)$$

**Remarque** : Pour obtenir le tenseur linéarisé des déformations, il suffit de supprimer les termes de couplage non-linéaire dans  $\epsilon_{ss}$ .

Dans la suite de ce chapitre, les équations d'équilibre et les efforts généralisés du mode 0 et du second mode de Fourier, dans le plan, sont déterminés. L'ensemble des intégrations est effectué avec le volume d'intégration :  $ad\theta dZ ds$  due à l'hypothèse des coques minces.

### 3.1.2 . Flexion globale, extension simple et gonflement liés au mode 0 dans le plan

Dans cette partie, seul le mode 0 (i.e.  $N_f = 0$ ) de Fourier, correspondant au gonflement de la tuyauterie, est considéré. La cinématique n'est portée que par  $U_o(s)$ ,  $W_o(s)$  et  $w_o(s, \theta) = w_o^c(s)$  (i.e.  $u_o = v_o = 0$ ). Le tenseur des déformations de l'Eq. (3.5) avec cette cinématique devient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} - w_o^c \cos \theta \left[ \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] \\ &\quad + Z \left[ -\cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial s^2} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} w_o^c - \frac{Z}{a^2} w_o^c \\ 2\varepsilon_{s\theta} &= Z \left[ \frac{\sin \theta}{R} \frac{\partial w_o^c}{\partial s} \right]\end{aligned}\quad (3.6)$$

Pour simplifier la présentation, les termes de courbures de coques, étant petits devant la déformation de membrane, sont négligés (voir [67, 13]). Le terme en  $\frac{Z}{R}$  est également très petit et il est négligé également. Ces hypothèses simplificatrices conduisent au tenseur des déformations suivant :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ss} &= \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} - w_o^c \cos \theta \left[ \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] \\ &\quad + Z \left[ -\cos \theta \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} w_o^c\end{aligned}\quad (3.7)$$

L'inertie de poutre est une nouvelle fois simplifiée en supprimant le terme de la forme  $\frac{e^2}{12}$  négligeable devant  $a^2$  telle que :  $I_y = \pi a^3 e$ .

La puissance des forces internes s'exprime telle que :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_i &= - \int_0^{L_{arc}} \left( \int_S \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}^*) a \, d\theta dZ \right) ds \\ &= - \int_0^{L_{arc}} \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + n_z \delta W_o + M_z \frac{\partial^2 \delta W_o}{\partial s^2} + n_o^c \delta w_o^c \right) ds\end{aligned}\quad (3.8)$$

où les efforts généralisés sont définis tels que :

$$\begin{aligned}N &= \int_S \left( 1 - \cos \theta \left[ \frac{a}{R} + \frac{w_o^c}{R} \right] \right) \sigma_{ss} a \, d\theta dZ \\ n_z &= \int_S -\frac{1}{R} \sigma_{ss} a \, d\theta dZ \quad ; \quad M_z = \int_S -\cos \theta (a + Z + w_o^c) \sigma_{ss} a \, d\theta dZ \\ n_o^c &= \int_S \left( -\cos \theta \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \sigma_{ss} + \frac{1}{a} \sigma_{\theta\theta} \right) a \, d\theta dZ\end{aligned}\quad (3.9)$$

Pour rappel, la surface de la section transverse est définie par  $S = 2\pi a e$ . Sans prendre en compte les efforts extérieurs, i.e.  $\mathcal{P}_e = 0$  ni les termes en  $Z$  dans les déplacements, les équations d'équilibre dynamique, données dans la section D.2 de l'annexe D (page 126), s'écrivent :

$$\begin{cases} \rho S \left( \frac{\partial^2 U_o}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\pi a e}{R} (a + w_o^c) \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ (a + w_o^c) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] \right) - \frac{\partial N}{\partial X} = 0 \\ \rho S \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial t^2} \right) - \rho \pi a e \frac{\partial}{\partial s} \left[ (a + w_o^c) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ (a + w_o^c) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] \right] + \frac{\partial^2 M_z}{\partial s^2} + n_z = 0 \\ \rho S \left( \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial t^2} \right) + \rho \pi a e \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ (a + w_o^c) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] + n_o^c = 0 \end{cases}\quad (3.10)$$



Les équations statiques se déduisent simplement :

$$\frac{\partial N}{\partial s} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial s^2} + n_z = 0 ; \quad n_o^c = 0 \quad (3.11)$$

En considérant la loi de comportement donnée en Eq. (1.75), les efforts généralisés deviennent :

$$\begin{aligned} N &= DS \left[ \frac{\partial U_o}{\partial X} - \frac{W_o}{R} + \nu \frac{w_o^c}{a} + \frac{a + w_o^c}{2R} \left[ a \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{w_o^c}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} w_o^c + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} w_o^c \right] \right] \\ n_z &= D \frac{S}{R} \left[ -\frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{W_o}{R} - \nu \frac{w_o^c}{a} \right] \\ M_z &= D\pi a e (a + w_o^c) \left[ a \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{w_o^c}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} w_o^c + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} w_o^c \right] \\ n_o^c &= D\pi a e \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \left[ a \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{a}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{w_o^c}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} w_o^c + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} w_o^c \right] \\ &+ D \frac{S}{a} \left[ \nu \frac{\partial U_o}{\partial s} - \frac{\nu}{R} W_o + \frac{w_o^c}{a} \right] \end{aligned} \quad (3.12)$$

L'effort axial  $N$  est couplé comme précédemment à  $w_o^c$  mais cette fois-ci aussi avec le déplacement transversal  $W_o$ . Le moment fléchissant  $M_z$ , au premier ordre, est également couplé à  $w_o^c$ , ce qui n'était pas le cas dans le tube droit. La courbure de la tuyauterie implique donc des couplages naturels entre les termes de poutre et ceux de coque.

### 3.1.3 . Ovalisation liée au 2<sup>nd</sup> mode dans le plan

Dans cette section seul le second mode de Fourier (i.e.  $N_f = 2$ ) dans le plan est considéré. Comme précédemment l'hypothèse d'inextensibilité est prise en compte (voir Eq. (1.61)) et la cinématique de type coque s'écrit :

$$u_o(s, \theta) = 0 ; \quad w_o(s, \theta) = w_2^c(s) \cos(2\theta) ; \quad v_o(s, \theta) = -\frac{1}{2} w_2^c(s) \sin(2\theta) \quad (3.13)$$

En insérant cette nouvelle cinématique dans l'Eq (3.5), le tenseur des déformations s'exprime sous la forme de :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} - \left( \frac{\cos(3\theta) + 3 \cos \theta}{4} \right) w_2^c \left[ \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] \\ &+ Z \left[ -\cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{\partial^2 w_2^c}{\partial s^2} \cos(2\theta) + \frac{3}{2a} \sin \theta \sin(2\theta) w_2^c \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{3Z}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \\ 2\epsilon_{s\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial s} \sin(2\theta) + Z \frac{\partial w_2^c}{\partial s} \left[ \frac{3}{2a} \sin(2\theta) + \frac{1}{R} \sin \theta \cos(2\theta) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Les termes de courbures de coques sont supposés petits devant les termes membranaires. De manière similaire à ce qui est fait dans [69, 13],  $k_{ss}^c$  et  $k_{s\theta}^c$  sont négligés. Dans la courbure de poutre le terme en  $\frac{Z}{R}$  est également négligeable et le tenseur des déformations devient :

$$\begin{aligned} \epsilon_{ss} &= \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} - \left( \frac{\cos(3\theta) + 3 \cos \theta}{4} \right) w_2^c \left[ \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] \\ &+ Z \left[ -\cos \theta \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} \right] \\ \epsilon_{\theta\theta} &= \frac{3Z}{a^2} w_2^c \cos(2\theta) \\ 2\epsilon_{s\theta} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial w_2^c}{\partial s} \sin(2\theta) \end{aligned} \quad (3.15)$$

La puissance des efforts intérieurs s'écrit telle que :

$$P_i = - \int_0^{L_{arc}} \left( N \frac{\partial \delta U_o}{\partial X} + n_z \delta W_o + M_z \frac{\partial^2 \delta W_o}{\partial s^2} + n_2^c \delta w_2^c + t_2^c \frac{\partial \delta w_2^c}{\partial s} \right) ds \quad (3.16)$$

où les efforts généralisés sont donnés ci-dessous :

$$\begin{aligned}
N &= \int_S \left( 1 - \cos\theta \frac{a}{R} - \left( \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4} \right) \frac{w_2^c}{R} \right) \sigma_{ss} a d\theta dZ \\
n_z &= \int_S -\frac{1}{R} \sigma_{ss} a d\theta dZ \\
M_z &= \int_S \left( -(a+Z)\cos\theta - w_2^c \left( \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4} \right) \right) \sigma_{ss} a d\theta dZ \\
n_2^c &= \int_S \left( -\left( \frac{\cos(3\theta) + 3\cos\theta}{4} \right) \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \sigma_{ss} + \left( \frac{3Z}{a^2} \right) \cos(2\theta) \sigma_{\theta\theta} \right) a d\theta dZ \\
t_2^c &= \int_S -\frac{1}{2} \sin(2\theta) \sigma_{s\theta} a d\theta dZ
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Comme précédemment l'inertie de flexion, sous l'hypothèse des coques minces, est prise égale à :  $I_y = \pi a^3 e$ . En l'absence d'efforts extérieurs et en négligeant les termes en  $Z$  dans le déplacement, les équations d'équilibre en dynamique, exprimées dans la section D.2 de l'annexe D (page 126), s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\rho S \left( \frac{\partial^2 U_o}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\pi a e}{R} \left( a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( a + \frac{3}{4} w_2^c \right) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] + w_2^c \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{3}{4} a + \frac{5}{8} w_2^c \right) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] \right) \\
-\frac{\partial N}{\partial X} = 0 \\
\rho S \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial t^2} \right) - \rho \pi a e \frac{\partial}{\partial s} \left[ a \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( a + \frac{3}{4} w_2^c \right) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] + w_2^c \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{3}{4} a + \frac{5}{8} w_2^c \right) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] \right] \\
+\frac{\partial^2 M_z}{\partial s^2} + n_z = 0 \\
\rho \frac{5S}{8} \left( \frac{\partial^2 w_2^c}{\partial t^2} \right) + \rho \pi a e \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{3}{4} a + \frac{5}{8} w_2^c \right) \left( \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{U_o}{R} \right) \right] \\
-\frac{\partial t_2^c}{\partial s} + n_2^c = 0
\end{array} \right. \tag{3.18}$$

Les équations d'équilibre de la statique sont alors :

$$\frac{\partial N}{\partial s} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial s^2} + n_z = 0 ; \quad \frac{\partial t_2^c}{\partial s} - n_2^c = 0 \tag{3.19}$$

Après intégration en utilisant la loi de comportement en contraintes planes, les efforts généralisés s'expriment comme :

$$\begin{aligned}
N &= D \pi a e \left[ 2 \frac{\partial U_o}{\partial s} - \frac{2}{R} W_o + \frac{a}{R} \left[ a \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) + \frac{3}{4} \frac{w_2^c}{R} + \frac{3}{4} w_2^c \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \right] \\
&\quad + D \pi a e \frac{w_2^c}{R} \left[ \frac{3}{4} a \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) + \frac{5}{8} \frac{w_2^c}{R} + \frac{5}{8} w_2^c \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\
n_z &= D \frac{S}{R} \left[ -\frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{W_o}{R} \right] \\
M_z &= D \pi a^2 e \left[ a \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) + \frac{3}{4} \frac{w_2^c}{R} + \frac{3}{4} w_2^c \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\
&\quad + D \pi a e w_2^c \left[ \frac{3}{4} a \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) + \frac{5}{8} \frac{w_2^c}{R} + \frac{5}{8} w_2^c \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\
n_2^c &= D \frac{3\pi e^3}{4a^3} w_2^c \\
&\quad + D \pi a e \left( \frac{1}{R} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \left[ \frac{3}{4} a \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) + \frac{5}{8} \frac{w_2^c}{R} + \frac{5}{8} w_2^c \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\
t_2^c &= G \frac{S}{8} \frac{\partial w_2^c}{\partial s}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Dans le moment fléchissant  $M_z$ , des termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $w_2^c$  sont présents, il y a donc un couplage naturel entre l'ovalisation et la flexion dans le cas du tube courbé. Au contraire, dans le chapitre précédent sur le tube droit, l'ovalisation de la tuyauterie ne peut se produire en flexion sans les termes de couplage introduits.

### 3.2 . Vérification numérique du tube courbé

L'objectif de cette section est d'évaluer le modèle de poutre courbe enrichi développé ici avec des comparaisons analytiques. Pour vérifier ce nouvel élément, plusieurs cas tests, sur une tuyauterie courbée seule, i.e. sans partie droite ni piquage, avec différents cas de chargements sont effectués comme le tube sous pression interne bloqué à ses deux extrémités, le tube sous pression interne encastré à une seule extrémité et libre de l'autre ou encore la flexion pure dans le plan.

#### 3.2.1 . Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau de différents type de tuyauteries

Un arc de rayon de courbure  $R = 10m$  parcourant un angle  $\phi \in [\pi/2, \pi = \phi_{max}]$  sont considérés pour modéliser la tuyauterie courbée (voir Fig. (3.2)).

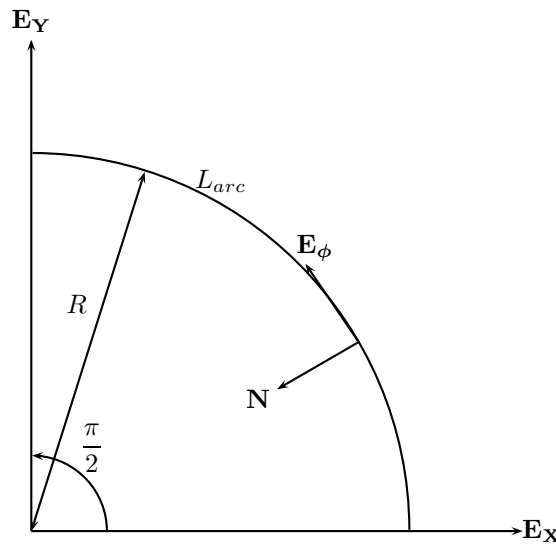


Figure 3.2 – Arc de 90°

Pour ces comparaisons, le modèle de poutre présenté est évalué avec trois configurations de tuyauteries fournies dans la Tab. (3.1). Les trois configurations de tuyauterie présentent les mêmes caractéristiques mis à part le ratio  $a/R$ . La première configuration à un rayon moyen  $a$  proche de  $R$ , la seconde et troisième configurations ont des ratios de moins en moins importants respectivement.

Numéro des configurations des tuyauteries	1	2	3
Rayon de courbure $R$ (m)	10	10	10
Longueur $L_{arc} = \phi_{max}R$ (m)	15.708	15.708	15.708
Diamètre externe $d_{ext}$ (m)	6.3	2.1	0.21
Rayon moyen $a$ (m)	3	1	0.1
Épaisseur $e$ (m)	0.3	0.1	0.01
Ratio $a/R$	0.3	0.1	0.01
Ratio $a/L_{arc}$	0.19	0.06	0.006
Ratio $e/a$	0.1	0.1	0.1
Module de Young (MPa)	200	200	200
Coefficient de Poisson	0.3	0.3	0.3
Densité (kg/m <sup>3</sup> )	7800	7800	7800

Table 3.1 – Propriétés géométriques et caractéristiques du matériau des trois configurations de tuyauteries

Pour chaque configuration, trois calculs numériques sont effectués : le premier avec un seul élément, le second avec

quatre éléments et le troisième avec 12 éléments afin de vérifier que la solution numérique est indépendante de la taille de maille. Plusieurs points sont introduits afin d'évaluer les déplacements de l'arc à différentes valeurs de l'abscisse curviligne  $s$  (voir Fig. (3.3)). Il est à noter qu'il y a quatre segments :  $CF, FM, MG, GD$ , ce qui explique le choix de considérer une configuration comprenant quatre éléments qui correspond à un élément par segment respectivement. Pour la solution avec 12 éléments il y a trois éléments par segment. Il est évident que la solution numérique avec un seul élément ne correspond qu'au segment  $CD$ .

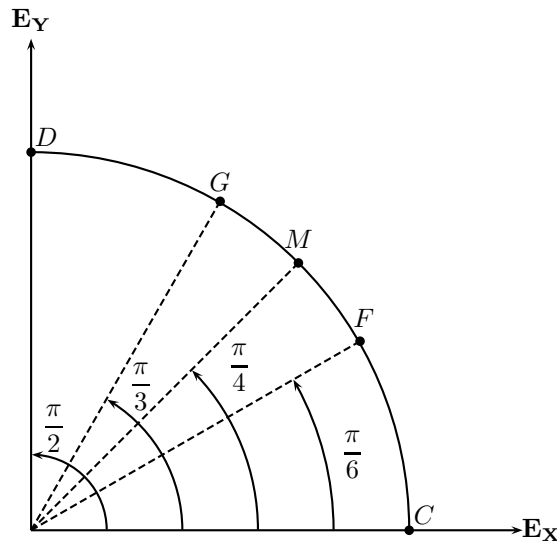


Figure 3.3 - Notations des points sur l'arc

L'ensemble des solutions numériques développées ici est obtenu avec le code de calcul de dynamique rapide explicite Europlexus. Tous les calculs sont effectués avec un nombre de Courant  $C = 0.5$  (voir Eq. (4.77)).

Contrairement au tube droit, la contribution la plus pénalisante varie entre les différentes configurations et selon le nombre d'éléments. La condition de stabilité prise en considération est tantôt la condition sur l'ovalisation et tantôt la condition de flexion dans le plan pour le coude (voir Eq. (4.84) et Eq. (4.91)).

La Tab. (3.2) référence les conditions de stabilité les plus pénalisantes selon la configuration de la tuyauterie et le nombre d'éléments.

	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
1 élément	flexion plane poutre courbe	flexion plane poutre courbe	ovalisation
4 éléments	flexion plane poutre courbe	flexion plane poutre courbe	ovalisation
12 éléments	flexion plane poutre courbe	flexion plane poutre courbe	flexion plane poutre courbe

Table 3.2 - Condition de stabilité la plus pénalisante

Les différentes valeurs des pas de temps sont indépendantes du chargement et sont données dans la Tab. (3.3).

	Configuration 1	Configuration 2	Configuration 3
1 élément	$1.55834 \times 10^{-5} s$	$4.67503 \times 10^{-5} s$	$8.60011 \times 10^{-6} s$
4 éléments	$4.47969 \times 10^{-7} s$	$1.34391 \times 10^{-6} s$	$9.01118 \times 10^{-6} s$
12 éléments	$4.98162 \times 10^{-8} s$	$1.49449 \times 10^{-7} s$	$1.49449 \times 10^{-6} s$

Table 3.3 - Pas de temps de stabilité pour le coude

### 3.2.2 . Gonflement du à une pression interne imposée avec encastrement aux deux extrémités

Dans ce premier cas test sur le tube coudé, la tuyauterie est encastree à ces deux extrémités et une pression intérieure  $P_{rint}$  est imposée uniformément comme c'est le cas dans la section du chapitre précédent sur le tube droit (voir section 2.2.3). Dans le cas présent seul le mode 0 de Fourier est étudié et le couplage non linéaire n'est pas utilisé. Sous l'effet de la pression interne, la section transverse va subir un gonflement.

Les équations d'équilibre en statique sont celles fournies dans l'Eq. (3.11). Sans les termes de couplage et en négligeant les termes en  $e^3/a^3$ , les efforts généralisés non nuls de l'Eq. (3.12) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 N &= D\pi a e \left[ \left( 2 + \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{\partial U_o}{\partial s} - 2 \frac{W_o}{R} + \frac{a^2}{R} \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \left( \frac{2\nu}{a} + \frac{a}{R^2} \right) w_o^c \right] \\
 n_z &= D\pi a e \left[ -\frac{2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + 2 \frac{W_o}{R^2} - \frac{2\nu}{aR} w_o^c \right] \\
 M_z &= D\pi a e \left[ a^2 \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{a^2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{a}{R} w_o^c \right] \\
 n_o^c &= D\pi a e \left[ \left( \frac{a}{R^2} + \frac{2\nu}{a} \right) \frac{\partial U_o}{\partial s} - \frac{2\nu}{aR} W_o + \frac{a}{R} \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \left( \frac{2}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) w_o^c \right]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Une première solution analytique "naïve" est proposée en considérant :  $\forall s \in [0, L_{arc}]$ ,  $U_o(s) = 0$ ,  $W_o(s) = 0$  et  $w_o^c$  uniforme. De façon analogue à ce qui a été proposé dans le chapitre précédent, la seule équation d'équilibre non nulle s'écrit :

$$n_o^c = 2\pi P_{rint} \left( a - \frac{e}{2} \right) = D\pi a e \left( \frac{2}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right) w_o^c \tag{3.22}$$

$w_o^c$  s'exprime finalement sous la forme :

$$w_o^c = \frac{2P_{rint} \left( a - \frac{e}{2} \right)}{D a e \left( \frac{2}{a^2} + \frac{1}{R^2} \right)} \tag{3.23}$$

La solution analytique obtenue est proche de la solution déterminée au chapitre précédent dans l'Eq. (2.30). La seule différence provient du terme en  $\frac{1}{R^2}$ . Pour un tube droit  $\frac{1}{R^2} \rightarrow 0$  et la solution du tube droit est retrouvée. Les valeurs analytiques pour les trois configurations sont exprimées dans la Tab. (3.4)

Configurations numéro	1	2	3
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$1.24090 \times 10^{-3}$	$4.30099 \times 10^{-4}$	$4.32228 \times 10^{-5}$

Table 3.4 – Déplacement radial théorique lors d'une pression interne de 100 bars avec une solution analytique naïve

La solution analytique ainsi proposée permet de se donner un ordre de grandeur du gonflement moyen de la tuyauterie. Cependant dans un coude la condition aux limites d'encastrement des deux extrémités n'implique pas la nullité des déplacements  $U_o$  et  $W_o$ . Sous l'effet de la pression interne, la tuyauterie se gonfle mais sa fibre neutre se déplace également. La solution analytique décrite précédemment n'est donc pas physiquement acceptable.

Afin de résoudre correctement ce cas test, aucune hypothèse n'est faite sur  $w_o^c$  (i.e. pas d'hypothèse d'uniformité). La solution de ce problème doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases}
 U_o(0) = 0 & ; & W_o(0) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(0) = 0 \\
 U_o(L_{arc}) = 0 & ; & W_o(L_{arc}) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(L_{arc}) = 0
 \end{cases} \tag{3.24}$$

En injectant les efforts généralisés dans l'Eq. (3.21) dans les équations d'équilibre données par l'Eq. (3.11) et en résolvant le système d'équations différentielles, les solutions s'écrivent sous forme trigonométrique telles que :

$$\begin{cases} U_o = A_1 + A_2s + A_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + A_5s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_6s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (A_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \\ W_o = B_1 + B_2s + B_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + B_5s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_6s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (B_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \\ w_o^c = C_1 + C_2s + C_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + C_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + C_5s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + C_6s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (C_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \end{cases} \quad (3.25)$$

La forme de ces solutions n'est pas détaillée dans ce chapitre mais est discutée plus en profondeur dans le chapitre suivant (voir section 4.2.2). Il y a donc 18 inconnues à déterminer mais les conditions aux limites ne donnent que 6 équations. La forme des solutions est décomposée dans la base  $(1, s, \cos(s), \sin(s), s \cos(s), s \sin(s))$  qui est une famille libre. Si une quantité, exprimée dans cette base, est nulle alors tous les coefficients sont nuls. En réinjectant la forme des solutions dans l'Eq. (3.25) dans les équations d'équilibre, 18 nouvelles relations apparaissent. Les 18 relations obtenues ne sont pas linéairement indépendantes, seules 12 d'entre elles le sont.

L'expression analytique des coefficients n'est pas fournie et la résolution de ces derniers pour une géométrie fixée est faite numériquement, à l'aide de l'outil Python, en résolvant un système de 24 équations à 18 inconnues. En utilisant la symétrie de la géométrie ainsi que du chargement, les valeurs analytiques des déplacements et des rotations de seulement trois points sont fournies dans le repère cartésien dans la Tab. (3.5). Pour chaque configuration de tuyauterie, une pression uniforme de 100 bars est imposée.

Configuration numéro	1		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	0	$-2.66588 \times 10^{-4}$	$-3.11000 \times 10^{-4}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-2.30119 \times 10^{-4}$	$-3.11000 \times 10^{-4}$
Rotation $\Omega_z$ (rad)	0	$6.06740 \times 10^{-5}$	0
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$1.21009 \times 10^{-3}$	$1.27827 \times 10^{-3}$	$1.28725 \times 10^{-3}$
Configuration numéro	2		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	0	$-1.06608 \times 10^{-3}$	$-1.20327 \times 10^{-3}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-8.30341 \times 10^{-4}$	$-1.20327 \times 10^{-3}$
Rotation $\Omega_z$ (rad)	0	$2.41678 \times 10^{-4}$	0
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$4.49293 \times 10^{-4}$	$4.59661 \times 10^{-4}$	$4.61026 \times 10^{-4}$
Configuration numéro	3		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	0	$-1.68117 \times 10^{-3}$	$-1.88939 \times 10^{-3}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-1.29134 \times 10^{-3}$	$-1.88939 \times 10^{-3}$
Rotation $\Omega_z$ (rad)	0	$3.80926 \times 10^{-4}$	0
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$4.74606 \times 10^{-5}$	$4.74770 \times 10^{-5}$	$4.74792 \times 10^{-5}$

Table 3.5 – Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encasté à ces deux extrémités

Ces valeurs analytiques indiquent que plus le ratio  $a/R$  est petit plus le gonflement de la tuyauterie est uniforme, l'hypothèse de prendre un  $w_o^c$  uniforme pour le tube droit est donc adéquate. En outre, plus ce ratio est petit plus les déplacements de l'axe sont importants. Cette dernière information peut sembler être contre-intuitive, puisque si le ratio  $a/R$  est faible, le rayon de courbure devient grand par rapport aux autres dimensions et la tuyauterie courbée devrait se rapprocher d'un tube droit où l'encastrement impose des déplacements axial et transversal nuls. Or pour avoir ces résultats il ne suffit pas que le ratio  $a/R$  soit petit il faut également que le rayon de courbure vérifie :  $R \rightarrow +\infty$  et que l'angle  $\phi_{max} \rightarrow 0$

D'une manière similaire au chapitre précédent, la pression est imposée lentement et est donnée dans la Fig. (3.4). Le temps de montée est fixé 100 fois plus important que le plus grand des pas de temps caractéristiques, i.e.  $\tau = 100 \max(\Delta t_i)$  voir Eq. (4.83).

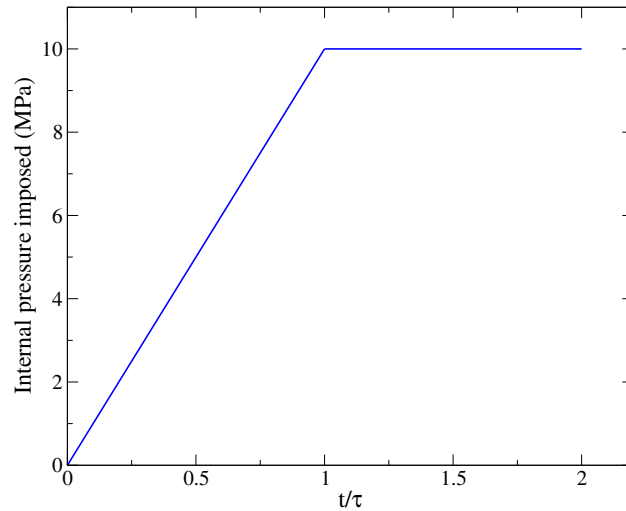


Figure 3.4 – Historique de pression interne imposée normalisée

Afin de ne pas surcharger cette partie, les déplacements axiaux et transversaux, la rotation et le gonflement sont donnés aux points  $M$  et  $F$  cf. Figs. (3.5, 3.6, 3.7 et 3.8).

Les résultats numériques obtenus sont mitigés. En effet, les résultats calculés sur la configuration 1 sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques. Ces derniers présentent tout de même quelques oscillations qui peuvent provenir de la condition de stabilité car le rapport  $a/R$  est relativement faible. Les résultats numériques sont en bon accord avec la solution analytique de référence que ce soit pour 4 ou 12 éléments.

Les résultats numériques de la seconde configuration sont en bonne adéquation avec les résultats analytiques pour 4 et 12 éléments.

En revanche la troisième configuration avec un ratio  $a/R$  très faible oscille fortement. Les oscillations semblent s'accroître en s'approchant du centre ce qui semble cohérent puisque sur les extrémités les points sont encastres. De plus, les calculs effectués avec 4 éléments ne convergent pas vers la solution analytique attendue contrairement à ceux avec 12 éléments. L'écart entre la solution numérique comprenant 4 éléments et la solution analytique semble être dépendant de l'ordre de grandeur. En effet plus le déplacement est important plus l'écart est important.

D'une manière générale les oscillations sont plus importantes sur les déplacements et la rotation de poutre que sur le gonflement. Il ne semble pas avoir de différence entre les déplacements axiaux, transversaux et la rotation. L'ensemble des résultats restent tout de même en bonne corrélation avec les résultats analytiques. La modélisation d'un coude à 90 degré avec seulement 4 éléments fournit une bonne approximation et la modélisation avec 12 éléments semble avoir convergée vers la solution de référence.

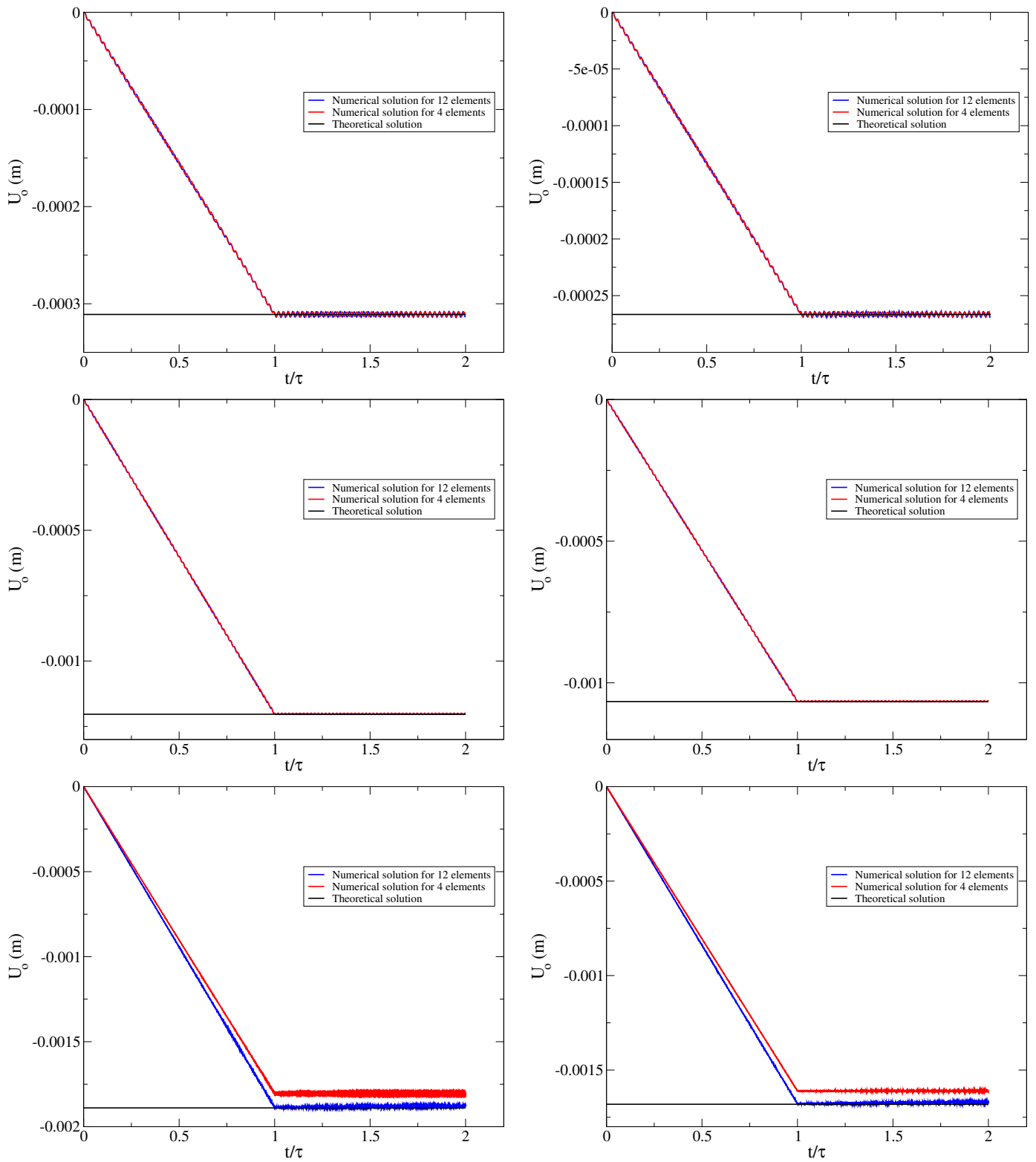


Figure 3.5 – Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne encastéré à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)



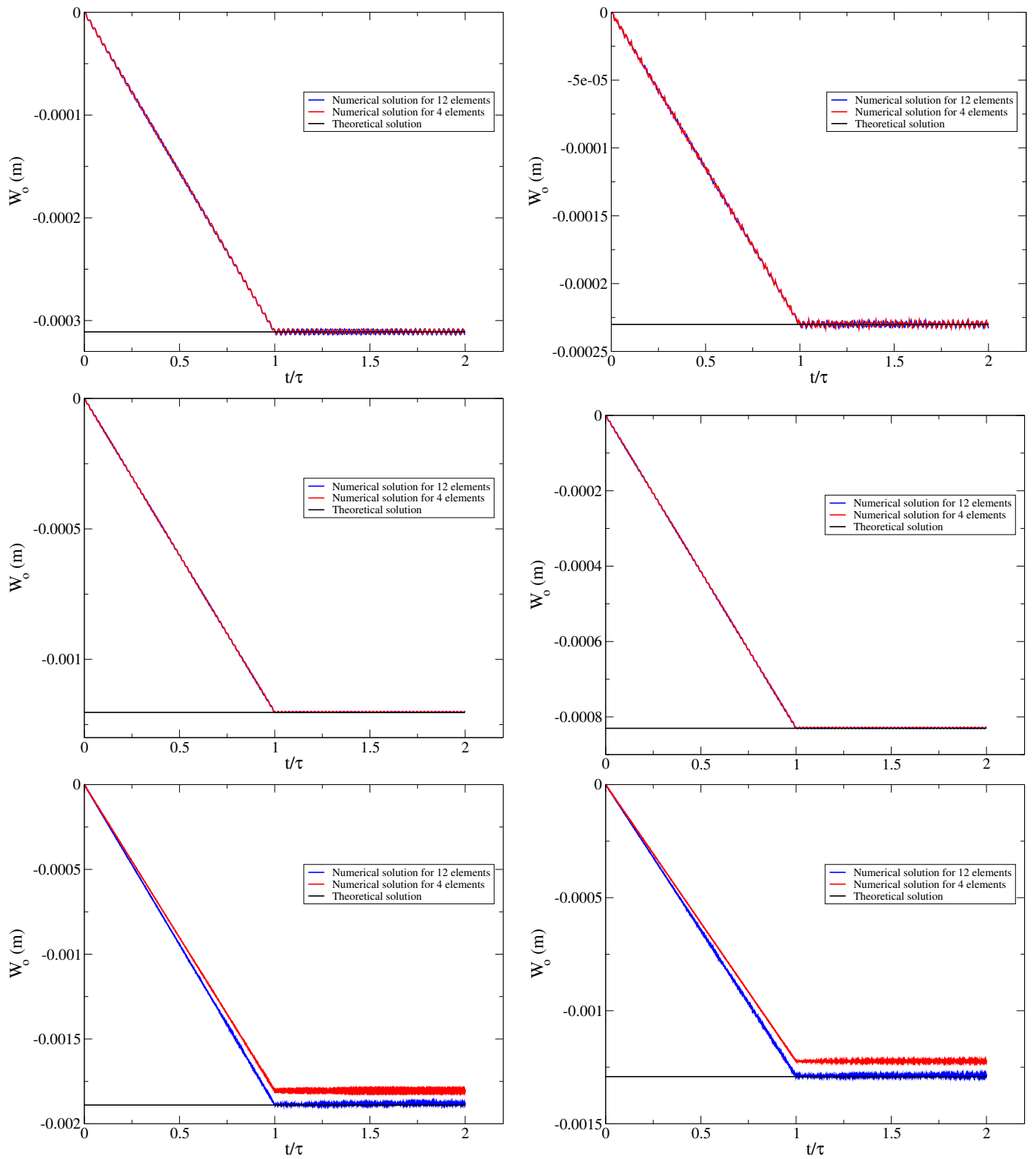


Figure 3.6 – Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne encasté à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)

