HAL open science

Variations autour de la platitude en géométrie de Berkovich

Mathieu Daylies

▶ To cite this version:

Mathieu Daylies. Variations autour de la platitude en géométrie de Berkovich. Géométrie algébrique [math.AG]. Sorbonne Université, 2022. Français. NNT : 2022SORUS373 . tel-03966965

HAL Id: tel-03966965

https://theses.hal.science/tel-03966965v1

Submitted on 1 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École doctorale de sciences mathématiques de Paris centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Mathieu Daylies

Variations autour de la platitude en géométrie de Berkovich

---

dirigée par Antoine Ducros

Soutenue le 13 septembre 2022 devant le jury composé de :

M. Omid Amini	École Polytechnique	Examinateur
M. Antoine Ducros	Sorbonne Université	Directeur
M. Mathieu Florence	Sorbonne Université	Examinateur
M. Bernard le stum	Université de Rennes 1	Rapporteur
Mme Ariane Mézard	Sorbonne Université	Examinatrice
M. Jérôme Poineau	Université de Caen Normandie	Examinateur

Institut de mathématiques de Jussieu-
Paris Rive gauche. UMR 7586.
Boîte courrier 247
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Sorbonne Université.
École doctorale de sciences
mathématiques de Paris centre.
Boîte courrier 290
4 place Jussieu
75 252 Paris Cedex 05

Résumé

Nous énonçons des résultats de descente relative à la topologie sur les espaces de Berkovich dont les flèches couvrantes sont plates et surjectives. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une catégorie fibrée donnée soit un champ pour cette topologie. Ensuite, nous utilisons ce résultat pour montrer que le foncteur tiré en arrière de la catégorie des S-espaces vers la catégorie des S'-espaces munis de données de descente est pleinement fidèle, et nous montrons l'effectivité de certaines données de descente au dessus de S'.

Nous montrons que la propriété d'être algébrique pour un morphisme entre l'analytification de deux schémas est une propriété locale pour la topologie sus-citée.

Enfin, nous énonçons un théorème de changement de base propre et un théorème de changement de base plat pour la cohomologie cohérente.

Mots-clés

Espaces de Berkovich, théorie de la descente, champs analytiques, algébrisation, cohomologie propre, changement de base, platitude.

Variations around flatness in Berkovich analytic geometry

Abstract

We give sufficient conditions for a given fibered category over the category of k-affinoid algebras to be a stack for the Berkovich analogue of the faithfully-flat topology. We give some applications to the faithfully flat descent of morphisms and show that some descent data are always effective.

We show that the property of being algebraic for a morphism between the analytification of two schemes is a local property for the faithfully-flat topology.

We also give a flat and a proper base change theorem for coherent cohomology.

Keywords

Berkovich spaces, descent theory, analytics stacks, algebrization, proper cohomology, base change, flatness.

Table des matières

Introduction **7**

0.1 Un aperçu des thèmes abordés dans ce manuscrit 7

0.2 Contenu de la thèse et recherches effectuées 17

0.2.1 Chapitre 1 : Introduction à la géométrie analytique de Berkovich . . 17

0.2.2 Chapitre 2 : Descente fidèlement plate et algébrisation en géométrie de Berkovich 17

0.2.3 Intermède infructueux 1 20

0.2.4 Intermède infructueux 2 21

0.2.5 Chapitre 3 : Changement de base pour la cohomologie cohérente analytique 21

1 Introduction à la géométrie analytique de Berkovich **25**

1.1 Analyse non archimédienne 26

1.2 Spectre de Berkovich d'un anneau de Banach 29

1.3 Espaces affinoïdes 30

1.4 Modules et algèbres finis sur une algèbre k-affinoïde 33

1.5 Espaces k-affinoïde, théorie locale 33

1.6 Faisceau structural 35

1.7 Anneaux locaux 36

1.8 Bord et intérieur 37

1.9 Espaces analytiques globaux 38

1.10 Modules cohérents 42

1.11 Dimension 42

1.12 Quelques classes de morphismes 43

1.13 Topologie de Zariski 46

1.14 Analytification et théorèmes de type GAGA 46

1.15 Propriétés topologiques 49

1.16 Fonctions méromorphes 50

1.17 Platitude 52

2 Descente fidèlement plate et algébrisation en géométrie de Berkovich 57
2.1 Introduction 58
2.1.1 Motivation 58
2.1.2 Nos méthodes 58
2.1.3 Résultats principaux et vue d'ensemble de l'article 59
2.1.4 Remerciement 62
2.1.5 Notations et rappels techniques 62
2.2 Un premier théorème champêtre 66
2.2.2 La descente effective 67
2.2.3 La pleine fidélité 72
2.3 Application à certains pseudo-foncteurs particuliers 73
2.3.1 Équivalence dans le cas des modules cohérents, pleine fidélité pour les S- espaces analytiques quelconques 73
2.3.2 La question de l'effectivité 89
2.4 Application 97
2.5 Problèmes d'algébrisation 100

3 Changement de base pour la cohomologie cohérente analytique 109
3.1 Flat base change 110
3.2 Proper base change 118

Introduction

Ce travail de thèse comporte deux volets principaux.

Le premier volet concerne des résultats de *descente* relative à la topologie sur les espaces de Berkovich dont les flèches couvrantes sont plates et surjectives. Nous montrons ainsi qu'on peut identifier trois grandes catégories de morphismes qui régissent la descente en géométrie de Berkovich. Ainsi, étudier les questions de descente en théorie de Berkovich revient bien souvent à étudier séparément sur chacune de ces classes de morphisme le bon comportement des objets considérés. Cette idée nous permet de montrer que le foncteur tiré en arrière, de la catégorie des S-espaces vers la catégorie des S'-espaces munis de données de descente est pleinement fidèle. Cette idée nous permet aussi de donner un critère d'effectivité pour certaines données de descente qui sont relativement affinoïdes au dessus de la base. Nous obtenons en outre des résultats qui concernent la descente de l'algébricité de morphismes d'espaces analytiques. En particulier, nous démontrons que la propriété d'être algébrique, pour un morphisme entre l'analytification de deux schémas, est une propriété qui est locale pour la topologie sus-citée.

Le second volet de notre travail est un résultat de changement de base propre pour la cohomologie des faisceaux cohérents sur un espace analytique. Ce théorème, qui pourrait être utile dans un futur travail était cité sans preuve dans le livre de Berkovich [4], mais il nous a semblé qu'il en méritait une, d'autant que la démonstration de son analogue schématique ne passe pas du tout tel quel en géométrie analytique.

0.1 Un aperçu des thèmes abordés dans ce manuscrit

La géométrie algébrique classique

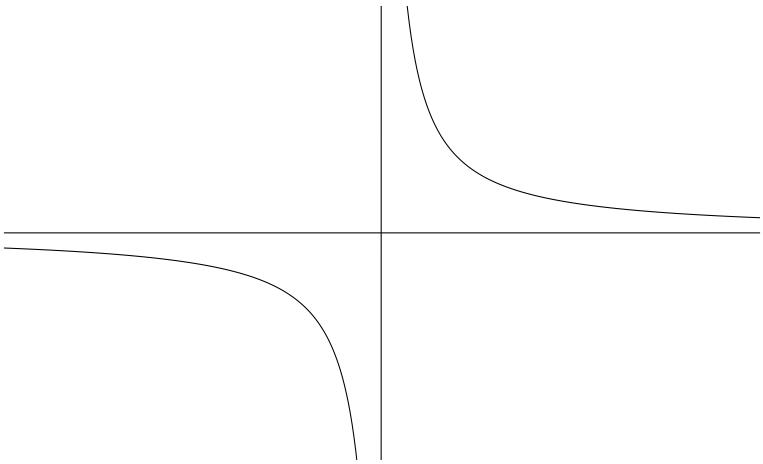
La géométrie algébrique classique est le domaine des mathématiques qui s'intéresse à des objets géométriques (courbes, surfaces,...) composés de points dont les coordonnées vérifient des équations ne faisant intervenir que des sommes et des produits. Plus précisément, considérons $k = \mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, ou $k = \mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels (tous ceux que vous connaissez si vous ne connaissez pas le premier ensemble). On fixe aussi $P_1, ..., P_m$ des polynômes à coefficient dans k qui prennent $n \in \mathbb{N}$ éléments $(x_1, ..., x_n)$ en entrée. Un exemple de tels polynômes peut-être $P(x_1, x_2) = x_1x_2 - 1$, mais

aussi $P(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^3$, $P(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, $P(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)^2$, ou bien $P(x_1) = x_1^4 - 2x_1^3 + 2x_1 - 1$.

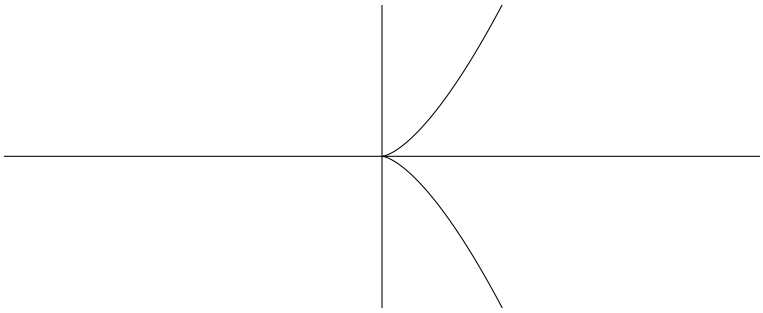
Alors la géométrie algébrique est classiquement le domaine des mathématiques qui étudie les ensembles géométriques, appelés variétés algébriques affines suivants :

$$V_k(P) = V_k(P_1, ..., P_m) := \{(x_1, ..., x_n) \in k^n; P_1(x_1, ..., x_n) = ... = P_m(x_1, ..., x_n) = 0\}.$$

Par exemple, on obtient une hyperbole lorsqu'on prend le premier polynôme :



On obtient ce qu'on appelle une cubique cuspidale lorsqu'on choisit le deuxième polynôme proposé :



Plus généralement, la géométrie algébrique se fixe pour objectif d'étudier ces ensembles de solutions $V_k(P)$ dans n'importe quel corps (par exemple l'ensemble $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ des nombres entiers modulo 5, où l'on identifie deux nombres s'ils diffèrent d'un multiple de 5, ou alors l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres qui s'écrivent comme le quotient de deux entiers). Ainsi, on développe en géométrie algébrique des outils analogues aux outils utilisés en géométrie différentielle pour étudier les variétés différentielles (espaces tangents, fibrés vectoriels, lissité,...) mais dont les définitions sont purement algébriques, valables au dessus de n'importe quel corps abstrait et n'utilisent jamais la complétude du corps de base (à l'inverse de ce qui se fait en géométrie différentielle).

Les questions que l'on se pose à propos de ces ensembles $V_k(P)$ peuvent être de différentes natures. On peut par exemple se demander si l'ensemble $V_k(P)$ est vide ou non, ou tenter d'estimer le nombre de solutions de $V_k(P)$ qui ne sont pas trop « hautes ». Lorsque le corps k est muni d'une topologie ($k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on peut s'intéresser à la forme géométrique des ensembles $V_k(P)$: ont-ils des trous, des irrégularités ? On peut aussi tenter de classifier les objets $V_k(P)$: quels sont les objets qui se ressemblent ? Peut-on trouver un moyen effectif de déterminer si deux objets donnés se ressemblent ? Selon la nature du corps de base k, les méthodes utilisées pour répondre à ces questions variées peuvent être très différentes, et font intervenir des outils provenant de branches très différentes des mathématiques.

Pour attaquer ce type de problèmes, ce point de vue avec des équations et des ensembles de solutions s'avère incomplet pour au moins deux raisons. Déjà, ce point de vue s'avère limité pour prendre en compte de manière souple les phénomènes qui apparaissent lorsque l'on étend le corps de base. Ainsi, si l'on considère $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, alors $V_{\mathbb{R}}(Q)$ est réduit à $(x_1, x_2) = (0, 0)$ dans $\mathbb{R}$ (un carré est positif, et une somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chacun de ces nombres est nul). Prenons maintenant P_1, P_2 définit par $P(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ et $P(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Alors si $(x_1, x_2) \in V_{\mathbb{C}}(P_1, P_2)$, alors $x_1 - x_2 = 0$ et $x_1 + x_2 = 0$ donc $x_1 = x_2 = 0$ donc l'unique élément de $V_{\mathbb{C}}(P_1, P_2)$ est $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Ainsi, on obtient $V_{\mathbb{R}}(Q) = V_{\mathbb{R}}(P_1, P_2)$ dans $\mathbb{R}$. Ces deux variétés ne devraient néanmoins pas être autorisées à être égales car si on regarde les solutions complexes, alors $V_{\mathbb{C}}(P_1, P_2)$ est toujours réduit à zéro, mais $(1, i)$ est un point de $V_{\mathbb{C}}(Q)$ qui est non nul car $1 + i^2 = 0$. Ce point de vue s'avère aussi incomplet pour prendre en compte les multiplicités. Ainsi, le point $(0, 0)$ est un point de multiplicité simple dans $V_{\mathbb{R}}(P_1, P_2)$ mais double dans $V_{\mathbb{R}}(Q)$ (à cause de la présence du carré).

Géométrie algébrique moderne

Ce type de problème est à l'origine du colossal travail de refondation conceptuel de la géométrie algébrique effectué par Alexandre Grothendieck et son école autour de 1960. Ce travail aboutira à la notion de schéma, qui s'imposa comme l'objet géométrique pertinent pour l'étude des ensembles algébriques, et répondre aux questions précédemment évoquées.

Nous ne donnerons évidemment pas la définition précise de schéma ici, mais si l'on se donne une famille de polynôme $P_1, ..., P_m$ à coefficient dans un corps k comme précédemment, l'idée consiste à remplacer les ensembles $V_k(P)$ par les solutions $(x_1, ..., x_n)$ des équations $P_1(x_1, ..., x_n) = P_2(x_1, ..., x_n) = ... = P_m(x_1, ..., x_n)$ qui vivent dans *toutes* les k-algèbre A.

Ce cadre révolutionnaire s'est avéré incroyablement souple, adapté et général pour étudier les problèmes de la géométrie algébrique. On peut citer comme réalisation majeure de cette école de pensée la preuve par Deligne d'une partie des conjectures de Weil en 1974, ou bien la démonstration par Wiles du grand théorème de Fermat en 1994, mais de manière

plus générale, on peut noter que quasiment tous les résultats de géométrie algébrique après les années 1960 sont énoncés en terme de théorie des schémas, qui est devenu le langage commun des géomètres algébristes.

Avec cette notion de schéma vient aussi le point de vue relatif sur les objets. Pour l'école de Grothendieck, une bonne notion mathématiques (par exemple la compacité) n'est pas une propriété des objets absolus (par exemple un espace topologique compact) mais une propriété relative, qui concerne les morphismes entres objets (par exemple une application continue compacte, pour laquelle l'image inverse d'un compact est compact). Les bonnes propriétés des morphismes sont celles qui sont stables à la composition et par une opération qu'on appelle changement de base, et qui correspond à prendre le produit fibré. De même, les bons théorèmes à démontrer sont les théorèmes qui ne portent pas sur des objets fixés mais sur des familles d'objets, indexés par une *base*. Ces énoncés, plus généraux, et d'apparence plus difficile se prêtent souvent à des réductions en cascade qui conduisent à la solution. La preuve de la formule de Grothendieck-Riemann-Roch par Grothendieck en 1957 est souvent donnée comme un exemple de cette manière de penser (voir [34]) : ce qui était un énoncé absolu sur des variétés devient un énoncé relatif plus général sur des morphismes entre variétés.

Théorie de la descente

Avec ce point de vue relatif moderne qui prend son essor, pour démontrer un théorème de géométrie algébrique, on réalise très souvent des changements de base de certains morphismes. On veut vérifier qu'un certain morphisme $f : X \to S$ vérifie une certaine propriété P. On peut effectuer le produit fibré de X par un morphisme $S' \to S$ pour obtenir un espace $X' = X \times_S S'$ et un morphisme $f' : X' = X \times_S S' \to S'$. L'idée est de bien choisir $S' \to S$ de manière à ce que la propriété P soit facile à vérifier pour f'. La théorie de la descente assure alors sous certaines conditions sur $S' \to S$, que si f' vérifie la propriété P, alors f vérifie la propriété P.

Plus généralement en mathématiques, si l'on travaille dans une catégorie $\mathcal{C}$, il arrive souvent qu'à chaque objet X dans $\mathcal{C}$, on sache associer une autre catégorie A_X à X, et il arrive souvent que cette association soit fonctorielle, c'est-à-dire que si l'on a un morphisme $p : Y \to X$ dans $\mathcal{C}$ alors on dispose d'un foncteur p^* de A_X dans A_Y. Par exemple, si l'on travaille dans la catégorie des variétés différentielles, on sait associer à chaque variété différentielle X la catégorie A_X des fibrés vectoriels au dessus de X, et si l'on se donne une application lisse $p : Y \to X$ entre deux variétés différentielles et un fibré vectoriel E sur X, on sait construire un nouveau fibré vectoriel sur Y, qui sera le tiré en arrière du fibré vectoriel E par l'application p, et que l'on note p^*E. Cette construction $A_X \to A_Y$, $E \mapsto p^*E$ nous définit alors un foncteur de la catégorie A_X des fibrés vectoriels sur X vers la catégorie A_Y des fibrés vectoriels sur Y. D'un point de vue technique, on dit que l'on s'est donné une catégorie fibrée au dessus de $\mathcal{C}$ (il faut aussi se donner certaines

compatibilités, à la composition par exemple, que nous n'évoquerons pas ici).

La théorie de la descente consiste dans ce cadre à étudier ce foncteur p^*. Voici quelques questions fondamentales :

1. Ce foncteur est-il essentiellement surjectif ? Si l'on se donne un objet F dans A_Y, existe-il un objet E dans A_X et un isomorphisme entre p^*E et F ?
2. Ce foncteur est-il pleinement fidèle ? Pour E et E' des objets de A_X, la donnée d'un morphisme de p^*E vers p^*E' dans A_Y est-elle équivalente à la donnée d'un morphisme de E vers E' ?
3. Si E est un objet de A_X, peut-on obtenir des informations pertinentes sur E à partir de propriété de l'objet p^*E ?
4. Si E et E' sont des objets de A_X et que $\varphi : E \to E'$ est un morphisme dans A_X peut-on obtenir des informations pertinentes sur φ à partir d'informations sur son tiré en arrière $p^*\varphi : p^*E \to p^*E'$.

Un objet ou un morphisme quelconque de A_Y n'a à priori aucune chance de provenir d'un objet de A_X. Pour cela, il faut ajouter des conditions formelles qui sont les *données de descente*. On note alors $A_{Y\to X}$ la sous-catégorie pleine de A_Y des objets munis de données de descente. Si le foncteur p^* est une équivalence de catégorie entre les objets de A_X et la catégorie $A_{Y\to X}$ des objets de A_Y munis de données de descentes, on dit que le morphisme p est de descente effective.

0.1.1 Exemple. Pour éclairer ces questions, on peut se donner un exemple concret. Supposons que la catégorie $\mathcal{C}$ est la catégorie des variétés différentielles, et que pour une variété différentielle X, la catégorie fibre A_X est la catégorie des fibrés vectoriels au dessus de X. On se donne un recouvrement de X par une famille d'ouverts $(X_i)_{i\in I}$. Considérons alors $Y := \coprod_{i\in I} X_i$, et le morphisme $p : Y = \coprod_{i\in I} X_i \to X$ donnée par l'inclusion terme à terme. Alors si l'on se donne un fibré vectoriel $f : E \to X$ dans A_X, on vérifie sans peine que le tiré en arrière p^*E est le fibré vectoriel sur Y dont l'ensemble sous-jacent est $p^*E = \coprod_{i\in I} f^{-1}(X_i)$ et donc la flèche $p^*E \to Y$ est donnée sur chaque $f^{-1}(X_i)$ par la restriction de f à $f^{-1}(X_i)$.

La donnée d'un fibré vectoriel F sur Y est la donnée d'une collection de fibrés vectoriels $(f_i : F_i \to X_i)_{i\in I}$ sur chacun des X_i. De plus, la donnée de descente sur F s'interprète comme une compatibilité entre F_i et F_j sur la double intersection $X_i \cap X_j$, c'est-à-dire un isomorphisme entre $f_i^{-1}(X_i \cap X_j)$ et $f_j^{-1}(X_i \cap X_j)$, qui est lui même compatible sur la triple intersection $X_i \cap X_j \cap X_k$.

Dans ces conditions, un résultat élémentaire de géométrie différentielle sur les recollement de fibrés vectoriels assure que l'on peut recoller la collection $(f_i : F_i \to X_i)_{i\in I}$ en un fibré vectoriel $f : E \to X$ au dessus de X qui vérifie $f^{-1}(X_i) \simeq F_i$. Ce fibré vectoriel E vérifie alors $p^*E \simeq F$, et on peut ainsi interpréter ce résultat élémentaire en disant que le

morphisme $p : \coprod_{i\in I} X_i = Y \to X$ est un morphisme de descente effectif pour la catégorie (fibrée) des fibrés vectoriels.

Lorsque l'on travaille dans une catégorie $\mathcal{C}$ dont les objets possèdent une structure d'espace topologique sous-jacente (variétés différentielles, schémas, espaces complexes,etc), les questions de descente relativement à un morphisme $p : \coprod_{i\in I} X_i \to X$ avec $(X_i)_{i\in I}$ une collection d'ouverts qui recouvrent X s'interprètent souvent comme le recollement de certains objets selon des ouverts. Cette raison explique pourquoi on aime penser à la théorie de la descente comme une sorte de manière catégorique de généraliser l'idée de recollement.

L'école de Grothendieck a développé des techniques similaires dans la catégorie des schémas, mais pour des morphismes de recollement $p : Y \to X$ beaucoup plus généraux que des morphismes donnés par un recouvrement par des ouverts.

La platitude

Historiquement, la platitude est introduite par Serre en 1956 dans son article inaugural [49] pour étudier les liens entre géométrie algébrique et analytique. Par la suite, la platitude du morphisme de recollement $p : Y \to X$ s'est avérée l'hypothèse clé dégagée par Grothendieck pour obtenir des théorèmes de descente variés. Ainsi, par exemple il énonce dans son séminaire de géométrie algébrique [48] le théorème fondamental suivant :

0.1.2 Théorème. *Considérons un morphisme $p : Y \to X$ fidèlement plat et quasi-compact de schémas. Alors le tiré en arrière p^* induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur X et la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur Y munis de données de descente relativement au morphisme p.*

La platitude s'est aussi révélée être une notion féconde en théorie des schémas pour étudier les objets en famille. Si l'on se donne une famille de schémas $(X_s)_{s\in S}$ et que l'on veut donner un sens précis à l'idée que cette famille varie continûment, une manière de faire est de se donner un morphisme plat de schémas $\pi : X \to S$ tel que $\pi^{-1}(s) \simeq X_s$ pour tout $s \in S$. Ainsi, par exemple, on dispose de la proposition élémentaire suivante, démontrée en 9.5 de [31] qui montre que la dimension se comporte bien en famille dès lors que le morphisme considéré est plat :

0.1.3 Proposition. *Considérons $\pi : X \to S$ un morphisme plat de schémas de type fini au dessus d'un corps k. Alors pour tout $x \in X$, si on note $y = f(x)$, on dispose de l'égalité suivante :*

$$\dim_x(\pi^{-1}(y)) + \dim_y Y = \dim_x X.$$

La notion de platitude s'est également avérée particulièrement utile pour tout ce qui a trait aux espaces de modules. Supposons que l'on se fixe une collection de schémas (ou d'objets algébriques). Alors la théorie des espaces de modules vise à dégager des

conditions sur cette collection pour que la collection elle-même dans son ensemble soit munie d'une structure géométrique (schéma, champs, etc) et à étudier cette structure géométrique (est-elle lisse ? est-elle connexe ?). Cette question se traduit souvent sous la forme de la représentabilité d'un certain foncteur F qui associe à un schéma T une famille d'espaces $F(T)$ au dessus de T, et ces objets doivent souvent être supposés plats au dessus de T pour traduire l'idée d'espaces paramétrés par T si l'on veut espérer un résultat de représentabilité.

Géométrie complexe

La géométrie analytique complexe est le domaine des mathématiques qui s'intéresse à des objets géométriques composés de points dans $\mathbb{C}^n$ dont les coordonnées vérifient des équations faisant intervenir des sommes infinies et des puissances de ces nombres. Plus précisément, si $U \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, une fonction $f : U \to \mathbb{C}$ est analytique si localement, elle s'écrit comme une série entière convergente. Par définition, tout polynôme (comme dans le début du paragraphe qui concernait la géométrie algébrique) est une fonction analytique.

Alors, si l'on se donne un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ et des fonctions analytiques $f_1, ..., f_m$ de U dans $\mathbb{C}$, la géométrie analytique complexe est l'étude des ensembles qui ressemblent localement aux ensembles de solutions suivants, appelés variétés affines analytiques complexes :

$$V(f_1, ..., f_m) := \{(x_1, ..., x_n) \in U; f_1(x_1, ..., x_n) = f_2(x_1, ..., x_n) = ... = f_m(x_1, ..., x_m) = 0\}.$$

Puisqu'un polynôme est en particulier une fonction analytique, on note ainsi que la géométrie algébrique complexe est un domaine qui est inclus dans la géométrie analytique complexe. Dans certains cas, on dispose même d'un moyen de passer de l'un à l'autre, ce sont les théorèmes de type GAGA, initiés par Serre dans son article inaugural [49], qui permettent de relier le comportement des objets en tant qu'objets complexes analytiques avec le comportement de ces mêmes objets mais considérés comme algébriques. L'hypothèse qui permet de passer de l'un à l'autre est souvent l'hypothèse de compacité. Par exemple, l'espace projectif $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de dimension n est un espace compact, et on peut montrer que tout sous-espace de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ défini par des équations analytiques holomorphes est en fait défini par des équations algébriques, c'est-à-dire données localement par des polynômes. Ce résultat constitue le théorème de Chow.

La géométrie non archimédienne

Les corps $\mathbb{Q}_p$

L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est obtenu comme le complété des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour la valeur absolue usuelle, c'est-à-dire que l'on est parti des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et que l'on a « comblé les trous »pour obtenir l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$. Ce passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ permet d'offrir de nouvelles techniques de résolution des problèmes, même ceux dont les données ne concernaient que des nombres rationnels.

Le corps $\mathbb{Q}$ admet pourtant d'autres complétés. En effet, si l'on se donne $p \in \mathbb{P}$ un nombre premier et x un nombre rationnel non nul, on peut toujours écrire x sous la forme $x = p^{v_p(x)}\frac{a}{b}$ avec $v_p(x) \in \mathbb{Z}$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ non divisibles par p. Posons $|x|_p = (\frac{1}{p})^{v_p(x)}$, de telle sorte que si $x = \frac{81}{18}$, alors $|\frac{81}{18}|_3 = |\frac{3\times3\times3\times3}{3\times3\times2}| = |\frac{3\times3}{2}|_3 = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ mais $|\frac{81}{18}|_2 = (\frac{1}{2})^{-1} = (\frac{2}{1})^1 = 2$. On vérifie sans peine que $|.|_p : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}_+^*$ définit une valeur absolue sur $\mathbb{Q}$, et on appelle $\mathbb{Q}_p$ le complété de $\mathbb{Q}$ pour cette valeur absolue.

Ce complété $\mathbb{Q}_p$ est encore un corps, qui est non archimédien, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante : $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. De plus, si $x \in \mathbb{Q}$, la valeur absolue de x pour cette nouvelle norme $|.|_p$ est d'autant plus petite que le nombre x est très divisible par le nombre premier p. Cette dernière propriété explique pourquoi les corps $\mathbb{Q}_p$ apparaissent naturellement lorsque l'on cherche à étudier des questions de théorie des nombres : on peut relier des propriétés qui concernent l'arithmétique des entiers avec des propriétés qui concernent la topologie de $\mathbb{Q}_p$.

Supposons que $P \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$ est un polynôme de plusieurs variables à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Un tel exemple de polynôme est le polynôme $P(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 4X_2^2 + 5X_3^3$. Une question élémentaire de géométrie algébrique que l'on peut se poser est de déterminer si l'ensemble $V_{\mathbb{Q}}(P)$ possède des points non triviaux, c'est-à-dire s'il existe $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Q}^3$ non nul tel que $P(x_1, x_2, x_3) = 0$. Si un tel élément $(x_1, x_2, x_3) \in V_{\mathbb{Q}}(P)^*$ existe, alors on en déduit puisque $\mathbb{Q}$ est inclus dans $\mathbb{R}$ et dans chaque $\mathbb{Q}_p$ que $V_{\mathbb{R}}(P)^*$ et $V_{\mathbb{Q}_p}(P)^*$ sont non vides. Ainsi, si $V_{\mathbb{Q}}(P)^*$ est non vide, alors $V_{\mathbb{R}}(P)^*$ et $V_{\mathbb{Q}_p}(P)^*$ sont non vides.

La théorie des principes locaux-globaux s'intéresse à la réciproque : si $P \in \mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$ est un polynôme, et que $V_{\mathbb{R}}(P)^*$ et $V_{\mathbb{Q}_p}(P)^*$ sont non vides, est-ce que $V_{\mathbb{Q}}(P)^*$ est non vide ? Une forme quadratique rationelle est un polynôme homogène de degré 2 à coefficient dans $\mathbb{Q}$. C'est donc un polynôme de n variables $X_1, ..., X_n$ où l'on s'autorise uniquement les termes de la forme X_i^2 et X_iX_j. Par exemple, $P(X_1, X_2, X_3) = 3X_1^2 + 4X_2^2 + 5X_3^3$ n'est pas une forme quadratique, mais $P(X_1, X_2, X_3) = 5X_1^2 + 7X_2^2 - 13X_3^2$ est bien une forme quadratique. On dispose du théorème suivant qui est un principe local-global pour les formes quadratiques et qui illustre à lui seul tout l'intérêt des $\mathbb{Q}_p$ dans l'étude des questions arithmétiques sur $\mathbb{Q}$:

0.1.4 Théorème. *Une forme quadratique rationnelle $q : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ possède un zéro non nul $(x_1, ..., x_n)$ dans $\mathbb{Q}^n$ si et seulement si elle possède un zéro non nul dans $\mathbb{R}^n$ et un zéro*

non nul dans chaque $\mathbb{Q}_p^n$ pour tout nombre premier $p \in \mathbb{P}$.

Autrement dit, si q est une forme quadratique rationnelle, alors $V_{\mathbb{Q}}(q)^*$ est non vide si et seulement si $V_{\mathbb{R}}(q)^*$ est non vide et $V_{\mathbb{Q}_p}(q)^*$ est non vide pour tout $p \in \mathbb{P}$.

Espaces analytiques non archimédiens

Le corps $\mathbb{Q}_p$ est tout comme $\mathbb{C}$ un corps muni d'une valeur absolue et qui est complet. Le rôle majeur joué par les corps $\mathbb{Q}_p$ en théorie des nombres a poussé les mathématiciens à développer au dessus de $\mathbb{Q}_p$ une théorie des espaces analytiques qui soit l'analogue de la géométrie analytique complexe. Le problème est que l'on ne peut pas du tout calquer les définitions de la géométrie complexe dans ce nouveau cadre. Par exemple, que serait une fonction analytique globale $f : \mathbb{Q}_p \to \mathbb{Q}_p$?

On pourrait décréter qu'une telle fonction est simplement une fonction qui est localement une fonction développable en série entière. Le problème de cette définition est qu'à cause de l'inégalité non archimédienne $|x + y| \leq \max(|x|_p, |y|_p)$, on peut vérifier que dans $\mathbb{Q}_p$ les boules ouvertes sont fermées topologiquement, si bien que l'on peut écrire $\mathbb{Q}_p$ comme une union disjointe d'ouverts $\mathbb{Q}_p = B(0,1) \sqcup B(0,1)^c$, et donc la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{B(0,1)}$ serait une fonction analytique globale sur $\mathbb{Q}_p$: les fonctions analytiques globales ne vérifieraient même pas le principe du prolongement analytique.

En travaillant sur l'uniformisation de courbes elliptiques au dessus de $\mathbb{Q}_p$, Tate obtient certains calculs qui lui firent penser que ses résultats étaient la contrepartie de l'existence d'une telle théorie analytique globale. Il fit part de ses calculs à Grothendieck qui resta sceptique sur l'existence d'une telle théorie globale. Ainsi, dans une lettre à Serre le 18 août 1959, Grothendieck écrit :

> *Tate m'a écrit de son côté sur ses histoires de courbes elliptiques, et pour me demander si j'avais des idées sur une définition globale des variétés analytiques sur des corps valués complets. Je dois avouer que je n'ai pas du tout compris pourquoi ses résultats suggéraient l'existence d'une telle définition, et suis encore sceptique. Je n'ai pas non plus l'impression d'avoir rien compris à son théorème, qui ne fait qu'exhiber par des formules brutales un certain isomorphisme de groupes analytiques ; on conçoit que d'autres formules tout aussi explicites en donneraient un autre pas plus mauvais (sauf preuve du contraire !).*

On comprend pourquoi l'invention par Tate des espaces analytiques rigides, qui sont des espaces analytiques au dessus de n'importe quel corps non archimédien complet au début des années 1960 fut un tour de force (tour de force auquel Grothendieck a largement contribué, Tate écrira dans son article fondateur « In this section we follow fully and faithfully a plan furnished by Grothendieck. »). Par la suite, plusieurs autres définitions de ce que serait un espace analytique au dessus d'un corps non archimédien complet furent proposées : par Raynaud dans les années 1970 avec les schémas formels à éclatement près,

par Huber dans les années 1990 avec les espaces adiques, et par Berkovich avec les espaces analytiques (de Berkovich) en 1990. Mêmes s'ils ont leur spécificité propre, ces espaces sont tous en lien les uns avec les autres, et une grande partie des résultats que l'on obtient dans l'un des cadres peut se « traduire »dans un autre de ces cadres. Notons que la théorie des espaces de Huber et des perfectoïdes connaît de nombreux développements actuels sous l'impulsion récente de Scholze et de ses collaborateurs, en vue d'applications au programme de Langland, et plus généralement à des problèmes de géométrie arithmétique.

Espaces de Berkovich

Ma thèse prend pour cadre plus spécifiquement la théorie des espaces analytiques de Berkovich.

Ces espaces furent initialement introduits dans son livre [4] en 1990 pour remédier à un défaut de la théorie spectrale classique. Ainsi, si l'on se donne $\mathcal{A}$ une $\mathbb{C}$-algèbre non nulle, on définit le spectre d'un élément a de $\mathcal{A}$ comme l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $a - \lambda \mathrm{Id}$ est non inversible dans $\mathcal{A}$. On peut alors monter que le spectre d'un élément $a \in \mathcal{A}$ est toujours une partie non vide compacte de $\mathbb{C}$. Si l'on se donne un corps non archimédien complet k, et que l'on définit le spectre d'un élément d'une k-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ de manière identique à ce qui précède, alors l'analogue du théorème précédent est faux : il se peut que le spectre d'un élément $a \in \mathcal{A}$ soit vide. L'idée de Berkovich est de définir le spectre non plus comme une partie de k, mais comme une partie de $\mathbb{A}^1_k$ la droite affine analytique (de Berkovich) au dessus de k. Sous cette hypothèse, on retrouve l'analogue du théorème précédent : le spectre d'un élément est non vide et compact dans $\mathbb{A}^1_k$ (c'est le théorème 7.1.2 de [4]).

Un point important qui distingue les espaces analytiques de Berkovich des autres approches de la géométrie non archimédienne est qu'ils sont dotés de bonnes propriétés topologiques. Ces propriétés sont énoncées plus précisément dans le premier chapitre de ce manuscrit, mais signalons qu'ils sont localement compacts, localement connexes par arcs (malgré la totale discontinuité de la topologie sur le corps de base k), et qu'ils contiennent souvent des structures linéaires par morceaux sur lequel l'espace global se rétracte par déformation forte.

Cette approche de la géométrie non archimédienne s'est révélée très féconde, et les espaces analytiques de Berkovich ont trouvé de multiples applications. Citons pêle-mêle l'invention d'une cohomologie étale analytique, notion qui n'avait pas de sens en géométrie rigide, et qui a permis des avancées majeures dans le programme de Langlands, la preuve de la conjecture de Deligne sur les cycles évanescents (par Berkovich lui même), les systèmes dynamiques complexes, la symétrie miroir, l'invention d'une notion d'intégration de formes différentielles non archimédienne ou la compacification d'immeubles de Bruhat-Tits. Pour plus de références, voir le très pédagogique exposé [19] et la réponse de Chambert-Loir et Poineau dans [1].

0.2 Contenu de la thèse et recherches effectuées

Cette thèse est composée de trois chapitres indépendants, que nous allons maintenant présenter. Le premier chapitre est une introduction à la théorie des espaces de Berkovich. Le second chapitre est un article en français qui a été soumis à une revue à comité de lecture et qui est reproduit tel quel sans modification. Le troisième chapitre, plus court, est un texte en anglais qui sera sans doute lui aussi retravaillé pour être soumis à une revue.

J'ai choisi dans ce qui suit d'exposer les résultats obtenus et les recherches effectuées de manière linéaire, au gré des réussites et des impasses qui parsèment de manière irrégulière le travail de recherche. J'expose en particulier deux intermèdes infructueux, qui ont occupés mon temps et qui se composent de questions auquelles je me suis intéressé, mais sans toutefois obtenir de résultats probants. J'espère réussir à traiter certaines de ces questions dans des travaux futurs.

0.2.1 Chapitre 1 : Introduction à la géométrie analytique de Berkovich

Cette partie est une introduction succincte à la théorie des espaces de Berkovich. Quasiment tous les résultats de cette section sont énoncés sans preuve, et nous nous sommes contentés de rassembler ici des résultats qui étaient présents dans la littérature.

Nous présentons ainsi rapidement la notion d'espace analytique de Berkovich, et plusieurs notions de base de la théorie. Nous énonçons les principaux résultats à leur sujet que nous utiliserons dans ce manuscrit, mais nous exposons aussi des résultats sans rapport particulier, mais qui nous ont paru importants à leur propos. La dernière section de ce chapitre est dévolue à une présentation de la théorie de la platitude analytique introduite par Ducros dans [20], dont nous ferons un usage intensif dans la suite.

0.2.2 Chapitre 2 : Descente fidèlement plate et algébrisation en géométrie de Berkovich

Un critère de descente au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes

Considérons un corps k non archimédien complet. Dans la première partie de ce chapitre, nous établissons le théorème suivant 2.2.4, qui fournit une condition générale pour qu'une catégorie fibrée fixée définie au dessus de la catégorie C des espaces k-affinoïdes soit un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont les morphismes plats et surjectifs. On rappelle comme dans le paragraphe 3.1.2 de [55] que la donnée d'une catégorie fibrée $\mathsf{F} \to \mathsf{C}$ et de certaines flèches cartésiennes distinguées dans F est équivalente à la donnée d'un pseudo-foncteur au dessus de C par la correspondance qui à un objet S de C associe la fibre $\mathsf{F}(S)$ de F au dessus de S, et qu'un morphisme $p : S' \to S$ de C est de descente effective (resp. de descente) si le foncteur tiré en arrière de la catégorie $\mathsf{F}(S)$ vers

la sous catégorie des objets de $\mathsf{F}(S')$ munis de données de descente est une équivalence de catégories (resp. pleinement fidèle).

0.2.1 Théorème. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus de C, avec C la catégorie des espaces analytiques k-affinoïdes. On suppose que :*

1. *Pour toute algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, et tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effectif relativement à Ψ.*
2. *Tout morphisme plat, fini et surjectif $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effectif relativement à Ψ.*
3. *Tout G-recouvrement $\amalg_{i=1}^n S_i \to S$ de S par des domaines affinoïdes en nombre fini est un morphisme de descente effectif relativement à Ψ.*

Alors tout morphisme plat et surjectif entre espaces affinoïdes est un morphisme de descente effectif relativement à Ψ.

La philosophie derrière ce théorème est que dans la catégorie des espaces k-affinoïdes, les questions de descente fidèlement plate se règlent par réduction aux trois types de flèches élémentaires considérées dans le théorème précédent.

Nous renvoyons à l'introduction du chapitre pour un exposé plus précis de la technique de démonstration de ce théorème. Signalons quand même que l'idée est de suivre une méthode introduite par Ducros dans [18]. Ainsi, si l'on veut montrer qu'un certain morphisme $p : S' \to S$ est de descente effectif, on va utiliser une série de théorèmes de factorisation pour inclure p dans certains diagrammes commutatifs comportant des morphismes plus simples à traiter et utiliser de manière cruciale que lorsqu'un certain morphisme possède une section, les propriétés de descente sont automatiques.

Une application de ce critère

Dans la troisième section, on applique le théorème précédent à plusieurs pseudo-foncteurs particuliers. Ainsi, on obtient d'abord le théorème 2.3.22 qui concerne les morphismes plats et proprement surjectifs, c'est-à-dire les morphismes d'espaces analytiques plats dont la base est G-recouverte par des domaines analytiques quasi-compacts qui sont l'image d'un domaine analytique quasi-compact de la source. Cette hypothèse couvre en particulier les morphismes plats, surjectifs topologiquement propres, et les morphismes sans bord, plats et surjectifs.

0.2.2 Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace k-analytique S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S. Alors les morphismes plats et proprement surjectifs sont des* morphismes de descente *pour Ψ.*

Autrement dit, les morphismes plats et proprement surjectifs sont des épimorphismes effectifs universels de la catégorie des espaces k-analytiques ; autrement dit, si l'on se donne un morphisme plat et proprement surjectif $p : S' \to S$ entre espaces k-analytiques, alors le

foncteur de la catégorie des S-espaces analytiques vers la catégorie des S'-espaces munis de données de descente relativement au morphisme p est pleinement fidèle.

On obtient ensuite le théorème 2.3.30 qui constitue un résultat d'effectivité. Un morphisme entre espaces k-analytiques $p : S' \to S$ est dit *presque affinoïde* s'il existe un G-recouvrement de la base S par des domaines affinoïdes dont chaque image inverse par p est un domaine affinoïde de S'. Cette notion est introduite ici pour remédier au fait qu'il n'existe pas en théorie de Berkovich de bonne notion de morphismes affinoïdes, qui soit l'analogue des morphismes affines en théorie des schémas. En effet, Liu a montré dans [39] l'existence d'un espace rigide non affinoïde mais doté d'un morphisme presque affinoïde vers un espace k-affinoïde.

0.2.3 Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace k-affinoïde S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S dont le morphisme structural est presque affinoïde. Alors les morphismes plats et surjectifs sont des morphismes de descente effective pour ce pseudo-foncteur.*

Autrement dit, le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde S associe ΨS est un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont plates surjectives ; autrement dit si l'on se donne un morphisme plat et surjectif $p : S' \to S$ entre espaces k-affinoïdes, alors le foncteur de la catégorie des S-espaces analytiques dont le morphisme structural est presque affinoïde vers la catégorie des S'-espaces analytiques dont le morphisme structural est presque affinoïde et munis de données de descente relativement au morphisme p est une équivalence de catégories.

La quatrième section de ce chapitre est dévolue à l'application des résultats précédents. En particulier, on démontre en 2.4.1 une généralisation de la proposition A-1 de [47], et on retrouve en 2.4.2 des résultats obtenus par Conrad et Temkin dans [13].

Un théorème d'algébrisation des morphismes

Dans la dernière section, nous nous intéressons à la descente fidèlement plate du caractère algébrique. Un espace k-analytique X au dessus de $\mathcal{A}$ sera dit algébrisable si c'est l'analytifié d'un $\mathcal{A}$-schéma $\mathcal{X}$. Un morphisme d'espaces k-analytiques entre l'analytifié de deux $\mathcal{A}$-schémas est algébrique si c'est l'analytification d'un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas, et ce morphisme de $\mathcal{A}$-schémas est alors nécessairement unique.

Dans cette section, nous étudions la question suivante : la propriété pour un morphisme d'être algébrique est-elle locale pour la topologie plate surjective ? Nous répondons par l'affirmative à cette question avec le théorème 2.5.7 :

0.2.4 Théorème. *Considérons $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un morphisme plat et surjectif entre espaces k-affinoïdes. Considérons maintenant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini. Alors un morphisme $f : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ est algébrique si et seulement si son changement de base $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}$ est algébrique.*

0.2.3 Intermède infructueux 1

Après avoir obtenu quelques résultats de descente, il était logique d'essayer d'obtenir encore quelques critères d'effectivité. Considérons un espace k-afinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, r un polyrayon k-libre. Notons $S_r := S \times_k k_r$. Alors le morphisme d'espaces analytiques canonique $p : S_r \to S$ dispose d'une section ensembliste continue dite de Shilov $\sigma : S \to S_r$. Cela incite à se poser la question suivante : si l'on se donne un S_r-espace analytique X, disons propre au dessus de S_r et muni d'une données de descente relativement au morphisme p, cette donnée de descente est-elle effective ? Et si l'on suppose maintenant que l'espace X est lui-même l'analytification d'un schéma projectif au dessus de $\mathrm{Spec}\mathcal{A}_r$? Et si l'on prend $\mathcal{A} = k$?

Dans la même veine, l'énoncé 0.2.4 suggère un résultat identique mais pour les espaces. L'objectif était d'avoir un résultat de descente d'objets d'algébrisation. La question est la suivante : si l'on se donne un morphisme plat et surjectif $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entre espaces k-affinoïdes, et un $\mathcal{A}$-espace analytique X, est-ce que le caractère algébrisable de $X_{\mathcal{B}}$ entraîne le caractère algébrisable de X ? Un énoncé en ce sens pourrait avoir des applications intéressantes au problème d'algébrisation des courbes propres au dessus d'une base affinoïde, puisqu'il nous permettrait de raisonner localement pour la topologie plate surjective.

