



**HAL**  
open science

# Théorie cinétique non linéaire des ondes plasma électroniques et application à la diffusion Raman stimulée

Mikael Tacu

► **To cite this version:**

Mikael Tacu. Théorie cinétique non linéaire des ondes plasma électroniques et application à la diffusion Raman stimulée. Physique des plasmas [physics.plasm-ph]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UPASP130 . tel-03969778

**HAL Id: tel-03969778**

**<https://theses.hal.science/tel-03969778>**

Submitted on 2 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Théorie cinétique non linéaire des ondes plasma électroniques et application à la diffusion Raman stimulée

*Nonlinear kinetic theory of electron plasma waves and application to  
stimulated Raman scattering*

## Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay

École doctorale n° 572, Ondes et Matière (EDOM)

Spécialité de doctorat : Physique

Graduate School : Physique, Référent : Faculté des sciences d'Orsay

Thèse préparée dans l'unité de recherche LMCE

Laboratoire Matière sous Conditions Extrêmes (Université Paris-Saclay, CEA),  
sous la direction de Didier BÉNISTI, Directeur de recherche (LMCE)

Thèse soutenue à l'ENS Paris-Saclay, le 8 décembre 2022, par

**Mikael TACU**

### Composition du jury

<b>Guy BONNAUD</b> Professeur, INSTN, Université Paris-Saclay	Président
<b>Xavier LÉONCINI</b> Professeur, Aix-Marseille Université	Rapporteur & Examineur
<b>Caterina RICONDA</b> Professeur, Sorbonne Université	Rapporteuse & Examinatrice
<b>Nicolas CROUSEILLES</b> Ingénieur-Chercheur, INRIA, Université de Rennes	Examineur
<b>Dominique ESCANDE</b> Directeur de recherche émérite, CNRS, Aix-Marseille Université	Examineur
<b>Paul-Edouard MASSON-LABORDE</b> Ingénieur-Chercheur, LMCE-CEA/DAM/DIF	Examineur
<b>Didier BÉNISTI</b> Directeur de recherche, LMCE-CEA/DAM/DIF	Directeur de thèse



**Titre :** Théorie cinétique non linéaire des ondes plasma électroniques et application à la diffusion Raman stimulée

**Mots clés :** Système Vlasov-Poisson, ondes plasma électroniques non linéaires, diffusion Raman stimulée, fusion par confinement inertiel.

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans un effort à long terme sur la description cinétique des ondes plasma électroniques (EPW), croissant à un taux beaucoup plus petit que la fréquence plasma. C'est le cas des ondes cr e es par diffusion Raman stimulée (SRS) dans les expériences de fusion par confinement inertiel, l'étude de l'interaction laser-plasma dans de telles expériences étant une des motivations premières de la thèse. Grâce aux résultats que nous avons obtenus, couplés à ceux de précédents travaux, nous pouvons désormais décrire complètement, et de manière très précise, les propriétés d'une onde plasma électronique cr e e par SRS, depuis le moment où elle croît à partir du bruit thermique jusqu'au moment où elle se brise. Nous avons ainsi calculé de manière auto-cohérente la fonction de distribution électronique, le décalage non linéaire en fréquence de l'onde plasma, ainsi que ses potentiel scalaire et vecteur. La connaissance de cette dernière quantité nous a permis de déduire le champ magnétique cr e  par une onde plasma non linéaire, qui n'est donc pas purement électrostatique. De plus, en montrant que la relation de dispersion non linéaire n'admettait pas de solution au-delà d'une certaine amplitude, nous avons

pu donner une borne supérieure à la limite de wave breaking pour une onde plasma électronique. Les résultats obtenus sur le décalage en fréquence non linéaire et sur la limite de wave breaking ont été utilisés pour simuler la SRS à l'aide d'un code basé sur un tracé de rayons non linéaire. Cela nous a permis de calculer très précisément, et environ  $10^7$  fois plus vite qu'avec un code Particle In Cell, le spectre des modes transverses de l'EPW, dans le cas où elle résultait de la SRS d'une onde laser focalisée dans le plasma. Enfin, dans un dernier temps, nous avons étudié la stabilité des ondes plasma que nous avons décrites. Nous avons tout d'abord résolu, pour la première fois, la théorie exacte de l'instabilité des particules piégées. Nous avons montré que, dans le cas d'une fonction de distribution lisse, le spectre des modes instables calculé théoriquement était en excellent accord avec celui déduit de simulations cinétiques de type Vlasov. De plus, nous avons mis en évidence la difficulté de traiter, à la fois théoriquement et numériquement, le cas d'ondes croissant très lentement, à cause de la variation abrupte de la fonction de distribution électronique près de la séparatrice. Nous indiquons alors les pistes de recherche à poursuivre pour surmonter cette difficulté.

**Title :** Nonlinear kinetic theory of electron plasma waves and application to stimulated Raman scattering

**Keywords :** Vlasov-Poisson system, nonlinear electron plasma waves, stimulated Raman scattering, inertial confinement fusion.

The results derived in this thesis are part of a long-term research activity on the kinetic description of nonlinear electron plasma waves (EPW) growing at a rate much smaller than the plasma frequency. EPW's resulting from stimulated Raman scattering (SRS) in laser fusion experiments are such slowly growing waves, and laser-plasma interaction in such experiments is one of the main motivations of the work presented in this dissertation. Thanks to the results derived in this thesis, the EPW's nonlinear properties may now be described from the moment when these waves grow from thermal noise up to the time when they break. Indeed, we provided a self-consistent derivation of the nonlinear electron distribution function, the nonlinear frequency shift of the wave, and its scalar and vector potentials. From the knowledge of the latter quantity, we could derive the magnetic field generated by the nonlinear EPW, which is therefore not electrostatic. Moreover, we showed that no solution to the nonlinear dispersion relation could exist beyond a maximum amplitude, which allowed us to derive an upper bound for the

wave breaking limit. This result, together with that on the nonlinear frequency shift, was used in a code based on nonlinear ray tracing to simulate SRS. This allowed us to derive very accurately, and about  $10^7$  times faster than with a Particle In Cell code, the EPW transverse spectrum, when this wave resulted from the SRS of a laser wave focused inside the plasma. Finally, we addressed the stability of the wave we described theoretically. We first solved, for the first time, the exact theory for the trapped particles instability. For a smooth enough distribution function, we showed that the spectrum of unstable modes derived theoretically was in very good agreement with that derived from kinetic simulations using a Vlasov code. Moreover, we pointed out the difficulty in addressing, both theoretically and numerically, the stability of a very slowly growing wave, because of the abrupt variations of the distribution function close to the separatrix. This let conclude on the future research activity to pursue in order to overcome this difficulty.

*À M.M.*

सत्यात् उच्चतरः धर्मः नास्ति

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>3</b>
<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>11</b>
1.1 Motivations . . . . .	11
1.2 Diffusion Raman stimulée comme un miroir qui se déforme et qui se brise . . . . .	18
1.2.1 Mécanisme de la diffusion Raman stimulée . . . . .	18
1.2.2 Évolution non linéaire du miroir formé par l'EPW . . . . .	20
1.3 Introduction au calcul des propriétés cinétiques non linéaires des ondes plasma électroniques . . . . .	22
1.4 Résultats obtenus durant la thèse . . . . .	27
<b>2 Théorie générale des ondes plasma adiabatiques</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Théorie adiabatique appliquée aux ondes plasma . . . . .	35
2.2.1 Hamiltonien de l'interaction onde-particules . . . . .	35
2.2.2 Calcul de l'action . . . . .	36
2.2.3 La fonction de distribution électronique . . . . .	38
2.3 Onde homogène croissant dans un plasma homogène . . . . .	40
2.3.1 Calcul de la fonction de distribution . . . . .	40
2.3.2 Résolution numérique de la relation de dispersion . . . . .	48
2.3.3 Validation avec un code particules test . . . . .	55
2.3.4 Calcul du décalage en fréquence non linéaire . . . . .	58
2.4 Onde non monotone dans le cas homogène . . . . .	59
2.5 Cas général, multidimensionnel et inhomogène . . . . .	62
2.5.1 Effet de la rotation du nombre d'onde sur la fonction de dis- tribution . . . . .	63
2.5.2 Champ magnétique créé par l'onde plasma . . . . .	64
2.6 Possibilités de simplification de la théorie . . . . .	66

2.7	Conclusion . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Applications de la théorie générale des ondes adiabatiques</b>	<b>73</b>
3.1	Introduction . . . . .	73
3.2	Comparaison avec d'autres ondes non linéaires . . . . .	76
3.2.1	Comparaison avec les modes BGK . . . . .	76
3.2.2	Comparaison entre le champ électrique des ondes adiabatiques et celui calculé par Dawson dans un plasma froid . . . . .	77
3.3	Amplitude maximale d'une onde plasma et déferlement . . . . .	81
3.4	Spectre transverse d'une onde plasma créée par diffusion Raman sti- mulée . . . . .	87
3.4.1	Méthode numérique du code Ray in Cell . . . . .	89
3.4.2	Résultats des simulations RIC et comparaison aux simulations PIC . . . . .	93
3.5	Conclusion . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Stabilité d'une onde adiabatique. Approche théorique</b>	<b>103</b>
4.1	Introduction . . . . .	103
4.2	La croissance instable de modes satellites . . . . .	106
4.3	Modèle KDS . . . . .	108
4.4	Approche de Dodin et instabilité de masse négative . . . . .	113
4.5	Théorie générale . . . . .	121
4.5.1	Définition de l'Hamiltonien et changement de normalisation . . . . .	121
4.5.2	Passage en coordonnées action-angle . . . . .	122
4.5.3	Équation de Vlasov linéarisée . . . . .	124
4.5.4	Calcul de la densité de charges . . . . .	125
4.5.5	Équation de Poisson et relation de dispersion . . . . .	126
4.5.6	Réduction aux modèles de Dodin et KDS . . . . .	129
4.6	Résolution numérique et comparaisons aux modèles précédents . . . . .	131
4.7	Sensibilité à la variation de la fonction distribution autour la séparatrice	138
4.8	Conclusion . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Stabilité d'une onde adiabatique. Comparaisons entre théorie et simulations numériques</b>	<b>143</b>
5.1	Introduction . . . . .	143
5.2	Calcul numérique du taux de croissance . . . . .	146
5.2.1	Schémas numériques des codes Vlasov . . . . .	146
5.2.2	Simulations de type Friou <i>et al.</i> . . . . .	148
5.2.3	Simulations de type Brunner <i>et al.</i> . . . . .	150
5.3	Comparaisons entre théorie et simulations . . . . .	154

5.3.1	Comparaisons à partir des mêmes fonctions de distribution . . .	154
5.3.2	Pertinence de la fonction de distribution adiabatique . . . . .	158
5.4	Discussion des simulations numériques de Friou <i>et al.</i> . . . . .	162
5.5	Conclusion . . . . .	165
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>167</b>
<b>A</b>	<b>Annexes</b>	<b>173</b>
A.1	Calcul de la relation de dispersion . . . . .	173
A.2	Calcul numérique des intégrales du membre de gauche du système (2.53)	177
A.3	Calcul de $\langle d_t \varphi \rangle$ . . . . .	179
A.4	Calcul des probabilités de transition . . . . .	180
A.5	Effet de la rotation du nombre d'onde . . . . .	182
A.6	Théorie générale pour la stabilité d'une onde BGK . . . . .	188
A.6.1	Coordonnées action-angle . . . . .	188
A.6.2	Développement en série de Fourier . . . . .	189
A.6.3	Équation de Vlasov linéarisée . . . . .	190
A.6.4	Calcul de la densité de charges . . . . .	194
A.6.5	Contribution de la région ( $\gamma$ ) . . . . .	196
A.6.6	Équation de Poisson et relation de dispersion . . . . .	197
A.6.7	Réduction aux modèles de Dodin et KDS . . . . .	201
A.7	Symétrie du calcul par rapport au nombre d'onde . . . . .	204

---

## Remerciements

L'écriture des remerciements de thèse est un moment privilégié, l'occasion de conclure un long travail de recherche et de marquer une séparation avec la vie étudiante. À cet égard, j'aimerais commencer par adresser des remerciements à mes nombreux professeurs, qui ont développé ma passion pour les sciences. Je pense en particulier à Maria Tifin — ma professeur de mathématiques du collège Ion Creangă à Chişinău. Fidèle héritière de l'école Soviétique, rigoureuse et exigeante, elle a également été d'une grande gentillesse. Merci pour tes nombreux encouragements ainsi que pour l'initiation aux olympiades. Merci également à Christophe Bertault — mon professeur de mathématiques de sup, pour tes cours rigoureux et limpides. Tout paraissait si simple quand c'était énoncé par toi ! Merci également de m'avoir confié ta classe en tant que colleur après mon intégration. Je pense aussi à mon professeur de mathématiques de spé — l'inimitable Alain Pommellet et ses "j'ai réfléchi à un petit exercice dans le RER" (il est vrai que la lenteur de la ligne B pousse au moins à la réflexion) qui arrivaient les matins au rythme des pannes et qui me prenaient des semaines à résoudre. Merci pour tes cours stratosphériques qui ont été décisifs dans ma réussite aux concours.

Bien que cette thèse m'ait beaucoup apporté sur le plan scientifique, lorsque je dresse le bilan de mes quatre années passées au CEA, je réalise qu'elle a avant tout été une aventure humaine, faite de rencontres (comme l'a si bien dit le scribe Otis), d'épreuves, de doutes, d'erreurs, de réussites parfois. Le contexte particulier dans lequel elle s'est déroulée — de la pandémie aux incertitudes géopolitiques (j'attends toujours mon voyage à Saint-Pétersbourg !) a permis une nette progression sur le plan personnel. À cette progression ont contribué de nombreuses personnes que je ne remercierai jamais assez. Ma première pensée va à Didier — le chef d'orchestre de ce projet de thèse, qui a non seulement su en maîtriser parfaitement le tempo — me laissant suffisamment de liberté pour que je poursuive mes propres idées et accélérant le rythme lorsque je m'égarais, mais également varier judicieusement l'amplitude, démarrant en douceur avec un stage bien balisé avant de me lancer dans le lourd calcul adiabatique. Merci pour ta confiance, ta gentillesse et pour ta grande disponibilité. Malgré ton importante charge de travail, tu as toujours su trouver du temps pour m'écouter et me guider. Merci pour m'avoir toujours si généreusement

transmis tes vastes connaissances, c'est vraiment sous ta direction que j'ai appris à faire de la physique. Merci également pour tes nombreuses relectures, ton aide pour la finalisation de ce manuscrit fut inestimable.

J'ai également une pensée pour les membres du jury Guy Bonnaud, Xavier Léoncini, Caterina Riconda, Nicolas Crouseilles, Dominique Escande ainsi que Paul-Edouard Masson-Laborde. Vos nombreux commentaires ainsi que vos questions pertinentes ont grandement amélioré ce manuscrit. Merci en particulier à Caterina et à Xavier d'avoir accepté la lourde tâche de rapporteur ainsi qu'à Dominique pour ses questions sur l'équation de Vlasov et sur l'écrantage, particulièrement intéressantes.

J'ai pu bénéficier d'une superbe ambiance au laboratoire qui a contribué pour beaucoup à mon épanouissement. Pour cela j'aimerais remercier en premier lieu les nombreux chercheurs permanents que j'ai pu croiser. Merci à Serge — infatigable explorateur à la bonne humeur contagieuse, dont les intérêts scientifiques s'étendent du radiomètre de Crookes à l'astrophysique. Merci pour nos nombreuses discussions jusqu'à si tard que la FLS était en route pour nous chasser des bureaux. Merci à Gaétan pour sa grande disponibilité, pour son professionnalisme et son sens de l'entraide, à Xavier pour sa gentillesse et pour l'aide inestimable dans la prise en main de nombreux réseaux, à Laurent pour son sens physique légendaire et pour les discussions passionnantes à la cantine. Merci également à Luc d'avoir été un super chef de labo toujours soucieux de maintenir une bonne ambiance, ainsi qu'à Denis — un chef de service exemplaire, toujours à l'écoute (même pour mes projets les plus insolites comme la création d'une startup) et prêt à me conseiller. Le laboratoire n'aurait pas si bien fonctionné sans l'aide précieuse de ses secrétaires : Sylvie, Céline et Marion — vous avez été d'une aide indispensable à ma navigation dans les méandres de l'administration.

Fort heureusement, je n'ai pas été seul dans cette aventure, j'aimerais remercier mes camarades de thèse : David, Quentin, Emilien, Manuel, Alexandre, Mélanie, Léo, Thomas, Colomban, Valéria, Pierre-Louis, Kevin, Albertine, Victor, Lucas, Antonin, Bayane, Olivier ainsi que tous ceux que j'aurais oublié de citer !

Les longs et aléatoires trajets de la ligne N4 (mon karma pour avoir critiqué le RER B durant toute ma spé et au-delà) pouvant prendre jusqu'à quatre heures par temps de grève (malgré les efforts appréciés de Françoise et Rémy pour optimiser au mieux le trajet) forgent des liens d'amitié inébranlables. Ce fut mon cas avec David dont j'ai fini par fréquenter le bureau plus souvent que celui de mon directeur de thèse. Merci pour nos nombreuses et passionnantes discussions, pour nos longues (trop ?) pauses thé ainsi que pour la possibilité de venir me plaindre de mon sort dans ton bureau — ce fut un privilège dont j'estime pleinement la valeur. Merci également à Quentin pour son éternel calme et optimisme, à Léo pour sa bonne

humeur, à Emilien pour nos discussions enrichissantes ainsi qu'à Albertine pour m'avoir initié aux joies de l'escalade et accompagné si souvent.

Le chercheur postdoctoral a une place toute particulière dans la vie d'un laboratoire. Fort d'une expérience dont sont dépourvus les doctorants il est souvent l'interlocuteur privilégié de ces derniers, surtout lorsqu'ils sont soucieux de ne pas déranger leurs encadrants. J'ai eu la chance d'en côtoyer plusieurs durant ma thèse. Je pense en particulier à Rodolphe, que j'aimerais remercier pour son sens de l'écoute, ses conseils toujours pertinents ainsi que pour nos nombreuses pauses thé. Merci également à Damien pour son humour inimitable, sa grande disponibilité pour les discussions scientifiques ou autres, pour avoir partagé son template dont je me suis largement inspiré et en particulier pour m'avoir fait profiter de son expérience dans la publication scientifique.

J'aimerais aussi remercier les stagiaires qui sont passés par le labo et qui l'ont animé par des conversations passionnantes. Je pense en particulier à Dashiell ainsi qu'à Albane qui a courageusement partagé mon bureau. Merci également à Valentin, l'étudiant que j'ai préparé aux concours durant les deux premières années de thèse pour m'avoir permis de garder contact avec le programme de prépa, ton admission à l'X a été largement méritée!

J'aimerais également remercier mes amis, à commencer par Matthias, dont les nombreuses conversations scientifiques (et pas que) ont rendu cette thèse beaucoup plus agréable, Mohamed pour son soutien et ses nombreux conseils ainsi que François pour avoir stoïquement supporté avec moi (et Mohamed!) les nombreux moments de déroute du PSG (j'espère que vous vous en êtes remis de la finale depuis!). Merci également à Antoine pour nos rencontres toujours enrichissantes.

J'aimerais aussi remercier particulièrement Marie-Hélène Bérard pour son aide décisive durant les moments clé de mon parcours scolaire.

Je n'oublierai évidemment pas l'équipe olympique (ITYM power), merci à Nicolas pour ses bons plans toujours astucieux, à Odysseas pour ses conseils vestimentaires à Kévin pour son soutien dans les moments de doute, à Yassine pour le weekend au ski ainsi qu'à Emmanuel pour sa gentillesse. Merci pour nos nombreuses rencontres, votre amitié aura été de toute épreuve.

En dernier lieu, mais certainement pas par ordre de mérite, j'aimerais remercier ma famille, mes parents pour avoir quitté leur position très confortable en Moldavie pour que leurs enfants puissent suivre de meilleures études en France, geste dont je leur serai éternellement reconnaissant. Merci pour votre soutien constant. Merci également à ma sœur Elena pour son amour inconditionnel, à Said pour son soutien, ainsi qu'à mon petit frère Svetoslav pour avoir été si compréhensif lorsque je ne pouvais pas jouer avec lui parce que je devais travailler sur ma thèse. Finalement, merci à Mariem — mon rayon de soleil, pour ton soutien sans faille.



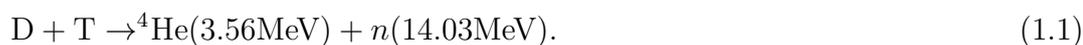
---

# 1

## Introduction

### 1.1 Motivations

Les travaux présentés dans ce manuscrit de thèse sont motivés par la volonté d'obtenir, de la manière la plus efficace possible, des réactions de fusion thermonucléaire par confinement inertiel à l'aide d'un laser. Ils s'inscrivent donc dans le cadre des études menées à la Direction des Applications Militaires du Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives (CEA/DAM) autour des expériences de fusion réalisées à l'aide du Laser Mégajoule (LMJ) [Ebrardt & Chaput (2010)]. De manière très simplifiée on essaie, à l'aide d'un laser, de comprimer une bille de Deuterium-Tritium (D-T) cryogénique de manière à obtenir un point central suffisamment chaud pour initier les réactions de fusion,



Dans le schéma d'attaque indirecte, actuellement privilégié sur le LMJ mais aussi aux États-Unis sur le National Ignition Facility (NIF) [Lindl *et al.* (2004)], les faisceaux laser ne sont pas dirigés directement sur la cible mais sur les parois d'une cavité dans laquelle on a placé la bille de D-T. L'énergie laser est alors convertie en un bain de rayons X, ce qui permet une irradiation très uniforme du D-T, indispensable à une compression efficace. La figure 1.1 illustre le principe de l'attaque indirecte sur le NIF. Malheureusement, sous l'effet du rayonnement, les parois de

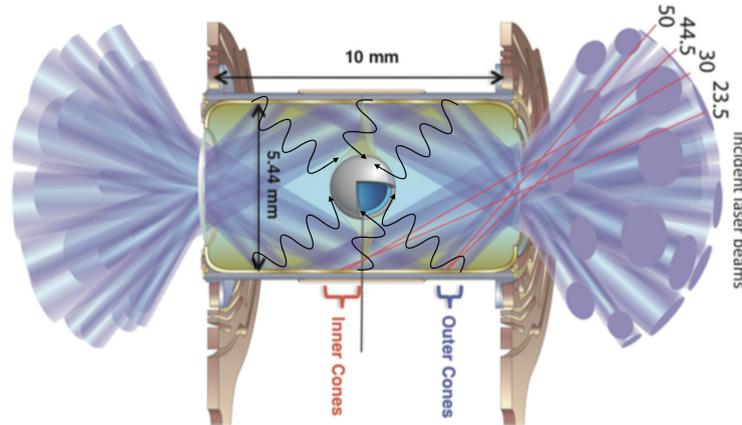


FIGURE 1.1 – Représentation schématique du NIF dans le cas d’une expérience d’attaque indirecte. Les lignes ondulées illustrent le rayonnement X résultant de l’interaction des faisceaux laser avec les parois de la cavité.

la cavité se détend jusqu’à pouvoir atteindre les trous d’entrée laser. Pour que cela n’arrive pas trop vite et n’empêche purement et simplement les faisceaux laser d’entrer dans la cavité, on remplit cette dernière d’un gaz tampon. En conséquence, avant même de pouvoir être utilisé pour la fusion, le rayonnement laser doit traverser environ un centimètre du plasma résultant de l’ionisation quasi instantanée du gaz tampon. Cela peut donner lieu à des phénomènes très pénalisants pour la fusion, comme la rétrodiffusion d’une partie de l’énergie laser incidente qui n’est alors plus disponible pour l’implosion de la cible, la perte de la symétrie d’irradiation, le préchauffage de la cible de D-T, ou encore la filamentation des faisceaux laser. En particulier, une forte réflectivité de l’ordre de plusieurs dizaines de pourcents et la perte de la symétrie d’irradiation ont clairement été observées lors des premières expériences sur le NIF [Moody *et al.* (2010); Meezan *et al.* (2010)]. L’éventualité de tels effets a été comprise très tôt, ce qui a motivé l’étude de l’interaction laser-plasma, *a priori* fort éloignée de l’étude de la fusion à proprement parler, et rendue nécessaire par un mécanisme assez banal de détente de paroi. Néanmoins, l’interaction laser-plasma donne lieu aux effets physiques les plus difficiles à comprendre dans le cadre de la fusion inertielle, et ils sont à l’heure actuelle loin d’être correctement modélisés. Ainsi, la récente expérience sur le NIF ayant permis d’atteindre pour la première fois l’ignition [Abu-Shawareb *et al.* (2022)], a été conçue avec le souci de limiter le plus possible l’interaction laser-plasma. En particulier, on a utilisé des plus grandes cavités et des impulsions plus courtes que dans les premières expériences, de manière à pouvoir utiliser une faible densité de gaz tampon ( $0.3 \text{ mg/cm}^3$  d’Helium au lieu d’environ  $1 \text{ mg/cm}^3$  lors des premières expériences). Néanmoins, il n’existe actuellement pas de méthode permettant d’indiquer de manière fiable ce que serait l’optimum en matière de remplissage de cavité pour éviter les problèmes posés par l’interaction laser-plasma. Ainsi, sur le NIF, l’ignition a été obtenue de manière es-

sentiellempirique, au travers d'expériences dont la reproductibilité n'est pas parfaite (l'expérience du 8 août 2021 [Abu-Shawareb *et al.* (2022)] ayant donné le meilleur rendement n'a, à ce jour, pas été reproduite). Il serait donc extrêmement utile de disposer d'un outil numérique permettant d'améliorer la prise en compte de l'interaction laser-plasma, et ainsi d'aider au dimensionnement des expériences de fusion. Cela peut d'ailleurs s'avérer encore plus crucial sur le LMJ que sur le NIF, puisqu'on n'y disposera pas exactement de la même énergie. C'est ce qui a motivé les travaux menés au CEA/DAM autour de l'interaction laser-plasma, dans lesquels s'inscrit cette thèse.

Avant d'entrer dans le détail des résultats que nous avons obtenus, il nous semble donc utile de décrire de manière succincte l'interaction laser-plasma, en essayant tout d'abord de donner une définition d'un plasma et d'un laser. Commençons par le plasma, que l'on définira comme le quatrième état de la matière, par opposition aux états solide, liquide ou gazeux. Dans un solide, les atomes oscillent essentiellement autour de positions fixes. Si on apporte de l'énergie à un solide, par exemple sous forme de chaleur, il peut passer à l'état liquide, et les atomes ou molécules peuvent en quelque sorte glisser les uns sur les autres. Avec encore plus d'énergie on passe à l'état gazeux où les atomes ou molécules ont des trajectoires quasi libres et totalement désordonnées. Si on apporte encore plus d'énergie à un gaz, on peut passer à l'état de plasma. La structure d'atome ou de molécule encore présente dans un gaz disparaît, un plasma étant un milieu presque totalement ionisé (en tout cas pour les plasmas créés dans les expériences de fusion). Ainsi, dans un plasma à l'équilibre thermodynamique, les trajectoires des ions et des électrons sont essentiellement des suites quasi erratiques de segments de droite, comme illustré sur la figure 1.2 (a). La répartition des particules dans un plasma n'est cependant pas aléatoire, puisque cela ne permettrait pas l'écrantage de Debye. Les électrons sont plus nombreux au voisinage des ions, sans pour autant être totalement liés à eux comme dans un atome. En ce sens, le plasma apparaît comme un état de la matière plus désordonné que l'état solide, liquide ou gazeux. A l'inverse, un laser est le système le plus ordonné que l'on sache créer, à l'exception peut-être des condensats de Bose-Einstein. En effet, un laser parfait serait composé d'une collection de photons oscillant comme un seul homme à la même fréquence et se propageant tous dans la même direction<sup>1</sup>. Lorsque le laser interagit avec le plasma, il induit dans ce dernier une certaine régularité sous la forme d'oscillations, qui peuvent être transverses ou longitudinales (par rapport à la direction de propagation du laser). Ces dernières ne se font pas à la fréquence du laser, mais à une fréquence caractéristique du plasma, que l'on nomme

---

1. Dans le cas des expériences de fusion, cette régularité est en général trop importante, et l'on essaie de briser la cohérence spatiale et temporelle du laser en jouant sur sa phase. Le but est de réduire certains des effets néfastes liés à l'interaction laser-plasma. C'est tout l'enjeu du lissage spatial d'y arriver de la meilleure façon possible. Cela constitue un champ d'étude important, que nous ne détaillerons cependant pas ici, parce qu'il est trop éloigné du sujet de la thèse.

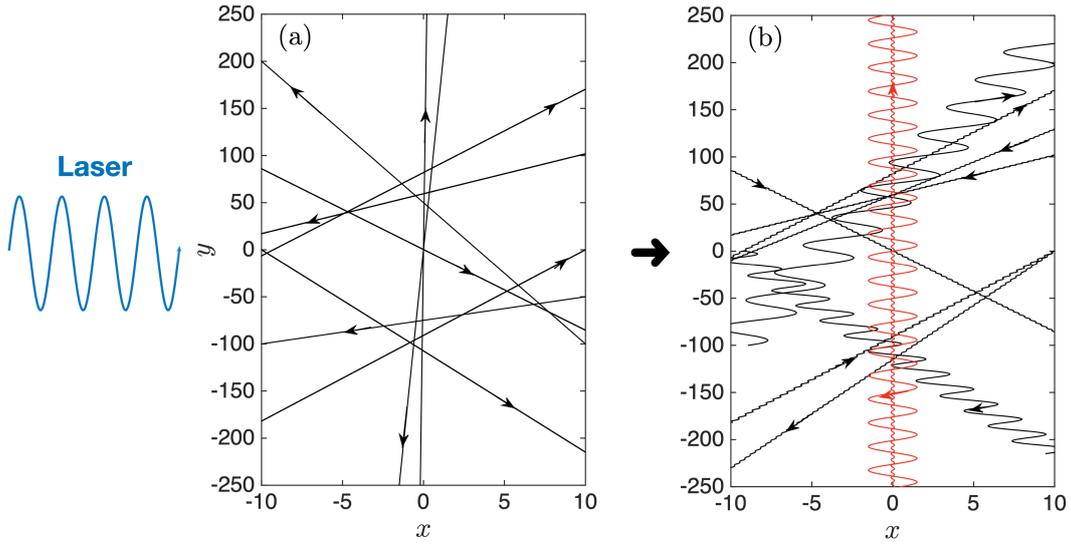


FIGURE 1.2 – (a) Trajectoires électroniques dans un plasma avant toute interaction avec le laser. (b) Trajectoires après que le laser ait induit une onde plasma électronique de grande amplitude, tracées dans le référentiel de l’onde. En rouge sont représentées les trajectoires des particules dites piégées.

tout naturellement la fréquence plasma,  $\omega_{pe} = \sqrt{n_0 e^2 / m \varepsilon_0}$ ,  $n_0$  étant la densité électronique,  $-e$  la charge de l’électron,  $m$  la masse d’un électron, et  $\varepsilon_0$  la constante diélectrique du vide. Plus précisément, les oscillations électroniques se font à une fréquence proche de  $\omega_{pe}$ , et le calcul de cette fréquence, notamment dans un régime non linéaire, constitue une partie importante du travail présenté dans cette thèse. Les ions étant trop lourds pour osciller à  $\omega_{pe}$ , le mouvement électronique crée un champ de séparation de charges, qui peut se propager dans le plasma. On obtient alors ce qu’on appelle une onde plasma électronique (EPW), dont l’étude en régime non linéaire constitue l’essentiel de cette thèse. Comme on peut le voir clairement sur la figure 1.2 (b), les amplitudes des oscillations électroniques peuvent être très différentes d’un électron à un autre. Par ailleurs, on peut aussi voir en rouge des trajectoires ne variant que de manière limitée dans la direction de propagation du laser. En une dimension, les électrons correspondants seraient piégés dans le potentiel de l’onde et, par abus de langage, on désignera par la suite de tels électrons sous le terme d’électrons piégés. La variété des trajectoires illustrées sur la figure 1.2 (b), notamment la différence flagrante entre celles des électrons piégés et celles des non piégés, montre clairement que, pour étudier une EPW en régime non linéaire, on ne pourrait pas simplement caractériser le plasma par sa vitesse moyenne, comme on le ferait dans une approche fluide. Il est donc nécessaire de s’intéresser à la distribution des vitesses et d’adopter, au moins, ce qu’on appelle une approche cinétique. C’est ce qui sera fait dans cette thèse.

Le laser incident peut être diffusé (et en particulier rétrodiffusé) par l’onde plasma électronique, ce qui constitue la diffusion Raman stimulée (SRS), que l’on décrira

plus précisément dans le paragraphe 1.2.1. La SRS peut se voir comme une instabilité de décomposition, l'onde laser incidente se décomposant en une onde diffusée et en une onde plasma. On pourrait aussi dire qu'un photon incident se décompose en un photon diffusé et en un plasmon, c'est-à-dire une excitation élémentaire d'une EPW, dont on donnera une définition plus précise dans le paragraphe 2.2. Nous reviendrons en effet plusieurs fois sur la SRS dans ce manuscrit, puisque les travaux effectués durant la thèse ont été fortement motivés par la volonté de contribuer à la modélisation cinétique non linéaire de la diffusion Raman stimulée. Notons néanmoins, dès à présent, que la SRS n'est efficace que si les conditions de résonance Eqs. (1.2) et (1.3) sont vérifiées, comme expliqué au paragraphe 1.2.1.

Lorsque la densité électronique est telle que la fréquence plasma est égale à la fréquence du laser incident (c'est-à-dire lorsque la densité électronique vaut ce qu'on nomme la densité critique), un photon incident se décompose plutôt en deux plasmons, ce que l'on désigne tout naturellement par le terme d'instabilité à deux plasmons.

Il existe bien d'autres phénomènes associés à l'interaction laser-plasma. Il serait vain, et hors du cadre de la thèse, d'essayer d'en dresser une liste exhaustive. Notons néanmoins ceux qui sont généralement les plus cités.

En interagissant avec le plasma, le laser peut aussi induire des oscillations longitudinales quasi neutres, impliquant de manière conjointe les ions et les électrons. Ces oscillations partagent donc une certaine similarité avec celles des atomes ou des molécules produisant des ondes sonores dans les solides, les liquides ou les gaz. De fait, les oscillations quasi neutres dans un plasma donnent lieu à des ondes acoustiques, de relation de dispersion  $\omega \approx kc_s$  (sauf lorsque  $k \approx 0$ ),  $c_s$  étant appelée la vitesse du son pour le plasma considéré. Le laser incident peut aussi être diffusé (et même généralement rétrodiffusé) par les ondes sonores, ce qui donne lieu à de la diffusion Brillouin stimulée (SBS). De même que la SRS, la SBS n'est efficace que si les conditions de résonance Eqs. (1.2) et (1.3) sont vérifiées, où  $\omega$  et  $k$  sont maintenant la fréquence et le nombre de l'onde sonore.

Clairement, les rétrodiffusions Brillouin et Raman diminuent l'énergie disponible pour comprimer la bille de D-T, ce qui est pénalisant pour la fusion. De plus, comme on peut le voir sur la figure 1.1, l'énergie laser est répartie selon des cônes, auxquels on attribue une énergie bien déterminée de manière à obtenir une bonne symétrie d'irradiation. Or, les rétrodiffusions n'étant pas les mêmes sur chaque cône, la SRS et la SBS peuvent briser la symétrie d'irradiation. Cette dernière peut aussi être dégradée de manière plus sévère par échange d'énergie entre faisceaux (CBET) près du trou d'entrée laser. Le transfert d'énergie d'un faisceau à un autre est médié par des ondes sonores, de sorte que le CBET peut être rapproché de la SBS. En conséquence, il n'est efficace que si les conditions de résonance Eqs. (1.2) et (1.3) sont

vérifiées (dans le référentiel de l'onde sonore), où  $\omega_l$  et  $\omega_s$  correspondent maintenant aux fréquences de deux ondes laser qui se croisent (de même pour les nombres d'onde). On peut donc jouer sur les conditions de résonance en imposant un décalage en fréquence,  $\Delta\lambda$ , aux divers faisceaux laser, de manière à favoriser ou pénaliser le CBET. Cela permet d'induire l'échange d'énergie entre faisceaux que l'on désire pour, par exemple, compenser la perte de symétrie induite par SRS ou SBS. L'amélioration de la symétrie d'implosion en modifiant la valeur de  $\Delta\lambda$  a clairement été observée sur le NIF [Kyrala *et al.* (2011)]. Actuellement, la valeur optimale de  $\Delta\lambda$  est obtenue de manière empirique, en enchaînant diverses expériences, et un outil numérique permettant de faciliter l'obtention de cette valeur optimale serait, là encore, bienvenu.

Par ailleurs, le champ laser exerce une pression de radiation qui crée un creusement de densité, modifiant ainsi l'indice de réfraction du plasma en fonction de l'intensité laser, ce qui peut mener à la filamentation des faisceaux.

Pour modéliser correctement l'interaction laser-plasma, il faudrait être capable de prendre au moins en compte tous les effets qui viennent d'être mentionnés. Ce n'est pas forcément difficile (voir paragraphe 3.4) à condition de considérer qu'un effet n'influe sur un autre qu'au travers des altérations qu'il impose à l'éclairement laser. Néanmoins, la SBS induit une modulation régulière à la densité de plasma, ce qui confère à une EPW naissant dans un tel plasma un caractère d'onde de Bloch. Elle peut alors être localisée par un effet semblable à la localisation d'Anderson [Escande & Souillard (1984); Doveil *et al.* (1992)], et son amortissement Landau [L.D.Landau (1946); Mouhot & Villani (2011); Elskens & Escande (2003)] peut être significativement supérieur à celui associé à une onde progressive [Curtet & Bonnaud (1999)]. Dans cette thèse, nous n'étudierons pas de tels effets, et les ions seront considérés comme un fond neutralisant, dont la densité peut néanmoins varier dans le temps et l'espace.

Notons enfin que le champ d'application des résultats décrits dans ce manuscrit va bien au-delà de l'interaction laser-plasma dans le cadre de la fusion inertielle. En effet, le point central de la thèse est la description cinétique non linéaire des ondes plasma électroniques, qui interviennent dans de nombreux domaines de la physique des plasmas. Ainsi, même si nous ne les abordons pas explicitement dans cette thèse, nous pouvons néanmoins mentionner divers champs d'application possibles. En particulier, nous calculons explicitement la déformation non linéaire de la fonction de distribution électronique sous l'effet de l'EPW, ce qui est un point crucial pour comprendre la production d'électrons suprathermiques dans les ceintures de Van Allen [Artemyev *et al.* (2013)]. Nos résultats s'appliquent aussi à la description non linéaire de l'instabilité faisceau-plasma, qui est omniprésente en physique des plas-

mas, notamment en astrophysique (voir [Bret *et al.* (2008)] et les références qui y sont citées). Enfin, un des résultats essentiels de la thèse est le calcul auto-cohérent de la fonction de distribution et du potentiel électrostatique (ainsi que du potentiel vectoriel, comme on le verra dans le chapitre 2). Or, le même type de problème apparaît en cosmologie en ce qui concerne les propriétés de la matière noire [Rampf (2021)], le potentiel électrostatique étant simplement remplacé par le potentiel gravitationnel. Un des articles de référence sur le sujet [Zeldovich (1970)] est d'ailleurs l'équivalent gravitationnel de l'article de Dawson [Dawson (1959)] que nous discuterons en détail au paragraphe 3.2.2. Les travaux présentés dans cette thèse dépassent donc le cadre, déjà large, de la physique des plasmas.

## 1.2 Diffusion Raman stimulée comme un miroir qui se déforme et qui se brise

Bien que nos travaux pourraient être poursuivis dans bien des directions différentes, nous nous sommes focalisés, durant cette thèse, sur les EPW dont les caractéristiques sont proches de celles produites par diffusion Raman stimulée, lors des expériences de fusion par confinement inertiel. En effet, comme indiqué au paragraphe 1.1, nos travaux sont fortement motivés par la modélisation cinétique non linéaire de la SRS. Il nous semble donc utile d'expliquer, de manière très qualitative, ce qu'est la diffusion Raman stimulée et, surtout, les résultats que nous avons obtenus en ce qui concerne son développement en régime non linéaire. Nous employons ici un langage très imagé, dont l'équivalent mathématique sera donné au paragraphe 1.3. Quant aux résultats que nous décrivons ici de manière très qualitative, nous les quantifierons de manière très précise tout au long du manuscrit.

### 1.2.1 Mécanisme de la diffusion Raman stimulée

La diffusion Raman stimulée est un phénomène physique pouvant exister dans n'importe quel milieu, dès qu'une onde laser s'y propage.

De manière générale, en se propageant, une onde laser de fréquence  $\omega_l$  et de nombre d'onde  $\vec{k}_l$  peut se coupler de manière non linéaire au bruit électromagnétique ambiant, qui peut résulter des fluctuations thermiques dans le cas d'un plasma, ou même des fluctuations du vide dans un milieu à basse température. Le bruit électromagnétique peut être modélisé comme un large bain d'ondes, dont on notera de manière générale les fréquences  $\omega_B$ , et les nombres d'onde  $\vec{k}_B$ . Une non linéarité quadratique va alors produire toutes les fréquences  $\omega_l - \omega_B$  et leurs nombres d'onde associés  $\vec{k}_l - \vec{k}_B$ . Il y a diffusion Raman stimulée lorsque, pour une paire de valeurs de  $\omega_B$  et  $\vec{k}_B$ , que l'on notera  $\omega_s$  et  $\vec{k}_s$ , on va produire un signal correspondant à un mode propre du milieu. Dans un plasma, cela arrive lorsque la densité est inférieure au quart de la densité critique. Dans ce cas,  $\omega_l - \omega_s$  et  $\vec{k}_l - \vec{k}_s$  correspondent à la fréquence  $\omega$  et au nombre d'onde  $\vec{k}$  d'une onde plasma électronique. Dans d'autres milieux, par exemple dans les gaz, la condition serait que  $\hbar(\omega_l - \omega_s)$  corresponde à la différence d'énergie entre deux niveaux atomiques ou moléculaires. Étant excité à une fréquence de résonance, le milieu dans lequel se propage l'onde laser va répondre de manière forte en émettant une onde de milieu, par exemple une onde électronique dans le cas d'un plasma, qui peut elle-même se coupler à l'onde laser. Par non linéarité quadratique, on va alors produire un signal de fréquence  $\omega_l - \omega = \omega_s$  et de nombre d'onde  $\vec{k}_l - \vec{k} = \vec{k}_s$ , qui va renforcer le bruit initial, lui-même pouvant exciter l'onde de milieu de manière plus intense, etc. On a donc la croissance d'une instabilité, de nature spatio-temporelle, lorsque les conditions de résonance suivantes

sont vérifiées,

$$\omega_l = \omega_s + \omega, \quad (1.2)$$

$$\vec{k}_l = \vec{k}_s + \vec{k}. \quad (1.3)$$

Considérons maintenant de manière plus précise la SRS dans un plasma. Notre but ici n'est pas de dériver les équations la modélisant, ce qui nous mènerait bien au-delà du cadre de la thèse, mais simplement d'en décrire le mécanisme. La non linéarité quadratique menant à l'excitation de l'onde électronique est le terme  $\vec{v} \times \vec{B}$  de la force de Lorentz ( $\vec{v}$  étant la vitesse d'un électron et  $\vec{B}$  le champ magnétique total). La composante longitudinale de cette force va induire les oscillations électroniques à l'origine du champ de séparation de charges ou, de manière équivalente, à l'origine de la fluctuation de densité,  $\delta\rho$ , caractérisant l'EPW. Dans le cas de la SRS, on montre assez facilement que la vitesse électronique transverse (à la direction de propagation du laser) induite par le champ électromagnétique vaut

$$\delta\vec{v}_\perp = e\vec{A}/m, \quad (1.4)$$

où  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur dont dérive le champ magnétique. Ainsi, la composante longitudinale de la force de Lorentz est proportionnelle à  $A^2$ . Ici,  $A$  contient la contribution de l'onde laser, de fréquence  $\omega_l$  et de nombre d'onde  $\vec{k}_l$ , mais aussi la contribution à la fréquence  $\omega_s$  et au nombre d'onde  $\vec{k}_s$  de l'onde diffusée. Ainsi, si l'on écrit  $A$  sous la forme,

$$A = A_l e^{i(\vec{k}_l \cdot \vec{x} - \omega_l t)} + A_s^* e^{-i(\vec{k}_s \cdot \vec{x} - \omega_s t)} + c.c., \quad (1.5)$$

on voit que  $A^2$  contient le terme  $A_l A_s^* e^{i[(\vec{k}_l - \vec{k}_s) \cdot \vec{x} - (\omega_l - \omega_s)t]}$  qui peut exciter de manière résonante l'EPW. La fluctuation de densité  $\delta\rho$  de l'onde plasma électronique naît donc d'un terme proportionnel à  $A_l A_s^*$ , que l'on désignera dans la suite de la thèse sous le terme de "forçage laser".

La fluctuation de densité  $\delta\rho$  donne lieu à un courant transverse,  $\delta\vec{j}_\perp = \delta\rho\delta\vec{v}_\perp$ , qui est la non linéarité quadratique renforçant l'onde diffusée. Plus précisément, si on écrit  $\delta\rho$  sous la forme,

$$\delta\rho = \delta\rho_0^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} + c.c., \quad (1.6)$$

alors, en utilisant les équations (1.4) et (1.5), et lorsque les conditions de résonance Eqs. (1.2) et (1.3) sont respectées, on voit que le courant  $\delta\vec{j}_\perp = \delta\rho\delta\vec{v}_\perp$  contient le terme  $A_l \delta\rho_0^* e^{i(\vec{k}_s \cdot \vec{x} - \omega_s t)}$  pouvant faire croître l'onde diffusée.

Le mécanisme de la diffusion Raman stimulée est résumé sur la figure 1.3 montrant clairement que le transfert d'énergie de l'onde laser incidente vers l'onde diffusée est médié par l'EPW.

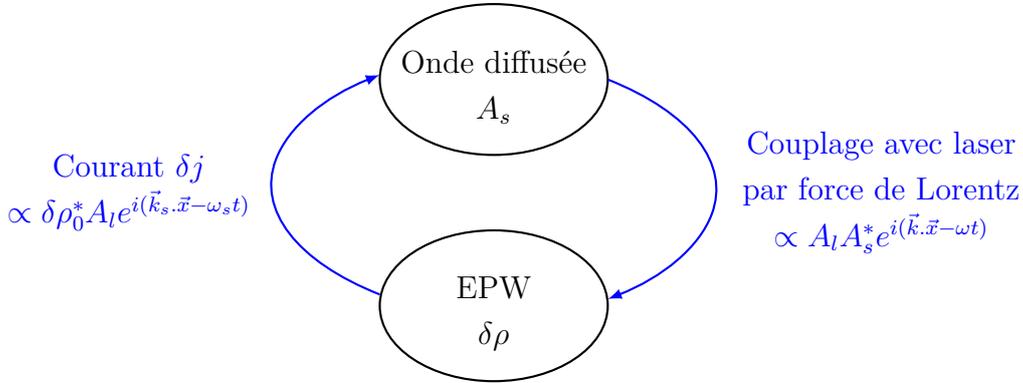


FIGURE 1.3 – Schéma de la boucle instable donnant lieu à la diffusion Raman stimulée dans un plasma.

Dans le cas d'une rétrodiffusion, on peut alors considérer que l'onde plasma électronique joue le rôle d'un miroir, et la qualité de la rétrodiffusion dépendra de la qualité de ce miroir, c'est-à-dire des propriétés non linéaires de l'onde plasma. C'est ce qui motive la description non linéaire d'une EPW, qui est au cœur du sujet de la thèse.

### 1.2.2 Évolution non linéaire du miroir formé par l'EPW

Comme on vient de le voir, dans le cas d'une rétrodiffusion Raman, qui est en général le mécanisme dominant lorsque l'onde plasma électronique est peu amortie, cette dernière se comporte comme un miroir pour l'onde laser. Dans le régime linéaire de la SRS, c'est-à-dire lorsque la réponse des électrons à l'EPW est essentiellement linéaire, le miroir formé par l'onde plasma est presque plan, sa courbure étant celle des fronts de phase de l'onde laser incidente. Au fur et à mesure que l'EPW croît par SRS, et qu'une plus grande fraction de l'énergie laser est réfléchi, le miroir formé par l'EPW se courbe, conformément à ce qui est illustré sur la figure 1.4 de manière schématique, et qui sera expliqué plus en détail dans le paragraphe 1.3. En conséquence, à cause de la condition de résonance Eq. (1.3), la rétrodiffusion ne se fait plus à  $180^\circ$ , mais avec un angle effectif par rapport à la direction moyenne de propagation du faisceau laser. Nous montrerons au paragraphe 3.4 comment quantifier cet angle, qui peut induire des déviations d'une trentaine de degrés par rapport à la rétrodiffusion pure. Lorsque l'amplitude de l'onde plasma continue d'augmenter avec le développement de la SRS, elle finit par se briser, c'est-à-dire qu'elle ne peut plus être considérée comme quasi-monochromatique parce que son spectre en nombre d'onde s'est considérablement enrichi. En utilisant la condition de résonance, Eq. (1.3), on voit que la réflexion de l'énergie laser peut alors se faire

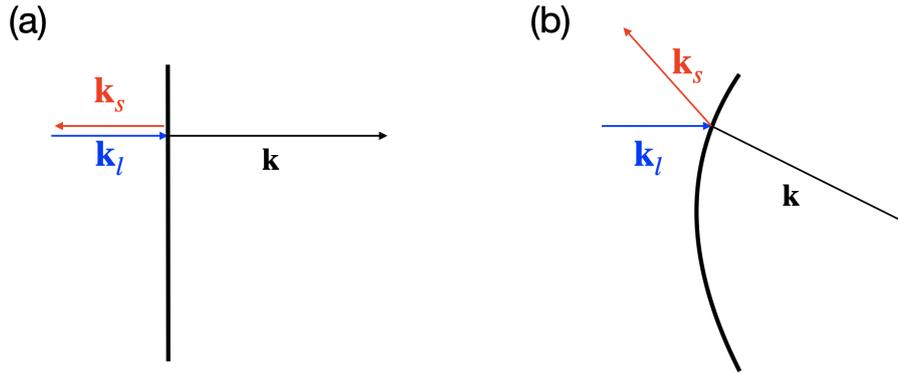


FIGURE 1.4 – Représentation schématique de la rétrodiffusion Raman, (a) en régime linéaire et (b) en régime non linéaire. Le trait épais noir dans les figures (a) et (b) représente le front de phase de l’EPW, qui matérialise le miroir formé par l’onde plasma.

dans de nombreuses directions différentes. L’EPW se comporte exactement comme un miroir brisé, formé d’une multitude de fragments, qui ne réfléchit plus la lumière dans une seule direction mais la diffuse dans de nombreuses directions différentes.

L’analogie avec un miroir peut encore être poussée plus loin. S’il vole en éclats lorsqu’il se brise, un miroir libère de l’énergie cinétique, portée par ses divers fragments. De même, peu après qu’une EPW se soit brisée, une grande partie de son énergie potentielle est convertie en énergie cinétique, portée par les électrons. Les électrons suprathermiques ainsi formés peuvent préchauffer la cible de D-T, ce qui est un des effets délétères de la SRS sur la fusion inertielle.

Le scénario du miroir qui se déforme et qui se brise, que nous venons de décrire qualitativement, sera décrit de manière quantitative au paragraphe 3.4, en utilisant les résultats sur les ondes plasma électroniques obtenus au chapitre 2. Ce sera fait, au moins, jusqu’au moment où l’EPW se brise.

La brisure de l’EPW entraîne la fin de la SRS, puisque la lumière n’est plus réfléchie de manière cohérente, et qu’une partie substantielle de l’énergie de l’onde plasma va aux électrons, ce qui abaisse automatiquement l’amplitude de cette onde, qui ne peut plus réfléchir de manière efficace la lumière laser incidente. On comprend donc que, si on sait calculer une amplitude maximale au-delà de laquelle l’onde plasma doit se briser, on sait trouver un critère de saturation pour la SRS. C’est un exemple direct du lien existant entre les propriétés cinétiques non linéaires d’une onde plasma et la modélisation de la SRS. Comme indiqué au paragraphe 1.2, c’est une des motivations fortes pour l’étude cinétique non linéaire des EPW, dont nous introduisons maintenant le principe.

### 1.3 Introduction au calcul des propriétés cinétiques non linéaires des ondes plasma électroniques

Dans ce paragraphe, nous entrons plus précisément dans le formalisme mathématique de la thèse. Tout d'abord, nous expliquons ce que signifie pour nous la description des propriétés non linéaires d'une onde plasma électronique. Cela passe d'abord par le calcul de son champ électrique, que l'on écrit sous la forme  $\mathcal{E}[\varphi(\vec{x}, t), \vec{x}, t]$ , avec  $\mathcal{E}(\varphi + 2\pi, \vec{x}, t) = \mathcal{E}(\varphi, \vec{x}, t)$ . La variable  $\varphi$  est appelée l'eikonale, et c'est à partir de cette variable que l'on définit le nombre et la fréquence de l'onde à l'aide des relations,

$$\vec{k} = \vec{\nabla}\varphi, \quad (1.7)$$

$$\omega = -\partial_t\varphi, \quad (1.8)$$

ce qui implique que,

$$\partial_t\vec{k} = -\vec{\nabla}\omega. \quad (1.9)$$

Lorsque les variations de  $\mathcal{E}$ ,  $\vec{k}$  et  $\omega$  en fonction de  $\vec{x}$  et  $t$ , à  $\varphi$  fixée, sont beaucoup plus lentes que les variations spatio-temporelles de  $\varphi$ , l'onde est dite quasi-monochromatique. Dans tout le chapitre 2, nous nous limiterons à de telles ondes, pour lesquelles cela a un sens de définir localement une amplitude, un nombre d'onde et une fréquence. En particulier, l'amplitude de l'onde est assimilée à la valeur maximale de  $\mathcal{E}$  sur un intervalle d'amplitude  $2\pi$  en  $\varphi$ , à  $\vec{x}$  et  $t$  fixés.

Pour décrire les propriétés non linéaires d'une EPW, il faut être capable de déterminer la dépendance de  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\varphi$ , à  $\vec{x}$  et  $t$  fixés, que l'on appellera le profil ou la forme du champ. Lorsque cette dépendance est sinusoidale, on dira tout simplement qu'on a affaire à une onde sinusoidale. Il faut aussi être capable de calculer la variation de l'amplitude de l'onde en fonction de  $\vec{x}$  et  $t$ , ce qui revient à calculer la propagation de l'onde. Enfin,  $\omega$  et  $\vec{k}$  ne sont pas des variables indépendantes, mais sont liées par ce qu'on appelle la relation de dispersion de l'onde. En régime non linéaire, elle dépend de toute l'historique des variations spatio-temporelles de l'amplitude de l'onde, ainsi que du profil du champ. Par ailleurs, la façon dont l'onde se propage dépend des variations spatio-temporelles de  $\vec{k}$  et  $\omega$ , ainsi que du profil du champ, qui dépend lui-même de l'amplitude de l'onde. On voit donc que tout doit être calculé simultanément et de manière auto-cohérente.

