



**Simulation haute-fidélité de la transition vers la
turbulence de couches limites hypersoniques.
Contributions à l'étude des effets des rugosités et des
structures non-modales**

Clément Caillaud

► **To cite this version:**

Clément Caillaud. Simulation haute-fidélité de la transition vers la turbulence de couches limites hypersoniques. Contributions à l'étude des effets des rugosités et des structures non-modales. Autre. ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers, 2022. Français. NNT : 2022ESMA0014 . tel-03967813

HAL Id: tel-03967813

<https://theses.hal.science/tel-03967813>

Submitted on 1 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée par
Clément CAILLAUD

SIMULATION HAUTE-FIDÉLITÉ DE LA TRANSITION VERS LA TURBULENCE DE COUCHES LIMITES HYPERSONIQUES

Contributions à l'étude des effets des rugosités et des structures non-modales

Pour l'obtention du grade de
DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
DE MÉCANIQUE ET D'AÉROTECHNIQUE

(Diplôme National - Arrêté du 25 Mai 2016)

École Doctorale
Sciences et Ingénierie des Matériaux, Mécanique, Énergétique

Secteur de Recherche
Mécanique des milieux fluides

Sous la direction de
Eric Goncalves & Ludovic Hallo

Encadrée par
Guillaume Lehnasch

- JURY -

PRÉSIDENT

M. Lutz LESSCHAFFT - *Directeur de recherche,*

École Polytechnique, CNRS

RAPPORTEURS

Mme Paola CINNELLA - *Professeure,*

Institut Jean le Rond d'Alembert, Sorbonne

M. Jean-Christophe ROBINET - *Professeur,*

Laboratoire DYNFLUID, ENSAM

MEMBRES

M. Eric GONCALVES - *Professeur,*

Institut Pprime, ISAE-ENSMA

M. Ludovic HALLO - *Directeur de recherche,*

CEA-CESTA

M. Peter JORDAN - *Directeur de recherche,*

Institut Pprime, CNRS

M. Guillaume LEHNASCH - *Maitre de Conférence,*

Institut Pprime, ISAE-ENSMA

Mme Taraneh SAYADI - *Chargée de Recherche,*

Institut Jean le Rond d'Alembert, CNRS



RÉSUMÉ

Les objets hypersoniques en vol dans l'atmosphère se déplacent à des vitesses importantes, générant des efforts thermiques extrêmes et posant de véritables limites technologiques. À ces vitesses, lorsque de la turbulence se déclenche le long de la paroi, le flux de chaleur imposé peut augmenter d'un facteur trois à huit, mettant en jeu l'intégrité du véhicule. Pour réduire ces efforts thermiques les objets hypersoniques présentent des géométries courbes et des protections thermiques ablatives qui induisent la présence de nombreuses rugosités. Ces effets géométriques augmentent significativement la complexité du processus de transition et son étude. Ainsi, dans l'objectif d'optimiser la conception des véhicules hypersonique, la compréhension de ces mécanismes de transition à la turbulence de la couche limite est essentielle.

Devant ces considérations, ce travail de recherche présente un ensemble d'outils et de résultats permettant de simuler et décrire les mécanismes physiques en jeux dans le déclenchement de la turbulence. Trois années de réflexions ont amené à la construction d'un code de simulation haute-fidélité efficace, permettant de réaliser des calculs précis d'écoulements hypersoniques, multiespèces, sur des géométries courbes. Un jeu de méthodes numériques dédié à l'étude des dynamiques linéaires, non-linéaires et des opérateurs linéaires globaux a été intégré et sert à apporter des informations sur la physique observée.

Avec ces outils les simulations DNS réalisées se sont intéressées aux scénarios « naturels » de transition à la turbulence pour des couches limites hypersoniques soumises à des déformations que pourraient induire des rugosités d'ablation ou de la courbure. Ces déformations sont rarement étudiées, bien qu'elles représentent une composante essentielle des écoulements réalistes. Ainsi, la dynamique complexe des scénarios étudiés est décomposée à l'aide d'outils avancés d'analyse de données et de traitement du signal. Cette décomposition met alors en avant les principaux mécanismes physiques en jeu et le chemin suivi par la dynamique de l'écoulement jusqu'à la turbulence.

En conclusion, ces études des effets de déformations ont permis d'apporter des résultats originaux sur la physique fine de la transition à la turbulence hors du cadre canonique. Principalement, des variations importantes du scénario de transition avec la déformation ont été retrouvées. De nombreux modes émergeant du forçage bruit blanc sont identifiés et les effets notables de la déformations sur les étapes de réceptivité, de croissance modale et de non-linéarité des mécanismes de transition sont mis en lumière. Pour ces effets, une première description détaillée des mécanismes en jeu est proposée. Les résultats obtenus soulignent alors la difficulté d'établir un critère général de prédiction de la transition et servent à la compréhension de la dynamique de la couche limite, pour des configurations toujours plus complexes.

REMERCIEMENTS

*J'crois que toi et moi, on a un peu le même problème,
c'est qu'on peut pas vraiment tout miser sur **la** physique.
Surtout toi...*

*Alors si je peux me permettre de te donner un conseil,
c'est : oublies que t'as aucunes chances, vas y fonce !
On sait jamais sur un malentendu ça peut marcher !*

— Jean-Claude Dusse,
(ou un autre thésard, je ne sais plus)

Dans l'aventure pilotée par ce petit système dynamique (fortement non-linéaire) qu'aura été la thèse, je souhaiterai remercier les nombreuses personnes qui ont su me donner les conditions initiales et limites qui auront permis de mener ce travail à son terme en trois ans¹ tout en évitant les attracteurs chaotiques. Parait-il que l'on doit faire assez court, mais en même temps on ne les écrit qu'une seule fois ces remerciements et 3 pages sur 243, c'est 1.235% de la suite, donc ne chipotons pas.

Je souhaiterai tout d'abord remercier mes rapporteurs, Jean-Christophe Robinet et Paola Cinella d'avoir accepté d'évaluer mon travail. Vos lectures éclairées de mon manuscrit et vos commentaires précis m'ont montré de nombreuses nouvelles pistes que j'aimerais emprunter. J'étends également ces remerciements à l'ensemble des membres du Jury, dont Taraneh Sayadi et Lutz Leschafft pour avoir suivi ma présentation puis pour les nombreux échanges constructifs que nous avons eu. Ce fut un réel plaisir de soutenir en votre présence.

Je remercie également mes directeurs Eric et Ludovic pour avoir accepté de diriger cette thèse. Mais aussi d'avoir offert tout le support et l'accueil permettant de mener à bien à la fois les études et la logistique entre le CESTA et Pprime. C'était une organisation difficile avec la distance (puis une petite pandémie mondiale), mais votre soutien a été précieux et a indéniablement permis de mener ce travail à son terme.

D'ailleurs, pour éviter de diverger vers des solutions lointaines, il faut des conditions limites bien posées et un grand numéricien pour les imposer. Je pense que je ne pourrai jamais te remercier assez Guillaume pour tous ces moments passés à discuter, philosopher, se questionner. J'ai apprécié chacun de ces échanges et beaucoup appris de ton expérience. Merci d'avoir pris le temps de me laisser explorer les différentes directions et d'avoir suivi, avec autant d'enthousiasme, ces trois ans². J'espère sincèrement que l'on continuera d'échanger au-delà de cette thèse !

¹ et demi

² et demi

Parfois quand l'on est pris dans un cycle limite, il faut retrouver un point fixe autour duquel l'on retrouve un peu de stabilité. Pour ça je tiens à te remercier Peter de t'être investi autant dans ma thèse alors que rien ne t'y obligeait (et en plus c'était même pas des jets à $M = 0.9$). Merci d'avoir apporté ton expertise et tes idées sur la stabilité lors de nos discussions (et d'avoir la patience de ne pas t'arracher les cheveux lorsque que j'écrivais des trucs un peu approximatifs, promis j'ai progressé). Tout ce que j'ai appris au sein de l'équipe stabilité (et au Clu, et aux Churasco...) m'accompagnera longtemps!

Je tiens à remercier également Eduardo pour avoir fourni tant de réponses optimales à mes questions sur la stabilité et ses méthodes. Pour avoir également partagé tes intuitions sur chaque nouveau problème. Et surtout toujours avoir été si disponible, même si tu avais mille papiers, projets, dossiers, un Benji et bien d'autres choses à faire.

Sachant par ailleurs il n'y a pas de grandes aventures sans grands acolytes je dois les citer! A gauche : nous avons Paul (PhD), la machine du machine learning, avec qui j'ai partagé mon temps à Bordeaux et ailleurs, entre discussions sans fin et soirées non-linéaires, sans cette amitié je n'aurai pu "invoquer le meilleur de moi-même" au 206. Puis à droite, nous avons : Bruno, la seconde fréquence d'une interaction triadique résonnante. Je ne compte plus les retours dans le turbo-van à se retourner l'esprit sur l'art subtil de la stabilité linéaire, dont la plupart des conclusions finissaient autour de 1 (ou 9) Négronis³.

Je remercie également à toutes les personnes rencontrées à Pprime, dans le désordre total : les grands maitres Post-Doc : Igor⁴, Matteo & Ugur. Les nouveaux du Negroni Club : Barbara, Bernardo & Marios. But also the australians mates : Michael, Ravee & Jayson. Et enfin bien sûr, mes camarades du premier jour : Gabriel, Ksenia, Armando, Yann, Di, Arun!

À côté des amis du Labo il y a également tous ceux qui font inlassablement de Poitiers un village où l'on se sent chez soi et que l'on croise chaque samedi au marché. Parmi ces amis, il y a eu mes colocos avec qui j'ai pu partager les dernières années. Tout spécialement les rayonnantes, exceptionnelles, fantastiques : Sanka, Amélie⁵, Queen Pupu et Flocon qui ont participé à rendre chaque journée franchement chouettos ©! Petite pensée également pour Coco à Bordeaux et notre voisinage des plus fascinants! Un mot également pour l'équipe de la CPSSA qui a suivi cette aventure depuis ses débuts et qui seule peut mesurer ma progression en maths.

Comment ne pas remercier ma famille sans qui cette aventure personnelle n'aurait jamais pu se faire. Mon père pour m'avoir transmis sa rigueur, son envie d'aller un peu plus loin et sa maîtrise de l'artisanat, qui quelque part, se retrouve dans la finesse des DNS. Ma mère pour nous avoir toujours ouvert tant de portes sur le monde et ses possibilités en nous soutenant dans tous les instants. Mais aussi ma grand-mère, qui depuis toujours n'a laissé aucune de nos questions sans réponses et a su en générer à chaque fois de nouvelles! Un merci infini à vous. La

³ Je me félicite toujours d'avoir évité la baignade dans le Clain

⁴ *Russian accent* - "Very nice plots"

⁵ Aussi appelée Beyoncé

suite est tournée vers ma sœur⁶ qui elle aussi dans 4 jours terminera une grande étape ! Enfin, un mot pour mes petits frères qui chacun suivent leurs chemins avec une multitude de possibilités, je leur souhaite de découvrir tout autant de choses passionnantes.

Enfin, ces quelques mots pour Laurie, qui chaque fois, a su jouer la note juste, douce ou entraînant et que j'aurai la chance d'entendre encore de nombreuses fois.

Clément, le 26 Septembre 2022

⁶ Dont je dois avouer être secrètement super fier.

Introduction	1
I THÉORIE ET OUTILS	13
1 STABILITÉ ET TRANSITION EN RÉGIME HYPERSONIQUE	15
1.1 Éléments de stabilité	15
1.1.1 Système dynamique et petites perturbations	16
1.1.2 Stabilité linéaire	16
1.1.3 Non-orthogonalité	18
1.1.4 Stabilité locale	20
1.2 Transition de couches limites compressibles	23
1.2.1 Routes vers la turbulence	24
1.2.2 Instabilités modales	25
1.2.3 Instabilités non-modales	29
1.2.4 Instabilité secondaire & interactions	31
1.3 Conclusion intermédiaire	31
2 OUTILS POUR L'ANALYSE NUMÉRIQUE	33
2.1 Équations de Navier-Stokes	34
2.1.1 Variables et adimensionnement	34
2.1.2 Hypothèses sur le mélange de gaz parfaits	35
2.1.3 Système d'équations	36
2.2 Coordonnées généralisées	37
2.2.1 Projection des équations	39
2.2.2 Formulation discrète et conservativité	41
2.3 Construction du code DNS CurviCREAMS	44
2.3.1 Schémas aux différences finies explicites	45
2.3.2 Filtres numériques	48
2.3.3 Intégration en temps	49
2.3.4 Schémas à capture de chocs	50
2.3.5 Construction d'un senseur amélioré	54
2.3.6 Conditions de paroi en coordonnées généralisées	55
2.4 Linéarisation discrète	56
2.4.1 Intégration dans le code non-linéaire	57
2.4.2 Calcul de l'opérateur linéaire et son application	58
2.4.3 Remarques sur l'implémentation	59
2.5 Validation	60
2.5.1 Réflexion d'un pulse acoustique	62
2.5.2 Tube à choc de Sod	64
2.5.3 Choc-onde d'entropie - Cas de Shu & Osher	66
2.5.4 Interaction Shock-Vortex	67
2.5.5 Cylindre non-visqueux à Mach 3	70
2.5.6 Taylor-Green Vortex	72
II SIMULATIONS ET ANALYSES	77
3 COUCHE LIMITE DE PLAQUE PLANE	79
3.1 Description générale	79
3.1.1 Configuration	81
3.1.2 Écoulement de base	84

3.2	Étude de stabilité locale	84
3.2.1	Problème spatial	85
3.2.2	Spectres et évolution des modes	86
3.3	DNS du forçage par bruit blanc	92
3.3.1	Procédure de forçage	93
3.3.2	Échantillonnage	94
3.3.3	Champs linéaires et non-linéaires	95
3.4	Décomposition de la dynamique	98
3.4.1	Évolution des modes de Fourier	100
3.4.2	Extraction des modes SPOD dominants	103
3.4.3	Amplification spatiale des modes	107
3.5	Étude des modes de l'instabilité secondaire	109
3.5.1	Effet de l'écoulement moyen sur la stabilité locale	109
3.5.2	Analyse des interactions triadiques	111
3.5.3	Génération de streaks	114
3.6	Conclusion sur le scénario de transition	114
4	EFFETS DU FORÇAGE SUR LE SILLAGE D'UNE RUGOSITÉ	117
4.1	Description générale et positionnement	117
4.2	Validation du code DNS sur un cas d'application	120
4.2.1	Géométrie et méthodes numériques	120
4.2.2	Solution stationnaire	122
4.3	Rugosité isolée à $Re_{\delta^*} = 28000$	124
4.3.1	Configuration générale	124
4.3.2	Géométrie et méthodes numériques	125
4.4	Écoulement de base	126
4.4.1	Déformation de la couche limite	127
4.4.2	Propriétés de stabilité connues	131
4.5	Réponse à un forçage par bruit blanc	133
4.5.1	Champs de perturbations	134
4.5.2	Décomposition du sillage	135
4.6	Discussion et perspectives	143
5	CROISSANCE NON-LINÉAIRE DE STREAKS OPTIMALES	145
5.1	Streaks en régime hypersonique	145
5.2	Définition du problème	148
5.2.1	Terminologie	148
5.2.2	Domaine de calcul et paramètres	149
5.3	Écoulement de base	152
5.3.1	Perturbations optimales	152
5.3.2	DNS non-linéaire des perturbations optimales	154
5.3.3	Caractérisation des écoulements de base	156
5.4	Réponse à un forçage par bruit blanc	158
5.4.1	Champs instantanés	159
5.4.2	Champs de perturbations	160
5.5	Discussion	165
6	STABILITÉ ET DYNAMIQUE DES STREAKS	167
6.1	Stabilité spatiale 2D des champs de base	168

6.1.1	Méthodologie développée	168
6.1.2	Effet d'une petite déformation	170
6.1.3	Évolution des modes SM et FM long du domaine	174
6.2	Stratégie de décomposition	178
6.2.1	Analyse de Fourier et formalisme de Floquet	178
6.2.2	Formulation SPOD pour les structures L -périodiques	181
6.3	Décomposition de l'écoulement	186
6.3.1	Réponse linéaire fin de domaine	186
6.3.2	Modes Floquet-SPOD dominants	187
6.4	Dynamique non-linéaire	190
6.4.1	Évolution des spectres en régime non-linéaire	191
6.4.2	Contenu fréquentiel avant la dynamique non-linéaire	193
6.4.3	Évolution des modes dominants	194
6.4.4	Scénarios de transition suggérés	196
6.5	Discussion sur la dynamique des streaks	200
	Conclusions & perspectives	203
III	ANNEXES	209
A	POST-TRAITEMENT PARALLÈLE ET GRAPHE DE TÂCHES	211
A.1	Données structurées et algorithme	211
A.2	Construction d'un graphe de tâches	212
A.3	Parallélisation du graphe	213
B	SPECTRAL PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION	217
	BIBLIOGRAPHIE	219

INTRODUCTION

L'ensemble de cette étude est porté par la motivation de mieux comprendre les spécificités du vol hypersonique, avec pour finalité l'optimisation de ces systèmes complexes que sont les véhicules de rentrée atmosphérique. Les conditions extrêmes engendrées du point de vue de l'aérodynamique posent un défi d'ingénierie multidisciplinaire auquel l'analyse fine de la physique permet d'apporter certains éléments de solution. Nous résumons ici quelques avancées clés depuis le premier vol hypersonique et présentons certains des défis actuels qui ancreront ce manuscrit dans un contexte.

UNE DÉFINITION DU RÉGIME HYPERSONIQUE

Le régime hypersonique se manifeste lorsque des effets de la très haute vitesse s'accroissent dans l'écoulement. Ces effets comprennent notamment un échauffement extrême de l'air autour des véhicules et des comportements aérothermiques spécifiques. Cependant, il n'existe pas de nombre de Mach fixe pour lequel l'écoulement devient soudainement hypersonique et la définition varie selon la perspective d'étude. Du point de vue de l'aérodynamique et de la transition, qui sera le nôtre, les effets du vol hypersonique sont visibles à partir de Mach 5. En pratique, ce régime est rencontré pour des véhicules qui se déplacent à plusieurs kilomètres par seconde dans l'atmosphère. Le développement de tels objets est complexe et a représenté une aventure technologique et scientifique considérable dont nous rappelons quelques étapes clés ci-dessous.

VOL HYPERSONIQUE : HISTORIQUE ET APPLICATIONS

Le vol des premiers véhicules hypersoniques peut être retracé à la sortie de la seconde guerre mondiale, où sont enregistrées les premières manœuvres de rentrée atmosphérique d'objets balistiques de portée intermédiaire évoluant à la limite de l'espace⁷. Cependant, les premières véritables applications émergent lors de la Guerre Froide (1950-1990), où la course à l'espace entre le bloc soviétique et occidental donne naissance à la dualité "programme spatial - programme stratégique". Cette course initie le développement des technologies de rentrée atmosphérique et donc du vol hypersonique.

Le premier vol d'un véhicule de rentrée atmosphérique habité est attribué à la mission *Vostok-1* de la capsule soviétique *Vostok-3KA* pilotée par Yuri Gagarine (1961). L'architecture de la capsule *Vostok-3KA* est rustique, mais comprend déjà deux briques technologiques essentielles à savoir : un bouclier thermique et une

⁷ 1949 - vol du V2 modifié "WAC-Corporal" aux USA, vitesse enregistrée lors de la rentrée atmosphérique : 2.2 km s^{-1}



(a) Vostok 3KA - premier vol habité en 1961



(b) Crew Dragon - premier vol habité 2020

FIGURE 0.1 : Résumé visuel de 59 ans de développement technologique pour la rentrée atmosphérique civile. (Images en licence libre - Wikipedia.)

géométrie arrondie, permettant de supporter les efforts aérothermiques. Dans la suite de ce premier vol historique, nous pouvons évoquer le programme soviétique *Luna* qui réussit une série de missions non habitées autour de la Lune, dont son premier survol (1959) et le premier atterrissage "en douceur" à sa surface (1966). En compétition, les programmes américains *Mercury* et *Gemini*⁸ ont permis de préparer le programme *Apollo* ayant mené un total de 12 hommes sur la Lune en 6 missions avec un premier pas en 1969.

En parallèle de ces programmes civils, sont développés les programmes stratégiques et donc les missiles balistiques intercontinentaux (ICBM). Ces derniers nécessitent également le développement de technologies spécifiques à la rentrée atmosphérique et au vol hypersonique militaire. Ils peuvent être regroupés avec les programmes de rentrée atmosphérique civils dans la catégorie des véhicules de rentrée atmosphérique balistiques, en opposition aux véhicules de rentrée atmosphérique planants.

Ces derniers sont issus du développement de véhicules spatiaux plus complexes dont le meilleur exemple reste les navettes spatiales des programmes américain⁹ (*Columbia*, *Discovery*...) issues du prototype *Dyna-Solar* et les navettes Soviétiques¹⁰ (*Buran*) issues du programme *BOR*. Nous pouvons également citer l'ambitieux projet européen *Hermes* couplé au lanceur *Ariane*, ayant malheureusement été annulé. Ces navettes spatiales introduisent d'autres briques technologiques constituant les objets hypersoniques modernes, nous pouvons citer notamment les géométries de voilure, certains types de protections thermiques et de nouvelles trajectoires.

Ces programmes historiques nous renvoient au contexte actuel des véhicules de rentrée atmosphérique et par extension celui de l'ensemble des véhicules hypersoniques. Depuis 2010, un regain d'intérêt marqué peut être observé pour ces

⁸ Il peut aussi être intéressant de mentionner les vols du prototype *X15* réalisé sur la même période et les technologies de vol hypersonique planant associées

⁹ Six navettes spatiales ont été produites et cinq ont eu une vie opérationnelle jusqu'à la fin du programme en 2011

¹⁰ Douze navettes spatiales soviétiques ont été produites, seule l'une d'entre elles a effectué un vol spatial

technologies, à la fois pour leurs aspects militaires et civils. La succession de programmes plus ou moins continus a mené à des progrès importants.

Aujourd'hui un exemple - moderne - de capsule de rentrée atmosphérique balistique civile est la capsule *Crew Dragon* de *SpaceX*. Pour les véhicules planants, nous pouvons citer entre autres, le programme civil européen *Space Rider* issu du prototype *IXV* et devant voler en 2023, ou plus récemment, le vaisseau *SUSIE* de l'industriel *ArianeGroup*. En supplément de ces véhicules spatiaux dédiés à l'orbite terrestre, des applications de rentrée atmosphérique sur d'autres planètes existent et posent des défis encore différents. Nous pouvons mentionner la rentrée atmosphérique réussie de la récente mission *Mars 2020* en février 2021.

En parallèle, de nouveaux concepts de véhicules militaires hypersoniques sont opérationnels ou en développement (HENROTIN, 2021 ; SPEIER et al., 2017). Nous pouvons évoquer le vol de planeurs hypersoniques (HGV¹¹) opérationnels tel que le *DF-17* chinois, ou encore l'arrivée de missiles de croisière hypersoniques, équipés de Ramjet ou Scramjets qui évoluent dans l'atmosphère à plus faible altitude ($\text{Alt.} \leq 80\text{km}$). Nous pouvons également relever le programme de la *Space Force* américaine, pour la navette spatiale autonome *X-37B* détenant déjà plusieurs records de durée de missions orbitales.

Le chemin parcouru depuis 1949 est illustré avec la Fig. 0.1. Les développements conséquents et les recherches autour des programmes civils et stratégiques ont introduit une grande partie des technologies constituant l'architecture de véhicules hypersoniques modernes. Cependant, le régime hypersonique continue de poser des défis technologiques majeurs et de nombreuses questions scientifiques demeurent ouvertes.

DÉFIS AÉRODYNAMIQUES

Parmi ces défis, la compréhension et la maîtrise de l'aérodynamique lors d'un vol hypersonique est un enjeu crucial. En effet, à très haute vitesse l'énergie cinétique des objets est telle, que sa dissipation par freinage aérodynamique dans les couches denses de l'atmosphère engendre des températures extrêmes pouvant atteindre plusieurs milliers de degrés, avec des flux de chaleur de l'ordre de la centaine de MW m^{-2} et des pressions allant jusqu'à la centaine de Bars. Le gaz subit alors de nombreuses dissociations et réactions chimiques pouvant générer un plasma chaud hors équilibre. Pour dissiper cette énergie cinétique colossale, les véhicules hypersoniques emploient une géométrie présentant généralement une face avant sphérique, suivie d'un corps conique. Nous présentons ce concept et ses particularités aérodynamiques en Fig. 0.2. Nous pouvons observer le choc détaché typique des pointes avant sphériques, derrière cette onde de choc se trouve la couche de choc, contenant une poche subsonique et une couche d'entropie¹².

¹¹ Hypersonic Glide Vehicle

¹² La couche d'entropie est issue d'une variation du saut d'entropie au travers du choc due à la courbure progressive de ce dernier. La vorticité est accrue dans cette zone (théorème de Crocco) et le profil de l'écoulement dans la couche d'entropie peut présenter un point d'inflexion généralisé (ZHONG et MA, 2006)

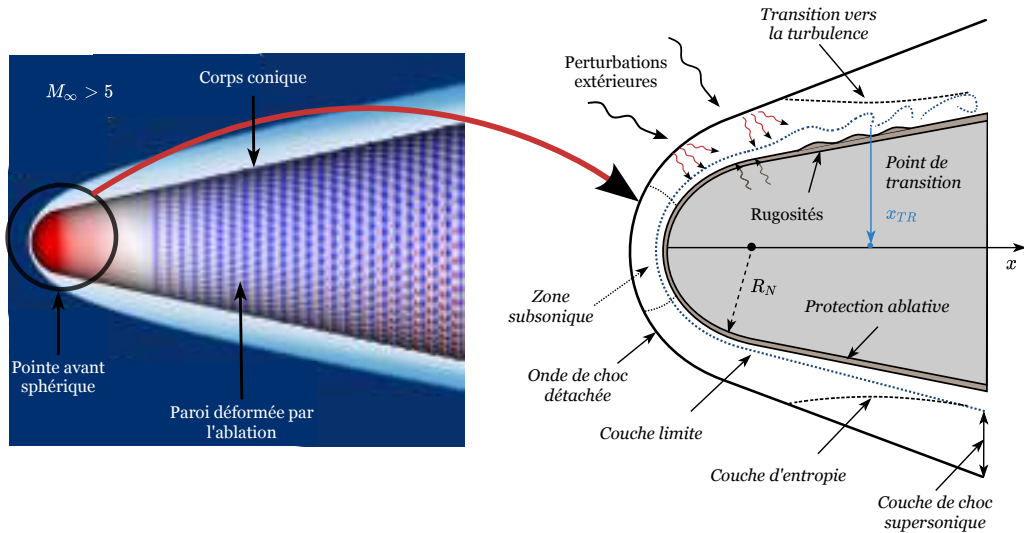


FIGURE 0.2 : Vue générale d'un objet hypersonique avec rugosités d'ablation évoluant à un nombre de Mach $M_\infty = 18$. Champ de nombre de Mach et champ de pression à la paroi (gauche). Représentation schématique de l'écoulement autour de la pointe avant (droite)

Proche de la paroi, nous retrouvons la couche limite, matérialisée en pointillés bleus.

Les efforts aérothermiques sont substantiels sur cette paroi et l'utilisation de systèmes de protections thermiques permet de dissiper le flux de chaleur important. Ces protections thermiques regroupent plusieurs concepts : tuiles réfractaires, transpiration, ablation, etc. Dans le cas de l'ablation, la paroi de l'objet devient chimiquement réactive une fois chauffée par l'écoulement. Les gaz de pyrolyse issus de ces réactions chimiques sont alors soufflés hors du matériau ablatif et créent une couche protectrice de gaz plus froids, éloignant de la paroi l'air chaud de la couche de choc.

Un enjeu dans le dimensionnement de cette protection ablative est de comprendre l'état de la couche limite autour de la paroi du véhicule hypersonique. Le passage de l'état laminaire à turbulent de cette couche limite (Fig. 0.3) entraîne notamment une élévation du flux de chaleur à la paroi pouvant aller d'un facteur trois à huit (SCHNEIDER, 2004). Considérant l'ordre de grandeur des températures en jeu, la transition de la couche limite à la turbulence dicte alors en partie l'état du champ de température à la paroi et devient un phénomène d'étude critique. Autour des véhicules hypersoniques la couche limite est soumise à de nombreuses perturbations pouvant affecter son état et la déstabiliser pour entraîner la turbulence. Ces perturbations peuvent être issues des fluctuations atmosphériques, de la déformation de la paroi suite à l'ablation sous forme de petites rugosités, des réactions chimiques du soufflage, de la pointe avant sphérique et la couche d'entropie, d'effets thermochimiques ou encore de particules... Devant ces nombreux facteurs, la construction de modèles de prédiction de la transition de la couche limite vers la turbulence via des critères est alors un problème aux multiples facettes. De nombreuses revues ont souligné toute la difficulté d'établir un critère général

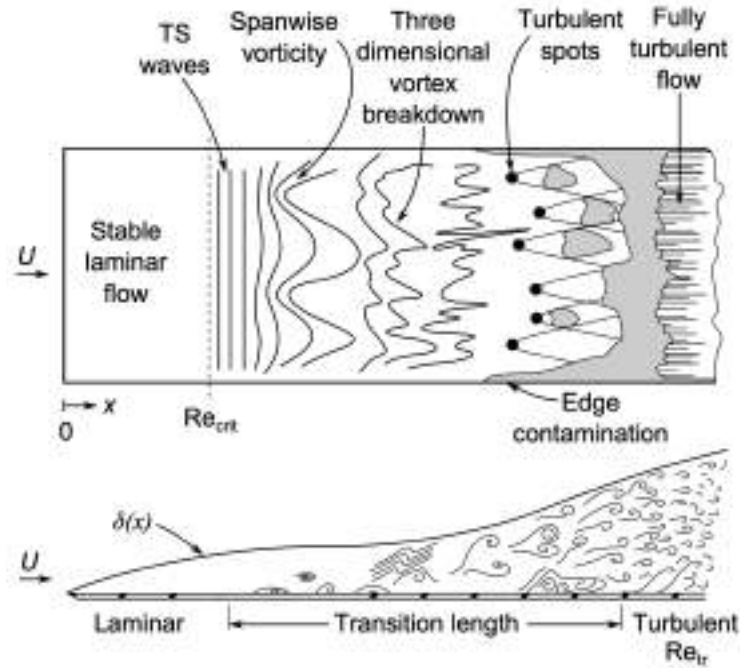


FIGURE 0.3 : Résumé schématisé des différentes étapes de la transition à la turbulence d'une couche limite (incompressible) initialement laminaire et ordonné vers une couche limite turbulente et chaotique. Repris par GROSSIR (2015) depuis WHITE (1991)

de prédiction de la transition (FEDOROV, 2011; MORKOVIN, 1969; REED, SARIC et ARNAL, 1996; RESHOTKO, 1976; SCHNEIDER, 2004; ZHONG et WANG, 2012)

Nous pouvons choisir de nous concentrer sur certains aspects affectant le processus de transition vers la turbulence. Notamment, l'état de surface des objets de rentrée atmosphérique présente de nombreuses rugosités pouvant fortement perturber le processus de transition. Nous en donnons un exemple particulièrement marquant en Fig. 0.4, où l'on peut observer l'effet d'un défaut de paroi sur le fuselage avant de la navette *Endeavour*. Le défaut introduit une rugosité produisant un sillage turbulent sur toute la partie inférieure et produit un effort aérothermique pouvant être conséquent.

Sur les parois d'objets hypersoniques, ces rugosités sont nombreuses. La compréhension du couplage de leurs effets à ceux la géométrie sphérique de la pointe avant constitue un champ de recherche actif. Nous présentons ces problématiques plus en détail par la suite.

POINTE AVANT SPHÉRIQUE ET RUGOSITÉS

L'étude expérimentale de la transition vers la turbulence autour de géométries de pointe avant sphériques de différents rayons a mis en évidence une dynamique du processus de transition méconnue. Cette dynamique peut être décomposée en deux parties.

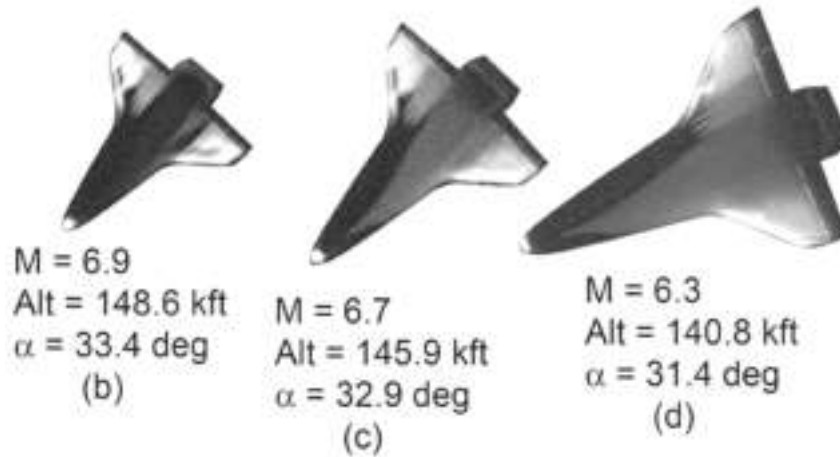


FIGURE 0.4 : Observation par caméra infrarouge de la température de paroi de la navette spatiale *Endeavour* à différents instants de sa rentrée atmosphérique. La zone turbulente issue en partie de rugosités isolées est en clair et souligne les zones de températures élevées. Issu de HORVATH et al. (2012)

- Les expériences de STETSON (1983) ont montré que l'augmentation du rayon du nez R_N et le nombre de Reynolds Re_{R_N} associé (Fig. 0.2) d'un nez conique reculait le point du début de la transition à la turbulence x_{Tr} et le nombre de Reynolds associé $Re_{x_{Tr}}$ vers l'arrière du cône (l'aval). L'augmentation de R_N avait alors un effet stabilisant bénéfique. Cet effet stabilisant est la somme de deux phénomènes, premièrement le gradient de pression favorable de la pointe avant sphérique stabilise l'écoulement. Deuxièmement, la présence de la couche d'entropie au-dessus de la couche limite possède également un effet stabilisant sur les instabilités modales¹³ de la couche limite hypersonique (ANDERSON JR., 2006). De multiples résultats expérimentaux liés à ce problème sont présentés en Fig. 0.6. Cependant, en dépassant une valeur critique de Re_{R_N} , une tendance inverse a été observée et le point de transition x_{TR} revient rapidement vers l'avant du cône (l'amont) lorsque l'on poursuit l'augmentation de R_N . Cet effet déstabilisant à une valeur critique de Re_{R_N} va alors à l'encontre de la prédiction théorique sur l'étude des géométries sphériques. Cette prédiction indique que pour des grandes valeurs de R_N les instabilités modales sont stables et l'augmentation de Re_{R_N} ne peut être que stabilisante. Ce phénomène pour lequel le passage d'un Re_{R_N} critique déstabilise l'écoulement a été nommé **transition reversal**.
- En complément du transition reversal, il a été remarqué que pour des valeurs plus importantes encore de Re_{R_N} , le point de transition x_{Tr} se déplace directement sur la partie sphérique de la pointe avant, malgré la nature modalement stable de l'écoulement dans cette région. Ce phénomène a été nommé **blunt body paradox**.

L'étude conjointe de ces deux problèmes par des approches expérimentales et numériques depuis 1983 a permis de donner quelques éléments de réponse. Pour

¹³ Par suppression de la zone de guide d'onde acoustique de la couche limite - voir chapitre suivant.

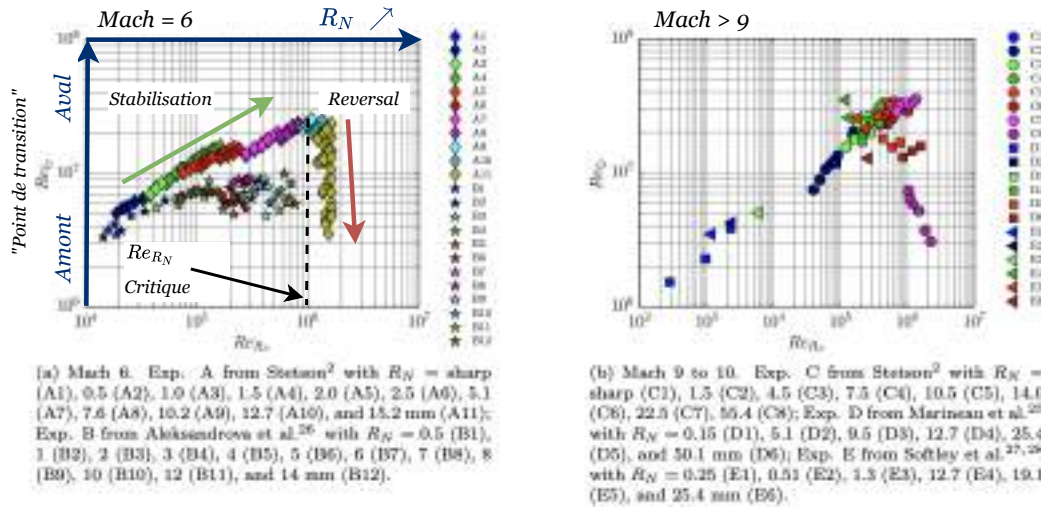


FIGURE 0.5 : Compilation de divers résultats expérimentaux de transition sur des sphère-cônes dans un diagramme $(Re_{R_N}, Re_{x_{tr}})$. Tendance pour des nombres de Mach modérés (gauche) et "élevés" (droite). Adapté de (PAREDES et al., 2018).

le blunt-body paradox, RESHOTKO et TUMIN (2000) ont mis en avant la possibilité d'une croissance non modale autour de la zone subsonique de la pointe avant. Ils ont suggéré que la couche limite très fine de la partie sphérique puisse interagir avec des micro-rugosités issues de l'ablation de pointe avant. Ces micro-rugosités induiraient alors une croissance transitoire de perturbations de vitesse le long de la paroi, entraînant une instabilité de l'écoulement. L'étude expérimentale de ZANCHETTA (1996) a relevé un effet notable de petites rugosités créées par des particules de peinture sur une pointe avant sphérique à $M_\infty = 9$. Cette hypothèse a mené RESHOTKO et TUMIN (2004) à définir un critère de transition semi-empirique basé sur une hauteur de rugosité moyenne et des corrélations issues d'une analyse de croissance transitoire localement parallèle. Ce critère offre une bonne concordance avec les résultats issus des expériences et des essais en vol. Bien que ce modèle de prédiction ait trouvé des applications opérationnelles, l'explication du mécanisme sous-jacent à cette croissance transitoire n'a pas été donnée. PAREDES, CHOUDHARI et LI (2017b) ont revisité l'étude initiale de RESHOTKO et TUMIN (2000) à l'aide d'une approche de stabilité non-parallèle (PSE) pour un Re_{R_N} où le blunt-body paradox existe. Cette recherche de perturbations optimales a mis en lumière une croissance transitoire substantielle de perturbations sous forme de stries dans la direction de l'écoulement autour de la ligne transsonique proche du point d'arrêt.

En parallèle, l'étude d'écoulements pour des valeurs de Re_{R_N} situées dans le régime du transition reversal, a également révélé le rôle possible d'une instabilité non modale. Les expériences de KENNEDY et al. (2019) ont mis en avant expérimentalement par visualisation Schlieren haute vitesse, l'existence de structures cohérentes se propageant de la couche d'entropie vers la couche limite. Ces instabilités de la couche d'entropie rejoignent les résultats initiaux de STETSON (1990) démontrants

clairement un effet de la couche d'entropie et son avalement par la couche limite¹⁴. Des études numériques, par HARTMAN, HADER et FASEL (2021) et KENNEDY et al. (2022) et PAREDES et al. (2019) ont respectivement révélé la présence d'instabilités modales et non modales de la couche d'entropie, sans établir clairement de consensus sur le mécanisme dominant. Le mécanisme modal est constitué d'ondes obliques qui s'amplifient dans la couche d'entropie et vont introduire une perturbation à haute amplitude de la couche limite entraînant une transition rapide vers la turbulence par un mécanisme non-linéaire. Le mécanisme non modal, retrouvé par PSE juste après la fin de la zone sphérique, s'amplifie au sein de la couche limite et induit des perturbations de vitesse dans la direction aval sous forme de stries. Les deux approches retrouvent numériquement des structures de l'écoulement proches de celles observées expérimentalement par KENNEDY et al. (2019). L'étude de HARTMAN, HADER et FASEL (2021) indique que les ondes de perturbations obliques de la couche d'entropie pourraient éventuellement générer le mécanisme non-modal au sein de la couche limite par des interactions non-linéaires.

Un effort commun dans la compréhension de ces deux phénomènes a été mis en place dans le cadre du programme de recherche OTAN AVT-240 (PAREDES et al., 2018). Ce programme comprend des essais expérimentaux sur une large gamme de Re_{R_N} , pour des pointes avant polies et présentant des rugosités sous-critiques¹⁵. À ces essais sont couplées des analyses de stabilité linéaire non-parallèle par PSE. Les résultats de ce programme livrent une conclusion forte :

- *Experimental measurements indicate that, in the transition reversal regime, boundary layer transition over the frustum of the cone is highly sensitive to wall roughness. The onset of transition appears to be dominated by disturbances that originate in the vicinity of the nosetip, suggesting roughness-induced transient growth as a likely cause for laminar-turbulent transition.*

Cette conclusion est également associée à une question ouverte concernant la nature et le rôle des perturbations extérieures participant à la déstabilisation des structures non-modales issues de l'effet combiné de la courbure et des micro-rugosités.

Nous remarquons donc un point commun entre les deux problématiques que constituent les phénomènes du **blunt body paradox** et du **transition reversal**. Il s'agit de l'existence d'un **mécanisme non-modal** en lien avec les **micro-rugosités** à la paroi entraînant une accélération du processus de transition lorsque l'on dépasse un Re_{R_N} critique. C'est cette accélération du processus de transition en présence de rugosités et structures non modales qui sera étudiée tout au long de ce travail.

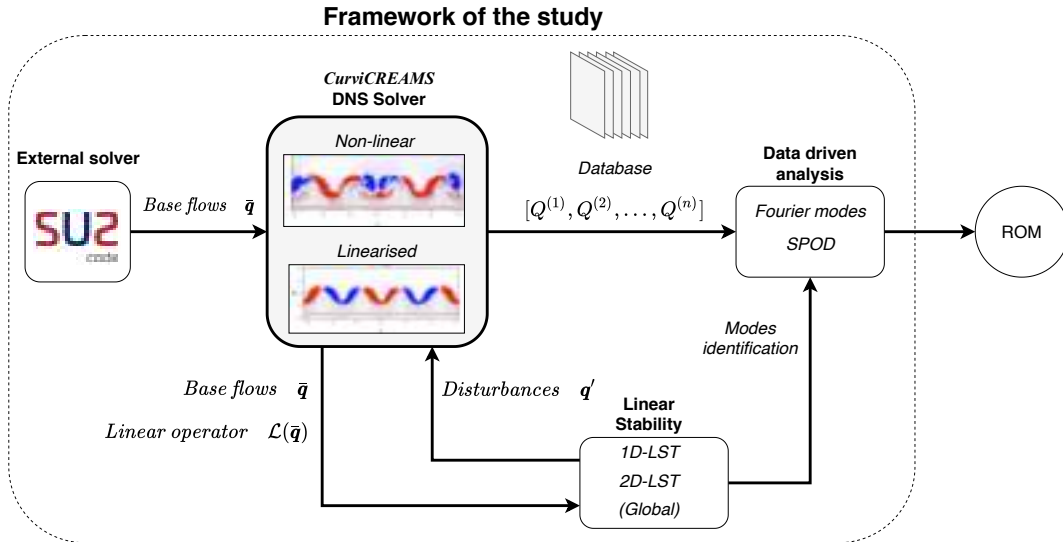


FIGURE 0.6 : Représentation des différents outils développés et utilisés (pointillés) dans le cadre de ce travail pour arriver à l'analyse des écoulements hypersoniques autour des véhicules de rentrée atmosphériques

PROBLÉMATIQUES DE NOTRE ÉTUDE

De la revue précédente, nous relevons plusieurs sous parties d'intérêt qui, couplées entre elles, produisent les deux, phénomènes du blunt-body paradox et du transition reversal :

- Couche limite hypersonique
- Effet de la géométrie conique
- Effet de la géométrie sphérique
- Couche d'entropie
- Rugosités isolées
- Rugosités distribuées
- Instabilités non-modales
- Instabilités modales
- Choc détaché et environnement de perturbation associé

La compréhension de ce système et de ses sous parties est l'objectif commun du CEA-CESTA et de l'institut *Pprime* dans le cadre du projet région *Transition*.

Pour le démarrage de ce projet, nous partons d'une feuille blanche et nous mettons en place les briques élémentaires d'un ensemble d'outils numériques centré autour du code haute fidélité CurviCREAMS développé dans le cadre de ce travail. Ce code est dédié à la simulation des équations de Navier-Stokes multi-espèces

14 L'avalement de la couche d'entropie correspond au point où la couche d'entropie finit par se fondre dans la couche limite dans la direction aval. L'augmentation de R_N recule ce point d'avalement.

15 Sous-critique au regard du critère Re_{kk} , pour ces expériences, $Re_{kk} = 287$ voir Chap. 4

linéaires et non-linéaires, sous leur forme compressible et sur des géométries curvilignes. Parmi ces briques élémentaires, nous pouvons citer l'approche "orientée opérateur" avec les outils d'analyse de stabilité linéaire. Nous couplerons ces outils à l'approche "orientée données" pour aider à l'identification des structures de l'écoulement extraites par les méthodes de décomposition.

Le développement de ces outils constitue la première étape de l'étude et des réponses seront suggérées aux deux questions suivantes.

- *Quelles sont les méthodes numériques à choisir pour développer un code haute fidélité permettant la simulation de la physique fine de la transition en présence des conditions extrêmes du régime hypersonique ?*
- *Comment pouvons-nous tirer parti des architectures HPC pour permettre la simulation et le post-traitement efficace des larges bases de données générées ?*

Les éléments de réponse à ces questions nous permettront d'aborder une seconde partie de l'étude, dédiée à l'analyse de sous-parties du problème du blunt-body paradox. Devant le nombre significatif de ces sous parties, nous choisissons d'aborder cette étude par des petits problèmes fondamentaux découplés. Cette séparation est nécessaire pour envisager ultérieurement la compréhension du problème global de la transition sur la pointe avant. Parmi ces problèmes fondamentaux, les effets d'un environnement de perturbation large bande sur des couches limites hypersoniques, avec ou sans rugosité, ont été peu étudiés. En supplément, l'analyse de la dynamique non-linéaire des structures non-modales que représente les streaks est intéressante pour comprendre leur rôle dans le blunt-body paradox. L'analyse de cette dynamique non-linéaire n'a pas été effectuée en régime hypersonique à la connaissance de l'auteur. De ce constat, nous retenons trois problématiques.

- *Pour un environnement de perturbation large bande, quel mécanisme peut-on observer dans le scénario de transition d'une couche limite hypersonique ?*
- *Si l'on ajoute un élément de rugosité, quel sont alors les mécanismes de transition dominants issus de cet environnement de perturbation ?*
- *Quelle est la dynamique de transition d'une couche limite hypersonique initialement déformée par des structures issues d'une instabilité non-modale sous forme de streaks ?*

Autour de ces trois problématiques, nous retrouvons l'analyse de la transition de couches limites hypersoniques en présence d'un environnement de perturbations large bande. Les études numériques de transition en régime hypersonique dans un tel cadre sont rares. Nous nous attacherons donc à croiser les résultats obtenus entre les trois configurations étudiées afin de discuter de ces effets.

Les sujets traités dans cette étude pourront également être étendus à d'autres applications hypersoniques que les sphère-cône. Les structures non-modales et/ou les rugosités se retrouvent sur de nombreuses applications telles que : le tripping pour les entrées d'air de scramjets, les arrières corps d'objets hypersoniques, etc.

ORGANISATION DE L'ÉTUDE

Ce document est scindé en deux parties. La première partie est dédiée aux aspects théoriques et aux outils de simulation, elle contient deux chapitres.

- Le chapitre 1 introduit certains concepts de la théorie de la stabilité hydrodynamique utiles à la suite des développements et des analyses. Nous discutons notamment la dérivation du système linéaire puis les analyses de stabilité modale et non-modale. Suite à l'introduction de la terminologie associée, nous précisons certaines caractéristiques d'instabilités modales et non-modales de la couche limite hypersonique canonique.
- Le chapitre 2 décrit la forme des équations de Navier-Stokes utilisée dans nos analyses. La formulation curviligne est dérivée analytiquement et nous discutons ses implications numériques. Par la suite les méthodes et schémas implémentés pour la réalisation de calculs DNS en régime hypersonique sont décrits. Une fois l'algorithme général introduit, la stratégie de linéarisation discrète et l'extraction d'opérateur linéaire global associée sont présentées. Ce chapitre se conclut par quelques validations.

La seconde partie est dédiée à l'étude de trois configurations de couche limite hypersoniques. Ces configurations sont toutes étudiées à un nombre de Mach $M_\infty = 6$ pour un nombre de Reynolds basé sur l'épaisseur de déplacement de $Re_{\delta^*} = 28\,000$. Ces études se décomposent en quatre chapitres.

- Le chapitre 3 part de la configuration simple d'une couche limite de plaque plane adiabatique. Sur cette configuration, les réponses à un forçage par bruit blanc des opérateurs linéaire et non-linéaire des équations de Navier-Stokes sont étudiées. Nous commençons par détailler certaines caractéristiques de la stabilité modale de cet écoulement puis nous détaillons les résultats issus du forçage. Le scénario de transition obtenu et ses différences avec les simulations réalisées auparavant pour des environnements de perturbation "contrôlés"¹⁶ est discuté.
- Le chapitre 4 reprends les conditions de l'écoulement de plaque plane et se place dans la continuité d'études précédentes sur le même type de géométries. Nous commençons par une validation comparative de nos résultats sur un cas de référence. Par la suite, une étude sur les instabilités se développant dans le sillage d'une rugosité isolée en présence d'un forçage par bruit blanc est réalisée. Les résultats obtenus sont comparés aux études précédentes et discutés.
- Par la suite, le chapitre 5 part des résultats précédents et construit un cadre idéal où des perturbations optimales sont utilisées pour produire une couche limite déformée par des structures non-modales sous forme de streaks. Trois écoulements de base pour des streaks d'amplitudes grandissantes sont mis

¹⁶ Le terme "contrôlé" réfère ici à un forçage de la simulation par un jeu d'ondes sur quelques fréquences bien définies, permettant donc un certain contrôle du type de scénario de transition observé. À l'opposé d'une approche par bruit blanc où aucune fréquence n'est sélectionnée et donc le scénario de transition évolue naturellement.

en place afin d'aborder la dynamique de la transition en présence des structures non-modales que l'on pourrait retrouver dans le cadre du blunt body paradox.

- Enfin, le chapitre 6 se place dans la continuité du chapitre précédent et commence par caractériser la stabilité linéaire de l'écoulement de base non-homogène obtenu. À l'aide d'une analyse 2D locale nous détaillons les instabilités de cette couche limite. Nous comparons nos résultats à la seule étude de similaire (PSE) en régime hypersonique et à ceux trouvés dans la littérature en régime incompressible. Les instabilités identifiées sont utilisées pour analyser par des calculs DNS la réponse linéaire et non-linéaire à un bruit blanc de la couche limite déformée. L'amplification des divers modes est discutée, les effets notables de la déformation en comparaison avec la plaque plane du Chap. 3 et les résultats de la littérature sont exposés.

Première partie

THÉORIE ET OUTILS

STABILITÉ ET TRANSITION EN RÉGIME HYPERSONIQUE

1.1	Éléments de stabilité	15
1.1.1	Système dynamique et petites perturbations	16
1.1.2	Stabilité linéaire	16
1.1.3	Non-orthogonalité	18
1.1.4	Stabilité locale	20
1.2	Transition de couches limites compressibles	23
1.2.1	Routes vers la turbulence	24
1.2.2	Instabilités modales	25
1.2.3	Instabilités non-modales	29
1.2.4	Instabilité secondaire & interactions	31
1.3	Conclusion intermédiaire	31

L'étude de la transition vers la turbulence des écoulements est intimement liée à l'évolution d'instabilités, qui en s'amplifiant, peuvent faire naître l'état chaotique que représente la turbulence. Un cadre formel qui structure l'étude de ces instabilités hydrodynamiques a été défini par de nombreux travaux importants et prend ses racines dans l'analyse des systèmes dynamiques. Ce cadre théorique est un outil précieux, qui permet de mieux comprendre et décrire les structures de l'écoulement participant aux mécanismes de la transition. Devant le nombre de concepts que recouvre cette théorie et l'étude des couches limites hypersoniques, nous ne citerons dans les sections à venir que les aspects nécessaires à la lecture des chapitres suivants. Ainsi, ce chapitre sera divisé en deux parties. Dans un premier temps, nous introduirons quelques éléments de théorie utiles à l'étude des instabilités hydrodynamiques. Puis dans un second temps, avec ces éléments, nous décrirons les instabilités et mécanismes physiques en jeu dans la transition des couches limites hypersoniques pour nos cas d'intérêt.

1.1 ÉLÉMENTS DE STABILITÉ

Les sections suivantes discutent quelques concepts clés de l'étude de la stabilité d'un système dynamique. Nous nous appliquons volontairement à détailler ces notions pour faciliter la discussion sur la stabilité des écoulement étudiés. Les concepts clés seront surlignés afin de bien définir la terminologie utile pour la suite. Ces prochains paragraphes sont notamment basés sur les ouvrages de MANNEVILLE (2004) et SCHMID et HENNINGSON (2012)

1.1.1 Système dynamique et petites perturbations

Pour étudier le problème de la transition vers la turbulence, nous nous plaçons dans le contexte général de l'analyse d'un système dynamique non-linéaire décrivant la physique de l'écoulement. Nous considérons un vecteur d'état de N_v variables noté $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_i) \in \mathbb{R}^{3 \times N_v}$ défini en tout point $\mathbf{x}$ du domaine fermé $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ et l'opérateur non-linéaire $\mathcal{N} : \mathbb{R}^{3 \times N_v} \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times N_v}$ au moins $\mathcal{C}^1$ par rapport à $\mathbf{q}$. De sorte que,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}(\mathbf{x}, t_i) = \mathcal{N}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t_i)), \quad (1.1)$$

représente la dynamique à l'instant t_i du vecteur $\mathbf{q}$ pilotée par $\mathcal{N}$ pour un jeu de conditions aux limites et conditions initiales bien posées. Pour effectuer une analyse de la stabilité de ce système à des petites perturbations $\mathbf{q}'$, nous pouvons séparer $\mathbf{q}$ en deux contributions tel que,

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x}) + \epsilon \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t), \quad 0 < \epsilon \ll 1. \quad (1.2)$$

Avec un état de base stationnaire $\bar{\mathbf{q}}$ pris comme un point fixe de $\mathcal{N}$,

$$\mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}}) = 0 \quad (1.3)$$

et $\mathbf{q}'$ une fluctuation instationnaire autour de cet état de base. Cette décomposition permet de réécrire le système dynamique sous la forme suivante, en omettant les dépendances au temps et à l'espace pour alléger l'écriture,

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{\mathbf{q}} + \epsilon \mathbf{q}') = \mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}} + \epsilon \mathbf{q}'). \quad (1.4)$$

L'analyse de l'(in)stabilité de ce système consiste alors en l'étude de l'amplification de $\mathbf{q}'$ autour de l'état stationnaire $\bar{\mathbf{q}}$ pour une norme $\|\bullet\|_E$ donnée. En considérant des perturbations infinitésimales, une simplification usuelle revient à étudier ce système dans le contexte de la stabilité linéaire.

1.1.2 Stabilité linéaire

L'utilisation de perturbations infinitésimales nous permet de linéariser l'opérateur $\mathcal{N}$ autour de l'état de base $\bar{\mathbf{q}}$ pour obtenir l'opérateur linéaire Jacobien,

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}} = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}}. \quad (1.5)$$

Cette linéarisation issue d'un développement de Taylor au premier ordre de l'Eq 1.4 nous donne alors le système dynamique linéaire pilotant l'évolution des petites perturbations $\mathbf{q}'$ autour de l'état $\bar{\mathbf{q}}$ à l'instant t_i ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t_i) = \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}} \mathbf{q}'(\mathbf{x}, t_i). \quad (1.6)$$

Sous cette forme, le système dynamique est dit autonome et l'ajout d'un terme de forçage f quelconque à droite donnerait le système dit forcé.

Avec cette équation, l'étude de l'évolution de $\|q'\|_E$ dans le temps et particulièrement son comportement asymptotique pour $t \rightarrow \infty$ constitue alors une étude de stabilité linéaire. Cette étude est appuyée sur une définition forte de la théorie de la stabilité linéaire.

Définition 1.1.1 *L'état de base $\bar{q}$ est linéairement stable si pour $t \rightarrow +\infty$, la mesure $\|q'\|_E$ décroît asymptotiquement, formellement : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q'\|_E = 0$.*

La contraposée de cette définition est également vraie.

Tout l'enjeu de l'analyse de stabilité consiste alors à déterminer si l'état de base $\bar{q}$ est instable pour notre opérateur $\mathcal{L}_{\bar{q}}$. Pour commencer cette analyse, nous supposons la simplification d'une décomposition modale de q' , nous pouvons écrire,

$$q'(x, t) = \hat{q}'(x) \exp(\omega t), \quad (1.7)$$

avec $\omega \in \mathbb{C}$ et $\omega = \omega_r + i\omega_i$, où ω_i est la fréquence et ω_r le taux d'amplification temporel. Cette simplification nous amène à reformuler l'Eq. 1.6 sous forme d'un problème aux valeurs propres tel que,

$$\mathcal{L}_{\bar{q}} \hat{q}' = \omega \hat{q}', \quad (1.8)$$

En supposant $\mathcal{L}_{\bar{q}}$ diagonalisable, ce problème aux valeurs propres donne alors une décomposition de $\mathcal{L}_{\bar{q}}$ en une base¹ de vecteurs propres ψ et valeurs propres ω ,

$$\mathcal{L}_{\bar{q}} \psi = \psi \Lambda, \quad \Lambda = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n) \quad (1.9)$$

Nous remarquons alors que l'évolution en temps du système est directement caractérisée par ses valeurs propres ω et ses **modes propres**² ψ sont des structures qui oscillent dans le temps à la fréquence ω_i associée. De cette décomposition, nous pouvons caractériser la stabilité linéaire du système 1.6.

- Si $\omega_r > 0$, le système est instable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q'\|_E = \infty$.
- Si $\omega_r < 0$, le système est stable et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|q'\|_E = 0$

De plus, avec l'écriture de q' sous la forme de l'Eq. 1.7, nous ne faisons pas d'hypothèse sur son homogénéité en espace et donc l'obtention de l'Eq. 1.9 constitue alors une analyse dite de **stabilité globale** (THEOFILIS, 2003). Plus particulièrement, la présence d'une valeur propre instable nous donne un système **globalement instable** dit **oscillateur** qui observe la **croissance modale** d'un mode propre au taux d'amplification donné par ω_r . Il faut noter qu'en pratique, la réalisation d'une analyse de stabilité globale d'un opérateur linéaire de grande taille est un calcul extrêmement coûteux (THEOFILIS, 2011).

Dans notre cas particulier, nous nous intéresserons à l'étude d'états de base $\bar{q}$ globalement stables, mais soumis éventuellement soumis à un forçage extérieur similaire au système forcé de l'Eq. 1.6

¹ Cette base n'est pas nécessairement orthogonale, comme nous le verrons par la suite

² Fonctions propres

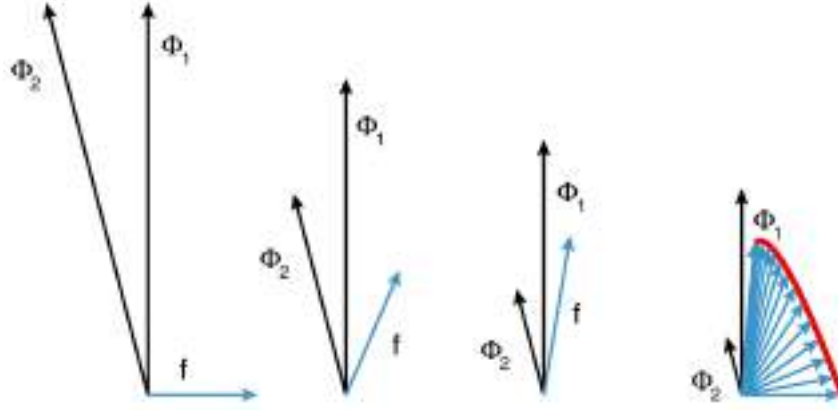


FIGURE 1.1 : Croissance transitoire à trois instants de l'énergie (rouge) d'un état f (bleu) étant la différence de deux fonctions propres (ϕ_1, ϕ_2) associées à des valeurs propres stables ("décroissantes") de la base non-orthogonale. Alors que ϕ_1 décroît plus lentement que ϕ_2 , l'état f pivote vers ϕ_1 et voit son amplitude augmenter (rouge) bien que que les modes (ϕ_1, ϕ_2) sont décroissants. Il y a donc une croissance transitoire issue de la non-orthogonalité. Issu de SCHMID (2007)

1.1.3 Non-orthogonalité

Nous partons du principe que l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\bar{q}}$ est globalement stable pour les états $\bar{q}$ étudiés. De plus, pour la suite de l'étude, nous considérerons que cet opérateur linéaire n'est pas orthogonal, ce concept a des implications importantes pour la stabilité des systèmes fluides étudiés. Principalement, la non-orthogonalité implique la possibilité d'une **croissance transitoire** de $\|q'\|_E$, même si $\mathcal{L}_{\bar{q}}$ est asymptotiquement stable. Le principe de la croissance transitoire de l'énergie d'un état q' est illustré en Fig. 1.1. Cette croissance transitoire amène à la théorie de la stabilité dite **non modale** (SCHMID, 2007).

1.1.3.1 Croissance transitoire à temps fini

Même si l'opérateur $\mathcal{L}_{\bar{q}}$ est asymptotiquement stable, nous pouvons donc avoir la croissance transitoire d'une perturbation en temps court. La prise en compte de cette croissance transitoire de la dynamique linéaire est particulièrement importante si l'on refait le lien avec la dynamique non-linéaire associée. Particulièrement l'amplitude atteinte par la perturbation lors de cette croissance transitoire pourrait être suffisante pour déclencher des effets de non-linéarité et donc une dynamique non-linéaire, pouvant mener à un état chaotique turbulent.

De fait, une recherche de la valeur maximale possible de l'énergie de cette croissance transitoire pour un instant donné t_f de la dynamique peut s'avérer utile. Cette recherche part de l'équation homogène 1.6 dont la solution est donnée pour une condition initiale stationnaire q_0 ,

$$q'(x, t) = q_0 e^{\mathcal{L}_{\bar{q}} t}. \quad (1.10)$$

Nous cherchons alors $\mathbf{q}_0$ donnant la réponse de plus grande énergie $\mathbf{q}$ à l'instant $t = t_f$ de sorte à maximiser le gain,

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{q}'(t_f)\|_E}{\|\mathbf{q}_0\|_E}. \quad (1.11)$$

En remarquant que $\mathbf{q}'(t_f) = \mathbf{q}_0 e^{\mathcal{L}t_f} = \mathbf{A}\mathbf{q}_0$ et en notant $\mathbf{A}^H$ l'opérateur adjoint³ de la matrice de propagation $\mathbf{A}$, nous écrivons pour la norme $\|\mathbf{q}'\|_E = \mathbf{q}'^H \mathbf{q}'$,

$$\sigma = \frac{\|\mathbf{q}'(t_f)\|_E}{\|\mathbf{q}_0\|_E} = \frac{(\mathbf{A}\mathbf{q}_0)^H \mathbf{A}\mathbf{q}_0}{\mathbf{q}_0^H \mathbf{q}_0} = \frac{\mathbf{q}_0^H \mathbf{A}^H \mathbf{A} \mathbf{q}_0}{\mathbf{q}_0^H \mathbf{q}_0}, \quad (1.12)$$

de sorte à obtenir le problème aux valeurs propres,

$$(\mathbf{A}^H \mathbf{A} - \sigma) \mathbf{q}_0 = 0, \quad (1.13)$$

dont la plus grande valeur propre est associée à la perturbation optimale $\mathbf{q}_0^{opt}$ donnant la réponse optimale de gain σ ,

$$\mathbf{q}'_{opt} = \mathbf{q}_0^{opt} e^{\mathcal{L}t_f}. \quad (1.14)$$

Cette démarche de recherche d'une perturbation optimale sera notamment retrouvée dans le Chap. 5.

1.1.3.2 Croissance non modale et forçage optimal

Il est aussi intéressant d'étudier l'évolution en temps court d'un système globalement stable soumis à un forçage extérieur instationnaire de faible amplitude. En nous plaçant plutôt dans l'espace des fréquences ω , si nous réécrivons le système linéaire autonome de l'Eq. 1.8 comme le système forcé suivant,

$$\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}' = \omega \hat{\mathbf{q}}' + \hat{\mathbf{f}}, \quad (1.15)$$

où nous considérons un forçage harmonique de fréquence ω tel que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t)$, nous obtenons alors l'expression,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\hat{\mathbf{q}}} \hat{\mathbf{q}}' &= \omega \hat{\mathbf{q}}' + \hat{\mathbf{f}}, \\ \hat{\mathbf{q}}' &= (\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{q}}} - \omega \mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{f}}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

où $\mathcal{R} = (\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{q}}} - \omega \mathbf{I})^{-1}$ est l'opérateur **Resolvent**⁴.

Si $\mathcal{L}_{\hat{\mathbf{q}}}$ est globalement stable, cet opérateur est défini partout dans le plan complexe et peut être vu comme la fonction de transfert linéaire offrant la réponse globale $\hat{\mathbf{q}}'$ du système à un forçage harmonique $\hat{\mathbf{f}}$.

Sa décomposition en valeur singulière pour une fréquence donnée permet d'obtenir une base orthogonale pour laquelle les premières fonctions propres associées à la première valeur singulière donnent la réponse et le forçage optimal maximisant le ratio $\|\hat{\mathbf{q}}'\|_E / \|\hat{\mathbf{f}}\|_E$ choisi. Plus de détails sur cette approche peuvent être trouvés dans la récente revue de JOVANOVIĆ, 2021.

³ Ici $\mathbf{A}^H$ est la matrice transconjuguée de $\mathbf{A}$

⁴ Ou matrice résolvante dans la terminologie francophone.

1.1.4 Stabilité locale

Dans les sections précédentes, nous avons décrit l'analyse de la stabilité linéaire d'un système dynamique discret pour un espace en dimension 3. Dans certains cas pratique, nous pouvons effectuer des hypothèses simplificatrices sur la forme du vecteur de perturbation $\mathbf{q}'$ pour faciliter l'analyse de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$. Ces hypothèses reposent sur la définition de directions homogènes de l'écoulement où les variations de $\bar{\mathbf{q}}$ seraient négligeables. Nous obtenons alors l'approche dite de **stabilité locale**, cette dernière diffère donc de l'approche globale par l'approximation de directions infinies et homogènes dont l'on peut tirer parti.

En écrivant les trois directions de notre espace (x, y, z) , le vecteur de la dynamique $\mathbf{q}(x, y, z, t) = \bar{\mathbf{q}}(x, y, z) + \mathbf{q}'(x, y, z, t)$ peut être écrit dans sa forme la plus simple, avec deux directions homogènes x et z , telles que,

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}(y) e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}. \quad (1.17)$$

La réutilisation de cette expression dans l'Eq. 1.4 et la linéarisation autour de $\bar{\mathbf{q}}$ mènent à un nouveau système linéaire,

$$\mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, \beta, \omega) \hat{\mathbf{q}}'(y, \alpha, \beta, \omega) = 0, \quad (1.18)$$

où α et β sont respectivement les nombres d'ondes en x et z . Nous mettons volontairement en évidence la dépendance de $\mathcal{L}$ aux nouveaux paramètres issus de la simplification de $\mathbf{q}$ choisie en Eq. 1.17.

Dans ce cas, l'Eq. 1.18 représente le problème de stabilité locale, au sens où l'analyse de stabilité ne prend plus en compte les éventuelles variations de $\mathbf{q}$ dans les directions (x, z) et n'est établie que pour le profil $\hat{\mathbf{q}}'(y)$. Cette hypothèse implique des restrictions sur l'extension des résultats issus de la stabilité locale d'un système à l'étude de sa stabilité globale, ces aspects sont discutés par HUERRE et MONKEWITZ (1990).

Cependant, l'analyse de stabilité locale reste un outil efficace pour l'analyse d'un grand nombre de problèmes de stabilité hydrodynamique. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des écoulements variants lentement dans la direction aval, telles que les couches limites.

1.1.4.1 Propriétés des fonctions propres

Suite à la définition du vecteur de perturbation $\mathbf{q}'$ avec deux directions homogènes, nous ajoutons quelques éléments utiles à la description des fonctions propres associées. Nous avons donc une fréquence ω pour le temps et les nombres d'ondes spatiaux α et β dans les directions respectives x et z , auxquels nous nous référeront directement par la suite avec le terme : nombre d'onde. Pour le problème de stabilité local, ces trois paramètres sont liés entre eux par une relation de dispersion $\mathcal{D}(\alpha, \beta, \omega)$ caractérisant la propagation de l'onde $\mathbf{q}'$. Parmi ces paramètres, les

nombres d'ondes nous permettent de définir le vecteur d'onde et l'angle spatial associé,

$$\mathbf{k} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right), \quad (\beta, \alpha) \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Cet angle donne l'orientation des lignes de même phase dans le plan (x, z) . Avec le vecteur d'onde, nous pouvons également définir la vitesse de propagation de ces lignes, la vitesse de phase,

$$c_\phi = \frac{\omega}{\mathbf{k}}. \quad (1.20)$$

À la vitesse de phase, nous pouvons ajouter la vitesse de propagation de l'énergie de l'onde, la vitesse de groupe,

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (1.21)$$

Une vitesse de groupe négative traduit des modes propres se propageant vers l'amont et une vitesse de groupe positive traduit des modes propres évoluant vers l'aval.

De plus, l'angle ϕ de l'onde $\mathbf{q}$, nous permet également de distinguer les **ondes obliques** telles que $\beta \neq 0$ et les **ondes planes** avec $\beta = 0$. Ces terminologies seront particulièrement utiles par la suite pour discuter les modes propres retrouvés dans nos écoulements.

Depuis cette relation de dispersion reliant nombres d'onde et fréquences dans l'Eq. 1.18, nous pouvons distinguer deux types d'études, temporelles et spatiales, que nous décrivons ci-après.

1.1.4.2 Stabilité temporelle locale

Pour étudier l'amplification d'instabilité dans le temps, nous choisissons $\omega \in \mathbb{C}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$. Cette approche nous permet de réécrire le système linéaire 1.18 sous la forme,

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{q}}, \alpha, \beta) = \omega \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}}'(y). \quad (1.22)$$

La résolution du problème aux valeurs propres obtenu nous donne une base de fonctions propres $\boldsymbol{\psi}_i$ et de valeurs propres $\omega = \omega_r + i\omega_i$, décrivant l'amplification ou l'amortissement dans le temps et pour un point d'espace fixé, de structures oscillantes de la forme $\boldsymbol{\psi}_i(y)$ pour des nombres d'ondes α et β donnés. Ainsi, pour $\omega_i < 0$ l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}(y)$ est linéairement stable et pour $\omega_i > 0$ il est linéairement instable.

Le problème de stabilité temporelle local est largement utilisé pour l'analyse d'écoulements dits **parallèles**. Cependant, pour l'étude des perturbations qui évoluent spatialement, un cadre plus approprié a été développé.

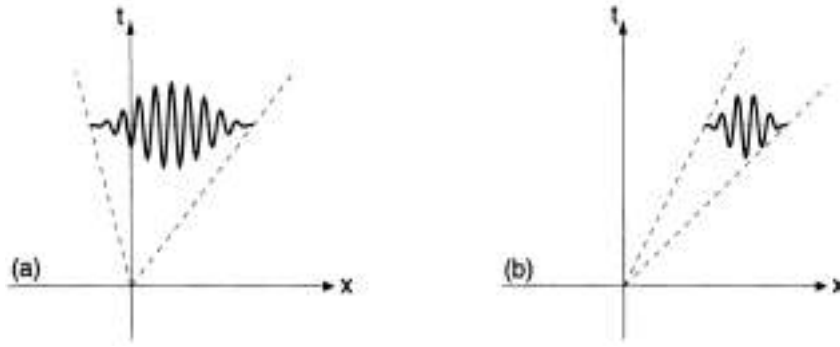


FIGURE 1.2 : Comportement des instabilités absolues (gauche) et convectives (droite) dans le diagramme espace-temps (x, t) . Issu de SCHMID et HENNINGSON (2012)

1.1.4.3 Stabilité spatiale locale

L'étude de la stabilité spatiale de l'écoulement de base localement parallèle $\bar{q}(y)$ repose sur la définition d'un nombre d'onde $\alpha \in \mathbb{C}$ et $(\beta, \omega) \in \mathbb{R}$. Avec ce choix des paramètres et quelques développements, le système linéaire 1.18 peut être décomposé en trois matrices pour donner le problème aux valeurs propres spatial,

$$[\alpha^2 \mathbf{F}_2 + \alpha \mathbf{F}_1 + \mathbf{A}_0] \hat{q}' = 0. \quad (1.23)$$

Il s'agit alors d'un problème aux valeurs propres polynomial d'ordre 2 en α . La base de fonctions propres ψ_i et valeurs propres $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$ décrit maintenant l'évolution spatiale dans la direction x de l'amplitude des modes propres $\psi_i(y)$ de fréquence ω et nombre d'onde β . Pour une vitesse de groupe $c_g > 0$, ces perturbations s'amortissent si $\alpha_i > 0$ et s'amplifient pour $\alpha_i < 0$, auquel cas $\bar{q}(y)$ est localement instable au regard de la stabilité spatiale pour les valeurs de (ω, β) choisies. Pour une vitesse de groupe $c_g < 0$, c'est le comportement inverse qui est observé.

En observant les Eqs. 1.22 & 1.23, nous pouvons remarquer que l'Eq. 1.18 peut s'écrire sous la forme générale suivante,

$$[\alpha^2 \mathbf{F}_2 + \alpha \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0] \hat{q}' = \omega \mathbf{L}_0 \hat{q}'. \quad (1.24)$$

Cette écriture identique se retrouve en notant que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{F}_0 - \omega \mathbf{L}_0$. Une fois les matrices $\mathbf{F}_i$ et $\mathbf{L}_0$ définies, cette équation permet de facilement passer du problème spatial au problème temporel. De façon pratique, c'est sous cette forme que seront implémentés les problèmes de stabilité locaux discutés dans les Chap. 3, 5 et 6, pour les opérateurs des équations de Navier-Stokes compressibles donnés par MACK (1984).

1.1.4.4 Notions d'instabilités convectives et absolues

Ces définitions amènent à décrire succinctement le comportement couplé dans le temps et l'espace des instabilités retrouvées. HUERRE et MONKEWITZ (1985) définissent deux types d'instabilités issues du problème de stabilité locale. Nous les

présentons schématiquement dans la Fig. 1.2. Pour une perturbation impulsionnelle initiale d'un système localement instable en $(x, t) = (0, 0)$, nous retrouvons deux classes.

- **Instabilité absolue** : il s'agit d'une instabilité dont l'amplitude va augmenter pour $t \rightarrow \infty$ en contaminant tout le domaine, dans les deux directions $x \rightarrow \infty$ et $x \rightarrow -\infty$ sans être évacuée hors de celui-ci. Dans ce cas, nous retrouvons le système oscillateur globalement instable à la fréquence ω de l'instabilité absolue. Un exemple de ce type d'amplification dans le diagramme (x, t) est visible en Fig. 1.2a.
- **Instabilité convective** : il s'agit d'une instabilité qui s'amplifie après la perturbation initiale, mais qui est évacuée hors du domaine d'étude pour $t \rightarrow \infty$. Dans ce cas, nous retrouvons le système amplificateur défini précédemment. Il faut noter que la nature convective de l'instabilité n'équivaut pas à l'absence d'une instabilité globale. Certaines conditions de résonance amont-aval peuvent exister et entraîner l'instabilité globale sans instabilité absolue (BENEDDINE, 2017)

L'étude de ces instabilités locales et leur lien avec le problème global est décrit en détail par HUERRE et MONKEWITZ (1985) et SCHMID et HENNINGSON (2012). Pour nos études, nous nous concentrerons principalement sur des instabilités de nature convective issues d'un forçage extérieur.

Nous ajoutons que les autres approches d'analyse de stabilité telles que les formulations "bi-globales" ou "bi-locales" pour des analyses 2D n'ont pas été évoquées ici. La mise en place de cette dernière méthode sera évoquée au Chap. 5. Nous pouvons également mentionner les formulations prenant en compte la variation lente de $\bar{q}$ dans une direction telle que la PSE⁵ (HERBERT, 1997) ou plus récemment pour les équations de Navier-Stokes l'approche OWNS⁶ (TOWNE et COLONIUS, 2015). Devant le coût souvent inabordable d'un calcul de stabilité globale, ces dernières méthodes représentent des approches efficaces pour réduire la charge de calcul tout en offrant des résultats précis.

1.2 TRANSITION DE COUCHES LIMITES COMPRESSIBLES

L'introduction de ces notions de stabilité nous permet maintenant de décrire la nature des instabilités observées dans les couches limites hypersoniques pour nos cas. Ces couches limites sont des systèmes non-linéaires complexes et les instabilités peuvent suivre plusieurs "chemins" vers la turbulence. Nous commençons alors par définir ces chemins, pour ensuite discuter les instabilités associées.

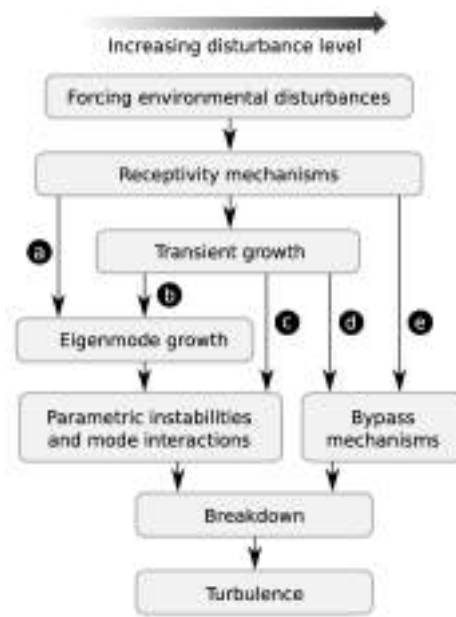


FIGURE 1.3 : Chemins vers la turbulence. Issu de FEDOROV (2011) et MORKOVIN, RESHOTKO et HERBERT (1994)

1.2.1 Routes vers la turbulence

Dans l'introduction, nous avons évoqué les étapes successives suivies par les perturbations de la couche limite vers la turbulence. Pour rappel, ces étapes peuvent être vues de façon simplifiée comme : la réceptivité, la croissance initiale, l'instabilité secondaire et les interactions non-linéaires, le début de la cascade turbulente. Comme la couche limite est un système sensible aux perturbations extérieures et à leur amplitude, le déroulement de ces étapes peut varier selon l'environnement de l'écoulement. Pour comprendre cette variabilité du processus de transition, les efforts d'analyse réalisés au cours de la seconde partie du vingtième siècle ont convergé vers la définition du diagramme dit de Morkovin (MORKOVIN, RESHOTKO et HERBERT, 1994) présenté en Fig 1.3. Les divers chemins présentés sur ce diagramme récapitulent les étapes suivies par le processus de transition après la réceptivité pour des perturbations initiale d'amplitude croissante.

- **A** - Chemin modal : les perturbations sont de faible amplitude et la dynamique linéaire domine. Cette dynamique se manifeste par la croissance exponentielle de quelques fonctions propres instables, c'est la **croissance modale**. Une fois que les perturbations ont une amplitude suffisante, elles agissent sur l'écoulement de base pour générer les mécanismes de l'instabilité secondaire et/ou des interactions non-linéaires vers la turbulence. Ce chemin est celui naturellement suivi pour des couches limites, supportant une instabilité modale dans de conditions atmosphériques.

5 Parabolised Stability Equations

6 One Way Navier Stokes

- **B & C** - Chemins transitoires linéaires : l'augmentation de l'amplitude initiale des perturbations est suffisante pour que les effets de non-orthogonalité de l'opérateur linéaire soient visibles. Une croissance transitoire initiale de l'énergie des perturbations est observée avant la croissance modale secondaire (B) d'un mode propre instable. Ce mode propre a alors une amplitude initiale plus importante correspondant à l'amplitude atteinte par les perturbations lors de la croissance transitoire. Dans certains cas, cette croissance transitoire initiale est suffisamment importante pour déclencher une instabilité secondaire avant la croissance modale primaire (C).
- **D** - Chemin transitoire non-linéaire : en augmentant encore l'amplitude des perturbations, la croissance transitoire initiale, issue de la dynamique linéaire, s'amplifie si fortement qu'elle déclenche directement des mécanismes non-linéaires. Nous retrouvons alors un **bypass** des chemins modal (B) et linéaire (C).
- **E** - Chemin totalement non-linéaire : l'amplitude initiale des perturbations est telle que l'hypothèse de petites perturbations ne tient plus et les mécanismes non-linéaires sont immédiatement déclenchés. Il s'agit encore d'un chemin bypass.

Cette classification propose une vue d'ensemble des processus de transition. Cependant, elle reste une vue générale et les travaux de recherche subséquents ont montré que ces chemins pouvaient également se décomposer en sous-ensembles (FEDOROV, 2011). Nous ajoutons également que la partie concernant le "bypass" est présentée comme une boîte noire, mais celle-ci englobe des mécanismes non-linéaires qui amènent à certains types de perturbations optimales (CHERUBINI et al., 2010; KERSWELL, 2018)

Lors de notre étude, nous nous intéresserons particulièrement au passage du chemin (A) vers les chemins (B) et (C). Nous décrirons notamment certains détails du chemin (A) dans le Chap. 3 et la transition dans le cas des chemins (B) et (C) aux Chaps 5 & 6. Ces chapitres comportant également des revues des mécanismes étudiés. Par concision, nous choisissons ici de n'introduire que les modes de transition principaux retrouvés dans une couche limite hypersonique canonique.

1.2.2 Instabilités modales

Pour une couche limite hypersonique se développant sur une plaque plane dans un environnement faiblement perturbé, les études expérimentales mettent en avant deux familles de modes de transition pouvant mener à la turbulence. Les analyses de stabilité révèlent également ces deux familles d'instabilités et décrivent les conditions de leur existence (MACK, 1984; REED, SARIC et ARNAL, 1996). Les travaux sur l'analyse de la stabilité des écoulements compressibles ont amené à englober ces modes propres sous le terme **modes de Mack**. D'un point de vue physique, ces modes peuvent présenter des phénoménologies différentes, nous amenant à distinguer les modes visqueux et les modes non-visqueux.

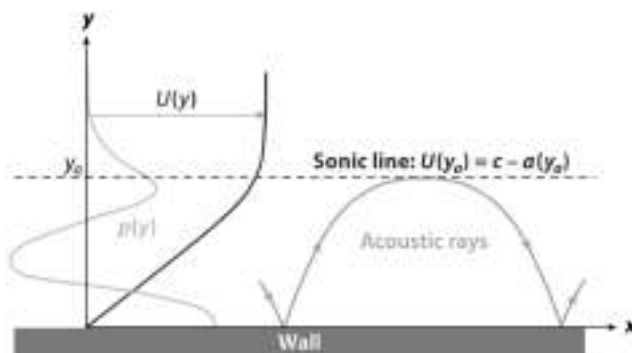


FIGURE 1.4 : Comportement des modes acoustiques piégés sous $y < y_a$ où $\tilde{M} > 1$. $u(y)$ est le profil de l'écoulement de base et $p(y)$ représente le profil typique d'une perturbation de pression d'un mode de Mack. Issu de FEDOROV (2011)

1.2.2.1 Modes visqueux

Pour les écoulements supersoniques et hypersoniques, cette classe de modes de transition de la couche limite est la continuité des ondes de Tollmien-Schlichting planes ($\beta = 0$) retrouvées en régime subsonique. Dans le régime supersonique ces ondes sont principalement obliques ($\beta \neq 0$) et peuvent dominer le processus de transition modale pour des nombres de Mach allant jusqu'à $M_\infty = 4.5$. De plus, dans le régime supersonique, une condition nécessaire à l'instabilité de ces ondes est l'existence d'un point d'inflexion généralisé (LEES et LIN, 1946). La nature oblique de ces modes propres de la couche limite les amène à être souvent définis comme faisant partie de la famille du **premier mode oblique** ou aussi, **premier mode de Mack**.

Bien que le taux d'amplification de ces derniers devient faible en régime hypersonique, ils présentent des zones d'amplification importante dans la couche limite, ce qui peut amener à une amplification effective substantielle de cette instabilité sur de longue distance et donc à une transition pilotée par le premier mode oblique.

1.2.2.2 Modes non-visqueux

L'étude initiale de LEES et LIN (1946) sur l'analyse de la stabilité des couches limites supersoniques a été complétée à plus haut nombre de Mach par LEES et RESHOTKO (1962) puis par l'analyse numérique de MACK (1963). Ces travaux ont montré que l'augmentation du nombre de Mach au-delà d'une certaine valeur⁷ change la nature des équations de Navier-Stokes compressibles linéarisées d'un comportement elliptique vers un comportement hyperbolique. Ce changement entraîne alors l'existence d'une infinité de solutions du problème aux valeurs propres et ainsi la définition d'une nouvelle classe de modes propres MACK (1984) en plus du premier mode oblique. Une condition nécessaire à l'existence de ces instabilités

⁷ En pratique nous considérons $M_\infty > 2.2$

non visqueuses repose alors sur la présence d'un point d'inflexion généralisé tel que,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial u_x}{\partial y} \right), \quad \text{pour } y > y_i, \quad (1.25)$$

Avec y_i , le point de la couche limite où la vitesse de l'écoulement u est égale à la vitesse des ondes acoustiques lentes $\frac{u}{u_e} = 1 - \frac{1}{M_e}$, avec (u_e, M_e) , respectivement la vitesse et le nombre de Mach à l'infini.

En supplément d'un point d'inflexion généralisé, le critère d'apparition de ces modes dépend du nombre de Mach relatif de l'onde $\bar{M} = M - c_\phi/a$, avec (M, a) respectivement le nombre de Mach local et la vitesse du son locale. Si à un moment dans la hauteur de la couche limite, $\bar{M} > 1$, alors ces solutions, nommées **modes supérieurs** existent. La présence de cette zone de nombre de Mach relatif $\bar{M}$ supersonique crée un guide d'onde entre la paroi et la ligne sonique $\bar{M} = 1$ dans laquelle des ondes acoustiques piégées évoluent. La Fig. 1.4 représente l'évolution des ondes acoustiques piégées entre la paroi et la région où leur vitesse de phase devient supersonique au regard de leur vitesse de propagation. Cette partie de l'écoulement correspond à la région où $\bar{M} > 1$.

Plusieurs propriétés émanent de la nature d'onde acoustique piégée des modes de Mack. Parmi ces propriétés, nous pouvons voir que l'épaisseur du guide d'onde dans laquelle évolue les ondes acoustiques, dépend directement de la hauteur de la couche limite. Ainsi, la fréquence des modes de Mack va alors dépendre de la hauteur de la région où $\bar{M} > 1$ et donc directement de l'épaisseur de la couche limite. En pratique, nous remarquons que $\omega \propto u_e/(2\delta_{99})$ (STETSON et al., 1989). Une seconde propriété réside dans l'expression de $\bar{M}$, qui de par la définition de la vitesse de phase en Eq. 1.20, est maximisé pour une onde plane⁸. De la sorte, MACK (1963) démontre que les modes de Mack les plus amplifiés sont des modes plans et que le plus amplifié de ces modes plans est le premier d'entre eux, nommé le **second mode de Mack**⁹. Nous discutons plus en détail l'évolution de la stabilité du second mode de Mack dans le Chap. 3.

1.2.2.3 Courbes neutres et propriétés

Le premier mode oblique et le second mode de Mack ont été caractérisés pour de nombreux écoulements (MACK, 1984; MALIK, 1990; TUMIN, 2007; ÖZGEN et KIRCALI, 2008). Le calcul des courbes neutres de l'analyse temporelle ($\omega_i = 0$) ou spatiale ($\alpha_i = 0$) permet de visualiser l'évolution de la stabilité de ces modes avec le nombre de Mach. Nous redonnons en Fig. 1.5 le tracé de ces courbes $\omega_i = 0$ en fonction du nombre de Reynolds¹⁰ obtenue par l'étude de ÖZGEN et KIRCALI (2008) pour des nombres de Mach allant de $M_\infty = 3$ à $M_\infty = 7$ sur une plaque plane adiabatique et des ondes planes.

⁸ Vitesse de phase maximale dans la direction de l'écoulement

⁹ Second après le premier mode oblique déjà existant dans la couche limite

¹⁰ Cette évolution du nombre de Reynolds peut être associée à une évolution le long de la couche limite, pour le problème de stabilité local temporel.