Remarquons que le $\mathcal{A}$-schéma $\mathcal{X}$ dont l'analytification fournirait X n'a aucune raison d'être unique dans le cas général, mais par GAGA, il l'est dans le cas où X est propre au dessus de $\mathcal{A}$, ce qui serait sans doute une hypothèse naturelle pour commencer à étudier ce problème. Signalons que Piotr Achinger a plus tard suggéré par courriel un contre exemple à ce problème, mais nous n'avons pas eu le temps de vérifier que la construction d'Achinger fournit bien le contre exemple, et nous ne disposions pas de ce (potentiel) contre exemple à l'époque où nous étudiions ce problème.

Considérons X un espace k-analytique propre, irréductible et réduit. Alors la k-algèbre $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X est un corps, dont le degré de transcendance au dessus de k est inférieur à la dimension de X. Un espace analytique irréductible réduit propre est de Moishezon si cette inégalité est une égalité. Un espace propre algébrisable est de Moishezon par des théorèmes de type GAGA pour les fonctions méromorphes, et un espace de Moishezon (rigide) est l'analytification d'un espace algébrique propre par l'article [11]. La notion d'espace de Moishezon est donc une notion intermédiaire entre la notion d'espace k-analytique propre algébrisable et la notion d'espaces k-analytique propre.

Une stratégie pour attaquer le problème de l'algébricité des espaces était donc de descendre la propriété d'être un espace de Moishezon. Supposons que l'on se donne r un polyrayon k-libre, et X un espace k-analytique propre. Alors si X_r est de Moishezon, est-ce que X est de Moishezon ? L'idée pour montrer ce résultat était de relier la k-algèbre $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes sur X avec la k_r-algèbre $\mathcal{M}(X_r)$ des fonctions méromorphes

sur X_r, par une égalité de type $\mathcal{M}(X_r) = \mathrm{Frac}(\mathcal{M}(X) \otimes_k k_r)$. Pour montrer une égalité de ce style, une idée était aussi de construire l'analogue d'un schéma de Hilbert dans le cadre non archimédien, qui serait compatible au changement de base, puis de raisonner à partir du faisceau des dénominateurs d'une fonction méromorphe f sur X_r.

0.2.4 Intermède infructueux 2

Dans l'article [12], Conrad développe une théorie de l'amplitude relative pour les fibrés en droite sur des espaces rigides propres au dessus de la base. Le résultat suivant constitue le théorème 3.2.9 de son article :

0.2.5 Théorème. *Soit k un corps non archimédien complet. Considérons $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces analytiques rigides au dessus de k et $\mathcal{L}$ un fibré en droite sur X. Soit $U_{\mathcal{L}}$ l'ensemble des $s \in S$ tels que $\mathcal{L}_s$ est ample sur la fibre X_s. Alors il existe un ouvert canonique de Zariski $W_{\mathcal{L}}$ de S tel que $U_{\mathcal{L}}$ est un ouvert de Zariski de $W_{\mathcal{L}}$.*

La condition d'être Zariski-ouvert n'est pas une condition transitive dans le monde analytique, donc ce théorème n'assure pas nécessairement le caractère Zariski-ouvert de $U_{\mathcal{L}}$. Nous avons essayé de préciser le théorème de Conrad, en établissant, comme en géométrie algébrique, le caractère Zariski-ouvert de ce lieu d'amplitude relatif $U_{\mathcal{L}}$.

Nous avons cru à un moment disposer d'une démonstration de ce fait, en éclatant un certain lieu d'indétermination d'un certain morphisme, mais notre preuve utilisait implicitement un changement de base illicite pour la cohomologie des faisceaux cohérents.

0.2.5 Chapitre 3 : Changement de base pour la cohomologie cohérente analytique

Changement de base plat pour la cohomologie des faisceaux cohérents

Ce dernier intermède nous a conduit a nous intéresser aux changements de base en géométrie analytique ultramétrique. En cherchant des références sur le sujet, nous sommes tombés sur les résultats énoncés à la fin de la section 3.3 de [4], mais contrairement à ce qui est affirmé dans loc. cit., les preuves des énoncés analogues en théorie des schémas ne s'étendent pas telles quelles en géométrie analytique, car on y manipule des produits tensoriels *complétés* qui se marient mal aux techniques standards d'algèbre homologique.

Nous avons commencé par tenter de démontrer un théorème de changement de base plat, qui nous paraissait plus accessible. L'énoncé que nous obtenons en 3.1.1 est le suivant :

0.2.6 Théorème. *Considérons*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p'"] & S' \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

un diagramme cartésien d'espaces k-analytiques, avec f propre et p plat. Considérons $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors pour tout $i \geq 0$, le morphisme naturel de $\mathcal{O}_{S'}$-modules cohérents $p^*(R^i f_* \mathcal{F}) \to R^i f'_*(p'^* \mathcal{F})$ est un isomorphisme.

On peut réduire cet énoncé au cas où $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $S' = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ sont affinoïdes, et cet énoncé se reformule sur le complexe de Čech C^* de $\mathcal{F}$. Le complexe de Čech de $X_{\mathcal{B}}$ est alors $C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ et le théorème se réduit à montrer que $H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to H^i(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$ est un isomorphisme. Ce fait n'est pas aussi clair que dans le monde algébrique puisque le produit tensoriel complété par une algèbre analytiquement plate n'est pas nécessairement un foncteur exact dans le monde analytique.

Nous introduisons en 3.1.5 la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Grossièrement, un $\mathcal{A}$-module de Banach M satisfait la propriété $\mathcal{P}_A$ si la flèche naturelle $H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} M \to H^i(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} M)$ est un isomorphisme. Pour montrer le théorème précédent, il suffit alors de montrer que $\mathcal{B}$ satisfait la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Pour cela, on commence d'abord par montrer que les algèbres quasi-lisses au dessus de $\mathcal{A}$ vérifient la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, propriété qui repose ultimement sur l'observation que dans le cas de polydisques relatifs, les produits tensoriels complétés sont explicites, et permettent des calculs effectifs au niveau des complexes de Čech. On montre ensuite que la propriété $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ s'étend aux modules cohérents sur des algèbres quasi-lisses au dessus de $\mathcal{A}$, et que cette propriété se comporte bien vis à vis de la composition et qu'elle est G-locale. La dernière étape consiste à faire appel à la variante analytique des dévissages à la Raynaud-Gruson, introduite par Ducros en section 8.2 de [20], pour traiter le cas général d'une algèbre k-affinoïde $\mathcal{B}$ analytiquement plate au dessus de $\mathcal{A}$.

Changement de base propre pour la cohomologie cohérente

Nous nous sommes ensuite intéressés aux résultats de changement de base propre pour la cohomologie cohérente. Berkovich suggérait sans démonstration dans son livre [4] que pour aborder ces problèmes, on pouvait employer une stratégie similaire à la stratégie Mumford dans [42] dans le cas des schémas. Cette stratégie consiste à d'abord montrer que si l'on se donne $X \to \mathrm{Spec}(A)$ un schéma propre au dessus de A, et $\mathcal{F}$ un faisceau quasi-cohérent sur X, alors il existe un complexe K^* de A-modules de *type finis* qui calcule universellement la cohomologie de A, au sens où pour toute A-algèbre B, on dispose d'un isomorphisme $H^n(K^* \otimes_A B) \to H^n(X_B, \mathcal{F}_B)$. En se ramenant au complexe de Čech de X, la preuve de ce fait est un résultat pur d'algèbre homologique. La finitude des K^i est le point fondamental, puisque les complexes de Čech mettent en jeu des modules qui ne sont pas sauf exception de type fini. Les théorèmes classiques de changement de base propre sur X résultent ensuite de l'existence de ce complexe universel.

Si l'on souhaite adapter cette stratégie au cadre analytique ultramétrique, la preuve échoue. En effet, le complexe de Čech n'est pas composé de $\mathcal{A}$-modules finis, et les produits

tensoriels qui apparaissent dans le complexe de Čech de X sont des produits tensoriels complétés.

Nous réussissons néanmoins à obtenir le théorème suivant, exposé en 3.2.1, qui était en partie énoncé, sans preuve en 3.3.9 de [4] :

0.2.7 Théorème. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, X un espace $\mathcal{A}$-analytique propre et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X, qui est plat sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors il existe un complexe fini K^* de $\mathcal{A}$-modules finis et projectifs tel que, pour toute extension ultramétrique L de k et toute algèbre L-affinoïde $\mathcal{B}$ muni d'un morphisme d'espaces analytiques $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$, on ait pour tout $n \in \mathbf{N}$ un isomorphisme $H^n(K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to H^n(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$.*

L'idée de la démonstration est de travailler avec le complexe de Čech de X et de noter les points suivants :

1. On dispose de ce théorème lorsque $\mathcal{B}$ est de la forme $\mathcal{A}_L$ avec L une extension ultramétrique de k, grâce à la théorie de Gruson, puisque $\hat{\otimes}_k L$ préserve les suites exactes admissibles ;
2. On dispose de ce théorème lorsque $\mathcal{B}$ est une algèbre k-affinoïde, analytiquement plate au dessus de $\mathcal{A}$ par notre précédent théorème ;
3. On dispose de ce théorème lorsque le morphisme p est un morphisme fini entre espaces k-affinoïdes, par la théorie algébrique et la construction exposée dans le livre de Mumford, puisqu'alors produits tensoriels et produits tensoriels complétés coïncident.

Alors, les travaux sur la dimension relative de Ducros dans [25] et en particulier le corollaire 4.7 fournissent la factorisation G-locale agréable qui permet d'en déduire le cas général.

Ce théorème nous permet comme dans le cas des schémas d'obtenir le corollaire 3.2.10 :

0.2.8 Théorème. *Considérons $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces k-analytiques, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X qui est S-plat. Alors :*

1. *Pour tout $p \geq 0$ et $n \geq 0$, l'ensemble $\{s \in S | \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s) \geq n\}$ est une partie Zariski-fermée de S.*
2. *Si X est bon, alors la caractéristique d'Euler $\chi : X \to \mathbb{Z}$ définie par*

$$s \mapsto \chi(\mathcal{F}_s) := \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s) \tag{0.2.5.0.1}$$

est G-localement (et localement) constante sur S.

Quelques directions futures

Dans un futur travail, nous aimerions reprendre le chapitre 2, et ajouter les résultats 3.3.12 et 3.3.13 suivant que Berkovich énonce dans [4] sans démonstration :

0.2.9 Corollaire. *Considérons $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces k-analytiques avec S connexe et réduit, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X qui est S-plat. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, il y a équivalence entre :*

1. *La fonction $s \in S \mapsto \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s)$ est constante ;*
2. *Le faisceau $R^p f_*(\mathcal{F})$ est localement libre sur S, et pour tout $s \in S$, l'application naturelle $R^p f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}(s) \to H^p(X_s, \mathcal{F}_s)$ est un isomorphisme.*

Sous ces conditions, l'application $R^{p-1} f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}(s) \to H^{p-1}(X_s, \mathcal{F}_s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in X$.

0.2.10 Corollaire. *Considérons $f : X \to S$ un morphisme propre d'espaces k-analytiques avec S connexe et réduit, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X qui est S-plat. Supposons de plus qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $H^p(X_s, \mathcal{F}_s) = 0$ pour tout $s \in S$. Alors l'application naturelle $R^{p-1} f_*(\mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{H}(s) \to H^{p-1}(X_s, \mathcal{F}_s)$ est un isomorphisme pour tout $x \in X$.*

Ces résultats sont classiquement déduits, dans le cas des schémas de l'existence du complexe K^*, que nous obtenons en 3.2.1, et c'est pourquoi nous pensons que ces deux corollaires devraient suivre de ce résultat.

Nous espérerions que ces corollaires permettront de rafistoler la démonstration du caractère Zariski-ouvert du lieu d'amplitude relatif pour un morphisme propre.

Nous espérerions aussi pouvoir construire l'analogue d'un schéma de Hilbert relatif à un espace de Berkovich propre.

Un mot sur l'unité des preuves

Il y a une certaine unité dans les démonstrations des différentes propositions de ce manuscrit. Régulièrement, pour montrer qu'un certain morphisme $f : Y \to X$ d'espaces analytiques vérifie une certaine propriété $\mathcal{P}$, on montre que cette propriété est G-locale sur Y, stable par composition, puis on utilise les différents théorèmes démontrés par Ducros dans [25] ou bien [20] pour effectuer des réductions en cascade qui conduisent à traiter des cas particuliers, que nous traitons de manière explicite.

Chapitre 1

Introduction à la géométrie analytique de Berkovich

"Depuis un ou deux ans que je commence à me poser des questions à ce sujet, je me suis aperçu que, finalement, dans chacune des grandes questions qui actuellement menacent la survie de l'espèce humaine, ces questions ne se poseraient pas sous la forme actuelle, la menace à la survie ne se poserait pas, si l'état de notre science était celle de l'an 1900, par exemple."

"Après tout, je suis mathématicien moi-même et cela m'aurait fait plaisir de savoir que mes connaissances mathématiques pouvaient servir à quelque chose de socialement positif. Or, depuis deux ans que j'essaie de comprendre un petit peu le cours que la société est en train de prendre, les possibilités que nous avons pour agir favorablement sur ce cours, en particulier les possibilités que nous avons pour permettre la survie de l'espèce humaine et pour permettre une évolution de la vie qui soit digne d'être vécue, que la survie en vaille la peine, mes connaissances de scientifique ne m'ont pas servi une seule fois."

—Alexandre Grothendieck

Cette section est une introduction aux outils présents à travers l'ensemble du manuscrit. Nous présentons d'abord les notions de base de la théorie des espaces de Berkovich. Ces espaces ont été développés dans les texte fondateurs [4] puis [2]. Pour une première introduction, nous recommandons la lecture du très pédagogique exposé [19]. Pour d'autres textes introductifs au sujet, nous recommandons la lecture de [52] et [35] qui sont deux notes de cours, ainsi que de la très bonne introduction du manuscrit [41]. En ce qui concerne la théorie locale, c'est à dire l'analyse non archimédienne et les semi-normes, l'ouvrage [7] est une très bonne référence.

1.1 Analyse non archimédienne

Tous les anneaux considérés dans la suite de ce texte seront commutatifs et unitaires.

1.1.1 Définition. *Considérons k un corps. Une valeur absolue non archimédienne ou ultramétrique sur k est une application $|.| : k \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $|1| = 1$,
2. *Pour $x \in k$, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$,*
3. *Pour tout $x, y \in k$, on a la propriété $|xy| = |x||y|$,*
4. *Pour tout $x, y \in k$, on a la propriété $|x - y| \leq \max(|x|, |y|)$.*

Un corps non archimédien complet sera un corps muni d'une valeur absolue ultramétrique et complet cette valeur absolue.

1.1.2 Exemple.

1. N'importe quel corps k muni de la valeur absolue qui envoie un élément non nul sur 1 et qui envoie 0 sur 0 est un corps non archimédien complet, appelé corps trivialement valué. Cet exemple est plus important que ce qu'on pourrait penser.
2. Soit $p \in \mathbb{P}$ un nombre premier. Pour $x \in \mathbb{Q}^*$, soient $(a_x, b_x) \in \mathbb{Z}^2$ l'unique couple d'entiers tels que $b_x > 0$, $a_x \wedge b_x = 1$ et $x = \frac{a_x}{b_x}$. Alors la fonction $|.|_p : x \in \mathbb{Q}^* \mapsto p^{(-v_p(a_x)+v_p(b_x))}$ où $v_p(c)$ désigne l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premier de c et qui envoie zéro sur zéro est une valeur absolue ultramétrique, appelée valuation p-adique. Le complété de $\mathbb{Q}$ pour la topologie induite par cette valuation est un corps non archimédien complet $\mathbb{Q}_p$, appelé corps des nombres p-adiques.

Sur un corps non archimédien complet k, c'est un exercice de vérifier les propriétés suivantes :

1.1.3 Proposition.

1. *Pour $x, y \in k$, si $|x| \neq |y|$, alors $|x + y| = \max(|x|, |y|)$.*
2. *Les boules ouvertes sont fermées topologiquement, les boules fermées de rayon strictement positif sont ouvertes topologiquement.*
3. *La topologie sur k est totalement discontinue, c'est à dire que les seules parties connexes non vide de k sont les singletons.*
4. *Tous les triangles sont isocèles.*
5. *Tout point d'une boule en est un centre.*

On a aussi la proposition suivante, dont la première partie se trouve en proposition 2.5 du chapitre 12 de [38] et au chapitre 2, section 4, théorème 4.8 de [43], et la second partie se trouve énoncé comme le premier théorème de la section 5 du chapitre 2 de [10].

1.1.4 Proposition. *Soit $(k, |.|)$ un corps non archimédien complet. On fixe $\bar{k}$ une clôture algébrique de k.*

1. *Pour toute extension algébrique L de k, la valeur absolue sur k s'étend de manière unique en une valeur absolue sur L. En particulier, il existe une unique valeur absolue sur $\bar{k}$ dont la restriction à k coïncide avec $|.|$. Nous la dénoterons encore $|.|$.*
2. *La complétion $\hat{\bar{k}}$ de $(\bar{k}, |.|)$ est encore un corps algébriquement clos. C'est donc un corps algébriquement clos ultramétrique et complet.*

1.1.5 Définition. *Considérons A un anneau, et $f : A \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction. Alors la fonction f est :*

1. *sous-multiplicative si pour tout ensemble fini I et pour toute famille $(a_i)_{i\in I} \in A^I$, on dispose de l'inégalité $f(\prod_{i\in I} a_i) \leq \prod_{i\in I} f(a_i)$.*
2. *multiplicative si pour tout ensemble fini I et pour toute famille $(a_i)_{i\in I} \in A^I$, on dispose de l'égalité $f(\prod_{i\in I} a_i) = \prod_{i\in I} f(a_i)$.*

1.1.6 Définition. *Considérons A un anneau. Une semi-norme sur A est une fonction $|.| : A \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. $|0| = 0$.
2. *$|.|$ est sous-multiplicative.*
3. *Pour tout $x, y \in A$, on a l'inégalité $|x - y| \leq |x| + |y|$.*

Cette semi-norme est non archimédienne si elle vérifie de plus pour tout $x, y \in A$, l'inégalité $|x - y| \leq \max(|x|, |y|)$. C'est une norme si l'ensemble des éléments de semi-norme nulle est réduit à l'élément nul.

1.1.7 Définition. *Deux semi-normes $|.|_1$ et $|.|_2$ sur un anneau A sont équivalentes s'il existe $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $a \in A$, on a $C_1|a|_1 \leq |a|_2 \leq C_2|a|_2$.*

1.1.8 Définition. *Un anneau de Banach est un anneau muni d'une norme pour lequel il est complet.*

1.1.9 Définition. *Considérons $(A, |.|)$ un anneau, muni d'une semi-norme. Un A-module semi-normé M est un A-module M muni d'une fonction $|.|_M : M \to \mathbb{R}_+$ vérifiant :*

1. *pour tout $x, y \in M$, on a l'inégalité $|x - y| \leq |x| + |y|$*
2. *il existe une constante strictement positive $C_M > 0$ telle que pour tout $a \in A$ et $m \in M$ on ait l'inégalité $|am|_M \leq C_M|a||m|_M$.*

Cette semi-norme est non archimédienne si elle vérifie de plus pour tout $x, y \in M$, l'inégalité $|x - y| \leq \max(|x|, |y|)$. C'est une norme si l'ensemble des éléments de semi-norme nulle est réduit à l'élément nul.

Considérons $(A, |.|_A)$ un anneau muni d'une semi-norme, et I un idéal de A. Alors on définit une semi-norme sur A/I par la formule $|x + I|_{A/I} := \{\inf(|y|_A; x - y \in I)\}$. Cette

semi-norme est appelée semi-norme quotient induite par $|.|_A$ sur A/I. Si la norme $|.|_A$ est non archimédienne, alors la semi-norme quotient est non archimédienne, et si $|.|_A$ est une norme et que I est un idéal fermé, alors la semi-norme quotient est en fait une norme sur A/I.

1.1.10 Définition. *Considérons $(A, |.|_A)$ et $(B, |.|_B)$ deux anneaux semi-normés et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux. Alors :*

1. *Le morphisme f est borné lorsqu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $a \in A$, on a $|f(a)|_B \leq C|a|_A$.*
2. *Le morphisme f est dit admissible si la semi-norme quotient sur $A/\mathrm{Ker}(f)$ induite par la norme $|.|_A$ est équivalente à la semi-norme induite sur $\mathrm{Im}(f)$ par la norme $|.|_B$.*

On dispose dans les deux contextes précédents d'une opération de complétion :

1.1.11 Proposition. *Considérons $(A, |.|)$ un anneau muni d'une semi-norme. Alors l'ensemble $\hat{A}$ des classes d'équivalences de suites de Cauchy à coefficient dans A est muni d'une norme $|.|'$. L'anneau $(\hat{A}, |.|')$ est complet, et on dispose d'un morphisme d'anneaux munis de semi-norme borné et admissible $A \to \hat{A}'$ qui est d'image dense et à valeur dans un anneau normé complet. Ce morphisme est universel pour cette propriété. La norme $|.|'$ est non archimédienne si et seulement si la norme $|.|$ l'est.*

1.1.12 Proposition. *Considérons $(A, |.|)$ un anneau muni d'une semi-norme. Soit M un A-module semi-normé. Alors l'ensemble $\hat{M}$ des classes d'équivalences de suites de Cauchy à coefficient dans M est muni d'une norme $|.|'$. Le module $(\hat{M}, |.|')$ est complet et l'on dispose d'un morphisme de modules munis de semi-normes $M \to \hat{M}$ qui est admissible, d'image dense, à valeur dans un module normé complet et universel pour cette propriété. De plus, $(\hat{M}, |.|')$ est non archimédien si et seulement si M l'est.*

Soit A un anneau non archimédien normé. Soient M et N deux A-modules non archimédien normés. Alors on peut munir le produit tensoriel $M \otimes_{\mathcal{A}} N$ de la semi-norme suivante :

$$||x|| := \inf\{\max_{i=1,\dots,n} |n_i||m_i|; x = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes n_i\}$$

1.1.13 Définition. *Le produit tensoriel complété de M et N au dessus de A, noté $M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}N$ est défini comme le complété au sens de la proposition précédente du module $M \otimes_A N$. C'est un module de Banach au dessus de A et au dessus de $\hat{A}$.*

Cette construction est de première importance, puisque tous les produits fibrés du monde analytique font apparaître des produits tensoriels complétés.

On donne maintenant le théorème suivant dû à Gruson dans la partie 3 de [29], qui montre qu'au dessus d'un corps, le produit tensoriel complété possède de bonnes propriétés.

La preuve de ce résultats consiste à se ramener à des espaces vectoriels de dimension finie, en montrant que certains produits tensoriels complétés commutent aux limites inductives.

1.1.14 Théorème. *Considérons k un corps non archimédien complet.*

1. *Soient M et N deux k-espaces de Banach ultramétriques. Alors le morphisme canonique $M \otimes_k N \to M \hat{\otimes}_k N$ est injectif d'image dense.*
2. *Si l'on se donne M, N, Q et P des k-espaces de Banach, ainsi qu'une suite exacte admissible de k-espaces de Banach*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

Alors la suite

$$0 \longrightarrow M \hat{\otimes}_k Q \longrightarrow N \hat{\otimes}_k Q \longrightarrow P \hat{\otimes}_k Q \longrightarrow 0$$

est aussi exacte et admissible. La réciproque est vraie si Q est une extension de corps ultramétrique de k.

1.2 Spectre de Berkovich d'un anneau de Banach

Nous allons maintenant définir le spectre de Berkovich d'un anneau de Banach. Les spectres de certaines algèbres de séries convergentes seront les analogues dans le monde analytique des schémas affines. À partir de cette section, tous les espaces, modules, anneaux et algèbres de Banach seront supposés ultramétriques.

1.2.1 Définition. *Considérons $(A, |.|_A)$ un anneau de Banach, c'est à dire un anneau muni d'une norme $|.|_A$ qui en fait un espace complet. Une semi norme $|.|$ sur A est bornée s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $a \in A$, on a l'inégalité $|a| \leq C|a|_A$*

1.2.2 Définition. *Considérons $(A, |.|_A)$ un anneau de Banach. Alors le spectre (de Berkovich) de A est l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées sur A, muni de la topologie la plus grossière rendant continues les applications $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}, |.| \mapsto |f|$ pour tout $f \in A$.*

Dans la suite de ce texte, si l'on se donne $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, nous noterons la semi-norme associée $|.|_x$ et pour $f \in A$, on notera $|f(x)| = |f|_x$ l'évaluation de f en x. Le spectre de A est ainsi un espace topologique sur lequel on peut interpréter les éléments de A comme des fonctions.

Prenons un anneau de Banach A, et $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Notons l'ensemble $\ker |.|_x$ des éléments $f \in A$ tels que $|f(x)| = 0$. Alors par multiplicativité de x, l'ensemble $\ker |.|_x$ est un idéal premier de A, et x induit une semi-norme sur le quotient $A/\ker |.|_x$, qui par multiplicativité peut être étendue à une norme sur $\mathrm{Frac}(A/\ker |.|_x)$.

1.2.3 Définition. *Soit A un anneau de Banach et $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On définit le corps résiduel complété en x comme la complétion $\mathcal{H}(x)$ de $\mathrm{Frac}(A/\ker|.|_x)$ par rapport à la norme induite par x. Si k est un corps non archimédien complet, et que A est une k-algèbre de Banach, on dispose d'un plongement $k \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$ faisant de $\mathcal{H}(x)$ une extension complète de k. Pour $f \in A$, on notera $f(x)$ l'image dans $\mathcal{H}(x)$ de f.*

On donne maintenant quelques propriétés des spectres d'anneaux de Banach, qui sont énoncées dans [4].

1.2.4 Théorème. *Considérons A et B deux anneaux de Banach :*

1. *l'application $\mathcal{M}(A) \to \mathrm{Spec}(A), x \mapsto \ker|.|_x$ est continue et son image contient tous les idéaux maximaux de A. En particulier, $\mathcal{M}(A)$ est non vide dès que A est non nul.*
2. *l'espace $\mathcal{M}(A)$ est un espace topologique compact (quasi-compact et séparé) et non vide si A est non nul.*
3. *Un élément $f \in A$ est inversible si et seulement $|f(x)| \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{M}(A)$.*
4. *la construction du spectre est fonctorielle : pour tout morphisme borné d'anneaux de Banach $\varphi : A \to B$, on dispose d'une application continue $\mathcal{M}(\varphi) : \mathcal{M}(B) \to \mathcal{M}(A)$ définie pour $y \in \mathcal{M}(B)$ et $f \in A$ par $\mathcal{M}(\varphi)(y)(f) = |\varphi(f)|_y$.*

   Si l'on se donne $x \in \mathcal{M}(A)$, alors la fibre de $\mathcal{M}(\varphi)$ au dessus de x s'identifie naturellement à l'espace $\mathcal{M}(B\hat{\otimes}_A\mathcal{H}(x))$.

1.2.5 Remarque. Considérons $\mathcal{A}$ une k-algèbre de Banach complète non nulle, ainsi qu'une extension complète L de k. Si l'on note $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $X_L = \mathcal{M}(\mathcal{A}_L)$, on dispose d'une flèche naturelle $X_L \to X$. Alors cette flèche est toujours surjective. En effet, la fibre en un point $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ s'identifie à $\mathcal{M}(L\hat{\otimes}_k\mathcal{H}(x))$ et par le théorème de Gruson 1.1.14, on dispose d'une injection $L \otimes_k \mathcal{H}(x) \to L\hat{\otimes}_k\mathcal{H}(x)$ donc ce dernier espace est non nul, donc par le point 1 du théorème précédent, la fibre $\mathcal{M}(L \otimes_k \mathcal{H}(x))$ est non vide.

1.2.6 Remarque. Les spectres de Berkovich sont les objets locaux dont le recollement permet de définir les espaces analytiques de Berkovich globaux. Le fait que les briques de bases de la théorie ne soient pas ouvertes comme en géométrie algébrique, analytique complexe ou différentielle mais compactes rend la construction précise des espaces de Berkovich globaux assez technique.

1.3 Espaces affinoïdes

Dans toute cette section, on fixe un corps non archimédien complet k. Nous allons commencer par définir la notion d'algèbre affinoïde, qui joue en géométrie analytique ultramétrique l'équivalent du rôle des algèbres de type fini sur un corps en géométrie

algébrique. Pour $n \in \mathbb{N}$, un n-uplet de réels strictement positifs sera appelé un polyrayon de taille n.

1.3.1 Définition. *Pour toute famille finie $r = (r_1, ..., r_n)$ d'éléments de $\mathbb{R}_*^+$, notons $k\{r^{-1}T\}$ la sous algèbre des séries formelles à plusieurs variables sur k définie par :*

$$k\{r^{-1}T\} = k\{r_1^{-1}T_1, ..., r_n^{-1}T_n\} := \left\{ f = \sum_{I \in \mathbb{N}^n} a_I T^I, a_I \in k, \lim_{|I| \mapsto \infty} |a_I| r^I = 0 \right\}$$

avec pour $I = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}^n, |I| = i_1 + ... + i_n$, $T^I = T_1^{i_1} ... T_n^{i_n}$ et $r^I = r_1^{i_1} ... r_n^{i_n}$. Alors $k\{r^{-1}T\}$ est une k-algèbre de Banach non archimédienne pour la norme multiplicative :

$$||f|| = \max_{I \in \mathbb{N}^n} |a_I| r^I.$$

L'algèbre $k\{r^{-1}T\}$ est le complété de l'anneau des polynômes en n variables pour la norme précédente. Ses idéaux sont tous fermés.

1.3.2 Définition. *-algèbre de Banach Une k-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est k-affinoïde s'il existe un n-uplet de réels positifs $r = (r_1, ..., r_n)$, et un morphisme surjectif et admissible $k\{r^{-1}T\} \to \mathcal{A}$. Lorsqu'un tel morphisme existe avec un polyrayon r dont les coordonnées sont dans le groupe des valeurs de k, on dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre strictement k-affinoïde.*

Les premières tentatives pour donner une définition satisfaisante de ce que serait un espace analytique ultramétrique sont dûes à Tate. La classe d'objets qu'il introduit est la classe des espaces analytiques rigides, et localement, les algèbres de fonctions sur ces espaces sont des algèbres strictement k-affinoïdes. La théorie de ces algèbres, exposée dans [7] s'est développée dans son sillage pour résoudre les problèmes locaux de la géométrie rigide.

Les algèbres strictement k-affinoïdes partagent plusieurs propriétés des algèbres de type fini sur k, comme le Nullstellensatz, ou bien l'existence d'une version du lemme de normalisation de Noether. Il n'existe pas à notre connaissance d'ouvrage qui traiterait systématiquement les algèbre k-affinoïdes non strictes. Néanmoins, dans son premier livre [4], Berkovich développe une technique qui permet de ramener l'étude et les problèmes concernant les algèbres k-affinoïdes à des énoncés concernant les algèbres strictement k-affinoïde. Nous introduisons cette technique, que nous utiliserons tout au long de notre travail :

1.3.3 Proposition. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et r un polyrayon de taille n. On note k_r la k-algèbre :*

$$k_r := \left\{ \sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I T^I | a_I \in k, \lim_{|I| \mapsto \infty} |a_I| r^I = 0 \right\}.$$

Alors l'application $||.|| : \sum_{I\in\mathbb{Z}^n} a_I T^I \mapsto \max_{I\in\mathbb{Z}^n} |a_I| r^I$ *définit une norme multiplicative sur* k_r *qui en fait une algèbre de Banach et on dispose d'un isomorphisme isométrique de* k*-algèbre* $k_r \simeq k\{r^{-1}X, rY\}/(X_iY_i - 1)_i$ *qui fait de* k_r *une algèbre* k*-affinoïde. De plus, si le polyrayon est* k*-libre, c'est à dire si la famille* $(r_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ *est linéairement indépendante sur* $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} |k^*|$*, alors* k_r *est un corps qui est non trivialement valué.*

La proposition suivante est cruciale, puisqu'elle permet de ramener l'étude des algèbres k-affinoïdes à celles des algèbres strictement k-affinoïdes :

1.3.4 Proposition. *Pour toute algèbre* k*-affinoïde* $\mathcal{A}$*, il existe un polyrayon* k*-libre* r *tel que l'algèbre* $\mathcal{A}_r := \mathcal{A}\hat{\otimes} k_r$ *soit strictement* k_r*-affinoïde.*

1.3.5 Proposition. *Considérons* $\mathcal{A}$ *une algèbre de Banach, et* r *un polyrayon* k*-libre. Alors :*

1. *L'application* $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_r := \mathcal{A}\hat{\otimes}_k k_r$ *est un plongement isométrique.*
2. *Une suite d'homomorphismes bornés de* k*-espaces de Banach* $A \to B \to C$ *est exacte admissible si et seulement si la suite de* k_r*-espaces de Banach* $A_r \to B_r \to C_r$ *est exacte admissible.*

On donne maintenant une liste de propriétés de ces algèbres k-affinoïdes :

1.3.6 Théorème.

1. *Le produit tensoriel complété de deux algèbres* k*-affinoïdes au dessus d'une troisième est* k*-affinoïde.*
2. *Si* L *est une extension non archimédienne complète de* k *et que* $\mathcal{A}$ *est une algèbre* k*-affinoïde, alors* $\mathcal{A}\hat{\otimes}_k L$ *est une algèbre* L*-affinoïde.*
3. *Les algèbres affinoïdes sont noethériennes, et leurs idéaux sont fermés.*
4. *Les algèbres affinoïdes sont excellentes.*
5. *On dispose d'un lemme de Noether dans le cas strict. Si la* k*-algèbre* $\mathcal{A}$ *est strictement* k*-affinoïde, on dispose d'un morphisme de* k*-algèbre fini, injectif et admissible* $k\{T_1, ..., T_n\} \to \mathcal{A}$*.*
6. *On dispose d'un Nullstellensatz dans le cas strict : si* $\mathcal{A}$ *est strictement* k*-affinoïde non nulle, alors on dispose d'un morphisme d'algèbre* $\mathcal{A} \to L$ *avec* L *une extension finie de* k*.*

Le premier point se prouve de manière directe élémentairement. Le troisième point est démontré par Berkovich à partir du cas strict dans [4]. L'excellence est due à Kielh dans [36] dans le cas strict, et à Ducros dans [22] dans le cas général. Les autres résultats sont montrés dans [7] pour les algèbres strictement affinoïdes et sont la conséquences de théorèmes de type préparation/division de Weierstrass.

1.4 Modules et algèbres finis sur une algèbre k-affinoïde

1.4.1 Définition. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde. Alors un module de Banach M est fini s'il existe une surjection admissible $\mathcal{A}^n \twoheadrightarrow M$ d'un module libre $\mathcal{A}^n$ muni de la norme $||(a_1, ..., a_n)|| := \max_{i\in\{1,...,n\}} |a_i|$ vers M.*

Une k-algèbre de Banach $\mathcal{A}$ est finie si elle est finie en tant que $\mathcal{A}$-module.

Le théorème suivant, énoncé dans [4] montre que dans le cas fini, on peut souvent « oublier »la topologie des modules mis en jeux.

1.4.2 Théorème. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde. Alors le foncteur d'oubli induit une équivalence de catégorie entre la catégorie des $\mathcal{A}$-modules de Banach finis (resp. des $\mathcal{A}$-algèbres de Banach finies) et la catégorie des $\mathcal{A}$-modules (resp. des $\mathcal{A}$-algèbres finies).*

La proposition suivante, disponible dans les notes [52] montre aussi que l'opération de complétion est superflue lorsque l'on travaille avec des modules finis au dessus d'une algèbre k-affinoïde.

1.4.3 Proposition. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, et M un $\mathcal{A}$-module de Banach fini. Alors pour tout $\mathcal{A}$-module de Banach N, le morphisme naturel de $\mathcal{A}$-modules $M\otimes_{\mathcal{A}}N \to M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}N$ est un isomorphisme.*

1.4.4 Remarque. Par le corollaire 3.7.3.6 de [7], le résultat vaut plus généralement pour $\mathcal{A}$ une k-algèbre de Banach noethérienne, M un A-module fini et N une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach noethérienne.

1.5 Espaces k-affinoïde, théorie locale

Dans cette section, on fixe un corps k ultramétrique complet.

1.5.1 Définition. *Pour $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, on appelle espace k-affinoïde associé à $\mathcal{A}$ l'espace topologique $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Un morphisme d'espace k-affinoïdes d'un espace k-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ vers un espace k-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ sera la donnée d'un morphisme borné de k-algèbres de $\mathcal{A}$ vers $\mathcal{B}$. La catégorie des espaces k-affinoïdes sera notée Aff_k. On dispose d'un foncteur de réalisation topologique $\mathrm{Top}_{\mathrm{Aff_k}} : \mathrm{Aff}_k \to \mathrm{Top}$ de la catégorie des espaces k-affinoïde vers la catégorie des espaces topologiques.*

1.5.2 Définition. *Un morphisme $\varphi : Y = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est fini (resp. une immersion fermée) si le morphisme de k-algèbres de Banach sous jacent fait de $\mathcal{B}$ un $\mathcal{A}$-module de Banach fini (resp. si $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est une surjection admissible).*

1.5.3 Remarque. La catégorie des espaces k-affinoïdes admet des produits fibrés : le produit fibré $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \times_{\mathcal{M}(\mathcal{A})} \mathcal{M}(\mathcal{C})$ est simplement $\mathcal{M}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})$. De plus, si L est une extension complète de k, on dispose d'un foncteur de changement de base de la catégorie des espaces

k-affinoïdes vers la catégorie des espaces L-affinoïdes, qui à un espace k-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe l'espace L-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_k L)$.

1.5.4 Exemple. Pour $r = (r_1, ..., r_n)$ un polyrayon, l'espace $\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$ est le polydisque fermé de rayon r. Considérons un élément $s \in \prod_{i=\{1,...,n\}}[0, r_i]$. Alors l'application $\eta_s : \sum_{I\in\mathbb{N}^n} a_I T^I \mapsto \max_{I\in\mathbb{N}^n} |a_I| s^I$ est une semi-norme multiplicative sur $k\{r^{-1}T\}$ et l'application $s \in \prod_{i=\{1,...,n\}}[0, r_i] \mapsto \eta_s$ induit un plongement de $\prod_{i=\{1,...,n\}}[0, r_i]$ dans $\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$.

On définit maintenant la notion de domaine affinoïde. Si l'on se donne $X = \mathrm{Spec}A$ un schéma affine, alors on peut caractériser les ouverts affines de la sorte : une partie $U \subset X$ est un ouvert affine de X si et seulement si elle est ouverte et s'il existe une A-algèbre A_U telle que l'image de $\mathrm{Spec}A_U$ dans X est exactement U, et qu'elle est universelle pour cette propriété : tout morphisme $A \to B$ d'anneaux tel que l'image de $\mathrm{Spec}B$ dans $\mathrm{Spec}A$ est contenue dans U se factorise de manière unique par $A \to A_U$. L'idée de Berkovich est de définir les domaines affinoïdes d'un espace affinoïde par cette propriété :

1.5.5 Définition. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde et soit V une partie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. On dit que V est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ s'il existe une $\mathcal{A}$-algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}_V$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

1. *L'image de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est égale à V.*
2. *Tout morphisme $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ d'algèbres k-affinoïdes tel que l'image de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit contenue dans V se factorise de manière unique par $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_V$.*

1.5.6 Remarque. Cette définition n'est pas exactement celle que donne Berkovich dans [4], mais par le corollaire 3.2 de [51], elle est équivalente.

1.5.7 Exemple. Soit $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace k-affinoïde, et $g, f_1, ..., f_n$ des éléments de $\mathcal{A}$ sans zéro commun dans X (l'idéal que ces éléments engendrent est alors $\mathcal{A}$). Soit $r = (r_1, ..., r_n)$ un polyrayon. Alors l'ensemble $V := \{x \in X; |f_i(x)| \leq r_i|g(x)|\}$ est un domaine affinoïde de X, appelé domaine rationel de X, dont la $\mathcal{A}$-algèbre k-affinoïde associée est $\mathcal{A}_V = \mathcal{A}\{r^{-1}T\}/(gT - f_i)_{i=\{1,...n\}}$.

1.5.8 Proposition. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, et V un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors :*

1. *La $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}_V$ est unique à unique isomorphisme près.*
2. *L'application $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V) \to V$ est un homéomorphisme, et V est donc compact.*
3. *Un sous-ensemble W dans $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ si et seulement si c'est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*
4. *Si $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme d'algèbre k-affinoïdes, alors l'image réciproque de V sur $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, dont l'algèbre de fonction associée est $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}_V$. En particulier, l'intersection de deux domaines affinoïdes de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un domaine affinoïde.*

5. *Si L est une extension complète de k, alors l'image réciproque de V sur $\mathcal{M}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_k L)$ est un domaine affinoïde de $\mathcal{M}(\mathcal{A}\hat{\otimes}_k L)$, dont l'algèbre de fonctions associées est $\mathcal{A}_V\hat{\otimes}_k L$.*
6. *La $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}_V$ est plate.*
7. *L'ensemble des domaines affinoïdes de X forme une base de voisinages de X.*
8. *Si l'on prend $x \in V$, alors le corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ calculé dans V et dans X est le même.*

Ces résultats sont énoncés dans [4]. Les points deux et six sont délicats. On peut les montrer en se ramenant au cas strict par une tensorisation idoine et grâce aux résultat de Gruson 1.1.14, puis utiliser les résultats de [7]. Le point 8 est aussi délicat, on peut le montrer grâce au théorème de Gerritzen-Grauert qui suit, et qui fournit la structure des domaines affinoïdes.

1.5.9 Théorème (de Gerritzen-Grauert)**.** *Soit X un espace k-affinoïde. Alors tout domaine affinoïde de X est une union finie de domaines affinoïdes rationnels.*

Une version de ce théorème était disponible en géométrie rigide, mais la démonstration de ce théorème était difficile et longue. Ducros a proposé dans [24] une preuve de ce théorème dans le cas non strict en tensorisant par un corps idoine pour se ramener au cas strict, puis en utilisant une quasi-section (de Shilov) au morphisme de tensorisation complétion. La version rigide de ce théorème était nécessaire à Berkovich pour développer les bases de sa théorie, mais Temkin a donné dans [51] une démonstration dans le cas non strict de ce théorème qui ne reposait pas sur la version rigide, et qui consiste à caractériser les monomorphismes d'espaces affinoïdes en utilisant des outils de théorie de la réduction.

1.6 Faisceau structural

L'objectif est maintenant de définir sur un espace affinoïde un faisceau structural. L'outil pour cela, l'analogue du fait que le préfaisceau structural d'un schéma affine est un faisceau, est le théorème suivant :

1.6.1 Théorème (d'acyclicité de Tate)**.** *Considérons un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, et un recouvrement $X = \bigcup_{i=\{1,\dots,n\}} V_i$ de X par un nombre fini de domaines affinoïdes V_i. Considérons M un $\mathcal{A}$-module de Banach fini. Alors le complexe suivant est exact et admissible :*

$$0 \to M \longrightarrow \prod_{i\in\{1,\dots,n\}} M_i \longrightarrow \prod_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} M_{ij} \longrightarrow \dots$$

avec pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$, $M_i := M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i}$ et $M_{ij} := M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_{V_i\cap V_j}$.

1.6.2 Définition. *Un sous ensemble V d'un espace k-affinoïde X est spécial s'il s'écrit comme une union fine de domaines affinoïdes de X. On note $S(X)$ l'ensemble des sous-ensembles spéciaux de X. On définit une topologie de Grothendieck sur la catégorie des ensembles spéciaux en décrétant qu'un recouvrements d'un ensemble spécial fixé $V \subset X$ est donné par un recouvrement ensembliste de V par un nombre fini d'ensembles spéciaux de X. Cette topologie de Grothendieck est appelée G-topologie (spéciale).*

Le théorème d'acyclicité de Tate permet de définir un faisceau de k-algèbres pour la G-topologie, c'est la proposition 2.2.6 de [4]. L'admissibilité dans le théorème d'acyclicité est cruciale pour doter ces k-algèbres d'une structure d'algèbre de Banach.

1.6.3 Corollaire. *Considérons X un espace k-affinoïde, $V \in S(X)$ et $V = \bigcup_{i\in\{1,\dots,n\}} V_i$ un G-recouvrement de V par un nombre fini de domaines affinoïdes $(V_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. On définit $\mathcal{A}_V$ par :*

$$\mathcal{A}_V := \ker\left(\coprod_{i\in\{1,\dots,n\}} \mathcal{A}_{V_i} \to \coprod_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2} \mathcal{A}_{V_i\cap V_j}\right).$$

Alors :

1. *La $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}_V$ est une k-algèbre de Banach qui ne dépend pas du G-recouvrement $(V_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ choisi.*
2. *La formule $V \mapsto \mathcal{A}_V$ définit un faisceau en k-algèbres de Banach pour la G-topologie sur X.*
3. *Un élément $V \in S(X)$ est un domaine affinoïde de X si et seulement si la $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{A}_V$ est k-affinoïde et l'application naturelle $V \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_V)$ est bijective.*

On peut de même définir un faisceau de k-algèbres sur la catégorie des ouverts d'un espace affinoïde :

1.6.4 Proposition. *Considérons X un espace k-affinoïde. Alors la formule $U \mapsto \mathcal{O}_X(U) := \varprojlim_{V\subset U} \mathcal{A}_V$, où la limite porte sur les ensemble spéciaux $V \subset U$ inclus dans U définit un faisceau en k-algèbres sur la catégorie des ouverts de X.*

1.6.5 Remarque. Contrairement au faisceau de k-algèbres de Banach sur la G-topologie, pour U ouvert, $O_X(U)$ n'est pas fourni avec une norme naturelle, mais plutôt une famille de classes d'équivalences de normes.