Par ailleurs, le champ  $\mathcal{E}$  s'obtient essentiellement en résolvant l'équation de Gauss,

$$\vec{\nabla} \cdot \mathcal{E} = -\frac{n_0 e}{\varepsilon_0} \left[ \int f d\vec{v} - 1 \right], \quad (1.10)$$

où  $f$  est la fonction de distribution électronique. La dynamique électronique étant de nature Hamiltonienne,  $f$  vérifie l'équation de Vlasov que nous allons rapidement introduire. Exprimons  $f$  en fonction de variables canoniquement conjuguées, *a priori* arbitraires, que nous noterons  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$ . Si on note  $H$  l'Hamiltonien dont découle la dynamique, la variation temporelle de  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$  est donnée par les équations de Hamilton,

$$d_t \vec{q} = \partial_{\vec{p}} H, \quad (1.11)$$

$$d_t \vec{p} = -\partial_{\vec{q}} H. \quad (1.12)$$

Pour une dynamique Hamiltonienne, nous savons que le volume dans l'espace des phases,  $dV = d\vec{q}d\vec{p}$ , est conservé au cours du mouvement [V.I.Arnold (1986)]. Par ailleurs, s'il n'y a ni création ni destruction d'électrons, leur nombre  $f dV$  est conservé. Ainsi  $d_t(f dV) = 0$ , où la dérivée est calculée le long du mouvement électronique,

$$d_t \equiv \partial_t + d_t \vec{q} \partial_{\vec{q}} + d_t \vec{p} \partial_{\vec{p}}. \quad (1.13)$$

Etant donné que  $d_t(dV) = 0$ , on en déduit l'équation de Vlasov,

$$d_t f = 0, \quad (1.14)$$

qui, en utilisant l'équation (1.13), et les équations de Hamilton (1.11) et (1.15), s'écrit plus traditionnellement de la manière suivante,

$$\partial_t f + \partial_{\vec{p}} H \partial_{\vec{q}} f - \partial_{\vec{q}} H \partial_{\vec{p}} f = 0. \quad (1.15)$$

Or, le terme de force  $\partial_{\vec{q}} H$  dépend du champ électrique, ce qui implique que  $\mathcal{E}$  et  $f$  doivent aussi être calculés simultanément et de manière auto-cohérente. Notons d'ailleurs qu'on ne résout que l'équation de Vlasov, et qu'on reste dans le cadre de la théorie cinétique parce qu'on ne tient compte que de la force due au champ de l'onde plasma, qui est un champ collectif. Les variations de  $f$  restent alors assez lisses. Si l'on tenait compte de toutes les fluctuations du champ résultant du mouvement particulier de chaque électron, on résoudrait plutôt le problème à  $N$  corps (voir [Elskens & Escande (2003); Escande *et al.* (2018)]) pour le traitement du plasma comme un ensemble de  $N$  corps). Notons aussi que l'équation (1.14) se résout en,

$$f(\vec{q}, \vec{p}, t) = f_0[\vec{q}_0(\vec{q}, \vec{p}, t), \vec{p}_0(\vec{q}, \vec{p}, t)], \quad (1.16)$$

où  $f_0$  est la fonction de distribution initiale, et où  $\vec{q}_0$  et  $\vec{p}_0$  sont les valeurs initiales des variables dynamiques canoniquement conjuguées, pour une orbite atteignant à l'instant  $t$  les positions  $\vec{q}$  et  $\vec{p}$  dans l'espace des phases. En particulier, si  $\vec{p}$  est une

constante du mouvement,  $\vec{p}(t) = \vec{p}_0$ , ce qui implique  $\vec{q}(t) = \vec{q}_0 + \vec{p}_0 t$ , l'équation de Vlasov a pour solution,

$$f(\vec{q}, \vec{p}, t) = f_0(\vec{q} - \vec{p}_0 t, \vec{p}_0). \quad (1.17)$$

Dans cette thèse, nous utiliserons en grande partie l'équation (1.17) pour résoudre l'équation de Vlasov.

En résumé, pour déterminer les propriétés cinétiques non linéaires d'une onde plasma électronique, il faut calculer de manière auto-cohérente,

- (i) La fonction de distribution électronique
- (ii) La relation de dispersion non linéaire
- (iii) Le profil du champ, c'est-à-dire sa dépendance en  $\varphi$  à  $\vec{x}$  et  $t$  fixés
- (iv) La propagation de l'onde, c'est-à-dire la variation spatio-temporelle de son amplitude.

Dans cette thèse, nous nous restreignons au cas d'ondes lentement variables. Ce sont celles dont le taux de variation typique de l'amplitude,  $\Gamma$ , tel que vu par un électron au cours de son mouvement, est beaucoup plus petit que  $kv_{th}$ , où  $v_{th}$  est la vitesse thermique électronique. Cette condition est très bien vérifiée pour une onde plasma créée par diffusion Raman stimulée dans les expériences de fusion par confinement inertiel. En effet, dans de telles conditions, le taux de croissance de la SRS ne vaut que quelques pourcents de  $kv_{th}$ . Or, d'après [Bénisti & Gremillet (2007); Bénisti *et al.* (2008)], on sait que dès que  $\Gamma/kv_{th} \lesssim 0.1$ , on peut utiliser l'approximation adiabatique, ou plus précisément la théorie neo-adiabatique (voir [Bazzani *et al.* (2014)] et les références citées dans cet article, en particulier [Cary *et al.* (1986); Neishtadt (1986); Hannay (1986); Vasil'ev & Guzev (1986)]) pour obtenir la relation de dispersion non linéaire de l'onde plasma. Nous reviendrons sur cette approximation tout au long de ce manuscrit, mais elle porte essentiellement sur la conservation de l'action,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint v d\varphi, \quad (1.18)$$

où  $\varphi(t) \equiv \varphi[x(t), t]$  et  $v$  sont les variables canoniquement conjuguées dans lesquelles on exprime l'Hamiltonien dont dérive la dynamique électronique (voir chapitre 2). De plus, dans l'équation (1.18), l'intégrale est calculée le long de ce qu'on appelle une orbite gelée, qui est obtenue en remplaçant, dans la force s'appliquant sur un électron,  $\mathcal{E}(\varphi, \vec{x}, t)$  par  $\mathcal{E}(\varphi, \vec{x}_0, t_0)$  où  $\vec{x}_0$  et  $t_0$  sont constants. La conservation de  $I$  devrait, *a priori*, nous permettre d'utiliser l'équation (1.17) pour résoudre l'équation de Vlasov. Néanmoins,  $I$  ne reste constante que dans des sous-domaines de l'espace des phases, ce qui rend le calcul de la fonction de distribution en action

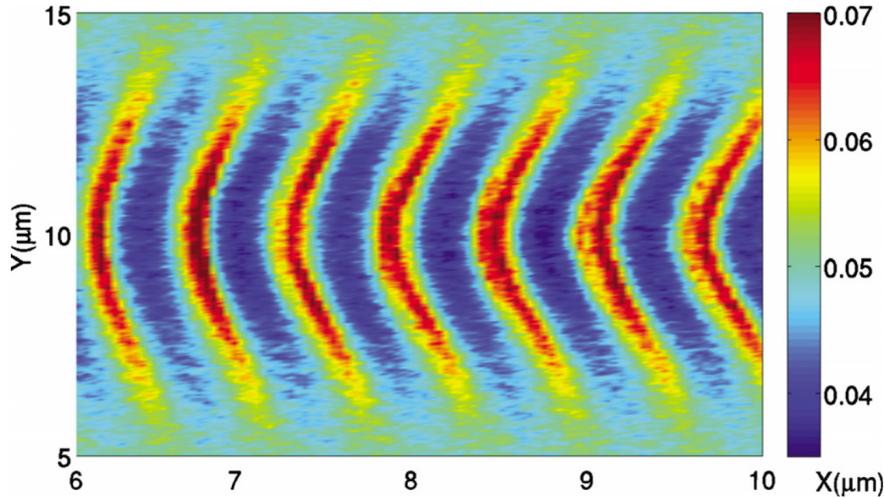


FIGURE 1.5 – La densité électronique  $n_e$  telle que calculée par le code PIC MANDOR dans une simulation d’interaction laser-plasma, tirée de Masson-Laborde *et al.* Physics of Plasmas 17, 092704 (2010). On observe la courbure du front de phase, le laser étant plus intense au centre à  $Y = 10\mu\text{m}$  qu’aux bords, la vitesse de phase de l’onde se retrouve diminuée au centre par rapport aux bords, conformément à la discussion du paragraphe 1.3.

assez compliqué. Ce calcul constituera d’ailleurs une grande partie du chapitre 2. L’approximation adiabatique permet de résoudre les points (i) à (iii) listés plus haut. Cependant, dans le cas le plus général, il faudrait aussi résoudre le point (iv) pour obtenir des résultats quantitatifs. La situation se simplifie néanmoins si l’on suppose que l’onde ne fait que croître. Dans ce cas, on obtient une relation explicite entre  $\omega$ ,  $k$  et l’amplitude de l’onde, qui est la relation de dispersion non linéaire. Elle va souvent dans le sens d’une décroissance de  $\omega$  en fonction de l’amplitude de l’onde, à  $k$  fixé. Or, lorsqu’une onde plasma résulte de la diffusion Raman stimulée d’un laser qui est focalisé en un point de l’espace, elle croît plus vite près de la région focale que loin de cette région. Son amplitude y est donc plus grande, et sa fréquence plus faible. En conséquence, la vitesse de phase est plus grande loin de la région focale qu’en son centre, ce qui entraîne naturellement la courbure des fronts de phase, comme illustré schématiquement sur la figure 1.4, et comme cela a été observé numériquement dans [Masson-Laborde *et al.* (2010)] (voir la figure 1.5) ainsi que dans [Rousseaux *et al.* (2009)] que l’on discutera en détail dans le paragraphe 3.4.

Si l’approximation adiabatique permet de résoudre les points (i) à (iii) listés plus haut, elle ne permet pas, à elle seule, d’aborder le point (iv), c’est-à-dire d’obtenir l’équation de propagation des ondes plasma. En particulier, elle ne permet pas de tenir compte de l’amortissement non collisionnel des EPW qui, en régime linéaire, n’est rien d’autre que l’amortissement Landau. Les équations de propagation ont été obtenues de manière très générale, dans le cadre de l’optique géométrique,

dans [Bénisti (2016); Bénisti *et al.* (2022)], et nous ne les détaillerons pas ici. Nous les utiliserons uniquement au paragraphe 3.4 de manière simplifiée pour calculer la courbure des front de phase d'une EPW créée par SRS.

## 1.4 Résultats obtenus durant la thèse

Maintenant que le cadre de la thèse, les mécanismes physiques les plus importants, ainsi que le formalisme mathématique ont été introduits, nous pouvons aborder de manière plus détaillée les résultats que nous avons obtenus.

Nous nous sommes concentrés, durant cette thèse, sur des ondes résultant d'instabilités, telles que la diffusion Raman stimulée. De telles ondes sont électrostatiques et sinusoïdales dans le régime linéaire de l'instabilité. Ainsi, si l'on exprime le champ électrique de l'onde en fonction de son potentiel vecteur  $\vec{A}_0$ , et de son potentiel scalaire, que nous noterons  $m\phi/e$ , avec  $\mathcal{E} = -\partial_t \vec{A}_0 - (m/e)\vec{\nabla}\phi$ , nous sommes tout naturellement menés à développer  $\phi$  sous la forme d'une somme d'harmoniques,  $\phi = \sum_{n \geq 1} \phi_n e^{i\varphi_n} + c.c.$  De plus, dans la limite des petites amplitudes, nous supposons que  $A_0 \approx 0$  et que le potentiel scalaire est sinusoïdal, c'est-à-dire que seule la première harmonique est non nulle. À l'aide de ces hypothèses, et de l'approximation adiabatique, nous montrons dans le chapitre 2 comment calculer de manière auto-cohérente la fonction de distribution électronique, l'amplitude des harmoniques du potentiel, ainsi que  $\vec{v}_\phi = \omega/\vec{k} - e\vec{A}_0/m$ . Dans le cas où le champ ne dépend pas explicitement de  $\vec{x}$ , ou dans le cas unidimensionnel (1-D), la fréquence  $\omega$  de l'onde est calculée en imposant la conservation de la quantité de mouvement électronique totale, conformément à ce qui avait déjà été fait dans [Lindberg (2007)]. Cela nous permet d'en déduire  $A_0 = (m/e)(\omega/k - v_\phi)$ . En deux ou trois dimensions spatiales, on ne calcule  $\omega$ , et donc  $\vec{A}_0$ , qu'à l'ordre le plus bas dans les variations transverses de l'amplitude l'onde. Cela nous permet d'estimer, à cet ordre-là, le champ magnétique créé par une onde plasma de grande amplitude.

Outre la prise en compte du potentiel vecteur de l'onde et du caractère non sinusoïdal de son potentiel scalaire, l'originalité de notre approche réside dans un calcul rigoureux de la fonction de distribution électronique,  $f$ , dans le cadre de l'approximation adiabatique. En particulier, nous tenons explicitement compte de la non localité de  $f$  en fonction de  $\vec{v}_\phi$ , qui est souvent négligée. Nous discutons aussi l'impact sur  $f$  de la rotation du nombre d'onde, par exemple lorsque le front d'onde se courbe comme illustré sur les figures 1.4 et 1.5.

Nous appliquons la théorie générale au cas d'une onde homogène qui ne fait que croître. C'est le seul cas où un calcul peut être fait sans avoir à spécifier toute l'histoire des variations spatio-temporelles du champ. En nous basant sur ce calcul, nous discutons l'importance de la prise en compte du potentiel vecteur et d'un nombre fini d'harmoniques pour estimer la fréquence non linéaire de l'onde plasma électronique. La théorie générale étant assez lourde, même dans le cas le plus simple où nous avons fait un calcul explicite, nous discutons aussi les situations où elle pourrait

être simplifiée, notamment en supposant que le potentiel scalaire est sinusoïdal.

Cette discussion est poursuivie dans le chapitre 3, où nous comparons le profil de la partie électrostatique du champ déduit de la théorie adiabatique, à celui obtenu par Dawson [Dawson (1959)] et à un champ purement sinusoïdal. Nous montrons en particulier que le champ de Dawson est assez proche du champ adiabatique pour les petits nombres d'onde, alors que pour les grands nombres d'onde le champ est plutôt sinusoïdal. Cela nous permet d'obtenir une expression explicite assez précise du champ de l'onde plasma, valable quelle que soit son amplitude et son nombre d'onde.

Le chapitre 3 est dédié aux applications de notre théorie non linéaire des EPW. Ainsi la comparaison entre le champ adiabatique et celui de Dawson fait partie d'une discussion plus générale sur la pertinence des ondes dites BGK [Bernstein *et al.* (1957)], qui sont des solutions stationnaires du couple d'équations Vlasov-Poisson.

Nous revenons aussi dans le chapitre 3 sur la relation de dispersion non linéaire ou, plus précisément, sur l'absence de solution à cette relation de dispersion au-delà d'une certaine amplitude. Elle implique que l'hypothèse sur laquelle était basée notre théorie, et selon laquelle l'onde plasma était quasi-monochromatique, ne peut plus être vérifiée lorsque son amplitude est trop grande. En conséquence, au-delà d'une certaine amplitude, que l'on désignera par la suite comme la limite de wave breaking (ou de déferlement), l'onde doit forcément se briser. À l'aide des résultats sur la relation de dispersion, nous obtenons dans le chapitre 3 une borne supérieure rigoureuse pour la limite de wave breaking, qui varie de manière particulièrement simple en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel scalaire.

En utilisant nos résultats sur la relation de dispersion non linéaire, sur la limite de déferlement, ainsi qu'une méthode numérique originale que nous avons appelé Ray In Cell (RIC), nous calculons au chapitre 3 la courbure du front d'onde non linéaire d'une EPW résultant de la diffusion Raman stimulée d'un laser focalisé dans un plasma. Cela nous permet de déduire le spectre en  $\vec{k}$  de cette onde et, en particulier, l'extension transverse (par rapport à la direction moyenne de propagation du laser) de ce spectre. De cette information découle l'angle moyen entre la direction de propagation de l'EPW et celle de l'onde laser. Nos résultats sont en très bon accord avec ceux issus de simulations de type Particle In Cell (PIC), tout en nécessitant des temps de calculs réduits d'un facteur de l'ordre  $10^7$  par rapport aux codes PIC.

Une fois calculées les caractéristiques d'une EPW adiabatique qui n'aurait fait que croître, nous en étudions dans les chapitres 4 et 5 sa stabilité.

Dans le chapitre 4, nous décrivons la théorie générale permettant d'étudier la stabilité d'une EPW non linéaire, correspondant à une fonction de distribution électronique ne dépendant que de l'action. Cette théorie consiste en un traitement rigoureux de l'instabilité des particules piégées, introduite par Kruer, Dawson et Sudan (KDS) en 1969 [Kruer *et al.* (1969)]. Notre théorie tient aussi compte de l'instabilité de masse négative introduite plus récemment par Dodin [Dodin *et al.* (2013)]. À l'aide du formalisme général, nous calculons explicitement le spectre instable pour la fonction de distribution obtenue au chapitre 2. Nos résultats sont ensuite comparés à ceux de KDS et Dodin.

Dans le chapitre 5, nous confrontons les spectres instables obtenus théoriquement au chapitre 4 à ceux déduits de simulations Vlasov, tels qu'obtenus par Brunner *et al.* [Brunner *et al.* (2014)], ainsi que par Friou *et al.* [Friou *et al.* (2013)]. Dans les simulations de Brunner *et al.*, on fait croître une onde de manière non auto-cohérente, en imposant un forçage extérieur, que l'on coupe quand l'EPW a atteint l'amplitude voulue. On résout ensuite numériquement les équations de Vlasov et de Poisson, jusqu'au moment où l'on voit des modes satellites croître de manière instable, à un taux que l'on évalue numériquement. Dans le cas des simulations de Friou *et al.*, on part d'une condition initiale où la fonction de distribution numérique résulte de la discrétisation de la fonction adiabatique, telle que calculée au chapitre 2. Puis, de même que dans les calculs de Brunner *et al.*, on résout numériquement les équations de Vlasov et de Poisson pour voir des modes satellites croître de manière instable et mesurer leurs taux de croissance. Les taux de croissance maximum sont sensiblement les mêmes dans les deux types de simulation. Cependant, l'accord avec les résultats théoriques peuvent être plus ou moins bons selon la fonction de distribution que l'on utilise, qui peut être la fonction de distribution adiabatique calculée au chapitre 2, ou la fonction de distribution issue des simulations numériques, par exemple celles effectuées dans l'esprit de Brunner *et al.*, ou dans un esprit légèrement différent. L'analyse de ces résultats nous amène, d'une part, à juger de la pertinence de la fonction de distribution adiabatique calculée théoriquement et, d'autre part, à discuter la capacité des simulations numériques à correctement décrire une onde croissant lentement, de manière quasi adiabatique. Cela nous permet de conclure sur la difficulté à déterminer précisément la stabilité d'une EPW de grande amplitude, tant d'un point de vue numérique que théorique, difficulté que nous analysons en détail à la fin du chapitre 5. Cette analyse nous mène à identifier très précisément ce qu'il reste à faire pour résoudre complètement le problème de l'instabilité des particules piégées, introduit pour la première fois il y a plus d'un demi siècle.

Le présent manuscrit est organisé de la manière suivante. Le chapitre 2 est dédié au calcul auto-cohérent du champ d'une onde plasma quasi-monochromatique, de sa relation de dispersion, ainsi que de la fonction de distribution électronique. Le chapitre 3 utilise les résultats du chapitre 2 pour obtenir une expression approchée, mais assez précise, de la partie électrostatique du champ de l'onde, pour déterminer une borne supérieure à la limite de wave breaking, et pour déterminer la courbure non linéaire du front de phase pour une EPW résultant de la SRS d'un laser focalisé dans un plasma. Le chapitre 4 décrit la théorie générale permettant de déterminer la stabilité d'une EPW de grande amplitude. La théorie est ensuite appliquée au cas de l'onde calculée au chapitre 2. Dans le chapitre 5, les résultats théoriques sont comparés aux résultats de simulations Vlasov, et les différences observées entre ces résultats sont analysées en détail. Enfin, le chapitre 6 conclut ce manuscrit et décrit les axes de recherche à poursuivre pour continuer le travail.

---

# 2

## Théorie générale des ondes plasma adiabatiques

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux propriétés des ondes plasma non linéaires dont l'amplitude a une variation spatiale et temporelle suffisamment lente pour que l'hypothèse adiabatique énoncée au chapitre précédent puisse s'appliquer. Nous appelons de telles ondes, des ondes adiabatiques. Pour les ondes quasi-monochromatiques vérifiant cette condition, nous construisons une théorie générale permettant de décrire leur comportement quelle que soit la variation de leur amplitude et ce même dans un plasma non homogène et non stationnaire.

Lorsque l'amplitude de l'onde est constante, on peut classer le mouvement des électrons en deux catégories : celle du mouvement piégé et celle du mouvement non piégé. En effet, dans une onde d'amplitude constante et dans le référentiel de l'onde, un électron peut avoir soit un mouvement borné, on dit alors qu'il est piégé et il oscille dans le puits de potentiel de l'onde, soit un mouvement non borné auquel cas on dit qu'il est circulant. Dans l'espace des phases, où sont représentées les orbites électroniques, les régions piégées et non piégées sont séparées par une courbe qu'on appelle, tout naturellement, la séparatrice. Cette courbe, ainsi que des exemples d'orbites piégées et non piégées, sont représentés sur la figure 2.1.

L'ensemble de ces courbes sont fermées, du moins modulo  $2\pi$ , sur un cylindre. Dans cette situation, pour une onde d'amplitude constante, l'action  $I = \frac{1}{2\pi} \oint v d\varphi$

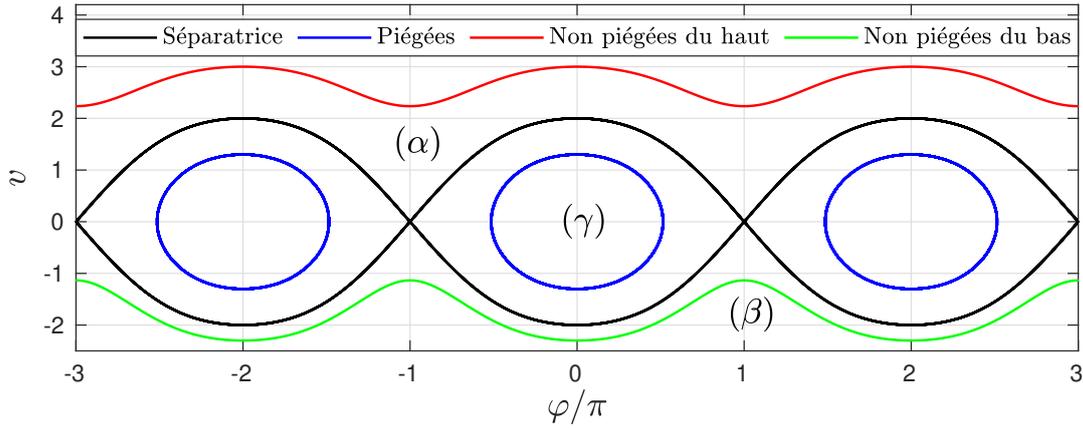


FIGURE 2.1 – Collection d’orbites piégées et non piégées pour un champ électrique de la forme  $\mathcal{E}(\phi) = \sin(\phi) - 0.2\sin(2\phi)$ . On voit en noir la courbe séparatrice qui délimite la région des piégés, dénommée région  $(\gamma)$ , de la région des orbites non piégées, dénommée  $(\alpha)$  pour  $v > 0$  et  $(\beta)$  lorsque  $v < 0$ .

définie au chapitre 1 comme une intégrale de la vitesse le long d’une orbite fermée, est une constante du mouvement. Il est à noter que l’action se calcule le long de l’orbite, c’est-à-dire que  $d\varphi$  a le signe que prend  $d\varphi/dt$  sur l’orbite considérée. Comme nous le verrons dans le paragraphe 2.2, l’expression de l’action est différente pour chaque région de l’espace des phases  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  ou  $(\gamma)$ , ces régions étant représentées sur la figure 2.1.

Si l’amplitude de l’onde varie, le portrait de phase acquiert une structure moins claire, en particulier, les orbites ne restent plus confinées dans l’une des régions de l’espace des phases, mais peuvent passer d’une région à une autre en traversant la séparatrice [Cary *et al.* (1986)]. Dans ce cas, le champ électrique n’est plus strictement périodique, et les orbites ne sont plus fermées. Leur action ne peut donc pas être définie. Pour surmonter cette difficulté, on introduit la notion d’orbite gelée. Comme indiqué au paragraphe 1.3, une orbite gelée est une orbite correspondant au champ électrique  $E(\vec{x}, t) = \mathcal{E}(\varphi, \vec{x}_0, t_0)$ , où l’amplitude de l’onde a été supposée constante, évaluée en une certaine position  $\vec{x}_0$  et en un temps  $t_0$ . Les orbites gelées sont donc identiques à celles représentées sur la figure 2.1.

Chaque orbite gelée prise séparément est  $2\pi$ -périodique en  $\varphi$  (puisque l’on suppose  $\mathcal{E}$  périodique en  $\varphi$ ), donc fermée sur un cylindre. On peut localement y définir une action, qui va dépendre de la position  $\vec{x}_0$  et du temps  $t_0$  gelés. Les EPW que nous étudions dans ce chapitre, et que nous nommons les ondes adiabatiques, sont celles dont l’amplitude varie suffisamment lentement dans le temps et l’espace pour qu’on puisse calculer les variations temporelles de l’action en utilisant l’approximation adiabatique [Neishtadt (1975); Cary *et al.* (1986); Dodin & Fisch (2012b); Bénisti (2016)]. Elle consiste à considérer l’action  $I^{(\gamma)}$  des orbites piégées comme constante, alors que pour les orbites non piégées, la variation de l’action est donnée

par,  $k d_t I^{(\alpha,\beta)} \approx \pm \partial_{x_r} H_0|_I$ , où  $k = ||\vec{k}||$ ,  $x_r$  est la coordonnée selon le vecteur d'onde  $\vec{k}$ , et  $H_0$  est l'Hamiltonien dont découle la dynamique électronique sous la seule action de l'EPW. Par ailleurs, le signe "+" correspond à la région ( $\beta$ ) et le signe "-" à la région ( $\alpha$ ).

Comme indiqué plus haut, la variation de l'amplitude et de la vitesse de phase de l'onde entraînent des traversées de séparatrice, une orbite initialement dans un sous-domaine de l'espace des phases, par exemple ( $\alpha$ ), peut alors se diviser en deux sous-orbités, chacune étant dans l'un des deux autres sous-domaines, qui seraient ( $\beta$ ) et ( $\gamma$ ) dans le cas de notre exemple. Les probabilités de transition d'une sous-région à une autre sont connues et rappelées au paragraphe 2.4. Il faut clairement en tenir compte pour calculer correctement la fonction de distribution électronique. Par ailleurs, comme on le montrera au paragraphe 2.2, la traversée de séparatrice s'accompagne d'un saut géométrique en action, qui est un multiple de  $v_\phi^*/k^*$ , où l'étoile fait référence à la valeur de la variable au moment de la traversée de séparatrice, et où  $v_\phi = \omega/k - eA_0/m$ ,  $A_0$  étant le potentiel vecteur dont dérive une partie du champ électrique de l'EPW (qui n'est donc pas purement électrostatique comme on le montrera au paragraphe 2.3). Ces sauts d'action s'ajoutent aux variations lentes dues à l'inhomogénéité de l'Hamiltonien. Dans le cadre de l'approximation adiabatique, l'action n'est donc pas considérée comme une constante du mouvement, même dans le cas homogène où elle n'est supposée constante que dans chaque sous-région de l'espace des phases. Etant donné que les sauts en action dépendent de la valeur de  $v_\phi/k$  au moment de la traversée de séparatrice, la fonction de distribution dépend de toute l'historique de  $v_\phi/k$ . Elle dépend donc de manière non locale des propriétés de l'onde.

Après avoir posé, au paragraphe 2.2, les bases de la théorie adiabatique dans le cadre le plus général possible, nous l'appliquons au paragraphe 2.3 à une onde plasma homogène et croissante. L'amplitude et la fréquence de l'onde ne dépendent que du temps, ce qui implique d'après l'équation (1.9) que le nombre d'onde reste constant. La limite homogène s'applique, par exemple, au cas où l'on simulerait la croissance d'une EPW à l'aide d'un forçage extérieur homogène, comme dans les simulations détaillées au chapitre 5. Pour une telle onde plasma, nous calculons de manière auto-cohérente la fonction de distribution électronique, la forme du potentiel, ainsi que  $v_\phi = \omega/k - eA_0/m$ , en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel scalaire. Le schéma numérique utilisé est basé sur une méthode de dichotomie combinée à une méthode de point fixe. Une des difficultés de la résolution réside dans la nécessité de tenir compte de la non localité de la fonction de distribution de manière auto-cohérente. Une autre difficulté réside dans le calcul de l'intégrale en action permettant d'estimer la densité de charges induite

par les particules piégées. Les méthodes utilisées pour résoudre ces problèmes sont détaillées dans le paragraphe 2.3. Enfin, nous calculons la fréquence non linéaire à partir d'une condition portant sur la conservation de la quantité de mouvement électronique totale. Le calcul explicite de la variation de  $\omega$  en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel scalaire est effectué dans le cas d'une EPW croissant dans un plasma initialement Maxwellien. Nos calculs théoriques sont, de plus, validés à l'aide de simulations de type particules test. À partir du calcul non linéaire de  $\omega$ , nous pouvons discuter l'importance de tous les effets que nous venons de citer, en particulier l'anharmonicité du potentiel scalaire et la valeur non nulle du potentiel vecteur.

Après avoir traité le cas d'une onde homogène croissante, nous nous intéressons à une onde homogène dont la variation d'amplitude n'est pas monotone. Dans ce cas, la non localité de la fonction de distribution se fait sentir de manière plus aiguë, et nous discutons les difficultés que cela peut poser.

En dernier lieu, nous discutons le cas inhomogène. Dans ce cas, et dans une géométrie bidimensionnelle (2-D) ou tridimensionnelle (3-D), l'EPW crée un champ magnétique, qui dérive du potentiel vecteur  $\vec{A}_0$ , et que nous estimons. De plus, d'après l'équation (1.9), l'inhomogénéité de la fréquence entraîne une variation du nombre d'onde et, en particulier, sa rotation dans une géométrie 2-D ou 3-D. Nous estimons l'impact d'une telle variation sur la fonction de distribution électronique.

Ainsi, ce chapitre est organisé de la manière suivante. Le paragraphe 2.2 expose les bases de la théorie adiabatique, dans un cadre général. Le paragraphe 2.3 se spécialise au cas d'une EPW homogène et croissante, auquel cas le décalage en fréquence non linéaire de l'onde est calculé de manière explicite. Le paragraphe 2.4 discute les effets attendus lorsque l'amplitude de l'onde est homogène mais non monotone, alors que le paragraphe 2.5 traite du cas le plus général d'une onde inhomogène. Dans le paragraphe 2.6 nous discutons dans quelles conditions, et en particulier pour quelles valeurs du nombre d'onde, la théorie générale peut être simplifiée.

## 2.2 Théorie adiabatique appliquée aux ondes plasma

Par souci de simplicité, nous exposons la théorie des ondes plasma uniquement dans le cas unidimensionnel (1-D). La généralisation au cas 3-D est immédiate, sauf en ce qui concerne la prise en compte du changement de direction du nombre d'onde,  $\vec{k}$ . L'effet de la rotation de  $\vec{k}$  sur la fonction de distribution électronique est spécifiquement traité dans le sous-paragraphe 2.5.1. En dehors de ce sous-paragraphe,  $\vec{k}$ , ainsi que les variations spatiales de toutes les grandeurs physiques, sont supposées être selon  $x$ . Puisqu'il n'existe qu'une seule direction spatiale, nous ne noterons plus systématiquement les champs sous forme de vecteur.

### 2.2.1 Hamiltonien de l'interaction onde-particules

Soient  $A_0$  et  $(m/e)\phi$ , respectivement, les potentiels vecteur et scalaire dont dérive le champ électrique de l'onde,  $\mathcal{E}(x, t, \varphi)$ , avec  $\mathcal{E}(\varphi + 2\pi) = \mathcal{E}(\varphi)$ . On a donc,

$$\mathcal{E} = -\partial_t A_0 - (m/e)\partial_x \phi. \quad (2.1)$$

Comme on le verra au sous-paragraphe 2.3.4,  $A_0$  résulte d'un effet non linéaire lié à la conservation de la quantité de mouvement électronique. Ses variations spatio-temporelles sont donc similaires à celles de l'amplitude de l'EPW et sont donc supposées varier beaucoup plus lentement que  $\varphi$ . Par ailleurs, la périodicité du champ électrique en  $\varphi$  incite à développer  $\phi$  sous la forme suivante,

$$\phi = \sum_{n \geq 1} \phi_n \cos(n\varphi + \delta\varphi_n), \quad (2.2)$$

où les  $\phi_n$  et les  $\delta\varphi_n$  sont lentement variables. De plus, on suppose qu'au début de la croissance de l'EPW, lorsque son amplitude est très faible, l'onde est sinusoïdale et électrostatique. Ainsi, dans la limite où l'amplitude de l'onde tend vers 0, on suppose que  $A_0 \rightarrow 0$  et que  $\phi_n/\phi_1 \rightarrow 0$  si  $n \neq 1$ . En toute rigueur, il faudrait rajouter un terme  $\phi_0(x, t)$  à la somme Eq. (2.2). Cependant, ce terme donnerait une contribution négligeable au champ électrique. D'ailleurs, dans l'esprit de l'approximation adiabatique, on estime le champ de l'onde de la façon suivante,

$$\mathcal{E} \approx -\partial_t A_0 + (m/e) \sum_{n \geq 1} n\phi_n \sin(n\varphi + \delta\varphi_n). \quad (2.3)$$

Avec cette approximation, et l'hypothèse d'un champ sinusoïdal au début de la croissance de l'onde, les termes d'ordre  $n > 1$  dans l'expansion Eq. (2.2) sont forcément des harmoniques du terme  $\phi_1 \cos(\varphi + \delta\varphi_1)$ . On peut donc choisir tous les  $\delta\varphi_n$  nuls, ce que l'on fera dans la suite.

Quant à l'Hamiltonien dont découle la dynamique de l'interaction onde-particules, il vaut,

$$H_{\text{int}} = \frac{(p + eA_0)^2}{2m} - m\phi, \quad (2.4)$$

où  $p = md_t x - eA_0$ . On opère maintenant un changement de variables canoniques en utilisant la fonction génératrice,  $F(x, p', t) = p'\varphi(x, t)$ , ce qui donne,  $p = \partial_x F = kp'$ ,  $x' = \partial_{p'} F = \varphi$  et, pour le nouvel Hamiltonien,

$$H'_{\text{int}} = H_{\text{int}} + \partial_t F \quad (2.5)$$

$$= \frac{(kp' + eA_0)^2}{2m} - m\phi - \omega p' \quad (2.6)$$

$$= \frac{(kp' - mv_\phi)^2}{2m} - m\phi - \frac{mv_\phi^2}{2} + \frac{e^2 A_0^2}{2m}, \quad (2.7)$$

où

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} - \frac{eA_0}{m}. \quad (2.8)$$

Si on introduit maintenant  $v = p'/m$ , on voit facilement que l'Hamiltonien pour le couple de variables canoniquement conjuguées  $(\varphi, v)$  est

$$H_0 = H - \frac{v_\phi^2}{2} + e^2 A_0^2 / 2m^2, \quad (2.9)$$

avec

$$H = \frac{(kv - v_\phi)^2}{2} - \phi(\varphi, t), \quad (2.10)$$

et

$$\phi(\varphi, t) = \sum_{n \geq 1} \phi_n(\varphi, t) \cos(n\varphi). \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Calcul de l'action

Comme indiqué dans l'introduction, l'action se définit de manière générale par,

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint v d\varphi, \quad (2.12)$$

où l'intégrale est calculée le long d'une orbite gelée, c'est-à-dire une orbite définie en fixant la valeur des grandeurs lentement variables. Ainsi, le long d'une orbite gelée,  $A_0$  et  $v_\phi$  sont constants. Cela implique que les actions de l'Hamiltonien total,  $H_0$ , sont les mêmes que celles de  $H$ . Par ailleurs, le long d'une orbite gelée, on remplace

$\phi$  par

$$\phi_g(\varphi, t) = \sum_{n \geq 1} \phi_n(\varphi_0, t_0) \cos(n\varphi). \quad (2.13)$$

Néanmoins, dans la suite, par souci de simplicité, on oubliera systématiquement l'indice  $g$ . Implicitement, le potentiel utilisé dans le calcul de l'action est le potentiel gelé. Pour les orbites non piégées dans la région  $(\alpha)$  de l'espace des phases, en utilisant la périodicité en  $\varphi$  de ces orbites et leur symétrie par rapport à l'axe  $\varphi = 0$ , on obtient l'expression suivante pour leur action,

$$I^{(\alpha)}(\varphi_0, t_0) = \frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \sqrt{2(H + \phi)} d\varphi + v_\phi/k. \quad (2.14)$$

L'évolution de  $I^{(\alpha)}$  avec  $\varphi_0$  est lente, due à la faible inhomogénéité de l'onde, et dans le reste du manuscrit  $I^{(\alpha)}$  sera implicitement remplacé par sa valeur moyenne sur une longueur d'onde gelée de l'onde plasma. De plus, comme déjà indiqué au sous-paragraphe 2.1, l'évolution temporelle de  $I^{(\alpha)}$  est aussi lente,

$$d_t I^{(\alpha)} \approx -k^{-1} \partial_x H_0|_I, \quad (2.15)$$

où  $H_0(x, I) = H[\varphi(x, t), I, t] - v_\phi^2/2 + e^2 A_0^2/2m^2$ , et  $H(\varphi, I, t)$  résout l'équation (2.14). Pour être tout à fait précis, l'équation (2.15) traduit en fait la variation temporelle de  $I^{(\alpha)}$  moyennée sur une longueur d'onde gelée de l'EPW (voir [Bénisti (2016)]) pour plus de détails).

Pour une orbite non piégée dans la région  $(\beta)$  de l'espace des phases on trouve, de même,

$$I^{(\beta)}(\varphi_0, t_0) = \frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \sqrt{2(H + \phi)} d\varphi - v_\phi/k, \quad (2.16)$$

$$d_t I^{(\beta)} \approx k^{-1} \partial_x H_0|_I. \quad (2.17)$$

En ce qui concerne les orbites piégées, de manière à éviter un saut d'un facteur 2 dans la valeur de l'action, on n'utilise pas la formule générale, mais plutôt,

$$\begin{aligned} I^{(\gamma)} &= \frac{1}{4\pi k} \oint v d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi k} \int_0^{\varphi_{\max}} \sqrt{2(H + \phi)} d\varphi, \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $\varphi_{\max}$  est telle que  $H + \phi(\varphi_{\max}) = 0$ . De plus, par convention, le potentiel gelé est estimé au point O de la zone piégée, c'est-à-dire que pour le potentiel gelé donné par l'équation (2.13), on choisit  $\varphi_0 = 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . On a donc, en quelque sorte,

un jeu d'actions par zone de piégeage. De plus, dans le cadre de l'approximation adiabatique,

$$d_t I^{(\gamma)} \approx 0. \quad (2.19)$$

A partir des équations (2.14), (2.16) et (2.18), on remarque que si une orbite traverse la séparatrice et passe d'une région à une autre, son action subit un saut géométrique, qui est un multiple de  $v_\phi^*/k^*$ , où  $v_\phi^*$  et  $k^*$  sont, respectivement, les valeurs de  $v_\phi$  et de  $k$  au moment où la traversée de séparatrice a lieu. Par exemple, il est clair qu'une orbite passant de la région ( $\alpha$ ) à la région ( $\gamma$ ) voit son action varier de  $-v_\phi^*/k^*$ , alors qu'une orbite passant de la région ( $\beta$ ) à une région ( $\gamma$ ) voit son action varier de  $+v_\phi^*/k^*$ .

### 2.2.3 La fonction de distribution électronique

Dans le cadre de la théorie adiabatique, il est naturel d'exprimer la fonction de distribution électronique en fonction de  $I$  et de sa variable canoniquement conjuguée  $\theta$ , dont la définition est rappelée dans l'annexe A.1. Soit  $F(\theta, I, t)$  cette fonction de distribution. En utilisant les formules de cette annexe, on peut exprimer  $\theta$  en fonction de  $x$ ,  $I$  et  $t$ , ce qui nous permet de normaliser  $F$  de la manière suivante,

$$\int F[\theta(x, I, t), x, I, t] d(kI) = n_0(x, t), \quad (2.20)$$

où  $n_0(x, t)$  est la densité électronique locale. Notons qu'il y a deux sources d'inhomogénéité dans la fonction de distribution,  $F$ . La première est due à l'inhomogénéité du plasma, qui entraîne une dépendance explicite de  $F$  en fonction de  $x$ . La deuxième est due à l'inhomogénéité de l'onde, qui entraîne une lente variation temporelle de l'action, et donc une faible dépendance en  $\theta$ . Or, comme indiqué dans l'annexe A.1, on peut exprimer  $\theta$  en fonction de  $x$  et de  $I$  au travers du changement de variables  $(\varphi[x, t], v) \rightarrow (\theta, I)$ .

Etant donné que la dépendance de  $F$  en  $\theta$  est faible, on peut négliger cette dépendance explicite dans le cadre de l'approximation adiabatique pour calculer la relation de dispersion non linéaire de l'EPW. Comme expliqué dans le sous-paragraphe 2.3.2, cette approximation est cohérente avec celle consistant à supposer  $\delta\varphi_n = 0$  dans l'équation (2.11). On utilise alors l'expression approchée suivante pour la fonction de distribution électronique,

$$F[\theta(x, I, t), I, t] \approx n_0(x, t) f(I, x, t), \quad (2.21)$$

avec

$$f(I, x, t) = \frac{k}{2\pi n_0(x, t)} \int_{x-2\pi/k}^{x+2\pi/k} F[\theta(x', I, t), I, t] dx', \quad (2.22)$$

c'est-à-dire que l'on approche la fonction de distribution par sa moyenne sur une longueur d'onde gelée, ce qui revient à négliger sa variation spatiale sur une longueur d'onde. La fonction de distribution  $f(I, x, t)$  est donc telle que,

$$\int f(I, x, t) d(kI) = 1. \quad (2.23)$$

Pour être tout à fait précis, on remarque d'après les formules (2.14), (2.16) et (2.18), que, pour la même valeur de l'action, une orbite peut se trouver dans différentes régions de l'espace des phases. En conséquence, on décompose la fonction de distribution électronique  $f(I, x, t)$  en trois sous-fonctions,  $f_\alpha(I, x, t)$ ,  $f_\beta(I, x, t)$  et  $f_\gamma(I, x, t)$ , qui sont indexées par la sous-région de l'espace des phases auxquelles elles correspondent. En ce qui concerne la fonction de distribution des électrons piégés, il existe en fait une fonction  $f_\gamma$  par zone piégée, qui est indexée par la position de son point O.

Dans la suite, nous commençons par calculer ces fonctions de distribution dans le cas d'une onde homogène croissant dans un plasma homogène, puis nous expliquons comment les résultats obtenus dans ce cas particulier peuvent se généraliser, d'abord à une onde homogène dont l'amplitude varie de manière non monotone, puis à une onde inhomogène se propageant dans un plasma inhomogène.

## 2.3 Onde homogène croissant dans un plasma homogène

Pour une onde homogène, les amplitudes  $\phi_n$  de l'équation (2.11) ne dépendent que du temps, si bien que l'expression (2.3) pour le champ électrique est exacte. Par ailleurs, la fréquence de l'onde ne dépend aussi que du temps ce qui implique, d'après la relation  $\partial_t k = -\partial_x \omega$ , que le nombre d'onde est constant. On en déduit que

$$\varphi(x, t) = kx - \int_0^t \omega(t') dt'. \quad (2.24)$$

Par ailleurs, d'après les équations (2.14) à (2.18), l'action reste constante dans chaque sous-domaine de l'espace des phases. Elle ne varie qu'au travers des sauts géométriques induits par les traversées de séparatrice. En conséquence, les fonctions de distribution  $f_\alpha$ ,  $f_\beta$  et  $f_\gamma$  ne sont que des fonctions de  $I$  et du temps.

### 2.3.1 Calcul de la fonction de distribution

Pour le calcul de la fonction de distribution, on suppose qu'à  $t = 0$  l'onde croît à partir d'une amplitude infinitésimale, dans un plasma dont la fonction de distribution en vitesse initiale, normalisée à l'unité, est  $f_0(v)$ . Sur une orbite non piégée, l'action vaut  $kI = (2\pi)^{-1} \oint v d\varphi$  avec  $d\varphi > 0$  dans la région ( $\alpha$ ) et  $d\varphi < 0$  dans la région ( $\beta$ ) or, dans la limite où  $\phi \rightarrow 0$ , la vitesse d'un électron reste constante le long d'une orbite,  $v = v_0$ . On en déduit que  $k_0 I^{(\alpha)} = v_0$  et  $k_0 I^{(\beta)} = -v_0$ , où  $k_0$  est la valeur initiale du nombre d'onde. Dans le cas homogène considéré,  $k$  reste constant. Néanmoins, nous préférons garder la formulation la plus générale possible, puisque nous y ferons référence dans les chapitres ultérieurs où l'on considère une situation inhomogène. Tant qu'il n'y a pas de traversée de séparatrice, les actions restent constantes, si bien qu'en tenant compte de la normalisation des fonctions de distribution en action donnée par l'équation (2.23), on trouve,

$$\begin{cases} f_\alpha(I) = f_0(k_0 I), \\ f_\beta(I) = f_0(-k_0 I), \end{cases} \quad (2.25)$$

pour les électrons dont l'orbite n'a jamais traversé la séparatrice. Le calcul exact de la fonction de distribution tenant compte des sauts induits par les traversées de séparatrice peut être trouvé dans [Bénisti (2017a,b)], pour un champ sinusoïdal. Les résultats correspondants sont rappelés dans la partie 2.4 et généralisés au cas d'un potentiel anharmonique. Ces résultats dépendent des probabilités de transition d'une région de l'espace des phases à une autre, qui sont elles-mêmes fonction du rapport entre la vitesse de variation de  $v_\phi$  et celle de  $kI_s$ , où  $I_s$  est la valeur maximale de l'action dans la zone piégée. Cette action est aussi celle de la séparatrice (d'où

la notation  $I_s$ ) et elle vaut l'aire de la séparatrice divisée par  $4\pi$ . Dans le cas d'un potentiel pair et ayant un seul minimum, ce qui sera supposé ici,  $I_s$  peut être calculée en prenant la limite  $\varphi_{\max} \rightarrow \pi$  dans l'équation (2.18). Dans ce cas l'Hamiltonien vaut  $H = -\phi(\pi)$ , et  $I_s$  vaut,

$$I_s = \frac{1}{k\pi} \int_0^\pi \sqrt{2[\phi(u) - \phi(\pi)]} du. \quad (2.26)$$

On voit d'après l'équation (2.26), que  $I_s$  est uniquement fonction des amplitudes du potentiel, et croît lorsque l'amplitude de l'onde croît. Cela provoque des traversées de séparatrice, depuis la région ( $\alpha$ ) lorsque  $I_s = I^{(\alpha)} - v_\phi/k$  et depuis la région ( $\beta$ ) lorsque  $I_s = I^{(\alpha)} + v_\phi/k$ . De plus, tant que  $|\sigma| < 1$ , où

$$\sigma = \frac{\dot{v}_\phi}{k\dot{I}_s} = \frac{dv_\phi}{d(kI_s)}, \quad (2.27)$$

la croissance de l'onde ne peut entraîner que des transitions ( $\alpha$ )  $\rightarrow$  ( $\gamma$ ) ou ( $\beta$ )  $\rightarrow$  ( $\gamma$ ). Ceci est illustré sur la figure 2.2, dans le cas où  $\phi$  vaut,  $\phi = a(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)]$ , avec,  $d\varphi_0/dt = v_\phi$  et,

$$a = a_0 [\exp(\gamma_1 t) - 1], \quad (2.28)$$

$$v_\phi = v_{\phi_1} - v_{\phi_0} [\exp(\gamma_2 t) - 1], \quad (2.29)$$

avec,

$$a_0 = 10^{-3}, \quad (2.30)$$

$$v_{\phi_0} = 10^{-3}, \quad (2.31)$$

$$v_{\phi_1} = 3.5, \quad (2.32)$$

$$\gamma_1 = 2 \times 10^{-3}, \quad (2.33)$$

$$\gamma_2 = 10^{-3}. \quad (2.34)$$

On peut voir sur la figure 2.2 qu'une orbite initialement dans la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases finit dans la région ( $\gamma$ ) sous l'effet de la croissance de l'onde et donc de l'augmentation de l'aire de la séparatrice. On peut remarquer sur cette figure qu'il n'y a pas d'accumulation de particules près du point X, comme par exemple discuté dans [Bulanov & Shasharina (1992)]. C'est dû au fait qu'il n'y a pas de véritable point X puisque la vitesse de phase de l'onde varie au cours du temps. La même remarque est valable pour la figure 2.4.

Dans le cas où  $|\sigma| < 1$ , on trouve alors,

$$f_\gamma^>(I^{(\gamma)}) dI^{(\gamma)} = f_\alpha^<(I^{(\alpha)}) dI^{(\alpha)} + f_\beta^<(I^{(\beta)}) dI^{(\beta)}, \quad (2.35)$$

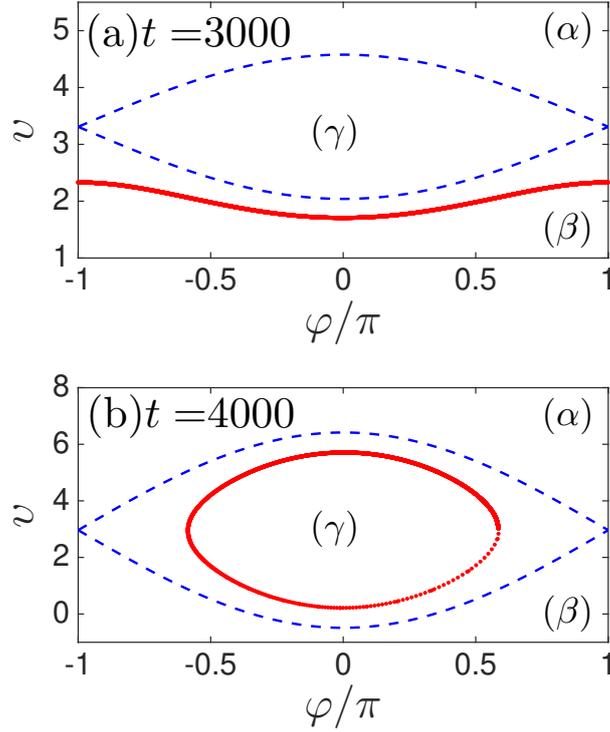


FIGURE 2.2 – Positions dans l'espace des phases (modulo  $2\pi$  en  $\varphi$ ) de 8192 électrons soumis au potentiel,  $m\phi/e$ , où  $\phi = a(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)]$  avec  $d_t\varphi_0 = v_\phi$  et où les variations temporelles de  $a(t)$  et de  $v_\phi(t)$  sont données par les équations (2.28) à (2.34). À  $t = 0$ , les particules sont uniformément réparties en  $\varphi$  et ont toutes la même vitesse initiale,  $v(0) = 2$ . **(a)** À  $t = 3000$ , tous les électrons sont dans la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases. **(b)** À  $t = 4000$ , tous les électrons ont transité dans la région ( $\gamma$ ) sous l'effet de l'augmentation de l'amplitude de l'onde et donc de l'aire de la séparatrice.

où le symbole  $>$  signifie “juste après la traversée de séparatrice” et le symbole  $<$  “juste avant la traversée de séparatrice”. Dans le cas d'une onde qui ne fait que croître,  $f_\alpha^<$  et  $f_\beta^<$  sont connues et données par les relations (2.25), ce qui simplifie considérablement le problème. Par ailleurs,  $I^{(\alpha)} = I^{(\gamma)} + v_\phi^*/k^*$  et  $I^{(\beta)} = I^{(\gamma)} - v_\phi^*/k^*$ , où  $v_\phi^*$  et  $k^*$  sont les valeurs atteintes par ces variables au moment de la traversée de séparatrice. On obtient donc,

$$f_\gamma(I) = \left[ 1 + \frac{d(v_\phi^*/k^*)}{dI} \right] f_0(k_0 I + v_\phi^*) + \left[ 1 - \frac{d(v_\phi^*/k^*)}{dI} \right] f_0(-k_0 I + v_\phi^*). \quad (2.36)$$

L'équation (2.36) montre clairement que la fonction de distribution électronique garde en mémoire toutes les valeurs prises par  $v_\phi$ . Cependant, dans le cas où l'onde ne fait que croître,  $v_\phi$  ne dépend que de l'amplitude de l'onde ce qui, là encore, simplifie considérablement le problème. Dans ce cas  $v_\phi^*$  est alors la valeur de  $v_\phi$  correspondant à l'amplitude de l'onde au moment où la traversée de séparatrice a

lieu. Quant à  $k$ , il reste constant dans le cas homogène, ce qui permet de simplifier l'équation (2.36) en,

$$f_\gamma(I) = \left[1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right] f_0(kI + v_\phi^*) + \left[1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right] f_0(-kI + v_\phi^*). \quad (2.37)$$

La fonction  $f_\gamma(I)$  définie par l'équation (2.37) donne la fraction d'électrons piégés dont l'action est comprise entre  $I$  et  $I + dI$ . Cependant, ce n'est pas la fonction de distribution des électrons piégés qui, en toute rigueur, dépend fortement de l'angle  $\theta$ , ce qui semble invalider l'équation (2.21). En effet, avec la convention que nous avons prise pour  $I^{(\gamma)}$  (qui est deux fois plus petite que dans la définition générale de l'action),  $\theta$  doit varier sur un intervalle d'amplitude  $4\pi$  pour totalement décrire une orbite piégée. À l'inverse, il suffit à  $\theta$  de varier sur un intervalle d'amplitude  $2\pi$  pour qu'une orbite non piégée soit totalement décrite. En conséquence, la fonction de distribution des électrons piégés vaut,

$$\begin{aligned} F(I, \theta, t) = & \chi[\theta - \theta_\alpha(I, t)] \left(1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right) f_0(kI + v_\phi^*) \\ & + \chi[\theta - \theta_\beta(I, t)] \left(1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right) f_0(kI - v_\phi^*), \end{aligned} \quad (2.38)$$

où  $\chi(x) = 1$  pour  $0 < x < 2\pi$ ,  $x$  étant calculé modulo  $4\pi$ , et où  $\chi(x) = 0$  pour  $2\pi < x < 4\pi$ . Quant à  $\theta_\alpha$  et  $\theta_\beta$ , ils vérifient  $\theta_{\alpha,\beta}(t) = \theta_{\alpha,\beta}(0) + (d_I H)t$ . Néanmoins, les valeurs de  $\theta_{\alpha,\beta}(0)$  varient assez vite avec  $I$ , tout comme la valeur de  $d_I H$  près de la séparatrice. En conséquence, si on moyenne  $F(I, \theta, t)$  sur un intervalle en  $I$  assez grand, on obtient,

$$\langle F(I, \theta, t) \rangle \approx f_\gamma/2. \quad (2.39)$$

Dans la limite adiabatique, la largeur en  $I$  sur laquelle on doit moyenner pour obtenir l'équation (2.39) tend vers 0, de sorte qu'on obtient, pour les électrons piégés,

$$F(I, \theta, t) \approx f_\gamma/2. \quad (2.40)$$

En définitive, la fonction de distribution  $f(I)$  donnée par l'équation (2.21) vaut, dans le cas croissant homogène,

$$f(I) = \begin{cases} f_0(kI + v_\phi) & \text{dans la région } (\alpha) \\ f_0(kI - v_\phi) & \text{dans la région } (\beta) \\ \left(1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right) \frac{f_0(kI + v_\phi^*)}{2} + \left(1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right) \frac{f_0(kI - v_\phi^*)}{2} & \text{dans la région } (\gamma) \end{cases} \quad (2.41)$$

On peut en déduire la fonction de distribution en coordonnées  $(\varphi, v, t)$ , que l'on note  $\mathcal{F}(\varphi, v, t)$ , en remarquant que, dans la région  $(\alpha)$  la valeur de  $H$  résolvant

l'équation (2.14) est telle que  $H > -\phi(\pi)$ , alors que  $kv > v_\phi$ . De même, dans la région ( $\beta$ ),  $H > -\phi(\pi)$  et  $kv < v_\phi$ , alors que dans la région ( $\gamma$ )  $H \leq -\phi(\pi)$ . Cela permet d'obtenir, lorsque  $|\sigma| < 1$ ,

$$\mathcal{F}(\varphi, v, t) = \begin{cases} f_0(kI) & \text{si } H > -\phi(\pi) \text{ et } kv > v_\phi \\ f_0(-kI) & \text{si } H > -\phi(\pi) \text{ et } kv < v_\phi \\ \left[1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right] \frac{f_0(kI+v_\phi^*)}{2} + \left[1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)}\right] \frac{f_0(kI-v_\phi^*)}{2} & \text{si } H \leq -\phi(\pi), \end{cases} \quad (2.42)$$

où  $H(\varphi, v, t)$  est donné par l'équation (2.10), et où  $I \equiv I[H(\varphi, v, t)]$ , la fonction  $I(H)$  étant donnée par les équations (2.14) (2.16) et (2.18).