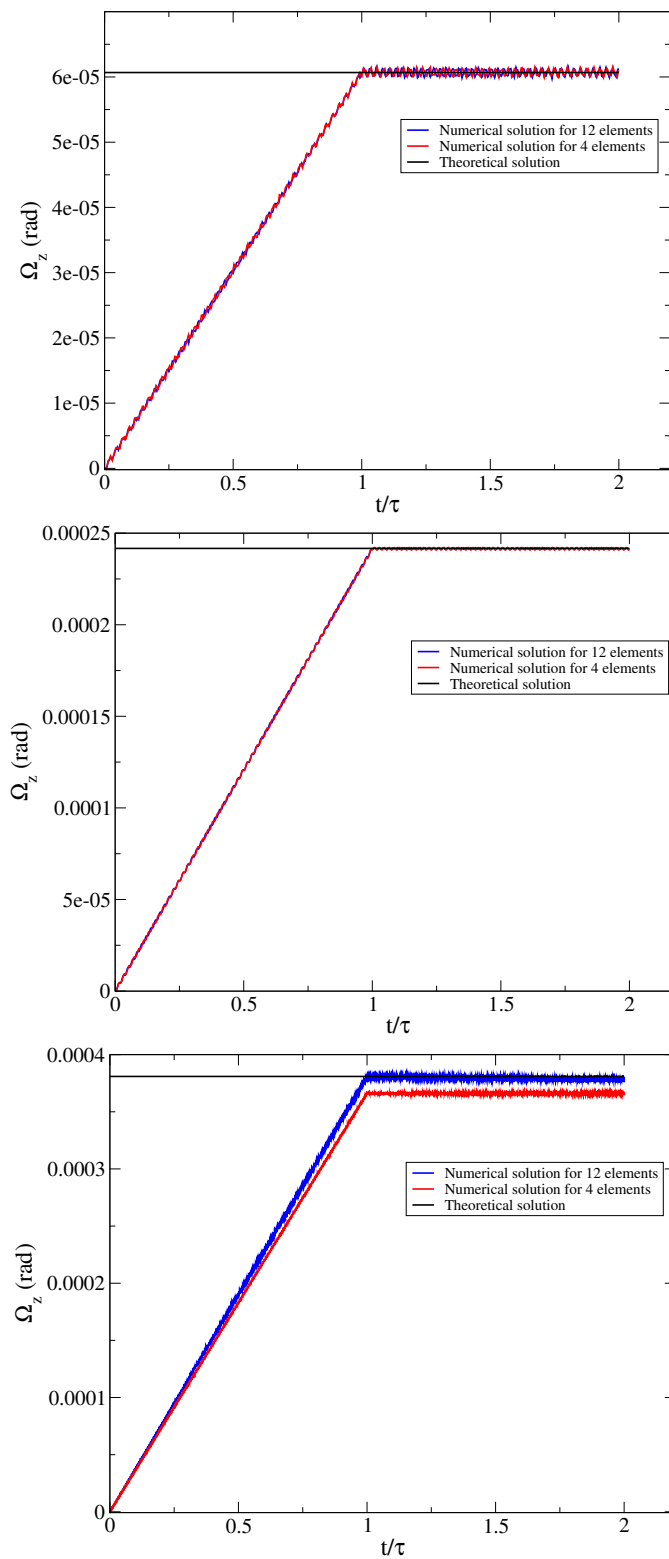


Figure 3.7 – Résultat numérique de la rotation pour un tube sous pression interne encadré à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et le point  $F$

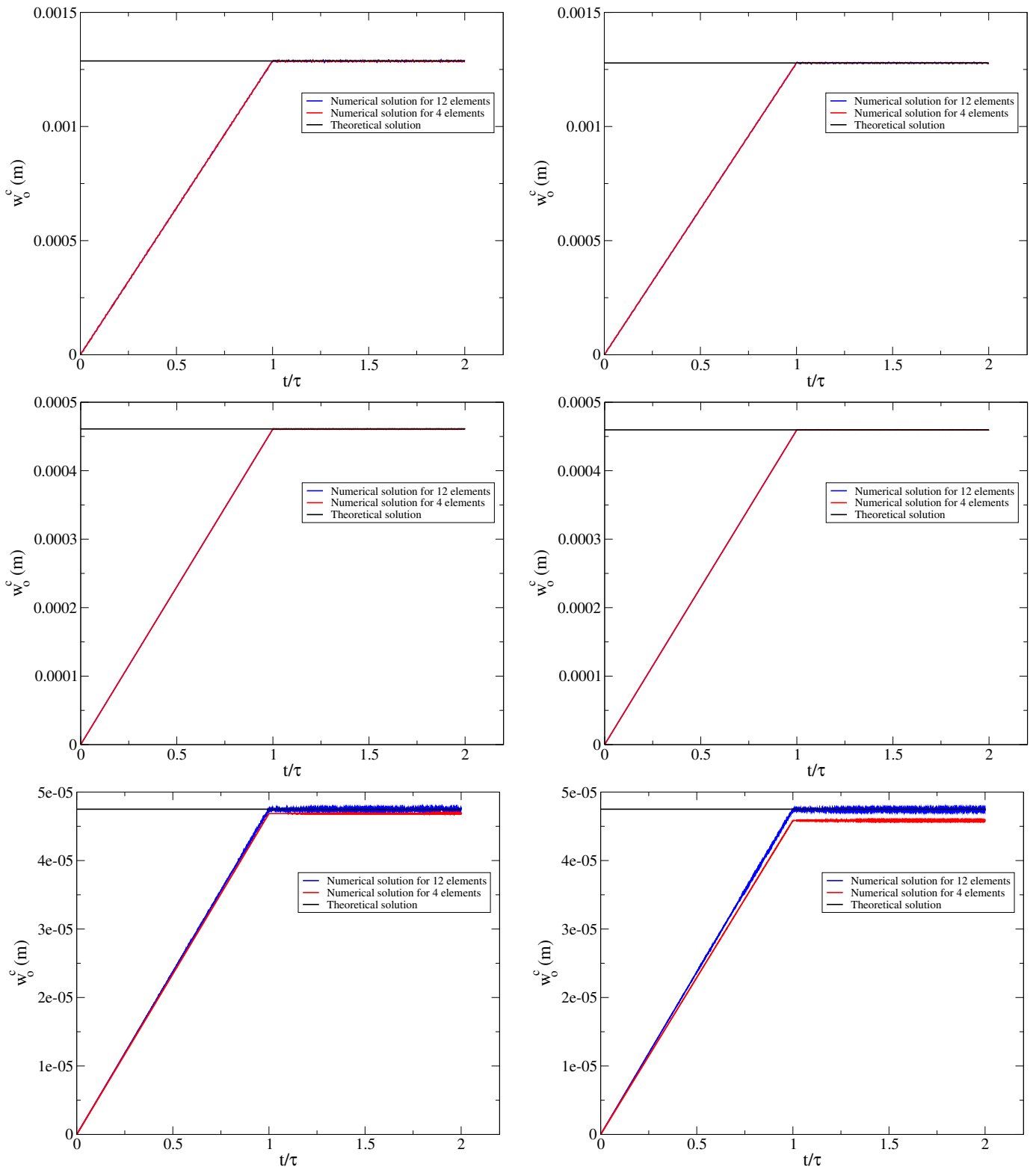


Figure 3.8 – Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne encastré à ces deux extrémités pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)

### 3.2.3 . Gonflement accompagné d'une ouverture du coude due à une pression interne imposée

Ce second cas test s'intéresse à l'ouverture et au gonflement du coude, où une extrémité est encastree et l'autre est libre d'effort, lorsqu'une pression interne est imposée. De même que dans le cas test précédent seul le mode 0 de Fourier sans les termes de couplage est analysé et une pression  $P_{rint}$  est imposée.

La résolution analytique du problème en considérant  $w_o^c$  uniforme ou non conduit exactement aux mêmes résultats. Les solutions du problème (voir Eq. (3.25)) sont obtenues en injectant les efforts généralisés de l'Eq. (3.21) dans les équations d'équilibre en statique de l'Eq. (3.11). Pour ce cas test les conditions aux limites à respecter s'écrivent :

$$\begin{cases} N(0) = 0 & ; & M_z(0) = 0 & ; & \frac{\partial M_z}{\partial s}(0) = 0 \\ U_o(L_{arc}) = 0 & ; & W_o(L_{arc}) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(L_{arc}) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Les solutions analytiques ne sont pas fournies et sont déterminées numériquement pour une géométrie fixée. Seul le gonflement est donné sous forme explicite car il se déduit des calculs numériques. Son expression est proche de ce qui a déjà été fait précédemment :

$$w_o^c(s) = \frac{P_{rint}}{E} \frac{a \left( a - \frac{e}{2} \right)}{e} \quad (3.27)$$

Dans l'étude qui est proposée, pour chaque configuration le rayon de courbure  $R$  et le ratio  $a/e$  ainsi que les propriétés du matériau sont constants (voir Tab. (3.1)). Une pression interne de 100 bars est imposée à chaque configuration. Les calculs numériques indiquent que les déplacements et la rotation de poutre sont indépendants de la configuration. Les valeurs analytiques des cinq points dans le repère cartésien sont fournies dans la Tab. (3.6).

Points	C	F	M	G
Déplacement axial $U_o$ (m)	$3.325 \times 10^{-3}$	$3.92440 \times 10^{-4}$	$-2.86831 \times 10^{-4}$	$-4.91386 \times 10^{-4}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	$4.13628 \times 10^{-3}$	$2.64527 \times 10^{-3}$	$1.66409 \times 10^{-3}$	$7.98081 \times 10^{-4}$
Rotation $\Omega_z$ (rad)	$7.46128 \times 10^{-4}$	$4.97418 \times 10^{-4}$	$3.73064 \times 10^{-4}$	$2.48709 \times 10^{-4}$

Table 3.6 – Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encastree à une de ces extrémités et libre de l'autre

Le déplacement radial est donné dans la Tab. (3.7), dépend quant à lui de la configuration et plus particulièrement du rayon moyen  $a$  puisque le rapport  $a/e$  est constant pour toutes les configurations.

Configurations numéro	1	2	3
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$1.425 \times 10^{-3}$	$4.75 \times 10^{-4}$	$4.75 \times 10^{-5}$

Table 3.7 – Déplacement radial uniforme théorique lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un tube coudé encastree à une de ces extrémités et libre de l'autre

Le déplacement radial donné dans l'Eq. (3.27) est très proche de la solution de l'Eq. (2.30) développée dans le chapitre précédent sur le tube droit. La différence est qu'il y a le module de Young  $E$  pour le tube coudé et le module d'élasticité  $D$  pour le tube droit. Cette différence s'explique simplement par le fait que lorsque la tuyauterie n'est pas encastree à ces deux extrémités, le coefficient de poisson  $\nu$  présent dans  $D$  s'annule avec les termes liés aux déplacements. La solution obtenue est ainsi quasiment la même que celle du premier chapitre (voir Eq. (1.88)).

La pression interne est imposée progressivement comme dans le cas précédent (voir Fig. (3.4)).

Afin de ne pas surcharger cette partie, les déplacements axiaux et transversaux, la rotation et le gonflement sont donnés aux points  $C$  et  $M$  cf. Figs. (3.9, 3.10, 3.11 et 3.12).

Dans ce cas test le tube est encastree à une extrémité et libre de l'autre, ainsi les oscillations augmentent fortement par

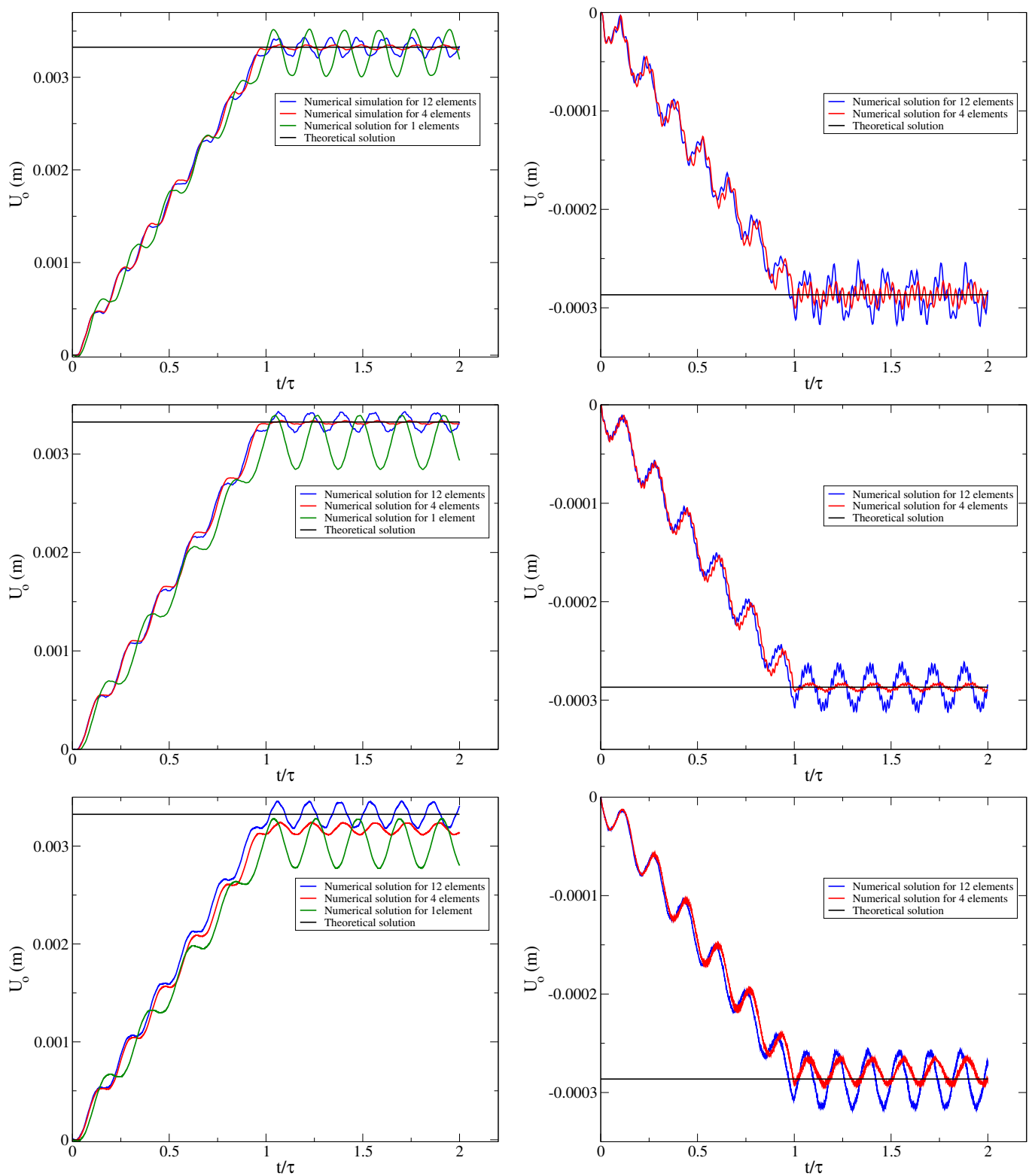


Figure 3.9 – Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points C et M (de gauche à droite)

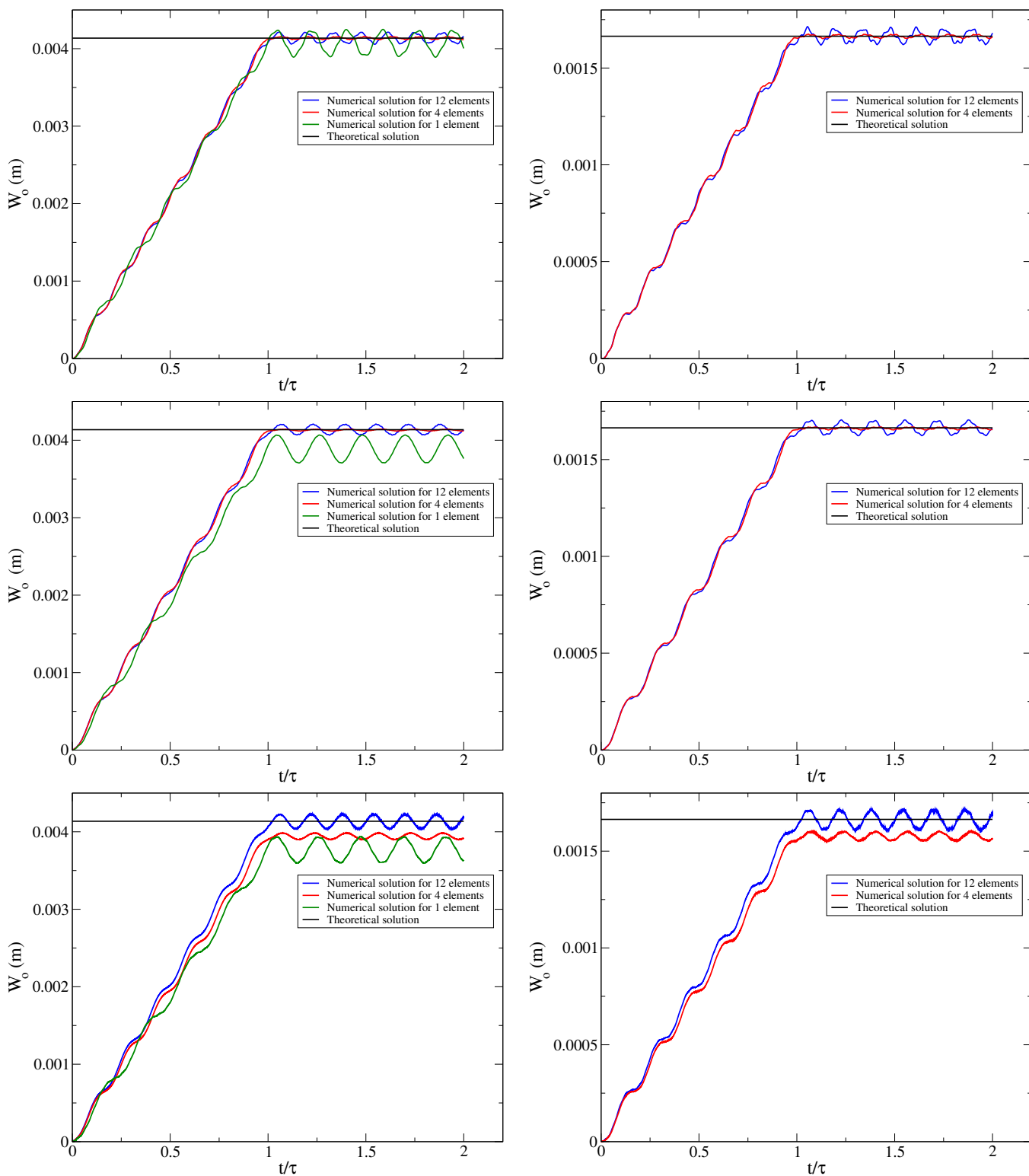


Figure 3.10 - Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne encasté à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points C et M (de gauche à droite)

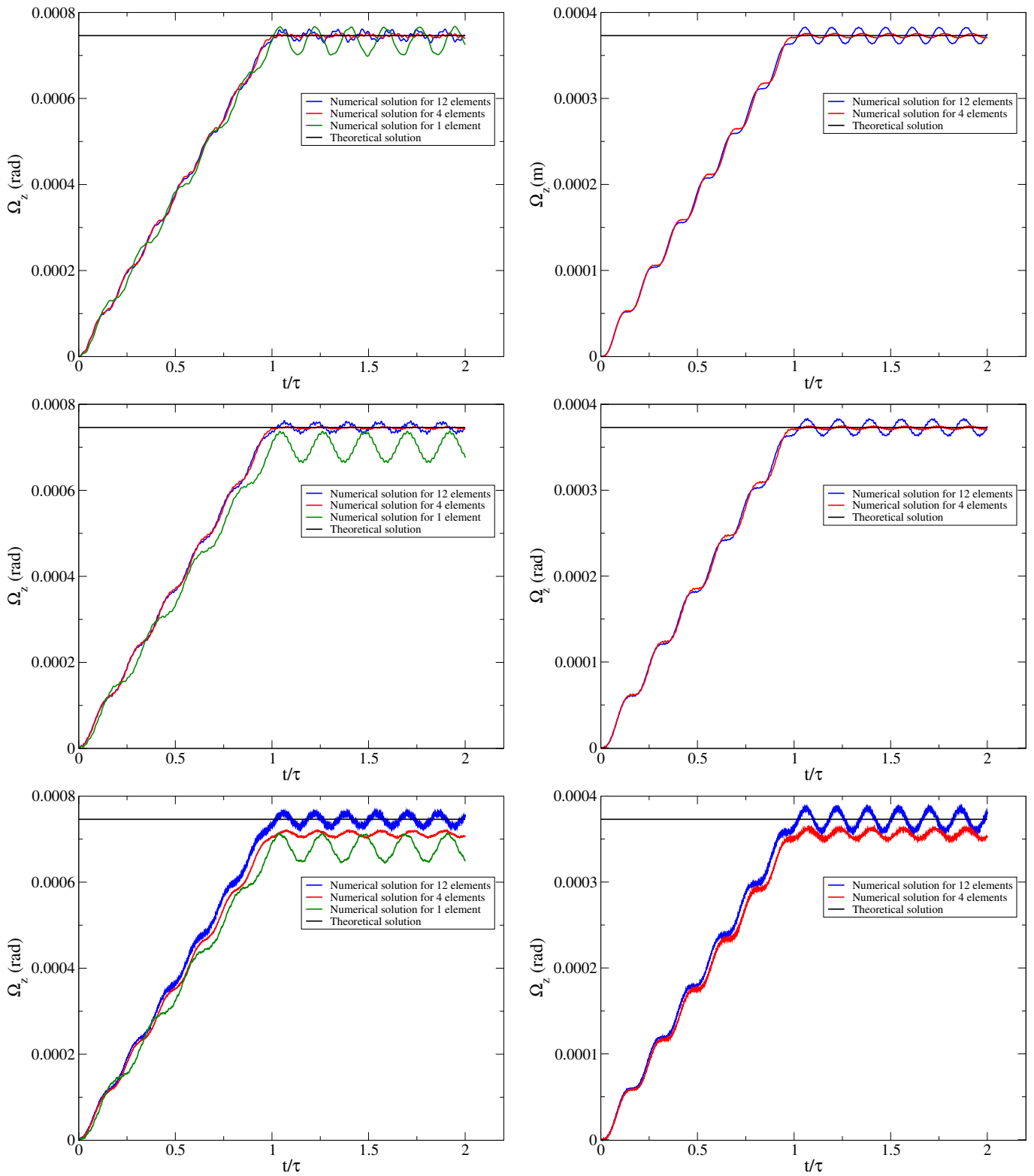


Figure 3.11 – Résultat numérique de la rotation pour un tube sous pression interne encasté à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $C$  et  $M$  (de gauche à droite)

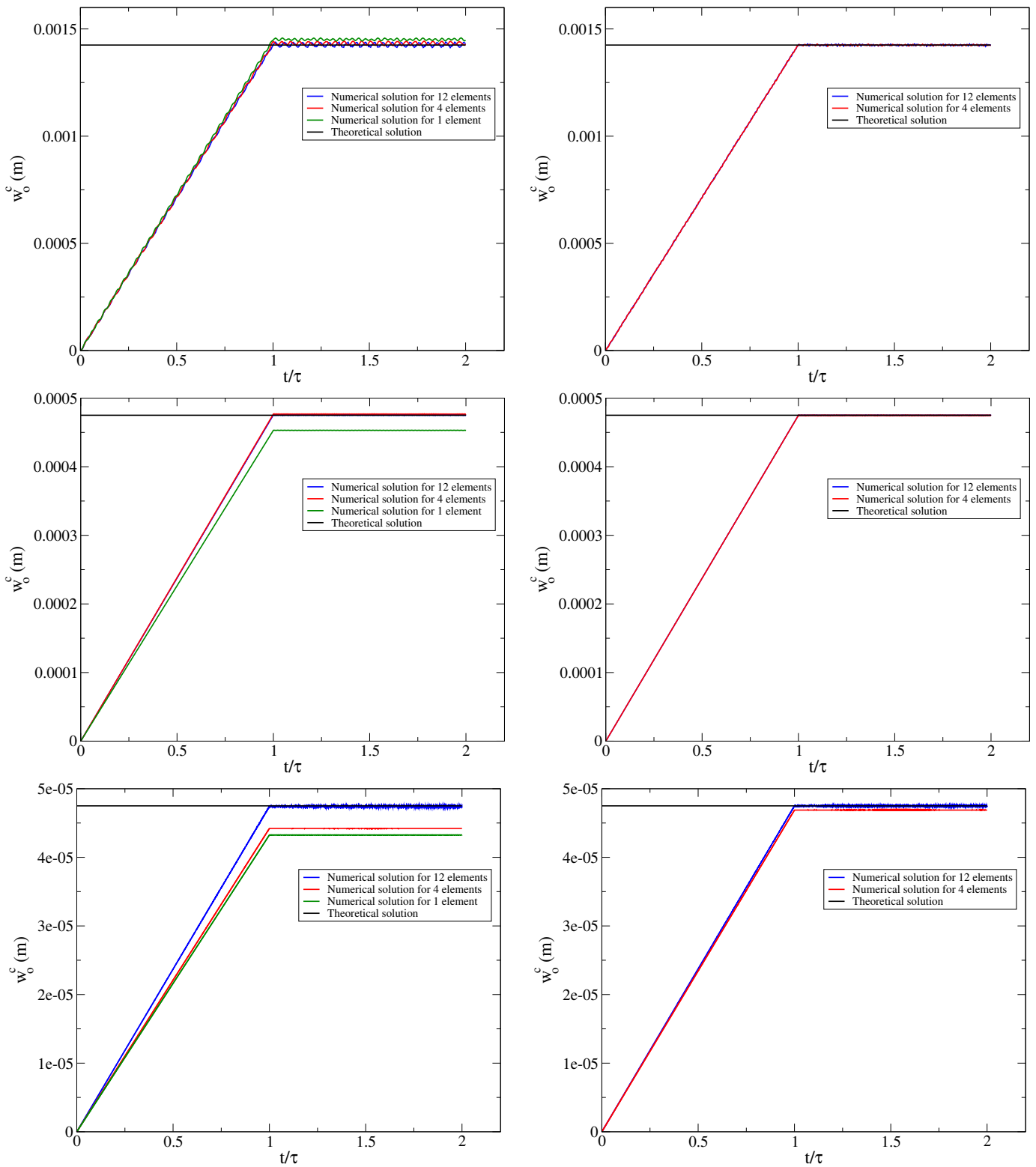


Figure 3.12 - Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne encastré à un de ces extrémités et libre de l'autre pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points C et M (de gauche à droite)



rapport au cas précédent. Le même temps de montée  $\tau$  est utilisé avec le cas test précédent, mais ce temps de montée diffère entre chaque configurations. En augmentant ce pas de montée la solution numérique présente moins d'oscillations mais cette dernière a par conséquent un temps de calcul plus grand. Pour réduire ces oscillations, un amortissement aurait pu être également introduit. Il est à noter que les résultats numériques sur le degré de liberté associé au gonflement oscillent très faiblement.

Même si les solutions numériques oscillent fortement, leurs valeurs moyennes correspondent à la valeur analytique de référence. Ainsi comme précédemment, les calculs effectués avec 4 ou 12 éléments sur les configurations 1 et 2 sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques correspondantes. Pour la troisième configuration, la solution numérique avec 12 éléments est en bon accord avec la solution analytique de référence alors que celle avec 4 éléments présente un écart.

Les calculs effectués avec un seul élément sont relativement bons et donnent une approximation de la solution très rapidement. Plus le ratio  $a/R$  est grand plus la solution avec un seul élément est proche de la solution analytique. Au niveau du point extrême  $C$  il est clair que, plus le maillage est fin, plus le résultat numérique tend vers la solution analytique.

Une nouvelle fois les résultats numériques sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques pour les trois configurations.

### 3.2.4 . Gonflement et déplacement radial uniforme du à une pression interne imposée avec des conditions aux limites de type tore

Dans ce troisième cas test, la tuyauterie est assimilée à un quart de tore. Les deux extrémités sont bloquées aux niveaux des rotations  $\Omega_z$  et dans la direction axiale  $U_o$ . Avec ces conditions aux limites particulières et sous l'effet de la pression interne, la tuyauterie va se déplacer radialement uniformément. C'est à dire que dans le repère curviligne  $W_o(s)$  est constant et que le gonflement  $w_o^c(s)$  est constant également. Seul le mode 0 de Fourier sans les termes de couplage est pris en considération. Le tube est soumis à une pression interne  $P_{rint}$  de 100 bars.

Néanmoins ce cas test ne représente pas fidèlement le comportement d'un véritable tore. En effet, dans le cas présent la fibre neutre de la tuyauterie va se déplacer vers le centre de courbure car sous l'effet de Poisson la longueur du tube rétrécit puisque la section transversale de ce dernier augmente. Alors que dans le cas d'un tore sous pression, la fibre neutre a tendance à se déplacer vers l'extrados. Cette différence notable provient du fait que, dans le modèle présenté dans ce cas test, le déplacement orthoradial  $v_o$  est nul. Ce qui n'est pas le cas pour un tore sous pression.

La résolution du tore sous pression interne, en considérant le déplacement orthoradial  $v_o$  nul, mène à un déplacement radial  $w_o$  dépendant de la variable  $\theta$  tel que :

$$w = \frac{P_{rint}}{D} \frac{a}{e} (R + a \cos \theta) \left( \frac{1}{\frac{a \cos^2 \theta}{R + a \cos \theta} + 2\nu \cos \theta + \frac{R + a \cos \theta}{a}} \right) \quad (3.28)$$

Après quelques développements limités, de la forme de ceux proposés dans l'Eq. (D.20), le déplacement radial peut également s'écrire sous la forme :

$$\frac{P_{rint}}{D} \frac{a^2}{e} \left( 1 - \frac{2\nu a \cos \theta}{R} - \frac{2a^2(1 + \nu) \cos^2 \theta}{R^2} + o\left(\frac{a^2}{R^2}\right) \right) \quad (3.29)$$

En  $\theta = \pi/2$ , le gonflement du tube est retrouvé puis qu'il vaut  $\frac{P_{rint}}{D} \frac{a^2}{e}$ . En  $\theta = 0$  et en soustrayant le gonflement uniforme, le point se déplace vers l'intérieur. De la même façon en  $\theta = \pi$  le point se déplace vers le centre de courbure. Pour retrouver le comportement du tore il est donc obligatoire de considérer le déplacement orthoradial  $v_o$ .

Toutefois la résolution de ce cas test, même avec le modèle proposé, reste très intéressant afin de vérifier l'uniformité du gonflement et du déplacement  $W_o(s)$  dans le repère curviligne.

Pour modéliser un tore, il faut alors considérer des liaisons de type glissières aux deux extrémités. Les conditions aux limites à satisfaire pour ce cas tests sont définies telles que :

$$\begin{cases} U_o(0) = 0 & ; & \frac{\partial M_z}{\partial s}(0) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(0) = 0 \\ U_o(L_{arc}) = 0 & ; & \frac{\partial M_z}{\partial s}(L_{arc}) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(L_{arc}) = 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

Les solutions analytiques sont obtenues numériquement en résolvant un système de 24 équations à 18 inconnues à l'aide de Python. La symétrie de ce problème implique que les rotations  $\Omega_z$  sont nulles et qu'il suffit de présenter 3 points au lieu des 5 définis. Dans le repère cartésien, les valeurs analytiques des déplacements de la fibre neutre sont données dans la Tab. (3.8) :

Configuration numéro	1		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	$-1.35785 \times 10^{-3}$	$-1.17593 \times 10^{-3}$	$-9.60147 \times 10^{-4}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-6.78926 \times 10^{-4}$	$-9.60147 \times 10^{-4}$
Configuration numéro	2		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	$-1.41721 \times 10^{-3}$	$-1.22734 \times 10^{-3}$	$-1.00212 \times 10^{-3}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-7.08606 \times 10^{-4}$	$-1.00212 \times 10^{-3}$
Configuration numéro	3		
Points	C	F	M
Déplacement axial $U_o$ (m)	$-1.42492 \times 10^{-3}$	$-1.23401 \times 10^{-3}$	$-1.00757 \times 10^{-3}$
Déplacement transversal $W_o$ (m)	0	$-7.12460 \times 10^{-4}$	$-1.00757 \times 10^{-3}$

Table 3.8 – Déplacements et rotation analytiques lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un quart de tore

Le gonflement uniforme est fourni dans la Tab. (3.9) :

Configurations numéro	1	2	3
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	$1.35785 \times 10^{-3}$	$4.72404 \times 10^{-4}$	$4.74973 \times 10^{-5}$

Table 3.9 – Déplacement radial uniforme théorique lors d'une pression interne de 100 bars imposée sur un quart de tore

Plus le ratio  $a/R$  est faible plus les valeurs du gonflement sont proches du cas précédent (voir Tab. (3.7)). Pour vérifier que le déplacement transversal  $W_o(s)$ , dans le repère curviligne, est uniforme il suffit de comparer pour chaque point fournis dans la Tab. (3.8) la quantité radiale (i.e.  $\sqrt{U_o^2 + W_o^2}$ ).