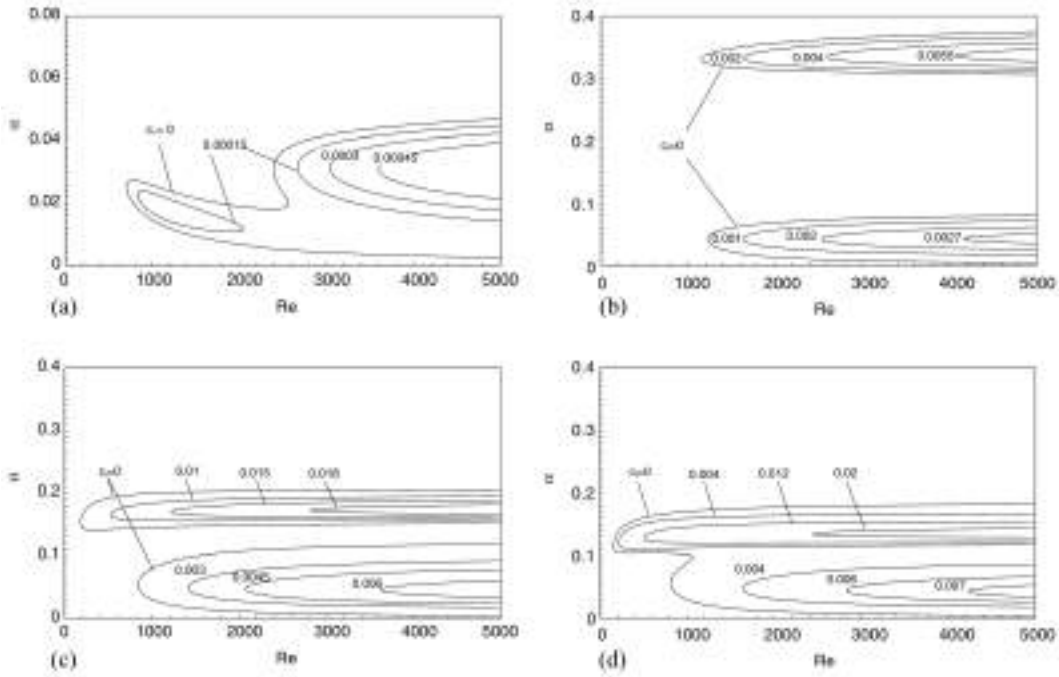
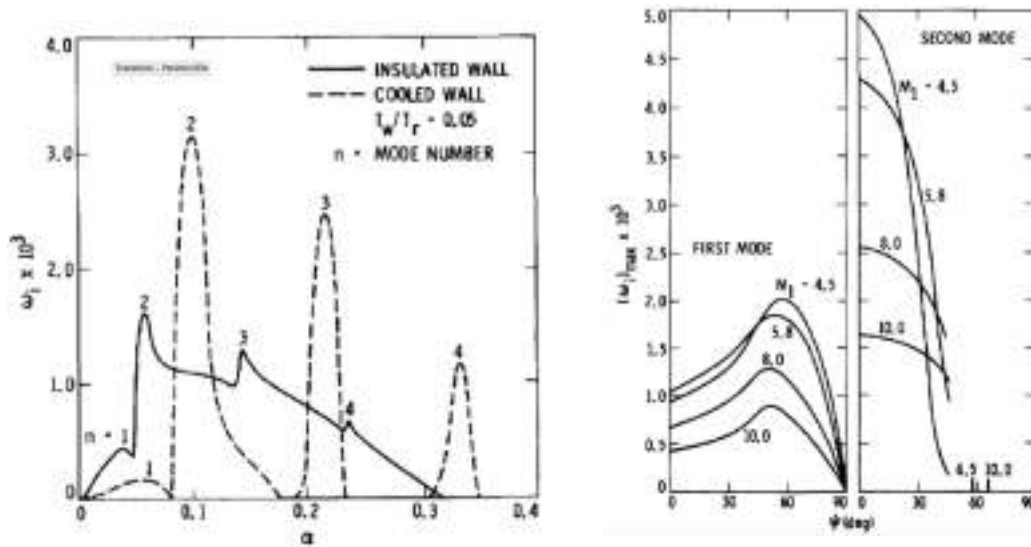


FIGURE 1.5 : Évolution des courbes neutres $\omega_i = 0$ à $\beta = 0$ de la stabilité temporelle pour les nombres de Mach : $M_\infty = 3$ (a); $M_\infty = 4$ (b); $M_\infty = 6$ (c); $M_\infty = 7$ (d). Repris de ÖZGEN et KIRCALI (2008)

Nous pouvons voir pour $M_\infty = 3$ (Fig. 1.5(a)) que la courbe neutre présente un seul bloc instable, contenant deux zones d'amplification, correspondant respectivement en bas au premier mode oblique et en haut au second mode de Mack. L'augmentation du nombre de Mach vers $M_\infty = 4$ (Fig. 1.5(b)) amène à une séparation nette des deux courbes neutres avec le lobe supérieur correspondant au second mode de Mack et le lobe inférieur au premier mode plan. Nous remarquons que le second mode de Mack présente alors un taux d'amplification plus important. Augmenter encore le nombre de Mach rapproche ces deux lobes (Fig. 1.5(c)) jusqu'à les rassembler de nouveau (Fig. 1.5(d)). Bien que les courbes neutres soient rassemblées, les deux modes sont bien présents indépendamment dans la couche limite. De nouveau, nous remarquons que le taux de croissance temporelle du second mode de Mack domine. À cet effet du nombre de Mach sur l'amplification du premier et du second mode, nous pouvons ajouter les effets importants de l'angle de l'onde ψ et de la température de paroi.

- **Effets de température de paroi** : Le rapport de la température infinie et de la température de paroi $\alpha = \frac{T_\infty}{T_w}$ possède un effet opposé sur le premier mode oblique et le second mode de Mack. Le second mode de Mack est davantage amplifié avec la diminution de la température de la paroi et le premier mode oblique est stabilisé. Ce principe est illustré en Fig. 1.6a, où nous pouvons clairement voir que le premier mode oblique (noté 1) est amorti par une paroi refroidie là où le second mode de Mack (2) et les modes supérieurs (3,4,...) sont amplifiés.



(a) Effets du ration de température α sur l'amplification temporelle des modes de la couche limite hypersonique

(b) Effet de l'angle des perturbations sur le taux d'amplification temporel du premier mode (gauche) et du second mode (droite) pour divers nombres de Mach.

FIGURE 1.6 : Résumé des effets de la température de paroi et de l'angle de propagation sur l'amplification temporelle des ondes instables dans le cadre de la stabilité locale. Issu de MACK (1984)

- **Effets de l'angle ψ :** Les effets de l'angle de l'onde d'instabilité définie en Eq. 1.19 sont présentés en Fig. 1.6b pour divers nombres de Mach. Nous remarquons pour le premier mode (gauche) que l'angle d'onde offrant l'amplification la plus importante se situe entre $\psi = 45^\circ$ et $\psi = 60^\circ$ pour la plage des nombres de Mach étudiés. Au contraire, le second mode de Mack est le plus amplifié pour $\psi = 0^\circ$, comme énoncé précédemment. L'augmentation de l'angle de l'onde ne faisant que diminuer rapidement son taux d'amplification et ce dernier est nul au-delà de $\psi > 60^\circ$ pour les paramètres de l'analyse.

Au-delà de l'amplification, ces paramètres peuvent également jouer sur les mécanismes de réceptivité (FEDOROV ET KHOZHLOV, 1992) des instabilités modales, nous aborderons ces aspects plus en détail dans le Chap. 3.

1.2.3 Instabilités non-modales

Après avoir discuté certains aspects des instabilités modales, nous nous intéressons maintenant à quelques spécificités de la transition non-modale et plus spécifiquement à la croissance transitoire initiale des chemins **B** et **C**. Nous avons vu en Sec.1.1.3 que cette croissance transitoire provient de la non-orthogonalité de l'opérateur linéaire des équations de Navier-Stokes. Nous souhaitons maintenant faire le lien entre cette somme de modes stables et les structures physiques observables dans l'écoulement de couche limite.



FIGURE 1.7 : Visualisation de streaks dans un écoulement transitionnel allant de gauche à droite à 6m/s. Repris de ALFREDSSON et MATSUBARA (2000)

Du point de vue de la physique, des expériences de transitions en soufflerie utilisant des niveaux de perturbations modérément élevés ont mis en avant l'émergence de structures élongées différentes des structures généralement observées lors de la transition modale. (KENDALL, 1985; KLEBANOFF, TIDSTROM et SARGENT, 1962). Ces structures ont la forme d'une alternance de stries de vitesse lente et rapide dans la directions de l'écoulement nommées streaks¹¹. Nous en présetons un exemple en Fig. 1.7, d'après l'expérience de ALFREDSSON et MATSUBARA (2000).

Les premier éléments de l'explication physique de la naissance des streaks ont été fournis par ELLINGSEN et PALM (1975) qui ont montré qu'une perturbation initiale dans le plan (y, z) sans composante de vitesse dans la direction x peut tout de même générer une réponse ayant une composante de vitesse dans la direction x en se propageant. Ce phénomène a été décrit comme le mécanisme de lift-up (LANDAHL, 1980, 1990) et explique la naissance de cette perturbation de vitesse dans la direction x par le fait qu'un volume élémentaire de fluide éloigné de la paroi par un tourbillon dans le plan (y, z) conservera initialement sa quantité de mouvement dans la direction x et induira donc une perturbation de vitesse lente. L'opposé fonctionne pour un volume élémentaire de fluide rapide, déplacé vers la paroi. La combinaison de ces deux mouvements amène aux streaks.

Par la suite, l'utilisation de méthodes de recherche de perturbations optimales dans le cadre de l'analyse de stabilité a retrouvé ces perturbations tourbillonnaires et les réponses sous forme de perturbations de vitesse axiale u_x associées (ANDERSSON, BERGGREN et HENNINGSON, 1999).

Pour le régime hypersonique, les streaks constituent un mécanisme de transition important dans des situations où l'écoulement est globalement stable. Leur rôle a été mis en avant pour les géométries de sphère-cône et le blunt-body paradox discutés en introduction (PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2017a). Nous les retrouvons

¹¹ Aussi appelées modes de Klebanoff d'après KENDALL (1985). Nous ne retenons ici que la dénomination générale "streaks"

également autour des éléments de rugosités (RESHOTKO et TUMIN, 2000) ou suite à des interactions non-linéaires (LAIBLE et FASEL, 2016). Nous discutons plus en détails ces aspects dans le Chap. 5.

1.2.4 Instabilité secondaire & interactions

Dans le cas des chemins **A**, **B** et **C**, la croissance modale ou transitoire initiale des perturbations introduit une forte amplification de leur énergie et participe alors à une modification de l'écoulement de base. Cette modification de l'écoulement de base induit une modification des propriétés de stabilité linéaire du système. L'étude de cet écoulement de base modulé périodiquement en temps et en espace par une perturbation de fréquence ω et vecteur d'onde $\mathbf{k}$ constitue le problème de l'instabilité secondaire (HERBERT, 1988).

En pratique, l'écoulement de base modifié supporte de nouvelles instabilités, de fréquences et nombres d'ondes multiples de ceux de l'instabilité primaire ayant produit la déformation. Ces instabilités dites secondaires se révèlent alors dans l'écoulement des structures organisées. Ces perturbations s'amplifient en général plus rapidement que l'instabilité primaire et mènent à la turbulence (SCHMID et HENNINGSON, 2012).

Par ailleurs, la forte amplification de l'instabilité modale ou non-modale primaire peut les amener les ondes de perturbations à saturer en amplitude et déclencher des effets non-linéaires. Ces effets non-linéaires peuvent en partie se présenter sous une forme d'une redistribution de l'énergie initiale des perturbations saturées. Un mécanisme de cette redistribution de l'énergie est alors l'interaction de deux ondes de fréquences ω_1 et ω_2 pour produire une onde résultant de fréquence $\omega_3 = \omega_1 \pm \omega_2$. C'est une forme d'interaction dite **triadique** (CRAIK, 1971) et ce type d'interaction est notamment observé dans la génération de streaks stationnaires par deux ondes obliques de sens opposé (CHANG et MALIK, 1994).

En pratique, l'instabilité secondaire et les interactions non-linéaires peuvent co-exister. Elles sont généralement les dernières étapes avant la cascade d'interactions non-linéaires menant à la turbulence.

1.3 CONCLUSION INTERMÉDIAIRE

Nous avons pu évoquer des étapes pertinentes de transition vers la turbulence pour notre étude. Nous avons également développé certains concepts de stabilité linéaire qui nous seront utiles. Le concept de linéarisation d'opérateur et de stabilité globale sera retrouvé pour le développement de la stratégie de linéarisation discrète et d'extraction d'opérateur linéaire global au Chap. 2. La différence entre la dynamique linéaire et non-linéaire sera détaillée tout au long de nos analyses via l'utilisation de calculs DNS et DNS linéarisés. Enfin, les concepts de stabilité locale et perturbation optimale seront repris dans plusieurs chapitres pour appuyer l'identification des mécanismes observés dans la physique simulée.

L'utilisation de l'ensemble de ces concepts pour capturer et analyser la physique complexe de la transition a nécessité un nombre important de développements que nous résumons par la suite.

 OUTILS POUR L'ANALYSE NUMÉRIQUE

2.1	Équations de Navier-Stokes	34
2.1.1	Variables et adimensionnement	34
2.1.2	Hypothèses sur le mélange de gaz parfaits	35
2.1.3	Système d'équations	36
2.2	Coordonnées généralisées	37
2.2.1	Projection des équations	39
2.2.2	Formulation discrète et conservativité	41
2.3	Construction du code DNS CurviCREAMS	44
2.3.1	Schémas aux différences finies explicites	45
2.3.2	Filtres numériques	48
2.3.3	Intégration en temps	49
2.3.4	Schémas à capture de chocs	50
2.3.5	Construction d'un senseur amélioré	54
2.3.6	Conditions de paroi en coordonnées généralisées	55
2.4	Linéarisation discrète	56
2.4.1	Intégration dans le code non-linéaire	57
2.4.2	Calcul de l'opérateur linéaire et son application	58
2.4.3	Remarques sur l'implémentation	59
2.5	Validation	60
2.5.1	Réflexion d'un pulse acoustique	62
2.5.2	Tube à choc de Sod	64
2.5.3	Choc-onde d'entropie - Cas de Shu & Osher	66
2.5.4	Interaction Shock-Vortex	67
2.5.5	Cylindre non-visqueux à Mach 3	70
2.5.6	Taylor-Green Vortex	72

La simulation de la transition de couche limite en régime hypersonique nécessite la construction d'outils numériques efficaces afin de reproduire fidèlement la croissance et les interactions de perturbations de très faible amplitude. La capture de ces perturbations permet la simulation des dynamiques complexes associées à la naissance de la turbulence. Il y a alors la recherche d'une précision importante, conjointement à une bonne efficacité algorithmique dans un contexte de calcul haute performance. En ce sens, nous décrivons ici les différentes stratégies numériques développées et les compromis effectués. Ceci, dans l'objectif de résoudre les dynamiques linéaires et non-linéaires issus de la résolution des équations de Navier-Stokes pour des applications variées.

2.1 ÉQUATIONS DE NAVIER-STOKES

Nous définissons quelques notations utiles pour la suite. De façon générale, nous cherchons des solutions des équations de Navier-Stokes sur un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$ fermé de son bord $\partial\Omega$ dans un repère cartésien $X(x, y, z)$. Ce domaine est discrétisé par un maillage structuré curviligne $\mathcal{G}$ ayant trois directions (ξ, η, ζ) et un nombre de points $N_p = N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$. Nous faisons usage de la notation compacte $\partial./\partial x = \partial_x$ pour alléger la lecture.

2.1.1 Variables et adimensionnement

Dans le cadre de notre étude, nous cherchons des solutions numériques des équations de Navier-Stokes en régime compressible pour un mélange de gaz parfaits à N_s espèces. Ce système d'équations pilote la dynamique en temps et en espace d'un vecteur d'état décrivant les variables locales du fluide. Nous définissons alors pour la suite de ce manuscrit, les vecteurs d'état des variables conservatives $\mathbf{q}$ et des variables primitives $\mathbf{p}$. Ces états étant définis sur tout le domaine pour N_v variables en chaque point de $\mathcal{G}$, il est utile de préciser qu'ils sont de dimension $N_{dof} = N_v \times N_p$, tels que, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$.

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \rho & \rho u_x & \rho u_y & \rho u_z & \rho E & \rho Y_\alpha \end{pmatrix}^T \quad (2.1)$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \rho & u_x & u_y & u_z & p & Y_\alpha \end{pmatrix}^T \quad (2.2)$$

Avec le vecteur vitesse $\mathbf{u} = (u_x \ u_y \ u_z)^T$. Les variables p , E , ρ et Y_α désignent ici : la pression statique, l'énergie totale, la masse volumique et la fraction massique de l'espèce $\alpha \in [1, N_s]$. Ces variables sont données sans dimension. Cet adimensionnement est fait selon un état de référence acoustique $\bullet_{ref}$, un état infini $\bullet_\infty$ et les nombres sans dimensions usuels rappelés ci-après :

- Nombre de Reynolds : $Re = \rho_{ref} u_\infty L_{ref} / \mu_{ref}$
- Nombre de Mach : $Ma = u_\infty / c_\infty$
- Nombre de Prandtl : $Pr = c_{p,ref} \mu_{ref} / \kappa_{ref}$
- Nombre de Lewis : $Le = \kappa_{ref} / (\rho_{ref} c_{p,ref} D_{ref})$
- Le rapport des capacités thermiques : γ

Avec ces nombres sans dimensions, une température de référence : T_{ref} , et une longueur de référence : L_{ref} , nous pouvons définir le reste des variables de référence :

$$u_{ref} = c_\infty / \sqrt{\gamma_\infty} \quad rho_{ref} = \rho_\infty \quad p_{ref} = \rho_{ref} u_{ref}^2 \quad (2.3)$$

$$t_{ref} = L_{ref} / u_{ref} \quad \mu_{ref} = \mu_\infty \quad \kappa_{ref} = \kappa_\infty \quad (2.4)$$

$$D_{ref} = D_\infty \quad (2.5)$$

Nous avons, la conduction thermique κ , le temps t , la vitesse du son c , la viscosité dynamique μ et le coefficient de diffusion.

2.1.2 Hypothèses sur le mélange de gaz parfaits

Une note importante est à donner quant à la nature du gaz simulé dans notre étude. Les équations étant écrites pour un mélange de gaz parfaits, les coefficients exacts du mélange, à savoir γ et W_t , la masse molaire totale du mélange, peuvent différer des coefficients issus de l'approximation usuelle d'un air mono-espèce pour des températures élevées. Nous proposons de rappeler succinctement les différentes formulations possibles (ANDERSON JR., 2006) pour notre écoulement avant de décrire plus en détail les équations.

- Gaz calorifiquement parfait : les capacités thermiques massiques et volumiques du gaz sont constantes partout. Nous avons l'approximation de l'air comme un gaz parfait utilisée habituellement avec les constantes connues : $\gamma = 1.4$ et $r_{air} = 287.15 \text{ J/kg/K}$. Les variables d'enthalpie et d'énergie interne dépendent explicitement de la température.

$$\begin{aligned} h &= c_p T \\ e &= c_v T \end{aligned}$$

- Gaz thermiquement parfait : Ici les capacités thermiques et la constante des gaz parfaits sont fonctions de la température. L'enthalpie et l'énergie interne ont une dépendance non-linéaire à la température.

$$\begin{aligned} dh &= c_p(T) dT \\ de &= c_v(T) dT \end{aligned}$$

- Mélange de gaz parfaits : chaque gaz obéit à la loi des gaz parfaits et possède ses propres capacités thermiques, énergie interne et enthalpie. La loi des gaz parfaits peut ensuite être définie globalement pour le mélange, mais r_{mix} est variable en temps et en espace et est défini comme $r_{mix} = R/W_t$ avec W_t la masse molaire totale du mélange.

$$p = \rho \frac{R}{W_t} T \quad (2.6)$$

Si le mélange est réactif, il est alors considéré en équilibre ou hors équilibre selon le rapport du temps caractéristique de réaction du mélange et du temps convectif (Nombre de Damköhler). Dans le cas simplifié d'un mélange à l'équilibre chimique nous avons dépendance non-linéaire de l'ensemble des

variables thermodynamiques à la température et aux fractions massiques du mélange.

$$\begin{aligned} h &= h(T, N_1, \dots, N_\alpha) \\ e &= h(T, N_1, \dots, N_\alpha) \\ c_p &= h(T, N_1, \dots, N_\alpha) \\ c_v &= h(T, N_1, \dots, N_\alpha) \end{aligned}$$

Cette formulation requiert une tabulation des variables thermodynamiques en fonction du schéma réactif considéré et de la température.

Dans le cadre de notre étude, la formulation des équations repose sur celle d'un mélange de gaz parfaits non réactif à l'équilibre thermodynamique, composé de deux espèces N_2 et O_2 . Plus de détail sur la formulation de ce mélange peuvent être trouvés dans la thèse de FERRER, 2013.

2.1.3 Système d'équations

Nous explicitons ici le système des équations de Navier-Stokes dans le repère cartésien sur le domaine considéré. Le système est écrit sous forme de flux locaux pour l'évolution des variables conservatives. En séparant les flux convectifs ($\mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{H}$) des flux diffusifs ($\mathbf{F}^v, \mathbf{G}^v, \mathbf{H}^v$), nous pouvons poser :

$$\partial_t \mathbf{q} = \partial_x (\mathbf{F} - \mathbf{F}^v) + \partial_y (\mathbf{G} - \mathbf{G}^v) + \partial_z (\mathbf{H} - \mathbf{H}^v) \quad (2.7)$$

Les flux convectifs pour les équations de continuité, de quantité de mouvement, d'énergie et de transport d'espèces sont définis ci-dessous.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u_x \\ \rho u_x u_x + p \\ \rho u_x u_y \\ \rho u_x u_z \\ (\rho E + p) u_x \\ \rho u_x Y_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho u_y \\ \rho u_y u_x \\ \rho u_y u_y + p \\ \rho u_y u_z \\ (\rho E + p) u_y \\ \rho u_y Y_\alpha \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho u_z \\ \rho u_z u_x \\ \rho u_z u_y \\ \rho u_z u_z + p \\ (\rho E + p) u_z \\ \rho u_z Y_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Les flux dissipatifs et diffusifs, contenant la contribution du tenseur des contraintes visqueuses $\underline{\tau} = \tau_{ij}$, du flux de chaleur Φ et des effets de dissipation sont écrits,

$$\mathbf{F}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ u_x \tau_{xx} + u_y \tau_{xy} + u_z \tau_{xz} - \Phi_x \\ -\rho D_{\alpha,x} + \rho \dot{\omega}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{G}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yz} \\ u_x \tau_{yx} + u_y \tau_{yy} + u_z \tau_{yz} - \Phi_y \\ -\rho D_{\alpha,y} + \rho \dot{\omega}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{H}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ \tau_{zz} \\ u_x \tau_{zx} + u_y \tau_{zy} + u_z \tau_{zz} - \Phi_z \\ -\rho D_{\alpha,z} + \rho \dot{\omega}_\alpha \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Le fluide est considéré Newtonien et en considérant l'hypothèse de Stokes sur la viscosité de volume. Nous pouvons écrire le tenseur d'ordre 2 des contraintes visqueuses $\underline{\tau} = \tau_{ij}$ comme une fonction linéaire du tenseur des déformations.

$$\underline{\tau} = \frac{2}{3}\mu(\nabla \cdot \mathbf{u})\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) \quad (2.12)$$

La viscosité dynamique μ , peut être définie de deux façons. Soit en calculant une viscosité du mélange de gaz parfaits. Soit comme une fonction de la température avec la loi de Sutherland. Par simplification, dans notre étude, le mélange de gaz est considéré figé et la viscosité dynamique est calculée localement par la loi de Sutherland en Eq. ???. Avec la température de référence $T_0 = 273.15K$, la constante $C = 110.5K$ et la viscosité de référence $\mu_0 = 1.716 \times 10^{-5} \text{Pa} \cdot \text{s}$. D'autre part, nous pouvons définir le flux de chaleur $\Phi = \Phi_i$ au sein du fluide par la loi de Fourier. Nous considérons un coefficient de conduction thermique du mélange κ dépendant de la température locale T ,

$$\Phi = -\kappa \nabla T = [\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z]^T. \quad (2.13)$$

Ce système d'équations est donné en coordonnées cartésiennes, nous proposons de l'étendre à un système de coordonnées généralisées.

2.2 COORDONNÉES GÉNÉRALISÉES

La simulation d'objets complexes nécessite l'utilisation de maillages conformes le long des différentes surfaces imposées par la géométrie considérée. Notre maillage $\mathcal{G}$ n'est alors plus orthogonal, mais curviligne, introduisant ainsi un nouveau repère $\mathcal{X}(\xi, \eta, \zeta)$ le long des lignes de $\mathcal{G}$ tel que présenté en Fig. 2.1. L'introduction d'un maillage arbitraire engendre des difficultés numériques dans le cadre d'une résolution d'un système d'EDP par différences finies. En effet, cette dernière

méthode nécessite l'utilisation de maillages cartésiens avec la connaissance du pas d'espace local dans une direction de $\mathcal{G}$, ce qui n'est plus le cas pour un maillage curviligne.

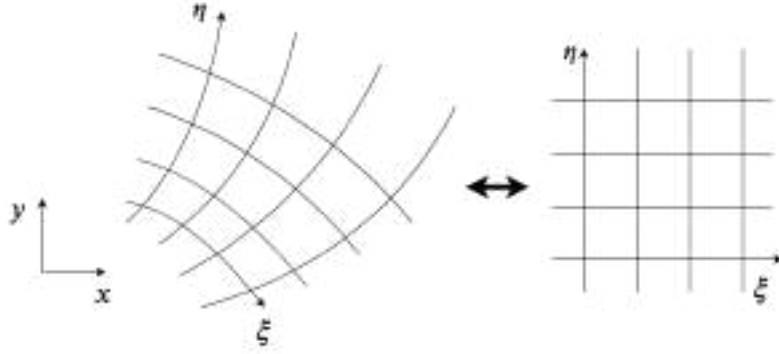


FIGURE 2.1 : Passage du repère cartésien au repère curviligne le long des lignes du maillage

Cette difficulté est contournée par l'utilisation du nouveau repère $\mathcal{X}$, en introduisant une distinction entre deux espaces dans nos simulations, dits espace physique et espace de calcul. Ces espaces sont respectivement celui correspondant à l'échelle réelle de la physique autour de la géométrie et celui étant une abstraction permettant de ramener les équations de Navier-Stokes dans un repère orthonormé pour effectuer une résolution par différences finies. Il est donc nécessaire de définir une transformation géométrique entre l'espace physique $X(x, y, z)$ et l'espace de calcul $\mathcal{X}(\xi, \eta, \zeta)$. Cette transformation est opérée en calculant la matrice jacobienne de passage du repère physique au repère de calcul, que l'on notera $\mathbf{J}_{X \rightarrow \mathcal{X}}$. Il s'agit d'une transformation bijective et différentiable entre les coordonnées (x, y, z) et (ξ, η, ζ) . Les équations 2.14, 2.15 définissent la matrice jacobienne directe $\mathbf{J}_{X \rightarrow \mathcal{X}}$ et son inverse $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow X}^{-1} = \mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow X}$. Nous considérons pour la suite la notation compacte $\partial \xi / \partial x = \xi_x$.

$$\mathbf{J}_{X \rightarrow \mathcal{X}} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow X} = \frac{\partial(\xi, \eta, \zeta)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \hat{\xi}_x & \hat{\xi}_y & \hat{\xi}_z \\ \hat{\eta}_x & \hat{\eta}_y & \hat{\eta}_z \\ \hat{\zeta}_x & \hat{\zeta}_y & \hat{\zeta}_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Les termes de $\mathbf{J}_{X \rightarrow \mathcal{X}}$ et $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow X}$ sont les métriques de la déformation locale subie par un vecteur projeté d'un espace à l'autre. Nous avons également le déterminant de la jacobienne de transformation : $\det \mathbf{J}_{X \rightarrow \mathcal{X}} = J$, mesure de la déformation locale d'un élément de volume. Ces métriques sont définies en tout point du domaine et pour les déformations relatives dans les trois directions de $\mathbb{R}^3$.

L'écriture de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$ nous permet alors de définir notre opérateur de dérivation dans le repère $\mathcal{X}$ depuis l'opérateur usuel de dérivation dans le repère cartésien $\nabla_{\mathbf{x}} = (\partial_x \partial_y \partial_z)^T$.

$$\nabla_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} \partial_{\xi} \\ \partial_{\eta} \\ \partial_{\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\xi} & x_{\eta} & x_{\zeta} \\ y_{\xi} & y_{\eta} & y_{\zeta} \\ z_{\xi} & z_{\eta} & z_{\zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

La transformation inverse se fait directement depuis l'Eq. 2.16. L'opérateur de dérivation obtenu est ainsi utilisé pour la projection du système des équations de Navier-Stokes dans le repère de calcul $\mathcal{X}$.

Nous ajoutons enfin quelques notations utiles dans l'écriture des termes projetés. Ces notations sont ici données pour la direction ξ et généralisées aux autres directions (η, ζ) .

$$\tilde{\xi}_x = \frac{\hat{\xi}_x}{J} \quad \tilde{\xi}_x = \frac{\xi_x}{\|\nabla_{\mathbf{x}} \xi\|} \quad (2.17)$$

$$\|\nabla_{\mathbf{x}} \xi\| = (\hat{\xi}_x^2 + \hat{\xi}_y^2 + \hat{\xi}_z^2)^{1/2} \quad \nabla_{\mathbf{x}} \xi = (\tilde{\xi}_x \ \tilde{\xi}_y \ \tilde{\xi}_z)^T \quad (2.18)$$

2.2.1 Projection des équations

En considérant la relation chainée $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathbf{x}} \nabla_{\mathcal{X}} = \nabla_{\mathbf{x}}$ nous pouvons directement développer la forme compacte des équations de Navier-Stokes donnée en Eq. 2.7. L'expression analytique retrouvée est celle donnée par HIXON (2000) et VINOKUR (1974).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} \frac{1}{J} &= \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\xi}_x \mathbf{F} + \tilde{\xi}_y \mathbf{G} + \tilde{\xi}_z \mathbf{H}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta_x \mathbf{F} + \eta_y \mathbf{G} + \eta_z \mathbf{H}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta_x \mathbf{F} + \zeta_y \mathbf{G} + \zeta_z \mathbf{H}) \\ &- \frac{\partial}{\partial \xi} (\tilde{\xi}_x \mathbf{F}^v + \tilde{\xi}_y \mathbf{G}^v + \tilde{\xi}_z \mathbf{H}^v) \\ &- \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta_x \mathbf{F}^v + \eta_y \mathbf{G}^v + \eta_z \mathbf{H}^v) \\ &- \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta_x \mathbf{F}^v + \zeta_y \mathbf{G}^v + \zeta_z \mathbf{H}^v) \\ &+ (\mathbf{F} - \mathbf{F}^v) I_{\tilde{\xi}} + (\mathbf{G} - \mathbf{G}^v) I_{\eta} + (\mathbf{H} - \mathbf{H}^v) I_{\zeta} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Cette projection est la forme dite conservative forte des équations de Navier-Stokes en coordonnées généralisées. Nous pouvons noter l'apparition des trois termes invariants de transformation $I_{\tilde{\xi}}$, I_{η} et I_{ζ} .

$$\begin{aligned} I_{\tilde{\xi}} &= (\tilde{\xi}_x)_{\xi} + (\eta_x)_{\eta} + (\zeta_x)_{\zeta} \\ I_{\eta} &= (\tilde{\xi}_y)_{\xi} + (\eta_y)_{\eta} + (\zeta_y)_{\zeta} \\ I_{\zeta} &= (\tilde{\xi}_z)_{\xi} + (\eta_z)_{\eta} + (\zeta_z)_{\zeta} \end{aligned}$$

Ces termes assurent la conservativité de l'Eq. 2.19 dans le repère de calcul. Il est démontré que dans un espace continu, ces derniers valent analytiquement zéro et peuvent être supprimés. Cependant, dans le cadre discret, cette suppression dépend du respect de certaines bonnes propriétés du schéma employé pour le calcul des métriques. Avec le schéma choisi, l'expression des métriques doit vérifier les lois de conservation géométrique (GCL) discrètes, telle qu'explicitées par THOMAS et LOMBARD (1979) et données ci-dessous.

$$I_{\xi} = I_{\eta} = I_{\zeta} = 0 \quad (2.20)$$

Si l'expression des métriques respecte les GCL, alors elles peuvent être supprimées et le système discret 2.19 est conservatif. C'est ce que nous appliquons dans notre cas. Les contraintes respectées seront discutées en Sec. 2.2.2.

Nous pouvons ajouter que la projection 2.19 amène à la définition de nouveaux termes projetés dans le repère $\mathcal{X}$. Nous avons les vitesses contravariantes de la transformation.

$$\tilde{u}_{\xi} = \nabla_x \xi \cdot \mathbf{u} = \xi_x u_x + \xi_y u_y + \xi_z u_z \quad (2.21)$$

$$\tilde{u}_{\eta} = \nabla_x \eta \cdot \mathbf{u} = \eta_x u_x + \eta_y u_y + \eta_z u_z \quad (2.22)$$

$$\tilde{u}_{\zeta} = \nabla_x \zeta \cdot \mathbf{u} = \zeta_x u_x + \zeta_y u_y + \zeta_z u_z \quad (2.23)$$

Ces composantes contravariantes sont orientées selon les directions (ξ, η, ζ) du maillage. Ensuite nous pouvons définir les composantes du tenseur des déformations $\underline{\tau}$ dans le repère curviligne.

$$\tau_{x\xi} = \tau_{xx}\xi_x + \tau_{xy}\xi_y + \tau_{xz}\xi_z$$

$$\tau_{y\xi} = \tau_{yx}\xi_x + \tau_{yy}\xi_y + \tau_{yz}\xi_z$$

$$\tau_{z\xi} = \tau_{zx}\xi_x + \tau_{zy}\xi_y + \tau_{zz}\xi_z$$

$$\tau_{x\eta} = \tau_{xx}\eta_x + \tau_{xy}\eta_y + \tau_{xz}\eta_z$$

$$\tau_{y\eta} = \tau_{yx}\eta_x + \tau_{yy}\eta_y + \tau_{yz}\eta_z$$

$$\tau_{z\eta} = \tau_{zx}\eta_x + \tau_{zy}\eta_y + \tau_{zz}\eta_z$$

$$\tau_{x\zeta} = \tau_{xx}\zeta_x + \tau_{xy}\zeta_y + \tau_{xz}\zeta_z$$

$$\tau_{y\zeta} = \tau_{yx}\zeta_x + \tau_{yy}\zeta_y + \tau_{yz}\zeta_z$$

$$\tau_{z\zeta} = \tau_{zx}\zeta_x + \tau_{zy}\zeta_y + \tau_{zz}\zeta_z$$

Nous ajoutons également les composantes du vecteur de flux de chaleur,

$$\tilde{\Phi}_{\xi} = \Phi_x \xi_x + \Phi_y \xi_y + \Phi_z \xi_z$$

$$\tilde{\Phi}_{\eta} = \Phi_x \eta_x + \Phi_y \eta_y + \Phi_z \eta_z$$

$$\tilde{\Phi}_{\zeta} = \Phi_x \zeta_x + \Phi_y \zeta_y + \Phi_z \zeta_z$$

Après ces développements, la forme curviligne de chacun de ces termes est employée et une écriture compacte équivalente de l'Eq. 2.19 est implémentée. Nous dérivons les flux convectifs,

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \rho \tilde{u}_{\xi} \\ \rho \tilde{u}_{\xi} u_x + \xi_x p \\ \rho \tilde{u}_{\xi} u_y + \xi_y p \\ \rho \tilde{u}_{\xi} u_z + \xi_z p \\ (\rho E + p) \tilde{u}_{\xi} \\ \rho \tilde{u}_{\xi} Y_{\alpha} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} \rho \tilde{u}_{\eta} \\ \rho \tilde{u}_{\eta} u_x + \eta_x p \\ \rho \tilde{u}_{\eta} u_y + \eta_y p \\ \rho \tilde{u}_{\eta} u_z + \eta_z p \\ (\rho E + p) \tilde{u}_{\eta} \\ \rho \tilde{u}_{\eta} Y_{\alpha} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} \rho \tilde{u}_{\zeta} \\ \rho \tilde{u}_{\zeta} u_x + \zeta_x p \\ \rho \tilde{u}_{\zeta} u_y + \zeta_y p \\ \rho \tilde{u}_{\zeta} u_z + \zeta_z p \\ (\rho E + p) \tilde{u}_{\zeta} \\ \rho \tilde{u}_{\zeta} Y_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

et les flux diffusifs,

$$\tilde{\mathbf{E}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{x\xi} \\ \tau_{x\eta} \\ \tau_{y\xi} \\ u\tau_{x\xi} + v\tau_{x\eta} + w\tau_{x\zeta} - \Phi_{\xi} \\ -\rho D_{\alpha} + \rho \dot{\omega}_{\alpha} \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{F}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{x\eta} \\ \tau_{y\eta} \\ \tau_{z\eta} \\ u\tau_{x\eta} + v\tau_{y\eta} + w\tau_{z\eta} - \Phi_{\eta} \\ -\rho D_{\alpha} + \rho \dot{\omega}_{\alpha} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{x\xi} \\ \tau_{y\xi} \\ \tau_{z\xi} \\ u\tau_{x\xi} + v\tau_{y\xi} + w\tau_{z\xi} - \Phi_{\xi} \\ -\rho D_{\alpha} + \rho \dot{\omega}_{\alpha} \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Lors de la projection des équations de Navier-Stokes sur le repère curviligne, nous avons évoqué la nécessité de vérifier certaines propriétés dans l'expression des métriques discrètes, celles-ci sont explicitées ci-après.

2.2.2 Formulation discrète et conservativité

Notons d'abord que l'obtention des termes métriques de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$ nécessaire à l'écriture de l'équation 2.19 ne se fait pas directement. Un premier calcul des métriques directes permet d'obtenir ensuite par inversion de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$ des métriques du type ξ_x . Le calcul donne l'expression classique des métriques inverses.

$$\begin{aligned} \xi_x &= y_{\eta} z_{\zeta} - y_{\zeta} z_{\eta} & \eta_x &= y_{\zeta} z_{\xi} - y_{\xi} z_{\eta} & \zeta_x &= y_{\xi} z_{\eta} - y_{\eta} z_{\xi} \\ \xi_y &= z_{\eta} x_{\zeta} - z_{\zeta} x_{\eta} & \eta_y &= z_{\xi} x_{\zeta} - z_{\zeta} x_{\xi} & \zeta_y &= z_{\xi} x_{\eta} - x_{\xi} z_{\eta} \\ \xi_z &= x_{\eta} y_{\zeta} - x_{\zeta} y_{\eta} & \eta_z &= x_{\xi} y_{\zeta} - x_{\zeta} y_{\xi} & \zeta_z &= x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Avec le déterminant de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$

$$J^{-1} = x_{\xi} y_{\eta} z_{\zeta} + x_{\zeta} y_{\xi} z_{\eta} + x_{\eta} y_{\zeta} z_{\xi} - x_{\xi} y_{\zeta} z_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi} z_{\zeta} - x_{\zeta} y_{\eta} z_{\xi} \quad (2.28)$$

Bien que cette forme des métriques assure analytiquement le respect de l'équation 2.20. Le système d'équations 2.19 est résolu sous forme discrète impliquant l'utilisation d'un opérateur de différentiation discret δ^0 . Dans le cadre d'une approximation par différences-finies centrées, nous retrouvons l'expression générale suivante de δ^0 pour un schéma linéaire à l'ordre $2N$ appliqué au point i dans la direction ξ .

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi} = \delta_\xi^0(x_i) = \sum_{k=-N}^N (a_k x_{i+k}) \quad (2.29)$$

En utilisant cette expression, l'opérateur δ_0 n'implique pas nécessairement la commutativité des dérivées pour un produit (PULLIAM et STEGER, 1980). Ceci empêche le respect des GCL dans le cadre discret avec la formulation donnée en Eq. 2.27. Le non-respect des GCL amène alors à une dérive de la solution et une perte de la conservativité.

Afin de pallier à ce problème, une formulation analytiquement identique, dite "conservative" des métriques a été proposée par THOMAS et LOMBARD (1979).

$$\hat{\xi}_x = (y_\eta z)_\xi - (y_\xi z)_\eta \quad \hat{\eta}_x = (y_\xi z)_\xi - (y_\xi z)_\xi \quad \hat{\zeta}_x = (y_\xi z)_\eta - (y_\eta z)_\xi \quad (2.30)$$

$$\hat{\xi}_y = (z_\eta x)_\xi - (z_\xi x)_\eta \quad \hat{\eta}_y = (z_\xi x)_\xi - (z_\xi x)_\xi \quad \hat{\zeta}_y = (z_\xi x)_\eta - (z_\eta x)_\xi \quad (2.31)$$

$$\hat{\xi}_z = (x_\eta y)_\xi - (x_\xi y)_\eta \quad \hat{\eta}_z = (x_\xi y)_\xi - (x_\xi y)_\xi \quad \hat{\zeta}_z = (x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi \quad (2.32)$$

Avec pour expression de $\det(\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}})$.

$$J^{-1} = \frac{1}{3} (x_\xi \xi_x + x_\eta \eta_x + x_\zeta \zeta_x + y_\xi \xi_y + y_\eta \eta_y + y_\zeta \zeta_y + z_\xi \xi_z + z_\eta \eta_z + z_\zeta \zeta_z) \quad (2.33)$$

La démonstration donnée par HIXON (2000) montre que cette formulation permet la commutativité des dérivées avec les produits pour un schéma aux différences-finies centré et assure la propriété $I_\xi = I_\eta = I_\zeta = 0$.

La précision du calcul numérique du système 2.19 dépend alors directement de la précision avec laquelle les métriques sont obtenues numériquement. Cette précision dépend de l'ordre de δ^0 , ou de la formulation analytique des termes métriques. Pour compléter la formulation conservative, suite à une analyse géométrique du maillage et de δ^0 , basée sur des surfaces vectorielles, DENG et al. (2013) ont proposé une expression dite "conservative symétrique" des termes de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$. Cette formulation augmente la robustesse de la transformation dans le cadre de

grille fortement déformée et assure ainsi un gain de précision sur le calcul des flux de Navier-Stokes exprimés dans le repère curviligne.

$$\hat{\xi}_x = \frac{1}{2}[(y_\eta z)_\xi - (y_\xi z)_\eta + (z_\xi y)_\eta - (z_\eta y)_\xi] \quad (2.34)$$

$$\hat{\eta}_x = \frac{1}{2}[(y_\xi z)_\xi - (y_\xi z)_\xi + (z_\xi y)_\xi - (z_\xi y)_\xi] \quad (2.35)$$

$$\hat{\xi}_x = \frac{1}{2}[(y_\xi z)_\eta - (y_\eta z)_\xi + (z_\eta y)_\xi - (z_\xi y)_\eta] \quad (2.36)$$

$$\hat{\xi}_y = \frac{1}{2}[(z_\eta x)_\xi - (z_\xi x)_\eta + (x_\xi z)_\eta - (x_\eta z)_\xi] \quad (2.37)$$

$$\hat{\eta}_y = \frac{1}{2}[(z_\xi x)_\xi - (z_\xi x)_\xi + (x_\xi z)_\xi - (x_\xi z)_\xi] \quad (2.38)$$

$$\hat{\xi}_y = \frac{1}{2}[(z_\xi x)_\eta - (z_\eta x)_\xi + (x_\eta z)_\xi - (x_\xi z)_\eta] \quad (2.39)$$

$$\hat{\xi}_z = \frac{1}{2}[(x_\eta y)_\xi - (x_\xi y)_\eta + (y_\xi x)_\eta - (y_\eta x)_\xi] \quad (2.40)$$

$$\hat{\eta}_z = \frac{1}{2}[(x_\xi y)_\xi - (x_\xi y)_\xi + (y_\xi x)_\xi - (y_\xi x)_\xi] \quad (2.41)$$

$$\hat{\xi}_z = \frac{1}{2}[(x_\xi y)_\eta - (x_\eta y)_\xi + (y_\eta x)_\xi - (y_\xi x)_\eta] \quad (2.42)$$

Une nouvelle expression symétrique du déterminant de $\mathbf{J}_{\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}}$ s'écrit alors comme il suit.

$$J^{-1} = \frac{1}{3} \left[(x_\xi x + y_\xi y + z_\xi z)_\xi + (x_\eta x + y_\eta y + z_\eta z)_\eta + (x_x + y_x + z_x)_\xi \right] \quad (2.43)$$

En supplément des reformulations précédentes, le respect des GCL demande d'apporter une attention particulière aux différentiations successives impliquées dans le calcul des métriques directes, inverses puis des flux. Pour l'explicitier, nous introduisons pour la suite trois opérateurs de dérivation numérique de la forme donnée par l'Eq. 2.29 et nommés $\delta_\xi^1, \delta_\xi^2, \delta_\xi^3$ pour la direction ξ . Ils sont utilisés respectivement pour le calcul des termes métriques directs, des termes métriques inverses et pour le calcul des champs dérivés de la solution. Avec cette notation, DENG et al. (2011) et HIXON (2000) démontrent que :

$$\delta^2 \neq \delta^3 \implies \text{GCL} \neq 0 \quad (2.44)$$

Cette dernière relation amène alors à deux remarques :

1. la relation $\delta_\xi^2 = \delta_\xi^3$ doit être respectée, autrement dit, le schéma employé pour la différentiation des flux de Navier-Stokes dans une direction doit être le même que celui employé pour le calcul des métriques inverses ;
2. la relation $\delta_\xi^1 = \delta_\xi^2$ ne doit pas nécessairement être vérifiée pour assurer l'égalité 2.20, mais son imposition réduit substantiellement les erreurs numériques liées à la transformation curviligne.

Pour reprendre la terminologie utilisée par DENG et al. (2011), le respect de ces deux remarques conjointement à l'utilisation d'une expression symétrique et conservative des métriques amène à la méthode dite "Symmetric Conservative Metrics Method" (SCMM). Dans le cadre de notre étude, nous choisissons d'employer cette

approche, garantissant la plus grande précision, pour le calcul numérique du système 2.19.

En dernier lieu, nous pouvons ajouter que la contrainte sur les opérateurs $\delta^1 = \delta^2 = \delta^3$ complexifie l'approche numérique envisageable. Spécialement dans le cadre du régime compressible où sont généralement utilisés des schémas non-linéaires de type WENO ou TENO. Ces schémas voient la forme de leur opérateur δ^3 changer localement au cours du calcul selon la régularité de la solution. L'égalité $\delta^2 = \delta^3$ impose alors de recalculer les métriques localement à chaque changement de δ^3 . Ceci alourdit, voire rend impossible le respect de la conservativité pour la transformation curviligne. Il faut noter que certaines techniques ont été développées pour contourner ce problème des schémas non-linéaires (NONOMURA, IIZUKA et FUJII, 2010). Elles ont été testées dans le cadre de cette étude, mais n'ont pas été retenues de par la complexité et le coût de calcul accru entraîné.

Devant les spécificités amenées par la transformation curviligne, il est apparu nécessaire de trouver une stratégie numérique permettant de garantir la précision de la solution et la robustesse du schéma sur des écoulements transitionnels à nombre de Mach élevé. En ce sens, les diverses formulations des métriques présentées ont été intégrées dans le nouveau code CurviCREAMS. Les études préliminaires sur ces formulations ont ensuite conduit à privilégier l'approche SCMM pour les simulations présentées dans les sections suivantes.

2.3 CONSTRUCTION DU CODE DNS curvicreams

La transformation du code DNS vers un système de coordonnées curvilignes impose de nouvelles contraintes sur la formulation numérique à employer pour réaliser les calculs. Ces contraintes ont amené à réécrire en grande partie le code initial CREAMS (FERRER, 2013), utilisant des schémas WENO7 sur des maillages cartésiens, pour l'amener à sa formulation actuelle CurviCREAMS sur maillage curviligne avec schémas d'ordre élevé. Parmi les besoins auxquels le code devait répondre nous pouvons citer :

- assurer le maintien de l'ordre et de la précision sur des géométries complexes ;
- permettre la bonne capture de fluctuations de faible amplitude de l'écoulement
- assurer la robustesse du calcul et la capture des ondes de choc à haut nombre de Mach
- permettre l'injection de perturbations diverses ;
- une intégration efficace des méthodes numériques et de la parallélisation dans un contexte HPC

Ces contraintes ont amené à un ensemble de choix et de compromis issus de divers essais d'implémentation. En figure 2.2, nous présentons une vue générale de l'algorithme global du code CurviCREAMS qui permet de mieux appréhender les diverses parties du solveur, abordées par la suite. L'algorithme final retenu pour

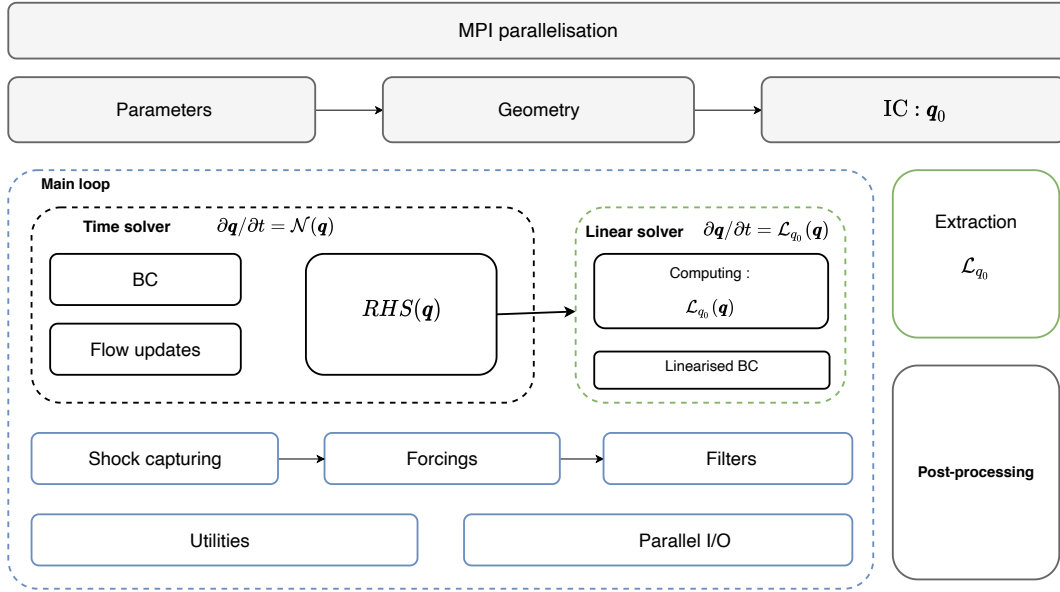


FIGURE 2.2 : Vue générale du code DNS CurviCREAMS

le traitement du problème de la transition en régime hypersonique repose sur les briques élémentaires suivantes, développées et implémentées pour cette étude.

- Schémas aux différences-finies linéaires, explicites, d'ordre élevé et optimisés.
- Traitement des conditions limites par décentrage et ordre élevé.
- Filtres sélectifs linéaires, d'ordre élevé et optimisés.
- Schémas d'intégration en temps explicites type Runge-Kutta, optimisés ou non.
- Capture de chocs par filtrage adaptatif non-linéaire et senseur de chocs.
- Distributions localisées de perturbations stationnaires et instationnaires.
- Architecture MPI¹ avec gestion d'entrée/sortie basée sur un format CGNS + HDF5 parallèle.
- Linéarisation discrète et extraction d'opérateur linéaire global.

2.3.1 Schémas aux différences finies explicites

L'opérateur de dérivation numérique dans notre cas doit répondre à trois besoins principaux. Premièrement, permettre une bonne estimation des métriques de la transformation curviligne. deuxièmement, cet opérateur doit assurer une bonne résolution du contenu spectral de notre écoulement pour capturer les fluctuations les plus fines. Enfin, dans un contexte de calcul massivement parallèle, une bonne efficacité algorithmique doit être assurée. Ces contraintes ont amené à un changement d'approche vis-à-vis de la version cartésienne initiale de CREAMS, utilisant un schéma WENO. Bien que très adaptés aux calculs d'écoulements compressibles

¹ Message Passing Interface : https://fr.wikipedia.org/wiki/Message_Passing_Interface

avec discontinuités les schémas WENO se révèlent trop diffusifs et dispersifs dans les zones régulières de l'écoulement. De plus, leur application dans le cadre curviligne est largement complexifiée par la formulation non-linéaire et locale du schéma comme nous l'avons explicité précédemment. Ainsi, le choix de l'opérateur de dérivation s'est tourné vers des schémas aux différences finies centrés optimisés d'ordre élevé types DRP (Dispersion Relation Preserving) initialement formulés par TAM et WEBB (1993). Ces schémas offrent l'avantage, pour un même nombre de points, de garantir une résolution supérieure du contenu fréquentiel de la solution en comparaison aux schémas centrés classiques ou aux schémas non-linéaires type WENO. Ils ont également l'avantage d'offrir une intégration simple permettant une grande efficacité dans les boucles de calcul intensif.

Nous pouvons distinguer deux zones pour la différentiation des variables :

- la zone intérieure, pour laquelle aucun point du schéma se situe sur un bord $\partial\Omega$;
- la zone de bords pour laquelle les valeurs des points sont données par les conditions aux limites.

Nous considérons alors deux approches pour le traitement de ces cas. Une approche par différences-finies centrées pour la zone intérieure et une approche par différence-finies progressivement décentrées pour les points proches de $\partial\Omega$. L'ensemble des schémas permettant de traiter ces deux cas est contenu dans l'opérateur de dérivation global $\mathcal{C}_{fd}$.

Pour le traitement de la zone intérieure, nous reprenons la formulation classique d'un schéma centré ($M = N$) telle que donnée en Eq. 2.29

$$\frac{\partial x_i}{\partial \xi} = \sum_{j=-M}^N a_j x_i + j \Delta \xi \quad (2.45)$$

L'optimisation des propriétés dispersives du schéma s'effectue en considérant la différentiation d'une fonction harmonique du type $f(\xi) = \exp(ikj\Delta\xi)$. Avec un nombre d'onde k et une position $\xi_j = j\Delta\xi$. L'utilisation de cette fonction harmonique dans l'expression 2.45 permet d'obtenir alors le nombre d'onde modifié $k^*\Delta\xi$ du schéma.

$$k^*\Delta\xi = \sum_{j=-N}^N a_j \sin ik\Delta\xi \quad (2.46)$$

Nous considérons la résolution spectrale idéale : $k\Delta\xi$ et nous suivons l'approche de BOGEY et BAILLY, 2004. La résolution spectrale de l'opérateur δ^0 peut être optimisée en minimisant une intégrale décrivant l'écart entre le nombre d'onde modifié du schéma et la réponse idéale attendue entre les nombres d'ondes (k_0, k_1) . L'optimisation est possible par diminution de l'ordre effectif du schéma permettant d'obtenir des degrés de liberté supplémentaires sur les coefficients. Avec le système linéaire permettant d'obtenir les coefficients du schéma. On ajoute à la place

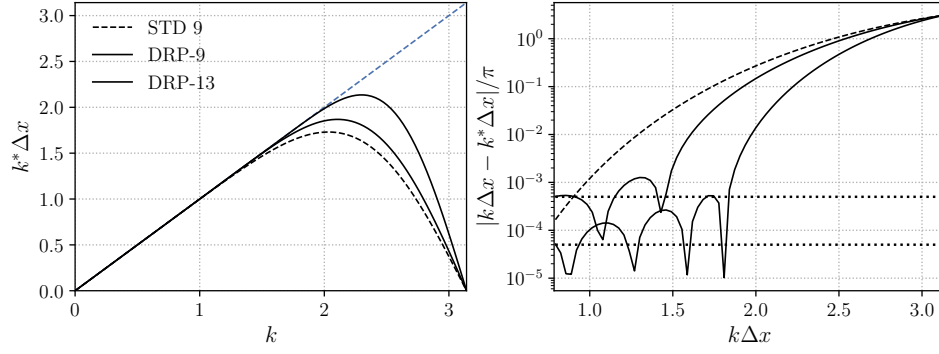


FIGURE 2.3 : Propriétés spectrales de différents jeux de coefficients. Continu : schémas DRP sur N points suivant la méthode de BOGEY et BAILLY (2004); tirets : schéma centré standard. Réponse spectrale (gauche) et erreur de dispersion (droite).

de l'équation permettant d'avoir l'ordre de précision formel maximal, une équation relative à une contrainte visant à réduire l'erreur spectrale,

$$\int_{\ln k_0}^{\ln k_1} |k^* \Delta \xi - k \Delta \xi| d \ln(k \Delta \xi) \quad (2.47)$$

Un exemple de réponse optimisée pour deux schémas centrés est donné en Fig. 2.3. Nous remarquons l'amélioration substantielle de résolution fréquentielle vis-à-vis des schémas usuels pour le même nombre de points. Avec la figure 2.3 à droite, nous pouvons également déterminer une résolution spatiale minimale acceptable pour le schéma en considérant le nombre d'onde $\lambda_j = 2\pi/k^*$. Dans le cadre des schémas DRP sur 9-points, BOGEY et BAILLY (2004) montrent que les ondes sont correctement capturées avec 6 points par longueur d'ondes.

Pour la zone proche de $\partial\Omega$ où le schéma centré intérieur franchit le bord, deux approches sont généralement suivies. Premièrement l'approche "ghost-cells" permettant de conserver un schéma centré partout en utilisant des cellules fictives - dites fantômes - de l'autre côté de la condition au bord. L'imposition de conditions de Dirichlet ou Neumann se fait alors par symétrie ou anti-symétrie des valeurs de $\mathbf{q}$ répétées dans les cellules fantômes. Cette approche, bien que commode, a tendance à introduire une erreur excessive sur les ondes réfléchies (XAVIER, s. d.).

C'est pour cette raison que nous faisons le choix de l'utilisation de schémas décentrés aux bords. Leur expression est identique à l'Eq. 2.45, avec seulement $M \neq N$. Ces derniers utilisent uniquement les points à l'intérieur de Ω pour estimer les quantités sur $\partial\Omega$. La difficulté pour cette approche réside dans la stabilité des schémas décentrés d'ordre élevé et l'imposition correcte des valeurs pour certaines conditions de Neumann en curviligne. Pour pallier cette perte de stabilité, nous appliquons un filtrage décrit en section 2.3.2. La figure 2.4 présente le choix de décentrage fait pour notre étude. Un passage progressif d'un schéma centré sur 9 points vers un schéma décentré sur 3 points, d'ordre deux se fait à l'approche du bord. Nous pouvons noter que ce dernier schéma d'ordre 2 sur le bord peut être aisément remplacé par un schéma décentré d'ordre 4 sur 5 points pour des conditions d'écoulement peu sévères.

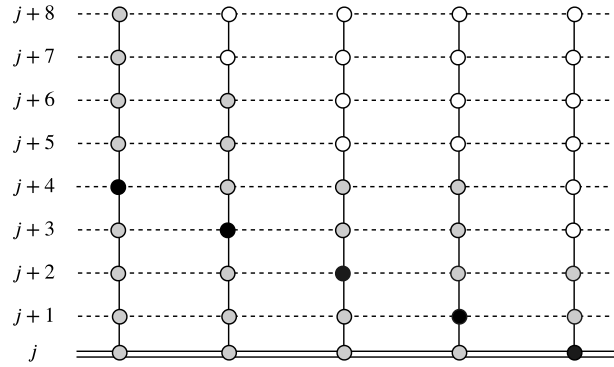


FIGURE 2.4 : Stratégie de décentrage progressif employée dans CREAMS

En conclusion, l'opérateur de dérivation $\mathcal{C}_{fd}$ est constitué de schémas centrés optimisés à l'intérieur du domaine et de schémas réduits puis décentrés sur les bords. Plusieurs combinaisons sont possibles selon l'application envisagée et sont présentées dans le tableau 2.1.

Schéma global	Intérieur	Bords
$\mathcal{C}_{fd-92}$	DRP 9-points	Décentrage vers l'ordre 2
$\mathcal{C}_{fd-92}$	Standard 9-points	Décentrage vers l'ordre 2
$\mathcal{C}_{fd-94}$	DRP 9-points	Décentrage vers l'ordre 4
$\mathcal{C}_{fd-52}$	Standard 5-points	Décentrage vers l'ordre 4

TABLE 2.1 : Récapitulatif des schémas employés

2.3.2 Filtres numériques

Nous avons souligné précédemment que les schémas optimisés d'ordre élevé se révèlent souvent trop peu dissipatifs. Cette faible diffusion entraîne une erreur cumulée sous forme d'oscillations numériques parasites à des nombres d'ondes élevés. Une solution efficace est de venir filtrer ces oscillations (VASILYEV, LUND et MOIN, 1998). Des filtres numériques spéciaux sont alors conçus pour venir dissiper uniquement les oscillations à des longueurs d'ondes supérieures à la résolution spectrale minimale autorisée par le schéma de dérivation. Selon le même principe que pour les schémas optimisés, les réponses de ces filtres sont optimisées (BOGEY et BAILLY, 2004) afin de cibler la dissipation sur les nombres d'ondes mal résolus par $\mathcal{C}_{fd}$.

En supplément de la stabilisation des filtres centrés, d'autres filtres décentrés sont définis pour le traitement des points de parois (BERLAND et al., 2007). Les schémas de dérivation décentrés pouvant se révéler particulièrement instables, cette stratégie permet de venir stabiliser le calcul sur les bords.

Dans le même esprit que pour $\mathcal{C}_{fd}$, nous pouvons définir un opérateur de dissipation global $\mathcal{D}_f$, basé sur des filtres linéaires, d'ordre élevé et optimisés. Nous pou-

vons régler le niveau de dissipation de cet opérateur avec une variable $a_f \in [0, 1]$ de sorte à obtenir l'expression générale suivante.

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - a_f \mathcal{D}_f(\mathbf{q}) \quad (2.48)$$

Avec le terme de dissipation $\mathcal{D}_f$ exprimé avec la forme classique d'un filtre explicite pour une variable arbitraire au point i , ϕ_i .

$$\mathcal{D}_f(\phi_i) = f_0 \phi_i + 2 \sum_{m=-M}^M f_m \phi_{i+m} \quad (2.49)$$

L'opérateur de filtrage obtenu est appliqué à chaque itération, sur l'ensemble des points du domaine, après le schéma d'intégration temporelle.

2.3.3 Intégration en temps

Trois méthodes d'intégration en temps sont implémentées pour permettre d'avoir un outil général. Le choix de la méthode se fait alors selon les besoins de robustesse, rapidité ou précision. Nous listons ces schémas ci-dessous.

- Euler explicite : méthode classique d'ordre 1 ;
- Runge Kutta 3 - TVD : méthode d'intégration à trois étapes d'ordre 3, low-storage ;
- Runge Kutta 4-6 : méthode d'intégration à six étapes d'ordre 4, optimisée et low-storage.

Seuls les deux derniers schémas sont décrits sous la forme générale d'un schéma Runge-Kutta low-storage.

2.3.3.1 Schémas multi-étapes low-storage

Nous considérons l'évolution en temps de la solution $\mathbf{q}$ donnée par l'opérateur non-linéaire des équations de Navier-Stokes $\mathcal{N}(\mathbf{q})$.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{N}(\mathbf{q}) \quad (2.50)$$

Si nous notons $\mathbf{q}^{n+1}$ la solution à l'instant futur $t_{n+1} = t_n + \Delta t$, une formulation compacte et à faible coût mémoire d'un schéma Runge-Kutta à plusieurs étapes peut être obtenue suivant l'approche de WILLIAMSON (1980). Ce schéma contient alors n_{steps} étapes avec des solutions $\mathbf{q}^s$ aux temps intermédiaires $s \in [1, n_{steps} - 1]$. Nous considérons également une variable de stockage intermédiaire ω^n à l'instant n et nous pouvons alors écrire la forme "low-storage" de notre schéma Runge-Kutta.

$$\begin{aligned} \omega^s &= \alpha_s \omega^{s-1} + J \Delta t \mathbf{F}(\mathbf{q}^s) \\ \mathbf{q}^{s+1} &= \mathbf{q}^s + \beta_s \omega^s \end{aligned} \quad (2.51)$$

Les nouveaux coefficients α_s et β_s sont obtenus à partir de la formulation classique du schéma Runge-Kutta considéré. Un dernier coefficient c_s est défini pour obtenir le pas de temps intermédiaire $c_s \Delta t$.

Avec cette définition, nous pouvons écrire le schéma Runge-Kutta trois étapes de GOTTLIEB et SHU (1998). Ce dernier permet de garantir une intégration temporelle à l'ordre 3. L'ajout de la propriété TVD, tend à limiter les divergences de la solution en présence de forts gradients.

Cette propriété est imposée par une restriction sur le pas de temps via la condition CFL et un choix particulier des coefficients. Nous pouvons d'abord donner le schéma RK3-TVD classique en Eq. 2.54.

$$u^{(1)} = u^n + \Delta t L(u^n), \quad (2.52)$$

$$u^{(2)} = \frac{3}{4}u^n + \frac{1}{4}u^{(1)} + \frac{1}{4}\Delta t L(u^{(1)}), \quad (2.53)$$

$$u^{(n+1)} = \frac{1}{3}u^n + \frac{2}{3}u^{(2)} + \frac{2}{3}\Delta t L(u^{(2)}) \quad (2.54)$$

Sa forme low-storage est ensuite obtenue par manipulation en suivant la conversion de CARPENTER et KENNEDY (1994) indiquée par GOTTLIEB et SHU (1998).

2.3.3.2 Runge Kutta 4-6 étapes

Le besoin de pouvoir aller vers des schémas temps-espace d'ordre élevés et optimisés pour des simulations aéroacoustiques, turbulentes ou transitionnelles, a amené à l'ajout d'un schéma Runge-Kutta supplémentaire. Ce schéma low-storage est conçu pour limiter les erreurs de dispersion et de dissipation. De plus il permet de garantir une précision d'ordre 4 pour des opérateurs non-linéaires.

Les coefficients α_i, β_i, c_i sont obtenus avec la procédure d'optimisation développée par BERLAND, BOGEY et BAILLY (2006). Nous commençons par optimiser les six coefficients γ_i du schéma linéaire. Les quatre premiers sont fixés à la valeur $1/i!$, permettant d'assurer l'ordre quatre. Les deux derniers coefficients sont choisis par optimisation des propriétés dispersives et dissipatives du schéma. Ensuite une conversion vers la formulation low-storage non-linéaire à deux variables proposée par WILLIAMSON (1980) permet d'obtenir les coefficients α_i, β_i du schéma non-linéaire.

Au-delà de permettre une montée en ordre, le schéma RK4-6NL se montre en pratique plus robuste que le schéma RK3-TVD. Cette différence s'avère utile pour le calcul de champs turbulents compressibles en présence de forts gradients. Cependant, le coût d'utilisation est doublé, ce qui peut amener à préférer le schéma RK3-TVD pour les calculs les plus intensifs.

2.3.4 Schémas à capture de chocs

Dans leur forme compressible et discrète, les équations de Navier-Stokes admettent des solutions discontinues, particulièrement en régime hypersonique. La bonne re-

présentation numérique de ces discontinuités n'est pas directement assurée par les schémas aux différences finies. Ces méthodes amènent à des oscillations aux alentours des zones de fort gradient, qui polluent la solution. Des approches numériques spécifiques sont nécessaires pour correctement restituer le comportement de la solution. Les schémas numériques permettant de traiter les ondes de discontinuité sont dits à capture de chocs, une revue en est faite par PIROZZOLI (2011).

Dans le contexte des méthodes d'ordre élevé, nous retrouvons classiquement les schémas non-linéaires type ENO, WENO, ou récemment TENO (Fu, 2019). Cependant, comme discuté en section 2.2.1, leur application aux géométries curvilignes est fastidieuse. Il faut alors s'appuyer sur d'autres approches basées sur des dissipations artificielles localisées, ne dépendant pas du stencil de calcul. Nous explorons principalement les schémas à capture de chocs construits avec des filtres d'ordre élevé. L'intérêt des schémas de capture de chocs utilisant l'ajout d'un terme d'hyperviscosité dans le tenseur des contraintes visqueuses (KAWAI, SHANKAR et LELE, 2010) a également été explorée, mais ne s'est pas révélé approprié pour cette étude de par la contrainte importante sur le pas de temps apportée par la viscosité artificielle.

Pour introduire l'approche retenue, nous pouvons définir la forme générale d'un schéma de capture de choc en trois dimensions avec l'ajout d'une dissipation artificielle comme ci-dessous.

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \mathcal{D}_\xi + \mathcal{D}_\eta + \mathcal{D}_\zeta \quad (2.55)$$

Sans perte de généralité, nous présentons la construction de ces termes de dissipation uniquement pour la direction ξ . Le terme dissipatif $\mathcal{D}_\xi$ est écrit sous la forme conservative suivante.

$$\mathcal{D}_\xi = \beta_{i,j,k} (\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}) \quad (2.56)$$

Les termes $\mathbf{D}_{i\pm\frac{1}{2}}$ donnent le taux de dissipation locale. La variable générique $\beta_{i,j,k}$ contient les contributions du senseur de choc et de la métrique locale du maillage lorsque c'est nécessaire.

2.3.4.1 Filtre adaptatif non-linéaire

Développée par Bogey et al, 2009, cette méthode utilise un filtre optimisé d'ordre 2 appliqué localement avec l'usage d'un senseur de choc. Nous exprimons l'opérateur de filtrage dans sa forme conservative.

$$\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{m=1}^2 \alpha_m (\mathbf{q}_{i+m} - \mathbf{q}_{i-m+1}) \quad (2.57)$$

Cette dissipation est localisée sur les discontinuités par un senseur basé sur la dilatation locale de la solution :

$$\Theta_i = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{u}_{i-1} + 2\nabla \cdot \mathbf{u}_i - \nabla \cdot \mathbf{u}_{i+1}}{4} \quad (2.58)$$

Une norme euclidienne de cette dilation est calculée autour de l'interface.

$$\|\Theta_i\| = \frac{1}{2} \left((\Theta_i - \Theta_{i+1})^2 + (\Theta_i - \Theta_{i-1})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.59)$$

Cela permet de construire le senseur de choc σ_i^{sc} basée sur les termes r_i prenant en compte la vitesse du son locale c_i , le pas d'espace $\Delta\zeta$ et une variable $\epsilon = 10^{-9}$ assurant un dénominateur non-nul.

$$r_i = \frac{\|\Theta_i\|}{c_i^2 / \Delta\zeta^2} + \epsilon \quad (2.60)$$

Enfin nous exprimons une valeur de $\sigma_{sc,i+\frac{1}{2}}$ comprise dans l'intervalle $[0, 1]$ avec une valeur seuil de détection $r_{th} \in [10^{-6}, 10^{-4}]$.

$$\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{sc} = \frac{1}{2} (\sigma_{i+1}^{sc} + \sigma_i^{sc}) \quad (2.61)$$

$$\sigma_i^{sc} = \left(1 - \frac{r_{th}}{r_i} + \left| 1 - \frac{r_{th}}{r_i} \right| \right) \quad (2.62)$$

Ce poids local de filtrage basé sur l'amplitude de la discontinuité permet de calculer la solution filtrée comme il suit.

$$\mathbf{q}_i^{sc} = \mathbf{q}_i - \left(\sigma_{i+\frac{1}{2}}^{sc} D_{i+\frac{1}{2}} - \sigma_{i-\frac{1}{2}}^{sc} D_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.63)$$

Ce terme de dissipation possède l'avantage d'une construction simple, permettant une implémentation rapide en formulation curviligne. Cependant, sa robustesse reste limitée et il devient inefficace au-delà de $M_\infty = 2.5$. Il reste néanmoins particulièrement adapté aux études aéroacoustiques et aux solutions présentant des chocs faibles.

2.3.4.2 Dissipation artificielle adaptative non-linéaire

Une seconde approche plus robuste et complète est formulée par KIM et LEE (2001) et améliorée par EMMERT, LAFON et BAILLY (2009). Cette dissipation artificielle repose sur le schéma classique de JAMESON, SCHMIDT et TURKEL (1981), présenté en Eq. 2.64. Le schéma est composé d'un terme dissipatif d'ordre 2 pour les discontinuités et un terme dissipatif d'ordre 4 pour les oscillations hautes fréquences de la solution.

$$D_{i+\frac{1}{2}} = a_{j+\frac{1}{2}} \left[\varepsilon^{(2)} (u_{i+1} - u_i) - \varepsilon^{(4)} (u_{i+2} - 3u_{i+1} + 3u_i - u_{i-1}) \right] \quad (2.64)$$

Avec $a_{j+\frac{1}{2}}$ le rayon spectral de la Jacobienne des équations d'Euler à l'interface $i + \frac{1}{2}$.

Les facteurs $\varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(4)}$ dépendent de la régularité de la solution. Cette régularité est observée sur le champ de pression avec le senseur de Jameson ψ_i . Enfin les constantes $\kappa^{(2)}$ et $\kappa^{(4)}$ permettent de régler le niveau de dissipation selon le cas d'étude.

$$\psi_i = \frac{|-2p_{i-1} + 4p_i - 2p_{i+1}|}{2p_{i-1} + 4p_i + 2p_{i+1}} \quad 0 \leq \psi_i \leq 1 \quad (2.65)$$

$$\varepsilon^{(2)} = \kappa^{(2)} \max(\psi_i, \psi_{i+1}) \quad \varepsilon^{(4)} = \max(0, \kappa^{(4)} - \varepsilon^{(2)}) \quad (2.66)$$

L'extension du schéma de Jameson consiste en la suppression du terme d'ordre 4 : ($\epsilon^{(4)} = 0$), l'adaptation du coefficient $\kappa^{(2)}$ en fonction de la solution à l'instant t^n et la construction d'un nouveau senseur basé sur des filtres d'ordre élevés. Pour une formulation curviligne KIM et LEE (2001) donnent l'expression suivante de $\kappa^{(2)}$.

$$\kappa_{j,k}^{(2)} = \frac{1}{\sigma_{j,k}^{R_{j,k}}} \left[1 + (\sigma_{j,k} - 1) \tanh \left(\frac{\alpha_{j,k}}{\beta_{j,k}} - 1 \right) \right] (\hat{\alpha}_{j,k} \hat{\beta}_{j,k})^{\frac{1}{2}(1+\tanh(\sigma_{j,k}-1))} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{p^{max}}{p^{min}} & \alpha &= \frac{|\lambda|^{max}}{|\lambda|^{min}} & \beta &= \frac{(|\lambda| \times ||\nabla \xi||)^{max}}{(|\lambda| \times ||\nabla \xi||)^{min}} \\ R &= \frac{\alpha + \beta}{2\alpha\beta} & \hat{\alpha} &= \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \tanh(\alpha - 1) & \hat{\beta} &= \frac{\beta + 1}{\beta - 1} \tanh(\beta - 1) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Initialement, les termes $\alpha, \beta, \sigma, R, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sont définis le long d'une ligne de maillage dans la direction de dissipation considérée. Cependant, le calcul de $\kappa_{j,k}$ par ligne de maillage i implique un surcoût supplémentaire dû à la communication de plans de valeurs κ entre les processeurs. Par simplicité et sans perte de précision notable, nous choisissons d'utiliser une valeur globale κ pour tout le domaine Ω .

Nous donnons les définitions de variables suivantes utilisées dans les grandeurs en Eq. 2.68.

$$f^{max} = \max_{\Omega} f \quad f^{min} = \min_{\Omega} f \quad |\lambda| = |\hat{u}| + c ||\nabla_{\times} \xi|| \quad (2.69)$$

D'un point de vue algorithmique, les coefficients $\alpha, \beta, \sigma, R, \hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sont évalués dans chaque bloc du domaine puis partagés et comparés à l'ensemble des processus.

À la différence de la formulation initiale de Jameson, l'expression du coefficient $\epsilon^{(2)}$ est modifiée pour prendre en compte un stencil de points plus large dans l'évaluation de la régularité de la solution.

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^{(2)} = \max_{m=-2}^3 (\psi_{i+m}) \quad (2.70)$$

De plus l'expression du rayon spectral $a_{i+\frac{1}{2}}$ est modifiée pour tenir compte de variations de volume des cellules d'étude. Nous retenons alors la formulation suivante avec $J_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (J_{i+1} + J_i)$.

$$a_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta |\lambda_{i+\frac{1}{2}}|}{J_{i+\frac{1}{2}}} \quad (2.71)$$

$$\Delta |\lambda_{i+\frac{1}{2}}| = \max_{m=-2}^3 (|\lambda|_{i+m}) - \min_{m=-2}^3 (|\lambda|_{i+m}) \quad (2.72)$$

Nous pouvons ainsi redonner la forme finale du terme de dissipation $D_{i+\frac{1}{2}}$. L'amplitude de la dissipation dépend alors du volume local de la cellule donné par le déterminant de la jacobienne de la transformation curviligne.

$$D_{i+\frac{1}{2}} = a_{i+\frac{1}{2}} \epsilon^{(2)} (u_{i+1} - u_i) \quad (2.73)$$

$$\mathbf{q}_i^{sc} = \mathbf{q}_i - \frac{J_i}{||\nabla \xi_i||} \left(D_{i+\frac{1}{2}} - D_{i-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.74)$$

Le schéma exprimé en Eq. 2.74 repose initialement sur le senseur de Jameson donné en Eq. 2.65 et peu se révéler trop dissipatif dans un cadre de simulation haute fidélité, une alternative à ce senseur est proposée par DAUDE et al. (2012). Le senseur ψ_i est reformulé tel qu'il suit.

$$\psi_i = \frac{|\mathcal{D}_N(p)|}{|p - \mathcal{D}_N(p)|} \quad (2.75)$$

Dans cette expression l'opérateur $\mathcal{D}_N$ représente l'opérateur de filtrage linéaire d'ordre N tel qu'écrit en Eq. 2.48. Le choix d'un opérateur d'ordre élevé permet une décroissance rapide de la dissipation autour des discontinuités en sélectionnant principalement le contenu haute fréquence caractéristique d'une discontinuité. Ce second senseur est employé pour affiner la capture des chocs dans des solutions convergées ou le niveau de dissipation requis devient plus faible.

2.3.5 Construction d'un senseur amélioré

Dans le cadre de l'étude haute fidélité de la transition à la turbulence, il est utile d'affiner un peu plus la localisation de la dissipation numérique nécessaire à la capture de chocs. Un senseur supplémentaire basé sur le senseur de DUCROS et al., 1999 est employé. Ce dernier est efficace pour distinguer les ondes de chocs des autres fluctuations issues de la turbulence. Il repose sur une évaluation de la divergence du champ de vitesse et son rotationnel. L'expression du senseur est donnée en Eq. 2.76, avec $\Pi \in [0, 1]$.

$$\Pi = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 + \epsilon} \quad (2.76)$$

Suivant les suggestions de KAWAI et LELE (2008), les différentiations employées pour obtenir $\nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ peuvent entraîner des oscillations autour des discontinuités. Pour limiter ces oscillations point par point, nous appliquons un filtre gaussien $\langle . \rangle$ au senseur obtenu dans les trois directions spatiales. Nous obtenons alors l'expression suivante de notre senseur de choc.

$$\Pi = \left\langle \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 + \epsilon} \right\rangle \quad (2.77)$$

Avec le filtre gaussien issu de COOK et CABOT (2005) donné ci-dessous pour une variable arbitraire f au point i . Sur les bords, ce filtre est appliqué par symétrie.

$$\begin{aligned} \langle f_i \rangle = & \frac{3565}{10368} f_i + \frac{3091}{12960} (f_{i-1} + f_{i+1}) \\ & + \frac{1997}{25920} (f_{i-2} + f_{i+2}) \\ & + \frac{149}{12960} (f_{i-3} + f_{i+3}) \\ & + \frac{107}{103680} (f_{i-4} + f_{i+4}) \end{aligned}$$

Enfin, suivant l'étude comparée de KAWAI, SHANKAR et LELE (2010), ce senseur peut être rendu plus sélectif en remarquant que pour un choc : $\nabla \cdot \mathbf{u} < 0$. Nous pouvons alors ajouter une seconde condition à l'activation du senseur avec une fonction f_{shock} , telle que $\nabla \cdot \mathbf{u} > 0 \implies f_{shock}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0$. Différents choix de fonctions sont possibles pour f_{shock} , nous comparons les deux variantes suivantes.

- Une simple fonction de Heavyside : $f_{shock} = \mathcal{H}(-\nabla \cdot \mathbf{u})$.
- La fonction proposée par BHAGATWALA et LELE (2009), avec c la vitesse du son et $a = 10$: $f_{shock} = \frac{1}{2}(1 - \tanh(2.5 + \frac{a}{c}\nabla \cdot \mathbf{u}))$

Nous avons alors la forme finale de notre senseur :

$$\Pi = \left\langle f_{shock}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \frac{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2}{(\nabla \cdot \mathbf{u})^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 + \epsilon} \right\rangle \quad (2.78)$$

Le senseur de Ducros modifié obtenu permet une sélection fine des structures à dissiper dans le cadre d'écoulements compressibles transitionnels ou turbulents.

2.3.6 Conditions de paroi en coordonnées généralisées

Nous attirons particulièrement l'attention sur la formulation des conditions de types parois (symétrie, paroi non-glissante) en coordonnées curvilignes. Plaçons nous sur $\partial\Omega$; à la frontière $\eta = 0$. Sur cette dernière, nous imposons une condition de glissement et une vitesse normale nulle : $\tilde{v} = 0$ et donc une composante de pression compatible $\partial p / \partial \eta = 0$. Ajoutons à cela les conditions imposées sur le vecteur vitesse contravariant $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w})^T$. La difficulté repose ici principalement sur la bonne imposition des conditions de gradient nul avec des schémas décentrés. Cette condition survient naturellement avec un schéma d'ordre 2 sur trois points, mais pour des stencils plus larges l'imposition d'une valeur plus précise de pression est importante.

- paroi non glissante : $\tilde{u} = \tilde{v} = \tilde{w} = 0$;
- paroi glissante : $\tilde{v} = 0$.

Si nous considérons la forme compacte des flux exprimés en Eqs. 2.8, nous pouvons exprimer les flux visqueux et non-visqueux sur le bord.

$$\mathbf{F}|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \nabla \hat{\xi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \nabla \hat{\eta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \nabla \hat{\zeta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.79)$$

$$\mathbf{F}^v|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_{\xi} \\ -\Phi \cdot \nabla \hat{\xi} \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}^v|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_{\eta} \\ -\Phi \cdot \nabla \hat{\eta} \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}^v|_{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu_{\zeta} \\ -\Phi \cdot \nabla \hat{\zeta} \end{pmatrix} \quad (2.80)$$

En suivant EMMERT (s. d.), l'expression de l'équation de quantité de mouvement sur $\partial\Omega$ au plan $\eta = 0$ amène à l'expression Eq. 2.81 du gradient de pression pour les équations de Navier-Stokes,

$$\partial_\eta p|_{\eta=0} = -\frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{x}}\eta\|^2} [\partial_\xi p(\nabla_{\mathbf{x}}\xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\eta) + (\partial_\xi \nabla_{\mathbf{x}}\xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\eta)] . \quad (2.81)$$

Notons qu'il faut bien distinguer $\nabla_{\mathbf{x}}\xi = (\xi_x, \xi_y, \xi_z)^T$ de $\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\xi} = (\hat{\xi}_x, \hat{\xi}_y, \hat{\xi}_z)^T$. Nous pouvons ainsi exprimer l'expression quasi-discrète de la pression sur Γ .

$$p_{i,0,k} = p_{i,1,k} + \partial_\eta p|_{\eta=0} \quad (2.82)$$

Dans le cas des équations d'Euler, le vecteur vitesse ne s'annule pas pour toutes les directions, il faut donc prendre en compte les vitesses transverses dans le calcul de $\partial_\eta p|_{\eta=0}$.

$$\partial_\eta p|_{\eta=0} = -\frac{1}{\|\nabla_{\mathbf{x}}\eta\|^2} [\partial_\xi p(\nabla_{\mathbf{x}}\xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\eta) + (\partial_\xi p \nabla_{\mathbf{x}}\xi \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\eta)] + \rho \nabla_{\mathbf{x}}\eta \cdot (\hat{u} \partial_\xi \mathbf{u} + \hat{u} \partial_\xi \mathbf{u}) \quad (2.83)$$

L'extension aux autres directions suit la même procédure. Il faut noter que le calcul de ces conditions limites implique le calcul de dérivées supplémentaires sur les bords, pour obtenir $\partial_\xi p$. Pour les conditions de température, une procédure similaire est développée pour forcer un transfert de chaleur nul.

2.4 LINÉARISATION DISCRÈTE

L'étude de la dynamique des écoulements transitionnels ou turbulents peut souvent se décomposer en une superposition de dynamiques linéaires et non-linéaires. Dans l'objectif de pouvoir distinguer ces deux comportements, nous avons montré dans le Chap. 1 que le calcul de solutions des équations de Navier-Stokes linéarisées pour les problèmes étudiés se révèle utile. Deux approches pour l'obtention de ce système linéarisé sont généralement suggérées.

- Une approche nommée "linéarisation continue", basée sur la dérivation analytique des équations linéarisée et l'implémentation de ces équations dans un code de simulation. Cette approche simule effectivement la dynamique linéaire réelle du système d'équation. Cependant, elle nécessite un jeu de méthodes numériques et de conditions aux limites dédiées, dont l'implémentation peut être délicate. De plus, l'erreur faite sur la construction de l'opérateur linéaire dépend directement de l'ordre des schémas de dérivation employés.
- L'autre approche, choisie ici, est la "linéarisation discrète". Celle-ci repose sur une différentiation numérique de l'opérateur non-linéaire du code de simulation, vu comme une boîte noire. Dans cette approche, les conditions aux limites et les schémas numériques sont directement ceux employés pour l'opérateur non-linéaire, l'erreur faite sur la construction de l'opérateur linéaire est de l'ordre de la précision machine. La différence repose ici sur le

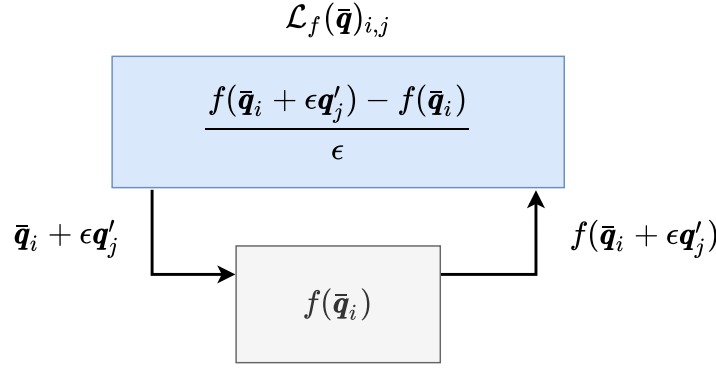


FIGURE 2.5 : Obtention de la composante i, j de l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_f$ par linéarisation au premier ordre d'une fonction arbitraire f autour d'un état $\bar{\mathbf{q}}$ selon un vecteur de perturbation unitaire $\mathbf{q}'$.

fait que le système linéarisé n'est plus le système linéaire "vrai" correspondant à l'opérateur non-linéaire continu, mais plutôt le système linéaire de la forme discrète de cet opérateur non-linéaire, contenant les diverses modifications induites par l'algorithme de résolution. Cependant, dans le cadre d'une approche haute fidélité et d'ordre élevé, nous pouvons considérer que l'écart entre le système discret et le système continu devient faible.

2.4.1 Intégration dans le code non-linéaire

La linéarisation discrète de l'opérateur non-linéaire calculé dans CurviCREAMS est inspirée des travaux de BENEDDINE (2017), BUGEAT (2017), METTOT (2013) et PANDO, SIPP et SCHMID (2012). Nous reprenons le système présenté en Sec. 1.1.2, avec $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ l'opérateur discret des équations de Navier-Stokes non-linéaires. Soit la dynamique temporelle du vecteur d'état conservatif $\mathbf{q}$.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \mathcal{N}(\mathbf{q}) \quad (2.84)$$

Nous notons qu'au sens discret, l'opérateur $\mathcal{N}$ contient ici l'ensemble des opérations numériques données en Sec. 2.3 et peut être vu comme une boîte noire. Prenant en entrée un vecteur d'état $\mathbf{q}$ et redonnant son évolution temporelle $\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t}$ tel que présenté en gris sur la Fig. 2.5. La linéarisation discrète est faite autour d'un point fixe $\mathbf{q}_0$, tel que $\mathcal{N}(\mathbf{q}_0) = 0$, ou éventuellement une solution moyenne de l'opérateur $\mathcal{N}$ (BENEDDINE et al., 2016). Ainsi, en considérant pour tout point (ξ, η, ζ) , la décomposition du vecteur d'état $\mathbf{q}(t)$ en une composante stationnaire, écrite ici $\bar{\mathbf{q}}$ et une composante fluctuante instationnaire $\mathbf{q}'(t)$. Nous avons alors : $\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}'(t)$. Partant de cette décomposition, la matrice jacobienne $\mathcal{L}$ du système non-linéaire autour de l'état stationnaire s'écrit alors comme il suit.

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}} = \left. \frac{\partial \mathcal{N}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\bar{\mathbf{q}}} \quad (2.85)$$

Considérant donc que le code non-linéaire peut calculer $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ pour un $\mathbf{q}$ quelconque. Nous pouvons extraire numériquement son opérateur linéaire $\mathcal{L}$ tangent

à l'état $\mathbf{q}$ par une simple approximation décentrée au premier ordre de l'Eq. (2.85), comme présenté en Fig. 2.5.

$$\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}' = \frac{\mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}} + \epsilon\mathbf{q}') - \mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}})}{\epsilon} \quad (2.86)$$

Donnant alors la dynamique linéaire d'un champ de perturbation $\mathbf{q}'$ autour de $\bar{\mathbf{q}}$.

$$\frac{\partial \mathbf{q}'}{\partial t} = \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}' \quad (2.87)$$

Pour maximiser la précision de la différentiation, la variable de linéarisation ϵ est choisie aux alentours de 10^{-8} (METTOT, 2013). Un calcul de stabilité globale peut s'avérer très sensible au choix de ϵ . Une extension de la différenciation donnée en Eq. 2.86 consiste à considérer $\mathbf{q} \in \mathbb{C}$, ce qui permet de ramener l'erreur de calcul sur les termes de la jacobienne à la précision machine (BROWNE et al., 2014). Cette approche n'est pas implémenté dans la version actuelle du code mais est une direction de travail. Nous pouvons remarquer depuis l'Eq. 2.86 que le coût de calcul de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}\mathbf{q}'$ est très proche du coût de calcul de $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ du code non-linéaire, seul le terme contenant $\epsilon\mathbf{q}'$ étant calculé de nouveau pour chaque itération.

2.4.2 Calcul de l'opérateur linéaire et son application

L'écriture de la linéarisation sous cette forme permet alors deux approches, selon l'expression de $\mathbf{q}'$. Une première approche dédiée à l'extraction de $\mathcal{L}$ pour des analyses de stabilité globale et une seconde basée sur la simulation numérique directe de l'Eq. 2.87.

Pour la première approche, nous suivons la méthodologie présentée par METTOT (2013) où nous considérons des perturbations unitaires et localisées de $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ avec un vecteur $\mathbf{q}' \in \mathbb{R}^{N_{dof}}$ de la forme.

$$\mathbf{q}' = (0 \dots 1 \dots 0)^T \quad (2.88)$$

Nous évaluons donc la valeur de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$ successivement pour chaque degré de liberté, en modifiant la position de la perturbation unitaire. Cette opération peut se révéler fastidieuse pour des maillages de grande taille, où le nombre de répétitions de l'opération 2.86 devient important. Pour optimiser le coût de ce calcul, METTOT, 2013 puis BENEDDINE (2017) remarquent que pour un code utilisant des schémas explicites sur N points, il y a indépendance spatiale de deux points espacés de $N/2$ points lors du calcul de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$. Le coût d'extraction de l'opérateur linéarisé peut alors être largement réduit par construction d'un vecteur $\mathbf{q}'$ optimisé constitué de plusieurs perturbations unitaires espacées les unes des autres dans les trois directions selon la taille des stencils employés.

En seconde approche, pour la simulation numérique directe de 2.87, le vecteur $\mathbf{q}'$ est pris comme une distribution de forçage arbitraire et l'on calcule l'application de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$ sur $\mathbf{q}'$. L'intérêt étant ici de pouvoir étudier la dynamique linéaire d'écoulements complexes sans en dériver les équations continues. Numériquement, l'opérateur $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}})\mathbf{q}'$ est calculé à chaque itération. Il n'y a plus ici de contrainte d'indépendance

des points de $\mathbf{q}'$, réduisant le calcul au coût de $\mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}} + \varepsilon \mathbf{q}')$. L'évolution de $\mathbf{q}'$ à l'instant n peut alors être écrite par exemple au premier ordre.

$$\mathbf{q}'_{n+1} = \mathbf{q}'_n + \Delta t \mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}}) \mathbf{q}'_n \quad (2.89)$$

En pratique, le calcul de $\mathbf{q}'_n$ est réalisé avec les schémas multiétapes définis en Sec. 2.3.3.1. Dans ces cas, une linéarisation de l'opérateur des conditions limites est nécessaire pour les appliquer à chaque sous-itération. Il faut aussi ajouter que certains opérateurs linéaires additionnels doivent être définis au cours du calcul. Notamment pour le calcul des transformations non-linéaires telles que le passage des variables primitives à conservatives ou encore le calcul de la loi d'état. À chaque fois la procédure présentée en Fig. 2.5 est directement employée. Après applications de ces détails, nous obtenons donc un calcul DNS linéarisé de la propagation de $\mathbf{q}'$, ces calcul seront nommés LDNS.

2.4.3 Remarques sur l'implémentation

Dans les sections suivantes, la procédure de linéarisation discrète sera uniquement utilisée pour calculer l'application de $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$ sur $\mathbf{q}'$. L'extraction de l'opérateur global a été intégrée, mais elle nécessite des validations approfondies et il a été choisi de ne pas l'étudier ici.