La figure 2.3 représente la fonction de distribution adiabatique calculée de manière auto-cohérente pour une onde croissant dans un plasma initialement Maxwellien,  $f_0(v) = e^{-v^2/2v_{th}^2}/\sqrt{2\pi}v_{th}$ , et dont le nombre d'onde est tel que  $k\lambda_D = 0.333$  (où  $\lambda_D$  est la longueur de Debye,  $\lambda_D = v_{th}/\omega_{pe}$ ). Le potentiel  $\phi$  vaut  $\phi \approx (mT/e^2) \cos(\varphi)$ , où  $T = mv_{th}^2$  est la température électronique. Pour cette valeur du potentiel,  $v_\phi \approx 3.5v_{th}$ , et la figure 2.3 représente  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  en fonction de  $(v - v_\phi)/v_{th}$ . Par ailleurs, pendant toute la croissance de l'onde  $|\sigma| < 1$ .

Plusieurs points peuvent être remarqués en ce qui concerne  $\mathcal{F}(\varphi, v)$ . Tout d'abord, elle ne diffère notablement d'une Maxwellienne que dans la zone de piégeage, autour de  $v = v_\phi$ . Par ailleurs, sa valeur est beaucoup plus petite au centre de la zone de piégeage qu'au bord de cette zone, ce qui la fait ressembler à un "electron hole", notamment étudié en physique spatiale [Hutchinson (2017)]. Enfin, on peut remarquer que  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  est discontinue au niveau de la séparatrice, un point sur lequel nous reviendrons en détail dans les chapitres 4 et 5.

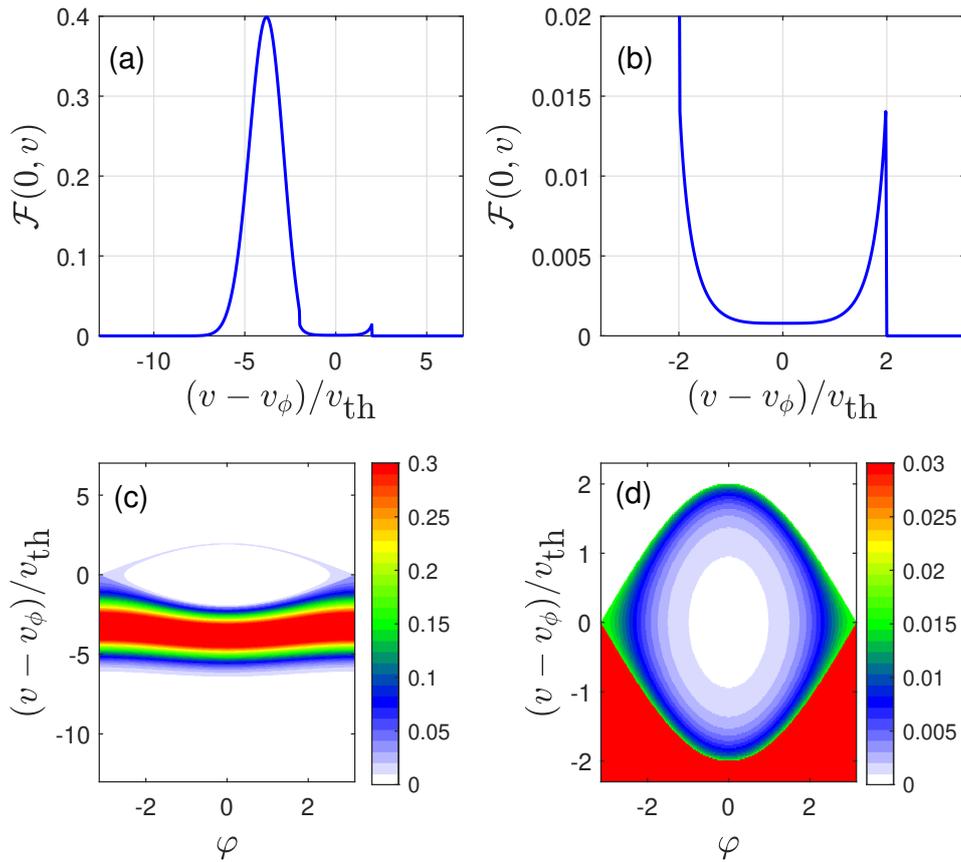


FIGURE 2.3 – Exemple de fonction de distribution adiabatique,  $\mathcal{F}(\varphi, v)$ , calculée de manière auto-cohérente pour une onde croissant dans un plasma initialement Maxwellien, dans le cas où  $|\sigma|$  reste toujours inférieur à l'unité. **(a)** Coupe de  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  en  $\varphi = 0$ . **(b)** Agrandissement de la coupe en  $\varphi = 0$  autour de  $v = v_\phi$ . **(c)** et **(d)** Courbes de niveau de  $\mathcal{F}(\varphi, v)$  dans l'espace des phases.

Dans le cas où  $\sigma < -1$ , des électrons dont l'orbite est initialement dans la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases se répartissent sur deux sous-orbités, dans les régions ( $\alpha$ ) et ( $\gamma$ ) de l'espace des phases, après traversée de séparatrice, comme illustré sur la figure 2.4 [et le phénomène équivalent se produit lorsque  $\sigma > 1$  pour des électrons dont l'orbite est initialement dans la région ( $\alpha$ )]. La répartition se fait selon des probabilités de transition, dont la formule générale est donnée par l'équation (A.30) de l'annexe A.4. Dans le cas où  $\sigma < -1$ , la transition ( $\beta$ )  $\rightarrow$  ( $\alpha$ ) se fait avec probabilité  $p^{(\beta \rightarrow \alpha)} = (\sigma + 1)/(\sigma - 1)$ , alors que la transition ( $\beta$ )  $\rightarrow$  ( $\gamma$ ) se fait avec la probabilité  $p^{(\beta \rightarrow \gamma)} = 2/(1 - \sigma)$ . On en déduit que, lorsque  $\sigma < -1$ ,

$$f_{\alpha}^{>}(I) = f_{\beta}^{<}(I - 2v_{\phi}^*/k^*) \quad (2.43)$$

$$f_{\gamma}^{>}(I) = 2f_{\beta}^{<}(I - v_{\phi}^*/k^*), \quad (2.44)$$

ce qui, dans le cas d'une onde homogène croissante donne, en utilisant les équations (2.25) et la constance de  $k$ ,

$$f_{\alpha}^{>}(I) = f_0(-kI + 2v_{\phi}^*) \quad (2.45)$$

$$f_{\gamma}^{>}(I) = 2f_0(-kI + v_{\phi}^*). \quad (2.46)$$

De nouveau, la fonction  $f_{\gamma}$  donnée par l'équation (2.46) n'est pas la fonction de distribution correspondant à l'équation (2.21) qui, elle, vaut  $f(I) = f_{\gamma}(I)/2$ . Ainsi, dans la zone piégée, lorsque  $\sigma < -1$ ,

$$f(I) = f_0(-kI + v_{\phi}^*). \quad (2.47)$$

On obtient alors, lorsque  $\sigma < -1$ ,

$$\mathcal{F}(\varphi, v, t) = \begin{cases} f_0(-kI + 2v_{\phi}^*) & \text{si } H > -\phi(\pi) \text{ et } kv > v_{\phi} \\ f_0(-kI) & \text{si } H > -\phi(\pi) \text{ et } kv < v_{\phi} \\ f_0(-kI + v_{\phi}^*) & \text{si } H \leq -\phi(\pi). \end{cases} \quad (2.48)$$

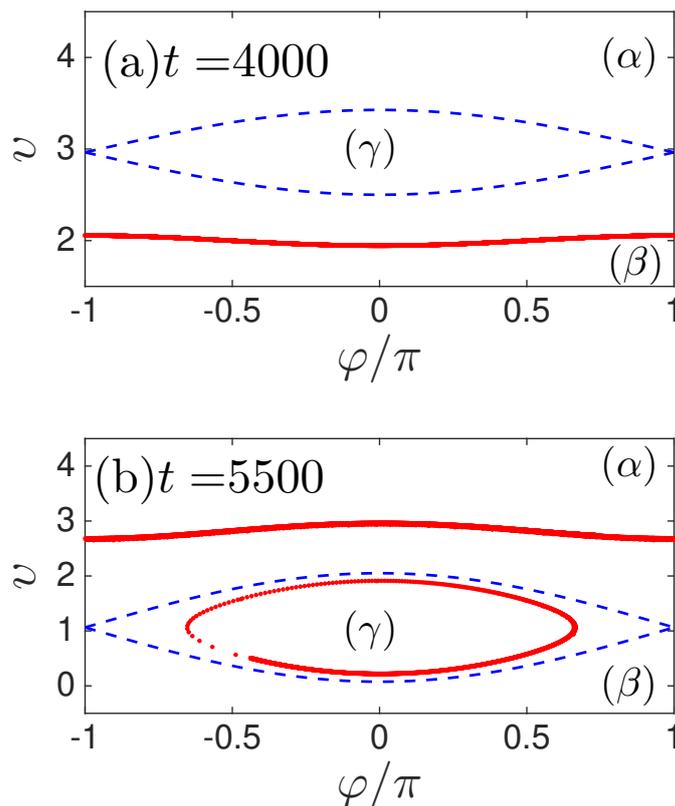


FIGURE 2.4 – Positions dans l'espace des phases (modulo  $2\pi$  en  $\varphi$ ) de 8192 électrons soumis au potentiel,  $m\phi/e$ , où  $\phi = a(t) \cos[\varphi - \varphi_0(t)]$  avec  $d_t\varphi_0 = v_\phi$  et où les variations temporelles de  $a(t)$  et de  $v_\phi(t)$  sont données par les équations (2.28) à (2.34), sauf en ce qui concerne  $\gamma_1$  qui vaut maintenant  $\gamma_1 = 10^{-3}$ . À  $t = 0$ , les particules sont uniformément réparties en  $\varphi$  et ont toutes la même vitesse initiale,  $v(0) = 2$ . **(a)** À  $t = 4000$ , tous les électrons sont dans la région  $(\beta)$  de l'espace des phases. **(b)** À  $t = 5500$ , les électrons se sont répartis sur deux sous-orbites, l'une dans la région  $(\alpha)$  de l'espace des phases, l'autre dans la région  $(\gamma)$ .

### 2.3.2 Résolution numérique de la relation de dispersion

Dans la partie précédente, on avait calculé la fonction de distribution sans se soucier de la rétro-action des particules sur l'onde. Elle dépend donc de quelques paramètres libres comme les harmoniques du potentiel  $\{\phi_n\}_{n \geq 1}$  et  $v_\phi^*(I)$ . Il s'agit ici de calculer ces paramètres en utilisant l'équation de Poisson. En considérant les ions comme un fond neutralisant, l'équation de Poisson s'écrit,

$$\frac{k^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi, v, t) d(kv) - 1. \quad (2.49)$$

En notant,

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{k^2}{\omega_{pe}^2} \phi \\ &\equiv \sum_{n \geq 1} \Phi_n \cos(n\varphi), \end{aligned} \quad (2.50)$$

on trouve, en tenant compte du fait que les  $\Phi_n$  ne dépendent que du temps, en multipliant l'équation (2.49) par  $\cos(n\varphi)$  et en l'intégrant sur  $\varphi$  entre  $-\pi$  et  $\pi$ ,

$$n^2 \Phi_n = -2 \langle \cos(n\varphi) \rangle, \quad (2.51)$$

où

$$\langle \cos(n\varphi) \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\mathbb{R}} dv \mathcal{F}(\varphi, v, t) \cos(n\varphi). \quad (2.52)$$

Remarquons qu'en multipliant l'équation (2.49) par  $\sin(n\varphi)$  et en l'intégrant sur  $\varphi$  entre  $-\pi$  et  $\pi$ , on trouve  $\langle \sin(n\varphi) \rangle = 0$ . Ce résultat est cohérent avec l'approximation Eq. (2.21) consistant à négliger la dépendance explicite de la fonction de distribution en fonction de  $\theta$ . En effet, négliger cette dépendance en  $\theta$  revient à supposer que les orbites sont symétriques par rapport à l'axe  $\varphi = 0$ , comme illustré sur la figure 2.1. Si l'on tient compte de la lente dépendance en  $\theta$ , on obtient généralement  $\langle \sin(n\varphi) \rangle \neq 0$ . Ainsi l'approximation Eq. (2.21) est cohérente avec la forme Eq. (2.50) choisie pour le potentiel scalaire.

Le calcul général de  $\langle \cos(n\varphi) \rangle$  en coordonnées action-angle est détaillé dans l'Annexe A.1. Ici, nous n'en donnons que l'expression pour une onde croissante se propageant dans un plasma homogène et telle que  $|\sigma| < 1$  lors de sa croissance. Dans

ce cas, l'équation (2.51) devient le système infini suivant,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^2 \Phi_n}{2} - \int_{kI_s}^{+\infty} \left( \frac{\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) [\mathfrak{f}_0(kI + v_\phi) + \mathfrak{f}_0(-kI + v_\phi)] d(kI) \\ - \int_0^{kI_s} \left( \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \left[ \mathfrak{f}_0(kI + v_\phi^*) \left( 1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)} \right) + \mathfrak{f}_0(-kI + v_\phi^*) \left( 1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)} \right) \right] d(kI) = 0, \quad (2.53)$$

où nous rappelons que, dans la troisième intégrale du membre de gauche de (2.53),  $\varphi_{\max}$  est telle que  $H + \phi(\varphi_{\max}) = 0$ .

En pratique, nous devons résoudre le système (2.53) de manière auto-cohérente pour les  $\Phi_n$  et pour  $v_\phi$ . Le principe de la méthode utilisée est illustré sur la figure 2.5 ci-dessous.

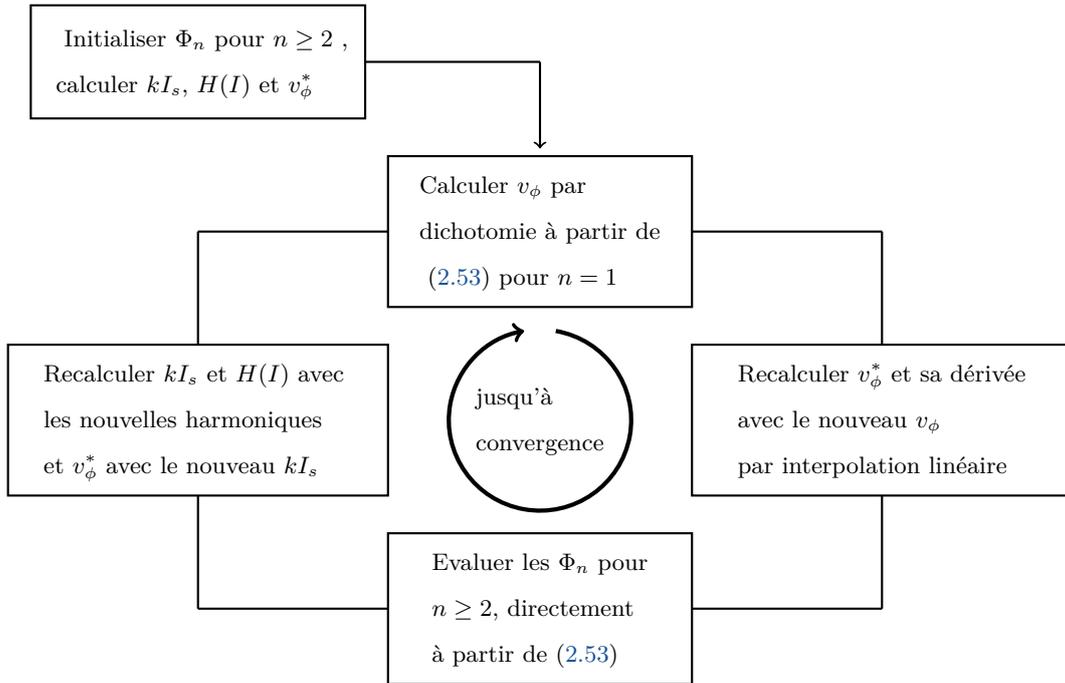


FIGURE 2.5 – Le schéma numérique de la méthode du calcul auto-cohérent de la vitesse de phase et des harmoniques. Ce schéma numérique est un mélange entre une dichotomie pour le calcul de  $v_\phi$  et un point fixe pour le calcul des harmoniques.

Tout d'abord, nous sommes obligés de tronquer le système infini à un nombre fini,  $n_{\max}$ , d'harmoniques. Ensuite, nous supposons que, dans la limite  $\Phi_1 \rightarrow 0$ ,  $\Phi_n = 0$  pour  $n \geq 2$ , et que  $v_\phi$  est égale à la vitesse de phase linéaire de l'onde.

Numériquement, nous voulons estimer l'amplitude des  $\Phi_n$  ainsi que la valeur de  $v_\phi$  en fonction de  $\Phi_1$ , que l'on fait croître par incréments  $\Delta\Phi_1$ . Ainsi, supposons que l'on connaisse les  $\Phi_n$  ainsi que  $v_\phi$  pour toutes les valeurs  $\Phi_1 = i\Delta\Phi_1$  avec  $0 \leq i \leq N$ .

Pour calculer ces quantités lorsque  $\Phi_1 = (N + 1)\Delta\Phi_1$ , nous commençons par estimer  $v_\phi$  en résolvant (2.53) pour  $n = 1$  par dichotomie. Pour effectuer cette résolution, nous devons connaître le potentiel  $\phi$ , et donc la valeur de toutes les amplitudes  $\Phi_n$ ,  $n \geq 2$ . Comme elles ne sont pas connues, nous faisons une première estimation de  $v_\phi$  en choisissant  $\Phi_n[(N + 1)\Delta\Phi_1] = \Phi_1(N\Delta\Phi_1)$ .

Une fois qu'une première estimation de  $v_\phi[(N + 1)\Delta\Phi_1]$  est ainsi obtenue, nous l'utilisons dans (2.53) avec  $n \geq 2$ , pour trouver la valeur correspondante de  $\Phi_n[(N + 1)\Delta\Phi_1]$ .

Une fois les valeurs de  $\Phi_n$  actualisées, nous les utilisons dans (2.53) avec  $n = 1$  pour actualiser la valeur de  $v_\phi[(N + 1)\Delta\Phi_1]$ , et nous réitérons le processus jusqu'à ce que l'erreur relative maximum sur un des  $\Phi_n$  ou sur  $v_\phi$  soit inférieure à une valeur  $\varepsilon$  donnée que l'on prend, en pratique, égale à  $10^{-5}$ .

Notons néanmoins une difficulté dans le calcul des intégrales qui réside dans l'évaluation de  $v_\phi^*(I)$ . Jusqu'à présent, nous avons considéré  $v_\phi$  comme une valeur de  $\Phi_1$  mais, pour calculer  $v_\phi^*(I)$ , il faut tout d'abord savoir à quelle action correspond la valeur de  $v_\phi$  calculée pour  $\Phi_1 = i\Delta\Phi_1$ . C'est en fait la valeur de l'action à laquelle il y a traversée de séparatrice vers la région ( $\gamma$ ) de l'espace des phases, lorsque  $\Phi_1 = i\Delta\Phi_1$ . C'est donc  $I_s(i\Delta\Phi_1)$ , c'est-à-dire la plus grande action de la zone piégée lorsque  $\Phi_1 = i\Delta\Phi_1$ . Notons simplement  $I_s^i$  cette valeur de l'action et  $v_\phi^i$  la valeur de  $v_\phi$  correspondante. Pour calculer  $v_\phi^*$  pour  $I_s^i \leq I \leq I_s^{i+1}$  nous utilisons simplement une interpolation linéaire,

$$v_\phi^*(I) = \frac{v_\phi^{i+1} - v_\phi^i}{I_s^{i+1} - I_s^i}(I - I_s^i) + v_\phi^i, \quad (2.54)$$

illustrée sur la figure 2.6 ci-dessous

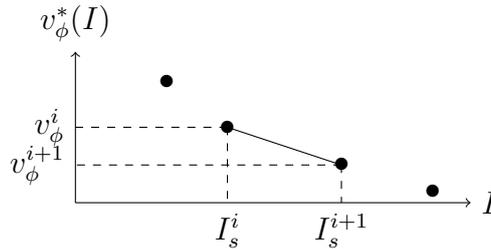


FIGURE 2.6 – Interpolation linéaire utilisée pour le calcul de  $v_\phi^*(I)$ .

Notons enfin qu'une fois connue la forme spatiale de  $\phi$  ainsi que les valeurs de  $v_\phi^*(I)$ , le calcul numérique des intégrales du membre de gauche (2.53) comporte certaines difficultés techniques, qui sont discutées dans l'annexe A.2.

Concrètement, nous n'avons discuté que le cas  $|\sigma| < 1$ . La situation où  $|\sigma| > 1$  se traite exactement de la même façon, à condition d'utiliser la bonne fonction de

distribution. On va, en particulier, traiter le cas  $\sigma < -1$  à l'aide des équations (2.48). Supposons que  $|\sigma| < 1$  tant que l'action des piégés est inférieure une certaine valeur,  $I_\sigma$ , alors que  $\sigma < -1$  lorsque  $I^{(\gamma)} \geq I_\sigma$ . On doit donc utiliser les équations (2.42) pour calculer la fonction de distribution des piégés tant que  $I < I_\sigma$  et les équations (2.48) lorsque  $I \geq I_\sigma$ . En ce qui concerne la fonction de distribution dans la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases, nous devons utiliser les équations (2.42) pour calculer la fonction de distribution tant que  $kI > kI_\sigma + v_\phi(I_\sigma)$  et (2.48) lorsque  $kI_s + v_\phi(I_s) \leq kI \leq kI_\sigma + v_\phi(I_\sigma)$ . Le système (2.53) est alors remplacé par,

$$\begin{aligned}
& \int_{kI_s - v_\phi}^{+\infty} \left( \frac{\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \mathbf{f}_0(-kI) d(kI) + \int_{kI_\sigma - v_\phi(I_\sigma)}^{+\infty} \left( \frac{\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \mathbf{f}_0(kI) d(kI) \\
& + \int_{kI_s + v_\phi}^{kI_\sigma + v_\phi(I_\sigma)} \left( \frac{\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \mathbf{f}_0(-kI + 2v_\phi^*) d(kI) \\
& + \int_0^{kI_\sigma} \left( \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \left[ \mathbf{f}_0(kI + v_\phi^*) \left( 1 + \frac{dv_\phi^*}{d(kI)} \right) + \mathbf{f}_0(-kI + v_\phi^*) \left( 1 - \frac{dv_\phi^*}{d(kI)} \right) \right] d(kI) \\
& + \int_{kI_\sigma}^{kI_s} \left( \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \mathbf{f}_0(-kI + v_\phi^*) d(kI) = n^2 \Phi_n / 2.
\end{aligned}
\tag{2.55}$$

Les figures 2.7 et 2.8 illustrent des exemples de résultats obtenus en résolvant de manière auto-cohérente la relation de dispersion non linéaire dans le cas où  $\mathbf{f}_0$  est une Maxwellienne. Notons que, dans ce cas, l'onde ne peut pas croître sans un forçage extérieur, dont on ne tient néanmoins pas compte dans la relation de dispersion. Dans le cas où le forçage résulte de la diffusion Raman stimulée, son influence sur la relation de dispersion a été discutée dans [Bénisti *et al.* (2008)] où il a été montré qu'elle n'était sensible que lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.35$ . Cependant, comme on le montrera au paragraphe 2.6, pour de telles valeurs du nombre d'onde, l'EPW est essentiellement sinusoïdale et électrostatique. La théorie complète développée dans cette thèse ne s'impose donc pas, et nous ne discuterons que très peu la situation correspondant à  $k\lambda_D \gtrsim 0.35$ . En particulier, on peut voir sur la figure 2.7 que l'amplitude des harmoniques  $\Phi_n$ ,  $n \geq 2$ , est petite devant l'amplitude de  $\Phi_1$ , et ce d'autant plus que  $k\lambda_D$  augmente. Dans le même ordre d'idée, on montre sur la figure 2.8 les valeurs trouvées pour  $v_\phi(\Phi_1)$  en fonction du nombre  $n_{\max}$  d'harmoniques retenues dans le développement du potentiel. On peut voir sur cette figure que, quelle que soit la valeur de  $k\lambda_D$  supérieure à 0.1, le calcul a convergé avec  $n_{\max} = 4$ . Par ailleurs, on peut aussi remarquer sur la figure 2.8 (d) que, lorsque  $k\lambda_D = 0.4$ , on

obtient une valeur très précise de  $v_\phi$  en supposant le potentiel sinusoidal, ce qui rejoint les résultats de la figure 2.7 (d) montrant que l'amplitude des  $\Phi_n$ ,  $n \geq 2$ , est négligeable devant celle de  $\Phi_1$  lorsque  $k\lambda_D = 0.4$ . Enfin, quelle que soit la valeur de  $k\lambda_D$  considérée, il existe une valeur de  $\Phi_1$  au-delà de laquelle on ne trouve plus de solution à la relation de dispersion non linéaire. Nous reviendrons en détail sur la raison d'une telle absence de solution au chapitre 3, ainsi que sur l'interprétation physique de ce résultat. On peut quand même noter que l'amplitude maximale pour laquelle nous trouvons une solution à la relation de dispersion décroît avec  $k\lambda_D$ , ce qui est la raison pour laquelle on a besoin de moins en moins d'harmoniques pour correctement décrire le potentiel de l'onde lorsque  $k\lambda_D$  augmente.

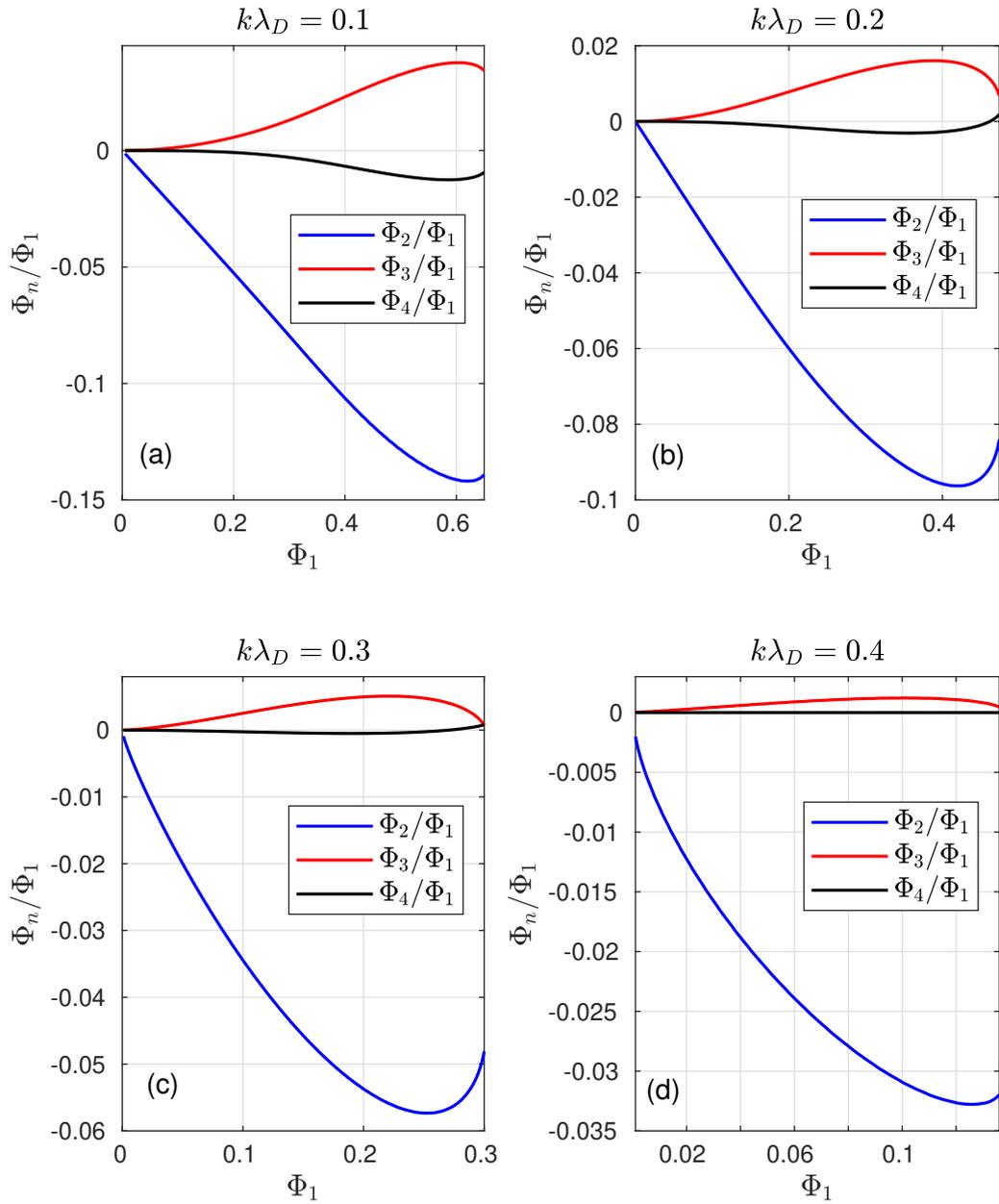


FIGURE 2.7 – Rapport entre l'amplitude des harmoniques  $\Phi_n/\Phi_1$ ,  $n \geq 2$ , pour (a)  $k\lambda_D = 0.1$ , (b)  $k\lambda_D = 0.2$ , (c)  $k\lambda_D = 0.3$  et (d)  $k\lambda_D = 0.4$ . On peut clairement voir que le contenu en harmoniques décroît avec  $k\lambda_D$ .

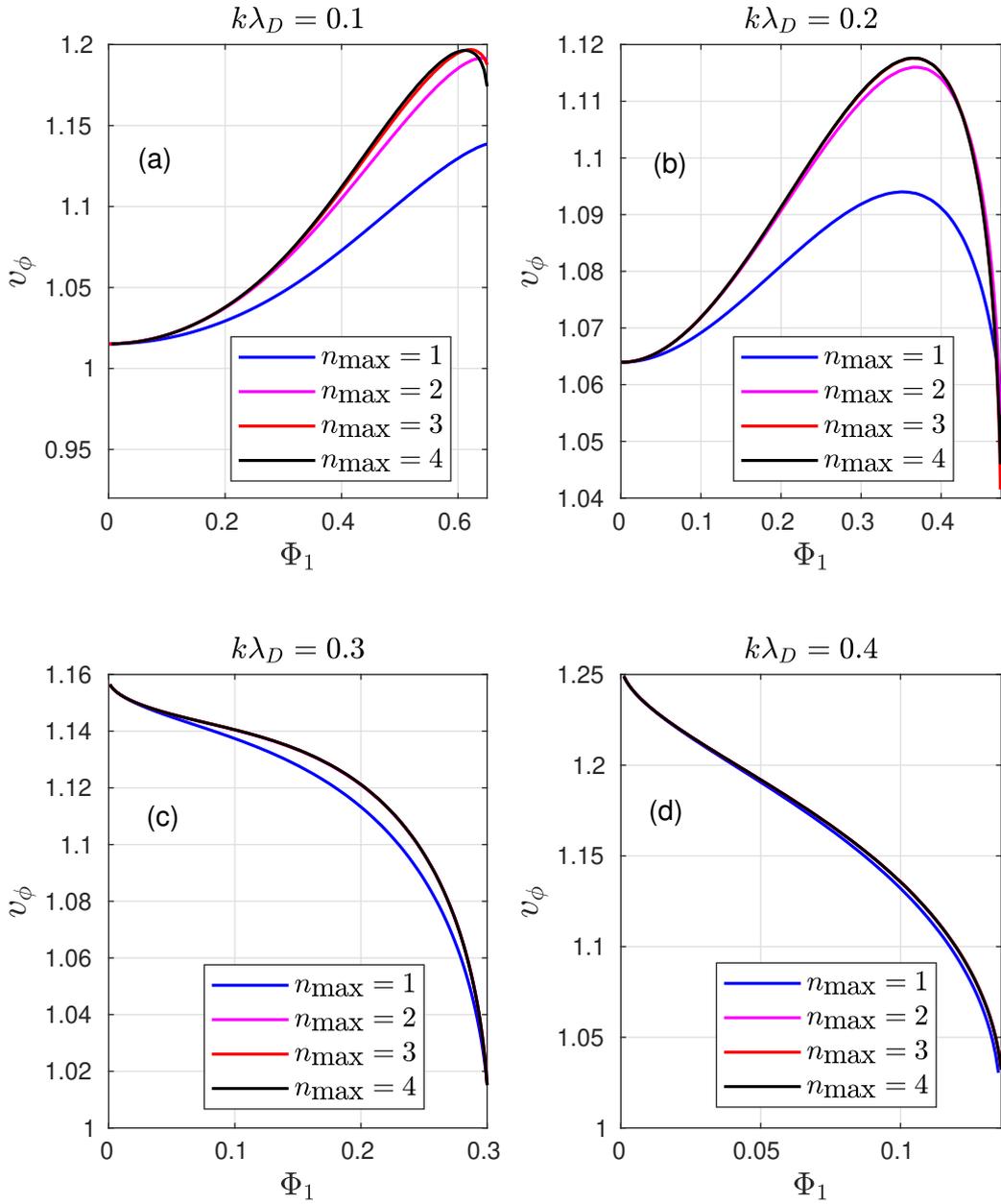


FIGURE 2.8 – Variation de  $v_\phi$  en fonction de  $\Phi_1$  pour différentes valeurs de  $k\lambda_D$  et pour différentes valeurs de  $n_{\max}$ . **(a)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ , on voit qu'il suffit de 4 harmoniques pour atteindre la convergence de la résolution. **(b)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ , on remarque que la convergence est atteinte avec la 3ème harmonique. **(c)** Pour  $k\lambda_D = 0.3$ , on ne voit plus de variation dans  $v_\phi$  à partir de la deuxième harmonique. **(d)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.4$  on voit qu'il ne suffit quasiment que d'une seule harmonique pour correctement calculer  $v_\phi$ .

### 2.3.3 Validation avec un code particules test

De manière à vérifier numériquement la pertinence et la validité des nos résultats théoriques, nous résolvons numériquement, pour un ensemble d'électrons, les équations de la dynamique déduites de l'Hamiltonien  $H$ , où la forme spatiale du potentiel ainsi que les variations de  $v_\phi$  découlent du calcul présenté au sous-paragraphe 2.3.2. Plus précisément,  $k^2\phi/\omega_{pe}^2$  est donné par l'équation (2.50) en imposant, pour  $n \geq 2$ , la relation  $\Phi_n(\Phi_1)$  déduite de notre théorie et, de même, nous imposons la relation  $v_\phi(\Phi_1)$  résultant de notre calcul adiabatique. Nous vérifions ensuite l'auto-cohérence de la résolution du couple d'équations Vlasov-Poisson en vérifiant que  $-2\langle \cos(n\varphi) \rangle / n^2 \Phi_n$  est effectivement proche de l'unité.

En pratique, nous faisons croître  $\Phi_1$  de la manière suivante,

$$\Phi_1(t) = \Phi_1(0)e^{\Gamma t}, \quad (2.56)$$

et les résultats présentés sur la figure 2.10 correspondent à  $\Phi_1(0) = 10^{-5}$  et  $\Gamma = 10^{-4}$  ( $\Gamma$  étant implicitement normalisé à la fréquence plasma électronique). Par ailleurs, sur cette figure, les relations  $\Phi_n(\Phi_1)$  et  $v_\phi(\Phi_1)$  sont celles obtenues lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ ,  $k\lambda_D = 0.2$  et  $k\lambda_D = 0.3$ . Le rapport  $\Gamma/k\lambda_D$  est donc toujours inférieur à  $10^{-3}$ , ce qui indique que l'approximation adiabatique devrait être très précise [Tacu & Bénisti (2022)].

D'un point de vue numérique, les équations du mouvement sont résolues à l'aide d'un schéma de type saute-mouton [Hairer *et al.* (2010)], pour  $N_{el} = n_\varphi \times n_v$  électrons équidistribués sur une grille fixe, comme illustré sur la figure 2.9.

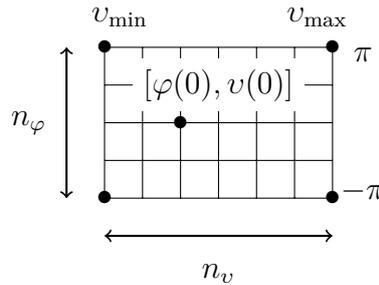


FIGURE 2.9 – Répartition initiale des particules test

En pratique, nous avons choisi  $n_\varphi = 16$ ,  $n_v = 10^5$ ,  $kv_{\min}/v_{th} = -3/k\lambda_D$  et  $kv_{\max}/v_{th} = 3/k\lambda_D$ . Par ailleurs, nous avons utilisé le pas de temps  $\Delta t = 10^{-2}$  pour l'intégration numérique du mouvement. Quant à  $\langle \cos(n\varphi) \rangle$ , numériquement, nous l'estimons de la manière suivante,

$$\langle \cos(n\varphi(t)) \rangle_{\text{numérique}} = \sum_{i=1}^{N_{el}} f_0(kv_i) \cos(n\varphi_i) \delta v \delta \varphi, \quad (2.57)$$

où  $f_0$  est une Maxwellienne et où  $\delta v = (v_{\max} - v_{\min})/(n_v - 1)$  et  $\delta \varphi = 2\pi/n_\varphi$ .

La figure 2.10 illustre les valeurs trouvées numériquement pour  $-2\langle\cos(\varphi)\rangle/\Phi_1$  lorsque  $k\lambda_D$  vaut 0.1, 0.2 et 0.3. On peut voir que cette valeur est toujours très proche de l'unité, ce qui valide notre calcul théorique. On illustre aussi sur cette figure l'importance de tenir compte de la variation de  $v_\phi^*$  avec  $I$  dans le calcul de  $\langle\cos(n\varphi)\rangle$ , ainsi que l'importance de tenir compte du fait que, lorsque l'onde croît, les traversées de séparatrice n'impliquent pas uniquement du piégeage dès que  $|dv_\phi/d(kI_s)| > 1$ . Ainsi, sur la figure 2.10, les courbes rouges ont été obtenues en utilisant les valeurs  $\Phi_n(\Phi_1)$  et  $v_\phi(\Phi_1)$  calculées en remplaçant  $v_\phi^*$  par  $v_\phi$  dans la troisième intégrale du membre de gauche de (2.53). On peut clairement voir un écart à l'unité lorsque  $\Phi_1$  augmente. Les courbes noires correspondent aux valeurs  $\Phi_n(\Phi_1)$  et  $v_\phi(\Phi_1)$  obtenues en résolvant toujours le système (2.53), même lorsque  $dv_\phi/d(kI_s) < -1$ , au lieu du système (2.55). On peut voir que cela a un impact sur la valeur de  $-2\langle\cos(\varphi)\rangle/\Phi_1$  pour les plus grandes valeurs de  $\Phi_1$ , pour lesquelles  $v_\phi$  décroît rapidement en fonction de  $\Phi_1$ , comme on le verra plus précisément au chapitre 3.

On ne représente que les valeurs numériques de  $-2\langle\cos(\varphi)\rangle/\Phi_1$  parce que, les amplitudes des  $\Phi_n$ ,  $n \geq 2$ , étant beaucoup plus petites que celle de  $\Phi_1$ , le rapport  $-2\langle\cos(n\varphi)\rangle/n^2\Phi_n$  est beaucoup plus bruité, ce qui ne permet pas de discuter en détail l'importance d'un calcul adiabatique exact, tenant compte de la variation de  $v_\phi^*$  ainsi que des probabilités de transition après traversée de séparatrice.

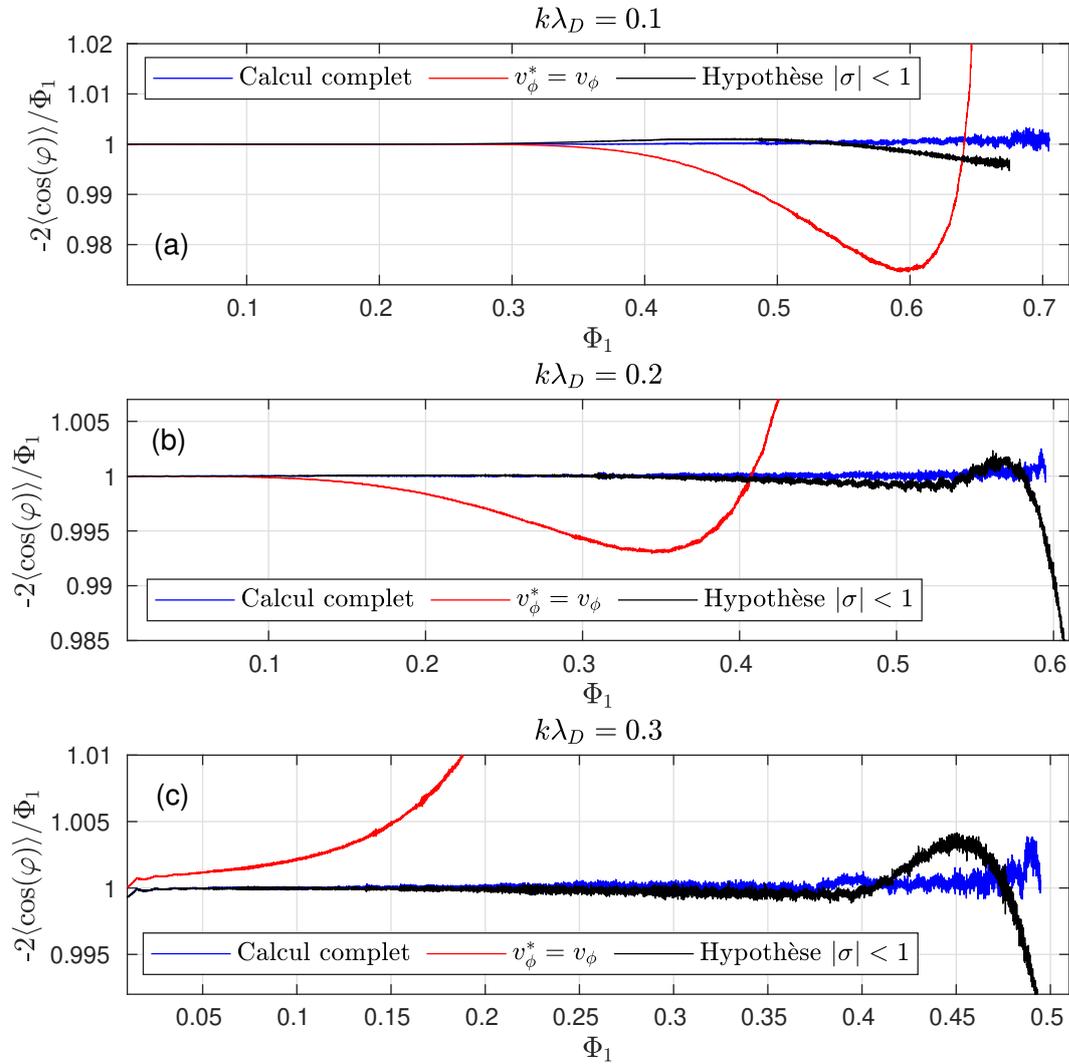


FIGURE 2.10 – Valeurs de  $-2\langle\cos(\varphi)\rangle/\Phi_1$  calculées numériquement. Les courbes bleues correspondent au calcul adiabatique exact. Les courbes noires correspondent au calcul où l'on résout toujours le système (2.53), même lorsque  $dv_\phi/d(kI_s) < -1$ . Les courbes rouges correspondent au calcul où l'on remplace  $v_\phi^*$  par  $v_\phi$  dans la troisième intégrale du membre de gauche de (2.53). Les calculs sont faits pour (a)  $k\lambda_D = 0.1$ , (b)  $k\lambda_D = 0.2$ , (c)  $k\lambda_D = 0.3$ .

### 2.3.4 Calcul du décalage en fréquence non linéaire

La théorie adiabatique, telle que résolue au sous-paragraphe 2.3.2, ne donne pas accès à une quantité importante concernant l'onde plasma qui est sa fréquence non linéaire. Pour la calculer, dans une géométrie unidimensionnelle, nous utilisons la conservation de la quantité de mouvement totale des électrons, puisque le champ magnétique,  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$ , est nul. En utilisant l'identité  $d_t \varphi = kd_t x - \omega$ , nous en déduisons immédiatement que,

$$\boxed{\omega = - \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle}, \quad (2.58)$$

où  $\langle . \rangle$  désigne la moyenne statistique, calculée en utilisant la fonction de distribution adiabatique. Dans l'annexe A.3, nous montrons que,

$$\boxed{\left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle = \int_{kI_s}^{+\infty} [f_\alpha(I + v_\phi/k) - f_\beta(I - v_\phi/k)] \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} d(kI)}. \quad (2.59)$$

Dans la suite, nous nous intéresserons plus particulièrement au décalage en fréquence non linéaire,

$$\delta\omega = \omega - \omega^{\text{lin}} = \omega - kv_\phi^{\text{lin}}, \quad (2.60)$$

où  $v_\phi^{\text{lin}}$  est la vitesse de phase calculée dans la limite linéaire adiabatique, et vérifiant l'équation suivante [Bénisti (2015)]

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2} P.P. \left( \int \frac{f'_0(v)}{v - v_\phi^{\text{lin}}} dv \right) = 0, \quad (2.61)$$

où  $P.P.$  désigne la partie principale de l'intégrale.

En utilisant  $\omega = -\langle d\varphi/dt \rangle$ , on trouve,

$$\boxed{\delta\omega = - \left\langle \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle - kv_\phi^{\text{lin}}}. \quad (2.62)$$

Puisque l'on calcule  $v_\phi$  par la méthode décrite au paragraphe 2.3.2 on peut en déduire le potentiel vecteur,

$$\boxed{A_0 = \frac{m}{e} [\omega/k - v_\phi]}. \quad (2.63)$$

## 2.4 Onde non monotone dans le cas homogène

Lorsque l'amplitude de l'onde n'est plus monotone, une orbite peut subir une suite de nombreux piégeages et dépiégeages, ce qui complique significativement le calcul de la fonction de distribution, comme illustré sur la figure 2.11. Cette figure a été obtenue en calculant le mouvement de 8192 électrons, tels que  $v(0) = 2.5$ , dont la valeur initiale de  $\varphi$  est uniformément répartie sur l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ , et soumis au potentiel  $\phi(\varphi, t) = a(t) \sin[\varphi - \varphi_0(t)]$ , avec  $d_t \varphi_0 = v_\phi$ , et

$$a(t) = a_0 \{ \exp[\gamma_0 |\sin(\gamma_1 t)|] - 1 \},$$

$$v_\phi = v_{\phi_1} - v_{\phi_0} t,$$

avec  $a_0 = 10^{-2}$ ,  $\gamma_0 = 10^{-2}$ ,  $\gamma_1 = 10^{-3}$ ,  $v_{\phi_0} = 10^{-4}$  et  $v_{\phi_1} = 3.5$ . Les figures 2.11 (a), (c) et (e), d'une part, et (b), (d) et (f), d'autre part, correspondent à la même valeur de l'amplitude,  $a(t)$ . Néanmoins, la distribution des électrons y est très différente. Ainsi, pour une onde dont l'amplitude ne varie pas de manière monotone, la fonction de distribution ne dépend pas que de l'amplitude. Cela rend la relation de dispersion non linéaire de l'onde non locale, ce qui peut mener à des effets de type hystérésis, mis en évidence dans [Bénisti (2017b)]. Par ailleurs, on peut clairement voir sur la figure 2.11 que la fonction de distribution se complexifie de manière significative après chaque série de piégeage-dépiégeage. Cela rend le calcul de la fréquence non linéaire de l'onde plus ardu, mais tout à fait faisable une fois la fonction de distribution électronique calculée. De manière plus quantitative,

- Il y a une traversée de séparatrice depuis la région ( $\alpha$ ) à chaque fois que  $kI^{(\alpha)} = kI_s + v_\phi$  à condition que  $k\dot{I}_s + \dot{v}_\phi > 0$ .
- Il y a une traversée de séparatrice depuis la région ( $\beta$ ) à chaque fois que  $kI^{(\beta)} = kI_s - v_\phi$ , avec  $k\dot{I}_s - \dot{v}_\phi > 0$ .
- Il y a une traversée de séparatrice depuis la région ( $\gamma$ ) à chaque fois que  $I^{(\gamma)} = I_s$  avec  $\dot{I}_s < 0$ .

Lorsque l'orbite quitte une région de l'espace des phases par traversée de séparatrice, elle a une certaine probabilité de transiter vers une des deux autres régions. Notons  $p^{(\xi \rightarrow \zeta)}$  la probabilité de transiter de la région ( $\xi$ ) à la région ( $\zeta$ ) [où ( $\xi$ ) et ( $\zeta$ ) sont soit ( $\alpha$ ), soit ( $\beta$ ) soit ( $\gamma$ )], probabilité dont le calcul est détaillé dans l'annexe A.4. On trouve alors que la variation de la fonction de distribution par traversée de séparatrice se calcule de la manière suivante,

$$f^>(I^{(\zeta)}) dI^{(\zeta)} = \sum_{\xi \neq \zeta} p^{(\xi \rightarrow \zeta)} f^<(I^{(\xi)}) dI^{(\xi)}. \quad (2.64)$$

Dans la Table 2.1, nous donnons des exemples explicites d'un tel calcul, qui généralise à un potentiel non sinusoïdal celui déjà publié dans [Bénisti (2017a)]

Les fonctions de distribution pour les différentes transitions		
$(\alpha) \rightarrow (\beta)$	$kI = kI_s - v_\phi$ et $k\dot{I}_s + \dot{v}_\phi > 0$ et $\dot{v}_\phi - k\dot{I}_s > 0$	$f_\beta^>(I) = f_\alpha^<\left(I + \frac{2v_\phi}{k}\right) \frac{\sigma+1}{\sigma-1} \min\left[\frac{\sigma-1}{\sigma+1}, 1\right]$
$(\alpha) \rightarrow (\gamma)$	$I = I_s$ et $k\dot{I}_s + \dot{v}_\phi > 0$ et $\dot{I}_s > 0$	$f_\gamma^>(I) = f_\alpha^<\left(I + \frac{v_\phi}{k}\right) (1 + \sigma) \min\left[\frac{2}{\sigma+1}, 1\right]$
$(\beta) \rightarrow (\alpha)$	$kI = kI_s + v_\phi$ et $k\dot{I}_s - \dot{v}_\phi > 0$ et $k\dot{I}_s + \dot{v}_\phi < 0$	$f_\alpha^>(I) = f_\beta^<\left(I - \frac{2v_\phi}{k}\right) \frac{\sigma-1}{\sigma+1} \min\left[\frac{\sigma+1}{\sigma-1}, 1\right]$
$(\beta) \rightarrow (\gamma)$	$I = I_s$ et $k\dot{I}_s - \dot{v}_\phi > 0$ et $\dot{I}_s > 0$	$f_\gamma^>(I) = f_\beta^<\left(I - \frac{v_\phi}{k}\right) (1 - \sigma) \min\left[\frac{2}{1-\sigma}, 1\right]$
$(\gamma) \rightarrow (\alpha)$	$kI = kI_s + v_\phi$ et $\dot{I}_s < 0$ et $\dot{v}_\phi + k\dot{I}_s < 0$	$f_\alpha^>(I) = f_\gamma^<\left(I - \frac{v_\phi}{k}\right) \frac{1}{1+\sigma} \min\left[\frac{1+\sigma}{2}, 1\right]$
$(\gamma) \rightarrow (\beta)$	$kI = kI_s - v_\phi$ et $\dot{I}_s < 0$ et $\dot{v}_\phi - k\dot{I}_s < 0$	$f_\beta^>(I) = f_\gamma^<\left(I + \frac{v_\phi}{k}\right) \frac{1}{1-\sigma} \min\left[\frac{1-\sigma}{2}, 1\right]$
$(\alpha) \rightarrow (\gamma)$ et $(\beta) \rightarrow (\gamma)$	$I = I_s$ et $\dot{I}_s > 0$ et $k\dot{I}_s + \dot{v}_\phi > 0$ et $k\dot{I}_s - \dot{v}_\phi > 0$	$f_\gamma^>(I) = f_\alpha^<\left(I + \frac{v_\phi}{k}\right) (1 + \sigma) \min\left[\frac{2}{1+\sigma}, 1\right] +$ $f_\beta^<\left(I + \frac{v_\phi}{k}\right) (1 - \sigma) \min\left[\frac{2}{1-\sigma}, 1\right]$

TABLE 2.1 – Calculs de la variation des fonctions de distribution par traversée de séparatrice. Ici  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$  dénotent les différentes régions de l'espace des phases, le symbole  $f^>$  désigne la fonction de distribution après la traversée,  $f^<$  désigne la fonction de distribution avant la traversée, et  $\sigma = dv_\phi/d(kI_s)$ .