La pression interne est imposée lentement comme dans les cas précédents (voir Fig. (3.4)).

Afin de ne pas surcharger cette partie, les déplacements axiaux et transversaux, la rotation et le gonflement sont donnés aux points  $M$  et  $F$  cf. Figs. (3.13, 3.14 et 3.15).

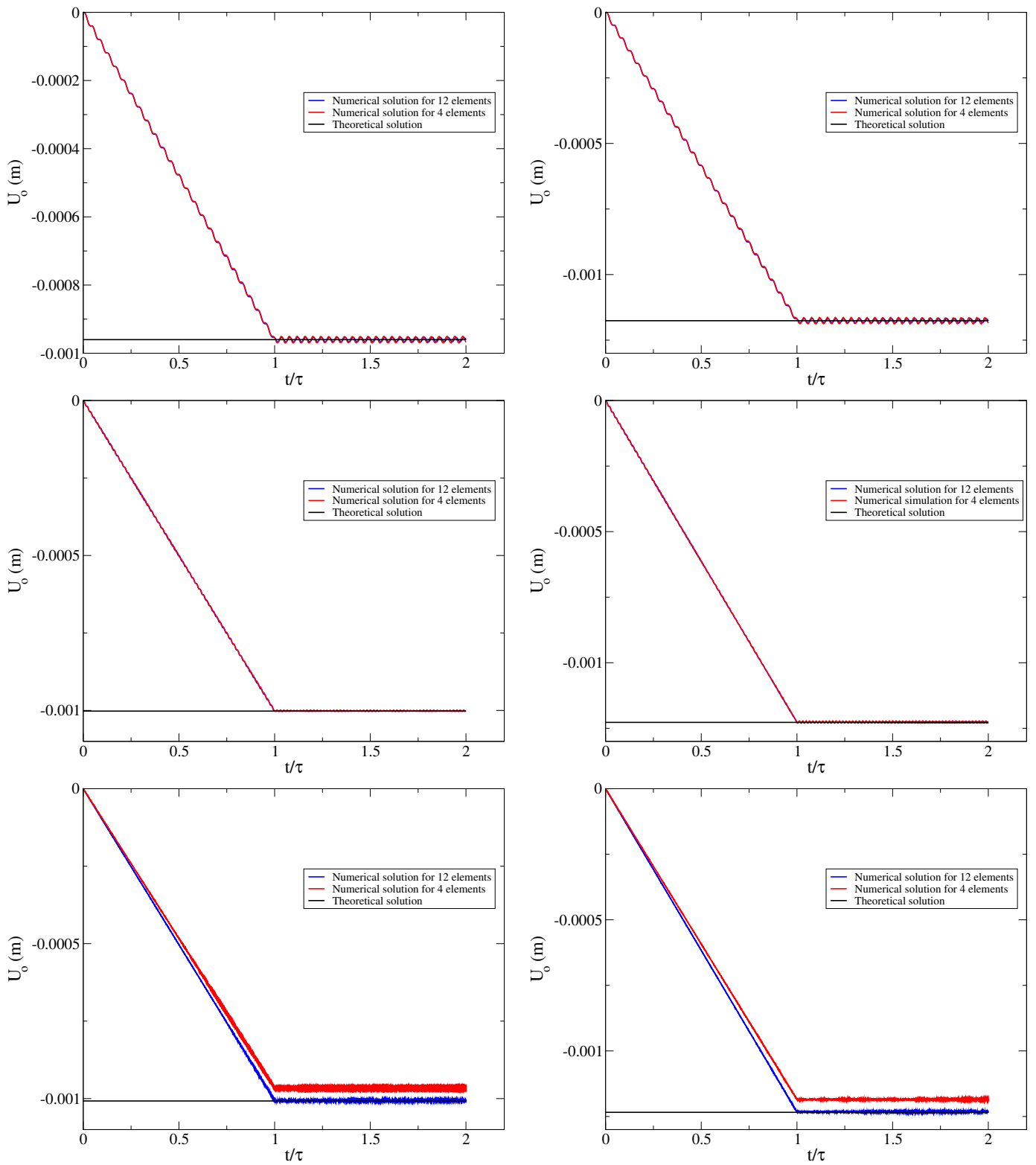


Figure 3.13 – Résultat numérique du déplacement axial pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)

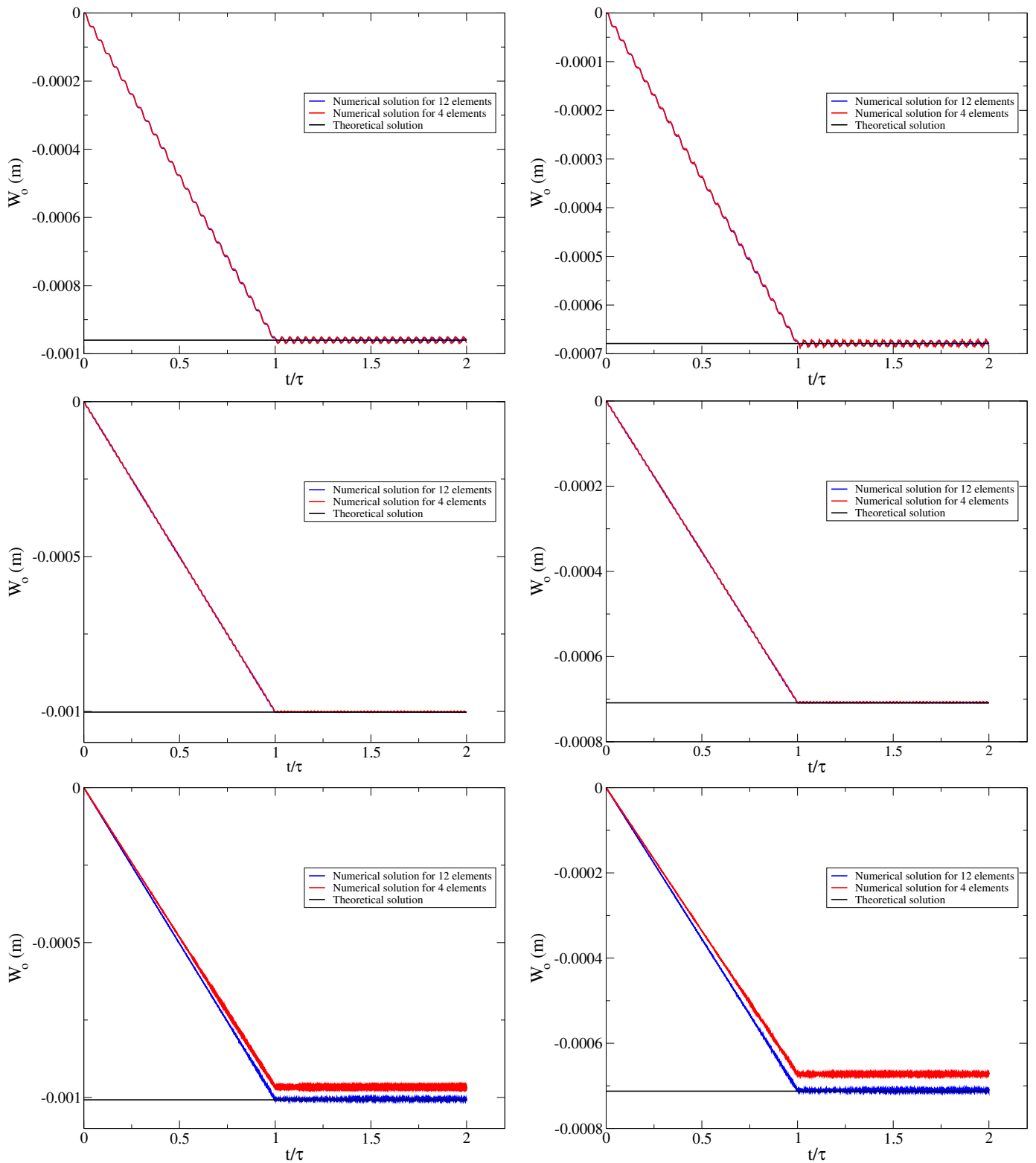


Figure 3.14 – Résultat numérique du déplacement transversal pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)

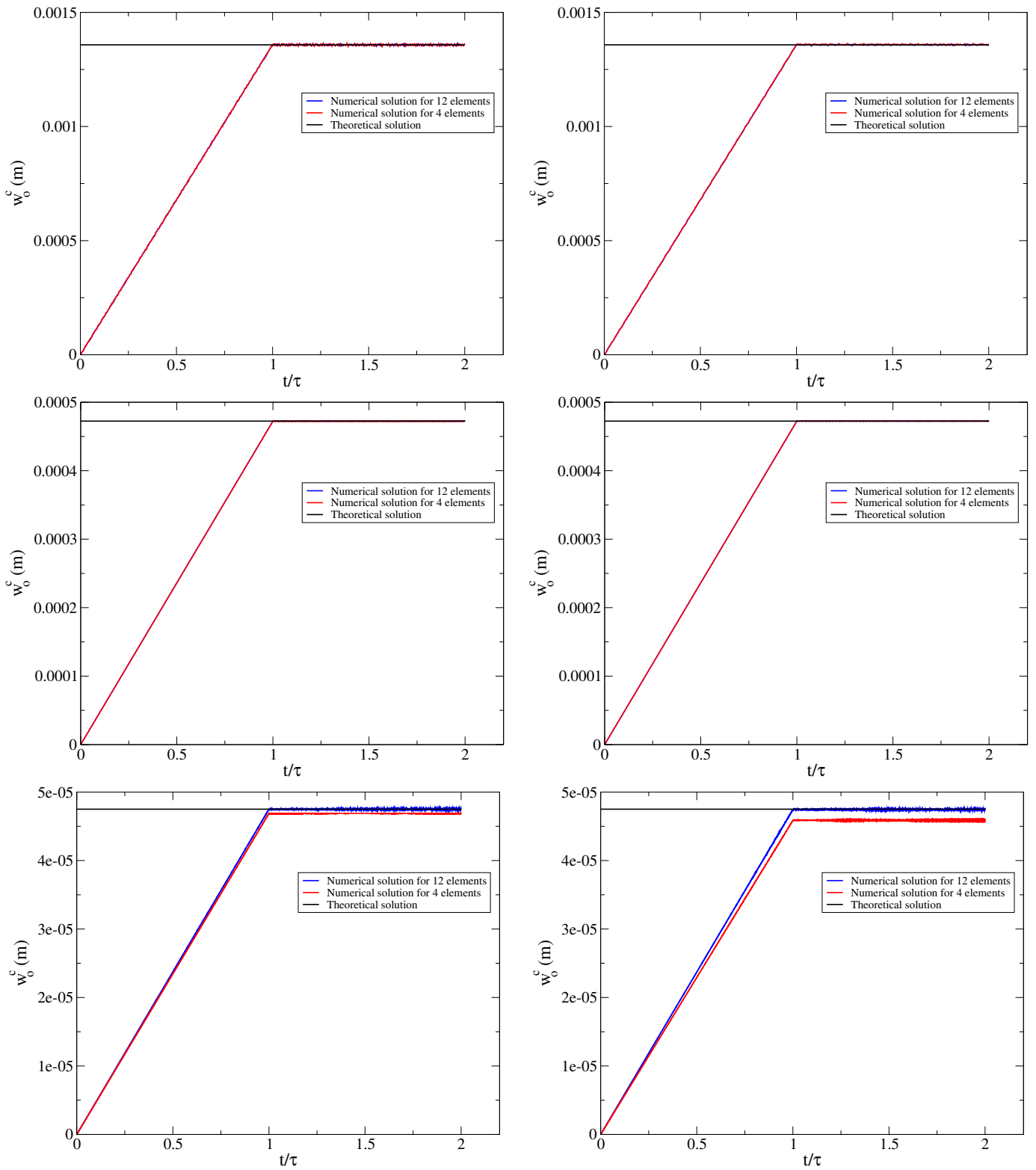


Figure 3.15 – Résultat numérique du gonflement pour un tube sous pression interne avec des conditions aux limites de type tore pour les configurations 1,2 et 3 (de haut en bas) et les points  $M$  et  $F$  (de gauche à droite)

Les résultats numériques sont en bon accord avec la solution analytique pour les configurations 1 et 2 que ce soit pour 4 ou 12 éléments. Il faut 12 éléments à la troisième configuration pour avoir de bon résultats numériques même si la solution avec 4 éléments est relativement bonne. La seconde configuration fournit les meilleurs résultats et présente le moins d'oscillations à l'inverse de la configuration 3.

L'ensemble des résultats est en bonne adéquation avec les solutions analytiques de référence. Ces différentes comparaisons permettent de vérifier le modèle numérique du tube coudé sous pression interne avec le mode 0 de Fourier.

La tuyauterie sous pression interne considérant le mode 0 de Fourier a été étudiée dans cette partie car c'est un des cas de chargement constant que cette dernière subit. Le tuyau coudé subit également de la flexion qui engendre une ovalisation de sa section caractérisé notamment par le second mode de Fourier.

### 3.2.5 . Ovalisation dans le plan en flexion liée au second mode de Fourier

Dans ce cas test, la tuyauterie est encastrée à l'une de ces extrémités et une rotation  $\Omega$  est imposée de l'autre. Sous l'effet de la rotation le tube s'ovalise. Dans le cas présenté ici, seul le second mode de Fourier dans le plan, sans les termes de gauchissement et de couplage, est analysé.

Les équations d'équilibre de la statique sont celles données dans l'Eq. (3.19). Les efforts généralisés de l'Eq. (3.20), sans les termes de couplage, sont exprimés par :

$$\begin{aligned}
 N &= D\pi a e \left[ \left( 2 + \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{\partial U_o}{\partial s} - \frac{2}{R} W_o + \frac{a^2}{R} \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{3a}{4R^2} w_2^c \right] \\
 n_z &= D\pi a e \left[ -\frac{2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{2}{R^2} W_o \right] \\
 M_z &= D\pi a e \left[ \frac{a^2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + a^2 \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{3a}{4R} w_2^c \right] \\
 n_2^c &= D\pi a e \left[ \frac{3a}{4R^2} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{3a}{4R} \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \left( \frac{5}{8R^2} + \frac{3e^2}{a^4} \right) w_2^c \right] \\
 t_2^c &= D\pi a e \left[ \frac{(1-\nu)}{8} \frac{\partial w_2^c}{\partial s} \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Dans le but de résoudre ce cas de chargement, la solution de ce problème doit vérifier les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases}
 N(0) = 0 & ; & \frac{\partial M_z}{\partial s}(0) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(0) + \frac{U_o(0)}{R} = \Omega & ; & t_2^c(0) = 0 \\
 U_o(L_{arc}) = 0 & ; & W_o(L_{arc}) = 0 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(L_{arc}) = 0 & ; & t_2^c(L_{arc}) = 0
 \end{cases} \tag{3.32}$$

La même forme des solutions que celles déjà prises précédemment est considérée :

$$\begin{cases}
 U_o = A_1 + A_2 s + A_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + A_5 s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_6 s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (A_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \\
 W_o = B_1 + B_2 s + B_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + B_5 s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_6 s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (B_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \\
 w_2^c = C_1 + C_2 s + C_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + C_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + C_5 s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + C_6 s \sin\left(\frac{s}{R}\right) \text{ où } (C_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6
 \end{cases} \tag{3.33}$$

En injectant les efforts généralisés dans l'Eq. (3.31) avec les solutions de la forme de l'Eq. (3.33) dans les équations d'équilibre données par l'Eq. (3.19) et en résolvant le système d'équations différentielles 18 équations sont obtenues. Les conditions aux limites fournissent 6 équations. La forme des solutions est décomposée dans la base  $(1, s, \cos(s), \sin(s), s \cos(s), s \sin(s))$  qui est une famille libre. Si une quantité, exprimée dans cette base, est nulle alors tous les coefficients sont nuls.

L'expression analytique des coefficients n'est pas donnée ici et la résolution de ces derniers pour une géométrie fixée est

faite numériquement avec Python en résolvant un système de 24 équations à 18 inconnues.

Dans un premier temps, une flexion créant une fermeture du coude est considérée. Il faut alors choisir une rotation  $\Omega$  négative et pour garder les mêmes valeurs que dans le chapitre précédent, la rotation imposée est égale à :  $\Omega = -0.1$  rad.

Actuellement, ce cas test présente un bug qui n'a pas encore été résolu. Afin de ne pas alourdir la présentation, qui n'est pas finalisée, seule la seconde configuration de tuyauterie et les points  $C$  et  $M$  sont analysés. Les autres configurations et points ont sensiblement les mêmes bugs. La valeur des déplacements et de la rotation fournie par la solution analytique est donnée dans la Tab. (3.10).

Configuration numéro	2	
	C	M
Points		
Déplacement axial $U_o$ (m)	-0.616980	-0.0894406
Déplacement transversal $W_o$ (m)	-0.337909	-0.150314
Rotation $\Omega_z$ (rad)	-0.1	-0.0467322
Déplacement radial $w_o^c$ (m)	-0.0383973	-0.0407002

Table 3.10 – Déplacements et rotation analytiques lors d'une rotation imposée de -0.1 radian sur un tube coudé encastré à une de ces extrémités et libre de l'autre

Comme précédemment la rotation est imposée de manière progressive (voir Fig. (3.16)). Elle est imposée avec le même temps de montée que pour les cas tests précédents avec la pression interne imposée.

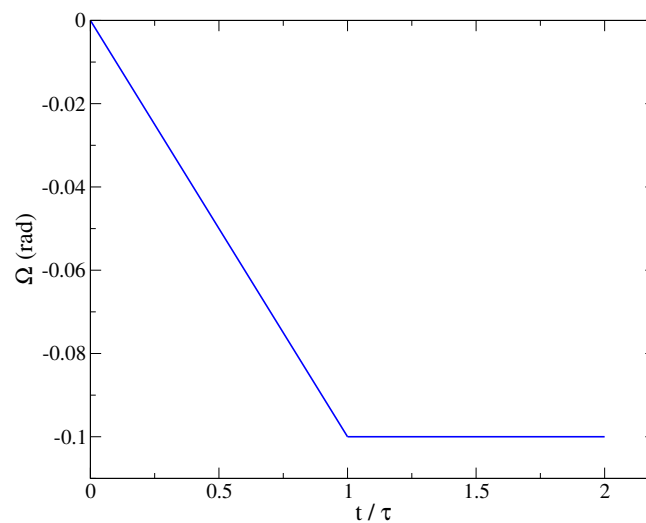


Figure 3.16 – Historique de la rotation imposée lors d'une flexion fermante dans un coude

Les déplacements axiaux, transversaux, d'ovalisation et la rotation sont donnés aux points  $M$  et  $C$  (voir Fig. (3.17)).

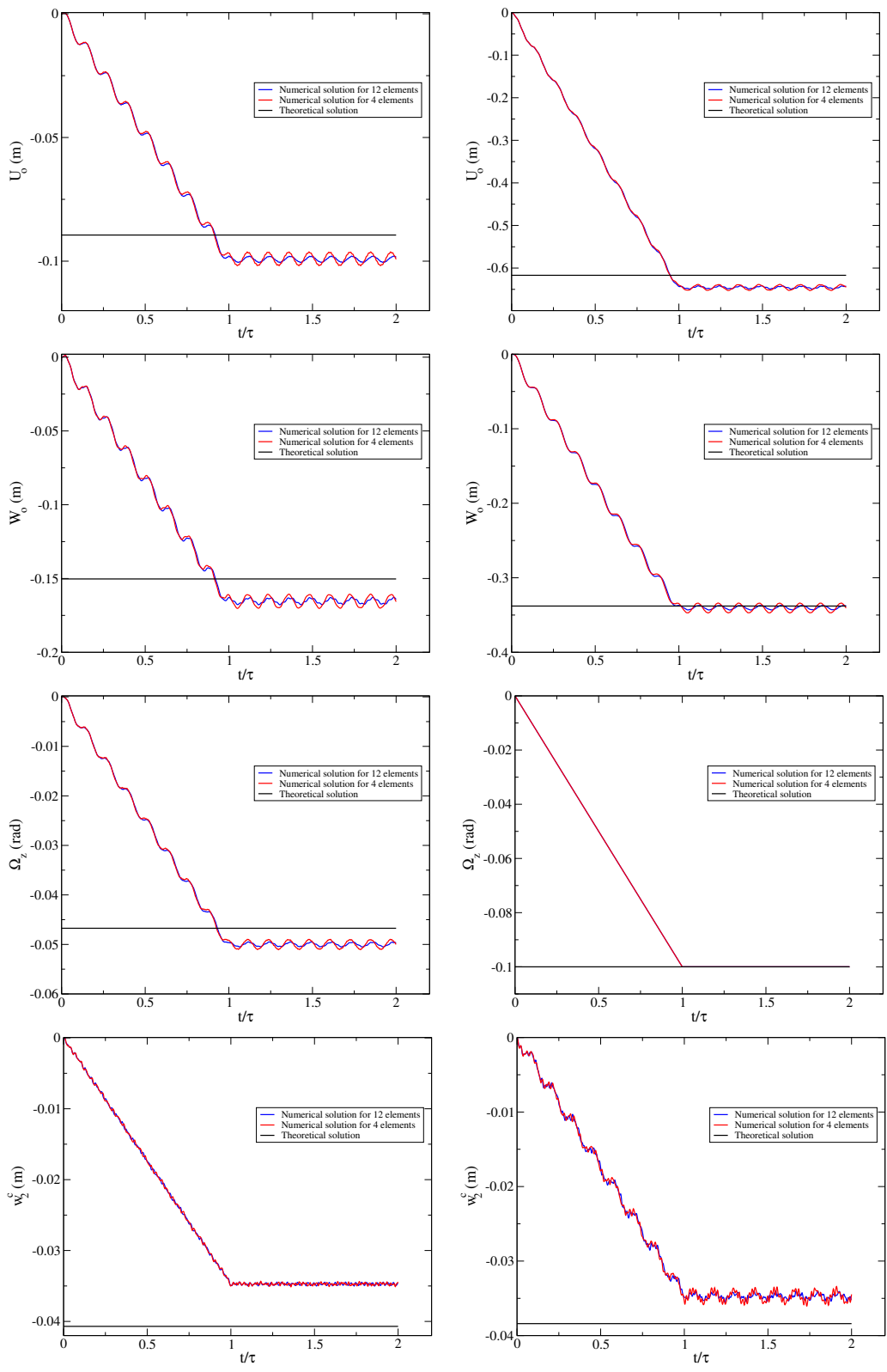


Figure 3.17 - Résultat numérique de la flexion pour la configuration 2 et les points  $M$  et  $C$  (de gauche à droite)



Les résultats numériques présentent une erreur de 10% maximale par rapport à la solution analytique. Les déplacements et la rotation de poutre sont surestimés par rapport à la valeur de référence alors que les déplacements d'ovalisation sont sous-estimés. Les résultats numériques au point  $M$  ont une erreur plus importante vis-a-vis de la solution de référence qu'au point  $C$ .

Il n'y a pas de différences majeures entre les calculs effectués avec 4 et 12 éléments, il semble donc que la solution obtenue a convergé puisqu'elle est indépendante de la taille de maille. D'autres calculs avec 24 et 48 éléments ont également été menés et les valeurs numériques obtenues sont similaires.

Le calcul numérique semble donner un déplacement d'ovalisation uniforme alors que ce n'est pas le cas dans la solution analytique. Les résultats sur les autres points confirme cette impression d'uniformité de la solution.

Les résultats numériques obtenus sont de l'ordre de grandeur des solutions analytiques mais ils ne sont pas satisfaisant pour une vérification de modèle. Plusieurs pistes ont déjà été menées pour résoudre ce bug, mais sans succès. Des investigations concernant la solution numérique sont en cours pour déterminer l'origine de l'anomalie. Il est également intéressant de se comparer à une solution coque de référence plutôt qu'à un calcul analytique difficile à vérifier.

La tuyauterie est encastree à l'une de ces extrémité et une rotation positive  $\Omega = 0.1$  rad est imposée de l'autre. L'ouverture du coude a tendance à créer une ovalisation de la section transverse. Une comparaison est effectuée entre un modèle de poutre classique d'Euler-Bernoulli, un modèle de coque DKT et le modèle de poutre enrichi développé ici. Le modèle de poutre classique d'Europlexus est réalisé avec 48 éléments droits à deux nœuds et 6 degrés de liberté par nœud. Cet élément considère la courbure par le biais d'un changement d'inertie à l'aide d'un facteur de surflexion. Le modèle DKT de code\_aster contient quant à lui 22571 éléments, 11265 nœuds et 67590 degrés de liberté. Le modèle proposé ne contient quant à lui que 4 éléments avec 5 degrés de liberté par nœud (i.e.  $U_o$ ,  $W_o$ ,  $\Omega_z$ ,  $w_2^c$  et  $\frac{\partial w_2^c}{\partial s}$ ) Dans les Figs. (3.18) et (3.19) au point  $C$  le modèle proposé est très proche de la solution de référence de code\_aster. De par l'ovalisation de sa section, le modèle de poutre enrichi donne une meilleur approximation du déplacement de la fibre neutre que le modèle de poutre classique. Dans la Fig. (3.20) la tuyauterie s'est ovalisée et le modèle de poutre enrichi développé ici est en bonne adéquation avec le calcul coque tridimensionnel.

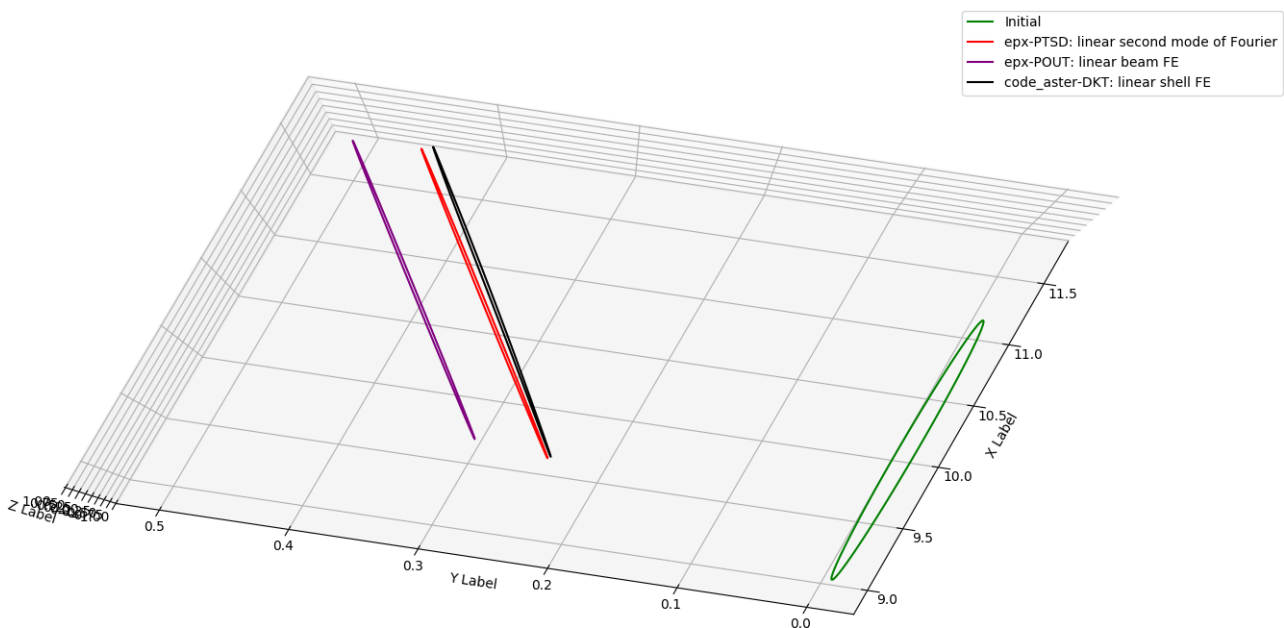


Figure 3.18 – Vue d'en haut de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême  $C$

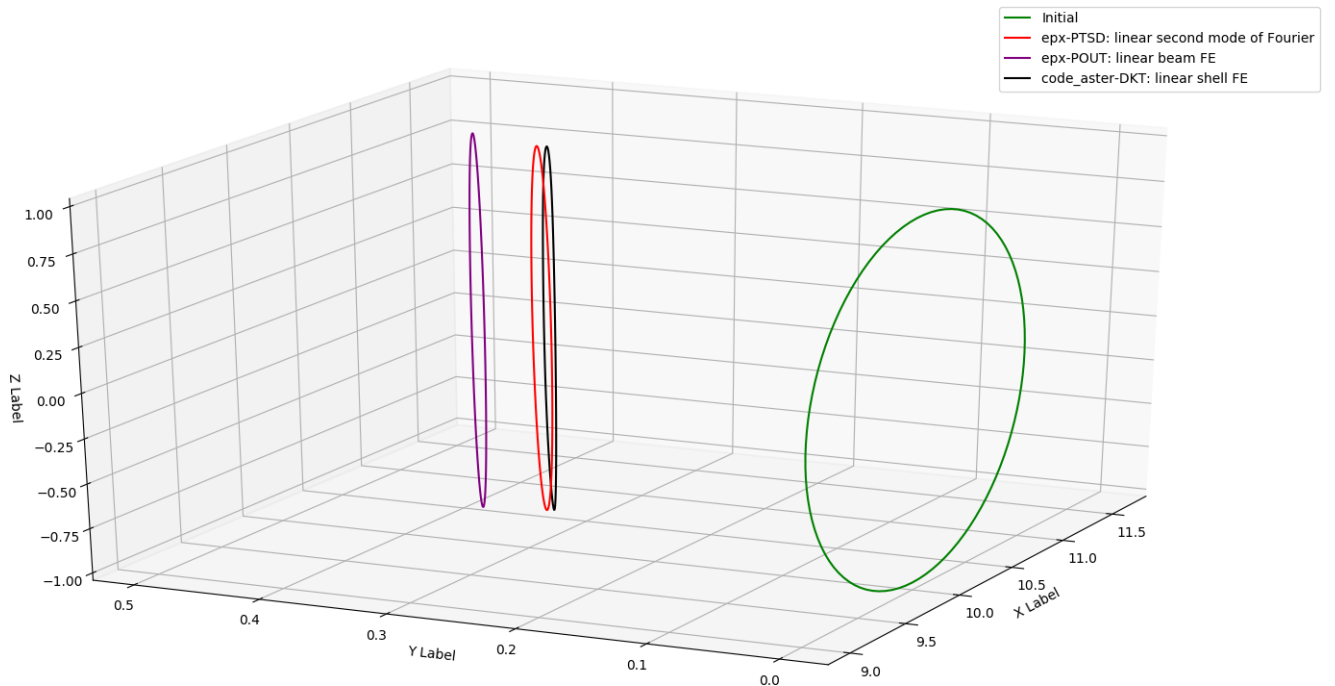


Figure 3.19 – Vue de côté de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême  $C$

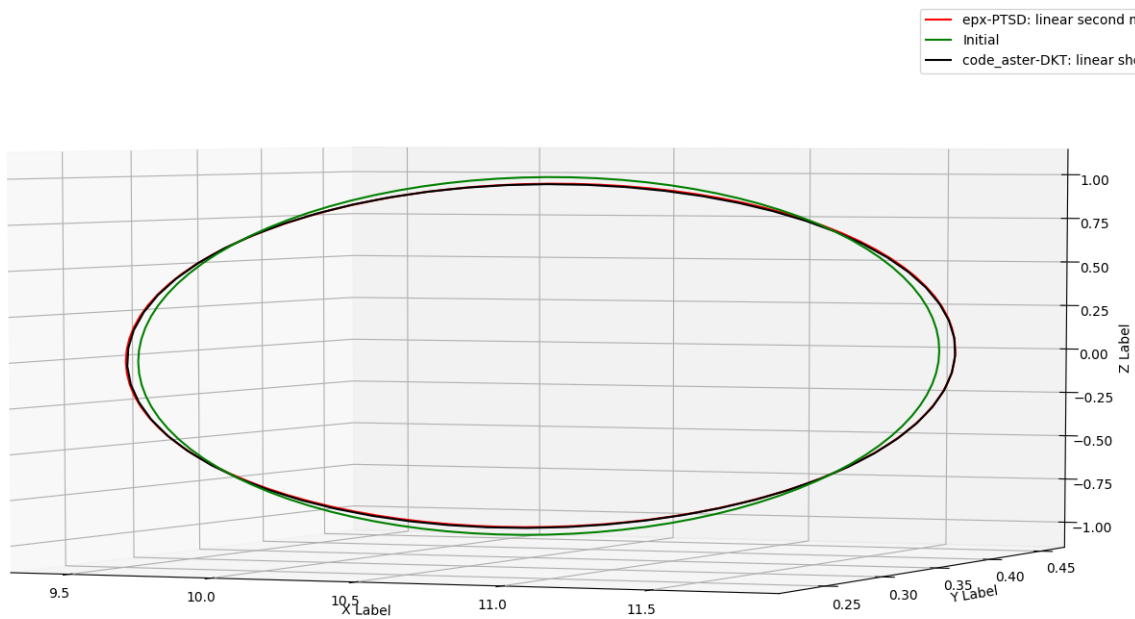


Figure 3.20 – Vue transversale de différentes sections lors d'une rotation imposée entraînant une ouverture du coude au point extrême  $C$

La comparaison avec un modèle coque donne de bons résultats mais comme discuté précédemment, une erreur entre la solution analytique et la solution numérique subsiste.

Après plusieurs investigations, il semblerait que l'erreur provienne de la solution analytique de référence. Les comparaisons numériques effectués ont permis de valider la modélisation pour ce cas de chargement. Il serait tout de même intéressant de déterminer une solution analytique fiable qui puisse vérifier le modèle numérique implémenté.

Dans ce chapitre, le tube a été modélisé avec une courbure initiale. Cette courbure engendre des couplages naturels entre les déplacements de type poutre et ceux de coque. Le modèle d'arc est plus complexe que celui du tube droit mais en choisissant  $R \rightarrow +\infty$  la modélisation de la tuyauterie droite est retrouvée.

Afin de vérifier et de valider ce modèle, le tuyau est soumis à des cas de chargement classique et similaire à ceux de la tuyauterie droite comme la pression interne imposée et la flexion pure. Contrairement au tube droit, sous l'effet de la pression interne la tuyauterie a tendance à "s'ouvrir". Cet effet est du au couplage naturel entre la partie poutre et la partie coque même si la cinématique retenue est linéaire (i.e. sans prise en compte du couplage non-linéaire). Les résultats numériques sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques du modèle proposé.

Dans le cas de la flexion pure, la cinématique de l'arc est couplée naturellement avec les degrés de libertés associés à l'ovalisation et au gauchissement. La tuyauterie courbée peut alors s'ovaliser sans que des termes non-linéaires soient pris en compte. Pour valider le modèle d'arc les résultats numériques de l'élément de poutre enrichi ont été comparés à une modélisation coque tridimensionnelle. Le modèle ainsi proposé représente fidèlement la déformée de la tuyauterie.

Pour ne pas alourdir la présentation, les cas tests numériques ont été présentés dans les chapitres 2 et 3 sans trop insister sur les méthodes numériques employées qui sont détaillées dans le chapitre suivant.