Nous pouvons faire quelques remarques sur l'utilisation de l'opérateur linéaire pour faire avancer en temps $\mathbf{q}'$ sur un domaine 3D, non-homogène et un forçage par bruit blanc. Ce calcul nous permet d'obtenir par approche itérative la réponse linéaire au forçage de l'opérateur global $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{q}}}$. Cette réponse est intéressante par deux aspects. Premièrement la réponse linéaire nous permet de compléter l'analyse de la réponse non-linéaire au même forçage obtenue par le code DNS. Deuxièmement, dans le cadre de domaine de grande taille où une analyse de stabilité devient impraticable, la décomposition de cette réponse est une alternative intéressante pour l'obtention des instabilité convectives dominantes issues du forçage donné. Il faut bien noter que cette analyse ne remplace pas le calcul d'une réponse obtenue par Resolvent, mais elle permet d'obtenir une estimation de la réponse du Resolvent au forçage. Le lien entre la réponse du calcul LDNS et le Resolvent peut d'ailleurs être formellement établi si l'on calcule une base orthogonale de la dynamique de la LDNS par une SPOD (Chap. B). Dans ce cas de figure, TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS, 2018 donnent un cadre formel qui établit le lien entre la base orthogonale optimale de la SPOD et celle du Resolvent. Les conditions devant être respectées sont : (1) l'utilisation de vecteurs de forçage non corrélés (un bruit blanc) et (2), l'utilisation des mêmes matrices d'entrée et de sortie pour le calcul des deux bases. Si ces conditions sont respectées, les deux bases sont analytiquement égales². Le vecteur propre dominant de la SPOD pour un calcul LDNS peut ainsi être une estimation de la réponse optimale du Resolvent, dans la limite de la convergence des fonctions propres de la SPOD. Nous soulignons de nouveau, qu'il s'agit d'une esti-

² Dans un cadre discret et numérique, la base orthogonale de la SPOD est une estimation statistique de la base orthogonale optimale qui dépend du nombre d'échantillons

mation utile, mais que cette analyse ne remplace pas un véritable calcul Résolvent et ne permet pas d'obtenir les gains et forçage associés.

La discrétisation puis la linéarisation des équations de Navier-Stokes fournit ainsi un outil utile pour la comparaison des dynamiques linéaires et non-linéaires dans le cadre d'écoulements complexes, particulièrement si la décomposition en valeurs propres de $\mathcal{L}(\bar{\mathbf{q}})$ est hors de portée. Sa mise en place reste assez directe et le coût de la réalisation d'une simulation linéaire devient le même que celui d'un calcul non-linéaire.

2.5 VALIDATION

Avant d'effectuer des analyses sur les cas d'intérêt pour l'étude de la transition hypersonique, le schéma numérique global représenté par le code DNS CurviCREAMS doit être validé et comparé aux résultats de la littérature. Nous proposons un ensemble de cas de validation et leurs descriptions. Ces cas permettent de passer en revue et évaluer la performance de l'ensemble des ingrédients numériques pouvant être employés pour des simulations d'écoulements compressibles en coordonnées généralisées.

2.5.0.1 Advection d'un vortex isentropique

Nous commençons l'étude par l'advection d'un vortex isentropique à travers un domaine périodique. Ce cas classique permet de nous assurer du bon fonctionnement de notre schéma numérique global et plus largement de l'ordre de convergence de l'erreur numérique. Nous considérons deux cas de figure.

- Un domaine cartésien, avec grille uniforme, utilisé comme référence pour les cas déformés.
- Un ensemble de domaines déformés pour vérifier les bonnes propriétés de conservation de la transformation curviligne.

Ce cas d'étude est simulé avec les équations d'Euler, les paramètres d'adimensionnement sont donnés dans le Tableau 2.2. La solution initiale $\mathbf{q}_0$ est définie par les

Paramètre	Valeur
M_∞	0.5
T_{ref} (K)	273.15
L_{ref} (m)	1.0
t_{ref}	$\frac{L_{ref}}{U_\infty}$

TABLE 2.2 : Paramètres de référence de l'advection de vortex

distributions adimensionnée données en Eq. 2.90 à 2.92.

$$u = U_\infty(1 - (y - y_0)\frac{\beta}{R} \exp(-r^2/2)) \quad (2.90)$$

$$v = U_\infty((x - x_0)\frac{\beta}{R} \exp(-r^2/2)) \quad (2.91)$$

$$T = T_\infty - \frac{U_\infty^2 \beta^2}{2C_p} \exp(-r^2) \quad (2.92)$$

$$r = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{R} \quad (2.93)$$

Les grandeurs ρ et p sont retrouvées par la loi d'état : $p = \rho r_{gas} T$ en considérant p constant à la valeur $p = p_\infty$. Les paramètres β et R définissent respectivement l'amplitude et le diamètre du vortex. Nous utilisons les valeurs suivantes : $\beta = 0.02$ et $R = 0.1$.

Dans les différents cas considérés nous utilisons la configuration décrite ci-après. Un domaine périodique de dimension $\Omega = [0, L_{ref}] \times [0, L_{ref}]$ avec un vortex initialisé en son centre de coordonnées $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$. Le domaine est discrétisé avec 65 points dans les deux directions du plan (x, y) . La solution est calculée jusqu'à $t_{final} = 30 \times t_{ref}$. Les méthodes numériques utilisées sont données dans le Tableau 2.3. La grille déformée est obtenue par perturbations dans les directions

Temps	RK46-NL
Espace	STD9 & DRP9
Filtres	OPT9
CFL	0.6

TABLE 2.3 : Paramètres numériques

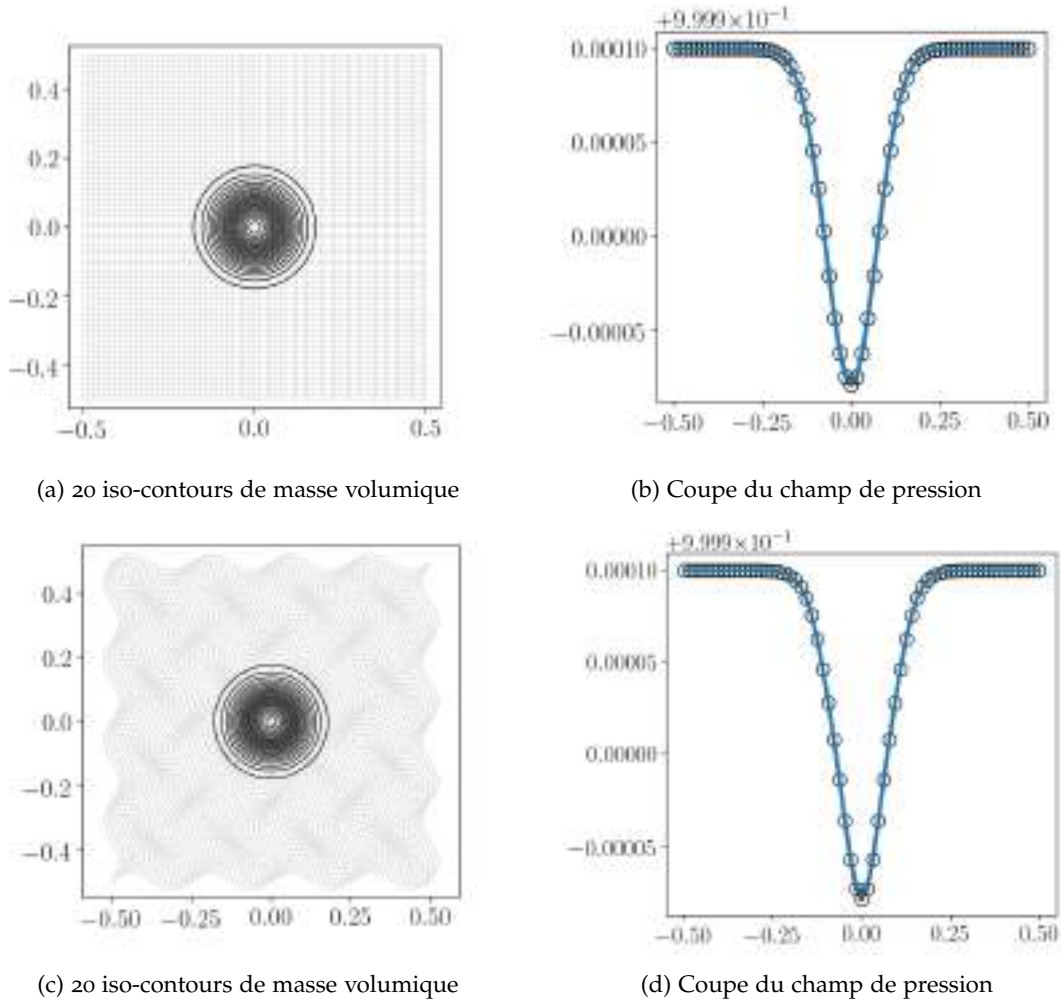
x et y du maillage orthogonal initial. Avec l'amplitude de déformation définie à $A = 0.025$, la période $\omega = 8\pi$ et $(\xi, \eta) \in [0, 1]$. La grille obtenue est présentée avec les résultats en Fig. 2.6.

$$\delta x = AL_{ref} \sin(\omega\eta) \quad (2.94)$$

$$\delta y = AL_{ref} \sin(\omega\xi) \quad (2.95)$$

Pour le cas cartésien, la Fig. 2.6a présente le champ de masse volumique ρ à t_{final} ainsi qu'une coupe du champ de pression p à $y = 0.5 \times L_{ref}$ superposée à la solution exacte. Nous ne remarquons pas de distorsion particulière du vortex et les courbes sont parfaitement superposées à la solution idéale. Les amplitudes des pics de p ne sont que très légèrement plus faibles que la solution exacte et aucune dispersion n'est observée.

La différence de résultats entre le calcul sur domaine régulier ou déformé n'est pas visible. Ce qui confirme la précision de la formulation SCMM présentée en Eq. 2.34 ainsi que la précision du schéma général.

FIGURE 2.6 : Solution à $t = t_{final}$. Haut : grille cartésienne. Bas : grille déformée.

2.5.1 Réflexion d'un pulse acoustique

Ce deuxième cas de validation permet d'évaluer la bonne capture des fluctuations acoustiques par le schéma numérique. Nous considérons la propagation d'une onde acoustique circulaire dans un domaine circulaire plan et sa réflexion sur les parois d'un cylindre. La fluctuation du champ de pression est observée en un point éloigné de la source tel que présenté en Fig. 2.7.

L'onde acoustique est initialisée par une distribution gaussienne de pression d'amplitude $\epsilon = 10^{-6} \times p_\infty$ centrée en (x_0, y_0) superposée au champ uniforme au repos.

$$\delta p = -\epsilon \exp\left(-\log 2 \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{b^2}\right) \quad (2.96)$$

$$p = p_\infty + \delta p \quad (2.97)$$

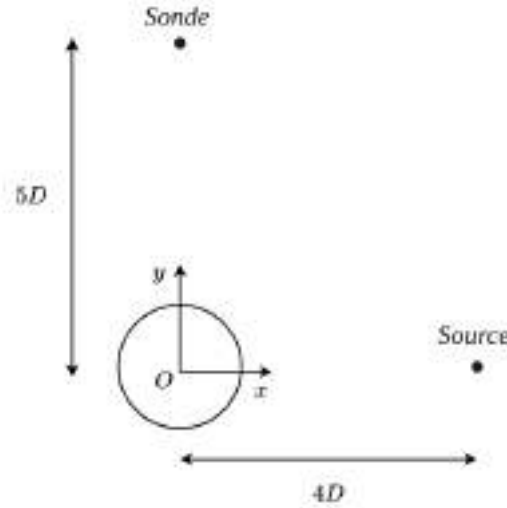


FIGURE 2.7 : Configuration d'étude

Avec $b = 0.2$ le paramètre de largeur de la distribution.

Un maillage circulaire orthogonal de rayon maximum $R_{max} = 10D$ est défini par balayage. Suivant les recommandations de MARSDEN, 2005 sur le choix d'une densité de points suffisante pour la résolution correcte du front d'onde, un maillage de taille $N_\xi \times N_\eta = 800 \times 800$ est choisi pour valider la précision du schéma global. Un second maillage moins dense de 600×600 points est ajouté pour comparer les diverse combinaisons de schémas numériques pour une grille sous résolue.

Le premier calcul est réalisé avec le schéma aux différences finies sur 9 points optimisé (DRP9) pour les dérivées spatiales. Le schéma RK3 est utilisé pour l'intégration temporelle. Le coefficient de filtrage est réglé à $\sigma_{fl} = 0.05$ pour réduire la dissipation artificielle au maximum dans la limite de la stabilité.

Les autres calculs consistent en une comparaison des schémas DRP sur 9 points (DRP9), standard sur 9 & 5 points (ISO8 & ISO4). Ces comparaisons sont effectuées pour deux niveaux de filtrage $a_f = 0.2$ et $a_f = 0.05$.

La Fig. 2.8 présente l'évolution de l'amplitude de l'onde acoustique au point de mesure en fonction du temps adimensionné. Pour le calcul de validation en Fig. 2.8a, les résultats sont identique à la référence et aucune dispersion n'est observée.

Le calcul de comparaison en Fig. 2.8b permet de remarquer immédiatement la meilleure précision du schéma DRP9 pour la capture de fluctuations fines. Ce dernier capture correctement l'amplitude sur la grille sous résolue. Le schéma STD9 offre une précision similaire lorsque le filtrage est réduit. Les schémas d'ordre 4 sur 5 points offrent une précision inférieure et nous observons nettement les effets de dispersion dus au contenu fréquentiel non résolu autour des pics d'amplitude.

Le bon accord entre le calcul réalisé et les références permettent de valider la précision du code pour la propagation d'ondes acoustiques.

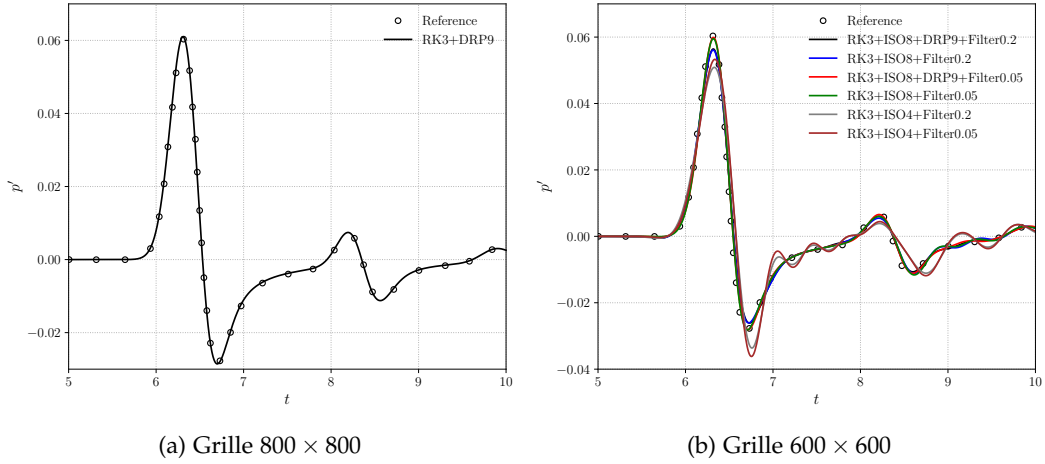


FIGURE 2.8 : Évolution en temps de la perturbation de pression p' au point de mesure. La solution de MARSDEN, 2005 est identique à la solution analytique.

2.5.2 Tube à choc de Sod

Une première validation de la précision du schéma de capture de chocs retenu est vérifiée par le calcul de la propagation d'ondes unidimensionnelles issues d'un problème de Riemann à $(x_0 = 0, t_0 = 0)$ dans un fluide non visqueux.

Nous considérons d'abord le problème du tube à choc de Sod dans un domaine $\Omega \in [-1, 1]$ avec les états gauche et droit suivants à $x_0 = 0$. Ces grandeurs sont adimensionnées pour $M_\infty = 1.0$.

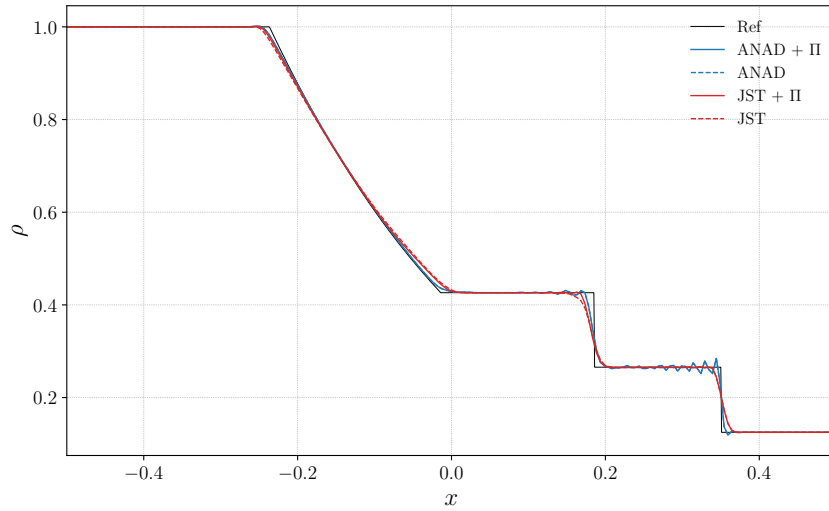
$$\begin{array}{ll} \rho_L = 1.0 & \rho_R = 0.125 \\ p_L = 1.0 & p_R = 0.1 \\ u_L = 0.0 & u_R = 0.0 \end{array}$$

Le domaine est discrétisé par 201 points dans la direction de propagation. Cette discrétisation que l'on pourrait qualifier de grossière, met en évidence la robustesse des schémas de capture de chocs et leur précision sur des grilles dégradées. Les schémas numériques employés pour la solution régulière sont décrits dans le tableau 2.4. Le schéma de capture de chocs est employé avec les formulations

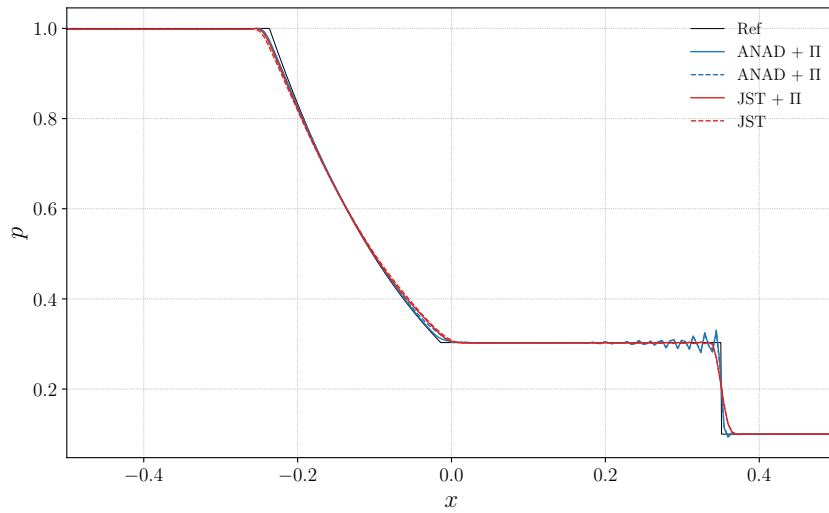
Temps	RK46-NL
Espace	STD9 & DRP9
Filtres	OPT9
CFL	0.6

TABLE 2.4 : Paramètres numériques

Jameson et ANAD, avec ou sans le senseur de choc Π défini en Eq. 2.76. La comparaison de ces différentes approches est donnée en Fig. 2.9 pour le profil de masse



(a) Profils de densité



(b) Profils de pression

FIGURE 2.9 : Comparaison de la solution numérique du tube à choc de Sod à la référence au temps $t^* = 6$

volumique et le profil de pression afin de comparer le comportement de la capture sur les différents champs. La figure 2.9a présente les ondes usuelles issues du problème de Riemann avec de gauche à droite, l'onde de détente, la discontinuité de contact et la discontinuité de choc. La figure 2.9b présente le profil de pression avec la discontinuité de choc et l'onde de détente. Dans les deux cas, la solution numérique est superposée à la solution exacte en noir. Les approches ANAD et JST offrent des performances similaires sur ce cas de validation, particulièrement autour des ondes de contact et de détente. Une remarque peut cependant être faite autour de l'onde de choc où l'approche ANAD présente des oscillations assez importantes. Ces oscillations n'impactent pas la conservativité de la solution, la position de l'onde de choc étant bien en accord avec la solution exacte. Une comparaison avec les cas de validation et d'application ultérieurs, permet de dire

que la faible intensité de l'onde de choc du problème de Sod entraîne quelques difficultés dans la capture pour cette méthode. L'approche ANAD implémentée tend à mieux fonctionner pour des nombres de Mach $M_\infty > 2$.

Enfin, une comparaison avec et sans le senseur de discontinuité Π peut être faite au niveau des ondes de contact et détente. Une légère amélioration est notée pour la méthode de Jameson, ou une dissipation réduite est obtenue.

Ce premier cas démontre le bon fonctionnement des schémas de capture de choc sur un problème de Riemann simple. Ces capacités sont évaluées plus en détail pour des ondes de plus grandes amplitudes et des interactions avec l'écoulement.

2.5.3 Choc-onde d'entropie - Cas de Shu & Osher

Le cas de l'interaction onde de choc-onde d'entropie (SHU et OSHER, 1988) est une validation exigeante, permettant de caractériser le niveau de dissipation des schémas de capture pour des fluctuations fines traversant une onde de choc à $M_{shock} = 3.0$. Nous utiliserons les mêmes méthodes numériques que pour le cas précédent.

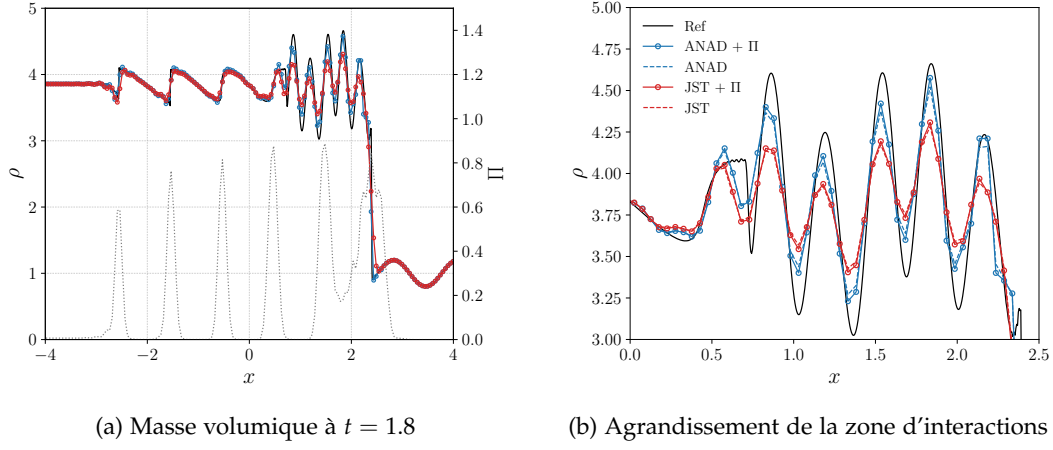
Le calcul est réalisé dans un domaine $\Omega \in [-5, 5] \times [0.1, 0.1] \times [0.1, 0.1]$, discrétisé par $N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta = 201 \times 11 \times 11$ points. Des conditions d'extrapolation sont choisies en $\xi = 0$ et $\xi = 1$, les autres directions sont périodiques. La solution initiale $\mathbf{p}_0$ est définie par un problème de Riemann à $x = -4$, avec les états gauche et droits donnés ci-dessous. Une perturbation sinusoïdale est ajoutée sur le champ de masse volumique à droite pour produire l'onde d'entropie.

$$\begin{array}{ll} \rho_L = 3.857143 & \rho_R = 1 + 0.2 \sin(5x) \\ p_L = 10.33333 & p_R = 1.0 \\ u_L = 2.629369 & u_R = 0.0 \end{array}$$

Nous avons donc la propagation d'une onde de choc à $M_{shock} = 3$ et son interaction avec l'onde d'entropie. Nous observons en figure 2.10 le profil de masse volumique obtenu pour le temps $t = 1.8$

Une solution de référence est calculée avec $N_\xi = 2000$ avec la capture de choc JST+II. Le résultat des calculs en Fig. 2.10a permet de valider qualitativement la bonne capture des diverses ondes traversant le choc pour les approches ANAD et JST. En comparant les amplitudes des oscillations entre $x = 0$ et $x = 2$, nous retrouvons comme attendu une dissipation excessive du schéma de Jameson. L'ajout du senseur de choc, indiqué en pointillés gris, ne semble pas corriger cet excès de dissipation. Une vue plus détaillée de la zone d'interaction est donnée en Fig. 2.10b.

La méthode ANAD quant à elle, présente une très bonne restitution de l'amplitude post-choc. Les oscillations subséquentes sont également capturées avec précision considérant le faible nombre de points. L'ajout du senseur de choc permet également une légère amélioration dans la restitution des amplitudes des oscillations. Sur ce cas, le couplage ANAD+schéma d'ordre élevé, présente une précision

FIGURE 2.10 : Interaction choc-onde d'entropie au temps $t = 1.8$

de capture similaire aux approches type LAD³ (KAWAI et LELE, 2008). Enfin, nous pouvons noter la réduction effective des oscillations remarquées en Fig. 2.9 pour ce cas à $M_{shock} = 3$.

2.5.4 Interaction Shock-Vortex

Le schéma de capture de choc est également validé en observant l'interaction d'un vortex isentropique et d'un choc droit, stationnaire, à $M_\infty = 1.1$. Le cas reproduit est celui décrit par DAUDE et al., 2012. Nous utilisons ici un domaine quasi-2D $\Omega \in [-1, 1] \times [-0.5, 0.5] \times [-0.1, 0.1]$ discrétisé par $N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta = 251 \times 101 \times 11$ points. Le choc stationnaire est situé à $x_s = -0.5$, l'état gauche est donné par le vecteur $(\rho, u, v, p)_L = (1, 1.1/\sqrt{\gamma}, 0, 1)$. L'état droit est obtenu en utilisant les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc droit.

Nous superposons à ce premier champ stationnaire un vortex isentropique centré en $(x_c, y_c) = (-0.75, 0)$ de rayon R défini par le vecteur de variables primitives $(\delta\rho, \delta u, \delta v, \delta p)$. Le choix d'un vortex isentropique impose une condition $\delta S = 0$ sur l'entropie S dans le vortex. L'entropie est définie par $S = \ln(p/\rho^\gamma)$. L'imposition de $\delta\rho, \delta p$ se fait en imposant une distribution sur δT et en utilisant la loi d'état des gaz parfait adimensionnée $T = p/\rho$.

Nous donnons l'expression des distributions définissant le vortex isentropique.

$$\begin{aligned}\delta u &= \epsilon a e^{\alpha(1-a^2)} (y - y_c) / R \\ \delta v &= \epsilon a e^{\alpha(1-a^2)} (x - x_c) / R \\ \delta S &= 0 \\ \delta T &= (1 - \gamma) \epsilon^2 e^{2\alpha(1-a^2)} / 4\alpha\gamma\end{aligned}$$

Les paramètres sont définis ci-dessous

$$\begin{aligned}
a &= R/R_c \\
R &= \sqrt{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2} \\
R_c &= 0.05 \\
\epsilon &= 0.3 \\
\alpha &= 0.204
\end{aligned}$$

Pour ce calcul, nous reprenons les méthodes précédentes, mais nous n'utilisons que l'approche ANAD et senseur de choc. Les champs obtenus à divers instants, présentés en Fig. 2.12 sont comparés aux résultats de DAUDE et al. (2012) obtenus pour un schéma aux différences finies optimisées sur 11-points et une capture de choc similaire.

La comparaison des champs de pression aux différents instants pour les Figs. 2.11, 2.12 et 2.13 est globalement satisfaisante. La solution obtenue par CREAMS est similaire à la référence sur l'ensemble des temps considérés. La dynamique du vortex est bien capturée et peu d'oscillations sont notables dans la région post-choc. La sensibilité du senseur de choc est également évaluée sur ce cas, l'intensité de bleu indiquant la détection d'un choc. La figure 2.13a permet d'apprécier la bonne localisation des ondes de choc par le senseur. Seules les discontinuités émanant du choc et ses réflexions sont détectées. Le reste de la solution n'est pas dissipée.

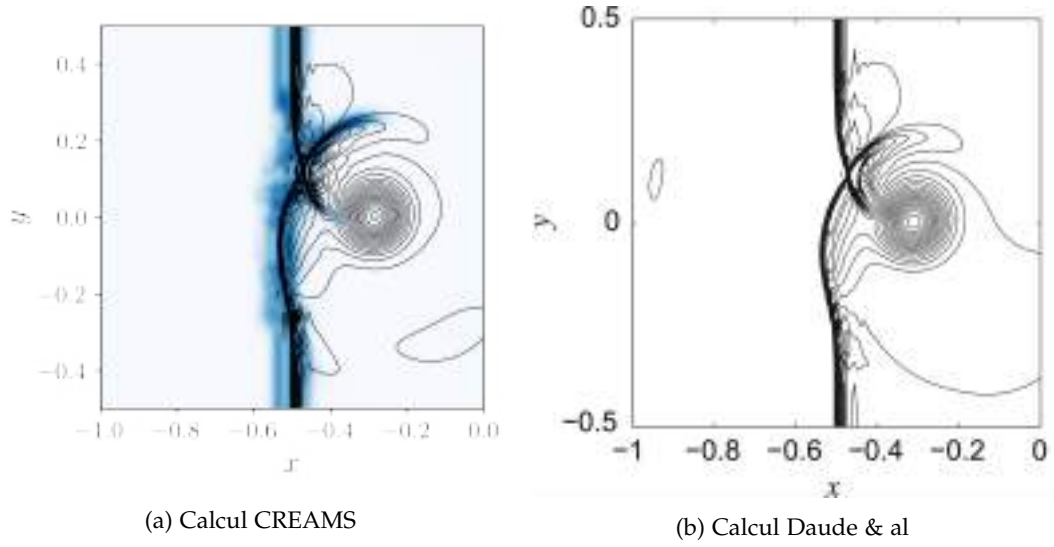


FIGURE 2.11 : Contours du champ de pression à $t = 0.35$. 30 contours dans $[1.02, 1.4]$.
Champ bleu : senseur de choc

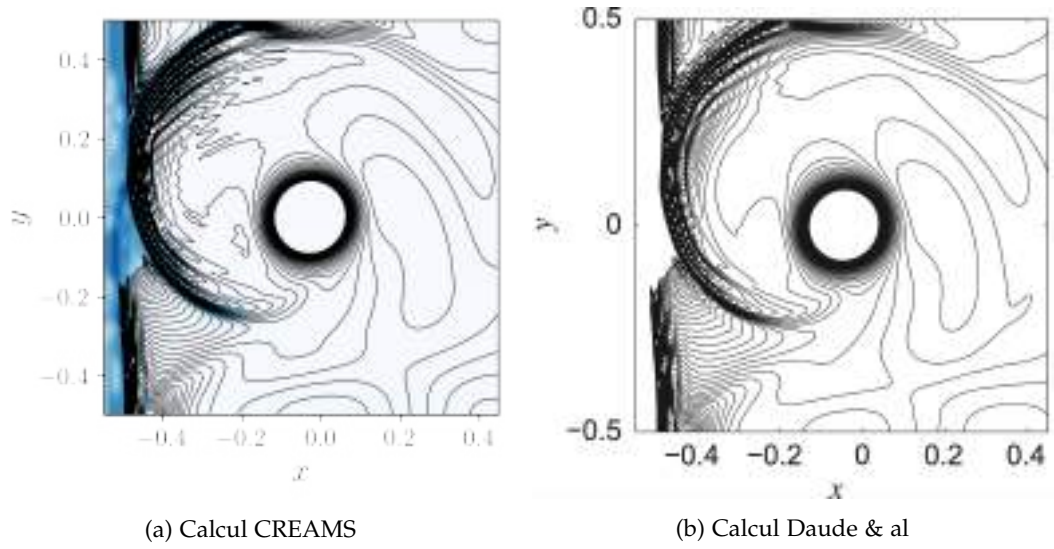


FIGURE 2.12 : Contours du champ de pression à $t = 0.60$. 90 contours dans $[1.19, 1.37]$.
Champ bleu : senseur de choc

2.5.5 *Cylindre non-visqueux à Mach 3*

Une autre validation pertinente pour nos cas d'application est le cylindre à Mach 3. Cette configuration vérifie la capacité du code CurviCREAMS à calculer des écoulements non visqueux à nombre de Mach élevé autour de géométries courbes avec des maillages curvilignes anisotropes. La géométrie simulée est basée sur l'étude de KAWAI et LELE, 2008 utilisant des schémas compacts d'ordre 6 et une capture de choc LAD s'avérant particulièrement efficace. Nous considérons de façon identique un domaine quasi-2D en arc autour d'une demi-paroi cylindrique de rayon $R = 1$. Les coordonnées du maillage de dimensions $N_{\xi} \times N_{\eta} \times N_{\zeta} = 81 \times 61 \times 11$ sont données par la transformation suivante.

$$x = -(R_x - (R_x - 1)\eta) \cos(\theta(2\xi - 1)) \quad (2.98)$$

$$y = (R_y - (R_y - 1)\eta) \sin(\theta(2\xi - 1)) \quad (2.99)$$

Avec les paramètres : $(\xi, \eta) \in ([0, 1], [0, 1])$, $R_x = 3$, $R_y = 6$ et $\theta = 5\pi/12$

Le domaine est borné par une condition d'entrée supersonique aux conditions infinies à $\eta = 1$. La surface du cylindre à $\eta = 0$ est une condition de paroi glissante. Les deux faces de part et d'autre du cylindre ($\xi = 0, \xi = 1$) sont des conditions de sorties à basées sur des extrapolations à l'ordre 4 de la solution intérieure supersonique. Les conditions limites dans la direction ζ sont périodiques.

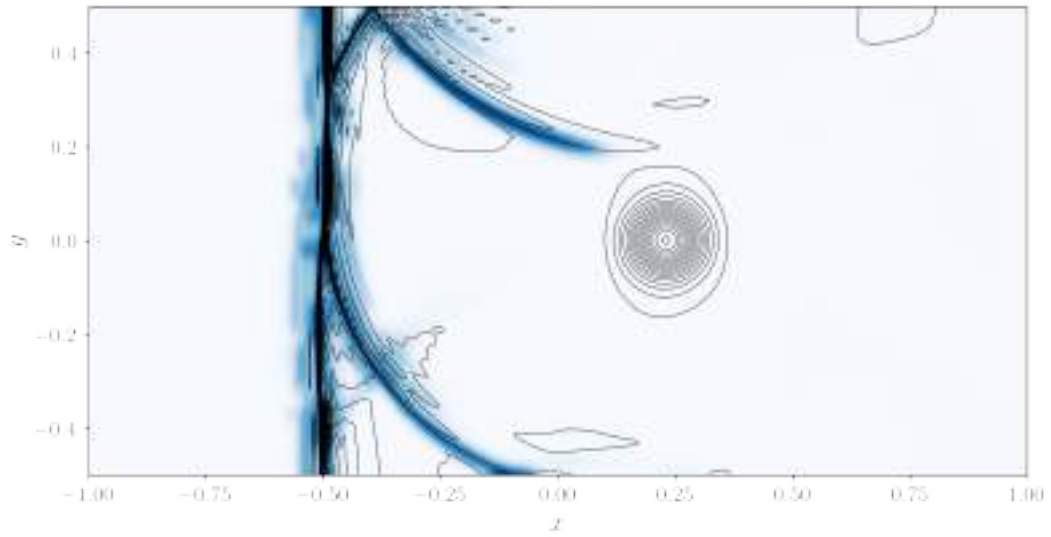
Il s'agit d'un calcul instationnaire où le domaine est initialisé par une solution uniforme q_0 à $M_{\infty} = 3$ et une température $T_{\infty} = 273.15\text{K}$. Le calcul est réalisé avec le schéma temporel RK3 et le schéma spatial standard à l'ordre 8. Un filtre optimisé d'ordre 8 est également appliqué avec un décentrage progressif vers les parois. Le calcul est initialisé à $CFL = 0.1$ pendant 500 itérations puis progressivement amené à $CFL = 0.5$ en 500 itérations via une rampe de CFL régulière. La solution

Temps	RK3
Espace	STD9
Filtres	OPT9
Chocs	(ANAD ou JST) + Π
CFL	0.1 $\rightarrow$ 0.5

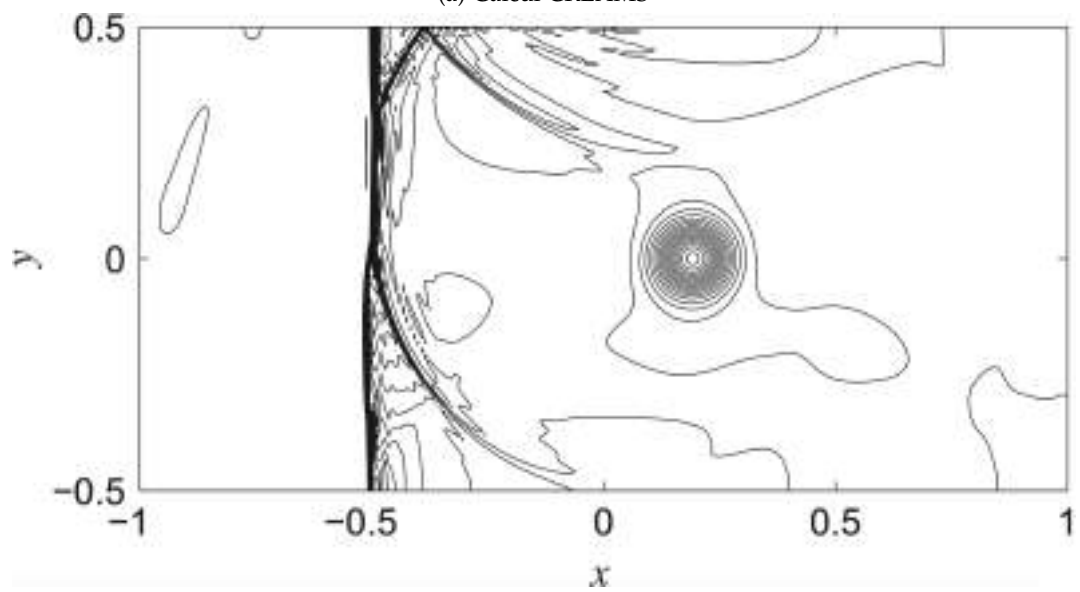
TABLE 2.5 : Paramètres numériques

est étudiée jusqu'au temps convectif $t = 20$. Initialement, l'onde choc se détache de la paroi du cylindre, entraînant de forts gradients sur les premiers points à la paroi. La stabilité numérique de l'écoulement transitoire est une bonne vérification de la robustesse des méthodes de capture de choc employées. Dans les deux cas, il n'y a pas d'oscillations parasites relevées.

En Fig. 2.14, nous présentons la solution à $t = 20$, comparée aux résultats de KAWAI et LELE, 2008 utilisant des schémas compacts d'ordre 6. Les méthodes ANAD et JST sont toutes deux en accord avec la solution de référence. Les contours



(a) Calcul CREAMS



(b) Calcul Daude & al

FIGURE 2.13 : Contours du champ de pression à $t = 0.80$. 90 contours dans $[1.02, 1.4]$.
Champ bleu : senseur de choc

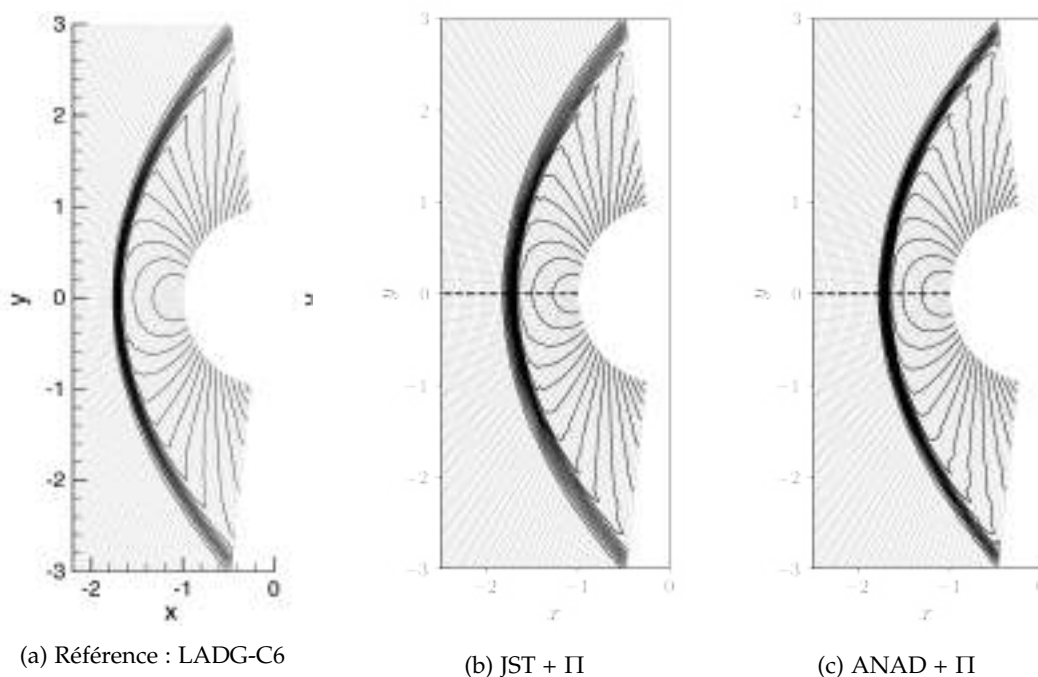


FIGURE 2.14 : Comparaison du champ de pression stationnaire et des méthodes de capture du choc. 20 contours compris dans l'intervalle $[0.93, 1.2]$. Ligne pointillée : extraction du profil de pression. Référence : KAWAI et LELE, 2008

de pression sont réguliers après le choc. La déformation du maillage n'induit pas d'oscillations numériques. La solution JST présente un front de choc épaissi vis-à-vis de la solution ANAD. Une comparaison quantitative du profil de pression dans l'axe du point d'arrêt est donnée en Fig. 2.15. Les niveaux de pressions obtenus par CREAMS en amont et aval du choc pour l'approche ANAD présentent un très bon accord avec le calcul de référence. La pression post-choc est parfaitement retrouvée et le nombre de points pour capturer le choc est proche de l'approche LAD, avec le taux de dissipation calculé automatiquement. A contrario, la méthode JST dissipe excessivement le front de choc pour ce cas, entraînant une erreur sur le niveau de pression post-choc obtenu. Cette erreur peut être réduite en réduisant manuellement le taux de dissipation initialement calculé avec la solution et permet alors de retrouver une capture du front de choc plus précise.

2.5.6 Taylor-Green Vortex

Après avoir validé la capacité des formulations numériques à capturer les dynamiques non-visqueuses, nous vérifions la précision de nos schémas centrés d'ordre élevés dans le calcul d'une cascade turbulente générée par des tourbillons de Taylor-Green. Nous nous basons sur l'étude comparative de DEBONIS (2013) pour une solution initiale incompressible sur une grille cartésienne. Les paramètres de l'écoulement sont donnés pour une longueur de référence $L_{ref} = 1.0$. Le calcul est réalisé sur un domaine $\Omega \in [0, 2\pi]^3$ périodique dans les trois directions du repère curviligne. La solution initiale à l'instant $t = 0$ est donnée par les équations 2.100

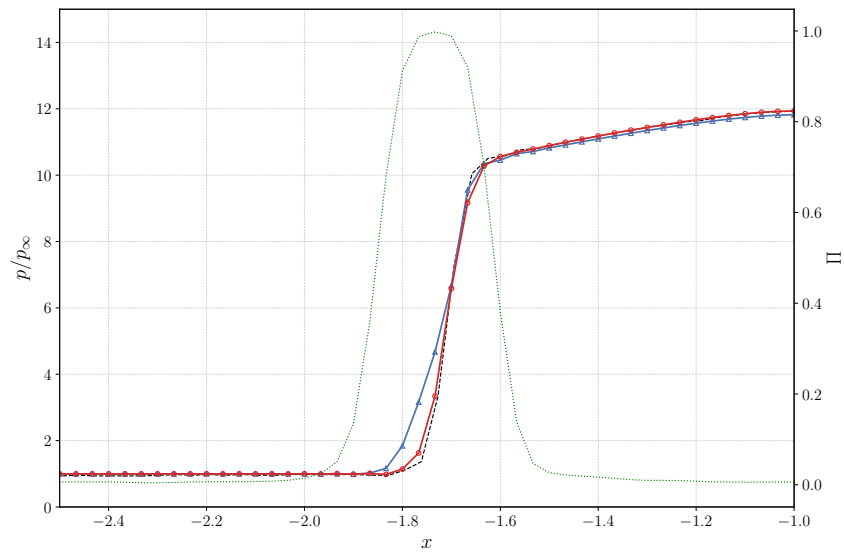


FIGURE 2.15 : Comparaison du champ de pression stationnaire et des méthodes de capture du choc. 20 contours compris dans l'intervalle $[0.93, 1.2]$

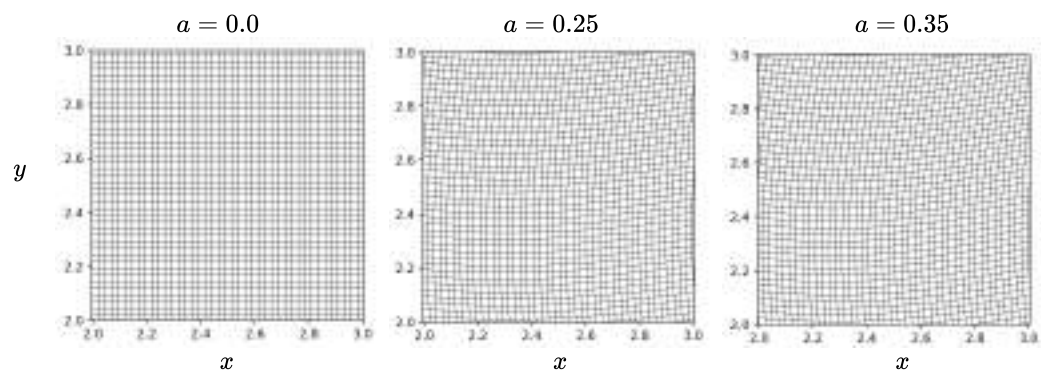


FIGURE 2.16 : Déformation des grilles utilisées pour l'étude.

Paramètre	Valeur
M_∞	0.1
Re_∞	1600
T_{ref} (K)	294.44K
L_{ref} (m)	1.0
t_{ref}	$\frac{2\pi L_{ref}}{U_\infty}$

TABLE 2.6 : Paramètres de référence de l'advection de vortex

à 2.103. Le champ de masse volumique est obtenu avec le champ de pression et un champ de température constant. Les valeurs de référence sont utilisées pour définir respectivement la vitesse, la pression et la masse volumique de référence : V_0, p_0, ρ_0 .

$$u = V_0 \sin\left(\frac{x}{L}\right) \cos\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \quad (2.100)$$

$$v = -V_0 \cos\left(\frac{x}{L}\right) \sin\left(\frac{y}{L}\right) \cos\left(\frac{z}{L}\right) \quad (2.101)$$

$$w = 0 \quad (2.102)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 V_0^2}{16} \left(\cos\left(\frac{2x}{L}\right) + \cos\left(\frac{2y}{L}\right) \right) \left(\cos\left(\frac{2z}{L}\right) + 2 \right) \quad (2.103)$$

Nous réalisons un calcul instationnaire de l'instant t_0 à $t_f = 20$ et mesurons la dissipation de l'énergie cinétique dans le domaine selon :

$$E_k(t) = \frac{1}{\rho_0 u_0^2} \int_{\Omega} \rho \frac{u_i u_i}{2} d\Omega \quad (2.104)$$

Une seconde validation est faite en mesurant le taux de dissipation de l'énergie cinétique : $dE_k(t)/dt$. Cette mesure au second ordre est plus sensible à la précision du schéma numérique global.

Dans le cadre de la validation de la formulation curviligne, nous ajoutons à ces calculs cartésiens des calculs sur des grilles progressivement déformées selon l'expression en Eq. 2.105 à 2.107. L'étude de l'effet de la déformation du maillage sur la cascade turbulente du Taylor Green Vortex n'a pas été présentée dans la littérature à la connaissance de l'auteur et constitue un résultat original en soi. Nous proposons une courte étude visant à quantifier l'effet d'une distorsion de la grille structurée sur les résolution effective des structures fines de l'écoulement.

$$x = x_0(\xi, \eta, \zeta) + a \sin(\omega\eta) \sin(\omega\zeta) \quad (2.105)$$

$$y = y_0(\xi, \eta, \zeta) + a \sin(\omega\xi) \sin(\omega\zeta) \quad (2.106)$$

$$z = z_0(\xi, \eta, \zeta) + a \sin(\omega\xi) \sin(\omega\eta) \quad (2.107)$$

Le paramètre a donne l'amplitude de la déformation, trois valeurs ont été choisies $a = (0, 0.25, 0.35)$. Les paramètres ξ, η et ζ sont compris dans $[0, 1]$. Le nombre

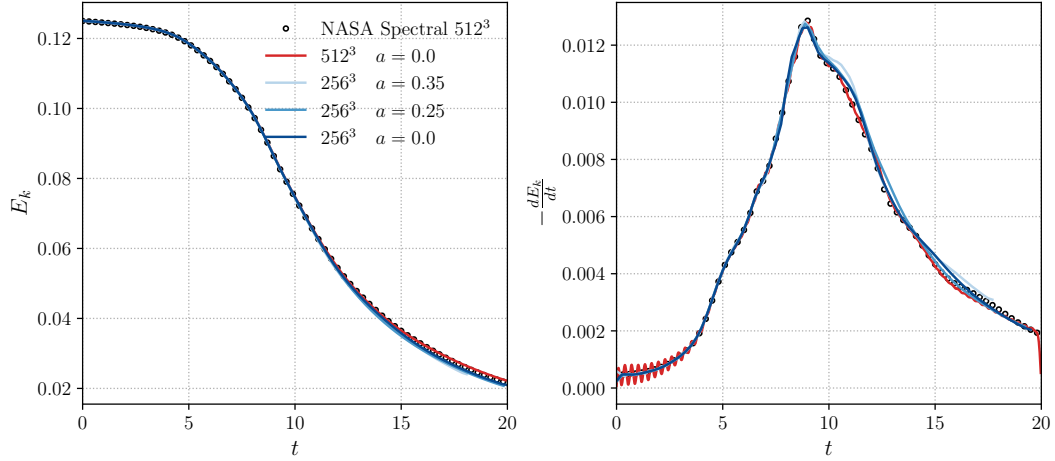


FIGURE 2.17 : Comparaison des solutions du Taylor Green Vortex pour diverses déformations de maillage.

d'onde de la déformation est choisi à $\omega = 4\pi$. Les grilles associées sont présentées en Fig. 2.16.

Pour le maillage $a = 0.0$, deux grilles sont étudiées. Une grille résolue de 512^3 points et une grille de 256^3 points. Les résultats de ces deux calculs sont présentés en Fig. 2.17. Ces simulations sont faites avec les schéma DRP9 et RK4-6NL. Le filtrage est réglé à $a_f = 0.05$ et la capture de choc est désactivée. Pour le cas 512^3 en rouge, l'accord avec la référence pour le calcul de E_k est parfait⁴. Jusqu'à $t = 17$, ensuite une légère sous dissipation est visible. Celle-ci est aussi remarquable sur la courbe de dE_k/dt . Cette sous dissipation est en accord avec les résultats de DEBONIS (2013).

Dans le cas de la grille de taille 256^3 et $a = 0.0$. L'accord est également retrouvé avec la référence pour E_k jusqu'à $t \approx 12$. Pour la courbe du taux de dissipation dE_k/dt nous retrouvons également un bon niveau de restitution du pic à $t = 10$. Une légère sur-dissipation est observée après ce pic et est cohérente avec la tendance de E_k .

Les études sur grilles déformées sont réalisées sur un maillage en 256^3 pour le même schéma numérique. En première observation, l'accord avec la référence est bon et la grille non déformée est bon jusqu'à $t \approx 11$. Après ce temps, une dissipation plus marquée est observable. Cette tendance est visible sur la courbe dE_k/dt , où nous pouvons remarquer que l'augmentation de l'amplitude de la déformation augmente l'erreur de dissipation. Particulièrement pour le cas $a = 0.35$, l'erreur est nettement visible à $t = 11$. Une suggestion d'explication de cette dissipation est simplement l'étirement des mailles dans une direction donnée. Cet étirement réduit la résolution spatiale effective et entraîne une sous résolution des petites échelles de la turbulence. Ce qui se traduit par une sur-dissipation, similairement à une ILES. Une prolongation de cette étude simple permettrait de mieux quantifier cet effet. Par concision, nous choisissons de nous limiter à ces résultats.

⁴ Les oscillations de la courbe rouge sont des artefacts de post-traitement dans le calcul de la dérivée dE_k/dt .

Les calculs de la cascade turbulente du Taylor Green Vortex sur les grilles déformées ou non, sont en très bon accord avec les études de référence. Ces résultats confirment une dernière fois la précision des méthodes numériques choisies pour traiter à la fois de l'aéroacoustique, des écoulements turbulents et des discontinuités. Nous appliquons ces méthodes sur des cas d'application en partie suivante.

Deuxième partie

SIMULATIONS ET ANALYSES

COUCHE LIMITE DE PLAQUE PLANE

3.1	Description générale	79
3.1.1	Configuration	81
3.1.2	Écoulement de base	84
3.2	Étude de stabilité locale	84
3.2.1	Problème spatial	85
3.2.2	Spectres et évolution des modes	86
3.3	DNS du forçage par bruit blanc	92
3.3.1	Procédure de forçage	93
3.3.2	Échantillonnage	94
3.3.3	Champs linéaires et non-linéaires	95
3.4	Décomposition de la dynamique	98
3.4.1	Évolution des modes de Fourier	100
3.4.2	Extraction des modes SPOD dominants	103
3.4.3	Amplification spatiale des modes	107
3.5	Étude des modes de l'instabilité secondaire	109
3.5.1	Effet de l'écoulement moyen sur la stabilité locale	109
3.5.2	Analyse des interactions triadiques	111
3.5.3	Génération de streaks	114
3.6	Conclusion sur le scénario de transition	114

La transition de couche limite de plaque plane en régime hypersonique est une configuration bien étudiée, faisant office de cas de référence. De nombreuses analyses de transition "contrôlée" ont été réalisées pour cet écoulement canonique. Cependant, peu de travaux proposent d'étudier la dynamique de transition dans un cadre "non contrôlé", où un forçage proche du spectre d'un environnement naturel est appliqué. Nous choisissons donc de commencer nos analyses par l'investigation des mécanismes de transition induits par un forçage large bande produit par un bruit blanc. La dynamique issue de ce forçage servira de référence pour les chapitres suivants sur des écoulements plus complexes.

3.1 DESCRIPTION GÉNÉRALE

La simulation de la transition vers la turbulence d'écoulements supersonique et hypersonique sur plaque plane a été la source de nombreuses études. Ces dernières

s'intéressent principalement à la description fine des divers modes de transition selon le forçage initial et l'instabilité dominante. Cette description est faite par l'injection d'un forçage constitué de quelques ondes bien choisies pour déclencher volontairement un type de transition déterminé. Dans ce cas l'analyse du scénario de transition peut être qualifiée de "contrôlée". Avec ce type d'approche, l'étude de FRANKO et LELE (2013) donne une description détaillée des chemins de transition modale. Dans ces cas, une onde dite primaire, de fréquence f_1 et de nombre d'onde en z noté β_1 , s'amplifie dans la couche limite. Après avoir atteint une certaine amplitude celle-ci interagit non-linéairement avec deux ondes secondaires, symétriques, de fréquence et nombre d'onde multiples de l'onde primaire telle que $f_2 = nf_1$ et $\beta_2 = m\beta_1$. La forme du couple onde primaire/onde secondaire détermine alors la nature du mécanisme de transition. Au fil des études, trois chemins d'interactions principaux ont été relevés (KOEVARY et al., 2010; MAYER, TERZI et FASEL, 2011; SIVASUBRAMANIAN et FASEL, 2015)

- Le chemin fondamental (Fig. 3.1a) où le second mode de Mack plan de fréquence notée f_{MM} est dominant et interagit principalement avec un mode de Mack oblique, à la même fréquence.
- Le chemin subharmonique (Fig. 3.1b) dans lequel le second mode de Mack est dominant et interagit principalement avec un mode de Mack oblique, à la fréquence subharmonique $f_{MM}/2$. Le chemin subharmonique présente généralement une amplification moins rapide des ondes secondaire que le chemin fondamental.
- Le chemin oblique (Fig. 3.1c) où le premier mode oblique, de fréquence notée f_{FM} , interagit avec lui-même pour générer des streaks de fréquence nulle au double du nombre d'onde transverse. C'est le chemin dominant pour les conditions où le premier mode oblique est le plus amplifié.

La détermination du chemin dominant n'est généralement pas aisée. Pour le régime hypersonique, en se plaçant au-delà de $M_\infty = 5.0$, il est généralement admis dans la littérature que le second mode de Mack (MACK, 1984) possède le taux de croissance spatiale le plus important et est donc dominant vis-à-vis du premier mode oblique. Cependant, en ne retenant que ce résultat issu de la théorie de la stabilité linéaire locale, nous omettons les effets de la réceptivité, de la non-linéarité et de l'amplification spatiale des divers modes (critère e^N). Une analyse approfondie, en trois parties, de la réceptivité d'une plaque plane à $M_\infty = 4.5$ dans les conditions de l'étude expérimentale de KENDALL (1975), a détaillés les mécanismes de la réceptivité à un forçage acoustique du second mode de Mack et du premier mode oblique (MA et ZHONG, 2003b, 2005). Ce résultat est en lien avec l'étude asymptotique de FEDOROV et KHOKHLOV (1992) sur l'effet d'un forçage acoustique au bord d'attaque d'une plaque plane sur les ondes acoustiques rapides (F) et lentes (S). Une revue exhaustive de ces mécanismes de réceptivité en régime hypersonique est donnée par FEDOROV, 2011 et quelques éléments en sont donnés dans ce chapitre.

Suite à ce forçage initial, la croissance du second mode de Mack, du premier mode oblique et leurs harmoniques en fréquence dépend assez largement des conditions de l'écoulement et de la géométrie. Diverses études expérimentales

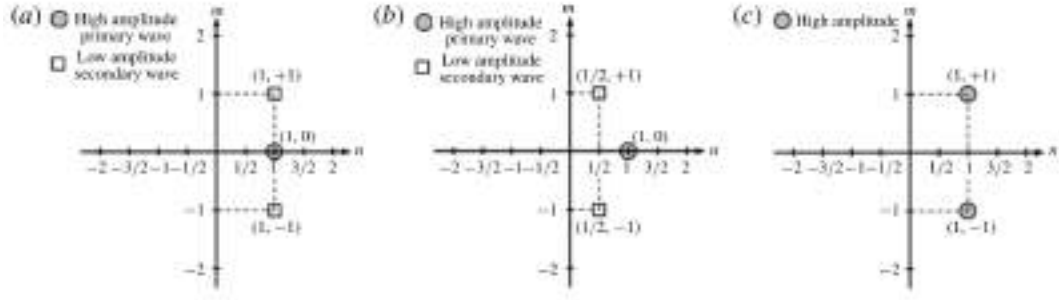


FIGURE 3.1 : Représentation schématique des divers scénarios de transition dans le diagramme fréquence (n), nombre d'onde transverse (m) pour le scénario fondamental (a), le scénario sub-harmonique en fréquence (b) et oblique (c). Issu de HADER et FASEL (2019)

dans des souffleries silencieuses (CRAIG et al., 2019; JEWELL, 2014) et numériques (FRANKO et LELE, 2013; HADER et FASEL, 2019; HARTMAN, HADER et FASEL, 2021; SIVASUBRAMANIAN et FASEL, 2015) ont retrouvé chacun des chemins décrits ci-haut, sans pour autant pouvoir déterminer de critère clair pour leur apparition, chacune de ces études étant réalisée pour des conditions différentes. Ce résultat souligne la difficulté d'établir une théorie générale de transition modale pour les couches limites hypersoniques.

Devant ces considérations, nous choisissons de nous affranchir d'un "contrôle" a priori du mécanisme de transition. Nous présentons la dynamique suivie par une couche limite hypersonique lorsque cette dernière est soumise à un forçage acoustique large bande. L'objectif est de caractériser pour l'écoulement choisi, les instabilités émergentes. Nous présentons l'écoulement de base laminaire en section suivante. Puis nous étudions la stabilité linéaire 1D de cet écoulement laminaire pour obtenir des informations de référence sur les modes attendus. En Sec. 3.3, nous décrivons le forçage employé. Deux simulations complémentaires sont lancées en parallèle, une DNS non-linéaire et une DNS linéarisée (LDNS), aidant à mieux identifier les structures issues uniquement du régime non-linéaire. Pour l'analyse de ces deux simulations, nous suivons une méthode usuelle en plusieurs étapes. Nous commençons par présenter la solution instationnaire et les champs de perturbations associés. Puis, ces solutions sont décomposées dans l'espace de Fourier et les structures cohérentes les plus significatives sont discutées. De cette identification, nous dressons un premier scénario de transition, que nous appuyons avec une analyse plus approfondie des interactions et de l'effet de l'écoulement moyen. Enfin, un scénario de transition pour un forçage large bande dans notre configuration d'écoulement est proposé.

3.1.1 Configuration

Le choix de notre configuration est guidé par les études présentées dans les chapitres suivants, principalement par les conditions d'écoulements données au chapitre 4. Ces conditions sont issues des travaux successifs de DE TULLIO, 2013,

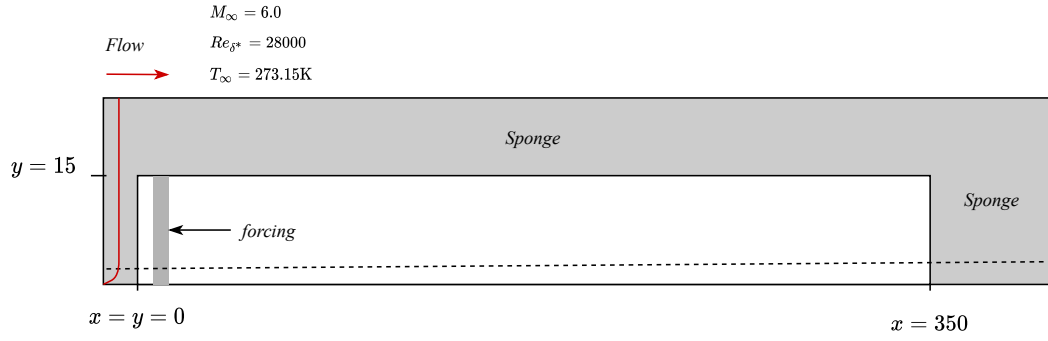


FIGURE 3.2 : Vue générale du domaine de calcul

EYNDE, 2015 et LEFIEUX, 2020 pour des écoulements hypersoniques autour d'éléments de rugosité isolés. Ces simulations se placent à un nombre de Mach amont $M_\infty = 6.0$ pour divers nombres de Reynolds et températures de paroi. Les nombres de Reynolds étudiés vont de $Re_\delta^* = 7200$ à $Re_\delta^* = 40000$, avec δ^* l'épaisseur de déplacement à l'entrée du domaine. Ces valeurs permettent de balayer divers régimes d'instabilités convectives et absolues induites par les rugosités isolées. Nous choisissons dans le cas de notre plaque plane, de nous positionner à $Re_\delta^* = 28000$. Ce nombre de Reynolds étudié par LEFIEUX, 2020 s'avère intéressant pour la suite de notre étude pour deux raisons. En premier lieu, sa valeur relativement importante le rapproche des nombres de Reynolds que l'on peut trouver en vol. En second lieu, pour le chapitre suivant, ce nombre de Reynolds supporte une amplification rapide des instabilités convectives dans le sillage de rugosités, dans des domaines de taille restreinte, offrant un bon compromis entre coût du calcul et dynamique simulée.

Pour construire notre écoulement de base, nous considérons l'injection d'un profil de couche limite laminaire auto-similaire compressible. Ce profil est utilisé comme donnée d'entrée de notre domaine DNS. Ce dernier est présenté en Fig. 3.2. La longueur de référence pour l'adimensionnement est δ^* , l'épaisseur de déplacement du profil injecté en entrée. Le domaine de calcul est constitué d'un volume d'analyse représenté en blanc et de zones éponges en gris pour limiter les réflexions parasites aux conditions aux limites.

Les longueurs, hauteur et largeur L_x, L_y, L_z du volume de calcul ont été choisies après une courte étude paramétrique de la longueur L_x minimale pour obtenir un démarrage de transition à la turbulence avec le forçage imposé. Il faut noter que ce domaine n'est pas construit pour l'analyse de la turbulence pleinement développée qui n'est pas le cadre de cette étude. Ainsi, seulement les premières étapes du processus non-linéaire amenant à la turbulence sont capturées dans le volume d'analyse actuel. Cette remarque nous amène à décrire le maillage utilisé. Ce dernier est construit avec des distributions paramétriques en deux étapes. Un premier maillage pour le volume de calcul est produit avec une distribution uniforme dans

les directions x et z . Une distribution hyperbolique issue des travaux de EYNDE, 2015 est utilisée sur l'axe y pour raffiner le maillage en direction de la paroi.

$$y_j = y_0 + (L_y - y_0) \frac{\sinh(b_y \eta)}{\sinh(b_y)} \quad (3.1)$$

$$\eta(j) = j/Ny, \quad j \in [0, Ny - 1]$$

Le paramètre b_y pilote le taux de raffinement, il est choisi ici à $b_y = 3.5$. Le nombre de points dans le domaine est déterminé avec les études de convergence en maillage de LEFIEUX, GARNIER et SANDHAM, 2019 pour le même nombre de Reynolds et nombre Mach, menant pour le volume d'analyse à une grille de taille : $N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta = 4000 \times 300 \times 150$. Le raffinement dans la direction η permet d'obtenir 100 points dans la couche limite en $x = 0.0$ et environ 120 points en $x = 350$. Si nous considérons l'étude de convergence en maillage réalisée dans les études précédentes d'une part et le fait que des schémas plus précis sont utilisés dans la présente étude d'autre part. La discrétisation ici retenue est considérée comme suffisante pour capturer précisément les premières étapes de la transition vers la turbulence. De plus amples détails sur cette grille peuvent également être trouvés au Chap. 4.

Les conditions aux limites appliquées consistent en une paroi adiabatique à $\eta = 0$ et des conditions périodiques pour la direction ζ . Les conditions de sorties en $\xi = 1$ et $\eta = 1$ sont des extrapolations à l'ordre 4 de l'écoulement filtré par les zones éponge. En entrée, à $\xi = 1$, un profil autosimilaire est imposé en deux parties. Pour la zone supersonique de l'écoulement : $u_x \geq c_\infty$, les variables primitives sont imposées par une condition de Dirichlet. Pour la partie subsonique, les valeurs de vitesses sont imposées avec une condition de Dirichlet, mais la pression est extrapolée depuis les points intérieurs par une condition de Neumann à l'ordre 4. Le champ de température est alors reconstruit par la loi d'état (DE TULLIO et SANDHAM, 2015).

En supplément des conditions aux limites de sorties, les zones éponges sont construites avec un étirement progressif du maillage sur 35 points en η et 100 points en ξ . À cet étirement, nous ajoutons un filtrage progressif de la solution avec un filtre centré d'ordre 2. L'amplitude A_{sponge} de ce filtrage suit une progression quadratique proposée par MANI, 2010, entre $A_{sponge} = 0.0$ et $A_{sponge} = 0.2$ sur le nombre de points N_{sponge} de la zone éponge.

$$A_{sponge} = \left(\frac{i - i_{sponge}}{N_{sponge}} \right)^2 \quad (3.2)$$

Enfin, pour le schéma numérique global, nous utilisons pour ces calculs le schéma spatial centré à l'ordre 8 couplé au filtre optimisé sur 9 points et un schéma d'intégration en temps RK3-TVD. La capture de choc est activée avec le senseur amélioré proposé en Eq. 2.78. L'ensemble des paramètres de l'étude sont redonnés dans le tableau 3.1 en récapitulatif.

Paramètre	Valeur
M_∞	6.0
Re_{δ^*}	28000
T_{ref} (K)	273.15
L_{ref}	$\delta^*(x = 0)$
t_{ref}	δ^*/u_∞
$L_x \times L_y \times L_z$	$350 \times 15 \times 6.5$
$N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$	$4000 \times 300 \times 150$

TABLE 3.1 : Paramètre de référence de la plaque plane

3.1.2 Écoulement de base

L'écoulement de base est obtenu par initialisation du domaine avec le profil autosimilaire injecté en entrée. Le calcul est réalisé sur 1280 CPUs pour environ 60000 itérations à $CFL = 0.8$. L'écoulement de base stationnaire est considéré convergé lorsque les résidus atteignent 10^{-8} , soit en considérant le terme de droite des équations de Navier-Stokes : $\|\mathcal{N}(\mathbf{q})\|_{L_2} < 10^{-8}$.

Le caractère autosimilaire de cet écoulement de base hypersonique est présenté en Fig. 3.3. Pour les deux figures, nous superposons le profil d'entrée initial en point noirs. Les profils de température à quatre abscisses le long du domaine sont tracés et leur hauteur est adimensionnée par la hauteur de couche limite $\delta_{99} = 0.99u_\infty$. Le profil de vitesse subit une très légère inflexion vers la fin du domaine. Cependant, le caractère autosimilaire de notre couche limite est bien vérifié. Il en va de même pour le profil de température. La température de paroi adiabatique, T_w , se retrouve très proche de la valeur donnée par les équations de couche limite : $T_{w,ad} = 7.02T_\infty$, pour notre écoulement à $M_\infty = 6.0$. Cet écoulement de base sert ensuite de support à l'analyse linéaire et non-linéaire de la réponse de la couche limite hypersonique à un forçage de type bruit blanc.

3.2 ÉTUDE DE STABILITÉ LOCALE

En amont de l'étude avec forçage, une évaluation de la stabilité de l'écoulement de base est effectuée. Cette étude nous permet d'estimer les nombres d'ondes des modes instables dominants (premier et second modes). Nous présentons par la même quelques caractéristiques et résultats du problème de stabilité spatiale. Ces caractéristiques et spectres n'étant pas triviaux et finalement assez rarement décrits, nous choisissons volontairement de détailler plus clairement l'évolution des modes de la couche limite hypersonique.

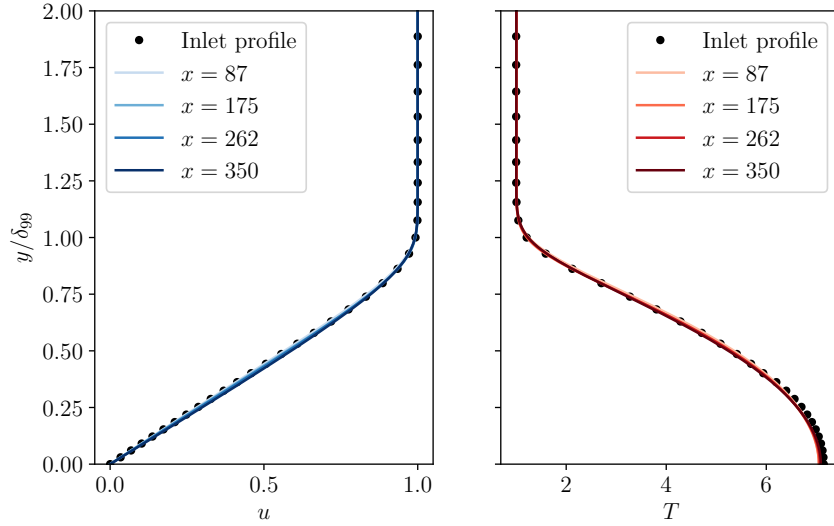


FIGURE 3.3 : Autosimilarité du profil de couche limite le long du domaine. Gauche : vitesse axiale. Droite : température. Points : profil de référence à l'injection.

3.2.1 Problème spatial

Nous reprenons le problème de stabilité linéaire posé en section 1.1 pour un écoulement parallèle.

$$\omega \mathbf{L}_0 \mathbf{q}' = (\mathbf{F}_0 + \alpha \mathbf{F}_1 + \alpha^2 \mathbf{F}_2) \mathbf{q}' \quad (3.3)$$

Nous cherchons dans le cadre du problème de stabilité spatiale le spectre du problème aux valeurs propres quadratique en α pour des perturbations de la forme $\mathbf{q}' = \hat{\mathbf{q}}(y) \exp(-i(\omega t + \alpha x))$ avec le nombre d'onde $\alpha \in \mathbb{C}$, la fréquence circulaire¹ $\omega \in \mathbb{R}$ et le nombre d'onde en z , écrit β . Ce problème est résolu à l'aide d'un code interne écrit en Matlab. Les opérateurs linéaires en Eq. 3.3 sont calculés avec un profil de l'écoulement de base obtenu : soit depuis la résolution des équations de couche limite autosimilaire compressible ; soit depuis l'écoulement de base de l'étude DNS considérée. Les termes de ces opérateurs peuvent être retrouvés dans MACK, 1984.

La résolution numérique est faite avec une méthode de collocation spectrale telle que décrite par MALIK, 1990. Des polynômes de Chebyshev sont employés pour effectuer une reconstruction d'ordre élevé de la solution (formellement d'ordre $N - 1$ pour N points). Le maillage de collocation spectrale étant construit tel que $\hat{y} \in [-1, 1]$, un maillage adapté à la couche limite doit être défini, nous utilisons dans ce cas la distribution donnée par HANIFI, SCHMID et HENNINGSON, 1996 pour l'analyse des couches limites compressibles. Le maillage est étiré progressivement entre 0 et y_{max} sur N_y points.

$$y = a \frac{1 + \hat{y}}{b - \hat{y}} \quad (3.4)$$

¹ Le terme fréquence circulaire $\omega = 2\pi f$ est employé pour distinguer le nombre d'onde temporel du nombre d'onde spatial d'un mode

Avec les paramètres a et b :

$$a = \frac{y_i y_{\max}}{y_{\max} - 2y_i} \quad b = 1 + \frac{2a}{y_{\max}}. \quad (3.5)$$

La variable y_i définit la hauteur sous laquelle se trouve la moitié des points. Celle-ci est fixée à $y_i = 2.0$ dans le cas étudié. Nous appliquons des conditions de Dirichlet aux limites du domaine en $y = 0$ et $y = y_{\max}$. Ces conditions sont imposées directement dans les opérateurs sur les lignes correspondantes.

Avec le problème de stabilité posé ci-dessus, nous choisissons d'étudier la stabilité linéaire de l'écoulement de plaque plane hypersonique considérée, pour un profil situé en $x = 50$. Ce profil est situé en première partie du domaine dans la zone où la réceptivité au bruit blanc est suffisante pour déclencher des instabilités. Nous commençons par une analyse paramétrique du spectre pour une onde plane telle que : $\beta = 2\pi/\lambda_z = 0.0$ et un ensemble de 50 fréquences $\omega \in [0.0, 3.3]$. Le choix de l'onde plane nous permet ici de cibler la fréquence d'amplification maximale du second mode de Mack. Ce dernier ayant son pic d'amplification pour $\beta = 0.0$ (MACK, 1984).

Nous menons cette étude en deux temps, en premier lieu, avec un maillage peu raffiné ($N_y = 100$) nous cherchons la fréquence d'amplification maximale $\omega_{\max}$. Dans un second temps, nous traçons le spectre spatial à $\omega_{\max}$ en faisant varier le nombre de point N_y du maillage pour vérifier la bonne convergence du spectre obtenu. Cette variation est effectuée entre $N_y = 100$ et $N_y = 400$.

Pour les matrices denses, mais de petites tailles du cas 1D, le problème aux valeurs propres polynomial est résolu directement dans `Matlab`². Cette approche et la taille des opérateurs nous permet d'obtenir les spectres complets des problèmes résolus que nous présentons ci-après.

3.2.2 Spectres et évolution des modes

Le balayage sur maillage $N_y = 100$ nous permet d'obtenir la fréquence la plus instable $\omega_{\max} \approx 1.876$ pour un nombre d'onde $\alpha = 2.0232 - 0.0529i$. Nous traçons les spectres convergés pour cette fréquence, ces derniers sont superposés en Fig. 3.4. En observant le spectre pour $N_y = 400$, nous relevons les principales caractéristiques du spectre spatial. Nous avons la présence de deux branches continues des modes acoustiques rapides et lents, de vitesse de phase $1 - 1/M_\infty$ et $1 + 1/M_\infty$, respectivement à gauche et à droite. Entre ces deux branches existe une troisième branche continue des modes de vorticité et d'entropie. Enfin, pour cette fréquence $\omega_{\max}$ et ce nombre d'onde $\beta = 0$, nous avons la présence de deux modes discrets, un mode instable, nommé mode lent ou mode S, pour $\alpha_i < 0$ correspondant ici au second mode de Mack. Un autre mode discret, dit mode rapide ou mode F en reprenant la terminologie de FEDOROV et TUMIN, 2011. La nature rapide ou lente des modes discrets est déterminée par leur branche acoustique d'origine. Ces modes discrets nous amènent à faire quelques brèves remarques sur la conver-

² Fonction `polyeig`

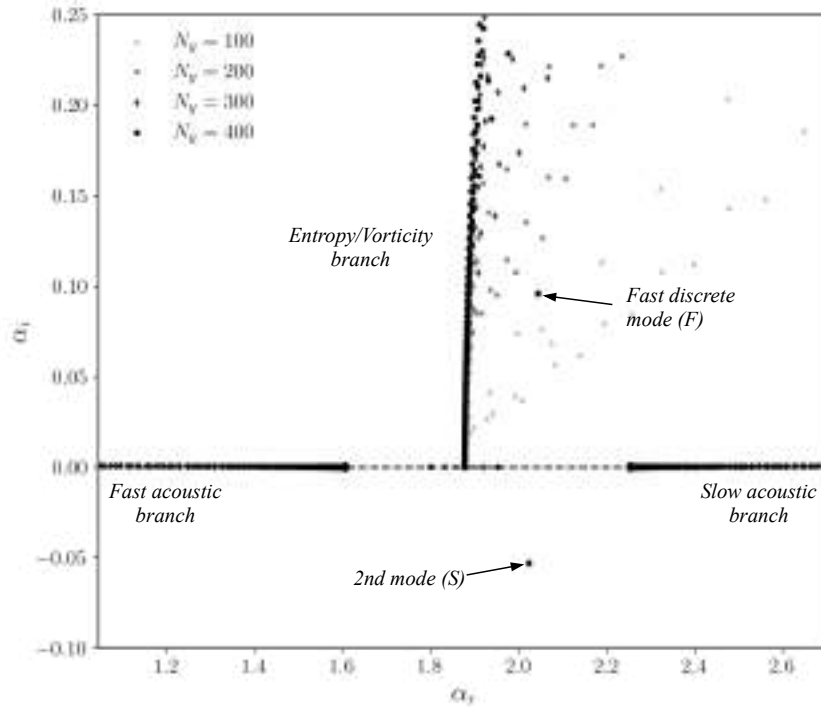


FIGURE 3.4 : Convergence du spectre spatial à $\omega = 1.876$. Présentation des différents modes discrets et branches continues. Les niveaux de gris représentent les spectres pour des résolutions variées.

gence du spectre spatial. Nous pouvons premièrement noter que les modes discrets semblent converger dès $N_y = 100$, ces derniers sont impossibles à distinguer entre eux. Cette convergence peut être remarquée en observant que toutes les valeurs propres du mode S sont superposées. Les valeurs de α respectives du mode S sont données dans le tableau 3.2 pour référence. En second point, nous remarquons que la capture des branches continues est plus délicate, particulièrement pour la branche entropie/vorticité, une continuité suffisante de cette branche est atteinte entre $N_y = 200$ et $N_y = 300$. L'augmentation de la résolution ne permet que d'augmenter la continuité de cette branche pour les grandes valeurs de α_i .

N_y	Second mode de Mack : α
100	$2.023242212377803 - 0.0529185170245674i$
200	$2.023127135477136 - 0.052936307118123936i$
300	$2.023127088092915 - 0.05293620213602493i$
400	$2.023127044784706 - 0.05293619036695373i$

TABLE 3.2 : Convergence en maillage du second mode de Mack

En supplément de l'étude du spectre spatial précédente, nous proposons de clarifier de façon pratique une ambiguïté de terminologie souvent écartée dans la description des modes instables de la couche limite hypersonique. Dans la suite des descriptions faites en introduction (Sec. 1.1), les travaux de FEDOROV et KHOKHLOV,

2002 sur l'analyse asymptotique du spectre spatial et la réceptivité de la couche limite hypersonique ont mis en évidence la continuité du spectre entre le premier mode (ondes de Tollmien-Schlichting compressible) et le second mode de Mack. Cette continuité pose un problème sémantique entre la description qualitative (fréquences et structures observables) des mécanismes de transition et la description en objets mathématiques (valeurs propres et modes propres) de ces mécanismes. Une revue de cette phénoménologie existe (FEDOROV, 2011), cependant, nous trouvons utile de présenter ce problème de sémantique dans le cas concret de cet écoulement pour mieux l'illustrer.

Reprenant le spectre spatial pour une onde plane ($\beta = 0.0$), nous traçons l'évolution des valeurs propres dans l'intervalle $\omega \in [0, 3.3]$ en Fig. 3.5. Ce diagramme nous permet de suivre la trajectoire des modes avec l'augmentation de la fréquence. Une analogie avec la progression spatiale de la couche limite peut être directement faite en considérant la relation inversement proportionnelle de la fréquence d'une instabilité du second mode de Mack à l'épaisseur de la couche limite ($f \propto u_\infty / 2\delta$). Ainsi, il est possible de caractériser le problème de réceptivité d'un mode à une fréquence donnée le long du domaine et l'évolution de sa stabilité. Cela peut se révéler utile pour analyser la sensibilité d'un écoulement de base à certains types de forçage dans le régime linéaire. L'étude de MA et ZHONG, 2003b présente une analyse de ce type en détaillant le comportement asymptotique, au début du domaine, des modes de la couche limite hypersonique. L'évolution du spectre en Fig. 3.5 est tracé dans le repère : vitesse de phase réelle ($c_r = \omega / \alpha_r$), taux de croissance spatiale (α_i). Les branches acoustiques lentes (S) et rapides (F) sont donc inversées en abscisses au regard du spectre en Fig. 3.4. Dans ce repère (c_r, α_i), les spectres pour des valeurs de ω successives sont centrés sur la vitesse de phase $c_r = 1$, correspondant à la vitesse de l'écoulement et de la branche continue vorticité/entropie. Les branches acoustiques ont alors soit une vitesse de phase inférieure à celle des ondes acoustiques lentes $c_r \leq 1 - 1/M_\infty$, soit une vitesse de phase supérieure à celle des ondes acoustiques rapides $c_r \geq 1 + 1/M_\infty$. Ces vitesses de phase limites sont données en pointillés dans les diagrammes.

Avec cette figure, nous pouvons donc remarquer que l'augmentation progressive de la fréquence fait naître et évoluer deux modes discrets, lent en bleu (mode S) et rapide en rouge (mode F). Ces modes sont issus respectivement, à basse fréquence, des branches acoustiques lentes et rapides (1). Grâce à sa vitesse de groupe positive, le mode F est ici toujours stable et le mode S subit deux phases d'instabilité successives. L'ambiguïté de terminologie se situe sur ces deux phases d'instabilité du même mode S. Ces deux phases représentent l'expression d'un même mode du spectre de la stabilité linéaire locale, qui évolue du premier mode (TS compressible) au second mode de Mack. Ces deux derniers modes, généralement considérés distincts dans les études de transition hypersonique, suivent donc à proprement parler une seule et même branche du spectre du problème de stabilité linéaire pour nos conditions d'écoulement. C'est la raison pour laquelle une terminologie basée sur la nature asymptotique de ces modes est proposée par FEDOROV et TUMIN (2011). Nous devons ajouter que ces trajectoires des modes S et F comprennent certaines évolutions non triviales, où les branches S et F peuvent inverser leur stabilité et supprimer la continuité de la branche premier mode /

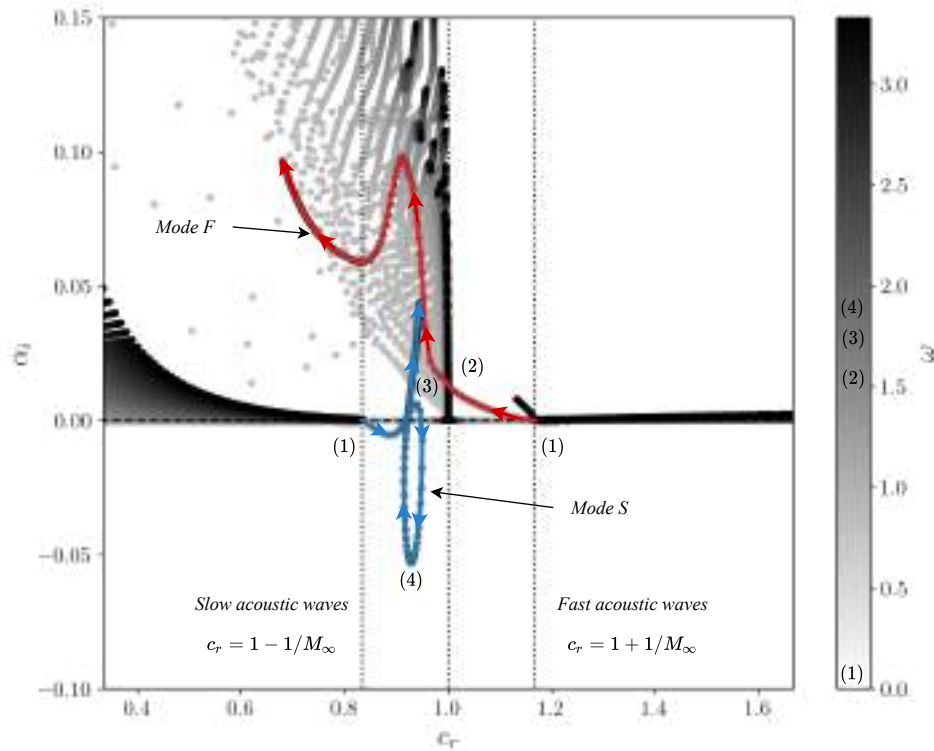


FIGURE 3.5 : Évolution des modes acoustiques F (rouge) et S (bleu) dans le plan complexe selon la fréquence ω . Les spectres pour diverses fréquences sont représentés en niveaux de gris dans le diagramme (vitesse de phase, taux d'amplification spatial)

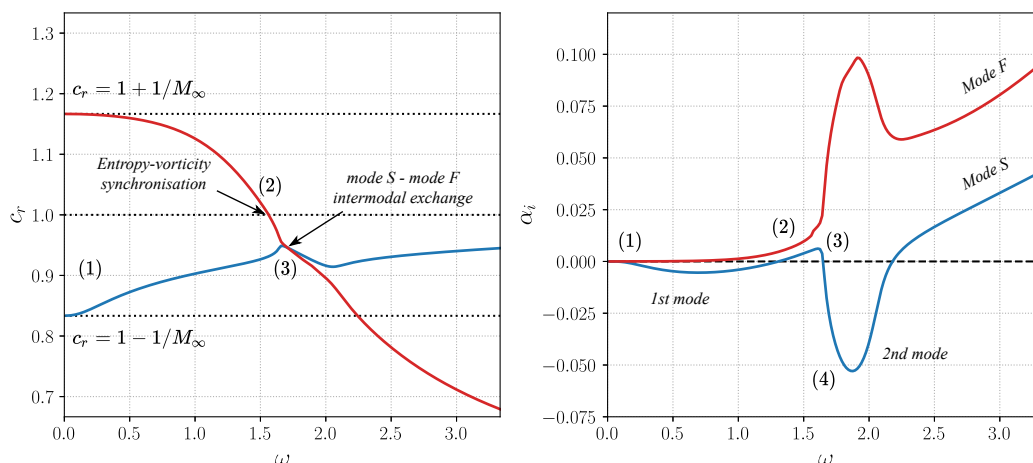


FIGURE 3.6 : Évolution des modes acoustiques F (rouge) et S (bleu) avec la fréquence ω . Gauche : diagramme de vitesse de phase avec visualisation des zones d'échange d'énergie. Droite : évolution du taux de croissance spatiale et continuité du spectre entre le premier mode et le second mode de Mack

second mode. Nous introduirons dans un paragraphe suivant les conditions pour lesquelles cette continuité reste vraie.

Pour mieux illustrer cette continuité du premier mode oblique/second mode de Mack et le lien entre les modes S et F, nous traçons leurs trajectoires respectives en Fig. 3.6 dans les plans (ω, c_r) et (ω, α_i) , en conservant le code couleur. Le diagramme de gauche illustre l'évolution de la vitesse de phase des deux modes. En suivant la trajectoire du mode F, nous observons son départ de la branche acoustique rapide $c_r \geq 1 + 1/M_\infty$ (1) au début du domaine ($\omega \approx 0.0$). À la différence du cas subsonique, cette vitesse de phase initiale proche de celle des ondes acoustiques favorise la réceptivité de ce mode aux perturbations acoustiques en régime hypersonique. Cet aspect est démontré numériquement et analytiquement par FEDOROV et KHOKHLOV (2001) et MA et ZHONG (2003b). Ensuite un croisement de la branche $c_r = 1$ et du mode F a lieu (2), à ce croisement une synchronisation avec les modes de vorticité/entropie est possible. Cette synchronisation se comprend au sens d'une même vitesse de phase $c_r \approx 1$ et de fonctions propres similaires entre le mode F et les modes de la branche continue entropique. En ce point un transfert d'énergie vers le mode F à peut avoir lieu et suggère une réceptivité facilitée à ce types d'ondes³ à des perturbations de température et d'entropie dans un cadre où ces fluctuations dominent devant les fluctuations acoustiques(MA et ZHONG, 2005). Comme par exemple dans la couche d'entropie située derrière un choc détachée (HARTMAN, HADER et FASEL, 2021). Enfin, la vitesse de phase du mode F continue de décroître vers $c_r < 1$ pour croiser le mode S (3). Ce croisement est un point crucial du spectre de la couche limite hypersonique où a lieu un second échange d'énergie entre le mode S et F. Pour les conditions considérées ici, l'embranchement amène à l'instabilité du mode S (4) (FEDOROV et KHOKHLOV,

³ De nouveau, au croisement du mode F et de la branche d'entropie/vorticité, la fonction propre du mode F est quasi-identique à celles des modes entropique et la vitesse de phase est la même (FEDOROV, 2011)

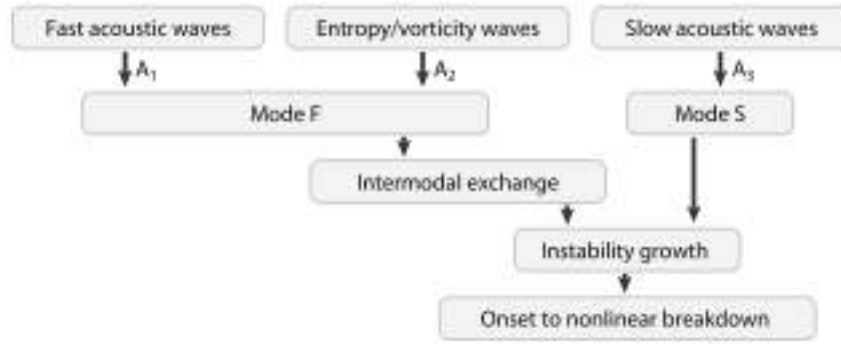


FIGURE 3.7 : Diagramme du parcours des modes S et F depuis leur comportement asymptotique. Présentation des interaction avec les différentes branches du spectre. Ce diagramme est une vue détaillée du chemin A du diagramme de Morkovin. Issu de FEDOROV (2011)

2001). Ceci se traduit physiquement par l'amplification des structures liées au second mode de Mack. De nouveau, cet échange d'énergie est permis par une vitesse de phase et une fonction propre équivalente entre les deux modes.