1.7 Anneaux locaux

Pour un espace k-affinoïde X, et $x \in X$, x induit une semi-norme sur la fibre de $\mathcal{O}_X$ en x, notée $\mathcal{O}_{X,x}$. Cette fibre est un anneau local, d'idéal maximal noté m_x et vérifiant $m_x = \{f \in \mathcal{O}_{X,x}; |f(x)| = 0\}$. Le corps résiduel de $\mathcal{O}_{X,x}$ est $k(x) := \mathcal{O}_{X,x}/m_x$.

1.7.1 Proposition. *On dispose d'un plongement canonique* $k(x) \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$*, et* $k(x)$ *est dense dans* $\mathcal{H}(x)$*.*

1.7.2 Définition. *Considérons* $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *un espace* k*-affinoïde. Alors on dispose de l'application continue noyau* $\ker : X \to \mathcal{X} := \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ *qui envoie une semi-norme* x *sur son noyau* $\ker(|.|_x)$*. Cette application induit pour* $x \in X$ *un morphisme d'anneau locaux* $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\ker(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$*.*

On dispose du théorème suivant, énoncé en 2.1.1 de [2], dont le canevas de démonstration est assez classique : on se ramène au cas strict par tensorisation chapeau avec k_r pour r un polyrayon bien choisi, puis dans le cas strict, on dispose du lemme de normalisation de Noether, qui permet de se ramener au cas d'un polydisque $\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$ qui se traite à la main.

1.7.3 Théorème. *Considérons un espace* k*-affinoïde* $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$*. Alors l'application noyau* $\ker : X \to \mathcal{X} := \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ *est surjective.*

1.7.4 Théorème. *Considérons un espace* k*-affinoïde* $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$*, ainsi que* $\mathcal{X} = \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$*.*

1. *La fibre* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est un anneau noethérien et fidèlement plat au dessus de* $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\ker(x)}$*. La flèche induite au niveau de leurs spectres est même un morphisme régulier de schémas, c'est à dire plat et à fibre géométriquement régulières.*
2. *La fibre* $\mathcal{O}_{X,x}$ *est un anneau local hensélien et excellent.*

Le premier point du résultat précédent est dans [2] en 2.1.3 et 2.1.4. La démonstration consiste à se ramener au cas rigide strict par une tensorisation chapeau idoine. Le caractère hensélien de $\mathcal{O}_{X,x}$ n'est pas très long à montrer, c'est la proposition 2.1.5 de [2]. L'excellence des anneaux locaux, quant à elle est un résultat plus difficile, démontré par Ducros dans [23] en 2.13.

1.8 Bord et intérieur

Nous présentons maintenant la notion de bord (absolu) d'un espace k-affinoïde, et celle de bord (relatif) d'un morphisme entre espaces affinoïdes, qui sera une partie fermée de la source. Cette notion, exposée en 2.5 de [4] est spécifique à la théorie des espaces de Berkovich, et n'existe pas en géométrie rigide, algébrique ou complexe. Les morphismes sans bord jouent un rôle important dans la théorie.

1.8.1 Définition. *Considérons* $\varphi : Y \to X$ *un morphisme d'espaces* k*-affinoïdes, avec* $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *et* $Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$*. L'intérieur relatif de* φ*, noté* $\mathrm{Int}(Y/X) \subset Y$ *est l'ensemble des points* $y \in Y$ *tels qu'il existe* $n \in \mathbb{N}^*$*,* $r = (r_1, ..., r_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ *et une surjection admissible* $\mathcal{A}$*-linéaire* $\psi : \mathcal{A}\{r^{-1}T\} \to \mathcal{B}$ *vérifiant* $|\psi(T_i)(y)| < r_i$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$*.*

L'ensemble $Y \backslash \mathrm{Int}(Y/X)$ *est le bord relatif de* φ*, on le note* $\partial(Y/X)$*. On dit que* φ *est sans bord si* $\partial(Y/X) = \emptyset$*.*

Si $Y \to \mathcal{M}(k)$ *est le morphisme canonique, on note* $\mathrm{Int}(Y) := \mathrm{Int}(Y/\mathcal{M}(k))$ *l'intérieur (absolu) de* Y *et* $\partial(Y) := \partial(Y/\mathcal{M}(k))$ *le bord (absolu) de* Y*. L'espace* Y *est sans bord si* $\partial(Y) = \emptyset$*.*

1.8.2 Remarque. L'ensemble des points intérieurs d'un morphisme $Y \to X$ est ainsi l'ensemble des points $y \in Y$ tels qu'il existe une immersion fermée de Y dans un polydisque fermé relatif au dessus de X telle que l'image de y soit incluse dans le polydisque ouvert relatif correspondant.

On donne maintenant quelques propriétés du bord et de l'intérieur, démontrées par Berkovich dans la section 2.5 de [4].

1.8.3 Proposition. *Considérons* $\varphi : Y \to X$ *un morphisme d'espaces* k*-affinoïdes, avec* $Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$ *et* $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$*. Alors on a :*

1. *L'intérieur* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *est ouvert, et le bord* $\partial(Y/X)$ *est fermé.*
2. *L'interieur est compatible à la composition : si* $\psi : Z \to Y$ *est un morphisme d'espaces* k*-affinoïdes, on a la relation* $\mathrm{Int}(Z/X) = \mathrm{Int}(Z/Y) \cap \psi^{-1}(\mathrm{Int}(Y/X))$*.*
3. *Le morphisme* φ *est sans bord si et seulement si* $\mathcal{B}$ *est une* $\mathcal{A}$*-algèbre de Banach finie.*
4. *Si le morphisme* φ *est l'inclusion d'un domaine affinoïde* Y *de* X *dans* X*, alors* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *est l'intérieur topologique de* Y *en tant que partie de* X*.*

1.9 Espaces analytiques globaux

Pour globaliser la notion d'espace k-affinoïde, Berkovich a donné deux approches distinctes. La première approche, donnée dans [4] revient à définir un espace analytique comme étant un espace localement annelé « localement »isomorphe à un espace k-affinoïde $(\mathcal{M}(\mathcal{A}), \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{A})})$. La seconde approche, plus générale, exposée en terme d'atlas et de maillages (nets) dans [2] est celle que nous choisirons de présenter succinctement. Les espaces de la première approche correspondent aux *bons* espaces analytiques dans le cadre de la deuxième approche.

1.9.1 Définition. *Considérons* X *un espace topologique avec un ensemble* T *de parties de* X*.*

1. T *est un quasi-maillage sur* X *si chaque* $x \in X$ *possède un voisinage de la forme* $\bigcup_{i=\{1,\dots,n\}} V_i$ *avec* $V_i \in T$*, et* $x \in V_i$ *pour tout* $i \in \{1, \dots, n\}$*.*
2. T *est un maillage sur* X *si c'est un quasi-maillage et si pour tout* $V, U \in T$ *alors la restriction* $T_{|U \cap V} := \{W \in T; W \subset U \cap V\}$ *est un quasi-maillage de l'espace topologique* $U \cap V$*.*

3. *Considérons Y un sous-ensemble de X. On dit qu'une famille $T = (V_i)_{i\in I}$ de parties de Y est un G-recouvrement de Y si T est un quasi-maillage de Y.*

1.9.2 Remarque. Le terme original de Berkovich en anglais pour maillage est « net ». La terminologie française semble être due à Poineau dans [46].

1.9.3 Remarque. Comme la catégorie des ouverts de X, si T est un maillage sur X, alors T peut être vu comme une catégorie, dont les morphismes sont donnés par les inclusions. On dispose d'un foncteur de réalisation topologique $\mathrm{Top}_{\mathrm{T}} : T \to \mathrm{Top}$ de T vers la catégorie Top des espaces topologiques qui envoie un élément de T vers lui même considéré comme un espace topologique.

1.9.4 Définition (Espaces k-analytiques)**.** *Considérons X un espace topologique localement séparé. Un atlas de domaines k-affinoïdes sur X est la donnée d'un triplet (τ, φ, i), où τ est un maillage sur X, φ est un foncteur $\varphi : \tau \to \mathrm{Aff}_k$ qui envoie les morphismes de τ sur les inclusions de domaines affinoïdes, et i est un isomorphisme du foncteur Top_τ vers le foncteur $\mathrm{Top}_{\mathrm{Aff}_k} \circ \varphi$. Un espace k-analytique (de Berkovich) est un espace topologique localement de Hausdorff muni d'un atlas de domaines k-affinoïdes.*

1.9.5 Remarque. Se donner une structure d'espace k-analytique sur un espace localement de Hausdorff X revient à se donner un maillage τ sur l'espace X, et pour chaque élément $U \in \tau$, un espace k-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ ainsi qu'un homéomorphisme $i_U : U \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ vérifiant des conditions de compatibilités à la restriction.

1.9.6 Exemple. Un espace k-affinoïde possède une structure d'espace analytique, son maillage est composé des domaines affinoïdes qu'il contient, définis en 1.5.5.

1.9.7 Exemple. Considérons l'ensemble E des semi-normes multiplicatives sur $k[T]$ dont la restriction à k est bornée, muni de la topologie induite par la topologie produit de $\mathbb{R}^{k[T]}$. Pour tout réel strictement positif r, notons E_r le sous ensemble de E formé des $\varphi \in E$ tels que $|\varphi(T)|$ soit inférieur ou égal à r. Puisque $k\{r^{-1}T\}$ est la complétion de $k[T]$ pour la norme idoine, $\varphi \in E_r$ définit une unique semi-norme multiplicative $i_r(\varphi)$ sur $k\{r^{-1}T\}$, c'est à dire un élément de $\mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$. Maintenant, la correspondance $i_r : E_r \to \mathcal{M}(k\{r^{-1}T\})$ est un homéomorphisme, et on vérifie sans peine que la famille $(\tau = (E_r)_{r\in\mathbb{R}_*^+}, i_r)$ est un atlas de domaines k-affinoïdes sur E. Cet atlas fait de E un espace k-analytique, que nous appellerons la droite affine analytique sur k, et que nous noterons $\mathbb{A}_k^1$. On peut aussi effectuer cette construction en plusieurs variables, et munir l'ensemble des semi-normes multiplicatives sur $k[T_1, ..., T_n]$ dont la restriction à k est bornée d'une structure d'espace analytique. Nous appellerons l'espace analytique résultant l'espace analytique affine de dimension n sur k, et nous le noterons $\mathbb{A}_k^n$.

Nous ne définirons pas précisément ce que sont les morphismes d'espaces analytiques puisque la procédure est assez technique. Donnons en quand même un mot : considérons un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. On dispose sur X de deux structures d'espaces analytiques,

la première avec le maillage trivial constitué uniquement de X lui même, et la deuxième avec le maillage constitué de l'ensemble de ses domaines affinoïdes au sens de la définition 1.5.5. Nous voudrions évidemment donner une définition de morphismes d'espaces analytiques qui rende ces deux structures d'espace analytique isomorphes. Une technique pour cela est d'introduire une condition de maximalité sur les atlas (et le second atlas sur X sera maximal, alors que le premier ne le sera pas), puis une manière de rendre un atlas donné maximal, et enfin de définir les morphismes entre espaces analytiques dotés d'atlas maximaux. Sans dire précisément ce que sont les atlas maximaux, on donne la définition suivante :

1.9.8 Définition. *Considérons X un espace analytique muni d'un atlas* ***maximal*** $(\tau, \mathcal{A}, i)$ *et X' un espace analytique muni d'un atlas* ***maximal*** $(\tau', \mathcal{A}', i')$. *Alors un morphisme d'espaces analytiques f de X vers X' consiste en les données suivantes :*

1. *Une application continue $f : X \to X'$ encore notée f telle que pour tout $x \in X$, il existe $V_1, ..., V_n \subset X$ des éléments de τ et $V'_1, ..., V'_n \subset X'$ des éléments de τ' avec $f(V_i) \subset V'_i$ et vérifiant :*
   (a) *$x \in \bigcap_{i=\{1,...,n\}} V_i$ et $\bigcup_{i=\{1,...,n\}} V_i$ est un voisinage de x dans X.*
   (b) *$f(x) \in \bigcap_{i=\{1,...,n\}} V'_i$ et $\bigcup_{i=\{1,...,n\}} V'_i$ est un voisinage de $f(x)$ dans X'.*
2. *Un système de morphismes $(\varphi_{V/V'} : \mathcal{A}'_{V'} \to \mathcal{A}_V)$ de k-algèbres de Banach pour $V \in \tau$ et $V' \in \tau'$ tels que $f(V) \subset V'$, compatible à l'application continue f et à la restriction d'éléments de τ et τ'.*

1.9.9 Remarque. Les produits fibrés dans la catégorie des espaces k-analytiques existent, et de manière analogue aux schémas, la construction au niveau des espaces affinoïdes consiste à prendre le produit tensoriel complété des algèbres en jeu.

De même, si L est une extension complète de k, on dispose d'un foncteur d'extension des scalaires, de la catégorie des espaces k-analytiques vers la catégories des espaces L-analytiques qui à un espace k-analytique X associe un espace L-analytique noté X_L. On peut définir aussi une notion de morphisme d'un espace L-analytique vers un espace k-analytique et l'espace X_L vient de plus avec un morphisme de X_L vers X. Cette construction est juste la globalisation de ce qui se passait au niveau des algèbres affinoïdes, et par 1.2.5, cette flèche de X_L vers X est surjective.

1.9.10 Définition. *Un sous-ensemble Y d'un espace k-analytique X est un domaine analytique s'il est G-recouvert par les domaines affinoïdes qu'il contient. Autrement dit, si τ est le maillage définissant la structure d'espace analytique sur X, on dispose d'un recouvrement $Y = \bigcup_{i \in I} V_i$ avec $V_i \in \tau$, où la famille $(V_i)_{i \in I}$ est un quasi-maillage sur Y.*

1.9.11 Proposition. 1. *Tout domaine affinoïde d'un espace analytique est un domaine analytique.*

2. *Tout ouvert d'un espace analytique est un domaine analytique.*
3. *Considérons un espace analytique X, et une partie compacte V de X qui est une réunion finie de domaines affinoïdes de X. Alors V est un domaine analytique de X, qui est G-recouverte par cet ensemble fini de domaines affinoïdes.*
4. *Considérons un espace analytique X, et un domaine analytique U de X. Alors la structure analytique sur X induit une structure analytique sur U, ainsi qu'un morphisme d'espace analytique $U \hookrightarrow X$ tel que chaque morphisme d'espace analytique $Z \to X$ dont l'image ensembliste est incluse dans U se factorise par un morphisme d'espaces analytiques $Z \to U$.*
5. *L'image inverse d'un domaine analytique par un morphisme d'espaces analytiques est un domaine analytique.*
6. *L'intersection de deux domaines analytiques d'un espace analytique fixé est encore un domaine analytique.*

1.9.12 Définition. *Un espace analytique X est bon si chaque point $x \in X$ possède un voisinage affinoïde (ou une base de voisinage affinoïdes c'est équivalent).*

1.9.13 Remarque. La première approche proposée par Berkovich des espaces analytiques dans [4] est exactement la catégorie des bons espaces.

Pour X un espace analytique, nous voudrions maintenant définir un faisceau structural pour la G-topologie de X, c'est à dire la topologie de Grothendieck sur X dans laquelle on considère les domaines analytiques, et où un recouvrement de domaine analytique est donné par un G-recouvrement par d'autres domaines analytiques. Une manière de procéder est d'utiliser la droite affine analytique :

1.9.14 Proposition. *Soit X un espace analytique. Pour $Y \subset X$ un domaine analytique de X, on définit $\mathcal{O}_X(Y) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ann}_k}(Y, \mathbb{A}^1_k)$. Alors l'assignation $Y \mapsto \mathcal{O}_X(Y)$ définit un faisceau pour la G-topologie sur X. De plus, si $U \simeq \mathcal{M}(\mathcal{A}_U)$ est un domaine affinoïde de X, alors le morphisme naturel de k-algèbres $\mathcal{A}_U \to \mathcal{O}_X(U)$ est un isomorphisme. La restriction de ce faisceau aux ouverts de X fait aussi de X un espace localement annelé.*

Pour X un espace k-analytique et V un domaine affinoïde de X contenant x, le corps résiduel complété $\mathcal{H}(x)$ dans V ne dépend en fait pas de V, on le note encore $\mathcal{H}(x)$. On appelle point rigide de X l'ensemble des $x \in X$ tels que $[\mathcal{H}(x) : k] < \infty$.

1.9.15 Remarque. Si X est un espace analytique, et $x \in X$, alors grâce à la proposition précédente, on peut définir la fibre $\mathcal{O}_{X,x}$ en un point $x \in X$. Si l'espace est bon, cette fibre possède de bonnes propriétés, similaires au cas affinoïde (hensélien, excellent, noethérienne). Si l'espace n'est pas bon, on ne sait rien dire a priori.

1.10 Modules cohérents

La notion de quasi-cohérence n'est pas une bonne notion pour l'étude des espaces analytiques (cette notion n'est pas stable par limite directe ; la cohomologie d'un faisceau quasi-cohérent au dessus d'un affinoïde peut très bien ne pas s'annuler, voir [12] pour une discussion). La notion de cohérence, par contre est bien définie pour tout faisceau en anneaux sur un site, si bien que pour un espace analytique X, la notion de cohérence pour la G-topologie fait bien sens et possède de bonnes propriétés que nous donnons maintenant :

1.10.1 Proposition. *Soit X un espace k-analytique muni de sa G-topologie. Alors le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ est cohérent.*

Ce résultat est prouvé par Ducros dans [23] en utilisant la noethérianité des algèbres k-affinoïdes. La preuve intiale de Ducros comporte une erreur soulevée par Poineau, mais facilement réparable comme indiquée en 1.3.1 de [20].

Le théorème suivant, dû à Kiehl est fondamental :

1.10.2 Théorème. *Considérons $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace k-affinoïde, et $\mathcal{F}$ un module cohérent sur X. Alors $M := \mathcal{F}(X)$ est un module de Banach fini et pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, on a l'égalité $\mathcal{F}(V) = M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_V$.*

Grâce au théorème d'acyclicité de Tate, on en déduit :

1.10.3 Corollaire. *Considérons $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace k-affinoïde. Alors on dispose d'une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathcal{A}$-modules de Banach finis et la catégorie des modules cohérents sur X.*

1.11 Dimension

Pour définir une notion satisfaisante de dimension, on commence par définir la dimension d'une algèbre k-affinoïde. Le problème est que la dimension de Krull d'une algèbre k-affinoïde n'est même pas stable par extension des scalaires. A l'inverse, grâce au lemme de Noether, la dimension de Krull d'une algèbre k-affinoïde stricte est préservée par n'importe quelle extension des scalaires. La proposition suivante est contenue en section 1 de [25].

1.11.1 Proposition. *Considérons un espace k-affinoïde $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *La dimension de Krull d'une algèbre strictement k-affinoïde est invariante par extension des scalaires. On trouve une extension L/k telle que $\mathcal{A}_L$ soit strictement L-affinoïde, et on définit la dimension $\dim_k(X)$ de X comme $\dim \mathcal{A}_L$ la dimension de Krull de l'algèbre strictement L-affinoïde $\mathcal{A}_L$. Ce nombre ne dépend que de X.*

2. *Pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, on a l'inégalité* $\dim_k V \leq \dim_k X$. *On définit donc la dimension d'un espace k-analytique non affinoïde comme la borne supérieure des dimension k-analytiques des domaines affinoïdes qu'il contient. Cette définition est compatible avec la précédente.*
3. *Si Y est un espace k-analytique et $y \in Y$, on définit la dimension de Y en y, notée* $\dim_{k,y} Y$ *comme le minimum des dimensions des domaines affinoïdes qui contiennent y. Il est immédiat que* $\dim_{k,y} Y \leq \dim_k Y$. *On dit que Y est purement de dimension $n \in \mathbb{N}$ si pour tout $y \in Y$, on a l'égalité* $\dim_{k,y}(Y) = \dim(Y) = n$.

1.11.2 Définition. *Pour un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur un espace k-analytique X, la quantité* $\dim_k \mathcal{F}$ *est la dimension du support* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$, *et si $x \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$, on note* $\dim_{k,x}(\mathcal{F}) = \dim_{k,x}(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$.

Quand le contexte est clair, on se permettra d'omettre l'indice du corps de base k dans les notations de la dimension.

On peut aussi relier la dimension d'un espace avec des données faisant intervenir les anneaux de fonctions et leurs anneaux locaux.

1.11.3 Définition. *Considérons X un espace k-analytique. Alors pour $x \in X$, on dispose d'un plongement canonique $k \hookrightarrow \mathcal{H}(x)$. On note* $d_k(x) := \mathrm{degtr}_{\tilde{k}} \widetilde{\mathcal{H}(x)} + \dim_{\mathbb{Q}}(|\mathcal{H}(x)^*|/|k^*| \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ *où si L est un corps muni d'une norme, $\tilde{L}$ désigne le corps résiduel de L.*

La proposition suivante est dans [25] en 1.14 :

1.11.4 Proposition. *Considérons X un espace k-analytique. Alors on dispose de l'égalité* $\dim_k(X) = \sup_{x \in X} d_k(x)$.

On en déduit que pour tout $x \in X$, on a aussi l'inégalité $d_k(x) \leq d_{k,x}(X)$.

1.11.5 Définition. *Considérons X un espace k-analytique. Un point $x \in X$ est dit d'Abhyankar si on a l'égalité $d_k(x) = d_{k,x}(X)$.*

Ces points doivent être vus comme l'analogue de ce que sont les points génériques en géométrie algébrique. Ainsi, par l'exemple 3.2.10 de [25], si X est un bon espace et que $x \in X$ est d'Abhyankar, alors $\mathcal{O}_{X,x}$ est artinien, c'est donc un corps dès que X est réduit.

1.12 Quelques classes de morphismes

On commence par définir les morphismes finis.

1.12.1 Définition. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphismes d'espaces k-analytiques. Le morphisme φ est fini (resp. une immersion fermée) s'il existe un G-recouvrement $X = \bigcup_{i \in \{1,\dots,n\}} V_i$ de X par des domaines affinoïdes V_i tel que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le morphisme induit $\varphi^{-1}(V_i) \to V_i$ est un morphisme fini d'espaces k-affinoïdes (resp. une immersion fermée entre espaces k-affinoïdes).*

Le résultat suivant, qui est l'analogue d'un résultat de théorie des schémas est l'énoncé 1.3.7 de [2] :

1.12.2 Proposition. *Un morphisme $\varphi : Y \to X$ d'espaces k-analytiques est fini (resp. une immersion fermée) si et seulement si pour tout domaine affinoïde $V \subset X$, le morphisme d'espace analytique induit $\varphi^{-1}(V) \to V$ est un morphisme fini (resp. une immersion fermée) d'espaces k-affinoïdes.*

1.12.3 Remarque. Attention, certaines notions schématiques passent mal au monde analytique. Ainsi, la notion de morphisme affine ne possède pas d'analogues aussi maniable dans le monde analytique.

1.12.4 Définition. *Un morphisme $\varphi : Y \to X$ d'espaces analytiques est quasi-fini s'il est topologiquement propre, et de dimension relative nulle, c'est à dire que pour tout $y \in Y$, si l'on note x l'image de y sur X, alors* $\dim_y(\varphi^{-1}(x)) = 0$.

1.12.5 Définition. *Un morphisme d'espaces analytiques $\varphi : Y \to X$ est séparé si la diagonale $Y \to Y \times_X Y$ est une immersion fermée. Un espace analytique Y est séparé si $Y \to \mathcal{M}(k)$ est séparé.*

Le résultat suivant est la proposition 3.1.5 de [4]

1.12.6 Proposition. *Un morphisme de bons espaces k-analytiques $\varphi : Y \to X$ est séparé si et seulement s'il est topologiquement séparé. Ainsi, un bon espace k-analytique Y est séparé si et seulement s'il est topologiquement séparé.*

1.12.7 Proposition. *Soit X un espace k-analytique séparé. Alors l'intersection de deux domaines affinoïdes de X est encore un domaine affinoïde.*

1.12.8 Définition. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. L'intérieur* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *relatif de φ est l'ensemble des $y \in Y$ tels que pour tout domaine affinoïde $U \subset X$ contenant $\varphi(y)$, il existe un voisinage affinoïde $V \subset \varphi^{-1}(U)$ de y dans $\varphi^{-1}(U)$ et $y \in \mathrm{Int}(V/U)$. Le bord relatif de φ est $\partial(Y/X) := Y \backslash \mathrm{Int}(Y/X)$. Le morphisme φ est sans bord si $\partial(Y/X) = \emptyset$.*

Les deux premier points suivant se trouvent dans l'énoncé 1.5.5 de [2]. Les deux derniers points, plus difficiles sont extraits de l'article de Temkin [54] (voir 5.7 de cet article, ainsi que l'article [53]). La démonstration des deux derniers points fait appel à la théorie de la réduction de Temkin.

1.12.9 Proposition. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Alors :*

1. *Tout espace sans bord (absolu) est un bon espace.*

2. *Si φ est une inclusion de domaine analytique, alors* $\mathrm{Int}(Y/X)$ *est l'intérieur topologique de Y vu comme sous ensemble de l'espace topologique X.*
3. *L'intérieur est compatible à la composition : si $\psi : Z \to Y$ est un morphisme d'espaces k-analytiques et φ est localement séparé (hypothèse vérifiée si Y et X sont bons, ou φ une inclusion de domaines analytiques), alors on a la relation* $\mathrm{Int}(Z/X) = \mathrm{Int}(Z/Y) \cap \psi^{-1}(Y/X)$.
4. *La formation de l'intérieur est G-locale : si l'on se donne un recouvrement $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ de X par des domaines affinoïdes $(X_i)_{i\in I}$, alors on dispose de l'égalité $\partial(Y/X) = \bigcup_{i\in I} \partial(Y_i/X_i)$ où Y_i est l'image inverse de X_i sur Y.*

La classe d'espaces suivante est fondamentale pour l'analytification des schémas ou bien les théorèmes de changement de base :

1.12.10 Définition. *Un morphisme d'espaces k-analytiques $\varphi : Y \to X$ est propre s'il est sans bord et topologiquement propre (la préimage de tout compact de X est un compact).*

La proposition suivante est en section 3.1 de [4].

1.12.11 Proposition.
1. *Tout morphisme fini d'espaces k-analytiques est propre.*
2. *Un morphisme entre espaces k-affinoïdes est propre si et seulement s'il est fini.*

Les classes de morphismes que nous avons introduites se comportent bien comme le montre la proposition suivante :

1.12.12 Proposition. *Les propriétés suivantes de morphismes d'espaces k-analytiques sont stables par composition, changement de base, et extension des scalaires et G-locales sur la base : immersion fermée, fini, séparé et propre.*

Le théorème suivant, qui est dû à Kiehl en géométrie rigide et à Berkovich en 3.3.5 de [4] dans le cadre des espaces de Berkovich, est fondamental :

1.12.13 Théorème. *Considérons un morphisme propre d'espaces k-analytiques $p : Y \to X$ et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_Y$-module cohérent. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le $\mathcal{O}_X$-module $R^i p_* \mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent.*

Pour démontrer ce théorème, on se ramène au cas où les espaces sont stricts en étendant convenablement les scalaires, puis on montre le théorème dans le cas rigide. Pour cela, Kiehl utilise le complexe de Čech, et approxime certains morphismes d'algèbres de Banach, en s'inspirant de la preuve de Cartan et Serre de la finitude de la cohomologie cohérente d'une variété complexe compacte.

1.13 Topologie de Zariski

1.13.1 Définition. *Considérons X un espace k-analytique. Alors une partie Z Zariski-fermée de X est un sous-ensemble de X qui est le lieu des zéros d'un certain faisceau d'idéaux cohérents $\mathcal{J}$ sur X, c'est à dire que Z est exactement l'ensemble des $x \in X$ tels que $|f(x)| = 0$ pour tout domaine analytique $U \subset X$ contenant x et pour toute fonction $f \in \mathcal{J}(U)$.*

Comme attendu, les parties Zariski-fermées de X sont les fermés d'une topologie plus grossière que la topologie usuelle de X, que l'on appelle la topologie de Zariski sur X. La topologie de Zariski sur un espace k-analytique a été étudiée de manière importante par Ducros dans [25], [23] où [20].

Par 4.2 de [23], conséquence du théorème de Kiehl sur les faisceaux cohérents dans le cas strict, on dispose comme en théorie des schémas d'une structure réduite sur un fermé de Zariski donné, et on en déduit que le caractère Zariski-fermé (ou Zariski ouvert) d'une partie Z de X est G-locale.

1.13.2 Définition. *Une partie Zariski-fermée d'un espace k-analytique X est irréductible si elle est irréductible pour la topologie de Zariski. Un espace k-analytique X est réduit si pour tout domaine analytique $V \subset X$, l'algèbre $\mathcal{O}_X(V)$ est réduite, et il suffit de le vérifier sur les domaines affinoïdes de X. Un espace k-analytique est intègre s'il est irréductible et réduit.*

Même si la topologie de Zariski sur un espace k-analytique n'est pas noethérienne, on dispose tout de même d'une théorie des composantes irréductibles, définie dans [23]. Ces notions sont compatibles avec les notions en théorie des schémas, puisqu'on dispose de théorèmes GAGA pour l'irréductibilité où les composantes irréductibles (voir section 2.7 de [20]).

1.14 Analytification et théorèmes de type GAGA

Dans cette section, on fixe un corps non archimédien complet k, et une k-algèbre affinoïde $\mathcal{A}$. On voudrait associer à un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$ un bon $\mathcal{A}$-espace analytique $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, ainsi qu'un morphisme d'espaces localement annelés $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to X$. Pour cela, on peut utiliser le langage des foncteurs représentables. La construction suivante est réalisée dans le paragraphe 2.6 de [2].

Considérons $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini. On introduit le foncteur $F_{\mathcal{X}}$ de la catégorie des bons espaces $\mathcal{A}$-analytiques vers la catégorie des ensembles qui à un espace $\mathcal{A}$-analytique Y associe l'ensemble $\mathrm{Hom}_{k-\mathrm{LRS}}(Y, \mathcal{X})$ où $k - \mathrm{LRS}$ désigne la catégorie des espaces localement annelés au dessus de $\mathrm{Spec}k$.

1.14.1 Théorème. *Pour tout $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$, le foncteur $F_{\mathcal{X}}$ est représentable par un bon espace $\mathcal{A}$-analytique, noté $X := \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, et un morphisme d'espaces localement annelés $\pi : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$.*

La construction de l'analytifié se fait en plusieurs étapes. On commence par montrer que si $\mathcal{X}$ est l'espace affine de dimension n, alors l'espace affine analytique relatif de dimension n convient. On définit de même de manière explicite l'analytifié dans le cas où $\mathcal{X}$ est un schéma affine en prenant le lieu de zéros sur l'espace affine analytique relatif d'un faisceau cohérent d'idéaux bien choisi. La dernière étape quand on suppose uniquement $\mathcal{X}$ localement de type fini au dessus de $\mathrm{Spec}A$ est de recoller les espaces analytiques. Les conditions de recollement sont automatiquement vérifiées car sur les intersection, les restrictions des espaces représentent le même foncteur.

Pour $\mathcal{F}$ un module cohérent sur $\mathcal{X}$, le tiré en arrière $\pi^*\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ au dessus de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ sera noté $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$. On définit de la sorte un foncteur $\mathrm{Coh}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Coh}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$ de la catégorie des modules cohérents au dessus de $\mathcal{X}$ vers la catégorie des modules cohérents au dessus de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$.

On donne maintenant quelques propriétés classiques de l'analytification, qui sont démontrée en section 2.6 de [2]. D'autres propriétés de l'analytification relative ont par la suite été montrée par Ducros dans [23] et [20] et Poineau dans [45].

1.14.2 Proposition. *Considérons $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini. Notons $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ son analytifié et $\pi : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$ le morphisme d'analytification. Alors, on dispose des propriétés suivantes :*

1. *L'analytification commute avec le changement de base affinoïde et avec l'extension du corps de base.*
2. *L'analytification d'un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini est un espace $\mathcal{A}$-analytique sans bord relatif sur $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.*
3. *On dispose pour toute extension ultramétrique L de k d'une bijection $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}(L) \to \mathcal{X}(L)$. De plus, π est surjectif et si l'algèbre $\mathcal{A}$ est strictement affinoïde, alors π induit une bijection entre l'ensemble des points rigides de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ et l'ensemble des points fermés de $\mathcal{X}$.*
4. *Pour tout $x \in \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, l'application induite au niveau des anneaux locaux $\pi_x : \mathcal{O}_{\mathcal{X},\pi(x)} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}},x}$ est fidèlement plate. De plus, si x est un point rigide de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, alors π_x induit un isomorphisme sur les complétions $\hat{\mathcal{O}_{\mathcal{X},\pi(x)}} \to \hat{\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}},x}}$.*

Pour démontrer que dans le cas ou l'algèbre $\mathcal{A}$ est stricte, les points rigides de l'analytifié $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ sont en bijection avec les points fermés du schémas $\mathcal{X}$, on peut utiliser le lemme 2.7.1 de [20].

Dans la suite de cette sous-section, et de manière analogue à Serre dans son article inaugural majeur [49] dans le cas complexe, on va donner plusieurs théorèmes de type GAGA, qui relient le comportement d'un objet et le comportement de son analytifié.

Le premier théorème concerne le lien entre un morphisme entre schémas et son analytifié. Les références sont 3.4.6 et 3.4.7 de [4] ainsi que 2.6.7, 2.6.9 et 3.3.11 de [2].

1.14.3 Théorème. *Considérons une algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$ et un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$. Alors, f vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement si f^{an} vérifie $\mathcal{P}$ lorsque $\mathcal{P}$ est une des propriétés de morphisme suivante : séparé, injective, surjective, immersion ouverte, isomorphisme, monomorphisme et non ramifié. De plus, si le morphisme f est de type fini, on peut aussi prendre pour $\mathcal{P}$ les propriétés : propre, finie, immersion fermée et dominant. De plus, si f est de type fini, f^{an} est quasi-lisse (resp. naïvement plat) si et seulement si f est lisse (resp. plat).*

La référence du résultat qui suit est 3.4.8 de [4].

1.14.4 Théorème. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini. Notons $|\mathcal{X}^{\mathrm{an}}|$ l'espace topologique sous-jacent à $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$. Alors on dispose des propriétés suivantes :*

1. *Le schéma $\mathcal{X}$ est séparé si et seulement si l'espace topologique $|\mathcal{X}^{\mathrm{an}}|$ est séparé.*
2. *Le schéma $\mathcal{X}$ est propre si et seulement si l'espace topologique $|\mathcal{X}^{\mathrm{an}}|$ est compact (et séparé).*
3. *Le schéma $\mathcal{X}$ est connexe si et seulement si l'espace topologique $|\mathcal{X}^{\mathrm{an}}|$ est connexe par arcs.*

Le théorème GAGA fondamental suivant est démontré par Poineau dans l'annexe A de [45] pour l'analytification au dessus d'un affinoïde, et par Berkovich dans [4] pour l'analytification au dessus d'un corps.

1.14.5 Théorème. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma propre. Alors :*

1. *Pour tout faisceau de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$-modules cohérent $\mathcal{F}$ et tout entier naturel q, le morphisme de $\mathcal{A}$-modules canonique $H^q(\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to H^q(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \mathcal{F}^{\mathrm{an}})$ est un isomorphisme.*
2. *Le foncteur d'analytification $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ induit une équivalence de catégories de $\mathrm{Coh}(\mathcal{X})$ vers $\mathrm{Coh}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$.*

1.14.6 Corollaire. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde. Alors le foncteur d'analytification $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est pleinement fidèle de la catégorie des $\mathcal{A}$-schémas propre vers la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques propres.*

La proposition suivante est utile pour tout ce qui concerne les groupes fondamentaux :

1.14.7 Proposition. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma propre. Alors $\mathcal{Y} \mapsto \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{X}$-schémas finis (resp. étales finis) et la catégorie des $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$-espaces analytiques finis (resp. étales finis).*

Le théorème suivant, qui est l'analogue d'un résultat bien connu de géométrie complexe est montré par Ducros en 3.7.2 de [21]. Notons qu'il n'est pas connu au dessus d'une base affinoïde quelconque.

1.14.8 Théorème. *Considérons $\mathcal{X}$ une k-courbe analytique propre, c'est à dire un espace k-analytique propre et purement de dimension 1. Alors il existe une courbe projective algébrique $\mathcal{X}$ au dessus de k et un isomorphisme d'espaces k-analytiques $\varphi : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to X$.*

1.15 Propriétés topologiques

Les espaces k-analytiques de Berkovich possèdent de bonnes propriétés topologiques, et ce fait les distingue des autres espaces qu'on rencontre en géométrie analytique non archimédienne.

1.15.1 Définition. *Un espace topologique X est connexe par arcs plongés si pour tout $x, y \in X$, il existe une application continue $f : [0,1] \to X$ qui soit un homéomorphisme sur son image et telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.*

1.15.2 Remarque. Par la proposition 18 du chapitre 2 de [9], un espace topologique séparé est connexe par arcs plongés si et seulement s'il est connexe par arcs.

1.15.3 Théorème. *Considérons X un espace k-analytique. Alors X est localement compact et localement connexe par arcs plongés, c'est à dire que tout point $x \in X$ possède une base de voisinages compacts et connexes par arcs plongés.*

La preuve de ce théorème est encore archétypale de beaucoup de preuves de la théorie. On se ramène facilement au cas d'un espace k-affinoïde. On commence par étendre les scalaires à une extension affinoïde L de k, et on utilise la surjectivité de $X_L \to X$ pour pouvoir supposer que l'espace est strictement affinoïde. Ensuite, on applique le lemme de normalisation de Noether pour exhiber X comme un recouvrement par un morphisme fini d'un polydisque, ce qui nous ramène à la situation où l'espace X est un polydisque. Le cas d'un polydisque avec une unique coordonnée se traite à la main, et le cas général suit par récurrence sur le nombre de variables du polydisque.

1.15.4 Définition. *Un espace topologique X est de Fréchet-Urysohn, si pour toute partie A de X, tout point de l'adhérence $\bar{A}$ de A est limite d'une suite de points de A.*

Le théorème suivant, dû à Poineau en 5.3 de [44] est étonnant : il montre que la topologie des espaces de Berkovich partage certaines propriétés des espaces métrisables. En particulier, dans un espace k-analytique X, le caractère ouvert ou fermé d'une partie de X se teste séquentiellement. Ce résultat est d'autant plus frappant que dès que le corps de base est trop gros (par exemple dès que le corps résiduel de k est non dénombrable), même des espaces comme $\mathbb{A}^1_k$ sont non métrisables (car certains points n'ont pas de base de voisinage dénombrable).

1.15.5 Théorème. *Tout espace k-analytique est un espace de Fréchet-Urysohn.*

Le théorème suivant est très difficile, et démontré par Berkovich en 9.1 de [3], en utilisant les altérations de de Jong.

1.15.6 Théorème. *Considérons k un corps non archimédien complet non trivialement valué. Alors tout espace k-analytique lisse est localement contractile.*

1.15.7 Définition. *Considérons $\mathcal{X}$ un k-schéma de type fini. Une sous partie de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est semi-algébrique si elle peut être définie, localement pour la topologie de Zariski sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ comme une combinaison booléenne de parties de la forme $\{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{an}}; |f(x)| \triangle \lambda |g(x)|\}$ avec f, g dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$, et $\triangle \in \{>, <, \geq, \leq\}$.*

Le théorème suivant, aussi très difficile, est démontré par Hrushovski et Loeser dans leur article [32]. On renvoie à [16] pour une introduction à leurs travaux, qui reposent sur des outils sophistiqués de théorie des modèles.

1.15.8 Théorème. *Considérons $\mathcal{X}$ un k-schéma quasi-projectif de type fini et V une partie semi-algébrique de $X := \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$. Alors il existe une partie compacte S de V, et une rétraction forte par déformation $h : [0,1] \times V \to V$ de V sur S telle que :*

1. *La partie S est homéomorphe à un polyèdre.*
2. *La rétractation h vérifie de plus pour tout $t \in [0,1]$ et $v \in V$ la propriété $h(1, h(t,v)) = h(1,v)$.*

On donne enfin un résultat qui est le théorème 1.1 de [33] :

1.15.9 Théorème. *Soit k un corps non archimédien complet qui contient une partie dénombrable dense. Soit $\mathcal{X}$ un k-schéma quasi-projectif de dimension d. Alors $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est homéomorphe à un sous-espace topologique de $\mathbb{R}^{2d+1}$.*

1.16 Fonctions méromorphes

1.16.1 Définition. *Considérons X un bon espace k-analytique. Notons $\mathcal{S}_X$ le préfaisceau de fonctions sur X qui associe à tout domaine analytique U de X l'ensemble des fonctions analytiques sur U dont la restriction à chaque domaine affinoïde V de U est un élément régulier de $\mathcal{O}_V$. Soit $\mathcal{M}_-$ le préfaisceau sur X qui à un domaine analytique U de X associe $\mathcal{S}_X(U)^{-1}\mathcal{O}_X(U)$. Alors on définit le faisceau des fonctions méromorphes $\mathcal{M}$ sur X comme la faisceautisation du préfaisceau $\mathcal{M}_-$.*

Un espace k-analytique est cohomologiquement de Stein si pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X$-modules et tout entier naturel strictement positif, les groupes de cohomologie $H^q(X, \mathcal{F})$ s'annulent. On renvoit à [40] pour une étude de ces espaces. La démonstration de 1.7.6 de [41] combiné avec 2.6 de [40] s'adapte et permet d'obtenir :

1.16.2 Proposition. *Supposons que k est non trivialement valué, et considérons X un espace k-analytique cohomologiquement de Stein irréductible, réduit et compact. Alors on a $\mathcal{M}(\mathcal{X}) = \mathrm{Frac}\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(X)$.*

La proposition suivante est la proposition 2.23.4 de [18].

1.16.3 Proposition. *Considérons $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un espace k-affinoïde. Alors $\mathcal{M}(X)$ s'identifie avec l'anneau total des fractions de $\mathcal{A}$.*

La proposition suivante est la proposition 3.6.7 de [4].

1.16.4 Théorème. *Considérons X un espace k-analytique irréductible, réduit et propre. Alors la k-algèbre $\mathcal{M}(X)$ est un corps de type fini, dont le degré de transcendance est majoré par la dimension $\dim X$ de X.*

Le théorème suivant est démontré par Mehmeti en 1.7.8 de [41] :

1.16.5 Théorème. *Considérons $\mathcal{A}$ une algèbre k-affinoïde, et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma propre au dessus de $\mathcal{A}$. Alors on dispose de l'égalité $\mathcal{M}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}) = \mathcal{M}(\mathcal{X})$ où le membre de droite désigne la k-algèbre des fonctions méromorphes (algébriques) sur $\mathcal{X}$.*

1.16.6 Remarque. Si l'on se donne un $\mathcal{A}$-schéma propre $\mathcal{X}$ au dessus de $\mathcal{A}$, alors ce dernier théorème, la théorie de la dimension schématique et les théorèmes de type GAGA pour la dimension montrent que l'inégalité du théorème 1.16.4 est en fait une égalité pour $X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$.

La définition suivante, adapté de [11] qui traite des espaces rigides, provient de cette observation :

1.16.7 Définition. *Un espace k-analytique (resp. rigide au dessus de k) est de Moishezon s'il est propre, et si chaque composante irréductible X_i de X muni de sa structure réduite vérifie $\mathrm{trdeg}_k(\mathcal{M}(X_i)) = \dim X_i$.*

Dans l'article [14], Conrad et Temkin définissent l'analytification (rigide) d'un espace algébrique séparé localement de type fini au dessus de k, et dans l'article [11], Conrad démontre le résultat frappant suivant, qui est l'analogue d'un résultat de géométrie complexe dû à Artin :

1.16.8 Théorème. *Tout espace de Moishezon (rigide) est l'analytification d'un espace algebrique propre au dessus de k. Ainsi, le foncteur de la catégorie des espaces algébriques propres au dessus de k vers la catégorie des espaces rigides de Moishezon au dessus de k qui à un espace algébrique $\mathcal{X}$ propre au dessus de k associe son analytifié $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est une équivalence de catégories.*

Ainsi, si les espaces de Moishezon ne sont pas toujours des analytifiés de schémas, ce sont toujours des analytifiés d'espaces algébriques.

1.17 Platitude

La platitude est une notion centrale de ce manuscrit. Antoine Ducros a développé dans [20] une importante théorie de la platitude en géométrie analytique de Berkovich, qui si elle partage certaines caractéristiques avec la platitude schématique, possède tout de même ses spécificités propres. Nous donnons ici un rapide exposé de ses résultats.