## 4 - Méthodes numériques

L'objectif de ce chapitre est de détailler la discrétisation des équations continues déterminées dans les chapitres précédents dans le cadre d'une intégration temporelle explicite en temps. Les fonctions de forme ainsi que la matrice des dérivées des fonctions de forme sont exprimées. Les déformations, les efforts généralisés et les forces internes sont calculés successivement. La matrice de masse cohérente est ensuite déterminée puis diagonalisée pour simplifier son inversion. Enfin la discrétisation temporelle est décrite avec la méthode des différences centrées finies. Le schéma étant explicite, la condition de stabilité, par le biais du nombre de Courant et des temps caractéristiques, est alors explicitée.

### 4.1 . Préambule

Le fouettement de tuyauterie est un phénomène typique de la dynamique rapide. La dynamique rapide est caractérisée par des phénomènes qui durent le plus souvent moins de quelques centaines de millisecondes. S'agissant habituellement de phénomènes très énergétiques (ex. : impacts, explosions, etc.), ils engendrent de fortes non linéarités qu'un modèle numérique doit être capable de représenter. L'implémentation numérique est donc effectuée dans le code de calcul Europlexus (EPX) <sup>1</sup>, qui est un code de dynamique rapide explicite, développé depuis 1999 par le CEA et EC/JRC [21]. En outre, Europlexus permet de prendre en compte les effets de l'Interaction Fluide Structure (IFS). La discrétisation spatiale est basée principalement sur la méthode des éléments finis pour la structure et sur la méthode des volumes finis pour le fluide. Dans ce code de calcul trois types de descriptions sont disponibles : la description Lagrangienne qui est plus adaptée pour les solides, la description Eulérienne qui est utilisée pour des problèmes purement fluides et enfin la description ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) qui permet de traiter des cas complexes d'IFS. Le lecteur pourra consulter le livre de Belytschko qui exprime davantage ces méthodes [12]. Europlexus utilise la méthode des différences centrées finies pour la discrétisation en temps. La méthode numérique de résolution utilisée dans le code de calcul est basée sur une description de type Lagrangien réactualisé, c'est à dire que la configuration de référence à l'instant,  $t + \Delta t$ , est celle de l'instant précédent,  $t$ . Dans une description Lagrangienne dite totale, la configuration de référence est et reste la configuration initiale.

Pour résoudre numériquement des systèmes complexes d'équations aux dérivées partielles, la méthode des éléments finis est souvent utilisée. Cette méthode basée sur une approche mathématique rigoureuse permet de discrétiser un objet continu en plusieurs éléments de tailles plus petites. Ainsi pour une application dans un contexte industriel sur un grand réseau de tuyauterie, l'un des enjeux est de développer des modèles permettant de réduire au maximum le temps de calcul.

Le choix de développer un élément fini filaire, prenant en compte les variations de sa section transverse, pour des calculs plus rapides a été retenu. Pour satisfaire cette modélisation une nouvelle méthodologie a été entreprise et est détaillée dans ce chapitre.

### 4.2 . Algorithme explicite

Dans cette partie, le cheminement numérique, allant de la discrétisation des équations d'équilibres continues jusqu'à l'obtention des forces internes, en passant par l'élaboration des fonctions de forme et la création de la matrice de masse, est décrit. Afin de simplifier la présentation, seuls les six degrés de libertés de poutre ainsi que les deux degrés de libertés associés au mode 0 de Fourier sont détaillés pour une tuyauterie droite. Les autres degrés de libertés du tube droit et ceux du tube coudé sont spécifiés dans chaque section où cela est nécessaire.

#### 4.2.1 . Discrétisation du problème continu

Pour modéliser numériquement la structure, il convient de discrétiser la forme faible de l'équation d'équilibre : le principe des puissances virtuelles (voir Eq. (2.4)) est rappelé sous la forme :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \cdot \delta \mathbf{v}^* \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{v}^* \, d\partial\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}^*) \, d\Omega \quad (4.1)$$

---

1. <https://europlexus.jrc.ec.europa.eu/>

L'idée des éléments finis est, comme son nom l'indique, de discrétiser la structure en un nombre fini d'éléments. La structure ainsi modélisée comprend  $n_e$  nombre d'éléments et  $n_N$  nombre de nœuds. Le déplacement continu tridimensionnel  $\mathbf{u}$  est ensuite discrétisé à l'aide de fonctions de forme, ne dépendant que de la variable  $X$  présent dans la matrice  $\mathbf{N}(X)$ , d'une matrice de passage  $\mathbf{Q}(\theta, Z)$  et d'une matrice colonne  $\mathbf{u}^e$  des valeurs aux  $n_N$  nœuds  $u_j$  ( $\forall j \in \{1, \dots, n_N\}$ ) :

$$\mathbf{u}(X, \theta, Z, t) = \mathbf{Q}(\theta, Z) \cdot \mathbf{N}(X) \cdot \mathbf{u}^e(t) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{j=1}^{n_N} \mathbf{N}_j \cdot u_j \quad (4.2)$$

De la même façon le mouvement de vitesse virtuelle est défini par :

$$\delta \mathbf{v}^* = \mathbf{Q} \cdot \sum_{j=1}^{n_N} \mathbf{N}_j \cdot \delta v_j^* \quad (4.3)$$

Le tenseur des déformations s'exprime de manière similaire en considérant la matrice  $\mathbf{B}$  des dérivées des fonctions de forme :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{Q} \cdot \sum_{j=1}^{n_N} \mathbf{B}_j \cdot u_j \quad (4.4)$$

Ce qui conduit également à :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\delta \mathbf{v}^*) = \mathbf{Q} \cdot \sum_{j=1}^{n_N} \mathbf{B}_j \cdot \delta v_j^* \quad (4.5)$$

La relation de comportement, peut s'exprimer sous la forme classique suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.6)$$

où  $\mathbf{C}$  représente le tenseur de l'élasticité d'ordre 4.

En réinjectant les équations discrétisées dans le principe des puissances virtuelles exprimé sous sa forme continue dans l'Eq. (4.1), l'équation d'équilibre discrétisée s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_N} \sum_{i=1}^{n_N} \delta v_i^* \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}_j^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i \, d\Omega \right) \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = \\ \sum_{i=1}^{n_N} \delta v_i^* \left( \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N}_i \, d\partial\Omega \right) - \sum_{j=1}^{n_N} \sum_{i=1}^{n_N} \delta v_i^* \left( \int_{\Omega} \mathbf{B}_i^T \cdot \mathbf{Q}^T : \mathbf{C} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B}_j \, d\Omega \right) u_j \end{aligned} \quad (4.7)$$

La matrice de masse  $\mathbf{M}$ , les forces extérieures  $\mathbf{F}_{ext}$  et les forces internes  $\mathbf{F}_{int}$  sont définies comme :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \, d\Omega ; \quad \mathbf{F}_{ext} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \, d\partial\Omega ; \quad \mathbf{F}_{int} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Q}^T : \mathbf{C} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega \quad (4.8)$$

Les forces internes peuvent également se mettre sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_X \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}_{gen} \, dX \quad \text{où} \quad \mathbf{F}_{gen} = \int_S \mathbf{Q}^T : \mathbf{C} : \mathbf{Q} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \, dS \quad (4.9)$$

Le déplacement virtuel étant une fonction test, l'équation discrétisée peut finalement s'écrire telle que :

$$\mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int} \quad (4.10)$$

L'écriture de l'équilibre est encore très générale et dans la suite de ce chapitre les variables introduites dans cette section sont unes à unes détaillées.

#### 4.2.2 . Fonctions de forme

Les fonctions de forme permettent d'exprimer, à l'aide de fonctions continues, les déplacements et les rotations. Ces dernières sont des fonctions d'interpolation et dans la plupart des cas des polynômes comme ceux de Lagrange ou d'Hermite. Le polynôme choisi doit passer par  $n + 1$  points donnés (ici les valeurs aux nœuds) ce qui lui confère d'être un polynôme d'ordre  $n$  à minima. Il y a donc une infinité de polynômes passant par  $n + 1$  points et dans la pratique, pour simplifier, le polynôme de degré le plus faible est considéré (i.e. de degré  $n$  dans ce cas). Les fonctions de forme doivent également respecter, dans certains cas, des conditions sur leurs dérivées : c'est notamment le cas avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff. Les fonctions de forme des six degrés de libertés de poutre  $U_o(X)$ ,  $W_o(X)$ ,  $V_o(X)$ ,  $\Omega_x(X)$ ,  $\Omega_y(X)$  et  $\Omega_z(X)$  ainsi que des deux degrés de libertés associés au mode 0 de Fourier  $w_o^c$  et  $\frac{\partial w_o^c}{\partial X}$  sont déterminées. Pour un élément filaire à deux nœuds (voir Fig. (4.1)) chaque degré de liberté possède deux valeurs par élément, qui correspondent au premier nœud et au second nœud. Par exemple  $U_o^1$  et  $U_o^2$  représentent respectivement les valeurs de  $U_o$  aux nœuds 1 et 2.

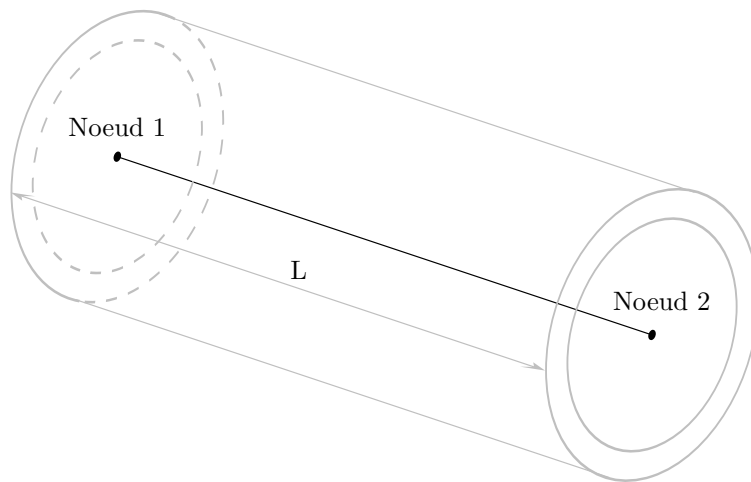


Figure 4.1 – Élément filaire à 2 nœuds

Un élément est, entre autres, caractérisé par sa longueur  $L$ . Afin d'adimensionner le problème les polynômes d'interpolation utilisent la variable  $\lambda$ , qui est définie comme :

$$\lambda = \frac{X}{L} \quad (4.11)$$

Ainsi les fonctions de forme ne sont plus écrites en fonction de  $X$  mais selon  $\lambda$ . Le premier nœud correspond à  $\lambda = 0$  (i.e.  $X = 0$ ) et le second nœud à  $\lambda = 1$  (i.e.  $X = L$ ). Il faut désormais déterminer les fonctions de forme polynomiales en respectant leurs conditions aux limites. Dans le cas du déplacement axial  $U_o$ , le polynôme  $P_{U_o}$  doit considérer les deux relations suivantes :

$$P_{U_o}(0) = U_o^1 \quad \text{et} \quad P_{U_o}(1) = U_o^2 \quad (4.12)$$

Le polynôme du premier ordre est suffisant et la fonction de forme s'écrit :

$$P_{U_o}(\lambda) = (1 - \lambda)U_o^1 + \lambda U_o^2 \quad (4.13)$$

De la même façon pour la torsion  $\Omega_x$ , la fonction de forme s'exprime comme :

$$P_{\Omega_x}(\lambda) = (1 - \lambda)\Omega_x^1 + \lambda\Omega_x^2 \quad (4.14)$$

Les fonctions de forme pour les déplacements transversaux  $W_o$  et  $V_o$  s'obtiennent avec la même méthodologie. Du fait des hypothèses d'Euler-Bernoulli (i.e.  $\frac{\partial W_o}{\partial X} = \Omega_z$  et  $\frac{\partial V_o}{\partial X} = -\Omega_y$ ), le polynôme doit respecter les conditions aux limites pour les déplacements et sa dérivée doit respecter des conditions aux limites sur les rotations. Dans le cas de  $W_o$  le

polynôme doit alors respecter les quatre conditions suivantes :

$$\begin{cases} P_{W_o}(0) = W_o^1 & ; \quad \frac{dP_{W_o}}{dX}(0) = \Omega_z^1 \\ P_{W_o}(1) = W_o^2 & ; \quad \frac{dP_{W_o}}{dX}(1) = \Omega_z^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Pour  $V_o$ , les relations à respecter sont similaires, avec toutefois un changement de signe sur la dérivée de  $P_{V_o}$  :

$$\begin{cases} P_{V_o}(0) = V_o^1 & ; \quad \frac{dP_{V_o}}{dX}(0) = -\Omega_y^1 \\ P_{V_o}(1) = V_o^2 & ; \quad \frac{dP_{V_o}}{dX}(1) = -\Omega_y^2 \end{cases} \quad (4.16)$$

Les fonctions de forme sont alors de degré trois et sont décrites ci-après :

$$\begin{cases} P_{W_o}(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+2\lambda)W_o^1 + \lambda^2(3-2\lambda)W_o^2 + L\lambda(\lambda-1)^2\Omega_z^1 + L(\lambda-1)\lambda^2\Omega_z^2 \\ \frac{dP_{W_o}(\lambda)}{dX} = \frac{1}{L}[-6\lambda(1-\lambda)W_o^1 + 6\lambda(1-\lambda)W_o^2 + L(\lambda-1)(3\lambda-1)\Omega_z^1 + L\lambda(3\lambda-2)\Omega_z^2] \\ P_{V_o}(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+2\lambda)V_o^1 + \lambda^2(3-2\lambda)V_o^2 - L\lambda(\lambda-1)^2\Omega_y^1 - L(\lambda-1)\lambda^2\Omega_y^2 \\ -\frac{dP_{V_o}(\lambda)}{dX} = \frac{1}{L}[6\lambda(1-\lambda)V_o^1 - 6\lambda(1-\lambda)V_o^2 + L(\lambda-1)(3\lambda-1)\Omega_y^1 + L\lambda(3\lambda-2)\Omega_y^2] \end{cases} \quad (4.17)$$

D'une façon similaire le polynôme d'interpolation des degrés de liberté associés au gonflement, sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff, doit vérifier :

$$\begin{cases} P_{w_o^c}(0) = w_o^{c,1} & ; \quad \frac{dP_{w_o^c}}{dX}(0) = \left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^1 \\ P_{w_o^c}(1) = w_o^{c,2} & ; \quad \frac{dP_{w_o^c}}{dX}(1) = \left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^2 \end{cases} \quad (4.18)$$

Le polynôme est ainsi de degré trois et est défini par :

$$\begin{cases} P_{w_o^c}(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+2\lambda)w_o^{c,1} + \lambda^2(3-2\lambda)w_o^{c,2} + L\lambda(\lambda-1)^2\left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^1 + L(\lambda-1)\lambda^2\left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^2 \\ \frac{dP_{w_o^c}(\lambda)}{dX} = \frac{1}{L}\left[-6\lambda(1-\lambda)w_o^{c,1} + 6\lambda(1-\lambda)w_o^{c,2} + L(\lambda-1)(3\lambda-1)\left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^1 + L\lambda(3\lambda-2)\left(\frac{\partial w_o^c}{\partial X}\right)^2\right] \end{cases} \quad (4.19)$$

**Remarque** : Les fonctions de forme de  $U_o$  et  $\Omega_x$  sont linéaires alors que les autres sont des polynômes de degré trois. Ceci vient simplement du fait que les hypothèses d'Euler-Bernoulli ( $\Omega_z = \frac{\partial W_o}{\partial X}$  et  $\Omega_y = -\frac{\partial V_o}{\partial X}$ ) sont considérés. En restant dans les hypothèse de Timoshenko, les fonctions de forme linéaires pour  $W_o$ ,  $V_o$ ,  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  suffisent. La même remarque s'applique à la partie coque pour  $w_o$  et  $u_1$  en considérant les hypothèses de Mindlin-Reissner plutôt que celles de Love-Kirchhoff.

#### Généralisation aux autres modes de Fourier :

Les fonctions de forme des degrés de liberté qui correspondent aux déplacements dans la section transverse (i.e  $w_i^{c,s} \forall i \in \mathbb{N}$ ) sous l'hypothèse de Love-Kirchhoff sont similaires à ce qui est fait pour le mode 0 de Fourier.

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} P_{w_i^{c,s}}(\lambda) = (1-\lambda)^2(1+2\lambda)(w_i^{c,s})^1 + \lambda^2(3-2\lambda)(w_i^{c,s})^2 + L\lambda(\lambda-1)^2\left(\frac{\partial w_i^{c,s}}{\partial X}\right)^1 + L(\lambda-1)\lambda^2\left(\frac{\partial w_i^{c,s}}{\partial X}\right)^2 \\ \frac{dP_{w_i^{c,s}}(\lambda)}{dX} = \frac{1}{L}\left[-6\lambda(1-\lambda)(w_i^{c,s})^1 + 6\lambda(1-\lambda)(w_i^{c,s})^2 + L(\lambda-1)(3\lambda-1)\left(\frac{\partial w_i^{c,s}}{\partial X}\right)^1 + L\lambda(3\lambda-2)\left(\frac{\partial w_i^{c,s}}{\partial X}\right)^2\right] \end{cases} \quad (4.20)$$

Pour les degrés de liberté de gauchissement (i.e  $u_i^{c,s} \forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ ) les fonctions de forme sont des polynômes linéaires et s'expriment comme :

$$\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad P_{u_i^{c,s}}(\lambda) = (1-\lambda)(u_i^{c,s})^1 + \lambda(u_i^{c,s})^2 \quad (4.21)$$

### Spécification du tube coudé :

Les fonctions de forme pour le tube coudé sont nettement plus complexes à déterminer. Les fonctions de forme classiques ne fournissent pas de bons résultats pour les poutres courbes [23] et les tests numériques entrepris avec les fonctions de forme du tube droit se sont avérés infructueux.

Les premières recherches sur le sujet ont conclu que le problème venait du fait de la mauvaise description des mouvements de corps rigide et de certains phénomènes de blocage comme le blocage de membrane et de cisaillement pour les poutres de Timoshenko [23, 18, 80, 38].

Afin de résoudre ce problème numérique, des polynômes d'ordre supérieurs avec plus de nœuds et de degré de libertés ont été introduits [80, 59, 112, 8, 79, 22, 55]. Dans [10, 6, 7, 17, 18, 110, 38] à la place de polynômes, des fonctions de forme trigonométriques sont obtenues en résolvant les équations d'équilibre en statique. La plupart des éléments créés sont des éléments à trois nœuds qui ne peuvent pas convenir à l'étude actuelle car dans la modélisation proposée seul le choix d'un élément filaire à deux nœuds a été retenu.

Les travaux de Friedman et Kosmatka [38] ont permis d'obtenir d'excellents résultats numériques sur des poutres de Timoshenko courbées, tout en restant avec un élément à deux nœuds. Pour obtenir des fonctions de forme d'ordre plus élevé, que ce soit polynomiale ou trigonométrique, il faut que ces fonctions vérifient les conditions aux limites usuelles et les équations d'équilibre. Le fait de vérifier exactement les équations d'équilibre permet d'obtenir des relations supplémentaires permettant d'enrichir l'ordre des fonctions de forme. La méthodologie entreprise, dans cette partie, pour déterminer les fonctions de forme du tube coudé est basée, entre autres, sur les travaux de Friedman [38].

L'objectif est de déterminer de nouvelles fonctions de forme, respectant les conditions aux limites aux deux nœuds de l'élément ainsi que les équations d'équilibre en statique. L'analyse des fonctions de forme est faite seulement sur les degrés de liberté dans le plan (i.e.  $U_o(s)$ ,  $W_o(s)$  et  $\Omega_z(s)$ ) en maintenant l'hypothèse d'Euler-Bernoulli donnée dans l'Eq. (D.18). En ne considérant que les degrés de libertés de poutre, les équations d'équilibre de l'Eq. (3.11) et les efforts généralisés de l'Eq. (3.12) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 M_z}{\partial s^2} + n_z = 0 \quad \text{où} \quad N = D\pi a e \left[ \left( 2 + \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{\partial U_o}{\partial s} - \frac{2}{R} W_o + \frac{a^2}{R} \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} \right] \\ n_z = D\pi a e \left[ -\frac{2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{2}{R^2} W_o \right] ; \quad M_z = D\pi a e \left[ a^2 \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{a^2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

En injectant les efforts généralisés dans les équations d'équilibre, le système d'équation différentielle suivant apparaît :

$$\begin{cases} \left( 2 + \frac{a^2}{R^2} \right) \frac{\partial^2 U_o}{\partial s^2} - \frac{2}{R} \frac{\partial W_o}{\partial s} + \frac{a^2}{R} \frac{\partial^3 W_o}{\partial s^3} = 0 \\ a^2 \frac{\partial^4 W_o}{\partial s^4} + \frac{a^2}{R} \frac{\partial^3 U_o}{\partial s^3} - \frac{2}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} + \frac{2}{R^2} W_o = 0 \end{cases} \quad (4.23)$$

De manière similaire à ce qui est fait dans [38], la solution est cherchée sous la forme  $U_o = Ae^{rs}$  et  $W_o = Be^{rs}$ . En injectant dans l'Eq. (4.23) et en factorisant par l'exponentielle, le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} r^2 \left( 2 + \frac{a^2}{R^2} \right) A + r \left( r^2 \frac{a^2}{R} - \frac{2}{R} \right) B = 0 \\ r \left( \frac{a^2}{R} r^2 - \frac{2}{R} \right) A + \left( a^2 r^4 + \frac{2}{R^2} \right) B = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

La solution triviale (i.e.  $A = B = 0$ ) de ce système n'est pas retenue puisqu'elle mène à une solution nulle. Afin d'obtenir une solution non triviale, il convient de considérer un déterminant nul qui mène à l'équation :

$$r^2 \left( r^2 + \frac{1}{R^2} \right)^2 = 0 \quad (4.25)$$

La même relation est obtenue dans [38], cette dernière est donc indépendante des hypothèses d'Euler-Bernoulli. Il est à noter également que la relation ne dépend pas de l'épaisseur  $e$ , du rayon  $a$ , de la longueur  $L_{arc}$  ni des caractéristiques du matériau. Cette équation ne dépend que du rayon de courbure  $R$ .



Les solutions doubles de  $r$  de l'Eq. (4.25) sont :

$$r^{sol} \in \left\{ -\frac{1}{R}j, 0, \frac{1}{R}j \right\} \quad \text{où } j^2 = -1 \quad (4.26)$$

De par la multiplicité des solutions [38], elles sont trigonométriques et s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} U_o = A_1 + A_2s + A_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + A_5s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + A_6s \sin\left(\frac{s}{R}\right) & \text{où } (A_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \\ W_o = B_1 + B_2s + B_3 \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_4 \sin\left(\frac{s}{R}\right) + B_5s \cos\left(\frac{s}{R}\right) + B_6s \sin\left(\frac{s}{R}\right) & \text{où } (B_i)_{i=1,\dots,6} \in \mathbb{R}^6 \end{cases} \quad (4.27)$$

Les fonctions de forme doivent vérifier les conditions aux nœuds classiques :

$$\begin{cases} U_o(0) = U_o^1 & ; & W_o(0) = W_o^1 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(0) = \Omega_z^1 - \frac{U_o^1}{R} \\ U_o(1) = U_o^2 & ; & W_o(1) = W_o^2 & ; & \frac{\partial W_o}{\partial s}(1) = \Omega_z^2 - \frac{U_o^2}{R} \end{cases} \quad (4.28)$$

Il y a donc 12 constantes à déterminer mais seulement avec 6 équations ce qui n'est pas suffisant. L'idée est que les fonctions de forme doivent également respecter les équations d'équilibres fournies dans l'Eq. (4.23).

Les solutions sous la forme proposée (dans l'Eq. (4.27)) sont injectées dans l'Eq. (4.23). La famille qui engendre les fonctions de forme est une famille libre et par conséquent, si une combinaison linéaire d'une famille libre est nulle alors chaque coefficient est nul. Ceci permet d'obtenir 12 relations supplémentaires dont 6 sont linéairement indépendantes permettant de déterminer chaque coefficient des fonctions de forme. La résolution analytique des coefficients est assez lourde et elle a été effectuée avec la librairie Sympy de Python en inversant un système d'équations 12 par 12. Il est à noter que les coefficients obtenus ne dépendent que du rayon moyen  $a$  et du rayon de courbure  $R$  et sont indépendant du comportement et de l'épaisseur contrairement à ce qui est fait dans [38].

Pour le coude dans le plan les fonctions de forme sont données par les relations qui suivent :

$$\begin{cases} P_{U_o}^c(\lambda) = A_1 + A_2L\lambda + A_3 \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + A_4 \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + A_5L\lambda \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + A_6L\lambda \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) \\ P_{W_o}^c(\lambda) = B_1 + B_2L\lambda + B_3 \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + B_4 \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + B_5L\lambda \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + B_6L\lambda \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) \\ \frac{dP_{W_o}^c}{ds}(\lambda) = B_2 + \left(\frac{B_4}{R} + B_5\right) \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + \left(-\frac{B_3}{R} + B_6\right) \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) + \frac{B_6}{R}L\lambda \cos\left(\frac{L\lambda}{R}\right) - \frac{B_5}{R}L\lambda \sin\left(\frac{L\lambda}{R}\right) \end{cases} \quad (4.29)$$

Les fonctions de forme utilisées pour la partie coque sont les mêmes que celles du tube droit (voir Eq. (4.20) et Eq. (4.21)).

Les fonctions de forme étant toutes définies, les déplacements tridimensionnels sont exprimés en fonction des valeurs aux nœuds et de la matrice des fonctions de forme.

### 4.2.3 . Matrice $\mathbf{N}$ des fonctions de forme

Le déplacement est d'abord défini dans le repère général, puis il est transporté dans le repère local de l'élément :

$$\mathbf{U}_{local} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{U}_{global} \quad \text{où } \mathbf{P} \text{ représente la matrice de passage entre le repère local et global.} \quad (4.30)$$

Dans la suite et sauf mention contraire, toutes les quantités sont exprimées dans le repère local et pour ne pas alourdir les notations elles ne sont pas indicées par *local*.

Pour rappel, en considérant les degrés de libertés de poutre et ceux du gonflement, le déplacement s'écrit :

$$\mathbf{U} = \left( U_o + (R + Z) \sin \theta \Omega_y - (R + Z) \cos \theta \Omega_z - Z \frac{\partial w_o^c}{\partial X} \right) \mathbf{E}_X + (V_o \sin \theta + W_o \cos \theta + w_o^c) \mathbf{E}_R \quad (4.31)$$

$$+ (V_o \cos \theta - W_o \sin \theta + (R + Z) \Omega_x) \mathbf{E}_\theta = U_X \mathbf{E}_X + U_R \mathbf{E}_R + U_\theta \mathbf{E}_\theta$$

Qui peut également s'exprimer sous forme matricielle :

$$\mathbf{U}(X, \theta, Z) = \begin{pmatrix} U_X \\ U_R \\ U_\theta \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

La matrice colonne  $\mathbf{U}^e$ , des valeurs aux nœuds des degrés de liberté est définie de la façon suivante :

$$\mathbf{U}^e = \begin{pmatrix} U_o^1 \\ W_o^1 \\ V_o^1 \\ \Omega_x^1 \\ \Omega_y^1 \\ \Omega_z^1 \\ w_o^{c,1} \\ \left( \frac{\partial w_o^c}{\partial X} \right)^1 \\ U_o^2 \\ W_o^2 \\ V_o^2 \\ \Omega_x^2 \\ \Omega_y^2 \\ \Omega_z^2 \\ w_o^{c,2} \\ \left( \frac{\partial w_o^c}{\partial X} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

La matrice des fonctions de forme  $\mathbf{N}$ , (ici de dimension 8x16), et la matrice de passage  $\mathbf{Q}$  sont définies telles que :

$$\mathbf{Q}(\theta, Z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (R + Z) \sin \theta & -(R + Z) \cos \theta & 0 & -Z \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & (R + Z) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

$$\mathbf{N}(X) = \begin{pmatrix} N_{U_o}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{U_o}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{W_o}^1 & 0 & 0 & 0 & N_{\Omega_z}^1 & 0 & 0 & 0 & N_{W_o}^2 & 0 & 0 & 0 & N_{\Omega_z}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{V_o}^1 & 0 & N_{\Omega_y}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{V_o}^2 & 0 & N_{\Omega_z}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{\Omega_x}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\Omega_x}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{dN_{V_o}^1}{dX} & 0 & -\frac{dN_{\Omega_y}^1}{dX} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{dN_{V_o}^2}{dX} & 0 & -\frac{dN_{\Omega_z}^2}{dX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{dN_{W_o}^1}{dX} & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{\Omega_z}^1}{dX} & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{W_o}^2}{dX} & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{\Omega_z}^2}{dX} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{w_o^c}^1 & N_{dw_o^c}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{w_o^c}^2 & N_{dw_o^c}^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{w_o^c}^1}{dX} & \frac{dN_{dw_o^c}^1}{dX} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{dN_{w_o^c}^2}{dX} & \frac{dN_{dw_o^c}^2}{dX} \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

Où les composantes non nulles sont données :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 N_{U_o}^1 = (1 - \lambda) \ ; \ N_{U_o}^2 = \lambda \\
 N_{W_o}^1 = (1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) \ ; \ N_{\Omega_z}^1 = L\lambda(\lambda - 1)^2 \ ; \ N_{W_o}^2 = \lambda^2(3 - 2\lambda) \ ; \ N_{\Omega_z}^2 = L\lambda^2(\lambda - 1) \\
 N_{V_o}^1 = (1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) \ ; \ N_{\Omega_y}^1 = -L\lambda(\lambda - 1)^2 \ ; \ N_{V_o}^2 = \lambda^2(3 - 2\lambda) \ ; \ N_{\Omega_y}^2 = -L\lambda^2(\lambda - 1) \\
 N_{\Omega_x}^1 = (1 - \lambda) \ ; \ N_{\Omega_x}^2 = \lambda \\
 \frac{dN_{W_o}^1}{dX} = -\frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{\Omega_z}^1}{dX} = (\lambda - 1)(3\lambda - 1) \ ; \ \frac{dN_{W_o}^2}{dX} = \frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{\Omega_z}^2}{dX} = \lambda(3\lambda - 2) \\
 \frac{dN_{V_o}^1}{dX} = -\frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{\Omega_y}^1}{dX} = -(\lambda - 1)(3\lambda - 1) \ ; \ \frac{dN_{V_o}^2}{dX} = \frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{\Omega_y}^2}{dX} = -\lambda(3\lambda - 2) \\
 N_{w_o^c}^1 = (1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) \ ; \ N_{dw_o^c}^1 = L\lambda(\lambda - 1)^2 \ ; \ N_{w_o^c}^2 = \lambda^2(3 - 2\lambda) \ ; \ N_{dw_o^c}^2 = L\lambda^2(\lambda - 1) \\
 \frac{dN_{w_o^c}^1}{dX} = -\frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{dw_o^c}^1}{dX} = (\lambda - 1)(3\lambda - 1) \ ; \ \frac{dN_{w_o^c}^2}{dX} = \frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \ ; \ \frac{dN_{dw_o^c}^2}{dX} = \lambda(3\lambda - 2)
 \end{array} \right. \quad (4.36)$$

La relation entre le déplacement et les valeurs aux nœuds est définie par :

$$\mathbf{U} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}^e \quad (4.37)$$

#### Généralisation aux autres modes de Fourier :

La démarche entreprise pour les autres modes de Fourier est similaire à ce qui est fait pour le mode 0 de Fourier. Pour simplifier seuls les termes en cosinus sont détaillés. Pour les termes en sinus il suffit de remplacer  $\cos(i\theta)$  par  $\sin(i\theta)$  et  $-\sin(i\theta)$  par  $\cos(i\theta)$ . Pour  $i = 1$  les signes et les coefficients sont différents mais la démarche reste la même et n'est pas explicitée.

Le déplacement pour le  $i^{\text{ème}}$  ( $i \geq 2$ ) mode de Fourier en cosinus  $\mathbf{U}_i^c$  s'écrit :

$$\mathbf{U}_i^c = \left( \cos(i\theta)u_i^c - Z \cos(i\theta) \frac{\partial w_i^c}{\partial X} \right) \mathbf{E}_X + \cos(i\theta)w_i^c \mathbf{E}_R + \left( -\frac{1}{i} \sin(i\theta)w_i^c - Z \frac{1}{a} \left( \frac{i^2 - 1}{i} \right) (-\sin(i\theta))w_i^c \right) \mathbf{E}_\theta \quad (4.38)$$

La matrice colonne  $(\mathbf{U}^e)_i^c$  des valeurs aux nœuds s'exprime comme :

$$(\mathbf{U}^e)_i^c = \begin{pmatrix} u_i^{c,1} \\ w_i^{c,1} \\ \left( \frac{\partial w_i^c}{\partial X} \right)^1 \\ u_i^{c,2} \\ w_i^{c,2} \\ \left( \frac{\partial w_i^c}{\partial X} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

La matrice des fonctions de forme  $(\mathbf{N})_i^c$  et la matrice de passage  $(\mathbf{Q})_i^c$  se déduisent de ce qui a déjà été fait précédemment :

$$(\mathbf{Q})_i^c(\theta, Z) = \begin{pmatrix} \cos(i\theta) & 0 & -Z \cos(i\theta) \\ 0 & \cos(i\theta) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{i} \sin(i\theta) & -Z \frac{1}{a} \left( \frac{i^2 - 1}{i} \right) (-\sin(i\theta)) \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

$$(\mathbf{N})_i^c(X) = \begin{pmatrix} N_{u_i^c}^1 & 0 & 0 & N_{u_i^c}^2 & 0 & 0 \\ 0 & N_{w_i^c}^1 & N_{dw_i^c}^1 & 0 & N_{w_i^c}^2 & N_{dw_i^c}^2 \\ 0 & \frac{dN_{w_i^c}^1}{dX} & \frac{dN_{dw_i^c}^1}{dX} & 0 & \frac{dN_{w_i^c}^2}{dX} & \frac{dN_{dw_i^c}^2}{dX} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Où les composantes non nulles sont fournies :

$$\begin{cases} N_{u_i^c}^1 = (1 - \lambda) \quad ; \quad N_{u_i^c}^2 = \lambda \\ N_{w_i^c}^1 = (1 - \lambda)^2(1 + 2\lambda) \quad ; \quad N_{dw_i^c}^1 = L\lambda(\lambda - 1)^2 \quad ; \quad N_{w_i^c}^2 = \lambda^2(3 - 2\lambda) \quad ; \quad N_{dw_i^c}^2 = L\lambda^2(\lambda - 1) \\ \frac{dN_{w_i^c}^1}{dX} = -\frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \quad ; \quad \frac{dN_{dw_i^c}^1}{dX} = (\lambda - 1)(3\lambda - 1) \quad ; \quad \frac{dN_{w_i^c}^2}{dX} = \frac{1}{L}6\lambda(1 - \lambda) \quad ; \quad \frac{dN_{dw_i^c}^2}{dX} = \lambda(3\lambda - 2) \end{cases} \quad (4.42)$$

#### Spécification du tube courbé :

Pour le coude il suffit de considérer les déplacements de poutre et de coque dans le plan (voir Eq. (D.6) et Eq. (D.9)), puis de reprendre la méthodologie exprimée ci-dessus avec la matrice des fonctions de forme nettement moins creuse. Les fonctions de forme sont exprimées dans l'Eq. (4.29) et la détermination des coefficients permet de remplir la matrice  $\mathbf{N}$  qui n'est pas détaillée ici.