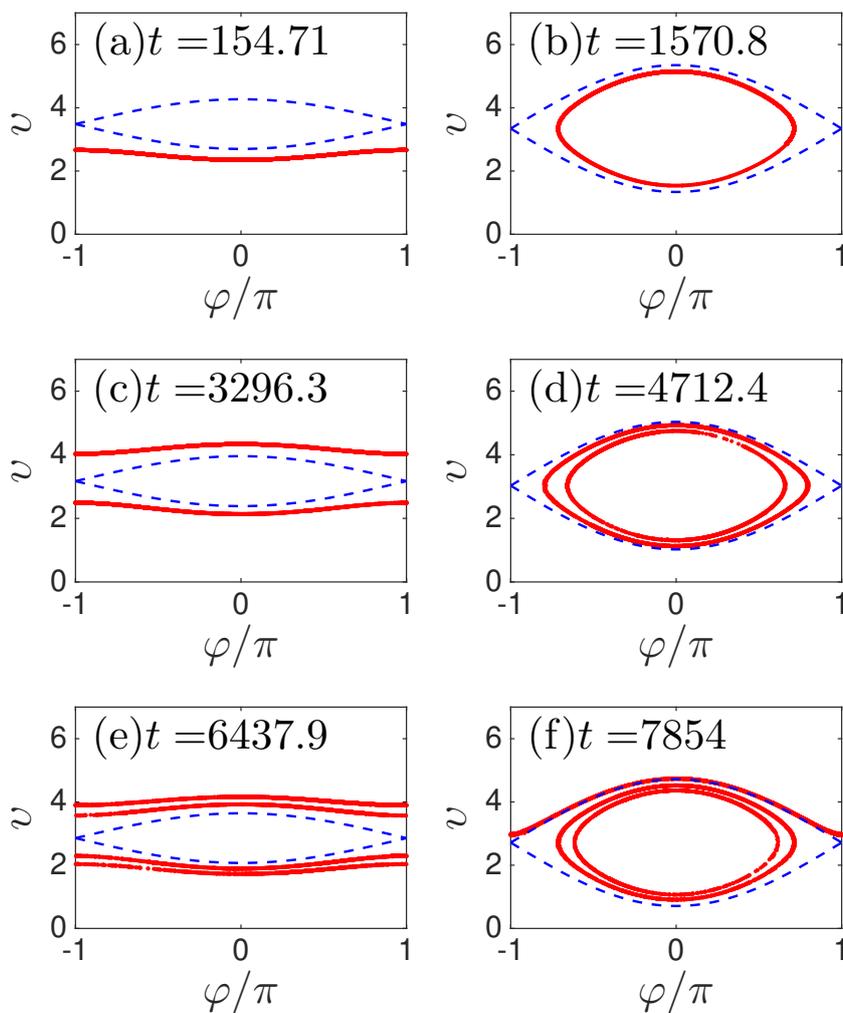


FIGURE 2.11 – Une série de piègeages et dépiégeages pour une onde d’amplitude variable. Dans les figures (a) à (f) on voit des électrons initialement sur une orbite de la région ( $\beta$ ) au temps  $t\omega_p = 154.71$  passer par une série de traversées de séparatrice et se répartir sur plusieurs sous-orbites qui, au temps  $t\omega_p = 7854$ , se partagent entre les régions ( $\alpha$ ) et ( $\gamma$ ) de l’espace des phases.

## 2.5 Cas général, multidimensionnel et inhomogène

L'un des premiers effets qui affecte une onde plasma non homogène est la variation spatiale de sa fréquence,  $\omega$ . Pour cela il n'est pas nécessaire que le plasma dans lequel se propage l'onde soit inhomogène, l'inhomogénéité pouvant par exemple résulter d'un décalage en fréquence non linéaire lorsque l'amplitude de l'onde est non uniforme. L'inhomogénéité de  $\omega$  induit, de par la relation de consistance  $\partial_t \vec{k} = -\vec{\nabla} \omega$  introduite au chapitre 1, une dépendance temporelle au nombre d'onde  $\vec{k}$ . En particulier sa direction peut changer, et l'impact que cela peut avoir sur la fonction de distribution sera étudié au paragraphe 2.5.1. Dans le cas multidimensionnel et inhomogène, il est plus adapté d'étudier l'EPW le long de ses rayons, comme cela sera par exemple fait au paragraphe 3.4.1. Soit  $\omega(\vec{x}, t) = \Omega_R[\vec{k}(\vec{x}, t), \vec{x}, t]$ , où  $\Omega_R$  est tel qu'il résout la relation de dispersion non linéaire de l'onde. L'équation des rayons  $\vec{x}_R(t)$  s'écrit :

$$\begin{cases} d_t \vec{x}_R = \vec{\nabla}_{\vec{k}} \Omega_R \\ d_t \vec{k}_R = -\vec{\nabla} \Omega_R|_{\vec{k}}, \end{cases} \quad (2.65)$$

où  $\vec{k}_R = \vec{k}[\vec{x}_R(t), t]$ . Ces équations seront résolues au chapitre 3 par un code de type Ray in Cell développé par [Bénisti *et al.* (2022)], pour décrire le changement en direction du nombre d'onde dû à la variation de la fréquence de l'onde avec l'amplitude.

Les variations de la fonction de distribution induites par les traversées de séparatrice doivent aussi se calculer le long de rayons. Elles s'obtiennent comme dans le cas homogène, à condition d'utiliser la définition suivante pour  $\sigma$ ,

$$\sigma = \frac{dv_\phi^*/dt}{d(k^* I_s)/dt}, \quad (2.66)$$

où  $v_\phi^* = v_\phi^*[\vec{x}_R(t), t]$  et  $I_s = I_s[\vec{x}_R(t), t]$  sont calculés le long des rayons. Ici  $k^*$  est le nombre d'onde pris au moment de la traversée de séparatrice. Dans le cas général,  $v_\phi$  et  $k$  varient de manière non linéaire mais aussi à cause de l'inhomogénéité du plasma, ce qui augmente la possibilité d'avoir  $|\sigma| > 1$ .

Comme on l'a mentionné au paragraphe 2.2, lorsque l'amplitude de l'onde n'est pas uniforme, l'action des électrons non piégés n'est pas conservée, ce qui fait varier leur fonction de distribution au cours du temps. Dans le cas unidimensionnel, la variation de  $f_{\alpha,\beta}(x, I, t)$  découlant de l'inhomogénéité de l'amplitude de l'onde a été obtenue dans [Bénisti (2016)], et nous nous contentons ici de reproduire ce résultat, dont la démonstration dépasse le cadre de la thèse,

$$\partial_t f_{\alpha,\beta} + k^{-1} \partial_I H_0 \partial_x f_{\alpha,\beta} - \eta k^{-1} \partial_x H_0 \partial_I f_{\alpha,\beta} = 0, \quad (2.67)$$

où  $\eta = 1$  pour  $f_\alpha$  et  $\eta = -1$  pour  $f_\beta$ . Cette variation lente de  $f_{\alpha,\beta}(x, I, t)$  s'ajoute à celle résultant des traversées de séparatrice. Quant à la variation de la fonction de distribution due à la rotation du nombre d'onde, elle est discutée au paragraphe 2.5.1

Enfin, dans le cas multidimensionnel, un champ magnétique dérive généralement du potentiel vecteur  $A_0$ , et nous discutons cet effet au paragraphe 2.5.2

### 2.5.1 Effet de la rotation du nombre d'onde sur la fonction de distribution

Pour comprendre en quoi la rotation du nombre d'onde modifie la fonction de distribution, commençons par considérer un problème beaucoup plus simple, où l'amplitude de l'onde ainsi que  $v_\phi$  ne dépendent que du temps. Supposons que  $I_s$  ne fait que croître à partir d'une valeur quasi nulle, alors que  $v_\phi$  varie de manière à ce que  $|\sigma| < 1$ . Sur un intervalle de temps donné, la croissance de l'onde aura entraîné le piégeage des électrons dont la vitesse initiale était comprise entre  $\max(v_\phi + kI_s)$  et  $\min(v_\phi - kI_s)$  (en supposant  $v_\phi > 0$ ). C'est une plage en  $v_0$  supérieure à  $2 \max(kI_s)$ , qui correspond au cas où  $v_\phi$  reste constant. Ainsi, la variation de  $v_\phi$  rend le piégeage plus efficace parce que la condition de piégeage varie en fonction de  $v_\phi$ , et parce qu'une fois piégé, un électron le reste tant que l'amplitude de l'onde augmente. Lorsque  $v_\phi$  ne reste pas constante, l'onde a en quelque sorte plus d'occasions de piéger un électron.

Dans le cas où le vecteur d'onde tourne, la condition de piégeage varie aussi avec la direction du nombre d'onde puisque cette condition porte sur la vitesse électronique le long de  $\vec{k}$ . En conséquence, lorsque  $\vec{k}$  tourne alors que l'amplitude de l'onde augmente, l'onde peut piéger plus d'électrons que lorsque la direction du nombre d'onde reste constante. Là encore, l'onde a en quelque sorte plus d'occasions de piéger un électron.

Nous reportons à l'annexe A.5 les détails les plus techniques concernant l'impact de la rotation du nombre d'onde sur la fonction de distribution électronique. Nous montrons explicitement que cela augmente le piégeage, même lorsque la variation de l'amplitude de l'onde n'est pas monotone. Nous montrons aussi dans cette annexe que l'effet n'est significatif que si l'angle de rotation est supérieur à environ  $30^\circ$ .

### 2.5.2 Champ magnétique créé par l'onde plasma

Un autre effet de l'inhomogénéité est la dépendance spatiale du vecteur d'onde. Cet effet se manifeste en 2-D et 3-D par l'apparition d'un champ magnétique via l'équation  $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ . Lorsque la rotation de  $\vec{k}$  est négligeable,  $\vec{A}$  vaut toujours,

$$\vec{A} = (m/e)(\omega/k - v_\phi)\vec{k}/k, \quad (2.68)$$

mais  $\omega$  ne peut plus être déduit de l'équation (2.58) puisque la quantité de mouvement électronique totale n'est en général pas préservée en présence d'un champ magnétique. Cependant  $\vec{A}$  varie lentement en fonction du temps et de l'espace, ce qui nous permet de calculer  $\vec{B}$  comme un développement en  $\varepsilon$ , qui est de l'ordre de la variation spatio-temporelle de  $\vec{A}$ . Concrètement, cela veut dire que  $\varepsilon \sim \|\vec{\nabla} \cdot \vec{A}\|/\|\vec{A}\|$  ou  $\varepsilon \sim \|\partial_t \vec{A}\|/\|\vec{A}\|$ , supposés du même ordre de grandeur par souci de simplicité. On développe alors  $\vec{A}$  de la manière suivante,

$$\vec{A} = \vec{A}_0 + \varepsilon \vec{A}_1 + \varepsilon^2 \vec{A}_2 + \dots, \quad (2.69)$$

où  $\vec{A}_0$  est déduit de l'équation (2.68) avec  $\omega$  donnée par l'équation (2.58). À l'ordre le plus bas, le champ magnétique vaut donc  $\vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}_0$ . Par ailleurs, d'après l'équation de Maxwell-Ampère,

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j}, \quad (2.70)$$

où  $\vec{j}$  est la densité de courant dans le plasma. Si on néglige les variations transverses de  $\vec{A}$ , le champ magnétique est nul, la quantité de mouvement totale se conserve, et le courant est nul (dans un plasma initialement Maxwellien sans dérive). On obtient alors,  $\partial_t \vec{E} = 0$ . L'équation (2.70) montre donc qu'à l'ordre le plus bas, la densité de courant vient uniquement des variations transverses de  $\vec{A}_0$ , et que la densité de courant est forcément d'ordre 2 en  $\varepsilon$ ,

$$\mu_0 \vec{j}_2 = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}_0). \quad (2.71)$$

Un champ magnétique créé par une onde plasma de grande amplitude, et associé à un courant d'électrons piégés a effectivement été observé, notamment numériquement dans des simulations d'interaction laser-plasma [Masson-Laborde *et al.* (2010)], avant la croissance d'une instabilité de type Weibel [Weibel (1959)].

Notons que la présence d'un champ magnétique peut très largement compliquer la dynamique de particules piégées [Bénisti *et al.* (1997, 1998a,b); Ram *et al.* (1998)], et qu'il est hors de question d'entrer, ici, dans le détail de tels phénomènes dont la description dépasse très largement le cadre de cette thèse. Ainsi, nos résultats ne

sont valables que sur des temps plus petits que la fréquence cyclotronique associée à  $\vec{B}_0$ .

## 2.6 Possibilités de simplification de la théorie

Maintenant que nous avons décrit la théorie adiabatique des ondes plasma non linéaires dans sa plus grande généralité, regardons dans quel cas la théorie générale peut être simplifiée. Nous basons essentiellement notre discussion sur le calcul de  $\delta\omega$  effectué en supposant une onde croissant dans un plasma homogène, valeurs représentées sur les figures 2.12 à 2.14. Puis nous discutons de quelle manière les conclusions tirées à partir de ces valeurs peuvent être affectées par l'inhomogénéité du plasma.

Commençons par discuter de la nécessité de prendre en compte, dans le champ électrique, le terme  $E_0 = -\partial_t A_0$  dérivant d'un potentiel vecteur pour calculer  $\delta\omega$ . Sur la figure 2.12, nous avons représenté en bleu le résultat du calcul du décalage en fréquence non linéaire,  $\delta\omega = \omega - kv_\phi^{\text{lin}}$ , alors que la courbe rouge correspond à  $kv_\phi - kv_\phi^{\text{lin}}$ . La différence entre ces deux quantités n'est rien d'autre que  $ekA_0/m$ . On voit que pour  $k\lambda_D \leq 0.2$ , il y a une différence significative entre les deux courbes surtout à grande amplitude. Si on ne tient pas compte de  $A_0$ , et qu'on assimile  $\delta\omega$  à  $kv_\phi - kv_\phi^{\text{lin}}$ , on peut même se tromper sur son signe lorsque  $k\lambda_D = 0.1$  et  $k\lambda_D = 0.2$ . Lorsque  $k\lambda_D = 0.3$ , il n'y a plus de changement de signe mais une différence subsiste à grande amplitude. Lorsque  $k\lambda_D = 0.4$ , les deux courbes se rapprochent, ce qui nous permet de conclure que lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.4$ , il est moins important de tenir compte du potentiel vecteur.

Le calcul de  $\delta\omega$  peut être aussi simplifié en limitant le nombre  $n_{\text{max}}$  d'harmoniques. La simplification est particulièrement importante dans le cas où  $n_{\text{max}} = 1$ , puisqu'on n'a plus à calculer la forme du potentiel de manière auto-cohérente. De plus, les orbites gelées des électrons sont connues, ce qui permet d'utiliser des expressions analytiques pour résoudre la relation de dispersion non linéaire, comme dans [Bénisti & Gremillet (2007)]. Sur la figure 2.13, on peut voir que, plus  $k\lambda_D$  augmente et moins on a besoin d'harmoniques pour calculer correctement  $\delta\omega$ . L'approximation sinusoïdale semble précise dès que  $k\lambda_D \gtrsim 0.4$ . Cela rejoint les conclusions que l'on avait déjà tirées à partir des figures 2.7 et 2.8.

Discutons maintenant l'importance de prendre en compte la variation de  $v_\phi^*$  en fonction de  $I$  pour résoudre le système (2.53) et de ne pas simplement remplacer  $v_\phi^*(I)$  par  $v_\phi$ , c'est-à-dire la valeur correspondant à  $I = I_s$ . Sur la figure 2.14, on représente en rouge le décalage en fréquence non linéaire calculé en utilisant l'approximation  $v_\phi^*(I) = v_\phi$ , qui a été très souvent utilisée auparavant [Dewar (1973); Krapchev & Ram (1980); Rose & Russell (2001); Lindberg (2007)]. On observe qu'avec cette approximation, les valeurs obtenues pour  $\delta\omega$  sont précises, quel que soit  $k\lambda_D$  et même à grande amplitude. Cependant, la relation de dispersion cesse d'avoir des solutions dès que  $\Phi_1 > \Phi_1^{\text{max}}$  et la valeur trouvée pour  $\Phi_1^{\text{max}}$  en supposant

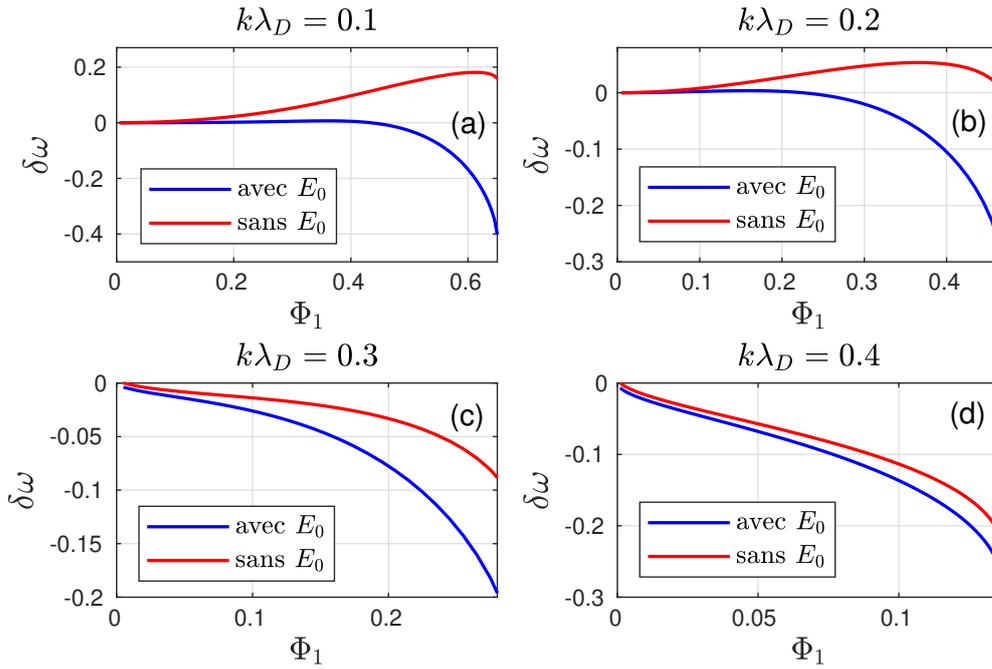


FIGURE 2.12 – La courbe bleue représente la valeur de  $\delta\omega$  alors que la courbe rouge représente  $kv_\phi - kv_\phi^{\text{lin}}$ , c'est-à-dire la valeur que l'on aurait trouvé pour le décalage non linéaire en fréquence si on avait négligé le terme  $E_0 = -\partial_t A_0$  dérivant d'un potentiel vecteur dans le calcul du champ électrique. **(a)** Pour  $k\lambda_D = 0.1$  on voit une différence importante entre le cas où on tient compte de  $E_0$  et celui où on le néglige. Un changement de signe intervient même à une amplitude relativement faible. **(b)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ , on remarque de même un changement de signe entre les deux quantités. **(c)** Pour  $k\lambda_D = 0.3$ , il n'y a pas de changement de signe mais une différence significative à grande amplitude. **(d)** Pour  $k\lambda_D = 0.4$  l'effet du potentiel vecteur sur  $\delta\omega$  est moins visible, on en conclut qu'il diminue lorsque le nombre d'onde augmente.

$v_\phi^*(I) = v_\phi$  sous-estime systématiquement celle obtenue à partir du calcul exact, et ce de manière d'autant plus significative que  $k\lambda_D$  est grand. Ainsi, l'approximation  $v_\phi^*(I) = v_\phi$  ne permet pas de déterminer la limite de wave breaking qui sera discutée dans le chapitre 3. De plus, dans le cas d'un plasma inhomogène,  $v_\phi^*(I)$  ne varie pas uniquement à cause de la non linéarité, comme dans le cas de la figure 2.14, mais aussi à cause de la variation spatiale du nombre d'onde. L'hypothèse  $v_\phi^* = v_\phi$  aboutirait alors à des résultats bien plus faux que ceux illustrés sur la figure 2.14, comme discuté dans [Bénisti (2017b)].

On observe numériquement que lorsqu'on dépasse une certaine amplitude variant en fonction du nombre d'onde, le rapport  $\sigma$  devient supérieur à 1. Cela survient généralement lorsque  $v_\phi(I)$  est décroissante, donc  $\sigma < -1$ . En conséquence, il est toujours nécessaire de prendre en compte les probabilités de transition pour calculer  $\delta\omega$  à grande amplitude et la valeur  $\Phi_1^{\text{max}}$  au-delà de laquelle on ne trouve plus de solution à la relation de dispersion non linéaire. De plus, comme déjà discuté dans

le paragraphe 2.5, dans le cas d'un plasma inhomogène,  $\sigma$  qui doit maintenant être calculé comme  $d_t v_\phi / d_t(kI_s)$  le long d'un rayon, a beaucoup plus de chance de voir sa valeur absolue dépasser l'unité que dans le cas d'un plasma homogène.

En conclusion, lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.4$ , l'EPW peut être supposée sinusoïdale et électrostatique (l'hypothèse sinusoïdale n'étant d'ailleurs pas si mauvaise dès que  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ ). La prise en compte de la dépendance en  $I$  de  $v_\phi^*$  ainsi que le calcul correct des probabilités de transition sont importants à grande amplitude dans un plasma homogène, et peuvent s'avérer importants quelle que soit l'amplitude de l'onde dans un plasma inhomogène.

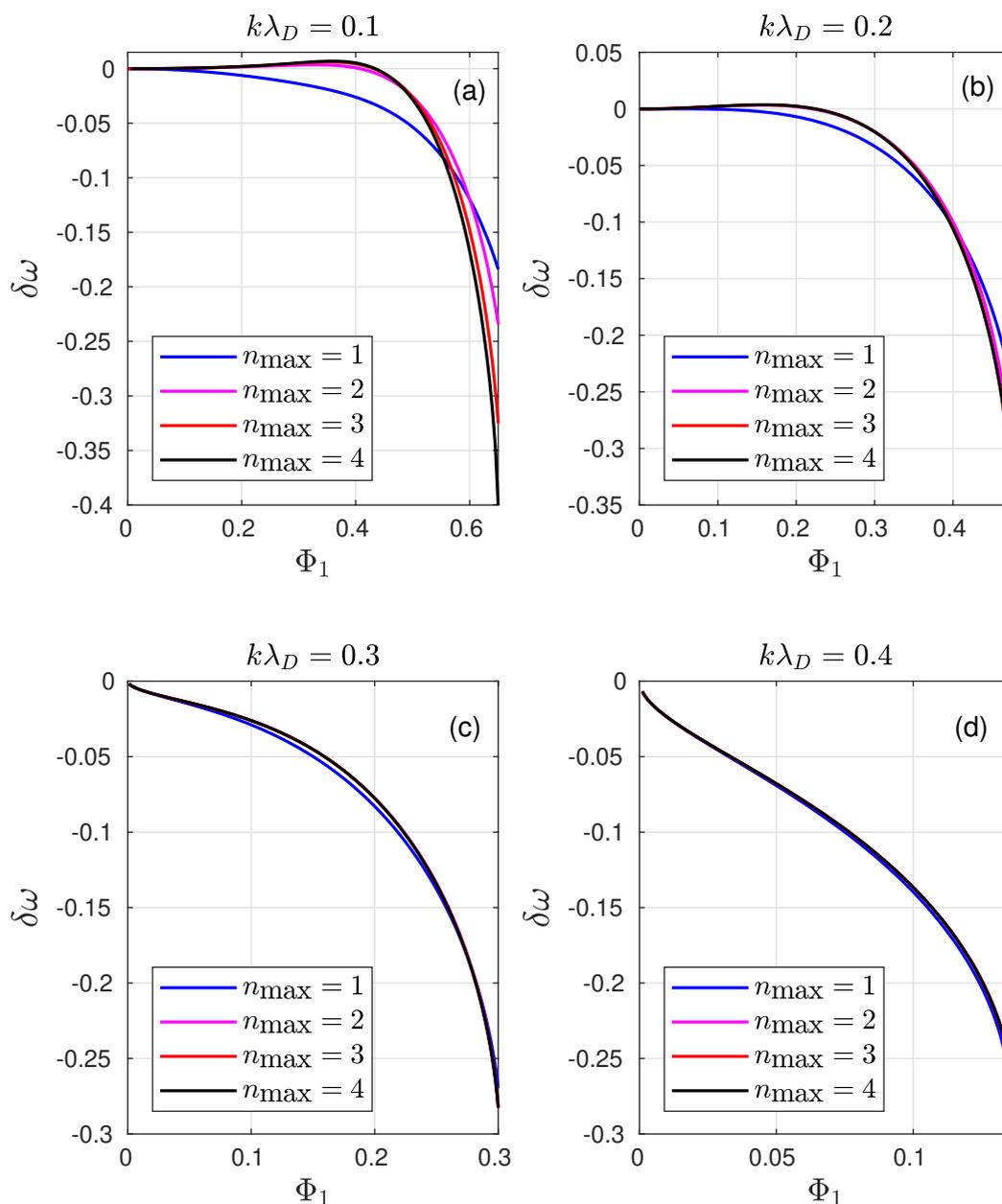


FIGURE 2.13 – Le décalage en fréquence  $\delta\omega$  en fonction de l’amplitude de la première harmonique  $\Phi_1$  pour différents  $k\lambda_D$  et différentes valeurs de  $n_{\max}$ . **(a)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ , on voit comme dans le cas de la vitesse de phase, que la convergence est atteinte dès qu’on inclut la quatrième harmonique. **(b)** Lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ , comme pour le calcul de  $v_\phi$  on a besoin de moins d’harmoniques pour converger. **(c)** Ici  $k\lambda_D = 0.3$  **(d)** Sur cette figure  $k\lambda_D = 0.4$ , on voit qu’on peut presque se limiter à une onde sinusoïdale pour le calcul du décalage en fréquence.

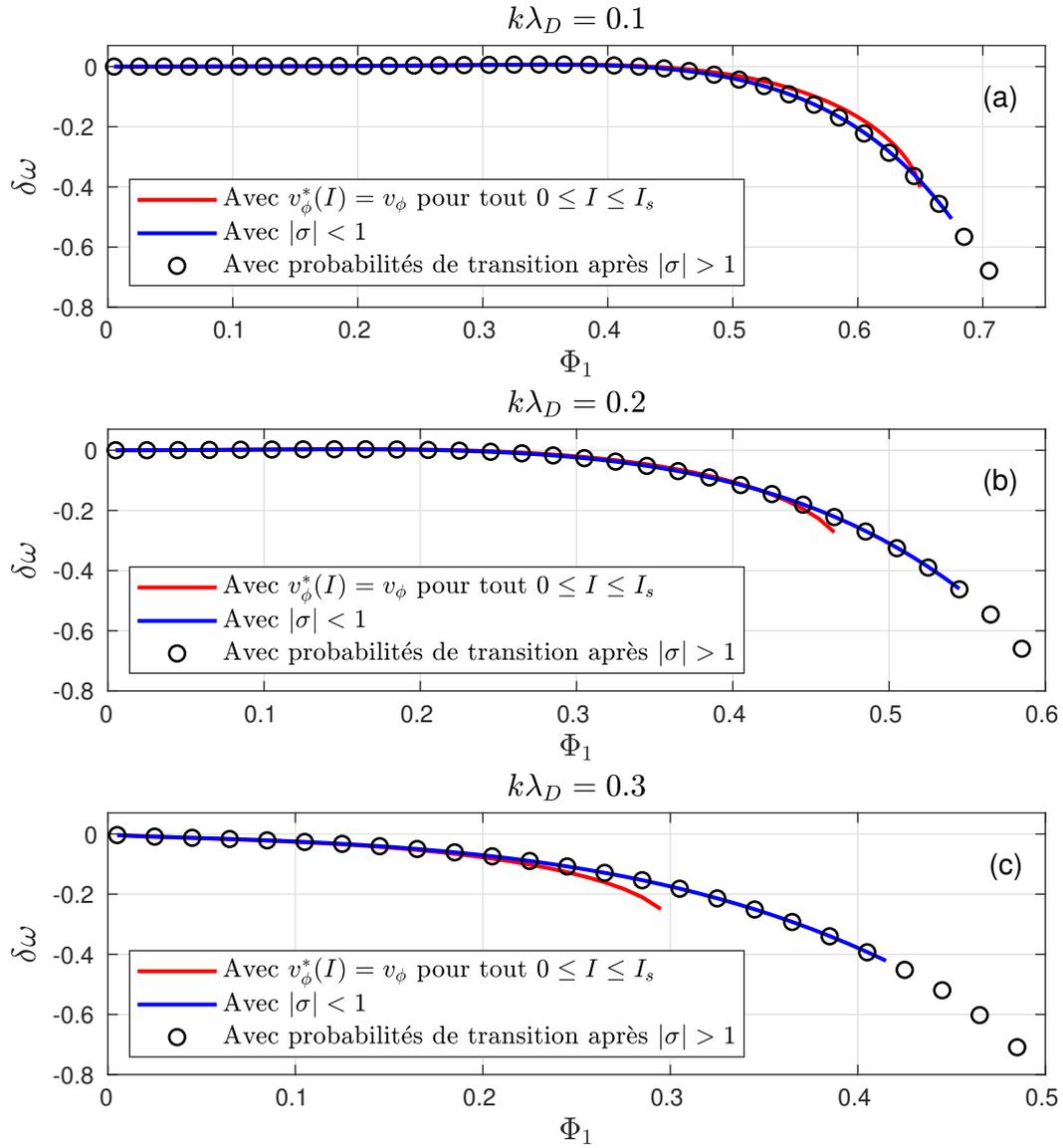


FIGURE 2.14 – Décalage en fréquence  $\delta\omega$  en fonction de  $\Phi_1$ , calculé de façon exacte avec les probabilités de transition (cercles), en prenant en compte l'effet de  $v_\phi^*$  mais en arrêtant le calcul lorsque  $|\sigma| = 1$  (courbe bleue), en utilisant l'approximation  $v_\phi^* = v_\phi$  (courbe rouge), lorsque, (a)  $k\lambda_D = 0.1$ , (b)  $k\lambda_D = 0.2$ , (c)  $k\lambda_D = 0.3$ .

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons résolu de manière auto-cohérente le système Vlasov-Poisson en utilisant l'approximation adiabatique. Pour cela nous avons d'abord calculé la fonction de distribution du plasma en prenant en compte les divers effets non linéaires qui affectent le mouvement des électrons comme le changement continu de la vitesse de phase de l'onde ou les traversées de séparatrice des orbites électroniques avec leur probabilités de transition respectives. Nous avons ensuite utilisé l'équation de Poisson pour calculer la forme du potentiel (ou plus précisément son contenu en harmoniques) ainsi que  $v_\phi = \omega/k - eA_0/m$  en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel.

La théorie générale a d'abord été appliquée au cas d'une onde homogène croissant dans un plasma homogène, ce qui nous a permis de faire un calcul explicite, dont nous avons vérifié numériquement l'exactitude. Cette vérification numérique a été une première occasion de tester l'importance d'utiliser une théorie adiabatique rigoureuse pour la résolution du système Vlasov-Poisson. Nous avons aussi calculé la fréquence non linéaire de l'onde en utilisant la conservation de la quantité de mouvement totale des électrons. Nous nous sommes ensuite attachés à décrire les effets attendus lorsque l'on considère un cas plus général.

Lorsque l'amplitude de l'onde varie de manière non monotone, nous avons montré le caractère non local de la fonction de distribution, ainsi que sa complexification croissante lorsque les séquences de piégeage-dépiégeage s'enchaînent. Nous avons néanmoins indiqué comment calculer cette fonction de distribution, en utilisant les probabilités de transition d'une région de l'espace des phases à une autre lors des traversées de séparatrice.

Nous avons ensuite traité le cas le plus général, en nous intéressant plus particulièrement à l'effet de la rotation du nombre d'onde, qui induisait un accroissement de la fraction d'électrons piégés qui était significatif dès que l'angle de rotation était supérieur à  $30^\circ$ . Nous avons aussi calculé le champ magnétique et le courant induit par les effets non linéaires, à l'ordre le plus bas dans les variations transverses de l'amplitude de l'onde.

Enfin, nous avons discuté les simplifications que l'on pouvait apporter à la théorie générale, nos résultats ayant montré que lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.4$ , l'EPW pouvait être considérée électrostatique et sinusoïdale. L'approximation sinusoïdale est d'ailleurs assez bonne dès que  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ , comme on le verra de manière plus approfondie dans le chapitre 3.



---

# 3

## Applications de la théorie générale des ondes adiabatiques

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons calculé de manière auto-cohérente le champ électrique et la fonction de distribution électronique d'une EPW adiabatique, croissant lentement dans un plasma. Or, dans la littérature scientifique, on trouve bien plus de résultats sur les solutions stationnaires du système Vlasov-Poisson, dont l'existence a été prouvée dans le célèbre article de Bernstein, Greene et Kruskal [[Bernstein et al. \(1957\)](#)] (BGK), que sur les ondes adiabatiques. Il serait donc intéressant de savoir s'il existe un lien entre ces deux types d'onde. La question se pose d'autant plus que, pour une onde BGK, la fonction de distribution électronique ne dépend que de l'action (puisque c'est une constante du mouvement), tout comme la solution que nous avons obtenue au chapitre 2 dans le cas homogène. Lorsque cette fonction de distribution possède une dépression au centre de la zone de piégeage (près de ce qu'on appelle en dynamique Hamiltonienne le point O, au voisinage duquel les orbites dans l'espace des phases sont des ellipses), on parle d'electron holes. C'est une classe d'ondes BGK qui a été particulièrement étudiée, notamment dans le cadre de la physique spatiale (voir [[Hutchinson \(2017\)](#)] et les références qui y sont citées). Or, comme on peut le voir sur la figure 2.3, la fonction de distribution adiabatique présente bien une dépression au centre de la région piégée. Si la stabilité des electron

holes a été discutée depuis assez longtemps (voir par exemple [Ghizzo *et al.* (1988)]), leur pertinence physique et surtout la façon dont ils pourraient être créés semble ne pas avoir été abordée. Or, c'est un point fondamental, bien plus important que la stabilité de l'onde. En effet, comme on le discutera dans le chapitre 5, les ondes adiabatiques sont instables, mais leurs propriétés influent néanmoins directement sur le développement de la SRS. Puisque ces ondes ressemblent fortement aux electron holes, il semble important de discuter en quoi elles se rapprochent, ou diffèrent, des ondes BGK. C'est ce que nous faisons dans le paragraphe 3.2.

Par ailleurs, lorsqu'on construit une onde BGK on obtient généralement une expression analytique de son champ électrique. Si nous étions capables d'obtenir une telle expression pour les ondes adiabatiques, cela nous permettrait d'éviter de passer par la procédure décrite au chapitre 2, qui est assez lourde. Nous sommes ainsi naturellement amenés à comparer le profil du champ électrique adiabatique à ceux d'ondes BGK déjà publiés et, en particulier, nous nous intéressons dans le paragraphe 3.3 au profil obtenu par Dawson [Dawson (1959)]. Nous déduisons de cette comparaison une expression analytique du champ électrique valable pour une très large gamme d'amplitudes et de nombres d'onde, ce qui nous permet de caractériser de manière plus directe qu'au chapitre 2 les ondes adiabatiques.

Dans le paragraphe 3.4, nous revenons de manière plus précise sur l'absence de solution à la relation de dispersion non linéaire des EPW, au-delà d'une amplitude qui dépend du nombre d'onde. Comme déjà discuté au chapitre 1, cela nous permet d'obtenir une borne supérieure pour la limite de wave breaking, que l'on exprimera en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel normalisé, défini par l'équation (2.50). La loi ainsi obtenue sera comparée au résultat déduit de la théorie de Dawson [Dawson (1959)] ainsi qu'au résultat de Coffey [Coffey (1971)], qui est sans doute le plus cité. Nous expliquons ensuite, tout au long du chapitre 3, en quoi la connaissance de la limite de wave breaking peut permettre d'obtenir un critère pour la saturation de la SRS.

Comme nous l'avons aussi vu au chapitre 1, dans une géométrie multidimensionnelle, le décalage en fréquence non linéaire,  $\delta\omega$ , d'une EPW entraînait la courbure de son front de phase, lorsque cette onde résultait de la SRS d'une onde laser focalisée dans le plasma. A l'aide des valeurs de  $\delta\omega$  obtenues au chapitre 2, d'une modélisation très simplifiée de la croissance d'une onde plasma électronique par diffusion Raman stimulée, et d'une méthode numérique originale que nous introduisons au paragraphe 3.4, nous calculons explicitement dans ce paragraphe la courbure du front de phase d'une EPW. De cette courbure résulte la croissance de nombres d'onde perpendiculaires à la direction moyenne de propagation de l'EPW, et donc l'extension

transverse de son spectre de Fourier, que nous quantifions. De plus, nous comparons nos résultats à ceux obtenus à partir de simulations de type Particle In Cell (PIC), et nous expliquons aussi en quoi ces résultats sont importants pour la SRS.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Le paragraphe 3.2 est dédié aux comparaisons entre les ondes adiabatiques et les ondes BGK. Le paragraphe 3.3 discute la limite de wave breaking obtenue à partir de la relation de dispersion non linéaire des ondes adiabatiques. Dans le paragraphe 3.4 nous calculons la courbure du front de phase et l'extension transverse du spectre de Fourier d'une EPW résultant de la SRS d'une onde laser focalisée dans un plasma, dans une géométrie bi-dimensionnelle (2-D).

## 3.2 Comparaison avec d'autres ondes non linéaires

### 3.2.1 Comparaison avec les modes BGK

Un mode BGK est une solution stationnaire du système d'équations Vlasov-Poisson, écrit en gardant les notations du chapitre 2,

$$\begin{aligned} v \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{k^2}{\omega_{pe}^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(\varphi, v) dv - 1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

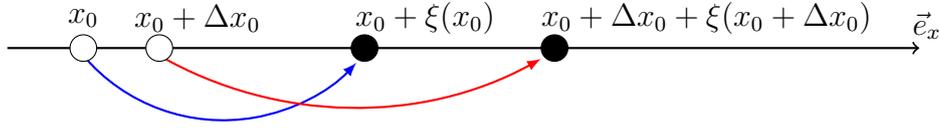
Par ailleurs, le potentiel  $\phi(\varphi)$  est souvent supposé strictement périodique [il ne s'écrit pas sous la forme  $\phi(x, t, \varphi)$ ], si bien que l'amplitude de l'onde BGK (au sens défini au chapitre 1) est indépendante du temps et de l'espace. Dans de telles conditions, l'action est une constante du mouvement, et la fonction électronique ne dépend que de l'action,  $\mathcal{F}(\varphi, v) \equiv f[I(\varphi, v)]$ , tout comme dans le cas d'une onde adiabatique homogène. Malgré cette similitude, il existe plusieurs différences entre les ondes adiabatiques et les ondes BGK.

- L'amplitude des ondes adiabatiques peut varier dans le temps, même si cette variation doit être lente. De plus, dans le chapitre 2, nous avons étendu la théorie au cas d'ondes dont l'amplitude pouvait varier lentement en espace.
- A la différence des ondes BGK, les ondes adiabatiques ne sont pas purement électrostatiques puisqu'une partie de leur champ électrique dérive d'un potentiel vecteur.
- La pertinence physique des ondes BGK et la façon dont on pourrait les créer n'est généralement pas discutée, alors que l'on construit littéralement une onde adiabatique à partir du moment où son amplitude est proche de zéro. En particulier, les propriétés de cette onde à un instant donné dépendent de la façon dont elle a évolué, ainsi que des variations de la densité et la température du plasma, à tous les instants antérieurs. Une onde adiabatique possède donc une histoire, dont est généralement dépourvue une onde BGK.

Cependant, lorsque le potentiel vecteur est négligeable, dans le cas d'une onde uniforme et à une valeur donnée de l'amplitude, une onde adiabatique est un mode BGK. Or, pour de tels modes, on obtient une expression explicite du champ électrique qui, s'il approchait correctement celui des ondes adiabatiques, permettrait d'éviter les calculs présentés au chapitre 2. Dans cette optique, nous comparons au paragraphe suivant le profil du champ adiabatique à celui calculé par Dawson [Dawson (1959)].

### 3.2.2 Comparaison entre le champ électrique des ondes adiabatiques et celui calculé par Dawson dans un plasma froid

En utilisant les résultats de Akhiezer et Lyubarskizs [Akhiezer & Lyubarskizs (1951)], Dawson a construit [Dawson (1959)] une solution non linéaire pour des ondes planes se propageant dans un plasma froid. Rappelons-en brièvement la construction. Considérons un plasma infini, unidimensionnel, dans lequel les ions sont remplacés par un fond continu de densité de charges  $n_0e$ , où  $n_0$  est la densité électronique. Il est facile de montrer que si les électrons sont équidistribués dans un tel plasma, alors ils sont à l'équilibre. Notons  $x_0$  les positions d'équilibre correspondantes. Si les électrons se déplacent d'une quantité  $\xi(x_0)$  sans que cela ne modifie l'ordre dans lequel ils étaient placés à l'équilibre, soit comme indiqué sur le schéma ci-dessous,



il est facile de montrer à partir de l'équation de Gauss que le champ électrique au niveau de chaque électron, soit en  $x = x_0 + \xi$ , vaut,

$$E = \frac{en_0\xi}{\epsilon_0}. \quad (3.2)$$

L'équation de Newton,  $m\ddot{\xi} = -eE$ , s'écrit alors  $\ddot{\xi} = -\omega_{pe}\xi$ , où  $\omega_{pe} = \sqrt{n_0e^2/m\epsilon_0}$  est la fréquence plasma. La solution générale de cette équation peut s'écrire sous la forme,

$$\xi(t) = A \sin(kx_0 - \omega_{pe}t), \quad (3.3)$$

où les constantes  $A$  et  $k$  sont obtenues à partir des conditions initiales, et dépendent donc de l'électron considéré. Si ces valeurs sont les mêmes pour tous les électrons, on obtient alors la solution suivante, que nous appellerons le champ de Dawson,  $E_D$ ,

$$E_D[x(t)] = \frac{en_0}{\epsilon_0} A \sin[kx_0 - \omega_{pe}t], \quad (3.4)$$

$$x(t) = x_0 + A \sin(kx_0 - \omega_{pe}t). \quad (3.5)$$

Par analogie avec les notations des chapitres 1 et 2, introduisons  $\varphi = kx - \omega_{pe}t$ ,  $\varphi_0 = kx_0 - \omega_{pe}t$  et  $\mathcal{E}_D = (ek/m\omega_{pe}^2)E_D$ . La solution de Dawson s'écrit alors,

$$\mathcal{E}_D(\varphi) = \mathfrak{E} \sin(\varphi_0), \quad (3.6)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \mathfrak{E} \sin(\varphi_0), \quad (3.7)$$

où  $\mathfrak{E} = kA$ . Notons qu'on obtient un champ périodique,  $\mathcal{E}_D(\varphi + 2\pi) = \mathcal{E}_D(\varphi)$  uniquement si les positions d'équilibre,  $x_0$ , sont distantes de  $2\pi/k$ , ce que l'on suppose vrai dans la suite.

On compare sur les figures 3.1 et 3.2 les profils du champ électrostatique des ondes adiabatiques, du champ de Dawson, ainsi qu'un profil purement sinusoïdal, respectivement pour  $k\lambda_D = 0.1$  et pour  $k\lambda_D = 0.2$ . Lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ , l'accord entre les profils adiabatique et de Dawson est très bon. En effet, si on note  $\delta\mathcal{E}_D$  la différence entre les valeurs de ces deux champs, on trouve que  $\sqrt{\langle\delta\mathcal{E}_D^2\rangle}/\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle} < 10\%$  tant que  $\mathcal{E}_{\max} \lesssim 0.64$  (cette valeur est proche de 9% quand  $\mathcal{E}_{\max} = 0.6401$  et proche de 0.5% quand  $\mathcal{E}_{\max} = 0.1959$ ). Lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.7459$ , ce qui est très proche de la plus grande amplitude pour laquelle on trouve une solution à la relation de dispersion non linéaire, le champ de Dawson a un profil un peu plus raide que celui du champ adiabatique. En effet, si l'on note  $\delta\varphi_D$  (respectivement  $\delta\varphi_A$ ) la différence entre les positions du minimum et du maximum du champ de Dawson (respectivement du champ adiabatique), on trouve  $\delta\varphi_D/\pi \approx 0.53$  alors que  $\delta\varphi_A/\pi \approx 0.64$  lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.7549$ . Néanmoins, quelle que soit son amplitude, le champ adiabatique est plus proche de celui de Dawson que d'un champ sinusoïdal.

Lorsque  $k\lambda_D = 0.2$  et tant que  $\mathcal{E}_{\max} \lesssim 0.5169$ , le profil du champ de Dawson est aussi très proche de celui du champ adiabatique. En effet,  $\sqrt{\langle\delta\mathcal{E}_D^2\rangle}/\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle} < 10\%$  tant que  $\mathcal{E}_{\max} \lesssim 0.5169$  (cette valeur est proche de 10% lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.5169$  et proche de 2% lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.1967$ ). Néanmoins, lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.6218$ , ce qui est proche de l'amplitude maximale au-delà de laquelle la relation de dispersion n'admet plus de solution, le profil du champ de Dawson est plus raide que celui du champ adiabatique,  $\delta\varphi_D/\pi \approx 0.6$  alors que  $\delta\varphi_A/\pi \approx 0.8$ . Le profil du champ adiabatique est aussi assez bien approché par un profil sinusoïdal. En effet, tant que  $\mathcal{E}_{\max} \lesssim 0.6218$ ,  $\sqrt{\langle\delta\mathcal{E}_s^2\rangle}/\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle} < 20\%$ , où  $\delta\mathcal{E}_s$  est la différence entre les valeurs des champs adiabatique et sinusoïdal. Le profil sinusoïdal est même légèrement plus précis que le profil de Dawson pour les plus grandes valeurs de l'amplitude. Par exemple, lorsque  $\mathcal{E}_{\max} \approx 0.6218$ ,  $\sqrt{\langle\delta\mathcal{E}_D^2\rangle}/\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle} \approx 21\%$  alors que  $\sqrt{\langle\delta\mathcal{E}_s^2\rangle}/\sqrt{\langle\mathcal{E}^2\rangle} \approx 17\%$ . Ainsi, lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ , l'intérêt d'utiliser le profil de Dawson au lieu d'un simple profil sinusoïdal apparaît moins évident que lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ , bien que le profil de Dawson soit plus précis tant que  $\mathcal{E}_{\max} \lesssim 0.6$ .

Lorsque la valeur de  $k\lambda_D$  augmente, le profil sinusoïdal devient de plus en plus proche de celui du champ adiabatique, qu'il approche mieux que celui de Dawson dès que  $k\lambda_D \gtrsim 0.3$ . Ainsi, le profil  $\mathcal{E}_D(\varphi)$  défini par les équations (3.6) et (3.7) ne fournit une approximation précise du champ adiabatique que lorsque  $k\lambda_D \lesssim 0.2$  et tant que l'amplitude de l'onde n'est pas trop proche de sa valeur maximale, au-delà de laquelle on ne trouve plus de solution à la relation de dispersion. Ce résultat n'est pas vraiment surprenant puisque le calcul de Dawson n'est valable que pour

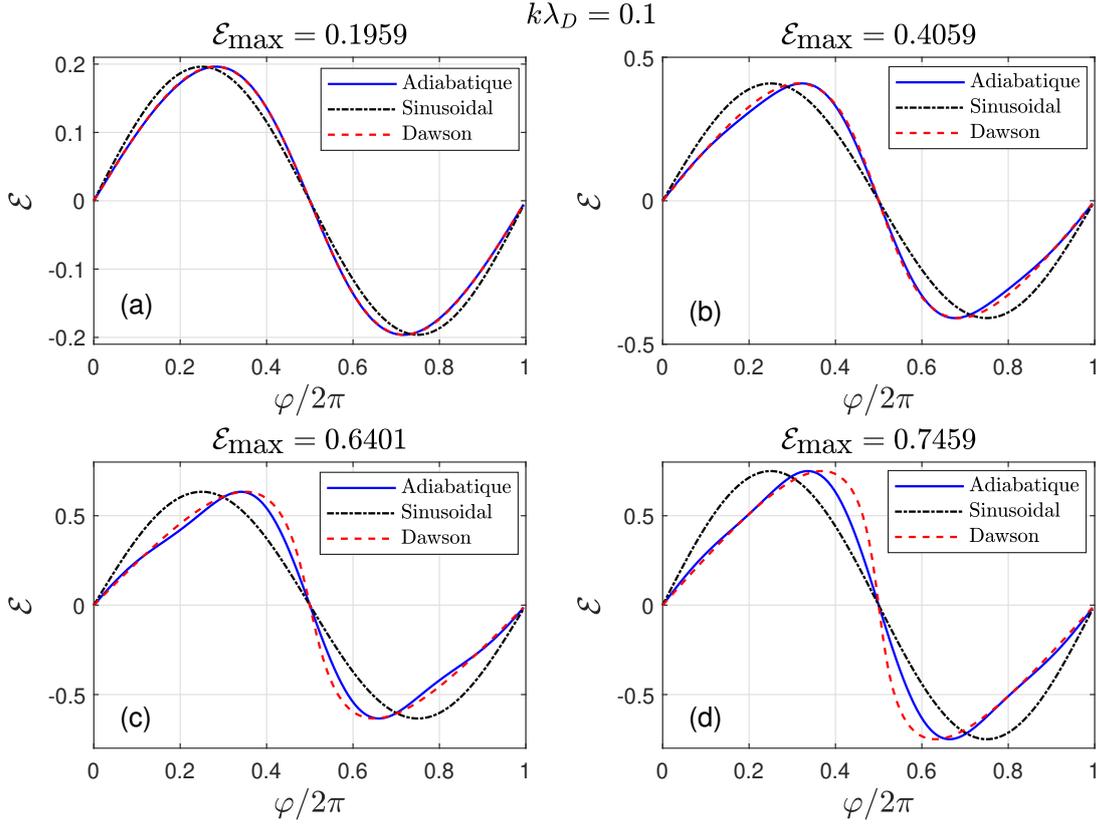


FIGURE 3.1 – Comparaisons entre les profils des champs électriques d’une onde adiabatique (en trait plein bleu), du champ de Dawson (en tirets rouges), et d’un champ sinusoïdal (en trait-points noirs) ayant la même valeur maximale,  $\mathcal{E}_{\max}$ , lorsque  $k\lambda_D = 0.1$ ; **(a)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.1959$ ; **(b)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.4059$ ; **(c)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.6401$ ; **(d)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.7459$ .

un plasma froid, c’est-à-dire dans la limite  $\omega/kv_{\text{th}} \rightarrow \infty$ . Or, dans la limite linéaire,  $\omega/kv_{\text{th}} \approx 1/k\lambda_D$ . On comprend donc que le profil de Dawson soit plus précis pour les plus petites valeurs de  $k\lambda_D$ . Par ailleurs,  $\omega$  décroît avec l’amplitude de l’onde et, comme on le verra au paragraphe 3.3,  $\omega$  décroît même très vite lorsque l’amplitude de l’onde s’approche de sa valeur maximale. On s’attend donc à ce que, pour de telles amplitudes, le calcul de Dawson ne donne plus de résultat précis.

En conclusion on peut retenir que, tant que  $k\lambda_D \lesssim 0.2$ , le profil de Dawson donne une très bonne approximation du profil du champ adiabatique, sauf près de l’amplitude maximale. Lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ , un profil sinusoïdal suffit à bien représenter le champ adiabatique (ce qui rejoint d’ailleurs les conclusions du chapitre 2 sur la relativement faible amplitude des harmoniques).

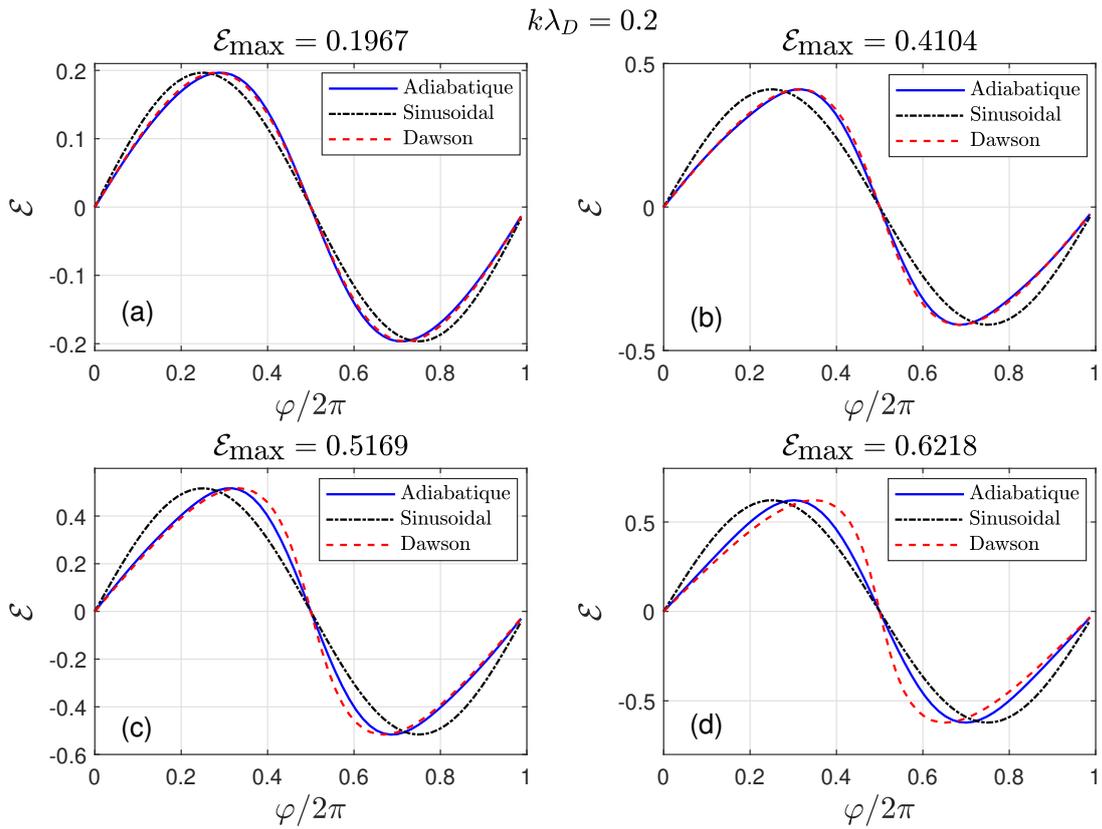


FIGURE 3.2 – Comparaisons entre les profils des champs électriques d’une onde adiabatique (en trait plein bleu), du champ de Dawson (en tirets rouges), et d’un champ sinusoïdal (en trait-points noirs) ayant la même valeur maximale,  $\mathcal{E}_{\max}$ , lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ ; **(a)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.1967$ ; **(b)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.4104$ ; **(c)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.5169$ ; **(d)** lorsque  $\mathcal{E}_{\max} = 0.6218$ .