La caractéristique particulière de l'embranchement entre ces modes discrets réside dans la possibilité d'une inversion de la stabilité des modes S et F. Contrairement au cas de notre écoulement à $M_\infty = 6.0$ avec une paroi adiabatique, pour certaines conditions, au croisement le mode F deviendrait plutôt instable en amenant à l'amplification du second mode de Mack et le mode S deviendrait stable. Les conditions de cet échange de rôle entre second mode de Mack supporté par le mode S ou le mode F dépendent de l'écoulement considéré (Mach, Prandtl, température de paroi) et sont formellement démontrées par FEDOROV et KHOKHLOV, 2001. Ces détails de la stabilité des couches limites hypersoniques ont été formellement démontrés par les études citées. L'analyse locale donne ainsi des informations utiles à la compréhension de la réceptivité de l'écoulement aux ondes présentes dans l'écoulement ambiant. Ces résultats soulignent également des subtilités du phénomène de transition dans le cadre linéaire qu'il est intéressant de connaître et comprendre. FEDOROV (2011) présente un diagramme qui résume les paragraphes précédents, nous le redonnons en Fig. 3.7. Ce diagramme peut être vu comme une sous partie du chemin A du diagramme de Morkovin présenté en Sec. 1.2

Pour terminer l'analyse linéaire locale du cas de plaque plane étudié, nous proposons d'étendre le diagramme de stabilité de la couche limite à $x = 50$ dans le repère (ω, β) . En utilisant le maillage $N_y = 200$, nous calculons les spectres sur une grille de 50×50 valeurs de (ω, β) . Pour chaque spectre, nous enregistrons le taux de croissance α_i de la valeur propre la plus instable ($\Im(\alpha) < 0$). Cette carte est donnée en Fig. 3.8.

Une courbe neutre est tracée pour $\alpha_i > -1 \times 10^{-3}$, une valeur plus proche de zéro entraînant quelques artefacts négatifs dus à des valeurs propres marginalement instables issues des branches continues proches de $\alpha_i = 0$. Nous remarquons deux pics d'amplification, le premier en rouge, pour $(\omega, \beta) = (1.876, 0.0)$ correspondant au pic d'amplification du second mode de Mack (mode S) décrit plus haut. Un second pic correspondant à l'amplification maximale du premier mode oblique

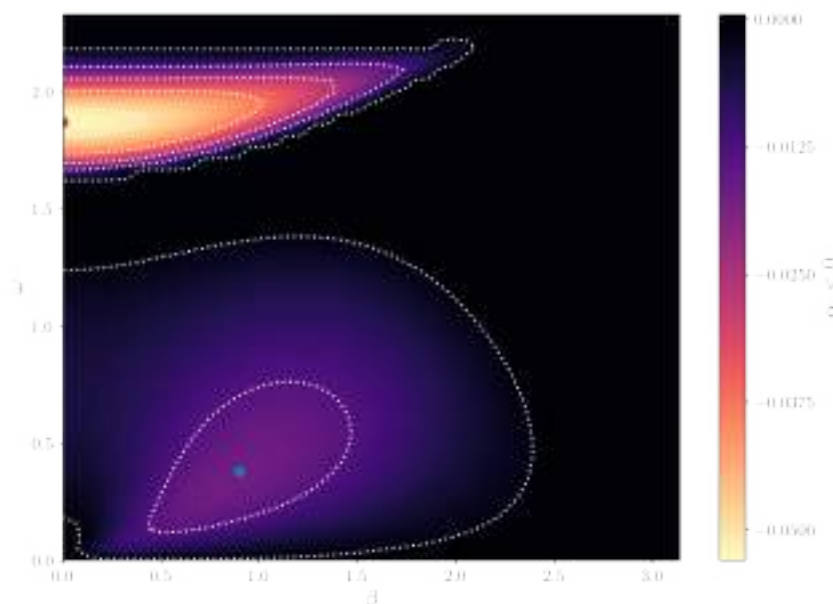


FIGURE 3.8 : Diagramme de stabilité (β, ω) et courbes neutres de $\alpha_i < 0$ pour la couche limite à $M_\infty = 6.0$. Cinq iso-contours dans $\alpha_i = [-5 \times 10^{-2}, -1 \times 10^{-3}]$. Point rouge : pic d'amplification du second mode de Mack. Point bleu : pic d'amplification du premier mode oblique.

est trouvé pour $(\omega, \beta) = (0.38, 0.9)$. Pour une croissance spatiale exponentielle, nous pouvons conclure de la théorie linéaire locale que pour le cas de plaque plane étudié est largement dominé par le mécanisme de transition du "second mode de Mack". Les fonctions propres qui correspondent à ces deux pics d'amplification sont présentées en Fig. 3.9 et serviront à l'identification des structures émergentes du forçage par bruit blanc. Nous pouvons remarquer la différence de distribution typique des perturbations de vitesse. Le premier mode présente un maximum sur le sommet de la couche limite. Le second mode quant à lui est localisé proche de la paroi de par sa nature d'onde acoustique piégée.

Cette carte de stabilité nous permet aussi de dimensionner l'extension transverse du domaine de calcul DNS (direction z). Le premier mode étant oblique, une taille de domaine minimale est requise pour le capturer, considérant le nombre d'onde optimal $\beta_{1st, max} = 0.9$ et la longueur d'onde associée $\lambda_z = 6.9\delta^*$. Nous pouvons déduire qu'une largeur de domaine comprise entre $6\delta_*$ et $7\delta_*$ est suffisante pour capturer le développement spatial d'une onde du premier mode dans ces simulations DNS.

3.3 DNS DU FORÇAGE PAR BRUIT BLANC

Les instabilités convectives que nous venons de détailler guident l'étude DNS d'une couche limite hypersonique forcée par un bruit blanc. Nous partons donc d'un domaine d'analyse de taille $L_x \times L_y \times L_z = 350\delta_* \times 15\delta_* \times 6.4\delta_*$ à l'entrée duquel un forçage instationnaire défini ci-après est appliqué en $x_f = 5.0$. Une

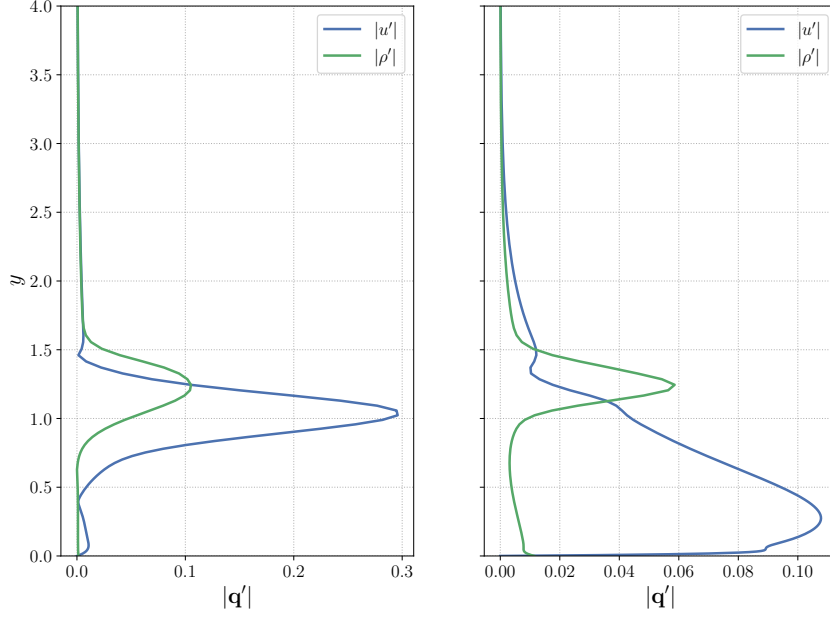


FIGURE 3.9 : Fonction propre du mode S aux pics les plus amplifiés issus de l'analyse LST 1D spatiale. Gauche : premier mode oblique à $(\omega, \beta) = (0.38, 0.9)$; droite : second mode de Mack plan à $(\omega, \beta) = (1.87, 0.0)$.

DNS et une LDNS sont ensuite employées pour caractériser les différentes étapes menant à la turbulence. Le croisement des dynamiques linéaires et non-linéaires permet de préciser le scénario de transition. L'objectif est ici de déterminer si l'un des mécanismes présentés auparavant : fondamental, subharmonique ou oblique, est dominant pour un forçage par bruit blanc.

3.3.1 Procédure de forçage

Nous exprimons la forme générale de la procédure de forçage proposée et implémentée pour cette étude. En considérant un vecteur de perturbation $\mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t)$, dépendant du temps t et de l'espace $\mathbf{x} \in \Omega$, avec une amplitude de forçage A_0 . Le vecteur d'état instationnaire, $\mathbf{q}$, est perturbé dans un volume de contrôle déterminé par une fonction de distribution spatiale $\phi_f(\mathbf{x})$ tel que :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + A_0 \phi_f(\mathbf{x}) \mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t), \quad (3.6)$$

avec ϕ_f , une fonction régulière d'intégrale unitaire sur son support, permettant le dépôt d'une quantité d'énergie constante indépendamment de l'extension du volume de forçage. Nous définissons cette fonction comme supérieure à zéro sur un nombre suffisant de points pour permettre au schéma numérique de capturer le maximum de l'énergie générée par le forçage. Nous choisissons pour cette étude une simple distribution tanh donnée en Eq. 3.7 pour localiser le forçage présenté en Fig. 3.2 dans la zone grisée située entre x_0 et x_1 .

$$\phi_f(x, y, z) = \frac{1}{2} \frac{(\tanh(\sigma(x_0 - x)) - \tanh(\sigma(x_1 - x)))}{|x_1 - x_0|} \quad (3.7)$$

Le bruit blanc utilisé est généré directement via le générateur de nombre aléatoire du compilateur utilisé, selon la procédure édictée par HADER et FASEL (2018). Il est choisi d'utiliser un champ 3D aléatoire $\mathbf{r}(\mathbf{x}) : (\xi, \eta, \zeta) \rightarrow [0, 1]$ pour la composante de pression⁴ de $\mathbf{q}_f$ écrit en variables primitives. Ainsi, nous avons l'expression du forçage suivante en un point (ξ, η, ζ) du maillage.

$$\mathbf{q}_{f,p}(\xi, \eta, \zeta) = r(\xi, \eta, \zeta) - 0.5 \quad (3.8)$$

Le calcul étant instationnaire, la mise à jour du vecteur de perturbations nécessite d'assurer la bonne capture et la convection de ce dernier par le schéma d'intégration temporelle. Une mise à jour toutes les vingt itérations est effectuée pour ces simulations. Un nombre aléatoire étant généré pour chaque point du maillage, un filtrage spatial est également appliqué implicitement par la résolution spatiale du schéma spatial puis par le filtre optimisé subséquent avec son nombre d'onde de coupure tel qu'explicité en Sec. 2.3.2.

Les amplitudes de forçage choisies pour les calculs linéaires et non-linéaires sont différentes. Dans le cadre linéaire, l'amplitude initiale du forçage ne change pas la dynamique finale observée. Nous choisissons alors une amplitude de forçage adimensionnée $A_{0,L} = 10^{-1}$. Pour la simulation non-linéaire, le choix de l'amplitude de forçage peut changer la dynamique de transition d'une transition modale vers une transition non modale, voire totalement non-linéaire. Nous avons effectué plusieurs tests en augmentant A_0 et l'amplitude $A_{0,NL} = 10^{-2}$ permet d'obtenir un écoulement transitionnel en fin de domaine tout en conservant la croissance modale initiale recherchée pour la procédure de forçage présentée.

3.3.2 Échantillonnage

En utilisant le forçage par bruit blanc, les deux simulations DNS et LDNS sont menées parallèlement. La solution linéarisée est avancée en temps avec la procédure donnée en Sec. 2.4 et l'Eq. 2.89. Chacune de ces simulations est utilisée pour constituer une base de donnée de la dynamique temporelle de l'écoulement de plaque plane. Cette base de donnée repose sur un échantillonnage à fréquence fixe de l'ensemble du domaine de calcul Ω pour le jeu de variables $\boldsymbol{\theta} = (\rho \ u_x \ u_y \ u_z \ T)$. Ce vecteur particulier est choisi pour faciliter le calcul de la norme d'énergie compressible que nous introduirons ultérieurement. Cet échantillonnage est réalisé après trois temps de traversée du domaine par les perturbations, en partant de l'écoulement de base convergé $\bar{q}_{FP}$.

L'échantillonnage temporel de la solution instationnaire est déterminé par la fréquence du second mode de Mack. Plus particulièrement, nous choisissons la fréquence d'échantillonnage de sorte à capturer le second mode et sa première harmonique. L'échantillonnage de cette première harmonique, parfois présente dans le mécanisme de transition (UNNIKRISHNAN et GAITONDE, 2020) est nécessaire ici,

⁴ L'utilisation d'une composante de pression permet de produire un forçage sur l'ensemble des variables par couplage dans les équations de Navier-Stokes. De plus, le forçage acoustique favorise la réceptivité des modes S et F (MA et ZHONG, 2003b)

ne connaissant pas à priori le mécanisme de transition induit par le forçage par bruit blanc.

En reprenant la fréquence adimensionnée $f = f^* \delta_0 / u_\infty$, nous partons de la fréquence circulaire du pic le plus amplifié du mode S en $x = 50$, soit : $\omega_{\max} = 1.87$. La première harmonique est alors à $2\omega_{\max} = 3.74$, donnant une fréquence $2f_{MM} = 0.595$. En respectant le critère de Shannon et en prenant une marge de résolution supérieure, nous choisissons une fréquence d'échantillonnage $f_s = 1.3$ pour une période d'échantillonnage physique de $t_s^* \approx 0.3869 \mu s$. Cet échantillonnage est réalisé pour $N_{\text{snap}} = 1300$ instant espacés du temps convectif : $t_s = t_{\text{ref}} = \delta_0 / u_\infty$. Nous pouvons alors obtenir la fréquence résolue minimale de la série temporelle, $f_{\min} = 0.001$ et la fréquence de coupure $f_c = 0.65$. L'ensemble de ces paramètres est redonné dans le tableau 3.3

N_{snap}	1300
t_s^*	$0.3869 \mu s$
t_f^*	$500.3 \mu s$
f_s	1.3
f_c	0.65
$f_{\min}$	0.001

TABLE 3.3 : Paramètres d'échantillonnage

La série temporelle finale issue de l'échantillonnage défini ci-dessus est $\mathbf{Q} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_{\text{snap}}})$. Quelques remarques peuvent être faites quant à la taille du vecteur $\mathbf{Q}$ généré pour ces simulations. Considérant le vecteur d'état θ à cinq variables, sauvegardé pour le domaine de calcul et les zones éponges, nous pouvons déterminer un nombre total de degrés de liberté $N_{\text{dof}} \approx 10^9$. Pour les 1300 instants en double précision, nous obtenons une taille totale de la base de donnée de 10 To par simulation DNS et LDNS, avec $\mathbf{Q} \in \mathbb{C}^{N_\xi \times N_\eta \times N_\xi \times N_v \times N_{\text{snap}}}$. Ce volume de données implique certaines difficultés de manipulation pour l'analyse des solutions dans l'espace de Fourier et la production de données réduites. À cette fin une réflexion sur la réalisation de post-traitements avancés via des outils de calcul distribué et parallélisation par graphes de tâches dans un contexte HPC⁵ a été menée et est présentée en Annexe A.

3.3.3 Champs linéaires et non-linéaires

Le calcul des bases de données instationnaires est réalisé sur 1280 CPUs pour un total d'environ quatre jours. Nous proposons de commencer l'analyse des réponses linéaires et non-linéaires de l'écoulement de plaque plane par l'observation de la solution DNS à $t = t_f$ telle que présentée en Fig. 3.10. En première remarque, nous pouvons voir que la simulation d'une transition "naturelle", induit une richesse de structures tourbillonnaires rendant l'écoulement difficilement interprétable. Il n'en

⁵ High Performance Computing

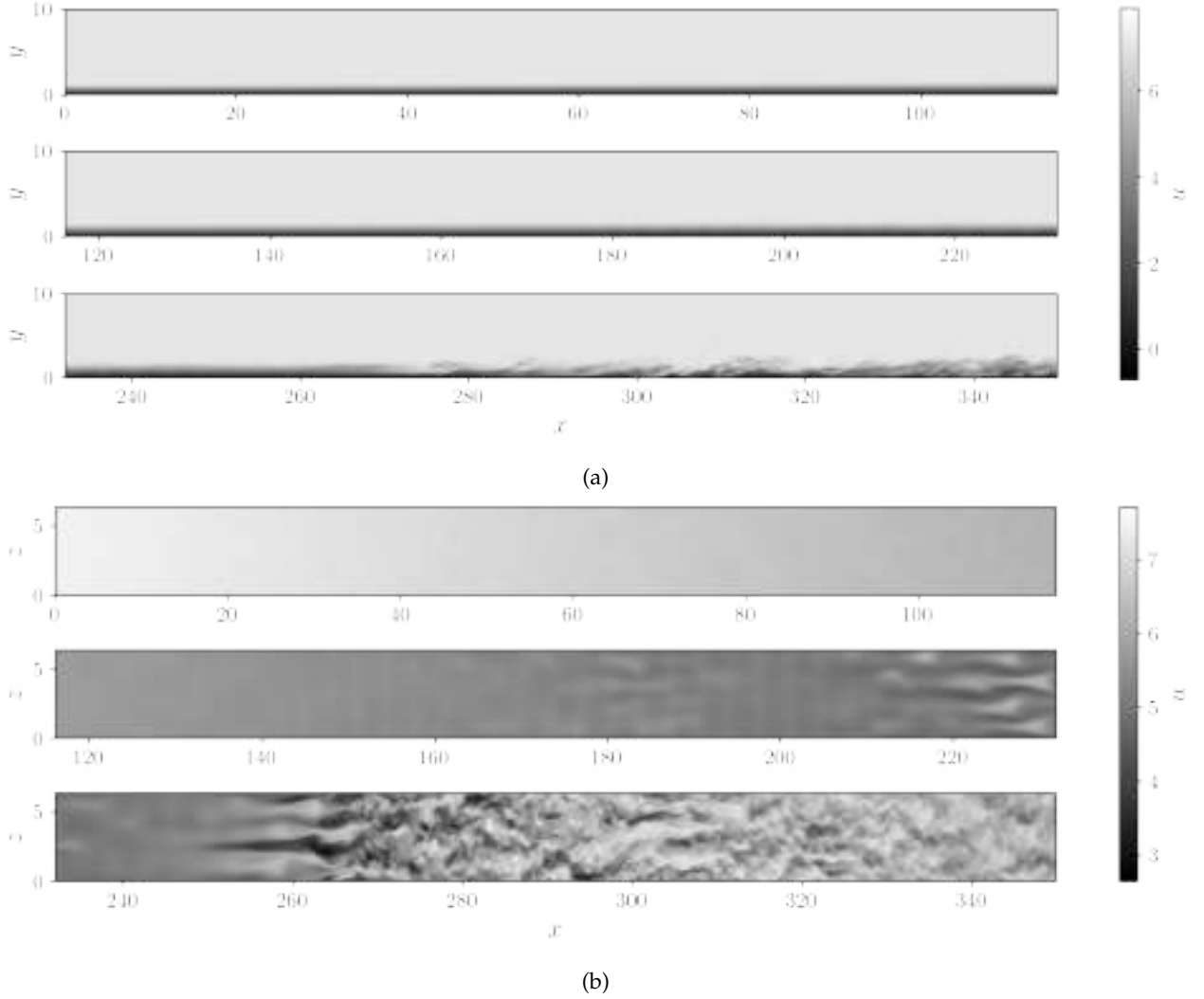


FIGURE 3.10 : Vue instantanée du champ de vitesse u de la DNS de couche limite transitionnelle entre $x = 0$ et $x = 350$ au temps $t = t_f$. (a) Coupe en $z = 2$; (b) coupe en $y = \delta_0$.

reste pas moins que la croissance des instabilités est particulièrement observable entre $x = 150$ et $x = 250$. Après ce point, le régime non-linéaire domine l'écoulement avec le début de la turbulence. Un regard plus attentif porté autour de $x = 200$ en Fig. 3.10b permet de distinguer des ondes planes suivies en $x = 220$ de structures différentes et oscillantes, sur quatre périodes transverses, s'apparentant à une instabilité symétrique.

Pour mieux comprendre les structures observées sur le champ instantané, nous calculons le champ de perturbation $\mathbf{q}'_{NL} = \mathbf{q}_{NL} - \bar{\mathbf{q}}_{FP}$ de la solution non-linéaire, avec $\bar{\mathbf{q}}_{FP}$, l'écoulement de base. Le champ $\mathbf{q}'_L$ est lui directement obtenu par construction de la LDNS. Une comparaison des solutions DNS et LDNS est alors proposée en Fig. 3.11. Les champs issus de la LDNS nous permettent de constater la croissance de deux types de structures forcées par le bruit blanc. Un premier type observable à partir de $x \approx 100$, semblant être une onde quasi-plane de faible lon-

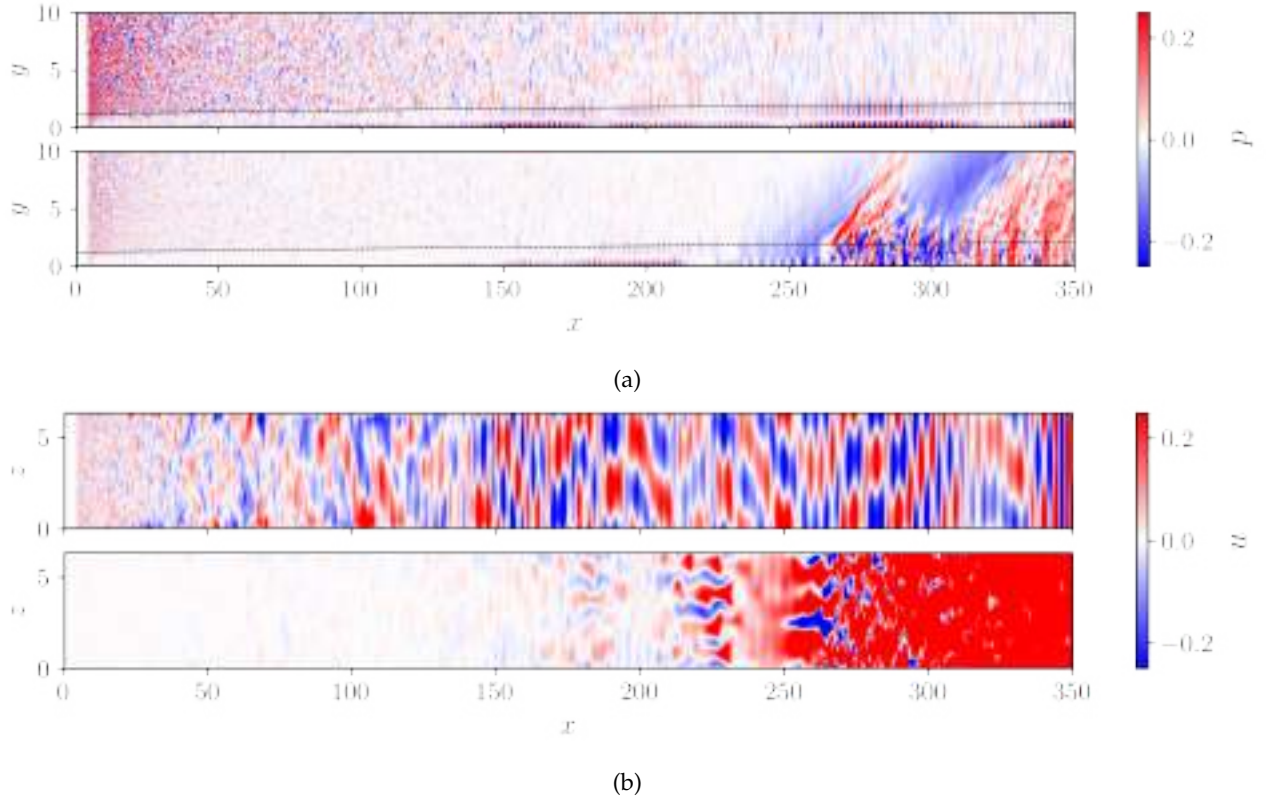


FIGURE 3.11 : Champs de perturbations normalisés pour les solutions DNS et LDNS à $t = t_f$. Traits pointillés : couche limite laminaire. (a) : vue dans le plan (x, y) en $z = 0$ du champ de pression. (b) : vue dans le plan (x, z) en $y = \delta_0$ du champ de vitesse axiale. (a-haut) LDNS; (a-bas) : DNS; (b-haut) : LDNS; (b-bas) : DNS

gueur d'onde longitudinale λ_x , rappelant la structure du second mode de Mack⁶. Un second type d'onde est observable en $x \approx 100$, de nature oblique et avec un λ_x plus important, rappelant ici la structure du premier mode. L'étude menée en section 3.2.2 nous indique que la croissance de ces deux types d'instabilité est attendue. Il est intéressant de noter ici une superposition de ces structures en Fig. 3.11b pour la hauteur de couche limite considérée. Cette hauteur de couche limite correspond à celle où les deux modes coexistent. Cependant, le mode de Mack possède une amplitude bien plus grande proche de la paroi, tel que l'indique le champ de pression en Fig. 3.11a. Ainsi l'hypothèse d'une amplification similaire entre les deux instabilités observées doit être modérée de par sa dépendance à la hauteur d'observation dans la couche limite.

L'observation des champs issus de la DNS permet d'apprécier une structure similaire des perturbations entre $x = 50$ et $x = 175$. Après cette région où le régime rest linéaire, des structures secondaires élongées et déformées sont observables entre $x = 200$ et $x = 250$. Cette portion de l'écoulement semble donc être le siège d'un mécanisme d'instabilité secondaire issue de la non-linéarité des équations. Après

⁶ Cette terminologie est utilisée ici pour la description qualitative des ondes présentes dans l'écoulement

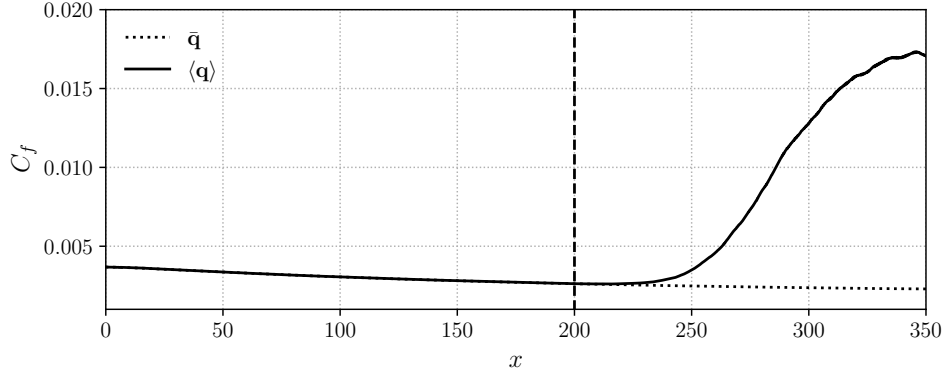


FIGURE 3.12 : Évolution du coefficient de frottement de la DNS transitionnelle (continu) et comparaison à l'écoulement de base (pointillés).

$x = 250$ nous remarquons nettement des structures tridimensionnelles, marquant le début du régime turbulent. Cette portion de l'écoulement donne également lieu à un rayonnement de fluctuations assez intense sous forme d'ondes instationnaires à l'extérieur de la couche limite. Nous caractérisons le début de ce régime turbulent en calculant le coefficient de frottement à la paroi de l'état moyen $\langle q \rangle$ et en le comparant à la solution laminaire de l'état de base $\bar{q}$. Cette comparaison en Fig. 3.12, nous permet d'évaluer un début de la transition autour de $x = 200$.

Il reste difficile de caractériser par simple observation d'un champ instationnaire la nature du mécanisme de transition remarqué ici. L'approche communément employée consiste alors à étudier cette dynamique instationnaire comme la somme de contributions de différentes structures cohérentes à l'aide d'une décomposition en modes de Fourier.

3.4 DÉCOMPOSITION DE LA DYNAMIQUE

En remarquant la direction homogène périodique en z du domaine d'étude, une décomposition de l'écoulement sous forme de modes de Fourier en fréquence ω et nombres d'ondes transverses β est possible et permet de simplifier le cadre d'analyse (TAIRA et al., 2017). Nous retrouvons ainsi la transformation du vecteur d'état de l'espace physique vers l'espace de Fourier : $\mathbf{Q}(t, x, y, z) \in \mathbb{R} \rightarrow \hat{\mathbf{Q}}(f, x, y, \beta) \in \mathbb{C}$, avec $\omega = 2\pi f$ et $\beta = 2\pi/\lambda_z$. Nous rappelons rapidement la formulation des opérateurs de la transformation de Fourier discrète employée.

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t, x, y, k) = \mathcal{F}_\beta(\mathbf{Q}(t, x, y, z)) = \sum_{z=0}^{N_\zeta-1} \mathbf{Q}(t, x, y, z) \exp(-i2\pi kz) \quad (3.9)$$

$$\hat{\mathbf{Q}}(\omega, x, y, z) = \mathcal{F}_\omega(\mathbf{Q}(t, x, y, z)) = \sum_{t=0}^{N_{\text{snap}}-1} \mathbf{Q}(t, x, y, z) \exp(-i2\pi\omega t) \quad (3.10)$$

Avant l'application de l'opérateur $\mathcal{F}_\beta$, une réduction de la taille de la donnée dans la direction z est effectuée en ne sélectionnant qu'un point sur deux. Cette réduction est cohérente avec la résolution spectrale efficace du schéma spatial d'ordre

8. En effet, la transformée de Fourier spatiale d'une série réelle donne, avec le critère de Shannon et l'échantillonnage spatial, un spectre symétrique contenant $N_k = N_{\xi}/4$ modes distincts dans la base de donnée transformée. Comme nous l'observerons ci-après avec la faible énergie contenue pour les modes transverses $k > 10$, ce nombre d'onde de coupure spatial n'induit pas d'aliasing dans les résultats (Fig. 3.13b).

Le calcul des nombres d'ondes temporels est effectuée avec la méthode de Welch par application de l'opérateur $\mathcal{F}_{\omega}$ sur N_{blocks} sous ensembles recouvrants de la série temporelle $\mathbf{Q}$. Ces sous ensembles sont de taille N_{fft} et sont calculés avec un recouvrement $N_{overlap}$. Un fenêtrage est appliqué avec une fenêtre de Hanning. Enfin, un sous échantillonnage spatial est également appliqué dans les dimensions non homogènes en ne prenant que $N_{\xi}/4$ points dans la direction ξ et un sous domaine dans la direction verticale η contenant les 215 premiers points du maillage, soit $y < 4.5$.

N_{fft}	256
N_{blocks}	11
$N_{overlap}$	128
f_{min}	0.0043
$N_{\xi} \times N_{\eta} \times N_{\zeta}$	$1033 \times 215 \times 33$

TABLE 3.4 : Paramètres de la transformation $\mathcal{F}_{\omega}(\mathbf{Q}(t, x, y, z))$

La série transformée $\hat{\mathbf{Q}}$ est utilisée pour caractériser les fréquences et nombres d'onde dominants le long de la couche limite. Nous calculons une norme de l'énergie de l'écoulement avec le produit interne $\langle \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{Q}} \rangle$ discret, défini tel que,

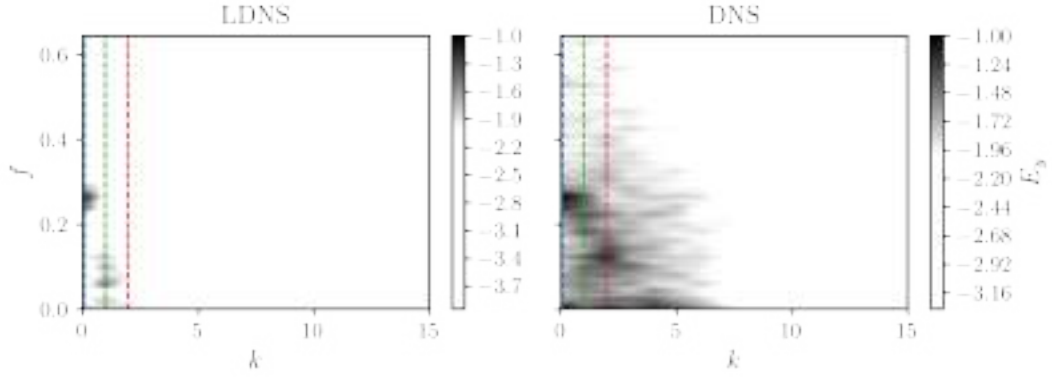
$$\langle \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{Q}} \rangle = \hat{\mathbf{Q}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}, \quad (3.11)$$

avec les poids de la mesure d'énergie compressible $\mathbf{W}$ telle que définie par CHU (1965) et HANIFI, SCHMID et HENNINGSON (1996). Les termes $\bar{\bullet}$ retrouvés dans l'expression de $\mathbf{W}$ sont issus de l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}_{FP}$. L'énergie définie par cette norme est intégrée dans la couche limite pour obtenir,

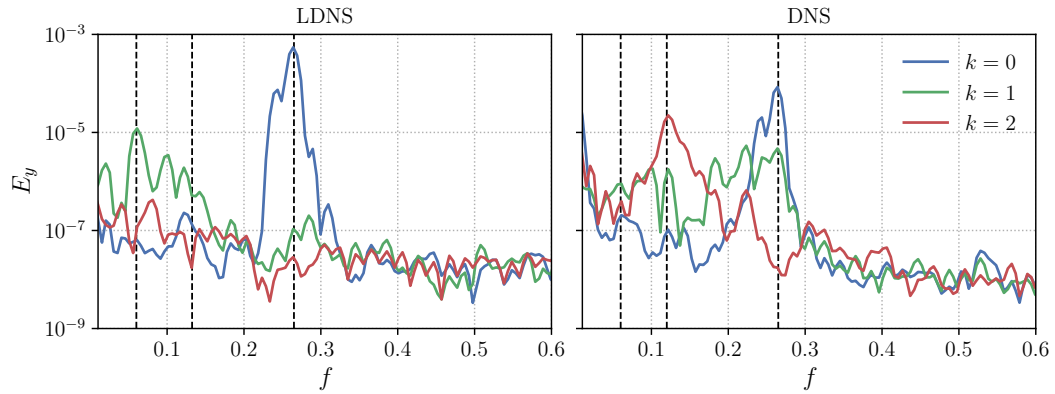
$$E_y = \int_0^{y_{max}} \hat{\mathbf{Q}}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}} dy, \quad \text{avec,} \quad (3.12)$$

$$\mathbf{W} = \text{diag} \left(\frac{\bar{T}}{\gamma \bar{\rho} M^2}, \quad \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}, \quad \frac{\bar{\rho}}{\gamma(\gamma-1)\bar{T}M^2} \right). \quad (3.13)$$

La mesure locale du volume des cellules dans l'intégration est donnée directement par la jacobienne de la transformation curviligne $\mathbf{J}_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}}$. En suivant ces définitions, la décomposition en modes de Fourier est appliquée sur les bases de données DNS et LDNS.



(a) Carte (f, k) d'énergie E_y des perturbations dans les simulations LDNS et DNS en $x = 200$. L'amplitude est normalisée. Les lignes pointillées bleues, verte, rouge indiquent les nombre d'onde pour lesquels sont extraits les spectres ci-dessous



(b) Extraction des spectres en fréquences pour $k = 0, 1, 2$ de la LDNS (gauche) et la LDNS(droite).

FIGURE 3.13 : Cartographie des fréquences dominantes de la LDNS (gauche) et la (DNS) droite et spectres pour les nombres d'ondes $k = 0, 1, 2$.

3.4.1 Évolution des modes de Fourier

En se basant sur les champs donnés en Fig. 3.11, nous choisissons de tracer un diagramme (f, k) de E_y pour la position $x = 200$ en Fig. 3.13. Cette position le long de la couche limite correspond à celle où la transition commence et où les structures tridimensionnelles commencent à être observées (Fig. 3.12). Elle est donc pertinente comme dernier point de comparaison entre le calcul DNS et LDNS afin de révéler les fréquences les plus amplifiées au seuil de la transition.

Nous ajoutons que pour détailler le scénario de transition, nous utiliserons par la suite la notation en doublet (fréquence f , nombre d'onde k), pour décrire un mode observé. Plus particulièrement, le premier mode de Mack et le second mode de Mack auront leurs fréquences respectivement annotées par FM et MM. Par exemple, le second mode de Mack plan serait écrit par $(f_{MM}, 0)$ et sa première harmonique oblique par $(f_{MM}, 1)$.

Nous remarquons sur la carte de E_y obtenue à partir de la LDNS (Fig. 3.13a gauche), que la majeure partie de l'énergie en régime linéaire est contenue dans

les deux premiers modes transverses : $k \in [0, 1]$. Cette dernière présente deux pics principaux. Un premier pic haute fréquence à $(f_{MM}, k) = (0.26, 0)$ et un second pic plus large bande à $(f_{FM}, k) = (0.09, 1)$. Ces deux pics sont cohérents avec les zones d'instabilité du mode S décrites précédemment et correspondent respectivement au second mode de Mack et au premier mode oblique. Il faut remarquer ici que la notation n'est donnée que par la correspondance des fréquence du spectre de la LST et de la DNS et qu'une vérification formelle de la nature de ces modes est donnée ultérieurement. La carte de E_y issue de la DNS en Fig. 3.13a à droite présente un spectre plus riche avec un contenu fréquentiel significatif jusqu'à $k = 7$. Ce contenu fréquentiel additionnel indique que des interactions non-linéaires sont déjà en jeu à $x = 200$. Nous retrouvons les pics de la LDNS, mais également un pic supplémentaire pour $(f, k) = (0.13, 2)$, d'amplitude relative plus importante que celle du premier mode oblique $(f_{FM}, 1)$. Enfin, nous notons la présence d'énergie autour $k = 4$ et $k = 3$ pour $f = f_{min}$ suggérant l'existence de structures quasi stationnaires, le terme quasi stationnaire étant entendu ici comme une fréquence proche où égale à f_{min} .

Pour mieux caractériser le contenu fréquentiel des modes à $k = 0, 1, 2$, nous traçons en Fig. 3.13b le spectre en fréquence à ces nombres d'onde. Nous remarquons pour la LDNS et la DNS le pic d'énergie marqué à la fréquence $f_{MM} = 0.26$ du second mode de Mack pour $k = 0$. Le pic large bande à la fréquence du premier mode oblique $0.05 < f_{FM} < 0.1$ est également visible en vert pour $k = 1$. Il semble cependant moins amplifié dans le cas de la LDNS. Pour le nombre d'onde $k = 1$ de la LDNS, nous remarquons aussi la faible amplification d'un pic d'énergie à la fréquence du second mode de Mack $f_{MM} = 0.26$, ce pic correspond à l'amplification de la première composante oblique du second mode de Mack, visible en Fig. 3.8 pour $\beta = 0.9$. En supplément de ces modes prédits par l'analyse de stabilité locale (Fig. 3.8), le spectre à $k = 2$ de la DNS met en lumière l'amplification conséquente du pic d'énergie à $(f, k) = (0.13, 2)$, avec une amplitude proche de celle du second mode de Mack au seuil de la transition. Ce pic d'énergie est absent du calcul LDNS et est donc issu d'une dynamique non-linéaire qui sera caractérisée par la suite.

Nous pouvons compléter cette carte avec l'évolution spatiale du spectre de la couche limite pour les deux nombres d'ondes principaux $k = 0$ et $k = 1$ en Fig. 3.14. L'évolution spatiale du spectre nous renseigne sur la croissance initiale des deux modes FM et MM retrouvés en $x = 200$.

Le second mode de Mack plan à $(f_{MM}, k = 0)$ domine ici le régime linéaire en termes d'amplitude. Nous pouvons l'observer plus clairement en Fig. 3.14, la réceptivité au bruit blanc laisse une signature du mode visible à partir de $x \approx 50$. Avec l'évolution aval, nous observons une réduction progressive de la fréquence f_{MM} de l'instabilité cohérente avec l'épaississement de la couche limite. Cette évolution se retrouve aussi dans la DNS jusqu'à $x = 200$. En regardant le spectre de la LDNS pour $k = 1$, nous pouvons également observer une signature du second mode de Mack oblique, prédite par la LST à la même fréquence $f_{MM} = 0.26$. Cette onde oblique $(f_{MM}, 1)$ est d'amplitude beaucoup plus faible que celle du mode fondamental $(f_{MM}, 0)$, mais elle est capturée par le schéma numérique.

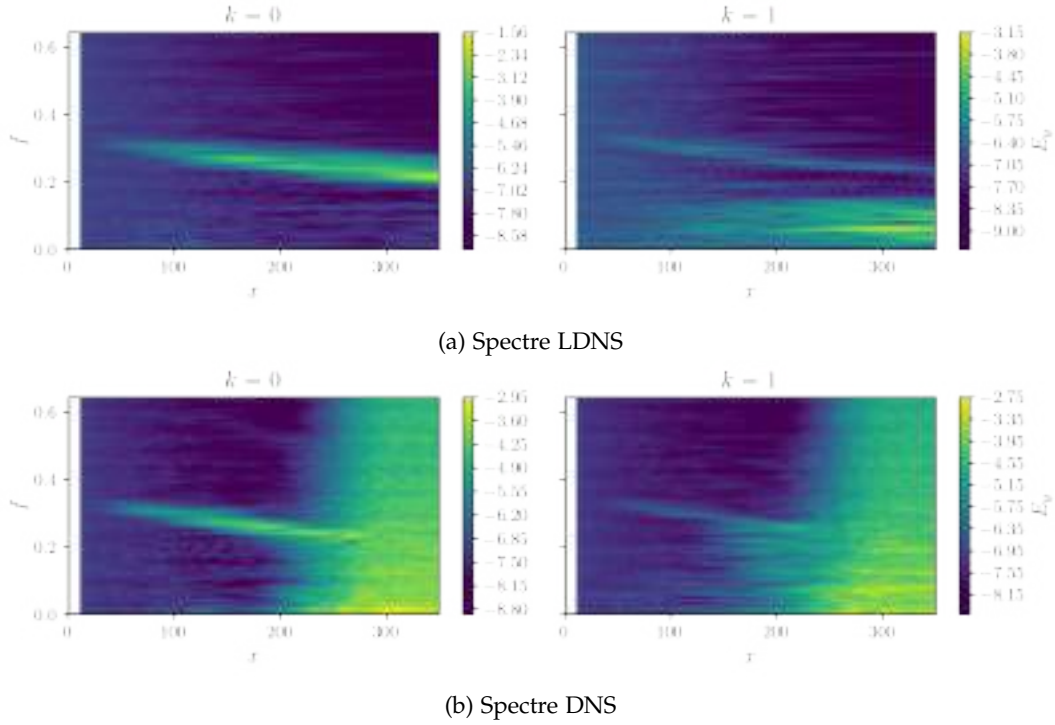


FIGURE 3.14 : Évolution spatiale du spectre d'énergie intégré dans la couche limite E_y . Gauche : ondes planes à $k = 0$. Droite : ondes obliques à $k = 1$.

Pour la LDNS, le premier mode oblique présente une signature plus large bande à basse fréquence, uniquement présente pour le mode $k = 1$. Le mode croît continuellement entre $x \approx 75$ et la fin du domaine. Son amplitude est plus faible d'un facteur 10^{-2} en comparaison à celle du second mode de Mack. La solution DNS présente une dynamique différente, la signature large bande du premier mode est difficilement perceptible avant $x = 200$ sur le spectre actuel. Cependant, son rôle dans le mécanisme de transition observé ne peut pas être écarté, son amplification spatiale linéaire reste significative et une évaluation plus approfondie de son évolution est nécessaire pour justifier la présence des structures observées sur les champs de perturbation en Fig. 3.11.

En conclusion pour cette analyse des spectres en fréquence, nous avons relevé la présence de quatre modes. Trois modes attendus d'après l'analyse de stabilité locale en Fig. 3.8, donnés par importance :

- Le second mode de Mack plan à $(f, k) = (0.26, 0)$
- Le premier mode oblique à $(f, k) = (0.09, 1)$
- Le second mode de Mack oblique à $(f, k) = (0.26, 1)$

La présence de ces trois modes est alors à mettre en lien avec les scénarios de transition détaillés en introduction (Fig. 3.1). Les pics d'énergie retrouvés dans les spectres de la DNS montrent que les scénarios oblique et fondamental peuvent être en jeu avec respectivement les modes $(0.09, 1)$ et $(f_{MM}, 0)$. Le scénario sub-harmonique avec un mode $(f_{MM}/2, 1)$ n'a par contre pas été révélé par l'analyse des spectres et nous pouvons suggérer que celui-ci n'est pas significatif pour les

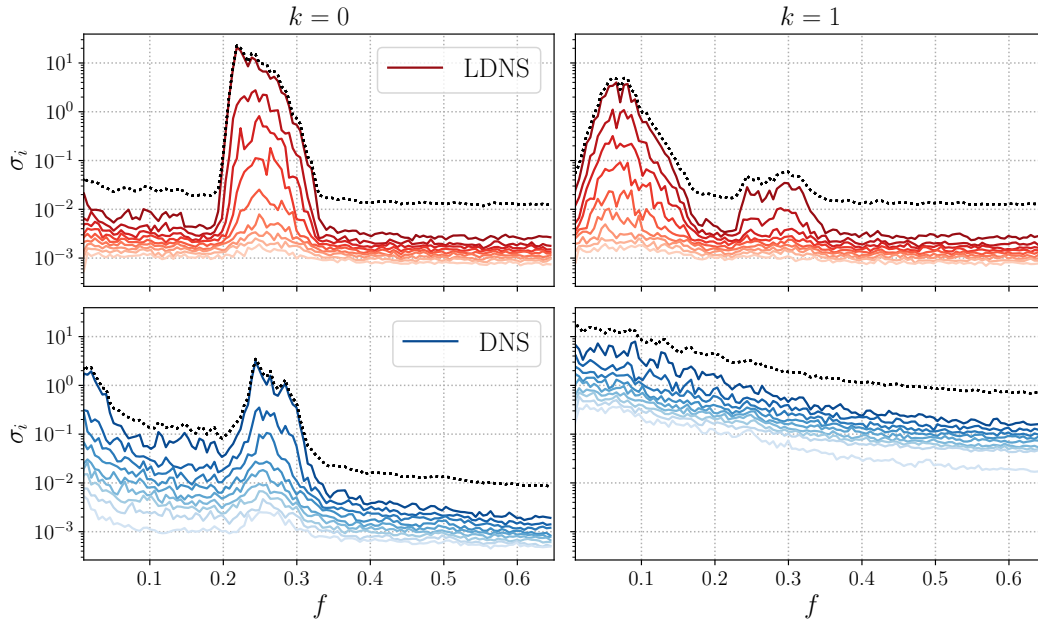


FIGURE 3.15 : Spectre d'énergie des 10 premières valeurs propres de la SPOD pour la LDNS (rouge) et la DNS (bleu). Pointillés : énergie totale de la SPOD $\sum_i \sigma_i$. Gauche : ondes planes à $k = 0$. Droite : ondes obliques à $k = 1$.

conditions de l'étude. En supplément, nous avons mis en évidence l'amplification significative du mode oblique (0.13,2) issu de la dynamique non-linéaire. La nature et le rôle de ce mode restent à être déterminés.

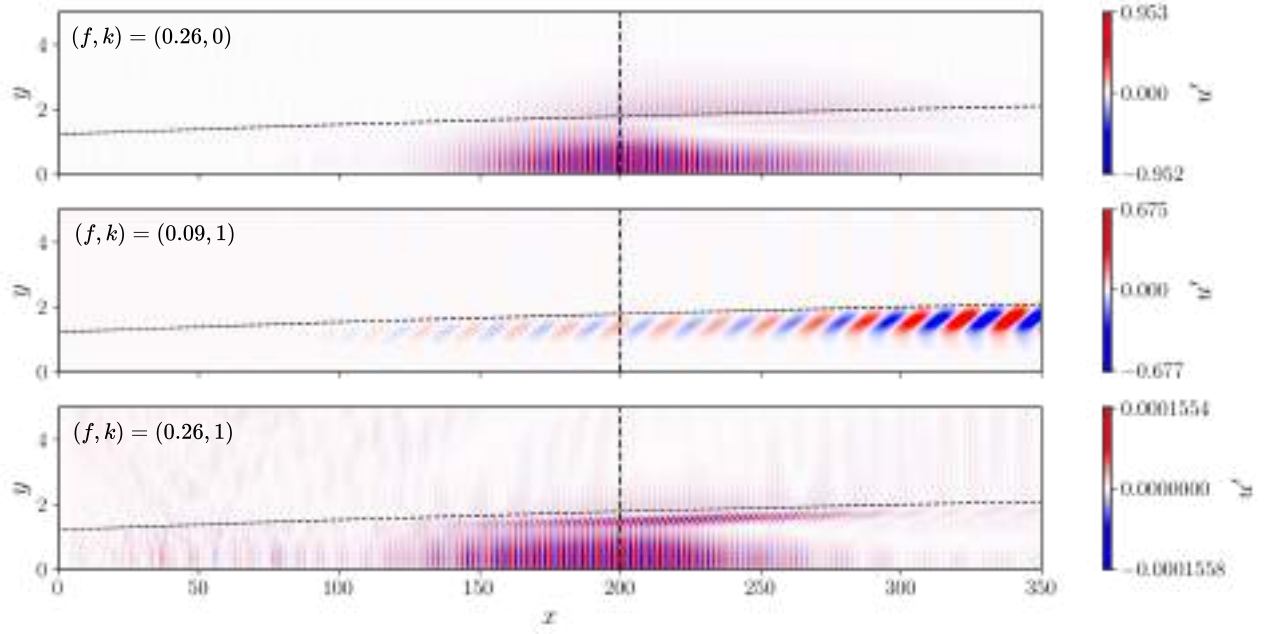
3.4.2 Extraction des modes SPOD dominants

Nous proposons de comparer les modes MM et FM issus des DNS et LDNS à ceux obtenus par l'analyse LST 1D spatiale. Cette comparaison permet de confirmer la nature des deux signatures observées dans le cadre de la LDNS. Nous utilisons à cet effet l'approche SPOD⁷ (LUMLEY, 1970; SCHMIDT et COLONIUS, 2020) pour obtenir une base orthogonale optimale de modes triés par importance, décrivant la dynamique observée en Fig. 3.10. Les détails de la décomposition sont donnés en Annexe B.

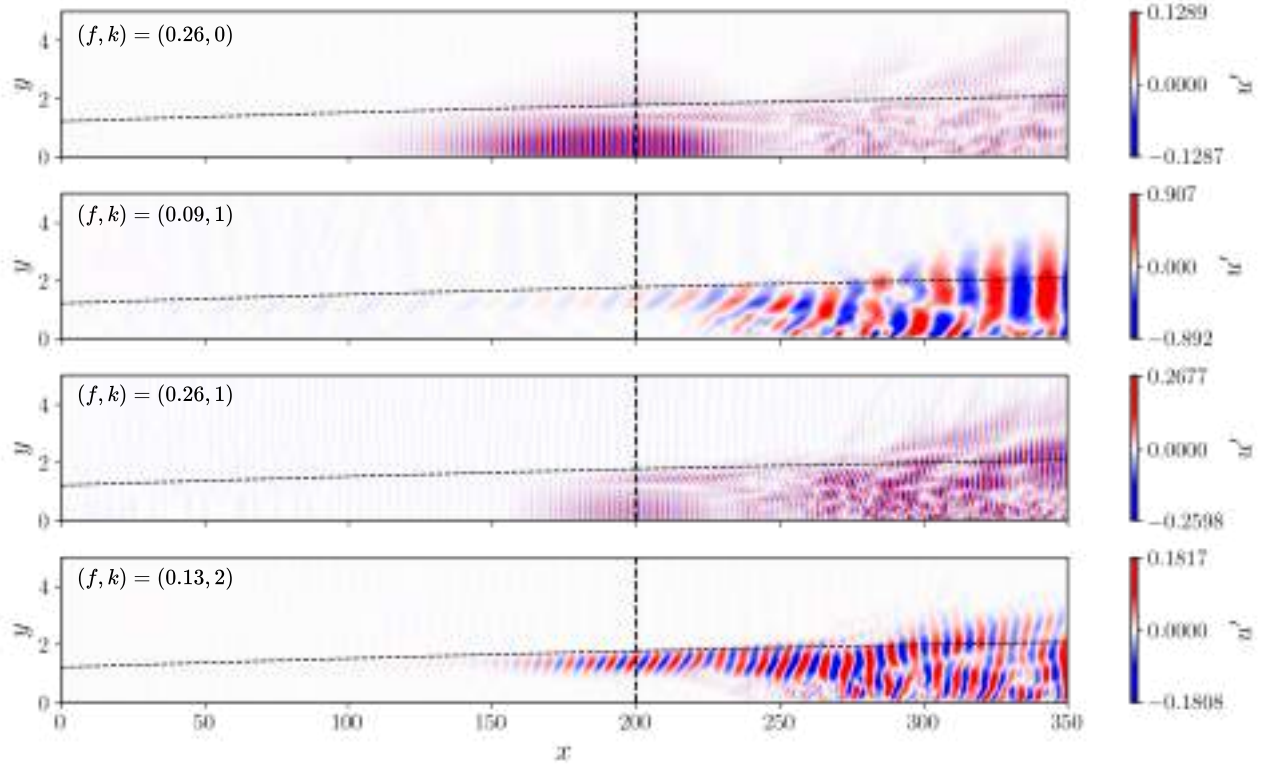
3.4.2.1 Énergie des modes SPOD

Nous calculons l'énergie des modes SPOD sur des plans (x, y) pour les nombres d'onde $k = [0, 1]$ pour la LDNS et la DNS. Suite aux résultats précédents, nous ajoutons également pour la DNS le nombre d'onde $k = 2$. Cette énergie est calculée pour l'ensemble des fréquences et est présentée pour les dix premiers modes en Fig. 3.15. En observant le balayage en fréquence sur modes transverses $k \in [0, 1]$ de la LDNS, nous retenons trois modes dominants aux trois fréquences identifiées

⁷ Spectral Proper Orthogonal Decomposition



(a) Modes SPOD LDNS. De haut en bas : second mode de Mack MM à $(f_{MM}, k) = (0.26, 0)$; premier mode oblique FM à $(f_{FM}, k) = (0.052, 1)$; second mode de Mack oblique MM $(f_{MM}, k) = (0.26, 1)$.



(b) Modes SPOD DNS. De haut en bas : second mode de Mack MM à $(f_{MM}, k) = (0.26, 0)$; premier mode oblique FM à $(f_{FM}, k) = (0.052, 1)$; second mode de Mack MM oblique $(f_{MM}, k) = (0.26, 1)$; mode oblique $(f, k) = (0.13, 2)$

FIGURE 3.16 : Champs de vitesse axiale u' des modes dominants issus de la SPOD de la LDNS (a) et de la DNS (b). La ligne pointillée indique la hauteur de couche limite $\delta = 0.99u_\infty$. La ligne verticale indique le plan d'extraction des profils pour la Fig. 3.17

en Fig. 3.14. Pour chaque pic, nous avons un système de rang faible dominé par le premier mode de la décomposition avec au minimum 60% de l'énergie globale pour la LDNS.

Les gains SPOD de la DNS ne sont calculés que sur la portion $x \in [0, 250]$ pour ne pas prendre en compte le contenu fréquentiel large bande de l'écoulement turbulent et se concentrer sur la zone transitionnelle. Dans le cadre non-linéaire, un système de rang plus important est obtenu, avec une séparation moins marquée de l'énergie des modes SPOD, particulièrement pour $k = 1$, en cohérence avec le début du régime transitionnel et l'augmentation du nombre de fréquences amplifiées. Le spectre en $k = 0$ contient un pic de rang faible dans la bande de fréquence du mode de Mack. Cette bande est de largeur moins importante que celle de la LDNS. Ceci est dû au volume d'intégration plus faible de l'énergie de la SPOD pour la DNS et donc la prise en compte de moins de fréquences amplifiées du second mode de Mack⁸. Pour $k = 0$, la comparaison de l'énergie du premier mode SPOD avec la somme de l'énergie de tous les modes (noir) nous indique que le premier mode contient la majorité de l'énergie là où des pics sont observés sur le spectre. Nous relevons également pour $k = 0$, un pic à très basse fréquence, associé ici à la déformation de l'écoulement moyen. Le spectre en $k = 1$ dévie plus largement de la simulation linéaire. Nous ne retrouvons pas nettement le pic pour le premier mode oblique vers $f = 0.08$. De même, la bande de fréquence du mode de Mack oblique $(f_{MM}, 1)$ ne présente qu'un faible gain et nous ne relevons pas de pic visible et similaire à la LDNS. Ce spectre large bande est cohérent avec le contenu spectre des ondes obliques $k = 1$ à $x = 250$ visible en Fig. 3.14a et l'absence de pic d'énergie retrouvée pour la SPOD suggère une faible amplification des ondes $k = 1$ en régime non-linéaire pour le début du domaine.

3.4.2.2 Distribution de vitesse du premier mode SPOD

Pour les trois modes SPOD dominants identifiés, nous obtenons les distributions de perturbations de vitesse u' présentées en Fig. 3.16a. Nous retrouvons la distribution connue du second mode plan en $(f_{MM}, k) = (0.26, 0)$, avec une composante de vitesse localisée proche de la paroi sous la couche critique ($\omega_r \alpha_r = c$). Le second mode de Mack oblique en $(f_{MM}, k) = (0.26, 1)$, présente une distribution de vitesse similaire, avec cependant, une fluctuation de vitesse située proche de la hauteur de couche limite correspondant à la fluctuation oblique de faible longueur d'onde observée en Fig. 3.11b pour la réponse linéaire. Nous notons pour les deux modes de Mack observés, une zone d'amplification réduite, en cohérence avec la nature acoustique piégée de ces ondes. En effet, la fréquence du mode de Mack le plus instable dépend directement de l'épaisseur de la couche limite $f = u_\infty / (2\delta_{99})$. Pour une fréquence donnée, le mode de Mack n'est amplifié que pour un intervalle d'épaisseur de couche limite donné et donc une distance donnée le long de la plaque plane.

⁸ Pour rappel, l'intervalle de fréquences amplifiées du second mode de Mack dépend de l'intervalle des épaisseurs de couches limites étudiées

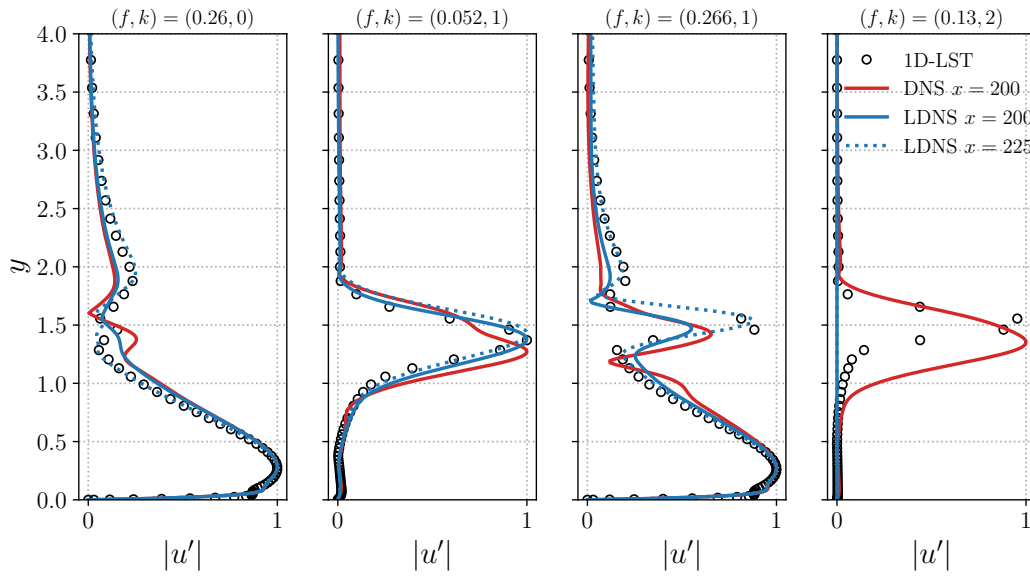


FIGURE 3.17 : Identification des modes de la SPOD dominants à $x = 200$ pour les nombres d'ondes $k \in [0, 1, 2]$. Comparaison avec les profils obtenus avec l'analyse LST-1D pour les mêmes nombres d'ondes et même écoulement de base.

A contrario, le premier mode oblique à $(f_{FM}, k) = (0.052, 1)$, présente une amplification continue le long du domaine, en lien avec la faible variation de la fréquence la plus amplifiée, observée en Fig. 3.14a à droite. Nous ajoutons que le régime transitionnel et le début de la turbulence est particulièrement observable en $x \approx 250$ sur les structures cohérentes issues de la DNS pour ce mode.

Enfin, le mode SPOD correspondant au pic d'énergie issu de la dynamique non-linéaire $(f, k) = (0.13, 2)$ est tracé pour la DNS en Fig. 3.16b. Ce dernier est amplifié à compter de $x = 150$ et il présente des similitudes avec la distribution de vitesse du premier mode oblique FM $(0.06, 1)$, à la différence d'une longueur d'onde λ_x plus faible.

3.4.2.3 Identification formelle avec la LST

L'identification formelle des modes observés est effectuée en Fig. 3.17 avec une comparaison des modes SPOD et des modes issus de l'analyse LST de l'écoulement de base en $x = 200$ pour chaque fréquence de pic retenue. Les trois modes dominants de la dynamique linéaire sont bien identifiés par cette comparaison, particulièrement le premier mode oblique, dont la distribution d'amplitude suit celle issue de la théorie 1D parallèle.

Une remarque peut être faite à propos des modes de Mack plans et obliques. En $x = 200$ nous retrouvons qualitativement les mêmes distributions, mais un faible écart persiste, spécialement pour les points d'inflexion du profil issu de la SPOD qui ne sont pas retrouvés pour le mode $k = 0$. Une exploration des profils issus de la SPOD à des positions proches a été effectuée et une adéquation avec les profils LST est obtenue en $x = 225$. Cet écart est expliqué par le fait que la DNS

donne la fréquence du mode de plus haute amplitude et l'analyse LST la fréquence du mode le plus amplifié. Ainsi, la fréquence du second mode de Mack de plus haute amplitude issue de la DNS, correspond à un mode de Mack ayant eu son pic d'amplification avant $x = 200$. La concordance entre le mode SPOD et LST se retrouve plus en aval, à $x = 225$ après amplification linéaire du mode à $f \approx 0.26$. Enfin, en lien avec l'élargissement du spectre en Fig. 3.14b, nous pouvons ajouter que la légère déviation des modes DNS au regard des modes linéaires indique une contribution du régime transitionnel déjà observable en $x = 200$.

Enfin, le profil du mode $(f, k) = (0.13, 2)$ issu de la dynamique non-linéaire, est tracé à droite de la Fig. 3.17. Afin de déterminer si un lien existe avec un mode de la LST, nous calculons le spectre aux valeurs propres spatiales à $x = 200$. Nous obtenons un spectre stable et nous ajoutons en marqueurs une comparaison avec le profil du mode S de la LST à la même fréquence et nombre d'onde $(f, k) = (0.13, 2)$. Les profils sont différents et aucun lien clair ne peut être fait. En revanche, une similitude est remarquée sur la Fig. 3.17 entre le profil SPOD du mode $(f, k) = (0.13, 2)$ et du premier mode FM $(f_{FM}, k) = (0.052, 1)$. La question se pose alors de comprendre si ces structures cohérentes sont liées par un mécanisme d'interaction non-linéaire, ou si la modification de l'écoulement de moyen permet l'instabilité secondaire du mode $(f, k) = (0.13, 2)$.

Nous proposons de suivre l'amplification des modes identifiés dans cette section afin détailler le scénario de transition probable de notre configuration.

3.4.3 Amplification spatiale des modes

La compréhension du scénario de transition passe par le croisement des résultats issus du diagramme (f, k) calculé en $x = 200$ (Fig. 3.13), des modes SPOD et des spectres de la DNS et LDNS dans la direction axiale.

En reprenant la figure 3.13, au début du régime transitionnel, nous trouvons les pics des modes identifiés précédemment, à savoir : $(f_{MM}, 0)$, $(f_{MM}, 1)$ et $(f_{FM}, 1)$.

Ensuite, une différence importante entre la réponse LDNS et la réponse DNS réside dans la présence du pic pour le mode $(0.13, 2)$ du spectre de la DNS en $x = 200$. Nous avons remarqué des similitudes entre sa fonction propre et les fonctions propres de la famille des instabilités du premier mode oblique. Cependant, ce mode $(0.13, 2)$ est absent du spectre LDNS obtenu avec l'écoulement de base et donc éventuellement issu de la dynamique non-linéaire en tant qu'un mécanisme secondaire, nous le noterons $(f_{nl}, 2)$.

Enfin, en croisant l'analyse du champ instantané en Fig. 3.10b et la carte en Fig. 3.13, nous observons la présence de modes quasi stationnaires⁹, avec une période proche de $k = 4$. Ces structures à basse fréquence sont également notables sur le diagramme (f, k) de la DNS pour $f \approx 0$, avec les modes $(f_{\min}, 4)$ et $(f_{\min}, 3)$. Leur présence suggère l'existence de streaks et est cohérente avec les scénarios

⁹ De nouveau, l'aspect quasi stationnaire correspond ici à une instabilité à la fréquence minimale de l'échantillonnage

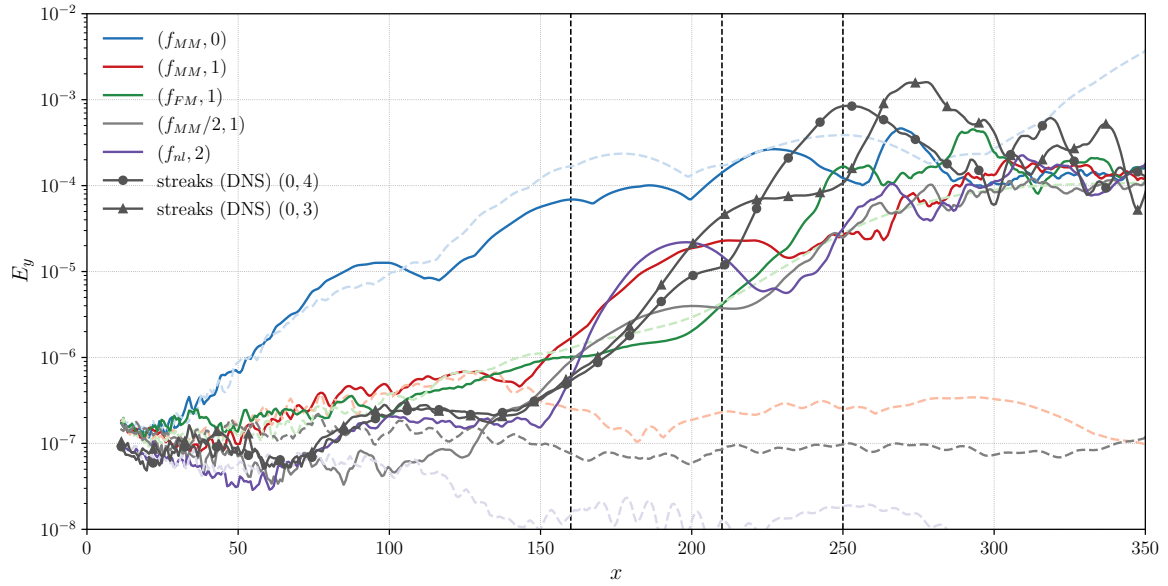


FIGURE 3.18 : Évolution spatiale de l'énergie E_y aux fréquences identifiées de modes extraits de la DNS et LDNS (tirets clairs)

de transition de couches limites hypersoniques étudiés précédemment (FRANKO et LELE, 2013 ; HADER et FASEL, 2018, 2019 ; LUGRIN et al., 2020).

Nous résumons l'évolution de l'ensemble des modes relevés ici avec la Fig. 3.18. Les modes issus de la DNS sont en trait plein et foncé, ceux de la LDNS sont clairs et en tirets. Le tracé de l'évolution linéaire et non-linéaire à ces fréquences permet de mieux distinguer les mécanismes en jeu dans le processus de transition. Le spectre linéaire ayant une amplitude arbitraire, la valeur relative des pics de fréquences LDNS est ajustée à l'amplitude du spectre de la DNS en $x = 10$. Nous précisons également que l'amplitude des seconds modes de Mack ($f_{MM}, 0$) et ($f_{MM}, 1$) ayant une fréquence de pic fonction de δ^* , est suivie en prenant le maximum de leur pic le long de l'axe x . Avec ces détails, nous pouvons identifier sur ce graphique quatre zones principales :

- $x \in [0, 140]$: cette zone correspond à la période de réceptivité et de croissance linéaire des modes dominants ($f_{MM}, 0$), ($f_{FM}, 1$) et ($f_{MM}, 1$). Un bon accord est retrouvé entre la solution LDNS et la solution DNS pour cette première phase de croissance linéaire. Le mode de ($f_{MM}, 0$) domine les autres modes d'un facteur 10^2 , en cohérence avec les résultats de la LST-1D.
- $x \in [140, 210]$: la seconde zone correspond au début du régime transitionnel avec l'amplification des ondes ($f_{MM}, 1$) et ($f_{nl}, 2$) et le ralentissement modéré de la croissance des modes ($f_{MM}, 0$) et ($f_{FM}, 1$) pour la DNS. Les modes LDNS ($f_{MM}, 1$) et ($f_{nl}, 2$) ne sont pas amplifiés. L'amplification en régime non-linéaire de ces derniers est particulièrement importante. Cette zone correspond également au début l'amplification progressive des modes stationnaires $(0, 4)$ et $(0, 3)$.

- $x \in [210, 250]$: cette courte portion du domaine correspond à la forte amplification des streaks $(0, 4)$ suite à la décroissance du mode $(f_{nl}, 2)$. Des études de la transition de couches limites hypersonique ont mis en avant la génération de telles streaks par deux ondes obliques (HADER et FASEL, 2019). Cette croissance du mode $(0, 4)$ suggère éventuellement l'interaction de deux ondes obliques instationnaires $(f_{nl}, 2)$ relevée dans les travaux cités précédemment. À la fin de leur croissance, l'amplitude des streaks dépasse celle du mode fondamental $(f_{MM}, 0)$ de presque une décade. Nous notons également que cette zone est le seuil de la saturation des modes $(f_{MM}, 0)$, $(f_{MM}, 1)$ et $(f_{FM}, 1)$.
- $x \in [250, 350]$: la dernière zone marque le début de la forte amplification des streaks $(0, 3)$, dépassant les streaks $(0, 4)$. C'est également le début du régime turbulent (Fig. 3.12) et nous remarquons la saturation de l'ensemble des modes présents initialement.

Ces quatre zones principales nous renseignent un peu plus sur le scénario de transition probable. Un scénario de type fondamental avec dominance des modes $(f_{MM}, 0)$ et $(f_{MM}, 1)$ pourrait être privilégié par le forçage et les conditions de l'écoulement. Cependant, le rôle du mode secondaire $(f_{nl}, 2)$, son éventuel lien avec le premier mode oblique et la naissance des streaks reste à caractériser. Particulièrement, la forte amplification du mode $(f_{nl}, 2)$ n'a pas été relevée dans les études de transition contrôlée précédentes et sa nature d'instabilité secondaire ou de résultante d'une interaction non-linéaire du mode $(f_{MM}, 1)$ ou $(f_{FM}, 1)$ n'est pas établie.

3.5 ÉTUDE DES MODES DE L'INSTABILITÉ SECONDAIRE

Pour tenter d'apporter plus de compréhension au chemin suivi par la transition, notamment dans la dynamique impliquant l'amplification secondaire des modes $(f_{nl}, 2)$ et des modes quasi stationnaires $(0, 4)$ et $(0, 3)$, nous proposons d'étudier brièvement les effets des interactions et de la déformation de l'écoulement moyen.

3.5.1 Effet de l'écoulement moyen sur la stabilité locale

Les modes secondaires $(f_{MM}, 1)$ et $(f_{nl}, 2)$ présentent les caractéristiques d'une croissance exponentielle pour $x \in [150, 180]$. Cette tendance peut suggérer une instabilité secondaire de la couche limite modulée par la croissance modale des instabilités primaires. Pour vérifier l'éventuel effet amplificateur de l'écoulement moyen, nous utilisons le vecteur instationnaire $\mathbf{Q}$ du calcul DNS, moyenné en temps pour obtenir $\langle \mathbf{Q} \rangle$, avec $\langle \bullet \rangle$ l'opérateur de moyenne temporelle. Cet écoulement moyen n'est pas un point fixe des équations de Navier-Stokes, mais peut être indicateur de l'évolution du taux d'amplification des modes considérés. Nous définissons un problème LST-1D parallèle en $x = 165$ avec une approche similaire à la Sec. 3.2.1. Les profils de l'écoulement moyen $\langle \mathbf{Q} \rangle$ et de l'écoulement de base $\bar{\mathbf{q}}_{FP}$ sont utilisés. Les spectres de valeurs propres du problème de stabilité local reconstruit à partir

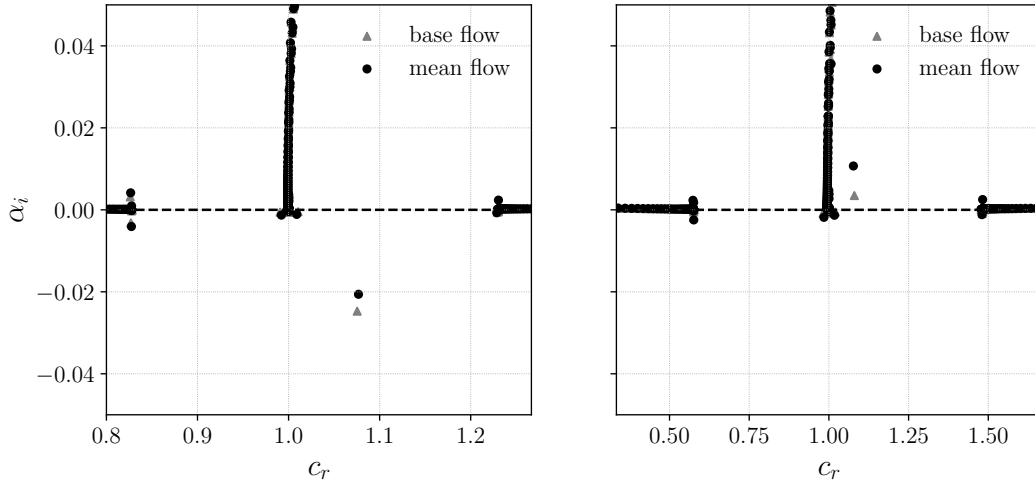


FIGURE 3.19 : Mesure de l'effet de la déformation de l'écoulement moyen sur le spectre LST-1D. Gauche : $(f_{MM}, 1)$. Droite : $(f_{nl}, 2)$

de ces profils sont comparés en Fig. 3.19 pour les fréquences : $(f_{MM}, 1)$ et $(f_{nl}, 2)$ identifiées depuis la DNS.

Pour le mode $(f_{MM}, 1)$, nous remarquons une faible variation relative de stabilité entre les spectres de $\langle Q \rangle$ et $\bar{q}_{FP}$. Ce mode a un taux d'amplification initial : $\alpha_i = -0.025$ et l'écoulement moyen induit un taux d'amplification de $\alpha_i = -0.02$, soit 20 % de réduction. Cet effet n'est pas négligeable, mais n'explique pas particulièrement la forte amplification remarquée dans la DNS, plus importante encore que l'amplification initiale observée du mode de Mack fondamental. Pour rappel, le mode de Mack dominant $(f_{MM}, 0)$ à un taux d'amplification de l'ordre de $\alpha_i = -0.05$. À contrario, le mode $(f_{nl}, 2)$ est stable pour l'écoulement de base et l'écoulement moyen. En accord avec le spectre de la LDNS où il ne présente pas de pics. Le taux d'amplification retrouvé est de $\alpha_i = 0.005$ pour $\bar{q}_{FP}$ et $\alpha_i = -0.012$ pour $\langle Q \rangle$. Ainsi, le spectre aux valeurs propres n'explique pas la croissance rapide observée du mode $(f_{nl}, 2)$. Ce dernier ayant également un taux de croissance sur le spectre de Fourier plus important encore que le mode $(f_{MM}, 0)$, théoriquement le plus amplifié.

Suite à cette analyse, deux hypothèses peuvent être retenues. Premièrement, nous pouvons suggérer que l'approximation du problème de stabilité sur l'écoulement moyen n'est pas suffisante et une étude de stabilité plus approfondie sur l'écoulement de base instationnaire devient nécessaire. Cette approche nécessite de poser un problème de stabilité périodique en temps avec le formalisme de Floquet, comme décrite par HERBERT (1988). Nous n'aborderons pas ici cette étude. Il existe ensuite une seconde hypothèse, où la croissance importante de ces modes harmoniques ne serait pas expliquée par une instabilité secondaire linéaire sur le champ déformé et serait issue d'interactions non-linéaires entre les différents modes présents. Cette seconde hypothèse est abordée en section suivante.

3.5.2 Analyse des interactions triadiques

Les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes induisent la production d'harmoniques de fréquences existantes par interaction. Deux ondes de fréquence respective f_1 et f_2 peuvent produire une troisième onde résultante en $\pm f_1 \pm f_2 = f_3$, ce type d'interaction est nommée interaction triadique et est au cœur de la cascade d'harmoniques menant vers la turbulence (CRAIK, 1971). Un outil statistique efficace pour quantifier d'éventuelles interactions triadiques entre deux signaux est le spectre d'ordre supérieur nommé bispectre. Le bispectre d'un signal correspond au spectre de la triple corrélation de trois signaux. Il est régulièrement utilisé pour caractériser des interactions triadiques entre différentes fréquences d'un signal issu d'une dynamique non-linéaire. Des revues du principe et sa définition sont données par KIM et POWERS (1979) et SCHMIDT (2020).

Les interactions triadiques se révèlent dans l'espace de Fourier sous forme de triplets de fréquence ou nombre d'onde respectant la condition d'interaction résonnante : $f_1 \pm f_2 \pm f_3 = 0$ pour trois composantes f_1, f_2 et f_3 du spectre d'un signal $\phi(t)$. Nous pouvons lister deux classes d'interactions et leurs cas particuliers :

- somme : $f_1 + f_2 = f_3$;
- différence : $f_1 - f_2 = f_3$;
- cas particulier de la déformation du champ moyen : $f_1 + (f_2 = -f_1) = 0$;
- cas particulier de la production d'harmoniques par interaction résonnante : $f_1 \pm (f_2 = f_1) = 2f_1$

Il est à noter que le bispectre ne nous renseigne pas sur la nature sommante ou différenciante de la corrélation observée. Cette nature de l'interaction est généralement retrouvée avec des informations contextuelles issues des autres spectres et analyses de l'écoulement observé (BOUNTIN, SHIPLYUK et MASLOV, 2008).

Nous cherchons alors à déterminer si ces types d'interactions sont présentes dans le scénario de transition observé ici. Particulièrement, nous cherchons à déterminer s'il y a génération des harmoniques planes et obliques du second mode de Mack : $(2f_{MM}, 0)$, $(f_{nl}, 2)$ ou $(f_{MM}, 1)$, observées précédemment. Nous guidons notre interprétation avec les études expérimentales de BOUNTIN, SHIPLYUK et MASLOV (2008) et CRAIG et al. (2019) ou plus récemment dans un cadre numérique par RIGAS, SIPP et COLONIUS (2020) et UNNIKRIISHNAN et GAITONDE (2020). Avec l'utilisation du bispectre, ces études ont permis de révéler des aspects intéressants de l'interaction du mode de Mack avec ses harmoniques et le champ moyen.

Nous utilisons dans notre cas une formulation du bispectre $B(\omega_1, \omega_2)$, entre deux fréquences ou nombres d'ondes ω_1 et ω_2 , similaire à UNNIKRIISHNAN et GAITONDE (2020).

$$B(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E [\Phi(\omega_1) \Phi(\omega_2) \Phi^*(\omega_1 + \omega_2)] \quad (3.14)$$

$$\Phi(\omega) = \mathcal{F}_\omega(\phi(t)) \quad (3.15)$$

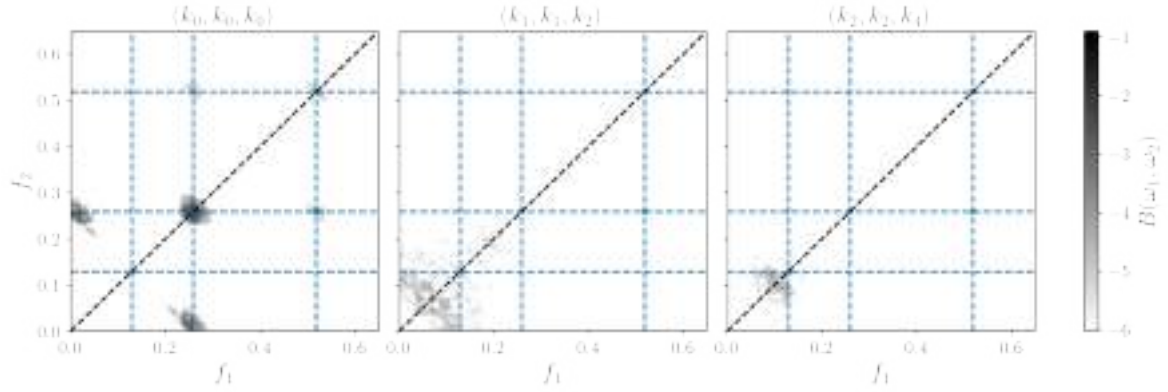


FIGURE 3.20 : Densité bispectrale de puissance au point $x = 200$ pour $y = y_{\text{GIP}}$. Gauche : auto bispectre du triplet $\{k_0, k_0, k_0\}$. Centre : bispectre croisé du triplet $\{k_1, k_1, k_2\}$. Droite : bispectre croisé du triplet $\{k_2, k_2, k_4\}$

Avec le signal $\Phi(\omega)$ issu de notre vecteur $\mathbf{Q}$ décomposé en fréquences et en nombres d'ondes dans la direction z . Cette décomposition nous permet également de découpler les nombres d'ondes transverses k et proposer un bispectre croisé pour les spectres en fréquence de deux composantes transverses telles que $k_0 \pm k_1 \pm k_3 = 0$. Le calcul de l'Eq. 3.14 est réalisé avec une approche similaire à la Sec. 3.4 avec une estimation de l'opérateur d'espérance $E[\bullet]$ similaire à la méthode de Welch, en moyennant des blocs de Fourier fenêtrés de taille N_{fft} avec un recouvrement de 75 %.

Suivant les harmoniques observées en Fig. 3.18, nous choisissons de calculer l'auto-bispectre en fréquence du mode $k = 0$ et les bispectres croisés des interactions : $k_1 + k_1 = k_2$ et $k_2 + k_2 = k_4$, avec la notation compacte e.g. $k = 1 \equiv k_1$. Ces bispectres croisés sont utilisés pour obtenir plus d'informations sur les modes $(f_{nl}, 2)$ et $(0, 4)$. Pour ces derniers, la notation compacte : $B_{l,m,n}(f_i, f_j)$ est utilisée pour l'interaction des fréquences f_i, f_j des modes k_l et k_m résultant dans la fréquence $f_i \pm f_j$ du mode k_n . Les cartes d'interactions sont présentées en Fig. 3.20 pour le signal pris en $x = 200$ au niveau du point d'inflexion généralisé $y_{\text{GIP}} = 1.5\delta_0$, la variable utilisée pour le signal de ces bispectre est la masse volumique.

Les diagrammes obtenus sont symétriques et se lisent dans la moitié triangulaire inférieure délimitée par la courbe pointillée noire $f_1 = f_2$, sur lesquels résident les interactions résonnantes. Les cartes de couleur utilisent toutes l'amplitude du bispectre B_{k_0, k_0, k_0} pour une comparaison relative pertinente. Les interactions sont symbolisées par une densité d'énergie significative au croisement de deux fréquences. L'énergie répartie sur les diagonales descendantes n'est pas interprétée et est associée à la fuite spectrale imposée par le fenêtrage (SCHMIDT, 2020). Nous utilisons dans cette section la notation f_i^k pour décrire la fréquence i d'une mode k dans les triplets.

En commençant l'analyse par les interactions entre les fréquences du mode plan données par B_{k_0, k_0, k_0} , nous retrouvons deux phénomènes non-linéaires intéressants. Le mode de Mack plan est présent ici sur sa fréquence fondamentale $f_{MM} = 0.26$,

nous observons une distribution d'énergie autour de la fréquence fondamentale sous la forme $f_{MM}^0 \pm \Delta$, avec Δ une petite variation, retrouvée également par CRAIG et al. (2019). Cet élargissement de la zone autour de f_{MM}^0 caractérise une interaction résonnante du mode de Mack dominant en $x = 200$ avec les seconds modes de Mack de fréquence proches existants aussi en ce point de la couche limite. Étant donné l'apparition du pic à $2f_{MM}^0$ dans le spectre DNS en Fig. 3.14b et son absence dans le cas de la LDNS, nous suggérons une interaction somme du type $(f_{MM}^0 \pm \Delta) + (f_{MM}^0 \pm \Delta) = 2(f_{MM}^0 \pm \Delta)$, amenant à un transfert d'énergie du mode fondamental plan vers sa première harmonique. Un second couplage est alors observé pour le triplet $\{k_0, k_0, k_0\}$ en Fig. 3.20 pour au point $(2f_{MM}^0, f_{MM}^0)$, cette interaction est liée à la génération d'une troisième harmonique du mode fondamental $f_{MM} + 2f_{MM} = 3f_{MM}$, retrouvée aussi par UNNIKRISHNAN et GAITONDE (2020). La fréquence de Nyquist ne nous permet pas de retrouver cette troisième harmonique ici.

Une seconde interaction du mode fondamental est notable avec les fréquences proches de la fréquence nulle. Dans ce cas de figure, deux hypothèses sont suggérées : une interaction avec les très basses fréquences $f = 0$ amenant à des structures de type streaks ; une interaction avec les petites fluctuations du champ moyen correspondant à un transfert d'énergie non-linéaire du champ moyen vers le mode fondamental. Le bispectre étant calculé pour un mode plan, la seconde hypothèse est privilégiée et rejoint l'interprétation du gain SPOD important remarqué pour les basses fréquences du mode plan. Le scénario suggérant alors ici un transfert d'énergie de l'écoulement moyen vers le mode fondamental et une interaction non-linéaire résonnante du mode fondamental avec lui-même résultant dans la faible signature en énergie de la première harmonique plane observée en Fig. 3.14b à partir de $x \approx 120$. UNNIKRISHNAN et GAITONDE (2020) retrouve également un tel mécanisme par cette interaction non-linéaire et cite CRAIK (1971), qui indique qu'une interaction de ce type peut participer à la forte amplification d'ondes obliques.

L'étude des harmoniques transverses du mode $k = 1$ est effectuée avec le bispectre $B_{1,1,2}$. Nous remarquons un couplage entre diverses ondes du contenu basse fréquence $f < f_{MM}$ du spectre, particulièrement pour des ondes proches de $f^1 \approx 0.06$, correspondant au pic large bande du premier mode oblique. En remarquant que la fréquence du pic subharmonique oblique $f_{nl}^2 \approx 0.13$, ce pic de corrélation suggère une interaction faible du contenu basse fréquence du premier mode oblique alimentant la seconde harmonique oblique sous la forme d'une résonance $f_{FM}^1 + f_{FM}^1 = f_{nl}^2$. La nature sommante de la corrélation est appuyée par l'amplification importante des fréquences autour de ces nombres d'ondes retrouvée sur le spectre en Fig. 3.14b. L'amplitude de cette interaction est de l'ordre de 10^{-3} fois plus petite que celle de l'interaction de f_{MM}^0 avec l'écoulement moyen. Le caractère élargi de la zone de corrélation autour de f_{FM}^1 est caractéristique de la nature large bande du premier mode. De telles interactions basse fréquence sont retrouvées expérimentalement à $M_\infty = 6.0$ par BOUNTIN, SHIPLYUK et MASLOV (2008), notamment entre le premier mode oblique et le mode fondamental pour la génération d'ondes du type f_{nl} .

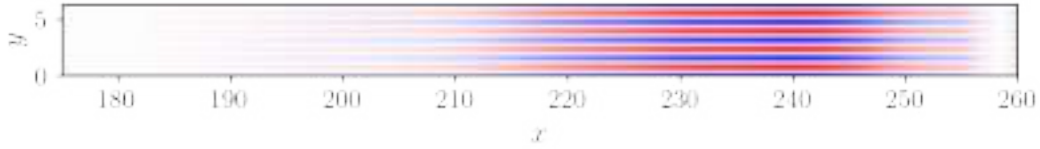


FIGURE 3.21 : Contours de vitesse de perturbation axiale du mode SPOD $(f_{\min}, 4)$ en $y = \delta^*$

Enfin, l'interprétation du bispectre $B_{2,2,4}$ nous renseigne sur l'éventuelle interaction donnant naissance aux streaks $(0, 4)$. Ce bispectre présente un pic d'interaction résonnante pour $f \approx f_{nl}$, en cohérence avec la forte amplitude du mode $(f_{nl}, 2)$ autour de ce point. L'interaction résonnante peut alors donner $(0, 4)$ ou $(f_{MM}, 4)$. L'absence de contenu fréquentiel $(f_{MM}, 4)$ et la forte amplification des streaks $(0, 4)$ appuient le scénario d'interaction non linéaire du type $f_{nl}^2 - f_{nl}^2 = 0 \times f_{nl}^4$ facilitant la réceptivité au mécanisme du lift-up (LANDAHL, 1980, 1990) pour donner naissance aux streaks observées par l'interaction des deux nombres d'ondes $k = 2$ d'angle opposé.

3.5.3 Génération de streaks

Les structures générées par l'interaction des modes $k = 2$ sont étudiées plus en détail avec une analyse du mode SPOD associé. Les streaks étant par nature des structures cohérentes quasi stationnaires, elles nécessitent des durées d'échantillonnage importantes et sont difficiles à résoudre correctement. Dans cette limite, nous choisissons d'observer le mode SPOD à la fréquence $(f_{\min}, 4)$ pour vérifier la nature de la structure cohérente associée. Ces structures cohérentes sont données en Fig. 3.21.

Les structures cohérentes obtenues confirment l'existence de streaks amplifiées dans la région $x \in [200, 250]$. Ces dernières présentent une alternance dans la direction x pouvant être associée à une oscillation de faible fréquence de par le caractère quasi stationnaire du mode $(f_{\min}, 4)$. L'observation des instabilités en Fig. 3.10b autour de $x = 235$ permet de remarquer des structures fluides symétriques selon l'axe x . Ces structures associées à la présence de streaks fortement amplifiées à la même position invite à les associer à l'instabilité symétrique des streaks remarquées par ANDERSSON et al. (2001).

Nous choisissons de conclure la description du scénario de transition étudié avec cette dernière observation.