#### 4.2.4 . Matrice des dérivées des fonctions de forme et incrément de déformation

Après avoir défini la cinématique à travers les fonctions de forme, les incréments de déformation,  $\Delta\varepsilon$ , peuvent être obtenus à partir de la matrice des dérivées des fonction de forme  $\mathbf{B}$ . Pour simplifier la lecture, les variables sont décomposées en une contribution de poutre ( $\Delta\varepsilon^p$ ) et une contribution de coque ( $\Delta\varepsilon^c$ ). Les incréments de déformation sont définis tels que :

$$\Delta\varepsilon^p = \begin{pmatrix} \frac{\partial\Delta U_o}{\partial X} \\ \frac{\partial\Delta\Omega_x}{\partial X} \\ -\frac{\partial^2\Delta V_o}{\partial X^2} \\ \frac{\partial^2\Delta W_o}{\partial X^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \Delta\varepsilon^c = \begin{pmatrix} \Delta w_o^c \\ \frac{\partial^2\Delta w_o^c}{\partial X^2} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

Les incréments de déplacement de poutre  $\mathbf{U}^{e,p}$  et de coque  $\mathbf{U}^{e,c}$  s'écrivent comme suit :

$$\Delta\mathbf{U}^{e,p} = \begin{pmatrix} \Delta U_o^1 \\ \Delta W_o^1 \\ \Delta V_o^1 \\ \Delta\Omega_x^1 \\ \Delta\Omega_y^1 \\ \Delta\Omega_z^1 \\ \Delta U_o^2 \\ \Delta W_o^2 \\ \Delta V_o^2 \\ \Delta\Omega_x^2 \\ \Delta\Omega_y^2 \\ \Delta\Omega_z^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Delta\mathbf{U}^{e,c} = \begin{pmatrix} \Delta w_o^{c,1} \\ \Delta \left( \frac{\partial w_o^c}{\partial X} \right)^1 \\ \Delta w_o^{c,2} \\ \Delta \left( \frac{\partial w_o^c}{\partial X} \right)^2 \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

Les matrices des dérivées des fonctions de poutre  $\mathbf{B}^p$  et de coque  $\mathbf{B}^c$  sont définies par :

$$\mathbf{B}^p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & 0 & \frac{2(3\lambda-2)}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & 0 & \frac{2(3\lambda-1)}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2(3\lambda-2)}{L} & 0 & -\frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2(3\lambda-1)}{L} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{B}^c = \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2(1+2\lambda) & L\lambda(\lambda-1)^2 & \lambda^2(3-2\lambda) & L(\lambda-1)\lambda^2 \\ \frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & \frac{2(3\lambda-2)}{L} & -\frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & \frac{2(3\lambda-1)}{L} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Les relations entre les incréments de déformations et les valeurs aux nœuds sont exprimées ci-dessous :

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p = \mathbf{B}^p \cdot \Delta \mathbf{U}^{e,p} \quad ; \quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c = \mathbf{B}^c \cdot \Delta \mathbf{U}^{e,c} \quad (4.47)$$

Les incréments de déformation sont ensuite ajoutés à chaque pas de temps  $i$  afin de déterminer le tenseur des déformations discret  $\boldsymbol{\varepsilon}^d$  au temps courant  $t^n$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^d = \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p)^i \\ (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^c)^i \end{pmatrix} \quad (4.48)$$

Les valeurs de ce tenseur sont exprimées avec l'exposant  $d$  afin d'indiquer que ce sont des variables obtenues après discrétisation.

#### Généralisation aux autres modes de Fourier :

Pour le  $i^{\text{ème}}$  modes de Fourier en cosinus, les incréments de déplacement et de déformation sont définis tels que :

$$\Delta (\mathbf{U}^{e,c})_i^c = \begin{pmatrix} \Delta u_i^{c,1} \\ \Delta w_i^{c,1} \\ \Delta \left( \frac{\partial w_i^c}{\partial X} \right)^1 \\ \Delta u_i^{c,2} \\ \Delta w_i^{c,2} \\ \Delta \left( \frac{\partial w_i^c}{\partial X} \right)^2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \Delta (\boldsymbol{\varepsilon}^c)_i^c = \begin{pmatrix} \Delta u_i^c \\ \frac{\partial \Delta u_i^c}{\partial X} \\ \Delta w_i^c \\ \frac{\partial \Delta w_i^c}{\partial X} \\ \frac{\partial^2 \Delta w_i^c}{\partial X^2} \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

La matrice des dérivées des fonctions de forme  $(\mathbf{B}^c)_i^c$  est exprimée par :

$$(\mathbf{B}^c)_i^c = \begin{pmatrix} (1-\lambda) & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ -\frac{1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^2(1+2\lambda) & L\lambda(\lambda-1)^2 & 0 & \lambda^2(3-2\lambda) & L(\lambda-1)\lambda^2 \\ 0 & -\frac{1}{L}6\lambda(1-\lambda) & (\lambda-1)(3\lambda-1) & 0 & \frac{1}{L}6\lambda(1-\lambda) & \lambda(3\lambda-2) \\ 0 & \frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & \frac{2(3\lambda-2)}{L} & 0 & -\frac{6(2\lambda-1)}{L^2} & \frac{2(3\lambda-1)}{L} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Il est à noter que la matrice  $(\mathbf{B}^c)_i^c$  contient trois lignes supplémentaires comparée à la matrice du gonflement donnée dans l'Eq. (4.46) car le gauchissement est désormais pris en considération et que dû aux termes en  $\theta$  dans le tenseur des déformations la dérivée première de  $w_i^c$  apparaît également.

Pour les termes en sinus la matrice s'écrit sous la même forme. Pour le premier mode de Fourier les termes de gauchissement étant nuls, seul les trois dernières lignes sont maintenues.

#### Spécification du tube coudé :

Dans le cas du tube coudé, le tenseur des déformations possède des termes supplémentaires comme par exemple  $W_o/R$ . Il convient alors d'ajouter des termes dans l'incrément de déformation  $\Delta\epsilon^p$ . Il n'y a pas besoin d'ajouter de termes aux incréments de déplacement mais il faut rajouter des lignes pour la matrice  $\mathbf{B}$ . La construction de cette dernière s'effectue en utilisant l'Eq. (4.29) avec les coefficients déterminés par le calcul formel. Pour les termes supplémentaire de coque la matrice  $\mathbf{B}$  est la même que celle définie dans l'Eq. (4.50).

#### Spécification du couplage non-linéaire :

D'une façon similaire, des termes supplémentaires apparaissent, que ce soit pour le tube droit ou le tube coudé. Il faut alors rajouter des termes dans  $\epsilon$  et  $\mathbf{B}$ . Il est à noter que le tenseur des déformations discret restera numériquement linéaire sous forme d'une matrice colonne alors que le tenseur des déformations continu est quant à lui non linéaire. La non linéarité n'est introduite que dans le calcul des efforts généralisés.

L'écriture du tenseur des déformations discret  $\epsilon^d$ , permet désormais de déterminer les efforts généralisés.

#### 4.2.5 . Efforts généralisés et forces internes

Ici, seule la loi de comportement élastique linéaire isotrope en contraintes planes est introduite (voir Eq. (1.75)). Par conséquent il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement les incréments de contraintes. En effet les efforts généralisés peuvent être directement exprimés en fonction du tenseur des déformations. La forme discrétisée des efforts généralisés donnée dans l'Eq. (1.76), s'exprime sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} N = DS \left[ \frac{\partial U_o^d}{\partial X} + \nu \frac{(w_o^c)^d}{a} \right] \\ M_x = GJ_x \frac{\partial \Omega_x^d}{\partial X} \\ M_y = -DI_y \frac{\partial^2 V_o^d}{\partial X^2} \\ M_z = DI_z \frac{\partial^2 W_o^d}{\partial X^2} \\ n_o^c = D \frac{S}{a} \left[ \nu \frac{\partial U_o^d}{\partial X} + \frac{(w_o^c)^d}{a} \right] \\ m_o^c = DS \frac{e^2}{12} \left[ \left( \frac{\partial^2 w_o^c}{\partial X^2} \right)^d + \nu \frac{(w_o^c)^d}{a^2} \right] \end{array} \right. \quad (4.51)$$

La matrice colonne des efforts généralisés  $\mathbf{F}_{gen}$  est définie telle que :

$$\mathbf{F}_{gen} = \begin{pmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ n_o^c \\ m_o^c \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

Les forces internes locales se définissent telles que :

$$F_{int} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}_{gen} dX \quad (4.53)$$

Afin d'intégrer numériquement ces quantités ne dépendant que de la variable  $X$  (à travers la variable  $\lambda$ ), les méthodes classiques d'intégration par les rectangles, les trapèzes ou le point milieu sont des méthodes trop chères en temps de

calcul pour obtenir des bons résultats. L'intégration par la méthode de la quadrature de Gauss permet de donner une approximation de ces intégrales beaucoup plus rapidement et simplement.

#### Approximation d'une intégrale par la méthode de la quadrature de Gauss

La méthode de quadrature de Gauss est une méthode permettant d'approximer l'intégrale d'une fonction  $f$  avec quelques points particulier de la fonction. A l'aide du changement de variable  $x = \frac{a-b}{2}X + \frac{a+b}{2}$ , qui permet de se ramener à une intégrale entre -1 et 1, la relation suivante s'en déduit :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.54)$$

Cette intégrale peut alors être déterminée par la méthode de quadrature de Gauss qui s'exprime comme :

$$\frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f\left(\frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}\right) dx = \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N \omega_i f\left(\frac{b-a}{2}x_i + \frac{a+b}{2}\right) \quad (4.55)$$

où les  $x_i$  représentent les points d'interpolation,  $\omega_i$  leurs poids et  $N$  le nombre de points.

Cette méthode de quadrature est exacte pour un polynôme de degré  $2n - 1$  lorsque y a  $n$  points d'intégration. Ainsi, dans le cas présent, les polynômes dans la matrice B sont au plus de degré 3. Ces polynômes sont également présents dans  $F_{gen}$ , il faut donc intégrer des polynômes de degré 6. L'inégalité  $2n - 1 \geq 6 \Rightarrow n \geq 4$  indique que pour une intégration exacte il suffit de considérer 4 points de Gauss.

**Remarque** : Dans le cas des poutres classiques, 2 points de Gauss suffisent car la matrice B ne comprend qu'au plus des polynômes d'ordre 1.

Les points de Gauss correspondent aux racines des polynôme de Legendre. Ainsi pour déterminer les  $n$  points de Gauss  $x_i$ , il faut trouver les racines du  $n^{ième}$  polynôme de Legendre noté  $P_n(x)$ . Les poids de Gauss notés  $p_i^g$  sont ensuite déterminés par la relation qui suit :

$$p_i^g = \frac{2}{(1-x_i)^2 \left(\frac{dP_n(x)}{dx}\right)^2} \quad (4.56)$$

Dans le cas présent, les racines de  $P_4(x)$  et le calcul des poids associés peuvent encore se faire analytiquement. Pour des degrés plus élevés il est plus simple de passer par une résolution numérique approchée ou du calcul formel pour l'expression exacte.

Les 4 points et poids de Gauss valent :

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}} & ; & p_1^g = \frac{1}{36}(18-\sqrt{30}) \\ x_2 = -\frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}} & ; & p_2^g = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30}) \\ x_3 = \frac{1}{35}\sqrt{525-70\sqrt{30}} & ; & p_3^g = \frac{1}{36}(18+\sqrt{30}) \\ x_4 = \frac{1}{35}\sqrt{525+70\sqrt{30}} & ; & p_4^g = \frac{1}{36}(18-\sqrt{30}) \end{cases} \quad (4.57)$$

**Remarque** : La somme des poids de Gauss est toujours égale à l'intervalle d'intégration ici  $1 - (-1) = 2$ .

La méthode présentée est valable dans  $[-1,1]$ . Dans le cas présent, le paramètre  $\lambda$  varie entre 0 et 1. Pour se ramener à cet intervalle, il suffit de considérer le changement de variable :  $\lambda_i = \frac{x_i+1}{2}$  où  $\lambda_i$  représente les nouveaux points de Gauss. De plus le nouveau poids de Gauss  $\alpha_i$  est divisé par 2 :  $\alpha_i = \frac{p_i^g}{2}$ .

En considérant quatre points de Gauss, les forces internes locales s'expriment comme :

$$F_{int}^{locale} = \int_0^L \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{F}_{gen} \, dX = \sum_{i=1}^{npg=4} \alpha_i L \mathbf{B}(\lambda_i)^T \cdot \mathbf{F}_{gen}(\lambda_i) \quad (4.58)$$

La matrice de passage  $\mathbf{P}$  permet de relier le repère local au repère global. Ainsi les forces internes globales se déduisent :

$$\mathbf{F}_{globale} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{F}_{locale} \quad (4.59)$$

L'ensemble des quantités est ensuite assemblé dans le repère général (i.e. global).

#### Spécification du tube coudé :

Dans le cas du coude, les fonctions de forme sont trigonométriques. Les cosinus et les sinus peuvent être perçus comme des polynômes d'ordre élevé. La résolution en considérant 4 points de Gauss n'est donc a priori plus exacte. Cependant pour ne pas alourdir le calcul l'intégration est maintenue sur 4 points de Gauss.

Avant de faire le transport entre le repère local et le repère général, il faut d'abord exprimer les forces internes locales calculées dans le repère curviligne mobile  $(\mathbf{E}_\phi, \mathbf{E}_{R_c})$  dans le repère local cartésien  $(\mathbf{E}_X, \mathbf{E}_Y)$ .

#### Spécification du couplage non linéaire :

Le couplage introduit induit des relations non linéaires entre les efforts généralisés et les termes du tenseur des déformations. Les expressions obtenues sont difficilement implémentables à la main. Pour éviter les erreurs d'implémentations, les efforts généralisés sont déterminés en suivant les recommandations de l'annexe F (page 139).

Le calcul des forces internes est suffisant pour réaliser des cas statiques. Cependant afin de faire des cas plus complexes en dynamique, le calcul de la matrice de masse est obligatoire.

### 4.2.6 . Matrice de masse

#### Matrice de masse cohérente

Afin de résoudre numériquement des équations dynamiques, il convient de déterminer la matrice masse élémentaire  $\mathbf{M}^e$ . Cette dernière est définie par :

$$\mathbf{M}^e = \iiint_{\Omega} \rho^e \mathbf{N}^T \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{N} \, d\Omega^e \quad \text{où } \rho^e \text{ est la masse volumique et } d\Omega^e \text{ le volume de l'élément} \quad (4.60)$$

Pour ne pas surcharger cette partie, la matrice de masse cohérente de l'élément n'est pas exprimée ici mais elle est fournie dans l'annexe G (page 140).

Dans un algorithme explicite le temps de calcul est piloté majoritairement par la condition de stabilité rigoureusement pour déterminer l'accélération, la matrice de masse cohérente doit être inversée à chaque pas de temps et de façon exacte. L'inversion d'une matrice est très coûteuse et dans le but de réduire le temps de calcul, la matrice de masse est diagonalisée afin de faciliter drastiquement son inversion. Le choix d'une matrice de masse invariante par changement de repère permet de ne calculer qu'une seule et unique fois la matrice de masse diagonale au premier pas de temps [12]. Il est à noter qu'il est également possible de réactualiser la matrice masse à chaque pas de temps en modifiant notamment les inerties des sections. Le choix de réactualiser la matrice de masse à chaque pas de temps a été retenu car la surface et l'inertie des sections peuvent fortement être modifiées.

#### Matrice de masse diagonale

L'objectif de cette section est de diagonaliser la matrice masse. Cette dernière doit toutefois garder un sens physique. Pour les termes de translation, la méthode classique de condensation est utilisée [116, 33, 54]. Ceci consiste à sommer les termes de chaque ligne qui contribue à la translation pour les ramener sur la diagonale.

$$M_{ii}^{trans-diag} = \sum_j M_{ij}^{trans} \quad (4.61)$$





La matrice de masse diagonale  $(\mathbf{M}^{e,d})_i^{c,s}$  pour le  $i^{\text{ème}}$  mode en cosinus ou en sinus s'écrit :

$$(\mathbf{M}^{e,d})_i^{c,s} = \rho^e SL \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{105} + \frac{e^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} + \frac{e^2}{12} \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

**Remarque 1 :** Pour le mode 1 de Fourier, il n'y a pas de termes de gauchissement donc la matrice de masse diagonale s'écrit :

$$(\mathbf{M}^{e,d})_1^{c,s} = \rho^e SL \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{105} + \frac{e^2}{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} + \frac{e^2}{12} \end{pmatrix} \quad (4.64)$$

Pour construire la matrice de masse diagonale complète il suffit de rajouter le premier bloc correspondant au premier nœud des matrices données dans l'Eq. (4.63) à la suite du premier block de la matrice définie dans l'Eq. (4.62). Puis de remplir de la même façon le second bloc.

#### Spécification du tube coudé :

Les équations de dynamique exprimées dans les chapitres 2 et 3 présentent de fortes similarités. Notamment sur les coefficients devant les termes d'accélération. De ce fait, la matrice de masse diagonale du tube coudé est choisie comme étant égale à celle définie pour le tube droit.

#### Spécification du couplage non-linéaire :

De la même façon, la matrice de masse diagonale avec ou sans couplage reste inchangée.

La matrice de masse est exprimée sous sa forme diagonale qui facilite son inversion. Cette matrice est ensuite réactualisée à chaque pas de temps en modifiant seulement la surface et l'inertie de la section. La longueur  $L$  est supposée constante au cours du calcul. Le cheminement réalisé jusqu'ici s'est fait à un pas de temps donné. Désormais, il faut utiliser un schéma temporel pour résoudre le problème sur plusieurs pas de temps.

#### 4.2.7 . Schéma numérique en temps : Différence centrée finie

L'avancement en temps dans Europlexus est réalisé via un algorithme Lagrangien explicite. L'objectif de cette partie est de montrer le passage du pas de temps à l'instant  $n$  noté  $t^n$  au pas de temps à l'instant  $n+1$  noté  $t^{n+1}$ . Les étapes du cheminement de cet algorithme sont décrites dans ce qui suit.

Au pas de temps  $n$  les vecteurs de la position  $\mathbf{x}^n$ , la vitesse  $\mathbf{v}^n$  et l'accélération  $\mathbf{a}^n$  de la structure sont connus. Le pas de temps,  $\Delta t^n$ , n'est pas forcément constant et il est défini tel que :  $t^{n+1} - t^n = \Delta t^n$ . En effet il est recalculé à chaque pas de temps afin de vérifier la condition de stabilité notamment si la géométrie a fortement changé.

La vitesse au demi pas de temps par la méthode des différences finies centrées est égale à :

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^n + \frac{\Delta t^n}{2} \mathbf{a}^n \quad (4.65)$$

La position au pas de temps  $n + 1$  est définie par :

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta t^n \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.66)$$

Le vecteur des forces extérieures,  $\mathbf{F}_{ext}^{n+1}$ , est calculé ou lu à partir des chargements définis par l'utilisateur. Le vecteur des forces internes,  $\mathbf{F}_{int}^{n+1}$ , et la matrice masse,  $\mathbf{M}^{n+1}$ , sont calculés pour chaque élément de la structure dans le repère local avant d'être assemblés dans le repère général.

Le vecteur de l'accélération au pas de temps  $n + 1$  s'écrit sous la même forme que celle définie dans l'Eq. (4.10) :

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext}^{n+1} - \mathbf{F}_{int}^{n+1}) \quad (4.67)$$

Enfin le vecteur vitesse au pas de temps  $n + \frac{3}{2}$  est déterminé par :

$$\mathbf{v}^{n+\frac{3}{2}} = \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t^n \mathbf{a}^{n+1} \quad (4.68)$$

Ainsi les nouvelles positions  $\mathbf{x}^{n+1}$ , vitesses  $\mathbf{v}^{n+\frac{3}{2}}$  et accélérations  $\mathbf{a}^{n+1}$  sont connues. Il suffit de réinjecter la nouvelle vitesse  $\mathbf{v}^{n+\frac{3}{2}}$  dans l'Eq. (4.66) afin de déterminer la position au pas de temps  $t^{n+2}$ .

A chaque instant  $t^n$  le pas de temps  $\Delta t^n$  doit vérifier une condition de stabilité afin que le schéma numérique soit stable.

### 4.3 . Condition de stabilité

L'utilisation d'un schéma d'intégration temporelle explicite impose que le pas de temps de calcul doit être plus petit que le pas de temps de stabilité. Cette condition est appelée communément la condition CFL (Courant-Friedrichs-Lewy). Le pas de temps de stabilité d'un élément correspond au temps que mettent les ondes ayant la plus grande vitesse pour traverser la plus petite des dimensions de l'élément.

#### 4.3.1 . Calcul général de la condition CFL

L'objectif de cette section est de déterminer la condition de stabilité. La démarche entreprise est basée sur la méthode établie dans [54]. Les équations d'équilibre en dynamique peuvent s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathbf{M} \mathbf{a} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}_{ext} \quad (4.69)$$

où en gardant les mêmes notations,  $\mathbf{M}$  représente la matrice de masse,  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur,  $\mathbf{F}_{ext}$  le vecteur des efforts extérieurs aux nœuds,  $\mathbf{a}$  le vecteur des accélérations et  $\mathbf{x}$  le vecteur de position. Dans le cas présent la matrice de raideur est reliée aux forces internes telle que :

$$\mathbf{F}_{int} = \mathbf{K} \mathbf{x} \quad (4.70)$$

De plus en utilisant les Eq. (4.67) et Eq. (4.68), le système s'écrit au pas de temps  $n$  sous la forme suivante :

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^n \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{ext}^n - \mathbf{K} \mathbf{x}^n) \quad (4.71)$$

Finalement à l'aide de l'Eq. (4.66), en supposant que le pas de temps est constant  $\Delta t^n = \Delta t$  et en supprimant les efforts extérieurs le système devient :

$$\mathbf{x}^{n+1} - 2\mathbf{x}^n + \mathbf{x}^{n-1} + \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \mathbf{x}^n = 0 \quad (4.72)$$

La solution de ce système peut s'exprimer sous forme exponentielle :

$$x_i^n = \alpha e^{n\beta\Delta t} \quad \text{où } x_i^n \text{ est la } i^{\text{ème}} \text{ composante de } \mathbf{x} \text{ et } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux inconnues réelles.} \quad (4.73)$$

En injectant l'Eq. (4.73) dans l'Eq. (4.72) et en notant  $(\omega)^2$  les valeurs propres de  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ , l'équation devient :

$$e^{\beta\Delta t} - 2 + e^{-\beta\Delta t} + \Delta t^2 (\omega)^2 = 0 \quad (4.74)$$

Le schéma est stable si la norme du facteur d'amplification,  $h_i = \frac{x_i^{n+1}}{x_i^n}$ , est inférieure à l'unité. Il en résulte que  $|e^{\beta\Delta t}| \leq 1$ . Sous cette condition et en utilisant à plusieurs reprises l'inégalité triangulaire, le système vérifie la condition suivante :

$$|\Delta t^2 (\omega)^2| = |e^{\beta\Delta t} - 2 + e^{-\beta\Delta t}| \leq |e^{\beta\Delta t} + e^{-\beta\Delta t}| + |-2| = |e^{2\beta\Delta t} + 1| |e^{\beta\Delta t}| + 2 \leq |e^{\beta\Delta t}|^2 + 1 + 2 \leq 4 \quad (4.75)$$

Ainsi le pas de temps doit vérifier à chaque instant la condition de stabilité [54, 12, 49] :

$$\Delta t^n \leq \frac{2}{\omega_{max}} = \Delta t_{crit}^n \quad (4.76)$$

où  $\omega_{max}$  est la plus grande des valeurs propres et  $\Delta t_{crit}^n$  représente le pas de temps critique.

Le nombre de Courant  $0 < C \leq 1$  est introduit tel que :

$$\Delta t^n = C \Delta t_{crit}^n \quad (4.77)$$

### 4.3.2 . Condition de stabilité selon le chargement et la géométrie

Afin de déterminer le pas de temps de stabilité, il faut déterminer la valeur maximale des valeurs propres à chaque élément  $e$  et pas de temps  $n$  notée  $\omega_{e,max}^n$  correspondante à divers cas de chargement. Au lieu de résoudre des problèmes aux valeurs propres complexe, la condition de stabilité est donnée en se référant aux fréquences naturelles de la poutre droite et des coques cylindriques proposées dans [14]. Ceci revient à déterminer le maximum des valeurs propres entre les contributions de poutre  $\omega_{e,p}^n$  et celles de coque  $\omega_{e,c}^n$  :

$$\omega_{e,max}^n = \max(\omega_{e,p}^n, \omega_{e,c}^n) \quad (4.78)$$

Pour la poutre il y a deux cas de configurations à regarder : la traction et la flexion [25].

Pour la traction axiale, la valeur propre s'écrit :

$$(\omega_{e,p})_a = \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.79)$$

Pour la flexion plane et hors plane, la valeur propre est déterminée comme :

$$(\omega_{e,p})_{fp} = \frac{2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \pi^4 \quad ; \quad (\omega_{e,p})_{fhp} = \frac{2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \pi^4 \quad (4.80)$$

Ainsi le maximum de la valeur propre de la contribution de poutre vaut :

$$(\omega_{e,p}) = \max\left((\omega_{e,p})_a, (\omega_{e,p})_{fp}, (\omega_{e,p})_{fhp}\right) \quad (4.81)$$

Pour la coque il y a cinq cas de configurations à regarder : la traction, la torsion, la flexion, le gonflement et l'ovalisation. Les fréquences naturelles de la coque exprimées dans [14] en fonction d'un coefficient adimensionnel  $\lambda$  sont données par :

$$\omega_{e,c}^n = \frac{2\lambda}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \quad (4.82)$$

où les expressions du paramètre adimensionnel  $\lambda$  sont fournies :

$$\lambda = \begin{cases} \lambda^r = 1 & \text{pour le mode radial du tube} \\ \lambda^a = \frac{a}{L} \sqrt{(1-\nu^2) \pi^2} & \text{pour le mode axial du tube} \\ \lambda^t = \frac{a}{L} \sqrt{\left(\frac{1-\nu^2}{1+\nu}\right) \frac{\pi^2}{2}} & \text{pour le mode de torsion du tube} \\ \lambda^f = \frac{a^2}{L^2} \sqrt{(1-\nu^2) \frac{\pi^4}{2}} & \text{pour le mode de flexion du tube} \\ \lambda_{ij}^o = \frac{\sqrt{(1-\nu^2) \left(\frac{j\pi a}{L}\right)^4 + \frac{e^2}{12a^2} \left(i^2 + \left(\frac{j\pi a}{L}\right)^2\right)^4}}{i^2 + \left(\frac{j\pi a}{L}\right)^2} & \text{pour le mode d'ovalisation du tube} \end{cases} \quad (4.83)$$

où  $i = 6$  car jusqu'à six modes de Fourier ont été retenus et  $j = 1$  car cela correspond au mode fondamental axial.

Par conséquent, la valeur propre maximale est définie par :

$$\omega_{e,\max}^n = \max \left( \frac{2}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \frac{2}{L} \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \frac{2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S} \pi^4}, \frac{2}{L^2} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S} \pi^4}, \frac{2\lambda_{\max}}{a} \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}} \right) \quad (4.84)$$

où  $\lambda_{\max} = \max(\lambda^r, \lambda^a, \lambda^t, \lambda^f, \lambda_{ij}^o)$  données dans l'Eq. (4.83) permet d'exprimer la condition de stabilité utilisée lors du calcul du pas de temps à chaque itération de l'Eq. (4.76).

#### Spécification du tube coudé :

Pour le tube coudé, d'autres conditions de stabilité sont ajoutées à celle déjà prises en compte. Les fréquences naturelles  $\omega_{e,cd}^n$  (l'indice cd représente le coude) d'une poutre courbe en extension dans le plan, en flexion dans le plan et hors du plan sont données dans [14] :

Une différence est faite entre les modes  $i$  symétriques (pair) et les modes asymétriques (impair).

- Pour le mode dû à l'extension de l'arc, les fréquences naturelles sont exprimées comme :

◇ Pour  $i = 0$  :

$$(\omega_{e,cd}^n)_a = \frac{2 \times 0.97}{R} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.85)$$

◇ Pour  $i \in \mathbb{N}^*$  :

$$(\omega_{e,cd}^n)_a = \frac{2\pi}{L_{arc}} \left[ 1 + \left( \frac{\phi_{max}}{i\pi} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.86)$$

- Pour le mode dû à la flexion de l'arc dans le plan avec extrémités libres, les fréquences naturelles sont exprimées comme :

◇ Pour  $i = 2k$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$(\omega_{e,cd}^n)_{fp} = \frac{2i^2 \pi^2}{L_{arc}^2} \sqrt{\frac{\left( 1 - \left( \frac{\phi_{max}}{i\pi} \right)^2 \right)^2}{1 + 3 \left( \frac{\phi_{max}}{i\pi} \right)^2}} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \quad (4.87)$$

◇ Pour  $i = 2k + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}^*$  :

$$(\omega_{e,cd}^n)_{fp} = \frac{2i^2\pi^2}{L_{arc}^2} \sqrt{\frac{\left(1 - \left(\frac{\phi_{max}}{i\pi}\right)^2\right)^2}{1 + \frac{1}{i^2} + 2\left(\frac{\phi_{max}}{i\pi}\right)^2}} \sqrt{\frac{EI_z}{\rho S}} \quad (4.88)$$

- Pour le mode fondamental du à la flexion de l'arc hors plan avec extrémités libres, la fréquence naturelle est exprimée comme :

$$(\omega_{e,cd}^n)_{fhp} = \frac{2\pi^2}{L_{arc}^2} \sqrt{\frac{\left(1 - \left(\frac{\phi_{max}}{\pi}\right)^2\right)^2}{1 + (1 + \nu)\left(\frac{\phi_{max}}{\pi}\right)^2}} \sqrt{\frac{EI_y}{\rho S}} \quad (4.89)$$

Ainsi le maximum de la valeur propre pour le tube coudé s'écrit :

$$\omega_{e,cd}^n = \max_{i \in \mathbb{N}} \left( (\omega_{e,cd}^n)_a, (\omega_{e,cd}^n)_{fp}, (\omega_{e,cd}^n)_{fhp} \right) \quad (4.90)$$

En conséquence, la valeur propre maximale devient :

$$\omega_{e,max}^n = \max (\omega_{e,p}^n, \omega_{e,c}^n, \omega_{e,cd}^n) \quad (4.91)$$

La condition de stabilité est exprimée selon tous les cas de chargements. Cette condition dépend du matériau mais essentiellement de la géométrie. En cas de grandes déformations ou de grands déplacements, la condition de stabilité peut évoluer et c'est pour cela qu'elle est recalculée à chaque pas de temps.

Dans ce chapitre, les méthodes numériques utilisées pour développer l'élément de poutre enrichi défini dans les chapitres précédents ont été détaillées. Les équations continues ont été discrétisées par le biais des fonctions de forme. Les efforts généralisés ont ensuite été déterminés en considérant la matrice des dérivées des fonctions de forme. La matrice masse, calculée grâce aux fonctions de forme, a été diagonalisée afin de simplifier son inversion et ne pas alourdir le temps de calcul. Un schéma temporel explicite impose une condition de stabilité qui se traduit par un pas de temps de stabilité devant être suffisamment petit afin que le calcul soit stable. Différentes conditions de stabilité ont ainsi été introduites.



## Conclusion

Ce travail propose de modéliser un tube droit ou coudé, permettant à sa section transverse de se déformer en restant dans un formalisme filaire. Pour ce faire, la cinématique classique de poutre est enrichie avec une cinématique de coque tridimensionnelle. Cette cinématique est ensuite développée au premier ordre dans l'épaisseur en  $Z$  et en séries de Fourier selon la variable circonférentielle  $\theta$  où les coefficients dépendent de l'abscisse curviligne  $s$ . Le tube est représenté comme une coque mince (i.e.  $Z \ll a$ ). Les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour la partie poutre et de Love-Kirchhoff pour la partie coque sont prises en considération. Une hypothèse d'inextensibilité de la section (i.e. le périmètre de la section ne change pas) pour les termes supérieurs ou égaux à deux dans le développement en séries de Fourier est également considérée. Ces hypothèses permettent de réduire le nombre de degrés de liberté. Dans le cas d'un tube droit, les champs obtenus sont comparés à des solutions analytiques d'un tube en modélisation tridimensionnelle. Cette comparaison met en lumière que l'enrichissement proposé permet de représenter correctement les déformations de la section pour l'extension simple et la pression interne imposée sur le tube. Néanmoins, pour le cas de la flexion pure, l'enrichissement linéaire proposé ne permet pas à la section de s'ovaliser lorsqu'une rotation est imposée, comme dans la description de Brazier.

Un couplage non linéaire entre les rotations de la section transverse et les déplacements radial et orthoradial de cette dernière est alors introduit dans la cinématique. Désormais le moment fléchissant, par le biais de son inertie, dépend des déplacements de la section. La relation moment-courbure n'est plus linéaire et elle atteint un maximum. Le modèle théorique est implémenté et des simulations sont effectuées pour des comparaisons avec des solutions analytiques en statique (extension simple, tube sous pression interne et flexion pure) sur trois configurations géométriques de tuyauteries. Le modèle est également comparé à une solution analytique dynamique. Les résultats numériques sont en très bonne adéquation avec les solutions analytiques statiques et dynamiques. La tuyauterie est également soumise à un chargement plus complexe, où une force surfacique localisée est appliquée permettant d'obtenir des grandes déformations de la section. Le modèle est comparé à une solution numérique de type coque et les résultats obtenus sont en bon accord avec la solution de référence. Pour ce cas test, jusqu'à six modes de Fourier sont utilisés avec le modèle linéaire et le modèle non-linéaire. Il s'avère que le gauchissement, jusqu'alors non considéré, a un impact très important sur la solution et qu'il doit être considéré. Enfin une discussion autour de l'efficacité du nouvel élément introduit est réalisée. A priori, l'utilisation du modèle de poutre enrichi permet de réduire le nombre de degré de liberté par rapport à un modèle de coque classique tout en donnant des résultats similaires.

La présence d'une courbure initiale de rayon de courbure  $R$  engendre des termes supplémentaires dans l'écriture du tenseur des déformations. L'écriture complète du tenseur des déformations est nettement plus complexe et il est supposé que le rayon de courbure est grand devant le rayon moyen du tube (i.e.  $a \ll R$ ). Les relations obtenues en considérant les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff sont légèrement différentes de celles obtenues précédemment sur le tube droit puisque désormais elles dépendent du déplacement axial de poutre et de coque respectivement. Même sans les termes non linéaire introduit, l'effort axial est couplé naturellement avec le déplacement transversal  $W_o$  et le gonflement  $w_o^c$ . Afin de vérifier ce modèle, le tube est soumis à une pression interne et il est analysé avec différentes conditions aux limites. Les résultats numériques sont en bonne adéquation avec les solutions analytiques.