1.17.1 Définition. *Considérons un morphisme de bons espaces analytiques $Y \to X$, un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur Y, et un point $y \in Y$, dont nous noterons x l'image sur X. On dit que $\mathcal{F}$ est naïvement X-plat en y si le module $\mathcal{F}_y$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat.*

Le problème est que Ducros montre en section 4.4 de [20] que cette notion n'est même pas stable par changement de base. Pour remédier à cela, il introduit la notion suivante :

1.17.2 Définition. *Considérons $Y \to X$ un morphisme de bons espaces k-analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y et $y \in Y$. On dit que $\mathcal{F}$ est X-plat en y si pour tout bon espace analytique X', pour tout morphisme d'espaces analytiques $X' \to X$ et pour tout y' au dessus de y dans $Y' := Y \times_X X'$, le tiré en arrière de $\mathcal{F}$ sur Y' est naïvement X'-plat en y'.*

Pour les espaces qui ne sont pas forcément bons, la définition est la suivante :

1.17.3 Définition. *Considérons un morphisme $\varphi : Y \to X$ d'espaces k-analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y et $y \in Y$. Alors $\mathcal{F}$ est X-plat en $y \in Y$ si l'une des conditions équivalentes suivante est vérifiée :*

1. *Pour toute paire (V, U) avec V un bon domaine analytique de Y contenant y et U un bon domaine analytique de X contenant $\varphi(V)$, le faisceau cohérent $\mathcal{F}_{|V}$ est U-plat en $y \in Y$.*
2. *Il existe un bon analytique V de Y contenant y et un bon domaine analytique U de X contenant $\varphi(V)$ tel que le faisceau cohérent $\mathcal{F}_{|V}$ est U-plat en $y \in Y$.*
3. *Il existe un domaine affinoïde V de Y contenant y et un domaine affinoïde U de X contenant $\varphi(V)$ tel que le faisceau cohérent $\mathcal{F}_{|V}$ est U-plat en $y \in Y$*

Cette notion est stable par changement de base, par composition, G-locale sur la base.

On dispose des deux théorèmes de comparaison algébrique-analytique suivants, ce sont les énoncés 4.2.1 et 4.2.4 de [20] :

1.17.4 Proposition. *Considérons $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphismes d'algèbres k-affinoïdes ; soit $\mathcal{Y}$ (resp. $\mathcal{X}$) un $\mathcal{B}$-schéma de type fini (resp. un $\mathcal{A}$-schéma de type fini). Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{Y}$ et soit $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-morphisme de schémas. Soit $y \in \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ tel que $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ est naïvement $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ plat en y. Alors le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ est $\mathcal{X}$-plat en y^{alg} où y^{alg} désigne l'image de y sur $\mathcal{Y}$.*

L'énoncé dans l'autre sens est :

1.17.5 Proposition. *Considérons $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un morphisme de schémas de type fini au dessus d'une algèbre k-affinoïde donnée. Considérons $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $\mathcal{Y}$ et soit y un point de $\mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$. Notons y^{alg} l'image de y dans $\mathcal{Y}$, et supposons que $\mathcal{F}$ est $\mathcal{X}$-plat en y^{alg}. Alors le faisceau cohérent $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ est $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ plat en y.*

Dans le cas de morphismes finis, comme souvent, la platitude analytique partage les propriétés de la platitude algébrique :

1.17.6 Proposition. *Considérons $Y \to X$ un morphisme de bons espaces analytiques, et considérons un point $y \in Y$ en lequel ce morphisme est fini, notons x son image sur X. Considérons $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y. Alors il y a équivalence entre :*

1. *Le faisceau cohérent $\mathcal{F}$ est naïvement plat X-plat en y.*
2. *Il existe un voisinage affinoïde T de y dans Y et un voisinage affinoïde S de x dans X tel que $T \to X$ se factorise par un morphisme fini $\pi : T \to S$ tel que $\pi_*(\mathcal{F}_T)$ est un $\mathcal{O}_S$-module libre.*
3. *Le faiseau cohérent $\mathcal{F}$ est X-plat en y.*

La platitude possède la plupart des propriétés présentes dans le monde algébrique que l'on attend. Un exemple parmi tant d'autres concerne la dimension de la fibre en un point, c'est le lemme 4.5.10. de [20] qui est l'analogue d'un fait bien connu en géométrie algébrique :

1.17.7 Proposition. *Considérons $Y \to X$ un morphisme de k-espaces analytiques, $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y, $y \in Y$ et notons x son image sur X. Supposons que y est dans* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ *et que $\mathcal{F}$ est X-plat en y. Alors on dispose de l'égalité de dimension suivante :* $\dim_y \mathcal{F} = \dim_y \mathcal{F}_{Y_x} + \dim_x X$.

Ducros donne en 5.2. de son livre une définition de la quasi-lissité, de quasi-étalité et de morphismes non ramifiés :

1.17.8 Définition. *Un morphisme $\varphi : Y \to X$ d'espaces k-analytiques est quasi-lisse en $y \in Y$ s'il existe un domaine affinoïde V de Y qui contient y et tel que $V \to X$ se factorise par une immersion fermée $V \to W$ où W est un domaine affinoïde de l'espace analytique affine relatif $\mathbb{A}^n_X := \mathbb{A}^n_k \times_k X$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, et où le morphisme $V \to W$ vérifie une sorte de critère Jacobien. Un morphisme $Y \to X$ est lisse s'il est quasi-lisse et sans bord. Un morphisme $Y \to X$ est quasi-étale s'il est quasi-lisse et de dimension relative nulle.*

On dispose aussi de la notion de morphismes non ramifiés, et toutes ces notions se caractérisent par des propriétés du faisceau des différentielles relatives. Ainsi, par exemple, la définition précise de géométriquement régulier est en 2.4.3 et 2.6.9 de [20] et on dispose du fait suivant qui en est la proposition 5.3.4. :

1.17.9 Théorème. *Considérons $Y \to X$ un morphisme de k-espaces analytiques, y un point de Y, et notons x son image dans X. Alors il y a équivalence entre :*

1. *Le morphisme $Y \to X$ est quasi-lisse en $y \in Y$.*
2. *Le morphisme $Y \to X$ est X-plat en y et la fibre Y_x est géométriquement régulière.*

Les deux théorèmes suivants donnent des informations sur le morphisme induit sur les fibres au dessus de points qui seraient les analogues de points génériques en théorie des schémas. Ils sont énoncés en 6.3.3 et 6.3.7 de [20].

1.17.10 Théorème. *Considérons un morphisme entre bon espaces analytiques $Y \to X$, $y \in Y$ et x son image sur X. Supposons que y est dans $\mathrm{Int}(Y/X)$ et que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un corps. Alors le morphisme induit au niveau des anneaux locaux $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y_x,y} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y,y}$ est plat, et ses fibres sont d'intersection complète et régulières si la caractéristique de k est nulle.*

1.17.11 Théorème. *Considérons un morphisme entre bon espaces analytiques $Y \to X$, avec X réduit. Considérons x un point d'Abhyankar de X et y un point de la fibre Y_x. Alors le morphisme induit au niveau des anneaux locaux $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y_x,y} \to \mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{Y,y}$ est régulier, et en particulier plat.*

Ducros donne au chapitre 8 de son livre [20] une théorie des dévissages, qui est l'adaptation dans le cadre des espaces de Berkovich, de la théorie des dévissages schématiques, développée par Raynaud et Gruson dans [30]. Si l'on se donne $Y \to X$ un morphisme de bons espaces k-analytiques, que $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur Y, et que $y \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ est un point du support de $\mathcal{F}$, l'idée est de « casser »localement en y le faisceau $\mathcal{F}$ en une série de faisceaux cohérents qui vérifient des conditions agréables de finitude. On peut alors inclure localement $\mathcal{F}$ dans une sorte de suite exacte de modules. Nous ne donnerons pas de définition plus précise, mais celle si se trouve en 8.2.4 de [20].

Le point clé est que les dévissages existent toujours (c'est le théorème 8.2.5), et que la platitude de $\mathcal{F}$ en y se « lit »automatiquement sur le dévissage (c'est le théorème 8.3.4).

Grâce à cette caractérisation, et au résultat 1.17.10, Ducros en déduit qu'un morphisme naïvement plat en un point intérieur est automatiquement plat (c'est énoncé en 8.3.4) :

1.17.12 Théorème. *Considérons $Y \to X$ un morphisme entre bons espaces k-analytiques, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y, soit $y \in \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$. Supposons que y est dans l'intérieur relatif $\mathrm{Int}(Y/X)$. Alors $\mathcal{F}$ est X-plat en y si et seulement s'il est naïvement X-plat en y.*

Cette caractérisation permet aussi de montrer que pour vérifier qu'un morphisme est plat, il suffit de vérifier qu'il est naïvement plat sur l'espace obtenu en étendant les scalaires de manière convenable en un point rigide, c'est le théorème 8.3.6 de [20] :

1.17.13 Corollaire. *Considérons $Y \to X$ un morphisme de bons espaces k-analytiques, soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y et soit $y \in Y$. Soit L une extension analytique de k et soit z un point L-rigide de Y_L au dessus de y. Si $\mathcal{F}_L$ est naïvement X_L-plat en z alors $\mathcal{F}$ est X-plat en y.*

On donne enfin le théorème suivant, qui est la combinaison de la remarque 8.4.3 et du théorème 8.4.6 de [20].

1.17.14 Proposition. *Considérons un morphisme $\varphi : Y \to X$ entre bons espaces k-analytiques. Supposons que φ est plat et de dimension relative nulle. Alors, pour tout $y \in Y$, il existe un voisinage affinoïde V de y dans Y, un domaine k-affinoïde T d'un X-espace analytique étale au dessus de X, et un X-morphisme fini et plat de V dans T.*

Le théorème suivant, démontré en 9.1.3 de [20] est crucial dans notre travail sur la descente, puisque les morphismes possédant une section sont automatiquement de descente.

1.17.15 Théorème. *Supposons que le corps k est non trivialement valué. Considérons un espace strictement k-analytique quasi-compact Y, et soit X un espace k-analytique séparé. Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques, et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y qui est plat au dessus de X. Alors il existe un ouvert Z de* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$*, un espace strictement k-affinoïde X', un morphisme quasi-fini $\psi : X' \to X$, et un X-morphisme $\sigma : X' \to Z$ tel que :*

1. *Le faisceau cohérent $\sigma^*\mathcal{F}$ est X-plat.*
2. *L'image $\varphi(Y)$ est égale à $\psi(X')$.*

Si de plus $Y \to X$ est quasi-lisse et $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$ alors ψ peut être pris quasi-étale.

Le théorème précédent a aussi des applications importantes pour décrire l'image de morphismes plats. Ainsi, on obtient le théorème 9.2.1 de [20] :

1.17.16 Théorème. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques. Supposons que φ est topologiquement propre, ou de manière équivalente que l'image inverse de chaque domaine affinoïde de X est quasi-compacte. Considérons $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y, qui est X-plat.*

Alors $\varphi(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ est un domaine analytique fermé de X.

En particulier, si φ est plat, que Y est compact et X séparé, alors l'image $\varphi(Y)$ de Y est un domaine analytique compact de X.

Le théorème suivant est le théorème 9.2.3 de [20] :

1.17.17 Théorème. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphismes d'espaces k-analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y qui est X-plat. On se donne $y \in$* $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ *en lequel φ est sans bord, et on note x son image sur X. Alors la partie $\varphi(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ est un voisinage de x.*

Ducros étudie dans le chapitre 10 de son livre des lieux de constructibilité (pour la topologie de Zariski) relatifs variés. Le contexte est le suivant : on se donne un morphisme entre espaces k-analytiques $Y \to X$ ainsi qu'un objet $\mathcal{D}$ au dessus de Y (e.g. un faisceau

cohérent, une suite de faisceaux cohérents). On se donne une propriété $\mathcal{P}$ qui fait sens pour l'objet $\mathcal{D}$ en un point de $y \in Y$ (e.g. être X-plat, être exact,...). La question est d'étudier l'ensemble $\mathcal{D}(Y)$ des points $y \in Y$ tels que $\mathcal{D}$ satisfasse $\mathcal{P}$ en y. Ducros montre alors pour des dizaines de propriétés $\mathcal{P}$ que de tels lieux sont constructibles. Ainsi, citons, sans aucune exhaustivité les théorèmes 10.3.2, 10.5.3 et 10.7.2 :

1.17.18 Théorème. *Considérons $\varphi : Y \to X$ un morphisme de k-espaces analytiques, $\mathcal{E}$ un faisceau cohérent sur Y, et $D = (\mathcal{G} \to \mathcal{F} \to \mathcal{H})$ une suite de faisceaux cohérents sur Y.*

1. *Le lieu de X-platitude sur Y de $\mathcal{E}$ est Zariski-ouvert.*
2. *Le lieu sur Y où D est exact fibre à fibre (i.e. $D_{Y_\varphi(y)}$ est exact en y) est localement (pour la topologie usuelle) constructible pour la topologie de Zariski sur Y.*
3. *Le lieu de quasi-lissité de Y sur X est localement constructible.*

Chapitre 2

Descente fidèlement plate et algébrisation en géométrie de Berkovich

"Chaque génération doit, dans une relative opacité, découvrir sa mission, l'accomplir ou la trahir."

—Frantz Fanon

Cet article étudie les questions de descente relative à la topologie sur les espaces de Berkovich dont les flèches couvrantes sont les morphismes plats et surjectifs. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'une catégorie fibrée donnée soit un champ pour cette topologie. Ensuite, nous utilisons ce résultat pour montrer que le foncteur tiré en arrière de la catégorie des S-espaces vers la catégorie des S'-espaces munis de données de descente est pleinement fidèle, et nous montrons l'effectivité de certaines données de descente au dessus de S'. Enfin, nous montrons que la propriété d'être algébrique pour un morphisme entre l'analytification de deux schémas est une propriété locale pour la topologie sus-citée.

2.1 Introduction

2.1.1 Motivation

Les résultats de descente sont depuis les travaux de l'école de Grothendieck devenus indispensables et omniprésents en géométrie algébrique moderne. Le but de cet article est d'énoncer et de démontrer des résultats similaires aux résultats de l'exposé 8 de [48] dans le cadre des espaces analytiques au sens de Berkovich.

Une notion de platitude dans les espaces de Berkovich a été dégagée et étudiée de manière approfondie par Ducros dans [20], mais jusqu'à ce jour, il n'existait pas d'analogue à des résultats fondamentaux de descente fidèlement plate existant dans le cadre des schémas, comme le théorème 5.2 ou bien le théorème 2.1 de l'exposé 8 de [48], et l'utilisation de la platitude au sens de Ducros en général n'en est qu'à ses débuts.

Des résultats de descente dans le cadre analytique ont bien été obtenus par Bosch, Görtz et Ducros dans les articles [6] et [17] mais leurs résultats portaient uniquement sur la descente de modules cohérents (sur des espaces correspondant uniquement au cas *strict* en théorie de Berkovich pour Bosch et Görtz). De même, Conrad et Temkin obtiennent des résultats de descente. L'article [12] de Conrad établit ainsi la pleine fidélité de certains tirés en arrière dans le cas strict en utilisant les techniques de Raynaud, tandis que l'article de Conrad et Temkin [13] étudie de manière approfondie quelles sont les propriétés des morphismes d'espaces de Berkovich qui se descendent par des changements de base variés.

2.1.2 Nos méthodes

On peut identifier deux éléments qui distinguent la théorie de la descente dans les espaces analytiques de la théorie de la descente schématique et empêchent de transposer *verbatim* les techniques schématiques. Premièrement, la présence dans les produits fibrés de produits tensoriels *complétés*, et deuxièmement le fait que la notion de quasi-cohérence est une notion délicate en géométrie non archimédienne (voir [12] à ce sujet), ce qui empêche de recourir à la construction du spectre d'une algèbre quasi-cohérente générale comme en théorie des schémas.

La méthode que nous utiliserons tout au long de ce texte est d'appliquer la stratégie suivie par Ducros dans [17] pour démontrer la descente fidèlement plate des modules cohérents. Le cadre est le suivant : supposons que nous voulions montrer qu'un certain morphisme plat et surjectif $p : S' \to S$ entre espaces k-affinoïdes vérifie une propriété de descente P (e.g. être un morphisme de descente pour une certaine catégorie fibrée), qui possède de bonnes propriétés à la composition.

- On étudie d'abord le cas où le morphisme est de la forme $p : \mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ avec r un polyrayon k-libre. On peut alors se baser sur des calculs explicites faisant intervenir des séries convergentes. Cela nous permet de nous ramener au cas où p est un morphisme entre espaces stricts.

- On utilise ensuite le théorème 9.1.3 de [20], qui est l'analogue d'un résultat schématique (voir la proposition 19.2.9 de [27]) et qui exhibe dans le cas strict l'existence de multisections quasi-finies et plates au dessus de S au morphisme p. Dans le cas où le morphisme p possède une section, c'est un point clé et classique que les propriétés de descente sont alors automatiques, ce qui permet de nous ramener au cas où le morphisme p est de dimension relative nulle.

- On utilise enfin un théorème de factorisation dû à Ducros en 8.4.6 de [20], qui raffine dans notre cas l'analogue non archimédien du théorème principal de Zariski, démontré aussi par Ducros dans [25], et qui fournit une factorisation agréable d'un morphisme plat de dimension relative nulle, pour se ramener d'une part au cas où p est fini, plat et surjectif, et d'autre part au cas où p est le morphisme plat et surjectif correspondant à un G-recouvrement. Ce dernier cas est assez facile pour les propriétés étudiées ici, qui sont toujours G-locales. Le cas fini, plat et surjectif est alors souvent traité en utilisant la descente fidèlement plate schématique puisque dans ce cas là, le produit tensoriel et le produit tensoriel complété coïncident.

Remarquons que cette méthode générale s'applique pour des morphismes plats et surjectifs entre espaces k-analytiques, et ne permet pas d'étudier la question de descente relative à une extension quelconque de corps valuées $\mathcal{M}(L) \to \mathcal{M}(k)$, qui semble être une question plus difficile en général (c'est déjà le cas pour l'étude de la descente des propriétés de morphismes, voir [13] pour plus de détails).

2.1.3 Résultats principaux et vue d'ensemble de l'article

Considérons un corps k non-archimédien complet. Dans la deuxième section, nous établissons le théorème suivant 2.2.4, qui fournit une condition générale pour qu'une catégorie fibrée fixée definie au dessus de la catégorie C des espaces k-affinoïdes soit un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont les morphismes plats et surjectif. On rappelle comme dans le paragraphe 3.1.2 de [55] que la donnée d'une catégorie fibrée $\mathsf{F} \to \mathsf{C}$ et de certaines flèches cartésiennes distinguées dans F est équivalente à la donnée d'un pseudo-foncteur au dessus de C par la correspondance qui à un objet S de C associe la fibre $\mathsf{F}(S)$

de F au dessus de S, et qu'un morphisme $p : S' \to S$ de C est de descente effective (resp. de descente) si le foncteur tiré en arrière de la catégorie $\mathsf{F}(S)$ vers la sous catégorie des objets de $\mathsf{F}(S')$ munis de données de descente est une équivalence de catégories (resp. pleinement fidèle).

A Théorème. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus de C, avec C la catégorie des espaces analytiques k-affinoïdes. On suppose que :*

1. *Pour toute algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, et tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*
2. *Tout morphisme plat, fini et surjectif $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*
3. *Tout G-recouvrement fini $\amalg_{i=1}^n S_i \to S$ de S par des domaines affinoïdes en nombre fini est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*

Alors tout morphisme plat et surjectif entre espaces affinoïdes est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.

On donne de même un résultat similaire pour qu'un pseudo-foncteur au dessus de C soit un pré-champ en 2.2.7.

Dans la troisième section, on applique les théorèmes précédents à plusieurs pseudo-foncteurs particuliers. Ainsi, on obtient d'abord le théorème 2.3.22 qui concerne les morphismes plats et proprement surjectifs, c'est à dire les morphismes d'espaces analytiques plats dont la base est G-recouverte par des domaines analytiques quasi-compacts qui soient l'image d'un domaine analytique quasi-compact de la source. Cette hypothèse couvre en particulier les morphismes plats, surjectifs, topologiquement propres (universellement fermés comme applications continues), et les morphismes sans bord, plats et surjectifs.

B Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace k-analytique S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S. Alors les morphismes plats et proprement surjectifs sont des* morphismes de descente *pour Ψ.*

Autrement dit, les morphismes plats et proprement surjectifs sont des épimorphismes effectifs universels de la catégorie des espaces k-analytiques ; autrement dit, si l'on se donne un morphisme plat et proprement surjectif $p : S' \to S$ entre espaces k-analytiques, alors le foncteur de la catégorie des S-espaces analytiques vers la catégorie des S'-espaces munis de données de descente relativement au morphisme p est pleinement fidèle.

On obtient ensuite le théorème 2.3.30 qui constitue un résultat d'effectivité. Un morphisme entre espaces k-analytiques $p : S' \to S$ est dit *presque affinoïde* s'il existe un G-recouvrement de la base S par des domaines affinoïdes dont chaque image inverse par p est un domaine affinoïde de S'. Cette notion est introduite ici pour remédier au fait qu'il n'existe pas en théorie de Berkovich de bonne notion de morphismes affinoïdes, qui soit

l'analogue des morphismes affines en théorie des schémas. En effet, Liu a montré dans [39] l'existence d'un espace rigide non affinoïde mais dotés d'un morphisme presque affinoïde vers un espace k-affinoïde.

C Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace k-affinoïde S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S dont le morphisme structural est presque affinoïde. Alors les morphismes plat et surjectifs sont des* morphismes de descente effectif *pour ce pseudo-foncteur.*

Autrement dit, le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde S associe ΨS est un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont plates surjectives ; autrement dit si l'on se donne un morphisme plat et surjectif $p : S' \to S$ entre espaces k-affinoïdes, alors le foncteur de la catégorie des S-espaces analytiques dont le morphisme structural est presque affinoïde vers la catégorie des S'-espaces analytiques dont le morphisme structural est presque affinoïde et munis de données de descente relativement au morphisme p est une équivalence de catégories.

La quatrième partie est dévolue à l'application des résultats précédents. En particulier, on démontre en 2.4.1 une généralisation de la proposition A-1 de [47], et on retrouve en 2.4.2 des résultats obtenus par Conrad et Temkin dans [13].

Dans la dernière section, nous nous intéressons à la descente fidèlement plate du caractère algébrique. Un espace k-analytique X au dessus de $\mathcal{A}$ sera dit algébrisable si c'est l'analytifié d'un $\mathcal{A}$-schéma $\mathcal{X}$. Un morphisme d'espaces k-analytiques entre l'analytifié de deux $\mathcal{A}$-schémas est algébrique si c'est l'analytification d'un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas. L'objectif serait d'avoir un résultat de descente d'objets d'algébrisation, qui pourrait faire l'objet d'un futur travail. La question serait la suivante : si l'on se donne un morphisme plat et surjectif $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entre espaces k-affinoïdes, et un $\mathcal{A}$-espace analytique X, est-ce que le caractère algébrisable de $X_{\mathcal{B}}$ entraine le caractère algébrisable de X ?

Remarquons que le $\mathcal{A}$-schéma $\mathcal{X}$ dont l'analytification fournirait X n'a aucune raison d'être unique dans le cas général, mais par GAGA, il l'est dans le cas où X est propre au dessus de $\mathcal{A}$, ce qui serait sans doute une hypothèse naturelle pour commencer à étudier ce problème.

Dans cet article, nous étudions uniquement la question intermédiaire suivante plus accessible : la propriété pour un morphisme d'être algébrique est-elle locale pour la topologie plate surjective ? Nous répondons par l'affirmative à cette question avec le théorème 2.5.7 :

D Théorème. *Considérons $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un morphisme plat et surjectif entre espaces k-affinoïdes. Considérons maintenant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini. Alors un morphisme $f : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ est algébrique si et seulement si son changement de base $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}$ est algébrique.*

2.1.4 Remerciement

Ce travail n'aurait vu le jour sans les idées, les suggestions, l'encouragements, et l'accompagnement bienveillant d'Antoine Ducros. Qu'il en soit remercié. Merci aussi à Marco Maculan pour ses remarques pertinentes et à Jean-Michel Fischer pour son accompagnement mathématique et Latexien.

2.1.5 Notations et rappels techniques

Le cadre général

On fixe pour la suite du texte un corps k muni d'une valeur absolue ultramétrique qui peut être triviale et pour laquelle le corps k est complet. Nous travaillerons avec la notion d'espace k-analytique au sens de Berkovich et considérerons comme connues les bases de la théorie, exposée dans [2].

Topologie, G-topologie et topologie de Zariski

Considérons un espace k-analytique X. Il est fourni avec une topologie au sens usuel, et une topologie de Grothendieck ensembliste plus fine, appelée G-topologie dont les éléments sont les domaines analytiques de X. Le site correspondant est noté X_G, et X est muni d'un faisceau de k-algèbres que nous noterons $\mathcal{O}_X$, qui est cohérent (le résultat est énoncé et démontré dans [22]). Tous les faisceaux cohérents en jeu dans cet article seront toujours définis sur le site X_G, et s'il n'y a pas d'ambiguité, on notera $\mathcal{O}(X)$ l'algèbre des sections globales sur X. Par abus de langage, on appelera encore G-recouvrement tout morphisme d'espace k-analytique de la forme $\amalg_{i\in I} X_i \to X$ pour un G-recouvrement $(X_i)_{i\in I}$ de X par des domaines analytiques.

Si $\mathcal{J}$ est un faisceau cohérent d'idéaux sur X, alors on note $V(\mathcal{J})$ l'ensemble des $x \in X$ tel que $f(x) = 0$ pour toute section f de $\mathcal{J}$ au voisinage de x. Les parties de la forme $V(\mathcal{J})$ forment les fermés d'une topologie plus grossière que la topologie usuelle sur X, et appelée topologie de Zariski sur X. Lorsque X est k-affinoïde, la topologie de Zariski sur X est l'image réciproque de la topologie de Zariski sur $X^{\mathrm{al}} := \operatorname{Spec} A$ par l'application naturelle $X \to X^{\mathrm{al}}$.

Topologie et morphismes

Un morphisme d'espaces k-analytiques $f : Y \to X$ est topologiquement propre s'il est universellement fermé dans la catégorie des espaces topologiques, et cette propriété est équivalente à ce que l'image inverse de chaque domaine affinoïde de X soit quasi-compacte dans Y. Un morphisme $f : Y \to X$ d'espaces k-analytiques sera dit proprement surjectif s'il existe un G-recouvrement de X par des domaines analytiques quasi-compacts qui soient chacun d'entres eux l'image d'un domaine analytique quasi-compact de Y.

Polyrayons et section de Shilov

Un polyrayon est une famille finie de nombres réels strictements positifs. Si l'on se donne un polyrayon $r = (r_1, .., r_n)$ et une famille d'indéterminées $\underline{T} = (T_1, .., T_n)$, alors on note k_r la k-algèbre affinoïde des séries formelles $\sum_{I \in \mathbb{Z}^n} a_I \underline{T}^I$ à coefficient dans k vérifiant $|a_I| r^I \to 0$ quand $|I| \to +\infty$. La flèche $\sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_I \underline{T}^I \mapsto \max_{i \in \mathbb{Z}^n} |a_I| r^I \in \mathbb{R}$ est une norme multiplicative sur k_r. Si la famille r est k-libre c'est à dire libre lorsqu'on la voit comme une famille d'éléments du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}_+^* / |k^*|$, alors k_r est un corps.

Si X est un espace k-analytique, on note $X_r := X \times_k \mathcal{M}(k_r)$ et si $\mathcal{A}$ est une algèbre k-affinoïde, on note $\mathcal{A}_r := \mathcal{A} \hat{\otimes}_k k_r$. Pour tout $x \in X$, si r est k-libre, la fibre de $X_r \to X$ en x s'identifie à l'espace $\mathcal{H}(x)$-affinoïde $\mathcal{M}(\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k k_r)$ où l'on a noté $\mathcal{H}(x)$ le corps résiduel complété de x (on renvoie à [4] pour la définition de $\mathcal{H}(x)$). On notera $\sigma(x)$ l'unique semi-norme sur $\mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k k_r$ qui envoie un élément $\sum_I a_I \underline{T}^I \in \mathcal{H}(x) \hat{\otimes}_k k_r$ sur $\max_I |a_i|(x) r^I$. L'application $x \mapsto \sigma(x)$ est alors une section continue de $X_r \to X$, que l'on appelera la section de Shilov (cf section 3.2.2 de [4]). Pour X un espace k-analytique et r un polyrayon k-libre, une extension de polyrayon sera un morphisme d'espaces k-analytiques de la forme $X_r \to X$.

Finitude et complété

Considérons une k-algèbre de Banach noethérienne $\mathcal{A}$, M un $\mathcal{A}$-module fini, et une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach noethérienne $\mathcal{B}$. Alors l'application canonique $j : M \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to M \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ est bijective par [7], corollaire 3.7.3.6.

Dimension

On dispose en géométrie de Berkovich d'une théorie de la dimension, qui est exposée dans [4] ou bien [25]. Nous la supposerons connue. Notre terminologie suivra celle de Ducros dans [20], et nous dirons qu'un morphisme d'espaces k-analytiques $f : Y \to X$ est quasi-fini en $y \in Y$ s'il est de dimension relative nulle en y, c'est à dire si la dimension $\dim_y f^{-1}(f(y))$ est nulle. Le morphisme f est alors fini en y si et seulement si il est quasi-fini en y et sans bord en y.

On dit que le morphisme f est quasi-fini s'il est quasi-fini en tout point et topologiquement propre.

GAGA

Considérons une algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$. Alors on dispose d'un foncteur d'analytification relative, qui à un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$ associe un bon espace $\mathcal{A}$-analytique $X = \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ ainsi qu'un morphisme d'espaces localement annelés $X \to \mathcal{X}$ qui est un objet final dans la catégorie des bons espaces $\mathcal{A}$-analytiques munis d'un $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$-morphisme d'espaces localement annelés vers $\mathcal{X}$. Pour la construction de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ et ses principales propriétés, on

renvoie à [2] et à l'annexe A de [45]. La flèche canonique $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$ est plate et surjective en tant que morphisme d'espaces localement annelés. Cette construction est fonctorielle et commute au changement de base affinoïdes : si $Z \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme d'espaces affinoïdes, alors on a l'égalité $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \times_{\mathcal{A}} Z = (\mathcal{X} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{O}(Z))^{\mathrm{an}}$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $\mathcal{X}$, alors son tiré en arrière sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est un faisceau cohérent au dessus de X, que l'on note $\mathcal{F}^{\mathrm{an}}$.

Si $\mathcal{X}$ est propre, comme dans le cas complexe, on dispose de théorèmes de type GAGA : le foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{\mathrm{an}}$ induit une équivalence de catégories entre la catégorie des faisceaux cohérents au dessus de $\mathcal{X}$ et la catégorie des faisceaux cohérents au dessus de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, et cette équivalence de catégories respecte la cohomologie cohérente sur les deux espaces. En particulier, $\mathcal{Z} \mapsto \mathcal{Z}^{\mathrm{an}}$ induit une bijection entre l'ensemble des parties Zariski-fermées de $\mathcal{X}$ et l'ensemble des parties Zariski-fermées de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$. En corollaire, on voit que si l'on restreint le foncteur d'analytification aux schémas propres, on obtient un foncteur pleinement fidèle de la catégorie des $\mathcal{A}$-schémas localement de type finis et propres vers la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques.

Définition de la platitude

Nous rappelons ici la définition de la platitude de [20]. Considérons $f : Y \to X$ un morphisme d'espaces k-analytiques, y un point de Y, x son image dans X et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y.

Si X et Y sont des bons espaces, le faiseau $\mathcal{F}$ est dit *naïvement plat* en y si $\mathcal{F}_y$ est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module plat. Le problème de cette notion est qu'elle n'est pas stable par changement de base (cf section 4.4 de [20]), Ducros définit donc la platitude d'abord sur les bons espaces en *forçant* la stabilité par changement de base et extension des scalaires, et montre ensuite que la notion ainsi définie est la bonne notion de platitude.

Ainsi, si les espaces X et Y sont bons, alors $\mathcal{F}$ est dit X-plat en y si pour tout bon espace analytique X' définit sur une extension complète de k, tout k-morphisme $X' \to X$, et tout antécédent y' de y sur $Y' := Y \times_X X'$, le faisceau cohérent $\mathcal{F}_{Y'}$ tiré en arrière de $\mathcal{F}$ sur Y' est naïvement X'-plat en y'.

Dans le cas général où les espaces en jeu ne sont plus supposés bons, alors le faisceau $\mathcal{F}$ est dit X-plat en y si pour tout bon domaine analytique U de X contenant x et tout bon domaine analytique V de $Y \times_X U$ contenant y, le faisceau cohérent $\mathcal{F}_V$ tiré en arrière de $\mathcal{F}$ à V est $U-$plat ; et il suffit en fait de le vérifier pour un tel couple (U, V) donné en particulier. Si $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$, on dit que c'est le morphisme f qui est plat en y. Le morphisme f est dit plat s'il est plat en tout point de Y, et fidèlement plat s'il est plat et surjectif.

Platitude analytique et schématique

Considérons $f : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un morphisme fidèlement plat d'espaces k-affinoïdes. Alors le morphisme induit $\operatorname{Spec}\mathcal{B} \to \operatorname{Spec}\mathcal{A}$ est fidèlement plat (c'est le lemme 4.2.1 de [20] voir la section 4.2 de [20] pour plus de résultats de ce type).

Platitude et finitude

Condidérons $f : Y \to X$ un morphisme fini entre bons espaces k-analytiques et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur Y. Alors par la proposition 4.3.1 de [20], $\mathcal{F}$ est plat en un point si et seulement s'il est naïvement plat, et si $\mathcal{F}$ est plat en tout point alors pour tout $x \in X$, il existe un voisinage affinoïde V de x dans X tel que $f_*(\mathcal{F}_{f^{-1}(V)})$ soit un $\mathcal{O}_V$-module libre.

Image d'un espace compact par un morphisme plat

Si X et Y sont des espaces analytiques compacts et si $\mathcal{F}$ est X-plat, l'image $f(\mathrm{Supp}(\mathcal{F}))$ est un domaine analytique compact par le théorème 9.2.1 de [20]. Le cas strict avec $\mathcal{F} = \mathcal{O}_Y$ était déjà connu, et dû à Raynaud (cf corollaire 5.11 de [8]).

Le théorème de multisection

On cite ici une conséquence importante de l'énoncé de 9.1.3 de [20] que nous utiliserons de manière cruciale à de nombreuse reprise dans le texte. On suppose uniquement dans ce paragraphe que le corps k est non trivialement valué *i.e* que $|k^*| \neq \{1\}$. Considérons Y un espace strictement k-analytique quasi-compact et X un espace k-analytique séparé. Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme plat d'espaces k-analytiques. Alors il existe un espace strictement k-affinoïde X', un X-morphisme d'espaces analytiques $\sigma : X' \to Y$ et un morphisme quasi-fini et plat d'espaces analytiques $\psi : X' \to X$ tel que l'on ait l'égalité ensembliste $\varphi(X) = \psi(X')$. De plus, si φ est quasi-lisse, alors ψ peut-être choisie quasi-étale.

Constructibilité

Considérons un espace k-analytique X. On dit qu'une partie $E \subset X$ est constructible si elle s'écrit comme une union finie $E = \cup_i (U_i \cap F_i)$ avec U_i (resp F_i) une partie Zariski-ouverte (resp. Zariski fermée) de X pour tout $i \in I$.

Une partie E est localement constructible (resp. G-localement constructible) s'il existe un recouvrement par des ouverts (resp. un G-recouvrement) $(X_i)_{i\in I}$ de X tel que $E \cap X_i$ soit une partie constructible de X_i pour tout $i \in I$. Ces deux notions coïncident en fait par la proposition 10.1.12 de [20], et dans le cas où l'espace analytique X est de dimension finie, une partie est constructible si et seulement si elle est G-localement constructible si et seulement si elle est localement constructible.

Si l'on se donne une algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$, et E une partie constructible (resp. localement constructible) de $\mathcal{X}$, alors la préimage E^{an} de E sur X^{an} est une partie constructible (resp. localement constructible) de X^{an}. Si $\mathcal{X}$ est propre au dessus de $\mathcal{A}$, il résulte de GAGA que $E \mapsto E^{\mathrm{an}}$ est une bijection entre les parties constructibles de X et les parties constructibles de X^{an}.

Par le corollaire 10.1.11 de [20], si une partie E est G-localement constructible, alors son adhérence de Zariski coïncide avec son adhérence pour la topologie usuelle, donc une partie G-localement constructible est fermée (resp. ouverte) si et seulement si elle est fermée de Zariski (resp. ouverte de Zariski).

2.2 Un premier théorème champêtre

On utilisera librement dans tout cet article les notions de l'exposé [55]. On considère C la catégorie des espaces k-affinoïdes, et Ψ un pseudo-foncteur, ou lax 2-foncteur sur C. Autrement dit, on dispose pour tout objet U de C d'une catégorie ΨU, et pour tout morphisme $f : U \to V$ d'un foncteur tiré en arrière $f^* : \Psi V \to \Psi U$ satisfaisant certaines compatibilités à la composition que nous n'énoncerons pas ici.

Considérons $p : S' \to S$ un morphisme d'espaces k-affinoïdes. On utilisera dans la suite de ce texte les notations suivantes :

$$S'' = S' \times_S S', \qquad S''' = S' \times_S S' \times_S S'$$

et on notera :

$$p_i : S'' \to S',\ i \in \{1,2\} \qquad p_{ij} : S''' \to S''\ i,j \in \{1,2,3\}, i < j$$

les projections sur le i-ème facteur et le facteur (i,j) respectivement. On a aussi des projections $q_i : S''' \to S'$ avec $q_i = p_1 \circ p_{ij}$, et $q_j = p_2 \circ p_{ij}$.

2.2.1 Définition. *Un objet avec données de descente relativement à p est un élément ξ' de $\Psi S'$ muni d'un isomorphisme $\varphi : p_1^*\xi' \to p_2^*\xi'$ vérifiant la condition de cocycle $p_{13}^*\varphi = p_{12}^*\varphi \circ p_{23}^*\varphi$. Un morphisme de données de descente de ξ' vers η' est un morphisme dans la catégorie $\Psi S'$ qui commute aux projections.*

On dispose donc de la catégories des objets de $\Psi S'$ munis de données de descente relativement à p, que l'on note $\Psi(S' \to S)$, et on a aussi un foncteur de ΨS vers $\Psi(S' \to S)$ qui envoie un objet $\xi \in \Psi S$ sur $p^*\xi$. On dit que le morphisme p est un morphisme de descente relativement à Ψ si ce foncteur est pleinement fidèle, et que c'est un morphisme de descente effective relativement à Ψ si ce foncteur est une équivalence de catégories. Lorsque la situation est sans ambiguïté, on s'autorisera à parler de morphisme de descente (resp. de descente effective) sans faire référence au pseudo-foncteur que l'on considère.

Un morphisme sera de descente universellement s'il est de descente et que n'importe quel changement de base de ce morphisme est un morphisme de descente.

2.2.2 Exemple. On dispose d'un pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoide $S \in \mathsf{C}$ associe la catégorie des modules cohérents au dessus de S. Le tiré en arrière est alors simplement le tiré en arrière des modules usuel. Ducros a démontré dans [17] que les morphismes plats, surjectifs et topologiquement propres sont des morphismes de descentes effectifs pour ce pseudo-foncteur. Le résultat était déjà connu en géométrie rigide, et dû à Gabber sous des hypothèses restrictives, puis à Bosch et Görtz dans le cas général dans le texte [6].

2.2.3 Exemple. Considérons D une catégorie qui possède les produits fibrés. Dans une telle catégorie D, un morphisme $p : S' \to S$ est un épimorphisme effectif si pour tout objet $X \in \mathsf{D}$, le diagramme d'ensemble suivant est exact : $X(S) \to X(S') \rightrightarrows X(S' \times_S S')$. Dans une telle catégorie, on dispose aussi du pseudo-foncteur Ψ au dessus de D qui à un objet $S \in \mathsf{D}$ associe la catégorie des S-objets de D. Le tiré en arrière est alors simplement donné par le produit fibré de la catégorie D.

On rappelle qu'un morphisme $p : S' \to S$ dans D est un morphisme de descente pour le pseudo-foncteur Ψ si et seulement si c'est un épimorphisme effectif universel dans D c'est à dire un épimorphisme effectif après tout changement de base dans D par l'exposé 4 de [28].

2.2.2 La descente effective

Le résultat phare de cette section est le résultat suivant. Il donne une condition pour que les morphismes plats et surjectifs soient de descente effectif pour un pseudo-foncteur donné au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes. Il permet donc de décider si un pseudo-foncteur en particulier est un champ pour la topologie de Grothendieck dont les flèches couvrantes sont les flèches plates et surjectives.

2.2.4 Théorème. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus de C, avec C la catégorie des espaces analytiques k-affinoïdes. On suppose que :*

1. *Pour toute algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, et tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*
2. *Tout morphisme plat, fini et surjectif $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*
3. *Tout G-recouvrement fini $\amalg_{i=1}^n S_i \to S$ de S par des domaines affinoïdes en nombre fini est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.*

Alors tout morphisme fidèlement plat entre espaces affinoïdes est un morphisme de descente effective relativement à Ψ.

La technique de démonstration du théorème précédent est d'utiliser les deux premiers

points du lemme suivant à répétition en suivant la stratégie de démonstration de la preuve du théorème 3.3 de [17].

2.2.5 Lemme. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus d'une catégorie possédant des produits fibrés (*e.g *la catégorie des espaces affinoïdes). Considérons $R \xrightarrow{v} S \xrightarrow{u} T$ des morphismes d'une catégorie C. Alors :*

1. *Supposons que u et v sont des morphismes de descente effective, et que les morphismes canoniques $m : R \times_T R \to S \times_T S$ et $m' : R \times_T R \times_T R \to S \times_T S \times_T S$ sont des morphismes de descente. Alors le morphisme $u \circ v$ est de descente effective.*
2. *Supposons que v est de descente effective et que $u \circ v$ est de descente effective. Alors u est de descente effective.*

Preuve. On peut démontrer ces points de la même manière que les proposition 10.10 et 10.11 de [26]. On va par exemple démontrer le premier point. Supposons donc que u, v sont des morphismes de descente effective et que m et m' sont des morphismes de descente. Notons $p_i : S \times_T S \to S$, $q_i : R \times_T R \to R$, et $r_i : R \times_S R \to R$ les projections canoniques pour $i \in \{1, 2\}$, et notons $l : R \times_S R \to R \times_T R$ le morphisme canonique. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \times_S R \arrow[r, "l"] \arrow[dr, shift left] \arrow[dr, shift right] & R \times_T R \arrow[r, "m"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & S \times_T S \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \\
& R \arrow[r, "v"] & S \arrow[r, "u"] & T
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que $u \circ v$ est un morphisme de descente effective. On se donne donc une donnée de descente relativement au morphisme $u \circ v : R \to T$, c'est à dire un élément $\xi'' \in \Psi R$ muni d'un isomorphisme $\varphi' : q_1^* \xi'' \to q_2^* \xi''$ vérifiant la condition de cocycle usuelle. On tire la donnée de descente φ' en arrière par le morphisme l, ce qui nous fournit une donnée de descente $l^* \varphi' : r_1^* \xi'' \to r_2^* \xi''$ sur ξ'' relativement au morphisme v. Puisque v est de descente effective, on en déduit qu'il existe un objet ξ' dans ΨS muni d'un isomorphisme de données de descente $\lambda' : v^* \xi' \to \xi''$ relativement à v, c'est à dire que λ' vérifie la relation $l^* \varphi' \circ r_1^* \lambda' = r_2^* \lambda'$.

Maintenant, va équiper ξ' d'une donnée de descente relativement à u, c'est à dire d'un isomorphisme $\varphi : p_1^* \xi' \to p_2^* \xi'$ vérifiant la condition de cocyle, et qui vérifie de plus la relation $q_2^* \lambda' \circ m^* \varphi = \varphi' \circ q_1^* \lambda'$. Pour l'existence de φ, on utilise l'hypothèse que m est de descente : il suffit de vérifier que si l'on note m_1 et m_2 les deux projections canoniques de $(R \times_T R) \times_{S \times_T S} (R \times_T R) \to R \times_T R$, alors le morphisme $z := q_2^* \lambda'^{-1} \circ \varphi' \circ q_1^* \lambda'$ vérifie la relation $m_1^* z = m_2^* z$. On vérifie aussi, en utilisant l'hypothèse sur m' que φ vérifie bien la relation de cocycle. Maintenant, puisque u est de descente effective, on en déduit l'existence de $\xi \in \Psi T$ muni d'un isomorphisme $\lambda : u^* \xi \to \xi'$ de données de descente relativement à u, c'est à dire que λ vérifie la relation $p_2^* \lambda = \varphi \circ p_1^* \lambda$. Si l'on tire cette relation en arrière par

le morphisme m, on obtient la relation $q_2^* v^* \lambda = m^* \varphi \circ q_1^* v^* \lambda$, et par la relation vérifiée par φ, on en déduit $q_2^* v^* \lambda = q_2^* \lambda'^{-1} \circ \varphi' \circ q_1^* \lambda' \circ q_1^* v^* \lambda$, c'est à dire en réarrangeant les termes que $\varphi' \circ q_1^*(\lambda' \circ v^* \lambda) = q_2^*(\lambda' \circ v^* \lambda)$, donc $\lambda' \circ v^* \lambda$ définit bien un isomorphisme de données de descentes de $(u \circ v)^* \xi$ muni de ses données de descentes canoniques vers ξ'' muni de ses données de descente induites par φ', et le morphisme $u \circ v$ est bien un morphisme de descente effective. □

Dans la suite de cette section, on va démontrer le théorème. On se donne donc la catégorie C des espaces k-affinoïdes, un pseudo-foncteur Ψ au dessus de C et un morphisme fidèlement plat $p : S' \to S$ dans la catégorie C, dont on va montrer qu'il est de descente effective.