3.6 CONCLUSION SUR LE SCÉNARIO DE TRANSITION

Nous avons étudié la dynamique de transition d'une couche limite hypersonique forcée par un bruit blanc. Contrairement aux multiples études de la transition dans un cadre contrôlé, cette analyse a permis de s'intéresser au chemin suivi par la dynamique de transition pour un bruit ambiant "quasi-naturel", ne sélectionnant pas

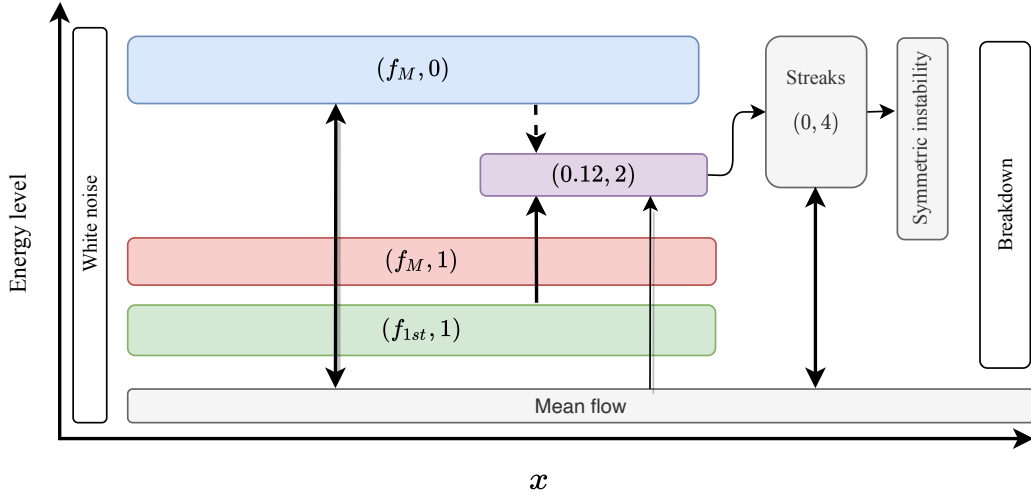


FIGURE 3.22 : Scénario de transition proposé pour une couche limite hypersonique forcée par un bruit blanc. Les modes principaux et le code couleur donné en Fig. 3.18 ont été repris.

de modes particuliers a priori. De la sorte, des mécanismes secondaires similaires au scénario fondamental, ou au scénario oblique ont pu être observés simultanément.

Le scénario de transition suggéré est alors le suivant. Au début de la transition, une dominance rapide du second mode de Mack fondamental ($f_{MM}, 0$) et une faible croissance du premier mode oblique ($f_{FM}, 1$) est observée. Cette amplification est en accord avec les résultats de la LST. Le mode de Mack fondamental subit une première phase de croissance linéaire et au cours de laquelle il reçoit de l'énergie de l'écoulement moyen par transfert non-linéaire (CRAIK, 1971). En retour, il modifie également l'écoulement de base par interaction non linéaire avec ce dernier. À la fin de la croissance primaire du second mode de Mack en $x \approx 150$, le second mode de Mack oblique, linéairement instable : ($f_{MM}, 1$), suit une forte croissance sur l'écoulement secondaire produit par le second mode de Mack, de façon analogue au mécanisme indiqué par UNNIKISHNAN et GAITONDE (2020). En parallèle, le contenu basse fréquence du mode ($f_{FM}, 1$) s'amplifie plus fortement et produit une interaction résonnante, qui transfère de l'énergie vers le mode ($2f_{FM} \approx f_{nl}, 2$) pour participer à l'amplification importante du mode subharmonique ($f_{nl}, 2$), tel que, suggéré par les observations expérimentales de BOUNTIN, SHIPLYUK et MASLOV (2008). Le mode subharmonique ainsi amplifié, interagit avec lui-même en fréquence selon la différence ($f_{nl}, 2$) - ($f_{nl}, 2$) = (0, 4) pour générer des streaks stationnaires fortement amplifiées menant à la transition par croissance d'instabilité symétriques observées en $x \approx 250$.

Le chemin vers la turbulence mis en lumière contient une richesse importante de modes, mêlant des instabilités de la famille du premier mode et du second mode. Cette richesse souligne la difficulté associée à l'analyse de scénarios de transition "naturels" de couche limite hypersonique. Particulièrement, le rôle du mode ($f_{nl}, 2$) n'a pas été décrit dans les travaux cités ci-dessus et semble ici constituer un chemin

alternatif au scénario subharmonique déjà décrit (FRANKO et LELE, 2013). La croissance rapide de ce mode ne reste que partiellement expliquée par la possibilité d'une interaction non-linéaire et la vérification formelle de sa stabilité au regard de l'écoulement de base instationnaire modifié par $(f_{MM}, 0)$ reste une question ouverte. Pour conclure, le diagramme 3.22, résume le scénario suggéré et servira de référence pour l'étude des chapitres ultérieurs traitant des couches limites déformées.

EFFETS DU FORÇAGE SUR LE SILLAGE D'UNE RUGOSITÉ

4.1	Description générale et positionnement	117
4.2	Validation du code DNS sur un cas d'application	120
4.2.1	Géométrie et méthodes numériques	120
4.2.2	Solution stationnaire	122
4.3	Rugosité isolée à $Re_{\delta^*} = 28000$	124
4.3.1	Configuration générale	124
4.3.2	Géométrie et méthodes numériques	125
4.4	Écoulement de base	126
4.4.1	Déformation de la couche limite	127
4.4.2	Propriétés de stabilité connues	131
4.5	Réponse à un forçage par bruit blanc	133
4.5.1	Champs de perturbations	134
4.5.2	Décomposition du sillage	135
4.6	Discussion et perspectives	143

Nous nous intéresserons dans ce chapitre à la sensibilité au forçage d'une couche limite de plaque plane en présence d'éléments de rugosité isolés et réguliers. Une validation du code CurviCREAMS sur un cas pratique est établie en comparant les écoulements de base obtenus avec les résultats existants de la littérature récente. Dans un second temps, la réponse de cet écoulement de base stationnaire à un forçage bruit blanc sera étudiée en régime linéaire. De cette étude, nous discuterons les instabilités présentes dans la dynamique non-linéaire. Ces instabilités sont comparées aux résultats précédents et les différences liées au forçage sont mise en évidence.

4.1 DESCRIPTION GÉNÉRALE ET POSITIONNEMENT

Nous avons introduit en première partie de ce manuscrit les différents types de perturbations menant à la naissance d'instabilités dans l'écoulement. Parmi ces facteurs, nous avons cité l'importance particulière de l'état de surface de la paroi pour les véhicules hypersoniques (HORVATH et al., 2012). Nous prolongeons donc dans ce chapitre l'étude précédente sur une paroi lisse vers une paroi déformée par un élément de rugosité isolé.

Cette analyse se positionne dans la continuité d'une longue liste de travaux sur la caractérisation des instabilités de couche limite induites par des éléments de rugosité. Les études expérimentales de (CORKE, BAR-SEVER et MORKOVIN, 1986; KLEBANOFF, 1972; SCHNEIDER, 2008) ont par exemple démontré l'accélération du processus de transition généré par divers éléments de rugosité. Les rugosités modifient la topologie de l'écoulement de base et agissent sur les mécanismes de réceptivité et de croissance des instabilités. Cet effet sur la réceptivité est particulièrement vrai en régime incompressible où les rugosités agissent comme un mécanisme de conversion de longueur d'onde, facilitant la perméabilité de la couche limite aux perturbations extérieures (CROUCH, 1992). En régime hypersonique, sur lequel nous nous concentrons, les longueurs d'onde des perturbations sont plus proches de l'épaisseur de la couche limite et cette réceptivité est facilitée. Dans ce cas les rugosités agissent principalement sur l'écoulement de base et les mécanismes de croissance des instabilités la couche limite (MARXEN, IACCARINO et SHAQFEH, 2010). De nombreux paramètres, dont la forme et la hauteur de la rugosité introduisent alors différents régimes de transition.

CHOUDHARI et al. (2017) détaillent différents régimes nommés : subcritique, critique et supercritique. Le régime subcritique concerne les rugosités qui ne changent pas les mécanismes de croissance des instabilités de la couche limite en comparaison à une paroi lisse. Cependant, elles peuvent agir sur le mécanisme de réceptivité. Les rugosités critiques modifient l'écoulement de base et la dynamique de transition au regard de la paroi lisse. Celles-ci introduisent de nouvelles instabilités en supplément des modes existants pour la couche limite non déformée, la rugosité agit ainsi comme un système amplificateur d'instabilités convectives. La transition est alors largement dépendante de l'environnement de perturbation extérieur et de l'interaction des modes de la couche limite avec le sillage de la rugosité (DE TULLIO et SANDHAM, 2015; TULLIO et al., 2013). Enfin, nous avons le régime de rugosité supercritique où la déformation induite de l'écoulement déclenche la transition vers la turbulence directement dans le sillage proche. À ce régime, la rugosité agit plutôt comme un système oscillateur avec la présence de poches de recirculation et de battement d'ondes de chocs entraînant une instabilité absolue (SHRESTHA et CANDLER, 2019; SUBBAREDDY, BARTKOWICZ et CANDLER, 2014).

Nous intéressons plus particulièrement à un élément de rugosité critique dans le cadre de cette étude et à la nature amplificatrice du système (rugosité + sillage) sur un forçage extérieur. Dans ce cas, le réseau complexe de tourbillons en fer à cheval, zones de recirculations et sillages tourbillonnaires est support de plusieurs instabilités que nous décrirons ci-après (BAKER, 1979; MARXEN et IACCARINO, 2008). Il a été démontré que le sillage de la rugosité est généré par la croissance transitoire d'une ou plusieurs streaks, produites par le mécanisme de lift-up que génèrent les lignes de vorticité qui en s'enroulant autour de l'élément de rugosité. Ces streaks présentent des zones de cisaillement vertical et latéral accru supportant des instabilité convectives particulières (GROSKOPF et KLOKER, 2016; GROSKOPF, KLOKER et MARXEN, 2009; MONTERO et PINNA, 2021; TULLIO et al., 2013). La nature de ces instabilité convectives est liée aux directions du cisaillement dans les streaks. Une dominance du cisaillement vertical (resp. latéral) mènera à des instabilité de sillages symétriques (resp. antisymétriques). En fonction de l'intensité et la di-

rection du cisaillement principal, l'instabilité symétrique ou antisymétrique peut dominer la dynamique. Cette dominance est largement dépendante de la forme de l'aspérité et la nature de l'écoulement amont, une analyse approfondie de ces effets de forme est proposée par EYNDE et SANDHAM (2015).

Par ailleurs, la distribution des éléments de rugosité critiques affecte largement la dynamique du sillage. Les études numériques de CHOUDHARI, LI et PAREDES (2018), DI GIOVANNI et STEMMER (2018), HEIN et al. (2019) et MUPPIDI et MAHESH (2012) ou expérimentales résumées par SCHNEIDER (2008), illustrent les déformations de l'écoulement issues du couplage des sillages de rugosité et notamment la génération de tourbillons de type crossflow. Il faut aussi remarquer que certains couplages peuvent exister entre les perturbations générées par deux rugosités successives (CHOU, KEGERISE et KING, 2020 ; PANDO et SCHMID, 2017). Ces effets combinés des rugosités distribuées sur la transition dans des conditions réalistes sont à mettre en lien avec les études de PAREDES et al. (2018), STETSON (1983) et ZANCHETTA (1996) sur la transition d'objets hypersoniques de type "blunt-body"¹.

Cette courte revue de l'historique des travaux sur la transition vers la turbulence en présence d'éléments de rugosités nous permet d'entrevoir la grande taille de l'espace des paramètres à étudier pour caractériser l'effet des rugosités sur la route vers la turbulence. Cette caractérisation est d'importance pour les applications réelles et a donc mené à la recherche d'un critère général de transition en présence de rugosités isolées ou distribuée. Ces études ont mené à la définition d'un paramètre physique d'importance pour la transition induite par une rugosité isolée : le nombre de Reynolds Re_{kk} basé entre autres sur la hauteur de cette dernière : k . REDA (2002) propose une revue de l'utilisation de ce critère avant les années 2000. Dans la suite, les études de BERNARDINI et al. (2014) et REDFORD, SANDHAM et ROBERTS (2010) ont détaillé les effets de compressibilité, température et nombre de Reynolds sur la transition dans le sillage. Ces études ont amené à la forme actuelle du critère nommé Re_{kw} ,

$$Re_{kw} = \frac{\rho_k u_k k}{\mu_w} \quad (4.1)$$

où les grandeurs $(\bullet)_k$ sont mesurées dans la couche limite non perturbée à la hauteur k et la position de la rugosité. Contrairement, la viscosité μ_w qui est plutôt calculée à la paroi pour une couche limite de plaque plane, aussi à la même position. Avec ce critère, un élément de rugosité devient critique pour la valeurs de seuil de $400 < Re_{kw} < 650$. À ce régime, les instabilités convectives du sillage accélèrent la transition. L'amplitude initiale et la croissance de ces instabilités dépend alors largement de l'environnement de perturbation environnant.

Les études numériques précédentes, menées pour caractériser la nature des instabilités convective dans le sillage en régime hypersonique ont principalement employé des forçages restreints à quelques fréquences et nombres d'ondes (DE TULLIO et SANDHAM, 2015 ; EYNDE, 2015 ; LEFIEUX, 2020). Peu d'attention a été portée à l'effet d'un forçage large bande sur la réceptivité, l'amplitude initiale et la

¹ Nous utilisons ici la notation anglophone "blunt body" plutôt que la traduction littérale francophone "sphère-cône" pour faciliter le lien avec la terminologie de la littérature

croissance des modes. Devant ce constat, nous choisissons de nous positionner dans la continuité de ces travaux. L'intérêt d'une telle approche peut être retrouvé dans l'étude (incompressible) de BUCCI et al. (2021) où un forçage large bande d'une rugosité isolée amène à une réponse de l'écoulement s'écartant de la prédiction d'une analyse de stabilité globale et offrant une dynamique complexe. Nous souhaitons alors établir pour le régime hypersonique - dans notre cas spécifique - quels sont les modes amplifiés autour d'un élément de rugosité isolé, après processus de réceptivité, dans un cadre linéaire et non-linéaire.

Nous décomposons cette étude en deux parties :

- en premier lieu, un écoulement de base bien défini par les études précédentes permet de valider les outils numériques présentés au Chapitre 2. Ce cas d'application pratique qui comporte à la fois un maillage curviligne, des ondes de chocs et une dynamique d'écoulement riche s'avère idéal.
- En second lieu, une étude de réceptivité qui fait suite aux travaux de EYNDE (2015) et LEFIEUX (2020) est proposée. Nous calculons d'abord un écoulement de base stationnaire que nous caractérisons. Puis, nous calculons les réponses linéaires et non linéaires de cet écoulement à un bruit blanc. Ensuite, nous décomposons la dynamique transitionnelle en effectuant une SPOD. En nous appuyant sur les résultats précédents, nous identifions les instabilités amplifiées dans le régime linéaire et nous discutons la dynamique associée dans le régime non linéaire.

4.2 VALIDATION DU CODE DNS SUR UN CAS D'APPLICATION

Cette validation de la chaîne de calcul DNS est effectuée pour un élément de rugosité isolé, immergé dans une couche limite, cet élément à une forme s'approchant d'une gaussienne. Pour appuyer notre validation, nous choisissons de nous baser sur la configuration de EYNDE (2015). Nous comparerons nos résultats à ceux obtenus par deux codes bien connus de la littérature, elsA de l'ONERA (CAMBIER, HEIB et PLOT, 2013) et OpenSBLI (JACOBS, JAMMY et SANDHAM, 2017) dans le cadre de la thèse de LEFIEUX (2020). Considérant les conditions de ces études précédentes, le calcul est effectué à $Re_{\delta^*} = 8200$ pour un nombre de Mach $M_\infty = 6.0$, une température statique infinie $T_\infty = 273.15K$ et une paroi adiabatique. Pour ce régime, à faible nombre de Reynolds, il est montré que nous obtenons un sillage globalement stable derrière la rugosité.

4.2.1 Géométrie et méthodes numériques

Le domaine de calcul est présenté en Fig. 4.1 pour les plans (x, y) et (y, z) . Ce domaine contient une couche limite développée en aval d'un point d'arrêt. La rugosité est positionnée au premier tiers du domaine à la position $(x_r, z_r) = (53, 0)$. La longueur de référence L_{ref} est définie comme l'épaisseur de déplacement à l'entrée du domaine $\delta^*(x = 0)$. La direction z est considérée non-homogène et pério-

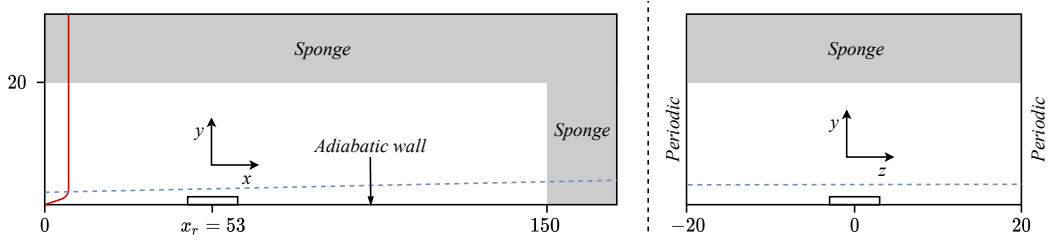


FIGURE 4.1 : Schéma général du domaine de calcul pour le cas de validation. Gauche : plan (x, y) à $z = z_r$; droite : plan (y, z) à $x = x_r$.

Paramètres	Valeurs
Re_{δ^*}	28 000
M_∞	6.0
T_∞	273.15K
L_{ref}	$\delta^*(x = 0)$
$L_x \times L_y \times L_z$	$150 \times 20 \times 50$
$N_x \times N_y \times N_z$	$900 \times 225 \times 349$
k	1.0 ou 0.5

TABLE 4.1 : Paramètres généraux du cas de validation

dique, l'extension du domaine dans cette direction permet également de négliger les effets d'interaction de la rugosité avec elle-même. La condition d'entrée est basée sur un profil de couche limite compressible autosimilaire. En Suivant EYNDE (2015), cette condition est divisée en deux parties. Pour la partie supersonique, les variables conservatives sont imposées selon le profil autosimilaire. Pour la partie subsonique, la composante de pression des variables primitives sur les bords est recalculée par extrapolation depuis le domaine intérieur, puis un passage aux variables conservatives est effectué. Les conditions de sorties à $y > 20$ et $x > 150$ sont composées d'une zone éponge qui permet d'éviter les réflexions numériques, puis une condition de Neumann à l'ordre 4 est imposée sur les variables conservatives. La paroi est non glissante et adiabatique, ces conditions reprennent les principes donnés pour l'Eq. 2.81. Le tableau 4.1 résume les paramètres principaux de cette configuration.

La surface régulière de cette rugosité facilite la génération d'un maillage conforme et assure la bonne régularité de la transformation curviligne. Pour ce cas d'étude et ceux de la section 4.3, les équations paramétriques donnant le profil d'une rugosité de hauteur k sont les suivantes,

$$y_0(r) = \frac{-k}{2 \tanh(S \frac{W}{k})} f(r) \quad (4.2)$$

$$f(r) = \tanh\left(\frac{S}{k}(2r - W)\right) + \tanh\left(\frac{S}{k}(-2r - W)\right). \quad (4.3)$$

Avec $r = \sqrt{(x - x_r)^2 + (y - y_r)^2}$ le rayon de la surface paramétrée autour du centre de la rugosité. Nous avons ensuite les paramètres S et W définissant respective-

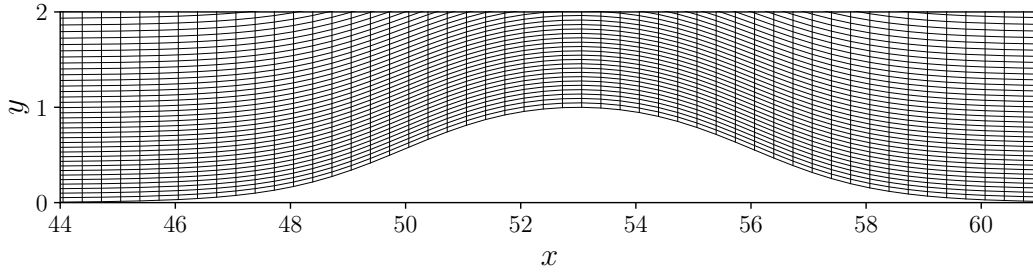


FIGURE 4.2 : Maillage conforme autour de la rugosité à $z = z_r$. Une ligne de maillage sur deux est présentée dans les directions i et j .

ment la courbure et le diamètre de l'élément de rugosité. La courbure S est définie telle que $S = \cot S^*$, $S^* \in [0, \pi/2]$, nous choisissons ici $S^* = 1.35$ donnant une forme "gaussienne". Le paramètre de diamètre est défini à $W = 6$. La construction de la surface y_0 permet alors de définir le maillage conforme autour de la rugosité.

Nous partons d'un maillage structuré uniforme indicé (i, j, k) dans les trois directions de l'espace (x, y, z) . Le nombre de point est choisi en accord avec les études précédentes sur cette configuration. Nous discrétisons le domaine d'analyse avec $N_i \times N_j \times N_k = 900 \times 225 \times 349$ points.

Le maillage est ensuite déformé dans la direction normale à la paroi selon la surface donnée en Eq. 4.2. Avec une distribution de la coordonnée y pour la dimension η donnée ci-dessous.

$$y_j = y_0 + (L_y - y_0) \frac{\sinh(b_y \eta)}{\sinh(b_y)} \quad (4.4)$$

$$\eta(j) = j/N_y, \quad j \in [0, N_y]$$

La distribution est ici choisie identique aux études précédentes avec un paramètre $b_y = 3.19$. Le maillage obtenu est présenté en Fig. 4.2 pour le plan $z = z_r$. Nous pouvons remarquer que ce maillage tel que défini par EYNDE, 2015 n'est pas orthogonal à la paroi pour ce cas. Cette non-orthogonalité peut être source d'erreurs numériques. Cependant, dans un objectif de comparaison exacte des solutions, cette discrétisation non orthogonale est conservée.

Pour les méthodes numériques associées à ce cas de validation, nous choisissons d'utiliser les schémas numériques d'ordre élevé à l'ordre 8 pour les flux convectifs et visqueux. Les schémas de paroi sont des schémas décentrés à l'ordre 2 sur trois points. Le schéma d'intégration temporelle choisi est le schéma RK3-TVD. Les filtres numériques d'ordre élevé sont employés et le coefficient de dissipation est défini à $a_f = 0.2$. Le schéma de capture de choc ANAD est employé avec le senseur de Ducros amélioré donné en Eq. 2.78.

4.2.2 Solution stationnaire

La convergence du calcul est obtenue après environ 60000 itérations. Nous comparons nos résultats aux simulations réalisées par LEFIEUX (2020) avec un schéma

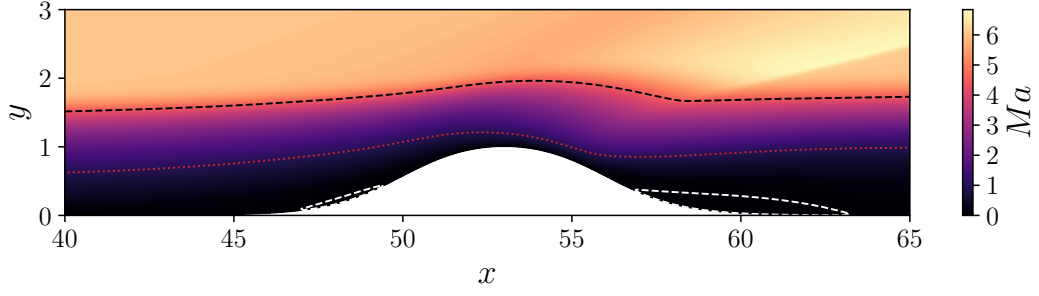


FIGURE 4.3 : Vue au plan $z = z_r$ du champ de Mach M . Tirets blancs : contours de $u < -10^{-5}$; tirets noirs : couche limite à $u = 0.99u_\infty$; pointillés rouges : ligne sonique $Ma = 1.0$

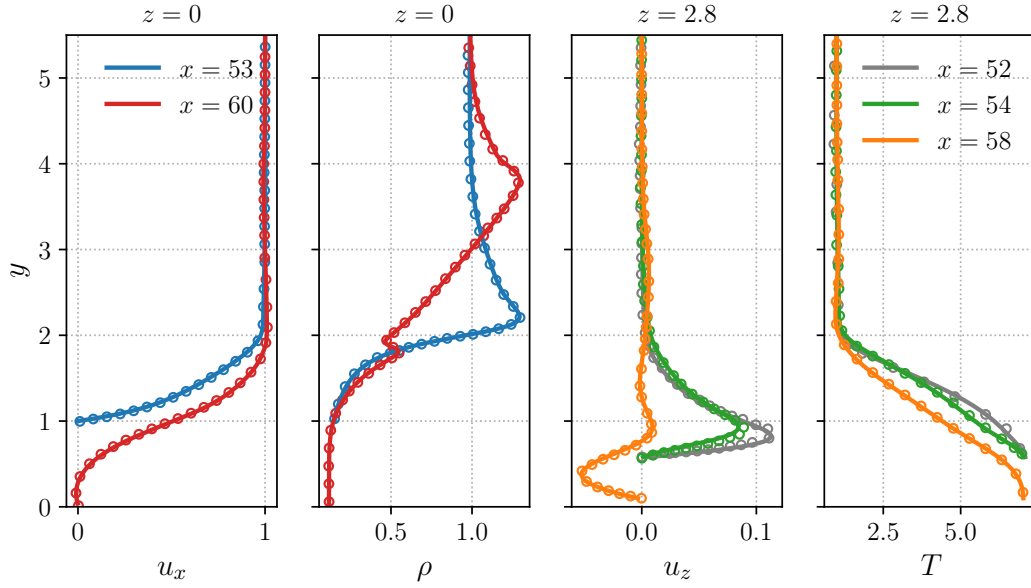


FIGURE 4.4 : Comparaison entre CurviCREAMS (traits pleins) et le calcul de référence de LEFIEUX, GARNIER et SANDHAM (2019) (marqueurs) pour divers profils de l'écoulement autour de l'élément de rugosité

AUSM+ pour le code elsA et un schéma WENO5-Z pour OpenSBLI. Les résultats obtenus avec ces deux codes dans l'étude de référence étant très similaires, nous ne les distinguons pas sur les courbes présentées. Nous obtenons un écoulement laminaire autour de l'élément de rugosité. La couche limite dans le plan central (x, y) à $z = z_r$ est présentée en Fig. 4.3 sur laquelle nous pouvons observer le champ de nombre de Mach. La déformation de la couche limite est visible et deux poches de recirculation sont remarquables en amont et en aval de la rugosité. Ces poches de recirculation sont à l'origine des lignes de vorticité qui produisent les streaks² de sillage. La topologie de l'écoulement obtenue est qualitativement identique à celle obtenue par les études de références. Une analyse plus détaillée des profils de l'écoulement pour diverses positions autour de l'élément de rugosité est

² Les streaks sont ici simplement définies comme des perturbations de vitesse axiale dans la direction de l'écoulement.

effectuée et présentée en Fig. 4.4. Nous traçons sur cette figure les profils de l'écoulement au sommet de l'élément de rugosité et dans la poche de recirculation en $x = 53$ (bleu) et $x = 60$ (rouge) pour $z = 0$. Nous ajoutons également les profils de l'écoulement sur la zone latérale de la rugosité en $z = 2.8$ (gris, vert, puis orange). Ces trois profils permettent d'évaluer l'évolution des grandeurs avec la déviation des lignes de courant imposée par la géométrie.

De façon générale, le très bon accord de la solution DNS du code CurviCREAMS en lignes continues avec l'ensemble des profils repris de la référence en marqueurs ne laisse pas d'ambiguïté sur la capacité du code à simuler cet écoulement hypersonique laminaire. Particulièrement, les profils de vitesse axiale u_x et masse volumique ρ pris dans l'axe de la rugosité confirment la bonne capture des ondes de choc faibles et des variations du profil de couche limite imposé par la rugosité. Un regard porté sur les profils de vitesse u_z pris en $z = 2.8$ nous montre également le bon calcul de la composante de vitesse transverse issue de la déviation de l'écoulement. Enfin, les profils de température de la paroi adiabatique sont en très bon accord avec ceux issus des codes de référence.

Cette simple étude nous permet de valider la capacité du code CurviCREAMS à simuler l'écoulement de base d'une couche limite hypersonique autour d'un élément de rugosité. Cette validation confirme également une cohérence des différents codes pour la restitution de la solution des équations sur cette configuration. Ces résultats confortent la mise en place des DNS de sillages transitionnels de rugosités isolées abordés par la suite.

4.3 RUGOSITÉ ISOLÉE À $Re_{\delta^*} = 28000$

Dans la continuité des travaux de DE TULLIO et SANDHAM (2015), EYNDE (2015), LEFIEUX (2020) et TULLIO et al. (2013), nous reprenons un régime d'écoulement identique au Chapitre 3, correspondant également à la configuration proposée par LEFIEUX, GARNIER et SANDHAM, 2019. À ce régime, l'élément de rugosité est critique, avec $Re_{kw} = 1600$ et son sillage agit comme un système amplificateur donnant lieu à la croissance d'instabilités convectives. L'étude de cette dernière référence trouve un mode de sillage dominant, symétrique à $f = 0.14$. Ce mode est obtenu par réponse à une perturbation impulsionnelle. Nous cherchons à vérifier si ce mode reste dominant pour un forçage continu large bande et nous discutons la dynamique obtenue.

4.3.1 Configuration générale

Nous savons des études précédentes que pour le cas étudié ici à $Re_{\delta^*} = 28000$, le sillage généré par l'élément de rugosité devient transitionnel avant la condition de sortie à $x = 80$. Nous choisissons d'étendre cette condition de sortie à $x = 100$ pour prolonger le développement de l'écoulement vers la turbulence. Une vue d'ensemble de ce domaine de calcul est présenté en Fig. 4.5. Similairement à la configuration du Chap. 3, ce dernier domaine est séparé entre une zone d'analyse

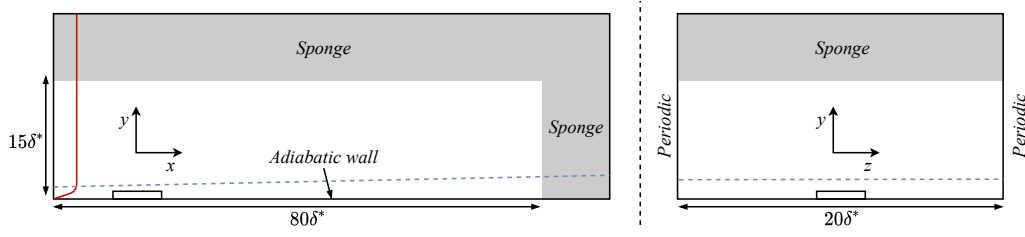


FIGURE 4.5 : Domaine d'analyse du cas de rugosité à $Re_{\delta^*} = 28\,000$. Gauche : plan (x, y) à $z = z_r$. Droite : plan (y, z) à $x = x_r$

et deux zones éponges permettant d'amortir et limiter les réflexions de perturbations sur les conditions aux limites. Le domaine d'analyse est choisi de dimensions $L_x \times L_y \times L_z = 100 \times 15 \times 40$, ces deux dernières longueurs sont identiques à l'étude précédente. L'élément de rugosité est positionné en amont du domaine, avec un centre situé aux coordonnées $(x_r, z_r) = (20, 0)$. Les autres conditions aux limites sont similaires à celles choisies pour la configuration de plaque plane du Chap. 3. Nous avons en entrée l'injection d'un profil autosimilaire de couche limite compressible. Les conditions de sorties hautes et aval sont définies par une extrapolation à l'ordre 4 des champs amortis par les zones éponges. Comme indiqué précédemment, la direction transverse est une direction périodique. Il faut noter que la longueur étendue de la direction transverse z permet de limiter les effets induits par la rugosité pour les conditions de périodicité.

4.3.2 Géométrie et méthodes numériques

Nous étudions un élément de rugosité cylindrique avec une courbure régulière et un sommet plat tel que défini initialement par EYNDE, 2015. Cette surface régulière facilite la génération d'un maillage conforme autour de l'élément de rugosité et assure la bonne régularité de la transformation curviligne.

Les équations paramétriques donnant le profil d'une rugosité de hauteur k sont données en Eq. 4.2. La courbure S est définie telle que $S = \cot S^*$, $S^* \in [0, \pi/2]$, nous choisissons ici $S^* = \pi/4$. Le paramètre de diamètre est défini à $W = 6$.

Nous partons d'un maillage structuré uniforme de directions (ξ, η, ζ) dans le repère cartésien (x, y, z) . Le nombre de points est choisi en accord avec les études précédentes sur cette configuration. Le choix de la discrétisation pour est basé sur la convergence en maillage de LEFIEUX (2020). Cette étude de convergence est réalisée pour un écoulement à $Re_{\delta^*} = 40\,000$, supérieur au nombre de Reynolds considéré dans des présentes simulations. Le maillage est étudié avec un schéma à l'ordre 4 et converge pour un grille de taille $N_i \times N_j \times N_k = 1800 \times 300 \times 450$. La grille obtenue garantit : $\Delta y_{max}^+ < 1.2$ dans le domaine pour $Re_{\delta^*} = 40\,000$. Suite à ce résultat et considérant le nombre de Reynolds réduit de notre étude ainsi que les schémas à l'ordre 8 utilisés dans CurviCREAMS, nous choisissons de mener notre étude sur une grille définie par $N_i \times N_j \times N_k = 2000 \times 300 \times 400$ points pour notre domaine d'analyse de taille $L_x \times L_y \times L_z = 1000 \times 15 \times 40$. Nous ajoutons à cette grille du domaine d'analyse, $N_{\xi, sponge} = 100$ points dans la direction aval et

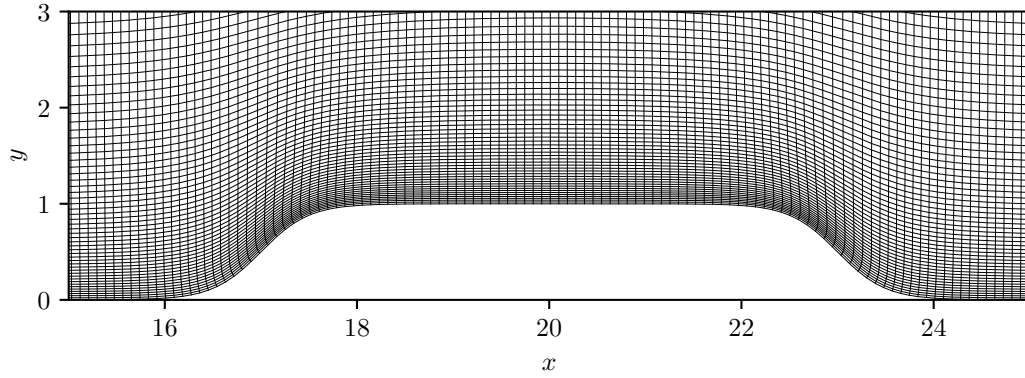


FIGURE 4.6 : Maillage conforme autour de la rugosité à $z = z_r$. Une ligne de maillage sur deux est présentée dans les directions i et j .

$N_{\eta, \text{sponge}} = 35$ points pour $y > 15$. Ces deux zones éponges sont définies par un étirement exponentiel de facteur respectif 1.02 et 1.05. L'ajout des zones éponges mène à un domaine de taille totale : $L_x \times L_y \times L_z = 115 \times 33 \times 40$.

Ce maillage est ensuite déformé dans la direction normale à la paroi avec la surface paramétrée donnée en Eq. 4.2. Une fois la surface de la paroi obtenue, la distribution des points pour la coordonnée y dans la direction η et donnée ci-dessous.

$$y_j = y_0 + (L_y - y_0) \frac{\sinh(b_y \eta)}{\sinh(b_y)} \quad (4.5)$$

$$\eta(j) = j/Ny, \quad j \in [0, Ny]$$

Le raffinement progressif du maillage proche de la paroi est contrôlé par le paramètre b_y choisi ici à $b_y = 4.0$. La grille conforme définie de la sorte n'est pas normale à la paroi. Pour garantir cette bonne propriété, nous appliquons alors un lissage itératif permettant d'obtenir un maillage régulier et normal à la surface y_0 en maintenant l'espacement donné par $b_y = 4$. Une coupe de l'élément de rugosité obtenu et le maillage conforme associé sont présentés en Fig. 4.6.

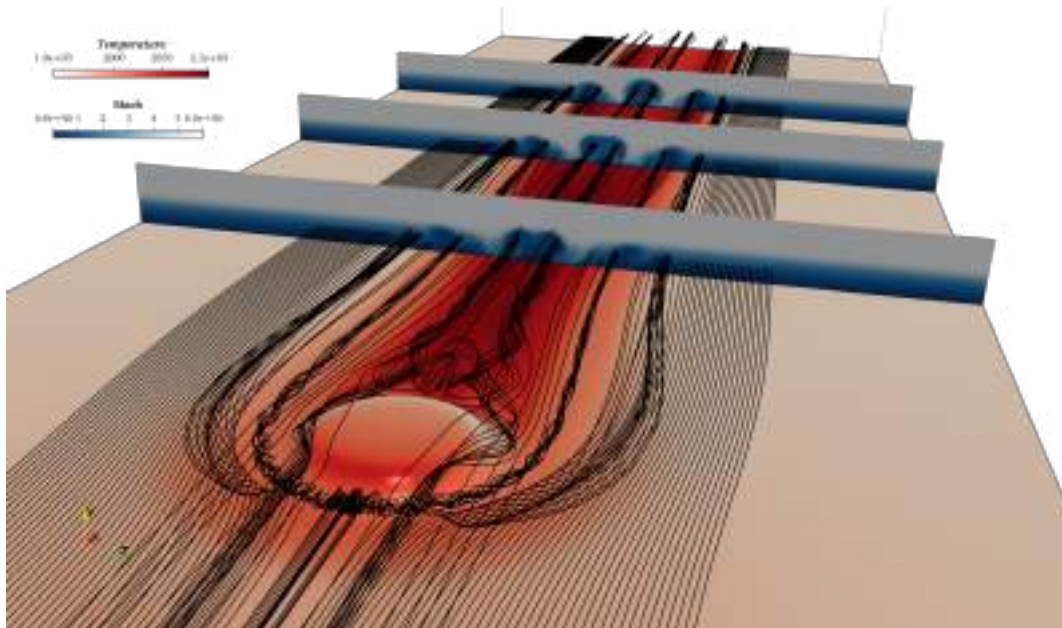
Dans le tableau 4.2, nous rappelons les paramètres principaux de l'analyse. Les schémas numériques employés pour le calcul de l'écoulement de base reprennent ceux du cas de validation étudié précédemment. Nous utilisons donc des schémas centrés à l'ordre 8, couplés au schéma temporel RK3-TVD et à la capture de choc ANAD associée au senseur amélioré. L'écoulement de base stationnaire $\bar{q}(\mathbf{x})$ est obtenu en environ 60000 itérations avec un calcul à CFL 0.8, nous le présentons dans la section suivante.

4.4 ÉCOULEMENT DE BASE

Une vue générale de la solution stationnaire $\bar{q}$ obtenue est présentée en Fig. 4.7. Nous remarquons un ensemble complexe de structures tourbillonnaires qui émergent de la zone amont et entraînent la déformation de l'écoulement. Cette déformation

Paramètres	Valeurs
Re_{δ^*}	28 000
Re_{kw}	1600
M_∞	6.0
T_∞	273.15K
$L_x \times L_y \times L_z$	$115 \times 33 \times 40$
$N_x \times N_y \times N_z$	$2100 \times 335 \times 400$
k	$1.0\delta^*$

TABLE 4.2 : Paramètres principaux de l'analyse

FIGURE 4.7 : Vue générale de l'écoulement hypersonique laminaire autour de l'élément de rugosité. Champ de température dimensionnée à la paroi. Champs de Mach aux positions $x = [40, 60, 80]$

est particulièrement remarquable dans le sillage. En lien, nous remarquons un échauffement important de la paroi dans l'axe de la rugosité. Dans cette section, nous proposons de discuter la topologie de l'écoulement hypersonique autour de l'élément de rugosité.

4.4.1 Déformation de la couche limite

En Fig. 4.8 nous montrons le champ de nombre de Mach dans le plan (x, y) à $z = 0$. Nous ajoutons également les lignes de courant évoluant sur ce plan en blanc. Un élément caractéristique de cet écoulement est la présence d'une onde de compression au sommet de la rugosité en $x = 17.5$ suivie par une onde de détente sur la courbure descendante en $x = 22.5$. Associées à cette onde de compression,

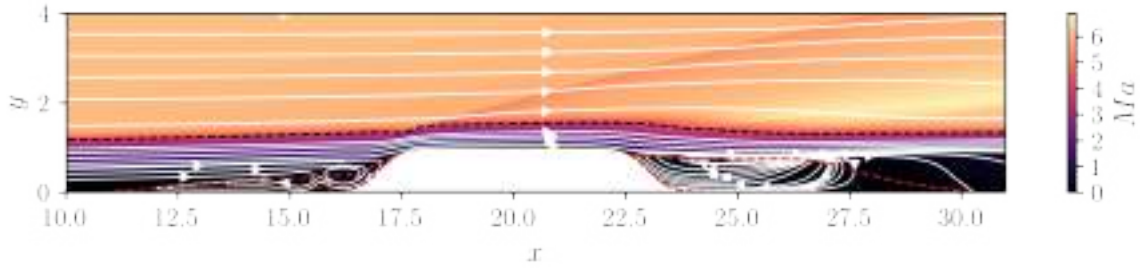


FIGURE 4.8 : Champ de nombre de Mach et lignes de courant (u_x, u_y) (blanc) dans le plan (x, y) à $z = z_r$. Tires rouges : poche de recirculation $u_x = 1 \times 10^{-5}$

nous remarquons deux zones de recirculation matérialisées en tires rouges. Ces zones de recirculations ont des longueurs correspondant à celles retrouvées par LEFIEUX (2020), à savoir $L \approx 7.5$ pour la bulle avant et $L \approx 8$ pour la bulle arrière. La zone de recirculation avant contient un jeu de trois tourbillons successifs donnant naissance à une ligne de vorticité s'enroulant autour de l'élément de rugosité pour donner lieu à aux structures tourbillonnaires de sillage observées en Fig. 4.8. Le nombre de tourbillons et leur organisation évolue avec le nombre de Reynolds amont (BAKER, 1979) et peut entraîner un comportement oscillatoire du sillage (SUBBAREDDY, BARTKOWICZ et CANDLER, 2014). Nous remarquons dans la poche de recirculation aval une seconde zone tourbillonnaire. Les lignes de courant nous indiquent la présence d'une zone cisailée au sommet de cette zone. Ce cisaillement favorise l'instabilité du sillage (TULLIO et al., 2013) et a été montrée comme étant le seuil d'une instabilité absolue à $Re_{\delta^*} = 40000$. L'origine suggérée de cette instabilité serait l'interaction du choc amont avec le réseau tourbillonnaire avant induisant un forçage auto-entretenu de la zone de cisaillement vertical arrière (LEFIEUX, GARNIER et SANDHAM, 2019). Nous rappelons que pour notre nombre de Reynolds $Re = 28000$ aucune instabilité absolue n'est montrée et nous considérerons uniquement des instabilités convectives dans le sillage de l'élément de rugosité.

La déformation de la couche limite dans le sillage calculé ici est présentée pour les diverses composantes du vecteur des vitesses en Figs. 4.9 et 4.10. Nous choisissons quatre plans (y, z)  quidistants dans la direction aval en commençant à $x = 24$ jusqu'à la fin du domaine à $x = 100$. L'évolution de structure du sillage est particulièrement visible en Fig. 4.9 pour le champ de vitesse u_x où nous observons le développement d'un écoulement déformé symétrique. Au plan $x = 24$ situé légèrement après l'élément de rugosité, nous mat rialisons la poche de recirculation en rouge, celle-ci est contenue dans une zone d'enroulement de l'écoulement matérialisée par le système tourbillonnaire en $z = -2.5$ et $z = 2.5$. Ce système tourbillonnaire est complété par les lignes de vorticité issues de la poche de recirculation avant. Ces lignes de vorticité amènent aux déformations de la couche limites visibles en $z = \pm 4$ et $z = \pm 6$. Le développement aval de l'écoulement entraine alors l'émergence rapide d'un tourbillon "mushroom shaped" caractéristique du sillage des rugosités critiques (CHOUDHARI et al., 2017). Comme décrit

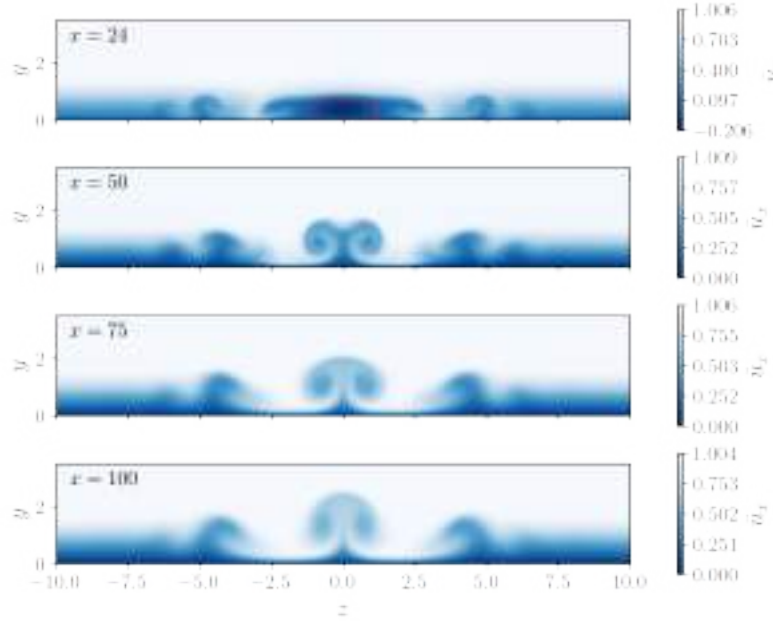


FIGURE 4.9 : Coupes du champ de vitesse u_x pour divers plans $(y - z)$ dans le sillage. Tirets rouges : poche de recirculation $u_x = 1 \times 10^{-5}$

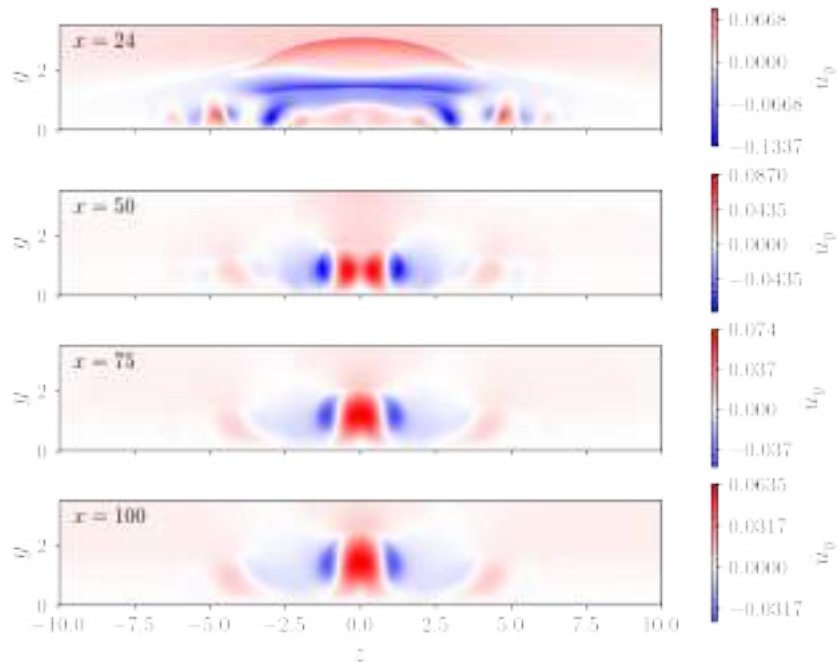
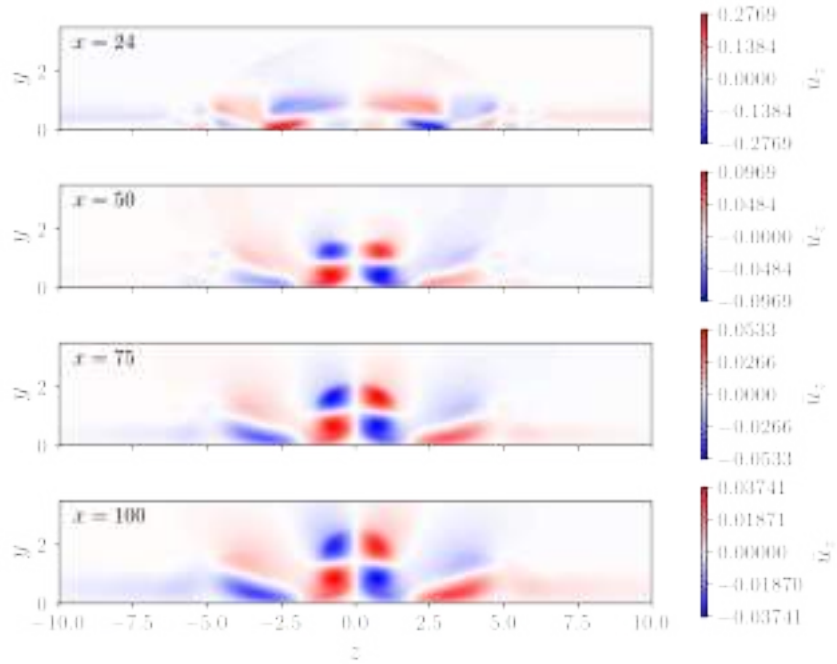
précédemment, ces deux tourbillons contrarotatifs forment le support principal des instabilités convectives derrière la rugosité.

Un regard plus détaillé de la structure du sillage est donné avec les Figs. 4.10a & 4.10b, sur lesquelles nous pouvons observer respectivement l'évolution des composantes $\bar{u}_y$ et $\bar{u}_z$ de $\bar{q}$. Le champ de vitesse $\bar{u}_y$ illustre clairement le mouvement vertical de fluide proche de la paroi. Toujours pour le champ de vitesse $\bar{u}_y$ en $x = 24$, nous remarquons pour les valeurs $1 < y < 3$ la structure de l'onde de choc courbe (rouge) et de l'onde de détente (bleue) issues de la rugosité au-dessus de la poche de recirculation. La présence de l'onde de choc courbe modifie le contenu fréquentiel initialement injecté dans le domaine et donc le forçage du sillage de la rugosité (CERMINARA, 2017; MA et ZHONG, 2003a).

La comparaison des champs de $\bar{u}_y$ et u_z montre également une amplification de l'amplitude des mouvements verticaux et latéraux de l'écoulement dans le sillage. Ces distributions de vitesses induisent des efforts de cisaillement et une vorticité supplémentaire favorisant l'instabilité du sillage. Nous caractérisons l'évolution des cisaillements latéraux $\partial \bar{u}_x / \partial z$ et verticaux $\partial \bar{u} / \partial y$ en fonction de l'amplitude du sillage A_{su} réadaptée d'après DE TULLIO et SANDHAM (2015),

$$A_{su} = \frac{1}{2} \left(\max_y \{u_b(z=0) - u_b(z=z_{\max})\} - \min_y \{u_b(z=0) - u_b(z=z_{\max})\} \right). \quad (4.6)$$

L'évolution de ces grandeurs peut être observée en Fig 4.11. L'amplitude du sillage généré par l'élément de rugosité se situe dans l'intervalle $0.17 \leq A_{su} \leq 0.32$ avec la mesure employée. Une comparaison directe avec LEFIEUX (2020) ne peut pas être faite dans la mesure où cette dernière étude a utilisé une approche spécifique

(a) Composante u_y (b) Composante u_z FIGURE 4.10 : Coupes du champ de vitesse u_y et u_z pour divers plans ($y - z$) dans le sillage.

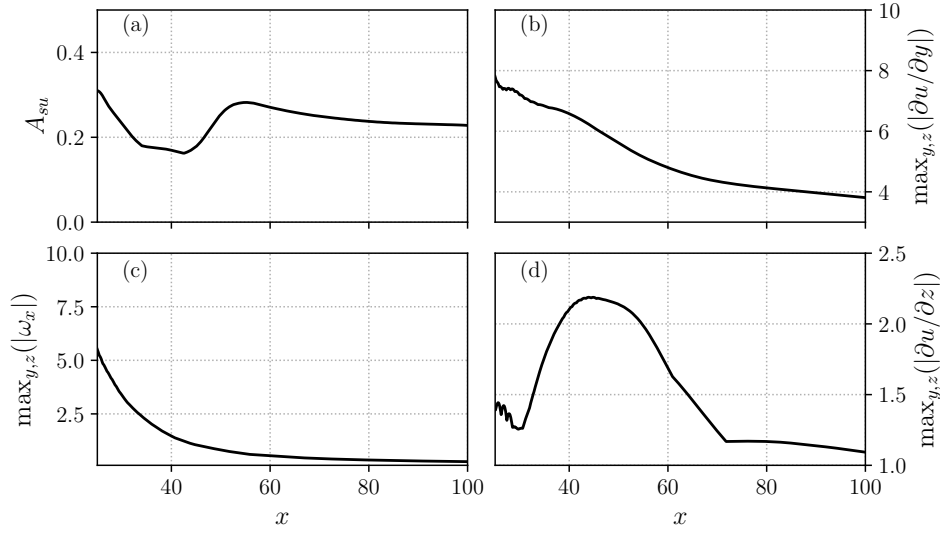


FIGURE 4.11 : Évolution de l'amplitude, des taux de cisaillement et de la vorticité ω_x dans le sillage.

pour extraire les streaks, que nous ne pouvons pas reproduire. Cependant, les valeurs de A_{su} sont proches de celles données par DE TULLIO et SANDHAM (2015) et EYNDE (2015) sur des configurations similaires. La diminution lente de l'amplitude du système tourbillon-streak suggère que cette déformation se propage sur une longue distance derrière l'élément de rugosité. DE TULLIO et SANDHAM (2015) retrouve asymptotiquement une décroissance exponentielle de l'amplitude d'un facteur $\alpha_{A_{su}} = -0.014x$. En lien avec l'amplitude de déformation mesurée, nous remarquons également les variations importantes des efforts de cisaillement (Figs. 4.11b-d) juste derrière l'élément de rugosité lors de la formation du sillage. Nous remarquons particulièrement que la composante $\partial\bar{u}/\partial y$ domine en amplitude la composante $\partial\bar{u}/\partial z$. Cette dominance du cisaillement verticale favorise l'amplification des modes symétriques devant celle des modes anti-symétriques (ANDERSSON et al., 2001). Les efforts de cisaillement entament une décroissance monotone après $x = 70$, cette décroissance est retrouvée également avec le taux de vorticité qui décroît exponentiellement avec la distance à la rugosité (Fig. 4.11c)

La forte contrainte de cisaillement $\partial\bar{u}/\partial z$ entre $40 < x < 50$ en Fig. 4.11d se traduit par un échauffement important de la paroi entre ces points visible avec la zone rouge foncé du sillage en Fig. 4.12.

L'écoulement de base ainsi caractérisé est utilisé pour évaluer la sensibilité des modes de la couche déformée à un forçage large bande par bruit blanc.

4.4.2 Propriétés de stabilité connues

Afin de supporter l'analyse des calculs DNS et LDNS à venir, nous rappelons les résultats de stabilité 2D obtenus sur cette configuration. Aucun calcul de stabilité

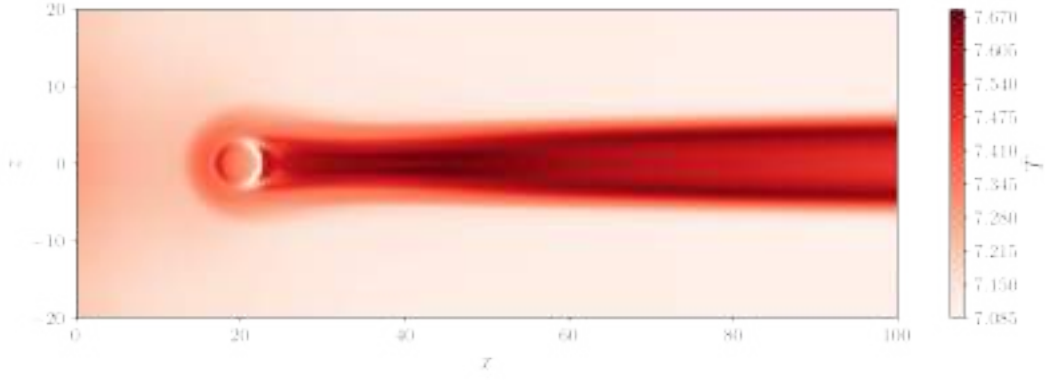


FIGURE 4.12 : Champ de la température $\bar{T}$ de l'écoulement de base stationnaire à la paroi $y = y_0$.

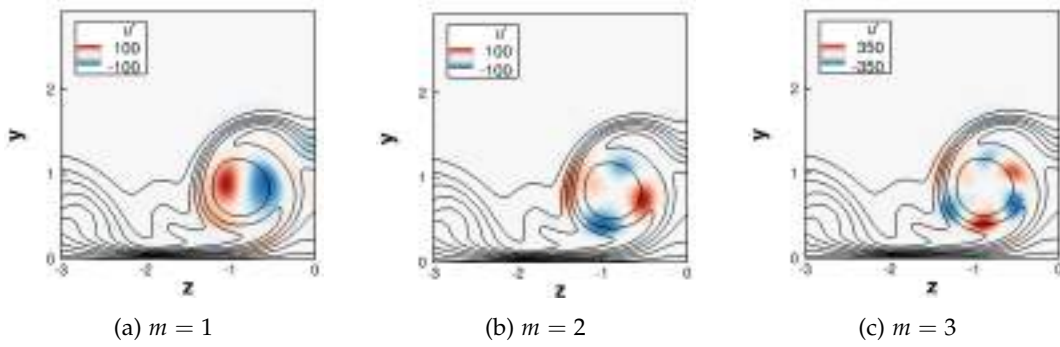


FIGURE 4.13 : Champs de vitesse axiale u'_x à $x = 65$, des fonctions propres des modes hélicoïdaux symétriques. Issue de LEFIEUX (2020)

n'est réalisé dans cette section, nous ne faisons que reporter les résultats obtenus par LEFIEUX (2020) avec une analyse LST-2D spatiale.

Ces résultats sont obtenus à la position $x = 65$ pour un demi-plan $(y - z)$ de l'écoulement, tel que $z \in [0, z_{\max}]$. Une condition de symétrie/anti-symétrie appliquée au plan $z = 0$ permet alors de distinguer les modes respectant l'une ou l'autre condition.

Parmi les modes instables de la couche limite hypersonique dans nos conditions, nous retrouvons le premier mode de Mack et le second mode de Mack discutés dans le Chap. 3. Avec l'ajout du sillage, de nouveaux modes dit hélicoïdaux sont instables. Ils sont issus des zones de cisaillement du sillage contrarotatif. Ces derniers sont présentés pour le champ de vitesse axial en Fig. 4.13. Nous ne présentons ici que les modes symétriques, les modes anti-symétriques étant de forme identique et simplement anti-symétrique par nature autour de l'axe $z = 0$.

Nous remarquons que la perturbation de vitesse est concentrée au sein du tourbillon central et autour de la ligne de vorticité ω_x associée. Les fluctuations présentent un motif en spirale, périodique. Avec l'augmentation de la fréquence ω le nombre de motifs augmentent et nous pouvons classer les modes h lico idaux par la p riodic t  de ce motif. Avec $m = 1$ pour une alternance positive/négative de

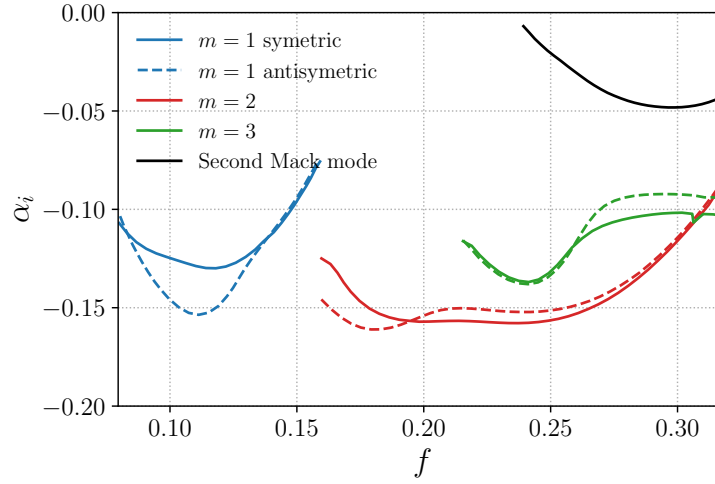


FIGURE 4.14 : Taux d'amplification spatial des modes dominants à $x = 65$ en fonction de la fréquence. Calculé par LST-2D localement parallèle. Retrécée depuis LEFIEUX (2020)

vitesse de perturbation (Fig. 4.13a), $m = 2$ pour deux motifs (Fig. 4.13b), $m = 3$ pour trois motifs (Fig. 4.13c) et ainsi de suite.

Ces modes sont instables pour diverses fréquences. Pour référence, nous retraçons la courbe de LEFIEUX (2020) en Fig. 4.14. Sur cette figure, nous pouvons suivre l'évolution du taux d'amplification spatiale α_i des modes hélicoïdaux en fonction de la fréquence $f = \omega / (2\pi)$. Notons que l'adimensionnement employé par l'étude citée est identique à celui de la présente étude et donc les taux d'amplification sont comparables à ceux des courbes calculées dans le Chap. 3 pour les modes de la plaque plane homogène.

Les modes hélicoïdaux présentent trois régimes successifs, dominés par le mode $m = 1$ entre $0.08 < f < 0.17$, puis le mode $m = 2$ pour $0.17 \leq f < 0.31$ et enfin, le mode $m = 3$ pour $f > 0.31$. En supplément, nous pouvons aussi remarquer une alternance de la dominance des modes symétriques ou anti-symétriques en fonction de la fréquence. Leur amplification est bien plus importante que celle du second mode de Mack en noir. Le mode le plus instable de la LST-2D locale dans ces conditions est le mode hélicoïdal $m = 2$ anti-symétrique pour $f = 0.17$.

Ces instabilités identifiées par LEFIEUX (2020) serviront à l'identification des structures cohérentes retrouvées dans la DNS. Pour faciliter la lecture des sections suivantes, nous noterons AH^k le mode hélicoïdal antisymétrique à $m = k$ et SH^k sa contrepartie symétrique. Le second mode de Mack sera noté MM.

4.5 RÉPONSE À UN FORÇAGE PAR BRUIT BLANC

Nous utilisons l'état $\bar{q}$ obtenu pour réaliser un calcul DNS et un calcul LDNS du forçage de l'écoulement autour de la rugosité par un bruit blanc d'amplitude $A_f = 10^{-2}$. La méthodologie employée reprend celle développée au Chap. 3. Parti-

culièrement, le vecteur de forçage $\mathbf{q}_f$ est identique et est appliqué dans un volume de forçage en entrée du domaine à $x = 5$. Les solutions non-linéaires et linéaires sont échantillonnées après une période transitoire correspondant à deux temps caractéristiques de traversée de domaine. Nous redonnons les paramètres de cet échantillonnage dans le Tab. 4.3

Une comparaison avec les fréquences des modes instables remarquées en Fig. 4.13 nous confirme que l'échantillonnage choisi capture bien les fréquences de la dynamique étudiée.

Pour chaque instant t_i échantillonné, nous sauvegardons un vecteur de la forme,

$$\mathbf{q}_i = (\rho \quad u_x \quad u_y \quad u_z \quad T)^T. \quad (4.7)$$

Les bases de données issues des deux simulations représentent un total de 28To de données brutes. Pour commencer l'analyse de cette base de donnée, nous présentons dans la prochaine section la dynamique observée à instant $t = t_f$.

4.5.1 Champs de perturbations

Les dynamiques linéaires et non-linéaires sont étudiées pour obtenir une première estimation du mécanisme de transition observé. L'application du forçage acoustique déclenche l'amplification d'instabilités dans le sillage de la rugosité. Ces dernières sont observables en Fig. 4.15a-b où nous pouvons suivre la déstabilisation progressive de l'écoulement à compter de $x = 50$ dans le sillage. Une oscillation progressive de l'écoulement basse vitesse (noir) en $z = 0$ est convectée vers l'aval. L'instabilité du sillage mène à des structures tourbillonnaires nettement visibles sur le gradient de pression (Fig. 4.15). Cette première observation nous permet d'apprécier l'état transitionnel du sillage. Il reste cependant difficile depuis cette figure de discerner un mouvement symétrique ou anti-symétrique caractéristique des instabilités citées auparavant.

Pour mieux percevoir la direction de ces oscillations, nous calculons les champs de perturbations : $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) - \bar{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ pour la DNS et nous les comparons avec le champ de perturbation linéaire : $\mathbf{q}'_L(\mathbf{x}, t)$ issu de la LDNS. Les vecteurs de vitesse de perturbation latérale u'_z sont donnés en Fig. 4.16. La comparaison de ces deux champs nous permet de remarquer visuellement la différence importante entre le champ de perturbation linéaire et le champ non-linéaire. Cette différence

N_{snap}	1300
t_s^*	$0.3869\mu s$
t_f^*	$500.3\mu s$
f_s	1.3
f_c	0.65
f_{min}	0.001

TABLE 4.3 : Paramètres d'échantillonnage

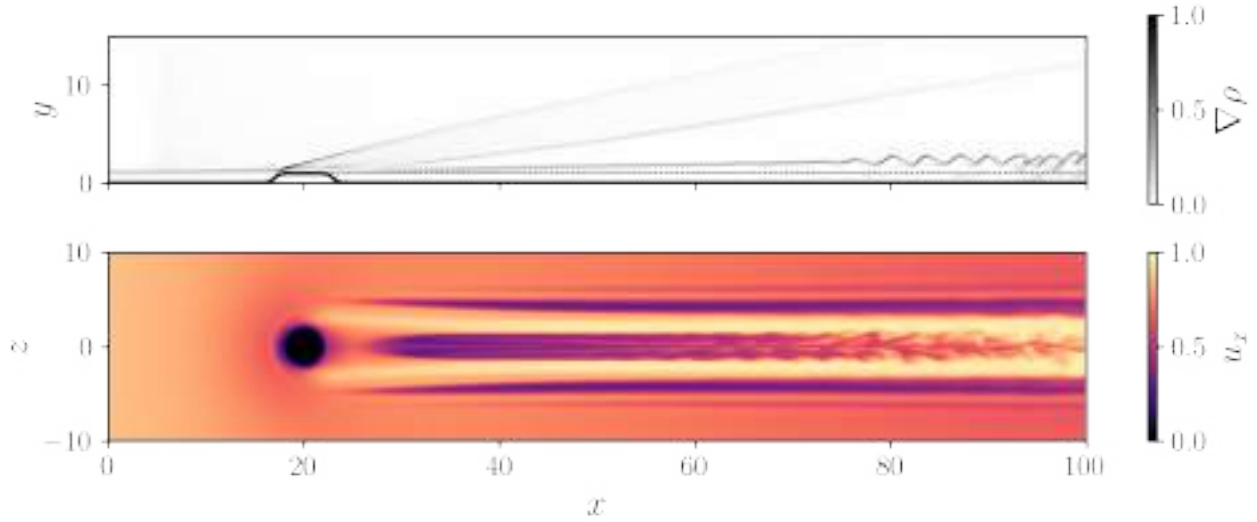


FIGURE 4.15 : Plan (x, y) à $z = z_r$ du gradient de densité (haut), la ligne pointillé représente la hauteur $y = \delta^*$. Instantané du champ de vitesse u_x à $y = \delta^*$ (bas)

est marquée par la croissance initiale plus rapide des perturbations de la DNS, qui deviennent observable plus tôt vers $x \approx 40$ et autour de $x \approx 60$ dans la LDNS. L'amplification plus rapide des perturbations dans le cas non-linéaire peut laisser suggérer d'éventuels effets non-linéaires dans la réceptivité qu'il faudra caractériser.

Dans le calcul linéaire, les perturbations amplifiées restent centrées autour de l'axe $z = 0$, autour de la streak centrale. Pour le calcul non-linéaire, nous observons une propagation rapide des perturbations de la streak centrale vers les streaks latérales.

Un regard plus attentif autour de l'axe $z = 0$ pour la solution linéaire nous permet de remarquer une distribution de vitesse u'_z majoritairement anti-symétrique vers $x = 70$, puis progressivement symétrique vers $x = 90$. Cette variation suggère un changement de mode dominant dans le régime linéaire. La même analyse pour la solution DNS est plus difficile, les mouvements de la streak centrale rendant difficile l'observation des symétries sur cette dernière. Cependant, nous pouvons remarquer une claire distribution symétrique de la vitesse u'_z sur les streaks latérales en $z = \pm 5$ pour $60 < x < 90$.

L'observation de plans différents ne permet pas de déceler une dynamique dominante pour la DNS ou la LDNS. Devant ce constat, nous proposons d'identifier les structures cohérentes de l'écoulement par une analyse dans l'espace de Fourier suivie d'une SPOD.

4.5.2 Décomposition du sillage

Avec la décomposition de l'écoulement, nous souhaitons comprendre quelles sont instabilités les plus sensibles au forçage par bruit blanc et nous souhaitons égale-

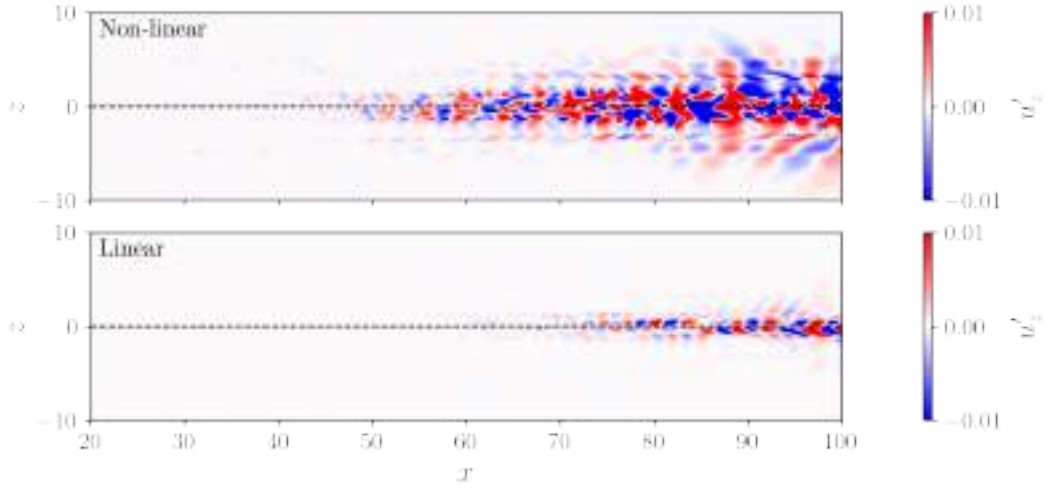
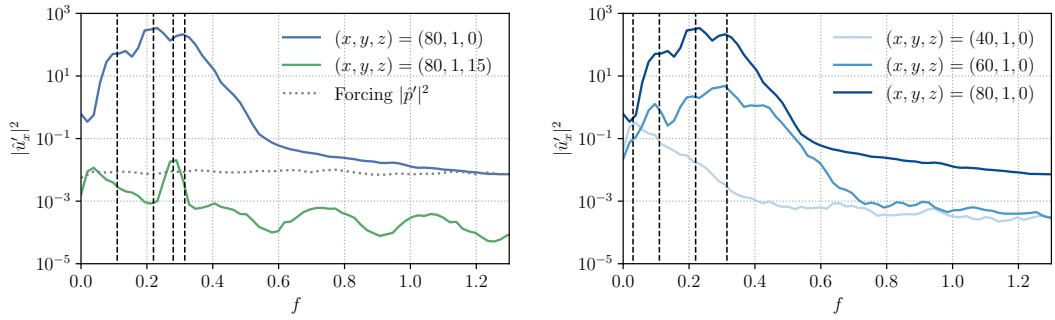


FIGURE 4.16 : Comparaison des champs de vitesse de perturbation u'_z des simulations DNS (haut) et (LDNS) bas.



(a) Sondes à $(x, y) = (80, 1)$ pour $z = z_r$ (bleu) et $z = 15$ (vert) (b) Sondes à $(y, z) = (1, z_r)$ pour trois points x successifs dans le sillage

FIGURE 4.17 : Spectres en fréquence des fluctuations de vitesse axiale $|u'_x|^2$

ment distinguer les mécanismes issus de la dynamique linéaire et de la dynamique non-linéaire.

4.5.2.1 Première estimation du contenu fréquentiel

Une première estimation du contenu fréquentiel de la dynamique linéaire peut être faite en utilisant les quelques sondes réparties autour de la rugosité. Chaque sonde correspond à un signal ponctuel $p_i(t)$ du vecteur des variables primitives de la LDNS. Pour chaque signal, nous avons un total de 216×10^3 instants. Ces signaux sont transformés dans l'espace de Fourier par la méthode Welch avec des blocs de 8192 points et un recouvrement de 50 % suivi d'un fenêtrage par une fenêtre de Hanning.

Nous décidons d'utiliser ces signaux pour obtenir une première estimation du contenu fréquentiel de la dynamique à divers points dans le sillage et dans la zone non déformée de la couche limite. En Fig. 4.17a, sont tracés les spectres de

la fluctuation de vitesse en $z = 0$ et en $z = 15$ pour $x = 80$. En complément, nous traçons en Fig. 4.17b, l'évolution du spectre du signal dans le sillage de la rugosité afin de suivre l'amplification des différents pics dans la direction aval. Enfin, sur la Fig. 4.17a, nous ajoutons en gris le spectre du forçage initial pris en $(x, y, z) = (10, 10, 0)$. Un regard rapide de la répartition de l'énergie du forçage sur les différentes fréquences nous confirme bien sa nature "bruit blanc", jusqu'à la fréquence de Nyquist choisie : $f = 0.65$.

L'analyse des spectres en fréquences obtenus en $x = 80$ pour le sillage en $z = 0$ et l'écoulement non déformé en $z = 15$, nous révèle deux dynamiques distinctes. Dans la couche limite non déformée, en vert, nous observons un pic marqué à $f = 0.28$ et un second pic basse fréquence à $f = 0.06$. Ce deux plages de fréquences correspondent respectivement à celles retrouvées pour les deux régions d'instabilité du mode S dans le Chap. 3. À savoir, le second mode de Mack et le premier mode oblique (Fig. 3.8). Ce pics d'amplitude sont 10^4 fois moins amplifiés que les perturbations localisées dans le sillage et présentées en bleu sur la Fig. 4.17a. Nous observons pour la dynamique de ce sillage, un pic large bande pour $0.05 < f < 0.6$. Celui-ci semble constitué de divers pics qu'il nous faudra séparer par calcul de la SPOD.

Pour compléter l'analyse du contenu fréquentiel dans le sillage, nous retraçons l'évolution du spectre en fréquence pour trois sondes équidistantes entre $40 < x < 80$ en Fig. 4.17b. Nous pouvons voir que le pic large centré en $f = 20$ ne semble pas s'amplifier avant $x \leq 40$. Ce dernier semble s'amplifier rapidement ensuite pour donner le pic large bande en $x = 60$. A cette position dans le sillage, nous remarquons la séparation d'un pic secondaire autour de $f = 0.12$. Cette fréquence est celle retrouvée comme la plus amplifiée par LEFIEUX, 2020. Dans le cas de notre LDNS, nous obtenons un résultat différent avec la fréquence la plus amplifiée visible à $f = 0.22$.

Cette première estimation révèle les deux dynamiques distinctes : sillage et écoulement non perturbé. De plus nous mettons en avant une réponse linéaire différente de celle retrouvée par l'étude précédente avec une fréquence dominante $f = 0.22$ dans notre cas. Cette différence peut s'expliquer par la nature du forçage appliqué. L'étude de LEFIEUX (2020) utilise une perturbation impulsionnelle de densité, produisant selon cette dernière étude, un forçage à basses fréquences. Cette approche diffère de notre cas, où nous appliquons un forçage large bande ne privilégiant pas de plage de fréquence a priori.

4.5.2.2 Spectres et modes de la SPOD à $x = 100$

Nous proposons d'investiguer cette différence et d'identifier les structures cohérentes associées aux différents pics en calculant la base orthogonale optimale de la SPOD pour les calculs DNS et LDNS.

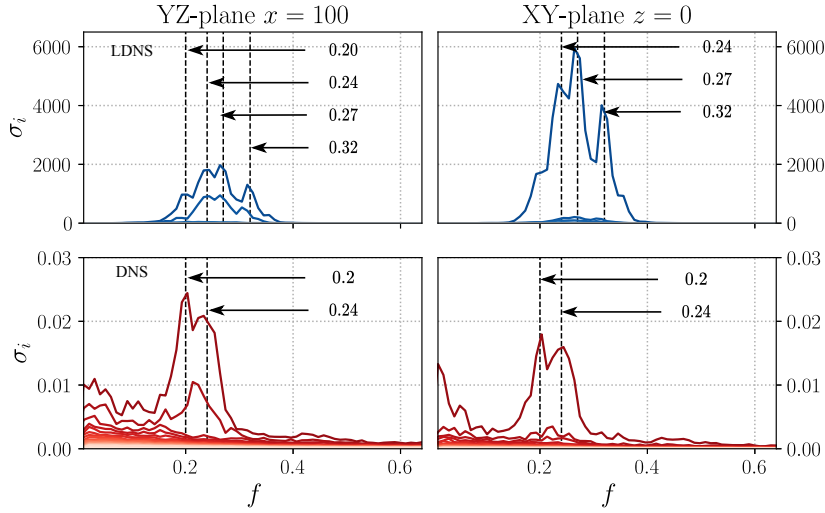


FIGURE 4.18 : Spectres en fréquence de l'énergie des valeurs propres de la SPOD pour la LDNS (bleu) et la DNS (rouge). Énergie dans le plan transverse (y, z) à $x = 100$ (gauche) et énergie dans le plan central (x, y) à $z = z_r$ (droite)

Ainsi, pour chaque échantillon non-linéaire $\mathbf{q}_i$, nous calculons le champ de perturbation associé $\mathbf{q}'_i = \mathbf{q}_i - \bar{\mathbf{q}}$ et nous constituons la matrice de la dynamique discrète,

$$\mathbf{Q}(t_i) = [\mathbf{q}'_1, \mathbf{q}'_2, \dots, \mathbf{q}'_n] \in \mathbb{R}^{N_\xi \times N_\eta \times N_\xi \times N_v \times N_t}. \quad (4.8)$$

Devant la taille de cette matrice, nous travaillerons par la suite sur des sous-ensembles de $\mathbf{Q}$ pour étudier les structures cohérentes sur des domaines plus réduits. Nous étudierons deux plans par la suite, le plan central (x, y) à $z = 0$, ainsi que les plans transverses (y, z) à diverses positions x .

Pour un plan, la matrice $\mathbf{Q}(t_i)$ écrite comme la somme de modes de Fourier en fréquence. Le calcul de cette transformée est effectué avec la méthode de Welch. Nous utilisons 20 blocs de 128 snapshots avec 50 % de recouvrement pour obtenir $\hat{\mathbf{Q}}(\omega_i)$. La matrice de densité spectrale de puissance croisée est calculée en utilisant le produit interne compressible défini par CHU (1965), donné au Chap. 3 en Eq. 3.13.

Les valeurs propres et fonctions propres de la SPOD sont calculées pour chaque fréquence de $\hat{\mathbf{Q}}(\omega_i)$. Nous donnons l'énergie de ces 20 premières valeurs propres de la décomposition pour le plan (y, z) à $x = 100$ et le plan (x, y) à $z = 0$ en Fig. 4.18. Pour mieux distinguer les fréquences dominantes du pic large bande décrit en Fig. 4.17, nous traçons l'énergie des valeurs propres en échelle linéaire.

Une première comparaison des spectres LDNS en bleu et DNS en rouge nous permet d'identifier immédiatement la présence d'un pic principal pour $0.2 < f < 0.32$. Confirmant ainsi la dominance du pic large bande identifié avec les signaux $p_i(t)$ en Fig. 4.17 et la dynamique différente de celle observée par LEFIEUX, 2020 pour notre forçage large bande. En seconde observation, nous remarquons la différence notable entre le spectre issu de la LDNS et le spectre issu de la DNS. Princi-

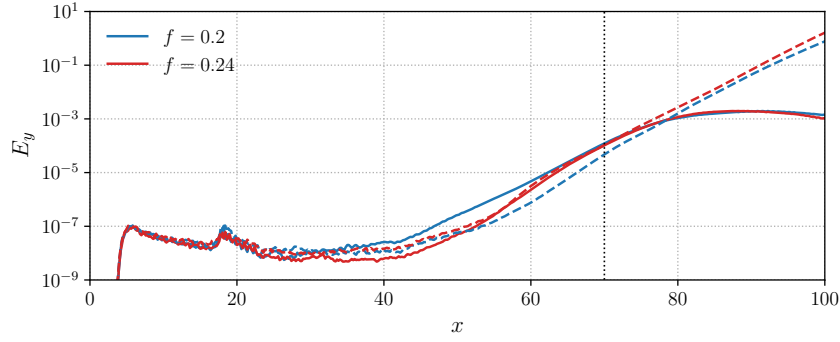


FIGURE 4.19 : Evolution de l'énergie intégrée E_y de la première valeur propre de la SPOD dans la direction x pour les fréquences dominantes $f = 0.2$ (bleu) et $f = 0.24$ (rouge). Comparaison de la DNS (plein) et de la LDNS (tirets)

palement, les pics d'énergie dominants ne se retrouvent pas aux mêmes fréquences avec $f_{\max,DNS} = 0.2$ contre. $f_{\max,LDNS} = 0.24$. Ensuite, la comparaison des niveaux d'énergie entre le plan (y, z) et le plan (x, y) , ne révèle pas la même tendance pour le spectre SPOD de la DNS et le spectre SPOD de la LDNS.

Le calcul DNS présentant un début de transition vers la turbulence, ces différences repérées pour les spectres de la SPOD peuvent être associées aux effets de la non-linéarité de la dynamique et à la saturation de l'amplitude des instabilités dans le calcul DNS.

Pour évaluer le démarrage de la dynamique non-linéaire, nous proposons de comparer l'amplification du mode $f = 0.24$ et du mode $f = 0.2$ pour les calculs DNS et LDNS. Cette amplification est mesurée avec l'amplitude d'énergie du premier mode SPOD ψ_{f_i} à la fréquence f_i choisie telle que,

$$E_y = \int_y \psi_{f_i}^H \mathbf{W} \psi_{f_i} dy. \quad (4.9)$$

L'évolution de cette mesure le long du domaine, à $z = 0$ est visible en Fig. 4.19 pour la DNS (traits pleins) et la LDNS (tirets). L'amplitude initiale de l'énergie de la LDNS est ajustée à celle de la DNS en $x = 10$.

Nous observons nettement sur la Fig. 4.19, le régime linéaire de la LDNS avec une pente d'amplification constante pour les fréquences choisies. Le départ vers le régime non-linéaire pour la DNS est matérialisé par la ligne pointillée verticale et survient en $x = 70$. Ce départ est caractérisé par la fin de l'amplification exponentielle et une zone amortie pour $x > 70$, caractéristique de la saturation des instabilités en régime non-linéaire. Nous pouvons également observer une amplification initiale plus importante de l'énergie des perturbations de DNS pour la fréquence $f = 0.2$ vers $40 < x < 60$. Cette différence vis-à-vis du calcul LDNS pourrait suggérer la présence d'un mécanisme de réceptivité non-linéaire dans le sillage de la rugosité. Nous avons pu remarquer un départ vers le régime d'amplification non-linéaire vers $x = 70$ pour le calcul DNS. Nous proposons dans la suite d'observer le spectre en fréquence de l'énergie des valeurs propres de la SPOD pour

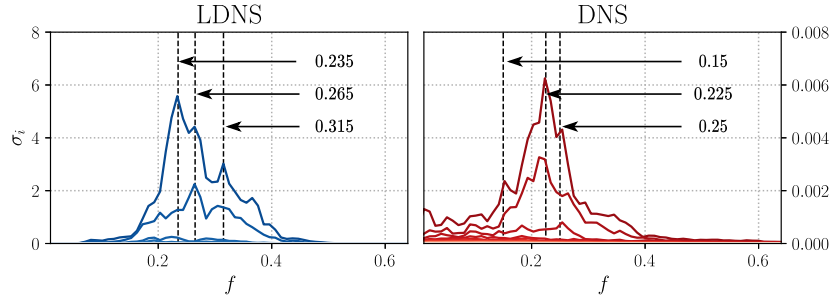
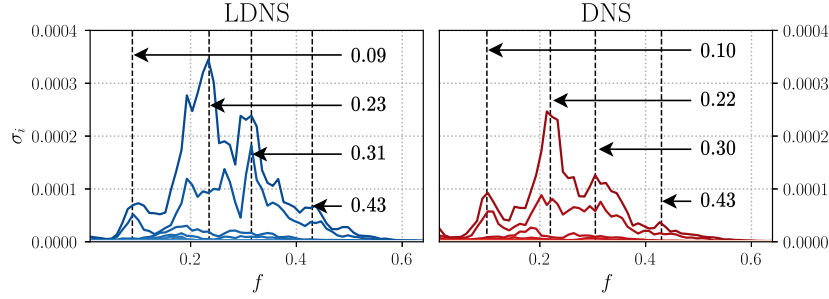
(a) Energie de la SPOD au plan (y, z) à $x = 70$ (b) Energie de la SPOD au plan (y, z) à $x = 50$

FIGURE 4.20 : Comparaison des spectres en fréquence de l'énergie des valeurs propres de la SPOD pour deux plans proches du seuil du régime non linéaire. Avec la LDNS (bleu) et la DNS (rouge)

un plan (y, z) à $x = 70$. Puis, nous identifierons les structures cohérentes associées à ces pics de fréquence, à l'aide des résultats connus de la LST-2D en Sec. 4.4.2.

4.5.2.3 Structures cohérentes au point de divergence DNS/LDNS

Le contenu fréquentiel de l'écoulement en $x = 70$ est visible en Fig. 4.20a. L'énergie des valeurs propres issues de la LDNS est présentée en bleu et celles de la DNS en rouge. À la différence des spectres en $x = 100$ (Fig. 4.18), nous retrouvons un accord entre les pics d'énergie dominants de la DNS et la LDNS. Ce pic correspond à $f = 0.235$ et cette fréquence est dans la plage d'instabilité des modes hélicoïdaux H^2 et H^3 . Les fonctions propres de la SPOD associées à ce pic d'énergie sont montrées en Fig. 4.21(a-b) pour la LDNS et 4.21(e-f) pour la DNS. Nous ajoutons que nous voyons pour cette fréquence que les deux premières valeurs propres de la SPOD ont une énergie du même ordre de grandeur. Ainsi, pour ce système que nous qualifions de rang $r = 2$, nous présentons les fonctions propres associées à la première et à la seconde valeur propre de la SPOD en Fig 4.21.

La comparaison des deux modes obtenus pour la LDNS à $f = 0.235$ aux fonction propres obtenues par LEFIEUX (2020) en Fig. 4.13 nous aide à mener l'identification. Particulièrement, la périodicité du motif hélicoïdal ($m = 1, 2, 3$), au sein de la streak est un indice utile à l'identification d'un mode MONTERO et PINNA (2021). De la sorte, l'observation des fonctions propres de la LDNS en Fig. 4.21(a-b), nous permet de confirmer que nous retrouvons deux modes hélicoïdaux de la famille

H^3 , tels qu'observés Fig. 4.13c. L'observation de la symétrie du champ de vitesse sur l'axe $z = 0$ nous indique que la fonction propre associée à la première valeur propre de la SPOD correspond au mode antisymétrique AH^3 . La seconde fonction propre et symétrique correspond ici au mode SH^3 . Cette identification est visuelle, mais nous pouvons remarquer que la comparaison des fonctions propres de la LST et de la SPOD pour cette fréquence ne laisse que peu d'ambiguïté concernant les instabilités de la LDNS.

L'évaluation de la nature des modes SPOD issus de la DNS en Fig. 4.21(e-f) est plus délicate. L'écart avec les fonctions propres de la LDNS sous-tend des effets de non-linéarité déjà présents et rend la comparaison directe avec l'analyse linéaire plus difficile. Nous pouvons cependant observer un axe de symétrie marqué avec le premier mode SPOD de nature antisymétrique et le second mode SPOD de nature symétrique. L'observation du nombre de motifs hélicoïdaux et leur comparaison à la Fig. 4.13c nous indique que ces fonctions propres correspondent plutôt aux modes linéaires hélicoïdaux de la famille H^2 . En toute rigueur, une projection bi-orthogonale du mode issu de la LST 2D et de la fonction propre nous permettrait de quantifier cette observation (TUMIN, WANG et ZHONG, 2007). N'ayant pas à notre disposition la distribution de la fonction propre issue de la LST, nous nous appuyons sur l'observation directe pour ce cas.

La même analyse portée sur le second pic d'énergie de la LDNS à $f = 0.265$ et celui de la DNS à $f = 0.256$ révèle une première fonction propre antisymétrique pour la SPOD de la LDNS et de la DNS. Hormis cette anti-symétrie, les deux fonctions propres sont de nouveau qualitativement différentes. Nous remarquons qu'avec l'augmentation de la fréquence, le réseau hélicoïdal des fonction propres de la LDNS 4.21(e-f) semble se resserrer pour tendre vers un mode $m = 4$, cet effet est visible en comparant les périodicités rouge-bleu entre les Figs. 4.21a et 4.21c. Les fonctions propres de la DNS 4.21(g-h) sont de nouveau déformées et une comparaison directe avec la LDNS nous indique qu'il s'agit ici de modes différents. Particulièrement, nous remarquons en Fig. 4.21(g) une périodicité et une distribution de la vitesse de perturbation se rapprochant d'un mode AH^3 .

4.5.2.4 Étude dans le régime linéaire à $x = 50$

La caractérisation des structures cohérentes s'avérant délicate pour le point $x = 70$, nous proposons d'effectuer la même comparaison des fonctions propres de la SPOD avec les résultats de la LST-2D en $x = 50$. En cette position dans le sillage, la croissance de l'amplitude des modes extraits par DNS et LDNS aux fréquences $f = 0.2$ ou $f = 0.24$ est comparables et présente une pente linéaire.

Le spectre en fréquence de l'énergie des valeurs propres de la SPOD est présenté en échelle linéaire sur la Fig. 4.20b. Nous observons des fréquences dominantes similaires à celles trouvées pour $x = 70$ en Fig. 4.20b, à savoir, une dominance de la fréquence $f \approx 0.23$ suivie de la fréquence $f \approx 0.31$. Pour ces pics d'énergie, nous notons que le système est de rang $r = 2$ avec 90 % de l'énergie contenue dans les deux premiers modes. Nous remarquons également un pic d'énergie de la SPOD en $f \approx 0.1$, proche de la valeur retrouvée par LEFIEUX (2020).