Le dernier chapitre s'intéresse à la discrétisation du problème continu développé dans les chapitres précédents. Le modèle est implémenté dans un code de dynamique rapide explicite utilisant comme schéma temporel les différences centrées finies. Pour le tube droit, le déplacement axial, la rotation associée à la torsion et les termes de gauchissement sont écrits avec des fonctions de forme linéaires. De par les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff, les fonctions de forme sont cubiques pour les déplacements transversaux et les termes d'ovalisation. Pour le tube coudé, les fonctions de forme classiques du tube droit ne donnent pas des résultats satisfaisant, il convient alors d'améliorer ces dernières. Le choix de considérer un élément à seulement deux nœuds complique l'enrichissement des fonctions de forme. En effet pour cet enrichissement, il est nécessaire d'avoir plus de nœuds ou de degrés de liberté. Pour ne pas augmenter le nombre de degrés de liberté et de nœuds, les fonctions de forme nouvellement introduites respectent les conditions aux limites classiques et vérifient également les équations d'équilibre. Par ailleurs, le choix d'un algorithme de dynamique explicite impose une inversion de la matrice de masse peu coûteuse. La matrice de masse est donc diagonalisée pour faciliter son inversion tout en étant réactualisée à chaque pas de temps en changeant notamment l'inertie. Les schémas explicites sont conditionnellement stables et la condition de stabilité est déterminée sur le pas de temps en considérant différents cas de chargements.



Un nouvel élément de poutre enrichie a été proposé. Cet élément permet de modéliser un tube mince droit ou coudé considérant une variation de sa section transversale avec un nombre réduit de degrés de liberté par rapport à un élément coque classique. Le nombre de degré de liberté dépend du cas de chargement distribué ou concentré. Son efficacité à représenter le comportement de la structure a été montrée sur des solutions analytiques ou des simulations numériques de comparaison.

#### **Perspectives :**

Le modèle numérique pour le tube coudé n'a été implémenté que dans le plan, il convient ainsi d'utiliser les équations tridimensionnelles fournies dans l'annexe E (page 133) et de les implémenter. Le choix des fonctions de forme sera à reconsidérer. On sera certainement amené à définir pour cette modélisation des éléments à trois, quatre voire cinq nœuds afin de simplifier l'implémentation. Comme évoqué précédemment, l'ajout de nœuds engendre l'augmentation du nombre de degrés de liberté et par conséquent du temps de calcul. La solution de ne garder que des éléments à deux nœuds peut être maintenue à condition de déterminer des fonctions de forme enrichies exactes. Pour les cas hors plans, avec notamment la succession de plusieurs coudes, différentes solutions sont proposées dans la littérature pour garantir la continuité de l'élément [9, 50, 67, 82].

Actuellement le rayon de courbure des tubes coudés est constant au cours du calcul. En cas de grands déplacements, comme c'est le cas avec le fouettement de tuyauterie, il conviendra de réactualiser le rayon de courbure en déterminant à chaque pas de temps le nouveau rayon de courbure à l'aide d'un nœud voisin. Cette réactualisation est mentionnée dans l'annexe I (page 142).

Un comportement autre que l'élasticité linéaire est aussi à prendre en compte pour garantir la sûreté. Notamment l'apparition de zones plastiques importantes peut compromettre la tenue de la structure. La modélisation de la plasticité ne devra pas être trop coûteuse en temps de calcul car a priori dans un algorithme explicite la plasticité devra être calculée à chaque pas de temps.

Les tuyauteries sont également remplies d'un fluide caloporteur. L'interaction fluide structure est importante car le fluide peut avoir un impact non négligeable sur la structure. Il serait intéressant de coupler la modélisation aux éléments finis purement structurelle développée ici avec un modèle fluide se fondant sur une résolution avec une méthode de type volumes-finis comme il est proposé dans [24]. En ajoutant le modèle de poutre enrichi développé ici, les équations de bilan nécessitent de connaître les sections de passage du fluide, sections réactualisables dans le modèle de poutre enrichi.

Lors du fouettement, la tuyauterie peut entrer en contact avec d'autres dispositifs présents dans son environnement. La prise en compte du contact est un objet d'étude en soi. En grands déplacements, on pourra s'inspirer des travaux de Durville [32] pour exprimer le contact entre les parties poutre.

Peu d'essais existent pour valider le modèle, à part des essais de rupture type guillotine [41, 20]. Dans ce cas l'effort de jet fluide, qui s'échappe du tuyau, est maximal.

La modélisation proposée ici est effectuée sur une géométrie cylindrique mais elle peut se retranscrire sur différentes formes de géométrie en adaptant la cinématique associée. Le couplage non linéaire introduit a permis de relier la rotation de la section avec les déplacements de cette dernière. Pour traiter des cas comme le flambement de poutre, des termes du second ordre en déplacement de poutre et de coque peuvent être également introduits dans la cinématique.

## Annexes

### A . Tube droit en mouvement plan

#### A.1 . Cinématique et tenseur des déformations

La position d'un point de l'état déformé  $\mathbf{m}(X, Z, \theta)$  en petite rotation est :

$$\mathbf{m} = (X + U_o)\mathbf{E}_X + V_o\mathbf{E}_Z + \Omega_y\mathbf{E}_Y \wedge ((a + Z + w)\mathbf{E}_R + u\mathbf{E}_X + v\mathbf{E}_\theta) \quad (\text{A.1})$$

Dans ce cas, les termes du 1<sup>er</sup> ordre en déplacement et en rotation ne sont pas les seuls à être considérés. Le couplage entre les rotations de la section et la déformation de la section est pris en compte, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & (X + U_o + u + (a + Z) \sin \theta \Omega_y + \Omega_y (w \sin \theta + v \cos \theta))\mathbf{E}_X \\ & + (a + Z + V_o \sin \theta + w - \sin \theta \Omega_y u)\mathbf{E}_R \\ & + (V_o \cos \theta + v - \cos \theta \Omega_y u)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Les sections sont supposées relativement planes après déformation. Les termes du second ordre portés par  $u$  sont donc négligés. Ainsi, seuls les termes couplés selon  $\mathbf{E}_X$  sont maintenus :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & (X + U_o + u + (a + Z) \sin \theta \Omega_y + \Omega_y (w \sin \theta + v \cos \theta))\mathbf{E}_X \\ & + (a + Z + V_o \sin \theta + w)\mathbf{E}_R \\ & + (V_o \cos \theta + v)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Les déplacements de poutre  $U_o, V_o, \Omega_y$  ne dépendent que de la variable longitudinale  $X$  alors que les déplacements de coques sont quant à eux fonction de  $(X, \theta, Z)$ . Pour simplifier l'écriture, on note  $h = w \sin \theta + v \cos \theta = h_o + Zh_1$ .

Les vecteurs tangents sont alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_x = & \left( 1 + \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [\Omega_y h] \right) \mathbf{E}_X \\ & + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial X} \right) \mathbf{E}_R + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{a}_\theta = & \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a + Z) \cos \theta \Omega_y + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \mathbf{E}_X + \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \mathbf{E}_R + \left( a + Z + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{a}_z = & \left( \Omega_y \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial Z} + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial Z} \right) \mathbf{E}_X + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \mathbf{E}_R + \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

La métrique de l'état déformé,  $g_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j$ , est alors déduite :

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= \left( 1 + \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [\Omega_y h] \right)^2 \\
&\quad + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial X} \right)^2 \\
g_{\theta\theta} &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a + Z) \cos \theta \Omega_y + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right)^2 + \left( a + Z + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)^2 \\
g_{zz} &= \left( \Omega_y \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial Z} + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial Z} \right)^2 + \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 \\
g_{x\theta} &= \left( 1 + \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [\Omega_y h] \right) \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a + Z) \cos \theta \Omega_y + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \left( a + Z + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\
g_{xz} &= \left( 1 + \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [\Omega_y h] \right) \left( \Omega_y \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial Z} + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial Z} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial w}{\partial X} \right) \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) + \left( \frac{\partial V_o}{\partial X} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial X} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \\
g_{\theta z} &= \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a + Z) \cos \theta \Omega_y + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial \theta} \right) \left( \Omega_y \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial Z} + \Omega_y \frac{\partial h}{\partial Z} \right) \\
&\quad + \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) + \left( a + Z + w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial Z} \right)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Pour fixer les ordres de grandeur des différents termes, le mouvement de poutre est supposé d'ordre  $\eta$  et celui de coque est supposé d'ordre  $\epsilon$ . Les termes en  $\eta^2$  et  $\epsilon^2$  sont négligés. Les termes en  $\eta\epsilon$  sont de nature différente et ne sont pas forcément négligeable. Comme précédemment les termes en  $\eta\epsilon$  porté par le gauchissement  $u$  sont également négligés.

La métrique, avec les hypothèses mentionnées ci-dessus et en factorisant par les dérivées de  $h$  quand cela est possible, devient :

$$\begin{aligned}
g_{xx} &= 1 + 2 \left( \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} [\Omega_y h] \right) + 2 \frac{\partial V_o}{\partial X} \left( \frac{\partial w}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial X} \cos \theta \right) \\
&= 1 + 2 \left( \frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} h + \frac{\partial h}{\partial X} \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \right) \\
g_{\theta\theta} &= (a + Z)^2 \left( 1 + \frac{2}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right) \\
g_{zz} &= 1 + 2 \frac{\partial w}{\partial Z} \\
g_{x\theta} &= \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) (a + Z) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a + Z) \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{\partial h}{\partial \theta} \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \\
g_{xz} &= \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \sin \theta + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} + \frac{\partial h}{\partial Z} \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \\
g_{\theta z} &= (a + Z) \frac{\partial v}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial \theta} - v
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Le tenseur des déformations avec les termes de couplage du second ordre s'écrit finalement :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} h + \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h}{\partial X} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} \\
2\varepsilon_{x\theta} &= \cos \theta \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) + \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial X} + \frac{1}{a + Z} \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h}{\partial \theta} \\
2\varepsilon_{xz} &= \sin \theta \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} + \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h}{\partial Z} \\
2\varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Les hypothèses d'Euler-Bernoulli annulent la distorsion de la partie poutre à l'ordre  $\eta$  :

$$\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} = 0 \tag{A.8}$$

Le champ de déplacement de type coque peut s'écrire classiquement sous la forme (voir Eq. (1.57)) :

$$\begin{aligned}
w &= w_0 \\
v &= v_0 + Z v_1 \\
u &= u_0 - Z u_1
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Les hypothèses de Love-Kirchhoff annulent la distorsion de la partie coque à l'ordre  $\epsilon$  :

$$u_1 = \frac{\partial w_0}{\partial X} ; \quad v_1 = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) \tag{A.10}$$

Dans le but de décomposer, linéairement selon  $Z$ , le tenseur des déformations, l'hypothèse des coques minces est utilisée. En conséquence, un développement de Taylor au premier ordre en  $Z$  pour les termes en  $\frac{1}{a+Z}$  est introduit :

$$\frac{1}{a + Z} = \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} + o\left(\frac{Z}{a^2}\right) \tag{A.11}$$

Ainsi, le tenseur des déformations peut se décomposer en la somme d'une partie membranaire notée  $\varepsilon^m$  et d'une partie linéaire en  $Z$  notée  $\mathbf{k}$  qui correspond à la variation de courbure :

$$\varepsilon = \varepsilon^m + Z\mathbf{k} \tag{A.12}$$

En considérant les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour la partie poutre et les hypothèses de Love-Kirchhoff pour la partie coque. Le tenseur des déformations s'exprime tel que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial u_o}{\partial X} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} (-v_o \cos \theta - w_o \sin \theta) + Z k_{xx} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right) + Z k_{\theta\theta} \\
2\varepsilon_{x\theta} &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial X} + 2Z k_{x\theta}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} + \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \\
k_{\theta\theta} &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\
2k_{x\theta} &= -\frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{\partial v_o}{\partial X} \right)
\end{aligned} \tag{A.13}$$

## A.2 . Énergie cinétique

Pour rappel, le déplacement associé à la transformation est donné par :

$$\mathbf{u} = (U_o + u + (a + Z) \sin \theta \Omega_y + \Omega_y h) \mathbf{E}_X + (V_o \sin \theta + w) \mathbf{E}_R + (V_o \cos \theta + v) \mathbf{E}_\theta \quad (\text{A.14})$$

Pour simplifier, on pose :  $h_z = (a + Z) \sin \theta + h = h_{z,o} + Zh_{z,1}$  et donc  $\dot{h}_z = \dot{h}$ . L'indice " · " signifie une dérivation par rapport au temps tel que :  $\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t}$ . Les vitesses vérifient :

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{U}_o + \dot{u} + h_z \dot{\Omega}_y + \dot{h}_z \Omega_y) \mathbf{E}_X + (\dot{V}_o \sin \theta + \dot{w}) \mathbf{E}_R + (\dot{V}_o \cos \theta + \dot{v}) \mathbf{E}_\theta \quad (\text{A.15})$$

Donc la densité d'énergie s'écrit :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} = (\dot{U}_o + \dot{u} + h_z \dot{\Omega}_y + \dot{h}_z \Omega_y)^2 + (\dot{V}_o \sin \theta + \dot{w})^2 + (\dot{V}_o \cos \theta + \dot{v})^2 \quad (\text{A.16})$$

De façon similaire à ce qui est fait précédemment, les termes de la forme  $U_o u$ ,  $\Omega_y u$  et  $\Omega_y U_o$  sont négligeables et la densité d'énergie devient :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{U}_o^2 + \dot{u}^2 + (h_z \dot{\Omega}_y + \dot{h}_z \Omega_y)^2 + \dot{V}_o^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{V}_o \dot{h}_z \quad (\text{A.17})$$

En utilisant la décomposition de l'Eq (1.62), on montre que :

$$\int_S \dot{h} \, dS = \int_S \dot{h}_z \, dS = 0 \quad (\text{A.18})$$

L'énergie cinétique  $\mathcal{K}$  est donnée par :

$$\mathcal{K} = \int_L \rho \int_S \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^2 \, dS \, dX \quad \text{où } \rho \text{ représente la masse volumique.} \quad (\text{A.19})$$

Ainsi, la densité d'énergie cinétique se décompose en trois contributions :

- L'énergie cinétique de la poutre :

$$\frac{1}{2} (S \dot{U}_o^2 + S \dot{V}_o^2 + I_y \dot{\Omega}_y^2) \quad \text{où } S = 2\pi a e \text{ et } I_y = \int_S h_z^2 \, dS = \int_S ((a + Z) \sin \theta + h)^2 \, dS \quad (\text{A.20})$$

- L'énergie cinétique de la coque :

$$\frac{1}{2} \int_S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) \, dS \quad (\text{A.21})$$

- L'énergie cinétique du couplage entre la rotation globale et la déformée de la section :

$$\frac{1}{2} \Omega_y^2 \int_S \dot{h}^2 \, dS + \Omega_y \dot{\Omega}_y \int_S \dot{h} h_z \, dS \quad (\text{A.22})$$

Les quantités d'accélération sont données par le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial q} = J_q \quad \text{où } J_q \text{ représente les accélérations généralisés.} \quad (\text{A.23})$$

$q$  représente quant à lui les variables généralisées :  $q = U_o, V_o, \Omega_y, u, v, w, h$ . Il faut désormais déterminer les quantités  $\langle J_q \cdot \delta q \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle J_{U_o} \cdot \delta U_o \rangle &= \rho S \int_L \ddot{U}_o \delta U_o \, dX \\ \langle J_{V_o} \cdot \delta V_o \rangle &= \rho S \int_L \ddot{V}_o \delta V_o \, dX \\ \langle J_{\Omega_y} \cdot \delta \Omega_y \rangle &= \rho \int_L \frac{\partial}{\partial t} [I_y \dot{\Omega}_y] \delta \Omega_y \, dX + \rho \int_L \Omega_y \int_S \ddot{h} h_z \delta \Omega_y \, dS \, dX \\ \langle J_u \cdot \delta u \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_L \int_S \ddot{u} \delta u \, dS \, dX \\ \langle J_v \cdot \delta v \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_L \int_S \ddot{v} \delta v \, dS \, dX \\ \langle J_w \cdot \delta w \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_L \int_S \ddot{w} \delta w \, dS \, dX \\ \langle J_h \cdot \delta h \rangle &= \rho \int_L \int_S \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_y^2 \dot{h}] + \Omega_y \ddot{\Omega}_y h_z \right) \delta h \, dS \, dX \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Pour simplifier l'exposé, on introduit :

$$I_s(x) = \int_S \ddot{h} h_z dS \quad (\text{A.25})$$

Les hypothèses d'Euler-Bernoulli de l'Eq. (A.8) et de Love-Kirchhoff de l'Eq. (A.10) ainsi que les relations de l'Eq (A.9) permettent d'écrire les liaisons qui suivent :

$$\begin{aligned} \delta\Omega_y &= -\frac{\partial\delta V_o}{\partial X} \\ \delta u &= \delta u_o - Z \frac{\partial\delta w_o}{\partial X} \\ \delta v &= \delta v_o + Z \frac{1}{a} \left( \delta v_o - \frac{\partial\delta w_o}{\partial\theta} \right) \\ \delta h &= \delta w_o \sin\theta + \delta v_o \cos\theta + Z \frac{\cos\theta}{a} \left( \delta v_o - \frac{\partial\delta w_o}{\partial\theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Avec ces nouvelles liaisons, les termes d'accélération se réduisent aux degrés de liberté suivants :  $U_o, V_o, u_o, v_o, w_o$ . Il est à noter également que les intégrales linéaires en Z sur la surface dS sont nulles :

$$\int_S Z dS = 0 \quad (\text{A.27})$$

Les termes d'accélération s'en déduisent :

- L'accélération pour  $U_o$  vaut :

$$\langle A_{U_o} \cdot \delta U_o \rangle = \rho S \int_L \ddot{U}_o \delta U_o dX \quad (\text{A.28})$$

- L'accélération pour  $V_o$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle A_{V_o} \cdot \delta V_o \rangle &= \langle J_{V_o} \cdot \delta V_o \rangle - \left\langle J_{\Omega_y} \cdot \frac{\partial\delta V_o}{\partial X} \right\rangle \\ &= \rho S \int_L \ddot{V}_o \delta V_o dX - \rho \int_L \frac{\partial}{\partial t} [I_y \dot{\Omega}_y] \frac{\partial\delta V_o}{\partial X} dX - \rho \int_L \Omega_y I_s \frac{\partial\delta V_o}{\partial X} dX \\ &= \rho \int_L \left( S \ddot{V}_o + \frac{\partial}{\partial X} \left[ \frac{\partial}{\partial t} [I_y \dot{\Omega}_y] \right] + \frac{\partial}{\partial X} [I_s \Omega_y] \right) \delta V_o dX - \rho \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} [I_y \dot{\Omega}_y] + \Omega_y I_s \right) \delta V_o \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

- L'accélération pour  $u_o$  vaut :

$$\langle A_{u_o} \cdot \delta u_o \rangle = \rho \int_L \int_S \ddot{u}_o \delta u_o dS dX \quad (\text{A.30})$$

- L'accélération pour  $v_o$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle A_{v_o} \cdot \delta v_o \rangle &= \rho \int_L \int_S \left( \ddot{v}_o + \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_y^2 \dot{h}_o] + \Omega_y \ddot{\Omega}_y h_{z,o} \right) \cos\theta \right) \delta v_o dS dX \\ &\quad - \frac{\rho e^3}{12} \int_L \int_\theta \left( \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial \theta} - \ddot{v}_o \right) - \frac{\cos\theta}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_y^2 \dot{h}_1] + \Omega_y \ddot{\Omega}_y h_{z,1} \right) \right) \delta v_o d\theta dX \end{aligned} \quad (\text{A.31})$$

- L'accélération pour  $w_o$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle A_{w_o} \cdot \delta w_o \rangle &= \rho \int_L \int_S \left( \ddot{w}_o + \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_y^2 \dot{h}_o] + \Omega_y \ddot{\Omega}_y h_{z,o} \right) \sin\theta \right) \delta w_o dS dX \\ &\quad + \frac{\rho e^3}{12} \int_L \int_\theta \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial X} \frac{\partial \delta w_o}{\partial X} + \left( \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial \theta} - \ddot{v}_o \right) - \frac{\cos\theta}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_y^2 \dot{h}_1] + \Omega_y \ddot{\Omega}_y h_{z,1} \right) \right) \frac{\partial \delta w_o}{\partial \theta} d\theta dX \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

## B . Cinématique et tenseur des déformations du tube droit 3D

Les coordonnées du point initial  $\mathbf{M}(X, \theta, Z)$  et du point déformé  $\mathbf{m}(X, \theta, Z)$  sont données par :

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{M}_o + (a + Z)\mathbf{E}_R = X\mathbf{E}_X + (a + Z)\mathbf{E}_R \\ \mathbf{m} &= \mathbf{M} + \mathbf{U} = (X + U_o)\mathbf{E}_X + V_o\mathbf{E}_Z + W_o\mathbf{E}_Y + \mathbf{R}(X).((a + Z + w)\mathbf{E}_R + u\mathbf{E}_X + v\mathbf{E}_\theta)\end{aligned}\quad (\text{B.1})$$

Le tenseur des rotations est décrit par les matrices de rotations autour de chaque axe de la poutre :

$$\mathbf{R}_X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Omega_x & -\sin \Omega_x \\ 0 & \sin \Omega_x & \cos \Omega_x \end{pmatrix} \quad \text{Rotation autour de l'axe } \mathbf{E}_X \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{R}_Y = \begin{pmatrix} \cos \Omega_y & 0 & \sin \Omega_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Omega_y & 0 & \cos \Omega_y \end{pmatrix} \quad \text{Rotation autour de l'axe } \mathbf{E}_Y \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{R}_Z = \begin{pmatrix} \cos \Omega_z & -\sin \Omega_z & 0 \\ \sin \Omega_z & \cos \Omega_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Rotation autour de l'axe } \mathbf{E}_Z \quad (\text{B.4})$$

Ainsi la matrice de rotation  $\mathbf{R}$  est définie comme :

$$\mathbf{R}(X) = \mathbf{R}_X \cdot \mathbf{R}_Y \cdot \mathbf{R}_Z = \begin{pmatrix} \cos \Omega_y \cos \Omega_z & -\cos \Omega_y \sin \Omega_z & \sin \Omega_y \\ \cos \Omega_x \sin \Omega_z + \cos \Omega_z \sin \Omega_x \sin \Omega_y & \cos \Omega_x \cos \Omega_z - \sin \Omega_x \sin \Omega_y \sin \Omega_z & -\cos \Omega_y \sin \Omega_x \\ \sin \Omega_x \sin \Omega_z - \cos \Omega_x \cos \Omega_z \sin \Omega_y & \cos \Omega_z \sin \Omega_x + \cos \Omega_x \sin \Omega_y \sin \Omega_z & \cos \Omega_x \cos \Omega_y \end{pmatrix} \quad (\text{B.5})$$

En supposant des petites rotations (i.e.  $\cos \Omega \simeq 1$  et  $\sin \Omega \simeq \Omega$ ) et en ne gardant que les termes d'ordre 1 en  $\Omega$  la matrice des petites rotations devient :

$$\mathbf{R}(X) = \begin{pmatrix} 1 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 1 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Où } \mathbf{I} \text{ est la matrice Identité dans } M_3(\mathcal{D}) \quad (\text{B.6})$$

Sous l'hypothèse des petites rotations, la matrice des rotations peut s'écrire également sous la forme :

$$\mathbf{R}(X) = \mathbf{I} + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}), \quad \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{V} = (\Omega_x(X)\mathbf{E}_X + \Omega_y(X)\mathbf{E}_Y + \Omega_z(X)\mathbf{E}_Z) \wedge \mathbf{V} \quad (\text{B.7})$$

où  $\mathbf{V}$  est un vecteur quelconque.

Considérant l'hypothèse des petites perturbations (HPP), la cinématique est donnée au premier ordre en déplacement dans le repère  $(\mathbf{E}_x, \mathbf{E}_R, \mathbf{E}_\theta)$  de la configuration initiale :

$$\begin{aligned}\mathbf{m} &= (X + U_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_y - (a + Z) \cos \theta \Omega_z + u)\mathbf{E}_X + (a + Z + V_o \sin \theta + W_o \cos \theta + w)\mathbf{E}_R \\ &\quad + (V_o \cos \theta - W_o \sin \theta + (a + Z)\Omega_x + v)\mathbf{E}_\theta\end{aligned}\quad (\text{B.8})$$

Dans ce repère la différentiation de  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$d\mathbf{M} = dX\mathbf{E}_X + (a + Z)d\theta\mathbf{E}_\theta + dZ\mathbf{E}_R \quad (\text{B.9})$$

Les vecteurs tangents avant déformations s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_x = \mathbf{E}_X \\ \mathbf{A}_\theta = (a + Z)\mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{A}_z = \mathbf{E}_a \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Le tenseur métrique  $\mathbf{G}$  devient :

$$\begin{cases} G_{xx} = 1 \\ G_{\theta\theta} = (a + Z)^2 \\ G_{zz} = 1 \end{cases} \quad (\text{B.11})$$

Les vecteurs tangents ainsi que la normale à la surface du tube s'expriment :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_x &= \left(1 + \frac{\partial U_o}{\partial X} + (a+Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} - (a+Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) \mathbf{E}_X \\
&\quad + \left(\sin \theta \frac{\partial V_o}{\partial X} + \cos \theta \frac{\partial W_o}{\partial X} + \frac{\partial w}{\partial X}\right) \mathbf{E}_R + \left(\cos \theta \frac{\partial V_o}{\partial X} - \sin \theta \frac{\partial W_o}{\partial X} + (a+Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial X}\right) \mathbf{E}_\theta \\
\mathbf{a}_\theta &= \left((a+Z) \cos \theta \Omega_y + (a+Z) \sin \theta \Omega_z + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) \mathbf{E}_X \\
&\quad + \left(-(a+Z) \Omega_x + \frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) \mathbf{E}_R + \left(a+Z + \frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) \mathbf{E}_\theta \\
\mathbf{n}_z &= \left(\sin \theta \Omega_y - \cos \theta \Omega_z + \frac{\partial u}{\partial Z}\right) \mathbf{E}_X + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial Z}\right) \mathbf{E}_R + \left(\Omega_x + \frac{\partial v}{\partial Z}\right) \mathbf{E}_\theta
\end{aligned} \tag{B.12}$$

Les composantes du tenseur métrique de la base déformée au premier ordre en déplacement sont données par :

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_x &= 1 + 2 \left(\frac{\partial U_o}{\partial X} + (a+Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} - (a+Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X}\right) \\
\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{a}_\theta &= (a+Z)^2 \left(1 + \frac{2}{a+Z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right)\right) \\
\mathbf{n}_z \cdot \mathbf{n}_z &= 1 + 2 \frac{\partial w}{\partial Z} \\
\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_\theta &= (a+Z) \cos \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X}\right) + (a+Z) \sin \theta \left(\Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X}\right) + (a+Z)^2 \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial \theta} + (a+Z) \frac{\partial v}{\partial X} \\
\mathbf{a}_x \cdot \mathbf{n}_z &= \sin \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X}\right) - \cos \theta \left(\Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X}\right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \\
\mathbf{a}_\theta \cdot \mathbf{n}_z &= \frac{\partial w}{\partial \theta} - v + (a+Z) \frac{\partial v}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{B.13}$$

Le tenseur linéarisé des déformations (i.e. en HPP) se déduit :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} + (a+Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} - (a+Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a+Z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) \\
\varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} \\
2\varepsilon_{x\theta} &= \cos \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X}\right) + \sin \theta \left(\Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X}\right) + (a+Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + \frac{1}{a+Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial X} \\
2\varepsilon_{xz} &= \sin \theta \left(\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X}\right) - \cos \theta \left(\Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X}\right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \\
2\varepsilon_{z\theta} &= \frac{1}{a+Z} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v\right) + \frac{\partial v}{\partial Z}
\end{aligned} \tag{B.14}$$



### C . Cinématique et tenseur des déformations non linéaire du tube droit 3D

Les hypothèses sur la cinématique ne permettent pas d'obtenir un couplage entre l'ovalisation et la flexion. Des termes supplémentaires du second ordre en déplacement sont introduits afin d'obtenir ce couplage.

La position d'un point de l'état déformé  $\mathbf{m}(X, Z, \theta)$  est :

$$\mathbf{m} = (X + U_o)\mathbf{E}_X + V_o\mathbf{E}_Z + W_o\mathbf{E}_Y + \mathbf{R}(X).((a + Z + w)\mathbf{E}_R + u\mathbf{E}_X + v\mathbf{E}_\theta) \quad (\text{C.1})$$

Dans ce cas, les termes du 1<sup>er</sup> ordre en déplacement et en rotation ne sont pas les seuls à être considérés. Le couplage entre les rotations de la section et la déformation de la section est pris en compte, ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & (X + U_o + u + (a + Z + w) \sin \theta \Omega_y - (a + Z + w) \cos \theta \Omega_z + \Omega_y v \cos \theta + \Omega_z v \sin \theta)\mathbf{E}_X \\ & + (a + Z + V_o \sin \theta + W_o \cos \theta + w - \Omega_x v - \sin \theta \Omega_y u + \cos \theta \Omega_z u)\mathbf{E}_R \\ & + (V_o \cos \theta - W_o \sin \theta + (a + Z + w)\Omega_x + v - \cos \theta \Omega_y u - \sin \theta \Omega_z u)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Les sections sont supposées relativement planes après déformation et la torsion est supposée également petite devant la flexion. Les termes du second ordre portés par  $\Omega_x$  et  $u$  sont donc négligés. Ainsi, seuls les termes couplés selon  $\mathbf{E}_X$  sont maintenus :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & (X + U_o + u + (a + Z + w) \sin \theta \Omega_y - (a + Z + w) \cos \theta \Omega_z + \Omega_y v \cos \theta + \Omega_z v \sin \theta)\mathbf{E}_X \\ & + (a + Z + V_o \sin \theta + W_o \cos \theta + w)\mathbf{E}_R \\ & + (V_o \cos \theta - W_o \sin \theta + (a + Z)\Omega_x + v)\mathbf{E}_\theta \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Pour simplifier l'écriture, on note  $h_1 = w \sin \theta + v \cos \theta$  et  $h_2 = -w \cos \theta + v \sin \theta$ .

Le tenseur des déformations avec les termes de couplage du second ordre obtenu grâce aux termes couplés selon  $\mathbf{E}_X$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & \frac{\partial U_o}{\partial X} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} + \frac{\partial u}{\partial X} \\ & + \frac{\partial \Omega_y}{\partial X} h_1 + \frac{\partial \Omega_z}{\partial X} h_2 + \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_1}{\partial X} + \left( \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_2}{\partial X} \\ \varepsilon_{\theta\theta} = & \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right) \\ \varepsilon_{zz} = & \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{x\theta} = & \cos \theta \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) + \sin \theta \left( \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) + (a + Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial X} \\ & + \frac{1}{a + Z} \left( \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_1}{\partial \theta} + \left( \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \right) \\ 2\varepsilon_{xz} = & \sin \theta \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) - \cos \theta \left( \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial w}{\partial X} \\ & \left( \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_1}{\partial Z} + \left( \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) \frac{\partial h_2}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{z\theta} = & \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Les hypothèses d'Euler-Bernoulli annulent la distorsion de la partie poutre :

$$\Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial X} = 0 \quad ; \quad \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial X} = 0 \quad (\text{C.5})$$

Les hypothèses de Love-Kirchhoff annulent la distorsion de la partie coque :

$$u_1 = \frac{\partial w_0}{\partial X} \quad ; \quad v_1 = -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_0}{\partial \theta} - v_0 \right) \quad (\text{C.6})$$

En considérant les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour la partie poutre et les hypothèses de Love-Kirchhoff pour la partie coque. Le tenseur des déformations s'exprime tel que :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial U_o}{\partial X} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - a \cos \theta \frac{\partial^2 W_o}{\partial X^2} + \frac{\partial u_o}{\partial X} \\
&+ \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} (-v_o \cos \theta - w_o \sin \theta) + \frac{\partial^2 W_o}{\partial X^2} (v_o \sin \theta - w_o \cos \theta) + Z k_{xx} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v_o}{\partial \theta} + w_o \right) + Z k_{\theta\theta} \\
2\varepsilon_{x\theta} &= a \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial X} + 2Z k_{x\theta}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
k_{xx} &= -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} - \cos \theta \frac{\partial^2 W_o}{\partial X^2} - \frac{\partial^2 w_o}{\partial X^2} \\
&+ \frac{1}{a} \left( \cos \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) - \sin \theta \frac{\partial^2 W_o}{\partial X^2} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right) \\
k_{\theta\theta} &= -\frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\
2k_{x\theta} &= \frac{\partial \Omega_x}{\partial X} - \frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial X \partial \theta} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{\partial v_o}{\partial X} \right)
\end{aligned} \tag{C.7}$$

## D . Tube coudé en mouvement plan

### D.1 . Cinématique et tenseur des déformations

Afin de simplifier la présentation, le mouvement est considéré dans le plan du tube i.e.  $V_o = 0$  et  $\Omega_x = \Omega_y = 0$ .

Les coordonnées du point initial  $\mathbf{M}(\phi, \theta, Z)$  sont données par :

$$\mathbf{M} = -R\mathbf{N} + (a + Z)\mathbf{E}_R \quad (\text{D.1})$$

Dans ce repère la différentiation de  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$d\mathbf{M} = (R - (a + Z) \cos \theta) d\phi \mathbf{E}_\phi + (a + Z) d\theta \mathbf{E}_\theta + dZ \mathbf{E}_R \quad (\text{D.2})$$

Les vecteurs tangents et le vecteur normal avant déformation s'expriment :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\phi = (R - (a + Z) \cos \theta) \mathbf{E}_\phi \\ \mathbf{A}_\theta = (a + Z) \mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{A}_z = \mathbf{E}_R \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

Ceci permet de définir le tenseur métrique  $\mathbf{G}$ , tel que les composantes non nulles sont celles de la diagonale :

$$\begin{cases} G_{\phi\phi} = (R - (a + Z) \cos \theta)^2 \\ G_{\theta\theta} = (a + Z)^2 \\ G_{zz} = 1 \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

Pour ne pas alourdir la présentation, l'écriture du tenseur des déformations est décomposée en une partie poutre  $\varepsilon^p$ , une partie coque  $\varepsilon^c$  et un couplage non linéaire  $\varepsilon^{nl}$ . Ces trois parties sont ensuite assemblées pour obtenir le tenseur global des déformations.

#### Tube coudé en modélisation arc

L'écriture de la cinématique et du tenseur linéarisé des déformations est considéré seulement avec les degrés de liberté de poutre. Les hypothèses des petites rotations ainsi que des petites perturbations sont également adoptées.