Réduction au cas strict non trivialement valué

Considérons r un polyrayon k-libre tel que S'_r et S_r soient strictement k_r-affinoïdes et que la valeur absolue sur k_r soit non triviale. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S'_r \arrow[r] \arrow[d] & S_r \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd} \tag{2.2.2.0.1}$$

Quitte à remplacer Ψ par le pseudo-foncteur induit sur les espaces k_r-affinoïdes, et à remplacer k par k_r, on peut supposer que S et S' sont strictement affinoïdes, et que le corps k est non trivialement valué. En effet, si l'on démontre le théorème dans ce cas là, tout morphisme plat surjectif entre espaces strictement k_r-affinoïdes est de descente effectif, et c'est en particulier le cas du morphisme $S'_r \to S_r$ mais aussi des morphismes $S'_r \times_S S'_r \to S_r \times_S S_r$ et $S'_r \times_S S'_r \times_S S'_r \to S_r \times_S S_r \times_S S_r$, et puisque $S_r \to S$ est effectif par hypothèse, par le lemme 2.2.5, on en déduit que $S'_r \to S$ est de descente effective.

Maintenant, puisque $S'_r \to S'$ est de descente effectif par hypothèse, il suffit d'appliquer la deuxième partie du lemme 2.2.5 pour conclure que le morphisme $S' \to S$ est de descente effectif. Cela nous permet donc de réduire le problème à un morphisme $S' \to S$ plat surjectif entre espaces strictement k-affinoïdes, avec k un corps non trivialement valué.

Réduction au cas quasi-fini

Considérons donc un morphisme fidèlement plat $S' \to S$ entre espaces strictement k-affinoïdes. Par le théorème sur l'existence de multisection plate 9.1.3 de [20], il existe un espace strictement k-affinoïde X, un morphisme quasi-fini (c'est à dire topologiquement propre et de dimension relative nulle), fidèlement plat $X \to S$ et un S-morphisme $X \to S'$. Maintenant, le morphisme $X' = S' \times_S X \to X$ ainsi que tout changement de base de celui-ci admet alors une section, c'est donc un morphisme de descente effective , donc par le

lemme 2.2.5, on peut se ramener à démontrer le théorème pour un morphisme $S' \to S$ quasi-fini, plat et surjectif puisque ces propriétés sont stables par changement de base (pour quasi-fini, cela résulte de l'invariance par changement de base de la dimension, qui est établie dans [25]).

Réduction au cas quasi-étale

Considérons un morphisme plat, surjectif, quasi-fini $S' \to S$ entre espaces affinoïdes. Alors, comme le morphisme est de dimension relative nulle et plat, par la remarque 8.4.3 de [20], S' est de Cohen-Macaulay au dessus de S. Maintenant, on applique le théorème 8.4.6 de [20] : pour tout $s' \in S'$, il existe un domaine affinoïde V_i de S' (i dépend de s') qui est un voisinage de s', un espace affinoïde W_i, un S-espace T_i, étale au dessus de S, un morphismes $V_i \to W_i$ plat, fini, un morphisme $W_i \to T_i$ qui identie W_i à un domaine affinoïde de T_i et tels que la composée $V_i \to W_i \to T_i \to S$ soit aussi la restriction de f à V_i. De plus, par la proposition 4.3.1 de [20], il existe un voisinage affinoïde V_i' de s' dans V_i et un voisinage affinoïde W_i' de l'image de s' dans W_i tels que la flèche $V_i' \to W_i$ se factorise en $\pi : V_i' \to W_i'$ finie et tels que $\pi_*(O_{V_i'})$ est un $\mathcal{O}_{W_i'}$ module libre. La flèche $W_i' \to S$ reste quasi-étale, et si l'on note $\mathcal{F}$ (resp $\mathcal{E}$) l'algèbre k-affinoïde associée à V_i' (resp. W_i'), la flèche $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est fidèlement plate, ($\mathcal{E}$ est un $\mathcal{F}$-module libre de rang $r > 0$) donc elle est aussi injective, et la flèche $V_i' \to W_i'$ est bien surjective par le corollaire 2.1.16 de [4].

Ainsi, on dispose d'une factorisation locale de f en $V_i' \to W_i'$ finie, plate et surjective suivie de $W_i' \to S'$ quasi-étale. On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \amalg V_i' \arrow[r] \arrow[d] & \amalg W_i' \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

La flèche $\amalg V_i' \to S'$ est un G-recouvrement par des affinoïdes qui peut être choisi fini, donc c'est un morphisme de descente effective . Par le lemme 2.2.5, pour démontrer que $S' \to S$ est de descente effective, il suffit de le faire pour le morphisme $\amalg V_i' \to S$, mais celui-ci se décompose en $\amalg V_i' \to \amalg W_i'$ qui est fini, plat et surjectif donc effectif et de descente universellement, suivi de $\amalg W_i' \to S$ qui est quasi-étale fidèlement plat. Par le lemme 2.2.5, il suffit donc de démontrer le théorème pour un morphisme $p : S' \to S$ quasi-étale fidèlement plat.

La réduction au cas d'une flèche plus simple

Considérons donc un morphisme $p : Y \to X$ quasi-étale surjectif entre espaces affinoïdes. On va montrer que le morphisme p est de descente effective. Soit $x \in X$, notons $y_1, .., y_r \in Y$ les antécédents de x qui sont en nombre fini. Par définition d'un morphisme

quasi-étale, pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un voisinage affinoïde Y_i' de y_i qui est X-isomorphe à un domaine affinoïde d'un X-espace étale Z_i'. Maintenant, par le caractère étale du morphisme $Z_i' \to X$, il existe Z_i'' un ouvert de Z_i' contenant l'image de y et un voisinage X_i'' de x dans X tel que la restriction de la flèche structurale de Z_i' à Z_i'' induise une flèche $Z_i'' \to X_i''$ finie étale. Maintenant, par la proposition 4.3.1 de [20], il existe un voisinage affinoïde Z_i de l'image de y dans Z_i'', et un voisinage affinoïde X_i de x dans X_i'' tels que $Z_i'' \to X_i''$ se factorise en $\pi : Z_i \to X_i$ fini étale et vérifiant que $\pi_*(\mathcal{O}_{Z_i})$ est un $\mathcal{O}_{X_i}$-module libre. Alors si l'on note $\mathcal{E}$ (resp $\mathcal{F}$) l'algèbre des fonctions sur X_i (resp Z_i), alors la flèche $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ est fidèlement plate, donc injective, et alors $Z_i \to X_i$ est surjective par 2.1.16 de [4].

Maintenant, $Y_i := Z_i \times_{Z_i'} Y_i' \to Y_i'$ est une inclusion de domaine analytique au voisinage de y, tout comme $Y_i \to Z_i$. Ainsi, $Y_i \to Y$ est une inclusion de domaine analytique, tout comme $Y_i \to Z_i$, et $Z_i \to X$ se décompose en $Z_i \to X_i$ étale, finie et surjective, et $X_i \to X$ qui est une inclusion de voisinage affinoïde de x.

La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
Y_i \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & X & X_i \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

La partie $\cup_{i \in I} Y_i$ est un voisinage de la fibre $p^{-1}(x)$ donc puisque p est fermée, il existe V_x un voisinage affinoïde de x dans X contenu dans chaque X_i tel que $p^{-1}(V) \subset \cup_{i \in I} Y_i$ (en effet, si W est un voisinage ouvert de $p^{-1}(x)$ inclus dans $\cup_{i \in I} Y_i$, on prend un voisinage affinoïde V de x inclus dans l'ouvert $V' := X \setminus p(Y \setminus W)$). Maintenant, par compacité de X, il existe un nombre fini de V_x qui recouvrent X, et en appliquant le lemme 2.2.5 aux composée $\amalg p^{-1}(V_x) \to \amalg V_x \to X$ et $\amalg p^{-1}(V_x) \to Y \to X$ on voit qu'il suffit de démontrer que la flèche $p^{-1}(V_x) \to V_x$ reste de descente effective universellement pour chaque $x \in X$ pour montrer que $p : Y \to X$ est de descente effective.

Fin de la démonstration

On fixe donc $x \in X$ et on note $V = V_x$ le voisinage affinoïde associé du paragraphe précédent. Pour montrer que $p^{-1}(V) \to V$ est de descente effective, on va appliquer le lemme 2.2.5 à certaines factorisations qui sont stables par changement de base, donc cela montrera aussi que $p^{-1}(V) \to V$ est de descente effective universellement. Maintenant, par changement de base, pour chaque $1 \leqslant i \leqslant r$, le diagramme 2.2.2 fournit le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} Y_i \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & Z_i \times_X V \arrow[d] \\ Y \times_X V \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

et puisque chaque $Z_i \times_X V \to V$ est fini étale, il existe un revêtement fini étale galoisien $T \to V$ de l'espace V qui domine tous ces revêtements finis étales. On a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \amalg_{i\in I} Y_i \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & \amalg_{i\in I} Z_i \times_X V \arrow[d] \\ Y \times_X V \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

Puisque $T \to V$ est fini étale surjectif, il est de descente effectif universellement par hypothèse, et par le lemme 2.2.5, il suffit de démontrer que la flèche $Y \times_X V \times_V T \to T$ est universellement de descente effective pour montrer que la flèche $Y \times_X V \to V$ est de descente effective. On effectue donc le changement de base $T \to V$ au diagramme précédent pour obtenir :

$$\begin{tikzcd} \amalg_{i\in I} Y_i \times_X V \times_V T \arrow[r] \arrow[d] & \amalg_{i\in I} Z_i \times_X V \times_V T \arrow[d] \\ Y \times_X V \times_V T \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

Et la flèche $\amalg_{i\in I} Y_i \times_X V \times_V T \to Y \times_X V \times_V T$ est un G-recouvrement surjectif (car $\amalg Y_i \times_X V \to Y \times_X V$ l'est par définition de V), tout comme $\amalg_{i\in I} Y_i \times_X V \times_V T \to T$ (puisque $Y_i \to Z_i$ est une inclusion de domaine analytique, et que $Z_i \times_X V \times T \to T$ est de la forme $\amalg_{i\in H_i} T \to T$ pour un certain ensemble fini H_i par définition d'un revêtement galoisien). Par une dernière application du lemme 2.2.5, on voit que $Y \times_X T \to T$ est de descente effective, ce qui démontre que $Y \times_X V \to V$ l'est, et comme cela vaut sur un G-recouvrement fini par des domaines affinoïdes V de X, cela le démontre pour $Y \to X$ quasi-étale surjective, et le théorème 2.2.4 est démontré.

2.2.3 La pleine fidélité

On a un analogue du lemme 2.2.5 pour les morphismes de descente, qui est démontré dans [26], à la proposition 10.10 et 10.11.

2.2.6 Lemme. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus au dessus d'une catégorie possédant des produits fibrés (*e.g *la catégorie des espaces affinoïdes). Considérons $R \xrightarrow{v} S \xrightarrow{u} T$ des morphismes dans C. Alors :*

1. *Supposons que u et v sont des morphismes de descente, et que le morphisme canonique $k : R \times_T R \to S \times_T S$ induit un foncteur fidèle $\Psi(S \times_T S) \to \Psi(R \times_T R)$.*

Alors le morphisme $u \circ v$ est un morphisme de descente.

2. *Supposons que $u \circ v$ est un morphisme de descente et que le morphisme v induit un foncteur fidèle $\Psi S \to \Psi R$. Alors u est un morphisme de descente.*

En redéroulant la démonstration du théorème 2.2.4 étape par étape, on obtient le théorème suivant :

2.2.7 Théorème. *Considérons Ψ un pseudo-foncteur au dessus de C, avec C la catégorie des espaces analytiques k-affinoïdes. On suppose que :*

1. *Pour toute algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, et tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, le morphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente relativement à Ψ.*
2. *Tout morphisme plat, fini et surjectif $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente relativement à Ψ.*
3. *Tout G-recouvrement fini $\amalg_{i=1}^n S_i \to S$ de S par des domaines affinoïdes en nombre fini est un morphisme de descente relativement à Ψ.*

Alors tout morphisme fidèlement plat entre espaces affinoïdes est un morphisme de descente relativement à Ψ.

2.3 Application à certains pseudo-foncteurs particuliers

L'idée de cette section est d'appliquer les deux théorèmes généraux de la section précédente à des pseudo-foncteurs particuliers pour obtenir des résultats de descente.

2.3.1 Équivalence dans le cas des modules cohérents, pleine fidélité pour les S- espaces analytiques quelconques

Les résultat suivant sont dûs à Berkovich dans [5] en 1.2.0. et 1.3.2. Il indiquent juste qu'on peut toujours recoller des modules cohérents ou bien des morphismes d'espaces analytiques au dessus de G-recouvrements finis.

2.3.1 Proposition. *Considérons un G-recouvrement $p : \amalg_{i \in I} S_i \to S$ d'un espace affinoïde S par un nombre fini de domaines affinoïdes S_i.*

1. *Soit Ψ le pseudo-foncteur qui à un espace affinoïde S associe la catégorie des modules cohérents au dessus de S. Alors p est un morphisme de descente effective .*
2. *Soit Φ le pseudo-foncteur qui à un espace affinoïde S associe la catégorie des espaces affinoïdes X au dessus de S. Alors le morphisme p est un morphisme de descente.*

2.3.2 Lemme. *Le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe l'ensemble des modules cohérents au dessus de S vérifie la propriété suivante : si $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$ est*

un polyrayon k-libre, un morphisme entre espaces affinoïdes $p : S' = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est de descente effective pour Ψ si le morphisme $S'_r \to S_r$ l'est pour le pseudo-foncteur obtenu par restriction de Ψ à la catégorie des espaces k_r-affinoïdes.

Preuve. Supposons que $S'_r \to S_r$ est de descente effective. On se donne M et N deux modules cohérents au dessus de S. Le morphisme $S' \to S$ est de descente, si la suite suivante est exacte :

$$0 \to M \to M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$$

et cette suite est exacte si et seulement si elle le reste après chapeau-tensorisation par k_r, ce qui est vrai puisque $S'_r \to S_r$ est de descente.

Pour l'effectivité, si on se donne un module cohérent M' au dessus de S' muni de données de descente $\varphi : M'\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}M'$, on voudrait montrer que si l'on désigne par M le $\mathcal{A}$-module définit par $M = \{x \in M', \varphi(x\hat{\otimes}1) = 1\hat{\otimes}x\}$, on a un isomorphisme $\lambda : M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to M'$, mais la flèche sus-citée est un isomorphisme après chapeau-tensorisation avec k_r, donc c'est un isomorphisme. En effet, on peut considérer la suite exacte à gauche évidente :

$$0 \to M \to M' \to M'\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$$

On munit M de la topologie induite, et on dispose donc d'une suite exacte admissible de modules de Banach, d'où par la proposition 2.1.2 de [4] une suite exacte

$$0 \to M_r \to M'_r \to M'_r\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}_r$$

Puisque $S'_r \to S$ est de descente effective, on en déduit que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{B}_r$-modules finis munis de données de descente $M_r\hat{\otimes}_{\mathcal{A}_r}\mathcal{B}_r \to M'_r$ mais cette flèche n'est autre que λ_r donc par la proposition 2.1.2 de [4], λ est bien un isomorphisme.

De plus, par la proposition 2.1.11 de [4], le $\mathcal{A}$-module M est bien fini, puisque M_r est fini au dessus de $\mathcal{A}_r$, d'où l'effectivité de p. □

La proposition suivante repose sur les calculs dus à Ducros dans [17].

2.3.3 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur qui à un espace affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des $\mathcal{A}$-modules de Banach au dessus de S. Alors pour tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la flèche canonique $p : \mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une flèche de descente effective.*

Démonstration. Le fait que p soit un morphisme de descente est évident puisque si M un $\mathcal{A}$-module de Banach, on a une suite exacte admissible $0 \to M \to M\hat{\otimes}_k k_r \to M\hat{\otimes}_k k_r\hat{\otimes}_k k_r$ puisque l'inclusion de M dans M_r est une isométrie. On montre donc l'effectivité. On se donne donc (M, φ) un $\mathcal{A}_r$-module de Banach muni de données de descente.

Notons T la famille des fonctions coordonnées sur k_r, et T_1 et T_2 les deux familles de

fonctions coordonnées de l'anneau $k_r\hat{\otimes}k_r$. Posons $B := \mathcal{A}_r\hat{\otimes}\mathcal{A}_r$. On dispose d'identifications :

$$\mathcal{A}_r = \mathcal{A}\{r^{-1}T, rT^{-1}\} = \mathcal{A}\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}\} = \mathcal{A}\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\}$$

Lorsqu'un objet mathématique sera défini au dessus de $\mathcal{A}\{r^{-1}T_i, rT_i^{-1}\}$, pour $i = 1$, 2 ou 3, nous l'indiquerons en indice. On a ainsi la relation :

$$B = \mathcal{A}_{r,1}\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\} = \mathcal{A}_{r,2}\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}\}.$$

La donnée de descente φ est donc un isomorphisme de B-modules de $M_1\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\}$ vers $M_2\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}\}$.

L'isomorphisme φ vérifie la condition de cocycle $\varphi_{13} = \varphi_{23} \circ \varphi_{12}$, comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
M_1\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}, r^{-1}T_3, rT_3^{-1}\} \arrow[r, "\varphi_{12}"] \arrow[dr, "\varphi_{13}"'] & M_2\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}, r^{-1}T_3, rT_3^{-1}\} \arrow[d, "\varphi_{23}"'] \\
& M_3\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}, r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\}
\end{tikzcd}$$

On va maintenant appliquer cette relation sur un élément générique $\sum_{I,J} m_{I,J,1}T_2^I T_3^J$ dans $M_1\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}, r^{-1}T_3, rT_3^{-1}\}$. Pour tout I, écrivons $\varphi(\sum_J m_{I,J,1}T_2^J) = \sum_J n_{I,J,2}T_1^J$. Pour tout J, écrivons $\varphi(\sum_I m_{I,J,1}T_2^I) = \sum_I l_{I,J,2}T_1^I$. Écrivons enfin pour tout I, $\varphi(\sum_J l_{I,J,1}T_2^J) = \sum_J \lambda_{I,J,2}T_1^J$.

Alors par définition, $\varphi_{13}(\sum_{I,J} m_{I,J,1}T_2^I T_3^J) = \sum_{I,J} n_{I,J,3}T_1^J T_2^I$. On dispose aussi de la relation $\varphi_{12}(\sum_{I,J} m_{I,J,1}T_2^I T_3^J) = \sum_{I,J} l_{I,J,2}T_1^I T_3^J$, et $\varphi_{23}(\sum_{I,J} l_{I,J,2}T_1^I T_3^J) = \sum_{I,J} \lambda_{I,J,3}T_1^I T_2^J$, et l'on en déduit ainsi la relation $n_{I,J} = \lambda_{J,I}$.

Maintenant, posons $M_0 := \{m \in M, \varphi(m_1) = m_2\}$. Alors M_0 est un $\mathcal{A}$-module de Banach complet comme fermé d'un espace complet. Considérons $m \in M$, et écrivons $\varphi(m_1) = \sum_J \mu_{J,2}T_1^J$. Appliquons ce qui précède avec $m_{I,J} = m$ si $(I, J) = (0, 0)$ et 0 sinon. Alors en gardant les mêmes notations, puisque $\varphi_{13}(m) = \sum_J \mu_{J,3}T_1^J$, on en déduit que $n_{I,J} = 0$ si $I \neq 0$, et $n_{0,J} = \mu_J$. De même, puisque $\varphi_{12}(m) = \sum_J \mu_{J,2}T_1^J$, on obtient $l_{I,J} = 0$ si $J \neq 0$, et $l_{I,0} = \mu_I$. Enfin, par définition des $\lambda_{I,J}$, on a $\varphi(l_{I,0,1}) = \sum_J \lambda_{I,J,2}T_1^J$ soit encore grâce à la relation obtenue à la fin du paragraphe précédent $\varphi(\mu_I) = \sum_J n_{J,I,2}T_1^J = n_{0,I,2} = \mu_{I,2}$. Cela démontre que μ_I est dans M_0 pour tout I.

Maintenant, le reste découle de ce résultat. En effet, par injectivité du morphisme φ, puisque $\varphi(\sum_J \mu_{J,1}T_1^J) = \sum_J \mu_{J,2}T_1^J = \varphi(m_1)$, on en déduit que $m_1 = \sum_J \mu_{J,1}T_1^J$, ce qui montre que le morphisme naturel $\bar{\omega} : M_0\{r^{-1}T, rT^{-1}\} \to M_1$, qui envoie $\sum_J \alpha_J T^J$ sur $\sum_J \alpha_{J,1}T_1^J$ est surjectif. De plus, $\varphi(\sum_J \alpha_{J,1}T_1^J) = \sum_J \alpha_{J,2}T_1^J$, ce qui montre que ce morphisme est aussi injectif, et admissible (car φ est admissible). De plus, modulo l'isomorphisme $M \simeq M_0\hat{\otimes}\mathcal{A}_r$, l'isomorphisme φ est simplement l'égalité :

$$M_0\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}\}\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\} \simeq M_0\{r^{-1}T_2, rT_2^{-1}\}\{r^{-1}T_1, rT_1^{-1}\}$$

Donc l'isomorphisme précédent est bien un isomorphisme de données de descente, et cela démontre que la flèche canonique $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une flèche de descente effective. $\square$

2.3.4 Remarque. Ainsi, si l'on se donne un module M' fini au dessus de A_r muni de données de descente, on peut descendre le module de Banach sous jacent en un module de Banach M, et par la proposition 2.1.11 de [4], c'est un module fini.

De même, si l'on se donne $\mathcal{D}$ une $\mathcal{A}_r$-algèbre de Banach munie de données de descente, on peut descendre le module de Banach sous-jacent grâce au théorème précédent, qui fournit $\mathcal{D}_0$ un $\mathcal{A}$-module de Banach, qui est en fait une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach puisque la multiplication est une application bilinéaire bornée. De plus, la même démonstration que la proposition 2.1.8 de [4] montre que $\mathcal{D}$ est une algèbre $\mathcal{A}_r$-affinoïde si et seulement si $\mathcal{D}_0$ est une algèbre $\mathcal{A}$-affinoïde.

Ces remarques montrent les deux propositions suivantes :

2.3.5 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des $\mathcal{A}$-modules cohérents au dessus de S. Alors pour tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la flèche canonique $p : \mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une flèche de descente effective pour ce pseudo-foncteur.*

2.3.6 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des espaces analytiques k-affinoïdes au dessus de S. Alors pour tout polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, la flèche canonique $p : \mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une flèche de descente effective pour ce pseudo-foncteur.*

2.3.7 Remarque. Considérons un morphisme de schémas affines $p : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ fini et localement libre. Considérons $b \in B$ et $(f_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de A qui génère l'idéal unité, et tel que B_{f_i} est libre au dessus de A_{f_i}. Alors, la multiplication par b induit un endomorphisme du A_{f_i}-module B_{f_i}, et possède donc un polynôme caractéristique $\chi_i \in A_{f_i}[X]$. Puisque le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un module libre et fini est invariant par changement de base, on en déduit que les polynômes χ_i et χ_j sont égaux dans $A_{f_if_j}[X]$, et par définition du faisceau structural d'un schéma affine, on en déduit l'existence d'un polynôme $\chi_b \in A[X]$ dont l'image dans chaque $A_{f_i}[X]$ est χ_i. Ce polynôme est indépendant du recouvrement de $\operatorname{Spec} A$ choisi, et vérifie encore la relation $\chi_b(b) = 0$, que l'on peut vérifier dans chaque $A_{f_i}[X]$.

On énonce maintenant deux lemme concernant les polynômes caractéristiques qui serviront dans la suite.

2.3.8 Lemme. *Considérons des anneaux A, B, et C munis de morphismes d'anneaux $\psi : A \to B$, $h : A \to C$, tels que ψ soit fini et localement libre. Notons $h' : B \to B \otimes_A C$ et $\psi' : C \to B \otimes_A C$ les deux morphismes canoniques.*

Notons encore h le morphisme induit par h de $A[X]$ vers $C[X]$. Soit $b \in B$. Le morphisme $\operatorname{Spec} B \otimes_A C \to \operatorname{Spec} C$ *est fini et localement libre, donc $h'(b)$ possède un polynôme caractéristique relativement à ψ', que l'on note $\chi_{h'(f)} \in C[X]$. Notons $\chi_f \in A[X]$ le polynôme caractéristique de f relativement à ψ. Alors, on dispose de l'égalité $h(\chi_f) = \chi_{h'(f)}$.*

Démonstration. La situation est résumée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C & C \arrow[l, "\psi'"'] \\ B \arrow[u, "h'"] & A \arrow[l, "\psi"] \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

Soit $x \in \operatorname{Spec} A$. Par les propriétés des morphismes finis et localement libres, il existe V un voisinage affine de x dans $\operatorname{Spec} A$, tel que l'image inverse de V sur $\operatorname{Spec} B$ est un ouvert affine W de $\operatorname{Spec} B$ tel que $\mathcal{O}(W)$ est un $\mathcal{O}(V)$-module libre. Considérons l'image inverse U de V sur $\operatorname{Spec} C$. Alors, l'image inverse de U sur $\operatorname{Spec} D$ s'identifie à $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathcal{O}(V)} \mathcal{O}(W))$ qui est un $\mathcal{O}(U)$-module libre. Maintenant, puisque la définition des polynôme caractéristiques est locale, il suffit de montrer que l'égalité du lemme vaut dans $\mathcal{O}(V)[X]$, et on peut donc supposer que B est un A-module libre.

Maintenant, on écrit B comme une somme directe finie $B = \bigoplus_{i \in I} Ab_i$ avec $b_i \in B$, et $I = [\![1, n]\!]$. Notons $F = (f_{ij})_{(i,j) \in I \times I}$ la matrice de la multiplication par f dans la base $(b_i)_{i \in I}$. Alors, on dispose de l'égalité $B \otimes_A C = \bigoplus_{i \in I} Ch'(b_i)$. On a aussi la relation $h'(f)h'(b_j) = h'(fb_j) = h'(\sum_{i \in I} f_{ij} d_i) = \sum_{i \in I} h(f_{ij}) d_i$ par les propriétés du produit tensoriel, puisque pour tout $i, j \in I$, $f_{ij} \in A$. Cela montre que la matrice de la multiplication par $h'(f)$ dans la base $(h'(b_i))_{i \in I}$ est la matrice $(h(f_{ij}))_{(i,j) \in I \times I}$.

Notons $\chi_f = \sum_{i=1}^n a_i X^i$. Alors, on a $a_i = (-1)^{n-k} \sum_{|J|=n-k} F[J]$ avec $F[J]$ le mineur principal de la matrice F obtenu en enlevant les colonnes et les lignes dont les indices sont dans J. On en déduit que $h(a_i) = (-1)^{n-k} \sum_{|J|=n-k} h(F[J])$, et puisque h est un morphisme d'algèbre, et que le déterminant est un polynôme en les coefficients, on en déduit que pour tout mineur principal $F[J]$, on dispose de l'égalité $h(F[J]) = G[J]$ avec G la matrice de taille $I \times I$ à coefficient dans C définie par $G = (h(f_{ij})_{(i,j) \in I \times I})$. Par le paragraphe précédent, c'est exactement la matrice de la multiplication par $h'(f)$ dans la base $(h'(b_i))_{i \in I}$, et puisque la formule exprimant les coefficients du polynôme caractéristique en fonction des mineurs principaux reste valable, on en déduit que les coefficients de $\chi_{h'(f)}$ sont exactement $h(a_i)$, ce qui prouve que l'on a l'égalité $h(\chi_f) = \chi_{h'(f)}$. □

Le lemme suivant exprime la compatibilité du polynôme caractéristique avec la structure produit d'une k-algèbre.

2.3.9 Lemme. *Considérons k un corps, et une k-algèbre finie de la forme $A = \prod_{i=1}^n A_i$ avec A_i une k-algèbre finie pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Soit $f = (f_1, ..., f_n) \in A$. Alors, on*

dispose de l'égalité $\chi_f = \prod_{i=1}^n \chi_{f_i}$*, où* χ_{f_i} *est le polynôme caractéristique de* f_i *vu comme élément de* A_i*.*

Démonstration. Il suffit de se donner pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ une base $\mathcal{B}_i$ de A_i. Alors, si l'on note M_i la matrice de la multiplication par f_i dans la base $\mathcal{B}_i$, la matrice de la multiplication par f dans la base de A obtenue à partir de chaque base $\mathcal{B}_i$ est une matrice diagonale par bloc de M_i. Le résultat s'en déduit en prenant le polynôme caractéristique, puisque le déterminant d'une matrice diagonale par bloc est le produit des déterminants de chacun de ses blocs. □

On donne un lemme qui relie la norme des coefficients de χ_f à la norme de f.

2.3.10 Lemme. *Considérons* $k \to L$ *une extension finie de corps ultramétriques complets. Soit* $f \in L$*, tel que* $|f| \leqslant 1$*. Alors, si* $\overline{k}$ *est une clôture algébrique de* k *qui contient* L*, les conjugués de* f *dans* $\overline{k}$ *sont de norme plus petite que 1. En particulier, le polynôme* χ_f *est à coefficient dans* $\overset{\circ}{k}$*, c'est à dire que tous ses coefficients sont de norme inférieure à 1.*

Démonstration. Considérons $\overline{k}$ une clôture algébrique de k contenant L. Les racines de χ_f sont exactement les racines du polynôme minimal de f. Puisque le polynôme minimal P_f de f est irréductible sur k, le groupe de Galois $\mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ agit transitivement sur les racines de P_f, donc pour toute racine de $\alpha \in \overline{k}$, il existe $\gamma \in \mathrm{Aut}(\overline{k}/k)$ tel que $\gamma\alpha = f$. Par le lemme 3.8.1.4 de [7], on en déduit que $|\alpha| \leqslant 1$, et puisque χ_f est unitaire, par inégalité triangulaire ultramétrique, en développant une écriture $\chi_f = \prod_\alpha (X - \alpha)^{n_\alpha}$, où le produit porte sur l'ensemble des racines de P_f, on en déduit que χ_f est bien à coefficients dans $\overset{\circ}{k}$. □

Ce dernier lemme nous permettra de relier le polynôme caractéristique d'un élément d'une k-algèbre avec le polynôme caractéristique de l'image de cet élément dans l'algèbre réduite associée.

2.3.11 Lemme. *Considérons un corps* k*, et une* k*-algèbre finie locale* A*, dont nous noterons* m *l'idéal maximal. Notons* $\pi : A \to A/m$ *le morphisme quotient. Soit* $f \in A$*. Alors, le polynôme* χ_f *possède les mêmes facteurs irréductibles que le polynôme* $\chi_{\pi(f)}$*.*

Démonstration. Les polynômes caractéristiques et minimum d'un endomorphisme d'un k-espace vectoriels possèdent les mêmes facteurs irréductibles.

Considérons R un polynôme irréductible à coefficient dans k. Alors, R divise χ_f (resp. $\chi_{\pi(f)}$) si et seulement si $R(f)$ (resp. $R(\pi(f))$) est non inversible. La propriété est évidente pour $\chi_{\pi(f)}$ puisque A/m est un corps, on montre la propriété pour $\chi_{\pi(f)}$.

Si R divise χ_f, alors R divise P_f le polynôme minimal de f, donc $P_f = RQ$ avec Q un polynôme à coefficient dans k de degré strictement plus petit que P_f. Maintenant, $P_f(f) = 0 = R(f)Q(f)$ et si $R(f)$ était inversible, alors Q serait un polynôme à coefficients

dan k annulant f de degré strictement plus petit que P_f ; c'est absurde, donc $R(f)$ est non inversible.

Réciproquement, si $R(f)$ est non inversible, alors la multiplication par $R(f)$ est non surjective, donc non injective, et il existe $v \in A$ non nul tel que $R(f)v = 0$. Si l'on prend L une cloture algébrique de k, et que l'on décompose $R = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)_i^n$, avec $\alpha \in L$, il existe donc ß $\in \{1, ..., n\}$ tel que $(m_f - \alpha_i Id)$ est non-inversible (sinon $v = 0$), où l'on a noté m_f l'endomorphisme de A égal à la multiplication par f. Cela montre que α_i est une valeur propre de m_f, donc une racine de χ_f. Maintenant, le pgcd de R et χ_f divise R, c'est donc R ou 1. Ce même pgcd est invariant par extension des scalaires (calculé par l'algorithme d'Euclide, toutes les opérations restent dans le corps de base), donc on peut le calculer dans $L[X]$. Or puisque $(X - \alpha_i)$ divise R et divise χ_f, ce pgcd ne peut être égal à 1, donc il vaut R, et R divise χ_f.

La démonstration du lemme est alors immédiate : prenons R un polynôme irréductible de $k[X]$. Alors, R divise χ_f si et seulement si $R(f)$ est non inversible dans A si et seulement si $R(f)$ n'est pas dans m l'idéal maximal de A (car A est local) si et seulement si $\pi(R(f))$ est non nul si et seulement si $\pi(R(f)) = R(\pi(f))$ est non inversible si et seulement si R divise $\chi_{\pi(f)}$. Cela montre que χ_f et $\chi_{\pi(f)}$ ont les mêmes facteurs irréductibles. □

2.3.12 Remarque. Supposons que le corps k est ultramétrique et complet, et que l'algèbre A est une k-algèbre de Banach finie et locale, d'idéal maximal m, et de morphisme canonique $\pi : A \to A/m$. Soit $f \in A$. Fixons une clôture algébrique L de k qui contient A/m. Supposons que l'on ait montré que toute racine de $\chi_{\pi(f)}$ dans L est de norme inférieure à 1. Alors, par le lemme précédent, si l'on note α une racine de χ_f dans L, alors α est aussi une racine de $\chi_{\pi(f)}$, donc α est de norme inférieure à 1. En développant l'écriture de χ_f comme produit de facteur $(X - \alpha)$ comptés avec multiplicité, avec $|\alpha| \leqslant 1$, puis en utilisant l'inégalité triangulaire ultramétrique, on en déduit que χ_f est aussi à coefficients dans $\overset{\circ}{k}$.

Les lemmes qui précèdent vont maintenant servir dans la preuve de la proposition suivante.

2.3.13 Proposition. *Considérons un morphisme d'espaces k-affinoïdes $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ fidèlement plat et fini. Soit $\mathcal{D}$ une $\mathcal{B}$-algèbre de Banach, et $\mathcal{C}$ une sous $\mathcal{A}$-algèbre fermée de $\mathcal{D}$. On suppose que le morphisme borné naturel de $\mathcal{B}$-algèbres de $\varphi : \mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme, ainsi que le morphisme obtenu par changement de base $\varphi \hat{\otimes}_k k_r$, pour tout polyrayon libre non trivial.*

Alors, l'algèbre $\mathcal{C}$ est k-affinoïde si et seulement si l'algèbre $\mathcal{D}$ est k-affinoïde, et alors φ est un isomorphisme d'algèbres k-affinoïdes lorsque l'on munit $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ de sa norme naturelle d'algèbre tensorielle complétée.

Démonstration. Notons r un polyrayon libre. Par la proposition 2.1.8 de [4], une k-algèbre $\mathcal{C}$ est k-affinoïde si et seulement si la k_r-algèbre $C \hat{\otimes}_k k_r$ est k_r-affinoïde. On peut donc sup-

poser que les algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont strictement k-affinoïdes, et que le corps k est non trivialement valué, et montrer que sous les mêmes hypothèses, la k-algèbre $\mathcal{C}$ est strictement k-affinoïde si et seulement si l'algèbre $\mathcal{D}$ est strictement k-affinoïde. En effet, les hypothèses sont invariantes par extension des scalaires à k_r, et si cette assertion est démontrée, supposons que C est k-affinoïde. On choisit r un polyrayon libre tel que $\mathcal{A}\hat{\otimes}_k k_r$ et $\mathcal{B}\hat{\otimes}_k k_r$ et $\mathcal{C}\hat{\otimes}_k k_r$ soient strictement k_r-affinoïdes, et k_r non trivialement valué. Alors, $\mathcal{D}\hat{\otimes}_k k_r$ est strictement k_r-affinoïde, donc $\mathcal{D}$ est k-affinoïde. Si maintenant c'est $\mathcal{D}$ qui est k-affinoïde, on choisit r un polyrayon libre tel que $\mathcal{A}\hat{\otimes}_k k_r$ et $\mathcal{B}\hat{\otimes}_k k_r$ et $\mathcal{D}\hat{\otimes}_k k_r$ soient strictement k_r-affinoïdes, et k_r non trivialement valué, et alors $\mathcal{C}\hat{\otimes}_k k_r$ est strictement k_r-affinoïde, donc $\mathcal{C}$ est k-affinoïde.

Supposons que $\mathcal{C}$ est strictement k-affinoïde. Alors, la proposition 6.1.3.4 de [7] appliquée au morphisme fini de k-algèbres $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ montre que $\mathcal{D}$ est strictement k-affinoïde, et par une nouvelle application de 6.1.3.4 de [7] au morphisme φ, on en déduit que φ est un isomorphisme d'algèbres k-affinoïdes de $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ muni de sa norme naturelle d'algèbre tensorielle complétée vers $\mathcal{D}$.

Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ est strictement k-affinoïde. Alors, par la proposition 6.1.3.4 de [7] appliquée à l'inverse de φ, l'algèbre $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ munie de sa norme tensorielle complété est strictement k-affinoïde, et φ est un isomorphisme d'algèbres k-affinoïdes de $\mathcal{C} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ muni de sa norme naturelle d'algèbre tensorielle complétée vers D. On veut maintenant montrer que l'algèbre C est strictement k-affinoïde. L'idée est d'appliquer la proposition 6.3.3.2 de [7] au morphisme $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Pour cela, il suffit de démontrer que l'anneau $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ est entier sur $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$, où $\overset{\circ}{\mathcal{D}}$ (resp. $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$) désigne l'ensemble des éléments dont les puissances successives sont bornées sur $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{C}$).

Puisque $\mathcal{D}$ est strictement k-affinoïde, par la proposition 6.2.3.1 de [7], on a l'égalité $\overset{\circ}{\mathcal{D}} = \{f \in D, \rho_D(f) \leqslant 1\}$, où ρ_D désigne la norme spectrale sur $\mathcal{D}$. On va montrer l'égalité analogue pour $\mathcal{C}$. L'inclusion $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \subset \{f \in C, \rho_C(f) \leqslant 1\}$ est vraie pour n'importe quelle algèbre de Banach, on va donc montrer l'inclusion inverse. Par la proposition 1.3.1 de [4], pour toute algèbre de Banach E, on a pour tout $f \in E$, l'égalité $\rho_E(f) = \max_{x \in \mathcal{M}(E)} |f(x)|$. Soit donc $f \in \mathcal{C}$ tel que $\rho_{\mathcal{C}}(f) \leqslant 1$. Alors, pour tout $y \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, on dispose de l'inégalité $|f(y)| \leqslant 1$, donc pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{D})$, si l'on note $\psi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ l'inclusion canonique, alors $|\psi(f)|(x) \leqslant 1$, donc $\rho_{\mathcal{D}}(\psi(f)) \leqslant 1$, donc $\psi(f)$ est de puissance bornée dans $\mathcal{D}$. Comme ψ préserve la norme ($\mathcal{C}$ est une sous-$\mathcal{A}$ algèbre de $\mathcal{D}$), on en déduit que f est de puissance bornée dans $\mathcal{C}$.

Soit donc $f \in \mathcal{D}$, tel que $\rho_{\mathcal{D}}(f) \leqslant 1$. Puisque le morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{B} \to \operatorname{Spec} \mathcal{A}$ est fidèlement plat et fini, c'est aussi le cas du morphisme $\operatorname{Spec} \mathcal{D} \to \operatorname{Spec} \mathcal{C}$, qui est donc fini et localement libre, et le polynôme caractéristique $\chi_f \in C[X]$ de la remarque 2.3.7 est bien défini. Ce polynôme vérifie la relation $\chi_f(f) = 0$, et on va montrer que χ_f est en fait à coefficients dans $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$. Soit $x \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, notons $\chi_f = \sum_{i=0}^{n} a_n X^i$. Il suffit de montrer que $|a_i(x)| \leqslant 1$. On dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(x) & \mathcal{H}(x) \arrow[l] \\ \mathcal{D} \arrow[u] & \mathcal{C} \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Notons ψ' le morphisme canonique de $\mathcal{H}(x)$ dans $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(x)$ et h' le morphisme canonique de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(x)$. Par le lemme 2.3.8, on dispose de l'égalité $\sum_{i=0}^{n} a_i(x)X^i = \chi_{h'(f)}$, où $a_i(x)$ désigne l'image de $a_i \in C$ dans $\mathcal{H}(x)$. Pour montrer que $|a_i(x)| \leqslant 1$, on va montrer que $\chi_{h'(f)} \in \overset{\circ}{\mathcal{H}(x)}[X]$. La $\mathcal{H}(x)$-algèbre $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(x)$ est finie, elle est donc artinienne, et on peut lui appliquer le théorème de structure des anneaux artiniens, qui est le lemme 10.53.6 de [50, Lemma 00JB] : on a $\mathcal{D} \otimes_{\mathcal{C}} \mathcal{H}(x) = \prod_{i=1}^{M} \mathcal{D}_i$ avec $\mathcal{D}_i$ des anneaux artiniens locaux pour tout $i \in \{1, ..., M\}$. Notons $h'(f) = (f_1, ..., f_M)$ avec $f_i \in \mathcal{D}_i$ pour tout $i \in \{1, ..., M\}$. Alors, par le lemme 2.3.9, pour montrer que $\chi_{h'(f)}$ est dans $\overset{\circ}{\mathcal{H}(x)}[X]$, il suffit de montrer que chacun des χ_{f_i} est dans $\overset{\circ}{\mathcal{H}(x)}[X]$. Par la remarque 2.3.12, si l'on note m_i l'idéal maximal de $\mathcal{D}_i$, et $\pi_i : \mathcal{D}_i \to \mathcal{D}_i/m_i$ la projection canonique, il suffit de montrer que toute racine de $\chi_{\pi_i(f_i)}$ dans une extension algébriquement close de $\mathcal{H}(x)$ est de norme inférieure à 1. Maintenant, on dispose d'un morphisme continu $z : \mathcal{D} \to \mathcal{D}_i/m_i$, et comme $\rho_{\mathcal{D}}(f) \leqslant 1$, on en déduit que $|z(f)| = |\pi_i(f_i)| \leqslant 1$, où $|.|$ désigne ici l'unique norme sur l'extension finie D_i/m_i de $\mathcal{H}(x)$ qui prolonge la norme de $\mathcal{H}(x)$. On est maintenant en mesure d'appliquer le lemme 2.3.10, qui montre que toute racine de $\chi_{\pi_i(f_i)}$ dans une cloture algébrique de $\mathcal{H}(x)$ est de norme plus petite que 1. On en déduit par la remarque 2.3.12 que χ_{f_i} est à coefficient dans $\overset{\circ}{\mathcal{H}(x)}$, et c'est donc le cas du produit $\chi_{h'(f)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)X^i$, et comme cela vaut pout tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{C})$, le polynôme $\chi_f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ est lui même bien à coefficients dans $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et comme c'est un polynôme annulateur de f, on en déduit que $f \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$ est bien entier sur $\overset{\circ}{\mathcal{C}}$, et comme cela vaut pour tout $f \in \overset{\circ}{\mathcal{D}}$, on est en mesure d'appliquer la proposition 6.3.3.2 de [7] pour obtenir que l'algèbre $\mathcal{C}$ est bien strictement k-affinoïde. □

2.3.14 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes qui à un espace affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des espaces k-affinoïdes au dessus de S. Alors tout morphisme fini, plat et surjectif entre espaces affinoïdes $S' = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un morphisme de descente effective .*

Démonstration. Pour l'effectivité, considérons un morphisme plat, fini et surjectif d'espaces k-affinoïde $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ induit par un morphisme d'algèbre k-affinoïde $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Considérons maintenant $\mathcal{D}$ une algèbre k-affinoïde au dessus de $\mathcal{B}$ munie de données de descente relativement au morphisme p, c'est à dire d'un isomorphisme de $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$-algèbres de Banach borné $\varphi : \mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{D}$ vérifiant la condition de cocycle. Puisque $\mathcal{D}$ et $\mathcal{B}$ sont k-affinoïdes, elles sont noethériennes, et on en déduit par la proposition 3.7.2.6 de [7] que l'on a les isomorphismes de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$-algèbres suivants :

$$\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \simeq \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}, \quad \mathcal{D} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \simeq \mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}, \quad \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{D} \simeq \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{D}$$

On a aussi des isomorphismes de $\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \simeq \mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ algèbres similaires puisque $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ est fini sur A. Cela montre que la donnée de descente φ munit naturellement la $\mathcal{B}$-algèbre $\mathcal{D}$ d'une donnée de descente d'algèbre relativement au morphisme de schémas Spec $\mathcal{B} \to$ Spec $\mathcal{A}$ dont l'isomorphisme est noté φ_s. Puisque p est plate et surjective, par les propriétés rappelées en introduction, on en déduit que le morphisme d'anneau $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est fidèlement plat. Par descente schématique des algèbres, il existe une $\mathcal{A}$-algèbre $\mathcal{C}$ telle que l'on ait un isomorphisme de $\mathcal{B}$-algèbres munies de données de descente schématiques $\psi : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. De plus, l'algèbre $\mathcal{C}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{D}$ définie par $\mathcal{C} = \{c \in \mathcal{D}, \varphi(c \otimes 1) = 1 \otimes c\}$. C'est donc un fermé d'un espace de Banach, c'est donc une $\mathcal{A}$-algèbre de Banach. De plus, par le lemme [50, Tag 033E], puisque $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ est noethérien, $\mathcal{C}$ est bien noethérienne, et l'on a donc encore par [7] 3.7.2.6 un isomorphisme de $\mathcal{B}$-modules de Banach de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ vers $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C}$.