### 3.3 Amplitude maximale d'une onde plasma et déferlement

Dans ce paragraphe, nous revenons de manière plus précise sur la raison pour laquelle il n'existe pas de solution à la relation de dispersion non linéaire des ondes adiabatiques au-delà d'une certaine amplitude. En particulier, nous remarquons que la décroissance de  $\omega$  en fonction de l'amplitude de la première harmonique du potentiel normalisé,  $\Phi_1$ , devient de plus en plus rapide au fur et à mesure que  $\Phi_1$  augmente. Comme cela est illustré sur la figure 3.3, il semble donc qu'il existe une valeur de  $\Phi_1$ , que nous noterons  $\Phi_1^{\max}$ , telle que  $\omega \rightarrow -\infty$  lorsque  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1^{\max}$ . Cela n'est bien sûr pas physique, et cela montre aussi qu'il ne peut pas y avoir de solution à la relation de dispersion si  $\Phi_1 > \Phi_1^{\max}$ .

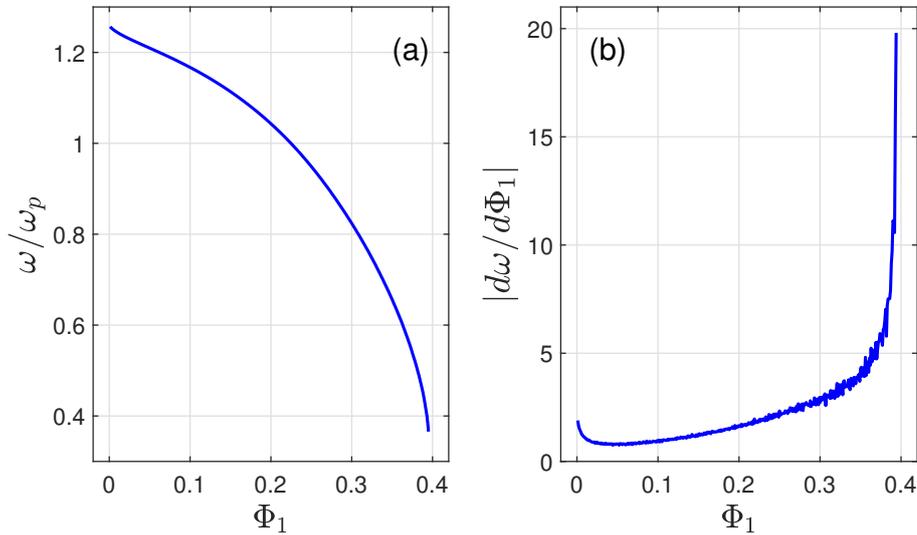


FIGURE 3.3 – (a) Fréquence de l'onde plasma adiabatique en fonction de  $\Phi_1$ , telle que calculée à partir de la théorie générale du chapitre 2. (b) Valeur absolue de la dérivée de la fréquence par rapport à  $\Phi_1$ . On voit l'apparition d'une tangente verticale près de  $\Phi_1 = 0.4$ .

On pourrait vouloir expliquer ce comportement non physique en l'imputant à l'approximation adiabatique, utilisée pour décrire la dynamique électronique. Néanmoins, on sait que plus l'onde croît lentement et plus cette hypothèse est correcte. Par ailleurs, comme cela sera montré dans le chapitre 5, l'écart à la fonction de distribution adiabatique n'est sensible que sur une faible région autour de la séparatrice. Or, la relation de dispersion fait intervenir l'intégrale en action de la fonction de distribution, et la valeur de cette intégrale est très peu sensible à de très faibles variations autour de la séparatrice. On ne peut donc guère incriminer l'approximation adiabatique, du moins tant que l'amplitude de l'onde et sa fréquence varient suffisamment lentement.

Cependant, l'application de la théorie adiabatique aboutit au résultat selon lequel  $\omega \rightarrow -\infty$  lorsque  $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1^{\max}$ , ce qui est en flagrante contradiction avec l'hypothèse d'une variation lente de  $\omega$ . Ainsi on peut se demander si, en utilisant une théorie non adiabatique, on ne pourrait pas résoudre la relation de dispersion au-delà de  $\Phi_1^{\max}$ . Si c'était le cas, cela impliquerait forcément une variation bornée de  $\omega$  en fonction de  $\Phi_1$ . Mais, comme  $d\omega/dt = (d\omega/d\Phi_1)d\Phi_1/dt$ , on pourrait toujours imaginer une onde croissant suffisamment lentement pour que  $\omega$  vérifie la relation de dispersion adiabatique, ce qui implique qu'elle varierait infiniment rapidement autour de  $\Phi_1^{\max}$ . On aboutit donc à une contradiction, qui nous mène à conclure, qu'effectivement, on ne peut pas trouver de solution à la relation de dispersion adiabatique si  $\Phi_1 > \Phi_1^{\max}$ . Autrement dit, au-delà de cette amplitude, il n'y a plus de solution auto-cohérente au système Vlasov-Gauss, du moins tant qu'on suppose l'EPW quasi monochromatique. Cela implique forcément que cette hypothèse ne peut plus être vérifiée lorsque  $\Phi_1 > \Phi_1^{\max}$ . Au-delà de cette amplitude, l'onde se brise. A partir de la relation de dispersion adiabatique obtenue au chapitre 2, on obtient donc de manière rigoureuse une borne supérieure à la limite de wave breaking (ou de déferlement), au moins pour une onde qui ne fait que croître.

Si la variation de l'amplitude de l'onde n'est pas monotone, alors, comme déjà discuté au chapitre 2, la fonction de distribution électronique est une fonction non locale du champ électrique. Néanmoins, si les variations de la vitesse de phase (ou plus précisément de  $v_\phi = \omega/k - eA_0/m$ ) sont suffisamment lentes devant celles de l'amplitude, le dépiégeage des électrons lorsque l'amplitude décroît se fait de façon quasi symétrique par rapport à  $v_\phi$ , comme l'indiquent les probabilités de transition rappelées au chapitre 2 (en particulier dans la table 2.1). Or, un dépiégeage symétrique ne change pas la relation de dispersion. Ainsi, les résultats obtenus pour une onde croissante s'appliquent à une onde dont l'amplitude varie de manière non monotone, à condition que  $v_\phi$  change beaucoup moins vite que son amplitude.

La figure 3.4 représente les variations de  $\Phi_1^{\max}$  en fonction de  $k\lambda_D$  et montre que ces variations suivent de manière très précise la loi suivante très simple, linéaire par morceaux,

$$\Phi_1^{\max}(k\lambda_D) = \begin{cases} 0.795 - k\lambda_D & \text{si } 0 < k\lambda_D < 0.6 \\ 0.39 - 0.3k\lambda_D & \text{si } 0.6 < k\lambda_D < 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Cependant, en général, on n'exprime pas la limite de wave breaking en fonction de l'amplitude de la première harmonique, mais plutôt en fonction de  $\delta n_e/n_0$ , où  $\delta n_e$  est la fluctuation de densité induite par l'EPW. A partir de l'équation de Poisson on trouve, avec nos normalisations,  $\delta n_e/n_0 = -\sum_j j^2 \Phi_j \cos(j\varphi)$ . Pour les plus grandes amplitudes, la variation de  $\delta n_e/n_0$  en fonction de  $\varphi$  est loin d'être sinusoidale. En particulier, la valeur minimale de  $\delta n_e$ , que l'on note  $\delta n_e^{\min}$ , est signi-

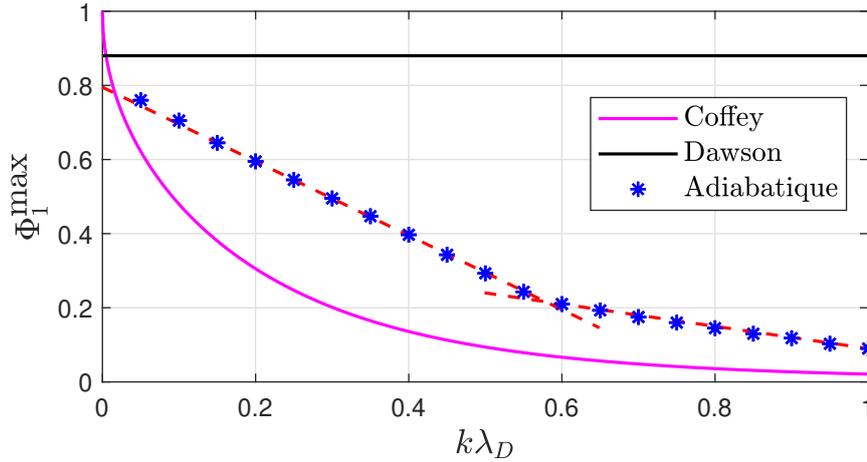


FIGURE 3.4 – Variations, en fonction de  $k\lambda_D$ , de la limite de wave breaking, exprimée en terme de l'amplitude de la première harmonique du potentiel normalisé,  $\Phi_1$ . Les étoiles bleues représentent les valeurs obtenues à partir de la théorie adiabatique. La ligne en tirets rouges a pour équation  $\Phi_1^{\max} = 0.795 - k\lambda_D$  lorsque  $0 < k\lambda_D < 0.6$  et  $\Phi_1^{\max} = 0.39 - 0.3k\lambda_D$  lorsque  $0.6 < k\lambda_D < 1$ . La courbe en magenta représente les valeurs de  $\Phi_1^{\max}$  déduites de la théorie de Coffey, et la droite noire celle obtenue à partir du potentiel de Dawson, Eq. (3.9).

ficativement plus petite (en valeur absolue) que sa valeur maximale. Par exemple, lorsque  $k\lambda_D = 0.14$ , une situation que l'on examine en détail dans le paragraphe 3.4, on trouve  $\Phi_1^{\max} \approx 0.65$ , ce qui correspond à  $\delta n_e^{\max}/n_0 \approx 1.04$  et  $-\delta n_e^{\min}/n_0 \approx 0.43$ . Comme on le verra au paragraphe 3.4, cette estimation pour  $-\delta n_e^{\min}/n_0$  est très proche de celle obtenue à partir de simulations PIC, juste avant que l'onde ne se brise.

Clairement, nous ne sommes pas les premiers à aborder le calcul de la limite de wave breaking. La première référence que nous connaissons sur le sujet est justement l'article de Dawson [Dawson (1959)]. Puisque Dawson ne traite que le cas du plasma froid, il ne peut pas se baser sur la relation de dispersion de l'onde, qui n'existe pas,  $\omega = \omega_{pe}$  quel que soit  $k$  qui peut être choisi de manière arbitraire. L'argument de Dawson est tout autre et se base sur le profil du champ déduit des équations (3.6) et (3.7) et représenté sur la figure 3.5 pour diverses valeurs de  $\mathfrak{E} = kA$ . On peut remarquer sur cette figure que le champ est multivalué dès que  $\mathfrak{E} = kA > 1$ , ce qui est physiquement impossible. On voudrait donc en déduire qu'une onde telle que  $\mathfrak{E} = kA > 1$  ne pourrait pas exister, ce qui correspond à la limite de wave breaking de Dawson. A partir des équations (3.6) et (3.7), on trouve facilement que la condition  $\mathfrak{E}^{\max} = 1$ , exprimée en terme de l'amplitude de la première harmonique du potentiel normalisé, devient,

$$\Phi_{1,\text{Dawson}}^{\max} = J_0(1) - J_2(1) + \frac{J_1(1) + J_3(1)}{2} \approx 0.88 \quad (3.9)$$

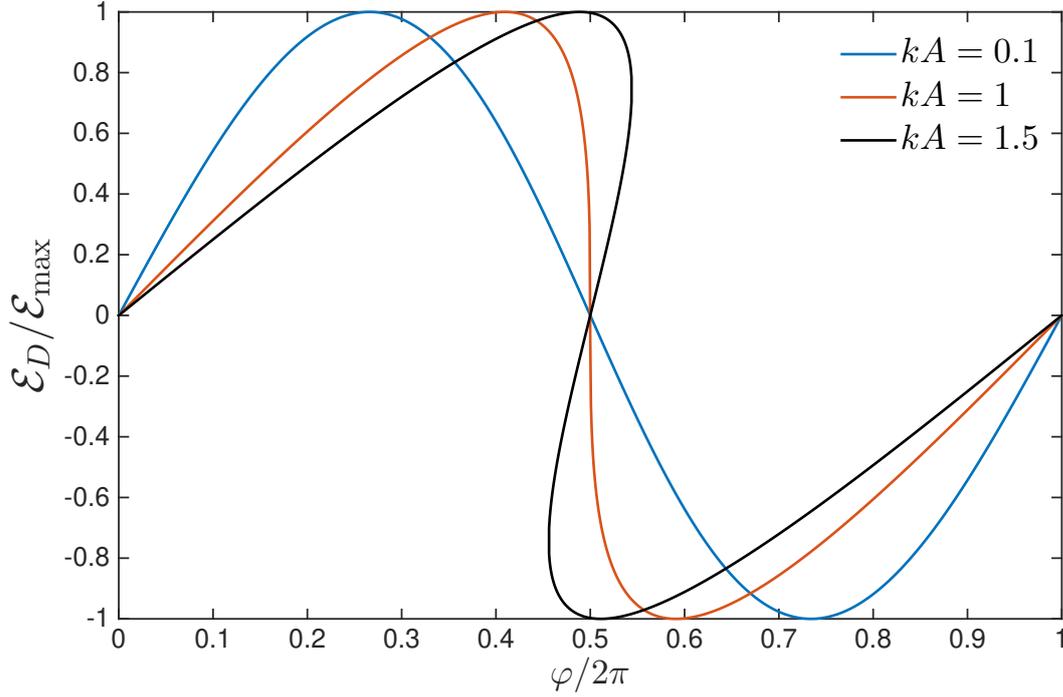


FIGURE 3.5 – Représentation du profil du champ de Dawson (normalisé à l’unité) lorsque  $\mathfrak{E} = kA = 0.1$  (courbe bleue) auquel cas le champ est presque sinusoïdal, lorsque  $\mathfrak{E} = kA = 1$  (courbe rouge) auquel cas le champ admet une tangente verticale, et lorsque  $\mathfrak{E} = kA = 1.5$  (courbe noire) auquel cas le champ est multivalué.

Néanmoins, le calcul de Dawson n’est valable que lorsque les trajectoires électroniques ne se croisent pas. Ainsi, si l’on considère deux positions d’équilibre  $x_0$  et  $x_0 + \Delta x_0$ , où  $\Delta x_0 > 0$  est un petit incrément en position, il faut que  $x_0 + \xi(x_0) < x_0 + \Delta x_0 + \xi(x_0 + \Delta x_0)$ . Cette condition est respectée si  $\xi(x_0 + \Delta x_0) - \xi(x_0) > -\Delta x_0$ , soit, dans la limite  $\Delta x_0 \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_0} > -1, \quad (3.10)$$

(et on vérifie aisément que l’on retrouve cette condition si  $\Delta x_0 < 0$ ). D’après l’équation 3.3,  $\partial \xi / \partial x_0 = kA \cos(kx_0 - \omega_{pe}t)$ , si bien que la condition Eq. (3.10) est vérifiée si et seulement si  $kA < 1$ . L’argument de Dawson n’est donc pas totalement rigoureux, puisqu’il se fonde sur un argument sur le profil du champ, mais qui est utilisé pour des valeurs d’amplitude où le calcul de ce profil n’est plus valable. Le calcul de Dawson reste néanmoins une référence importante à laquelle il faut se comparer, et on remarque sur la figure 3.4 que la limite de Dawson est systématiquement supérieure à celle que l’on déduit de la théorie adiabatique. Il y a deux raisons à cela. D’une part, la condition de Dawson, selon laquelle le champ ne doit pas être multivalué, est moins exigeante que celle que nous utilisons, et qui porte sur la relation de dispersion. De fait, on peut voir sur les figures 3.1 et 3.2 que, pour les amplitudes

proches de la limite de déferlement que nous calculons, le champ adiabatique n'est pas multivalué. D'autre part, comme indiqué plus haut, dans la limite d'un plasma froid, on ne peut pas invoquer de condition sur la relation de dispersion. D'ailleurs nous n'avons vérifié l'équation (3.8) que pour  $k\lambda_D \geq 0.05$  et pour cette valeur,  $\Phi_1^{\max}$  était d'ailleurs légèrement supérieur à la valeur déduite de l'équation (3.8) (nous trouvons  $\Phi_1^{\max} \approx 0.76$  lorsque  $k\lambda_D = 0.05$  au lieu de 0.7495).

La référence la plus ancienne (et certainement la plus citée) que nous connaissons sur la limite de wave breaking pour un plasma de température non nulle est l'article de Coffey [Coffey (1971)]. Plus précisément, Coffey calcule l'amplitude maximale que peut atteindre le champ électrique d'une onde, en supposant que la fonction de distribution électronique non perturbée est de type waterbag. L'équation de Vlasov se trouve alors réduite à une équation de propagation des bords de la région où la fonction de distribution est non nulle. En résolvant cette équation et en la couplant à l'équation de Poisson, Coffey obtient la valeur maximale suivante pour l'amplitude du champ électrique,

$$\mathcal{E}_{\text{Coffey}}^{\max} = \sqrt{1 - \frac{\beta}{3} - \frac{8}{3}\beta^{1/4} + 2\sqrt{\beta}} \quad (3.11)$$

où,

$$\beta = \frac{3(k\lambda_D)^2}{1 + 3(k\lambda_D)^2}. \quad (3.12)$$

Pour traduire l'équation (3.11) en terme de l'amplitude de la première harmonique du potentiel normalisé, nous utilisons la relation,  $\mathcal{E}_{\max} = \max \left[ \sum_j j\Phi_j \sin(j\varphi) \right]$ . Nous déduisons alors  $\Phi_1^{\max}$  de  $\mathcal{E}_{\max}$  en le multipliant par  $r \equiv \Phi_1 / \max \left[ \sum_j j\Phi_j \sin(j\varphi) \right]$ , tel que dérivé par la théorie adiabatique. Néanmoins  $r$  reste proche de l'unité pour toutes les valeurs de  $k\lambda_D$  que nous avons regardées (l'écart à l'unité reste toujours inférieur à 6.5%).

Comme on peut le voir sur la figure 3.4, la limite de Coffey est partout inférieure à la limite adiabatique, sauf peut-être pour les très petites valeurs du nombre d'onde (et pour lesquelles nous n'utilisons qu'une extrapolation des résultats obtenus pour des plus grands  $k\lambda_D$ ). Il y a plusieurs différences entre le calcul de Coffey et le nôtre. Tout d'abord, nous supposons que la fonction de distribution non perturbée est une Maxwellienne, et non une waterbag. Par ailleurs, nous résolvons le système Vlasov-Poisson en tenant compte de tout l'historique de la variation de la vitesse de phase, ce que ne fait pas Coffey. De plus, notre calcul est limité aux ondes adiabatiques, croissant suffisamment lentement. Même dans cette limite, nos résultats ne seraient plus les mêmes si, à cause des variations du nombre d'onde liées à l'inhomogénéité du plasma, les variations de  $v_\phi$  étaient trop rapides par rapport à celles de l'amplitude de l'onde (c'est-à-dire, dans les notations du chapitre 2,  $|d_t v_\phi| > |d_t(kI_s)|$ ), pour des

valeurs de l'amplitude significativement plus petites que la limite de déferlement). En conséquence, il est important de remarquer qu'il est impossible de calculer une limite de déferlement valable dans n'importe quelle situation.

Enfin, notons que le résultat que nous venons d'obtenir sur la limite de wave breaking donne directement un critère de saturation pour la diffusion Raman stimulée. En effet, comme nous l'avons discuté dans l'introduction, lorsque l'onde plasma n'est plus quasi monochromatique, elle peut accélérer de manière très efficace des électrons par transport chaotique, qui peut être de type diffusif [Bénisti & Escande (1997)], ou même supradiffusif [Zaslavsky (2002)]. Puisqu'elle cède son énergie aux électrons, l'amplitude de l'EPW s'effondre, comme on le verra sur les figures 3.8 (e) et (f) du paragraphe 3.4, issues d'une simulation PIC de diffusion Raman stimulée. L'onde laser ne peut donc plus diffuser efficacement sur l'EPW, ce qui implique que la diffusion Raman stimulée sature au moment où l'EPW déferle. La limite de wave breaking que nous avons calculée peut donc servir de critère de saturation de la SRS. De fait, un tel critère est introduit dans un modèle cinétique non linéaire de la SRS implémenté dans le code hydrodynamique du CEA/DAM, servant au design des expériences de fusion (modèle non encore publié). C'est un exemple d'application directe de nos études théoriques à la fusion par confinement inertiel.

### 3.4 Spectre transverse d'une onde plasma créée par diffusion Raman stimulée

Avant d'entrer dans les détails des résultats obtenus, notons que cette partie de la thèse est celle qui résulte le plus d'un travail collectif. En particulier, les résultats numériques utilisant la méthode Ray In Cell, ainsi que l'écriture du code qui a servi à les obtenir, ont été le fruit du travail de Didier Bénisti dans le cadre du contrat post-doctoral de Damien Minenna. Quant aux valeurs de décalage en fréquence non linéaire utilisées pour calculer la courbure du front de phase de l'onde plasma, elles ont été calculées par Mikael Tacu en utilisant la théorie générale du chapitre 2. C'est donc au titre de l'application de cette théorie qu'apparaît le présent paragraphe.

Comme expliqué au chapitre 1, une EPW créée par la diffusion Raman stimulée d'une onde laser focalisée dans un plasma verra son amplitude croître plus rapidement près de la région focale. Comme la fréquence d'une telle onde, et donc sa vitesse de phase, ont tendance à décroître avec son amplitude, les fronts de phase vont se courber. Ils seront plus en avance loin de la région focale que près de cette région, comme illustré sur les figure 1.5 et 3.8 et observé dans de nombreuses simulations [Rousseaux *et al.* (2009); Masson-Laborde *et al.* (2010); Berger *et al.* (2015); Silva *et al.* (2020); Yin *et al.* (2007, 2008, 2009); Banks *et al.* (2011); Yin *et al.* (2012, 2013)]. En conséquence, le nombre de l'onde plasma acquiert une composante transverse à la direction moyenne de propagation de l'onde. Le spectre transverse de l'EPW s'enrichit au fur et à mesure que cette onde croît et que son front de phase se courbe.

Un tel enrichissement transverse a clairement été observé expérimentalement [Rousseaux *et al.* (2009)] par diffusion Thomson. Néanmoins, la courbure du front de phase n'en est pas forcément la seule cause. En effet, il pourrait aussi résulter de la croissance instable de modes transverses, qui serait l'équivalent multidimensionnel de l'instabilité traitée au chapitre 5 [Berger *et al.* (2015)], ou résulter d'une instabilité plutôt de type électromagnétique [Masson-Laborde *et al.* (2010); Silva *et al.* (2020)]. Dans une expérience, ou dans des simulations cinétiques avec des codes PIC ou Vlasov, le développement des modes secondaires et la courbure du front de phase existent de manière simultanée, si bien qu'il est impossible de savoir quel effet domine. Dans ce paragraphe, nous calculons les modes transverses résultant exclusivement de la courbure du front de phase. En comparant nos résultats à ceux issus de simulations PIC, nous pouvons clairement déterminer l'origine des modes transverses observés dans les simulations cinétiques, et trancher la question restée en suspens dans [Rousseaux *et al.* (2009)].

Pour décrire la courbure du front de phase d'une onde plasma électronique, nous ne pouvons clairement pas faire appel aux techniques couramment utilisées comme l'approximation paraxiale [Lax *et al.* (1975); Riazuelo & Bonnaud (2000)] ou quasi-optique [Permitin (2001); Dodin *et al.* (2019)]. Pour aller plus loin que ces approximations nous devons résoudre très finement les variations du nombre d'onde en fonction du temps. Cela implique de devoir résoudre de manière simultanée les équations de tracé de rayons non linéaires et non stationnaires ainsi que l'équation d'enveloppe de l'onde plasma. Pour ce faire, nous avons développé une nouvelle méthode numérique que nous avons dénommée Ray in Cell (RIC) [Bénisti *et al.* (2022)]. Elle s'inspire de la méthode développée dans [Debayle *et al.* (2019)] utilisant une grille régulière dans l'espace réel. Pour résoudre les équations de tracé de rayons on a besoin de l'amplitude locale de l'onde. Cette amplitude est déterminée comme une moyenne sur les rayons au sein d'une même maille de la grille. Plus précisément, en utilisant la même méthode que celle utilisée dans un code PIC, l'amplitude de l'onde plasma est d'abord estimée sur les noeuds d'une maille en utilisant un facteur de forme. Ensuite, elle est projetée sur les rayons en utilisant le même facteur de forme. Cela explique la dénomination "Ray in Cell" (RIC). En comparant les résultats des simulations RIC avec celles issues d'un code PIC à deux dimensions modélisant la diffusion Raman stimulée, on peut quantifier l'importance de la courbure du front de phase sur le développement des modes transverses d'une onde plasma électronique. C'est un problème important parce que l'ouverture angulaire de la lumière laser réfléchie résulte directement des propriétés de l'onde plasma. Ainsi, les résultats RIC peuvent être directement utilisés dans des modèles simples implémentés dans des codes hydrodynamiques pour estimer la SRS dans les expériences de fusion par confinement inertiel.

De plus, la méthode RIC est intéressante en soi et peut être même généralisée pour décrire une interaction onde-onde dans diverses situations. En effet, l'amplitude de toute onde peut être estimée sur la grille, puis projetée sur les rayons de toute autre onde pour prendre en compte leur couplage. La méthode RIC peut donc être généralisée de manière à prendre en compte simultanément tous les phénomènes résultant de l'interaction laser-plasma que nous avons mentionnés dans l'Introduction.

Dans le sous-paragraphe 3.4.1, nous décrivons de manière détaillée la méthode RIC puis, dans le sous-paragraphe 3.4.2 nous l'appliquons directement au calcul de la courbure non linéaire du front de phase d'une EPW, en comparant les résultats RIC à ceux de simulations PIC.

### 3.4.1 Méthode numérique du code Ray in Cell

La méthode RIC repose sur plusieurs approximations. Premièrement, elle se situe dans le cadre de l'optique géométrique, la variation des nombres d'onde découlant des équations de tracé de rayons,

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{x}_R}{dt} &= \left. \frac{\partial \Omega_R}{\partial \vec{k}} \right|_{\vec{x}, t} \\ \frac{d\vec{k}_R}{dt} &= - \left. \frac{\partial \Omega_R}{\partial \vec{x}} \right|_{\vec{k}, t}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

où  $\vec{k}_R = \vec{k}[\vec{x}_R(t), t]$  et où  $\Omega_R[\vec{x}, \vec{k}(\vec{x}, t), t] = \omega(\vec{x}, t)$  résout la relation de dispersion adiabatique. Il est licite d'utiliser l'optique géométrique tant que la plupart de l'énergie de l'onde n'est pas confinée dans un volume inférieur à  $k^{-3}$ . Elle ne devrait donc pas être pertinente pour décrire l'auto-focalisation de l'onde causée par la courbure du front de phase. Cependant, la méthode RIC permet de lever cette difficulté. En effet, l'amplitude de l'onde étant calculée comme une moyenne sur une cellule, elle admet une borne supérieure qui dépend du volume de la cellule. On pourrait dire, en quelque sorte, qu'avec la méthode RIC l'énergie de l'onde n'est jamais confinée dans un volume plus petit que celui d'une cellule. En conséquence, même si une onde a tendance à se focaliser de manière excessive, du fait de l'approximation de type optique géométrique, son énergie ne peut pas diverger dans le code RIC.

Deuxièmement, pour calculer  $\Omega_R$ , nous utilisons les résultats du chapitre 2 et supposons que la composante longitudinale du vecteur d'onde  $\vec{k}$  ne change pas beaucoup et qu'elle reste beaucoup plus grande que sa composante transverse. Nous nous restreignons de plus, dans ce chapitre, à des plasmas uniformes. La variation spatiale de  $\Omega_R$ , dont résulte la variation de  $\vec{k}$ , n'est due qu'à la variation de l'amplitude de l'onde. Plus précisément, de manière à pouvoir directement utiliser le modèle simplifié de SRS introduit dans [Bénisti *et al.* (2022)] et basé sur la formulation variationnelle de la SRS obtenue dans [Bénisti (2016); Dodin & Fisch (2012a)], nous calculerons les variations de  $\Omega_R$  en fonction de celles de  $\Phi_A$ , défini par,

$$\Phi_A^2 = \sum_{n \geq 1} n^2 \Phi_n^2, \quad (3.14)$$

où les  $\Phi_n$  sont les harmoniques de l'onde plasma. Ainsi,

$$\frac{d\vec{k}_R}{dt} = - \frac{d\Omega_R}{d\Phi_A} \vec{\nabla} \Phi_A. \quad (3.15)$$

Il est alors clair que les équations de rayons doivent être résolues en même temps que l'équation d'enveloppe qui décrit les variations de  $\Phi_A$ , qui sont non stationnaires.

C'est de là que découle la non stationnarité du tracé de rayons. Quant au modèle simplifié de la SRS développé dans [Bénisti *et al.* (2022)], son exposé dépasse très largement le cadre de cette thèse. Nous nous contentons donc ici de reproduire l'équation d'évolution pour  $\Phi_A$ ,

$$\frac{\partial \Lambda_a}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\Lambda_a \vec{v}_g) = 2\gamma_0 \Lambda_a, \quad (3.16)$$

où  $\vec{v}_g = \partial_{\vec{k}} \Omega_R$ , où  $\Lambda_a$  est défini par,

$$\Lambda_a = \frac{\epsilon_0 k^2 \Phi_A^2}{4} \frac{\partial \chi_a}{\partial \omega}, \quad (3.17)$$

et  $\chi_a(k, \omega, \Phi_A)$  est telle que la relation de dispersion adiabatique est équivalente à  $1 + \chi_a = 0$  (la définition plus précise de  $\chi_a$  peut être trouvée dans [Bénisti *et al.* (2022)]). Quant à  $\gamma_0$ , il vaut,

$$\gamma_0(\vec{x}, t) = \frac{ekE_{\text{las}}(\vec{x}, t)}{2m\omega_{\text{las}}\sqrt{2\omega_s}\partial_\omega\chi_a}, \quad (3.18)$$

où  $\omega_{\text{las}}$  et  $\omega_s$  sont respectivement la fréquence du laser et la fréquence de l'onde diffusée ( $\omega_s = \omega_{\text{las}} - \omega$ ) et où  $E_{\text{las}}$  est l'amplitude du champ électrique du laser. Soit maintenant  $J$  tel que  $\partial_t J + \vec{v}_g \cdot \vec{\nabla} J = J \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_g$ . D'après le théorème de Liouville,  $J = |d\vec{x}_R(t)/d\vec{x}_R(0)|$ . En introduisant le nombre de plasmons,  $N_p = J\Lambda_a[\vec{x}_R(t), t]$ , l'équation (3.17) se met sous la forme,

$$\frac{dN_p}{dt} = 2\gamma_0 N_p. \quad (3.19)$$

Ainsi, notre modèle simplifié pour la SRS spécifie simplement que le nombre de plasmons est amplifié au taux  $2\gamma_0$ , qui est le taux typique de croissance de la SRS, lorsque le taux d'amortissement des ondes est négligeable devant  $\gamma_0$ , ce qui est vrai dans l'exemple étudié au sous-paragraphe 3.4.2.

Remarquons que l'équation (3.19) ne permet de calculer que le nombre de plasmons,  $N_p = J\partial_\omega\chi_a\Phi_A^2$ , alors qu'il faut connaître le gradient de  $\Phi_A$  pour résoudre l'équation de tracé de rayons. La méthode RIC permet, justement, de passer facilement de  $N_p$  à  $\Phi_A$ . Pour cela, on commence par calculer  $\Lambda_a$  sur les nœuds, de positions  $\vec{x}_j$ , de la grille que l'on utilise pour mailler l'espace,

$$\Lambda_a[\vec{x}_j(t), t] = \int \Lambda_a[\vec{x}, t] \delta(\vec{x}_j - \vec{x}) d\vec{x}, \quad (3.20)$$

où  $\delta$  est la distribution de Dirac. Si les variations de  $\Lambda_a$  sont suffisamment petites et lisses à l'échelle d'une maille, on peut remplacer la distribution de Dirac par un facteur de forme d'ordre  $n$ ,  $S^{(n)}$  tel que  $\int S^{(n)}(\vec{x}) d\vec{x} / \Delta V = 1$ ,  $\Delta V$  étant le volume

d'une maille. Ainsi,

$$\Lambda_a[\vec{x}_j(t), t] \approx \int \Lambda_a[\vec{x}, t] S^{(n)}(\vec{x}_j - \vec{x}) \frac{d\vec{x}}{\Delta V}. \quad (3.21)$$

On effectue maintenant le changement de variables,  $\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$ , où  $\vec{x}_0$  est la position initiale d'un rayon se trouvant, à l'instant  $t$ , en  $\vec{x}$ . On trouve alors, en utilisant les identités,  $J = |d\vec{x}/d\vec{x}_0|$ ,  $N_p = J\Lambda_a$ ,

$$\Lambda_a[\vec{x}_j(t), t] \approx \int N_p[\vec{x}_R(t)] S^{(n)}[\vec{x}_j - \vec{x}] \frac{d\vec{x}_0}{\Delta V}. \quad (3.22)$$

Si, initialement, on place de manière uniforme  $N_0$  rayons par maille, alors  $|d\vec{x}_0| = \Delta V/N_0$ . Par ailleurs, dans une simulation on ne calcule  $N_p$  que sur un ensemble fini de rayons. En remplaçant l'intégrale par une somme de Riemann sur l'ensemble des rayons que l'on considère dans une simulation, on obtient,

$$\Lambda_a[\vec{x}_j, t] \approx \sum_i \frac{N_p[\vec{x}_{R_i}(t)]}{N_0} S^{(n)}[\vec{x}_j - \vec{x}_{R_i}(t)]. \quad (3.23)$$

L'opération permettant de passer de  $N_p$  à  $\Lambda_a$  est illustrée sur la figure 3.6 (a).

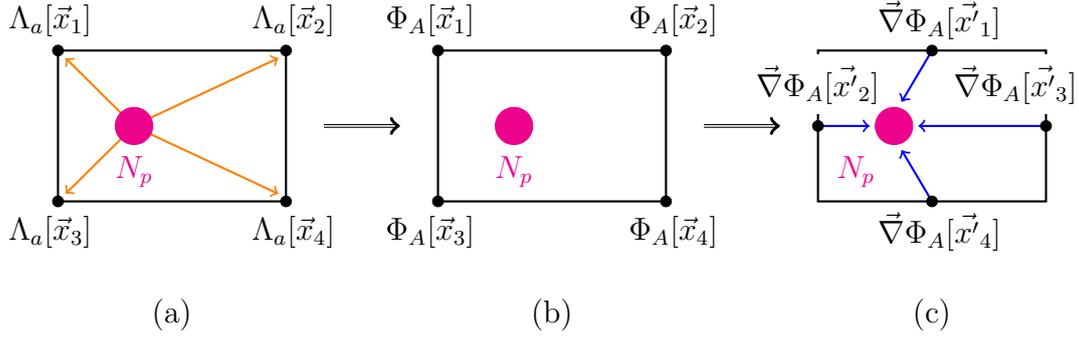


FIGURE 3.6 – Le schéma numérique de la méthode RIC. La figure (a) montre la dérivation de  $\Lambda_a$  sur les noeuds de la maille à partir de la projection de  $N_p$  calculée sur les rayons. La figure (b) montre la dérivation de  $\Phi_A$  sur les noeuds de la maille une fois  $\Lambda_a$  connu. La figure (c) montre la dérivation de  $\vec{\nabla}\Phi_A$  au milieu des arêtes de la maille et leur projection sur les rayons pour le calcul de la dynamique de ces derniers.

Une fois  $\Lambda_a$  connu, on calcule la valeur de  $\Phi_A$  en résolvant l'équation,

$$k^2\Phi_A^2 \frac{\partial \chi_a(\Phi_A)}{\partial \omega} = \frac{4\Lambda_a(\vec{x}_j, t)}{(k\lambda_D)^4 \epsilon_0}. \quad (3.24)$$

La résolution de cette équation peut être visualisée sur la figure 3.6 (b) où  $\Phi_A$  est calculé sur les noeuds de la maille à partir de  $\Lambda_a$ . Une fois  $\Phi_A$  connu, son gradient est calculé par différences finies sur les milieux des arêtes et projeté sur les rayons avec le même facteur de forme  $S^{(n)}$ . Cela permet de propager les rayons par l'équation (3.13). Comme expliqué dans [Bénisti *et al.* (2022)], un facteur de forme d'ordre 1 est suffisant.

L'équation d'enveloppe (3.16) utilisée dans le modèle RIC n'étant valable que pour une onde quasi monochromatique, elle ne peut pas décrire l'évolution de l'EPW après qu'elle se soit brisée. La figure 3.8, reproduisant le résultat de la simulation PIC [Rousseaux *et al.* (2009)] nous montre qu'après le déferlement de l'onde, son amplitude décroît fortement. Ceci peut être dû à l'accélération des électrons par transport chaotique aux dépens de l'énergie de l'onde. Pour prendre en compte cette décroissance en amplitude dans le code RIC, lorsque  $\Phi_A \geq \Phi_{wb}$ , où  $\Phi_{wb}$  est proche de la limite du déferlement dérivée au chapitre précédent, seule une fraction du nombre de plasmons transporté par les rayons est projetée sur la grille. Plus précisément, lorsque  $\Phi_A$  varie de  $\Phi_{wb}$  à  $1.1\Phi_{wb}$ , une fraction linéairement décroissante de  $N_p$  à 0 est projetée sur la grille. De plus, tous les rayons tels que  $\Phi_A > 1.1\Phi_{wb}$  sont enlevés de la simulation. Clairement  $1.1\Phi_{wb}$  doit être inférieur à la valeur  $\Phi_A^{\max}$  calculée au paragraphe 3.3. Cependant, on ne peut pas simplement choisir  $\Phi_{wb} = \Phi_A^{\max}/1.1$ . En effet, à cause de l'auto-focalisation de l'EPW induite par la courbure des fronts de phase, son amplitude projetée sur les noeuds d'une maille peut être plus grande que la valeur maximale portée par les rayons. Dans le cas des simulations RIC présentées

ici, qui correspondent à  $k\lambda_D = 0.14$ , on choisit  $\Phi_{wb} = 0.5$ . Avec ce choix pour  $\Phi_{wb}$ , dans les simulations RIC, la valeur maximale atteinte par  $\Phi_A$  sur les nœuds de la grille est proche de 0.58, ce qui est en très bon accord avec les résultats des simulations PIC, reproduits au sous-paragraphe 3.4.2.

### 3.4.2 Résultats des simulations RIC et comparaison aux simulations PIC

Nos simulations RIC reproduisent les simulations PIC publiées dans [Rousseaux *et al.* (2009)] pour interpréter l'expérience menée sur l'installation LULI2000 100 TW, détaillée dans la même publication. L'onde laser se propage dans la direction  $x$  dans une géométrie plane  $(x, y)$ , et la distribution en intensité vaut,

$$I_{\text{las}}(x, y, t) = I_0 \frac{w_0}{w(x)} \exp\left(-\frac{2y^2}{w(x)^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(t - t_{\text{del}})^2}{\tau^2/4 \ln(2)}\right)$$

$$w(x) = w_0 \sqrt{1 + \frac{(x - x_f)^2}{l_R^2}}, \quad (3.25)$$

où  $\tau$  est la largeur à mi-hauteur de l'impulsion et  $w_0$  la taille minimale du faisceau laser. De plus,  $t_{\text{del}} = s/c$ ,  $s$  étant la coordonnée curviligne le long du rayon laser et  $c$  la vitesse de la lumière. Pour les simulations RIC,  $s = 0$  lorsque  $x\omega_{\text{las}}/c = 500$ . L'onde laser est focalisée en  $x_f$ , et  $l_R = \pi w_0^2/\lambda_{\text{laser}}$  est la longueur de Rayleigh,  $\lambda_{\text{laser}}$  étant la longueur d'onde du laser. Ici, pour coller aux paramètres de [Rousseaux *et al.* (2009)], nous choisissons  $\lambda_{\text{laser}} = 1060$  nm,  $\tau = 1.6$  ps,  $I_0 = 2.5 \times 10^{17}$  W/cm<sup>2</sup> et  $w_0 = 16\lambda_{\text{laser}}/\pi$  pour une ouverture du faisceau de  $f/8$ . De plus, l'onde laser est focalisée à  $x_f = 1000 c/\omega_{\text{laser}}$ . Quant au plasma, il est homogène, sa densité vaut  $n_e/n_c = 0.08$  (où  $n_c = \epsilon_0 m \omega_{\text{laser}}^2/e^2$  est la densité critique) et sa température est de 300 eV. Alors l'onde plasma créée par diffusion Raman stimulée est telle que  $k\lambda_D = 0.14$ .

La simulation s'étend de  $y = -100c/\omega_{\text{laser}}$  à  $y = 100c/\omega_{\text{laser}}$  et de  $x = -500c/\omega_{\text{laser}}$  à  $x = 1000c/\omega_{\text{laser}}$  (ce qui fait 253  $\mu\text{m}$  de long et 33.7  $\mu\text{m}$  de large). Pour éviter les problèmes de bord, lorsque  $x \leq 0$ , l'amplification de l'onde plasma électronique est obtenue à partir de l'équation (3.18), en remplaçant  $\gamma_0$  par un taux de croissance  $\gamma$  qui varie linéairement depuis 0, sur le bord gauche de la boîte de simulation, jusqu'à atteindre la valeur  $\gamma_0$  en  $x = 0$ . Dans la région  $400 \leq x\omega_{\text{laser}}/c \leq 600$  et  $20 \leq |y|\omega_{\text{laser}}/c \leq 50$  où la courbure du front de phase est la plus visible, la valeur moyenne de  $\gamma_0/kv_{\text{th}}$  est proche de 0.25. C'est au-dessus de la condition d'adiabaticité  $\gamma_0/kv_{\text{th}} < 0.1$ . Cependant, comme on le montre plus loin, l'accord avec la simulation PIC est tout de même très bon. Cela tient sans doute au fait que, dans les simulations PIC, le laser est érodé, ce qui diminue la valeur effective de  $\gamma_0$  et améliore de ce fait la validité de l'approximation adiabatique.

Les rayons de l'onde plasma sont supposés initialement alignés avec les rayons du laser. Par conséquent, les valeurs initiales de  $k_x$  et de  $k_y$  sont dérivées à partir du gradient de la phase complexe du faisceau Gaussien. De plus, l'amplitude initiale sur chaque faisceau correspond au niveau de bruit  $\Phi_A = 5 \times 10^{-8}$ . Ce niveau de bruit a été choisi pour qu'à  $t = -1.54\text{ps}$ , dans la région  $400 \leq x\omega_{\text{laser}}/c \leq 600$ , la valeur maximale de  $\Phi_A$  sur les rayons soit proche de la limite de wave breaking que nous avons imposée,  $\Phi_{\text{wb}} = 0.5$ . A cause de l'auto-focalisation de l'onde, la valeur maximale de  $\Phi_A$  sur les noeuds de la maille excède celle sur les rayons. Lorsque  $t = -1.54\text{ps}$ , cette valeur maximale est proche de 0.58. Il est à noter que les variations de  $\Phi_A = \sqrt{\sum_j j^2 \Phi_j^2}$  ne traduisent pas directement celles de la densité. En effet,  $\delta n_e$  est tel que  $\delta n_e/n_0 = -\sum_j j^2 \Phi_j \cos(j\varphi)$ . Ainsi, la valeur minimale atteinte par  $\delta n_e$  est telle que :

$$\frac{\delta n_e^{\min}}{n_0} = -\sum_j j^2 \Phi_j. \quad (3.26)$$

Ici, puisque  $\delta n_e^{\min}/n_0$  converge moins vite que le potentiel, on utilise dix harmoniques pour estimer sa valeur. Ainsi, lorsque  $\Phi_A$  atteint sa valeur maximale,  $\Phi_A = 0.58$  à  $t = -1.54\text{ps}$ , on estime  $\delta n_e^{\min}/n_0 \approx 0.38$ . Ceci est en très bon accord avec le résultat des simulations PIC. En effet, comme on peut le voir sur la figure 3.8 (d), juste avant que l'onde plasma commence à déferler, la valeur minimale atteinte par la densité électronique est proche de  $0.05n_c$ . Il s'ensuit que  $\delta n_e^{\min}/n_0 \approx 35 - 40\%$  (puisque  $n_0/n_c = 0.08$ ).

Pour résoudre les équations (3.13), (3.15) et (3.24) nous utilisons le pas de temps,  $\delta t = 1\text{fs}$ , et la simulation est initiée en  $t = -2.2\text{ps}$  (comme dans les simulations PIC). La grille du code RIC est faite de mailles rectangulaires de longueur longitudinale  $l_x = 50c/\omega_{\text{laser}}$  et de longueur transverse  $l_y = 5c/\omega_{\text{laser}}$ . Ainsi, il y a seulement 30 cellules dans la direction  $x$  et 40 dans la direction  $y$ . C'est une résolution très basse comparée à celle d'un code PIC, mais suffisante pour que la simulation RIC ait convergé (diminuer  $l_x$  ou  $l_y$  d'un facteur 5 n'apporte pas de changements significatifs). Cela démontre l'efficacité de la méthode. Lorsqu'on utilise 64 rayons par maille, les résultats présentés plus loin sont obtenus avec un temps de calcul de 2 minutes. Si on compare au code PIC, on obtient une accélération par un facteur de l'ordre de  $10^7$ .

Les figures 3.8 (a), (b) et (c) représentent les cartes de densité  $-\delta n_e^{\min}/n_0$  estimées par le code RIC sur les noeuds de la maille et déduites de  $\Phi_A$  grâce à l'équation (3.24). Sur ces cartes, on représente aussi les courbes perpendiculaires au nombre d'onde local, qui sont les fronts d'onde. Elles sont représentées avec la couleur marron correspondant à  $\delta n_e^{\min} = 0$ , donc elles n'apparaissent pas là où l'amplitude de l'onde est petite. La couleur a été choisie pour correspondre à celle utilisée par les simulations

PIC, comme dans les figures 3.8 (c), (d) et (f). Ces figures représentent la densité du plasma qui a une périodicité spatiale correspondant au nombre d'onde local. On peut donc voir le front d'onde directement sur ces figures.

Il est aussi intéressant de constater que dans les figures 3.8 (a), (b) et (c), une très basse résolution spatiale a été suffisante pour obtenir un très bon accord avec les simulations PIC. C'est l'un des principaux avantages du code RIC par rapport au code PIC.

Pour rendre les comparaisons plus quantitatives, on calcule un équivalent du carré de la transformée de Fourier de la densité électronique, en utilisant la formule,

$$\langle \tilde{n}_e^2(k_x, k_y) \rangle = \sum_i k_i^4 \Phi_{A_i}^2, \quad (3.27)$$

où la somme porte sur tous les rayons localisés dans la région  $400 \leq x\omega_{\text{laser}}/c \leq 600$  et dont les nombres d'onde  $\vec{k}_i$  sont tels que  $|k_{x,y} - k_{x_i,y_i}| < 10^{-2}\omega_{\text{laser}}/c$ .

Les figures 3.9 (a), (b) et (c) représentent les cartes de  $\langle \tilde{n}_e^2(k_x, k_y) \rangle$  normalisées à leur valeur maximale aux temps  $t = -1.54\text{ps}$ ,  $t = -1.44\text{ps}$  et à  $t = -1.37\text{ps}$ . Elles sont comparées au carré de la transformée de Fourier de la densité obtenue dans les simulations PIC et reproduite sur les figures 3.9 (d), (e) et (f). A  $t = -1.54\text{ps}$ , l'étendue en  $k_y$  est la même dans les simulations PIC et RIC. A cet instant, l'onde plasma n'a pas encore déferlé, donc l'élargissement en  $k_y$  est uniquement dû à la courbure du front de phase. Cela nous permet de conclure que les simulations RIC donnent une estimation très précise des modes transverses résultant uniquement de la courbure du front de phase. Cependant, l'élargissement spectral en  $k_x$  du RIC est plus petit que celui calculé par le code PIC. Cela peut être dû à la prise en compte par le code PIC des variations longitudinales de l'amplitude de l'onde, qui ne sont pas découplées de celles dues à la variation spatiale de la fréquence, contrairement à un calcul RIC qui ne tient compte que des variations du nombre d'onde calculées par tracé de rayons.

A  $t = -1.44\text{ps}$ , l'élargissement en  $k_y$  obtenu par le code RIC est très similaire à celui déduit de la simulation PIC. Cela montre que cet élargissement est principalement dû à la courbure du front de phase, même si l'onde plasma a commencé à déferler dans la région  $400 \leq \omega_{\text{laser}}/c \leq 500$ . On peut néanmoins remarquer un maximum bien marqué dans le spectre de Fourier à  $k_y = 0.25$ , et un minimum à  $k_y = 0$ , qui sont absents de la carte de  $\langle \tilde{n}_e^2 \rangle$  calculé par RIC. Cela suggère qu'à  $t = -1.44\text{ps}$ , le spectre de la densité est affecté par la croissance des modes secondaires, surtout près de  $k_y = 0$ .

A  $t = -1.37\text{ps}$ , le carré de la transformée de Fourier calculé par PIC n'a de valeurs significatives que pour  $|yc/\omega_{\text{laser}}| \lesssim 0.6$ , ce qui correspond à l'élargissement en  $k_y$  pour la carte de  $\langle \tilde{n}_e^2 \rangle$  dans la figure 3.9 (c), calculée par RIC. Ainsi, même à

$t = -1.37$ ps, lorsque l'onde plasma a déferlé dans une grande région du domaine spatial, les caractéristiques principales de la transformée de Fourier de la densité résultent de la courbure du front de phase. On remarque cependant que le spectre du PIC s'étend jusqu'à  $|k_y \omega_{\text{laser}}/c| \approx 1$  contrairement à celui du RIC. On en conclut que ces grandes valeurs de  $k_y$  sont dues à la croissance de modes transverses instables.

A cause de la courbure du front de phase, l'onde plasma se propage à un angle moyen  $\theta$  non nul par rapport à la direction de propagation moyenne du faisceau laser (qui est selon  $x$ ). En ce qui concerne les résultats des simulations PIC, on estime  $\theta$  comme dans [Rousseaux *et al.* (2009)]. A  $t = -1.44$ ps et à  $t = -1.37$ ps  $\theta_{\text{PIC}} = \tan^{-1}(k_{y_0}/k)$ , où  $k_{y_0}$  correspond au maximum local du spectre de Fourier. On estime, lorsque  $t = -1.44$ ps,  $k_{y_0}c/\omega_{\text{laser}} \approx \pm(0.25 - 0.3)$  et  $\theta_{\text{PIC}} \approx \pm 10^\circ$ . Lorsque  $t = -1.37$ ps on a  $k_{y_0}c/\omega_{\text{laser}} \approx \pm(0.3 - 0.35)$  et  $\theta_{\text{PIC}} \approx \pm 12^\circ$ . Lorsque  $t = -1.54$ ps, on utilise pour  $k_{y_0}$  la largeur à mi-hauteur du spectre de Fourier, ce qui donne  $k_{y_0}c\omega_{\text{laser}} \approx \pm(0.15 - 0.2)$  avec  $\theta_{\text{RIC}} \approx \pm 6^\circ$ . Quant aux valeurs de  $\theta_{\text{RIC}}$ , elles sont calculées à l'aide de l'équation suivante,

$$\theta_{\text{RIC}} = \frac{\sum_i \theta_i k_i^4 \Phi_{A_i}^2}{\sum_i k_i^4 \Phi_{A_i}^2}, \quad (3.28)$$

où pour chaque rayon  $\theta_i = \tan^{-1}(k_{y_i}/k_{x_i})$ . De plus, la somme est limitée aux rayons situés dans le plan supérieur  $y > 0$  de façon à ce que  $\theta_{\text{RIC}} < 0$ . Les valeurs pour  $\theta_{\text{RIC}}$  dérivées de l'équation précédente sont représentées dans la figure 3.7. Lorsque  $t < -1.7$  ps, elles sont non nulles à cause de l'angle d'ouverture non nul du faisceau laser. La croissance de  $\theta_{\text{RIC}}$  et les valeurs relativement faibles qu'il prend lorsque  $-1.7 \leq t \leq -1.6$  est la conséquence de la réduction de la largeur du spectre dû à un gain Raman inhomogène. En effet, à ces temps, l'onde plasma est principalement amplifiée sur les rayons qui se trouvent près de l'axe  $x$ , pour lesquels la courbure est très faible. Lorsque  $-1.6 \leq t \leq -1.2$ ,  $\theta_{\text{RIC}}$  diminue à cause de la courbure du front de phase. Comme on peut le voir sur la figure 3.7, on trouve un excellent accord entre  $\theta_{\text{RIC}}$  et  $\theta_{\text{PIC}}$  à  $t = -1.54$  ps,  $t = -1.44$  ps et  $t = -1.37$  ps, ce qui montre à nouveau la pertinence de la méthode RIC pour calculer la courbure du front de phase d'une onde plasma adiabatique.

Après  $t = -1$  ps, on trouve que  $\theta_{\text{RIC}}$  commence à croître. Cela est dû au fait que l'onde plasma a déferlé sur une grande région du domaine et que seuls les rayons loin de l'axe n'ont pas été enlevés selon la procédure expliquée plus haut. Loin de l'axe l'intensité du laser est si faible que l'onde plasma est très peu amplifiée et donc il n'y a pratiquement pas de courbure du front de phase. Par ailleurs, lorsque l'onde plasma a déferlé presque partout, les résultats du RIC deviennent douteux, ils ne sont donc pas montrés ici.