Le déplacement  $\mathbf{u}^p$  est défini comme :

$$\mathbf{m}^p = \mathbf{M} + \mathbf{u}^p \quad (\text{D.5})$$

où :

$$\mathbf{u}^p = (U_o - (a + Z) \cos \theta \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + W_o \mathbf{N} \quad (\text{D.6})$$

Les vecteurs tangents et le vecteur normal après déformation sont donnés :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi^p &= \left( (R - (a + Z) \cos \theta + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o) \right) \mathbf{E}_\phi + \left( U_o - (a + Z) \cos \theta \Omega_z + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \mathbf{N} \\ \mathbf{a}_\theta^p &= ((a + Z) \sin \theta \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + (-(a + Z) \sin \theta) \mathbf{N} + ((a + Z) \cos \theta) \mathbf{E}_R \\ \mathbf{a}_z^p &= (-\cos \theta \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + (\cos \theta) \mathbf{N} + (\sin \theta) \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Finalement le tenseur linéarisé des déformations pour la partie poutre seule s'exprime comme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\phi\phi}^p = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p = 0 \\ \varepsilon_{zz}^p = 0 \\ 2\varepsilon_{\phi\theta}^p = \frac{\sin \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( R\Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z}^p = \frac{\cos \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -R\Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z}^p = 0 \end{cases} \quad (\text{D.8})$$

Le tenseur des déformations donné dans [55, 22, 8, 59, 112, 38] est simplifié par rapport à celui fourni ci-dessus, en choisissant un rayon de courbure  $R$  très grand devant le rayon moyen  $a$ . Une écriture similaire tridimensionnelle avec un repère différent est retrouvée dans [82].

### Tube coudé en modélisation coque

Désormais, l'intérêt se porte sur les degrés de liberté de coque et l'on exprime le déplacement comme suit :

$$\mathbf{u}^c = u\mathbf{E}_\phi + w\mathbf{E}_R + v\mathbf{E}_\theta \quad (\text{D.9})$$

qui donne la position du point déformé :

$$\mathbf{m}^c = u\mathbf{E}_\phi + (-R + (a + Z + w) \cos \theta - v \sin \theta)\mathbf{N} + ((a + Z + w) \sin \theta + v \cos \theta)\mathbf{E}_Z \quad (\text{D.10})$$

Les vecteurs tangents et normal se déduisent tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi^c &= \left( R - (a + Z) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \mathbf{E}_\phi + \left( \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \phi} + u \right) \mathbf{N} + \left( \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_\theta^c &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{E}_\phi + \left( -(a + Z) \sin \theta - w \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \cos \theta v - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{N} \\ &+ \left( (a + Z) \cos \theta + \cos \theta w + \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \sin \theta v + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_z^c &= \frac{\partial u}{\partial Z} \mathbf{E}_\phi + \left( \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \mathbf{N} + \left( \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Enfin le tenseur linéarisé des déformations pour la partie coque seule s'exprime comme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\phi\phi}^c = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c = \frac{1}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zz}^c = \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{\phi\theta}^c = \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z}^c = \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z}^c = \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{cases} \quad (\text{D.12})$$

L'écriture du tenseur présent dans [60, 35, 88, 73] est similaire au tenseur proposé en ayant déjà considéré les hypothèses de Love-Kirchhoff. Comme précédemment une écriture tridimensionnelle avec un repère différent est proposée dans [82].

### Modèle de poutre enrichie linéarisé

En considérant les termes de poutres et ceux de coques le tenseur linéarisé des déformations du 1<sup>er</sup> ordre (i.e. linéaire, sans terme de couplage) s'exprime finalement sous la forme de :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{\sin \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( R\Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z} = \frac{\cos \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -R\Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{cases} \quad (\text{D.13})$$

### Modèle de poutre enrichie non-linéaire

Dans cette partie le couplage entre la rotation globale et la section déformée est ajouté. Comme précédemment les termes du second ordre portés par le gauchissement et la rotation de torsion sont négligés. Pour simplifier on pose  $h = -w \cos \theta + v \sin \theta$ . Le déplacement additionnel devient alors :

$$\mathbf{u}^{nl} = \Omega_z h \mathbf{E}_\phi \quad (\text{D.14})$$

Le déplacement supplémentaire de l'Eq. (D.14) est ajouté aux cinématiques de poutre de l'Eq. (D.6) et de coque de l'Eq. (D.9) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nl} + \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^c \quad (\text{D.15})$$

Les termes supplémentaires du tenseur des déformations considérant uniquement le couplage sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\phi\phi}^{nl} = \frac{h}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \left[ \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} (R - 2(a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - W_o \right] + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h}{\partial \phi} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \\ \varepsilon_{\phi\theta}^{nl} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \\ \varepsilon_{\phi Z}^{nl} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial Z} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \end{array} \right. \quad (\text{D.16})$$

Il convient alors de rajouter au tenseur des déformations du 1<sup>er</sup> ordre (voir Eq. (D.13)) le terme de l'Eq. (D.16) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left[ \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right] \\ + \frac{h}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \left[ \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} (R - 2(a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - W_o \right] + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h}{\partial \phi} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{\sin \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( R \Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\ + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial \theta} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \\ 2\varepsilon_{\phi z} = \frac{\cos \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -R \Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\ + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h}{\partial Z} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o \right] \\ 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{array} \right. \quad (\text{D.17})$$

**Remarque** : Pour un tuyau droit :  $s \rightarrow X$  et  $R \rightarrow +\infty$  ce qui implique que :  $\frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \sim \frac{1}{R}$ . Ainsi les termes de la forme :  $\frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial \bullet}{\partial \phi} \sim \frac{1}{R} \frac{\partial \bullet}{\partial \phi} = \frac{\partial \bullet}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \bullet}{\partial X}$ . L'écriture du tenseur des déformations en tuyau droit donné dans l'Eq. (B.14) est retrouvée.

En considérant la même décomposition en  $Z$  que dans les deux premiers chapitres (voir Eq. (1.57)) et en gardant les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff, les relations suivantes sont obtenues :

- Avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli la relation liant la rotation avec les déplacements devient :

$$\Omega_z = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W_o}{\partial \phi} + U_o \right) \quad (\text{D.18})$$

- Avec les hypothèses de Love-Kirchhoff les relations s'écrivent ci-après :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{R - a \cos \theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \phi} + \cos \theta u_o \right) \\ v_1 &= -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

La relation pour  $v_1$  reste inchangée par rapport au tube droit. Cependant pour  $u_1$  et  $\Omega_z$  des termes supplémentaires portés par l'axe apparaissent.

A priori le rayon de courbure  $R$  n'est pas forcément toujours très grand devant le rayon  $a$ . En effet il y a des configurations réalistes où il y a seulement un facteur trois. Ainsi, le rapport  $a/R$  n'est pas négligeable. Il faut donc aller à des ordres plus élevés concernant ce développement limité.

L'hypothèse de coque mince est maintenue, l'épaisseur est faible devant le rayon de la tuyauterie et par conséquent faible devant le rayon de courbure également.

Comme fait précédemment, le tenseur des déformations est décomposé en une partie membranaire (indépendante de  $Z$ ) et une partie de courbure (linéaire en  $Z$ ) :  $\varepsilon = \varepsilon^m + Z\mathbf{k}$ .

Les développements limités à l'ordre 1 donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+Z} &= \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2} \\ \frac{1}{R - (a+Z)\cos\theta} &= \frac{1}{R} + \frac{a\cos\theta}{R^2} + Z \left[ \cos\theta \left( \frac{1}{R} + \frac{a\cos\theta}{R^2} \right)^2 \right] = \alpha + Z\beta \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Pour les termes non linéaires, des termes supplémentaires apparaissent dans  $\varepsilon_{\phi\phi}^{nl}$  même après avoir utilisé les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Ces termes sont cependant très faibles et sont par conséquent négligés.

En insérant les hypothèses d'Euler-Bernoulli de l'Eq. (D.18) et de Love-Kirchhoff de l'Eq. (D.19) ainsi que les développements limités de l'Eq. (D.20) dans l'Eq. (D.17) le tenseur des déformations s'écrit :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{\phi\phi} &= (\alpha + Z\beta) \left[ \frac{\partial U_o}{\partial\phi} - a\cos\theta \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] - W_o + \frac{\partial u_o}{\partial\phi} - w_o\cos\theta + v_o\sin\theta \right. \\ &+ \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] (-w_o\cos\theta + v_o\sin\theta) \\ &+ \alpha Z \left[ -\cos\theta \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] - \alpha \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial\phi^2} + \cos\theta \frac{\partial u_o}{\partial\phi} \right] - \frac{1}{a} \sin\theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial\theta} - v_o \right) \right] \\ &+ \alpha Z \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial\theta} - v_o \right) \frac{1}{R} \sin\theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial\theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta^2} + w_o \right) \\ 2\varepsilon_{\phi\theta} &= \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - \frac{Z}{a^2} \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - \frac{Z}{a} \left[ \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial\phi} + u_o\cos\theta \right) + \alpha \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta\partial\phi} + \cos\theta \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - u_o\sin\theta \right) \right] \\ &+ (\alpha + Z\beta) \left( \frac{\partial v_o}{\partial\phi} - u_o\sin\theta \right) + Z\alpha \left[ \sin\theta\alpha \left( \frac{\partial w_o}{\partial\phi} + u_o\cos\theta \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\partial v_o}{\partial\phi} \right) \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{D.21})$$

Les quantités sont exprimées en fonction de la variable  $\phi$ . Désormais elles sont exprimées en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  en utilisant la relation :  $\frac{1}{R} \frac{\partial \bullet}{\partial\phi} = \frac{\partial \bullet}{\partial s}$ . Afin d'effectuer ce changement les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont factorisées

par  $\frac{1}{R}$  tel que :

$$\alpha = \frac{1}{R} \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{R} \beta' \quad \text{où} \quad \alpha' = 1 + \frac{a\cos\theta}{R} \quad \text{et} \quad \beta' = \cos\theta \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{a\cos\theta}{R} \right)^2 \quad (\text{D.22})$$

Le tenseur des déformation s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ss} = (\alpha' + Z\beta') \left[ \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} + \frac{\partial u_o}{\partial s} - \frac{w_o}{R} \cos \theta + \frac{v_o}{R} \sin \theta \right. \\ \quad + \left. \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] (-w_o \cos \theta + v_o \sin \theta) \right] \\ \quad + \alpha' Z \left[ -\cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \alpha' \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial s^2} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial s} \right] - \frac{1}{aR} \sin \theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right] \\ \quad + \alpha' Z \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \sin \theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\ 2\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{Z}{a^2} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{Z}{a} \left[ \frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial s} + \frac{u_o}{R} \cos \theta \right) + \alpha' \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \right) \right] \\ \quad + (\alpha' + Z\beta') \left( \frac{\partial v_o}{\partial s} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \right) + Z\alpha' \left[ \frac{\sin \theta}{R} \alpha' \left( \frac{\partial w_o}{\partial s} + u_o \frac{\cos \theta}{R} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} \right) \right] \end{array} \right. \quad (D.23)$$

Le tenseur défini dans l'Eq. (D.23) est assez complexe. Pour simplifier les expressions, on prend  $\alpha' = 1$  et  $\beta' = 0$ , ce qui donne le tenseur des déformations simplifié :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{ss} = \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} + \frac{\partial u_o}{\partial s} - \frac{w_o}{R} \cos \theta + \frac{v_o}{R} \sin \theta \\ \quad + \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] (-w_o \cos \theta + v_o \sin \theta) \\ \quad + Z \left[ -\cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial s^2} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial s} \right] - \frac{1}{aR} \sin \theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right. \\ \quad \left. - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \sin \theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\ 2\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\partial v_o}{\partial s} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \\ \quad + Z \left[ -\frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \left( \sin \theta \frac{\partial w_o}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{a} u_o + \frac{\cos \theta \sin \theta}{R} u_o \right) \right] \end{array} \right. \quad (D.24)$$

## D.2 . Énergie cinétique

Le déplacement associé à la transformation est donné par :

$$\mathbf{u} = (U_o + u - (a + Z) \cos \theta \Omega_z + \Omega_z h) \mathbf{E}_\phi + (W_o \cos \theta + w) \mathbf{E}_R + (-W_o \sin \theta + v) \mathbf{E}_\theta \quad (D.25)$$

Pour simplifier, on pose :  $h_z = -(a + Z) \cos \theta + h = h_{z,o} + Zh_{z,1}$  et donc  $\dot{h}_z = \dot{h}$ . Les vitesses vérifient :

$$\dot{\mathbf{u}} = (\dot{U}_o + \dot{u} + h_z \dot{\Omega}_z + \dot{h}_z \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + (\dot{W}_o \cos \theta + \dot{w}) \mathbf{E}_R + (-\dot{W}_o \sin \theta + \dot{v}) \mathbf{E}_\theta \quad (D.26)$$

Ainsi la densité d'énergie s'écrit :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} = (\dot{U}_o + \dot{u} + h_z \dot{\Omega}_z + \dot{h}_z \Omega_z)^2 + (\dot{W}_o \cos \theta + \dot{w})^2 + (-\dot{W}_o \sin \theta + \dot{v})^2 \quad (D.27)$$

De façon similaire à ce qui est fait précédemment, les termes de la forme  $U_o u$ ,  $\Omega_y u$  et  $\Omega_y U_o$  sont négligeables et la densité d'énergie devient :

$$\dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} = \dot{U}_o^2 + \dot{u}^2 + (h_z \dot{\Omega}_z + \dot{h}_z \Omega_z)^2 + \dot{W}_o^2 + \dot{w}^2 + \dot{v}^2 \quad (D.28)$$

La densité d'énergie cinétique se décompose en trois contributions :

- L'énergie cinétique de la poutre :

$$\frac{1}{2} (S\dot{U}_o^2 + S\dot{W}_o^2 + I_z\dot{\Omega}_z^2) \quad \text{où } S = 2\pi ae \quad \text{et } I_z = \int_S h_z^2 dS = \int_S (-(a+Z)\cos\theta + h)^2 dS \quad (\text{D.29})$$

- L'énergie cinétique de la coque :

$$\frac{1}{2} \int_S (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dS \quad (\text{D.30})$$

- L'énergie cinétique du couplage entre la rotation globale et la déformée de la section :

$$\frac{1}{2} \Omega_z^2 \int_S \dot{h}^2 dS + \Omega_z \dot{\Omega}_z \int_S \dot{h} h_z dS \quad (\text{D.31})$$

Pour rappel,  $q$  représente les variables généralisées :  $q = U_o, W_o, \Omega_z, u, v, w, h$ . Il faut désormais déterminer les quantités  $\langle J_q \cdot \delta q \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle J_{U_o} \cdot \delta U_o \rangle &= \rho S \int_{\phi} \ddot{U}_o \delta U_o R d\phi \\ \langle J_{W_o} \cdot \delta W_o \rangle &= \rho S \int_{\phi} \ddot{W}_o \delta W_o R d\phi \\ \langle J_{\Omega_z} \cdot \delta \Omega_z \rangle &= \rho \int_{\phi} \frac{\partial}{\partial t} [I_z \dot{\Omega}_z] \delta \Omega_z R d\phi + \rho \int_{\phi} \Omega_z \int_S \ddot{h} h_z \delta \Omega_z dS R d\phi \\ \langle J_u \cdot \delta u \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_{\phi} \int_S \ddot{u} \delta u dS R d\phi \\ \langle J_v \cdot \delta v \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_{\phi} \int_S \ddot{v} \delta v dS R d\phi \\ \langle J_w \cdot \delta w \rangle &= \frac{1}{2} \rho \int_{\phi} \int_S \ddot{w} \delta w dS R d\phi \\ \langle J_h \cdot \delta h \rangle &= \rho \int_{\phi} \int_S \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_z^2 \dot{h}] + \Omega_z \ddot{\Omega}_z h_z \right) \delta h dS R d\phi \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

Jusqu'ici, les résultats sont identiques à ce qui est obtenu pour le tube droit. Cependant les liaisons, obtenues en annulant la distorsion de poutre et de coque, sont différentes dans le cas du tube coudé. Les hypothèses d'Euler-Bernoulli de l'Eq. (D.18) et de Love-Kirchhoff de l'Eq. (D.19) ainsi que les relations de l'Eq (A.9) permettent d'écrire les relations qui suivent :

$$\begin{aligned} \delta \Omega_z &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial \delta W_o}{\partial \phi} + \delta U_o \right) \\ \delta u &= \delta u_o - Z \frac{1}{R - a \cos \theta} \left( \frac{\partial \delta w_o}{\partial \phi} + \delta u_o \cos \theta \right) \\ \delta v &= \delta v_o + Z \frac{1}{a} \left( \delta v_o - \frac{\partial \delta w_o}{\partial \theta} \right) \\ \delta h &= -\delta w_o \cos \theta + \delta v_o \sin \theta + Z \frac{\sin \theta}{a} \left( \delta v_o - \frac{\partial \delta w_o}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.33})$$

Les termes d'accélération s'en déduisent :

- L'accélération pour  $U_o$  vaut :

$$\langle A_{U_o} \cdot \delta U_o \rangle = \rho S \int_{\phi} \ddot{U}_o \delta U_o R d\phi + \rho \int_{\phi} \int_S \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} [I_z \dot{\Omega}_z] + \frac{1}{R} \Omega_z \dot{h} h_z \right) \delta U_o dS R d\phi \quad (\text{D.34})$$

- L'accélération pour  $W_o$  vaut :

$$\langle A_{W_o} \cdot \delta W_o \rangle = \rho S \int_{\phi} \ddot{W}_o \delta W_o R d\phi + \rho \int_{\phi} \int_S \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial t} [I_z \dot{\Omega}_z] + \frac{1}{R} \Omega_z \dot{h} h_z \right) \frac{\partial \delta W_o}{\partial \phi} dS R d\phi \quad (\text{D.35})$$



- L'accélération pour  $u_o$  vaut :

$$\langle A_{u_o} \cdot \delta u_o \rangle = \rho \int_{\phi} \int_S \ddot{u}_o \delta u_o \, dS \, Rd\phi + \frac{\rho e^3}{12(R - a \cos \theta)^2} \int_{\phi} \int_{\theta} \left( \frac{\partial \ddot{u}_o}{\partial \phi} + \ddot{u}_o \cos \theta \right) \cos \theta \delta u_o \, d\theta \, Rd\phi \quad (D.36)$$

- L'accélération pour  $v_o$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle A_{v_o} \cdot \delta v_o \rangle &= \rho \int_{\phi} \int_S \left( \ddot{v}_o + \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_z^2 \dot{h}_o] + \Omega_z \ddot{\Omega}_z h_{z,o} \right) \sin \theta \right) \delta v_o \, dS \, Rd\phi \\ &\quad - \frac{\rho e^3}{12} \int_{\phi} \int_{\theta} \left( \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \ddot{v}_o}{\partial \theta} - \ddot{v}_o \right) - \frac{\sin \theta}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_z^2 \dot{h}_1] + \Omega_z \ddot{\Omega}_z h_{z,1} \right) \right) \delta v_o \, d\theta \, Rd\phi \end{aligned} \quad (D.37)$$

- L'accélération pour  $w_o$  vaut :

$$\begin{aligned} \langle A_{w_o} \cdot \delta w_o \rangle &= \rho \int_{\phi} \int_S \left( \ddot{w}_o - \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_z^2 \dot{h}_o] + \Omega_z \ddot{\Omega}_z h_{z,o} \right) \cos \theta \right) \delta w_o \, dS \, Rd\phi \\ &\quad + \frac{\rho e^3}{12(R - a \cos \theta)^2} \int_{\phi} \int_{\theta} \left( \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial \phi} + \ddot{w}_o \cos \theta \right) \frac{\partial w_o}{\partial \phi} \, d\theta \, Rd\phi \\ &\quad + \frac{\rho e^3}{12} \int_{\phi} \int_{\theta} \left( \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial \ddot{w}_o}{\partial \theta} - \ddot{w}_o \right) - \frac{\sin \theta}{a} \left( \frac{\partial}{\partial t} [\Omega_z^2 \dot{h}_1] + \Omega_z \ddot{\Omega}_z h_{z,1} \right) \right) \frac{\partial \delta w_o}{\partial \theta} \, d\theta \, Rd\phi \end{aligned} \quad (D.38)$$

## E . Cinématique et tenseur des déformations du tube coudé 3D

Les coordonnées du point initial  $\mathbf{M}(X, \theta, Z)$  est donné par :

$$\mathbf{M} = -R\mathbf{N} + (a + Z)\mathbf{E}_R \quad (\text{E.1})$$

Dans ce repère la différentiation de  $\mathbf{M}$  s'écrit :

$$d\mathbf{M} = (R - (a + Z) \cos \theta)d\phi\mathbf{E}_\phi + (a + Z)d\theta\mathbf{E}_\theta + dZ\mathbf{E}_R \quad (\text{E.2})$$

Les vecteurs tangents et le vecteur normal avant déformation s'expriment :

$$\begin{cases} \mathbf{A}_\phi = (R - (a + Z) \cos \theta)\mathbf{E}_\phi \\ \mathbf{A}_\theta = (a + Z)\mathbf{E}_\theta \\ \mathbf{A}_z = \mathbf{E}_a \end{cases} \quad (\text{E.3})$$

Ceci permet de définir le tenseur métrique  $\mathbf{G}$  tel que les composantes non nulles sont celles de la diagonale :

$$\begin{cases} G_{\phi\phi} = (R - (a + Z) \cos \theta)^2 \\ G_{\theta\theta} = (a + Z)^2 \\ G_{zz} = 1 \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

Pour ne pas alourdir la présentation, l'écriture du tenseur des déformations est décomposée en une partie poutre  $\varepsilon^p$ , une partie coque  $\varepsilon^c$  et un couplage non linéaire  $\varepsilon^{nl}$ .

### Tube coudé en modélisation arc

L'écriture de la cinématique et du tenseur linéarisé des déformations est considéré seulement avec les degrés de liberté de poutre. Les hypothèses des petites rotations ainsi que des petites perturbations sont également adoptées. Le déplacement  $\mathbf{u}^p$  est défini comme :

$$\mathbf{m}^p = \mathbf{M} + \mathbf{u}^p \quad (\text{E.5})$$

où :

$$\mathbf{u}^p = U_o\mathbf{E}_\phi + W_o\mathbf{N} + V_o\mathbf{E}_Z + ((a + Z) \sin \theta \Omega_y - (a + Z) \cos \theta \Omega_z)\mathbf{E}_\phi - (a + Z) \sin \theta \Omega_x \mathbf{N} + (a + Z) \cos \theta \Omega_x \mathbf{E}_Z \quad (\text{E.6})$$

Les vecteurs tangents et le vecteur normal après déformation sont donnés :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi^p &= \left( (R - (a + Z) \cos \theta + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_x \right) \mathbf{E}_\phi \\ &+ \left( U_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_y - (a + Z) \cos \theta \Omega_z + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_x}{\partial \phi} \right) \mathbf{N} + \left( \frac{\partial V_o}{\partial \phi} + (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_x}{\partial \phi} \right) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_\theta^p &= ((a + Z) \cos \theta \Omega_y + (a + Z) \sin \theta \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + (-(a + Z) \sin \theta - (a + Z) \cos \theta \Omega_x) \mathbf{N} + ((a + Z) \cos \theta \\ &- (a + Z) \sin \theta \Omega_x) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_Z^p &= (\sin \theta \Omega_y - \cos \theta \Omega_z) \mathbf{E}_\phi + (\cos \theta - \sin \theta \Omega_x) \mathbf{N} + (\sin \theta + \cos \theta \Omega_x) \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Finalement le tenseur linéarisé des déformations pour la partie poutre seule s'exprime comme :

$$\begin{cases} \varepsilon_{\phi\phi}^p = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial U_o}{\partial \phi} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_x \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^p = 0 \\ \varepsilon_{zz}^p = 0 \\ 2\varepsilon_{\phi\theta}^p = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -(a + Z) \Omega_y + (a + Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial \phi} + \cos \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \sin \theta \left( R \Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z}^p = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \sin \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \cos \theta \left( -R \Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z}^p = 0 \end{cases} \quad (\text{E.8})$$

### Tube coudé en modélisation coque

Désormais, l'intérêt se porte sur les degrés de liberté de coque et l'on exprime le déplacement comme suit :

$$\mathbf{u}^c = u\mathbf{E}_\phi + w\mathbf{E}_R + v\mathbf{E}_\theta \quad (\text{E.9})$$

qui donne la position du point déformé :

$$\mathbf{m}^c = u\mathbf{E}_\phi + (-R + (a + Z + w) \cos \theta - v \sin \theta)\mathbf{N} + ((a + Z + w) \sin \theta + v \cos \theta)\mathbf{E}_Z \quad (\text{E.10})$$

Les vecteurs tangents et normal se déduisent tels que :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\phi^c &= \left( R - (a + Z) \cos \theta + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \mathbf{E}_\phi + \left( \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \phi} - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \phi} + u \right) \mathbf{N} + \left( \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_\theta^c &= \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{E}_\phi + \left( -(a + Z) \sin \theta - w \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \cos \theta v - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{N} \\ &+ \left( (a + Z) \cos \theta + \cos \theta w + \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \theta} - \sin \theta v + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \mathbf{E}_Z \\ \mathbf{a}_z^c &= \frac{\partial u}{\partial Z} \mathbf{E}_\phi + \left( \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \mathbf{N} + \left( \left( 1 + \frac{\partial w}{\partial Z} \right) \sin \theta + \cos \theta \frac{\partial v}{\partial Z} \right) \mathbf{E}_Z \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Enfin le tenseur linéarisé des déformations pour la partie coque seule s'exprime comme :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{\phi\phi}^c &= \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta}^c &= \frac{1}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zz}^c &= \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{\phi\theta}^c &= \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z}^c &= \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z}^c &= \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{aligned} \right. \quad (\text{E.12})$$

### Modèle de poutre enrichie linéaire

En considérant les termes de poutres et ceux de coques le tenseur linéarisé des déformations du 1<sup>er</sup> ordre (i.e. linéaire, sans terme de couplage) s'exprime finalement sous la forme de :

$$\left\{ \begin{aligned} \varepsilon_{\phi\phi} &= \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial U_o}{\partial \phi} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_x + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right) \\ \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{a + Z} \left( w + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial Z} \\ 2\varepsilon_{\phi\theta} &= \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -(a + Z) \Omega_y + (a + Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial \phi} + \cos \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \sin \theta \left( R \Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\phi z} &= \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \sin \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \cos \theta \left( -R \Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\ &+ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\ 2\varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z} \end{aligned} \right. \quad (\text{E.13})$$

### Modèle de poutre enrichie non linéaire

Dans cette partie le couplage entre la rotation globale et la section déformée est ajouté. Comme précédemment les termes du second ordre portés par le gauchissement et la rotation de torsion sont négligés. Pour simplifier on pose  $h_1 = w \sin \theta + v \cos \theta$  et  $h_2 = -w \cos \theta + v \sin \theta$ . Le déplacement additionnel devient alors :

$$\mathbf{u}^{nl} = (\Omega_y h_1 + \Omega_z h_2) \mathbf{E}_\phi \quad (\text{E.14})$$

Le déplacement supplémentaire de l'Eq. (E.14) est ajouté aux cinématiques de poutre de l'Eq. (E.6) et de coque de l'Eq. (E.9) :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nl} + \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^c \quad (\text{E.15})$$

Les termes supplémentaires du tenseur des déformations considérant uniquement le couplage sont donnés par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\phi\phi}^{nl} = \frac{h_1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left[ \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} \right] + \frac{h_2}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \left[ \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} (R - 2(a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} \right] \\ + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h_1}{\partial \phi} \left[ \Omega_y (R - (a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \\ + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \\ \varepsilon_{\phi\theta}^{nl} = (a + Z) \frac{-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} [\Omega_y] + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left[ (R - (a + Z) \cos \theta) \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \\ + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \\ \varepsilon_{\phi Z}^{nl} = \frac{h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} [\Omega_y] + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_1}{\partial Z} \left[ (R - (a + Z) \cos \theta) \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \\ + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_2}{\partial Z} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \end{array} \right. \quad (\text{E.16})$$

Il convient alors de rajouter au tenseur des déformations du 1<sup>er</sup> ordre (voir Eq. (E.13)) les termes de l'Eq. (E.16) :

$$\begin{cases}
 \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left[ \frac{\partial U_o}{\partial \phi} + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} - (a + Z) \cos \theta \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \Omega_x + \frac{\partial u}{\partial \phi} - w \cos \theta + v \sin \theta \right. \\
 \left. + \frac{h_1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left[ \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} \right] + \frac{h_2}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \left[ \frac{\partial \Omega_z}{\partial \phi} (R - 2(a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial U_o}{\partial \phi} - W_o + (a + Z) \sin \theta \frac{\partial \Omega_y}{\partial \phi} \right] \right. \\
 \left. + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h_1}{\partial \phi} \left[ \Omega_y (R - (a + Z) \cos \theta) + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \right. \\
 \left. + \frac{1}{(R - (a + Z) \cos \theta)^2} \frac{\partial h_2}{\partial \phi} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \right. \\
 \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial Z} \\
 2\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( -(a + Z) \Omega_y + (a + Z) \frac{\partial \Omega_x}{\partial \phi} + \cos \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \sin \theta \left( R \Omega_z - U_o - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\
 + \frac{1}{a + Z} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin \theta u \right) \\
 (a + Z) \frac{-h_1 \sin \theta + h_2 \cos \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} [\Omega_y] + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \left[ (R - (a + Z) \cos \theta) \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \\
 + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \\
 2\varepsilon_{\phi z} = \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \sin \theta \left( R \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right) + \cos \theta \left( -R \Omega_z + U_o + \frac{\partial W_o}{\partial \phi} \right) \right) \\
 + \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} + \cos \theta u \right) \\
 \frac{h_1 \cos \theta + h_2 \sin \theta}{R - (a + Z) \cos \theta} [\Omega_y] + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_1}{\partial Z} \left[ (R - (a + Z) \cos \theta) \Omega_y + \frac{\partial V_o}{\partial \phi} \right] \\
 + \frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial h_2}{\partial Z} \left[ R \Omega_z - \frac{\partial W_o}{\partial \phi} - U_o - (a + Z) \sin \theta \Omega_y \right] \\
 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{a + Z} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial Z}
 \end{cases} \quad (\text{E.17})$$

**Remarque** : Pour un tuyau droit :  $s \rightarrow X$  et  $R \rightarrow +\infty$  ce qui implique que :  $\frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \sim \frac{1}{R}$ . Ainsi les termes de la forme :  $\frac{1}{R - (a + Z) \cos \theta} \frac{\partial \bullet}{\partial \phi} \sim \frac{1}{R} \frac{\partial \bullet}{\partial \phi} = \frac{\partial \bullet}{\partial s} \rightarrow \frac{\partial \bullet}{\partial X}$ . L'écriture du tenseur des déformations en tuyau droit donné dans l'Eq. (A.7) est retrouvée.

Les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff sont considérées et permettent d'obtenir les relations suivantes : Avec les hypothèses de Love-Kirchhoff les relations sont :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{1}{R - a \cos \theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \phi} + \cos \theta u_o \right) \\
 v_1 &= -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right)
 \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

Avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli les relations sont :

$$\begin{aligned}
 \Omega_z &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial W_o}{\partial \phi} + U_o \right) \\
 \Omega_y &= -\frac{1}{R} \frac{\partial V_o}{\partial \phi}
 \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Les relations de  $v_1$  et  $\Omega_y$  restent inchangées par rapport au tube droit. Cependant pour  $u_1$  et  $\Omega_z$  des termes supplémentaires porté par l'axe apparaissent. De plus, contrairement au tube droit, les hypothèses d'Euler-Bernoulli n'annulent plus les termes en  $\frac{\partial V_o}{\partial \phi}$  dans  $\varepsilon_{\phi\theta}$ .

A priori le rayon de courbure  $R$  n'est pas forcément toujours très grand devant le rayon  $a$ . En effet il y a des cas où il y a seulement un facteur trois. Ainsi, le rapport  $a/R$  n'est pas négligeable. Il faut donc aller à des ordres plus élevés concernant ce développement limité.

L'hypothèse de coque mince est maintenue, l'épaisseur est faible devant le rayon de la tuyauterie et par conséquent faible devant le rayon de courbure également.

Comme fait précédemment, le tenseur des déformations est décomposé en une partie membranaire (indépendante de Z) et une partie de courbure (linéaire en Z) :  $\varepsilon = \varepsilon^m + Z\mathbf{k}$ .

Les développements limités à l'ordre 1 donnent :

$$\frac{1}{a+Z} = \frac{1}{a} - \frac{Z}{a^2}$$

$$\frac{1}{R - (a+Z)\cos\theta} = \frac{1}{R} + \frac{a\cos\theta}{R^2} + Z \left[ \cos\theta \left( \frac{1}{R} + \frac{a\cos\theta}{R^2} \right)^2 \right] = \alpha + Z\beta \quad (\text{E.20})$$

Pour les termes non linéaires, les hypothèses d'Euler-Bernoulli n'annulent pas tous les termes présents dans  $\varepsilon_{\phi\theta}^{nl}$  et  $\varepsilon_{\phi Z}^{nl}$  contrairement à ce qui est fait pour le tube droit. Cependant les termes supplémentaires sont négligeables devant les autres termes. Finalement, pour simplifier également le tenseur des déformations, seul les termes dans  $\varepsilon_{\phi\phi}^{nl}$  semblables à ceux du tube droit sont maintenus.