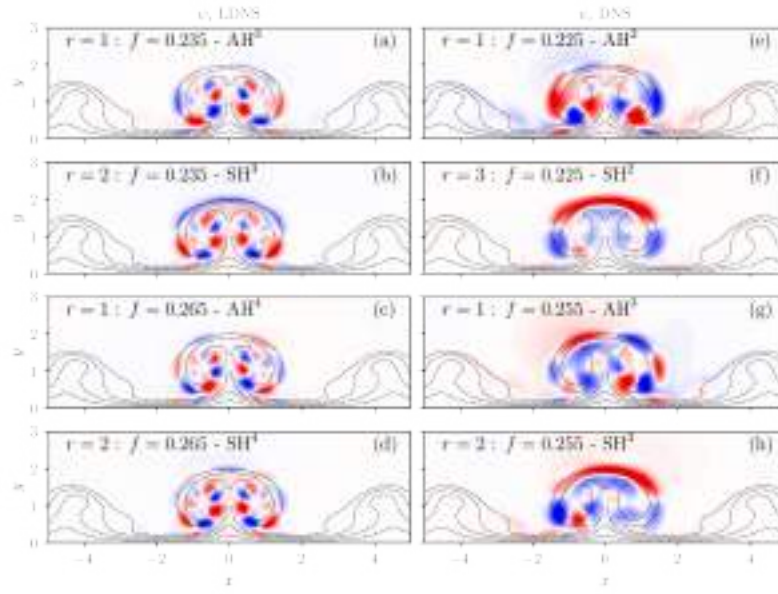


FIGURE 4.21 : Champ de vitesse u'_x des fonctions propres ψ_r des modes dominants de la SPOD à $x = 70$ pour les simulations LDNS (gauche) et DNS (droite)

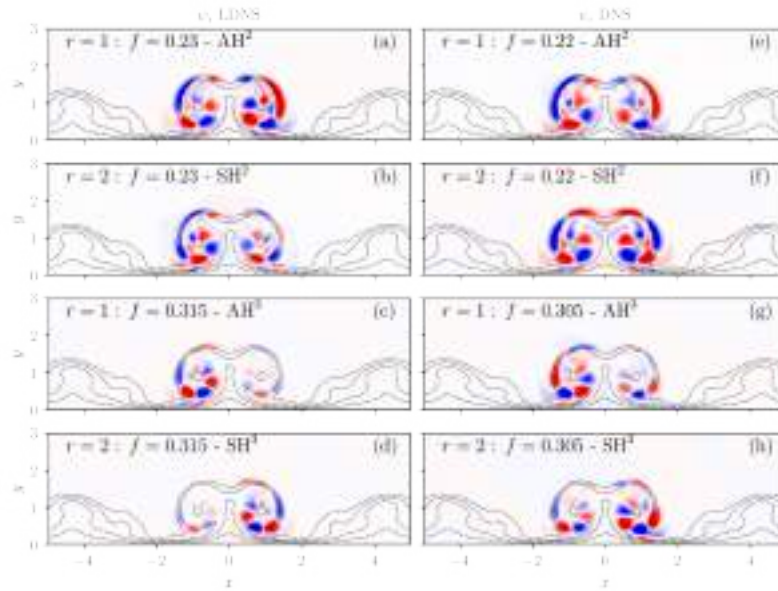


FIGURE 4.22 : Champ de vitesse u'_x des fonctions propres ψ_r des modes dominants de la SPOD à $x = 50$ pour les simulations LDNS (gauche) et DNS (droite)

Les fonctions propres de la SPOD pour les fréquences $f \approx 0.23$ et $f \approx 0.31$ sont données en Fig. 4.22. Nous retrouvons de nouveaux des modes hélicoïdaux. Les premières valeurs propres de la SPOD pour $f = 0.23$ sont associées au mode AH^2 pour les simulations DNS et LDNS. La seconde valeur propre à cette fréquence est associée au mode symétrique SH^2 . L'observation des fonctions propres des modes dominants révèle des fonctions propres difficiles à identifier nettement. Le motif hélicoïdal semble tendre vers $m = 3$, mais la symétrie est difficilement évaluable entre les modes de rang $r = 1$ et $r = 2$. La faible amplitude de ces fluctuations, de l'ordre de 1×10^{-7} , mesurée à la position $x = 50$ en Fig. 4.19 peut expliquer la difficulté trouvée à les identifier avec les fonctions propres de la LST-2D. Cette difficulté n'a pas été rencontrée pour les fonctions propres de plus grande amplitude en $x = 70$.

Enfin, l'étude des pics d'énergie de plus faible amplitude pour $f \approx 0.1$ et $f = 0.43$ révèle des modes hélicoïdaux respectivement H^2 et H^4 . L'amplification négligeable du mode à fréquence $f = 0.11$ vers l'aval est une différence importante avec l'étude de référence.

4.6 DISCUSSION ET PERSPECTIVES

Le calcul conjoint des simulations LDNS et DNS sur cette configuration nous a révélé plusieurs aspects intéressants. Ces aspects concernent principalement la réceptivité de l'écoulement et la nature des modes les plus amplifiés.

Premièrement, nous pouvons compléter les conclusions de LEFIEUX (2020) sur la nature du mécanisme de transition en jeu ici. L'application d'un forçage par bruit blanc, ne sélectionnant pas de mécanisme à priori, a révélé la dominance d'un mode hélicoïdal anti-symétrique de fréquence $f = 0.23$ avant le début du régime non-linéaire en $x = 70$, là où l'étude précédente retrouvait un mode hélicoïdal anti-symétrique à $f = 0.11$. Cette différence met principalement en avant la sensibilité de l'écoulement au forçage initial. Cette sensibilité est d'autant plus intéressante que l'étude précédente avait employé une perturbation impulsionnel, qui produit pourtant un paquet d'onde représenté par une large gamme de fréquences. Malheureusement, en l'absence d'une caractérisation du spectre en fréquence de ce paquet d'onde utilisé dans l'étude de référence, une explication définitive de la différence observée est difficile. Nous pouvons suggérer un forçage majoritairement à basse fréquence généré par la perturbation impulsionnelle ou une éventuelle dissipation plus importante des hautes fréquences dans la simulation précédente.

En supplément de cette différence, une conclusion sur la dynamique observée pour notre étude est que les modes anti-symétriques à $f \approx 0.23$ dominent le régime linéaire pour ce sillage. Ce résultat va à l'encontre de la tendance donnée par la LST-2D pour cette fréquence ou le mode le plus instable de la stabilité locale est symétrique. Cette dominance du mode anti-symétrique est également vérifiée pour la DNS jusqu'au démarrage du régime non-linéaire en $x = 70$. Ce résultat est à mettre en lien avec des différences obtenues entre les modes les plus amplifiés d'une DNS et d'une analyse de stabilité globale par BUCCI et al. (2021). Nous pou-

vons alors souligner l'importance du forçage amont dans le développement de la dynamique du sillage dans notre cas. Un bilan des transferts d'énergie cinétique tel que proposé par, LOISEAU et al. (2014), autour de l'élément de rugosité permettrait éventuellement de caractériser les raisons de la dominance des modes AH devant les mode SH.

Ces résultats ont été appuyés par l'identification des modes de sillage dominants à l'aide d'analyses SPOD effectuées sur des plans (y, y) . Nous avons notamment pu remarquer que les fonctions propres de la SPOD issues de la LDNS présentent une structures ordonnée qui facilite leur identification. En revanche, même dans un régime considéré linéaire, les fonctions propres issues de la DNS se sont avérées plus délicates à identifier. Une extension intéressante de cette identification serait un calcul de la décomposition optimale par SPOD de la solution globale du calcul LDNS à la fréquence $f \approx 0.23$. Cette décomposition est couteuse, mais elle permettrait de confirmer la nature du mode globalement dominant de la dynamique linéaire. De plus, comme nous l'avons énoncé au Chap. 2, en nous positionnant dans le cadre d'un forçage par bruit blanc de la LDNS et dans la limite de la convergence statistique. Un lien direct entre ce mode SPOD dominant issu de la dynamique linéaire globale et la réponse optimale d'une analyse Resolvent à cette fréquence peut être fait (TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS, 2018). Ce lien est particulièrement intéressant si nous considérons la nature non homogène et tridimensionnelle de l'écoulement, rendant difficilement réalisable le calcul de la réponse Resolvent pour nos conditions.

Nous avons mis en lumière avec cette étude que la déformation de la couche limite induite par la rugosité crée une dynamique de transition complexe, pour laquelle les mécanismes non-linéaires et linéaires de réceptivité et croissance et d'instabilité sont particulièrement sensible à la nature du forçage et peuvent différer. Il devient alors intéressant de caractériser plus en détail ces effets de déformation. Plus particulièrement, nous aimerions comprendre quel pourrait être l'effet de ces déformations de la couche limite en présence d'autres instabilités, comme le second mode de Mack ou le premier mode oblique. Ainsi, nous proposons dans le prochain chapitre un cadre simplifié qui étend la présente analyse vers l'étude de modulations de la couche limite similaires à celles que pourraient produire des rugosités distribuées.

CROISSANCE NON-LINÉAIRE DE STREAKS OPTIMALES

5.1	Streaks en régime hypersonique	145
5.2	Définition du problème	148
5.2.1	Terminologie	148
5.2.2	Domaine de calcul et paramètres	149
5.3	Écoulement de base	152
5.3.1	Perturbations optimales	152
5.3.2	DNS non-linéaire des perturbations optimales	154
5.3.3	Caractérisation des écoulements de base	156
5.4	Réponse à un forçage par bruit blanc	158
5.4.1	Champs instantanés	159
5.4.2	Champs de perturbations	160
5.5	Discussion	165

Nous proposons d'étudier les effets d'une déformation progressive de la couche limite sur la réceptivité et l'évolution des instabilités convectives. Ces déformations peuvent survenir dans un cadre naturel pour des parois réalistes avec des imperfections ou suite à une première instabilité. Les déformations sont construites ici par l'injection de perturbations optimales en entrée de domaine, qui au travers le mécanisme de lift-up, amènent à la création d'alternance de stries rapide et lente dans l'écoulement, nommées streaks. Le calcul de ces perturbations optimales et leur propagation non-linéaire est décrit. Les structures non-modales résultantes sont alors caractérisées afin de supporter l'étude de transition du chapitre suivant.

5.1 STREAKS EN RÉGIME HYPERSONIQUE

Les couches limites qui se développent autour d'objets hypersoniques lors de la rentrée atmosphérique font face à un environnement de perturbations complexes, comprenant à la fois des effets géométriques et des fluctuations de l'écoulement incident. Ces diverses perturbations introduisent des déformations du profil de la couche limite qui résultent éventuellement dans une modification de la dynamique de transition vers la turbulence. La compréhension et la prédiction des mécanismes de transition vers la turbulence étant des enjeux importants dans la conception des véhicules hypersoniques, l'analyse des effets de déformations permet d'explorer la

variabilité des mécanismes de transition. La compréhension de cette variabilité permet alors de vérifier la validité des modèles de prédiction, souvent conçus pour des couches limites non déformées (ARNAL, SARIC et REED, 1994).

Parmi les déformations fréquentes rencontrées par les couches limites hypersoniques, celles produites par les sillages de rugosités isolées ou distribuées, telles que discutées au chapitre précédent, induisent des changements importants dans la dynamique de l'écoulement. Ces sillages de rugosité prennent la forme de variation de la vitesse longitudinale de la couche limite, s'apparentant à des streaks. De même, tel que nous l'avons évoqué pour le blunt body paradox, les effets de courbure de la géométrie, concave ou convexe (STETSON, 1983), peuvent amener à la croissance transitoire d'instabilité non modale sous forme de streaks qui modifient l'écoulement de base (PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2017a, 2020).

Au-delà des écoulements hypersoniques, l'étude du rôle des streaks dans la transition peut être retracé aux travaux de ELLINGSEN et PALM (1975) sur la stabilité non modale, puis de LANDAHL (1980) sur le mécanisme de lift-up induit par la vorticité qui est à l'origine des streaks. Les mécanismes de transitions associés sont alors méconnus et englobés sous le terme de "transition bypass" par MORKOVIN (1993). Le terme bypass est alors générique et définit selon Morkovin, les mécanismes de transition non décrits par la théorie modale. Par la suite, de nombreuses études ont mis en avant les effets du mécanisme de lift-up et de la croissance transitoire (BUTLER et FARRELL, 1992 ; GUSTAVSSON, 1991 ; REDDY et HENNINGSON, 1993) et ont développé le cadre théorique pour l'analyse de la stabilité non modale (TREFETHEN et al., 1993). Ce cadre théorique a incité HANIFI, SCHMID et HENNINGSON (1996) puis RESHOTKO et TUMIN (2000)   mener des études paramétriques de la croissance transitoire d'instabilités non modales dans des écoulements compressibles. Parmi certains travaux clés pour ce chapitre, nous pouvons citer les deux études en régime incompressible de Andersson. La première s'intéresse à la recherche des perturbations optimales menant au streaks (ANDERSSON, BERGGREN et HENNINGSON, 1999) et la seconde à la caractérisation détaillée de l'instabilité secondaire et la transition vers la turbulence des streaks (ANDERSSON et al., 2001). Particulièrement, cette dernière étude pose un cadre d'analyse et une terminologie des instabilités associées aux streaks. Il y est détaillé les symétries des instabilités développées et l'émergence de certains modes spécifiques aux déformations.

Un intérêt supplémentaire de l'étude de la stabilité en présence de streaks réside dans leur effet stabilisant sur la transition, remarqué pour des streaks d'amplitudes modérées (BOIKO et al., 1994 ; COSSU et BRANDT, 2002). Un tel retardement de la croissance modale est particulièrement intéressant dans le régime hypersonique, tant les efforts thermiques induits par la couche limite sont importants. Nous pouvons notamment citer l'étude récente de KNEER, GUO et KLOKER (2021) qui démontre cet effet stabilisant pour une couche limite à $M_\infty = 2.0$.

Pour aller plus loin, l'importance des streaks dans les écoulements hypersoniques a été démontrée pour de nombreuses applications. Nous pouvons principalement penser aux effets de courbure dans le blunt-body paradox¹, pour lequel le rôle des instabilités non-modales dans la transition vers la turbulence a été souli-

¹ Voir Introduction 1

gné par PAREDES, CHOUDHARI et LI (2017a) et RESHOTKO et TUMIN (2000). Toujours pour des sphère-cônes, HARTMAN, HADER et FASEL (2021) et PAREDES, CHOUDHARI et LI (2020) révèlent des modes obliques de la couche d'entropie qui interagissent non-linéairement pour générer des streaks. Similairement, pour d'autres types de courbure, des modulations de la couche limite sous forme de streaks sont retrouvées à l'aval des bulles d'interaction choc-couche limite des géométries de rampe et cylindre-jupe des objets hypersoniques (CAO et al., 2021 ; DWIVEDI, SIDHARTH et JOVANOVIĆ, 2021 ; LUGRIN et al., 2020). Parmi les effets géométriques, nous pouvons aussi remarquer que les rugosités distribuées induites par les effets d'ablation génèrent également des structures de sillage tourbillonnaires menant à des streaks (HEIN et al., 2019 ; MUPPIDI et MAHESH, 2012). En l'absence d'effets géométriques, comme nous l'avons vu au Chap. 3, certains chemins vers la transition peuvent également mener à la naissance de streaks stationnaires ou instationnaires en tant que mécanisme secondaire issu de l'interaction non-linéaire de modes obliques (FRANKO et LELE, 2013 ; HADER et FASEL, 2019 ; LAIBLE et FASEL, 2016).

Cela dit, bien que le régime incompressible ait bénéficié d'études approfondies des streaks et leurs effets, peu d'études sur les mécanismes de réceptivité, de croissance modale et la dynamique non-linéaire des streaks, ont été menées pour les régimes supersonique et hypersonique. La caractérisation de la stabilité des streaks et de leurs effets sur la croissance des instabilités modales de la couche limite n'a donné lieu qu'à trois études à la connaissance de l'auteur. Ces études sont basées sur l'analyse par PSE d'une couche limite déformée par des perturbations optimales. Les effets de cette déformation sur la croissance des modes d'une couche limite de plaque plane à $M_\infty = 3.0$ sont étudiés par PAREDES, CHOUDHARI et LI (2017b). Il y est mis en avant le rôle stabilisant des streaks de faible amplitude sur la croissance des ondes obliques du premier mode de Mack, ainsi que la dominance d'instabilité de deux fois la longueur d'onde des streaks, dites subharmoniques. Une seconde étude de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2016a, 2019) emploie la même approche (linéaire) pour étudier l'effet des streaks optimales sur la croissance du second mode de Mack autour d'un cône à $M_\infty = 5.3$. De nouveau, un effet stabilisant des streaks de faible amplitude sur le second mode de Mack est retrouvé. En supplément, le taux de croissance des seconds modes de Mack couplés aux streaks, c'est-à-dire de longueur d'onde multiple de la longueur d'onde des streaks, est calculé. L'étude de ces taux de croissance, conjointement à la faible amplification des autres modes de la couche limite pour les amplitudes de streaks considérées amène les auteurs à conclure sur la dominance des instabilités de la famille du second mode de Mack pour leurs conditions. En lien, pour un régime d'écoulement hypersonique, les calculs PSE de REN, FU et HANIFI (2016) offrent des conclusions similaires sur les effets stabilisants.

Ainsi, les premières analyses dans le cadre linéaire effectuées par ces travaux invitent à étudier plus largement les mécanismes de réceptivité, de croissance et le régime non-linéaire des instabilités de couches limites déformées par des streaks. Plus largement, pour le régime hypersonique, l'étude des déformations de la couche limite produites par des perturbations optimales permet alors d'étudier dans un cadre simple une limite supérieure et idéalisée des déformations qu'induisent les effets géométriques. Ce cadre permet alors de faciliter l'exploration

de l'espace des paramètres qui influent sur la dynamique de la transition vers la turbulence.

Nous commençons cette étude en recherchant les perturbations optimales par un calcul de croissance transitoire spatiale. Avec ces perturbations, nous définissons trois écoulements de base pour des déformations grandissantes de la couche limite. Ces derniers sont constitués de streaks propagées non-linéairement avec le code DNS. Après une caractérisation des déformations de la couche limite, les champs de perturbations issus des réponses des trois écoulements de base à un forçage par bruit blanc sont discutées.

5.2 DÉFINITION DU PROBLÈME

Nous introduisons par la suite quelques définitions des termes et grandeurs utiles à l'analyse des couches limites déformées. Nous reprenons les terminologies précédentes afin de donner un cadre clair à la discussion des différentes instabilités. Par la suite, nous définissons également les paramètres des calculs DNS et leur dimensionnement avant d'introduire quelques spécificités des termes de forçage.

5.2.1 Terminologie

Pour l'analyse des écoulements en présence de streaks, certaines terminologies ont été introduites pour décrire plus précisément les structures et dynamiques spécifiques observées (ANDERSSON, BERGGREN et HENNINGSON, 1999). Considérons une couche limite se développant dans la direction x , déformée par plusieurs streaks de longueur d'onde transverse λ_S dans la direction z , telles que présentées en Fig. 5.1. Nous remarquons la déformation de la couche limite dans le plan normal (y, z) . Cette déformation est induite par le mécanisme de lift-up, éjectant vers le haut des couches de l'écoulement lent situé initialement proche de la paroi (flèche bleue) et tirant vers le bas des couches de l'écoulement rapide (flèches rouges). Ce mécanisme de lift-up donne alors l'alternance de streaks lentes (bleues) et streaks rapides (rouges) visible sur les couches limites.

Une streak de longueur d'onde λ_S dans la direction z , présente un axe de symétrie (Fig. 5.1-tirets) autour duquel nous définirons la nature des modes évoluant dans la couche limite selon la distribution de leur champ de perturbation. En supplément de leurs symétries, ces modes seront également caractérisés par leur périodicité : $k\lambda_S$, $k \in \mathbb{N}^*$ au regard des streaks, dans la direction z . En suivant la terminologie de ANDERSSON et al. (2001), les modes de longueur d'onde deux fois égale à la longueur d'onde des streaks, soit $k = 2$, sont nommés modes subharmoniques, le terme harmonique fait ici référence à la longueur d'onde d'une streak, soit $k = 1$. Les autres périodicités non énoncées ici seront simplement désignées par leur périodicité $k\lambda_S$.

Associée à leurs périodicités et symétries, l'amplification des modes induit des mouvements spécifiques des streaks observables dans l'écoulement. La Fig. 5.2

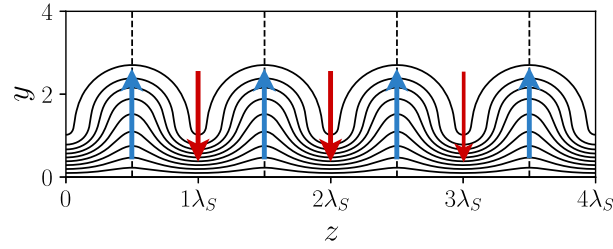


FIGURE 5.1 : Iso-contours de vitesse longitudinale u_x , dix valeurs prises dans $[0, 0.99u_\infty]$; bleu : streaks lentes; rouges : streaks rapides; tirets : axes de symétrie des streaks lentes.

présente les quatre classes de mouvements de streaks généralement visibles avant la transition vers la turbulence. Nous retrouvons les cas harmoniques symétriques et anti-symétriques donnant lieu à des mouvements respectivement variqueux² et sinueux de l'ensemble des streaks rapides (rouges) et lentes (bleues). Pour les modes de périodicité subharmonique $\lambda = 2\lambda_S$, la nature sinueuse (variqueuse) du mouvement s'observe sur les streaks lentes et les streaks rapides présentent toujours le mouvement opposé, respectivement variqueux (sinueux).

Les notations introduites ci-dessus sont utilisées dans toute la suite de ce chapitre. Ainsi, les termes "harmonique" et "subharmonique" référeront à la périodicité spatiale en z des structures étudiées. De même, les termes liés à la nature symétrique ou anti-symétrique serviront à la description des modes. Un système de notation formel sera introduit ultérieurement pour discuter certains modes particuliers. Ces définitions nous permettent de décrire plus précisément la construction des simulations et les dynamiques étudiées.

5.2.2 Domaine de calcul et paramètres

Dans la continuité des études précédentes, nous conservons des conditions similaires pour les paramètres de l'écoulement, ces derniers sont redonnés par clarté, dans le tableau 5.1. Particulièrement, nous retrouvons un écoulement à $M_\infty = 6.0$ et $T_\infty = 273.15\text{K}$ pour un nombre de Reynolds de $\text{Re}_{\delta^*} = 28000$ s'écoulant le long d'une paroi plane, adiabatique. Suivant les résultats en régime incompressible de ANDERSSON et al., 2001 sur la dominance estimée des modes subharmoniques, nous choisissons de simuler un total de quatre streaks de longueur d'onde λ_S dans la direction axiale de l'écoulement pour obtenir une couche limite similaire à celle présentée dans le diagramme en Fig. 5.3. Cette extension en z permet de simuler la croissance des modes subharmoniques et leurs interactions. De plus, suivant les résultats issus de l'analyse PSE de PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2019, la prise en compte de modes de plus grande longueur d'onde semble également nécessaire, leur amplification n'étant pas négligeable, ceci justifie l'extension de notre étude aux modes supportés par quatre streaks.

² Traduction littérale de la terminologie anglophone de ANDERSSON et al. (2001), issue du terme médical "varicose" et signifiant des élargissements et rétrécissements successifs de la section d'un tube.

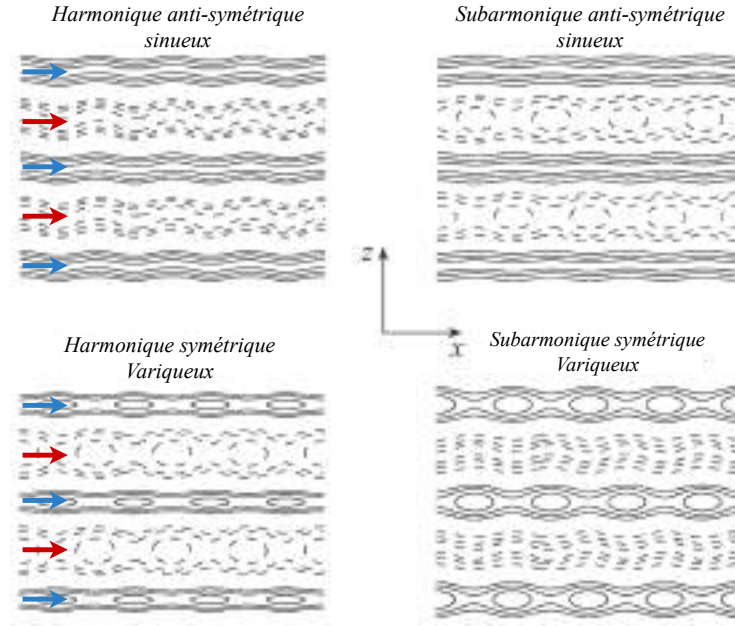


FIGURE 5.2 : Organisation des mouvements visibles des streaks pour diverses symétries et périodicités d'instabilités dans la direction z . Repris de ANDERSSON et al. (2001).

Nous avons donc dans la continuité des études précédentes, un domaine d'analyse de taille $L_x \times L_y \times L_z = 350 \times 15 \times 4\lambda_S$. Ce domaine d'analyse est inclu dans un domaine global utilisant les mêmes zones éponges que pour le cas de la plaque plane (Section 3.1.1). Pour rappel, ces zones éponges sont situées en entrée et sortie du domaine et pour $y > 15$. Nous utilisons également des conditions limites identiques avec une périodicité dans la direction z .

Paramètres	Valeurs
M_∞	6.0
Re_{δ^*}	28000
T_{ref} (K)	273.15
L_{ref}	$\delta^*(x = 0)$
t_{ref}	L_{ref}/u_∞
$L_x \times L_y \times L_z$	$350 \times 15 \times 4\lambda_S$
$N_\xi \times N_\eta \times N_\zeta$	$4000 \times 300 \times 300$

TABLE 5.1 : Paramètres de référence de la plaque plane

La déformation de l'écoulement de base est construite en injectant en entrée du domaine le profil de couche limite autosimilaire utilisé dans le Chapitre 3 pour obtenir le développement spatial d'une couche limite non déformée. Les streaks sont ensuite générées par le mécanisme de lift-up via l'ajout d'un forçage optimal sous forme de tourbillons contrarotatifs dans un volume de forçage centré en $x_f = 5$. La formulation générale de la fonction de forçage employée reprend

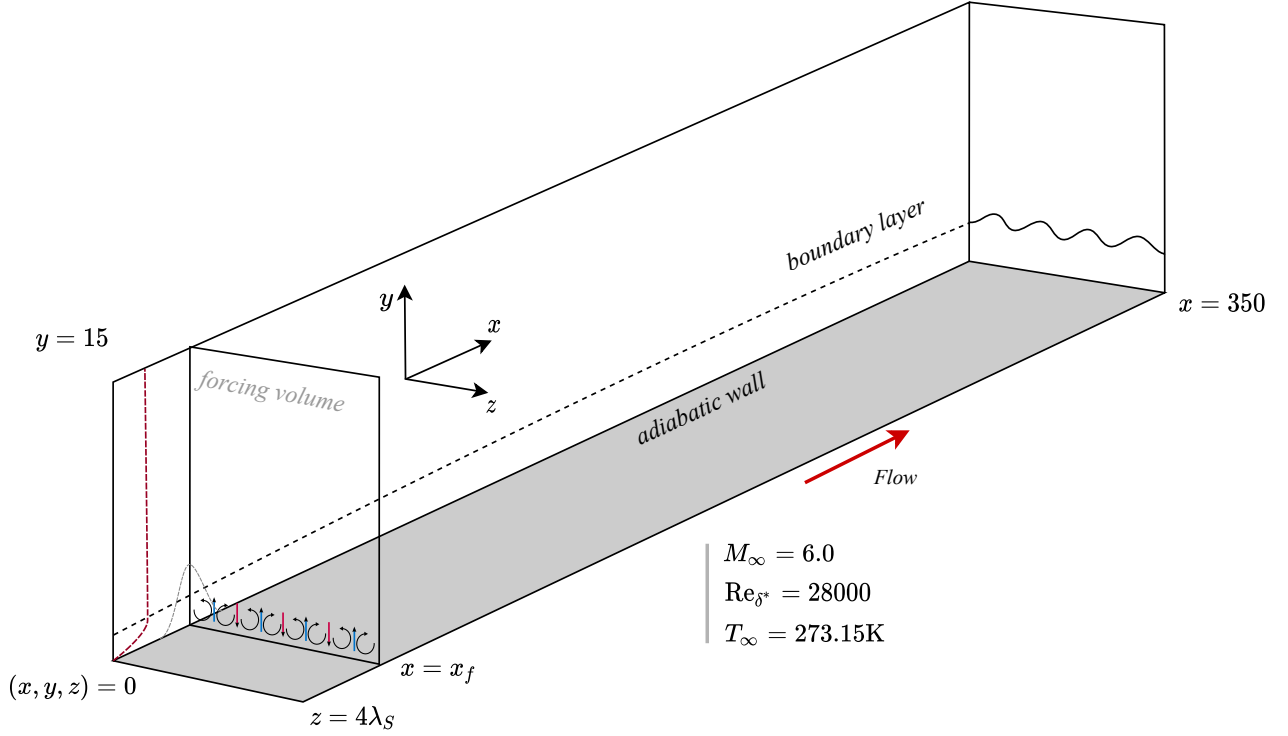


FIGURE 5.3 : Domaine de calcul et volume de forçage

l'expression utilisée pour l'étude de la couche limite canonique. Cependant, le caractère stationnaire de la perturbation introduite induit deux remarques quant au forçage. Nous avons noté lors du développement de la procédure de d'injection des streaks, qu'une distribution régulière de l'amplitude de la perturbation dans le volume de forçage était nécessaire. L'absence de cette distribution régulière tend à produire de petites oscillations de la couche limite issue du gradient imposé par le volume de forçage. Ces oscillations entraînent la propagation d'ondes dans la couche limite et empêchent la convergence de l'écoulement de base, voire peuvent déstabiliser les streaks de grandes amplitudes, les plus sensibles aux perturbations. La seconde remarque est liée à la prise en compte du calcul réalisé à CFL constant et donc à pas de temps variable.

Si nous considérons ce pas de temps variable Δt , pour nous assurer que les streaks introduites soient stationnaires, un taux de déposition d'énergie constant au cours du temps doit être imposé pour éviter une oscillation du forçage. Ainsi, l'amplitude de la perturbation introduite doit s'adapter au pas de temps. De fait, nous choisissons de réécrire l'amplitude de forçage A_0 comme une fonction du pas de temps pour assurer une amplitude constante au cours du calcul. Nous avons alors l'expression du forçage corrigée donnée en Eq. 5.1, avec la fonction d'amplitude $A(\Delta t) = A_0 \times \frac{\Delta t}{t_{ref}}$ et t_{ref} le temps convectif de référence.

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) + A(\Delta t)\phi_f(\mathbf{x})\mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t) \quad (5.1)$$

Avec cette expression, nous choisissons trois amplitudes de forçage initiales menant à trois écoulements de base distincts nommés A_1 , A_2 & A_3 . Ces amplitudes

sont appliquées à la perturbation tourbillonnaire introduite ci-après, nous donnons leurs valeurs par la suite.

5.3 ÉCOULEMENT DE BASE

L'écoulement de base contenant les streaks déformées des trois cas A1, A2 & A3, est construit en effectuant une analyse de stabilité à $x = 5$ pour obtenir la perturbation optimale au début du domaine. La seconde étape consiste en le calcul de trois DNS pour propager non-linéairement cette perturbation optimale pour trois amplitudes de forçage vers l'aval. Nous avons alors trois écoulements stationnaires qui serviront ensuite à l'étude de stabilité spatiale et à l'analyse de la dynamique non-linéaire issue du bruit blanc.

5.3.1 Perturbations optimales

Le vecteur de perturbation $\mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t)$ qui permet de générer les streaks dans le domaine est obtenu par un calcul de perturbations optimales entre $x = 5$ et $x = 350$. Ces perturbations optimales sont trouvées avec une analyse de croissance transitoire basée sur la résolution du problème aux valeurs propres spatial 1D local, pour un profil de la couche limite sans streaks pris à $x_f = 5.0$. La présente analyse repose sur la méthode développée par HANIFI, SCHMID et HENNINGSON (1996) et REDDY et HENNINGSON (1993) qui s'appuie sur la théorie de la stabilité non modale introduite en Sec. 1.1. Les calculs sont réalisés avec un code développé au sein du laboratoire³.

La recherche d'une perturbation optimale se traduit par la recherche du vecteur de perturbation $\mathbf{q}_0(x_f, t)$ qui donne le vecteur de réponse $\mathbf{q}_r(x, t)$ de plus grande amplitude à la position x choisie, autrement dit la plus grande amplification possible sur la distance $|x - x_f|$. Nous cherchons ainsi à maximiser un gain $G(x)$ le long du domaine. Pour le problème de la LST 1D parallèle spatiale, G est également fonction du nombre d'onde transverse $\beta \in \mathbb{R}$ et de la fréquence $\omega \in \mathbb{R}$. Dans notre étude, nous nous concentrons sur des perturbations optimales à $\omega = 0$ pour obtenir un écoulement de base constitué de streaks stationnaires. En exprimant le $G(\beta, x)$ tel que :

$$G(\beta, x) = \max_{\mathbf{q}_0} \frac{\|\mathbf{q}(x)\|_E}{\|\mathbf{q}_0\|_E}, \quad (5.2)$$

la recherche de notre perturbation optimale consiste ainsi en une exploration de l'espace des β afin de trouver le nombre d'onde transverse β_{opt} garantissant le gain optimal $G(\beta_{\text{opt}}, x = 350)$. Dans l'Eq. 5.2, le gain et la réponse $\mathbf{q}_r$ dépendent

³ Code développé par B. Zebrowski et E. Martini

de la norme $\|\bullet\|_E$ utilisée, pour notre écoulement à haut nombre de Mach, nous utilisons les poids de la norme compressible (CHU, 1965), avec,

$$\mathbf{W}_{\text{chu}} = \text{diag} \left(\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}\gamma}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \bar{\rho}, \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}\gamma(\gamma-1)} \right), \quad (5.3)$$

$$\|\mathbf{q}\|_E = \langle \mathbf{q}, \mathbf{q} \rangle_E = \mathbf{q}^H \mathbf{W} \mathbf{q} \quad (5.4)$$

Les détails de l'implémentation de la méthode sont trouvés dans les références citées ci-dessus. En résumé, nous posons d'abord le problème aux valeurs propres spatial en $x_f = 5$ puis nous exprimons le vecteur de réponse et de forçage comme des combinaisons linéaires des vecteurs propres $\hat{\mathbf{q}}_i$ et valeurs propres κ_i de l'opérateur des équations de Navier-Stokes linéarisées en x_f . Après une réintroduction de ces combinaisons linéaires de modes dans l'expression du gain en Eq. 5.2, une décomposition de Cholesky de la matrice d'énergie et quelques simplifications, nous calculons une SVD⁴ de la matrice obtenue. Ainsi, nous retrouvons la perturbation optimale et réponse optimale selon la position x , issues de la combinaison linéaire de la base des fonctions propres associées au gain optimal de la SVD.

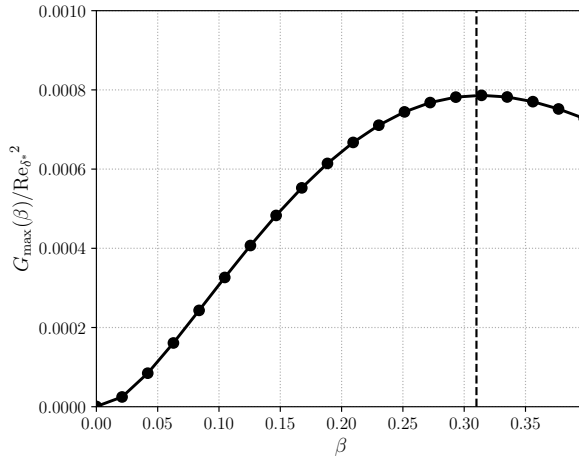
Lors du calcul de la croissance transitoire spatiale, une attention particulière doit être portée à la direction de propagation des modes du spectre spatial. Particulièrement, pour ne prendre en compte que les ondes se déplaçant dans la direction ($x \rightarrow \infty$) nous devons filtrer les éventuelles ondes remontant l'écoulement vers l'amont ($x \rightarrow -\infty$), ce filtrage est réalisé par application du critère de Briggs-Bers (BERS, 1983; BRIGGS, 1964) en observant la vitesse de groupe $c_g = \partial\omega/\partial\alpha$ des ondes à la limite $\Im(\omega) \rightarrow \infty$. Les détails de ce filtrage pour la stabilité spatiale 1D localement parallèle peuvent être retrouvés dans JORDAN et al. (2017).

Avec cette méthode, nous recherchons la réponse optimale à $x = 350$ pour $\beta \in [0, 0.4]$. Le choix de cet intervalle pour β est guidé par les résultats des études précédentes sur les valeurs usuelles de β optimaux, la valeur du gain pour cet intervalle est donnée en Fig. 5.4a. Nous trouvons un nombre d'onde optimal $\beta_{\text{opt}} = 0.31$, cohérent avec les nombres d'ondes optimaux retrouvés par PAREDES et al. (2016), situés entre $0.3 < \beta_{\text{opt}} < 0.32$. De même, nous obtenons une valeur de $G(\beta_{\text{opt}}, x = 350) = 0.008$, proche des valeurs optimales trouvées également par PAREDES et al. (2016) avec une analyse PSE pour des couches limites pleinement développées à $M_\infty = 6.0$ avec : $0.007 < G(\beta_{\text{opt}}) < 0.009$.

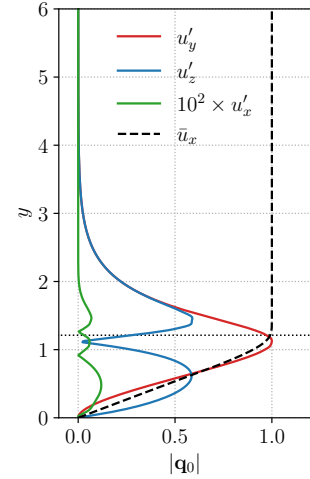
La perturbation optimale associée à $G(\beta_{\text{opt}})$ est présentée en Fig. 5.4b. Nous retrouvons les profils (u_y, u_z) d'une perturbation tourbillonnaire, la hauteur de couche limite δ_{99} est indiquée en pointillée et son profil en tirets. Une extension de la perturbation tourbillonnaire au-dessus de δ_{99} similaire aux études précédentes peut être observée. Les composantes u_y et u_z de la perturbation optimale sont utilisées pour définir le vecteur de forçage $\mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t)$ de la DNS avec un nombre d'onde transverse β_{opt} tel que :

$$\mathbf{q}_f(\mathbf{x}, t) = \cos(2\pi\beta_{\text{opt}}z/L_z) \mathbf{u}_y(\mathbf{x}, t) - \sin(2\pi\beta_{\text{opt}}z/L_z) \mathbf{u}_z(\mathbf{x}, t). \quad (5.5)$$

⁴ Singular Value Decomposition



(a) Évolution du gain de la croissance transitoire spatiale en fonction du nombre d'onde transverse β . Ligne en tirets : position de l'optimum $\beta_{\text{opt}} = 0.31$



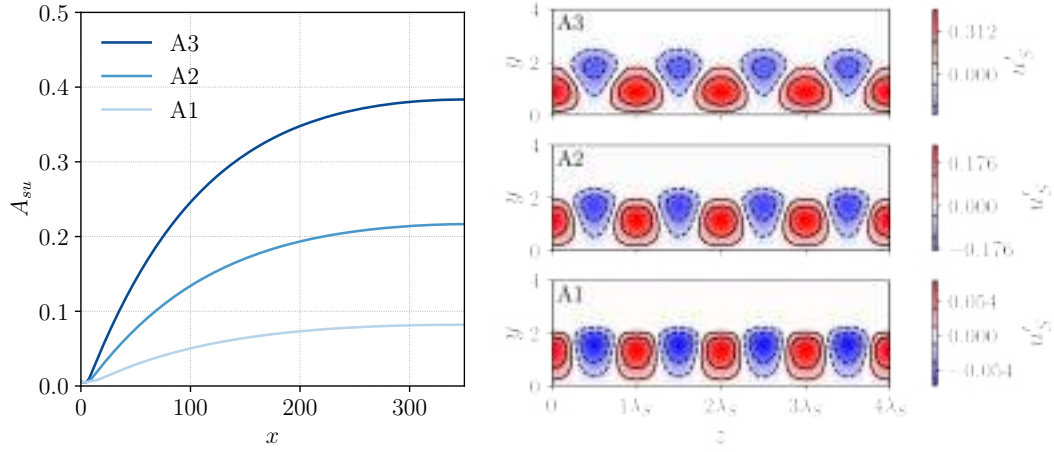
(b) Module des distributions de vitesses de la perturbation optimale $\mathbf{q}_0$ pour $\beta_{\text{opt}} = 0.31$. Comparaison avec le profil de la couche limite de Blasius (tirets noirs). Hauteur de la couche limite δ_{99} (pointillés noirs).

FIGURE 5.4 : Résultats de l'analyse de croissance transitoire spatiale avec la théorie 1D localement parallèle en $x_f = 5.0$

Seules les perturbations de vitesse u'_y et u'_z sont utilisées, l'amplitude des autres composantes de $\mathbf{q}_f$ est considérée négligeable (Fig. 5.4b). Ce vecteur de perturbation est réintroduit dans la procédure de forçage définie en Eq. 5.1, puis est propagé non-linéairement dans la direction de l'écoulement avec le code DNS pour mener à l'amplification des streaks stationnaires.

5.3.2 DNS non-linéaire des perturbations optimales

Pour construire les trois cas A1, A2 & A3, nous utilisons trois amplitudes de forçage A_0 différentes pour obtenir trois réponses non-linéaires à la perturbation optimale avec le code DNS. Ces réponses sont caractérisées par une déformation de la couche limite de Blasius proportionnelle à l'amplitude des streaks A_{su} . Pour cette amplitude, nous reprenons la définition donnée par ANDERSSON, BERGGREN et HENNINGSON (1999), en considérant un écoulement de base stationnaire contenant les streaks, noté $\bar{\mathbf{q}}_S$ et un écoulement de base stationnaire sans streaks que nous noterons $\bar{\mathbf{q}}_{FP}$. Notons que ce dernier est identique à celui employé au Chap. 3. Nous avons alors le champ de perturbation stationnaire : $\mathbf{q}'_S = \bar{\mathbf{q}}_S - \bar{\mathbf{q}}_{FP}$ qui représente les variations de vitesses lentes et rapides des streaks induites par le



(a) Évolution de $A_{su}(x)$ pour les trois amplitudes considérées. (b) Contours de u'_s à $x = 350$. De haut en bas : A3, A2, A1

FIGURE 5.5 : Évolution de l'amplitude des streaks et forme finale

mécanisme de lift-up. Le vecteur vitesse $\mathbf{u}'_s$ du vecteur $\mathbf{q}'_s$ est employé pour définir l'évolution de l'amplitude des streaks le long du domaine : $A_{su}(x)$, tel que,

$$A_{su}(x) = \frac{1}{2} \left[\max_{y,z} (\mathbf{u}'_s(x)) - \min_{x,y} (\mathbf{u}'_s(x)) \right]. \quad (5.6)$$

Avec cette expression, les amplitudes de forçage A_0 sont choisies de sorte à obtenir trois amplitudes A_{su} qui encadrent celles employées dans l'étude de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019). Ce choix permet une comparaison plus claire des résultats de notre étude aux résultats précédents.

Le calcul des écoulements de base est mené jusqu'à atteindre un résidu $\|\mathcal{N}(\bar{\mathbf{q}}_s)\|_{L_2} < 1 \times 10^{-6}$, soit environ 80000 itérations du schéma RK3-TVD avec les différences finies à l'ordre 8 pour obtenir les trois solutions stationnaires. Les valeurs de A_0 ainsi utilisées et les valeurs de A_{su} finales associées sont données dans le tableau 5.2. De plus, la Fig. 5.5 présente l'évolution de $A_{su}(x)$ (Fig. 5.5a) et le champ de perturbation $u'_{s,x}$ associé (Fig. 5.5b) pour les cas A1 à A3.

	A1	A2	A3
A_0	5.6×10^{-3}	1.5×10^{-2}	2.8×10^{-2}
$A_{su}(x = 350)$	0.082	0.217	0.383

TABLE 5.2 : Récapitulatif des amplitudes de forçage et amplitudes finales des streaks considérées

En observant l'évolution de la topologie du champ $u'_{s,x}$ en Fig. 5.5b nous remarquons entre A1 et A3 la déformation progressive des streaks basse vitesse en bleu et haute vitesse en rouge. Cette déformation est observée dans l'étude incompressible de RAN et al. (2019) utilisant une PSE non-linéaire. Elle est expliquée en considérant que la perturbation initiale introduite par $\mathbf{q}_f$, est une perturbation

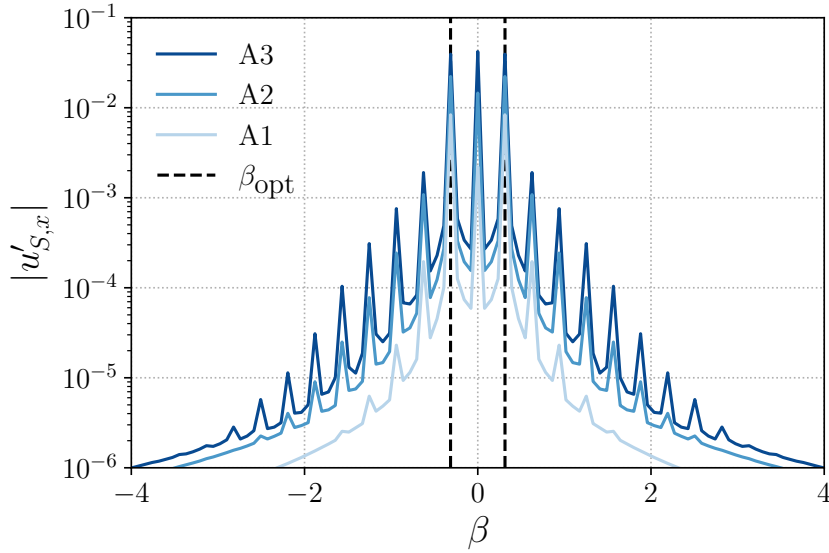


FIGURE 5.6 : Comparaison de spectres de $u'_{S,x}$ à $x = 350$. Pointillés : nombre d'onde β_{opt} de la réponse linéaire optimale

constituée d'une seule harmonique dans la direction z , de nombre d'onde β_{opt} . L'écart progressif à cette réponse harmonique entre les profils A1 et A3 est associé à la croissance non-linéaire des streaks et l'interaction de nombres d'ondes β transverses supérieurs entre eux. Cette génération d'harmoniques de β_{opt} peut être vérifiée par la comparaison des spectres finaux des champs de perturbations à $x = 350$, donnée en Fig. 5.6 et montrant l'augmentation progressive de l'amplitude des nombres d'ondes $\beta > \beta_{\text{opt}}$ avec l'augmentation de A_0 . Ces harmoniques sont visibles de par les pics d'amplitude marqués aux nombres d'ondes multiples de β_{opt} et traduisent directement les nombres d'ondes transverses nécessaires pour représenter la forme des streaks présentées en Fig. 5.5b.

Les réponses non-linéaires ainsi obtenues constituent l'écoulement de base tridimensionnel constitué d'une couche limite développée et modulée non-linéairement par les streaks.

5.3.3 Caractérisation des écoulements de base

Nous présentons plus en détail l'évolution de la couche limite le long du domaine en Fig. 5.7 où nous pouvons observer pour les trois colonnes, les écoulements de base respectifs des cas A1, A2 & A3 pris dans le plan (y, z) , normal à la direction de l'écoulement. La modulation de l'écoulement par les streaks présentées en Fig. 5.5b permet d'apprécier la variation importante de la forme de la couche limite entre les trois cas considérés. Les profils d'écoulements obtenus sont représentatifs des sillages de rugosités isolées ou distribuées retrouvés notamment par CHOUDHARI et al. (2015) et MUPPIDI et MAHESH (2012) pour des écoulements à haute vitesse. Cette similitude conforte le choix des perturbations optimales pour l'analyse paramétrique des déformations.

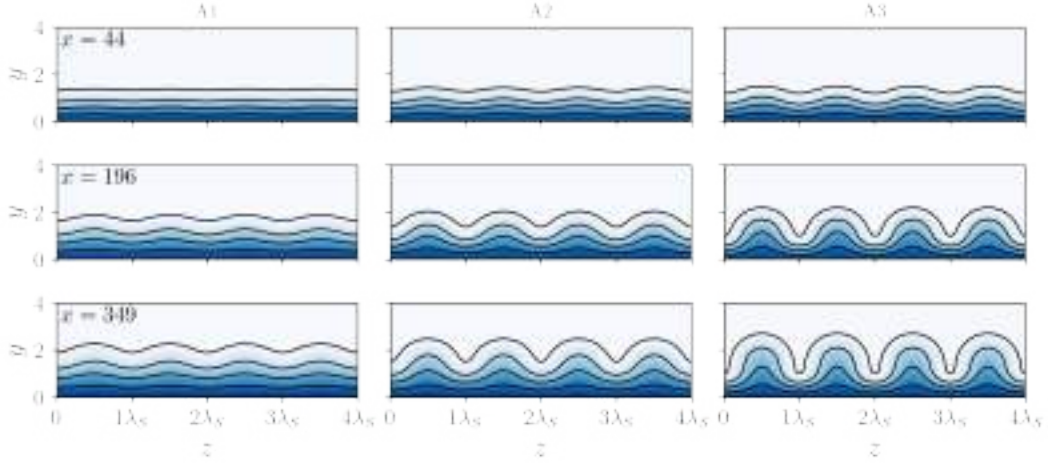


FIGURE 5.7 : Évolution du profil de couche limite dans le plan (y, z) pour trois positions le long du domaine. Couleurs : contours de $u_{S,x} \in [0, u_\infty]$. Lignes : 5 contours de $u_{S,x} \in [0, \delta_{99}]$.

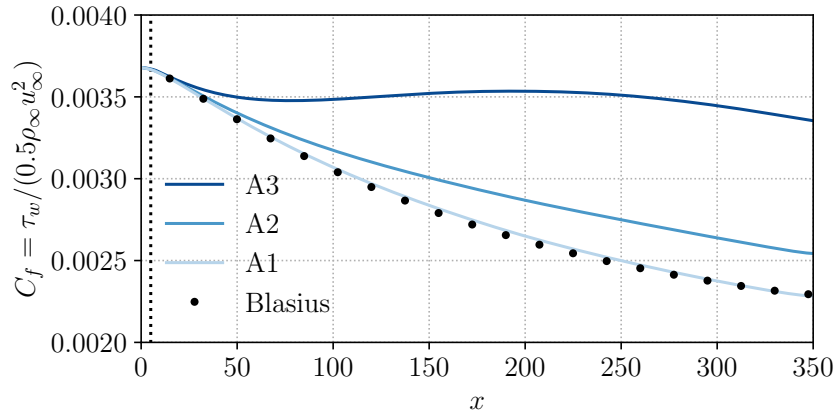


FIGURE 5.8 : Évolution du coefficient de frottement C_f avec l'amplitude des streaks. Poinçillés : centre du volume de forçage x_f

À cette déformation est associée une évolution des coefficients moyens de la couche limite, particulièrement le calcul du coefficient de frottement C_f dont l'évolution donnée en Fig. 5.8 permet d'obtenir une estimation des efforts de frottements induits par les streaks en régime hypersoniques et laminaire. L'effet sur le coefficient C_f est particulièrement important pour le cas A3 avec environ 43 % d'augmentation au regard du profil sans streaks. En remarquant ensuite le faible effet du cas A1 et l'évolution progressive du cas A2, puis A3, nous observons également que la variation de C_f ne suit pas une relation linéaire avec la variation de A_{su} .

Les résultats des études précédentes sur la stabilité des profils 2D de streaks ou de sillages de rugosités ont souligné la localisation de certaines instabilités sur les zones de cisaillement maximal de la couche limite. Particulièrement, dans le cas des streaks générées ici, le mécanisme de lift-up induit un cisaillement transverse $(\partial u / \partial z)$ et vertical $(\partial u / \partial y)$ supplémentaire dont nous présentons les distributions

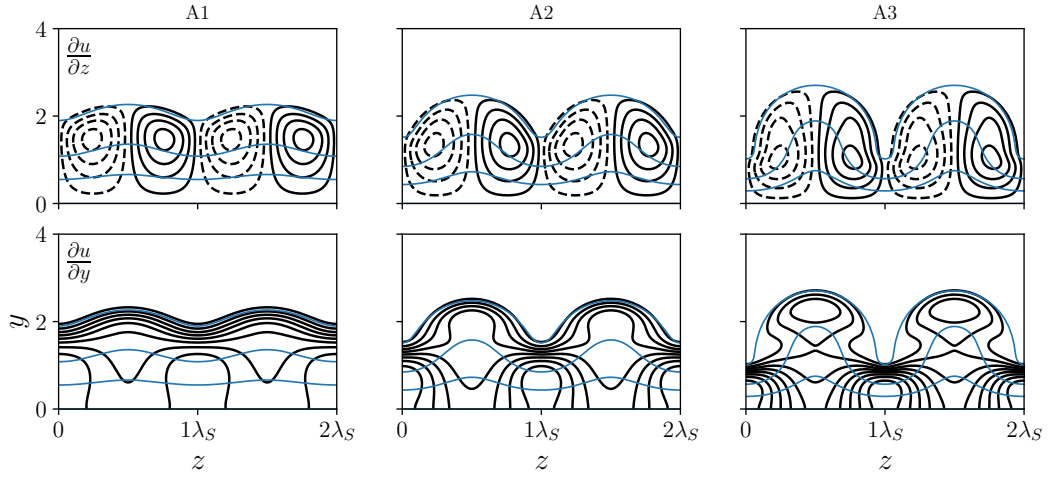


FIGURE 5.9 : Contours de cisaillement transverse ($\partial u/\partial z$) (haut) et vertical ($\partial u/\partial y$) (bas), pour les cas A1 à A3. Haut : 8 iso-contours de $(\partial u/\partial z) \in [0.9 \min(\partial u/\partial z), 0.9 \max(\partial u/\partial z)]$. Bas : 8 iso-contours de $(\partial u/\partial y) \in [0.1 \max(\partial u/\partial y), 0.9 \max(\partial u/\partial y)]$. Bleu : écoulement de base avec 4 iso-contours de $\bar{u}_{S,x} \in [0, 0.99u_\infty]$

en Fig. 5.9. Le cisaillement transverse est principalement réparti de part et d'autre des streaks haute vitesse avec un maximum localisé à proximité de la zone d'inflexion entre les streaks lentes et rapides. Le cisaillement vertical est situé le long de l'axe de symétrie des streaks lentes et rapides avec un maximum localisé au sommet de la streak lente. De nouveau, ces distributions de cisaillement sont comparables aux cisaillements obtenus par certaines études de rugosités isolées de hauteurs modérées telles que EYNDE (2015) et TULLIO et al. (2013)

Nous avons donc trois écoulements de base construits par propagation non-linéaire d'un forçage optimal obtenu par LST-1D. Cette approche nous fournit ainsi un maximum⁵ de l'amplification possible des structures non-modales pouvant être induites par des effets géométriques ou des perturbations aérodynamiques. L'amplification de perturbations autour de ces structures non-modales est discutée par la suite.

5.4 RÉPONSE À UN FORÇAGE PAR BRUIT BLANC

Nous proposons d'étudier les réponses linéaires et non-linéaires des couches limites déformées à un forçage par bruit blanc. En reprenant la méthodologie déjà employée pour les chapitres précédents, nous effectuons pour chacun des cas A1, A2 & A3, un calcul DNS et un calcul LDNS. La procédure de forçage utilisée pour l'injection du bruit blanc est identique à celle donnée en Sec. 3.3 du Chap. 3. La position du forçage est de nouveau située en $x_f = 5.0$ et est superposée au for-

⁵ Ce maximum est à considérer au sens de la stabilité linéaire 1D locale. Une recherche de perturbations optimales linéaire (SCHMID, 2007) ou non-linéaire (KERSWELL, 2018) pour un problème global pourrait donner des résultats différents. Cependant la comparaison avec les études non-locales de PAREDES et al. (2016) conforte la pertinence des résultats LST pour notre cas.

çage stationnaire utilisé pour générer les streaks. Les simulations DNS et LDNS sont lancées pour chaque cas, l'état transitoire de la solution est passé après deux traversées de domaines, soit $t = 4 \times 10^{-4}$ s.

Pour étudier sa dynamique, la solution est de nouveau échantillonnée sur l'ensemble du domaine. L'écoulement avec streaks étant calculé avec les mêmes paramètres que pour le cas de la couche limite de Blasius précédent, nous utilisons des paramètres d'échantillonnage identiques. Le tableau 5.3 résume de nouveau les valeurs importantes. Nous notons qu'avec les résultats obtenus sur la fréquence des modes instables, notamment la présence du second mode de Mack, la fréquence d'échantillonnage est maintenue à $f_s = 1.3$ et permet toujours de capturer ce dernier et ses éventuelles harmoniques.

N_{snap}	1300
t_s^*	$0.3869\mu s$
t_f^*	$500.3\mu s$
f_s	1.3
f_c	0.65
f_{min}	0.001

TABLE 5.3 : Paramètres d'échantillonnage

Nous pouvons remarquer que la taille du domaine sauvegardée est augmentée. Les bases de données échantillonnées ont maintenant une taille de 20To par simulation. Soit pour trois cas de déformation et deux simulations par cas, $6 \times 20 = 120$ To de données à décomposer afin d'effectuer notre analyse paramétrique sur A_{su} . Ici encore, le post-traitement efficace et la décomposition de la dynamique sont rendus possibles par les algorithmes parallèles développés et présentés en Annexe A.

Avant d'introduire les spécificités de ces décompositions, nous proposons d'étudier les solutions instantanées des écoulements à $t = t_f$ afin d'obtenir une première idée des dynamiques générées par les streaks et le forçage.

5.4.1 Champs instantanés

Nous commençons l'observation des réponses au forçage par bruit blanc par l'observation du champ de vitesse axiale u_x donné en Fig. 5.10 dans le plan (x, z) . Les streaks lents et donc surélevés sont visibles en noir et les streaks rapides, proches de la paroi sont visibles en blanc. En étudiant l'évolution spatiale de ces streaks à $y = \delta^*$, trois dynamiques distinctes sont observables entre les cas simulés. Le cas A3 présente une succession d'instabilités vers la turbulence avec une instabilité de type sinueuse clairement visible pour $x > 300$. L'amplification progressive de ces mouvements sinueux est perceptible à compter de $x > 250$. Pour le cas A2, nous percevons l'amplification d'une instabilité après $x = 275$. Cette instabilité donne naissance à des structures secondaires variqueuses (symétriques) pour les streaks

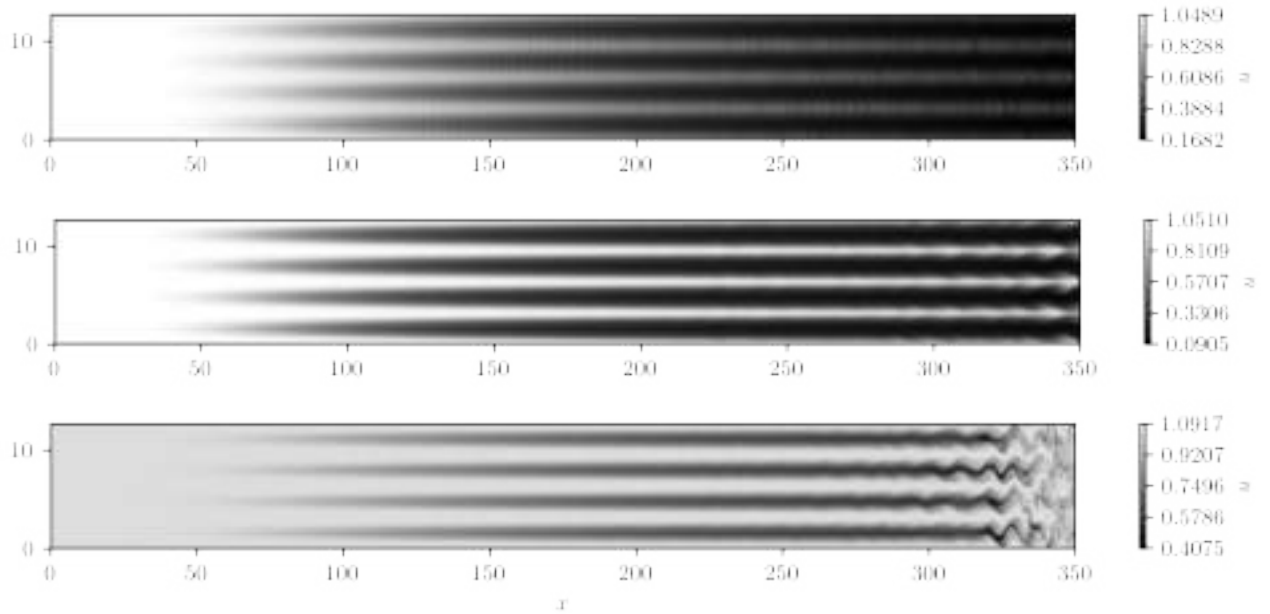


FIGURE 5.10 : Champs instantanés de vitesse axiale u_x à $y = \delta^*$. De haut en bas : cas A1, A2 et A3

rapides en clair et un mouvement plutôt sinueux pour les streaks lentes en noir. Ce type de dynamique évoqué précédemment, rappelle le mouvement induit par une instabilité de type sub-harmonique (ANDERSSON et al., 2001), ce que nous étudierons par la suite. Enfin, le cas A1 n'atteint pas la turbulence et nous remarquons le faible contraste entre les streaks rapides et lentes, traduisant la faible amplitude visible des streaks. Néanmoins, sur les streaks rapides, nous remarquons une fluctuation de faible longueur d'onde axiale λ_x en comparaison à celles observées pour les cas A2 et A3. En nous basant sur les champs observés en Fig. 3.11a pour la couche limite sans streaks, ces structures suggèrent la présence éventuelle d'une instabilité de la famille MM.

5.4.2 Champs de perturbations

Les structures que présentent les champs de vitesses nous invitent à analyser les champs de perturbations associés pour y déceler des structures qui permettront de guider les analyses subséquentes.

5.4.2.1 Cas A1

Les champs de perturbations des cas A1, A2 & A3 sont présentés sur les doubles pages suivantes. Nous retrouvons sur ces figures la composante de vitesse axiale du vecteur de perturbations $\mathbf{q}'_S = \mathbf{q}_S - \bar{\mathbf{q}}_S$ pour quatre plans (y, z) le long du domaine. Ces plans permettent d'apprécier clairement les fluctuations présentes sur

les streaks et leur distribution dans la direction z . Pour chaque cas, nous montrons les vecteurs $\mathbf{q}'_S$ issus de la LDNS à gauche et de la DNS à droite.

Les champs de perturbation du cas A1 sont présentés en Fig. 5.11. Nous observons au début du domaine, en $x = 79$, la présence encore marquée du forçage par bruit blanc. Des structures plus amplifiées sont visibles dans la couche limite. Avec la progression dans la direction x , ces structures apparaissent nettement pour la LDNS et la DNS. Particulièrement pour le champ LDNS, nous remarquons la présence d'une structure amplifiée en partie basse de la couche limite et une structure légèrement marquée en partie haute. Cette dernière structure est observable également sur le champ DNS. Ces fluctuations poursuivent leur amplification jusqu'en $x = 341$ où nous observons nettement sur les champs DNS la présence d'une dynamique dans la direction z de l'écoulement. Des perturbations suivent un mouvement symétrique (variqueux) autour d'une streak basse vitesse et d'autres suivent plutôt un mouvement anti-symétrique (sinueux). En lien avec cette dynamique non-linéaire, le calcul LDNS présente des structures en partie haute de la couche limite, difficilement identifiables à première vue. Le champ suggère néanmoins la présence d'au moins deux structures superposées qu'il conviendra d'identifier avec la décomposition de l'écoulement dans l'espace de Fourier.

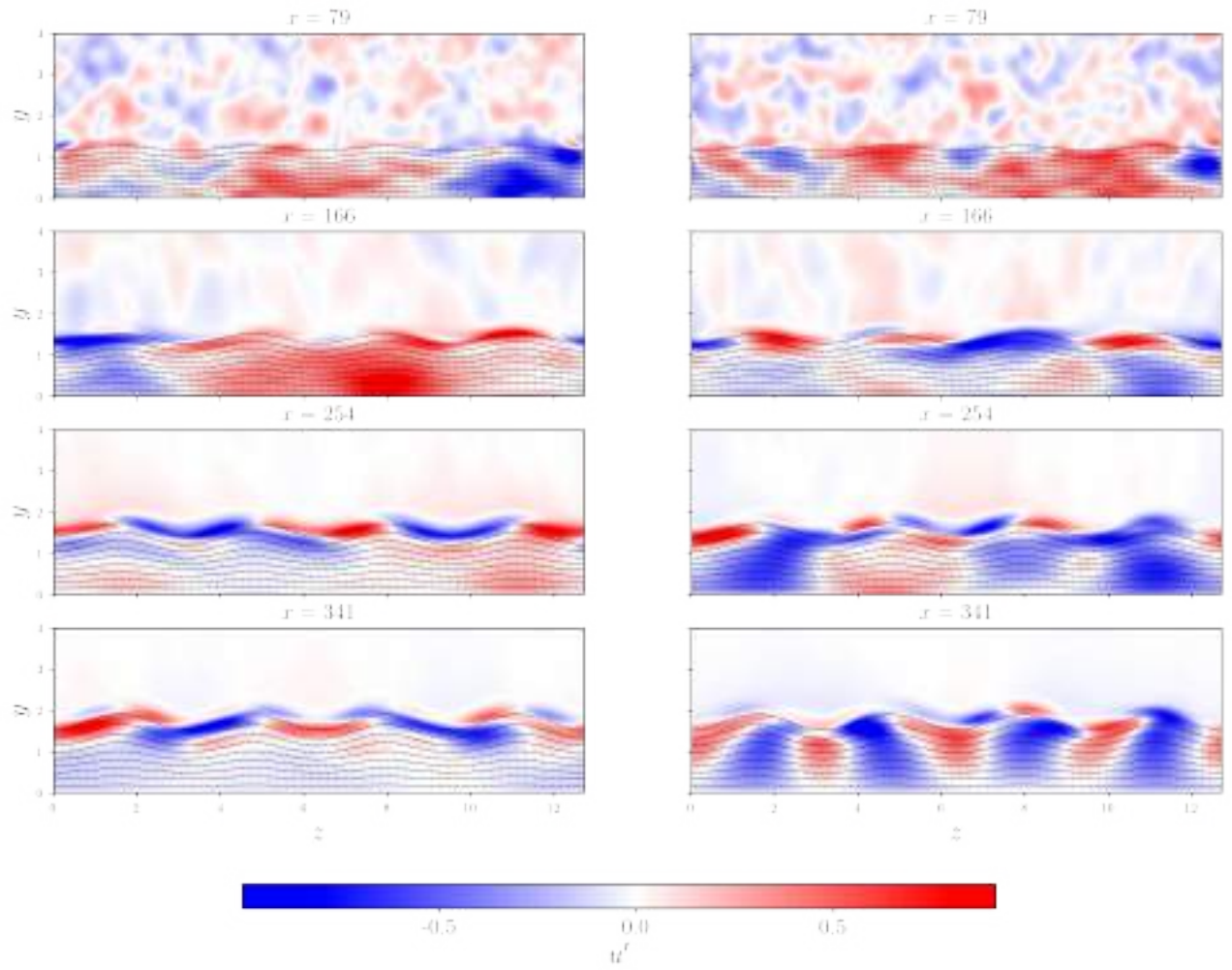


FIGURE 5.11 : Cas A1 : champs de vitesse de perturbation u'_x normalisés pour la LDNS (gauche) et la DNS (droite)

5.4.2.2 Cas A2

La dynamique du cas A2 est présentée en Fig. 5.12. Similairement, nous observons la propagation du bruit blanc en $x = 79$ avec un début d'amplification de perturbations non identifiables au sein de la couche limite. La progression de ces perturbations dans la direction x donne lieu à des structures visibles en $x = 166$ avec notamment pour le champ LDNS une structure subharmonique ($\lambda = 2\lambda_S$) en partie haute de la couche limite. Cette instabilité est plus difficilement perceptible pour le calcul DNS. La structure subharmonique continue de s'amplifier et est nettement visible en $x = 254$ pour la LDNS. Nous notons également la présence de fluctuations de plus faible amplitude plus proches de la paroi. Enfin, à la fin du domaine, la croissance des instabilités mène à une perturbation subharmonique clairement marquée pour le calcul LDNS. Associée à cette perturbation, en observant la DNS nous remarquons clairement le mouvement symétrique et subharmonique dans la direction z du champ de vitesse que nous avons relevé. Ce mouvement symétrique se manifeste par l'instabilité subharmonique observée dans le plan (x, z) en Fig. 5.10.

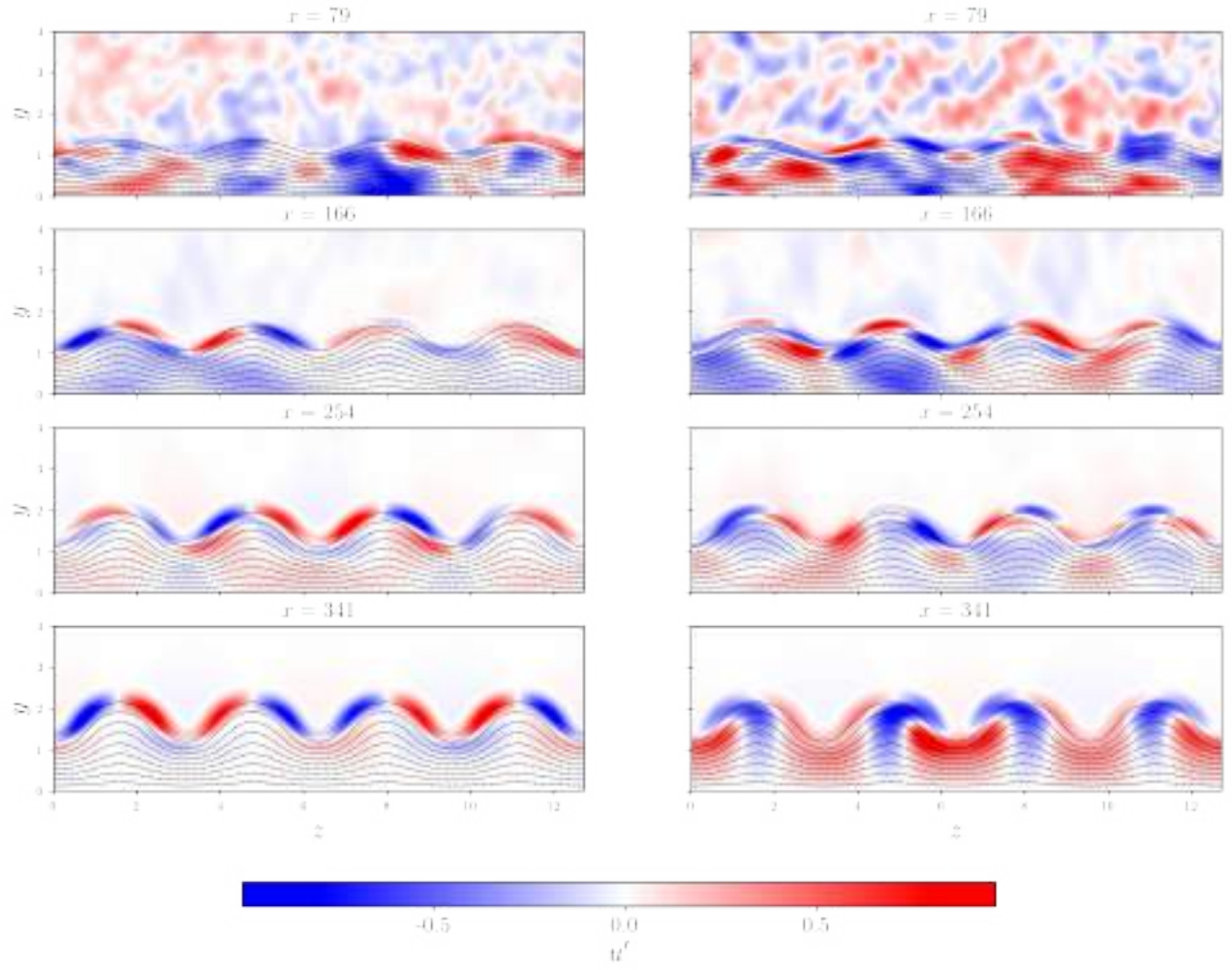


FIGURE 5.12 : Cas A2 : champs de vitesse de perturbation u'_x normalisés pour la LDNS (gauche) et la DNS (droite)

5.4.2.3 Cas A₃

Les champs de perturbations de ce cas montrent en début de domaine une faible amplification du forçage au sein de la couche limite. Des structures identifiables émergent à compter de $x = 166$ où nous pouvons observer des perturbations anti-symétriques au sommet des streaks lentes pour le calcul LDNS. Dans le cas de la DNS, il est difficile d'identifier des structures similaires pour cet instantané du champ de perturbation. Néanmoins, la faible visibilité du bruit ambiant met en avant l'amplification des perturbations dans la couche limite. Une comparaison plus directe est possible en $x = 254$ où des instabilités similaires sont clairement remarquables pour les deux simulations. Enfin, à la fin du domaine le champ DNS est devenu turbulent, quelques structures tourbillonnaires s'élèvent de la paroi et sont observables. Celles-ci suggèrent la présence des streaks secondaires souvent observées dans les couches limite turbulentes (LANDAHL, 1990). Pour la LDNS, les instabilités continuent leur croissance exponentielle et présentent ce qui s'apparente à une superposition de deux instabilités localisées sur les streaks lentes. Une première instabilité de périodicité harmonique marquée, à laquelle est superposée au sommet une seconde instabilité de plus faible amplitude semblant être subharmonique. La présence de ces deux mécanismes invite à vérifier leur nature et la présence éventuelle d'interactions.

5.5 DISCUSSION

Le calcul des perturbations optimales a permis d'obtenir trois écoulements de base stationnaires. La réponse de ces états de base au forçage par un bruit blanc nous a permis d'observer trois dynamiques assez différentes. Ces différences se sont particulièrement révélées dans l'observation des champs de perturbations issus du bruit blanc. Les réponses de la LDNS pour les cas A₁, A₂ et A₃ illustrent l'amplification d'instabilités variées. Cette amplification mène au régime non-linéaire pour les cas A₂ et A₃ où nous avons clairement remarqué des mouvements symétriques et anti-symétriques.

Ces différences déjà observables sur les champs de perturbations instantanés mettent en lumière la sensibilité des mécanismes de transition aux déformations de la couche limite. Nous proposons de détailler ces mécanismes dans le chapitre suivant.

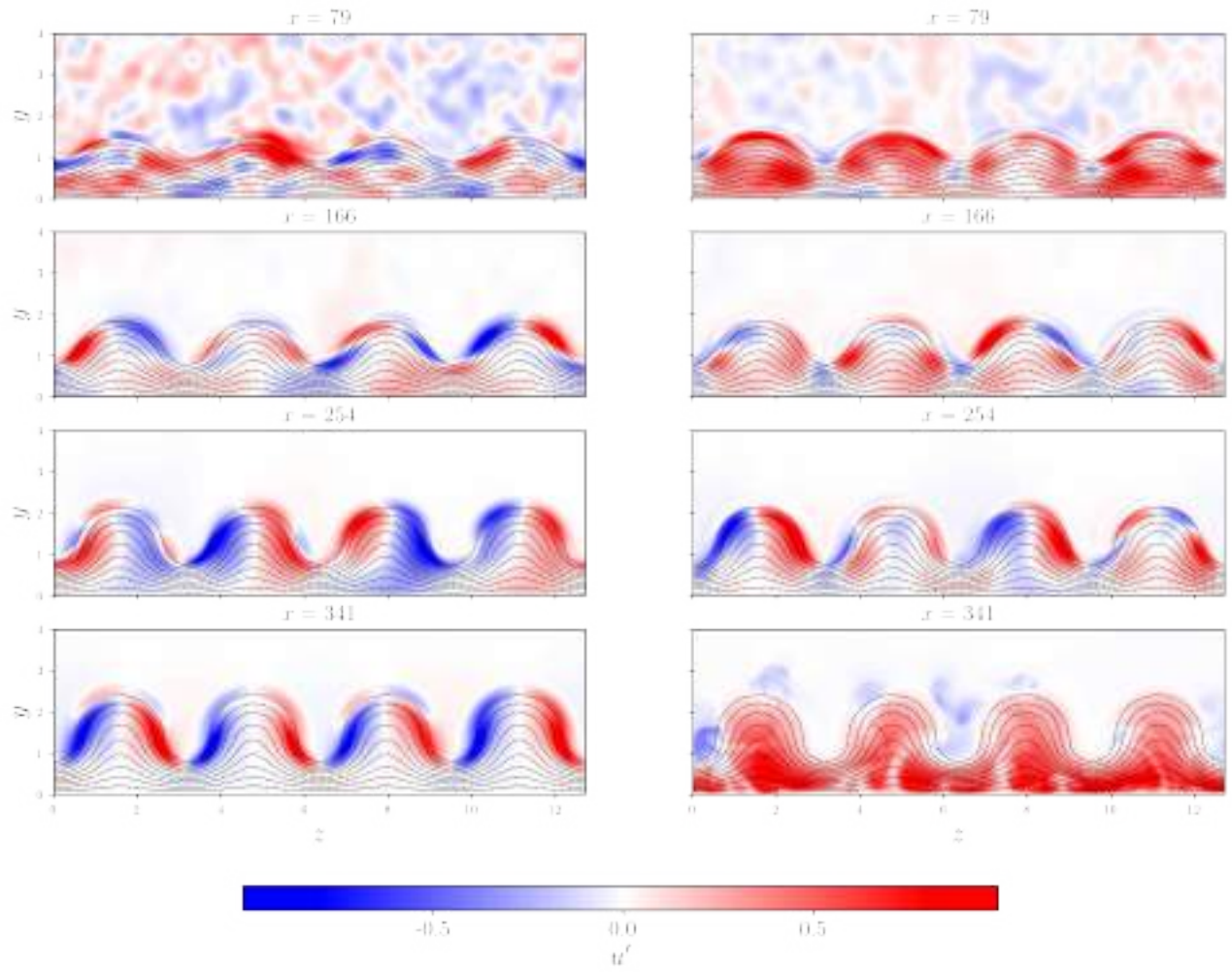


FIGURE 5.13 : Cas A3 champs de vitesse de perturbation u'_x normalisés pour la LDNS (gauche) et la DNS (droite)

STABILITÉ ET DYNAMIQUE DES STREAKS

6.1	Stabilité spatiale 2D des champs de base	168
6.1.1	Méthodologie développée	168
6.1.2	Effet d'une petite déformation	170
6.1.3	Évolution des modes SM et FM long du domaine	174
6.2	Stratégie de décomposition	178
6.2.1	Analyse de Fourier et formalisme de Floquet	178
6.2.2	Formulation SPOD pour les structures L -périodiques	181
6.3	Décomposition de l'écoulement	186
6.3.1	Réponse linéaire fin de domaine	186
6.3.2	Modes Floquet-SPOD dominants	187
6.4	Dynamique non-linéaire	190
6.4.1	Évolution des spectres en régime non-linéaire	191
6.4.2	Contenu fréquentiel avant la dynamique non-linéaire	193
6.4.3	Évolution des modes dominants	194
6.4.4	Scénarios de transition suggérés	196
6.5	Discussion sur la dynamique des streaks	200

Nous proposons d'étudier les effets d'une déformation progressive de la couche limite sur l'évolution des instabilités convectives et le scénario de transition. Une première analyse de la stabilité locale 2D des écoulements de base est proposée pour caractériser les instabilités présentes. Nous mettons en avant une augmentation du nombre de modes instables. Par la suite la stabilité des modes de streaks et du premier mode oblique est discutée. Nous nous appuyons sur ces résultats pour identifier les instabilités discutées sur les champs de perturbations. Cette identification est rendue possible par la généralisation de la SPOD aux écoulements de base non homogène L -périodiques. Après l'identification des instabilités, des divergences importantes du scénario de transition en présence de streaks au regard de la couche limite hypersonique sans streaks sont mises en avant.

6.1 STABILITÉ SPATIALE 2D DES CHAMPS DE BASE

Nous proposons d'étudier la stabilité des écoulements de base A_1 , A_2 & A_3 à l'aide d'une analyse de stabilité spatiale 2D localement parallèle. Nous chercherons à comprendre quels changements implique une petite déformation de la couche limite sur le spectre spatial de la plaque plane étudié en Sec. 3.2.1. Les différents modes instables issus de cette petite déformation seront identifiés et particulièrement nous suivrons l'évolution des premiers modes obliques et des modes de streaks avec la modulation de la couche limite.

6.1.1 Méthodologie développée

Nous posons un problème de stabilité spatiale, 2D, localement parallèle pour les écoulements de bases contenant des streaks. La Fig. 6.1 présente de façon générale l'évolution du profil de l'écoulement dans la direction x et nous remarquons la nature non homogène de la couche limite dans le plan (x, y) . Les écoulements de base $\bar{q}_{S,i}$ des cas A_i , $i \in [1, 2, 3]$, obtenus précédemment sont des points fixes de l'opérateur non linéaire des équations de Navier-Stokes : $\mathcal{N}$. Nous pouvons linéariser les équations autour d'un de ces états, nous obtenons ainsi l'équation de la dynamique des perturbations q' pilotée par l'opérateur linéaire $\mathcal{L}_{\bar{q}_{S,i}}$:

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = \mathcal{L}_{\bar{q}_{S,i}} q'. \quad (6.1)$$

Le problème aux valeurs propres local et 2D est retrouvé à partir de cette équation en introduisant des perturbations harmoniques. Avec l'hypothèse d'une direction parallèle selon x et de deux directions non homogènes selon y et z , nous avons l'expression de q' suivante :

$$q'(y, z, t) = \hat{q}'(y, z) \exp i(\alpha x - \omega t), \quad (6.2)$$

où $\hat{q}'(y, z)$ est le vecteur propre. Les paramètres α et $\omega = 2\pi f$ sont respectivement le nombre d'onde en x et la fréquence. Après développements, nous retrouvons le problème aux valeurs propres général pour les équations de Navier-Stokes compressibles, donné en Sec. 1.1 :

$$\omega L_0 q' = (F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2) q'. \quad (6.3)$$

Le problème spatial est alors obtenu en choisissant $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. Ce problème aux valeurs propres permet de retrouver le spectre des valeurs propres complexes α et les fonctions propres $\hat{q}'(y, z)$ associées pour des perturbations de fréquence ω sur des profils $\bar{q}_{S,i}(y, z)$ des écoulements de base. Nous remarquons de nouveau que l'Eq. 6.3 nous amène à un problème aux valeurs propres polynomial en α .

À la différence du cas 1D présenté pour la couche limite de Blasius en Sec. 3.2.2 où la taille du problème aux valeurs propres était faible et permettait d'utiliser des méthodes de décomposition directes (algorithme QZ). Le problème de stabilité 2D

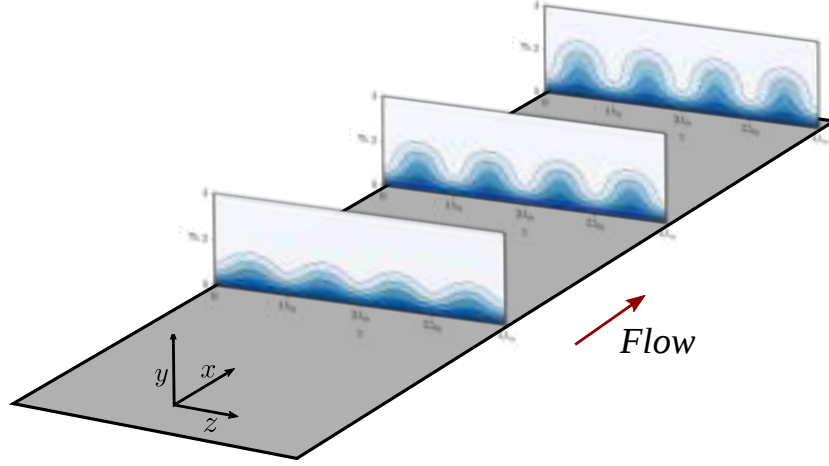


FIGURE 6.1 : Exemple de plans (y, z) employés pour l'analyse spatiale LST 2D

ci-dessus implique des opérateurs $(\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{L}_0)$ largement plus lourds et des méthodes numériques particulières que nous décrirons ci-après. Pour permettre l'utilisation d'algorithmes efficaces, nous réécrivons un problème aux valeurs propres généralisé¹ à partir du problème polynomial en considérant un vecteur de perturbation de la forme : $\mathbf{q}'' = (\mathbf{q}', \alpha \mathbf{q}')^T$. Ce vecteur de perturbation nous permet de formuler le problème aux valeurs propres spatial avec les matrices bloc suivantes où $\mathbf{I}$ et $\mathbf{0}$ sont respectivement les matrices identité et nulles.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega \mathbf{L}_0 - \mathbf{F}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{\mathbf{L}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \alpha \mathbf{q}' \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 & \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \mathbf{q}' \\ \alpha \mathbf{q}' \end{bmatrix}. \quad (6.4)$$

La résolution numérique du problème est réalisée en deux étapes. Les opérateurs linéaires sont construits avec la solution DNS $\bar{\mathbf{q}}_{S,i}(y, z)$ à la position x choisie. Ce calcul des opérateurs est réalisé sur Matlab à l'aide d'un code réalisé par SCHMIDT et RIST (2014) à partir des opérateurs développés par MACK (1984). Ce calcul repose sur des matrices de dérivation construites avec des différences finies centrées d'ordre 6. À la différence de l'approche 1D reposant sur une méthode de collocation spectrale, l'approche par différences-finies permet d'obtenir des matrices de différentiation diagonales par bandes, menant à des matrices creuses pour les opérateurs linéaires de l'Eq. 6.4. Une fois les opérateurs $(\mathbf{F}_0, \mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{L}_0)$ construits, la seconde partie de la procédure de résolution a été réalisée lors de cette étude.

Cette procédure repose sur l'utilisation conjointe de Python et des bibliothèques d'algèbre parallélisées SLEPc et PETSc². Ce choix est motivé par l'objectif plus général

¹ Cette formulation nous fait certes passer de matrices creuses de taille (N_{dof}^2) à $(2N_{dof})^2$, mais elle nous affranchit de la résolution numérique du problème polynomial et est compensée par les algorithmes plus efficaces pouvant être utilisés.

² Plus particulièrement les API Python de ces bibliothèques : SLEPc4py & PETSc4py. Voir : <https://slep4py.readthedocs.io/en/stable/>

de pouvoir résoudre des problèmes aux valeurs propres arbitraires dans un cadre HPC en tirant profit de la parallélisation efficace du calcul. Avec ces outils, le problème en Eq. 6.4, sous la forme compacte : $\mathbf{L} = \alpha \mathbf{M}$, est résolu par une approche itérative avec la méthode de Krylov-Shur (STEWART, 2002) et une factorisation LU via la librairie MUMPS³. Cette méthode ne calcule pas tout le spectre, ce qui représenterait un calcul trop lourd pour la taille des opérateurs 2D (THEOFILIS, 2011), l'approche itérative recherche plutôt les N_α valeurs propres de plus grande amplitude. La valeur de N_α définit la taille effective du problème aux valeurs propres résolu.

Pour notre problème, les valeurs propres d'intérêt sont situées proche de l'axe $\Im(\alpha) = 0$, nous utilisons donc une stratégie "shift-inverse" pour concentrer la recherche autour d'une cible $\tau \in \mathbb{C}$, connaissant a priori une localisation probable des valeurs propres d'intérêt dans le plan complexe (Sec. 3.2.1 - modes S & F). Ce problème transformé a la forme :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{L}} \mathbf{q}' &= \mu \mathbf{q}' \quad ; \quad \hat{\mathbf{L}} = (\mathbf{L} - \tau \mathbf{M})^{-1} \mathbf{M}, \\ \mu &= \frac{1}{\alpha - \tau}. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Numériquement, les matrices creuses $\mathbf{L}$ et $\mathbf{M}$ de l'Eq. 6.4 sont construites sous forme d'objets PETSc parallèles pour une fréquence ω donnée depuis les opérateurs de l'Eq. 6.3. Après définition du problème aux valeurs propres parallèle, la résolution est menée sur n -processus MPI pour une cible τ et un nombre de valeurs propres N_α donné.

La méthodologie de résolution du problème de stabilité spatiale localement parallèle et 2D décrite, permet de retrouver les modes propres instables des couches limites avec streaks. L'outil de calcul développé ici facilite la recherche de ces valeurs propres pour ce problème numérique non trivial à l'aide d'algorithmes efficaces. Nous proposons alors de commencer cette analyse par une évaluation de l'effet d'une petite déformation de la couche limite sur le spectre des valeurs propres.

6.1.2 Effet d'une petite déformation

Nous posons le problème aux valeurs propres pour deux états de la couche limite. Un premier profil est pris dans la zone non perturbée en $x = 0$ avant l'introduction de la perturbation optimale. Le second profil est pris sur le cas A1 en $x = 25$ après une très légère croissance de la streak. À cette position l'amplitude de la streak est de l'ordre $A_{su} = 0.016$.

Nous calculons les spectres spatiaux de ces deux écoulements de base pour deux streaks, dans un domaine périodique pour la direction z . Les conditions limites définies ici seront employées pour les études successives. Nous cherchons

³ <http://mumps-solver.org/>

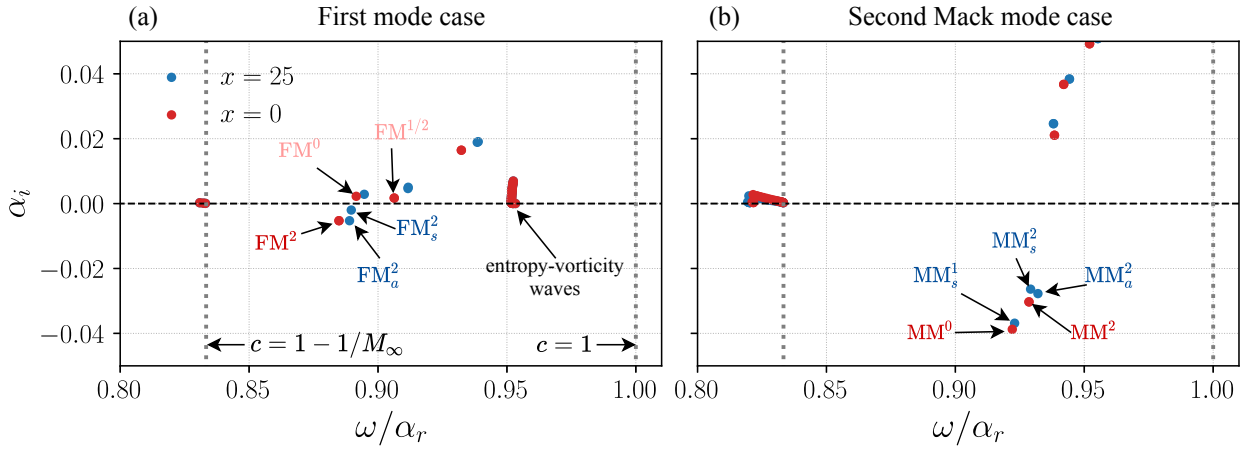


FIGURE 6.2 : Comparaison des spectres spatiaux aux fréquences $f = 0.1$ (gauche) et $f = 0.32$ (droite) entre $x = 0$ (rouge) et $x = 25$ (bleu) pour A1. Affichage des $N_\alpha = 50$ valeurs propres les plus proches de τ

des perturbations s'annulant à la paroi et à l'infini pour les conditions de Dirichlet suivantes :

$$\mathbf{q}'(y = 0) = 0 \quad \mathbf{q}'(y = y_{\max}) = 0, \quad (6.6)$$

avec $y_{\max}$, la hauteur du domaine de calcul, choisie à $y_{\max} = 40$. Le domaine de calcul dans l'espace $y \times z \in [0, 40] \times [0, 2\lambda_S]$ est discrétisé avec $N_y \times N_z = 200 \times 150$ points, ce choix est basé sur une convergence en maillage des valeurs propres discrètes. Une distribution de points identique à celle de la Sec. 3.2.1 est employée, avec un paramètre $y_i = 1.5$.