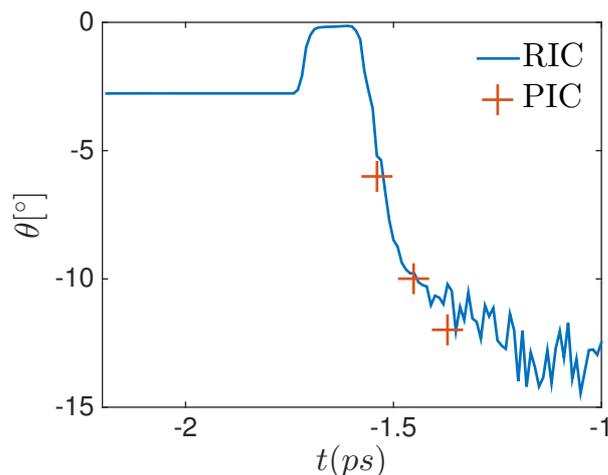


FIGURE 3.7 – L’angle moyen de propagation de l’onde plasma électronique par rapport à l’axe  $x$  dans le plan  $y > 0$  tel que dérivé d’une simulation PIC représenté par les croix et tel que dérivé d’une simulation RIC représenté par la courbe bleue.

La valeur maximale trouvée pour  $|\theta_{\text{RIC}}|$  est proche de  $14^\circ$ . C’est relativement petit, ce qui justifie l’approximation consistant à négliger la rotation du vecteur  $\vec{k}$  lors du calcul du décalage en fréquence non linéaire. Cependant, en utilisant la relation  $\vec{k}_s = \vec{k}_l - \vec{k}$ , où  $\vec{k}_s$  et  $\vec{k}_l$  sont respectivement les nombres d’onde diffusés et laser, on trouve que l’onde diffusée se propagerait à un angle proche de  $35^\circ$  par rapport à l’axe  $x$  lorsque  $\theta \approx 14^\circ$ . C’est un angle significatif qui montre que le décalage en fréquence non linéaire induit une diffusion transverse effective, non négligeable. Cela doit être pris en compte lors des expériences laser-plasma et lors de leur modélisation, de manière à prédire correctement la direction de rétrodiffusion, ainsi que pour estimer précisément l’impact de la diffusion Raman stimulée sur l’hydrodynamique du plasma.

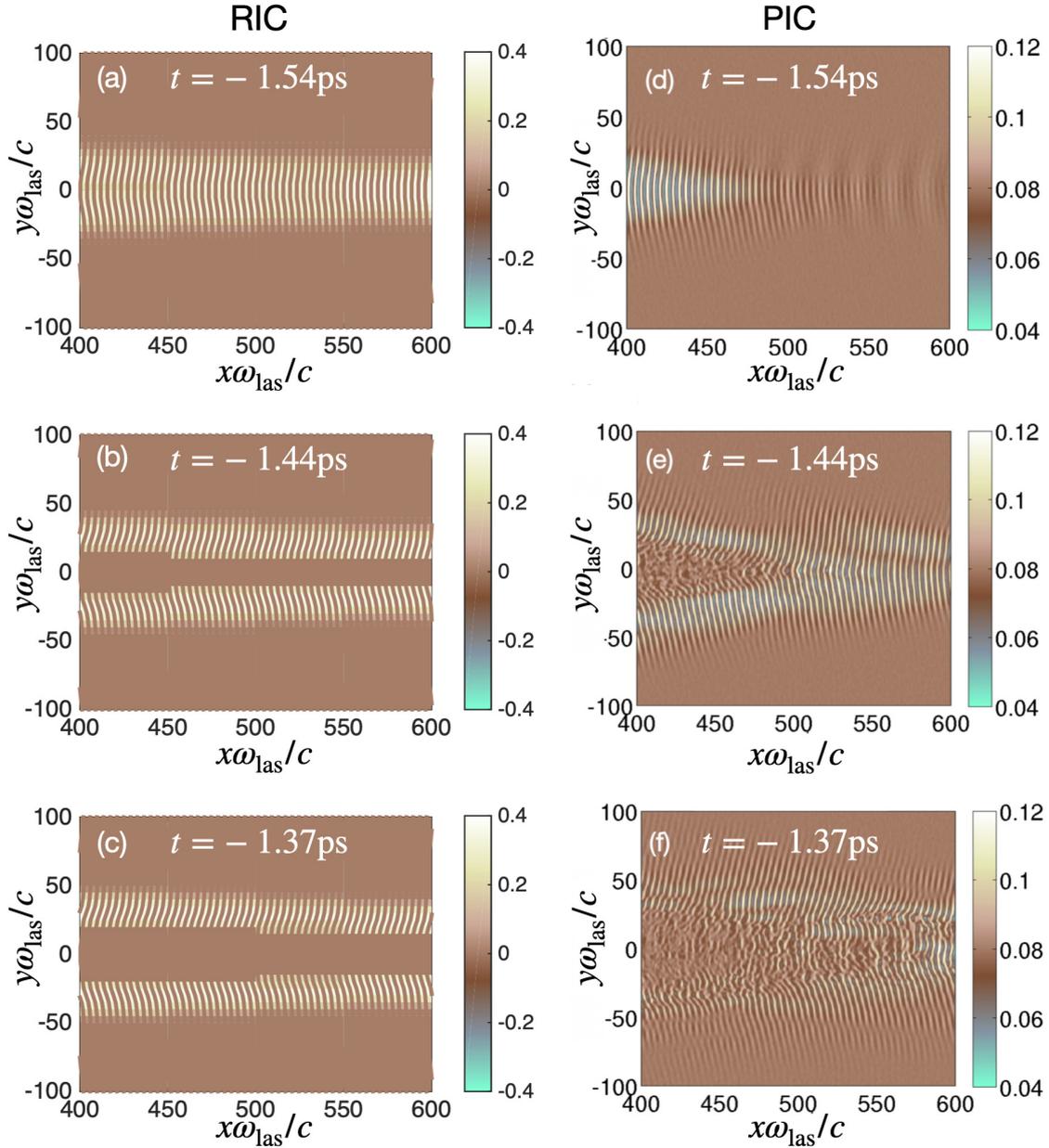


FIGURE 3.8 – Les figures (a), (b) et (c) représentent  $-\delta n_e^{\min}/n_0$ , calculées à l'aide de l'équation (3.26) respectivement aux temps  $t = -1.54$  ps,  $t = -1.44$  ps et  $t = -1.37$  ps. Sur ces figures sont aussi représentées les courbes perpendiculaires au front de phase en utilisant la même couleur que celle pour  $\delta n_e^{\min} = 0$ . Dans (d), (e) et (f), on représente la densité électronique normalisée à la densité critique respectivement aux temps  $t = -1.54$  ps,  $t = -1.44$  ps et  $t = -1.37$  ps, telle que qu'obtenue dans la simulation PIC de [Rousseaux *et al.* (2009)].

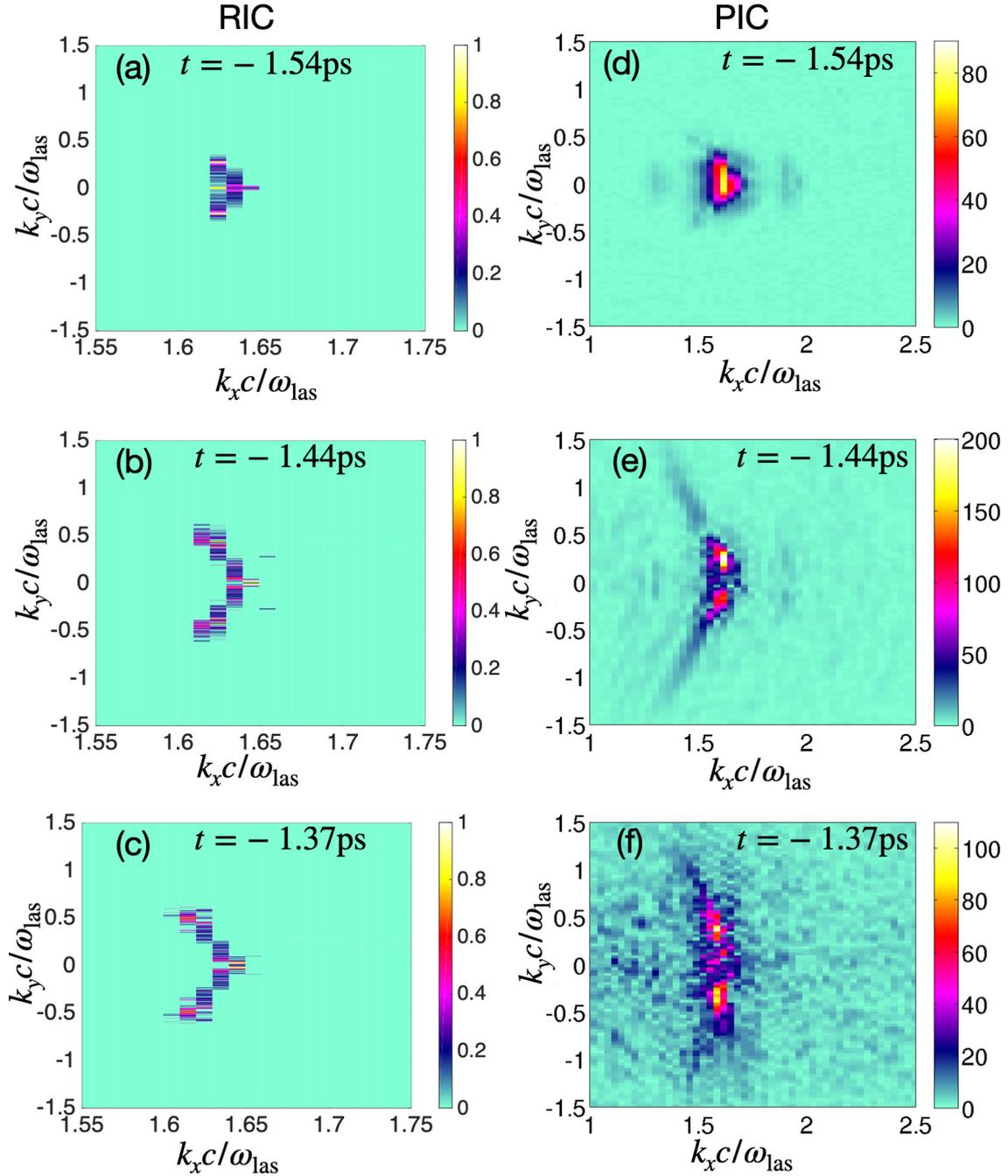


FIGURE 3.9 – Dans les figures (a), (b) et (c), on représente les valeurs de  $\langle \tilde{n}_e^2(k_x, k_y) \rangle$ , définie par l'équation (3.27), et normalisée à sa valeur maximale. Ces valeurs correspondent aux résultats de notre simulation RIC, respectivement aux temps  $t = -1.54$  ps,  $t = -1.44$  ps et  $t = -1.37$  ps. Dans les figures (d), (e) et (f), on représente le module au carré de la transformée de Fourier de la densité électronique en unités arbitraires, respectivement aux temps  $t = -1.54$  ps,  $t = -1.44$  ps et  $t = -1.37$  ps, telle qu'obtenue par une simulation PIC.

### 3.5 Conclusion

A la fin du chapitre 2, nous avons discuté la façon dont la théorie générale pouvait être simplifiée. Dans ce chapitre, nous sommes allés plus loin dans cette direction en essayant de trouver une formule analytique pouvant approcher précisément la forme spatiale du champ d'une onde adiabatique homogène et croissante. Nous avons montré que, lorsque  $k\lambda_D \lesssim 0.2$ , le champ calculé par Dawson permettait d'obtenir une telle approximation, sauf pour des amplitudes très proches de la limite de wave breaking.

Quant à cette limite, nous en avons rigoureusement trouvé une borne supérieure, tout au moins pour une onde croissant lentement. Par ailleurs, nous avons montré que cette borne supérieure, exprimée en terme de l'amplitude de la première harmonique du potentiel, suivait une loi très simple, linéaire par morceaux, en fonction de  $k\lambda_D$ . Nous avons de plus montré qu'elle était toujours inférieure à la limite trouvée par Dawson, mais toujours supérieure à celle obtenue par Coffey. Notre résultat sur la limite de wave breaking est un exemple de résultat théorique pouvant servir directement à la fusion par confinement inertiel, puisqu'il permet de prédire la saturation de la diffusion Raman stimulée.

Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons utilisé les résultats obtenus au chapitre 2 sur le décalage en fréquence non linéaire pour prédire la courbure du front de phase d'une onde plasma résultant de la SRS. Le modèle obtenu, qui repose sur la résolution d'une équation d'enveloppe et sur un tracé de rayons non linéaire et non stationnaire, est à la base du code Ray in Cell (RIC) que nous avons introduit. Nous avons utilisé ce code dans les conditions de l'expérience de Rousseaux *et al.* [Rousseaux *et al.* (2009)] et comparé les résultats RIC aux résultats PIC publiés dans le même article. Nous avons trouvé un excellent accord entre les deux types de simulation, en ce qui concerne l'extension transverse du spectre de Fourier de l'EPW, tout au moins avant qu'elle ne déferle. Après déferlement, la comparaison RIC/PIC a permis de discriminer les modes résultant de la courbure du front de phase de ceux croissant de manière instable. En particulier, nous avons pu montrer que l'extension transverse du spectre de Fourier de l'onde était principalement due à la courbure du front de phase.

Par ailleurs, la borne supérieure que nous avons obtenue pour la limite de wave breaking est très proche du niveau maximal de fluctuation de densité électronique trouvée dans la simulation PIC, juste avant que l'onde ne déferle. Nous n'avons cependant obtenu qu'une borne supérieure pour la limite de wave breaking. Pour aller plus loin dans la prédiction de cette limite, il nous faut maintenant nous intéresser au mécanisme physique qui en est à l'origine, la croissance de modes satellites instables. C'est ce que nous faisons dans les chapitres 4 et 5, où nous analysons la

stabilité des ondes adiabatiques décrites au chapitre 2. En particulier, nous résolvons dans le chapitre 4 les équations de la théorie rigoureuse correspondant à l'instabilité des particules piégées, introduite par Kruer, Dawson et Sudan (KDS) [Kruer *et al.* (1969)]. Dans le chapitre 5, nous comparons nos résultats théoriques à ceux de simulations cinétiques.



---

# 4

## Stabilité d'une onde adiabatique. Approche théorique

### 4.1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons obtenu une solution au couple d'équations Vlasov-Poisson en supposant que le potentiel scalaire était le potentiel d'une onde quasi-monochromatique, ce qui nous a permis d'utiliser l'approximation adiabatique. Dans ce chapitre, nous testons la pertinence de l'hypothèse d'onde quasi-monochromatique. Plus précisément, nous établissons la théorie rigoureuse, dont nous résolvons les équations numériquement, permettant de savoir si des modes satellites peuvent croître de manière instable dans un plasma où se propage une onde adiabatique, telle que définie au chapitre 2.

La croissance instable de modes satellites a été observée pour la première fois dans un plasma par Wharton Malmberg et O'Neil [Wharton *et al.* (1968)]. On l'a retrouvée par la suite dans des cavités radio-fréquence, dans les tubes à ondes progressives [Hartmann & Driscoll (2001)], en physique des plasmas lors de la propagation d'ondes quasi-monochromatiques dans la magnétosphère [Le Quéau (1987)] ou dans les lasers à électrons libres [Riyopoulos & Tang (1988); Sharp & Yu (1990)]. Comme observé dans de nombreuses expériences [Franklin *et al.* (1972); van Wakeren & Hopman (1972); Van Hoven & Jahns (1975); Starke & Malmberg (1978)], les modes satellites instables peuvent croître jusqu'à une amplitude comparable à celle de l'onde principale. On dit alors qu'elle se brise, ou qu'elle déferle. En effet, le

champ électrique total n'est plus quasi-monochromatique, si bien qu'il n'y a plus de sens à définir localement une amplitude ou une fréquence comme on le ferait pour une onde. En calculant de manière théorique la croissance de modes satellites, on devrait donc aboutir à une estimation très précise de la limite de wave breaking, dont on n'a trouvé qu'une borne supérieure au chapitre 3.

Dans toutes les situations évoquées plus haut, on a observé expérimentalement que l'écart en fréquence entre les modes satellites et l'onde principale était de l'ordre de la fréquence d'oscillation des particules piégées au fond du puits de potentiel de l'onde. Dans le cas de l'expérience de Wharton *et al.*, l'écart était même proportionnel à cette fréquence,  $\omega_B = \sqrt{eE_1 k/m}$ , où on a noté  $E_1$  l'amplitude de l'onde principale, supposée sinusoïdale. Ce comportement suggère que les particules piégées jouent un rôle primordial dans la croissance de l'instabilité. Comme on va le voir dans le paragraphe 4.2, c'est effectivement le cas. Cela a d'ailleurs été compris très tôt, dès l'article de Kruer Dawson et Sudan (KDS) [Kruer *et al.* (1969)], qui ont modélisé très simplement ce qu'ils ont appelé "l'instabilité des particules piégées". Les prédictions du modèle KDS sont néanmoins restées semi-quantitatives, que ce soit par rapport à l'expérience de Wharton *et al.* ou aux simulations numériques [Brunner *et al.* (2014)]. Il y a principalement deux hypothèses simplificatrices dans le modèle KDS. On suppose que les particules piégées peuvent être remplacées par une macroparticule oscillant au fond du puits de potentiel de l'onde et que les particules non piégées répondent linéairement à l'onde. Dodin a levé la première approximation pour introduire l'instabilité dite de masse négative [Dodin *et al.* (2013)]. Un des ingrédients essentiels de cette instabilité réside dans le fait que la période d'oscillation des particules piégées dépend de leur énergie. Cependant, dans son traitement théorique, Dodin suppose que les particules piégées restent près du minimum du champ électrique. Par ailleurs, Dodin suppose toujours une réponse linéaire de la part des électrons non piégés, et la comparaison entre les taux de croissance prédits par la théorie de Dodin et ceux mesurés numériquement n'est pas bonne. La théorie rigoureuse de l'instabilité des particules piégées, levant les deux approximations mentionnées plus haut, a pourtant été introduite peu de temps après le modèle KDS par Goldman [Goldman (1970)]. Cependant, cette théorie n'a été résolue que dans un cas simplifié d'une distribution discrétisée de type waterbag [Goldman & Berk (1971)]. On ne peut donc pas dire qu'il existe d'outil théorique permettant de prédire la croissance de modes satellites instables dans un cas réaliste. C'est ce qui a motivé le travail présenté dans ce chapitre, où nous construisons la théorie rigoureuse de l'instabilité des particules piégées pour une onde BGK. Cela veut dire, en particulier, que nous tenons compte des orbites exactes des électrons soumis à l'onde. Nous allons de plus considérer le cas où l'onde BGK résulte de la croissance d'une onde adiabatique, dont nous avons montré la pertinence vis-à-vis de la diffusion Raman

stimulée au chapitre 3. Nous résolvons ensuite numériquement les équations que nous avons obtenues pour en déduire les taux de croissance des modes instables, que nous comparons à ceux du modèle KDS et à ceux déduits de la théorie de Dodin. Ces comparaisons fourniront l'occasion de discuter de manière approfondie le rôle joué, dans le calcul des taux de croissance, par la discontinuité de la fonction de distribution au niveau de la séparatrice, illustrée sur la figure 2.3.

Le chapitre est organisé comme suit. Dans le paragraphe 4.2, nous exposons les hypothèses utilisées pour analyser la stabilité d'une onde plasma de grande amplitude, qui sera considérée comme une version simplifiée (BGK) de l'onde adiabatique étudiée au chapitre 2. Nous illustrons ensuite la croissance instable de modes satellites à l'aide de simulations cinétiques de type Vlasov, ce qui nous permettra de montrer précisément ce que l'on entend par une "onde brisée". Le paragraphe 4.3 est dédié au modèle KDS. Nous exposons de manière succincte les hypothèses du calcul, et nous en donnons une image physique simple. Nous indiquons ensuite ses prédictions en ce qui concerne les taux de croissance des modes instables. Dans la partie 4.4, nous présentons le mécanisme physique de l'instabilité de masse négative introduite par Dodin, ainsi que les résultats découlant de cette théorie, que nous comparons à ceux du modèle KDS. Dans la partie 4.5, nous dérivons la théorie rigoureuse de l'instabilité des particules piégées, exprimée en coordonnées action-angle. Cela nous mène à la relation de dispersion permettant de calculer les taux de croissance des modes instables, relation de dispersion que nous résolvons numériquement. Nous comparons aussi nos résultats à ceux du modèle KDS et de la théorie de Dodin. Dans le paragraphe 4.6, nous insistons sur le rôle joué par la discontinuité de la fonction de distribution,  $f(I)$ , au niveau de la séparatrice, ainsi que par la sensibilité des taux de croissance aux variations rapides que l'on peut imposer à  $f(I)$  autour de la séparatrice. Nos conclusions en ce qui concerne cette étude théorique sont résumées dans la partie 4.7.

## 4.2 La croissance instable de modes satellites

Dans tout ce chapitre, ainsi que dans le chapitre 5, nous nous restreignons à une géométrie unidimensionnelle. De plus, nous accordons une attention toute particulière à la stabilité d'une version simplifiée, BGK, d'une onde adiabatique telle que définie au chapitre 2. Plus précisément, nous supposons que le champ électrique de l'onde est de la forme,  $\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}[\varphi(x, t)]$ , où  $\mathcal{E}(\varphi + 2\pi) = \mathcal{E}(\varphi)$ , le profil du champ  $\mathcal{E}$ , c'est-à-dire sa dépendance en fonction de  $\varphi$ , étant telle que calculée au chapitre 2. En particulier, lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ , on peut supposer  $\mathcal{E} = E_1 \sin(\varphi)$ . De plus, et surtout, la fonction de distribution électronique, et la fréquence de l'onde, sont celles calculées au chapitre 2, une fois le nombre et l'amplitude de l'onde fixés.

Le fait de considérer une onde BGK simplifie grandement le problème, puisqu'il procure au système physique une invariance par translation d'un multiple de  $2\pi$  en  $\varphi$ . Ainsi, par le théorème de Floquet, si un mode satellite croît de manière instable, on s'attend à ce que son champ électrique soit celui d'une onde de Bloch, c'est-à-dire qu'il s'écrive sous la forme,

$$\delta E(x, t) = e^{i(\kappa_1 \varphi - \omega_1 t)} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{E}_n(t) e^{in\varphi} + c.c., \quad (4.1)$$

où  $\omega_1$  est *a priori* un nombre complexe, et  $-1/2 \leq \kappa_1 < 1/2$ . De plus, dans le régime linéaire de l'instabilité, les amplitudes  $\tilde{E}_n$  sont supposées constantes, le taux de croissance du mode satellite étant alors donné par la partie imaginaire de  $\omega_1$ .

La forme Eq. (4.1) pour le champ électrique d'un mode satellite a été rigoureusement prouvée par Goldman dans [Goldman (1970)], lorsque  $\varphi(x, t) = kx - \omega t$ , où  $k$  et  $\omega$  sont des constantes. Dans les chapitres 4 et 5 nous nous limitons à une telle variation spatio-temporelle pour  $\varphi$ . Ainsi, nous supposons implicitement que, pour une onde adiabatique, les taux de croissance des modes satellites peuvent être calculés localement en assimilant l'onde adiabatique à une onde BGK, dont l'amplitude et le nombre d'onde sont fixés à leurs valeurs locales. Néanmoins, nous ne discuterons pas ici le régime de validité de cette hypothèse que nous admettons simplement.

La figure 4.1 illustre la variation du champ électrique sous l'effet de la croissance instable de modes satellites, telle que calculée par un code Vlasov. Dans cette simulation, on crée une onde électronique de grande amplitude à l'aide d'un forçage extérieur. Plus précisément, on remplace dans l'équation de Vlasov le potentiel auto-cohérent déduit de l'équation de Poisson,  $\phi_{ac}$ , par le potentiel  $\phi_{ac} + \phi_f$ . Le champ électrique correspondant au forçage vaut  $eE_f/kT = \cos[kx - \omega t] \times$  enveloppe, où  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\omega = 1.2\omega_{pe}$ , ce qui crée une EPW de même fréquence et même longueur d'onde. L'enveloppe s'écrit

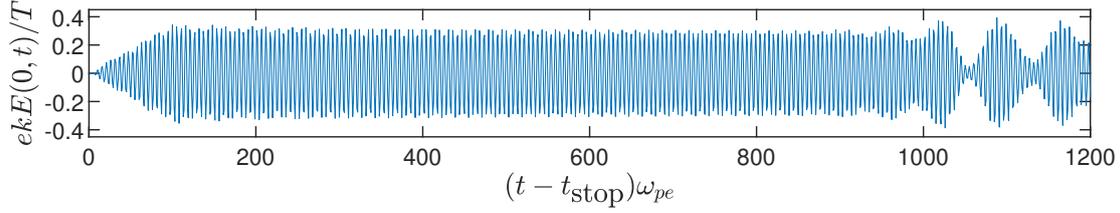


FIGURE 4.1 – Champ électrique en  $x = 0$  en fonction du temps pour une onde longitudinale forcée pendant  $\omega_{pe}t_{\text{stop}} = 100$ , puis qu'on laissé se propager librement jusqu'à ce qu'elle se brise lorsque  $\omega_{pe}(t - t_{\text{stop}}) \approx 1000$  sous l'effet de la croissance instable de modes secondaires. Après cet instant, le champ électrique total, somme de celui de l'onde et de celui des modes satellites, n'est plus quasi-monochromatique.

$7.5 \times 10^{-3} \times [\tanh[R(2t/t_{\text{ramp}} - 1)] - \tanh\{R[2(t - t_{\text{stop}})/t_{\text{ramp}} - 1]\}]$ , avec  $R = 4$ ,  $\omega_{pe}t_{\text{stop}} = 100$  et  $\omega_{pe}t_{\text{ramp}} = 10$ , ce qui correspond à une rampe pendant  $t_{\text{ramp}}$  après quoi l'amplitude du forçage est essentiellement constante jusqu'à  $t_{\text{stop}}$ , puis nulle après un temps légèrement supérieur à  $t_{\text{stop}}$  (voir la figure 5.3). L'amplitude du champ électrique de l'EPW, juste après la coupure du forçage, vaut  $eE_1/kT = 0.33$ . On peut observer sur la figure 4.1 que le champ électrique de l'onde oscille de manière très régulière, à amplitude constante, jusqu'à  $\omega_{pe}(t - t_{\text{stop}}) = 800$ . A partir de  $\omega_{pe}(t - t_{\text{stop}}) \gtrsim 900$ , on peut clairement voir des modulations rapides dans l'amplitude du champ électrique. Par ailleurs, bien que cela soit moins évident sur la figure 4.1, la fréquence du champ est aussi modulée. On ne peut alors plus associer au champ électrique une amplitude et une fréquence lentement variables, caractéristiques d'une onde. On dit alors que l'onde plasma s'est brisée, ou qu'elle a déferlé, par analogie (imparfaite) avec une vague qui déferle lorsqu'elle atteint le rivage, c'est-à-dire pour laquelle on ne sait plus associer un mouvement fluide cohérent.

### 4.3 Modèle KDS

Dans ce paragraphe, nous ne décrivons que rapidement le modèle de Kruer, Dawson et Sudan (KDS) [Kruer *et al.* (1969)], que l'on retrouvera comme limite de notre calcul général. Ce modèle a été introduit pour interpréter l'expérience de Wharton *et al.* [Wharton *et al.* (1968)], et expliquer la croissance de modes satellites, telle qu'illustrée sur la figure 4.1. Le modèle repose essentiellement sur l'échange d'énergie entre les électrons piégés et le champ perturbatif  $\delta E$  du mode satellite, lors du mouvement d'oscillation de ces électrons dans le puits de potentiel de l'onde principale. De plus, KDS font l'hypothèse forte que, à l'intérieur de chaque puits de potentiel, l'ensemble des particules piégées peut être représenté par une macroparticule, comme illustré sur la figure 4.2.

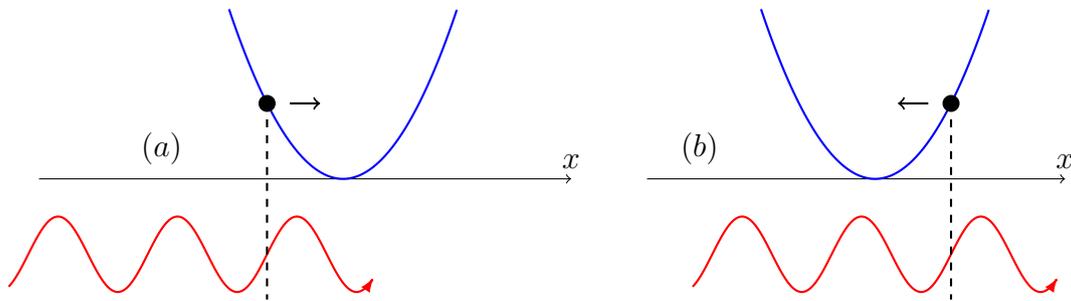


FIGURE 4.2 – Interaction de la macroparticule, représentant l'ensemble des électrons piégés, avec le potentiel de l'onde principale (parabole bleue) et avec le champ du mode satellite (sinusoïde rouge). Dans le mouvement allant de **(a)** à **(b)**, la macroparticule bouge dans le même sens que l'onde et voit un champ  $\delta E$  quasi constant. Dans le cas considéré, le courant des électrons piégés  $j_T$  est tel que  $j_T \delta E < 0$ . Donc, les électrons piégés cèdent de l'énergie au champ. Lorsque la macroparticule oscille dans l'autre sens, elle voit un champ  $\delta E$  dont la valeur change au cours du temps. En conséquence,  $j_T \delta E$  prend une valeur moyenne plus faible que dans le cas du trajet **(a)**  $\rightarrow$  **(b)**. Il en résulte un gain net d'énergie pour le champ  $\delta E$ .

Supposons que, dans le référentiel de l'onde, le champ  $\delta E$  se déplace d'une longueur d'onde pendant une période d'oscillation,  $2\pi/\omega_B$ , dans le puits de potentiel de l'onde. Quand cette condition est satisfaite, lorsque la macroparticule se déplace dans le sens de  $\delta E$  lors de son oscillation dans le puits de potentiel de l'onde, elle voit un champ  $\delta E$  quasi constant. Supposons cette valeur du champ positive, comme dans le cas de déplacement de **(a)** à **(b)** sur la figure 4.2. Dans ce cas, le courant des électrons piégés,  $j_T$ , est tel que  $j_T \delta E < 0$ . Donc, le champ  $\delta E$  gagne de l'énergie. Quand la macroparticule oscille dans l'autre sens, le signe du champ  $\delta E$  qu'elle voit ne cesse de changer, si bien que la valeur moyenne de  $j_T \delta E$  est plus petite que lors du déplacement de **(a)** à **(b)**. Il en résulte un gain net d'énergie pour le champ  $\delta E$ ,

qui va donc croître.

Maintenant que nous avons donné l'image physique, inspirée de [Tsunoda & Malmberg (1989)], de l'instabilité telle que décrite par KDS, donnons une description rapide du modèle théorique, que nous retrouverons dans le paragraphe 4.5 comme cas limite de la théorie générale. Dans ce modèle, on considère la perturbation par un champ  $\delta E(x, t)$  d'une onde BGK dont le champ électrique est,

$$\mathcal{E}(x, t) = E_1 \sin(kx - \omega t). \quad (4.2)$$

Dans un premier temps, on montre que le champ perturbatif  $\delta E(x, t)$  s'écrit forcément comme la superposition d'ondes de Bloch, données par l'équation (4.1). On note par ailleurs  $x_{n_0}(t) = 2n\pi/k + (\omega/k)t$  la position du  $n^{\text{ième}}$  minimum du champ électrique de l'onde BGK. Cela correspond à la position du point O au centre de la  $n^{\text{ième}}$  zone de piégeage dans l'espace des phases. C'est aussi la position du  $n^{\text{ième}}$  point d'équilibre stable pour le mouvement électronique, dans le référentiel de l'onde. Comme déjà indiqué plus haut, autour de chaque minimum  $x_{n_0}$ , on assimile l'ensemble des particules piégées à une seule macro-particule, de position  $x_n(t) = x_{n_0}(t) + \xi_n(t)$ , où  $\xi_n$  est supposé suffisamment petit pour que l'on assimile  $\sin(k\xi_n)$  à  $k\xi_n$  (voir la figure 4.3).

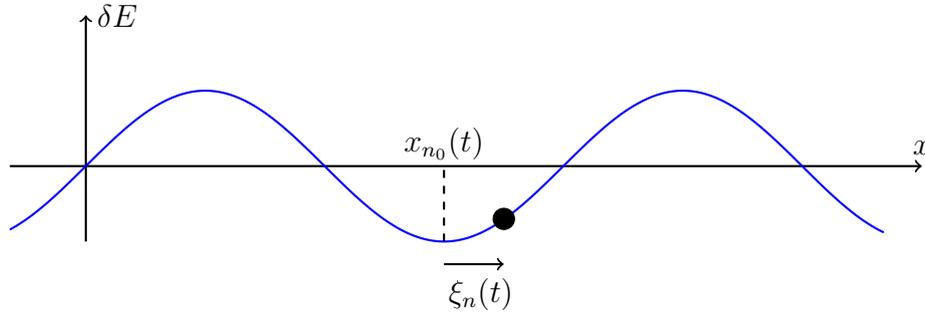


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du champ électrique de l'onde BGK dans le modèle KDS ainsi que la position de la macro-particule représentant l'ensemble des électrons piégés dans un puits de potentiel donné.

Le mouvement de cette macro-particule est alors calculé de manière approchée en résolvant l'équation de Newton suivante,

$$\frac{d^2 \xi_n}{dt^2} = -\omega_B^2 \xi_n - \frac{e}{m} \delta E[x_{n_0}(t), t], \quad (4.3)$$

où  $\omega_B = \sqrt{ekE_1/m}$  est la fréquence d'oscillation d'une particule piégée au fond du puits de potentiel de l'onde.

En utilisant le fait que  $\delta E$  est la superposition d'ondes de Bloch, Eq. (4.1), on déduit alors facilement de la résolution de l'équation (4.3) que la transformée de

Fourier de la densité de charges induite par les électrons piégés vaut,

$$\hat{\rho}_T(k', \omega') = \frac{ik\varepsilon_0\omega_T^2}{\omega'^2 - \omega^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{E}(k' + nk, \omega' + n\omega), \quad (4.4)$$

où  $\omega_T^2 = n_T e^2 / \varepsilon_0 m$ ,  $n_T$  est la densité d'électrons piégés et  $\omega_T$  peut être vue comme la fréquence plasma des électrons piégés. Quant à  $\hat{E}(k', \omega')$ , il représente la transformée de Fourier du champ électrique,  $k'$  et  $\omega'$  étant calculés dans le référentiel du laboratoire. Par rapport aux notations de l'équation (4.1),  $k' = \kappa_1 + k$  et  $\omega' = \kappa_1\omega + \omega_1$ .

Quant aux électrons non piégés, on suppose qu'ils répondent de manière linéaire au champ, c'est-à-dire que la transformée de Fourier de la densité de charges qu'ils induisent vaut,

$$\hat{\rho}_u(k', \omega') = -ik\varepsilon_0\chi(k', \omega')\hat{E}(k', \omega'), \quad (4.5)$$

où  $\chi$  est donnée par l'équation (2.61),  $v_\phi^{\text{lin}}$  étant remplacé par  $\omega'/k'$ . De plus, on remplace  $\chi$  par sa valeur approchée dans la limite fluide,  $\omega'/k' \gg v_{th}$ ,  $\chi \approx -\omega_{pe}^2 / (\omega'^2 - 3k'^2 v_{th}^2)$ .

En incorporant les valeurs trouvées pour  $\hat{\rho}_T$  et  $\hat{\rho}_u$  dans l'équation de Gauss, on obtient la relation de dispersion,  $\det(M) = 0$ , où  $M$  est un déterminant infini dont les éléments sont

$$M_{nm} = \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)\varepsilon_L(k' + nk, \omega' + n\omega)} - \delta_{mn}. \quad (4.6)$$

Ici  $\delta_{mn}$  est le symbole de Kronecker, valant 1 si  $n = m$  et 0 sinon, et  $\varepsilon_L = 1 - \omega_{pe}^2 / (\omega'^2 - 3k'^2 v_{th}^2)$ . De plus, KDS ne retiennent dans le déterminant que les termes résonnants,  $n = 0$  ou  $n = 2$ , si bien que leur relation de dispersion devient,

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)\varepsilon_L(k', \omega')} - 1 & \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)\varepsilon_L(k', \omega')} \\ \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)\varepsilon_L(k - 2k, \omega' - 2\omega)} & \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)\varepsilon_L(k - 2k, \omega' - 2\omega)} - 1 \end{array} \right| = 0, \quad (4.7)$$

ce qui s'écrit

$$1 = \frac{\omega_T^2}{(\omega_1^2 - \omega_B^2)} \left[ \frac{1}{\varepsilon_L(k', \omega')} + \frac{1}{\varepsilon_L(k - 2k, \omega' - 2\omega)} \right]. \quad (4.8)$$

Pour résoudre la relation de dispersion Eq. (4.8), il nous faut estimer  $\omega_T$ , ce que l'on fait à partir d'une version simplifiée de la fonction de distribution adiabatique calculée au chapitre 2. Plus précisément, en utilisant les résultats du chapitre 2 dans le cas d'un potentiel sinusoïdal, en assimilant  $v_\phi^*$  à la vitesse de phase linéaire,  $v_\phi^{\text{lin}}$ ,

on obtient pour un plasma initialement Maxwellien,

$$\frac{\omega_T^2}{\omega_p^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{th}} \int_0^{kI_s} \left[ e^{-(kI+v_\phi^{\text{lin}})^2/2v_{th}^2} + e^{-(kI-v_\phi^{\text{lin}})^2/2v_{th}^2} \right] d(kI), \quad (4.9)$$

où, pour une onde sinusoïdale,  $kI_s = (4/\pi)\sqrt{eE_1/mk}$  [Bénisti & Gremillet (2007)]. Par cohérence avec l'approche KDS, on calcule  $v_\phi^{\text{lin}}$  en résolvant la relation de dispersion de Bohm et Gross [Bohm & Gross (1949)],  $v_\phi^{\text{lin}}/v_{th} \approx \sqrt{1 + 3(k\lambda_D)^2/k\lambda_D}$ .

La figure 4.4 illustre les résultats obtenus à partir de la valeur de  $\omega_T^2$  déduite de l'équation (4.9) en résolvant numériquement la relation de dispersion Eq. (4.8) par une méthode de Newton. On peut clairement voir que le taux de croissance maximum est proportionnel à  $\sqrt{\phi_1}$ , c'est-à-dire à  $\omega_B$ . Par ailleurs, l'écart entre la fréquence d'un mode satellite et celle de l'onde plasma principale vaut  $\Delta\omega = \kappa_1\omega + \omega_1$ . Lorsqu'il est évalué pour la valeur de  $\kappa_1$  correspondant au taux de croissance maximum on trouve, lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ ,  $\Delta\omega/\omega_B \approx 0.9953$  lorsque  $\phi_1 = 0.1$ ,  $\Delta\omega/\omega_B \approx 0.9933$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$  et  $\Delta\omega \approx 0.9964$  lorsque  $\phi_1 = 0.5$ .  $\Delta\omega/\omega_B$  est donc très proche de l'unité, en accord avec les résultats des expériences de Wharton *el al.* Cependant, des comparaisons plus fines, en ce qui concerne les spectres des taux de croissance et les valeurs des taux de croissance maximum, montrent des difficultés dans l'utilisation du modèle KDS, qui seront discutées dans les paragraphes 4.6 et 5.3.

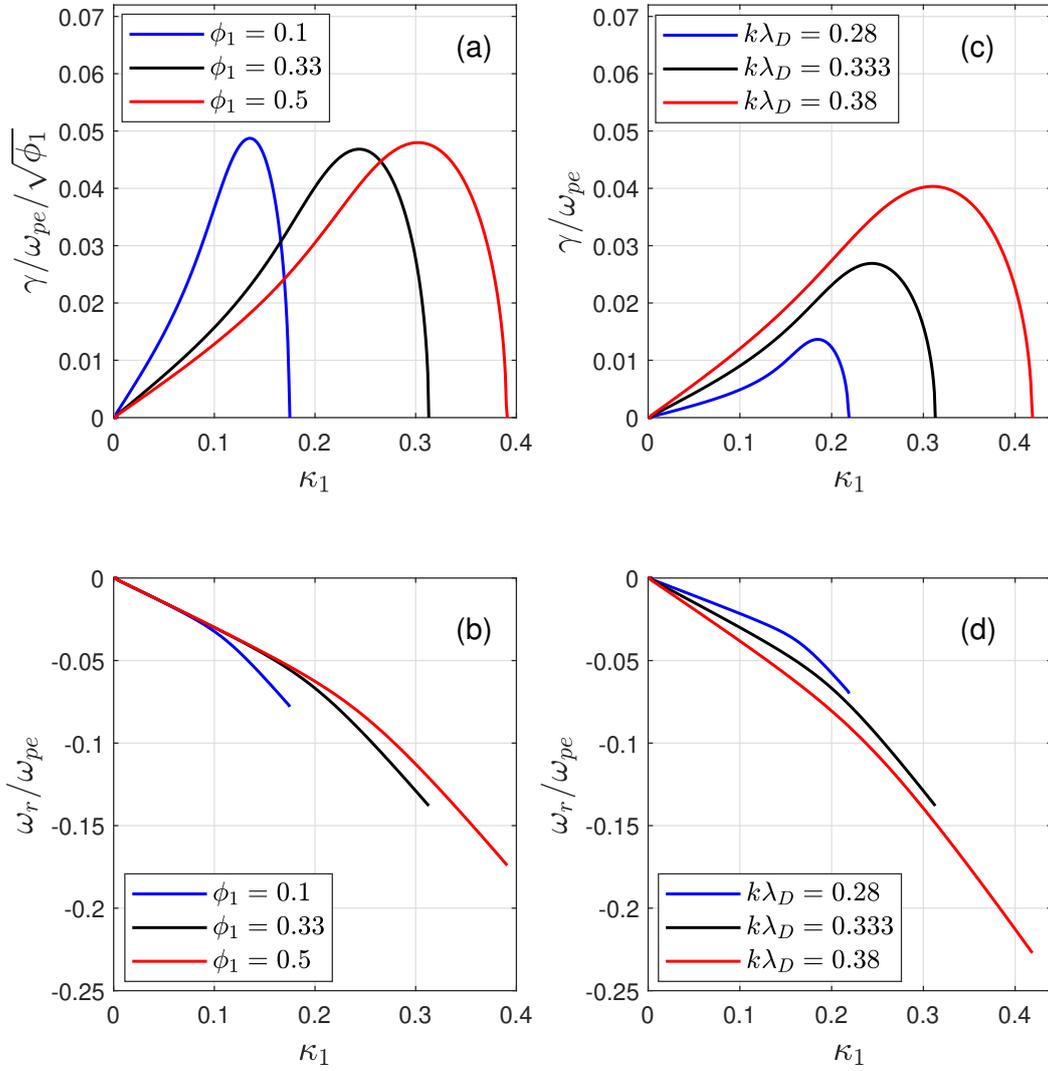


FIGURE 4.4 – (a) Taux de croissance  $\gamma = \Im(\omega_1)$  de l'instabilité des particules piégées, normalisé à  $\omega_{pe}\sqrt{\phi_1}$ , en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , pour différentes valeurs de l'amplitude normalisée,  $\phi_1 = eE_1/kT$ . (b) Fréquence réelle  $\omega_r = \Re(\omega_1)$  en fonction de  $\kappa_1$ , lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , à différentes amplitudes. La relation de dispersion s'interrompt brusquement car le taux de croissance atteint une tangente horizontale et n'admet plus de solutions. (c) Variation de  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$ , pour différents  $k\lambda_D$ . On remarque la croissance de  $\gamma$  avec  $k\lambda_D$ . (d) Variation de  $\omega_r$  en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$ , pour différents  $k\lambda_D$ .

## 4.4 Approche de Dodin et instabilité de masse négative

En 2013, Ilya Dodin revisite le modèle KDS en tenant compte de la variation, en fonction de leur énergie, de la fréquence d'oscillation des électrons piégés dans le puits de potentiel de l'onde [Dodin *et al.* (2013)]. Cette variation entraîne un effet intéressant qu'il a appelé Négative Mass Instability ou NMI, que nous allons maintenant décrire physiquement.

Dans le cas d'une onde sinusoïdale, la période d'une orbite piégée vaut  $T = 2\pi/\Omega_0(H)$  avec [Bénisti & Gremillet (2007)],

$$\Omega_0(H) = \frac{\pi\omega_B}{2K(m_1)}, \quad (4.10)$$

où  $m_1 = [H + \phi_1]/2\phi_1$  et  $K(m_1)$  est l'intégrale elliptique de deuxième espèce [Abramowitz & Stegun (1972)]. Dans la limite où  $m_1 \rightarrow 0$ , c'est-à-dire pour une orbite en fond de puits, telle que  $H \approx -\phi_1$ , on trouve bien  $\Omega_0 \approx \omega_B$ . La variation de  $\Omega_0/\omega_B$  en fonction de  $m_1 = (H + \phi_1)/2\phi_1$  est illustrée sur la figure 4.5. On peut voir que  $\Omega_0$  est une fonction décroissante de  $H$ .

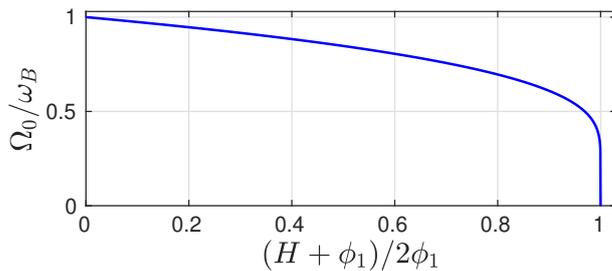


FIGURE 4.5 – La fréquence de rotation,  $\Omega_0(H)$ , normalisée à  $\omega_B$ , en fonction de  $(H + \phi_1)/2\phi_1$ . On peut voir la décroissance rapide vers 0 lorsque l'orbite de l'électron s'approche de la séparatrice, c'est-à-dire  $H \rightarrow \phi_1$ .

Considérons maintenant une paire d'électrons tournant sur la même orbite dans l'espace des phases, à la fréquence  $\Omega_0(H)$ , mais qui sont déphasés, le premier étant en avance sur le second. Cette situation est représentée sur la figure 4.6. Supposons que l'onde principale soit perturbée par un potentiel ayant la même vitesse de phase qu'elle. Dans la situation représentée sur la figure 4.6, le premier électron subit une force allant dans le sens de son mouvement et gagne donc de l'énergie. Son énergie passe de  $H$  à  $H_+ > H$ . D'après les variations de  $\Omega_0(H)$  illustrés sur la figure 4.5,  $\Omega_0(H_+) < \Omega_0(H)$ . La vitesse de rotation de l'électron piégé décroît, il va donc moins vite. Ainsi, bien qu'ayant subi une force allant dans le sens de son mouvement, l'électron se trouve ralenti. Tout se passe donc comme s'il avait une masse négative. Le second électron subit une force allant dans le sens opposé à sa vitesse et voit son énergie décroître. Il passe donc sur une orbite de plus basse énergie, et voit sa vitesse de rotation croître. Il est accéléré et rattrape donc son retard par rapport au premier électron. Les électrons ont donc tendance à se grouper, comme remarqué sur les simulations PIC de [Dodin *et al.* (2013)].

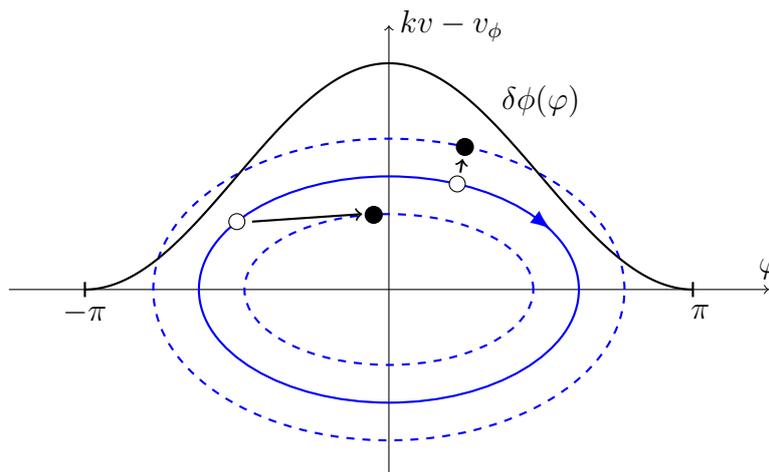


FIGURE 4.6 – Représentation schématique de la NMI. Deux électrons tournent sur la même orbite et sont soumis à la perturbation de potentiel  $\delta\phi(\varphi)$ . Le premier électron, en avance sur le deuxième, est sur la partie décroissante du potentiel  $\delta\phi(\varphi)$ . Il subit une force allant dans le même sens que sa vitesse et voit donc son énergie croître. Cela le fait passer sur une orbite d'énergie supérieure  $H_+$ . Le second est sur la partie croissante du potentiel, il perd de l'énergie et passe sur une orbite d'énergie inférieure  $H_-$ . La décroissance de la fréquence de rotation  $\Omega_0$  avec l'énergie ralentit l'électron qui était en avance et accélère celui qui était en retard, ce qui tend à les grouper.

L'instabilité de masse négative aboutit à la croissance d'une déformation du potentiel de l'onde, mais pas à la croissance des modes satellites. Les deux effets se développent généralement de manière simultanée, et une théorie générale de la stabilité d'une onde BGK doit prendre en compte à la fois la NMI et la croissance de modes satellites. Si, à partir d'une telle théorie, on trace les taux de croissance en fonction de  $\kappa_1$ , comme dans la figure 4.4, on voit qu'il y a une instabilité de masse négative si le taux de croissance est non nul lorsque  $\kappa_1 = 0$ . Pour n'observer que la NMI, il faut imposer des conditions périodiques, de période  $2\pi/k$ . En effet, avec une telle périodicité, seuls les nombres d'onde qui sont des multiples de  $k$  peuvent exister, ce qui interdit l'existence d'un champ électrique de la forme donnée par l'équation (4.1). Ainsi, on observe généralement la NMI dans des simulations Vlasov où on impose une telle périodicité, par exemple pour une onde forcée par laser [Afeyan *et al.* (2014)], ou lorsque la distribution initiale des électrons piégés est une distribution de Dirac [Hara *et al.* (2015)].

Présentons maintenant le principe de la théorie proposée par Dodin, ainsi que les hypothèses qu'il utilise. Une fois de plus, nous n'entrerons pas dans les détails des calculs, puisqu'ils apparaîtront comme un cas limite de ceux de la théorie générale présentée au paragraphe 4.5.

Pour calculer la densité de charge des particules piégées, Dodin résout une version linéarisée de l'équation de Vlasov, exprimée en coordonnées action-angle. Il exprime

donc la fonction électronique sous la forme,  $f_{\text{tot}}(I, \theta, t) = f(I) + \delta f(I, \theta, t)$ , et résout l'équation de Vlasov pour  $\delta f$ , en ne retenant que les termes linéaires en  $\delta f$ . Cette méthode est exactement la même que celle que nous utilisons au paragraphe 4.5, et que nous détaillerons dans quelques lignes. Néanmoins, pour le calcul de la densité de charges induite par les électrons piégés, Dodin utilise l'approximation,  $\exp(i\kappa_1\varphi) \approx 1 + i\kappa_1\varphi$ , qui simplifie grandement les calculs, mais que nous n'utiliserons pas dans notre théorie.

En ce qui concerne les électrons non piégés, tout comme dans le modèle KDS, Dodin suppose une réponse linéaire au champ. Il suppose donc que  $\hat{\rho}_u(k', \omega')$  est donnée par l'équation (4.5), où  $\chi(k', \omega')$  est donné par l'équation (2.61),  $v_\phi^{\text{lin}}$  étant remplacée par  $\omega'/k'$ . Cependant, contrairement au modèle KDS, il n'utilise pas l'approximation fluide pour  $\chi$ . Le fait de ne pas utiliser cette approximation peut changer significativement le taux de croissance comme on peut le voir sur la figure 4.7.

A l'aide des hypothèses que nous venons d'évoquer, Dodin aboutit à la relation de dispersion suivante,

$$\boxed{1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\epsilon_{\text{eff}}} \int_0^{I_s} \frac{I f'(I)}{\Omega_0^2[H(I)] - \omega'^2} dI = 0,} \quad (4.11)$$

où

$$1/\epsilon_{\text{eff}} = \sum_n 1/\epsilon_L(k' + nk, \omega' + n\omega). \quad (4.12)$$

La relation de dispersion Eq. (4.11) a été résolue numériquement par divers auteurs [Dodin *et al.* (2013); Brunner *et al.* (2014); Hara *et al.* (2015)], pour des fonctions de la forme  $f(I) = (n_T/n_0)\delta(I - I_0)$ , où  $(n_T/n_0)$  est la fraction d'électrons piégés. L'action  $I_0$  pouvait varier de  $I_0 = 0$  auquel cas les particules étaient supposées au fond du puits de potentiel, ce qui permettait de retrouver la relation de dispersion KDS, jusqu'à des valeurs proches de  $I_s$ , où le développement d'une instabilité de type NMI a été observé par Hara et al. [Hara *et al.* (2015)]. Dans ce manuscrit, nous résolvons l'équation (4.11) en choisissant la fonction de distribution des électrons piégés de manière similaire au choix fait pour le modèle KDS,

$$f(I) = \frac{e^{-(kI+v_\phi^{\text{lin}})^2/2v_{th}^2} + e^{-(kI-v_\phi^{\text{lin}})^2/2v_{th}^2}}{\sqrt{2\pi}v_{th}}. \quad (4.13)$$

Cependant, nous calculons  $v_\phi^{\text{lin}}$  soit à partir de la relation de Bohm et Gross (c'est-à-dire en approchant  $\epsilon_L$  par sa valeur fluide), soit en résolvant l'équation (2.61), ce qui veut dire que l'on garde l'expression cinétique de  $\epsilon_L$  (dans la limite adiabatique). Sur les figures 4.7 et 4.8, on compare les résultats obtenus en choisissant  $\epsilon_L^{\text{fluide}}$  ou  $\epsilon_L^{\text{cinétique}}$ . On constate que l'écart relatif entre les taux de croissance peut atteindre

50%. C'est proche de l'écart entre les fractions d'électrons piégés calculées à partir des valeurs de  $v_\phi^{\text{lin}}$  fluide ou cinétique. Par ailleurs, on peut voir sur la figure 4.7 (c) et 4.8 (c) l'apparition de la NMI lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $k\lambda_D = 0.38$  si on utilise  $\epsilon_L^{\text{cinétique}}$ , alors que ce n'est pas le cas lorsqu'on calcule  $v_\phi^{\text{lin}}$  à partir de  $\epsilon_L^{\text{fluide}}$ . Les résultats présentés sur les figures 4.7 et 4.8 ont été obtenus en supposant que le potentiel de l'onde est sinusoïdal, et en ne retenant que les termes  $n = -2$ ,  $n = -1$  et  $n = 0$  dans le calcul de  $\epsilon_{\text{eff}}$  Eq. (4.12).