En réinjectant les hypothèses d'Euler-Bernoulli et de Love-Kirchhoff ainsi que les développements limités dans l'Eq. (E.17) le tenseur des déformations s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{\phi\phi} = (\alpha + Z\beta) \left[ \frac{\partial U_o}{\partial\phi} - a\sin\theta \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V_o}{\partial\phi^2} - a\cos\theta \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] - W_o + a\sin\theta\Omega_x + \frac{\partial u_o}{\partial\phi} - w_o\cos\theta + v_o\sin\theta \right. \\ \left. - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V_o}{\partial\phi^2} (w_o\sin\theta + v_o\cos\theta) + \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] (-w_o\cos\theta + v_o\sin\theta) \right. \\ \left. + \alpha Z \left[ -\sin\theta \frac{1}{R} \frac{\partial^2 V_o}{\partial\phi^2} - \cos\theta \frac{1}{R} \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right] + \sin\theta\Omega_x - \alpha \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial\phi^2} + \cos\theta \frac{\partial u_o}{\partial\phi} \right] - \frac{1}{a} \sin\theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial\theta} - v_o \right) \right] \right. \\ \left. + \alpha Z \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial\theta} - v_o \right) \frac{1}{R} \left( -\cos\theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial\phi^2} + \sin\theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial\phi^2} + \frac{\partial U_o}{\partial\phi} \right) \right) \right] \right] \\ \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial\theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta^2} + w_o \right) \\ 2\varepsilon_{\phi\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - \frac{Z}{a^2} \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - \frac{Z}{a} \left[ \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial\phi} + u_o\cos\theta \right) + \alpha \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta\partial\phi} + \cos\theta \frac{\partial u_o}{\partial\theta} - u_o\sin\theta \right) \right] \\ \left. + (\alpha + Z\beta) \left( \frac{a}{R} \frac{\partial V_o}{\partial\phi} + a \frac{\partial\Omega_x}{\partial\phi} + \frac{\partial v_o}{\partial\phi} - u_o\sin\theta \right) + Z\alpha \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial V_o}{\partial\phi} + \frac{\partial\Omega_x}{\partial\phi} + \sin\theta\alpha \left( \frac{\partial w_o}{\partial\phi} + u_o\cos\theta \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial\theta\partial\phi} - \frac{\partial v_o}{\partial\phi} \right) \right] \right\} \quad (\text{E.21})$$

Les quantités sont exprimées en fonction de la variable  $\phi$ . Désormais elles sont exprimées en fonction de l'abscisse curviligne  $s$  en utilisant la relation :  $\frac{1}{R} \frac{\partial \bullet}{\partial\phi} = \frac{\partial \bullet}{\partial s}$ . Afin d'effectuer ce changement les variables  $\alpha$  et  $\beta$  sont factorisé par  $\frac{1}{R}$  tel que :

$$\alpha = \frac{1}{R} \alpha' \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1}{R} \beta' \quad \text{où} \quad \alpha' = 1 + \frac{a\cos\theta}{R} \quad \text{et} \quad \beta' = \cos\theta \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{a\cos\theta}{R} \right)^2 \quad (\text{E.22})$$

Le tenseur des déformations s'écrit alors sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{ss} = \left( \alpha' + Z\beta' \right) \left[ \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} + \frac{a}{R} \sin \theta \Omega_x + \frac{\partial u_o}{\partial s} - \frac{w_o}{R} \cos \theta + \frac{v_o}{R} \sin \theta \right. \\
 \left. - \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} (w_o \sin \theta + v_o \cos \theta) + \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] (-w_o \cos \theta + v_o \sin \theta) \right. \\
 \left. + \alpha' Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} - \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] + \frac{1}{R} \sin \theta \Omega_x - \alpha' \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial s^2} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial s} \right] - \frac{1}{aR} \sin \theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right] \right. \\
 \left. + \alpha' Z \left[ -\frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \left( -\cos \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} + \sin \theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right) \right] \right] \\
 \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\
 2\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{Z}{a^2} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - \frac{Z}{a} \left[ \frac{\partial \alpha'}{\partial \theta} \left( \frac{\partial w_o}{\partial s} + \frac{u_o}{R} \cos \theta \right) + \alpha' \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \right) \right] \\
 \left. + (\alpha' + Z\beta') \left( \frac{a}{R} \frac{\partial V_o}{\partial s} + a \frac{\partial \Omega_x}{\partial s} + \frac{\partial v_o}{\partial s} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \right) + Z\alpha' \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial V_o}{\partial s} + \frac{\partial \Omega_x}{\partial s} + \frac{\sin \theta}{R} \alpha' \left( \frac{\partial w_o}{\partial s} + u_o \frac{\cos \theta}{R} \right) - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} \right) \right] \right\} \quad (\text{E.23})$$

Pour simplifier les calculs analytiques, on prend  $\alpha' = 1$  et  $\beta' = 0$ , ce qui donne le tenseur des déformations simplifié :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon_{ss} = \frac{\partial U_o}{\partial s} - a \sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} - a \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] - \frac{W_o}{R} + \frac{a}{R} \sin \theta \Omega_x + \frac{\partial u_o}{\partial s} - \frac{w_o}{R} \cos \theta + \frac{v_o}{R} \sin \theta \\
 - \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} (w_o \sin \theta + v_o \cos \theta) + \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] (-w_o \cos \theta + v_o \sin \theta) \\
 + Z \left[ -\sin \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} - \cos \theta \left[ \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right] + \frac{1}{R} \sin \theta \Omega_x - \left[ \frac{\partial^2 w_o}{\partial s^2} + \frac{\cos \theta}{R} \frac{\partial u_o}{\partial s} \right] - \frac{1}{aR} \sin \theta \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \right. \\
 \left. - \frac{1}{a} \left( \frac{\partial w_o}{\partial \theta} - v_o \right) \left( -\cos \theta \frac{\partial^2 V_o}{\partial s^2} + \sin \theta \left( \frac{\partial^2 W_o}{\partial s^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial U_o}{\partial s} \right) \right) \right] \\
 \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{a} \left( w_o + \frac{\partial v_o}{\partial \theta} \right) - \frac{Z}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta^2} + w_o \right) \\
 2\varepsilon_{s\theta} = \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{a}{R} \frac{\partial V_o}{\partial s} + a \frac{\partial \Omega_x}{\partial s} + \frac{\partial v_o}{\partial s} - u_o \frac{\sin \theta}{R} \\
 + Z \left[ \frac{\partial \Omega_x}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial V_o}{\partial s} - \frac{1}{a} \left( 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial \theta \partial s} - \frac{\partial v_o}{\partial s} + \frac{1}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R} \left( \sin \theta \frac{\partial w_o}{\partial s} - \frac{\cos \theta}{a} \frac{\partial u_o}{\partial \theta} + \frac{\sin \theta}{a} u_o + \frac{\cos \theta \sin \theta}{R} u_o \right) \right] \right\} \quad (\text{E.24})$$

## F . Méthodologie entreprise pour le calcul formel

Le calcul formel a été utilisé à maintes reprises pour déterminer plusieurs quantités telles que les efforts généralisés, la surface et l'inertie de la section transverse. Il a également permis de vérifier certains calculs fait à la main comme le calcul de la matrice de masse. Tous les calculs sont effectués dans un premier temps avec la librairie sympy de python qui permet de manipuler facilement l'ensemble des variables et de faire les produits matriciels simplement. Cependant pour des calculs comprenant de longues expressions, sympy ne parvient pas à converger rapidement, l'outil WxMaxima a alors été utilisé largement. Les termes à intégrer sont alors obtenus par sympy puis sont intégrés dans WxMaxima. De plus ce dernier permet de sortir le résultat de l'intégration directement au format Fortran 90, prêt à être utilisé dans Europlexus, ce qui a permis un gain temps de développement non négligeable.

La méthodologie utilisée pour déterminer les efforts généralisés associés aux degrés de liberté de poutre et de tout les modes de Fourier est décrite dans cette annexe. La même démarche est réalisée pour le tube droit ou le tuyau coudé avec ou sans couplage.

L'objectif est d'intégrer le tenseur de Cauchy  $\sigma$  doublement contracté avec la déformation virtuelle  $\delta\varepsilon$  ( $\sigma : \delta\varepsilon$ ). Ces deux tenseurs sont écrits sous la forme d'une matrice colonne. Le déplacement virtuel  $\delta\mathbf{u}$  présent dans  $\delta\varepsilon$  ne peut pas être intégré puisqu'il correspond à une fonction test et permet en le mettant en facteur d'identifier les efforts généralisés. L'idée est de décomposer, comme dans le dernier chapitre sur les méthodes numériques, le tenseur des déformations  $\varepsilon(X, \theta, Z)$  en une matrice  $\mathbf{P}(X, \theta, Z)$  et une matrice colonne des degrés de liberté  $\mathbf{u}_{ddl}$  tel que :

$$\varepsilon = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{ddl} \quad ; \quad \delta\varepsilon = \mathbf{P} \cdot \delta\mathbf{u}_{ddl} \quad (\text{F.1})$$

Il suffit ensuite de construire la matrice  $\mathbf{P}$  selon le tenseur des déformations choisi. Pour les cas linéaires la seule matrice  $\mathbf{P}$  est suffisante. Cependant pour les cas non linéaire qui prennent en compte le couplage, une nouvelle matrice  $\mathbf{P}_{supp}$  doit être introduite. En effet cette dernière doit contenir également des degrés de libertés puisque  $\varepsilon$  n'est plus une forme linéaire des degrés de libertés. Ceci permet d'obtenir les relations suivantes :

$$\varepsilon = \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{ddl} \quad ; \quad \delta\varepsilon = \mathbf{P}_{supp} \cdot \delta\mathbf{u}_{ddl} \quad (\text{F.2})$$

Pour le cas linéaire  $\mathbf{P}_{supp}$  est égale à  $\mathbf{P}$ . La loi de comportement permet de déterminer le tenseur des contraintes telle que :

$$\sigma = \mathbf{C} \cdot \varepsilon \quad (\text{F.3})$$

La matrice colonne des efforts généralisés  $\mathbf{F}_{gen}$  est alors déterminée après intégration :

$$\mathbf{F}_{gen} = \int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{C} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{u}_{ddl})^T \cdot \mathbf{P}_{supp} \, ad\theta dZ \quad (\text{F.4})$$

La  $i^{ème}$  ligne de  $\mathbf{F}_{gen}$  correspond à l' $i^{ème}$  effort généralisé.

De cette façon, tous les efforts généralisés sont déterminés de façon exacte et sont ensuite stockés dans une routine spécifique car leurs expressions, pour certains d'entre eux, est très longues.





## H . Aide intégration en $\theta$ pour $N$ modes de Fourier

Cette annexe, est une aide de calcul pour le lecteur qui souhaiterait faire des calculs avec plusieurs modes à la main rapidement.

Soit  $n$  un entier naturel, la formule de Moivre donne les deux relations :

$$\begin{cases} \cos(n\theta) &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \\ \sin(n\theta) &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \end{cases} \quad (\text{H.1})$$

Ainsi  $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$  les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} \sin(n\theta) \sin(k\theta) &= -\frac{1}{2}(\cos((n+k)\theta) - \cos((n-k)\theta)) \\ \cos(n\theta) \cos(k\theta) &= \frac{1}{2}(\cos((n+k)\theta) + \cos((n-k)\theta)) \\ \cos(n\theta) \sin(k\theta) &= \frac{1}{2}(\sin((n+k)\theta) - \sin((n-k)\theta)) \end{cases} \quad (\text{H.2})$$

Finalement les intégrations se simplifient :

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \sin(k\theta) \, d\theta &= \delta_k^n \pi \\ \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \cos(k\theta) \, d\theta &= \delta_k^n (\pi + \delta_0^n \pi) \\ \int_0^{2\pi} \cos(n\theta) \sin(k\theta) \, d\theta &= 0 \end{cases} \quad (\text{H.3})$$

où  $\delta_k^n$  désigne le symbole de Kronecker.

## I . Réactualisation du rayon du coude

Le but de cette annexe est de proposer une méthodologie afin de réactualiser le rayon de courbure au cours du calcul.

Trois points, notés  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont considérés. Ces trois points ne sont pas colinéaires.

Seuls des tubes coudés dans un plan sont à l'étude. Dans ce plan les coordonnées des points considérés non colinéaires sont notés :  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$ .

La position du centre du cercle est notée  $(x_c, y_c)$  et son rayon  $R$ . L'équation d'un cercle s'écrit alors pour chaque point  $P(x, y)$  appartenant au cercle :

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = R^2 \quad (I.4)$$

qui peut s'écrire sous la forme :

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0 \quad (I.5)$$

Par identification les relations suivantes sont obtenues :

$$\begin{cases} x_c = -a \\ y_c = -b \\ R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \end{cases} \quad (I.6)$$

Il faut ainsi déterminer les coefficients  $a, b$  et  $c$ . Pour ce faire le système 3x3 suivant est résolu :

$$\begin{cases} 2x_1a + 2y_1b + c + x_1^2 + y_1^2 = 0 \\ 2x_2a + 2y_2b + c + x_2^2 + y_2^2 = 0 \\ 2x_3a + 2y_3b + c + x_3^2 + y_3^2 = 0 \end{cases} \quad (I.7)$$

En notant  $d_i = x_i^2 + y_i^2$  les coefficients  $a, b$  et  $c$  s'expriment comme :

$$\begin{cases} a = \frac{(d_2 - d_1)(y_3 - y_1) - (d_3 - d_1)(y_2 - y_1)}{2[(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)]} \\ b = \frac{d_1 - d_2 - 2(x_2 - x_1)a}{2(y_2 - y_1)} \\ c = -d_1 - 2y_1b - 2x_1a \end{cases} \quad (I.8)$$

Attention, pour cette solution il faut vérifier les deux conditions pour ne pas diviser par zéro :

$$[(x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)] \neq 0 \quad ; \quad y_2 - y_1 \neq 0 \quad (I.9)$$

Le produit vectoriel entre AB et BC non nul, donne la condition :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) \neq 0 \quad (I.10)$$

Or  $(x_2 - x_1)(y_3 - y_2) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_2) = (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)$  donc cette condition est bien vérifiée pour des vecteurs non colinéaires.

Cependant, la condition  $y_2 - y_1 \neq 0$  n'est pas forcément vérifiée. Il convient alors de résoudre le système dans le cas où  $y_1 = y_2$ , ce qui donne :

$$\begin{cases} a = \frac{d_1 - d_2}{2(x_2 - x_1)} \\ b = \frac{d_1 - d_3 - 2(x_3 - x_1)a}{2(y_3 - y_1)} \\ c = -d_1 - 2y_1b - 2x_1a \end{cases} \quad (I.11)$$

Il y a encore deux conditions à vérifier :

$$x_2 - x_1 \neq 0 \quad ; \quad y_3 - y_1 \neq 0 \quad (I.12)$$

La condition de non colinéarité impose :

$$((x_3 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_3 - y_1)) \neq 0 \quad (I.13)$$

Ce qui implique l'inégalité :

$$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \neq 0 \quad (1.14)$$

Finalement les relations d'inégalités données ci-après doivent être vérifiées :

$$(y_3 - y_1) \neq 0 \quad ; \quad (x_2 - x_1) \neq 0 \quad (1.15)$$

**Remarque 1 :** Dans le cas présent  $y_1 = y_2$  et si  $x_1 = x_2$  alors le point A est confondu avec le point B. Donc l'élément n'existe pas ce qui est impossible donc cette condition est toujours vérifiée.

**Remarque 2 :** Si  $y_1 = y_3$  sachant que  $y_1 = y_2$  alors les trois points A,B et C sont alignés. Ce n'est pas possible non plus car la condition de non colinéarité a été vérifiée.

Deux éléments  $E_1$  et  $E_2$  sont considérés. L'élément  $E_1$  est situé à gauche et a deux nœuds au point A et B. L'élément  $E_2$  est quant à lui à droite et à un nœud en commun avec  $E_1$  le nœud B puis a un nœud C à l'autre extrémité.

Un produit vectorielle entre les vecteurs AB et BC est effectué et l'angle du coude  $\beta$  entre ces deux vecteurs est déterminé. Si  $\beta < \beta_{min}$  alors l'élément est considéré comme un tube droit sinon comme un tube coudé avec un rayon de courbure de  $\beta$ .

Si le tube est coudé il faut tout d'abord déterminer le plan dans lequel il y a le coude.

Les points  $A(x_A^G, y_A^G, z_A^G)$ ,  $B(x_B^G, y_B^G, z_B^G)$  et  $C(x_C^G, y_C^G, z_C^G)$  sont exprimés dans le repère général. Le plan contenant le coude  $\mathcal{P}_C$ , est engendré par  $\mathbf{AB}$  et  $\mathbf{BC}$  et  $\mathbf{n}$  la normale à ce plan.  $\mathbf{AB}$  et  $\mathbf{BC}$  n'étant en général pas orthogonaux, la base  $(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{n})$  n'est pas orthogonale.

Le vecteur  $\mathbf{n}(n_1, n_2, n_3)$  doit satisfaire :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{AB} = 0 \quad ; \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{BC} = 0 \quad (1.16)$$

La composante  $n_1$  peut être fixée et les deux autres composantes s'en déduisent :

$$\begin{cases} n_2 = \frac{-(x_C^G - x_B^G)(z_B^G - z_A^G) + (x_B^G - x_A^G)(z_C^G - z_B^G)}{(y_C^G - y_B^G)(z_B^G - z_A^G) - (y_B^G - y_A^G)(z_C^G - z_B^G)} \\ n_3 = \frac{-(x_B^G - x_A^G)n_1 - (y_B^G - y_A^G)n_2}{z_B^G - z_A^G} \end{cases} \quad (1.17)$$

Il faut vérifier les conditions pour ne pas annuler le dénominateur, mais c'est la même démarche que celle effectuée précédemment.

Ainsi la matrice de passage  $\mathcal{P}_C$  est :

$$\mathcal{P}_C = \begin{pmatrix} x_B^G - x_A^G & x_C^G - x_B^G & n_1 \\ y_B^G - y_A^G & y_C^G - y_B^G & n_2 \\ z_B^G - z_A^G & z_C^G - z_B^G & n_3 \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

L'orthogonalisation de Gram-Schmidt permet d'orthogonaliser la base du coude et en se plaçant au point B, comme centre du repère, ce qui suit est orthonormale :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{BA}}{\|\mathbf{BA}\|} \\ \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{BC} - \frac{\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC}}{\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BA}} \mathbf{BA}}{\|\mathbf{BC} - \frac{\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BC}}{\mathbf{BA} \cdot \mathbf{BA}} \mathbf{BA}\|} \\ \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|} \end{cases} \quad (1.19)$$



## Bibliographie

- [1] *Pipe Whip British energy, R3 impact assessment procedure, vol2*, 2008.
- [2] M. Abo-Elkhier. A displacement-based pipe elbow element. *Computers and Structures*, 37(1) :9–15, 1988.
- [3] A. A.Labuschagne, N. F. J. Van Rensburg, and A. J. Van der Merwe. Comparison of linear beam theories. *Mathematical and Computer Modelling*, 49 :20–30, 2009.
- [4] A. Alliche. *Théorie Des Poutres*. UPMC, 2005.
- [5] M. Amabili. *Nonlinear Vibrations and Stability of Shells and Plates*. Cambridge University Press, New York, USA, 2008.
- [6] D. Ashwell and A. Sabir. Limitations of certain curved finite elements when applied to arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(2) :133–139, 1971.
- [7] D. Ashwell, A. Sabir, and T. Roberts. Further studies in the application of curved finite elements to circular arches. *International Journal of Mechanical Sciences*, 13(6) :507–517, 1971.
- [8] C. R. Babu and G. Prathap. A linear thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(7) :1313–1328, 1986.
- [9] K. J. Bathe and C. Almeida. A simple and effective pipe elbow element-interaction effects. *Journal of Applied Mechanics*, 49 :195–171, 1982.
- [10] J. Batoz and G. Dhatt. *Modélisation des structures par éléments finis, volume 1 : Solides élastiques ; volume 2 : Poutres et plaques ; volume 3 : Coques*, editions Hermes, Paris, 1994.
- [11] M. R. Baum. The rupture of high pressure pipework : The influence of pipeline geometry on in-plane pipewhip. *Journal of Loss Prevention and Process Industry*, 9(2) :147–159, 1996.
- [12] T. Belytschko, W. K. Liu, B. Moran, and K. I. Elkodary. *Non Linear Finite Elements For Continua And Structures 2nd Edition*. John Wiley and Sons, 2014.
- [13] M.-N. Berton. A simplified method for elastic calculation for pipes based on the beam theory and allowing for section ovalization. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 51 :53–83, 1992.
- [14] R. Blevins. *Formulas for natural frequency and mode shape*. Krieger publishing company, 1979.
- [15] L. G. Brazier and G. B. A. R. Committee. The flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections. *Proceedings of the Royal Society, Series A* 116 :104–114, 1926.
- [16] C. R. Calladine. *Theory Of Shell Structures*. Press Syndicate of the University of Cambridge, 1983.
- [17] G. Cantin. Rigid body motions in curved finite elements. *AIAA Journal*, 8(7) :1252–1255, 1970.
- [18] G. Cantin and R. W. Clough. A curved, cylindrical-shell, finite element. *AIAA Journal*, 6(6) :1057–1062, 1968.
- [19] J. L. Carbonnier and M. N. Berton. Stress indices and flexibility factors in thin elbow. In *AIEA Specialist Meeting, Paris, France*, 1982.
- [20] P. Caumette, J. L. Garcia, and A. Martin. Experimental studies of pwr primary piping under loca conditions. *Nuclear Engineering and Design*, 61 :197–208, 1980.
- [21] CEA and EC/JRC. *Europlexus USER'S MANUAL*. CEA and EC/JRC, 2020.
- [22] J. K. Choi and J. K. Lim. Simple curved shear beam elements. *Communications in numerical methods in engineering*, 9(8) :659–669, 1993.
- [23] N. Cyrus, R. Eppink, R. Fulton, and J. Walz. Accuracy of finite element approximations to structural problems. Technical Report NASA TN 0-5728, NASA, 1970.
- [24] F. Daude and P. Galon. A finite-volume approach for compressible single- and two-phase flows in flexible pipelines with fluid-structure interaction. *Journal of Computational Physics*, (362) :375–408, 2018.
- [25] F. Daude and P. Galon. Ch. 7.e. Reactor Pipelines. In A. Shams, editor, *Computational Fluid-Structure Interaction for Nuclear Reactor Applications*, pages 1–32. Elsevier (In Revision), 2022.

- [26] T. De Soza. Modélisation coque\_3d. Documentation code\_aster, 2015.
- [27] T. De Soza. Modélisations DKT - DST - Q4G - DKTG - Q4GG. Documentation code\_aster, 2015.
- [28] A. Delaplace, F. Gatuingt, and F. Ragueneau. *Mécanique Des Structures*. DUNOD, 2008.
- [29] M. Dia. *Hexahedral and prismatic solid-shell finite elements for nonlinear analysis of thin and medium thick structures*. PhD thesis, Université de Lyon, 2020.
- [30] L. H. Donnell. Stability of thin-walled tubes under torsion. Technical report, 1935.
- [31] S. Drapier. *Mécaniques Des Structures Et Approximations Numériques*. Mines Saint-Étienne, 2014.
- [32] D. Durville. Contact-friction modeling within elastic beam assemblies: an application to knot tightening. *Computational Mechanics*, 49 :687–707, 2012.
- [33] C. A. Felippa, Q. Guo, and K. Park. Mass matrix templates : general description and 1d examples. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 22(1) :1–65, 2015.
- [34] G. E. Findlay and J. Spence. Flexibility of smooth circular curved tubes with flanged end-constraints. *International Journal of Pressure Vessels and piping*, 7 :13–29, 1979.
- [35] W. Flügge. *Stresses in Shells*. Springer Berlin Heidelberg, Germany, 1973.
- [36] E. M. M. Fonseca, F. J. M. Q. de Melo, and C. A. M. Oliveira. Determination of flexibility factors in curved pipes with end restraints using a semi-analytical formulation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 79(12) :829–840, 2002.
- [37] E. M. M. Fonseca, F. J. M. Q. de Melo, and C. A. M. Oliveira. Numerical analysis of piping elbows for in-plane bending and internal pressure. *Thin-Walled Structures*, 44 :393–398, 2006.
- [38] Z. . Friedman and J. Kosmatka. An accurate two-node finite element for shear deformable curved beams. *International Journal for numerical methods in engineering*, 41(3) :473–498, 1998.
- [39] P. Galon and M. Lepareux. Documentation théorique : Modélisation des tuyauteries dans europlexus. Note CEA/DM2S/SEMT/DYN/RT, 2001.
- [40] S. Gao. *Development of a new 3D beam finite element with deformable section*. PhD thesis, Insa de Lyon, 2017.
- [41] J. L. Garcia, P. Chouard, and E. Sermet. Experimental studies of pipe impact on rigid restraints and concrete slabs. *Nuclear Engineering and Design*, 77 :357–368, 1984.
- [42] T. G. Ghazijahani and H. Showkati. Experiments on cylindrical shells under pure bending and external pressure. *Journal of Constructional Steel Research*, 88 :109–122, 2013.
- [43] S. M. Han, H. Benaroya, and T. Wei. Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225 :935–988, 1999.
- [44] H. D. Hibbit and E. K. Leung. An approach to detailed inelastic analysis of thin walled pipelines. *ASME Special Pub., "Nonlinear Finite Element Analysis of Shells"*, 1981.
- [45] Y. L. Hua, T. X. Yu, and S. R. Reid. Double-hinge modes in the dynamic response of plastic cantilever beams subjected to step loading. *International Journal of Impact Engineering*, 7(4) :401–413, 1988.
- [46] J. R. Hughes and W. K. Liu. Non-linear finite element analysis of shells-part I. three-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 26 :331–362, 1981.
- [47] J. R. Hughes and W. K. Liu. Non-linear finite element analysis of shells-part II. two-dimensional shells. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, 27 :167–181, 1981.
- [48] T. Hughes, W. Liu, and I. Levit. Nonlinear dynamic finite element analysis of shells. In *Nonlinear finite element analysis in structural mechanics*, pages 151–168. Springer, 1981.
- [49] T. J. Hughes, M. Cohen, and M. Haroun. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. *Nuclear Engineering and design*, 46(1) :203–222, 1978.
- [50] A. Kanarachos and R. N. Koutsides. A new approach of shell displacements in a beam-type pipe element. In *Transactions of the 8th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 8), Bruxelles, Belgique*, pages 339–344, 1985.

- [51] S. A. Karamanos. Bending instabilities of elastic tubes. *International Journal of Solids and Structures*, 39 :2059–2085, 2001.
- [52] S. A. Karamanos. Mechanical behavior of steel pipe bends : An overview. *Journal of Pressure Vessel Technology*, page 16, 2015.
- [53] S. A. Karamanos and J. L. Tassoulas. Tubular members I : stability analysis and preliminary results. *Journal of Engineering Mechanics*, 122 :64–71, 1996.
- [54] S. Key. Transient response by time integration : review of implicit and explicit operators. *Advanced structural dynamics*, pages 71–95, 1980.
- [55] F. Kikuchi and K. Tanizawa. Accuracy and locking-free property of the beam element approximation for arch problems. *Computers & Structures*, 19(1-2) :103–110, 1984.
- [56] G. Kirchhoff. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheinbe. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1850(40) :51–88, 1850.
- [57] W. T. Koiter. On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Koninkl. Ned. Akad. van Wetenschappen, Series B*, 69 :1–54, 1966.
- [58] R. Kurihara, S. Ueda, T. Isozaki, R. Kato, K. Kato, and S. Miyazono. Jaeri-m-87-135. In *Pipe rupture test results : cross-over leg pipe whip test under pwr loca conditions*, 1987.
- [59] P.-G. Lee and H.-C. Sin. Locking-free curved beam element based on curvature. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(6) :989–1007, 1994.
- [60] A. W. Leissa. Vibration of shells. Technical Report NASA SP-288, NASA, 1973.
- [61] A. E. H. Love. Xvi. the small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. (A.)*, (179) :491–546, 1888.
- [62] A. E. H. Love. *A Treatise On The Mathematical Theory Of Elasticity*. Constable and Company, 1926.
- [63] L. Madureira and F. J. M. Q. de Melo. Stress analysis of curved pipes with a hybrid formulation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 81(3) :243–249, 2004.
- [64] T. C. Michel, A. R. Veerappan, and S. Shanmugam. Suitability of assumed cross sections to include ovality in the limit analysis of pipe bends under in plane closing moment and internal pressure. *Thin-Walled Structures*, 122 :545–553, 2018.
- [65] I. Micheli and P. Zanaboni. An analytical validation of simplified methods for the assessment of pipe whip characteristics. Ansaldo Nuclear Division, Genoa, Italy, 2003.
- [66] C. Militello and A. E. Huespe. A displacement-based pipe elbow element. *Computers and Structures*, 29(2) :339–343, 1988.
- [67] A. Millard. An enriched beam finite element for accurate piping analysis. In *Transactions of the 14th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology (SMiRT 14)*, Lyon, France, pages 171–182, 1997.
- [68] A. Millard and A. Hoffmann. Pipe whip analysis using the TEDEL code. In *Conference on pipework design and operation, London, United Kingdom*, page 17, 1995.
- [69] A. Millard and R. Roche. Elementary solutions for the propagation of ovalization along straight pipes and elbows. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 16 :101–129, 1984.
- [70] K. M. Mushtari and K. Z. Galimov. Nonlinear theory of thin elastic shells. 1961.
- [71] P. Naghdi. On the theory of thin elastic shells. *Quarterly of applied Mathematics*, 14(4) :369–380, 1957.
- [72] P. Naghdi. Foundations of elastic shell theory. progress in solid mechanics, 4. Edited by Sneddon, IN North-Holland, 1963.
- [73] P. M. Naghdi. The theory of shells and plates. In *Linear theories of elasticity and thermoelasticity*, pages 425–640. Springer, 1973.
- [74] V. V. Novozhilov. *Thin shell theory*. P. Noordhoff, 1964.
- [75] H. Ohtsubo and H. Watanabe. Stress analysis of piping bends by ring elements. *Journal of Pressure Vessel Technology*, 100 :112–122, 1978.



- [76] J. Oliver and E. Onate. A total Lagrangian formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. part I. two-dimensional problems : Shell and plate structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20 :2253–2281, 1984.
- [77] Z. Plocek, V. Kanicky, P. Havlik, V. Salajka, J. Novotny, and P. Stepanek. laea-cn-155-009p. In *Pipe whip restraint – Protection for safety related equipment of WWER nuclear power plants*, 2007.
- [78] S. Potapov and P. Galon. Modelling of aquitaine ii pipe whipping test with the europlexus fast dynamic code. *Nuclear Engineering and Design*, 235 :2045–2054, 2005.
- [79] G. Prathap. The curved beam/deep arch/finite ring element revisited. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(3) :389–407, 1985.
- [80] G. Prathap and C. R. Babu. An isoparametric quadratic thick curved beam element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(9) :1583–1600, 1986.
- [81] N. K. Prinja. Combined beam elements for large dynamic motion of whipping pipes with fluid -structure interaction. *Finite Elements in Analysis and Design*, 11 :117–152, 1992.
- [82] J. M. Proix and P. Massin. Eléments finis de tuyau droit et courbe avec ovalisation, gonflement et gauchissement en élasto-plasticité. Note EDF, 2013.
- [83] S. R. Reid and B. Wang. Large-deflection analysis of whipping pipes. i : Rigid, perfectly-plastic model. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(8) :881–887, 1995.
- [84] S. R. Reid, B. Wang, and M. Aleyaasin. Structural modelling and testing of failed high energy pipe runs : 2d and 3d pipe whip. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 88 :189–197, 2011.
- [85] S. R. Reid, B. Wang, and T. X. Yu. Yield mechanisms of a bent cantilever beam subjected to a suddenly applied constant out-of-plane tip force. *International Journal of Impact Engineering*, 16(1) :49–73, 1995.
- [86] S. R. Reid, T. X. Yu, J. L. Yang, and G. G. Corbett. Dynamic elastic-plastic behaviour of whipping pipes : experiments and theoretical model. *International Journal of Impact Engineering*, 18(7-8) :703–733, 1996.
- [87] E. Reissner. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. 1945.
- [88] E. Reissner. On finite bending of pressurized tubes. *Journal of Applied Mechanics*, ASME 26 :386–392, 1959.
- [89] R. E. Roemer. Predictions of large deformation pipe whip and barrier impact : a simplified approach. In *Pressure Vessels & Piping Division of the American Society of Mechanical Engineers for presentation at the Century 2 Pressure Vessels & Piping Conference, San Francisco*, 1980.
- [90] D. Ryckelynck. *Introduction À La Théorie Des Poutres*. Mines ParisTech, 2012.
- [91] R. Salahifar and M. Mohareb. Generalized theory for the dynamic analysis of thin shells with application to circular cylindrical geometries. *Thin-Walled Structures*, 139 :347–361, 2019.
- [92] J. Salençon. *Mécanique des milieux continus, Tome II. Elasticité-Milieux curvilignes*. ellipses, 1988.
- [93] W. J. Stronge and T. X. Yang. Dynamic models for structural plasticity. *Springer-Verlag*, page 80, 1993.
- [94] K. S. Surana and R. M. Sorem. Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 28 :43–73, 1989.
- [95] H. T. Tang and R. B. Duffey. Piping response testing associated with pipe rupture. *Nuclear Engineering and Design*, 89 :477–491, 1985.
- [96] H. I. Thailer and D. H. Cheng. In plane bending of a u-shaped circular tube with end-constraints. *Journal of Engineering for Industry*, pages 792–796, 1970.
- [97] C. Thinvongpituk, S. Poonaya, S. Choksawadee, and M. Lee. The ovalisation of thin-walled circular tubes subjected to bending. In *Proceedings of the World Congress on Engineering, London*, volume 2, 2008.
- [98] G. Thomson and J. Spence. The influence of end constraints on smooth pipe bends. In *SMIRT 6, Paris*, 1981.
- [99] S. Timoshenko. *Theory Of Plates And Shells*. McGraw Hill, New-York, USA, 1959.
- [100] S. Ueda. Moment-rotation relationship considering flattening of pipe due to pipe whip loading. *Nuclear Engineering and Design*, 85 :251–259, 1985.

- [101] V. Vlasov. Basic differential equations in general theory of elastic shells. *Prikladnaia Matematika I Mekhanika*, 8(NACA-TM-1241), 1951.
- [102] T. Von Karman. Uber di formuanderung dunnwandiger rohre. *Zeit Des Vereines Deutcher Ingenieure*, 55 :1889–1895, 1911.
- [103] B. Wang, T. X. Yu, and S. R. Reid. Out-of-plane impact at the tip of a right-angled bent cantilever. *Journal of Applied Mechanics*, 62 :887–892, 1995.
- [104] K. Washizu. *Variational Methods In Elasticity And Plasticity*. Pergamon Press, 1975.
- [105] K. Weicker, R. Salahifar, and M. Mohareb. Shell analysis of thin walled pipes. Part I - Field equations and solution. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87 :402–413, 2010.
- [106] K. Weicker, R. Salahifar, and M. Mohareb. Shell analysis of thin walled pipes. Part II - Finite element formulation. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 87 :414–423, 2010.
- [107] J. F. Whatham and J. J. Thompson. The bending and pressurizing of pipe bends with flanged tangents. *Nuclear Engineering and Design*, 54 :17–28, 1979.
- [108] J. D. Wood. The flexure of a uniformly pressurized, circular, cylindrical shell. *Journal of Applied Mechanics*, ASME 25 :453–458, 1958.
- [109] S. R. Wu and L. Gu. *[Introduction To The Explicit Finite Element Method For Nonlinear Transient Dynamics*. John Wiley and Sons, 2012.
- [110] Y. Yamada and Y. Ezawa. On curved finite elements for the analysis of circular arches. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 11(11) :1635–1651, 1977.
- [111] A. M. Yan, R. J. Jospin, and D. H. Nguyen. An enhanced pipe elbow element - application in plastic limit analysis of pipe structures. *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(3) :409–431, 1999.
- [112] S.-Y. Yang and H.-C. Sin. Curvature-based beam elements for the analysis of Timoshenko and shear-deformable curved beams. *Journal of Sound and Vibration*, 187(4) :569–584, 1995.
- [113] N. Zaccari. High energy pipe break analysis for the pipelines of a vver nuclear power plants : No standard case. *Engineering Failure Analysis*, 56 :241–256, 2015.
- [114] N. Zaccari and R. Giuliana. High energy pipe break analysis for the pipelines of a vver nuclear power plants. In *Sixth International Conference on Engineering Failure Analysis, Lisbon, Portugal*, 2014.
- [115] Z. Zhang. Modelling and simulation for cross-sectional ovalization of thin-walled tubes in continuous rotary straightening process. *International Journal of Mechanical Sciences*, 153-154 :83–102, 2019.
- [116] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, and J. Z. Zhu. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Elsevier, 2005.