Le morphisme ψ est un isomorphisme de $\mathcal{B}$-algèbres borné. On dispose aussi des données de descente φ_r sur la $\mathcal{B}_r$-algèbre $\mathcal{D}_r$ relativement au morphisme p_r. Notons $h : \mathcal{D} \to \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{D}$ le morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres défini par $h(d) = \varphi(d \otimes 1) - 1 \otimes d$. Alors, par définition, $\mathcal{C} = \ker h$, et comme h est un morphisme borné de k-algèbres de Banach, on peut vérifier que pour tout polyrayon libre r non trivial, on a $\mathcal{C}\hat{\otimes}k_r = \ker h_r$, égalité qui est vérifiée pour tout morphisme de k-algèbres borné. Cela montre que $\mathcal{C}_r$ est bien solution du problème de descente comme $\mathcal{A}_r$-algèbre, donc on a bien un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{C}_r\otimes_{\mathcal{A}_r}\mathcal{B}_r \to \mathcal{D}_r$. On est exactement dans la situation de la proposition précédente 2.3.13, qui montre que l'algèbre $\mathcal{C}$ est k-affinoïde, et que l'isomorphisme de $\mathcal{B}$-algèbres $\psi : \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme d'algèbres k-affinoïdes, lorsque l'on munit $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ de sa norme de produit tensoriel complété. Cet isomorphisme de k-algèbre est même un isomorphisme de données de descente analytiques de $\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C}$ muni de ses données de descente canoniques vers $\mathcal{D}$ muni de φ puisque si l'on note $p_i : \mathcal{M}(\mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to \mathcal{M}(B)$ les deux projections canoniques, il suffit de vérifier que $\varphi \circ p_1^*\psi = p_2^*\psi$, relation vérifiée par définition du morphisme ψ, et puisque tous les produits tensoriels sont isomorphes commes algèbres aux produits tensoriels complétés. Cela achève de démontrer l'effectivité du morphisme $S' \to S$ pour le pseudo-foncteur qui à un espace analytique associe l'ensemble des espaces k-affinoïdes au dessus de cet espace.

Pour montrer que le morphisme $S' \to S$ est un morphisme de descente pour ce pseudo-foncteur, par le lemme 2.2.6 il suffit de le démontrer pour le morphisme obtenu par changement de base $S'_r \to S_r$ avec r un polyrayon rendant les espaces en jeux strictement affinoïdes, et la valeur absolue sur k non triviale. On peut donc supposer S' et S strictement k-affinoïdes. Supposons donc qu'on se donne $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux algèbres k-affinoïdes au dessus de $\mathcal{A}$ munies d'un morphisme de données de descente analytique $\mathcal{D}\hat{\otimes}_A\mathcal{B} \to \mathcal{C}\hat{\otimes}_A\mathcal{B}$, alors on obtient un morphisme de données de descente schématiques relatives à $\varepsilon : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$

(les algèbres $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont noethériennes, et ε est fini), donc il existe un morphisme de $\mathcal{A}$-algèbres de $\mathcal{D}$ vers $\mathcal{C}$ dont le changement de base schématique induit f par descente schématique. Ce morphisme est continu par le théorème 6.1.3.1 de [7] et donc borné par 2.2.3 de [52] donc c'est bien un morphisme d'algèbres k-affinoïde, solution du problème de descente pour les morphismes, et ce morphisme est unique car déterminé ensemblistement par fidèle platitude du morphisme ε, ce qui achève de montrer que le morphisme $S' \to S$ est de descente effectif. □

Cette démonstration s'adapte immédiatement dans la situation ou l'on cherche à descendre un module cohérent au dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ muni de données de descente, grâce à la proposition 2.3.2 qui permet de se ramener au cas strict non trivialement valué, et à la proposition 3.7.2.6 de [7] qui permet immédiatement de se ramener à la situation schématique. On utilise ensuite l'équivalence de catégories entre $\mathcal{A}$-modules finis et $\mathcal{A}$-modules de Banach finis. En bref, on a démontré :

2.3.15 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes qui à un espace k-affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des modules cohérents au dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors tout morphisme fini, plat et surjectif entre espace affinoïde $S' \to S$ est un morphisme de descente effective pour ce pseudo-foncteur.*

Maintenant, puisqu'on peut toujours recoller des modules cohérents selon la G-topologie par 2.3.1, par la proposition précédente et la proposition 2.3.5 on en déduit que l'on est en situation d'appliquer le théorème 2.2.4 pour obtenir :

2.3.16 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes qui à un espace k-affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des modules cohérents au dessus de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Alors tout morphisme fidèlement plat entre espaces affinoïdes est un morphisme de descente effective pour ce pseudo-foncteur.*

2.3.17 Remarque. En globalisant, on obtient l'énoncé suivant, qui concerne les morphismes plats proprement surjectifs. Cette hypothèse couvre en particulier :

1. Les morphismes plats, surjectifs et topologiquement propres, et en particulier les morphismes plats et surjectifs entre espaces compacts.
2. Les morphismes plats, surjectifs et sans bord. En effet, si $f : Y \to X$ est plat, surjectif et sans bord, alors par [20], 9.2.3, le morphisme f est ouvert, et si l'on se donne $Y = \bigcup_{i \in I} Y_i$ un G-recouvrement de Y par des domaines affinoïdes alors $X = \bigcup_{i \in I} f(Y_i)$ est un G-recouvrement de X par des domaines analytiques quasi-compacts.

Précisons que le théorème 2.3.22 sera aussi obtenu sous ces mêmes hypothèses.

2.3.18 Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur au dessus de la catégorie des espaces k-analytiques qui à un espace k-analytique S associe la catégorie des modules cohérents*

au dessus de S. Alors tout morphisme plat et proprement surjectif $p : S' \to S$ est un morphisme de descente effective .

Démonstration. On se place d'abord dans le cas particulier où le morphisme p est topologiquement propre. L'assertion étant G-locale sur S, on peut donc supposer S affinoïde et S' quasi-compact, G-recouvert par un nombre fini de domaines affinoïde $S' = \bigcup S'_i$. On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r] & S \\ \amalg_{i\in I} S'_i \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Maintenant, la flèche $\amalg_{i\in I} S'_i \to S$ est plate surjective entre espaces k-affinoïdes donc de descente effective par la proposition précédente. Maintenant, puisque $\amalg_{i\in I} S'_i \to S'$ est un G-recouvrement fini, il est de descente effectif, donc par le lemme 2.2.5, le morphisme $p : S' \to S$ est de descente effectif.

Maintenant, si le morphisme p est juste supposé plat et proprement surjectif, alors par hypothèse il existe un G-recouvrement $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ de S par des domaines analytiques quasi-compacts et des domaines analytiques $S'_i \subset S'$ quasi-compacts tels que $p(S'_i) = S_i$. On se donne un G-recouvrement de $p^{-1}(S_i)$ par des domaines affinoïdes $R'_{ij} \subset S'$. Alors on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{ij} S_i \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Maintenant, par le lemme 2.2.5, puisque les deux flèches verticales sont de descente effective universellement en tant que G-recouvrement, pour montrer que p est de descente effective, il suffit de monter que la composée $\coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \to S$ est de descente effective, puis de monter que la flèche $\coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \to \coprod S_i$ est de descente effective universellement par une nouvelle application de ce lemme. La flèche $S'_i \amalg R'_{ij} \to S_i$ étant plate, surjective et topologiquement propre, et ces faits étant invariant par changement de base, par le paragraphe précédent, elle est de descente effective universellement, et donc p est aussi de descente effective, ce qui permet de conclure. □

On peut aussi appliquer le théorème 2.2.7 grâce aux proposition 2.3.6, 2.3.14 et 2.3.1 pour obtenir l'énoncé suivant :

2.3.19 Proposition. *Considérons le pseudo-foncteur Φ au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes qui à un espace affinoïde $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ associe la catégorie des espaces k-affinoïdes au dessus de S. Alors tout morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes*

est un morphisme de descente pour Φ, c'est à dire que tout morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïde $p : S' \to S$ induit un foncteur tiré en arrière qui est pleinement fidèle de la catégorie des espaces k-affinoïdes au dessus de S vers la catégorie des espaces k-affinoïdes au dessus de S' munis de données de descente relativement au morphisme p.

On rappelle qu'en gardant les notations de la proposition précédente, il est équivalent d'être un morphisme de descente pour le pseudo-foncteur Φ et d'être un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces affinoïdes. On va maintenant globaliser l'énoncé précédent grâce aux deux lemmes suivants :

2.3.20 Lemme. *Considérons un morphisme $S' \to S$ entre deux espaces affinoïdes qui est un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-affinoïdes. Alors c'est un épimorphisme effectif dans la catégorie des espaces k-analytiques.*

Démonstration. Considérons un épimorphisme effectif universel $p : S' = \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{S} = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ dans la catégorie des espace affinoïdes. On se donne un morphisme $g : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to X$ vers un espace analytique X vérifiant $g \circ p_1 = g \circ p_2$, avec p_i les projections canoniques $p_i : \mathcal{M}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Alors on veut montrer qu'il existe un unique morphisme $f : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to X$ vérifiant $f \circ p = g$.

Pour cela, on peut supposer que l'espace X est quasi-compact. En effet, si ce n'est pas le cas, pour tout pour $s' \in S'$, on se donne $(X_{ij})_{j\in J_i}$ des domaines affinoïdes en nombre fini dans X tel que $g(s')$ soit dans chacun des X_{ij} et que l'union $\bigcup_{j\in J} X_{ij}$ contienne un voisinage O_i de $g(s')$. Alors l'union des O_i est un recouvrement ouvert du compact $g(S')$. On en extrait un sous-recouvrement fini. Alors il existe un nombre fini de X_{ij} qui recouvre l'image $g(S')$. Notons X' cette union finie. C'est une partie quasi-compacte de X qui est un domaine analytique de X, G-recouvert par les X_{ij} en nombre fini, et le morphisme $g : S' \to X$ se factorise par $g' : S' \to X'$, et le morphisme g' commute encore aux projections. On s'est donc ramené au cas où l'espace X est quasi-compact car si l'on a l'existence et l'unicité du morphisme de S vers X' pour tout X' quasi-compact et commutant aux projections, on a l'existence et l'unicité du morphisme de S vers X car celui-ci se factorise par un domaine analytique quasi-compact.

Maintenant, on se donne un G-recouvrement X_i de X par un nombre fini de domaines affinoïdes, et l'on note $j : \amalg_i X_i \to X$ le morphisme induit. Alors $p(g^{-1}(X_i))$ est l'image par un morphisme plat surjectif d'un domaine analytique compact, c'est donc un domaine analytique compact de S par la proposition 9.2.1 de [20]. On se donne donc un G-recouvrement fini de ce domaine analytique $p(g^{-1}(X_i)) = \cup_w S_{iw}$. Notons $S'_{iw} = p^{-1}(S_{iw})$. Alors on dispose d'un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-affinoïdes $p' : \coprod_{iw} S'_{iw} \to \coprod_{iw} S_{iw}$, ainsi que d'un morphisme $g' : \coprod_{iw} S'_{iw} \to \coprod_i X_i$ induit par g (si on se donne $x \in S'_{iw}$, il existe $s' \in g^{-1}(X_i)$ tel que $p(x) = p(s')$, mais alors le couple (x, s') nous fournit un point de $S' \times_S S'$, et puisque g fait commuter le diagramme

idoine, on obtient $g(s') = g(x) \in X_i$), à destination d'un espace affinoïde. On résume la situation par le diagramme qui suit.

$$\begin{tikzcd}
 & \amalg_{iwj\tau} S'_{iw} \cap S'_{j\tau} \arrow[r, "p''"] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & \amalg_{iwj\tau} S_{iw} \cap S_{j\tau} \arrow[d, shift right, "r_1"'] \arrow[d, shift left, "r_2"] \\
\amalg_{iw} S'_{iw} \times_{S_{iw}} S'_{iw} \arrow[r, shift right] \arrow[r, shift left] \arrow[dd] & \amalg_{iw} S'_{iw} \arrow[r, "p'"] \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, "r'"] & \amalg_{iw} S_{iw} \arrow[dl, dotted, "f'"'] \arrow[dd, "r"] \\
 & & \amalg_i X_i \arrow[ddl] \\
S'' \arrow[r, shift right] \arrow[r, shift left] & S' \arrow[r, "j"] \arrow[r, "p"] \arrow[d] & S \arrow[dl, dotted, "f"] \\
 & X &
\end{tikzcd}$$

On vérifie que le morphisme g' commute aux deux projections $p'_i : \coprod_{iw} S'_{iw} \times_{S_{iw}} S'_{iw} \to \coprod_{iw} S'_{iw}$ (en vérifiant que ça commute sur chacun des ouverts fermés $S'_{iw} \times_{S_{iw}} S'_{iw}$ de $\coprod S'_{iw} \times_{S_{iw}} S'_{iw} = \coprod S'_{iw} \times_{\coprod S_{iw}} \coprod S'_{iw}$) et puisque p' est un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-affinoïdes, on obtient l'existence d'un unique morphisme $f' : \coprod_{iw} S_{iw} \to \coprod_i X_i$ qui vérifie la relation $f' \circ p' = g'$. Maintenant, on vérifie que le morphisme obtenu par composition $j \circ f' : \coprod S_{iw} \to X$ provient d'un morphisme de $S \to X$. Il faut pour cela remarquer que le morphisme $p'' : \coprod_{iwj\tau} S'_{iw} \cap S'_{j\tau} \to \coprod_{iwj\tau} S_{iw} \cap S_{j\tau}$ est encore un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-affinoïdes comme changement de base d'un tel morphisme donc c'est un épimorphisme, et vérifier que si $r : \amalg_{iw} S_{iw} \to S$ désigne le G-recouvrement, et $r_i : \coprod_{iwj\tau} S_{iw} \cap S_{j\tau} \to \amalg_{iw} S_{iw}$ chacune des deux projections canoniques, alors on a $j \circ f' \circ r_1 \circ p'' = j \circ f' \circ r_2 \circ p''$, donc $j \circ f' \circ r_1 = j \circ f' \circ r_2$, ce qui fournit alors l'existence d'un unique morphisme $f : S \to X$ vérifiant $f \circ r = j \circ f'$. Maintenant, la flèche $r' : \amalg_{iw} S'_{iw} \to S'$ est un épimorphisme d'espaces k-analytiques, et l'on a l'égalité $f \circ p \circ r' = f \circ r \circ p' = j \circ f' \circ p' = j \circ g' = g \circ r'$, ce qui montre que f vérifie bien la relation $f \circ p = g$, et p est bien un épimorphisme effectif dans la catégorie des espaces k-analytiques, ce qui conclut la démonstration. □

2.3.21 Lemme. *Soit P une propriété de morphismes d'espaces analytiques (eg. plat) stable par changement de base et stable par restriction à un domaine affinoïde à droite et à gauche (si on se donne $f : Y \to X$ vérifiant P, et un domaine affinoïde $V \subset X$ resp. $U \subset Y$ vérifiant $f(U) \subset V$, alors le morphisme induit $f : U \to V$ possède P). On suppose que les morphismes entre espaces affinoïdes vérifiant P et surjectifs sont des épimorphismes effectifs dans la catégorie des espaces analytiques. Alors tout morphisme entre espaces analytiques vérifiant P, surjectif et propre topologiquement est un épimorphisme effectif*

dans la catégorie des espaces k-analytiques.

Démonstration. Soit donc $p : S' \to S$ surjectif, propre topologiquement et vérifiant la propriété P. On va montrer que p est un épimorphisme effectif. Soit donc X un espace k-analytique général. Notons F le foncteur représenté par X. On veut montrer que l'on a une suite exacte $0 \to F(S) \to F(S') \rightrightarrows F(S' \times_S S')$, où dans la suite du texte la notation $0 \to F(S) \to F(S')$ signifie que la flèche $F(S) \to F(S')$ est injective.

On se donne d'abord $S = \cup_{i \in I} S_i$ un recouvrement de S par des affinoïdes. On se donne un recouvrement fini $p^{-1}(S_i) = \cup_{l \in L_i} S'_{ij}$ de $p^{-1}(S_i)$ par un nombre fini d'affinoïdes. On en déduit un diagramme :

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[r] & S \\ \amalg_{i \in I, l \in L_i} S'_{il} \arrow[u] \arrow[r] & \amalg_{i \in I} S_i \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Comme $U \mapsto F(U)$ est un faisceau pour la G-topologie par la proposition 1.3.2 de [5], on a des suites exactes :

$$0 \to F(S) \to \prod_{i \in I} F(S_i) \to \prod_{i,j \in I^2} F(S_i \cap S_j)$$

$$0 \to F(S') \to \prod_{i \in I, l \in L_i} F(S'_{il}) \to \prod_{i,j \in I^2 l,k \in L_i \times L_j} F(S'_{il} \cap S'_{jk})$$

On montre d'abord l'unicité du recollement, c'est à dire l'exactitude de la partie gauche. On a un diagramme :

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & F(S) \arrow[r] \arrow[d] & F(S') \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & \prod_{i \in I} F(S_i) \arrow[r] & \prod_{i \in I, l \in L_i} F(S'_{il}) \end{tikzcd}$$

Par le cas affinoïde, la flèche horizontale en bas est injective. Par le paragraphe précédent, la flèche verticale gauche est injective. Par chasse au diagramme, on en déduit que la première ligne est injective.

Pour l'exactitude au milieu, on va utiliser le cas affinoïde, l'unicité démontrée pour un morphisme surjectif vérifiant P, et le recollement selon des domaines analytiques.

On le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & F(S) \arrow[r] \arrow[d] & F(S') \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & F(S' \times_S S') \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \prod_{i\in I} F(S_i) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{i\in I}(F(\amalg_{l\in L_i} S'_{il})) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \prod_{i\in I}(F(\amalg_{l\in L_i} S'_{il} \times_{S_i} \amalg_{k\in L_i} S'_{ik}))) \\
0 \arrow[r] & \prod_{i,j\in I^2} F(S_i \cap S_j) \arrow[r] & \prod_{i,j\in I^2} \prod_{l,k\in L_j\times L_k} F(S'_{il} \cap S'_{jk}) &
\end{tikzcd}$$

On veut montrer que la première ligne est exacte. Les deux colonnes du milieu sont exactes parce que $U \mapsto F(U)$ est un faisceau pour la G-topologie. La deuxième ligne est exacte par le cas affinoïde, puisque les L_i sont en nombre finis. La dernière ligne est exacte par ce qui précède puisque le morphisme $h : \amalg_{i,j\in I^2} \amalg_{k,l\in L_i\times L_j} S'_{il} \cap S'_{jk} \to \amalg_{i,j\in I^2} S_i \cap S_j$ est topologiquement propre, vérifie P et est surjectif.

Par chasse au diagramme, la première ligne est exacte, ce qui achève la preuve. □

On peut maintenant énoncer et démontrer la globalisation de 2.3.19. Remarquons que ce théorème couvre le cas des morphismes plats, surjectifs et topologiquement propres, ainsi que le cas des morphismes plats, surjectifs et sans bord.

2.3.22 Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace analytique S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S. Alors les morphismes plats et proprement surjectifs sont des morphismes de descente.*

Autrement dit, les morphismes plats et proprement surjectifs sont des épimorphismes effectifs universels de la catégorie des espaces analytiques ; autrement dit, si l'on se donne un morphisme plat et proprement surjectif $p : S' \to S$ entre espaces analytiques, alors le foncteur de la catégorie des S-espaces analytiques vers la catégorie des S'-espaces analytiques munis de données de descente relativement au morphisme p est pleinement fidèle.

Preuve. Par 2.3.19, les morphismes plats surjectifs entre espaces affinoïdes sont des épimorphismes effectifs universels dans la catégorie des espaces affinoïdes. Par 2.3.20, ce sont des épimorphismes effectifs dans la catégorie des espaces analytiques, et on peut appliquer 2.3.21 pour obtenir que les morphismes plats, propres topologiquement et surjectifs sont des épimorphismes effectifs, et même effectifs universels car les hypothèses sont stables par changement de base. De plus, les épimorphismes effectifs universels de la catégorie des espaces k-analytiques sont exactements les morphismes de descente pour le pseudo-foncteur Ψ par les résultats de [28], donc les morphismes plats, surjectifs et topologiquement propres sont des morphismes de descente universellement pour Ψ puisque ces hypothèses sont stables par changement de base.

Maintenant, si l'on se donne $p : S' \to S$ un morphisme plat et proprement surjectif, alors on procède comme en 2.3.18 : il existe un G-recouvrement $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ de S par des domaines analytiques quasi-compacts S_i qui soient chacun l'image par p de domaines analytiques quasi-compacts $S'_i \subset S'$. On se donne maintenant un G-recouvrement de $p^{-1}(S_i)$ par des domaines affinoïdes $R'_{ij} \subset S'$. Alors on dispose du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \arrow[r] \arrow[d] & \coprod_{ij} S_i \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Les deux flèches verticales sont de descente universellement parce que ce sont des G-recouvrement surjectifs, et puisque chacune des flèche $(S'_i \amalg R'_{ij}) \to S_i$ est plate, surjective et topologiquement propre, la flèche $\coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \to \coprod_{ij} S_i$ est de descente universellement par le paragraphe précedent, donc la composée $\coprod_{ij}(S'_i \amalg R'_{ij}) \to S$ est un morphisme de descente par le lemme 2.2.6, et par une seconde application du lemme 2.2.6, on voit que le morphisme $p : S' \to S$ est de descente pour Ψ, ce qui permet de conclure. □

2.3.2 La question de l'effectivité

On va maintenant s'intéresser à la question de l'effectivité d'une donnée de descente fixée, pour le pseudo-foncteur au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes qui à un espace affinoïde S associe la catégorie des espaces analytiques au dessus de S. On verra qu'on peut toujours rendre effectif une donnée de descente affinoïde, mais que l'espace obtenu n'est pas forcément affinoïde.

La définition qui suit est motivée par le fait qu'il n'existe pas en géométrie rigide (et donc en géométrie de Berkovich) de notion satisfaisante de morphismes affinoïdes (par analogie avec les morphismes affines entre deux schémas). En effet, Liu montre dans [39], proposition 3.3 que pour tout espace de Stein rigide X quasi-compact, il existe un espace affinoïde Y, un morphisme d'espaces rigides $f : X \to Y$ et un recouvrement affinoïde admissible (Y_i) de Y tel que $f^{-1}(Y_i)$ est un recouvrement affinoïde admissible de X, et il exhibe (théorème 4) de tels espaces de Stein quasi-compacts mais non-affinoïdes. La notion qui suit ne se teste donc pas sur un recouvrement affinoïde quelconque de la base.

2.3.23 Définition. *On dit qu'un morphisme d'espaces k-analytiques $p : Y \to X$ est presque affinoïde s'il existe un G-recouvrement $X = \cup_{i \in I} X_i$ de X par des domaines affinoïdes tel que pour tout $i \in I$, l'image inverse par p de X_i soit un domaine affinoïde de Y.*

2.3.24 Proposition. *La propriété d'être presque-affinoïde est stable par changement de base.*

Preuve. Si l'on se donne $f : X \to S$ et $p : S' \to S$ deux morphismes d'espaces analytiques, avec $f : X \to S$ presque affinoïde, alors $f' : X' \to S'$ le changement de base de f le long de p est presque affinoïde. En effet, si l'on se donne $s' \in S'$, U un domaine affinoïde de S contenant $s = p(s')$ tel que $f^{-1}(U)$ est encore affinoïde et V un domaine affinoïde de S' contenant s' et vérifiant $p(V) \subset U$, alors $f'^{-1}(V) = f^{-1}(U) \times_U V$ est bien affinoïde.

Maintenant, il suffit de se donner un nombre fini d'affinoïdes U_i contenant s et dont l'union contient un voisinage de s dans S. Alors on peut trouver des affinoïdes V_i qui contiennent s' et dont l'union contient un voisinage de s' dans S'. Alors l'image inverse par f' des V_i est affinoïde. Comme on peut faire ce raisonnement pour chaque $s' \in S'$, le morphisme f' est bien presque-affinoïde. □

La proposition suivante est une reformulation de la proposition 1.3.3 de [2].

2.3.25 Proposition. *Considérons un G-recouvrement $p : S' := \coprod_{i \in I} S_i \to S$ d'un espace affinoïde S par un nombre fini de domaines affinoïdes S_i, et soit X' un espace affinoïde au dessus de S' muni de données de descente relativement à p. Alors il existe un espace analytique X au dessus de S, dont le morphisme structural est presque affinoïde, et qui induit la donnée de descente de X'.*

Démonstration. Notons $f' : X' \to S'$ le morphisme structural. Par la proposition 1.1.3 de [2], on peut toujours recoller les espaces selon un nombre finis de domaines affinoïdes, et il existe un espace k-analytique X qui rend effectif la donnée de descente. Par définition, cet espace est muni d'un morphisme $f : X \to S$ tel que $f^{-1}(S_i) = f'^{-1}(S_i)$, et chaque $f'^{-1}(S_i)$ étant un espace k-affinoïde, on en déduit que f est un morphisme presque affinoïde. □

Le résultat phare de cette section est que la catégorie fibrée des espaces presque affinoïdes au dessus de la catégorie des espaces k-affinoïdes est un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont les morphismes plats et surjectifs.

2.3.26 Définition. *On dit qu'un morphisme entre espaces k-affinoïdes $p : S' \to S$ vérifie la propriété* PA *si pour toute donnée de descente $X' \to S'$ relativement à p d'un espace affinoïde X', il existe un espace analytique X au dessus de S dont le morphisme structural est presque-affinoïde, et qui rend effectif la donnée de descente X' dans la catégorie des espaces analytiques.*

On énonce deux lemmes qui sont les analogues de 2.2.6 et 2.2.5 mais pour ce qui concerne l'effectivité de données de descente affinoïdes.

2.3.27 Lemme. *Considérons $R \xrightarrow{v} S \xrightarrow{u} T$ des morphismes entre espaces k-affinoïdes, et Ψ le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde S associe la catégorie des espaces k-affinoïdes au dessus de S. Alors :*

1. *Supposons que le morphisme $S \to T$ vérifie la propriété* PA *et que $R \to S$ est un G-recouvrement par un nombre fini de domaines affinoïdes. Alors $R \to T$ vérifie la propriété* PA.
2. *Supposons que le morphisme $S \to T$ vérifie la propriété* PA, *et que $R \to S$ est un morphisme de descente effective pour Ψ dans la catégorie des espaces affinoïdes. Alors $R \to T$ possède la propriété* PA.
3. *Supposons que $R \to T$ possède la propriété* PA *et que $R \to S$ est un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-analytiques, et possède la propriété* PA. *Alors $S \to T$ possède la propriété* PA.

Preuve. Les démonstrations sont semblables à [26] 10.10 et 10.11. On démontre par exemple la deuxième propriété. On suppose donc que $S \to T$ vérifie la propriété PA et que $R \to S$ est de descente effective dans la catégorie des espaces k-affinoïdes. Alors on se donne une donnée de descente $X' \to R$ relativement au morphisme $R \to T$, avec X' un espace k-affinoïde. Notons $p_i : S \times_T S \to S$, $q_i : R \times_T R \to R$ et $r_i : R \times_S R \to R$ les projections canoniques. On dispose aussi de morphismes canoniques $m : R \times_T R \to S \times_T S$ et $l : R \times_S R \to R \times_T R$. Alors X' vient avec un isomorphisme $\varphi : q_1^* X' \to q_2^* X'$ vérifiant la condition de cocycle usuelle. En tirant la donnée de descente φ par le morphisme l, on en déduit une donnée de descente sur X' relativement à $v : R \to S$. Puisque ce morphisme est de descente effective dans la catégorie des espaces affinoïdes, on en déduit qu'il existe un espace affinoïde X_1 au dessus de S muni d'un isomorphisme de données de descente $\lambda' : v^* X_1 \to X'$ relativement à v.

Maintenant, comme v est de descente si et seulement si c'est un épimorphisme effectif universel dans la catégorie des espaces k-affinoïdes, que cette hypothèse est stable par changement de base (affinoïdes) et que le morphisme m est obtenu à partir de v par changement de base (affinoïdes) et composition, le morphisme m est de descente, et on vérifie qu'on peut utiliser cette propriété pour trouver une donnée de descente canonique φ_1 au dessus de X_1 relativement au morphisme u. Maintenant, puisque u vérifie la propriété PA, on en déduit qu'il existe un espace presque affinoïde X_0 au dessus de T muni d'un isomorphisme de données de descente $u^* X_0 \to X_1$, et on vérifie enfin que X_0 fournit un espace presque affinoïde au dessus de T qui rend effectif la donnée de descente X' ce qui montre que $R \to T$ vérifie PA. □

2.3.28 Remarque. En particulier, par la proposition 2.3.14 et la deuxième partie du lemme ci-dessus, si l'on précompose un morphisme vérifiant la propriété PA par un morphisme fini, plat et surjectif de source affinoïde, la composée vérifie encore la propriété PA.

2.3.29 Proposition. *Considérons un morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes $p : S' \to S$, et un S'-espace k-affinoïde X' qui est muni de données de descente relativement au morphisme p. Alors il existe un espace analytique X presque affinoïde au dessus*

de S qui rend effectif la donnée descente, c'est à dire que l'on a un isomorphisme de données de descente entre X' muni de ses données de descente vers $X \times_S S'$ muni des données de descente canoniques ; autrement dit, le morphisme p vérifie la propriété PA.

Démonstration. La démonstration suit le même chemin et les mêmes réductions que la preuve du théorème 2.2.4, mais en utilisant à la fois le lemme 2.3.27 ainsi que la remarque qui suit. Toutes les réductions utilisent des factorisations par des morphismes plats surjectifs, donc par le théorème 2.3.22, ce sont des morphismes de descente, et l'application du lemme est licite. Nous utiliserons donc les notations de la preuve du théorème 2.2.4.

On se donne donc un morphisme fidèlement plat $S' \to S$ entre espaces k-affinoïdes. Si S et S' sont strictement affinoïdes et que le corps k est non trivialement valué, on pose $S_r = S$ et $S'_r = S'$. Sinon, soit r un polyrayon k-libre non trivial tel que $S'_r \to S_r$ est un morphisme entre espaces strictement k_r-affinoïdes. Par le théorème de multisection de Ducros, il existe un espace strictement k_r-affinoïde H, et un morphisme quasi-fini, plat et surjectif de $H \to S_r$ tel que le changement de base $H' = H \times_{S_r} S'_r \to H$ possède une section. Maintenant, puisque $H \to S_r$ est un morphisme quasi-fini, plat et surjectif, par le théorème 8.4.6 de [20] (que l'on est en mesure d'appliquer grâce à la remarque 8.4.3 de [20]), il existe un G-recouvrement fini de H par des affinoïdes V'_i, des espaces affinoïdes W'_i, et des morphismes $\amalg_{i\in I} V'_i \to \amalg_{i\in I} W'_i$ et $R := \amalg_{i\in I} W'_i \to S_r$ tels que le morphisme $\amalg_{i\in I} V'_i \to R$ soit fini, plat et surjectif, tel que le morphisme $R = \amalg_{i\in I} W'_i \to S_r$ soit quasi-étale et surjectif et tel que la composée $V'_i \to W'_i \to S'_r$ soit simplement la restriction de la flèche initiale $H \to S_r$. Maintenant, en utilisant les mêmes factorisation et notations que dans la preuve 2.2.4 (sauf pour le $Y \to X$ du cas quasi-étale, qui ici est remplacé par le morphisme $R = \amalg_{i\in I} W'_i \to S_r$, et les V, resp T, resp Y_i du cas quasi-étale, qui sont remplacés par V''_x, resp T_x, resp Y_{jw}), il existe un G-recouvrement fini de S_r par des domaines affinoïdes $S_r = \cup_{x\in E} V''_x$, pour chaque $x \in E$, il existe un V''_x-espace T_x dont le morphisme structural est fini, plat et surjectif, et il existe des R-espaces affinoïdes $\amalg_{x\in E, j\in J_x} Y_{jx}$ tel que la flèche $\amalg_{x\in E} \amalg_{j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \to \amalg_{x\in E} T_x$ ainsi que le morphisme $\amalg_{x\in E} \amalg_{j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \to \amalg_{x\in E} V''_x \times_{S_r} R \times_{V''_x} T_x$ soient des G-recouvrement finis et surjectifs.

On résume la factorisation introduite ici, et détaillée dans la démonstration de 2.2.4 par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H' \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[d] & \amalg_{i\in I} V'_i \arrow[l] \arrow[d] & & & \\
S'_r \arrow[r] \arrow[d] & S_r & R \arrow[l] & \amalg_{x\in E} V''_x \times_{S_r} R \arrow[l] \arrow[dl] & \amalg_{x\in E} R \times_{S_r} T_x \arrow[l] \arrow[dl] & \amalg_{x\in E, j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \arrow[l] \arrow[dll] \\
S' \arrow[r] & S & \amalg_{x\in E} V''_x \arrow[ul] & \amalg_{x\in E} T_x \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

Et les flèches du diagramme sont toutes de sources et but affinoïdes comme suit :

1. $S' \to S$ est plate surjective entre espaces affinoïdes.
2. $S'_r \to S_r$ est plate surjective entre espaces strictement affinoïdes sur k_r.
3. $H' \to H$ est fidèlement plat entre espaces strictement affinoïdes et possède une section, et $H' \to S_r$ est quasi-fini, plat et surjectif.
4. $\amalg_{i\in I} V'_i \to H$ est un G-recouvrement fini, $\amalg_{i\in I} V'_i \to R$ est fini, plat et surjectif, et $R \to S_r$ est quasi-étale surjectif.
5. Les morphismes $\amalg_{x\in E, j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \to \amalg_{x\in E} R \times_{S_r} T_x$ ainsi que $\amalg_{x\in E, j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \to \amalg_{x\in E} T_x$, $\amalg_{x\in E} V''_x \times_{S_r} R \to R$ et $\amalg_{x\in E} V''_x \to S_r$ sont des G-recouvrements surjectifs par un nombre fini de domaines affinoïdes.
6. Les morphismes $\amalg_{x\in E} T_x \to \amalg_{x\in E} V''_x$ ainsi que $\amalg_{x\in E} R \times_{S_r} T_x \to \amalg_{x\in E} V''_x \times_{S_r} R$ sont finis, plat et surjectifs.

A partir de là, on va appliquer plusieurs fois le lemme 2.3.27 et la remarque qui suit immédiatement après : on applique d'abord les deux première parties du lemme précédent pour avoir que $\amalg_{x\in E, j\in J_x} Y_{jx} \times_{S_r} V''_x \times_{V''_x} T_x \to S$ vérifie PA. On applique ensuite la troisième partie du lemme plusieurs fois pour avoir que $R \to S$ vérifie PA. On applique la deuxième partie du lemme pour avoir que $\amalg_{i\in I} V'_i \to S$ vérifie la propriété PA. On applique la troisième partie pour avoir que $H \to S$ vérifie la propriété PA. La deuxième partie pour avoir que $H' \to S$ vérifie la propriété PA et enfin deux fois la troisième partie du lemme pour avoir que $S'_r \to S$ puis $S' \to S$ possède la propriété PA, ce qui achève la preuve de la proposition. □

Grâce à la proposition d'effectivité précédente, on en déduit le théorème suivant :

2.3.30 Théorème. *Considérons le pseudo-foncteur Ψ qui à un espace k-affinoïde S associe la catégorie des espaces k-analytiques au dessus de S dont le morphisme structural est presque affinoïde. Alors les morphismes fidèlement plats sont des morphismes de descente effectif pour ce pseudo-foncteur. Autrement dit, le pseudo-foncteur qui à un espace k-affinoïde S associe ΨS est un champ pour la topologie dont les flèches couvrantes sont plates et surjectives.*

Démonstration. Par le théorème 2.3.22, c'est un morphisme de descente. Reste à montrer l'effectivité d'une donnée de descente.

Considérons donc un morphisme $p : S' \to S$ fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes et un S'-espace analytique X' muni de données de descente $\varphi : p_1^* X' \to p_2^* X'$ avec $p_i : S'' := S' \times_S S' \to S'$ les deux projections canoniques et dont le morphisme structural $f : X' \to S'$ est presque affinoïde. On souhaite montrer que la donnée de descente est effective. Soient donc S'_i des domaines affinoïdes en nombre fini qui recouvrent S' et tels que $f^{-1}(S'_i)$ est affinoïde. Soit $X'' = X' \times_{S'} \amalg_{i\in I} S'_i$. Par définition c'est un espace affinoïde, et en tirant en

arrière la donnée de descente φ par le morphisme $k : \amalg_{i\in I} S'_i \times'_S \amalg_{i\in I} S'_i$, on voit que X'' est naturellement fourni avec $k^*\varphi : q_1^* X' \to q_2^* X'$, donnée de recollement relativement au morphisme composé $\amalg_{i\in I} S'_i \to S$, et où l'on a noté $q_i : \amalg_{i\in I} S'_i \times_S \amalg_{i\in I} S'_i \to \amalg_{i\in I} S'_i$ les deux projections canoniques. Maintenant, avec des notations évidentes, si l'on tire la relation de cocycle $p_{13}^*\varphi = p_{23}^*\varphi \circ p_{12}^*\varphi$ par le morphisme canonique $\amalg_{i\in I} S'_i \times_S \amalg_{i\in I} S'_i \times_S \amalg_{i\in I} S'_i \to S' \times_S S' \times_S S'$, grâce au théorème 2.3.22, on voit que $k^*\varphi$ vérifie bien la condition de cocycle, et donc que c'est bien une donnée de descente pour X'' relativement à $\amalg_{i\in I} S'_i \to S$.

Puisque $h : \amalg_{i\in I} S'_i \to S$ est un morphisme fidèlement plat, par la proposition précédente sur l'effectivité, cette donnée de descente est effective, et l'on obtient un S-espace analytique X dont le morphisme structural est presque affinoïde, et tel que l'on ait un isomorphisme de données de descente $h^*X \to X''$. Maintenant, en utilisant que $\amalg_{i\in I} S'_i \to S$ ainsi que $\amalg_{i\in I} S'_i \times_S \amalg_{i\in I} S'_i \to S' \times_S S'$ sont des morphismes de descente, on voit que l'on peut descendre l'isomorphisme de données de descente $h^*X \to X''$ en un isomorphisme de données de descente de p^*X vers X', et cela achève la preuve de l'effectivité. □

On donne un dernier critère d'effectivité analogue au cas des schémas pour une donnée de descente générale pour les S-objets.

2.3.31 Définition. *On se donne un morphisme entre espaces k-affinoïdes $p : S' \to S$, et un S'-espace analytique X' muni de données de descente, c'est à dire d'un isomorphisme de S''-objets $\varphi : X' \times_S S' \to S' \times_S X'$. Un domaine affinoïde X'_i de X' est φ-stable si φ se restreint en un isomorphisme $X'_i \times_S S' \to S' \times_S X'_i$.*

2.3.32 Remarque. On peut reformuler la définition précédente en introduisant $q_1 : X' \times_S S' \to X'$ la première projection et $q_2 : X' \times_S S' \to X'$ la composée de φ avec la seconde projection. Alors un domaine affinoïde X'_i de X' est φ-stable si l'on a l'égalité $q_2^{-1}(X'_i) = q_1^{-1}(X'_i)$ ou bien $q_2(q_1^{-1}(X'_i)) = X'_i$.

2.3.33 Lemme. *Considérons un morphisme $f : Y \to X$ surjectif et topologiquement propre entre espaces analytiques. Alors f est submersive, c'est à dire que la topologie sur X est la topologie quotient relativement à f : une partie $E \subset X$ est ouverte (resp. fermée) si et seulement si $f^{-1}(E)$ l'est.*

Preuve. Par la proposition 1.1.1 de [2], l'assertion est G-locale sur la base, on peut donc supposer X affinoïde, et Y est alors quasi-compact, donc si l'on se donne E dont l'image inverse est fermée, alors $f^{-1}(E)$ est quasi-compact donc par surjectivité E est quasi-compact donc fermé puisque X est séparé. □

2.3.34 Lemme. *Considérons un morphisme fidèlement plat (resp. fidèlement plat et topologiquement propre) entre espaces analytiques $p : S' \to S$. Notons $p_i : S' \times_S S' \to S'$ les deux projections canoniques. On se donne un domaine analytique compact $W' \subset S'$ (resp. un ouvert) vérifiant la relation $p_1^{-1}(W') = p_2^{-1}(W')$.*

Alors, il existe un domaine analytique compact (resp. un ouvert) $W \subset S$ tel que l'on ait $W' = p^{-1}(W)$.

Preuve. On a l'égalité $p^{-1}(p(W')) = W'$ par surjectivité du produit fibré analytique dans le produit fibré topologique et l'hypothèse vérifiée par W'. On pose donc $W = p(W')$ qui est un domaine analytique compact de S par le theorème 9.2.1 de [20] dans le cas où W' est un domaine analytique compact.

Dans le cas où W' est un ouvert et p est de plus supposé topologiquement propre, p est une application submersive par le lemme précédent, et l'égalité précédente montre que W est ouvert. □

2.3.35 Proposition. *Considérons un morphisme fidèlement plat $p : S' \to S$ entre espaces k-analytiques. On suppose que (X', φ) est un espace analytique Hausdorff muni de données de descente et d'un G-recouvrement fini par des domaines affinoïdes $X' = \cup X'_i$ tel que chaque X'_i est stable pour φ.*

Alors la donnée de descente (X', φ) est effective dans la catégorie des espaces analytiques si et seulement si chaque donnée de descente induite X'_i est effective.

Preuve. Le sens direct est évident. On montre le sens réciproque. Par hypothèse, il existe des S-espaces X_i et des isomorphismes de données de descente $\lambda_i : X_i \times_S S' \to X'_i$.

On pose maintenant $W'_{ij} = \lambda_i^{-1}(X'_{ij})$ avec $X'_{ij} = X'_i \cap X'_j$. Alors puisque λ_i est un morphisme de données de descente et fait commuter le diagramme idoine, on en déduit que W'_{ij} vérifie les hypothèse du lemme précédent, donc il existe un domaine analytique X_{ij} de X_i dont le changement de base par p est égal à W'_{ij}.

Maintenant, la collection (X'_i, X'_{ij}) se recolle en un espace X', on en déduit par pleine fidélité du foncteur tiré en arrière que la collection (X_i, X_{ij}) se recolle en un espace $X \to S$, et que les isomorphismes λ_i se recollent en un isomorphisme de données de descente $\lambda : X \times_S S' \to X'$. □

On donne une dernière proposition d'effectivité, qui possède son analogue en corollaire 7.3 de l'exposé sur la descente [48] et se démontre exactement de la même manière.

2.3.36 Proposition. *Considérons un morphisme $p : S' \to S$ entre espaces analytiques, et (S_i) un G-recouvrement de S par un nombre fini de domaines affinoïdes. Considérons aussi X' un S'-espace analytique compact munis de données de descente relativement à p. Notons S'_i et X'_i les espaces déduits de S' et X' par le changement de base $S_i \to S$.*

Alors la donnée de descente sur X' est effective si et seulement si pour tout i, la donnée de descente sur X'_i relativement à $S'_i \to S_i$ est effective.

Comme dans l'exposé sur la descente fidèlemente plate de [48], on peut donner un théorème d'effectivité pour une donnée de descente dont le morphisme sous-jacent est universellement injectif, et la démonstration est exactement la même que dans le cas des

schémas : on vérifie que tout domaine affinoïde est stable pour la donnée de descente. Avant, on donne quelques propriétés des morphismes universellement injectifs :

2.3.37 Proposition. *Considérons un morphisme d'espaces k-analytiques $f : Y \to X$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *le morphisme f est universellement injectif, c'est à dire que le morphisme obtenu à partir de f par extension du corps de base, ou bien par changement de base par un espace k-analytique est injectif.*
2. *pour toute extension de corps valué complet $k \hookrightarrow L$, l'application induite* $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), X)$ *sur les morphismes de k-espaces analytiques est injective,*

Démonstration. Supposons que le morphisme f est universellement injectif. Soit L une extension complète de k. La donnée d'un élément de $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), Y)$ est équivalente à la donnée d'un point $y \in Y$ ainsi qu'une extension $\mathcal{H}(y) \to L$, c'est aussi équivalent à la donnée d'une section $s : \mathcal{M}(L) \to Y_L$ au morphisme structural $Y_L \to \mathcal{M}(L)$, et c'est aussi équivalent à la donnée d'un point de Y_L dont le corps résiduel complété est L. Puisque le morphisme $Y_L \to X_L$ est par hypothèse supposé injectif, on en déduit que $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), X)$ est injectif.