Pour nos écoulements de base, nous savons d'après les résultats obtenus en Sec. 3.2.1 qu'en l'absence de streak, nous avons la famille des ondes du premier mode de Mack et du second mode de Mack. Nous savons ici que les valeurs propres associées à ces modes ont une vitesse de phase située entre $c_\phi = 1 - 1/M_\infty$ et $c = 1$. Nous utilisons cette caractéristique pour définir la cible de recherche des valeurs propres à $\tau = \omega(1 - 0.75/M_\infty) - 0.02i$, l'ajout de ω garantit la localisation de la recherche dans la zone de vitesse de phase $c_\phi \in [1 - 1/M_\infty, 1]$. Le choix de cette portion du plan complexe n'est pas anodin et correspond à la région des vitesses de phase du mode S décrit au Chap. 3 pour notre écoulement. Nous ajoutons que cette plage de vitesses de phases correspond aussi à celles du mode de streaks ANDERSSON et al. (2001). Nous recherchons ainsi les $N_\alpha = 50$ valeurs propres les plus proches de τ avec la formulation du problème en Eq. 6.5.

Nous choisissons de balayer 20 valeurs de $f \in [0.02, 0.4]$ pour suivre l'évolution du spectre spatial aux positions $x = 0$, sans streaks et $x = 25$ au début de la croissance des streaks, pour diverses fréquences. Les spectres de valeurs propres aux fréquences d'intérêt pour le premier mode oblique à $f = 0.1$ et le second mode de Mack à $f = 0.32$ sont présentés en Fig. 6.2a-b. Sur ces deux figures, nous avons en rouge les 50 valeurs propres du spectre à $x = 0$ les plus proches de τ et en bleu les 50 valeurs propres du spectre en $x = 25$. Nous remarquons plusieurs modes instables ($\alpha_i < 0$) dans ces deux spectres.

Pour faciliter l'interprétation de ces résultats, nous proposons d'adopter un système de notation permettant de classer les différentes familles de modes par fréquence et périodicité au regard des streaks. En considérant les trois familles de modes connues des couches limites hypersoniques en présence de streaks (MACK, 1984 ; PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2019), nous noterons :

- FM : la famille des ondes du premier mode oblique.
- MM : la famille des ondes du second mode de Mack.
- SM : la famille des ondes associées aux modes de streaks.

L'écoulement de base étant considéré pour deux streaks ($z \in [0, 2\lambda_S]$), les longueurs d'ondes en z des modes supportés par l'écoulement de base sont multiples de λ_S . Pour distinguer ces cas, nous utiliserons l'exposant $(\bullet)^k$ pour décrire un mode de longueur d'onde transverse $\lambda = k\lambda_S$. Avec le cas particulier des modes plan de longueur d'onde $\lambda \rightarrow \infty$ que nous noterons $(\bullet)^0$.

Comme nous le remarquerons par la suite, pour une même famille de modes, de périodicité λ identique, une distinction existe entre la nature symétrique ou anti-symétrique de la fonction propre du mode observé au regard du centre de la streak de basse vitesse. En complétant la notation introduite, nous pouvons noter $(\bullet)_s^k$ un mode symétrique de périodicité $k\lambda_S$ et $(\bullet)_a^k$ sa contrepartie anti-symétrique.

Pour terminer, nous donnons un exemple concret : le premier mode subharmonique anti-symétrique est noté : FM_a^2 et le second mode de Mack harmonique symétrique : MM_s^1 .

Nous proposons de commencer par étudier l'évolution des valeurs propres du premier mode entre $x = 0$ et $x = 25$ en Fig. 6.2a. La couche limite 2D homogène à $x = 0$ présente une seule valeur propre instable notée FM^2 correspondant à un mode oblique supporté par deux streaks, la fonction propre de ce dernier est présentée en Fig. 6.3a. Nous retrouvons une distribution identique dans la direction y au mode présenté pour la plaque plane en Chap. 3, ici montrée en 2D. En supplément de ce mode instable, le spectre du problème 2D contient également la branche des valeurs propres discrètes de toutes les longueurs d'ondes du premier modes supportées par le domaine⁴. Nous retrouvons ainsi les modes stables FM^1 et $FM^{1/2}$ indiqués en clair.

En introduisant la faible déformation à $x = 25$ et en observant le spectre associé en bleu, nous trouvons deux valeurs propres instables très proches du mode FM^2 . L'observation directe des fonctions propres associées à ces modes en Fig. 6.3b-c, révèle des modes de longueurs d'ondes $\lambda = 2\lambda_S$ suggérant une continuité⁵ avec le mode FM^2 après la petite déformation. La distribution du champ de vitesse de ces fonctions propres autour du centre de symétrie de la streak de basse vitesse,

⁴ Le premier mode est supporté par une infinité de nombres d'onde β dans la direction z , ce qui se matérialiserait par une branche continue des premiers modes obliques à nombres d'ondes β . Un exemple est donné dans la thèse de PADILLA MONTERO (2021)

⁵ Cette continuité n'est pas toujours formellement établie dans le cadre de la stabilité locale entre deux plans distincts. Elle reste possible et il existe des exemples de sa validité (HUERRE et MONKEWITZ, 1990). De surcroit, la comparaison directe des fonctions propres obtenues nous permet d'appuyer cette hypothèse de continuité.

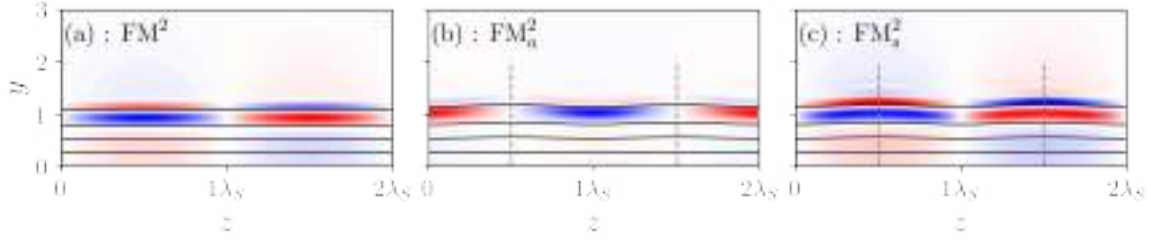


FIGURE 6.3 : Champs de vitesse u'_x des fonctions propres du problème LST-2D pour $f = 0.1$

matérialisé par une ligne en tirets, nous permet de définir le mode en Fig. 6.3b comme un mode anti-symétrique noté FM_a^2 et le mode en Fig. 6.3c comme un mode symétrique noté FM_s^2 . Le mode FM_a^2 conserve un taux d'amplification proche du mode FM^2 avec $\alpha_i \approx -5 \times 10^{-3}$ tandis que le mode FM_s^2 est moins amplifié avec $\alpha_i \approx -2 \times 10^{-3}$. Cette différence d'amplification entre les modes symétriques et anti-symétriques est cohérente avec les résultats de l'étude incompressibles de ANDERSSON et al. (2001) pour les ondes de Tollmien-Schlichting. Nous retrouvons également cette tendance pour le premier mode dans les résultats de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2017b) pour une couche limite à $M_\infty = 3$.

Nous nous intéressons maintenant à l'effet de la déformation sur le spectre spatial à $f = 0.32$, pour étudier le comportement des ondes du second mode de Mack. Les spectres sont présentés en Fig. 6.2b, nous retrouvons pour la couche limite non déformée, en rouge, deux modes instables. Le mode le plus instable MM^0 , présenté en Fig. 6.4a, est le second mode de Mack plan ($\beta = 0$) classiquement retrouvé pour la plaque plane hypersonique. Le deuxième mode le plus instable est sa première harmonique oblique ($\beta > 0$) de longueur d'onde transverse $\lambda = 2\lambda_S$ noté MM^2 et présenté en Fig. 6.4c. Ces modes retrouvés sont cohérents avec l'analyse LST de la couche limite 1D présentée en Fig. 3.2.2.

L'ajout de la déformation induit la présence de trois modes instables que nous identifions également en nous appuyant sur les fonctions propres données en Fig. 6.4a-e. Le mode le plus instable à $x = 25$ est la continuité du mode MM^0 , déformé par les streaks, sa fonction propre est donnée en Fig. 6.4b. Nous observons une modulation du pic d'amplitude sous les streaks de basse vitesse. La classification de ce mode comme un mode plan ou de longueur d'onde $\lambda = \lambda_S$ n'est pas directe. Bien que ce dernier soit la continuité du mode MM^0 dans la couche limite légèrement déformée, nous n'observons plus directement le caractère plan de l'onde clairement visible en Fig. 6.4a pour $x = 0$. Ici l'amplitude de la fonction propre semble plutôt supportée par la distribution de vitesse d'une streak, comme nous l'avons observé avec la concentration de l'amplitude en Fig. 6.4b. Devant ces considérations, nous choisissons dans ce cas d'employer la notation MM_s^1 pour identifier ce mode.

Pour le mode MM^2 (Fig. 6.4c), nous retrouvons un effet de la déformation similaire à celui observé avec le mode FM^2 , avec la séparation de ce mode en deux composantes. La première composante donnée en Fig. 6.4d est identifiée comme le

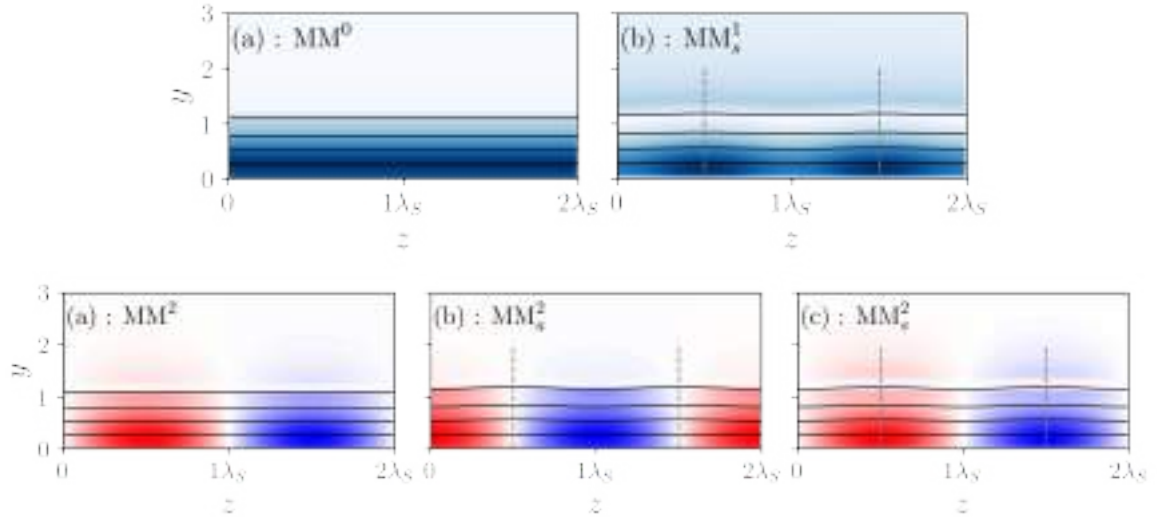


FIGURE 6.4 : Champs de vitesse u'_x des fonctions propres du problème LST-2D pour $f = 0.32$

second mode de Mack subharmonique anti-symétrique, noté MM_a^1 . Sa contrepartie symétrique est retrouvée en Fig. 6.4e et notée MM_s^1 .

À la différence des valeurs propres du premier mode, nous observons en Fig. 6.2b que l'ensemble des valeurs propres de la famille MM ont une tendance à se stabiliser avec l'ajout de la streak de faible amplitude. Cette légère stabilisation est également retrouvée par PAREDES, CHOUDHARI et LI (2016a, 2019) pour des streaks d'amplitude $A_{su} < 0.2$.

Cette première analyse LST 2D de l'effet d'une petite déformation induite par les streaks nous permet de retracer l'origine des modes symétriques et anti-symétriques retrouvés avec la présence d'une streak. Ce lien avec les modes de la couche limite sans streak n'a pas été montré clairement pour les études en régime compressible. Il permet d'obtenir un regard plus clair sur la nature des instabilités discutées. En complément, avec cette étude, nous montrons que l'ajout d'une déformation de l'ordre de 1 % de u_∞ induit déjà des changements notables sur la stabilité de la couche limite déformée. Ces changements comprennent en premier lieu un nombre accru de modes instables indépendants. En second lieu, les petites variations déjà observables du taux d'amplification soulignent la sensibilité de la couche limite aux modulations produites par les streaks et donc les variations possibles du scénario de transition. Il est intéressant de remarquer que pour le problème 1D, PARK et ZAKI (2019) montrent également une sensibilité du taux d'amplification des mode S et F du même ordre de grandeur pour variations du profil de la couche limite 1D de l'ordre de 2 %.

6.1.3 Évolution des modes SM et FM long du domaine

Après avoir évalué le comportement asymptotique des modes de la couche limite vers la limite d'une streak de très faible amplitude, nous proposons d'évaluer le

spectre des valeurs propres de la couche limite pour plusieurs positions le long du domaine. Nous souhaitons ainsi suivre les trajectoires des valeurs propres des familles de modes SM et FM au fur et à mesure que l'amplitude des streaks augmente. L'objectif est ici de préciser la classification de ces modes selon leurs valeurs propres et fonctions propres pour permettre une identification rigoureuse des structures cohérentes observées. Plus particulièrement, le comportement des modes de streak de la famille SM n'a pas été décrit en régime hypersonique à la connaissance de l'auteur. De fait, la distinction entre les modes SM et FM n'est pas triviale sans une observation du spectre des valeurs propres.

À cet effet, nous calculons les opérateurs linéaires à 30 positions successives dans les écoulements de bases A1, A2 & A3 et nous plaçons notre étude LST à $f = 0.1$, fréquence à laquelle les modes SM et FM sont amplifiés. L'utilisation de ces 30 écoulements de base successifs pour les trois cas, nous permet d'évaluer la "continuité" du spectre avec l'amplification des streaks et donc de révéler l'origine des modes instables. De nouveau, il faut noter que chaque écoulement de base 2D représente un problème de stabilité indépendant et qu'un lien entre les spectres issus de deux écoulements de base à des positions successives ne peut être directement tracé dans le cadre de l'hypothèse parallèle. Dans notre cas, nous appuyons cette continuité des spectres en observant l'évolution des fonctions propres le long du domaine, pour nous assurer de suivre la même valeur propre d'intérêt d'un écoulement de base à l'autre (HUERRE et MONKEWITZ, 1990).

Avec un domaine et des conditions de limites similaires aux cas précédents, nous calculons les 200 premières valeurs propres les plus proches de la cible $\sigma = \omega(1 - 0.75/M_\infty) - 0.02i$. Pour trois cas, nous avons donc $3 \times 30 \times 200$ valeurs propres à converger. Chaque problème LST 2D est résolu en approximativement 20 min sur 20 CPUs, les spectres et fonctions propres sont sauvegardés.

Nous présentons les résultats issus de la résolution de ces problèmes aux valeurs propres en Fig. 6.5 pour les cas A1, A2 & A3. Chacune de ces figures présente l'évolution du spectre des valeurs propres entre $x = 10$ et la fin du domaine à $x = 350$. L'évolution du spectre est matérialisée en noir et blanc. Chaque niveau de gris représente un spectre d'un écoulement de base à une position x_i donnée, avec la référence des niveaux de gris à droite. La succession de ces différents spectres nous permet ainsi d'apprécier la trajectoire dans le plan complexe de certains modes discrets d'intérêt. Ces modes discrets sont matérialisés en couleurs, avec en vert et rouge les modes des familles SM¹ et SM² et en bleu les modes FM². Leur identification est faite depuis le spectre en $x = 350$ ou en $x = 10$ en croisant les fonctions propres et la trajectoire de la valeur propre. Par exemple, nous savons avec la Fig. 6.3 que les modes FM sont instables dès $x = 10$ alors que les modes SM, quant à eux, deviennent instables pour une streak d'amplitude déterminée (ANDERSSON et al., 2001). Nous indiquons également la présence de certaines valeurs propres "artefacts". Il a été vérifié que celle-ci sont issues de réflexions parasite sur la condition aux limites à $y = y_{\max}$, elles n'influent pas sur la convergence des valeurs propres discrètes SM et FM.

En utilisant les fonctions propres $\psi_{i,j}$ des modes discrets j retrouvés aux positions x_i initiales telles que : $x = 10$ ou $x = 350$, nous retraçons la trajectoire d'un

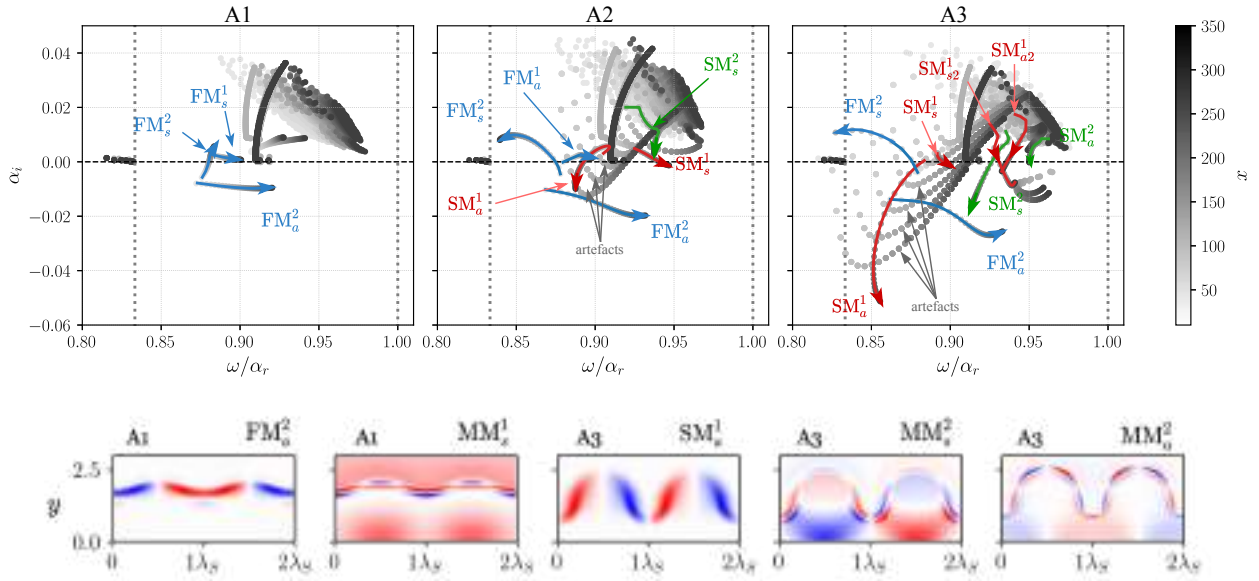


FIGURE 6.5 : Superposition des spectres de valeurs propres pour $x \in [0, 350]$ à $f = 0.1$. Les modes FM et SM sont identifiés en couleurs. Les fonctions propres en vitesse axiale de certains des modes relevés sont également présentées pour faciliter l'identification.

mode dans le plan complexe d'une position x_i à x_{i+1} par projection récursive de sa fonction propre $\psi_{i,j}$ sur la base des fonctions propres $\psi_{i+1,k}$ du spectre suivant. La fonction propre $\psi_{i+1,k}$ donnant la projection $\langle \psi_{i,j}, \psi_{i+1,k} \rangle$ la plus élevée dans le spectre à x_{i+1} est alors associée au même mode à x_{i+1} . En pratique, nous retrouvons des projections de l'ordre de $\langle \psi_{i,j}, \psi_{i+1,k} \rangle > 0.95$ entre deux positions x_i et x_{i+1} pour des valeurs propres convergées.

L'observation des trois cas révèle une dynamique intéressante, nous pouvons clairement remarquer l'augmentation du nombre de modes propres significatifs en couleurs avec l'augmentation de l'amplitude des streaks entre A1 et A3. Particulièrement dans le cas A1 (Fig. 6.5), nous pouvons suivre l'évolution des modes de la famille FM (bleu) décrits précédemment. Nous observons que seul le mode FM_a^2 reste instable tout au long du domaine avec une amplitude initiale $\alpha_i \approx -0.07$, sa composante symétrique suit une tendance à se stabiliser dès le début de l'amplification des streaks. Nous ne remarquons pas de modes de la famille SM pour ce cas.

Avec l'augmentation de l'amplitude, l'évolution du spectre du cas A2 présente des caractéristiques similaires au cas A1 pour les modes FM. De nouveau le mode FM_s^2 est rapidement stabilisé. Le mode FM_a^2 reste instable et nous devons noter son taux d'amplification accru dès $x = 10$ avec $\alpha_i \approx -0.1$, ce taux de croissance augmente continuellement et plus fortement que pour le cas A1 jusqu'en $x = 350$. Le cas A2 est donc plus instable au regard du mode FM_a^2 . En complément des modes FM, nous notons la déstabilisation du mode SM_a^1 vers $x \approx 210$ et du mode SM_s^1 vers $x \approx 255$. Ces deux positions correspondent respectivement à des amplitudes de $A_{su} = 0.195$ et $A_{su} = 0.208$, ce faible écart est expliqué par le

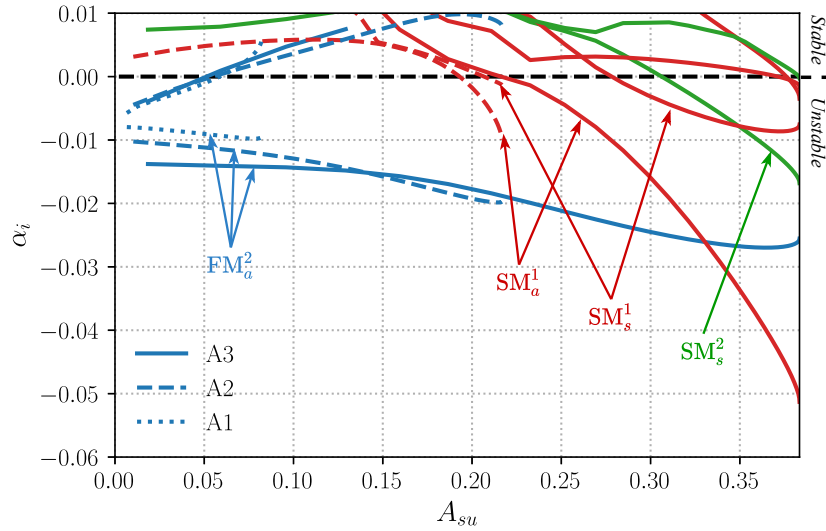


FIGURE 6.6 : Évolution de la stabilité des modes FM et SM avec l'amplitude des streaks A_{su} pour $f = 0.09$. Le code couleur est identique à la Fig. 6.5

comportement asymptotique de l'amplitude de streak du cas A2 après $x = 200$ (Fig. 5.5a). La valeur seuil de A_{su} pour laquelle le mode SM_a^1 présente quelques différences avec l'étude PSE à $M_\infty = 5.3$ de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019) ou le mode SM_a^1 n'est instable qu'après $A_{su} > 0.3$. De plus cette étude donne le mode SM_a^2 comme étant instable en premier vers $A_{su} > 0.2$, là où comme nous pouvons l'observer en vert, il reste stable pour les amplitudes de streak citées pour le cas A2. Ces différences peuvent être dues à l'utilisation d'une paroi froide avec $T_w = 0.35T_{ad}$ et la configuration conique de l'étude citée. Nous ajoutons cependant que notre résultat pour SM_a^1 est proche des résultats à $M_\infty = 3.0$ de (PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2016b) où une amplitude $A_{su} = 0.26$ avait été retrouvée. Pour le mode SM_s^2 , son instabilité marginale autour de $A_{su} = 0.2$ n'est pas attendue et n'a pas été vérifiée par ailleurs. Les études précédentes, en régime compressible et incompressible (ANDERSSON et al., 2001 ; PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2016b), donne une amplitude de l'ordre de $A_{su} > 0.35$.

Le cas A3 présente la dynamique la plus complexe. À l'instar des cas A1 et A2 les modes de la famille FM se séparent et seul le mode FM_a^2 reste instable avec amplification spatiale accru atteignant $\alpha_i = -0.028$, soit près de trois fois le taux maximal atteint par le même mode dans le cas A1. Cette amplification souligne le caractère déstabilisant des streaks sur le premier mode. Le cas A3 est également marqué par la très forte déstabilisation du mode SM_a^1 , jusqu'à $\alpha_i = -0.05$. L'augmentation de l'amplitude de la perturbation tourbillonnaire initiale générant les streaks semble ainsi fortement favoriser la déstabilisation de ce mode. Ce dernier devient instable à partir de $x = 92$ pour $A_{su} = 0.23$, soit une amplitude de streak similaire au cas A2. De manière similaire plusieurs modes de la famille SM deviennent instables successivement, nous reportons les valeurs de x et de A_{su} pour lesquels cette instabilité survient dans le cas A3 dans le Tab. 6.1. Finalement le cas A3 nous permet également de constater la déstabilisation des modes SM

subharmoniques. Particulièrement, nous observons une déstabilisation rapide du mode symétrique SM_s^2 qui fait partie des trois modes les plus instables à $x = 350$.

Une synthèse de l'évolution de la stabilité de chacun des modes instables identifiés en fonction de A_{su} est donnée en Fig. 6.6. Nous retraçons dans ce graphique l'évolution de la partie imaginaire des différents modes propres pour les cas A1, A2 & A3. Les amplitudes de streaks critiques sont clairement visibles et nous pouvons également comparer le comportement du premier mode FM_a^2 pour les trois amplitudes de streaks considérées et constater son amplification accrue avec l'augmentation d'amplitude des streaks. Nous remarquons également la dominance du mode SM_a^1 survenant vers $A_{su} = 0.33$.

Mode	SM_a^1	SM_{s2}^1	SM_s^2	SM_s^1	SM_{a2}^1	SM_a^2
x	92	127	150	267	279	338
A_{su}	0.23	0.28	0.3	0.37	0.37	0.38

TABLE 6.1 : Cas A3 : position de première instabilité des modes SM

Cette analyse de l'évolution des spectres des cas A1, A2 & A3 dans la direction x , nous a permis de clairement identifier les modes instables suivant leur comportement asymptotique avec l'augmentation de l'amplitude des streaks. Nous notons particulièrement que le premier mode subharmonique-antisymétrique FM_a^2 reste le mode dominant pour les cas A1 et A2, l'augmentation de l'amplitude de streaks favorisant sa déstabilisation. Nous avons également donné les conditions d'amplitudes pour lesquelles les modes de la famille SM deviennent instables et nous avons observé des écarts notables avec les études supersoniques précédentes. En effet, le mode dominant de la famille SM pour notre cas semble être instable plus tôt que remarqué pour les études à $M_\infty = 3.0$ et $M_\infty = 5.3$, indiquant une sensibilité accrue aux modes de streaks.

6.2 STRATÉGIE DE DÉCOMPOSITION

La dynamique observée pour les champs de vitesse en Fig. 5.10 et Figs. 5.11, 5.12 et 5.13, indique la présence d'instabilités variées émergeant du bruit blanc en fonction de l'amplitude. Les structures observées sont parfois difficilement identifiables et présentent des périodicités différentes dans la direction z . Afin de faciliter cette identification, nous proposons dans les prochaines sections une méthodologie de décomposition de ces écoulements tirant avantage de la périodicité spatiale des streaks. Ces sections s'appuieront particulièrement sur le diagramme de synthèse donné en Fig. 6.7.

6.2.1 Analyse de Fourier et formalisme de Floquet

Usuellement, pour décomposer la dynamique instationnaire étudiée, nous faisons usage des directions homogènes et périodiques de l'écoulement. Dans le chapitre

précédent, la couche limite de Blasius présentait une périodicité et une direction homogène dans la direction z . Nous pouvions alors tirer parti avec la transformée de Fourier en z afin d'étudier chaque mode transverse discret indépendamment (Sec. 3.4). Dans le cas de la couche limite déformée par les streaks étudiée ici, les nombres d'ondes présentés en Fig. 5.6 sont couplés et cette analyse par modes de Fourier uniques et indépendants n'est plus directement possible. En effet, les écoulements de base $\bar{q}_S$ ou champs de perturbations q'_S ne présentent plus un écoulement homogène dans la direction transverse, tel que $\partial \bar{q}_S / \partial z \neq 0$, empêchant alors la décomposition directe. Cependant, nous notons que de par les conditions périodiques aux limites $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$, nous pouvons toujours appliquer la transformée de Fourier et développer une décomposition adaptée au streaks.

Bien qu'une séparation par modes de Fourier uniques ne soit pas possible pour la couche limite avec streaks, une décomposition de la dynamique dans la direction z reste ici essentielle à deux égards. Premièrement, comme nous l'avons observé en Figs. 5.11, 5.12 et 5.13, les champs de perturbations présentent parfois des superpositions de structures de longueurs d'ondes transverses différentes et superposées, dont nous ne connaissons pas la fréquence a priori et que nous souhaitons séparer rigoureusement par leur périodicité en z . Cette séparation permet d'éviter, dans le spectre de Fourier en temps, la superposition de modes de fréquence identique, mais de périodicités en z différentes. Deuxièmement, devant le volume de données (20To) d'une simulation, la transformation et l'analyse dans l'espace de Fourier sur un jeu de modes bien choisis plutôt que le domaine complet, permet de réduire le volume de données total à conserver en mémoire et rendre le post-traitement plus efficace (TAIRA et al., 2017).

Afin de développer cette décomposition, nous pouvons commencer par remarquer la nature L -périodique de l'écoulement de base dans la direction z avec $L = 4$ répétitions successives du motif d'une streak. Ainsi, en sachant que notre écoulement de base d'état $\bar{q}_S(x, y, z)$ respecte la périodicité suivante

$$\bar{q}_S(x, y, z) = \bar{q}_S(x, y, z + n\lambda_S), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (6.7)$$

nous pouvons alors utiliser l'analyse de Floquet (FLOQUET, 1883) dans la direction z et suivre la démarche employée par ANDERSSON et al. (2001), HERBERT (1988), KOPIEV et al. (2004) et LAJÚS et al. (2019) pour des couches limites avec streaks ou des jets déformés. Nous exploitons cette L -périodicité pour décomposer l'écoulement et écrire le vecteur de perturbations sous forme de l'onde suivante, avec le motif élémentaire sur une streak noté $\check{q}'_S(x, y, z)$

$$q'_S(x, y, z) = \check{q}'_S(x, y, z) \exp(i2\pi Mz/L_z), \quad (6.8)$$

où $M \in \mathbb{N}$ l'exposant de Floquet donne la périodicité de la perturbation au regard de $\bar{q}_S$ et L_z la longueur du domaine en z . Une perturbation $\check{q}'_S(x, y, z)$ étant périodique dans la direction z , nous pouvons l'écrire comme une somme de modes de Fourier sur les N_ζ points dans la direction transverse

$$\check{q}_S(t, x, y, z) = \sum_{k=0}^{N_\zeta-1} \hat{q}_S(t, x, y) \exp(-i2\pi Lkz/L_z). \quad (6.9)$$

Mode index in γ_M	1	2	...	36	37	38	...	$N_\zeta/L - 1$	N_ζ/L
$-\frac{L}{2} < M \leq \frac{L}{2}$	$\gamma_M = M - Lk$								
-1	-147	-143	...	-5	-1	3	...	145	149
0	-144	-142	...	-4	0	4	...	144	148
1	-149	-145	...	-3	1	5	...	143	147
2	-146	-142	...	-2	2	6	...	146	150

TABLE 6.2 : Exemple des sets γ_M retrouvés pour chaque exposant de Floquet

En réutilisant cette expression dans l'Eq. 6.8 et en considérant toutes les valeurs de M possibles, nous obtenons l'expression suivante du vecteur de perturbation

$$\begin{aligned} \mathbf{q}'_S(t, x, y, z) &= \sum_M \sum_k \hat{\mathbf{q}}'_S(t, x, y) \exp(-i2\pi Lkz/L_z) \exp(i2\pi Mz/L_z), \\ \mathbf{q}'_S(t, x, y, z) &= \sum_M \sum_k \hat{\mathbf{q}}'_S(t, x, y) \exp(-i2\pi(M - Lk)z/L_z). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Nous retrouvons ainsi une base complète dans l'espace de Fourier. Cette base nous permet également de séparer les différentes périodicités du champ de perturbation au regard d'une streak selon la famille de modes γ_M choisie,

$$\gamma_M = \{M - Lk \mid k \in [-N_\zeta/2, N_\zeta/2], M, L \in \mathbb{N}\}. \quad (6.11)$$

$$(6.12)$$

Le domaine d'étude composé de L streaks n'admet que certaines périodicités et restreint le choix de M tel que $M \in]-L/2, L/2]$. Ce choix de M permet de donner les nombres d'ondes associés aux motifs de périodicités $\lambda \in [\lambda_S, 2\lambda_S, 4\lambda_S]$. Une telle décomposition est présentée en étape (6) de la Fig. 6.7, où nous pouvons voir après application de l'Eq. 6.10, que le spectre de Fourier en z du vecteur de perturbation $\mathbf{q}'(\mathbf{x}, t)$ se décompose en trois sous-ensembles γ_M (rouge, vert, bleu), selon la valeur de M choisie. Nous faisons également remarquer que pour $L = 1$, nous avons $M = 0$ et l'expression 6.10 revient à la somme des modes de Fourier usuelle.

En pratique, pour $L = 4$ streaks, nous avons $M \in [-1, 0, 1, 2]$. Avec ces indices, nous donnons en exemple dans le Tab. 6.2 les valeurs retrouvées de γ_M sur quelques modes avec notre le de points N_ζ dans la direction z . Les valeurs indexées de 1 à N_ζ/L correspondent à une numérotation des modes de la série de Floquet pour mieux les désigner.

Nous remarquons particulièrement avec le tableau 6.2 que pour $M = -1$ et $M = 1$ nous avons $\gamma_1 = -\gamma_{-1}$. En considérant que $\bar{\mathbf{q}}_S \in \mathbb{R}^{N_{\text{dof}}}$ et $\mathbf{q}'_S \in \mathbb{R}^{N_{\text{dof}}}$, les spectres en nombre d'onde obtenus avec la décomposition 6.10 présentent une symétrie hermitienne. Nous pouvons conclure que les modes issus des exposants $M = -1$ et $M = 1$ sont identiques et ainsi n'utiliser que la famille des modes γ_1 . De même, cette symétrie hermitienne nous permet de ne retenir que les modes $k \geq 0$ de façon générale pour les spectres discrets issus d'une série réelle (étapes 4 & 5 de la Fig. 6.7).

Avec ce formalisme, les différentes valeurs de M désigneront par la suite :

- $M = 0$: les modes de périodicité transverses harmoniques $\lambda = \lambda_S$;
- $M = 1$: les modes de périodicité $\lambda = 4\lambda_S$;
- $M = 2$: les modes de périodicité subharmoniques $\lambda = 2\lambda_S$.

L'approche développée nous permet ainsi de rigoureusement séparer les différentes ondes périodiques en z et couplées aux streaks du vecteur $\mathbf{q}'_S$. L'extension de cette décomposition à l'approche SPOD pour construire une base orthogonale par famille de modes γ_M n'étant cependant pas triviale elle nécessite quelques développements présentés ci-après.

6.2.2 Formulation SPOD pour les structures L -périodiques

Nous souhaitons décomposer de nouveau notre écoulement sous forme d'une base orthogonale optimale au sens de la SPOD (LUMLEY, 1970; SCHMIDT et COLONIUS, 2020; TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS, 2018). Pour effectuer cette décomposition, nous partons du vecteur de perturbation $\mathbf{q}'_S(t, x, y, z)$, défini en temps et espace. Sans perte de généralité, nous n'utiliserons que la direction z tel que $\mathbf{q}'_S(t, z)$. En rappelant la notation des opérateurs de transformée de Fourier en temps $\mathcal{F}_\omega$ et en espace $\mathcal{F}_\beta$, nous utiliserons les conventions suivantes, $\mathcal{F}_\omega(\bullet) = \hat{\bullet}$; $\mathcal{F}_\beta(\bullet) = \tilde{\bullet}$ et $\mathcal{F}_\omega \circ \mathcal{F}_\beta(\bullet) = \hat{\tilde{\bullet}}$ pour la composition des transformées⁶.

Nous avons indiqué précédemment que nous souhaitons que cette décomposition de la dynamique respecte deux propriétés.

- **Propriété (A)** : la base orthogonale est construite pour une famille de modes γ_M issue de la décomposition développée avec l'analyse de Floquet en Eq. 6.10. Cette propriété nous permet de séparer la solution $\mathbf{q}'_S$ en trois familles de modes de Fourier décrivant les périodicités données en étape (6) de la Fig. 6.7.
- **Propriété (B)** : la SPOD est calculée dans l'espace de Fourier pour la direction z , de sorte que le vecteur soit défini comme $\hat{\tilde{\mathbf{q}}}'_S(\omega, \beta)$. Ce calcul dans l'espace de Fourier est utilisé pour réduire la taille de la donnée à traiter sur cet écoulement non homogène en z en n'utilisant que des sous-ensembles γ_M des modes.

Une première utilisation de la SPOD dans un tel contexte a été faite par RIGAS et al. (2019). Dans leur approche, le vecteur $\mathbf{q}'_S(t, z)$ est transformé dans l'espace de Fourier avec l'Eq. 6.10 pour obtenir $\tilde{\mathbf{q}}'_S(t, \beta)$, puis une famille de modes γ_M est retenue (étape 5 puis 6, Fig. 6.7) et enfin, le vecteur $\mathbf{q}'_S$ est transformé de nouveau dans l'espace physique en z en obtenant $\mathbf{q}'_{S, \gamma_M}(t, z)$. Ce vecteur est ensuite transformé dans l'espace des fréquences pour obtenir $\hat{\mathbf{q}}'_{S, \gamma_M}(\omega, z)$ et il est utilisé pour effectuer le calcul de la SPOD, mais ce calcul est fait sur l'ensemble complet des points du domaine. Cette approche respecte ainsi la propriété (A) en ne sélectionnant qu'une périodicité en z des perturbations issues du set γ_M , mais ne respecte

⁶ La notation inverse ($\tilde{\tilde{\bullet}}$) existe aussi et représente la transformée $\mathcal{F}_\beta \circ \mathcal{F}_\omega(\bullet)$

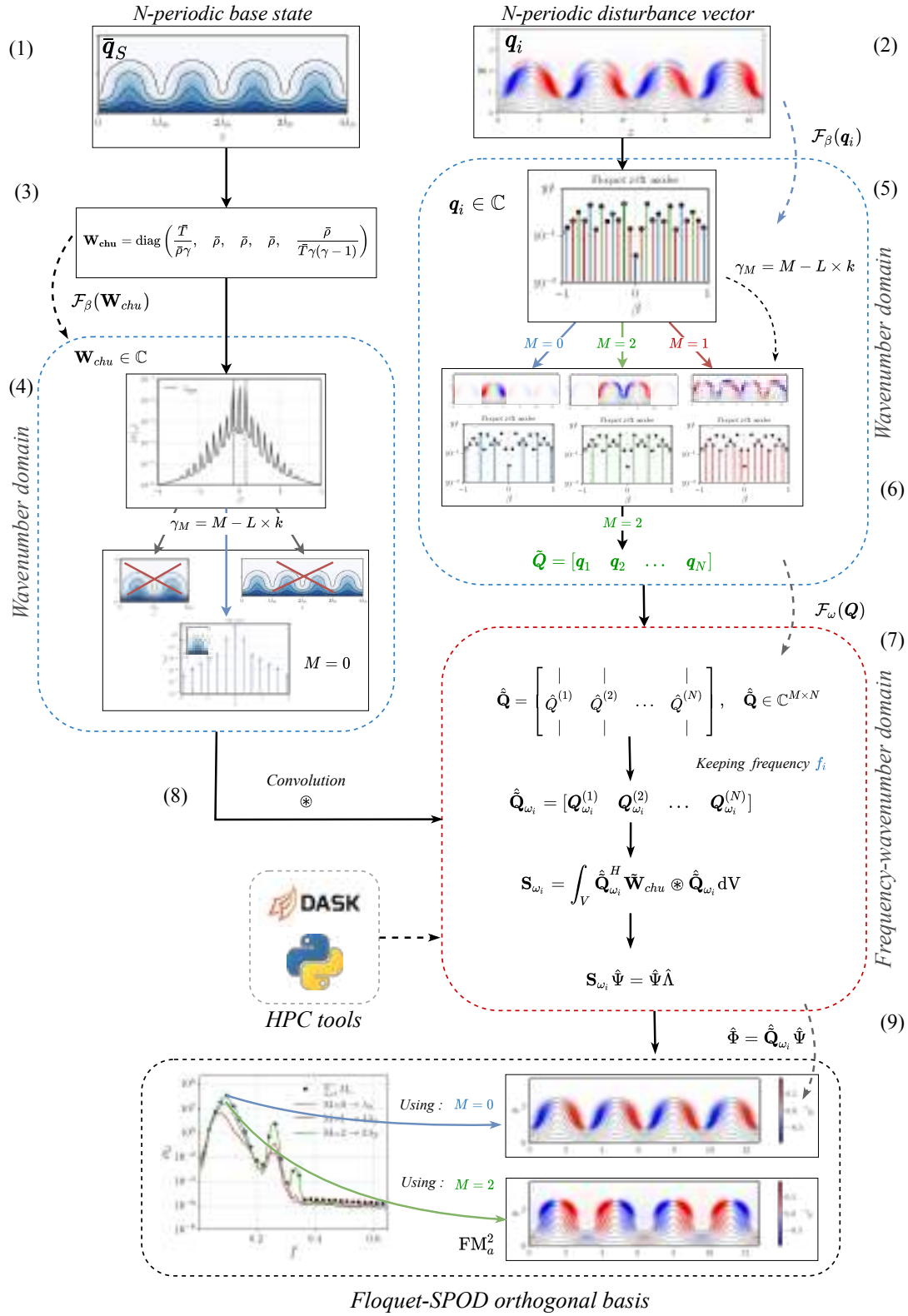


FIGURE 6.7 : Diagramme récapitulatif de la méthodologie de décomposition utilisant l'analyse de Floquet couplée à l'approche SPOD développée

pas la propriété (B) car la base de la SPOD est calculée dans l'espace (ω, z) avec les vecteurs $\hat{\mathbf{q}}'_{S, \gamma_M}(\omega, z)$ plutôt que dans l'espace (ω, β) .

6.2.2.1 Le problème de l'écoulement de base non-homogène

En partant de l'idée initiale de RIGAS et al. (2019), nous développons une procédure de calcul de la SPOD permettant d'assurer la propriété (B) de notre décomposition et de réduire la taille de l'analyse d'un facteur L .

Nous partons de l'approche SPOD par la méthode des snapshots (SCHMIDT et COLONIUS, 2020), les détails de la méthode sont donnés en Annexe B.1. Par souci d'exhaustivité pour la démonstration nous en donnons quelques éléments ici.

Nous considérons que la dynamique est décrite par N_t vecteurs de N_v variables sur N_z points notés $\mathbf{q}_i(t, z) \in \mathbb{R}^{N_v \times N_z}$ à différents instants t_i séparés de Δt et rangés dans la matrice,

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_P] \in \mathbb{R}^{N_v \times N_z \times N_t}. \quad (6.13)$$

Pour le cas simple d'un écoulement homogène et périodique dans la direction z , un résumé rapide de l'approche usuelle consiste en un calcul de la transformée de Fourier pour avoir $\tilde{\mathbf{q}}(t, \beta)$ permettant ensuite de calculer la SPOD pour une valeur de β choisie.

Après séparation en N_B blocs recouvrants de longueur N_i de la matrice $\mathbf{Q}$ pour avoir un ensemble de N_B matrices $\mathbf{Q}^{(n)}$, $n \in [1, N_B]$. Nous calculons la transformée de Fourier en temps de chaque bloc pour obtenir,

$$\hat{\mathbf{Q}}^{(n)} = [\hat{\mathbf{q}}_1^{(n)}(\omega, \beta), \hat{\mathbf{q}}_2^{(n)}(\omega, \beta), \dots, \hat{\mathbf{q}}_{N_i}^{(n)}(\omega, \beta)] \in \mathbb{C}^{N_v \times N_z \times N_i} \quad (6.14)$$

La SPOD est alors calculée avec la décomposition en valeurs propres de la matrice de densité spectrale croisée $\mathbf{S}_{\omega_j}$. Celle-ci est obtenue en réarrangeant les valeurs de $\hat{\mathbf{Q}}$ pour une fréquence ω_j et un nombre d'onde β_l avec l'écriture simplifiée $\hat{\mathbf{q}}_1(\omega_j, \beta_l) = \hat{\mathbf{q}}_{1, \omega_j, \beta_l}$, de sorte que,

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j, \beta_j} = [\hat{\mathbf{q}}_{\omega_j, \beta_l}^{(1)}, \hat{\mathbf{q}}_{\omega_j, \beta_l}^{(2)}, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{\omega_j, \beta_l}^{(n)}] \in \mathbb{C}^{N_v \times N_i}, \quad (6.15)$$

est utilisé pour donner,

$$\mathbf{S}_{\omega_j} = \int_z \hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j, \beta_j}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j, \beta_j}. \quad (6.16)$$

Ici $\mathbf{W}$ est une matrice de poids appropriée pour le calcul du produit interne $\langle \hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j, \beta_j}, \hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j, \beta_j} \rangle_{\mathbf{W}}$ et $(\bullet)^H$ la matrice transconjuguée. Dans le cadre notre écoulement compressible, nous utilisons pour $\mathbf{W}$ la formulation, dépendante de l'état de base $\bar{\mathbf{q}}(z)$, donnée par CHU (1965) et HANIFI, SCHMID et HENNINGSON (1996),

$$\mathbf{W}_{\text{chu}}(\bar{\mathbf{q}}) = \text{diag} \left(\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}\gamma}, \quad \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}, \quad \bar{\rho}, \quad \frac{\bar{\rho}}{\bar{T}\gamma(\gamma-1)} \right). \quad (6.17)$$

La difficulté de l'écriture d'une décomposition par SPOD respectant la propriété (B) réside ainsi dans la dépendance de cette norme⁷ à l'état de base $\bar{q}(z)$ non homogène et L -périodique. Nous rappelons que dans le cadre simplifié de $\bar{q}(z)$ homogène, un seul profil en $z = z_i$ de $\bar{q}$ peut être utilisé, avec $\mathbf{W}(\bar{q}(z = z_i)) \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$. De même, un seul nombre d'onde β peut être choisi pour obtenir $\hat{\mathbf{q}}(\omega, \beta) \in \mathbb{R}^{N_v}$, réduisant considérablement⁸ la taille des matrices à manipuler pour arriver à $\mathbf{S}_{\omega_j}$.

Pour le cas particulier de q non homogène et L -périodique, tel que montré en étape (1) et (2) de la Fig. 6.7. La matrice $\mathbf{W}(\bar{q})$ n'est plus définie par une seule valeur de z_i , mais par au moins le nombre de périodicités de $\bar{q}(z)$ correspondant à la périodicité en z de q'_S , de sorte que : $\dim \mathbf{W}(\bar{q}) = N_\zeta \times N_v$. Cette condition impose donc au premier abord de considérer tout le domaine z pour le calcul de $\mathbf{S}_{\omega_i}$ et implique : $\dim \hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j} = \dim \mathbf{W}(\bar{q}) = N_\zeta \times N_v$ pour le calcul de l'Eq. 6.16. C'est cette dernière contrainte qui amène RIGAS et al. (2019) à calculer $\mathcal{F}_\beta^{-1}(\hat{\mathbf{Q}}_{\omega_j})$ avant d'effectuer le calcul coûteux de l'Eq. 6.16 dans l'espace (ω, z)

6.2.2.2 Proposition d'une généralisation aux structures L -périodiques en espace

Pour contourner ce problème, nous adaptons le calcul du produit interne de l'Eq. 6.16 pour l'effectuer dans l'espace (ω, β) lorsque $\bar{q}$ n'est pas homogène. Pour cela, nous calculons le produit interne directement avec la transformée de Fourier de la matrice de pondération $\tilde{\mathbf{W}}$.

En prenant la définition du produit interne de l'Eq. 6.16 dans l'espace (t, z) et en considérant $\mathbf{F}_\beta / \sqrt{N_\zeta}$, la matrice unitaire de la transformée de Fourier $\mathcal{F}_\beta$, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \rangle_W &= \int_z \mathbf{Q}^H \mathbf{F}_\beta^H \mathbf{F}_\beta (\mathbf{W} \mathbf{Q}) dz, \quad \text{par nature unitaire : } \mathbf{F}_\beta^H \mathbf{F}_\beta = \mathbf{I}, \\ &= \int_z \tilde{\mathbf{Q}}^H \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{Q}} dz, \\ &= \int_z \tilde{\mathbf{Q}}^H (\tilde{\mathbf{W}} * \tilde{\mathbf{Q}}) dz, \quad \text{avec la propriété : } \tilde{\mathbf{W}} \tilde{\mathbf{Q}} = \tilde{\mathbf{W}} * \tilde{\mathbf{Q}}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

En notant $(*)$ le produit de convolution dans la direction z , nous retrouvons ainsi une formulation du produit interne : $\langle \mathbf{Q}, \mathbf{Q} \rangle_W$ dans l'espace de Fourier. Cette formulation nous permet alors d'écrire l'Eq. 6.18 pour tout nombre d'onde en z . Après application de l'opérateur $\mathcal{F}_\omega$, nous pouvons donc définir $\mathbf{S}_{\omega_j}$ pour un set γ_M arbitraire. De la sorte, nous obtenons un problème dont la dimension est réduite à la taille $N_v \times N_\zeta / L$.

C'est à partir de ce développement que nous construisons la décomposition SPOD en utilisant la base de Floquet en Eq. 6.10. Nous donnons la démarche en nous référant dans les lignes suivantes à la Fig. 6.7 et nous commençons par calculer la matrice de pondération $\tilde{\mathbf{W}}$ et sa transformée de Fourier en suivant les étapes (1), (3) et (4). L'écoulement de base étant entièrement défini sur λ_S , nous ne

⁷ Il faut remarquer que cette difficulté dépend directement de cette norme utilisée pour le régime compressible et donc elle ne se retrouve pas nécessairement pour un écoulement incompressible ou une norme du type $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ peut être utilisée pour l'énergie cinétique

⁸ Formellement d'un facteur N_ζ pour N_ζ points en z

retenons que les modes du set γ_0 pour obtenir $\tilde{\mathbf{W}}_{\gamma_0}$, avec : $\dim \tilde{\mathbf{W}}_{\gamma_0} = N_v \times N_\zeta / 4$. Pour calculer $\tilde{\mathbf{Q}}$, nous commençons par calculer $\tilde{\mathbf{q}}_i$ pour chaque état $\mathbf{q}_i$ avec les étapes (2) et (5). Ensuite en fonction de l'analyse désirée, en étape (6), nous choisissons une valeur de M de sorte à ne retenir que les modes γ_M associés et nous obtenons le vecteur $\tilde{\mathbf{q}}_{i,\gamma_M}$. Après cette étape, nous remarquons que nous assurons : $\dim \tilde{\mathbf{W}}_{\gamma_0} = \dim \tilde{\mathbf{q}}_{i,\gamma_M}$ et nous construisons $\tilde{\mathbf{Q}}_{\gamma_M}$ telle que dans l'Eq. 6.13. Par application de l'opérateur $\mathcal{F}_\omega$ en étape (7), nous retrouvons la procédure des Eqs. 6.14 & 6.15. Nous pouvons alors calculer $\langle \hat{\tilde{\mathbf{Q}}}_{\gamma_M}, \hat{\tilde{\mathbf{Q}}}_{\gamma_M} \rangle_W$ et obtenir $\mathbf{S}_{\omega_i}$ pour le set γ_M choisi. Une décomposition en valeurs propres et l'étape (9) nous donnent alors la base orthogonale optimale définie par les valeurs propres de la SPOD et les fonctions propres associées à l'exposant de Floquet M telles que définies en Eq. 6.8. Nous remarquons ainsi dans l'étape (9) que nous avons décomposé la dynamique que nous observions en étape (2) en séparant le pic d'énergie observable en deux modes SPOD de périodicités différentes.

6.2.2.3 Remarques sur la formulation développée

Nous avons donc exprimé une formulation de la SPOD respectant les propriétés (A) et (B) pour notre écoulement de base L -périodique. De la sorte, nous pouvons séparer rigoureusement les différents modes SPOD en fonction de leur périodicité au regard de streaks. Cette naturelle des modes par motif périodique permet une convergence accélérée du calcul de la base SPOD.

Une remarque peut être faite sur le coût de l'application de l'opérateur de convolution dans le contexte de nos grands volumes de données. Avec les algorithmes développés dans le cadre de la thèse pour la parallélisation par graphes de tâches, le calcul de la convolution de deux matrices de grandes tailles était peu optimisé et pouvait mener à une saturation en mémoire. Nous souhaitons mentionner qu'une solution a été trouvée en utilisant une formulation alternative de la parallélisation de cette convolution⁹ développée par "La Maison de la Simulation"¹⁰.

Nous pouvons rapidement discuter l'intérêt de la réduction du coût de calcul N_ζ / L en calculant la SPOD dans l'espace (ω, β) par rapport à un calcul SPOD sur le domaine global. Dans le cadre des calculs DNS et LDNS réalisés ici, nous obtenons à un total 120To de données brutes. Pour une DNS de 20To, nous réduisons la quantité de mémoire à allouer pour une SPOD de toutes les fréquences sur le domaine à 5To. De plus, si nous ne retenons que 50% des modes en z les plus énergétiques nous pouvons descendre à 2.5To et un sous échantillonnage spatial permettrait de réduire encore cette quantité de données. Nous remarquons donc tout l'intérêt de ces développements pour permettre d'envisager la décomposition de nos écoulements non homogènes et périodiques.

⁹ <https://github.com/Maison-de-la-Simulation/dask-signal>

¹⁰ <http://mdls.fr/>

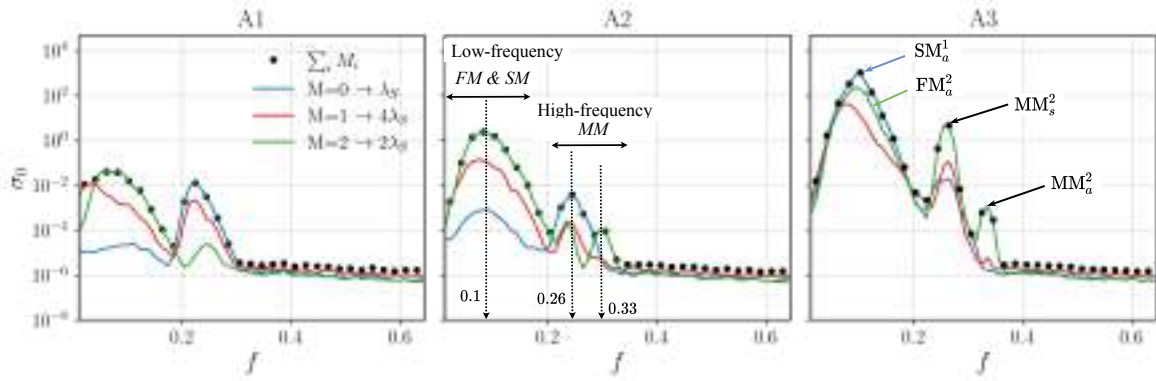


FIGURE 6.8 : De gauche à droite : cas A1, A2 & A3. Les courbes en couleurs correspondent à l'énergie des premières valeurs propres de la SPOD de la LDNS pour les différents exposants de Floquet considérés. Les marqueurs noirs représentent la somme de l'énergie des valeurs propres de la base complète en Eq. 6.10

6.3 DÉCOMPOSITION DE L'ÉCOULEMENT

Le formalisme de Floquet énoncé précédemment nous permet de séparer la dynamique de l'écoulement en plusieurs composantes transverses. Cette séparation met en évidence une richesse importante de structures cohérentes. Pour faciliter l'interprétation des résultats, nous poursuivons l'usage de la notation basée sur les trois familles de modes et leurs symétries. Pour rappel, nous avons retrouvé avec l'analyse LST-2D :

- FM : la famille des ondes du premier mode oblique ;
- MM : la famille des ondes du second mode de Mack ;
- SM : la famille des ondes associées aux modes de streaks.

6.3.1 Réponse linéaire fin de domaine

Nous commençons l'étude des différents cas par l'analyse de la réponse linéaire de la couche limite en fin de domaine. Pour chacun de ces cas, nous utilisons un forçage par bruit blanc de même amplitude $A_f = 1 \times 10^{-3} p_\infty$. Nous calculons les spectres en fréquence de la première valeur propre de la SPOD pour la base complète de l'Eq. 6.10 au plan $x = 350$ et nous présentons également en Fig. 6.8, les spectres d'énergie des vecteurs q'_S décomposés avec différents exposants de Floquet. Nous proposons d'analyser ces résultats en deux temps. Premièrement nous observerons la tendance globale de l'évolution des spectres d'énergie de la base complète (en noir) avec l'augmentation de l'amplitude des streaks pour les cas A1, A2 & A3. Puis nous nous intéresserons aux spécificités du spectre SPOD de la LDNS de chacun de ces cas en utilisant la décomposition de Floquet (en couleurs).

En observant les trois spectres A1, A2 et A3, nous pouvons noter que le taux d'amplification des instabilités augmente fortement avec l'augmentation de l'am-

plitude des streaks. Pour un forçage initial identique, nous avons en régime linéaire, un rapport du maximum d'amplitude entre A_1 et A_2 de l'ordre de 10^4 , soulignant la sensibilité accrue de la couche limite aux instabilités lorsque l'amplitude des streaks augmente.

En supplément de cette différence d'amplitude, nous remarquons que pour les trois cas, les spectres de la base complète reprennent qualitativement les mêmes caractéristiques avec deux pics principaux. Un pic d'énergie de basse fréquence et large bande autour de $f = 0.1$, ce qui correspond pour une couche limite sans streaks, aux fréquences du premier mode oblique (FM). Ce pic voit son amplitude s'accroître avec l'augmentation de l'amplitude des streaks, pour devenir dominant dans le régime linéaire en A_3 . Ensuite, un second pic d'énergie plus étroit et de plus haute fréquence, autour de $f \approx 0.25$, celui-ci correspond aux fréquences retrouvées pour le second mode de Mack (MM) sur une couche limite sans streak. Enfin, nous remarquons la croissance progressive d'un troisième pic d'énergie autour de $f \approx 0.33$ pour les cas A_2 et A_3 . Cette augmentation progressive d'amplitude suggère certaines conditions nécessaires de déformation de l'écoulement de base pour sa croissance. Cette séparation du pic haute fréquence n'a pas été observée précédemment. Nous associerons ultérieurement cette composante du spectre à la famille des seconds modes de Mack.

Nous trouvons un second résultat intéressant en croisant l'observation de l'amplitude importante des modes de basse fréquence de la LDNS aux résultats de l'étude par PSE à $M_\infty = 6.0$ de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019) et de l'étude DNS de la plaque plane sans streaks du Chap. 3. Pour rappel, l'étude de la plaque plane et l'analyse de stabilité 1D localement parallèle nous ont montré que le second mode de Mack dominait la dynamique linéaire et présentait le plus grand taux d'amplification, là où le premier mode restait faiblement amplifié pour nos conditions d'écoulement. Or, l'ajout d'une déformation de la couche limite via des streaks, pour toutes les amplitudes considérées, inverse cette tendance et mène à une domination marquée des modes de la famille FM. Cette domination peut s'expliquer à l'aide de l'analyse LST 2D menée précédemment où nous avons remarqué l'effet stabilisant d'une petite déformation sur les modes de la famille MM. Cet effet est également suggéré par PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019) pour les streaks de petite amplitude. De surcroît, nous avons également remarqué la tendance déstabilisante des streaks sur les modes de la famille SM en Fig. 6.6 supportant l'explication de cette amplification marquée des modes basses fréquences. Enfin nous pouvons ajouter que cette différence d'amplitude finale peut également être imputée aux mécanismes de réceptivité linéaire en jeu et non visible sur la Fig. 6.8. Cet éventuel effet sur la réceptivité sera discuté ultérieurement avec l'analyse de l'évolution de l'énergie des modes dans la direction x .

6.3.2 Modes Floquet-SPOD dominants

Nous proposons maintenant de discuter les trois spectres décomposés par l'utilisation de la formulation SPOD pour les systèmes L-périodiques. Nous avons pour chaque cas A_1 , A_2 & A_3 , trois courbes représentant les modes harmoniques

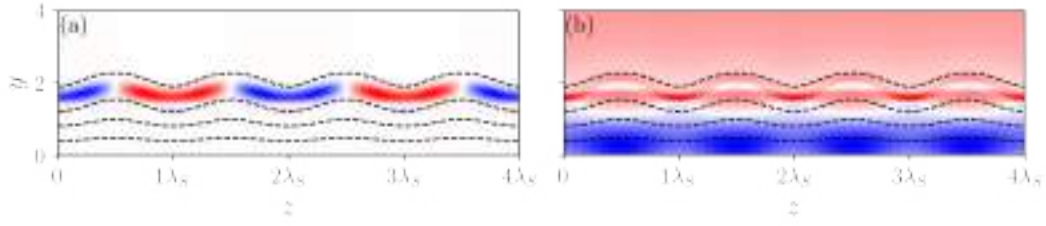


FIGURE 6.9 : Cas A1 : modes dominants de la LDNS à $x = 350$. Contours de vitesse de perturbation normalisés $u'_x \in [-0.5, 0.5]$. Mode FM_a^2 (gauche) et mode MM_s^1 (droite)

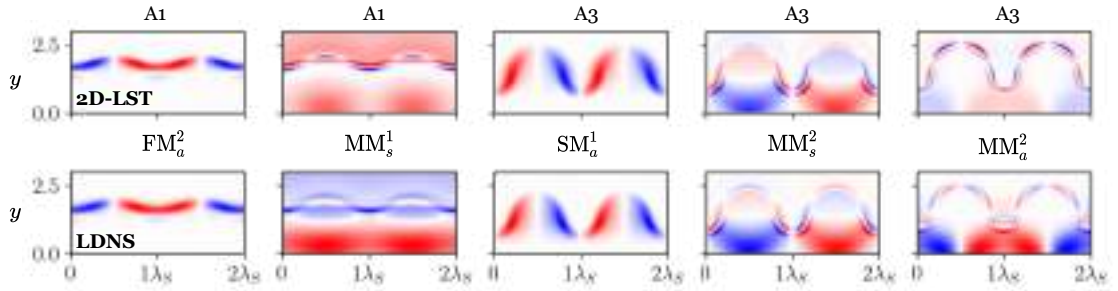


FIGURE 6.10 : Comparaison des fonctions propres issues de la LST-2D (haut) aux modes issus de la SPOD de la LDNS (bas) pour les pics principaux des spectre d'énergie SPOD de la LDNS. Champs de vitesse u'_x des fonctions propres.

($\lambda = \lambda_S$) en bleu, les modes sub-harmoniques ($\lambda = 2\lambda_S$) en vert et les modes de périodicité ($\lambda = 4\lambda_S$) en rouge. Pour alimenter la description de ces spectres, les modes SPOD correspondants aux divers pics d'énergie observés sont tracés en Fig. 6.9, 6.11a-c & 6.11d-f, pour respectivement les modes du cas A1 et des cas A2 & A3.

A1 - Pour ces streaks de faible amplitude ($\max(A_{su}) = 0.09$), nous avons la présence des deux pics des familles FM à basse fréquence et MM à haute fréquence. Ces derniers sont supportés respectivement par les périodicités transverses subharmoniques et harmoniques, avec une amplitude comparable, ce qui ne permet pas d'établir clairement une dominance dans le mécanisme de transition à la fin du domaine. Le pic d'énergie de plus grande amplitude à basse fréquence est identifié comme un mode FM_a^2 (Fig. 6.9a). Cette dominance de l'amplification du mode subharmonique révèle une certaine cohérence avec la dominance des ondes de Tollmien-Schlichting subharmoniques observée dans les résultats de l'étude en régime incompressible de ANDERSSON et al., 2001. Le pic d'énergie du second de Mack est décomposé sur l'ensemble des périodicités λ , mais avec une domination marquée du mode harmonique, identifié comme MM_a^1 (Fig. 6.9b). La périodicité harmonique supportant également les modes plans (Sec. 6.2.2), nous devons déterminer s'il s'agit ici d'un mode plan ou véritablement d'un mode harmonique. Enfin, le spectre pour $\lambda = 4\lambda_S$ est moins amplifié en fin de domaine, mais présente également les deux pics de basse fréquence et haute fréquence. Nous

notons également sur le pic basse fréquence, la présence d'un décalage vers la gauche du maximum d'amplitude au regard du spectre $\lambda = 2\lambda_S$.

- A2 - Avec l'augmentation de l'amplitude des streaks, le pic d'énergie de la composante subharmonique du spectre devient clairement dominant. Par identification du mode SPOD en Fig. 6.11a, nous retrouvons la continuité du mode FM_a^2 déjà remarqué en Fig. 6.9a pour ce pic d'énergie. Le second pic de plus haute amplitude, situé sur le spectre de la composante $\lambda = \lambda_S$ est toujours celui du mode MM_a^1 donné en Fig. 6.11b.

Cette dominance du mode FM_a^2 est issue des effets conjoints de l'amplification accrue de ce dernier et de l'amortissement du mode haute fréquence MM_a^1 . Pour les spectres à plus faible amplitude, nous remarquons pour le contenu haute-fréquence que la composante $\lambda = 2\lambda_S$ dépasse la composante $\lambda = 4\lambda_S$, suggérant une instabilité accrue du mode de Mack subharmonique. Un dernier point particulièrement intéressant pour la composante subharmonique réside dans l'amplification du second pic d'énergie de haute fréquence : $f \approx 0.33$, indiquant l'émergence de cette structure pour les streaks du cas A3. Cette structure est identifiée comme le mode MM_a^2 en Fig. 6.11c, soit un mode de Mack subharmonique et anti-symétrique.

- A3 - Ce dernier cas présente des pics d'énergie de grande amplitude montrant le caractère favorable à l'instabilité des streaks de grande amplitude. Nous remarquons une dominance claire du contenu à basse fréquence ainsi qu'une séparation nette des deux pics de haute fréquence des modes, indiquant la croissance accrue du mode à $f \approx 0.33$ remarqué précédemment. La composante du mode dominant la dynamique passe d'une périodicité subharmonique portée par le mode FM_a^2 à une périodicité harmonique portée par le mode SM_a^1 en Fig 6.11d. Ce mode est noté ici comme appartenant à la famille des modes de streaks car son instabilité n'est observée que pour les streaks de haute amplitude (Fig. 6.6). Pour le contenu haute-fréquence, le mode de Mack dominant est maintenant supporté par la composante sub-harmonique avec le mode MM_s^2 . Le mode MM_a^2 à plus haute fréquence (Fig. 6.11f) continue également d'être amplifié.

Enfin, en considérant chaque spectre en couleur du cas A3, nous observons une harmonisation des distributions d'amplitudes des spectres des différentes composantes. Autrement dit, les trois spectres présentent maintenant un profil similaire, indiquant une amplification générale des modes de chaque composante. Cette amplification est cohérente avec la nature plus instable des streaks de haute amplitude.

Le forçage par bruit blanc induit donc une réponse linéaire d'une richesse importante en comparaison à la couche limite sans streaks. Particulièrement, la réponse de l'écoulement de base présente des résultats originaux. Ces derniers sont principalement liés à l'évolution des modes dominants avec l'augmentation de l'amplitude des streaks. Nous avons pu remarquer le passage d'une dominance de la composante transverse subharmonique du premier mode vers un mode de streak

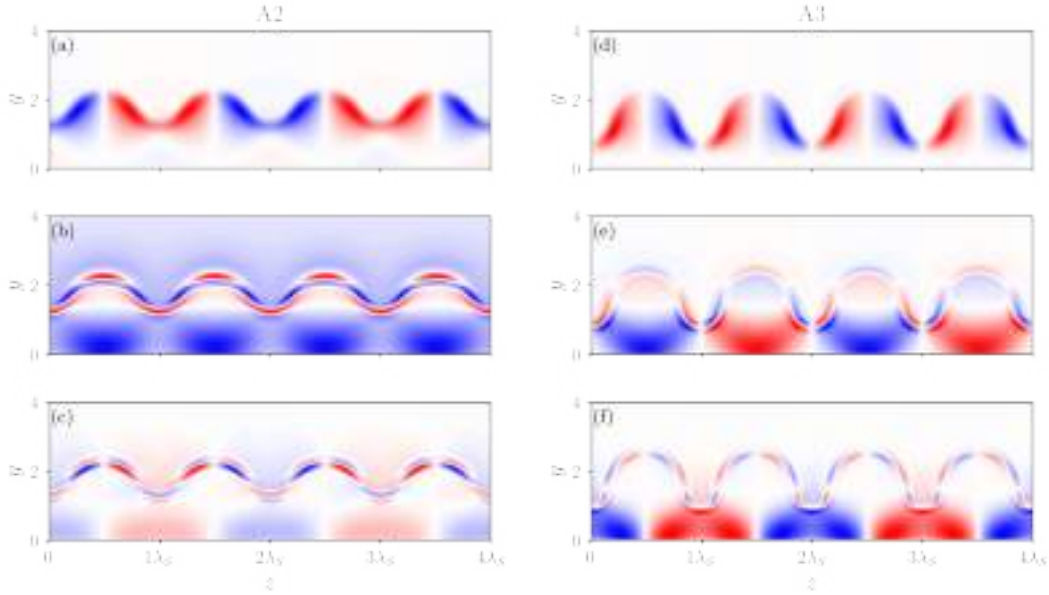


FIGURE 6.11 : Modes dominants de la LDNS à $x = 350$. Contours de vitesse de perturbation normalisés $u'_x \in [-0.5, 0.5]$. Cas A2 : (a) FM_a^2 , (b) MM_s^1 , (c) MM_a^2 . Cas A3 : (d) SM_a^1 , (e) MM_s^2 , (f) MM_a^2 .

harmonique et similairement, pour la famille du second mode de Mack, le passage d'une dominance harmonique vers une dominance subharmonique.

Nous terminons cette analyse des spectres de la LDNS à $x = 350$ en donnant une comparaison entre les modes SPOD obtenus et ceux de la LST-2D à la même fréquence afin de clarifier leur identification. Ces modes sont observables en Fig. 6.10. Nous notons que par concision les modes du cas A2 ne sont pas présentés, ils sont simplement une continuation des modes du cas A1. De façon générale, nous remarquons le très bon accord entre les modes de la SPOD et ceux de la LST-2D, cet accord ne laisse pas d'ambiguïté dans leur identification.

La décomposition de la dynamique linéaire met en lumière une variabilité accrue du scénario de transition observable avec l'introduction de streak. Nous étudions l'évolution non-linéaire des modes identifiés ici dans la section suivante.

6.4 DYNAMIQUE NON-LINÉAIRE

Les solutions non-linéaires introduites en Fig. 5.10, nous ont permis d'apprécier les différentes dynamiques se développant sur des streaks d'amplitudes croissantes pour un forçage identique. Nous proposons de détailler ces solutions afin de comprendre l'origine des non-linéarités observées jusqu'au début de l'éventuelle transition vers la turbulence.

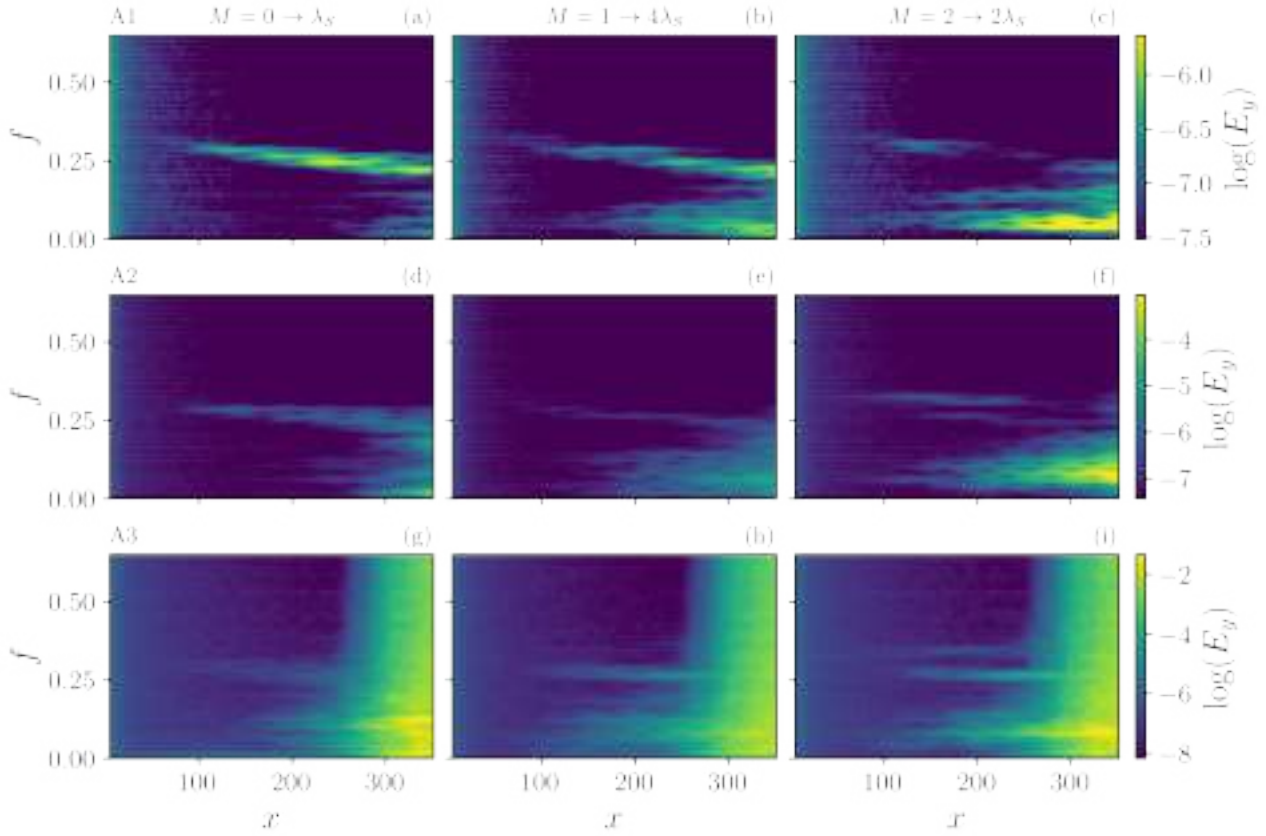


FIGURE 6.12 : Évolution dans la direction axiale des spectres en fréquence de la DNS pour les cas A1 (a,b,c), A2 (d,e,f) et A3 (g,h,i). Ces spectres sont décomposés par exposants de Floquet tel qu'indiqué au sommet de chaque colonne

6.4.1 Évolution des spectres en régime non-linéaire

Nous commençons l'étude du régime non-linéaire par l'analyse de l'évolution du spectre spatial des DNS A1, A2 & A3 pour chaque exposant de Floquet. La Fig. 6.12 nous donne une synthèse de ces spectres. Nous utilisons la mesure de l'énergie donnée en Eq. 6.18 que nous intégrons dans la hauteur du domaine, similairement à l'approche employée dans le Chap. 3 pour définir une mesure de l'énergie des perturbations au sein de la couche limite telle que :

$$E_y = \int_y \langle \mathbf{q}_S'^H, \mathbf{q}_S' \rangle_{\gamma_M} dy. \quad (6.19)$$

Avec cette mesure, nous pouvons suivre sur la Fig. 6.12, l'évolution du contenu fréquentiel de la couche limite avec l'augmentation de l'amplitude des streaks pour chaque ligne. Les colonnes quant à elles, correspondent chacune à une valeur de M donnée, permettant également d'observer la distribution du contenu fréquentiel pour chaque périodicité. Les niveaux de couleurs des spectres sont indépendants entre chaque ligne de spectres mais, comparables entre les colonnes.

Une première comparaison des lignes des cas A1 à A3 nous permet de noter l'élargissement du contenu fréquentiel de ces spectres vers la fin du domaine

avec l'augmentation de l'amplitude des streaks. Cet élargissement issu de la non-linéarité est particulièrement notable entre les Fig. 6.12a-d-g après $x = 250$. Nous observons pour le cas A2 (Fig. 6.12d) une faible signature à $f = 0.1$, s'amplifiant progressivement pour former un spectre large bande en $x = 350$. Un tel élargissement n'est que légèrement notable pour le cas A1 (Fig. 6.12a), en cohérence avec l'absence de transition observée en Fig. 5.10 pour le champ de vitesse. Enfin, pour le cas A3, nous observons clairement un spectre plein après $x = 250$ indiquant la génération de contenu fréquentiel large bande par interaction non-linéaire et le début de la transition.

En supplément de la comparaison des spectres par amplitudes de streaks, la comparaison des spectres par périodicité M , permet de remarquer la croissance des différentes branches de modes des familles FM, MM et SM présentés précédemment. Particulièrement, nous retrouvons les pics d'énergie de haute et basse fréquences, respectivement à $f \geq 0.25$ et $f \approx 0.1$, tel que visible sur les Figs. 6.12a et 6.12c pour le cas A1. Pour ce même cas, nous remarquons que le pic de haute fréquence pour $M = 0$ et le pic basse fréquence pour $M = 2$ dominant en amplitude. Cette dominance du pic d'énergie à basse fréquence, associé dans le spectre linéaire en Fig. 6.8 au mode FM_a^2 , s'accroît pour le cas A2 puis pour le cas A3 où sa signature est très marquée dans le spectre large bande. Un autre pic basse fréquence à $f \approx 0.1$ pour $M = 0$ est notable pour le cas A3. Ce dernier commence à être visible après $x = 150$ et est également fortement amplifié et encore visible dans le spectre large bande après $x = 250$. L'observation des signatures des modes de la famille MM pour les trois cas nous permet de suivre l'atténuation progressive de leur amplitude avec l'augmentation de l'amplitude des streaks, ces derniers devenant beaucoup moins marqués pour les cas A2 et A3.

Parmi ces pics, nous pouvons remarquer la signature des deux modes de Mack MM_a^2 et MM_s^2 visible en Figs. 6.12f et 6.12i pour $f \geq 0.25$. Bien que ces modes présentent une faible amplitude, déjà remarquée en régime linéaire, il est intéressant de suivre pour le cas A3 (6.12i), la séparation en fréquence de ces deux ondes avec l'introduction des streaks. Nous remarquons avant $x = 200$, que la branche de plus haute fréquence $f \approx 0.3$ voit sa fréquence augmenter et la branche inférieure diminuer. Ce comportement est en cohérence avec la localisation des modes de Mack associés au sein de la couche limite et dont la fréquence est inversement proportionnelle à l'épaisseur de cette dernière. Le mode MM_a^2 , situé sous la streak rapide, dans la zone de la couche limite dont l'épaisseur diminue avec l'amplitude de streak, voit sa fréquence augmenter. À contrario, le mode MM_s^2 , situé sous la streak lente, voit la couche limite s'épaissir et donc sa fréquence diminuer. Le ralentissement de la séparation après $x = 200$ est expliqué par la réduction de la croissance de la streak au delà de cette position (Fig. 5.2), qui mène à une réduction de la déformation de la couche limite.

Nous retrouvons sur ces spectres une dynamique cohérente avec l'étude linéaire pour les cas A1 et A2 avec des effets de non-linéarité de plus en plus notables lorsque l'amplitude des streaks augmente. Le spectre du cas A3 nous permet d'estimer le début des interactions non-linéaires et la génération de contenu fréquentiel associé, tel que visible en $x \geq 250$. Nous proposons dans la suite de caractériser

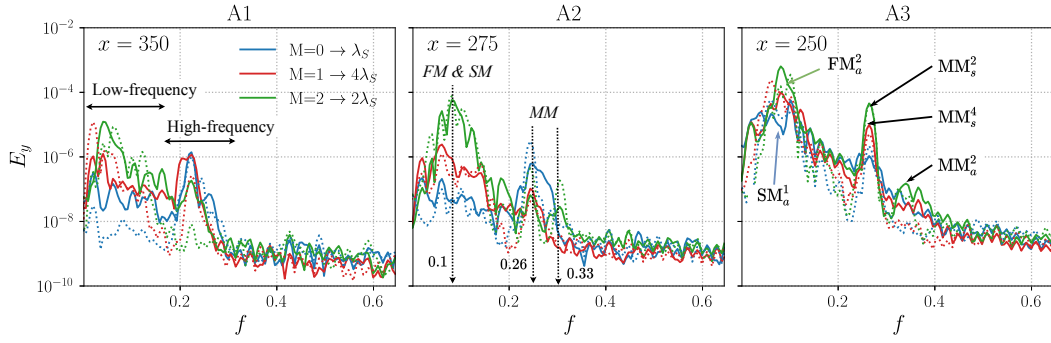


FIGURE 6.13 : De gauche à droite : cas A1, A2 & A3. Les courbes en couleurs correspondent à l'énergie E_y du vecteur de perturbation pour les différents exposants de Floquet considérés.

les spectres des calculs DNS avant le régime non-linéaire afin d'estimer les modes les plus amplifiés dans ce régime.

6.4.2 Contenu fréquentiel avant la dynamique non-linéaire

L'instabilité secondaire est définie ici au sens de la naissance de structures tri-dimensionnelles secondaires au sein de la couche limite, ce qui se manifeste comme la génération de modes secondaires à la croissance modale initiale, menant in-fine à un contenu fréquentiel large bande dans le spectre de Fourier (HERBERT, 1988). Ces types de structures sont particulièrement observables pour le cas A2 après $x = 300$ et pour le cas A3, après $x = 250$ avec les dynamiques variqueuses et sinueuses. Nous considérons donc la fin de l'instabilité primaire en ces points. Pour les streaks A1, en l'absence de contenu large bande notable dans le spectre, nous présentons le spectre en $x = 350$.

Les spectres d'énergie E_y en fréquence sont présentés en Fig. 6.13 aux positions énoncées. Nous reprenons le code couleur utilisé en Fig. 6.8 pour distinguer le contenu fréquentiel par exposant de Floquet. Sur cette figure, les spectres de la DNS sont en traits pleins et ils sont comparés aux mêmes spectres issus de la LDNS en traits pointillés pour quantifier certains effets de la non-linéarité dans la croissance modale issue de la DNS.

En observant le spectre DNS pour chacun des cas, nous retrouvons la tendance de la dynamique linéaire déjà présentée en Fig. 6.8 pour $x = 350$, avec une dominance du pic basse fréquence au seuil du régime non-linéaire pour la DNS et la LDNS dans tous les cas. Plus largement, l'accord entre le spectre de la DNS et le spectre de la LDNS est retrouvé à chaque position choisie de cas A1, A2 et A3.

Le spectre DNS du cas A1, dominé en amplitude par le mode MM_a^2 en vert, présente une différence intéressante avec le spectre de la LDNS pour l'exposant $M = 1$. L'amplitude du pic basse fréquence pour la DNS est inférieure d'une décade à celle du pic de la LDNS. Inversement, pour la région haute fréquence, le mode MM_s^4 associé à l'exposant $M = 1$ du calcul DNS est plus amplifié que

son pendant linéaire pour atteindre la même amplitude que le mode MM_s^1 en bleu, laissant suggérer un effet de la non-linéarité sur la réceptivité et la croissance du mode MM_s^4 pour la DNS. En régime non-linéaire, nous pouvons retenir les modes remarquables FM_a^4 , FM_a^2 ainsi que MM_s^4 et MM_s^1 .

De façon similaire, pour les streaks A2, nous retrouvons la forte amplification du mode FM_a^2 à basse fréquence et à haute fréquence, une dominance en amplitude du mode MM_s^1 . Nous ajoutons que de nouveau, quelques différences sont notables entre les spectres d'énergie issus de la DNS et la LDNS. Particulièrement pour les pics d'énergie haute-fréquence des modes MM, nous retrouvons une amplification plus faible des modes MM^2 et MM^1 de la DNS au regard de la LDNS. Cet écart d'amplitude de presque une décade est substantiel et souligne de nouveau des effets notables des streaks sur l'amplification non-linéaire des seconds modes de Mack.

Enfin, pour les streaks de plus haute amplitude du cas A3, les spectres de la DNS et de la LDNS ne présentent pas de différences notables, les pics des régions haute et basse fréquence ont des amplitudes similaires. Pour cette amplitude de streaks, nous avons une dominance en amplitude des ondes surharmoniques en z avec en haute et basse fréquence, les pics des modes MM_s^2 et FM_a^2 .

En résumé de cette section, nous avons remarqué plusieurs modes dominants pour les spectres en fréquence des cas A1, A2 et A3 au seuil de la dynamique non-linéaire. Nous proposons de suivre l'évolution de leur énergie le long de la direction x afin de dresser des scénarios de transition probables pour chacune des amplitudes de streaks étudiées.

6.4.3 Évolution des modes dominants

En reprenant les modes retenus précédemment, nous traçons l'énergie intégrée E_y , définie en Eq. 6.19. Sur cette figure nous reportons avec différentes couleurs l'énergie des modes considérés avec en traits pleins, l'énergie calculée avec la solution DNS et en pointillés celle calculée avec la solution LDNS. Le code couleur est maintenu entre les trois sous-figures. Nous ajoutons également pour base de comparaison, l'amplitude d'énergie du second mode de Mack et du premier mode oblique, déjà calculés avec la simulation LDNS du Chap. 3. Ces dernières courbes sont visibles en pointillés avec des marqueurs noirs. Enfin, l'amplitude des courbes LDNS est réajustée à l'amplitude du calcul DNS au point d'injection en $x = 5.0$ pour une comparaison cohérente.

L'analyse des trois différentes tendances des cas A1, A2, A3 et de la LDNS sans streaks révèle l'effet important des streaks sur l'amplification des divers modes de la couche limite. Nous remarquons dès le cas A1, une réduction conséquente de l'énergie et du taux d'amplification des modes de la famille MM en comparaison au second mode de Mack plan de la couche limite de Blasius. Cet amortissement des modes MM est visible pour les cas A1 et A2. Un tel effet stabilisant a été relevé par PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019) pour des amplitudes proches de $A_{su} = 0.1$. Nous notons que l'amortissement des modes de la famille MM n'est plus présent

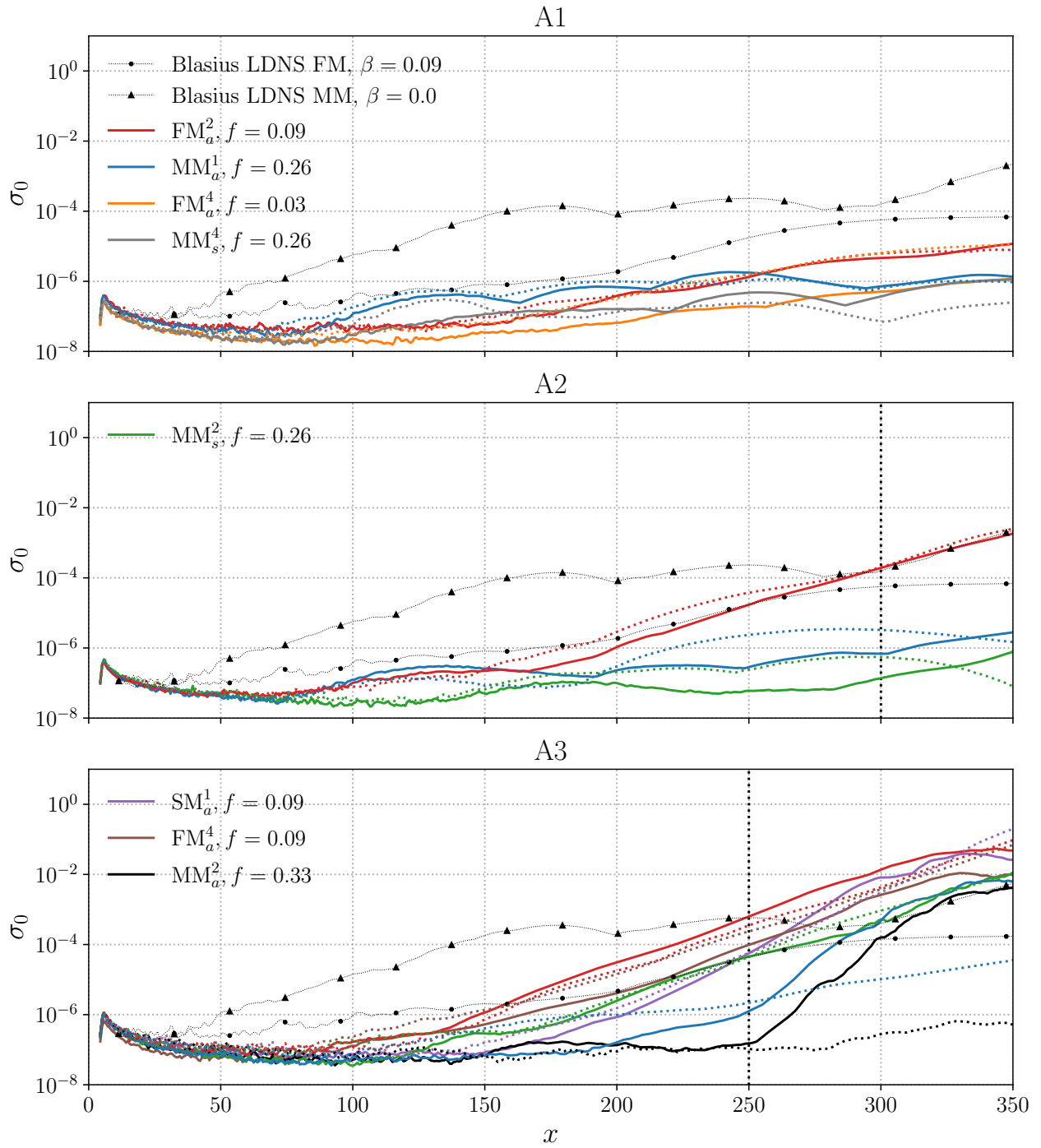


FIGURE 6.14 : Energie des modes principaux du spectre en fréquence des simulations DNS (traits pleins) et LDNS (pointillés). Comparaison avec les modes de la LDNS de plaque plane sans streaks (marqueurs). Lignes verticales en tirets : position d'extraction des spectres de la Fig. 6.13

pour le cas A3 où l'amplification du mode MM_5^2 retrouve un niveau proche de celui du mode MM de la couche limite de Blasius. En supplément de cette différence de taux d'amplification, nous remarquons également un retard marqué du début de l'amplification des divers modes de la couche limite avec l'ajout des streaks. Cet effet est visible en remarquant que les modes de la couche limite de Blasius commencent leur croissance autour de $x = 25.0$ en régime linéaire, là où pour les LDNS des cas A1, A2 & A3, l'amplification devient visible après $x = 75.0$ pour la plupart des modes. Les deux aspects que nous avons énoncés mettent en exergue les changements qu'imposent les streaks sur les mécanismes de réceptivité et de croissance des modes dans le régime linéaire.

Nous pouvons poursuivre cette analyse par la comparaison des dynamiques linéaires et non-linéaires des modes suivis sur la Fig. 6.14. De nouveau, les streaks induisent des écarts notables entre les comportements linéaires et non-linéaires de certains modes. En commençant par le cas A1, nous observons par exemple pour le mode FM_a^4 une réduction importante du taux d'amplification en régime non-linéaire. De manière similaire, pour le cas A2, en suivant l'évolution du mode FM_a^2 , nous remarquons un délai dans le début de son amplification pour le calcul DNS ($x = 175$) vis-à-vis du calcul LDNS ($x = 150$). Ce délai suggère l'existence d'une modification du mécanisme de réceptivité induite par les streaks pour ce mode. Enfin pour le cas A3, une dynamique similaire est également remarquable pour le mode MM_a^1 . L'énergie de ce dernier dans le calcul DNS commence à croître à partir de $x = 200$, là où pour le calcul LDNS, l'amplification du mode démarre à compter de $x = 100$. En résumé, nous observons des effets des streaks sur la dynamique non-linéaire pour les trois cas. Ces effets non-linéaires portent sur les mécanismes de réceptivité et de croissance des modes suivis. L'effet principal noté est un délai dans la réceptivité de certains modes et un taux d'amplification moyen plus faible, résultant dans des niveaux d'énergie finaux plus faibles.

L'évolution non-linéaire des modes des différents modes présentée en Fig. 6.14 nous donne une estimation des modes les plus amplifiés au seuil de la non-linéarité. Cette estimation est utilisée en partie suivante pour décrire les scénarios de transition probables des cas A1, A2 & A3.