Maintenant, supposons que $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), Y) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), X)$ est injective. Soit S un espace k-analytique ou alors le spectre d'une extension complète de k. On veut montrer que $f_S : Y_S \to X_S$ est universellement injectif. Pour cela, soient $y, y' \in Y_S$ qui sont envoyés sur le même point $f_S(y) = f_S(y') = s \in S$. Alors par surjectivité du produit fibré analytique dans le produit fibré topologique, on peut choisir un point $z \in Y_S \times_S Y_S$ dont l'image par chacune des deux projections canoniques est y et y'. Maintenant, notons L le corps résiduel complété de z. Alors, on dispose d'un carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} L & \mathcal{H}(y) \arrow[l] \\ \mathcal{H}(y') \arrow[u] & \mathcal{H}(s) \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Notons $h_1 : \mathcal{M}(L) \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(y)) \to Y$ et $h_2 : \mathcal{M}(L) \to \mathcal{M}(\mathcal{H}(y')) \to Y$ les deux morphismes obtenus par composition. Si l'on note $r : Y_S \to Y$, et $t : Y_S \to S$, alors $r \circ h_1 = r \circ h_2$ par hypothèse, car $f \circ r \circ h_1 = f \circ r \circ h_2$, et $t \circ h_1 = t \circ h_2$ par définition de L. Cela montre que les deux morphismes h_1 et h_2 sont égaux, et donc que $y = y'$. □

En particulier, les inclusions de domaines analytiques et les immersions fermées sont universellement injectives.

2.3.38 Proposition. *Considérons un morphisme injectif $f : Y \to X$ tel que pour tout $y \in Y$, et $x = f(y)$, l'extension purement inséparable maximale de $\mathcal{H}(x)$ dans $\mathcal{H}(y)$ est dense dans celui-ci. Alors c'est un morphisme universellement injectif, qui vérifie donc les propriétés équivalentes de la proposition précédente.*

Preuve. L'injectivité est claire. On se donne L une extension valuée complète de k, et deux morphismes $g, g' : \mathcal{M}(L) \to Y$ qui sont égaux après composition par f. L'espace $\mathcal{M}(L)$ est un point, et puisque f est injective, l'image de g est aussi l'image de g', c'est un point dont on note $\mathcal{H}(y)$ le corps résiduel complété.

Maintenant, on a un diagramme commutatif $\mathcal{H}(x) \to \mathcal{H}(y) \rightrightarrows L$. Notons D une extension purement inséparable de $\mathcal{H}(x)$ dense dans $\mathcal{H}(y)$. Il suffit de montrer que les deux flèches sont égales en restriction à D par densité, mais par définition d'une extension inséparable, ces deux flèches sont égales, ce qui montre que $g = g'$. □

On peut relier l'injectivité universelle à la notion de quasi-immersion introduite par Berkovich. On rappelle qu'un morphisme $Y \to X$ est une quasi-immersion s'il induit un homéomorphisme sur son image et si pour tout $y \in Y$, l'extension purement inséparable maximale de $\mathcal{H}(x)$ dans $\mathcal{H}(y)$ est dense dans celui-ci. Ce qui précède montre qu'une quasi-immersion est bien universellement injective.

2.3.39 Proposition. *Considérons un morphisme plat, surjectif, universellement injectif et presque-affinoïde entre espace analytiques $p : S' \to S$ avec S et S' compacts. Alors toute donnée de descente $X' \to S'$ avec X' compact est effective.*

Preuve. On peut supposer que S et S' sont affinoïdes par le lemme 2.3.36. On montre maintenant que tout domaine affinoïde de X' est stable par la donnée de descente en exploitant la condition de cocycle. En effet, si l'on note $q_i : X' \times_S S' \to X'$ comme en 2.3.32, alors la relation de cocycle fournit pour tout espace analytique T et tout T-point $(y, v) \in (X' \times_S S')(T)$ la relation $q_2(y, v) = q_2(q_2(y, v), v))$, et puisque q_2 est obtenu par changement de base à partir de p, il est universellement injectif, et cela montre que tout domaine affinoide est stable pour la donnée de descente. Maintenant, on se ramène au cas où X' est affinoide, et par 2.3.30, la donnée de descente est effective. □

2.4 Application

On utilise le théorème 2.3.22 pour montrer un petit résultat qui généralise la proposition A-1 de [47].

2.4.1 Proposition. *Considérons un morphisme fidèlement plat $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entre deux espaces k-affinoïdes. Considérons aussi un morphisme $j : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ avec $\mathcal{C}$ une algèbre k-affinoïde. Alors $\mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est une inclusion de domaine affinoïde si et seulement si son changement de base $\mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ l'est.*

Démonstration. L'image réciproque d'un domaine affinoïde est fermée et vérifie clairement la propriété universelle d'un domaine affinoïde. On démontre l'autre sens.

Notons F l'image de j dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$. Supposons donc que la flèche $\mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ est une inclusion de domaine affinoïde. Notons D' le fermé de $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ sous-jacent à $\mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$.

Alors on a l'égalité $p^{-1}(F) = D'$ puisqu'on dispose d'une surjection du produit fibré $\mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ vers le produit fibré topologique sous-jacent. Alors par surjectivité, $F = p(p^{-1}(F)) = p(D')$ est l'image d'un compact par une application continue à valeur dans un espace séparé donc compact donc fermé.

On vérifie maintenant que $\mathcal{M}(\mathcal{C})$ vérifie la propriété universelle des domaines affinoïdes. On se donne donc une algèbre k-affinoïde $\mathcal{D}$ munie d'un morphisme d'espace affinoïde $p : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ d'image incluse dans F. On veut montrer que f se factorise par j.

Considérons la flèche naturelle $k : \mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$. Alors la composée $p \circ k$ se factorise par $\mathcal{D}$ et est donc d'image inclue F, donc l'image de k est incluse dans D', donc on dispose par propriété universelle d'un morphisme d'espaces affinoïde $g : \mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$.

La situation est résumée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}(\mathcal{B}) \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{A}) & \\
 & \mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \arrow[u] \arrow[r] & \mathcal{M}(\mathcal{C}) \arrow[u] & \\
\mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[rrr] & & & \mathcal{M}(\mathcal{D}) \arrow[uul]
\end{tikzcd}$$

Maintenant, si l'on est en mesure d'appliquer le théorème 2.3.22, on en déduit que la flèche ainsi définie $g : \mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ est obtenue à partir d'un unique morphisme d'espaces affinoïdes $\mathcal{M}(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}(\mathcal{C})$ par changement de base, et on a terminé, car cette flèche factorise $\mathcal{M}(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Il reste donc à vérifier que si l'on note $p_i : \mathcal{M}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ les projections canoniques, on a $p_1^*g = p_2^*g$. Mais par définition les deux flèches $p_i^*g : \mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ font commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \arrow[dr] & \\
\mathcal{M}(\mathcal{D}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathcal{M}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})
\end{tikzcd}$$

où les autres flèches sont les flèches structurales et la flèche $\mathcal{M}(\mathcal{C}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ est une inclusion de domaine affinoïde comme changement de base d'une telle inclusion, ce qui garanti l'égalité $p_1^*g = p_2^*g$ et prouve la proposition. $\square$

On dispose aussi comme corollaire de 2.3.22 du théorème suivant, obtenu par Conrad et Temkin dans [13] en 3.4 et 4.7 par des méthodes différentes, qui utilisent de manière intensive la réduction à la Temkin. Ici, une immersion compacte $f : Y \to X$ sera un morphisme d'espaces analytiques tel que pour tout domaine analytique compact $U \subset X$,

il existe un domaine analytique compact V de U tel que $f^{-1}(U) \to U$ se factorise par une immersion fermée $f^{-1}(U) \to V$.

2.4.2 Théorème. *Considérons S un espace k-analytique et un morphisme de S-espaces k-analytique $f : Y \to X$. Considérons un morphisme plat et proprement surjectif $p : S' \to S$. Notons $f' : Y' \to X'$ le morphisme obtenu à partir de f par changement de base. Alors f vérifie la propriété suivante si et seulement si f' vérifie la propriété suivante :*

1. *être un isomorphisme*
2. *être un monomorphisme*

De plus, si le morphisme p est topologiquement compact, alors f est une immersion compacte (resp. une immersion ouverte) si et seulement si f' l'est.

Preuve. Ces propriétés sont stables par changement de base, seule la descente est à montrer. La situation est résumée par le double diagramme cartésien suivant :

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & S' \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Si f' est un isomorphisme, f' induit alors un isomorphisme de S'-espaces analytiques munis de données de descente relativement à p, donc par le théorème 2.3.22, f est un isomorphisme de S-espaces analytiques.

Maintenant, f est un monomorphisme si et seulement le morphisme diagonal $\Delta_f : Y \to Y \times_X Y$ est un isomorphisme, et comme $\Delta_{f'} = \Delta_f \times_S S'$, par descente des isomorphismes, f est un monomorphisme si et seulement si f' l'est.

Supposons que le morphisme p est topologiquement compact. Par la proposition 3.2.17 de [21], une immersion compacte est simplement un monomorphisme compact. Il suffit donc de montrer que la propriété d'être un morphisme compact se descend, ce qui vient du fait que les morphisme $g : X' \to X$ (resp. $g' : Y' \to Y$) obtenus à partir de p en effectuant le changement de base par $X \to S$ (resp. $Y \to S$) restent surjectifs et topologiquement compacts. Ainsi, si l'on suppose f' compact, et si l'on choisi un compact $K \subset X$ alors son image inverse par f sur Y est aussi $g'(g'^{-1}(f^{-1}(K))) = g'(f'^{-1}(g^{-1}(K)))$, qui est donc compact.

Maintenant, si f' est une immersion ouverte et que p est toujours supposé topologiquement compact, alors on a la relation $g^{-1}(f(Y)) = f'(Y')$ qui est ouverte, donc puisque les surjections topologiquement propre entre espaces analytiques sont submersives par 2.3.33, on en déduit que l'image $f(Y)$ est ouverte, et par définition, f induit par changement de base un isomorphisme f' entre Y' et $f'(Y')$ donc f induit aussi un isomorphisme entre Y et $f(Y)$ par ce qui précède, et f est bien une immersion ouverte. $\square$

2.4.3 Remarque. Ce théorème est loin d'être optimal : dans [13], les auteurs montrent que la propriété d'être un monomorphisme est locale pour la topologie dont les flèches couvrantes sont juste les flèches surjectives.

2.5 Problèmes d'algébrisation

On dit qu'un $\mathcal{A}$-espace analytique est algébrisable s'il appartient à l'image essentielle du foncteur d'analytification, et si $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont deux $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini, un morphisme $f : X := \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to Y := \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ est dit algébrique s'il existe un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ dont l'analytification est f. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini, on dit qu'une partie localement constructible $E \subset \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est algébrique si c'est l'image réciproque ensembliste par la flèche d'analytification d'une partie localement constructible de $\mathcal{X}$. La fin de cette sous-section sera occupée par la démonstration du résultat suivant, qui fait l'objet du théorème 2.5.7 : la propriété pour un morphisme d'être algébrique est locale pour la topologie sur la catégorie des espaces k-affinoïdes dont les flèches couvrantes sont les flèches plates et surjectives. On démontre d'abord quelques lemmes qui serviront au cours de la preuve de ce résultat.

2.5.1 Lemme. *Considérons une algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$ et un recouvrement de $\mathcal{X}$ par des ouverts affines $(\mathcal{X}_i)_{i\in I}$. Alors une partie $E \subset \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est localement constructible et algébrique si et seulement si pour tout $i \in I$, la partie $E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$ est une partie algébrique constructible de $\mathcal{X}_i^{an}$.*

Preuve. Si $E \subset \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est localement constructible et algébrique, alors il existe $E' \subset \mathcal{X}$ localement constructible dont l'image inverse par la flèche d'analytification est E. Maintenant, on a $E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} = (E' \cap \mathcal{X}_i)^{\mathrm{an}}$ qui est donc une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$.

Réciproquement, si, pour tout $i \in I$, on dispose d'une partie constructible $E_i \subset \mathcal{X}_i$ dont l'analytification est $E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$, alors par surjectivité du morphisme d'analytification $m : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$, on a l'égalité $E_i \cap \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j = m(m^{-1}(E_i \cap \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j)) = m(E_i^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_j^{\mathrm{an}}) = m(E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_j^{\mathrm{an}}) = E_j \cap \mathcal{X}_i \cap \mathcal{X}_j$, donc la collection ensembliste de partie $E_i \subset \mathcal{X}_i$ se recolle en une partie $E' \subset \mathcal{X}$ qui est localement constructible. De plus, on a pour tout $i \in I$ l'égalité $E'^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} = (E' \cap \mathcal{X}_i)^{\mathrm{an}} = E_i^{\mathrm{an}} = E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$, donc $E'^{\mathrm{an}} = E$ et la partie E est bien algébrique et localement constructible. □

2.5.2 Lemme. *Le foncteur d'analytification de la catégorie des $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini vers la catégorie des espaces $\mathcal{A}$-analytiques est fidèle.*

Preuve. Par surjectivité ensembliste du morphisme d'espaces localement annelé $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}$, si deux morphismes de $\mathcal{A}$-schémas ont même analytification, alors ils coïncident topologiquement, et comme le foncteur d'analytification préserve les immersions ouvertes, montrer que ces deux morphismes coïncident est une assertion Zariski-locale sur la base et la source,

et il suffit donc de montrer que l'on a une injection $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}-\mathrm{Sch}}(\mathcal{X},\mathcal{Y}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}\text{-ann}}(X,Y)$, avec $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ affines, et X, Y les deux analytifiés respectifs.

Maintenant, quitte à plonger $\mathcal{Y}$ dans $\mathbb{A}^{n,alg}_{\mathcal{A}}$, on peut supposer que ces deux espaces sont égaux, et puisque se donner un morphisme dans la catégorie des espaces localement annelés de $\mathcal{X}$ vers $\mathbb{A}^{n,alg}_{\mathcal{A}}$ est équivalent à se donner n fonctions dans $\mathcal{O}(X)$, on peut supposer que $\mathcal{Y}$ est la droite affine algébrique de dimension 1, et l'assertion à montrer est que la flèche $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ est une injection.

Cela découle maintenant uniquement de la platitude de la flèche $X \to \mathcal{X}$. En effet, $\Gamma(X,O_X)$ (resp. $\Gamma(\mathcal{X},O_{\mathcal{X}})$) s'identifie canoniquement à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X,\mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{X}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$), et par platitude, un homomorphisme $f : \mathcal{O}_{\mathcal{X}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est nul si et seulement si son image $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ est nulle. □

2.5.3 Remarque. Dans la preuve du résultat précédent, on a montré au passage que la flèche canonique $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}})$ est injective pour tout $\mathcal{A}$-schémas affine, et cela implique l'énoncé pour tout $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$. On dit qu'une fonction $f \in \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{X}})$ est algébrique si elle est dans l'image de $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}})$.

2.5.4 Remarque. Considérons X un espace k-analytique, et M un $\mathcal{O}(X)$-module de type fini. Alors on peut comme en définition 2.3 de [40] associer à M un faisceau de modules cohérents $\tilde{M}$ au dessus de X vérifiant $\tilde{M}(D) = M \otimes_{\mathcal{O}(X)} \mathcal{O}(D)$ pour tout domaine affinoïde $D \subset X$. De plus si X est cohomologiquement de Stein (pour tout faisceau cohérent de $\mathcal{O}_X$-modules F et tout $q \geqslant 1$, les groupes de cohomologie $\mathrm{H}^q(X,F)$ sont nuls) la flèche canonique $M \to \tilde{M}(X)$ est surjective par la proposition 2.6 de [40]. Maintenant, si l'on se donne J un idéal de type fini de $\mathcal{O}(X)$, comme la limite inverse est exacte à gauche, $\tilde{J}(X) \to \mathcal{O}(X)$ est injective, donc on dispose en fait d'un isomorphisme de $\mathcal{O}(X)$-modules $J \to \tilde{J}(X)$. En particulier, cela vaut pour $\mathbb{A}^{\mathrm{an},n}_{\mathcal{A}}$ l'espace affine analytique de dimension $n \in \mathbb{N}$ au dessus d'un espace k-affinoïde $\mathcal{A}$ puisque celui-ci est bien cohomologiquement de Stein. On renvoie à [40] pour les résultats concernant les espaces de Stein, et les différentes définitions équivalentes d'espaces de Stein.

La proposition suivante constitue le cœur de la preuve du théorème 2.5.7, puisqu'elle permet de traiter le cas où l'espace $\mathcal{X}$ est affine, et $\mathcal{Y}$ est la droite algébrique affine.

2.5.5 Proposition. *Considérons un morphisme fidèlement plat $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ entre espaces k-affinoïdes, $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma affine de type fini et $f \in \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}})$ une fonction sur l'analytifié de $\mathcal{X}$. Alors f est algébrique sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ si et seulement si son image dans $\Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}},\mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}})$ est algébrique.*

Démonstration. On commence par traiter le cas où $\mathcal{X} = \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est l'espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$. On dispose alors d'une description simple de $\Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{X}})$ en tant que sous ensemble de $\mathcal{A}[[T_1,..,T_n]]$ puisque l'on a $\Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{X}}) = \{\sum a_i\underline{T}^i \mid a_i \in \mathcal{A}, \max\|a_i\|\underline{r}^i < +\infty, \forall \underline{r} \in (\mathbb{R}^*_+)\}$. Alors la flèche $\Gamma(\mathcal{X},\mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \to \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}},\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{X}})$ est simplement l'inclusion de $\mathcal{A}[T_1,..T_n]$

dans cet espace. Maintenant, si l'on se donne $f \in \Gamma(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}))$ dont l'image $f_{\mathcal{B}}$ dans $\Gamma(\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}}})$ est algébrique, alors l'image de $f_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{B}[[T_1, ..T_n]]$ est un polynôme, donc l'image de f dans $\mathcal{A}[[T_1, ..T_n]]$ est aussi un polynôme, ce qui montre que f est algébrique car on a une inclusion $\mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ par fidèle platitude schématique de cette flèche.

Maintenant, on traite le cas général, $\mathcal{X}$ est juste supposé affine. Par définition, il existe une immersion fermée $\mathcal{X} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Notons $\mathcal{J}$ le module des sections globales du faisceau d'idéaux qui définit $\mathcal{X}$ en tant que sous-schéma fermé de $\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$. Alors comme $\mathcal{A}[T_1, .., T_n]$ est noethérien, il existe un nombre fini de polynômes $P_1, .., P_m$ qui engendrent l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}[T_1, .., T_n]$. Montrons l'égalité préliminaire :

$$\mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}). \tag{2.5.1.1.1}$$

Une inclusion est claire, soit donc $D \in \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$. Alors pour tout polyrayon $\underline{r} \in (\mathbb{R}^*_+)^n$, l'image de D dans $\mathcal{B}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\}$ est dans $\mathcal{J}\mathcal{B}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\} \cap \mathcal{A}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\}$, et par fidèle platitude de la flèche $\mathcal{A}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\} \to \mathcal{B}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\}$, l'élément D est en fait dans $\mathcal{J}\mathcal{A}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\}$. Comme cela vaut pour tout polyrayon positif, comme on a la platitude de la flèche $\Gamma(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}}) \to \mathcal{A}\{\underline{r}^{-1}\underline{T}\}$ par la proposition 2.6 de [40], on en déduit que $D \in \widetilde{\mathcal{J}\mathcal{O}\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$, et par la remarque qui précède le lemme, on a en fait $D \in \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$ puisque $\mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$ est bien un $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}})$-module de type fini.

Maintenant, on dispose du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{J}_{\mathcal{B}} \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}) \arrow[r] & \mathcal{O}(\mathcal{X}_{\mathcal{B}}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J} \arrow[r] \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(\mathcal{X}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & 0 \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & \\
 & 0 \arrow[r] & \mathcal{J}_{\mathcal{B}}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] \arrow[d, hook] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}) \arrow[r] \arrow[ur, hook] & 0 &
\end{tikzcd}$$

avec $\mathcal{J}_{\mathcal{B}} = \mathcal{J} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$. Chaque carré est commutatif, et les deux lignes du haut sont exactes par définition et par fidèle platitude schématique du morphisme $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}) \to \mathrm{Spec}\,(\mathcal{A})$. Pour tout domaine affinoïde $D \subset \mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}$, la flèche $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}) \to \mathcal{O}(D)$ est plate par la proposition 2.6 de [40] donc on a l'égalité $(\tilde{J})^{\mathrm{an}} = \widetilde{J\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})}$ et on en déduit la suite exacte de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}}$-modules suivante : $0 \to \widetilde{J\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})} \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}} \to \mathcal{O}_{\mathcal{X}^{\mathrm{an}}} \to 0$. Comme $\mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$ est un $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$-module de type fini, par la remarque qui précède le lemme, on a l'égalité $\widetilde{\mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}) = \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$, ce qui fournit l'exactitude des deux lignes du bas du diagramme en utilisant la steinitude cohomologique de $\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}}$.

On se donne donc un élément $f \in \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$ dont l'image $f_{\mathcal{B}}$ dans $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}})$ est dans l'image de $\mathcal{O}(\mathcal{X}_{\mathcal{B}})$. Montrons que f est dans $\mathcal{O}(\mathcal{X})$. Par surjectivité des flèches idoines, il existe un élément $f_1 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}})$ dont l'image dans $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$ est f, et un élément algébrique

$f_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}})$ dont l'image dans $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}})$ est $f_{\mathcal{B}}$. Maintenant, puisque les flèches idoines sont des inclusions, f_1 et f_2 définissent deux éléments de $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{B}})$ dont l'image dans $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}})$ vaut $f_{\mathcal{B}}$, donc on peut écrire l'égalité suivante dans $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{B}})$:

$$f_1 - f_2 = h \tag{2.5.1.1.2}$$

avec $h \in \mathcal{J}_{\mathcal{B}}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{B}})$. L'élément f_1 est une série formelle à coefficients dans $\mathcal{A}$, et l'élément f_2 est un polynôme à coefficients dans $\mathcal{B}$, tandis que l'on peut écrire h comme une somme finie $h = \sum_I P_I g_I$ avec $g_I \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{B}})$ et $P_I \in \mathcal{A}[T_1, .., T_n]$ les polynômes qui engendrent l'idéal $\mathcal{J} \subset \mathcal{A}[T_1, .., T_n]$.

Puisque tous les éléments de l'égalité 2.5.1.1.2 sont des séries formelles, en identifiant les coefficients, on en déduit qu'il existe un indice à partir duquel tous les coefficients de h sont dans $\mathcal{A}$, ce qui nous fournit l'existence d'une décomposition $g_I = g_{I_1} + g_{I_2}$ avec $g_{I_1} \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{B}})$ et $g_{I_2} \in \mathcal{B}[T_1, .., T_n]$ vérifiant $\sum_I P_I g_{I_1} \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}})$, et par l'égalité 2.5.1.1.1, on en déduit que l'on a même $\sum_I P_I g_{I_1} \in \mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$, ce qui fournit un nombre fini d'éléments $g'_{I_1} \in \mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,\mathrm{an}}_{\mathcal{A}})$ tels que $\sum_I P_I g_{I_1} = \sum_I P_I g'_{I_1}$.

Maintenant, posons $f'_1 = f_1 - \sum_I P_I g'_{I_1}$ et $f'_2 = f_2 - \sum_I P_I g_{I_2}$. Alors par 2.5.1.1.2, on a l'égalité $f'_1 = f'_2$, donc f'_1 est dans $\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}}) \cap \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathcal{B}}) = \mathcal{O}(\mathbb{A}^n_{\mathcal{A}})$ par le début de la démonstration, et cet élément f'_1 diffère de f_1 d'un élément de $\mathcal{J}\mathcal{O}(\mathbb{A}^{n,an}_{\mathcal{A}})$, donc l'image de f'_1 dans $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$ est aussi f, et comme f'_1 est un polynôme, on en déduit que f appartient à $\mathcal{O}(\mathcal{X})$, et f est algébrique ce que l'on voulait montrer. □

On énonce une dernière proposition qui nous permettra d'effectuer une réduction décisive de problème dans la preuve du théorème 2.5.7. La preuve repose sur le schéma de démonstration du théorème 2.2.4 : pour démontrer la proposition, on la démontre pour trois classes de morphismes plus simple, puis on en déduit le cas d'un morphisme fidèlement plat.

2.5.6 Lemme. *Considérons $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes et $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini. Alors une partie $E \subset \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est localement constructible algébrique si et seulement si son image inverse $E_{\mathcal{B}} = (q^{\mathrm{an}})^{-1}(E)$ est localement constructible, algébrique, où q^{an} est le morphisme $q^{an} : \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ obtenu à partir de p par changement de base.*

Démonstration. Un sens est évident, on va démontrer l'autre sens.

Si l'on se donne un recouvrement de $\mathcal{X}$ par des ouverts affines $(\mathcal{X}_i)$, et que $E_{\mathcal{B}}$ est localement constructible et algébrique alors $\mathcal{X}_{i_{\mathcal{B}}} \cap E_{\mathcal{B}}$ est encore algébrique en tant que fermé de $\mathcal{X}_{i_{\mathcal{B}}}$, donc si l'on suppose le résultat acquis pour l'analytifié de tout schéma affine, on en déduit que $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}_i \cap E$ est algébrique constructible pour tout i, et par le lemme 2.5.1, on en déduit que E est localement constructible et algébrique. Cela nous permet donc de réduire la démonstration du théorème au cas où $\mathcal{X}$ est un schéma affine $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} C$. Sur

$\mathcal{X}$ ainsi que sur $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$, les notions de constructibilité et de locale constructibilité coïncident par noethérianité de $\mathcal{A}$ et parce que $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est de dimension finie.

On va d'abord montrer le résultat si p est de la forme $\mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ pour $r \in \mathbb{R}_+^*$ un polyrayon k-libre, puis lorsque p est plat fini et surjectif puis lorsque p est un G-recouvrement par des domaines affinoïdes. Alors la technique de démonstration donnée au théorème 2.2.4 permettra de conclure pour un morphisme fidèlement plat quelconque.

On se donne donc d'abord un polyrayon k-libre $r \in (\mathbb{R}_+^*)^n$, et on va montrer que le lemme est vrai dans le cas de la flèche $p : \mathcal{M}(\mathcal{A}_r) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Soit donc E une partie de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ telle que E_r soit une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}_r^{\mathrm{an}}$, on veut montrer que E est en fait constructible algébrique. La partie E_r s'écrit comme une union finie $E_r = \bigcup_{i\in I} U_i \cap V_i$ avec U_i (resp. V_i) des ouverts (resp. fermés) algébriques de $\mathcal{X}_r^{\mathrm{an}}$. De plus, si $\sigma : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}_r^{\mathrm{an}}$ est la section de Shilov du morphisme q^{an}, alors on a l'égalité $E = \sigma^{-1}(q^{\mathrm{an}-1}(E)) = \sigma^{-1}(\bigcup_{i\in I} U_i \cap V_i) = \bigcup_{i\in I} \sigma^{-1}(U_i \cap V_i)$. Puisque la propriété d'être constructible et algébrique est stable par union finie, on peut supposer que $E_r = U \cap V$ avec U ouvert algébrique et V fermé algébrique de $\mathcal{X}_r^{\mathrm{an}}$ et montrer que $\sigma^{-1}(U \cap V)$ est constructible algébrique. Par noethérianité de $C \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_r$, il existe un nombre fini de fonctions $(g_j)_{j\in J}$ (resp. $(f_j)_{j\in J}$) de $C \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_r$ dont V (resp. U^{C}) est le lieu d'annulation. De plus, on peut écrire chaque fonction f_j sous la forme $f_j = \sum_{M\in\mathbb{Z}^n} f_{jM}\underline{T}^M$ avec $f_{jM} \in C$ et chaque fonction g_j sous la forme $g_j = \sum_{M\in\mathbb{Z}^n} g_{jM}\underline{T}^M$ avec $g_{jM} \in C$, et par définition de la section de Shilov, $|f_j|(\sigma(x)) = \max_{M\in\mathbb{Z}^n} |f_{jM}(x)|r^M$, et donc $E = \{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \forall j \in J, \forall M \in \mathbb{Z}^n, |g_{jM}(x)| = 0\} \bigcup \{x \in \mathcal{X}^{\mathrm{an}}, \exists j \in J, \exists M \in \mathbb{Z}^n, |f_{jM}(x)| \neq 0\}$. Notons maintenant $\mathcal{I} \subset C$ l'idéal engendré par les g_{jM} dans C et $\mathcal{J} \subset C$ l'idéal engendré par les f_{jM} dans C. L'égalité précédente montre alors que $E = (V(\mathcal{I}) \bigcup V(\mathcal{J})^{\mathrm{C}})^{\mathrm{an}}$, ce qui montre que E est bien algébrique constructible.

Maintenant, on suppose que $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est fini, plat et surjectif, et E est comme dans le paragraphe précédent une partie de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ dont l'image inverse $E_{\mathcal{B}} \subset \mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}}$ est constructible algébrique. Par définition, on peut écrire E_B comme l'analytification d'une partie constructible E'. Comme $\mathcal{B}$ est noethérien, par finitude on a l'égalité $\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} = \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, et le morphisme $k_3 : \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}}$ s'identifie avec la flèche d'analytification. Si $q_i^{\mathrm{an}} : \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}_{\mathcal{B}}$ désigne chacune des deux projections, alors on a des données de descente ensemblistes canoniques sur E_B, donc on dispose de l'égalité ${q^{\mathrm{an}}}_1^{-1}(E_{\mathcal{B}}) = {q^{\mathrm{an}}}_2^{-1}(E_{\mathcal{B}})$, et si l'on note $q_i : \mathcal{X}_{\mathcal{B}\otimes_{\mathcal{A}}\mathcal{B}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{B}}$ les deux projections, on a donc $(q_1^{-1}((E')^{\mathrm{an}} = (q_2^{-1}(E'))^{\mathrm{an}}$, et par surjectivité du morphisme d'analytification k_3, on en déduit que $q_1^{-1}(E') = q_2^{-1}(E')$, donc il existe une partie $E'_0 \subset \mathcal{X}$ telle que $q^{-1}(E'_0) = E'$. De plus, on a par surjectivité du morphisme q l'égalité $E'_0 = q(E')$, et le morphisme q étant fini, par le théorème de Chevalley, la partie E'_0 est constructible, et l'analytification de E'_0 est bien E par surjectivité du morphisme d'analytification et du morphisme q^{an}, ce qui montre que E est bien une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$.

On traite ensuite le cas où le morphisme $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est un G-recouvrement

$p : \coprod_i \mathcal{M}(\mathcal{A}_i) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ de $S := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ par un nombre fini de domaines affinoïdes $S_i := \mathcal{M}(\mathcal{A}_i) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Considérons donc E une partie de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} = (\operatorname{Spec} C)^{\mathrm{an}}$ telle que $E_{\mathcal{B}}$ est une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}}$. Puisque $\mathcal{X}$ est affine, on peut trouver une immersion ouverte d'image dense $j : \mathcal{X} \to \bar{\mathcal{X}}$ de $\mathcal{A}$-schémas telle que $\bar{\mathcal{X}}$ soit propre et même projectif au dessus de $\mathcal{A}$. Si l'on note $\mathcal{X}_i = \mathcal{X} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_i$, $\bar{\mathcal{X}}_i = \bar{\mathcal{X}} \times_{\mathcal{A}} \mathcal{A}_i$, et encore E l'image de E dans $\bar{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}}$, alors par hypothèse $E \cap \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$ est une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$, c'est donc l'analytification d'une partie constructible $E_i' \subset \mathcal{X}_i$. Maintenant, E_i' est constructible dans $\overline{\mathcal{X}_i}$, donc pour tout i, $E \cap \overline{\mathcal{X}_i}^{\mathrm{an}} = E_i'^{\mathrm{an}}$ est une partie constructible de $\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$ et E est une partie G-constructible de $\overline{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}}$. Par la proposition 10.1.12 de [20], puisque $\overline{\mathcal{X}}$ peut être choisi de dimension finie, E est une partie constructible de $\overline{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}}$, et puisque $\overline{\mathcal{X}}$ est propre, par GAGA, il existe une partie constructible $E_0 \subset \overline{\mathcal{X}}$ telle que ${E_0}^{\mathrm{an}} = E$. Maintenant, on a l'égalité $(j^{-1}(E_0))^{\mathrm{an}} = E$, et $j^{-1}(E_0)$ est encore une partie constructible de $\mathcal{X}$, ce qui montre que E est bien une partie constructible algébrique de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$.

Maintenant, notons $\mathcal{P}$ la propriété pour un morphisme entre espaces k-affinoïdes de vérifier les conclusions du lemme présent. Alors on vient de montrer que les G-recouvrements, les morphismes plats finis et surjectifs et les extensions de polyrayon vérifiaient la propriété $\mathcal{P}$. On va traiter le cas d'un morphisme fidèlement plat $p : S' := \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ quelconque en utilisant le même canevas de démonstration que le théorème 2.2.4.

On vérifie facilement que l'on a l'analogue suivant du lemme 2.2.5 : si l'on dispose de $f : S \to T$ et $g : R \to S$ des morphismes d'espaces k-affinoïdes alors si f et g vérifient la propriété $\mathcal{P}$, alors $f \circ g$ vérifie $\mathcal{P}$ et si $f \circ g$ vérifie $\mathcal{P}$, alors f vérifie $\mathcal{P}$. Maintenant, en utilisant le diagramme 2.2.2.0.1, on voit qu'on peut supposer que le corps k est non trivialement valué et que S et S' sont strictement affinoïdes puisque $S_r \to S$ et $S_r' \to S'$ vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Un morphisme avec une section vérifie facilement la propriété $\mathcal{P}$, donc en utilisant le théorème de Ducros sur l'existence de multisections plates et affinoïdes, on peut aussi supposer que p est quasi-fini, plat et surjectif. En réutilisant le paragraphe 2.2.2, puisque les G-recouvrements et les morphismes finis, plats et surjectifs vérifient $\mathcal{P}$, on en déduit qu'il suffit de montrer le théorème pour un morphisme $p : S' \to S$ quasi-étale, plat et surjectif. Maintenant, en raisonnant localement sur S exactement comme dans 2.2.2 et 2.2.2, on peut supposer qu'il existe un revêtement fini galoisien $T \to S$ tel que S' est une union finie $\cup S_i'$ où chaque S_i' est un domaine affinoïde d'un quotient H_i de T. Par les propriété de compatibilité de la propriété $\mathcal{P}$ à la composition, et le fait que la propriété $\mathcal{P}$ soit vraie pour les morphismes finis, plat et surjectifs, on voit qu'il suffit de traiter le cas d'un G-recouvrement, et puisque ceux-ci vérifient la propriété $\mathcal{P}$, tout morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes vérifie la propriété $\mathcal{P}$, ce qui conclut la démonstration. □

2.5.7 Théorème. *Considérons $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ un morphisme fidèlement plat entre espaces k-affinoïdes. Considérons maintenant $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini. Alors un morphisme $f : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ est algébrique si et seulement si son changement*

de base $f_{\mathcal{B}} : \mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}}$ *est algébrique.*

Démonstration. Si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{A}$-schéma affine de type fini et $\mathcal{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est l'espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$, alors se donner un morphisme de schémas de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ revient à se donner un n-uplet de fonctions $(f_i) \in \mathcal{O}(\mathcal{X})^n$, et se donner un morphisme de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ revient à se donner un n-uplet de fonctions de $\mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})^n$, et l'analytification d'un morphisme donné par $(f_1, .., f_n) \in \mathcal{O}(\mathcal{X})^n$ est le morphisme donné par $(f_1, .., f_n) \in \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})^n$ où $f_i \in \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$ désigne aussi l'image de f_i par l'injection canonique $\mathcal{O}(\mathcal{X}) \to \mathcal{O}(\mathcal{X}^{\mathrm{an}})$. Le problème se ramène donc à la proposition précédente 2.5.5.

Maintenant, si $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini quelconque et $\mathcal{Y} = \mathbb{A}^n_{\mathcal{A}}$ est l'espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$, et qu'on dispose d'un morphisme d'espaces $\mathcal{A}$-analytique $f : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ dont le changement de base $f_{\mathcal{B}}$ est algébrique, alors si l'on se donne un Zariski-recouvrement $\mathcal{X} = \cup_i \mathcal{X}_i$ par des $\mathcal{A}$-schémas affines de type fini $\mathcal{X}_i$, par hypothèse, il existe un morphisme de $\mathcal{B}$-schémas $h : \mathcal{X}_{\mathcal{B}} \to \mathcal{Y}_{\mathcal{B}}$ dont l'analytification est $f_{\mathcal{B}}$, donc la restriction de f à $\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$ fournit un morphisme d'espace analytique $f_i : \mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ dont le changement de base $f_{i_{\mathcal{B}}}$ est algébrique car c'est l'analytification de la composée de h avec l'inclusion $\mathcal{X}_{i_{\mathcal{B}}} \to \mathcal{X}_{\mathcal{B}}$. Par le paragraphe précédent, on dispose donc d'un morphisme $g_i : \mathcal{X}_i \to \mathcal{Y}$ dont l'analytification est f_i. Maintenant, puisqu'on a l'égalité $(g_i|_{\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_|})^{\mathrm{an}} = (g_j|_{\mathcal{X} \cap \mathcal{X}_|})^{\mathrm{an}} = f|_{\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}} \cap \mathcal{X}_j^{\mathrm{an}}}$, par le lemme 2.5.2, les g_i se recollent sur les doubles intersection en un morphisme $g : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ et comme $(g|_{\mathcal{X}_i})^{\mathrm{an}} = f_i$, le morphisme f est bien l'analytification de g et est donc bien algébrique.

Puisque qu'on peut toujours plonger un $\mathcal{A}$-schéma affine $\mathcal{Y}$ de type fini dans un espace affine de dimension finie, et que se donner un morphisme de schémas d'un espace $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ revient alors à se donner un certain nombre de fonctions globales sur $\mathcal{X}$ qui s'annulent sur un fermé, on en déduit que l'on a le résultat pour $\mathcal{X}$ un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini et $\mathcal{Y}$ affine de type fini au dessus de $\mathcal{A}$.

On se donne maintenant deux $\mathcal{A}$-schémas localement de type fini quelconque $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ et $f : \mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{Y}^{\mathrm{an}}$ un morphisme de $\mathcal{A}$-espaces analytiques dont le changement de base $f_{\mathcal{B}}$ est algébrique. Alors si $\mathcal{Y}_i$ est un ouvert affine inclus dans $\mathcal{Y}$, alors la partie $f^{-1}({\mathcal{Y}_i}^{\mathrm{an}})$ est un ouvert de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ dont l'image inverse par le morphisme $q^{\mathrm{an}} : \mathcal{X}_{\mathcal{B}}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ est égale à ${f_{\mathcal{B}}}^{-1}(\mathcal{Y}_{i\mathcal{B}}^{\mathrm{an}})$, et puisque $f_{\mathcal{B}}$ est algébrique, c'est une partie ouverte algébrique de $\mathcal{X}_{\mathcal{B}}$, donc par le lemme 2.5.6, on en déduit que $f^{-1}({\mathcal{Y}_i}^{\mathrm{an}})$ est une partie localement constructible algébrique de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ qui est ouverte donc par le lemme 10.1.10 de [20], c'est un ouvert algébrique de $\mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ donc c'est l'analytification d'un ouvert $\mathcal{X}_i$ de $\mathcal{X}$. Par le paragraphe précédent, il existe un unique morphisme f_i de $\mathcal{A}$-schémas de $\mathcal{X}_i$ vers $\mathcal{Y}_i$ dont l'analytification fournit la restriction de f à $\mathcal{X}_i^{\mathrm{an}}$. Par fidélité du foncteur d'analytification, la collection des (f_i) se recolle en un morphisme de $\mathcal{A}$-schémas de $\mathcal{X}$ vers $\mathcal{Y}$ dont l'analytification fournit f, et cela montre bien que f est algébrique, ce que l'on voulait. $\square$

On conclut ce papier en donnant une conséquence amusante du théorème précédent.

2.5.8 Proposition. *Considérons une algèbre k-affinoïde $\mathcal{A}$, ainsi qu'un $\mathcal{A}$-schéma localement de type fini $\mathcal{X}$. Alors toute section $s : \mathcal{M}(\mathcal{A}) \to \mathcal{X}^{\mathrm{an}}$ du morphisme canonique $\mathcal{X}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est algébrique, c'est-à-dire que c'est l'analytification d'une section schématique de $\mathcal{X} \to \operatorname{Spec} \mathcal{A}$*

Démonstration. Si le schéma $\mathcal{X}$ est séparé et quasi-compact, il admet une compactification $\overline{\mathcal{X}}$ au dessus de $\operatorname{Spec} \mathcal{A}$, et s fournit une section à la flèche canonique $\overline{\mathcal{X}}^{\mathrm{an}} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$, qui par GAGA est algébrique, et cela montre que la section s est algébrique.

Maintenant, on se donne $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et un ouvert affine $U \subset \mathcal{X}$ tel que $s(x) \in U^{\mathrm{an}}$. Alors il existe un voisinage affinoïde V_x de x dans $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ tel que $s(V_x) \subset U^{\mathrm{an}}$. Par le paragraphe précédent, $s_{|V_x} : V_x \to (U \times_{\mathcal{A}} O(V_x))^{\mathrm{an}}$ est algébrique. On extrait maintenant un G-recouvrement de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ par un nombre fini de domaines affinoïdes $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \coprod_{x \in I} V_x$. On a montré que $s \times_{\mathcal{A}} \coprod_{x \in I} V_x$ était algébrique, et par le théorème 2.5.7, on en déduit que la section s est algébrique et cela montre la proposition. $\square$

Chapitre 3

Changement de base pour la cohomologie cohérente analytique

"L'histoire sociale enseigne qu'il n'y a pas de politique sociale sans un mouvement social capable de l'imposer."

—Pierre Bourdieu

3.1 Flat base change

The main goal of this section is to show a flat base change theorem for coherent modules in Berkovich geometry. Our strategy will be to use Ducros's theory of dévissages in Berkovich geometry (see chapter 8 of [20]) to reduce the theorem to two elementary cases, the case of a quasi-smooth base change, and the case of a G-covering. The case of a G-covering follows from Kiehl's theorem on direct images, and the case of quasi-smooth morphisms will be handled by direct computation involving explicit polydisks.

We first give a reminder of Ducros theory of dévissages and give the explicit version that we will use here. The following theorem is just a version of the theorem 8.3.4 of [20] where we shrinked every quasi-smooth space.

3.1.1 Proposition (Ducros)**.** *Let $p : Y \to X$ be a morphism between good k-analytic spaces, let $\mathcal{F}$ be a flat coherent sheaf on Y, let y be a point of* $\operatorname{supp} Y$*, let x be its image in X and let n be the relative dimension of p at x. Then there exist $r \leq n$, a decreasing sequence of non-negative integers $n_1 > n_2 > ... > n_r$ and a list of data $(V, \{T_i, \pi_i, t_i, L_i, P_i\}_{i\in\{1,...r\}})$, where :*

1. *V is an affinoid neighboorhood of $y \in Y$;*
2. *$T_i = \mathcal{M}(C_i)$ is a k-affinoid domain of a smooth X-space of pure relative dimension n_i and t_i is a point of T_i lying over x ;*
3. *for every i, L_i and P_i are finite C_i-modules, and L_i is free over C_i ;*
4. *$t_i \in \operatorname{supp}\ (P_i)$ if $i < r$ and $P_r = 0$;*
5. *π_1 is a finite X-map from* $\operatorname{supp}\ (\mathcal{F}_V)$ *to T_1 such that $\pi_1^{-1}(t_1) = \{y\}$ set-theoretically ;*
6. *π_i is a finite X-map from* $\operatorname{supp}\ (P_{i-1})$ *to T_i such that $\pi_1^{-1}(t_i) = \{t_{i-1}\}$ set-theoretically ;*
7. *There exist an exact sequence of finite C_1-modules $0 \to L_1 \to H^0(V, \mathcal{F}) \to P_1 \to 0$;*
8. *for any $i \in \{2, ..., r\}$, there is an exact sequence of finite C_i-modules $0 \to L_i \to P_{i-1} \to P_i \to 0$.*

Proof. Let $(V', \{T_i, \pi_i, t_i, \mathcal{L}_i, \mathcal{P}_i\}_{i\in\{1,...,r\}})$ be an X-dévissage of $\mathcal{F}$ at y (such a dévissage exist by theorem 8.2.3 of [20]). Then the arrow $\mathcal{L}_1 \to \pi_{1*}\mathcal{F}_V$ is injective at t_1 and the arrow $\mathcal{L}_i \to \pi_{i*}\mathcal{P}_{i-1}$ is injective at t_i for every $i \geq 2$ by theorem 8.3.4 of [20] and flatness of $\mathcal{F}$.

By definition, and by theorem 2.4.9 of [20], we can shrink V' and all the T_i to reduce to the case where if L_i (resp. P_i) is the $O_{T_i}(T_i)$-module associated with $\mathcal{L}_i$ (resp. $\mathcal{P}_i$) then the arrows $L_i \to P_{i-1}$ and $L_1 \to H^0(V, \mathcal{F})$ are injective and the sequences $0 \to L_i \to P_{i-1} \to P_i \to 0$ for all $i > 1$ and $0 \to L_1 \to H^0(V, \mathcal{F}) \to P_1 \to 0$ are exact. $\square$

3.1.2 Remark. By the reverse implication in 8.3.4 of [20], the coherent module associated to P_i over T_i is flat over $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ because we have a dévissage of it $(V, \{T_i, \pi_i, t_i, L_i, P_i\}_{i\in\{2,\dots r\}})$ that is just the restriction of the dévissage of $\mathcal{F}$

Our main theorem is the following :

3.1.1 Theorem. *Suppose*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & S' \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

is a cartesian diagram of k-analytic spaces with f proper and p flat. Let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X. Then for all $i \geq 0$ the natural morphism of coherent $\mathcal{O}_{S'}$-modules $p^*(R^i f_*\mathcal{F}) \to R^i f'_*(p'^*\mathcal{F})$ is an isomorphism.

3.1.3 Remark. By Kiehl theorem on coherence of direct images, theorem 3.3 in [37], the theorem holds for every embedding of analytic domain $p : S' \to S$.

Since this assertion is local on S' for the G-topology, we can assume than S' is affinoid, and the theorem is just a consequence of the following theorem :

3.1.2 Theorem. *Suppose*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} & S' \\ \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

is a cartesian diagram of k-analytic spaces with f proper and $p : S' := \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to S := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ a flat morphism between affinoid spaces. Let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X. Then for all $i \geq 0$ the natural morphism of B-modules $H^i(X, \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to H^i(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_B)$ is an isomorphism.

3.1.4 Remark. The space X is compact so if we take a G-covering of X by a finite number of affinoid domains, the i-th cohomology module $H^i(X, \mathcal{F})$ is given by $H^i(C^*)$ the i-th cohomology module of the Čech complex associated to $\mathcal{F}$, where the latter is denoted by (C^*).

3.1.5 Definition. *Let $\mathcal{A}$ be a k-affinoid algebra, and M be a Banach module over $\mathcal{A}$. We say that M satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ if for every $i \geq 0$ and all coherent sheaf $\mathcal{F}$ on a proper $\mathcal{A}$-space X provided with a finite G-covering the natural arrow $H^i(C^*)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}M \to H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}M)$ is an isomorphism where (C^*) is the Čech complex of $\mathcal{F}$.*

3.1.6 Remark. By properness, the $H^i(C^*)$ are finite $\mathcal{A}$-modules, so we have the equality $H^i(C^*)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}M = H^i(C^*)\otimes_{\mathcal{A}}M$.

3.1.7 Definition. *In the setting of theorem* 3.1.1*, we say that a morphism* $p : S' \to S$ *satisfies property* $\mathcal{Q}_S$ *if for all proper morphism* $f : X \to S$ *and* $\mathcal{F}$ *coherent sheaf on* X*, the conclusion of theorem* 3.1.1 *are satisfied.*

3.1.8 Remark. For a morphism of k-affinoid spaces $p : S' \to S$ the following properties are equivalent : $\mathcal{O}(S')$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{O}(S)}$ and the morphism p satisfies $\mathcal{Q}_S$. Nevertheless, the property $\mathcal{Q}$ makes sense for non-affinoid analytic spaces.

3.1.9 Example. Let $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{M}(\mathcal{A}_j)$ be a covering of an affinoid space by a finite number of affinoid domains. Let $M := \prod_{j\in J} \mathcal{A}_j$. Then as in 3.1.3, by Kiehl coherence theorem, M sastisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

3.1.10 Remark. In the setting of theorem 3.1.2, let $X = \bigcup_{j\in J} X_j$ be a covering of X by a finite number of affinoid domains. Then we have a finite G-covering of $X_{\mathcal{B}}$ by affinoid domains, namely $X_{\mathcal{B}} = \bigcup_{i\in I} X_i \times_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, and by properness we can compute its cohomology groups using Čech cohomology, so we have the equality $H^i(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_B) = H^i(C^*_{\mathcal{B}})$, where $C^i_{\mathcal{B}} = (C^i)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$.

In order to show theorem 3.1.2, it is sufficient to show that $H^i(C^*_{\mathcal{B}}) = H^i(C) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, that is to say that the Banach $\mathcal{A}$-module $\mathcal{B}$ satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. This will be our main goal in the rest of this section.

The following lemma shows in particular that the property $\mathcal{P}$ is G-local on the source.

3.1.11 Lemma. *Let* $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ *be a morphism of* k*-affinoid spaces, and let* $q : \mathcal{M}(\mathcal{C}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ *be a morphism of* k*-affinoid spaces.*

1. *Assume that the induced* k*-algebra morphism* $\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *is faithfully flat and sastisfies* $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ *(e.g. the morphism* q *is a finite affinoid* G*-covering of* $\mathcal{M}(\mathcal{B})$*). Then if* $\mathcal{C}$ *satisfies the property* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ *then* $\mathcal{B}$ *satisfies the property* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$*.*
2. *Assume that* p *satisfies* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ *and* q *satisfies* $\mathcal{P}_B$*. Then* $p \circ q$ *satisfies* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$*.*
3. *Suppose that there exist a* G*-covering* $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{M}(\mathcal{B}_{V_i})$ *of* $\mathcal{M}((\mathcal{B})$ *such that for all* $i \in I$*, the* $\mathcal{A}$*-module* $\mathcal{B}_{V_i}$ *satisfies the property* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$*. Then* $\mathcal{B}$ *satisfies the property* $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$*.*

Proof. Let X be a proper $\mathcal{A}$-space provided with a covering by a finite number of affinoid domains. Denote by (C^*) the associated Čech complex.

We start with the first point. For all $i \geq 0$, we have a natural arrow $H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$. By faithfull flatness, this arrow is an isomorphism if and only if its base change $H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C} \to H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C}$ is an isomorphism, but because $\mathcal{C}$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, the first term is isomorphic to $H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})$ and because q satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$, we have an isomorphism $H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C} \to H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{C}) = H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{C})$.

For the second point, we have an isomorphism $H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{C} = H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{C} \to H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})\otimes_{\mathcal{B}}\mathcal{C}$ because p satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ and this last term is isomorphic to $H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{C})$ because q satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$.

The last point is just a consequence of the first point, because by compactness, we can chose I to be finite, and then, the natural map $\coprod_{i\in I}\mathcal{M}(\mathcal{B}_{V_i})\to\mathcal{A}$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ and the arrow $\mathcal{B}\to\prod_{i\in I}\mathcal{B}_{V_i}$ is faithfully flat. $\square$

We have the same kind of good behaviour for the property $\mathcal{Q}$. Let's first introduce the following definition :

3.1.12 Definition. *Let $f:Y\to X$ be a morphism of k-analytic spaces. Then f is said to be properly surjective if there exist a G-covering of X by quasi-compact analytic domain each of which is the image of a quasi-compact analytic domain of Y.*

3.1.13 Lemma. *Let $p:S\to T$ and $q:R\to S$ be morphism of k-analytic spaces.*

1. *Assume that q is flat and properly surjective and satisfies property $\mathcal{Q}_{\mathcal{S}}$ (e.g. the morphism q is a G-covering). Then if $p\circ q$ satisfies $\mathcal{Q}_T$ then p satisfies $\mathcal{Q}_T$.*
2. *Assume that p satisfies $\mathcal{Q}_T$ and q satisfies $\mathcal{Q}_S$. Then $p\circ q$ satisfies $\mathcal{Q}_T$.*
3. *Assume that there exist a G-covering $S=\bigcup_{i\in I}S_i$ by quasi-compact analytic domains such that for all $i\in I$, the arrow $S_i\to T$ satisfies $\mathcal{Q}_T$. Then p satisfies $\mathcal{Q}_T$.*

Proof. Let $f:X\to T$ be a proper T-space and $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X. Let $X_S:=X\times_T S$ and $X_R:=X\times_T T$ and denote by $p':X_S\to X$, $q':X_R\to X_S$, $f_S:X_S\to S$ and $f_R:X_R\to R$ be the canonical morphisms. We have the following double cartesian commutative square :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "q"] & S \arrow[r, "p"] & T \\ X_R \arrow[u, "f_R"] \arrow[r, "q'"] & X_S \arrow[u, "f_S"] \arrow[r, "p'"] & X \arrow[u, "f"] \end{tikzcd}$$

Assume that $p\circ q$ satisfies $\mathcal{Q}_T$ and q is flat and properly surjective and satisfies $\mathcal{Q}_S$, and let $h:p^*(R^if_*\mathcal{F})\to(R^i(f_S)_*(p')^*\mathcal{F})$ be the canonical morphism. Then we can pullback h by q^* and because q satisfies $\mathcal{Q}_S$, q^*h is the canonical morphism $(p\circ q)^*(R^if_*\mathcal{F})\to(R^i(f_R)_*(p'\circ q')^*\mathcal{F})$ and the latter is an isomorphism because $p\circ q$ satisfies $\mathcal{Q}_T$. By descent of flat properly surjective morphisms (theorem 3.13 of [15]), h is an isomorphism, so p satisfies $\mathcal{Q}_{\mathcal{T}}$.

Assume now that p satisfies $\mathcal{Q}_T$ and q satisfies $\mathcal{Q}_S$. Then we have an isomorphism $h:p^*R^if_*\mathcal{F}\to R^i((f_S)_*(p')^*\mathcal{F})$. We can now pullback this isomorphism by q^* to get another isomorphism q^*h and because q satisfies $\mathcal{Q}_S$, q^*h is the canonical morphism $(p\circ q)^*(R^if_*\mathcal{F})\to(R^i(f_R)_*((p'\circ q'))^*\mathcal{F})$, so $p\circ q$ satisfies $\mathcal{Q}_T$.

Now, the last point is just a consequence of the first point, because the morphism $\coprod_{i\in I}S_i\to S$ is properly surjective, and $\coprod_{i\in I}S_i\to T$ satisfies $\mathcal{Q}_T$. $\square$

3.1.14 Lemma. *Let $p : S' := \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a morphism of k-affinoid spaces such that $\mathcal{B}$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, and let L be a finite free Banach $\mathcal{B}$-module. Then L satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.*

Proof. Write $L = \bigoplus_{j\in J} \mathcal{B}$. Let X be a proper $\mathcal{A}$-space provided with a covering by a finite number of affinoid domains and $\mathcal{F}$ a coherent sheaf on X. Denote by (C^*) the associated Čech complex. Then by proposition 2.1.7.6 of [7], we have $C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L = \bigoplus_{j\in J}(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ and because the sum is finite for all $i \geq 0$ we have the equality $H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L) = \bigoplus_{j\in J} H^i(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$. Because the usual tensor product commute with direct sum, and $\mathcal{B}$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ we see that L satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. □

3.1.15 Lemma. *Let $p : Y := \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to X := \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a quasi-smooth morphism of k-affinoid algebras. Then $\mathcal{B}$ satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.*

Proof. Let $y \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ and denote by d the relative dimension of p at y. Then by corollary 5.3.7 of [20], there exists an affinoid neighborhood $V_y \subset \mathcal{M}(\mathcal{B})$ such that $p_{|V_y}$ is quasi-smooth of relative dimension d. By part 1 of 3.1.11, we can replace $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ by V_y and f by $f_{|V_y}$ i.e. we can assume that f is quasi-smooth of constant relative dimension d by shrinking again Y if needed.

By corollary 5.3.2 of [20], we can shrink Y to assume that the coherent $\mathcal{B}$-module $\Omega_{Y/X}$ is free of rank d. Now let $f_1, ..., f_d$ be analytic functions on $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ such that $((df_j)(y))_i$ is a basis of $(\Omega_{\mathcal{B}/\mathcal{A}})_{\mathcal{H}(y)}$. Then by lemma 5.4.5 of [20], the map $\varphi : Y \to \mathbb{A}^d_X$ is quasi-étale at y. Now, the quasi-étale (quasi-smooth of relative dimension zero) locus of φ on Y is an open subset (it is even Zariski-open) of Y by theorem 10.7.2 of [20]. We can assume that there exist an affinoid neighborhood U of y in Y such that the restriction $\varphi_{|U}$ remain quasi-étale, and by an application of part 3 of the lemma 3.1.11, up to consider a G-covering of Y, we can assume that $\varphi : Y \to \mathbb{A}^d_X$ is quasi-étale at each point.

By definition of $\mathbb{A}^d_X$ and compactness of Y, there exist a compact polydisk D over $\mathcal{A}$ such that $\varphi(Y) \subset D$. Then the induced morphism $Y \to D$ is quasi-étale, and by part 2 of lemma 3.1.11, it is sufficient to show that $D \to X$ (resp. $Y \to D$) satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{O}(D)}$). The morphism $D \to X$ obviously satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ since if $D = \mathcal{M}(\mathcal{A}\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\})$ with $\underline{R} \in (\mathbb{R}^*_+)^d$ a polyradius, Z is a proper $\mathcal{A}$-space provided with a covering by a finite number of affinoid domains, $\mathcal{F}$ is a coherent sheaf on Z and (C^*) is the associated Čech complex then for all $i \geq 0$ we have $H^i(C^*\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\}) = H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{A}\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\}$ because for every exact admissible sequence of Banach $\mathcal{A}$-modules $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, the sequence $0 \to M'\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\} \to M\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\} \to M''\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{A}\{\underline{R}^{-1}\underline{T}\} \to 0$ is also exact admissible.

It remains to show that if $q : Y \to D$ is a quasi-étale morphism between affinoid spaces then $\mathcal{O}(Y)$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$. By part 3 of lemma 3.1.11, we can argue G-locally on Y, and assume that Y is an affinoid domain of an étale space T over D. Let $p : T \to D$ be the structural morphism and $j : Y \to T$ the inclusion that identifie Y with an affinoid domain

of T. To show that $\mathcal{O}(Y)$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$, it is sufficient to show that q satisfies $\mathcal{Q}_D$. Let now suppose that étale morphisms satisfy the property $\mathcal{Q}$. Then q also satisfies $\mathcal{Q}$ by part 2 of lemma 3.1.13 because affinoid domain embeddings satisfy property $\mathcal{Q}$.

We can now assume that $q_1 : Y \to D$ is an étale morphism between non necessary affinoid spaces, and it is sufficient to show that q_1 satisfies the property $\mathcal{Q}$. By definition, there exists $Y = \bigcup_{j\in J} Y_j$ a G-covering of Y by affinoid domains and D_j affinoid domains of D such that the restriction $q_{1|Y_j} : Y_j \to D_j$ is finite and étale. Let $q_2 : \coprod_{j\in J} Y_j \to \coprod_{j\in J} D_j$ be the induced finite morphism and $r_2 : \coprod_{j\in J} Y_j \to Y$ and $r_1 : \coprod_{j\in J} D_j \to D$ the induced G-covering. We now have the following commutative square :

$$\begin{tikzcd} \coprod_{j\in J} Y_j \arrow[r, "q_2"] \arrow[d, "r_2"] & \coprod_{j\in J} D_j \arrow[d, "r_1"] \\ Y \arrow[r, "q_1"] & D \end{tikzcd}$$

By lemma part 3 of 3.1.13, q_1 satisfies the property $\mathcal{Q}_D$ if the morphism $\coprod_{j\in J} Y_j \to D$ satisfies property $\mathcal{Q}_D$. Now, because the morphism $\coprod_{j\in J} D_j \to D$ satisfies property $\mathcal{Q}_D$, again by part 2 of lemma 3.1.13, it is sufficient to show that the morphism $\coprod_{j\in J} Y_j \to \coprod D_j$ satisfies the property $\mathcal{Q}$.

We can now assume that the morphism $q : Y \to D$ is a finite étale morphism of affinoid spaces and we want to show that it possess the property $\mathcal{Q}$. Let $f : Z \to D$ be a proper D-space provided with a covering by a finite number of affinoid domains $Z = \bigcup Z_r$. Let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on Z. Denote by (C^*) the associated Čech complex. Let $f' = f \times Y$ and $q' = q \times X$. Then, by properness, we have $H^i(Z \times_D Y, q'^*\mathcal{F}) = H^i(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y))$ because the inverse image $(q'^{-1}(Z_r))$ induce an affinoid covering of $X \times_D Y$, and because the arrow $\mathcal{O}(D) \to \mathcal{O}(Y)$ is finite, we have $C^i \hat{\otimes}_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y) = C^i \otimes_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y)$ and because the same arrow is flat by proposition 4.3.1 of [20], the cohomology of the complex (C^*) commute with (ordinary) tensor product, so we have $H^i(C^* \otimes_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y)) = H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y)$, so we eventually have the equality $H^i(X \times_D Y, q'^*\mathcal{F}) = H^i(C^*) \otimes_{\mathcal{O}(D)} \mathcal{O}(Y)$ and q satisfies property $\mathcal{Q}_D$. □

3.1.16 Remark. Combining lemma 3.1.14 and 3.1.15, we see that if $\mathcal{A}$ is a k-affinoid space, and M is any finite free module on a quasi-smooth algebra, then M satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Now, we give a last lemma that will allow us to show the theorem 3.1.2 by induction on the relative dimension of the morphism.

3.1.17 Lemma. *Let $p : R \to S$ be a morphism of affinoid spaces with $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = S$ and $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on R that is flat over S. Assume that there exists a quasi-smooth affinoid S-space $T = \mathcal{M}(\mathcal{C})$, and $\mathcal{L}$, $\mathcal{N}$ some coherent sheaves on T such that $L := \mathcal{L}(T)$ is free over $\mathcal{C}$, $\mathcal{N}$ is flat over S and such that there exists a finite S-map $\pi : \operatorname{supp} \mathcal{F} \to T$ and*

an exact sequence of finite C-modules $0 \to L \to H^0(R, \mathcal{F}) \to N \to 0$, where N is equal to $\mathcal{N}(T)$.

Assume that N satisfies property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Then $F := H^0(R, \mathcal{F})$ also satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Proof. Let X be a proper $\mathcal{A}$-space provided with a covering by a finite number of affinoid domains $X = \bigcup X_i$ and a coherent sheaf $\mathcal{G}$ on it. Denote by (C^*) the Čech complex associated to $\mathcal{G}$. Let $q_i : Y_i := \coprod_{i_0<..<i_i} X_{i_0} \cap ... \cap X_{i_i} \to X$ be the morphism of k-affinoid spaces given by inclusion. Then we have the equality $H^0(Y_i, q_i^*\mathcal{G}) = C^i$. We also have an exact sequence of coherent $\mathcal{O}_T$-modules $0 \to \mathcal{L} \to \pi_*\mathcal{F} \to \mathcal{N} \to 0$. We can summarize the situation by the following commutative cartesian square, where $Z := T \times_S Y_i$:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & Y_i \arrow[d] \\ T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

By flatness of $\mathcal{N}$, we can apply theorem 4.5.7 of [20] to this square, the previous exact sequence and the coherent sheaf $q_i^*\mathcal{G}$ on Y_i and we have the following exact sequence for all $i \geq 0 : 0 \to C^i \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L \to C^i \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F \to C^i \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N \to 0$.

This short exact sequence of complexes of modules now induces a long exact sequence of modules, and this shows that the second row of the following commutative diagram is exact at the middle :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & H^n(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} L \arrow[r] \arrow[d] & H^n(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} F \arrow[r] \arrow[d] & H^n(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L) \arrow[r] & H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F) \arrow[r] & H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

The first row of this commutative diagram is exact at each of its term because since $\mathcal{N}$ is flat over S, the $\mathcal{A}$-module N is $\mathcal{A}$ flat, so we have for all $n \geq 0$ the equality $\mathrm{Tor}_1^{\mathcal{A}}(C^n, N) = 0$. Now, by diagram-chasing, since N satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, the arrow $H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F) \to H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N)$ is surjective, and this shows that the connecting morphism $H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} N) \to H^{n+1}(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L)$ from the long exact sequence is injective, so the arrow $H^{n+1}(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L) \to H^{n+1}(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F)$ is injective, so the second row is also exact on its left part for $n \geq 1$ applying the above with n instead of $n+1$. The case $n = 0$ is also exact since we have a commutative diagram of modules with exact rows :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L \arrow[r] \arrow[d] & C^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & C^1 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L \arrow[r] & C^1 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F \end{tikzcd}$$

And by diagram-chasing, the canonical arrow $H^0(C^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} L) \to H^0(C^0 \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F)$ is also injec-

tive. Now, since N satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, and L also by 3.1.16 because it is free over a quasi-smooth algebra over $\mathcal{A}$, on the three descending morphism of the diagram, two are isomorphisms, and by diagram chase, we dedude that $H^n(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} F \to H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} F)$ is also an isomorphism and it is what we aimed to show. □

We will now use the previous lemma repeatedly to show :

3.1.18 Lemma. *Let $\mathcal{A}$ be an affinoid algebra, $d \geq 0$ an integer, T a quasi-smooth space $T \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ purely of relative dimension d, and $\mathcal{F}$ a coherent sheaf on T that is flat on $\mathcal{A}$. Then for all $i \geq 0$, $H^0(T, \mathcal{F})$ satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.*

Proof. We will show this by induction on the relative dimension $d \geq 0$.

Assume $d = 0$. Then by 3.1.1, there exist a quasi-smooth space T_1 over $\mathcal{A}$, of pure relative dimension zero and a finite morphism of $\mathcal{A}$-analytic spaces $\pi_1 : \operatorname{supp} \mathcal{F} \to T_1$, with a coherent sheaf $\mathcal{L}_1$ on T_1 whose global section $L_1 := H^0(T_1, \mathcal{L}_1)$ are free over $\mathcal{A}$ and such that we have an isomorphism $0 \to L_1 \to H^0(T, \mathcal{F}) \to 0$. From this equality, we deduce that $H^0(T, \mathcal{F})$ is free over a quasi-smooth algebra over $\mathcal{A}$, so by remark 3.1.16, the $\mathcal{A}$-module $H^0(T, \mathcal{F})$ satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$.

Assume now that the proposition hold for all $d' \leq d$, and let $T \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a quasi-smooth space purely of dimension $d+1$ with $\mathcal{F}$ a coherent sheaf on T. Then using the same notation as proposition 3.1.1, we have an affinoid quasi-smooth $\mathcal{A}$-space $T_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ of pure relative dimension $n_r \leq d+1$, an affinoid quasi-smooth $\mathcal{A}$-space $T_2 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ of pure relative dimension $n_r \leq d$, some coherent $\mathcal{C}_i$-module L_i and P_i for $i \in \{1; 2\}$ on $\mathcal{C}_i$ such that L_i is free over $\mathcal{C}_i$, P_i is (analytically) flat over $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ and some finite morphism $\pi_1 : \operatorname{supp} \mathcal{F} \to T_1$ and $\pi_2 : \operatorname{supp} P_1 \to T_2$. Now, we have an exact sequence $0 \to L_2 \to H^0(T_1, P_1) \to P_2 \to 0$, and by induction hypothesis, P_2 satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, and L_2 is free over C_2, so by the previous lemma 3.1.17, P_1 satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. Now applying again the lemma 3.1.17 to the exact sequence of $\mathcal{C}_1$ modules $0 \to L_1 \to H^0(T, \mathcal{F}) \to P_1 \to 0$ we get that $H^0(T, \mathcal{F})$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. □

Now, theorem 3.1.2 is just an easy consequence of the previous lemmas.

Proof. Let $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a flat morphism between affinoid spaces. We want to show that the $\mathcal{A}$-module $\mathcal{B}$ satisfies the property $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$. By lemma 3.1.11, the property is G-local on $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ and it is sufficient to show it on an affinoid neighborhood of any point.

So let $y \in \mathcal{M}(\mathcal{B})$ and let n be the relative dimension of p at y. Using notation of the proposition 3.1.1, there exist an affinoid neighborhood $V = \mathcal{M}(\mathcal{B}_V)$ of y in Y and a quasi-smooth $\mathcal{A}$-space $T_1 = \mathcal{M}(\mathcal{C})$ purely of dimension d smaller than n, finite C_1-modules P_1 and L_1 such that L_1 is free over $\mathcal{C}_1$ and a finite morphism $\pi_1 : V \to T_1$ such that there exist an exact sequence of $\mathcal{C}_1$-modules $0 \to L_1 \to \mathcal{B}_V \to P_1 \to 0$.

Now by the 3.1.18, P_1 satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$ and L_1 is free over a quasi-smooth $\mathcal{A}$-algebra, so by lemma 3.1.17, the $\mathcal{A}$-module $\mathcal{B}_V$ satisfies $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$, this shows that the property holds for $\mathcal{B}$ and the theorem 3.1.2 is now proved. □

3.2 Proper base change

We now want to show a proper base change theorem for coherent modules. We remind two following theorems that are stated at section 5 of the chapter 2 of [42] for the cohomology of proper schemes.

3.2.1 Proposition. *Let A be a noetherian ring and C^* be a complex of A-modules such that its cohomology groups $H^i(C^*)$ are finitely generated A-modules and $C^p \neq \{0\}$ if and only if $0 \leq p \leq n$. Then there exist a complex K^* of finitely generated A-modules such that $K^p \neq \{0\}$ if and only if $0 \leq p \leq n$ and K^p is free for $1 \leq p \leq n$, and a quasi-isomorphism of complexes of A-modules $\varphi : K^* \to C^*$. Moreover, if the C^p are A-flat, then K^0 can be taken to be A-flat.*

3.2.2 Proposition. *Let A be a noetherian ring, and C^*, K^* be any finite complexes of flat A-modules and let $\varphi : K^* \to C^*$ be a quasi-isomorphism of complexes of A-modules. Then for every A-algebra B, the maps $H^p(K^* \otimes_A B) \to H^p(C^* \otimes_A B)$ are isomorphisms for all $p \in \mathbb{Z}$ i.e. the natural morphism $\varphi \otimes_A B$ is a quasi-isomorphism.*

If we have a quasi-coherent sheaf $\mathcal{F}$ on a proper space X over a noetherian affine scheme A, we can apply these two proposition to the Čech complex of $\mathcal{F}$, and we have the existence of a complex K^* of A-module that computes the cohomology of the space X universally, i.e. such that we have for every A-algebra B and every integer n the equality $H^n(X_B, \mathcal{F}_B) = H^n(K^*_A \otimes B)$.

3.2.3 Definition. *Let $\mathcal{A}$ be an affinoid algebra, and X a proper $\mathcal{A}$-analytic space. Let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X that is flat over $\mathcal{A}$, and let $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ be G-covering of X by a finite number of affinoid domains. Denote by C^* the Čech complex associated to $\mathcal{F}$ relatively to this covering. Given these data, we will say that a morphism of affinoid algebras $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ if for every finite complex of finitely generated flat A-module K^* and every quasi-isomorphism $\varphi : K^* \to C^*$ of complexes of $\mathcal{A}$-modules then φ induce an isomorphism $H^n(K^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to H^n(C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$ i.e. $\varphi \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ is a quasi-isomorphism.*

From now on, all the data involving the previous definition will be fixed.

3.2.4 Remark. Let $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a finite morphism between k-affinoid algebras. Then p satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. In fact, the complex C^* satisfies the hypothesis of the proposition 3.2.2, so for every finite flat complex of finitely generated A-module K^* and every quasi-isomorphism $\varphi : K^* \to C^*$ of complexes of $\mathcal{A}$-modules, we have an isomorphism $H^n(K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to H^n(C^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B})$ and since C^i and K^i are noetherian and p is finite, we have the equality $K^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ and $C^* \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{B} = C^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$, so $\varphi \hat{\otimes} \mathcal{B}$ is a quasi-isomorphism.

3.2.5 Remark. Let $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a flat morphism between affinoid algebras. Then p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. In fact, let K^* be a finite complex of finitely generated flat A-modules and

φ a quasi-isomorphism $\varphi : K^* \to C^*$ of complexes of $\mathcal{A}$-modules. Because K^i is finite for all $i \in \mathbb{Z}$, and the $\mathcal{A}$-algebra $\mathcal{B}$ is flat, using theorem 3.1.2, the arrow $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ is now identified with the arrow $H^n(K^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \to H^n(C^*) \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$ and the latter is an isomorphism by definition of the complex K^*.

3.2.6 Lemma. *Let L be a non-archimedean field extension of k and $\mathcal{A}$ be a k-affinoid algebra. Then the natural morphism of analytic spaces $p : \mathcal{M}(A_L) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satifies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.*

Proof. Let K^* be a finite complex of finitely generated flat A-module and φ a quasi-isomorphism $\varphi : K^* \to C^*$ of complexes of $\mathcal{A}$-modules. Then the differential of the Čech complex C^* are admissible, and by theorem 1 of part 3 of [29], the functor $\hat{\otimes}_k L$ from k-Banach modules to L-Banach modules transform admissible exact sequences into admissible exact sequences, so for all $n \in \mathbb{Z}$, the morphism $H^n(K^*\hat{\otimes}_k L) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_k L)$ is identified with the morphism $H^n(K^*)\hat{\otimes}_k L \to H^n(C^*)\hat{\otimes}_k L$ and the latter is an isomorphism by hypothesis, so p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. □

3.2.7 Remark. Note the previons lemma and the remark just before did not use the flatness of K^*.

3.2.8 Lemma. *Let $q : \mathcal{M}(\mathcal{D}) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ and $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be morphisms of k-affinoid spaces.*

1. *Assume that p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ (e.g. flat) and q is finite. Then $p \circ q$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.*
2. *Assume that there exist a G-covering $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcup_{j\in J} \mathcal{M}(\mathcal{B}_j)$ of $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ by a finite number of affinoid domains such that for all $j \in J$, the induced arrow $\mathcal{M}(\mathcal{B}_j) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Then p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.*
3. *Assume that p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ and q satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$. Then $p \circ q$ satisfies $\mathcal{R}_A$.*

Proof. Let K^* be a finite complex of finitely generated flat A-modules and φ a quasi-isomorphism $\varphi : K^* \to C^*$ of complexes of $\mathcal{A}$-modules.

For the first point, we have a homomorphism $\varphi_{\mathcal{B}} : K\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B} \to C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ and by flatness of p and remark 3.2.5, this arrow induces an isomorphism $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ for all $n \in \mathbb{Z}$. Now we can apply 3.2.2 to the complex $K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ and $C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ over $\mathcal{B}$, to obtain an isomorphism $H^n((K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D}) \to H^n((C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \otimes_{\mathcal{B}} \mathcal{D})$, and since K^i is a finite $\mathcal{A}$-module for all $i \in \mathbb{Z}$ and $C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}$ is noetherian and q is finite, we obtain an isomorphism $H^n((K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{D}) \to H^n((C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{D})$, and this shows that $p \circ q$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

For the second point, we have an isomorphism $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\bigoplus_{j\in J}\mathcal{B}_j) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\bigoplus_{j\in J}\mathcal{B}_j)$. Since cohomology and completed tensor product commute with finite direct sums and the affinoid domain inclusion $\mathcal{M}(\mathcal{B}_i) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$ is flat, we can use 3.1.2 to get an isomorphism $H^n(K^*)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \bigoplus_{j\in J}\mathcal{B}_i \to H^n(C^*)\hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \bigoplus_{j\in J}\mathcal{B}_i$. By flatness of the morphism $\mathcal{M}(\bigoplus_{j\in J}\mathcal{B}_j) \to \mathcal{M}(\mathcal{B})$, and descent proposition 3.11 of [15], we deduce that the map $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$ is an isomorphism, and p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

For the last point, since p satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$, we have an isomorphism $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B})$, and this show that the morphism of complexes of $\mathcal{B}$-modules $\varphi_{\mathcal{B}}$ induce an isomorphism on cohomology, so since q satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$, we have an isomorphism $H^n(K^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{D}) \to H^n(C^*\hat{\otimes}_{\mathcal{A}}\mathcal{B}\hat{\otimes}_{\mathcal{B}}\mathcal{D})$ so $p \circ q$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. □

3.2.1 Theorem. *Let L be a non-archimedean field extension of k, and let $\mathcal{B}$ be an L-affinoid algebra. Then for every k-affinoid algebra and every morphism $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ of analytic spaces, p satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. In particular, for every proper $\mathcal{A}$-space X, and every coherent sheaf $\mathcal{F}$ on it that is flat over $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, there exist a finite complex of finite and projective $\mathcal{A}$-modules K^* such that for every $\mathcal{A}$-algebra $\mathcal{B}$ as above, we have an isomorphism $H^n(K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}) \to H^n(X_{\mathcal{B}}, \mathcal{F}_{\mathcal{B}})$.*

Proof. The morphism p can be written as the composition $\mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_L) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$, and $\mathcal{M}(\mathcal{A}_L) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$ by 3.2.6 so using 3.2.8, we can assume that $L = k$, so we can assume that $\mathcal{B}$ is k-affinoid.

Let $p : \mathcal{M}(\mathcal{B}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a morphism of k-affinoid spaces, and let $y \in \mathcal{B}$. By corollary 4.7 of [25], there exist an affinoid neighboorhood V_y of y in $\mathcal{M}(\mathcal{B})$, a relatively smooth $\mathcal{A}$-space T_y, an affinoid domain W_y of T_y and a finite morphism $V_y \to W_y$ such that the restriction $p_{|V_y}$ can be written as the composition $V_y \to W_y \to T_y \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$.

We can extract a finite G-covering $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcup_{i\in I} V_i$ of $\mathcal{M}(\mathcal{B})$ from the G-covering $\mathcal{M}(\mathcal{B}) = \bigcup_{y\in\mathcal{M}(\mathcal{B})} V_y$ and by part 2 of lemma 3.2.8, it is sufficient to show that each restriction $p_{|V_i} \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. Since $V_i \to W_i$ is finite, by remark 3.2.4, it satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{O}(W_i)}$ and since $W_i \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ is flat, by remark 3.2.5, it satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. By the third point of lemma 3.2.8, we have that $V_i \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$. □

3.2.9 Remark. Let $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ be a k-affinoid spaces and $s \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Then we can identifie $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s))$ with a rigid point of $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(s)})$, and write the inclusion $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ as a closed immersion $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)) \to \mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(s)})$ followed by a base field extension morphism $\mathcal{M}(\mathcal{A}_{\mathcal{H}(s)}) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$. These two morphism satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}_{\mathcal{H}(s)}}$ (resp the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$), so by lemma 3.2.8, the composition $\mathcal{M}(\mathcal{H}(s)) \to \mathcal{M}(\mathcal{A})$ satisfies the property $\mathcal{R}_{\mathcal{A}}$.

In particular, for any proper space X over $\mathcal{M}(\mathcal{A})$, any flat coherent sheaf $\mathcal{F}$ over X and any $s \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, there exist a finite complex K^* of finite and projective $\mathcal{A}$-modules K^* such that we have an isomorphism $H^n(K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) \to H^n(X_s, \mathcal{F}_s)$. This remark led us to the following corollary that was stated without proof in corollary 3.3.11 of [4].

3.2.10 Corollary. *Let $f : X \to S$ be a proper morphism of k-analytic spaces, and let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X which is flat over S. Then :*

1. *for all $p \geq 0$ and $n \geq 0$, the set $\{s \in S | \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s) \geq n\}$ is a Zariski-closed subset of S.*

2. *if X is good then the Euler characteristic $\chi : X \to \mathbb{Z}$ defined by*

$$s \mapsto \chi(\mathcal{F}_s) := \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s) \tag{3.2.0.0.1}$$

is G-locally (and locally) constant on S.

Proof. Both result are G-local on S so we can assume that $S = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ is k-affinoid and X is a proper $\mathcal{A}$-space. By the previous remark, there exist a finite complex K^* of finite and projective $\mathcal{A}$-modules K^* such that we have an isomorphism $H^n(K^* \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) \to H^n(X_s, \mathcal{F}_s)$. For $p \in \mathbb{Z}$, denote by $\delta^p : K^p \to K^{p+1}$ the p-th differential of the complex K^*. Then for all $s \in S$ we have the equality :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s) &= \dim_{\mathcal{H}(s)} \operatorname{Ker}(\delta^p \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) - \dim_{\mathcal{H}(s)} \operatorname{Im}(\delta^{p-1} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) \\ &= \dim_{\mathcal{H}(s)} (K^p \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) - \dim_{\mathcal{H}(s)} \operatorname{Im}(\delta^p \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) - \dim_{\mathcal{H}(s)} \operatorname{Im}(\delta^{p-1} \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s)) \end{aligned} \tag{3.2.0.0.2}$$

Now $s \mapsto \dim_{\mathcal{H}(s)} \operatorname{Im}(\delta^p \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s))$ is a lower semicontinous function for the Zariski topology on S because the locus where this dimension is less than a number N is the Zariski closed subset defined by the vanishing of some finite number of minor of the matrix $K^p \to K^{p+1}$, so $s \mapsto \dim_{\mathcal{H}(s)} H^p(X_s, \mathcal{F}_s)$ is upper semicontinuous for the Zariski topology and this shows the first point.

For the second point, using 3.2.0.0.2, we have for all $s \in S$ the equality

$$\chi(\mathcal{F}_s) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \dim_{\mathcal{H}(s)} (K^p \hat{\otimes}_{\mathcal{A}} \mathcal{H}(s))$$

which is G-locally constant on S since K^p is flat over $\mathcal{A}$ using lemma 4.1.14 of [20]. $\square$

Bibliographie

[1] « Application des espaces de Berkovich ». In : URL : https://mathoverflow.net/questions/199889/applications-of-berkovich-spaces.

[2] Vladimir G Berkovich. « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces ». In : *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques* 78.1 (1993), p. 5-161.

[3] Vladimir G Berkovich. « Smooth p-adic analytic spaces are locally contractible ». In : *Inventiones mathematicae* 137.1 (1999), p. 1-84.

[4] Vladimir G Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*. 33. American Mathematical Soc., 2012.

[5] Vladimir G. Berkovich. « Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces ». en. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 78 (1993), p. 5-161.

[6] Siegfried Bosch et Ulrich Görtz. « Coherent modules and their descent on relative rigid spaces ». In : *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1998.495 (10 Feb. 1998), p. 119-134. DOI : https://doi.org/10.1515/crll.1998.014. URL : https://www.degruyter.com/view/journals/crll/1998/495/article-p119.xml.

[7] Siegfried Bosch, Ulrich Güntzer et Reinhold Remmert. *Non-Archimedean analysis, volume 261 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. 1984.

[8] Siegfried Bosch et Werner Lütkebohmert. « Formal and rigid geometry. II : Flattening techniques ». In : *Mathematische Annalen* 296.3 (1993), p. 403-429.

[9] N Bourbaki. *Eléments de mathématique. Topologie algébrique*. 2016.

[10] JWS Cassels et A Fröhlich. *Algebraic number theory, London, 1986*.

[11] BRIAN Conrad. *Moishezon spaces in rigid geometry*. 2007.

[12] Brian Conrad. « Relative ampleness in rigid geometry ». en. In : *Annales de l'Institut Fourier* 56.4 (2006), p. 1049-1126. DOI : 10.5802/aif.2207. URL : aif.centre-mersenne.org/item/AIF_2006__56_4_1049_0/.

[13] Brian Conrad et Michael Temkin. *Descent for non-archimedean analytic spaces.* 2019. arXiv : 1912.06230 [math.AG].

[14] Brian Conrad et Michael Temkin. « Non-Archimedean analytification of algebraic spaces ». In : *arXiv preprint arXiv :0706.3441* (2007).

[15] Mathieu Daylies. « Descente fidèlement plate et algébrisation en géométrie de Berkovich ». In : *arXiv preprint arXiv :2103.10490* (2021).

[16] Antoine Ducros. « About Hrushovski and Loeser's work on the homotopy type of Berkovich spaces ». In : *Nonarchimedean and Tropical Geometry.* Springer, 2016, p. 99-131.

[17] Antoine Ducros. « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich ». In : *à paraître dans Compositio Mathematica* (2021).

[18] Antoine Ducros. « Dévisser, découper, éclater et aplatir les espaces de Berkovich ». In : *Compositio Mathematica* 157.2 (2021), p. 236-302.

[19] Antoine Ducros. « Espaces analytiques p-adiques au sens de Berkovich ». In : *Séminaire Bourbaki* 2005 (2006), p. 137-176.

[20] Antoine Ducros. « Families of Berkovich spaces ». In : *Astérisque* 400 (2018), p. vii+262. issn : 0303-1179.

[21] Antoine Ducros. « La structure des courbes analytiques ». In : *Preliminary version available at http ://webusers. imj-prg. fr/˜ antoine. ducros/livre. html* (2014).

[22] Antoine Ducros. « Les espaces de Berkovich sont excellents ». In : *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 59.4 (2009), p. 1443-1552. issn : 0373-0956. url : http://aif.cedram.org/item?id=AIF_2009__59_4_1443_0.

[23] Antoine Ducros. « Les espaces de Berkovich sont excellents ». In : *Annales de l'institut Fourier.* T. 59. 4. 2009, p. 1443-1552.

[24] Antoine Ducros. « Parties semi-algébriques d'une variété algébrique p-adique ». In : *manuscripta mathematica* 111.4 (2003), p. 513-528.

[25] Antoine Ducros. « Variation de la dimension relative en géométrie analytique p-adique ». In : *Compositio Mathematica* 143.6 (2007), p. 1511-1532. doi : 10.1112/S0010437X07003193.

[26] Jean Giraud. *Méthode de la descente.* fr. Mémoires de la Société Mathématique de France 2. Société mathématique de France, 1964. doi : 10.24033/msmf.2. url : www.numdam.org/item/MSMF_1964__2__R3_0/.

[27] Alexander Grothendieck. « Éléments de géométrie algébrique : IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas, Quatrième partie ». fr. In : *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 32 (1967), p. 5-361. url : www.numdam.org/item/PMIHES_1967__32__5_0/.

[28] Alexandre Grothendieck et Michel Demazure. *Schémas en groupes*. Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1963.

[29] Laurent Gruson. « Théorie de Fredholm p-adique ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 94 (1966), p. 67-95.

[30] Laurent Gruson et Michel Raynaud. « Criteres de platitude et de projectivite techniques de ». In : *Inventiones mathematicae* 13 (1971), p. 1-89.

[31] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. T. 52. Springer Science & Business Media, 2013.

[32] Ehud Hrushovski et François Loeser. « Non-Archimedean Tame Topology and Stably Dominated Types (AM-192) ». In : *Non-Archimedean Tame Topology and Stably Dominated Types (AM-192)*. Princeton University Press, 2016.

[33] Ehud Hrushovski, François Loeser et Bjorn Poonen. « Berkovich spaces embed in Euclidean spaces ». In : *L'Enseignement Mathématique* 60.3 (2015), p. 273-292.

[34] Luc Illusie. « Alexandre Grothendieck, magicien des foncteurs ». In : URL : `https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/Magicien.pdf`.

[35] Mattias Jonsson. « Berkovich spaces ». In : URL : `https://web.math.princeton.edu/~takumim/Berkovich.pdf`.

[36] Reinhardt Kiehl. « Ausgezeichnete Ringe in der nichtarchimedischen analytischen Geometrie. » In : (1969).

[37] Reinhardt Kiehl. « Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie ». In : *Inventiones mathematicae* 2.3 (1967), p. 191-214.

[38] Serge Lang. *Algebra*. T. 211. Springer Science & Business Media, 2012.

[39] Qing Liu. « Sur les espaces de Stein quasi-compacts en géométrie rigide ». In : *Tohoku Math. J. (2)* 42.3 (1990), p. 289-306. DOI : `10.2748/tmj/1178227611`. URL : `https://doi.org/10.2748/tmj/1178227611`.

[40] Marco Maculan et Jérôme Poineau. *Notions of Stein spaces in non-archimedean geometry*. 2018. arXiv : `1711.04008 [math.AG]`.

[41] Vlere Mehmeti. « Patching on Berkovich Spaces and the Local-Global Principle ». Thèse de doct. Normandie, 2019.

[42] David Mumford, Chidambaran Padmanabhan Ramanujam et Jurij Ivanovič Manin. *Abelian varieties*. T. 3. Oxford university press Oxford, 1974.

[43] Jürgen Neukirch. *Algebraic number theory*. T. 322. Springer Science & Business Media, 2013.

[44] Jérôme Poineau. « Les espaces de Berkovich sont angéliques ». In : *Bulletin de la Société Mathématique de France* 141.2 (2013), p. 267-297.

[45] Jérôme Poineau. « Raccord sur les espaces de Berkovich ». In : *Algebra & Number Theory* 4.3 (2010), p. 297-334.

[46] Jérôme Poineau. « SUR LES COMPOSANTES CONNEXES D'UNE FAMILLE D'ESPACES ANALYTIQUES-ADIQUES ». In : *Forum of Mathematics, Sigma.* T. 2. Cambridge University Press. 2014.

[47] Bertrand Rémy, Amaury Thuillier et Annette Werner. *Bruhat-Tits Theory from Berkovich's Point of View.
I - Realizations and Compactifications of Buildings.* 2009. arXiv : `0903.1245 [math.AG]`.

[48] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1).* T. 3. Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)]. Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin ; MR0354651 (50 #7129)]. Société Mathématique de France, Paris, 2003, p. xviii+327. isbn : 2-85629-141-4.

[49] Jean-Pierre Serre. « Géométrie algébrique et géométrie analytique ». In : *Annales de l'institut Fourier.* T. 6. 1956, p. 1-42.

[50] The Stacks project authors. *The Stacks project.* `https://stacks.math.columbia.edu`. 2021.

[51] Michael Temkin. « A new proof of the Gerritzen-Grauert theorem ». In : *Mathematische Annalen* 333.2 (2005), p. 261-269.

[52] Michael Temkin. « Introduction to Berkovich analytic spaces ». In : *Berkovich spaces and applications.* T. 2119. Lecture Notes in Math. Springer, Cham, 2015, p. 3-66. doi : `10.1007/978-3-319-11029-5_1`. url : `https://doi.org/10.1007/978-3-319-11029-5_1`.

[53] Michael Temkin. « On local properties of non-Archimedean analytic spaces ». In : *Mathematische Annalen* 318.3 (2000), p. 585-607.

[54] Michael Temkin. « On local properties of non-Archimedean analytic spaces II ». In : *Israel Journal of Mathematics* 140.1 (2004), p. 1-27.

[55] Angelo Vistoli. « Notes on Grothendieck Topologies, Fibred Categories and Descent Theory ». In : *Grothendieck's FGA explained, Math. Surveys and Monographs of the AMS* 123 (2005).