6.4.4 Scénarios de transition suggérés

Avec les champs de vitesse de la DNS présentés en Fig. 5.10, nous avons pu observer trois dynamiques différentes de l'écoulement. Principalement, nous avons pu observer le début du régime turbulent pour le cas A3 et la croissance de structures transitionnelles variqueuses pour le cas A2. Enfin, le cas A1 ne présentait pas de régime transitionnel nettement observable. Dans cette section, nous utiliserons ces observations, conjointement au suivi du niveau d'énergie des différents spectres observés, pour suggérer les mécanismes de transition probables en jeu dans notre cas particulier.

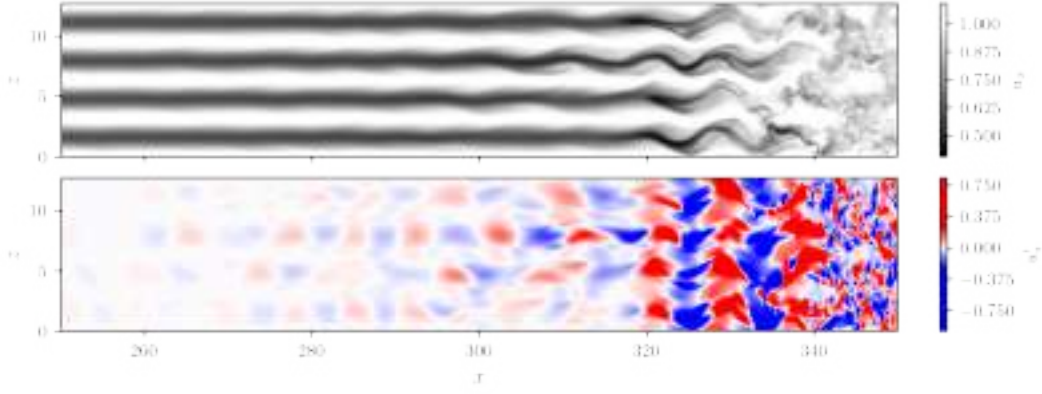


FIGURE 6.15 : Cas A3-DNS. Champs de vitesse longitudinale u_x (haut) et de vitesse de perturbation transverse u'_z pris à $y = 1.5\delta^*$ pour la fin du domaine.

6.4.4.1 Dynamique du cas A3

Nous commençons par l'étude de la transition vers la turbulence des streaks de grande amplitude du cas A3. L'observation du spectre de Fourier et du champ de perturbation de ce cas ne révèle pas de dominance claire d'un mode, mais plutôt la croissance conjointe de deux modes principaux FM_a^2 et SM_a^1 d'amplitudes proches interagissant entre eux et l'écoulement moyen. Ces deux modes participent donc au déclenchement du régime non-linéaire. Ce régime est visible en Fig. 6.15 avec la déformation progressive du champ de base par des instabilités ($x \approx 280$) puis par la fracture rapide de la symétrie des quatre streaks ($x \approx 320$) et enfin le début de la turbulence ($x > 340$).

Une vue agrandie de l'état de la couche limite à $y = 1.5\delta^*$ est donnée en Fig. 6.15 pour mieux apercevoir les structures secondaires en jeu et guider l'interprétation des spectres avec ces informations issues de la dynamique visible. Suite à l'introduction de ce chapitre en Sec. SEC, nous savons que le type de motif de transition, sinueux ou variqueux, se traduit par la périodicité transverse du mode associé (ANDERSSON et al., 2001).

Nous pouvons alors remarquer ici que la structure sinueuse observée en Fig. 6.15 pour le champ de vitesse u_x entre $x = 320$ et $x = 330$, correspond par définition à une instabilité de type harmonique¹¹. Cette information nous permet de préciser que des deux modes discutés, cette structure de l'écoulement ne peut ici correspondre qu'au mode SM_a^1 . En supplément, la contribution du mode FM_a^2 à la dynamique reste observable en $x = 300$ sur les champs de vitesse u_x et le champ de perturbation de vitesse transverse u'_z . Le mode FM_a^2 étant subharmonique et anti-symétrique en z , son mouvement est de nature subharmonique et sinueux, ce qui se traduit par une dynamique sinueuse de streaks basse vitesse (noir) et variqueuse des streaks haute vitesse (blanc), visible en Fig. 6.15. Ce mouvement subharmonique en z est induit par les fluctuations de vitesse u'_z d'organisation sub-

¹¹ Les champs de vitesse sont ici pris à un instant t , il a été vérifié que ces structures restent observable pour d'autres instants $t \pm \Delta t$

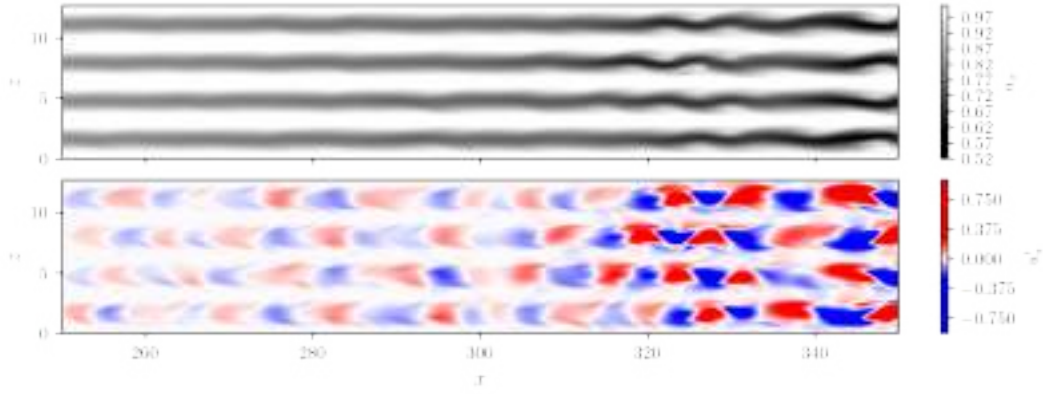


FIGURE 6.16 : Cas A2, DNS. Champs de vitesse longitudinale u_x (haut) et de vitesse de perturbation transverse u'_z pris à $y = 1.3\delta^*$ pour la fin du domaine.

harmonique et visible sur le champ de perturbation par l'alternance rouge-bleue dans la direction transverse.

La somme de ces deux observations nous indique que les deux modes FM_a^2 et SM_a^1 participent à la dynamique de transition observée. Principalement, l'amplification du mode FM_a^2 permet le déclenchement du régime non-linéaire visible sur les spectres de Fourier (Fig. 6.12g-h-i) à partir de $x = 250$ et la distribution d'énergie sur toute la gamme de fréquences. En parallèle le mode SM_a^1 s'amplifie fortement entre $x = 250$ et $x = 300$. Nous suggérons que le contenu fréquentiel large bande associé à cette forte amplification du mode SM_a^1 contribue à la déstabilisation finale rapide des streaks par l'instabilité sinueuse harmonique observée.

6.4.4.2 Dynamique du cas A2

Le cas A2 ne transitionne pas vers la turbulence dans le domaine de calcul considéré et pour les amplitudes de forçage choisies. Nous observons tout de même le régime non linéaire, à commencer par les spectres de Fourier en Fig. 6.12(d-e-f) où la génération de contenu fréquentiel par interactions non-linéaires est visible. Associé à ce contenu fréquentiel, les champs de vitesses montrés en Fig. 6.16 permettent de suivre l'évolution d'une déformation variqueuse des streaks rapides (blanc) et sinueuse des streaks lentes (noir). Suite à la décomposition de notre écoulement en Fig. 6.14, nous savons que le premier mode de Mack FM_a^2 est le plus amplifié et domine la dynamique de l'écoulement au début du régime non-linéaire en $x = 300$.

Un lien direct peut être fait ici entre le mode subharmonique FM_a^2 et l'instabilité subharmonique sinueuse visible. Associé à ce mouvement subharmonique sinueux, nous pouvons clairement voir l'organisation subharmonique de la perturbation de vitesse transverse u'_z menant à ce mouvement en Fig. 6.16.

De fait, nous suggérons pour les streaks du cas A2 atteignant une amplitude de l'ordre de $A_{su} \approx 0.2$, que la croissance du mode FM_a^2 pilote la dynamique de transition vers la turbulence. Cette suggestion est appuyée par l'amplification

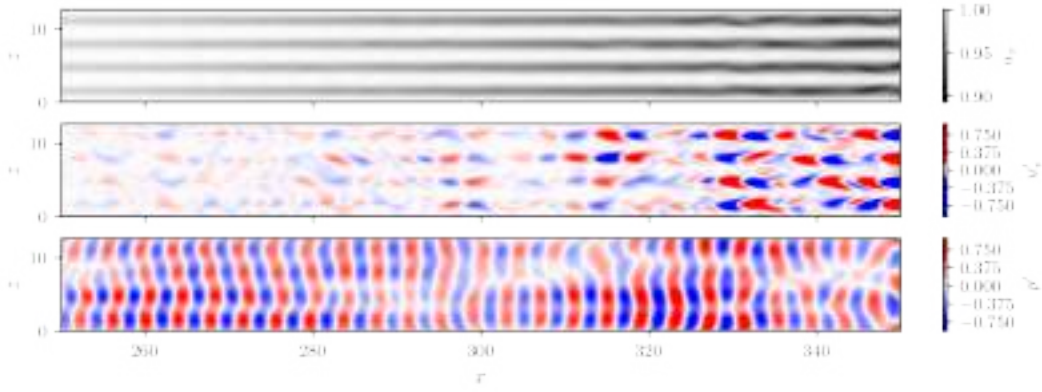


FIGURE 6.17 : Cas A1, DNS. Champs de vitesse longitudinale u_x (haut) et de vitesse de perturbation transverse u'_z pris à $y = 1.75\delta^*$ pour la fin du domaine.

observée de ce mode en régime linéaire et non-linéaire sur la Fig. 6.14 et l'absence de modes plus instable remarquée pour cette amplitude de streaks avec l'étude de stabilité 2D (Fig. 6.6). Nous suggérons qu'une étude sur un domaine de calcul plus long mènerait effectivement à la transition de la couche limite via l'instabilité subharmonique sinueuse.

6.4.4.3 Dynamique du cas A1

Similairement au cas A2, le forçage des streaks de faible amplitude du cas A1 ne mène pas à la turbulence pour notre domaine d'étude. Suite à la décomposition de l'écoulement et au suivi des modes dominants le long du domaine, nous avons remarqué que de nouveau le mode FM_a^2 est le plus amplifié à la fin du domaine (Fig. 6.14). Cependant, pour cette couche limite faiblement déformée, la dominance du mode FM_a^2 est moins marquée. Notamment le second mode de Mack MM_s^1 possède la plus grande énergie avant $x = 250$. Cette succession de dominance entre le mode de la famille MM et le mode de la famille FM met en avant la dépendance du scénario de transition modal à l'amplitude du forçage initial sur des streaks de cette amplitude. Un forçage non-linéaire de plus grande amplitude pourrait éventuellement déclencher ici le régime non-linéaire via le second mode de Mack avant l'amplification suffisante du mode FM_a^2 .

Nous discutons le cas particulier de la DNS du cas A1 effectuée ici en analysant également les champs instantanés de l'écoulement en fin de domaine avec la Fig. 6.17. Cette figure diffère des Figs 6.16 & 6.15 par l'ajout du champ de pression à la paroi en plus des champs de vitesses. L'ajout du champ de pression permet de mieux visualiser les structures liées au second mode de Mack (FEDOROV, 2011). En lien avec l'amplitude dominante du premier mode subharmonique FM_a^2 en $x \geq 250$, nous remarquons sur le champ de vitesse u_x pris à $y = 1.75\delta^*$, la présence d'un léger mouvement subharmonique sinueux des streaks rapides et lentes à compter de $x = 300$. Cette dynamique est similaire à celle du cas A2 où le mode FM_a^2 est clairement dominant. Cette modulation subharmonique sinueuse des streaks est visible avec la distribution subharmonique du champ de perturbation de vitesse

transverse u'_z en Fig. 6.17. Bien que le second mode de Mack MM_s^1 ne soit pas le plus amplifié à la fin du domaine, il présente une signature marquée à la paroi par des ondes quasi-planes modulées par les streaks rapides en clair. Cette distribution de perturbation est cohérente avec sa nature harmonique.

En résumé, le scénario de transition le plus probable pour le cas A1 reste l'amplification progressive du mode FM_a^2 , favorisé par la croissance des streaks, tel que remarqué pour les cas A2 ou A3 et justifié par l'analyse LST-2D en Fig. 6.1. Ce propos peut être modéré par la discussion précédente concernant le rôle de l'amplitude de forçage initiale sur l'éventuelle croissance rapide du second mode de Mack avant leur amortissement dû aux streaks.

6.5 DISCUSSION SUR LA DYNAMIQUE DES STREAKS

L'objectif premier de ce chapitre était de caractériser la dynamique non-linéaire d'une couche limite hypersonique déformée par des streaks soumise à un forçage par bruit blanc. Ce cadre spécifique d'analyse a été défini afin de compléter les résultats existants (PAREDES, CHOUDHARI et LI, 2017b, 2019).

Ce travail se décompose en deux parties, une première tournée vers le régime linéaire et une seconde dédiée à l'étude de certains aspects de la dynamique non-linéaire. Pour supporter ces deux parties, nous avons également développé un cadre d'analyse et de décomposition spécifique à l'étude des déformations périodiques que génèrent les streaks.

Nous avons commencé par une caractérisation de la stabilité spatiale localement parallèle de nos couches limites déformées. Cette analyse nous a permis de décrire l'évolution des modes usuels de la couche limite de Blasius avec la croissance ajoutée des streaks. Nous avons également pu caractériser les amplitudes critiques pour lesquelles des instabilités spécifiques aux streaks deviennent instables et décrire l'évolution de leur amplification pour des déformations grandissantes. Ces résultats complètent et étendent les premières analyses de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2019) pour certains modes instables de la couche limite hypersonique. En restant dans le régime linéaire, nous avons pu mettre en place des calculs LDNS de la propagation d'un forçage par bruit blanc autour de nos écoulements de base. Ces simulations et leur décomposition nous ont permis d'identifier clairement les modes instables issus du forçage et de mettre en avant les effets des streaks sur les mécanismes de réceptivité et de croissance modale des instabilités observées en régime linéaire. Une comparaison directe avec les résultats de la LDNS de la couche limite sans streaks du Chap. 3 a pu être faite et a permis de mettre en avant un effet substantiel de la déformation de l'écoulement sur la dynamique. Principalement, nous avons montré une domination de la famille des premiers modes de Mack et des modes de streaks, ce résultat pour de petites déformations n'a pas été montré par ailleurs à la connaissance de l'auteur. Le second mode de Mack normalement le plus amplifié sans déformation est affecté par la présence des streaks avec retardement de sa réceptivité et une diminution du taux de croissance.

En seconde partie, nous avons étudié le régime non-linéaire de nos écoulements de base forcés par un bruit blanc. Les dynamiques observées sont variées et la décomposition de l'écoulement associée au suivi des modes les plus amplifiés le long de l'écoulement nous a permis de mettre en avant certaines différences retrouvées dans les mécanismes non-linéaires de réceptivité et de croissance des modes suivis autour des streaks. Ces résultats encouragent la poursuite de l'étude des effets non-linéaires des streaks sur la stabilité des modes de la couche limite. Nous avons également pu suggérer des scénarios de transition probable, avec pour chaque amplitude de streak un chemin différent. Ces scénarios sont spécifiques à nos conditions d'études, mais permettent une première compréhension de la dynamique non-linéaire des streaks en régime hypersonique.

Enfin, la somme des résultats issus de ces deux volets met en lumière la grande sensibilité de la stabilité de la couche limite aux déformations que pourraient induire des structures similaires aux streaks. Il faut alors retenir que ces déformations surviennent naturellement autour d'objets hypersoniques réalistes lors de la rentrée atmosphérique.

CONCLUSION & PERSPECTIVES

Les objectifs initiaux de cette étude étaient doubles. Premièrement, nous devions construire un outil de simulation haute fidélité qui devait permettre l'analyse des fluctuations fines de la transition vers la turbulence au sein d'écoulements hypersoniques autour de géométries d'application. Cet outil devait aussi s'inclure dans un environnement d'analyses de données plus large pour décomposer les dynamiques complexes. Deuxièmement, nous nous sommes concentrés sur des problématiques physiques sous-jacentes au blunt-body paradox. Ces problématiques se déclinaient en trois parties. D'abord nous avons cherché à comprendre les effets d'un forçage par bruit blanc sur le scénario de transition d'une couche limite hypersonique canonique. Par la suite, nous avons souhaité comprendre comment cet environnement de perturbation affectait la dynamique linéaire et non-linéaire de l'écoulement autour d'une rugosité. Enfin, en lien avec ces deux parties, nous avons déterminé les modifications qu'induisent des streaks d'amplitude croissante issues d'une instabilité initiale non-modale de, sur la dynamique de transition. Les études réalisées nous ont permis d'obtenir des résultats originaux et de répondre au moins en partie à chacun de ces objectifs, ces résultats sont résumés ci-dessous.

OUTILS POUR LA SIMULATION HAUTE FIDÉLITÉ

L'objectif général des développements numériques dans le cadre de notre étude était de pouvoir obtenir un outil versatile permettant d'aborder la simulation des pointes avant d'objets hypersoniques et d'autres problématiques d'aérodynamique compressible. Pour ces développements, nous avons fait le choix de partir du code CREAMS dédié à la simulation de la combustion supersonique, dans des configurations canoniques, sur des grilles cartésiennes et avec des schémas WENO7. Ce code présentait trois avantages majeurs : une architecture simple constituée de peu de modules, une formulations par différences finies et enfin la gestion de gaz multiespèces. Ce dernier aspect est particulièrement intéressant dans l'objectif de tendre vers la simulation d'écoulements hypersoniques à haute enthalpie.

Développement d'un outil DNS

Nous avons d'abord étendu ce code à la gestion de maillages curvilignes pour pouvoir simuler des géométries courbes représentatives de nos problématiques. Cette extension a nécessité une réécriture de l'ensemble de la structure de données et de la formulation des équations. En supplément, la formulation curviligne nous a imposé de réadapter les méthodes numériques. Nous avons donc réfléchi à un compromis offrant efficacité algorithmique et précision. Après avoir exploré différentes options, nous avons constitué un schéma numérique global inspiré des approches aéroacoustiques. Ce schéma est basé sur des différences finies centrées d'ordre

élevé associées à des filtres d'ordre élevé et des méthodes d'intégration en temps Runge-Kutta low-storage. Nous avons fait en sorte que l'ensemble de ces schémas puissent être choisis dans leur formulation optimisée ou standard. Pour supporter les forts gradients du régime hypersonique nous avons également adapté une méthode de capture de choc basée sur un schéma de Jameson couplé à des filtres d'ordre élevé optimisés. En complément, nous avons modifié l'interface d'entrée/-sortie du code initialement basée sur des fichiers binaires bruts, vers des fichiers au standard CGNS basé sur le format HDF5-parallèle. Ce format permet un interfacement facilité avec d'autres codes classiques et permet également un post-traitement parallèle efficace. L'efficacité de l'outil développé a été démontrée sur des cas de validation de complexité variée.

Linéarisation et méthodes de stabilité linéaire globale

Au-delà de ces aspects liés au développement et à l'intégration, la simulation de la transition et des instabilités hydrodynamiques a nécessité des implémentations spécifiques. Ces méthodes ont d'abord concerné l'ajout de différentes procédures de forçage pour l'injection de profils de perturbations particuliers ou de forçages aléatoires par un bruit blanc. Afin d'appuyer la dynamique issue de ces forçages, nous nous sommes intéressés à la linéarisation de l'opérateur global du code DNS. Une approche double a été mise en place, premièrement, les procédures de linéarisation ont été utilisées pour permettre l'étude de la dynamique linéaire de perturbations arbitraires sur des champs de bases non-homogènes. Cette propagation linéaire est faite par l'avancement en temps de l'opérateur linéarisé appliqué au champ de perturbations et a mené au concept de LDNS. En parallèle, les routines d'extraction de l'opérateur linéaire global du code sont également implémentées et ont été testées de façon préliminaire.

Les outils de stabilité linéaire globale développés sont un ingrédient essentiel pour la prolongation de cette étude vers des analyses de type input-output (JOVANOVIĆ, 2021). En l'absence de véritable analyse de stabilité globale dans notre étude, nous avons tout de même pu voir les bénéfices offerts par l'approche LDNS pour appuyer le calcul DNS. Ces bénéfices ont notamment été mis en évidence dans les études de nos écoulements de base vraiment 3D ou L-périodiques pour lesquels une analyse de stabilité globale ou Resolvent peut être difficilement praticable. Nous avons alors discuté pour ces cas non-homogènes, de l'utilité du lien formel établi par TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS (2018) entre la base de modes SPOD construite sur cette réponse linéaire et la réponse Resolvent. Ainsi, l'approche LDNS couplée au forçage par bruit blanc nous a permis d'obtenir une réponse linéaire globale de l'écoulement convectivement instable. Nous avons montré que cette réponse linéaire globale était alors un support utile à l'étude de la réponse non-linéaire et l'identification claire des modes de la couche limite non-homogène.

Post-traitement dans un contexte HPC

Enfin, en lien avec ces outils de simulation, nous avons proposé en Annexe A une approche de post-traitement basée sur la parallélisation par graphes de tâches des différents algorithmes d'analyse et de décomposition de nos données. Devant le grand volume de données généré par les simulations (160To) ces outils ont permis une accélération substantielle du processus de traitement des calculs. Notamment, pour l'exemple de la plaque plane, seulement 15min, sur 400Cpus, sont nécessaires pour passer de la base de données brute de 10To à la récupération d'un mode SPOD choisi. Cette opération est entièrement réalisée en python, avec des codes simples et s'appuie sur le format HDF5 et l'utilisation efficace des ressources HPC.

ETUDES DE TRANSITION

L'étude des couches limites à $M_\infty = 6.0$ pour plusieurs types de déformations nous a permis de balayer différents types de scénario de transition. Le point commun de ces études était alors l'utilisation d'un forçage par bruit blanc introduit par HADER et FASEL (2018). Ce type de forçage n'a été que rarement utilisé¹² dans l'étude de la transition de couches limites hypersoniques et son utilisation pour l'étude du scénario de transition d'une plaque plane canonique avec et sans déformation de l'écoulement de base constitue donc une contribution originale en soi.

Effets du forçage par bruit blanc

Dans chacun des trois cas étudiés, le forçage par bruit blanc nous a permis de mettre en avant une riche dynamique des instabilités. Particulièrement, dans le cas de l'étude de la couche limite non déformée, nous avons pu révéler un scénario de transition hybride entre second mode de Mack plan et ondes du premier mode oblique, rendu visible par la large gamme de fréquence excitées. De même, dans le cas de l'élément de rugosité, nous avons mis en évidence avec ce type de forçage une réponse différente à la réponse impulsionnelle observée dans les références précédentes. Enfin dans le cadre des écoulements déformés par des streaks, ce forçage nous a permis d'obtenir une première estimation de la réponse non-linéaire de ce type de structures non-modales en régime hypersonique.

Scénario de transition d'une couche limite non déformée

L'étude réalisée autour de la transition de la couche limite non déformée soumise à un forçage par bruit blanc se place dans la continuité de plusieurs travaux de la littérature qui se sont focalisés sur des scénarios de transition bien définis pour des perturbations sélectionnées. L'utilisation de résultats des études précédentes pour

¹² À la connaissance de l'auteur seules deux études formelles de ce type existent en régime hypersonique, mais pour des géométries de révolution : HADER et FASEL (2018) et LUGRIN et al. (2020)

ces scénarios "contrôlés"¹³ nous a alors permis d'utiliser le forçage par bruit blanc et d'interpréter les réponses linéaires et non-linéaires de la couche limite obtenues par décomposition. La contribution de nos analyses réside alors dans l'étude d'un scénario de transition "naturel" qui est la somme de toutes les instabilités présentes dans la couche limite.

Avec cette approche, nous avons pu mettre en avant la coexistence de plusieurs modes instables initialement dominés par le second mode de Mack. Les outils de décomposition couplés aux DNS & LDNS, nous ont permis de révéler des interactions non-linéaires à l'origine de l'amplification d'ondes obliques issues du premier mode. Nous avons montré que ces ondes du premier mode initialement peu amplifiées participent finalement au scénario par la génération de streaks stationnaires qui forment une dernière étape avant le régime turbulent. La mise en lumière et la description de ce scénario "naturel", qui mêle les effets du second mode de Mack, du premier mode oblique et des streaks stationnaire, constitue un résultat original à la croisée des scénarios de transition "contrôlés" des études précédentes.

Dynamique de la transition d'une rugosité isolée

Par la suite, les analyses réalisées autour de rugosités isolées nous ont permis de valider la capacité du code à produire un écoulement de base précis sur des géométries d'application plus complexes et 3D. Ces calculs ont permis de compléter l'étude précédente de LEFIEUX (2020) sur la dynamique de transition dans le sillage d'une rugosité isolée. Avec les outils de simulation, nous avons mis en avant dans des conditions d'écoulement identiques, une différence importante dans la réponse obtenue avec le forçage large bande vis-à-vis de celle obtenue dans l'étude de référence pour une réponse impulsionnelle. De ce constat, nous avons pu souligner la sensibilité de l'écoulement de sillage d'une rugosité à l'environnement de perturbation. Cette étude constitue un premier jeu de résultat qu'il serait intéressant de caractériser plus largement avec une décomposition globale et un bilan de l'énergie des perturbations afin de mieux comprendre l'origine de cette différence.

Dynamique linéaire et non-linéaire des streaks

De cette étude sur la sensibilité de la couche limite à la déformation, nous avons choisi de définir un cadre idéalisé pour l'analyse du sillage que pourrait générer des rugosités ou d'autres instabilités non-modales. Ce cadre a permis une analyse paramétrique simplifiée de l'effet de la déformation de la couche limite par des streaks stationnaires. Nous avons pu mettre en place trois écoulements de base construits avec des perturbations optimales issues de la stabilité locale. Ces écoulements de base ont permis de caractériser l'effet d'une petite déformation de l'écoulement de base sur la stabilité de la couche limite hypersonique. Nous avons également pu détailler l'évolution du premier mode oblique et des modes de streaks pour des amplitudes de streaks croissante. Cette étude a servi à com-

¹³ De nouveau, le terme "contrôlé" réfère ici à des forçages construits pour générer un scénario de transition précis et prédéterminé.

pléter la compréhension du lien entre les différentes instabilités observées sur les couches limites avec et sans streaks. Enfin, nous avons caractérisé dans nos conditions les amplitudes critiques d'émergence et de dominance des modes de streaks.

Par la suite, un cadre formel pour la décomposition de l'écoulement non homogène en espace a été introduit en s'appuyant sur la théorie de Floquet. Avec cet approche, nous avons pu généraliser la formulation de la SPOD par modes découplés en espace, à un écoulement de base L-périodique. Les dérivations menant à une écriture du produit interne dans l'espace de Fourier nous permettent de réduire le coût de l'analyse SPOD des bases de données non homogène d'un facteur $L = 4$. Cette formulation constitue une approche intéressante pour la décomposition des écoulements compressibles L-périodiques de grande taille et n'avait pas été suggérée dans la littérature.

Dans la continuité, l'étude du forçage par bruit blanc des couches limites hypersonique avec streaks nous a permis de mettre en avant les modifications conséquentes du scénario de transition produites par la déformation de l'écoulement. Les simulation DNS et LDNS de la dynamique issus du forçage ont révélé une dynamique de transition riche et la superposition de nombreux modes dans le régime linéaire. Les outils de décomposition introduits nous ont permis d'identifier clairement chaque mode amplifié par le forçage. Avec cette identification et les résultats obtenus précédemment pour la couche limite non déformée, nous avons confirmé l'effet stabilisant des streaks au regard du second mode de Mack. Nous avons également démontré une forte amplification du premier mode de Mack même pour de faibles amplitudes de streaks. Ce mode domine le processus de transition pour deux des trois amplitudes étudiées. Nous avons également exploré la route jusqu'à la transition pour des streaks de haute amplitude et mis en évidence le rôle des modes de streaks issus du bruit blanc dans la transition. Enfin nous avons montré une séparation en fréquence du second mode de Mack avec l'augmentation de l'amplitude des streaks.

Les résultats issus de cette première analyse DNS de la dynamique des streaks en régime hypersonique introduisent plusieurs problématiques intéressantes.

PERSPECTIVES

Le code de simulation CurviCREAMS offre plusieurs directions de travail pour l'analyse des écoulements hypersoniques. Une suite directe notre étude, actuellement en développement, consiste en le couplage du code à des outils d'analyse Résolvent. Cette approche permettra alors d'effectuer des analyses de réceptivité sur des écoulements à haute vitesse et multiespèces autour des géométries curvilignes. Ces analyses pourront être comparées aux simulations haute fidélité dans une même chaîne de calcul numérique. Une première étude avec ces outils consisterait en l'obtention de réponses optimales sur une portion de pointe avant hémisphérique et d'en effectuer ensuite la simulation non-linéaire. Des travaux en ce sens ont été engagés (MARTINI et al., 2022).

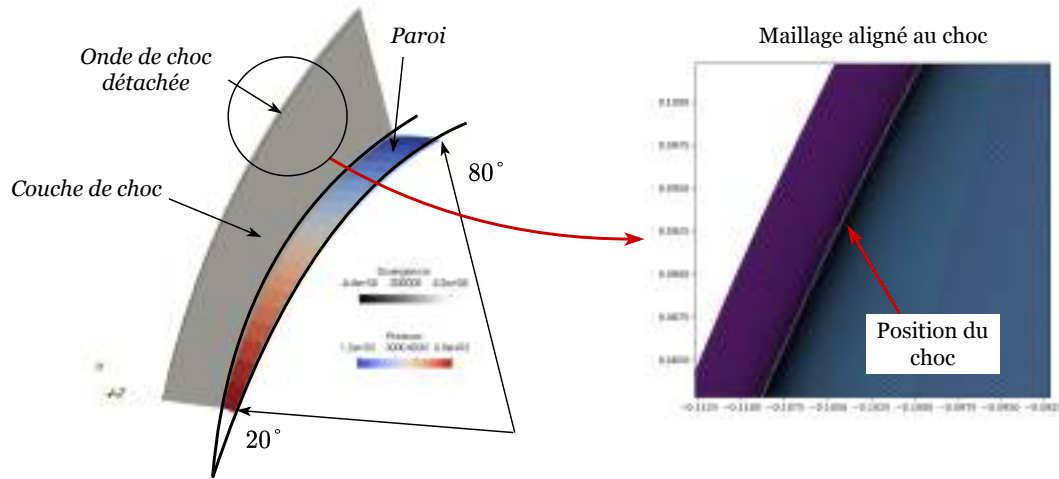


FIGURE 6.18 : Exemple préliminaire d'écoulement de base à $M_\infty = 7.32$ étudié en perspective avec CurviCREAMS. Gauche : champ de pression à la paroi et champ de divergence. Droite : vue du maillage aligné sur le choc.

Une seconde extension directe de nos résultats, serait de prolonger les analyses DNS et LDNS de la dynamique des streaks sur des pointes avant hémisphériques en se rapprochant du Re_{R_N} critique du blunt-body paradox. Des essais concluants préliminaires concluants ont été réalisés et sont présentés en Fig. 6.18. Un écoulement de base à $M_\infty = 7.32$ est calculé avec un code volume fini tierce, cet écoulement reprends les paramètres de l'étude de PAREDES, CHOUDHARI et LI (2017a). Un sous domaine de calcul initial est extrait et une grille adaptée est construite pour constituer le champ de base de l'analyse DNS et LDNS avec CurviCREAMS. En supplément, un calcul de réponse optimal avec l'opérateur linéaire global de CurviCREAMS en utilisant l'approche proposée par **schmidStabilityAnalysisPeriodic2017** pour la stabilité globale de système L-périodiques pourrait être envisagé.

En lien avec l'étude des pointes avant hémisphériques, l'analyse de la réponse de rugosités distribuées de différentes hauteurs à un forçage par bruit blanc pourrait être un complément intéressant aux résultats obtenus pour une rugosité isolée. La difficulté reste alors de définir l'espace des paramètres à explorer. Une approche couplant DNS et stabilité globale telle que proposée par MARGARITIS et al. (2022) semble être appropriée à ce problème.

Enfin, pour aller plus loin dans la représentativité de la physique de l'écoulement hypersonique, nous pourrions tirer parti de la formulation multiespèce de notre code pour envisager la simulation des effets de gaz réel sur les scénarios de transition.

Merci pour votre lecture.

Troisième partie

ANNEXES



POST-TRAITEMENT PARALLÈLE ET GRAPHE DE TÂCHES

La décomposition des larges bases de données générées représente un temps de calcul important. Ces bases de données sont souvent analysées à l'aide de codes utilisant des langages dits "bas niveau". L'écriture de ces codes dans un contexte HPC pour des algorithmes d'analyse complexes tels que la SPOD ou la DMD, peut présenter des développements difficiles si l'on souhaite tirer parti efficacement des paradigmes de parallélisation CPU/GPU classiques (MPI, OpenMP, OpenACC). Nous proposons dans cette annexe une approche alternative pour l'analyse de larges bases de données complexes (>1To), basée sur le langage "haut-niveau" Python et la librairie de parallélisation par graphe de tâches Dask (TEAM, 2016).

A.1 DONNÉES STRUCTURÉES ET ALGORITHME

Pour les calculs de physique réalisés dans cette étude, nous sommes intéressé par la sauvegarde à des instants t_i de vecteurs d'état $\mathbf{q}_i \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j \times N_k \times N_v}$ de N_v variables sur $N_i \times N_j \times N_k$ points. Numériquement, ces vecteurs d'état sont des données structurées en quatre dimensions, que l'on peut indexer (i, j, k, l) et qui sont un isomorphisme des dimensions de la physique $(x, y, z, \text{variable})$. Ces dimensions se manipulent sur la machine pour parcourir le tableau 4D : $\mathbf{q} = [::, ::, ::, :]$. La sauvegarde d'un vecteur d'état constitue alors un fichier sur le disque dur. Et inversement, l'ensemble de ces fichiers constitue le vecteur 5D : $\mathbf{Q} = [::, ::, ::, :, :]$ de la dynamique de la physique simulée, pour la succession de N_t instants t_i à t_{i+1} . Cette structuration de la donnée est illustrée en partie (A) de la Fig. A.1.

La dynamique est donc représentée par la matrice,

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{N_t}) \quad (\text{A.1})$$

qui constitue un très grand volume de données. En pratique, c'est cette matrice que l'on souhaite décomposer.

Prenons l'exemple du calcul d'une norme $\|\bullet\|$ intégrée sur l'ensemble de la grande matrice $\mathbf{Q}$ pour une fréquence ω et un nombre d'onde β donnés. Nous devons donc effectuer une transformée de Fourier dans deux directions t et z pour

avoir $\hat{\mathbf{Q}}$. Puis, nous calculons cette norme avec le produit interne discret sur le domaine $V \in \mathbb{R}^3$,

$$||\hat{\mathbf{Q}}|| = \langle \hat{\mathbf{Q}}, \hat{\mathbf{Q}} \rangle = \int_V \hat{\mathbf{Q}}^H \hat{\mathbf{Q}} dV \quad (\text{A.2})$$

Algorithmiquement, le calcul de ce produit interne nécessite d'abord des transformées de Fourier successives dans les directions k puis t . Ces directions doivent donc être continues en mémoire au moment de l'opération. Or, le volume de donnée représenté par $\mathbf{Q} = [::, ::, ::, ::]$ ne peut pas être chargé en mémoire d'un bloc.

Devant ce constat, dans l'approche classique, le calcul est découpé en étapes qui sont réalisées séquentiellement et distribuées sur plusieurs CPU ou GPU n'ayant pas nécessairement de mémoire partagée. Ces étapes peuvent constituer par exemple,

1. La transformation de Fourier $\mathcal{F}_z$ de chaque fichier indépendant dans la direction z pour la sauvegarde d'une seconde base de données triée par nombres d'ondes.
2. Décomposition fichier par fichier de cette seconde base de données, dans la direction t pour obtenir les composantes par fréquence avec la transformée de Fourier $\mathcal{F}_t$.
3. Calcul du produit interne pour un couple (ω, β) donné et somme sur V .

Chacune de ces étapes nécessite souvent son propre programme, préférablement parallélisé et écrit dans un langage bas niveau pour accélérer les calculs. Dans ce cas, l'écriture de la parallélisation, des entrées sorties, des communications, des transformées de Fourier et d'autres opérations algébriques est un processus difficile.

De plus, cette formulation n'est pas nécessairement flexible si l'on veut pouvoir changer rapidement les portions en temps ou en espace de $\mathbf{Q}$ que l'on souhaite analyser.

A.2 CONSTRUCTION D'UN GRAPHE DE TÂCHES

L'approche par graphe de tâche proposée pour le calcul de l'Eq. A.2 telle que montrée en partie (B) de la Fig. A.1 dépend de trois ingrédients principaux :

- Une représentation virtuelle de $\mathbf{Q}$ basée sur une cartographie de la donnée brute répartie dans les fichiers.
- La décomposition des directions non continues et indépendantes de $\mathbf{Q}$ en une multitude de sous blocs de petite taille nommés chunks.
- Un graphe de la succession des étapes nécessaires pour le calcul des opérations sur un chunk.

Nous remarquons que les étapes du calcul de l'Eq. A.2 peuvent se décomposer en une multitude de tâches indépendantes si l'on travaille directement avec la matrice complète $\mathbf{Q}$. Nous procédons donc à la construction d'une représentation virtuelle de la matrice 5D : $\mathbf{Q}$. Cet objet que l'on nomme $\hat{\mathbf{Q}}$ est indexé sur les 5 directions d'espace, de temps et de variables, mais ne charge pas $\mathbf{Q}$ en mémoire. Au contraire, $\hat{\mathbf{Q}}$ contient une cartographie de la localisation des différents indices

$(i, j, k, t, \text{variable})$ parmi les fichiers sur le disque dur. La construction de cet objet est permise par la librairie Dask. Après sa construction, $\hat{Q}$ nous permet de manipuler librement la représentation de Q et d'écrire l'algorithme du calcul de notre produit interne et ses transformée de Fourier avec un simple script Python, sans gérer l'aspect "expert HPC" du calcul.

Ensuite, nous avons évoqué que seules certaines dimensions de la donnée, ici, z et t , doivent être continues en mémoire pour au moins le calcul de $\mathcal{F}_z$ et $\mathcal{F}_t$. La seconde étape consiste alors en la découpe des directions non continues de $\hat{Q}$ par chunks pour ne lire que des petits blocs de données pouvant être chargé rapidement en mémoire. Ceci est rendu possible par le développement du système d'entrées/sorties parallèle via des fichiers HDF5¹.

De cette représentation virtuelle, sa découpe en chunks et l'écriture de l'algorithme, nous pouvons générer un graphe G constitué des chemins indépendants suivi par chaque chunk dans le calcul de $\langle \hat{Q}, \hat{Q} \rangle$. La combinaison de ces chemins constitue le calcul complet sur la matrice Q . En fonction des réductions de données successives (sous échantillonnage, sélection d'une fréquence) ils se joignent et selon les réorganisation de Q (transposée, tri par nombre d'onde) ils se croisent. Les structures issues des opérations sur les chunks constituent également des représentations virtuelles intermédiaires des étapes du calcul de l'Eq. A.2. Ce graphe constitue donc une suite d'opérations prédéterminées, construite par interprétation de l'algorithme général, mais sans calcul brut pour l'instant.

Il y a alors deux niveau de parallélisation possible. Le premier est global et consiste en la parallélisation des portions de chemins du graphe qui peuvent être traités indépendamment. Le second est local, au sein d'un chemin du graphe, les opérations de calcul intensif peuvent être parallélisée et vectorisées.

A.3 PARALLÉLISATION DU GRAPHE

Une fois que G est obtenu, nous pouvons tirer parti des ressources HPC pour distribuer les tâches. Cette distribution est gérée par un *scheduler* qui représente le côté *serveur*. Le scheduler gère une base de *workers* qui constituent un nœud de calcul pourvu de CPUs et/ou GPUs associés à certaine quantité de mémoire RAM. Le scheduler a donc à sa disposition la somme des ressources des workers. Le script python et le graphe sont produits du côté *client* via un simple *Jupyter Notebook* connecté au calculateur par exemple.

Le scheduler est alors construit selon la machine cible et il produit automatiquement des scripts de soumission de *Jobs* pour obtenir les ressources de calcul nécessaire à la création des workers. Une fois les workers actifs, le graphe G est optimisé puis soumis au scheduler. Le scheduler distribue alors chaque portion du graphe aux workers et gère le calcul et les communications de ces derniers de façon asynchrone en fonction des *events* retournés. Chaque worker a une somme de tâches à effectuer et récupère en mémoire les chunks nécessaires dans les fichiers

¹ Le format HDF5 est un format binaire hiérarchisé qui permet d'accéder à la structure de l'information sans charger la donnée en mémoire

HDF5 de façon indépendante. Au sein d'un worker, l'utilisation des bibliothèques python usuelle est faite en profitant de la vectorisation des opérations. Après la complétion d'une étape, la donnée non utilisée est supprimée et d'autres tâches sont lancées.

La succession des tâches et des étapes est suivie par le scheduler qui équilibre automatiquement la charge de calcul et la mémoire. Seule la donnée nécessaire est utilisée et le calcul est avancé progressivement en tirant parti des réductions de données du graphe. Nous remarquons que cette approche est agnostique et souple quant à l'architecture cible de la machine de travail. À la fin du calcul, le scheduler renvoie la donnée réduite au client.

Cette approche a été appliquée à l'ensemble des décompositions de la présente étude. L'utilisation des graphes générés par Dask a permis de travailler quotidiennement sur des bases de données de plusieurs To et d'extraire rapidement les plans nécessaires. En guise d'exemple, le passage de la base de donnée brute d'un cas de streaks (20To) à un spectre en fréquence dans la direction x de l'énergie E_y intégrée dans le domaine pour un set de 15 modes de Floquet en z nécessite environ 30min sur 400 CPUs avec un script relativement simple.

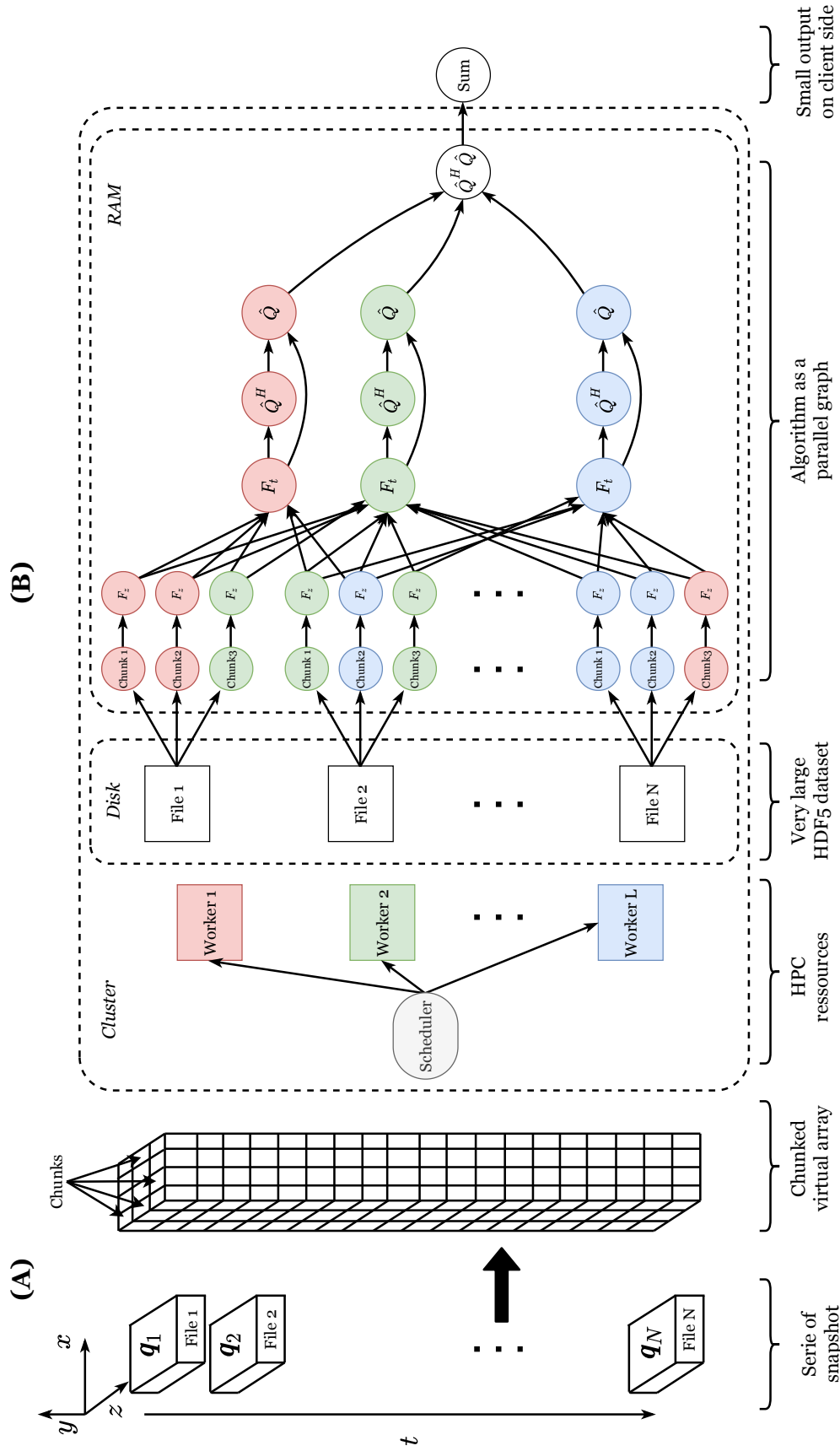


FIGURE A.1 : Illustration de l'approche par graphes de tâches. Les directions (y , variable) ne sont pas représentées dans la donnée pour simplifier

SPECTRAL PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION

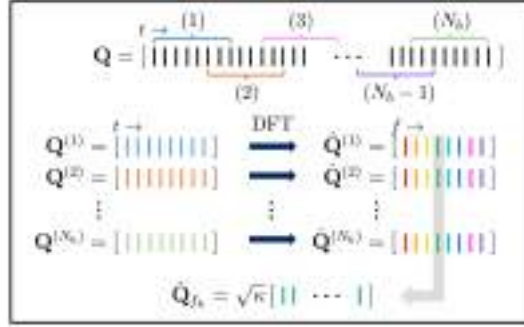


FIGURE B.1 : Illustration du calcul de la matrice réduite pour la SPOD. Issu de TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS (2018)

Dans cette annexe sont redonnées les étapes du calcul de la SPOD pour une donnée discrète, telles que décrites par TOWNE, SCHMIDT et COLONIUS (2018). Une synthèse du calcul est illustrée en Fig. B.1

Nous partons d'un ensemble de M vecteurs $\mathbf{q}_i$ de N degrés de liberté décrivant l'état de notre système pour une succession d'instant $t_{i+1} = t_i + \Delta t$. Cette donnée est représentée par la matrice,

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_M) \in \mathbb{R}^{N \times M}. \quad (\text{B.1})$$

Pour estimer la densité spectrale de puissance croisée, cette matrice globale est découpée en N_b blocs recouvrants de taille N_f ,

$$\mathbf{Q}^n = (\mathbf{q}_1^n, \mathbf{q}_2^n, \dots, \mathbf{q}_M^n) \in \mathbb{R}^{N \times N_f}. \quad (\text{B.2})$$

Chaque bloc est alors multiplié par une fenêtre $w \in \mathbb{R}^N$, puis une transformée de Fourier discrète est employée de sorte à obtenir,

$$\hat{\mathbf{Q}}^n = (\hat{\mathbf{q}}_1^n, \hat{\mathbf{q}}_2^n, \dots, \hat{\mathbf{q}}_M^n) \in \mathbb{C}^{N \times N_f}. \quad (\text{B.3})$$

La densité spectrale d'énergie croisée peut alors être exprimée pour une fréquence f_k , d'indice k en utilisant une moyenne d'ensemble des blocs.

$$\mathbf{S}_{f_k} = \frac{\Delta t}{s N_b} \sum_{n=1}^{N_b} \hat{\mathbf{q}}_k (\hat{\mathbf{q}}_k)^H, \quad s = \sum_{j=1}^{N_f} w_j^2 \quad (\text{B.4})$$

Une formulation compacte est écrite en réorganisant la matrice $\mathbf{Q}$ telle que,

$$\hat{\mathbf{Q}}_{f_k} = \sqrt{\kappa}(\hat{\mathbf{q}}_k^1, \hat{\mathbf{q}}_k^2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_k^{N_b}) \in \mathbb{C}^{N_b \times N_b}, \quad \kappa = \Delta t / s N_b, \quad (\text{B.5})$$

et en utilisant une matrice de pondération $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_b \times N_b}$ appropriée. Cette formulation compacte donne le problème aux valeurs propres de la SPOD par la méthode dite des *snapshots*,

$$\hat{\mathbf{Q}}_{f_k}^H \mathbf{W} \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} \mathbf{\Theta}_{f_k} = \mathbf{\Theta}_{f_k} \mathbf{\Lambda}_{f_k} \quad (\text{B.6})$$

Les N_b valeurs propres permettent de trier les modes SPOD par leur énergie. Un mode SPOD est retrouvé avec,

$$\mathbf{\Psi}_{f_k} = \hat{\mathbf{Q}}_{f_k} \mathbf{\Theta}_{f_k}^{-1/2}. \quad (\text{B.7})$$

Ces modes et valeurs propres constituent la base de vecteurs propres orthogonale optimale décrivant la dynamique périodique de $\mathbf{Q}$ à la fréquence f_k .

BIBLIOGRAPHIE

- ALFREDSSON, P. et Masaharu MATSUBARA (19 juin 2000). "Free-Stream Turbulence, Streaky Structures and Transition in Boundary Layer Flows". In : *Fluids 2000 Conference and Exhibit*. Fluids 2000 Conference and Exhibit. Denver, CO, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- ANDERSON JR., John D. (jan. 2006). *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics, Second Edition*. Reston, VA : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- ANDERSSON, Paul et al. (jan. 1999). "Optimal Disturbances and Bypass Transition in Boundary Layers". In : *Physics of Fluids* 11.1, p. 134-150.
- ANDERSSON, Paul et al. (fév. 2001). "On the Breakdown of Boundary Layer Streaks". In : *Journal of Fluid Mechanics* 428, p. 29-60.
- ARNAL, Daniel et al. (1994). *Special Course on Progress in Transition Modelling : At the Universidad Politecnica de Madrid, Escuela Tecnica Superior de Ingenieros Aeronauticos, Madrid, Spain, 22nd - 25th March 1993 and at the VKI, Rhodes-Saint-Genèse, Belgium, 29th March - 1st April 1993 = Progrès Dans La Modélisation de La Transition*. AGARD Report 793. Neuilly-sur-Seine : AGARD. 276 p.
- BAKER, C. J. (nov. 1979). "The Laminar Horseshoe Vortex". In : *Journal of Fluid Mechanics* 95.2, p. 347-367.
- BENEDDINE, Samir (3 mars 2017). "Characterization of Unsteady Flow Behavior by Linear Stability Analysis". Thèse de doct. Université Paris-Saclay.
- BENEDDINE, Samir et al. (1^{er} juill. 2016). "Conditions for Validity of Mean Flow Stability Analysis". In : *Journal of Fluid Mechanics* 798, p. 485-504.
- BERLAND, Julien et al. (déc. 2006). "Low-Dissipation and Low-Dispersion Fourth-Order Runge-Kutta Algorithm". In : *Computers & Fluids* 35.10, p. 1459-1463.
- BERLAND, Julien et al. (juin 2007). "High-Order, Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes for Multiple-Scale and Boundary Problems". In : *Journal of Computational Physics* 224.2, p. 637-662.
- BERNARDINI, Matteo et al. (oct. 2014). "Parameterization of Boundary-Layer Transition Induced by Isolated Roughness Elements". In : *AIAA Journal* 52.10, p. 2261-2269.
- BERS, A. (1983). *Space-Time Evolution of Plasma Instabilities - Absolute and Convective*. Netherlands : North-Holland.
- BHAGATWALA, Ankit et Sanjiva K. LELE (1^{er} août 2009). "A Modified Artificial Viscosity Approach for Compressible Turbulence Simulations". In : *Journal of Computational Physics* 228.14, p. 4965-4969.
- BOGEY, Christophe et Christophe BAILLY (fév. 2004). "A Family of Low Dispersive and Low Dissipative Explicit Schemes for Flow and Noise Computations". In : *Journal of Computational Physics* 194.1, p. 194-214.

- BOIKO, A. V. et al. (déc. 1994). "Experiments in a Boundary Layer Subjected to Free Stream Turbulence. Part 2. The Role of TS-waves in the Transition Process". In : *Journal of Fluid Mechanics* 281, p. 219-245.
- BOUNTIN, D. et al. (25 sept. 2008). "Evolution of Nonlinear Processes in a Hypersonic Boundary Layer on a Sharp Cone". In : *Journal of Fluid Mechanics* 611, p. 427-442.
- BRIGGS, Richard J. (15 déc. 1964). *Electron-Stream Interaction with Plasmas*. Cambridge, MA, USA : MIT Press. 204 p.
- BROWNE, Oliver M. F. et al. (2014). "Sensitivity Analysis to Unsteady Perturbations of Complex Flows : A Discrete Approach". In : *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 76.12, p. 1088-1110.
- BUCCI, M. A. et al. (14 juin 2021). "Influence of Freestream Turbulence on the Flow over a Wall Roughness". In : *Physical Review Fluids* 6.6, p. 063903.
- BUGEAT, Benjamin (12 déc. 2017). "Stabilité et perturbations optimales globales d'écoulements compressibles pariétaux". Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI.
- BUTLER, Kathryn M. et Brian F. FARRELL (août 1992). "Three-dimensional Optimal Perturbations in Viscous Shear Flow". In : *Physics of Fluids A : Fluid Dynamics* 4.8, p. 1637-1650.
- CAMBIER, Laurent et al. (2013). "The Onera elsA CFD Software : Input from Research and Feedback from Industry". In : *Mechanics & Industry* 14.3 (3), p. 159-174.
- CAO, Shibin et al. (10 avr. 2021). "Unsteady Effects in a Hypersonic Compression Ramp Flow with Laminar Separation". In : *Journal of Fluid Mechanics* 912, A3.
- CARPENTER, Mark H. et Christopher A. KENNEDY (1^{er} juin 1994). *Fourth-Order 2N-storage Runge-Kutta Schemes*. NASA-TM-109112.
- CERMINARA, Adriano (2017). "Boundary-Layer Receptivity and Breakdown Mechanisms for Hypersonic Flow over Blunt Leading-Edge Configurations". Southampton.
- CHANG, Chau-Lyan et Mujeeb R. MALIK (août 1994). "Oblique-Mode Breakdown and Secondary Instability in Supersonic Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 273 (-1), p. 323.
- CHERUBINI, S. et al. (2 déc. 2010). "Rapid Path to Transition via Nonlinear Localized Optimal Perturbations in a Boundary-Layer Flow". In : *Physical Review E* 82.6, p. 066302.
- CHOU, Amanda et al. (10 avr. 2020). "Transition Induced by Streamwise Arrays of Roughness Elements on a Flat Plate in Mach 3.5 Flow". In : *Journal of Fluid Mechanics* 888, A21.
- CHOUDHARI, Meelan M. et al. (22 juin 2015). "Computations of Disturbance Amplification Behind Isolated Roughness Elements and Comparison with Measurements". In : *45th AIAA Fluid Dynamics Conference*. 45th AIAA Fluid Dynamics Conference. Dallas, TX : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- CHOUDHARI, Meelan M. et al. (25 juin 2018). "Effect of Distributed Patch of Smooth Roughness Elements on Transition in a High-Speed Boundary Layer". In : *2018 Fluid Dynamics Conference*. 2018 Fluid Dynamics Conference. Atlanta, Georgia : American Institute of Aeronautics and Astronautics.

- CHOUDHARI, Meelan et al. (2017). "Boundary Layer Transition on Hypersonic Vehicles : Effects of Surface Roughness and Surface Blowing". In : p. 40.
- CHU, Boa-Teh (1^{er} sept. 1965). "On the Energy Transfer to Small Disturbances in Fluid Flow (Part I)". In : *Acta Mechanica* 1.3, p. 215-234.
- COOK, Andrew W. et William H. CABOT (mars 2005). "Hyperviscosity for Shock-Turbulence Interactions". In : *Journal of Computational Physics* 203.2, p. 379-385.
- CORKE, T. C. et al. (1986). "Experiments on Transition Enhancement by Distributed Roughness". In : *Physics of Fluids* 29.10, p. 3199.
- COSSU, Carlo et Luca BRANDT (août 2002). "Stabilization of Tollmien-Schlichting Waves by Finite Amplitude Optimal Streaks in the Blasius Boundary Layer". In : *Physics of Fluids* 14.8, p. L57-L60.
- CRAIG, Stuart A. et al. (10 août 2019). "Nonlinear Behaviour of the Mack Mode in a Hypersonic Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 872, p. 74-99.
- CRAIK, Alex D. D. (29 nov. 1971). "Non-Linear Resonant Instability in Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 50.2, p. 393-413.
- CROUCH, J. D. (nov. 1992). "Non-Localized Receptivity of Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 244 (-1), p. 567.
- DAUDE, F. et al. (mai 2012). "A High-Order Finite-Difference Algorithm for Direct Computation of Aerodynamic Sound". In : *Computers & Fluids* 61, p. 46-63.
- DE TULLIO, Nicola (fév. 2013). "Receptivity and Transition to Turbulence of Supersonic Boundary Layers with Surface Roughness". Thèse de doct. University of Southampton. 208 p.
- DE TULLIO, Nicola et Neil D. SANDHAM (25 jan. 2015). "Influence of Boundary-Layer Disturbances on the Instability of a Roughness Wake in a High-Speed Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 763, p. 136-165.
- DEBONIS, James (7 jan. 2013). "Solutions of the Taylor-Green Vortex Problem Using High-Resolution Explicit Finite Difference Methods". In : *51st AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition*. 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition. Grapevine (Dallas/Ft. Worth Region), Texas : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- DENG, Xiaogang et al. (fév. 2011). "Geometric Conservation Law and Applications to High-Order Finite Difference Schemes with Stationary Grids". In : *Journal of Computational Physics* 230.4, p. 1100-1115.
- DENG, Xiaogang et al. (avr. 2013). "Further Studies on Geometric Conservation Law and Applications to High-Order Finite Difference Schemes with Stationary Grids". In : *Journal of Computational Physics* 239, p. 90-111.
- DI GIOVANNI, Antonio et Christian STEMMER (10 déc. 2018). "Cross-Flow-Type Breakdown Induced by Distributed Roughness in the Boundary Layer of a Hypersonic Capsule Configuration". In : *Journal of Fluid Mechanics* 856, p. 470-503.
- DUCROS, F et al. (1^{er} juill. 1999). "Large-Eddy Simulation of the Shock/Turbulence Interaction". In : *Journal of Computational Physics* 152.2, p. 517-549.
- DWIVEDI, Anubhav et al. (30 nov. 2021). "Oblique Transition in Hypersonic Double-Wedge Flow : An Input-Output Viewpoint". arXiv : [2111.15153](https://arxiv.org/abs/2111.15153) [nlin, physics:physics].

- ELLINGSEN, T. et E. PALM (1975). "Stability of Linear Flow". In : *Physics of Fluids* 18.4, p. 487.
- EMMERT, Thomas (s. d.).
- EMMERT, Thomas et al. (oct. 2009). "Numerical Study of Self-Induced Transonic Flow Oscillations behind a Sudden Duct Enlargement". In : *Physics of Fluids* 21.10, p. 106105.
- EYNDE, Jeroen Van den (2015). "Stability and Transition of the Flow behind Isolated Roughness Elements in Hypersonic Boundary Layers". Thèse de doct. University of Southampton.
- EYNDE, Jeroen Van den et N. D. SANDHAM (2015). "Numerical Simulations of Transition Due to Isolated Roughness Elements at Mach 6". In : *AIAA Journal*. 7th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference. Atlanta : AIAA Journal, p. 13.
- FEDOROV, A. V. et A. P. KHOKHLOV (1992). "Excitation of Unstable Modes in a Supersonic Boundary Layer by Acoustic Waves". In : *Fluid Dynamics* 26.4, p. 531-537.
- FEDOROV, A.V. et A.P. KHOKHLOV (1^{er} fév. 2002). "Receptivity of Hypersonic Boundary Layer to Wall Disturbances". In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 15.4, p. 231-254.
- FEDOROV, Alexander V. et Andrew P. KHOKHLOV (1^{er} juill. 2001). "Prehistory of Instability in a Hypersonic Boundary Layer". In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 14.6, p. 359-375.
- FEDOROV, Alexander (21 jan. 2011). "Transition and Stability of High-Speed Boundary Layers". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1, p. 79-95.
- FEDOROV, Alexander et Anatoli TUMIN (août 2011). "High-Speed Boundary-Layer Instability : Old Terminology and a New Framework". In : *AIAA Journal* 49.8, p. 1647-1657.
- FERRER, Pedro José Martínez (2013). "Simulation numérique directe dans la combustion turbulente sur une couche de cisaillement." ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique - Poitiers.
- FLOQUET, G. (1883). "Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques". In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 12, p. 47-88.
- FRANKO, Kenneth J. et Sanjiva K. LELE (10 sept. 2013). "Breakdown Mechanisms and Heat Transfer Overshoot in Hypersonic Zero Pressure Gradient Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 730, p. 491-532.
- FU, Lin (nov. 2019). "A Very-High-Order TENO Scheme for All-Speed Gas Dynamics and Turbulence". In : *Computer Physics Communications* 244, p. 117-131.
- GOTTLIEB, Sigal et Chi-Wang SHU (1^{er} jan. 1998). "Total Variation Diminishing Runge-Kutta Schemes". In : *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society* 67.221, p. 73-85.
- GROSKOPF, Gordon et Markus J. KLOKER (oct. 2016). "Instability and Transition Mechanisms Induced by Skewed Roughness Elements in a High-Speed Laminar Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 805, p. 262-302.
- GROSKOPF, Gordon et al. (31 déc. 2009). *Bi-Global Crossplane Stability Analysis of High-Speed Boundary-Layer Flows with Discrete Roughness*. T. 18. 7th IUTAM Symposium on Laminar-Turbulent Transition, p. 176. 171 p.

- GROSSIR, Guillaume (2015). "Longshot Hypersonic Wind Tunnel Flow Characterization and Boundary Layer Stability Investigations". Von Karman Institute : Université Libre de Bruxelles.
- GUSTAVSSON, L. Hårkan (mars 1991). "Energy Growth of Three-Dimensional Disturbances in Plane Poiseuille Flow". In : *Journal of Fluid Mechanics* 224, p. 241-260.
- HADER, Christoph et Hermann F. FASEL (juill. 2018). "Towards Simulating Natural Transition in Hypersonic Boundary Layers via Random Inflow Disturbances". In : *Journal of Fluid Mechanics* 847.
- (juin 2019). "Direct Numerical Simulations of Hypersonic Boundary-Layer Transition for a Flared Cone : Fundamental Breakdown". In : *Journal of Fluid Mechanics* 869, p. 341-384.
- HANIFI, Ardesbir et al. (mars 1996). "Transient Growth in Compressible Boundary Layer Flow". In : *Physics of Fluids* 8.3, p. 826-837.
- HARTMAN, Andrew B. et al. (mai 2021). "Nonlinear Transition Mechanism on a Blunt Cone at Mach 6 : Oblique Breakdown". In : *Journal of Fluid Mechanics* 915.
- HEIN, Stefan et al. (mars 2019). "Numerical Investigation of Roughness Effects on Transition on Spherical Capsules". In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 56.2, p. 388-404.
- HENROTIN, Joseph (2021). *Armes hypersoniques : quels enjeux pour les armées ?* Institut Français des Relations Internationales, p. 14.
- HERBERT, T (1988). "Secondary Instability of Boundary Layers". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 20.487-586.
- HERBERT, Thorwald (1997). "Parabolized Stability Equations". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 29.1, p. 245-283.
- HIXON, R. (sept. 2000). "Numerically Consistent Strong Conservation Grid Motion for Finite Difference Schemes". In : *AIAA Journal* 38.9, p. 1586-1593.
- HORVATH, Thomas J et al. (2012). *Global Infrared Observations of Roughness Induced Transition on the Space Shuttle Orbiter*. 27. NATO, p. 22.
- HUERRE, P. et P. A. MONKEWITZ (oct. 1985). "Absolute and Convective Instabilities in Free Shear Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 159, p. 151-168.
- HUERRE, P et P A MONKEWITZ (jan. 1990). "Local and Global Instabilities in Spatially Developing Flows". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 22.1, p. 473-537.
- JACOBS, Christian T. et al. (1^{er} jan. 2017). "OpenSBLI : A Framework for the Automated Derivation and Parallel Execution of Finite Difference Solvers on a Range of Computer Architectures". In : *Journal of Computational Science* 18, p. 12-23.
- JAMESON, A. et al. (23 juin 1981). "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge Kutta Time Stepping Schemes". In : *14th Fluid and Plasma Dynamics Conference*. 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference. Palo Alto, CA, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- JEWELL, Joseph Stephen (2014). "Boundary-Layer Transition on a Slender Cone in Hypervelocity Flow with Real Gas Effects". California Institute of Technology.
- JORDAN, Peter et al. (5 juin 2017). "Modal and Non-Modal Linear Wavepacket Dynamics in Turbulent Jets". In : *23rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 23rd

- AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Denver, Colorado : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- JOVANOVIĆ, Mihailo R. (5 jan. 2021). "From Bypass Transition to Flow Control and Data-Driven Turbulence Modeling : An Input–Output Viewpoint". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 53.1, p. 311-345.
- KAWAI, S. et S.K. LELE (nov. 2008). "Localized Artificial Diffusivity Scheme for Discontinuity Capturing on Curvilinear Meshes". In : *Journal of Computational Physics* 227.22, p. 9498-9526.
- KAWAI, Soshi et al. (mars 2010). "Assessment of Localized Artificial Diffusivity Scheme for Large-Eddy Simulation of Compressible Turbulent Flows". In : *Journal of Computational Physics* 229.5, p. 1739-1762.
- KENDALL, J. (16 juill. 1985). "Experimental Study of Disturbances Produced in a Pre-Transitional Laminar Boundary Layer by Weak Freestream Turbulence". In : *18th Fluid Dynamics and Plasmadynamics and Lasers Conference*. 18th Fluid Dynamics and Plasmadynamics and Lasers Conference. Cincinnati, OH, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- KENDALL, J.M. (mars 1975). "Wind Tunnel Experiments Relating to Supersonic and Hypersonic Boundary-Layer Transition". In : *AIAA Journal* 13.3, p. 290-299.
- KENNEDY, Richard E. et al. (17 juin 2019). "Visualizations of Hypersonic Boundary-Layer Transition on a Variable Bluntness Cone". In : *AIAA Aviation 2019 Forum*. AIAA Aviation 2019 Forum. Dallas, Texas : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- KENNEDY, Richard E. et al. (10 avr. 2022). "Characterization of Instability Mechanisms on Sharp and Blunt Slender Cones at Mach 6". In : *Journal of Fluid Mechanics* 936, A39.
- KERSWELL, R.R. (5 jan. 2018). "Nonlinear Nonmodal Stability Theory". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 50.1, p. 319-345.
- KIM, Jae et Duck-joo LEE (2001). "Adaptive Nonlinear Artificial Dissipation Model for Computational Aeroacoustics". In :
- KIM, Young C. et Edward J. POWERS (1979). "Digital Bispectral Analysis and Its Applications to Nonlinear Wave Interactions". In : *IEEE Transactions on Plasma Science* 7.2, p. 120-131.
- KLEBANOFF, P. S. (1972). "Mechanism by Which a Two-Dimensional Roughness Element Induces Boundary-Layer Transition". In : *Physics of Fluids* 15.7, p. 1173.
- KLEBANOFF, P. S. et al. (jan. 1962). "The Three-Dimensional Nature of Boundary-Layer Instability". In : *Journal of Fluid Mechanics* 12.1, p. 1-34.
- KNEER, Simon et al. (15 déc. 2021). "Control of Laminar Breakdown in a Supersonic Boundary Layer Employing Streaks". In : *Journal of Fluid Mechanics* 932, p. 1-28.
- KOEVARY, Clay et al. (28 juin 2010). "Numerical Simulations of Controlled Transition for a Circular Cone at Mach 8". In : *40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 40th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Chicago, Illinois : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- KOPIEV, Victor F. et al. (juill. 2004). "Aeroacoustics of Supersonic Jet Issued from Corrugated Nozzle : New Approach and Prospects". In : *International Journal of Aeroacoustics* 3.3, p. 199-228.

- LUMLEY, JOHN L., éd. (1970). *Stochastic Tools in Turbulence*. T. 12. Applied Mathematics and Mechanics. Elsevier.
- LAIBLE, Andreas C. et H. F. FASEL (oct. 2016). "Continuously Forced Transient Growth in Oblique Breakdown for Supersonic Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 804, p. 323-350.
- LAJÚS, F. C. et al. (10 oct. 2019). "Spatial Stability Analysis of Subsonic Corrugated Jets". In : *Journal of Fluid Mechanics* 876, p. 766-791.
- LANDAHL, M. T. (29 mai 1980). "A Note on an Algebraic Instability of Inviscid Parallel Shear Flows". In : *Journal of Fluid Mechanics* 98.2, p. 243-251.
- (mars 1990). "On Sublayer Streaks". In : *Journal of Fluid Mechanics* 212 (-1), p. 593.
- LEES, Lester et Chia Chiao LIN (1946). *Investigation of the Stability of the Laminar Boundary Layer*. NACA-TN-1115. National Advisory Committee for Aeronautics ; Washington, DC, United States.
- LEES, Lester et Eli RESHOTKO (avr. 1962). "Stability of the Compressible Laminar Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 12.04, p. 555.
- LEFIEUX, Julien (2020). "Étude DNS de La Transition Déclenchée Par Rugosité Dans Les Écoulements Hypersoniques". Thèse de doct. Gif-sur-Yvette : Université Paris-Saclay.
- LEFIEUX, Julien et al. (juin 2019). "DNS Study of Roughness-Induced Transition at Mach 6". In : *AIAA AVIATION 2019*. DALLAS, United States : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- LOISEAU, Jean-Christophe et al. (déc. 2014). "Investigation of the Roughness-Induced Transition : Global Stability Analyses and Direct Numerical Simulations". In : *Journal of Fluid Mechanics* 760, p. 175-211.
- LUGRIN, Mathieu et al. (17 sept. 2020). "Transition Scenario in Hypersonic Axisymmetrical Compression Ramp Flow". arXiv : [2009.08359 \[physics\]](https://arxiv.org/abs/2009.08359).
- MA, Yanbao et Xiaolin ZHONG (juill. 2003a). "Receptivity of a Supersonic Boundary Layer over a Flat Plate. Part 1. Wave Structures and Interactions". In : *Journal of Fluid Mechanics* 488, p. 31-78.
- (juill. 2003b). "Receptivity of a Supersonic Boundary Layer over a Flat Plate. Part 2. Receptivity to Free-Stream Sound". In : *Journal of Fluid Mechanics* 488, p. 79-121.
- (juin 2005). "Receptivity of a Supersonic Boundary Layer over a Flat Plate. Part 3. Effects of Different Types of Free-Stream Disturbances". In : *Journal of Fluid Mechanics* 532, p. 63-109.
- MACK, Leslie M (1963). *The Inviscid Stability of the Compressible Laminar Boundary Layer*. 297. Jet Propulsion Laboratory.
- (1984). *Boundary-Layer Linear Stability Theory*. 709. California Institute of Technology : Jet Propulsion Laboratory, p. 151.
- MALIK, M.R (fév. 1990). "Numerical Methods for Hypersonic Boundary Layer Stability". In : *Journal of Computational Physics* 86.2, p. 376-413.
- MANI, A (2010). "On the Reflectivity of Sponge Zones in Compressible Flow Simulations". In : *Annual brief of the CTR*, p. 17.
- MANNEVILLE, Paul (2004). *Instabilities, Chaos and Turbulence : An Introduction to Non-linear Dynamics and Complex Systems*. London : Imperial College Press. 391 p.

- MARGARITIS, Athanasios T. et al. (2022). "Sensitivity of Reacting Hypersonic Boundary Layers to N-Periodic Surface Roughness". In : *IUTAM Laminar-Turbulent Transition*. Sous la dir. de Spencer SHERWIN et al. IUTAM Bookseries. Cham : Springer International Publishing, p. 599-612.
- MARSDEN, Olivier (2005). "Calcul direct du rayonnement acoustique de profil par une approche curviligne d'ordre élevé". Ecole Centrale de Lyon.
- MARTINI, Eduardo et al. (2022). "Non-Modal Mechanisms in the Flow over the Leading Edge of Blunt Bodies". In : *Proceedings of the 12th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP12)*. 12th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena (TSFP12). Osaka, Japan.
- MARXEN, Olaf et Gianluca IACCARINO (23 juin 2008). "Numerical Simulation of the Effect of a Roughness Element on High-Speed Boundary-Layer Instability". In : *38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit*. 38th Fluid Dynamics Conference and Exhibit. Seattle, Washington : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- MARXEN, Olaf et al. (10 avr. 2010). "Disturbance Evolution in a Mach 4.8 Boundary Layer with Two-Dimensional Roughness-Induced Separation and Shock". In : *Journal of Fluid Mechanics* 648, p. 435-469.
- MAYER, Christian S. J. et al. (mai 2011). "Direct Numerical Simulation of Complete Transition to Turbulence via Oblique Breakdown at Mach 3". In : *Journal of Fluid Mechanics* 674, p. 5-42.
- METTOT, Clément (2013). "Stabilité linéaire, sensibilité et contrôle passif d'écoulements turbulents par différences finies". École Polytechnique.
- MONTERO, Iván Padilla et Fabio PINNA (mai 2021). "Analysis of the instabilities induced by an isolated roughness element in a laminar high-speed boundary layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 915.
- MORKOVIN, Mark V (1969). "On the Many Faces of Transition". In : *Viscous Drag Reduction*. Wells C.S. Springer, p. 1-31.
- MORKOVIN, Mark V. (1993). "Bypass-Transition Research : Issues and Philosophy". In : *Instabilities and Turbulence in Engineering Flows*. Sous la dir. de D. E. ASHPIS et al. Réd. par R. MOREAU. T. 16. Dordrecht : Springer Netherlands, p. 3-30.
- MORKOVIN, Mark V et al. (1994). "Transition in Open Flow Systems - a Reassessment". In : *Bulletin of the American Physical Society* 39.9.
- MUPPIDI, Suman et Krishnan MAHESH (fév. 2012). "Direct Numerical Simulations of Roughness-Induced Transition in Supersonic Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 693, p. 28-56.
- NONOMURA, Taku et al. (fév. 2010). "Freestream and Vortex Preservation Properties of High-Order WENO and WCNS on Curvilinear Grids". In : *Computers & Fluids* 39.2, p. 197-214.
- PADILLA MONTERO, Iván (mai 2021). "Analysis of the Stability of a Flat-Plate High-Speed Boundary Layer with Discrete Roughness". Thèse de doct. Bruxelles : Université Libre de Bruxelles.
- PANDO, Miguel Fosas de et Peter J SCHMID (3 avr. 2017). "Optimal Frequency-Response Sensitivity of Compressible Flow over Roughness Elements". In : *Journal of Turbulence* 18.4, p. 338-351.

- PANDO, Miguel Fosas de et al. (oct. 2012). "Efficient Evaluation of the Direct and Adjoint Linearized Dynamics from Compressible Flow Solvers". In : *Journal of Computational Physics* 231.23, p. 7739-7755.
- PARADES, Pedro et al. (oct. 2016). "Optimal Growth in Hypersonic Boundary Layers". In : *AIAA Journal* 54.10, p. 3050-3061.
- PARADES, Pedro et al. (1^{er} juin 2016a). *Transition Delay in Hypersonic Boundary Layers via Optimal Perturbations*. NASA/TM-2016-219210.
- (6 déc. 2016b). "Transition Due to Streamwise Streaks in a Supersonic Flat Plate Boundary Layer". In : *Physical Review Fluids* 1.8, p. 083601.
- (24 mai 2017a). "Blunt-Body Paradox and Transient Growth on a Hypersonic Spherical Forebody". In : *Physical Review Fluids* 2.5, p. 053903.
- (nov. 2017b). "Instability Wave-Streak Interactions in a Supersonic Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 831, p. 524-553.
- PARADES, Pedro et al. (8 jan. 2018). "Nosetip Bluntness Effects on Transition at Hypersonic Speeds : Experimental and Numerical Analysis under NATO STO AVT-240". In : *2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting*. 2018 AIAA Aerospace Sciences Meeting. Kissimmee, Florida : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- PARADES, Pedro et al. (10 jan. 2019). "Instability Wave-Streak Interactions in a High Mach Number Boundary Layer at Flight Conditions". In : *Journal of Fluid Mechanics* 858, p. 474-499.
- PARADES, Pedro et al. (7 jan. 2019). "Nonmodal Growth of Traveling Waves on Blunt Cones at Hypersonic Speeds". In : *AIAA Scitech 2019 Forum*. AIAA Scitech 2019 Forum. San Diego, California : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- PARADES, Pedro et al. (10 juill. 2020). "Mechanism for Frustum Transition over Blunt Cones at Hypersonic Speeds". In : *Journal of Fluid Mechanics* 894.
- PARK, J. et T. A. ZAKI (jan. 2019). "Sensitivity of High-Speed Boundary-Layer Stability to Base-Flow Distortion". In : *Journal of Fluid Mechanics* 859, p. 476-515.
- PIROZZOLI, Sergio (21 jan. 2011). "Numerical Methods for High-Speed Flows". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1, p. 163-194.
- PULLIAM, Thomas H. et Joseph L. STEGER (fév. 1980). "Implicit Finite-Difference Simulations of Three-Dimensional Compressible Flow". In : *AIAA Journal* 18.2, p. 159-167.
- RAN, Wei et al. (1^{er} fév. 2019). "Modeling Mode Interactions in Boundary Layer Flows via the Parabolized Floquet Equations". In : *Physical Review Fluids* 4.2, p. 023901. arXiv : [1712.02024](https://arxiv.org/abs/1712.02024).
- REDA, Daniel C. (mars 2002). "Review and Synthesis of Roughness-Dominated Transition Correlations for Reentry Applications". In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 39.2, p. 161-167.
- REDDY, Satish C. et Dan S. HENNINGSON (juill. 1993). "Energy Growth in Viscous Channel Flows". In : *Journal of Fluid Mechanics* 252, p. 209-238.
- REDFORD, John A. et al. (1^{er} déc. 2010). "Compressibility Effects on Boundary-Layer Transition Induced by an Isolated Roughness Element". In : *AIAA Journal* 48.12, p. 2818-2830.

- REED, H L et al. (1996). "Linear Stability Theory Applied to Boundary Layers". In : p. 40.
- REN, Jie et al. (fév. 2016). "Stabilization of the Hypersonic Boundary Layer by Finite-Amplitude Streaks". In : *Physics of Fluids* 28.2, p. 024110.
- RESHOTKO, E (jan. 1976). "Boundary-Layer Stability and Transition". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 8.1, p. 311-349.
- RESHOTKO, Eli et Anatoli TUMIN (2000). "The Blunt Body Paradox — A Case for Transient Growth". In : *Laminar-Turbulent Transition*. Sous la dir. d'Hermann F. FASEL et William S. SARIC. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, p. 403-408.
- (avr. 2004). "Role of Transient Growth in Roughness-Induced Transition". In : *AIAA Journal* 42.4, p. 766-770.
- RIGAS, Georgios et al. (20 mai 2019). "Streaks and Coherent Structures in Jets from Round and Serrated Nozzles". In : *25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*. 25th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. Delft, The Netherlands : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- RIGAS, Georgios et al. (26 jan. 2020). "Non-Linear Input/Output Analysis : Application to Boundary Layer Transition". arXiv : [2001.09440 \[physics\]](#).
- SCHMID, Peter J. (jan. 2007). "Nonmodal Stability Theory". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 39.1, p. 129-162.
- SCHMID, Peter J et Dan S HENNINGSON (2012). *Stability and Transition in Shear Flows*. Place of publication not identified : Springer.
- SCHMIDT, Oliver T. (déc. 2020). "Bispectral Mode Decomposition of Nonlinear Flows". In : *Nonlinear Dynamics* 102.4, p. 2479-2501.
- SCHMIDT, Oliver T. et Tim COLONIUS (mars 2020). "Guide to Spectral Proper Orthogonal Decomposition". In : *AIAA Journal* 58.3, p. 1023-1033.
- SCHMIDT, Oliver T. et Ulrich RIST (25 mars 2014). "Viscid-Inviscid Pseudo-Resonance in Streamwise Corner Flow". In : *Journal of Fluid Mechanics* 743, p. 327-357.
- SCHNEIDER, Steven P. (fév. 2004). "Hypersonic Laminar-Turbulent Transition on Circular Cones and Scramjet Forebodies". In : *Progress in Aerospace Sciences* 40.1-2, p. 1-50.
- (1^{er} mars 2008). "Effects of Roughness on Hypersonic Boundary-Layer Transition". In : *Journal of Spacecraft and Rockets* 45.2, p. 193-209.
- SHRESTHA, Prakash et Graham V. CANDLER (juin 2019). "Direct Numerical Simulation of High-Speed Transition Due to Roughness Elements". In : *Journal of Fluid Mechanics* 868, p. 762-788.
- SHU, Chi-Wang et Stanley OSHER (août 1988). "Efficient Implementation of Essentially Non-Oscillatory Shock-Capturing Schemes". In : *Journal of Computational Physics* 77.2, p. 439-471.
- SIVASUBRAMANIAN, Jayahar et Hermann F. FASEL (avr. 2015). "Direct Numerical Simulation of Transition in a Sharp Cone Boundary Layer at Mach 6 : Fundamental Breakdown". In : *Journal of Fluid Mechanics* 768, p. 175-218.
- SPEIER, Richard et al. (2017). *Hypersonic Missile Nonproliferation : Hindering the Spread of a New Class of Weapons*. RAND Corporation.
- STETSON, K. (12 juill. 1983). "Nosetip Bluntness Effects on Cone Frustum Boundary Layer Transition in Hypersonic Flow". In : *16th Fluid and Plasmadynamics*

- Conference. 16th Fluid and Plasmadynamics Conference. Danvers, MA, U.S.A. : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- STETSON, Kenneth F. (1^{er} sept. 1990). *Comments on Hypersonic Boundary-Layer Transition* : Fort Belvoir, VA : Defense Technical Information Center.
- STETSON, Kenneth et al. (12 juin 1989). "Laminar Boundary Layer Stability Experiments on a Cone at Mach 8. V - Tests with a Cooled Model". In : *20th Fluid Dynamics, Plasma Dynamics and Lasers Conference*. Fluid Dynamics and Co-located Conferences. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- STEWART, G. W. (jan. 2002). "A Krylov-Schur Algorithm for Large Eigenproblems". In : *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 23.3, p. 601-614.
- SUBBAREDDY, Pramod K. et al. (juin 2014). "Direct Numerical Simulation of High-Speed Transition Due to an Isolated Roughness Element". In : *Journal of Fluid Mechanics* 748, p. 848-878.
- TAIRA, Kunihiko et al. (déc. 2017). "Modal Analysis of Fluid Flows : An Overview". In : *AIAA Journal* 55.12, p. 4013-4041.
- TAM, Christopher K. W. et Jay C. WEBB (1^{er} août 1993). "Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics". In : *Journal of Computational Physics* 107.2, p. 262-281.
- TEAM, Dask Development (2016). *Dask : Library for Dynamic Task Scheduling*. URL : <https://dask.org>.
- THEOFILIS, Vassilios (mai 2003). "Advances in Global Linear Instability Analysis of Nonparallel and Three-Dimensional Flows". In : *Progress in Aerospace Sciences* 39.4, p. 249-315.
- (21 jan. 2011). "Global Linear Instability". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 43.1, p. 319-352.
- THOMAS, P. D. et C. K. LOMBARD (oct. 1979). "Geometric Conservation Law and Its Application to Flow Computations on Moving Grids". In : *AIAA Journal* 17.10, p. 1030-1037.
- TOWNE, Aaron et Tim COLONIUS (nov. 2015). "One-Way Spatial Integration of Hyperbolic Equations". In : *Journal of Computational Physics* 300, p. 844-861.
- TOWNE, Aaron et al. (25 juill. 2018). "Spectral Proper Orthogonal Decomposition and Its Relationship to Dynamic Mode Decomposition and Resolvent Analysis". In : *Journal of Fluid Mechanics* 847, p. 821-867. arXiv : [1708.04393](https://arxiv.org/abs/1708.04393).
- TREFETHEN, Lloyd N. et al. (30 juill. 1993). "Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues". In : *Science* 261.5121, p. 578-584.
- TULLIO, N. De et al. (nov. 2013). "Laminar-Turbulent Transition Induced by a Discrete Roughness Element in a Supersonic Boundary Layer". In : *Journal of Fluid Mechanics* 735, p. 613-646.
- TUMIN, Anatoli (10 sept. 2007). "Three-Dimensional Spatial Normal Modes in Compressible Boundary Layers". In : *Journal of Fluid Mechanics* 586, p. 295-322.
- TUMIN, Anatoli et al. (jan. 2007). "Direct Numerical Simulation and the Theory of Receptivity in a Hypersonic Boundary Layer". In : *Physics of Fluids* 19.1, p. 014101.
- UNNIKRISHNAN, S. et Datta V. GAITONDE (25 déc. 2020). "Linear, Nonlinear and Transitional Regimes of Second-Mode Instability". In : *Journal of Fluid Mechanics* 905, A25.

- VASILYEV, Oleg V. et al. (oct. 1998). "A General Class of Commutative Filters for LES in Complex Geometries". In : *Journal of Computational Physics* 146.1, p. 82-104.
- VINOKUR, Marcel (fév. 1974). "Conservation Equations of Gasdynamics in Curvilinear Coordinate Systems". In : *Journal of Computational Physics* 14.2, p. 105-125.
- WHITE, Frank M. (1991). *Viscous Fluid Flow*. 2nd ed. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. New York : McGraw-Hill. 614 p.
- WILLIAMSON, J. H (15 mars 1980). "Low-Storage Runge-Kutta Schemes". In : *Journal of Computational Physics* 35.1, p. 48-56.
- XAVIER, Gloerfelt (s. d.). "Bruit rayonné par un écoulement affleurant une cavité : Simulation aéroacoustique directe et application de méthodes intégrales". In : (), p. 277.
- ZANCHETTA, Marcantony (1996). "Kinetic Heating and Transition Studies at Hypersonic Speeds". London : Imperial College.
- ZHONG, Xiaolin et Yanbao MA (juin 2006). "Boundary-Layer Receptivity of Mach 7.99 Flow over a Blunt Cone to Free-Stream Acoustic Waves". In : *Journal of Fluid Mechanics* 556, p. 55-103.
- ZHONG, Xiaolin et Xiaowen WANG (2012). "Direct Numerical Simulation on the Receptivity, Instability, and Transition of Hypersonic Boundary Layers". In : *Annual Review of Fluid Mechanics* 44.1, p. 527-561.
- ÖZGEN, Serkan et Senem Atalayer KIRCALI (jan. 2008). "Linear Stability Analysis in Compressible, Flat-Plate Boundary-Layers". In : *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 22.1, p. 1-20.

TITRE : Simulation haute fidélité de la transition vers la turbulence de couches limites hypersoniques

Mots clés : Aérodynamique hypersonique ; Couche limite turbulente ; Modélisation CFD ; Navier-Stokes, Équations de ; Turbulence ; Stabilité ; Transition ; DNS

La prédiction de la transition à la turbulence d'une couche limite sur la paroi d'un véhicule hypersonique est une problématique difficile et d'importance pour le design des concepts futurs. Cette thèse aborde ce problème par la simulation haute fidélité de la dynamique transitionnelle des couches limites hypersoniques. Plus particulièrement sont adressés des écoulements comportant des rugosités tridimensionnelles et des déformations de la couche limite issues d'instabilités non modales.

Pour l'étude de ces écoulements, un code de simulation haute-fidélité efficace a été développé. Ce dernier permet de réaliser des calculs précis d'écoulements hypersoniques, multi espèces, sur des géométries courbes. Un jeu de méthodes numériques dédié à l'étude des dynamiques linéaires, non-linéaires et des opérateurs linéaires globaux a été intégré et sert à apporter des informations sur la physique observée.

Pour chacun des cas considérés l'étude de l'effet d'un forçage large bande est étudié par des DNS linéaires et non-linéaires. Pour une couche limite simple, un scénario complet est étudié pour la première fois avec un forçage par bruit blanc. L'observation fine de la dyna-

mique révèle une compétition de plusieurs instabilités et des interactions non-linéaires mettant en avant la richesse de la dynamique observable. En second, l'étude de la réponse d'une rugosité isolée au forçage large bande révèle une instabilité différente des études de référence précédentes utilisant un forçage impulsionnel plus limité en fréquence. Ce résultat met en avant la sensibilité du mécanisme de transition à l'environnement de perturbation. Enfin, plusieurs résultats sont obtenus avec l'étude de la réponse d'une couche limite déformée par des streaks stationnaires. Les diverses instabilités relevées et leur analyse via des outils de post-traitement avancés révèlent une variation importante du scénario de transition même en présence de streaks de faibles amplitudes. Des effets stabilisants et déstabilisants sont observés selon la nature des modes observés. Révélant un effet complexe des streaks sur la dynamique de transition en régime linéaire et non-linéaire. L'ensemble de ces résultats met en lumière l'importance des déformations de la couche-limite et de la nature du forçage sur la prédiction effective de la transition à la turbulence.

TITLE : High-fidelity simulation of hypersonic boundary layer transition to turbulence

Keywords : Aerodynamics, Hypersonic ; Turbulent boundary layer ; Computational fluid dynamics ; Navier-Stokes equations ; Turbulence ; Stability ; Transition ; DNS

Predicting the boundary layer transition to turbulence around a hypersonic vehicle is a challenging problem of importance for future spacecraft designs. The current PhD thesis contributes to this long-standing issue through high-fidelity simulations of the complex transitional dynamics found in high-speed boundary layers. Specifically, flows including isolated three-dimensional roughness or boundary layer distortions originating from non-modal instabilities are investigated.

For the study of such flows, an efficient high-fidelity simulation framework has been developed and validated. This framework allows the computation of multispecies hypersonic flows over curved geometries through high-order methods. Additionally, a set of numerical tools dedicated to the joint study of linear and non-linear dynamics, as well as the computation of discrete global linear operators has been integrated. These tools provide useful insights into observed physics.

For each case of study considered, the effect of a broadband forcing of the flow is investigated through non-linear and linearised DNS. Primarily, for a canonical boundary layer, the effect of a white noise forcing on the transition scenario is explored for the first time. This analysis reveals intricate dynamics comprising the

superposition of all usual transition scenarios as well as non-linear interactions underlining the richness of the dynamics that could be observed in real conditions. A second study focused on the response of an isolated roughness to a white noise forcing revealed a different leading instability compared to the reference studies using an impulse response. This result shows the sensitivity of the flow to the incoming environment noise content. Finally, multiple new results are found by analysing a boundary layer distorted by growing streaks and its response to a white noise forcing. The various observed instabilities and their identification through advanced postprocessing tools reveal a substantial sensitivity of the transition scenario to the streaks amplitude. Stabilising and destabilising effects are observed, even for low amplitude distortion levels. These new results emphasise the complexity of streaks effects in the linear and non-linear stages of the boundary layer transition.

The combined investigations made in this research work highlight the importance of boundary layer distortion and the nature of the forcing environment for the accurate prediction of turbulence onset.