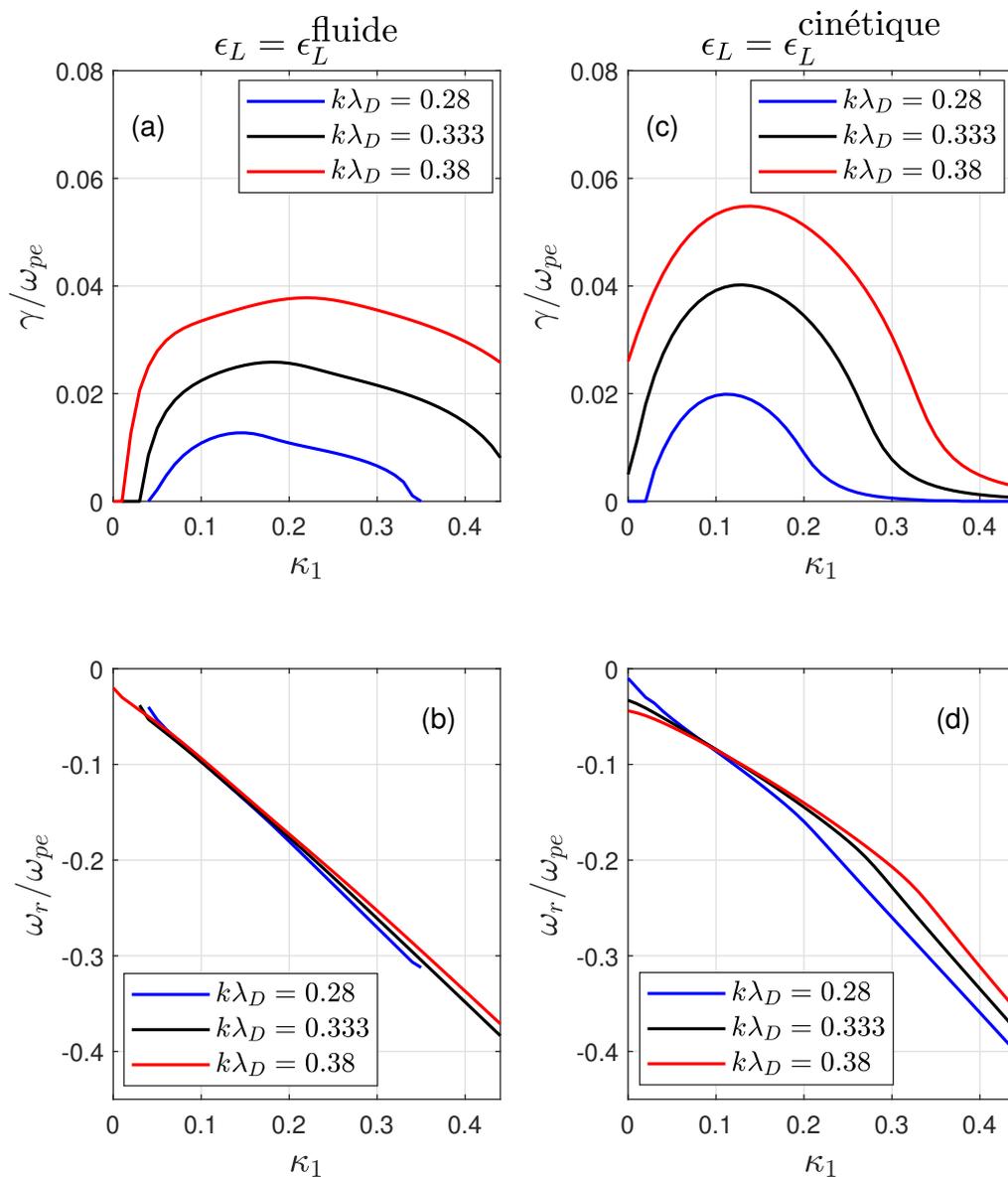


FIGURE 4.7 – (a) Taux de croissance  $\gamma = \Im(\omega_1)$  normalisé à  $\omega_{pe}$ , pour le modèle de Dodin, en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , pour différentes valeurs de l'amplitude normalisée,  $\phi_1 = eE_1/kT$ . (b) Fréquence réelle  $\omega_r = \Re(\omega_1)$  en fonction de  $\kappa_1$ , lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , à différentes amplitudes. La relation de dispersion s'interrompt brusquement car le taux de croissance atteint une tangente horizontale et n'admet plus de solutions. (c) Variation de  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$ , pour différents  $k\lambda_D$ . On peut remarquer l'apparition de la NMI lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $k\lambda_D = 0.38$ . (d) Variation de  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$ , pour différents  $k\lambda_D$ .

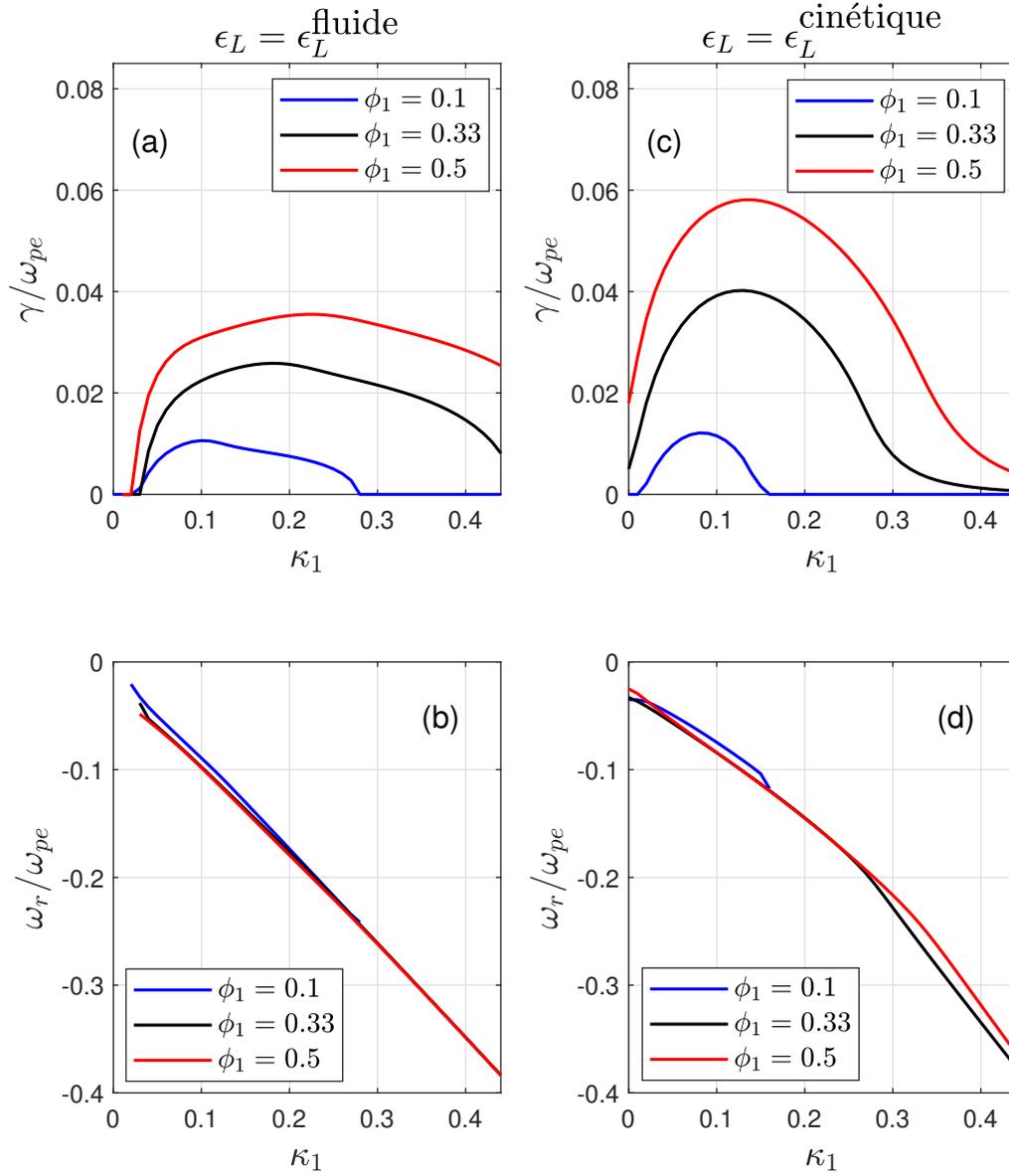


FIGURE 4.8 – **(a)** Le taux de croissance de Dodin  $\gamma$ , normalisé à  $\omega_{pe}$ , en fonction de  $\kappa_1$  pour  $k\lambda_D = 0.333$ , calculé à différentes amplitudes en utilisant  $\epsilon_L^{\text{fluide}}$ . On voit que le taux de croissance maximal augmente avec l'amplitude, comme attendu. **(b)** La fréquence réelle  $\omega_r$  en fonction de  $\kappa_1$  pour  $k\lambda_D = 0.333$ , à différentes amplitudes. On voit un changement très faible avec l'amplitude comme dans KDS. **(c)** Le taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour  $\phi_1 = eE_1/kT = 0.33$ , à différentes valeurs de  $k\lambda_D$  en utilisant  $\epsilon_L^{\text{cinétique}}$ . On observe une différence qualitative avec le cas fluide et l'apparition de la NMI. **(d)** La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde pour  $\phi_1 = 0.33$ , correspondant au cas (c).

Montrons à présent comment on peut réduire la relation de dispersion de Dodin à celle de KDS en faisant l'hypothèse que toutes les particules piégées sont au fond du puits de potentiel. Dans ce cas, on remplace  $\Omega_0(H)$  par  $\omega_B$  et la distribution des piégés par  $\delta(I)$ . La relation de dispersion de Dodin se réduit alors à,

$$1 + \frac{\omega_T^2}{\epsilon_{\text{eff}}(\omega_B^2 - \omega'^2)} = 0, \quad (4.14)$$

ce qui correspond à l'équation (4.8) à condition de ne retenir dans  $\epsilon_{\text{eff}}$  que les termes  $n = 0$  et  $n = -2$ .

On compare, sur la figure 4.9, les résultats obtenus en résolvant la relation de dispersion KDS à ceux obtenus à partir du modèle de Dodin (en utilisant  $\epsilon_L^{\text{fluide}}$ ). On voit que le taux de croissance maximal est proche mais que la forme de  $\gamma(\kappa_1)$  ainsi que de la fréquence réelle ne sont pas similaires. Prendre en compte la variation de la fréquence d'oscillation des électrons piégés en fonction de leur énergie n'influe guère sur la valeur du taux de croissance maximal, comme déjà remarqué dans [Brunner *et al.* (2014)]. Cependant, cela permet de mettre en évidence une nouvelle instabilité, la NMI, et cela modifie de manière significative le spectre  $\gamma(\kappa_1)$  des taux de croissance instables.

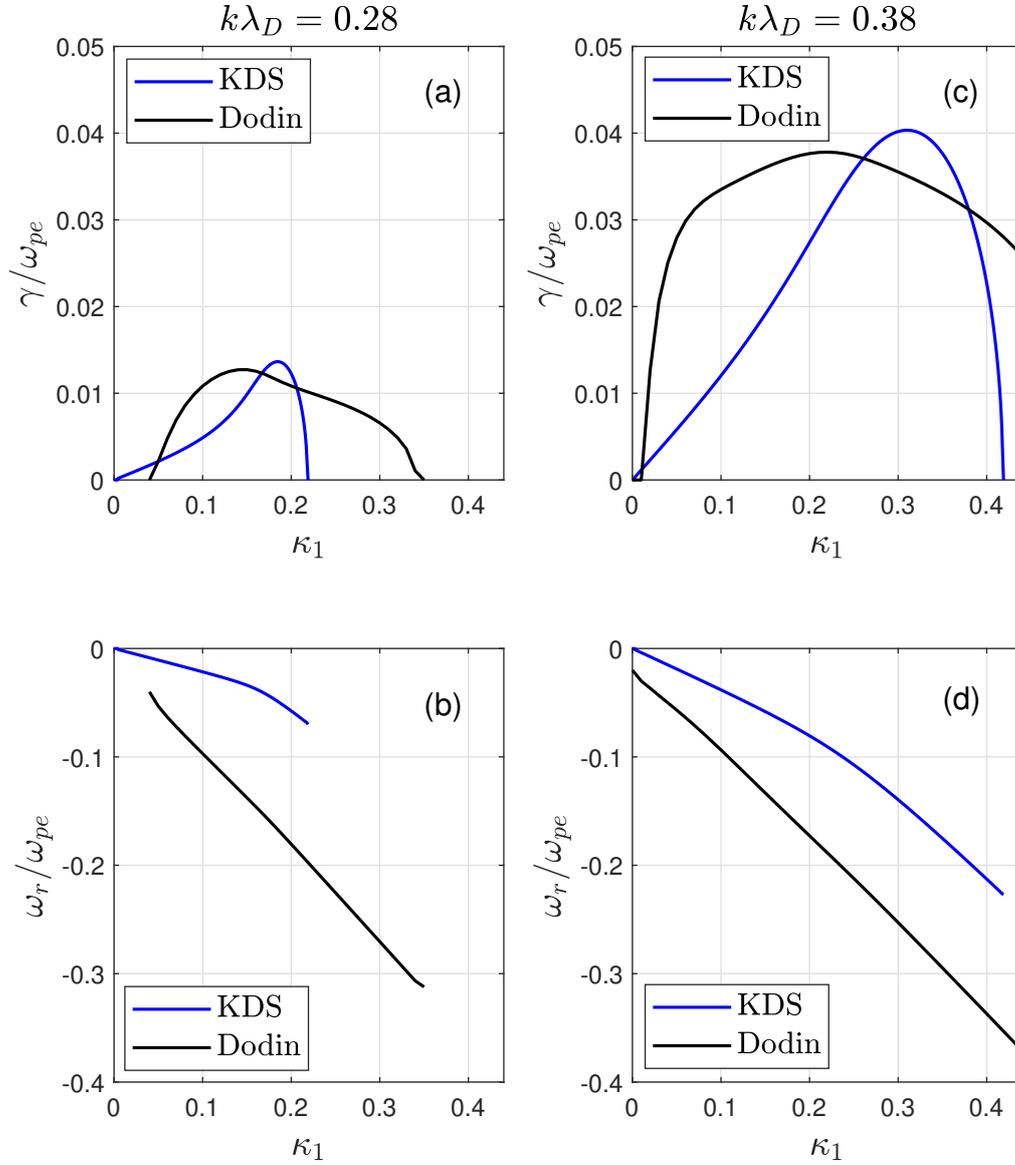


FIGURE 4.9 – Résultats obtenus avec la relation de dispersion KDS (en bleu) et de Dodin avec  $\epsilon_L^{\text{fluide}}$  (en noir) pour une amplitude telle que  $\phi_1 = 0.33$ . **(a)** Taux de croissance  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  pour  $k\lambda_D = 0.28$ . Le taux de croissance maximal dépend peu de la modélisation contrairement à la forme de  $\gamma(\kappa_1)$ . **(b)** La fréquence réelle  $\omega_r = \Re(\omega_1)$  en fonction  $\kappa_1$  pour  $k\lambda_D = 0.28$ . A la fois la pente et les valeurs de la fréquence obtenues à partir des deux modélisations sont différentes. **(c)** Le taux de croissance en fonction du nombre d'onde pour  $k\lambda_D = 0.38$ . Ici aussi le taux de croissance maximal dépend peu de la modélisation, à l'inverse de la forme de  $\gamma(\kappa_1)$ . **(d)** La fréquence réelle en fonction du nombre d'onde pour  $k\lambda_D = 0.38$ . On voit comme dans (b) que les pentes des fréquences varient selon les modélisations.

## 4.5 Théorie générale

Dans ce paragraphe, qui est le plus technique du manuscrit, nous exposons notre approche théorique en ce qui concerne l'étude de la stabilité d'une onde BGK. Elle tient compte de la croissance de modes satellites et de l'instabilité de masse négative. A la différence des approches de KDS et de Dodin, nous ne faisons aucune approximation. Par ailleurs, étant donné que la fonction de distribution électronique d'une onde BGK ne dépend que de l'action, notre approche repose sur la résolution de l'équation de Vlasov en coordonnées action-angle, comme l'a fait Dodin pour les particules piégées.

Dans ce paragraphe, nous ne donnons que les grandes lignes de la théorie. Le détail des calculs est reporté à l'annexe A.6 où l'on peut trouver l'intégralité de la théorie.

### 4.5.1 Définition de l'Hamiltonien et changement de normalisation

Puisque nous nous restreignons au cas où le nombre d'onde,  $k$ , est constant, il devient inutile de le faire apparaître explicitement dans l'Hamiltonien  $H$  Eq. (2.10). Par ailleurs, nous ne considérons que des plasmas homogènes, pour lesquels la température et la densité électroniques sont constantes. Dans ces conditions, de manière à alléger significativement les notations, nous allons renormaliser le temps de la manière suivante,  $t \rightarrow k\lambda_D\omega_{pe}t$ . Avec cette normalisation, l'Hamiltonien dont dérive l'interaction des électrons **avec la seule onde BGK**, est

$$H = \frac{(v - v_\phi)^2}{2} - \phi(\varphi), \quad (4.15)$$

où les vitesses, y compris  $v_\phi$ , sont maintenant normalisées à la vitesse thermique. Ainsi, en reprenant les notations du chapitre 2,  $v = kv/v_{th}$  et  $v_\phi \rightarrow v_\phi/v_{th}$ . De même, par rapport au chapitre 2, l'action est changée de la manière suivante  $I \rightarrow kI/v_{th}$ . Alors,  $\phi \rightarrow \phi/v_{th}^2$ . Dans l'Hamiltonien  $H$  défini par l'équation (4.15),  $\phi$  est le potentiel normalisé de la seule onde BGK, il ne contient pas la contribution dont dérive le champ du mode satellite, Eq. (4.1). De manière analogue au chapitre 2, on développe  $\phi$  de la manière suivante,

$$\phi = \sum_{n \geq 1} \phi_n \cos(n\varphi), \quad (4.16)$$

où, par rapport au chapitre 2,  $\phi_n \rightarrow \phi_n/v_{th}^2$ . Nous avons déjà utilisé cette normalisation dans les figures 4.7 à 4.9, de manière à comparer plus facilement toutes les figures des chapitres 4 et 5.

Les fréquences sont maintenant normalisées à  $k\lambda_D\omega_{pe}$  mais, pour une comparaison plus aisée avec ce qui a été déjà publié, nous présenterons dans nos résultats les

valeurs de fréquence, ou de taux de croissance, normalisées à la fréquence plasma,  $\omega_{pe}$ . En conséquence, pour plus de clarté, nous changeons de notation pour les valeurs normalisées des fréquences (contrairement aux autres variables pour lesquelles nous gardons les notations du chapitre 2). Ainsi, nous notons maintenant,

$$\varpi = \omega/k\lambda_D\omega_{pe}, \quad (4.17)$$

$$\varpi_1 = \omega_1/k\lambda_D\omega_{pe}, \quad (4.18)$$

où  $\omega$  est la fréquence de l'onde BGK et  $\omega_1$  est définie par l'équation (4.1). Les fréquences  $\omega$  et  $\omega_1$  sont toujours en unités  $s^{-1}$ .

L'Hamiltonien tenant compte de la dynamique des électrons dans le potentiel de l'onde BGK et du mode satellite est

$$H_0 = H - \delta\phi, \quad (4.19)$$

où  $H$  est défini par l'équation (4.15) et où  $\delta\phi$  est la perturbation de potentiel due au mode satellite. En reprenant les notations de l'équation (4.1), on écrit  $\delta\phi$  sous la forme,

$$\delta\phi = e^{i(\kappa_1\varphi - \varpi_1 t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\phi_n e^{in\varphi} + c.c. \quad (4.20)$$

#### 4.5.2 Passage en coordonnées action-angle

Comme indiqué plus haut, nous étudions la dynamique électronique dans les coordonnées action-angle de l'Hamiltonien  $H$ . Les conventions prises pour l'angle sont précisées dans l'annexe A.6, et plus particulièrement sur la figure A.3, que nous reproduisons ici, figure 4.10. On peut voir en particulier que, puisque le système physique n'est plus de période  $2\pi$  en  $\varphi$ , nous devons considérer un nombre qui peut être infini de zones de piégeage, que nous désignons par  $(\gamma_m)$ .

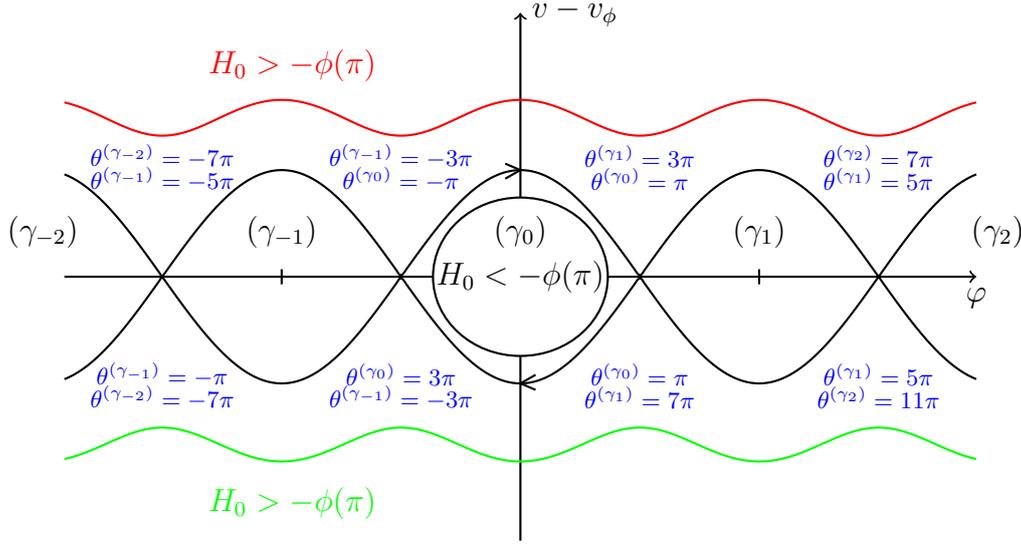


FIGURE 4.10 – Représentation schématique des orbites piégées et non piégées ainsi que de la convention choisie pour l'angle  $\theta$ . Ainsi,  $\theta^{(\gamma_0)}$  varie entre  $-\pi$  et  $3\pi$ ,  $\theta^{(\gamma_1)}$  varie de  $3\pi$  à  $7\pi$  et  $\theta^{(\gamma_{-1})}$  varie entre  $-5\pi$  et  $-\pi$ .

En coordonnées action-angle, l'Hamiltonien  $H_0$  défini par l'équation (A.51) s'écrit

$$H_0 = H(I) - e^{i[\kappa_1 \varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta \phi_n e^{in\varphi(\theta, I)} - c.c. \quad (4.21)$$

Pour poursuivre, il nous faut donc maintenant expliciter la valeur de  $e^{i(\kappa_1+n)\varphi(\theta, I)}$ .

Dans la région  $(\alpha)$ ,  $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) + 2\pi$ , si bien que  $\varphi(\theta) - \theta$  est  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ . On peut donc développer  $e^{i(\kappa_1+n)\varphi - \kappa_1\theta}$  en série de Fourier de la façon suivante,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)}(I) e^{i(\kappa_1+l)\theta}. \quad (4.22)$$

L'expression des  $V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)}$  est donnée par l'équation (A.55) de l'annexe A.6, où l'on montre qu'ils décroissent rapidement avec  $l$  (voir la figure A.4), ce qui assure une convergence satisfaisante de la série de Fourier dès qu'on prend  $|l| \leq 10$ . Plus précisément, on n'observe pas de variation supérieure à 5% dans la norme  $L^1$  de la somme quand on rajoute des termes au-delà de  $|l| = 10$ .

Dans la région  $(\beta)$ ,  $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) - 2\pi$ , ce qui permet d'écrire,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l, \kappa_1+n}^{(\beta)}(I) e^{-i(\kappa_1+l)\theta}, \quad (4.23)$$

et on montre dans l'annexe A.6 que  $V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)}(I - v_\phi) = V_{l, \kappa_1+n}^{(\beta)}(I + v_\phi)$ .

A l'intérieur de chaque zone de piégeage, on peut identifier  $(\theta + 4\pi)$  à  $\theta$ . Cela permet de décomposer directement  $e^{i(\kappa_1+n)\varphi}$  en série de Fourier, mais les coefficients

de Fourier vont dépendre de la sous-région considérée. En effet, si dans la région  $(\gamma_0)$  telle que  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2}, \quad (4.24)$$

dans la sous région  $(\gamma_m)$  telle que  $(2m-1)\pi \leq \varphi \leq (2m+1)\pi$ ,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = e^{2im\kappa_1\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2}. \quad (4.25)$$

L'expression des  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}$  est donnée par l'équation (A.60) de l'annexe A.6, où l'on montre qu'ils décroissent rapidement avec  $l$  (voir la figure A.5). Là encore, une bonne convergence est atteinte en se limitant à  $|l| \leq 10$ , avec comme avant, une variation de la norme  $L^1$  de la somme inférieure à 5% lorsqu'on rajoute des termes au-delà de  $|l| = 10$ .

### 4.5.3 Équation de Vlasov linéarisée

On écrit la fonction de distribution électronique sous la forme  $f_{\text{tot}} = f(I) + \delta f(I, \theta, t)$ . Ici  $f(I)$  peut être *a priori* n'importe quelle fonction de  $I$  correspondant à l'onde BGK considérée. Cependant, on va accorder une attention particulière à la fonction de distribution adiabatique, calculée dans le chapitre 2.

L'équation de Vlasov linéarisée en  $\delta f$  s'écrit,

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \Omega(I) \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} + f'(I) \frac{\partial \delta \phi}{\partial \theta} = 0, \quad (4.26)$$

où  $\Omega(I) = d_I H$  et où  $f'(I)$  est la dérivée de la fonction de distribution non perturbée. On résout l'équation (4.26) dans chaque sous-région  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma_m)$  de l'espace des phases. Par exemple, dans la région  $(\alpha)$ , on tire parti du développement de Fourier trouvé pour  $\delta \phi$ ,

$$\delta \phi = e^{-i\omega_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta \phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} e^{i(\kappa_1+l)\theta} + c.c., \quad (4.27)$$

pour chercher  $\delta f^{(\alpha)}$  sous la forme

$$\delta f^{(\alpha)} = e^{-i\omega_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} e^{i(\kappa_1+l)\theta} + c.c. \quad (4.28)$$

L'équation de Vlasov dans la région  $(\alpha)$  s'écrit alors

$$[-i\omega_1 + i(\kappa_1 + l)\Omega] \delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} + i(\kappa_1 + l) V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} \delta \phi_n f'_\alpha = 0, \quad (4.29)$$

ce qui nous donne pour les coefficients de  $\delta f$

$$\delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} = \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}\delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} f'_\alpha. \quad (4.30)$$

Ainsi, dans la région  $(\alpha)$ ,

$$\delta f^{(\alpha)} = e^{-i\varpi_1 t} f'_\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}\delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} e^{i[\kappa_1+l]\theta} + c.c. \quad (4.31)$$

En opérant de la même façon (voir annexe A.6), on trouve, dans la région  $(\beta)$ ,

$$\delta f^{(\beta)} = e^{-i\varpi_1 t} f'_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{-(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}\delta\phi_n}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} e^{-i[\kappa_1+l]\theta} + c.c., \quad (4.32)$$

et dans chaque région  $(\gamma_m)$ ,

$$\delta f^{(\gamma_m)} = e^{-i\varpi_1 t} e^{2im\kappa_1\pi} \frac{f'_\gamma}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l\delta\phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_m)}}{2\varpi_1 - l\Omega} e^{il\theta/2} + c.c. \quad (4.33)$$

Pour les piégés, par analogie avec le résultat correspondant à une onde adiabatique, on a noté  $f(I) = f_\gamma(I)/2$ . Dans le cas d'une onde adiabatique,  $f_\gamma(I) dI$  est la fraction d'électrons piégés dont l'action est comprise entre  $I$  et  $I + dI$ . Dans le cas général, on peut toujours introduire  $f_\gamma(I) = 2f(I)$ .

#### 4.5.4 Calcul de la densité de charges

On écrit la densité de charges électronique sous la forme,  $\rho_{\text{tot}}(\varphi_0) = \rho(\varphi_0) + \delta\rho(\varphi_0, t)$ , où  $\rho(\varphi_0)$  est reliée à  $\phi(\varphi_0, t)$  par la relation de Poisson, alors que  $\delta\rho(\varphi_0, t)$  est reliée à  $\delta\phi$ . On trouve alors (voir Annexe A.6)

$$\begin{aligned} \frac{-\delta\rho(\varphi_0, t)}{n_0 e} &= \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f^{(\alpha)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &+ \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f^{(\beta)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &+ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{I_s} \int_{4m-\pi}^{4m+3\pi} \delta f^{(\gamma_m)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta. \end{aligned} \quad (4.34)$$

La forme de la perturbation de potentiel,  $\delta\phi$  Eq. (4.20), impose  $\delta\rho = \delta\rho_c + c.c$  avec,

$$\delta\rho_c(\varphi_0) = e^{-i\varpi_1 t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta\rho_\nu e^{i(\kappa_1+\nu)\varphi_0}, \quad (4.35)$$

et, si  $(2m_0 - 1)\pi \leq \varphi_0 < (2m_0 + 1)\pi$ ,

$$\begin{aligned}\delta\rho_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \delta\rho_c(\varphi_0) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi - \varpi_1 t]} d\varphi_0 \\ &\equiv \delta\rho_\nu^{(\alpha)} + \delta\rho_\nu^{(\beta)} + \delta\rho_\nu^{(\gamma)},\end{aligned}\quad (4.36)$$

les expressions de  $\delta\rho_\nu^{(\alpha)}$ ,  $\delta\rho_\nu^{(\beta)}$  et  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$  étant respectivement données par les équations (A.89), (A.93) et (A.97) de l'annexe A.6.

#### 4.5.5 Équation de Poisson et relation de dispersion

L'équation de Poisson s'écrit

$$(k\lambda_D)^2 \frac{d^2 \delta\phi}{d\varphi^2} = -\frac{\delta\rho}{n_0 e}. \quad (4.37)$$

En utilisant le développement Eq. (A.52) pour  $\delta\phi$ , ainsi que les expressions Eqs. (A.84), (A.85), pour  $\delta\rho$ , l'équation de Poisson devient,

$$(k\lambda_D)^2 (\kappa + \nu)^2 \delta\phi_\nu = \frac{\delta\rho_\nu^{(\alpha)} + \delta\rho_\nu^{(\beta)} + \delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0 e}. \quad (4.38)$$

En utilisant les expressions Eqs. (A.89), (A.93) et (A.97) respectivement pour  $\delta\rho_\nu^{(\alpha)}$ ,  $\delta\rho_\nu^{(\beta)}$  et  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$ , on obtient la relation de dispersion suivante,

$$M_{nm} \delta\phi_m = 0, \quad (4.39)$$

avec

$$\begin{aligned}M_{nm} &= \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_\alpha(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l) V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_\beta(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l) V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(J)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l V_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dJ.\end{aligned}\quad (4.40)$$

où on a posé  $V_{l,\kappa_1+n}^u(J) = V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}(I - v_\phi) = V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}(I + v_\phi)$ .

Dans le cas d'une onde adiabatique ayant crû dans un plasma Maxwellien,

$$f_\alpha(J) = f_{G^+}(J), \quad (4.41)$$

$$f_\beta(J) = f_{G^-}(J), \quad (4.42)$$

$$\frac{f_\gamma(J)}{2} = \frac{f_{G^-}^*(J) + f_{G^+}^*(J)}{2}, \quad (4.43)$$

où

$$f_{G^\pm}(J) = \frac{\exp[-(J \pm v_\phi)^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \quad (4.44)$$

$$f_{G^\pm}^*(J) = \frac{\exp[-(J \pm v_\phi^*)^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \left(1 \pm \frac{dv_\phi^*}{dJ}\right). \quad (4.45)$$

Par souci de simplicité, et parce que cela n'apporte pas une grande différence dans les résultats (puisque en général  $d_J v_\phi^* \ll 1$ ) on assimilera dans la suite  $f_{G^\pm}^*$  à  $f_{G^\pm}$ . Ainsi, quand  $J$  varie de  $I_s - \varepsilon$  à  $I_s + \varepsilon$ , en traversant la branche de la séparatrice correspondant à la région  $(\alpha)$  de l'espace des phases,  $f$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^+}$ , alors que si la traversée de la séparatrice se fait vers la région  $(\beta)$  de l'espace des phases,  $f$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^-}$ . On en déduit que,

$$f'_\alpha(J) = f'_{G^+}(J) + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{2} \delta(J - I_s), \quad (4.46)$$

$$f'_\beta(J) = f'_{G^-}(J) - \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{2} \delta(J - I_s). \quad (4.47)$$

L'équation (A.110) devient alors,

$$\begin{aligned} M_{nm} = & \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ & - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ & + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lW_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dI \\ & + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{(k\lambda_D)^2} \frac{\Delta}{\varpi_1}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

où, en utilisant l'équation (4.40) et le fait que  $\Omega = 0$  à la séparatrice,

$$\Delta = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u, \quad (4.49)$$

les  $V_{l,\kappa_1+m}^u$  étant censés être évalués à la séparatrice. C'est là que réside un problème mathématique délicat, que nous résolvons en utilisant un argument physique qui va révéler toute la difficulté de traiter la stabilité d'une onde adiabatique.

Puisque les  $V_{l,\kappa_1+m}^u$  sont définis dans les régions  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  de l'espace des phases, on voudrait les calculer en utilisant les expressions trouvées pour  $J > I_s$ . Or, pour

de telles valeurs de  $J$ , on montre dans l'annexe A.6 que,

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1 + n}^u V_{l, \kappa_1 + n'}^u = (\kappa_1 + n) \delta_{nn'}. \quad (4.50)$$

Néanmoins, on aurait pu vouloir faire porter la contribution des Dirac à la dérivée de la fonction de distribution des électrons piégés. Dans ce cas, on aurait trouvé (voir Annexe A.6)

$$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l V_{l, \kappa_1 + n}^{(\gamma_0)} V_{l, \kappa_1 + n'}^{(\gamma_0)} = 0. \quad (4.51)$$

On ne trouve donc pas le même résultat selon le choix de  $V_{l, \kappa_1 + m}^u$ .

En fait, aucun des deux choix précédents n'est correct lorsque  $J = I_s$ . Si on avait voulu faire une évaluation en  $J = I_s$ , on aurait encore trouvé un autre résultat, mais qui n'aurait pas non plus été pertinent. Cela tient aux valeurs des coefficients de Fourier à la séparatrice où  $\varphi(\theta)$  est discontinu et vaut soit  $\pi$ , soit  $-\pi$ , selon le signe de  $\theta$ . Nous n'entrerons cependant pas dans ces détails mathématiques parce qu'on ne s'attend pas à ce qu'une fonction de distribution physique soit discontinue. Dès lors, nous allons plutôt supposer que  $f(I)$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^+}$  lorsque  $J$  varie de  $I_s$  à  $I_s + \delta I$  vers la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases et de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^-}$  lorsque  $J$  varie de  $I_s$  à  $I_s + \delta I$  vers la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases. Nous considérons de plus la limite  $\delta I \rightarrow 0$  et, dans cette limite, nous obtenons,

$$\begin{aligned} M_{nm} = & \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1 + m}^u V_{l, \kappa_1 + n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ & - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1 + m}^u V_{l, \kappa_1 + n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ & + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l V_{l, \kappa_1 + m}^{(\gamma_0)} V_{l, \kappa_1 + n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dI \\ & + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{(k\lambda_D)^2} \frac{(\kappa_1 + n) \delta_{nm}}{\varpi_1}. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Nous aurions aussi pu choisir de supposer que  $f(I)$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^+}$  lorsque  $J$  varie de  $I_s - \delta I$  à  $I_s + \delta I$ , auquel cas la correction en rouge dans l'équation (4.52) aurait été divisée par 2. Si nous avions supposé que  $f(I)$  variait de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^-}$  lorsque  $J$  variait de  $I_s - \delta I$  à  $I_s$  la correction aurait été nulle. Notre choix pour aboutir à l'expression (4.52) a été guidé par les simulations numériques qui montrent que l'écart à la fonction de distribution adiabatique est surtout marqué pour  $J > I_s$ .

Cependant, la principale difficulté ne réside pas dans les choix que nous venons d'évoquer, mais plutôt dans la limite  $\delta I \rightarrow 0$ , qui nous a menés à calculer la correction, en rouge dans l'équation (4.52), en imposant  $\Omega = 0$ . Or,  $\Omega$  varie très rapidement près de la séparatrice. Par exemple,  $\Omega$  passe de 0 à  $0.2\sqrt{\phi_1}$  lorsque  $(J/I_s - 1)$  varie de 0 à  $10^{-5}$ . On sait que, plus une onde croît lentement, plus la fonction de distribution électronique est proche de la fonction de distribution adiabatique. Néanmoins, on ne s'attend tout de même pas à une variation si rapide de  $f(I)$  autour de la séparatrice pour pouvoir supposer  $\Omega = 0$  sur tout l'intervalle correspondant à cette variation rapide. La question de la pertinence de notre calcul de la correction, notée en rouge dans l'équation (4.52), se pose donc. Une première réponse à cette question sera donnée dans le chapitre 5 quand nous confronterons les résultats de notre théorie à ceux de simulations numériques. A titre indicatif, nous calculerons aussi au paragraphe 4.7 les taux de croissance des modes instables obtenus en remplaçant la variation infiniment rapide de  $f(I)$  par une variation sur un intervalle fini,  $\delta I$ . La façon dont ces taux de croissance évoluent en fonction de  $\delta I$  nous donnera une idée de la sensibilité des résultats au comportement de  $f(I)$  autour de la séparatrice.

#### 4.5.6 Réduction aux modèles de Dodin et KDS

Les modèles de Dodin et KDS reposent sur l'hypothèse d'une réponse linéaire des électrons non piégés à l'onde BGK, supposée sinusoïdale.

Dans nos notations, l'approximation linéaire pour les électrons non piégés revient à l'approximation suivante,

$$-\frac{\rho_\nu^{(\alpha)} + \rho_\nu^{(\beta)}}{n_0 e} \approx (k + \nu)^2 (k\lambda_D)^2 (\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} - 1) \delta\phi_\nu, \quad (4.53)$$

où

$$\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} = P.P. \left[ \int \frac{f'_0(v_0) dv_0}{v_0 - v_\phi - \varpi_1 / (\kappa_1 + \nu)} \right], \quad (4.54)$$

$f_0$  étant la fonction de distribution non perturbée, exprimée en unités normalisées pour la vitesse. Dans le cas où l'onde BGK a crû dans un plasma Maxwellien,  $f_0(v_0) = e^{-v_0^2/2} / \sqrt{2\pi}$ . En remplaçant  $v_\phi$  par  $\omega/kv_{th}$  et  $\varpi_1$  par  $\omega_1/kv_{th}$ , on trouve que

$$\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} = \varepsilon_L(k' + \nu k, \omega' + \nu\omega), \quad (4.55)$$

où  $k' = \kappa_1 k$  et  $\omega' = \kappa_1 \omega + \omega_1$ , comme dans les modèles KDS ou de Dodin.

En ce qui concerne les électrons piégés, pour une onde sinusoïdale et dans la limite considérée par Dodin où les électrons sont localisés près du fond du puits de

potentiel, on trouve dans l'annexe A.6

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0 e} = (\kappa_1 + \nu) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + n) \delta\phi_n \right] \int_0^{I_s} \frac{I f'_\gamma}{2(\varpi_1^2 - \Omega_D^2)} dI, \quad (4.56)$$

où on a noté  $\Omega_D = \Omega_0/k\lambda_D\omega_{pe}$ ,  $\Omega_0$  étant définie par l'équation (4.10).

En utilisant les équations (4.53) pour  $\delta\rho_\nu^{(\alpha)}$  et  $\delta\rho_\nu^{(\beta)}$ , ainsi que l'équation (4.56) pour  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$ , l'équation de Poisson Eq. (4.38) devient,

$$(\kappa_1 + \nu) \varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} \delta\phi_\nu + \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + n) \delta\phi_n \right] \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma}{2(k\lambda_D)^2} \frac{I}{\varpi_1^2 - \Omega_D^2} dI = 0. \quad (4.57)$$

En sommant sur  $\nu$ , et en simplifiant par  $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + \nu) \delta\phi_\nu$ , on obtient la relation de dispersion de Dodin,

$$1 + \frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \frac{I}{\varpi_1^2 - \Omega_D^2} dI = 0, \quad (4.58)$$

avec,

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} = \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu}} \right). \quad (4.59)$$

On peut facilement se convaincre que l'équation (A.135) est la même que l'équation (4.11) en notant que  $\varpi_1 = \omega_1/(k\lambda_D\omega_{pe})$ , que  $\Omega_D = \Omega_0/(k\lambda_D\omega_{pe})$  et que  $f(I) = f_\gamma/2$ .

Une fois que l'on s'est ramené à la relation de dispersion de Dodin, on retrouve celle de KDS, comme montré dans le paragraphe 4.4.

## 4.6 Résolution numérique et comparaisons aux modèles précédents

Dans cette partie, nous présentons les résultats de la résolution numérique de l'équation  $\det(M) = 0$ , avec  $M$  donnée par l'équation (4.52). Nous discutons la convergence de la méthode numérique, ainsi que les approximations faites pour résoudre la relation de dispersion, comme la troncation du déterminant infini et la prise en compte d'une seule harmonique dans le potentiel de l'onde adiabatique à de grands nombres d'onde. Nous discutons également l'impact, sur les taux de croissance, du terme venant de la discontinuité de la fonction de distribution adiabatique, et que nous avons estimé en supposant une variation infiniment rapide de  $f(I)$  près de la séparatrice. Notons que ce terme n'avait pas été pris en compte dans les modèles KDS et de Dodin.

La résolution se fait à l'aide d'un algorithme de Newton sur la variable complexe  $\varpi_1$ . La méthode de Newton peut s'appliquer à une variable complexe puisque la fonction  $\varpi_1 \mapsto \det[M(\varpi_1)]$  est analytique, comme somme et produit fini de fractions rationnelles en  $\varpi_1$ , à condition de tronquer le déterminant infini. C'est effectivement ce que nous faisons en restreignant les valeurs de  $n$  et  $m$  à  $(n, m) \in [-N_{\max}, N_{\max}]^2$ , et, en pratique, nous choisissons  $N_{\max} = 1$  ou  $N_{\max} = 2$ . De plus, nous nous limitons à  $|l| \leq 10$  dans les sommes sur  $l$  de l'équation (4.52). En choisissant  $\varpi_1$  dans un voisinage suffisamment proche de la solution, la convergence vers cette solution est quadratique. Cependant, il se peut que pour une valeur donnée de  $\kappa_1$ , l'équation  $\det[M(\varpi_1)] = 0$  admette plusieurs solutions. Dans ce cas, nous ne retenons que celle qui a le plus grand taux de croissance.

La méthode numérique que nous utilisons pour résoudre la relation de dispersion est résumée sur la figure 4.11. Nous nous donnons d'abord une amplitude  $\phi_1$  et un nombre d'onde  $k\lambda_D$ . Par la méthode expliquée au chapitre 2 nous calculons la vitesse de phase non linéaire  $v_\phi$  ainsi que les amplitudes  $\phi_n$  pour  $n \leq n_{\max}$ ,  $n_{\max}$  étant le nombre d'harmoniques considérées. Les résultats présentés dans ce chapitre correspondent généralement à  $n_{\max} = 1$ . Nous calculons ensuite les orbites  $\varphi_u(I, \theta)$  correspondant aux électrons non piégés de la région ( $\alpha$ ) (celles de la région ( $\beta$ ) se déduisant de celles de la région ( $\alpha$ ) par symétrie), ainsi que les orbites  $\varphi_t(I, \theta)$  de la région ( $\gamma$ ). Ces orbites sont calculées pour  $N_u$  valeurs de l'action en ce qui concerne les électrons non piégés, et sur  $N_t$  valeurs pour les piégés. Par ailleurs, elles sont discrétisées sur un nombre  $N_\theta$  de points en  $\theta$ . En pratique, nous avons choisi  $N_u = 2000$ ,  $N_t = 1000$ ,  $N_\theta = 40$ . Cela nous définit un pas  $\Delta\theta = 2\pi/N_\theta$  pour l'angle,  $\Delta I_t = I_s/N_t$  pour les piégées et  $\Delta I_u = (I_{\max} - I_s)/N_u$  pour les orbites non piégées, où  $I_{\max}$  est l'action maximale considérée. En pratique, nous avons choisi  $I_{\max} = 15$ .

Nous avons vérifié qu'une variation d'un facteur 2 sur les valeurs de  $N_u$ ,  $N_t$ ,  $N_\theta$  et  $I_{\max}$  entraînait une variation inférieure à 1% sur les taux de croissance, assurant ainsi la convergence de notre calcul.

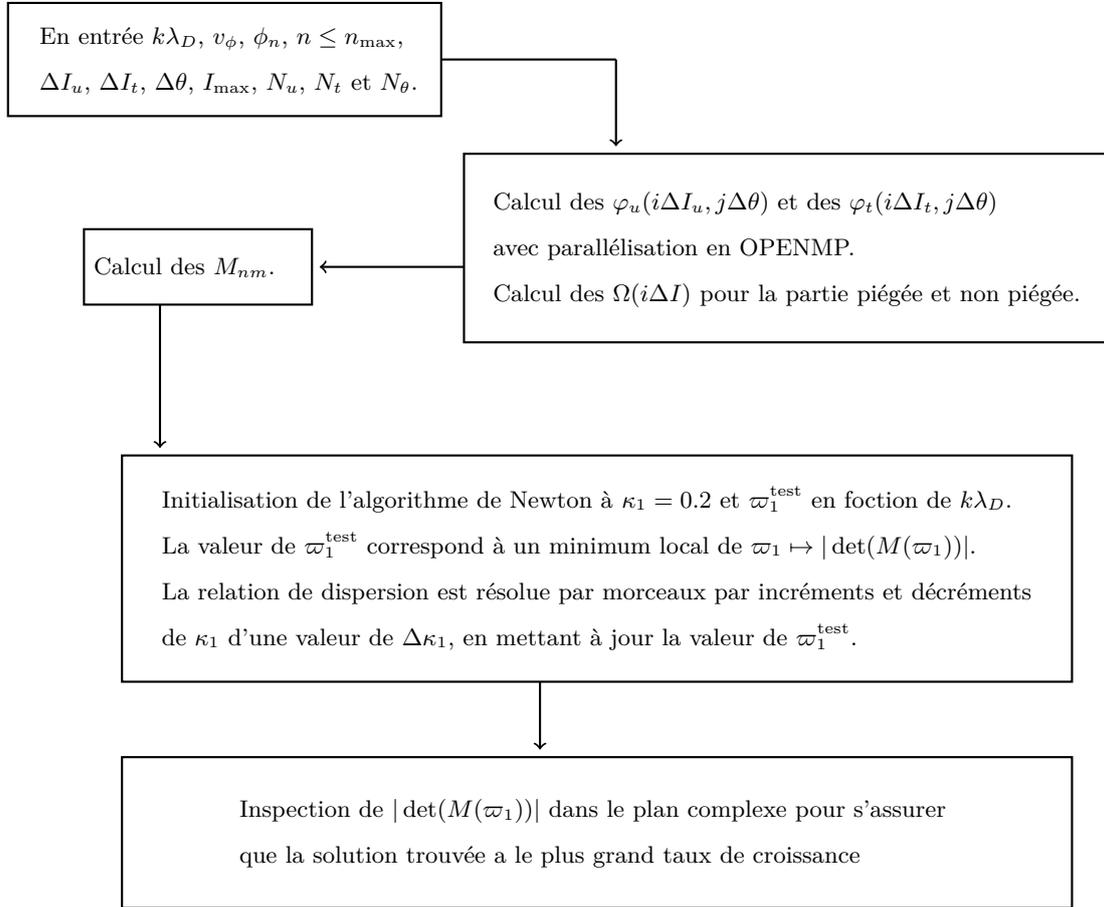


FIGURE 4.11 – Schéma numérique de la résolution de la relation de dispersion. En pratique nous prenons  $\Delta\kappa_1 = 0.01$ ,  $n_{\max} = 1$ ,  $N_{\max} = 1$ ,  $N_u = 2000$ ,  $N_t = 1000$ ,  $N_\theta = 40$ ,  $I_{\max} = 15$ .

Les orbites étant calculées sur une grille fixe en  $\theta$ , cela impose de devoir résoudre les équations (A.7) et (A.9) pour calculer  $\varphi_{t,u}(\theta, I)$ , ce que nous faisons en utilisant une méthode par dichotomie. A partir des valeurs de  $\varphi_{t,u}(\theta, I)$ , nous déduisons celles des  $V_{l,\kappa_1+n}$ , ce qui nous permet de calculer les  $M_{nm}$ . Une fois ces valeurs connues, nous résolvons la relation de dispersion à l'aide de la méthode de Newton, en commençant par  $\kappa_1 = 0.2$  pour être proche du milieu du spectre, où l'on suppose que le taux de croissance ne sera pas très éloigné de son maximum. Nous procédons ensuite par incréments de  $\pm 0.01$  en  $\kappa_1$  pour calculer le spectre instable. Ce spectre étant symétrique par rapport à  $\kappa_1$  (voir annexe A.7), nous nous restreignons à  $\kappa_1 > 0$ . Pour nous assurer que la relation de dispersion ne comporte pas d'autres branches avec des taux de croissance supérieurs à ceux que nous avons trouvés, nous nous assurons que le module du déterminant n'a pas de zéro autour de la solution trouvée. S'il

en a, nous comparons les taux de croissance et retenons le plus grand. Néanmoins, nous ne trouvons généralement qu'une solution pour chaque valeur donnée de  $\kappa_1$ .

La matrice  $M$  est tronquée à  $(n, m) \in [-N_{\max}, N_{\max}]^2$ , si bien que la relation de dispersion s'écrit, lorsque  $N_{\max} = 1$ ,

$$\det \begin{pmatrix} M_{-1,-1} & M_{-1,0} & M_{-1,1} \\ M_{0,-1} & M_{0,0} & M_{0,1} \\ M_{1,-1} & M_{1,0} & M_{1,1} \end{pmatrix} = 0. \quad (4.60)$$

Sauf sur la figure 4.12 où nous étudions la convergence de la relation de dispersion avec  $N_{\max}$ , les résultats que nous montrons correspondent à la résolution de la relation de dispersion Eq. (4.60). En effet, comme on peut le voir sur la figure 4.12 lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ , passer de  $N_{\max} = 1$  à  $N_{\max} = 2$  ne change que très peu les valeurs des taux de croissance des modes satellites instables.

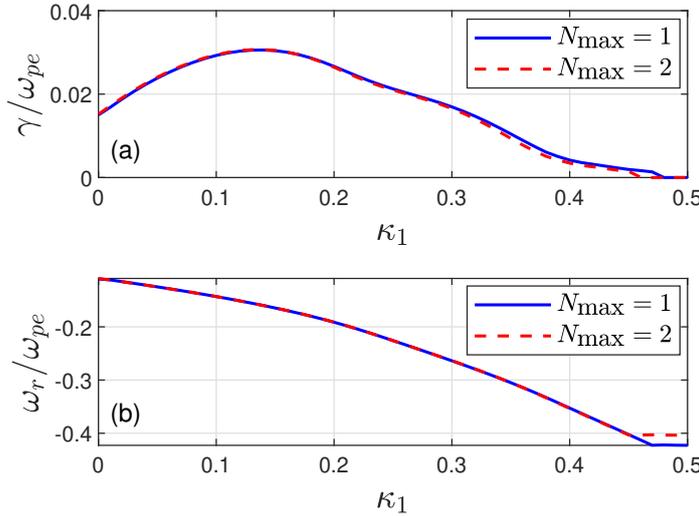


FIGURE 4.12 – Solutions de la relation de dispersion pour  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ , auquel cas la valeur non linéaire de  $v_\phi$  est  $v_\phi = 3.5285$ . Les courbes en trait plein bleu sont obtenues en tronquant le déterminant à  $N_{\max} = 1$  et celles en tirets rouges en les tronquant à  $N_{\max} = 2$ .

Sur la figure 4.13, nous montrons comment le spectre instable, pour une onde adiabatique, varie en fonction du nombre d'harmoniques,  $n_{\max}$ , pris en compte pour calculer son potentiel scalaire. Lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ , nous obtenons une variation de l'ordre de 10% sur le taux de croissance maximal en passant de  $n_{\max} = 1$  à  $n_{\max} = 2$ . Lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , la différence entre les résultats obtenus avec  $n_{\max} = 1$  ou  $n_{\max} = 2$  est presque imperceptible sur la figure 4.13. Cela conforte les conclusions du chapitre 2, selon lesquelles une onde adiabatique peut être supposée sinusoïdale dès que  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ .

La figure 4.14 illustre quelques exemples de solutions de la relation de dispersion pour  $k\lambda_D = 0.333$  et diverses amplitudes, ainsi qu'à différents  $k\lambda_D$  pour une amplitude  $\phi_1 = 3$ . L'onde BGK est toujours supposée résulter de la croissance d'une onde adiabatique. Comme on peut le voir sur la figure 4.14 (a), contrairement au

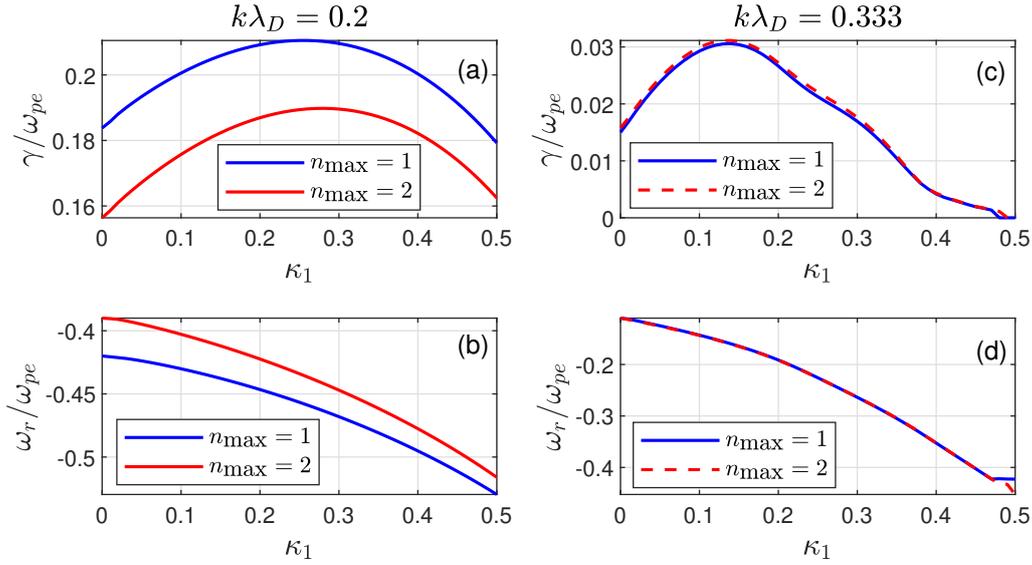


FIGURE 4.13 – Spectre instable pour une onde adiabatique calculée avec un nombre d’harmoniques valant soit  $n_{\max} = 1$  (courbes bleues) soit  $n_{\max} = 2$  (courbes rouges). **(a)** Taux de croissance lorsque  $k\lambda_D = 0.2$ ,  $\phi_1 = 7.5$  et  $\phi_2 = 0$  (en bleu) ou  $\phi_2 = -0.62$  (en rouge). **(b)** Fréquences réelles pour les mêmes paramètres que dans la figure (a). **(c)** Taux de croissance lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ ,  $\phi_1 = 0.33$  et  $\phi_2 = 0$  (en bleu) ou  $\phi_2 = -0.0004$  (en rouge). **(d)** Fréquences réelles pour les mêmes paramètres que dans la figure (c).

modèle KDS, le taux de croissance augmente plus vite avec l’amplitude de l’onde que proportionnellement à  $\sqrt{\phi_1}$ . C’est en partie dû au fait que la fraction d’électrons piégés n’augmente pas uniquement à cause de l’augmentation de l’aire de la zone de piégeage, comme dans KDS, mais aussi à cause de la décroissance non linéaire de  $v_\phi$ . On observe aussi que les taux de croissance augmentent avec  $k\lambda_D$ , comme dans les modèles de Dodin et de KDS. C’est dû à la décroissance de la vitesse de phase avec  $k\lambda_D$ , ce qui induit une plus grande fraction d’électrons piégés pour une même amplitude de l’EPW.

Sur la figure 4.15, nous comparons explicitement les résultats de notre théorie avec ceux issus des modèles de KDS et de Dodin, lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ , et lorsque  $k\lambda_D = 0.2$  et  $\phi_1 = 3$ . On peut constater que les formes des spectres  $\gamma(\kappa_1)$  sont très différentes selon le modèle utilisé. En particulier, le maximum du taux de croissance n’est pas atteint pour la même valeur de  $\kappa_1$ . L’écart est particulièrement important entre le spectre issu du modèle de KDS et les deux autres. Par ailleurs, notre théorie prédit la croissance de la NMI, contrairement aux modèles de KDS et de Dodin. Lorsque  $k\lambda_D = 0.333$ , les valeurs des taux de croissance maximum semblent similaires, cependant il y a un biais dans ces comparaisons qui est dû au choix de  $v_\phi$ . Dans notre théorie, nous utilisons la valeur non linéaire  $v_\phi \approx 3.5285$ . Dans les modèles de Dodin et de KDS, nous utilisons la valeur fluide,  $v_\phi^{\text{lin}} \approx 3.4667$ .

Cela surestime la fraction d'électrons piégés, et donc les taux de croissance, par un facteur proche de  $\exp[(3.582^2 - 3.4467^2)/2] \approx 1.5$ . Ainsi, si on avait utilisé la bonne valeur de  $v_\phi$  dans KDS, les taux de croissance auraient diminué d'environ 50%. C'est tout le problème de l'utilisation des modèles de KDS ou de Dodin, comme nous l'avons déjà mentionné au paragraphe 4.4 et comme cela a déjà été observé dans [Brunner *et al.* (2014)]. Ils ne sont pas auto-cohérents, et ils peuvent donner de meilleurs résultats en utilisant la valeur linéaire de la vitesse de phase plutôt que la vraie valeur. Par ailleurs, lorsque  $k\lambda_D = 0.2$  et  $\phi_1 = 3$ , notre théorie prévoit un taux de croissance maximum environ 70% plus élevé que celui issu du modèle KDS, et aussi sensiblement (20%) plus élevé que celui prédit par le modèle de Dodin. Pourtant, là encore, la valeur de  $v_\phi$  non linéaire, adiabatique, est plus élevée que la vitesse de phase linéaire fluide. Cela montre qu'il y a de réelles différences entre les prédictions de notre théorie et celles des modèles précédents.

Intéressons-nous maintenant à l'importance de la correction que nous avons notée en rouge dans l'équation (4.52), et que nous avons calculée en remplaçant la discontinuité de la fonction de distribution adiabatique par une variation infiniment rapide de  $f(I)$  dans la zone non piégée, au voisinage immédiat de la séparatrice. Sur la figure 4.16 nous avons représenté les résultats obtenus avec ou sans cette correction, lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ . Comme on peut le voir, à la fois la forme du spectre et le taux de croissance maximal sont modifiés. La prise en compte de la correction fait également apparaître la NMI, puisque le taux de croissance est non nul pour  $\kappa_1 = 0$ . Ces résultats nous suggèrent d'étudier plus en détail la sensibilité du calcul des taux de croissance en fonction du comportement de la fonction de distribution autour de la séparatrice, ce que nous faisons au paragraphe 4.7.

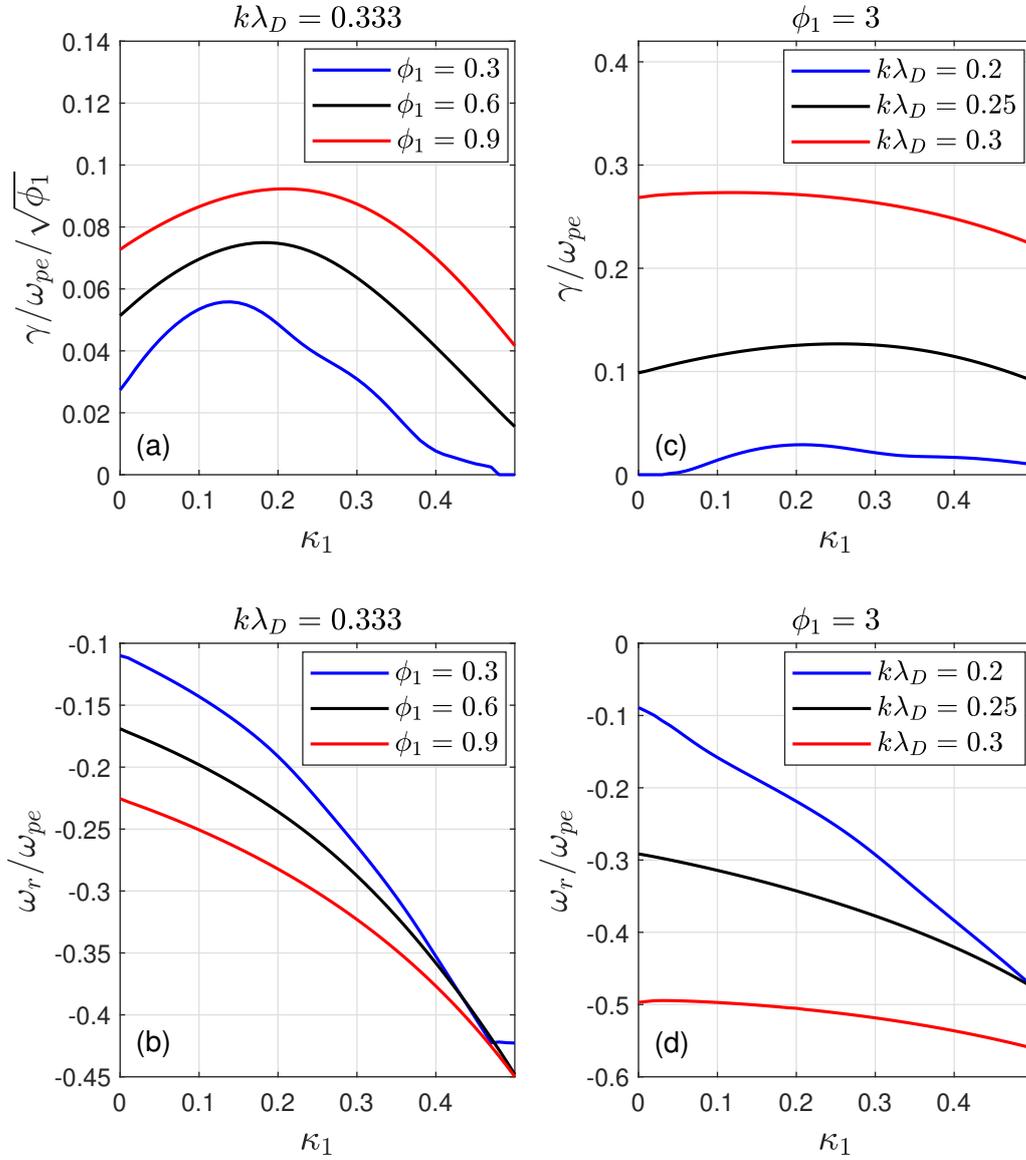


FIGURE 4.14 – Spectres instables obtenus en résolvant la relation de dispersion Eq. (4.60) pour une onde adiabatique, et pour diverses valeurs de son amplitude et de sa longueur d'onde. **(a)** Taux de croissance,  $\gamma$ , normalisé à  $\sqrt{\phi_1}\omega_{pe}$ , pour  $k\lambda_D = 0.333$ . On peut voir que  $\gamma/\sqrt{\phi_1}\omega_{pe}$  croît avec  $\phi_1$ , contrairement au modèle KDS. Pour  $\phi_1 = 0.3$ ,  $v_\phi = 3.5282$ , pour  $\phi_1 = 0.6$ ,  $v_\phi = 3.4952$  et pour  $\phi_1 = 0.9$ ,  $v_\phi = 3.4616$ . **(b)**  $\omega_r \equiv \Re(\omega_1)$  pour les mêmes paramètres que dans (a). **(c)** Taux de croissance,  $\gamma$ , normalisé à  $\omega_{pe}$ , nous lorsque  $\phi_1 = 3$  et pour  $k\lambda_D = 0.2$ ,  $v_\phi = 5.3560$ ;  $k\lambda_D = 0.25$ ,  $v_\phi = 4.4232$ ;  $k\lambda_D = 0.3$ ,  $v_\phi = 3.5689$ . **(d)**  $\omega_r \equiv \Re(\omega_1)$  pour les mêmes paramètres que dans (c).

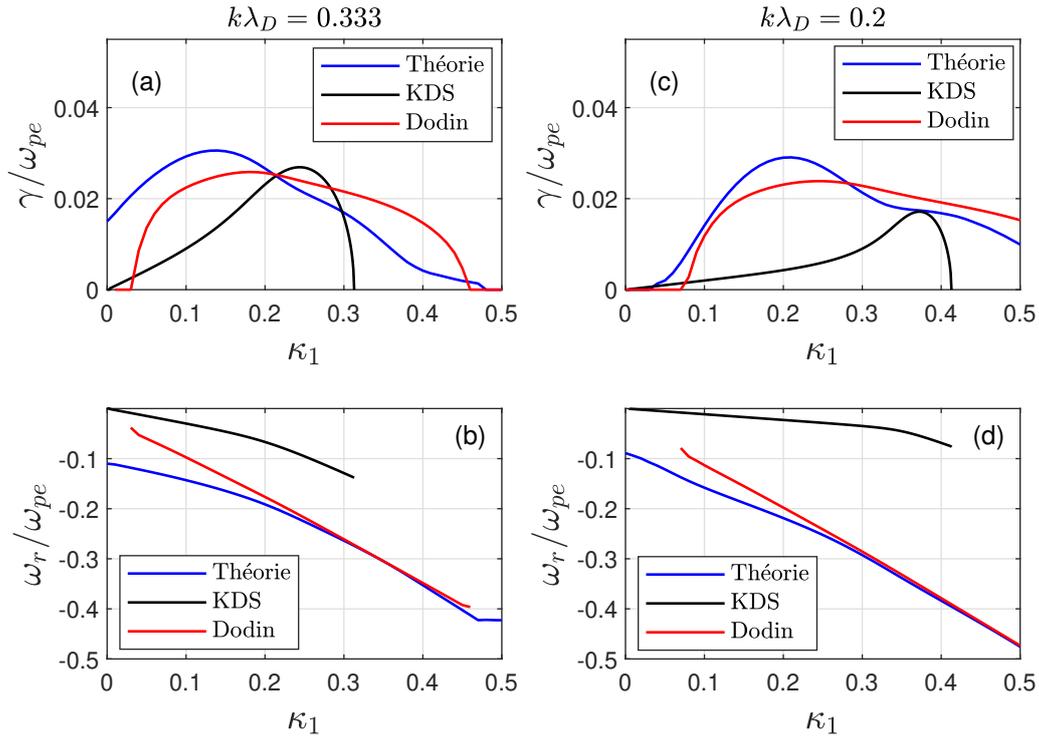


FIGURE 4.15 – Comparaison entre les prédictions des modèles de KDS, de Dodin, et de notre théorie, pour le taux de croissance,  $\gamma$ , et pour  $\omega_r \equiv \Re(\omega_1)$ . Les figures (a) et (b) sont pour  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ . A partir de notre théorie adiabatique non linéaire nous calculons  $v_\phi = 3.5285$ , alors que pour KDS et Dodin  $v_\phi = v_\phi^{\text{fluide}} \approx 3.4667$ . Les figures (c) et (d) sont pour  $k\lambda_D = 0.2$  et  $\phi_1 = 3$ . Pour le calcul adiabatique, nous utilisons la valeur non linéaire  $v_\phi \approx 5.3561$ , alors que pour KDS et Dodin nous utilisons  $v_\phi = v_\phi^{\text{fluide}} \approx 5.2915$

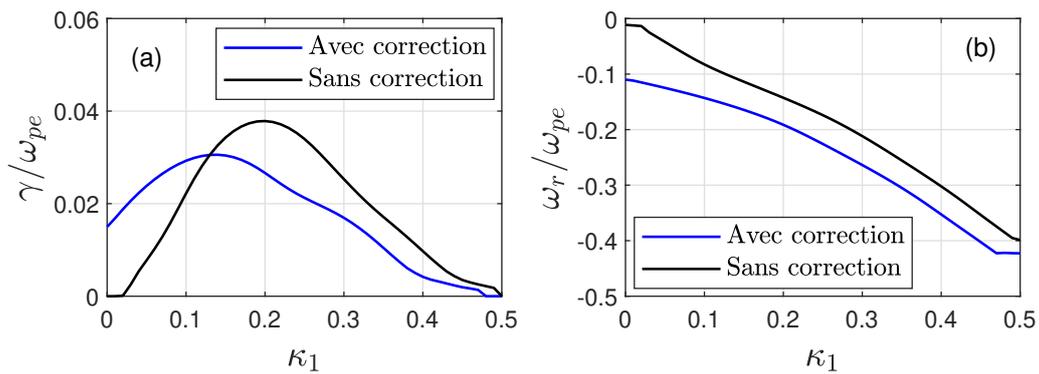


FIGURE 4.16 – Représentation du taux de croissance et de la fréquence réelle lorsque  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.33$ . Les courbes bleues ont été obtenues en tenant compte de la correction notée en rouge dans l'équation (4.52), contrairement aux courbes noires représentant les résultats obtenus sans en tenir compte. (a) Taux de croissance,  $\gamma$ , normalisé à  $\omega_{pe}$ . On peut voir qu'il diminue lorsqu'on tient compte de la correction. (b)  $\omega_r \equiv \Re(\omega_1)$  normalisée à  $\omega_{pe}$ . La prise en compte de la correction a tendance à faire décroître  $\omega_r$ .

## 4.7 Sensibilité à la variation de la fonction distribution autour la séparatrice

Nous venons de voir, dans le paragraphe 4.6, que les solutions de la relation de dispersion Eq. (4.60) étaient sensibles à la prise en compte de la correction, notée en rouge dans l'expression des  $M_{nm}$ , Eq. (4.52). Cette correction a été calculée en supposant que  $f(I)$  variait infiniment rapidement dans la zone non piégée au voisinage immédiat de la séparatrice. Néanmoins, physiquement, on ne s'attend pas à ce que la fonction de distribution électronique varie infiniment rapidement. De plus, nous avons souligné au paragraphe 4.5.5 que la limite d'une variation infiniment rapide pouvait s'avérer singulière. En effet, en utilisant cette limite, on fait un calcul en supposant  $\Omega = d_I H = 0$ , or  $\Omega$  varie trop vite autour de la séparatrice pour que cette approximation soit précise.

Dans ce paragraphe, nous étudions comment les résultats du paragraphe 4.6 évoluent lorsqu'on suppose une variation de  $f(I)$  sur un intervalle fini en action,  $\delta I$ , dans la zone non piégée proche de la séparatrice. Plus précisément, notons

$$F_\alpha \equiv f_\alpha(I_s + v_\phi + \delta I), \quad (4.61)$$

$$F_\beta \equiv f_\beta(I_s - v_\phi + \delta I), \quad (4.62)$$

$$F_\gamma \equiv f_\gamma(I_s)/2, \quad (4.63)$$

où  $f_{\alpha,\beta,\gamma}(I)$  sont issus du calcul adiabatique du chapitre 2, sauf en ce qui concerne  $f_\gamma(I)$  qui est estimé de manière simplifiée en assimilant  $v_\phi^*(I)$  à  $v_\phi$  dans l'équation (2.36). Notons de plus,

$$F'_\alpha \equiv f'_\alpha(I_s + v_\phi + \delta I), \quad (4.64)$$

$$F'_\beta \equiv f'_\beta(I_s - v_\phi + \delta I), \quad (4.65)$$

$$F'_\gamma \equiv f'_\gamma(I_s)/2. \quad (4.66)$$

Nous définissons, sur la zone ( $\alpha$ ) de l'espace des phases, le polynôme du troisième degré  $P_\alpha(I)$  tel que,

$$P_\alpha(I_s + v_\phi) = F_\gamma, \quad (4.67)$$

$$P'_\alpha(I_s + v_\phi) = F'_\gamma, \quad (4.68)$$

$$P_\alpha(I_s + v_\phi + \delta I) = F_\alpha, \quad (4.69)$$

$$P'_\alpha(I_s + v_\phi + \delta I) = F'_\alpha. \quad (4.70)$$

De même, dans la zone ( $\beta$ ) de l'espace des phases, nous introduisons le polynôme du troisième degré  $P_\beta(I)$  tel que,

$$P_\beta(I_s - v_\phi) = F_\gamma, \quad (4.71)$$

$$P'_\beta(I_s - v_\phi) = F'_\gamma, \quad (4.72)$$

$$P_\beta(I_s - v_\phi + \delta I) = F_\beta, \quad (4.73)$$

$$P'_\beta(I_s - v_\phi + \delta I) = F'_\beta. \quad (4.74)$$

Nous calculons alors les spectres instables à partir de la fonction de distribution,  $f_{\text{cub}}(I)$ , qui est définie de la manière suivante.

Dans la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases,

$$f_{\text{cub}}(I) = \begin{cases} P_\alpha(I) & \text{si } v_\phi + I_s \leq I \leq v_\phi + I_s + \delta I \\ f_\alpha(I) & \text{si } I \geq v_\phi + I_s + \delta I. \end{cases} \quad (4.75)$$

Dans la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases,

$$f_{\text{cub}}(I) = \begin{cases} P_\beta(I) & \text{si } -v_\phi + I_s \leq I \leq -v_\phi + I_s + \delta I \\ f_\beta(I) & \text{si } I \geq -v_\phi + I_s + \delta I. \end{cases} \quad (4.76)$$

Dans la région ( $\gamma$ ) de l'espace des phases,

$$f_{\text{cub}}(I) = f_\gamma(I)/2. \quad (4.77)$$

La fonction de distribution  $f_{\text{cub}}(I)$  est continûment dérivable et identique à la fonction de distribution adiabatique hors de la zone de raccordement. La figure 4.17 illustre cette fonction de distribution en coordonnées  $(\varphi, v)$ , ainsi que la fonction de distribution adiabatique.

Sur la figure 4.18, nous comparons les taux de croissance obtenus à partir de la fonction de distribution adiabatique à ceux obtenus à partir de  $f_{\text{cub}}(I)$ . Il est important de noter que, pour les calculs effectués à partir de  $f_{\text{cub}}(I)$ , nous supposons le potentiel sinusoïdal, sans avoir eu le temps de creuser l'auto-cohérence de cette hypothèse, bien qu'à  $k\lambda_D = 0.333$  on ne s'attend pas à ce que les harmoniques du potentiel jouent un rôle dans le résultat conformément à la discussion de la partie 2.6. Ainsi, les résultats que nous présentons dans ce paragraphe sont à prendre d'un simple point de vue indicatif, et nous n'essaierons pas de les interpréter finement d'un point de vue physique, d'autant plus qu'ils sont assez contre-intuitifs. En particulier, on peut voir sur la figure 4.18 que l'accord sur les taux de croissance est meilleur lorsque  $\delta I = 0.6I_s$  que lorsque  $\delta I = 0.1I_s$ . Par ailleurs, la figure 4.19 montre la grande sensibilité du taux de croissance maximum en fonction de  $\delta I$ .

Pour conclure, les résultats semblent indiquer que la théorie de la stabilité d'une onde lentement variable est délicate, et nécessite un calcul précis de la fonction de distribution,  $f(I)$ , autour de la séparatrice. Ce point sera davantage creusé dans le chapitre 5 où nous comparons les résultats théoriques à ceux issus de simulations de type Vlasov.

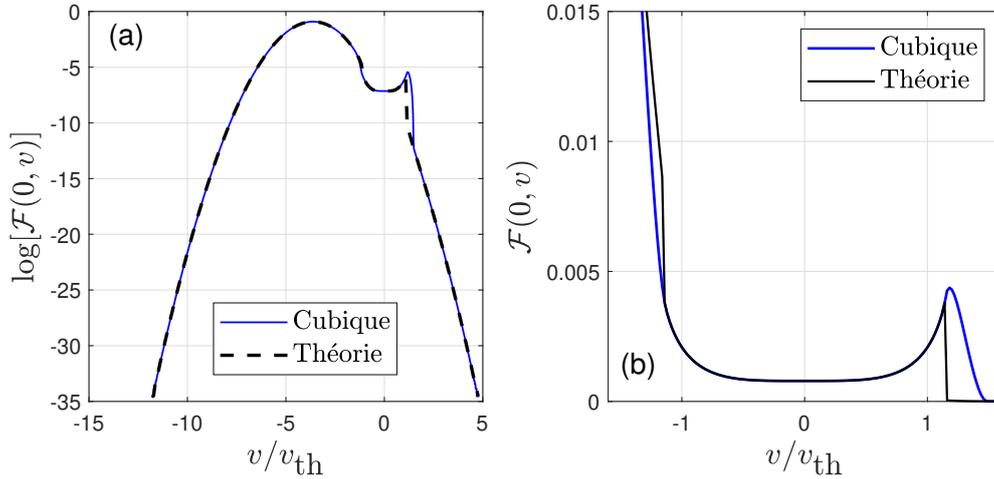


FIGURE 4.17 – Coupe  $\mathcal{F}(\varphi = 0, v)$  de la fonction de distribution électronique, calculée dans le référentiel de l'onde. La courbe bleue représente la fonction de distribution adiabatique, simplifiée en assimilant  $v_\phi^*(I)$  à  $v_\phi$  dans le calcul de  $f_\gamma(I)$ . Elle correspond à une onde sinusoïdale d'amplitude  $\phi_1 = 0.33$  et de vitesse de phase  $v_\phi = 3.5285$ . La courbe noire correspond à la fonction de distribution  $f_{\text{cub}}(I)$ , définie par les équations (4.75) à (4.77), utilisant un raccord continûment dérivable dans la zone non piégée près de la séparatrice. (a) On représente les fonctions de distribution sur une large plage en  $v$  pour en visualiser l'ensemble. (b) On agrandit la figure (a) de manière à mieux visualiser le raccordement.

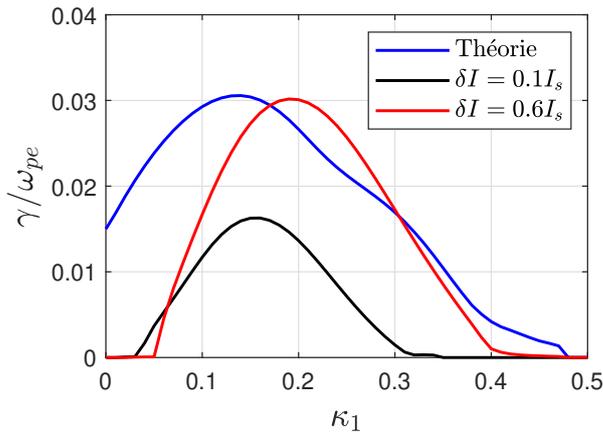


FIGURE 4.18 – Comparaisons des spectres instables  $\gamma(\kappa_1)$  calculés pour la fonction adiabatique représentée sur la figure 4.17 (a) (courbe bleue) et pour la fonction de distribution  $f_{\text{cub}}(I)$  avec  $\delta I = 0.1 I_s$  (courbe noire) ou  $\delta I = 0.6 I_s$  (courbe rouge).

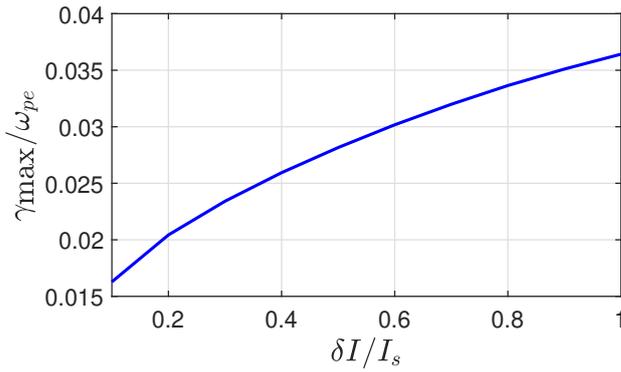


FIGURE 4.19 – Le taux de croissance maximal  $\gamma_{\max}$  en fonction de  $\delta I/I_s$  pour  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\phi_1 = 0.3$ . On remarque une variation de l'ordre d'un facteur deux dans le taux de croissance lorsque  $\delta I$  varie de  $I_s/10$  à  $I_s$ .

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé de manière théorique la stabilité d'un mode BGK, en donnant une importance toute particulière au cas où ce mode résultait de la croissance d'une onde adiabatique.

Nous avons tout d'abord rappelé les modèles de KDS et de Dodin, que nous avons discuté physiquement. De plus, nous avons noté une certaine difficulté à utiliser ces modèles qui ne sont pas totalement auto-cohérents. En effet, ils assimilent  $v_\phi$  à la valeur linéaire, fluide, de la vitesse de phase de l'onde. Or, les taux de croissance des modes instables sont très sensibles à la valeur utilisée pour  $v_\phi$ , dont ces modèles ne prédisent pas les variations non linéaires.

Nous avons ensuite exposé notre théorie générale, valable pour toute fonction  $f(I)$ , et qui est une théorie linéaire exacte. Nous avons comparé les résultats de notre théorie à ceux issus des modèles de KDS et de Dodin, et nous avons trouvé des différences significatives dans le spectre des taux de croissance  $\gamma(\kappa_1)$ .

Bien qu'exacte, notre théorie linéaire ne peut prédire de manière précise des taux de croissance qu'à partir d'une fonction de distribution,  $f(I)$ , calculée précisément. Or, ce point s'avère non trivial dans le cas d'une onde croissant lentement. En effet, bien que précise, la fonction de distribution adiabatique possède l'inconvénient d'être discontinue à la séparatrice. Nous avons remplacé cette discontinuité par une variation plus ou moins rapide, dans la zone non piégée au voisinage immédiat de la séparatrice. La plupart de nos résultats ont été exposés dans le cas d'une variation infiniment rapide. Cependant, cette limite semble singulière, et si l'on remplace la variation infiniment rapide par une variation sur un intervalle fini en action,  $\delta I$ , les taux de croissance semblent dépendre fortement de la valeur choisie pour  $\delta I$ . De manière à avoir une meilleure idée de la validité de nos calculs théoriques, nous les comparons maintenant aux résultats de simulations cinétiques de type Vlasov.



---

# 5

## Stabilité d'une onde adiabatique. Comparaisons entre théorie et simulations numériques

### 5.1 Introduction

Comme déjà mentionné dans [Brunner *et al.* (2014)], et discuté à nouveau au chapitre 4, l'emploi des modèles KDS et de Dodin pour calculer les taux de croissance des modes instables pose deux problèmes essentiels. D'une part, ces taux de croissance sont très sensibles à la valeur exacte de  $v_\phi$ , qui n'est pas précisée dans ces modèles, puisqu'ils reposent sur l'hypothèse selon laquelle  $v_\phi$  peut être assimilée à la valeur linéaire (et même fluide pour le modèle KDS) de la vitesse de phase de l'onde. D'autre part, ces modèles font des approximations drastiques sur la réponse des électrons à l'EPW, sans que l'impact de ces approximations sur l'estimation des taux de croissance ne soit quantifié. Ces deux problèmes ont motivé le développement de la théorie linéaire du chapitre 4, dont nous avons montré que les prédictions étaient différentes de celles des modèles KDS et de Dodin. Bien que notre théorie linéaire soit exacte, son application à une onde adiabatique pose problème, à cause de la discontinuité de la fonction de distribution à la séparatrice. Il ne semble donc pas exister de résultat théorique pleinement satisfaisant, et nous aimerions pouvoir quantifier la précision des diverses approches que nous venons de mentionner. Pour ce faire, nous comparons dans ce chapitre les estimations théoriques des taux de croissance, obtenues à partir des modèles KDS et de Dodin ou à partir de notre théorie, à ceux déduits de simulations Vlasov.

Nous considérons ici deux types de simulations, celles effectuées par Friou *et al.* [Friou *et al.* (2013)] et celles de Brunner *et al.* [Brunner *et al.* (2014)]. Ce sont les deux seules simulations étudiant la stabilité d'une EPW dont les propriétés sont proches d'une onde créée par SRS, et dont nous avons connaissance. Les simulations de Friou *et al.* [Friou *et al.* (2013)] ont été effectuées à l'aide du code VADOR [Filbet *et al.* (2001)]. Dans ces simulations, la fonction de distribution analytique calculée au chapitre 2 et donnée par l'équation (2.42) est discrétisée sur une grille fixe, puis propagée sur la même grille par une méthode de type Vlasov à flux conservatif, qui préserve la positivité de la fonction de distribution [Filbet *et al.* (2001)]. Dans les simulations de Brunner *et al.* [Brunner *et al.* (2014)], effectuées en utilisant le code SAPRISTI [Berger *et al.* (2013)], on fait croître une EPW à l'aide d'un forçage extérieur. Le forçage est coupé à un temps  $t_{\text{stop}}$  lorsque l'onde a atteint l'amplitude voulue, après quoi la fonction de distribution est propagée sur une grille fixe comme dans les simulations de Friou *et al.* Cependant, à la différence de VADOR, SAPRISTI utilise un schéma de type semi-Lagrangien [Cheng & Knorr (1976)] ainsi qu'une interpolation de la fonction de distribution par des splines cubiques [W.H.Press *et al.* (1996)]. Pour des comparaisons plus précises avec les simulations numériques, nous les avons refaites avec deux codes que nous avons écrits nous-mêmes. Ces codes reproduisent les schémas numériques de VADOR et de SAPRISTI. Comme nous avons obtenu des résultats similaires avec les deux codes, nous ne présentons ici que ceux obtenus en utilisant un schéma semi-Lagrangien avec interpolation par splines cubiques. Nous l'appelons CNVS (Cheng et Knorr Vlasov Solver). Ainsi, dans ce chapitre, chaque fois que nous faisons référence aux simulations de Friou *et al.* ou de Brunner *et al.* nous parlons des simulations que nous avons faites à l'aide du code CNVS, dans le même esprit que celui des auteurs sus-cités, dont nous avons été capables de reproduire les résultats.

Les premières comparaisons entre théorie et simulations ont été effectuées en nous assurant que nous partions bien de la même fonction de distribution,  $f(I)$ , que ce soit pour les calculs théoriques ou numériques. Cette fonction est construite à partir de simulations numériques effectuées dans un esprit proche de celui des simulations de Brunner *et al.* Cela nous permet de tester directement la précision de notre théorie, des modèles KDS et de Dodin, ainsi que des simulations numériques. Nous poursuivons ensuite nos comparaisons en utilisant, dans notre théorie, la fonction de distribution adiabatique,  $f(I)$ , calculée dans les chapitres 2 ou 4. Cela nous permet de discuter en détail la difficulté de faire des prédictions très précises sur la stabilité d'une EPW adiabatique, que ce soit d'un point de vue théorique ou numérique.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante. Dans la partie 5.2 nous présentons les résultats numériques des calculs des taux de croissance obtenus avec CNVS et expliquons le schéma numérique du code. Nous expliquons aussi en détail le principe

des simulations de Friou *et al.* et de Brunner *et al.* Dans la partie 5.3 nous comparons les taux de croissance numériques à ceux calculés en utilisant la théorie du chapitre 4 ou à l'aide des modèles KDS ou de Dodin. Dans la partie 5.4 nous discutons de manière plus détaillée qu'au paragraphe 5.2 les simulations de Friou *et al.*, de manière à expliquer pourquoi elles ne représentent pas exactement une EPW adiabatique. Le paragraphe 5.5 conclut ce chapitre et résume les résultats obtenus.

## 5.2 Calcul numérique du taux de croissance

### 5.2.1 Schémas numériques des codes Vlasov

Le choix de recourir aux simulations Vlasov pour mesurer les taux de croissance des modes instables est motivé par le très faible niveau de bruit dans ces simulations, ce qui permet une estimation très précise des taux de croissance. Nous avons pu trouver divers schémas numériques dans la littérature scientifique [Cheng & Knorr (1976); Filbet *et al.* (2001); Filbet & Sonnendrücker (2003); Crouseilles *et al.* (2010, 2015)], qui résolvent généralement le système Vlasov-Poisson dans les coordonnées  $(x, v)$ , où  $x$  est normalisé à la longueur de Debye et  $v$  à la vitesse thermique. Dans ces coordonnées,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \partial_x \phi \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} = 0, \quad (5.1)$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 1 - \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(x, v, t) dv. \quad (5.2)$$

Nous nous sommes essentiellement concentrés sur deux schémas particuliers, qui ont été utilisés dans les simulations de Friou *et al.* [Friou *et al.* (2013)] et de Brunner *et al.* [Brunner *et al.* (2014)]. Le premier est de type PFC (positive flux conservative) [Filbet *et al.* (2001)] à grille fixe qui utilise un schéma à base de flux. Comme l'explique l'auteur, il est possible de résoudre l'équation de Vlasov, en la séparant en deux demi-advections de la forme  $\partial_t g + a \partial_q g = 0$ . Pour résoudre cette advection, l'idée est de remplacer la dérivée spatiale de  $g$  au point  $q$  par une dérivée discrète de pas  $\Delta q/2$  soit  $[g(q + \Delta q/2, t) - g(q - \Delta q/2, t)]/\Delta q$ . En intégrant l'advection sur un pas de temps  $\Delta t$ , on obtient l'expression suivante :  $g(q, t + \Delta t) = g(q, t) - a(\Delta t/\Delta q) \int_t^{t+\Delta t} [g(q + \Delta q/2, t') - g(q - \Delta q/2, t')] dt'$ . Cette intégrale peut être pensée comme le flux entrant ou sortant à l'une des frontières de la maille, d'où le nom de la méthode. En utilisant la conservation de l'équation de Vlasov sur les caractéristiques, qu'il est possible de calculer avec une bonne précision par une méthode de saute-mouton, l'auteur construit un schéma numérique qui permet de propager la distribution en temps sur une grille fixe. La spécificité de sa méthode comparée à d'autres comme celle de [Fijalkow (1999)] est telle qu'au lieu de propager la fonction de distribution directement, il propage plutôt sa primitive et retrouve ensuite la distribution par dérivation. L'utilisation de la primitive ainsi que d'un correcteur de pente lui permet de conserver la positivité de la fonction de distribution. Ce n'est pas le cas du deuxième schéma auquel nous nous sommes intéressés, qui est de type semi-Lagrangien [Cheng & Knorr (1976)]. Dans ce schéma, on utilise également la méthode de time splitting pour résoudre l'équation de Vlasov, cependant les advections sont intégrées analytiquement. On obtient par exemple  $g(q, t + \Delta t) = g(q - a\Delta t, t)$ . Le schéma est construit de sorte à vérifier la conservation de l'équation de Vlasov sur les caractéristiques comme le schéma précédent.

Cependant, à la différence du schéma PFC, la fonction de distribution est interpolée par des splines cubiques pour l'évaluer aux points  $q - a\Delta t$  qui peuvent sortir de la grille fixe. Cette interpolation ne permet pas de conserver la positivité de la distribution, notamment en cas de forts gradients, cependant elle a l'avantage d'être très peu dissipative permettant des simulations numériques sur des temps longs.

Nous avons réussi à reproduire les résultats numériques de Friou *et al.* en écrivant l'équivalent du code VADOR [Filbet *et al.* (2001)]. Nous avons aussi reproduit les simulations de Brunner *et al.* en reprenant à l'identique la méthode numérique expliquée dans [Berger *et al.* (2013)]. Nous avons donc écrit une première version de CNVS en utilisant exactement le même schéma que dans SAPRISTI, ce qui nous a permis de reproduire à l'identique les résultats publiés dans [Brunner *et al.* (2014)]. Nous avons ensuite fait évoluer cette version en modifiant le schéma de résolution de l'équation de Poisson. Au lieu de résoudre cette équation par transformée de Fourier, nous l'avons résolue grâce à un algorithme d'inversion de matrice tridiagonale que nous avons écrit. Cela nous a donné le même résultat mais nous a évité de devoir recourir à des modules extérieurs, ce qui simplifie la procédure d'exécution du code sur le supercalculateur TOPAZE du TGCC au CEA/DAM. Le code CNVS a été écrit en FORTRAN90 et parallélisé en utilisant la librairie OPENMP. Il permet d'effectuer à la fois des simulations où la fonction de distribution est initialisée sur une grille fixe et des simulations où l'onde résulte d'un forçage extérieur. Dans ce dernier type de simulations on remplace, dans le dernier terme de l'équation de Vlasov Eq. (5.1),  $\phi$  par  $\phi + \phi_f$ , où  $\phi_f$  est le potentiel du forçage dont on impose les variations spatio-temporelles. Pour nous assurer du bon fonctionnement du code nous avons vérifié la conservation de l'énergie, de l'entropie, ainsi que les prédictions du taux d'amortissement Landau. Nous nous sommes également assurés que nous obtenions les mêmes taux de croissance des modes satellites en utilisant la même condition initiale pour la fonction de distribution dans VADOR et dans CNVS. Nous avons également effectué des simulations avec le code ESVM [Touati (2021)] qui est en accès libre, et qui est basé sur une méthode numérique de volumes finis, pour obtenir les mêmes résultats qu'avec CNVS.

Décrivons à présent brièvement le schéma numérique de CNVS. La fonction de distribution,  $\mathfrak{F}(x, v, t)$ , est discrétisée sur une grille fixe  $[0, L] \times [v_{\min}, v_{\max}]$  comportant  $(1 + n_x) \times (1 + n_v)$  points, avec des conditions aux bords périodiques en  $x$  et supposée nulle pour  $v$  en dehors de  $[v_{\min}, v_{\max}]$ . On obtient alors une matrice  $\{\mathfrak{F}(i\Delta x, v_{\min} + j\Delta v, t)\}_{\substack{0 \leq i \leq n_x \\ 0 \leq j \leq n_v}}$  où  $\Delta x = L/n_x$  et  $\Delta v = (v_{\max} - v_{\min})/n_v$ . Dans nos simulations, nous avons choisi des valeurs de l'ordre de  $n_x = 2000$ ,  $n_v = 1000$ ,  $L = 40/k\lambda_D$ ,  $v_{\min} = -10v_{\text{th}}$  et  $v_{\max} = 10v_{\text{th}}$ .

Pour propager la fonction de distribution sur un pas de temps  $\Delta t$  (choisi typiquement entre  $\Delta t = 10^{-2}$  et  $\Delta t = 10^{-1}$ , en unités  $\omega_{pe}^{-1}$ ) nous résolvons d'abord l'équa-

tion (5.1) par la méthode de séparation en deux demi-advections (time splitting). Nous résolvons d'abord  $\partial_t \mathfrak{F} + v \partial_x \mathfrak{F} = 0$  sur un demi-pas de temps puis  $\partial_t \mathfrak{F} + \partial_x \phi \partial_v \mathfrak{F} = 0$  sur un pas de temps entier. Pour finir, nous estimons  $\phi$  à partir de l'équation (5.2) puis nous résolvons à nouveau  $\partial_t \mathfrak{F} + v \partial_x \mathfrak{F} = 0$  sur un demi pas de temps. Cela permet d'obtenir un schéma d'ordre deux en temps comme l'ont montré Cheng et Knorr. Les advections sont résolues analytiquement. La résolution  $\partial_t \mathfrak{F} + v \partial_x \mathfrak{F} = 0$  sur un demi pas de temps donne,  $\mathfrak{F}(x, v, t + \Delta t/2) = \mathfrak{F}(x - v\Delta t/2, v, t)$ , et la résolution de  $\partial_t \mathfrak{F} + \partial_x \phi \partial_v \mathfrak{F} = 0$  sur un pas de temps donne,  $\mathfrak{F}(x, v, t + \Delta t) = \mathfrak{F}[x, v - (\partial_x \phi)\Delta t, t]$ . Cependant, les points  $(x - v\Delta t/2, v)$  ou  $(x, v - \partial_x \phi \Delta t)$  ne tombent généralement pas sur un nœud de la grille et, pour évaluer la fonction de distribution en ces points, il est nécessaire d'utiliser une interpolation de  $\mathfrak{F}$ . On le fait à l'aide de splines cubiques [W.H.Press *et al.* (1996)], de manière indépendante en  $x$  ou en  $v$ , ce qui assure le caractère  $C^1$  de la fonction de distribution dans ces deux variables.

### 5.2.2 Simulations de type Friou *et al.*

Les simulations de type Friou *et al.* sont initialisées avec une fonction de distribution correspondant à une onde BGK non linéaire. Cela peut être la fonction de distribution adiabatique du chapitre 2, comme dans [Friou *et al.* (2013)], ou une fonction calculée numériquement, comme expliqué au paragraphe 5.3. Dans ce sous-paragraphe, nous nous contentons de discuter les résultats obtenus à partir de la fonction de distribution adiabatique, pour une onde plasma d'amplitude  $\phi_1 = 0.33$  et de nombre d'onde  $k\lambda_D = 0.333$ . Avec ces paramètres, le champ électrique (normalisé à  $\lambda_D T/e$ ),  $E = -\partial_x \phi$ , est presque sinusoïdal. Cela peut se voir sur la figure 5.1 (a) représentant la transformée de Fourier du champ,  $\hat{E}(k)$ , à  $t = 0$ . Au temps  $t\omega_{pe} = 600$ , on peut voir sur la figure 5.1 (b) l'émergence de modes satellites à partir du bruit numérique. L'amplitude de ces modes aux temps  $t\omega_{pe} = 1200$  et  $t\omega_{pe} = 1500$  est illustrée sur les figures 5.1 (c) et (d). On peut constater qu'à  $t\omega_{pe} = 1500$  cette amplitude est comparable à celle de l'onde principale, qui est désormais brisée.

Sur la figure 5.2 (a) nous avons représenté l'évolution temporelle du mode de Fourier du champ qui croît le plus rapidement. On peut constater que la croissance de ce mode sature après  $t\omega_{pe} = 1500$ , lorsqu'il a atteint la même amplitude que l'onde principale. On peut aussi remarquer que la variation temporelle de  $\ln |\hat{E}(k, t)|$  est presque linéaire entre  $t\omega_{pe} = 500$  et  $t\omega_{pe} = 1500$ . On peut alors l'assimiler à une droite, calculée par la méthode des moindres carrés, dont la pente fournit notre estimation du taux de croissance de ce mode. En opérant d'une manière similaire pour tous les modes instables, nous obtenons le spectre des taux de croissance,  $\gamma(\kappa_1)$ , représenté sur la figure 5.2 (b), où  $\kappa_1$  est défini par l'équation (4.1). Les simulations ayant été effectuées avec une longueur de plasma valant 40 fois la longueur d'onde de l'EPW, la résolution en  $\kappa_1$  est de  $1/40$ .

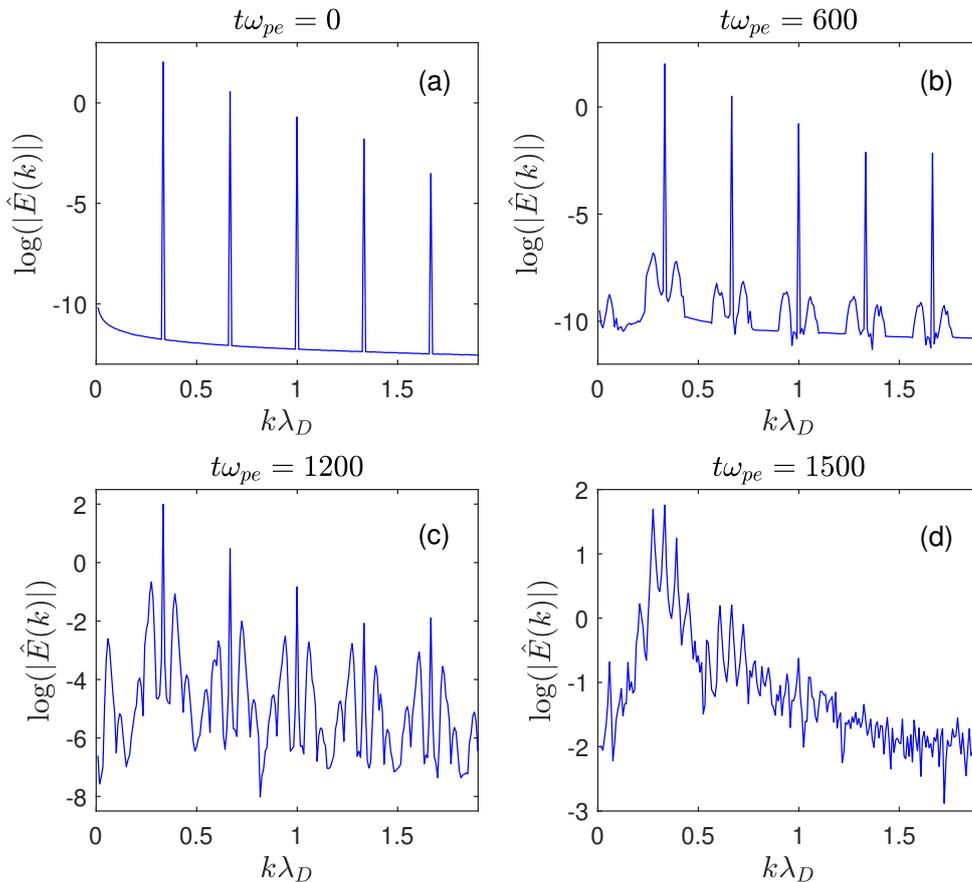


FIGURE 5.1 – Valeurs de  $\log(|\hat{E}(k)|)$  en fonction de  $k\lambda_D$  issues d'une simulation avec CNVS initialisée avec la fonction de distribution adiabatique correspondant à  $\phi_1 = 0.33$  et  $k\lambda_D = 0.333$ . Dans cette simulation effectuée sur 40 longueurs plasma nous avons choisi  $\Delta t\omega_{pe} = 0.1$ ,  $n_x = 2000$  et  $n_v = 1000$ . On peut voir sur la figure (a) le spectre initial d'un champ quasiment sinusoïdal. Sur la figure (b) on peut observer le début de la croissance des modes secondaires à partir du bruit, qui sont encore d'amplitude négligeable. Sur la figure (c), on est proche de la saturation de la croissance des modes secondaires. Sur la figure (d), les modes secondaires ont une amplitude comparable à celle de l'onde principale, qui est désormais brisée.

A ce niveau, il est important de noter que Friou *et al.* ont utilisé les taux de croissance mesurés numériquement pour prédire la saturation de la SRS. Plus précisément, ils ont tout d'abord calculé le spectre des modes instables,  $\gamma(\phi_1, \kappa_1)$ , pour plusieurs valeurs de  $\phi_1$ . Ils ont ensuite estimé l'amplitude du mode croissant le plus rapidement de la manière suivante,

$$\phi_{SB}(t) = \phi_{SB}(0) \exp \left[ \int_0^t \gamma[\phi_1(t')] dt' \right],$$

où  $\phi_{SB}(0)$  est estimé à partir de la valeur du bruit numérique dans les simulations Vlasov. Ils ont alors montré que la SRS saturait lorsque  $\phi_1(t) \approx \phi_{SB}(t)$ , après que l'EPW se soit brisée, et que le niveau de saturation ainsi trouvé dépendait très peu

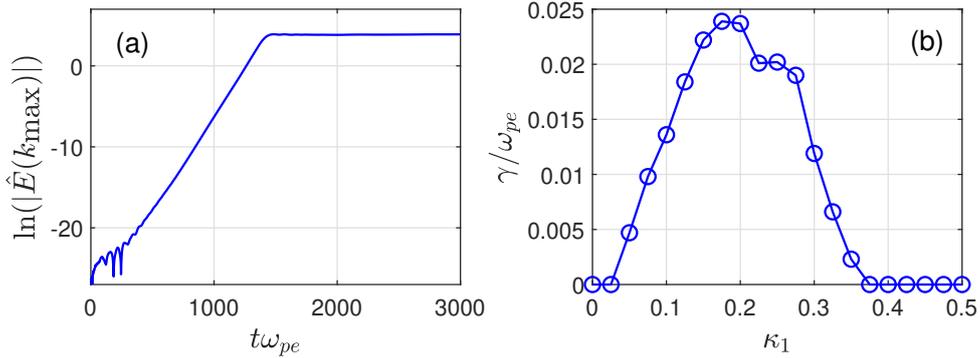


FIGURE 5.2 – Résultats de la même simulation que sur la figure 5.1. **(a)** Logarithme naturel de la transformée de Fourier du champ électrique,  $\ln|\hat{E}(k_{\max}, t)|$ , en fonction du temps. On a choisi  $k = k_{\max} = 0.2747\lambda_D^{-1}$ , correspondant au mode croissant le plus rapidement, son taux de croissance étant estimé à  $\gamma_{\max} \approx 0.239\omega_{pe}$ . **(b)** Spectre des modes instables,  $\gamma(\kappa_1)$ .

de la valeur choisie pour  $\phi_{SB}(0)$ . Cela semblait donc montrer une grande cohérence entre la mesure des taux de croissance des modes instables que nous venons de présenter, l'amplitude à laquelle une EPW créée par SRS se brise, et la saturation de la SRS.

### 5.2.3 Simulations de type Brunner *et al.*

Dans les simulations de type Brunner *et al.*, on fait croître une onde plasma électronique à l'aide d'un forçage extérieur, c'est-à-dire que l'on résout le système suivant,

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \partial_x [\phi + \phi_f] \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} = 0, \quad (5.3)$$

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 1 - \int_{\mathbb{R}} \mathfrak{F}(x, v, t) dv, \quad (5.4)$$

avec la condition initiale  $\phi(x, 0) = 0$ ,  $\partial_x \phi(x, 0) = 0$ ,  $\mathfrak{F}(x, v, 0)$  Maxwellienne. Le champ de forçage  $E_f = -\partial_{k\lambda_D} \phi_f$  est de la forme,  $E_f(x, t) = E_f^0(t) \cos(kx - \omega t)$ , où l'enveloppe  $E_f^0(t)$  croît pendant une durée  $t_{\text{ramp}}$  avant de se stabiliser et d'être constante lorsque  $t_{\text{ramp}} \lesssim t \lesssim t_{\text{stop}}$ . Après  $t = t_{\text{stop}}$ , l'enveloppe décroît pendant  $t_{\text{ramp}}$  et le forçage est coupé pour  $t > t_{\text{stop}} + t_{\text{ramp}}$  en choisissant  $E_f = 0$  (voir figure 5.3). L'onde peut alors se propager librement puisqu'on ne résout plus que le système (5.1)-(5.2). La forme de  $E_f^0$  implémentée dans CNVS est celle choisie par Brunner *et al.*,

$$\frac{E_f^0(t)}{E_f^{\text{in}}} = \frac{1}{2} \left\{ \tanh \left[ R \left( \frac{2t}{t_{\text{ramp}}} - 1 \right) \right] - \tanh \left[ R \left( \frac{2(t - t_{\text{stop}})}{t_{\text{ramp}}} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (5.5)$$

Cette enveloppe dont l'avantage est d'être essentiellement constante pendant toute la durée du forçage est représentée sur la figure 5.3. Puisque ces simulations ont été

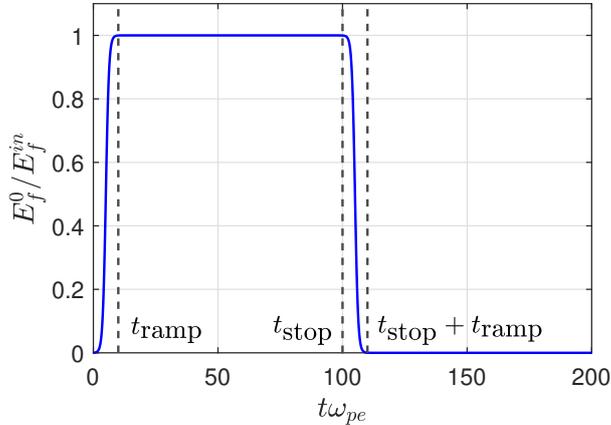


FIGURE 5.3 – L'enveloppe  $E_f^0(t)/E_f^{in}$  du champ de forçage avec  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$ ,  $t_{\text{stop}}\omega_{pe} = 100$  et  $R = 4$ . En choisissant ces paramètres ainsi que  $E_f^{in} = 1.3 \times 10^{-2}$ , on peut forcer une onde d'amplitude  $\phi_1 = 0.33$  à  $t = t_{\text{stop}} + t_{\text{ramp}}$  si  $k\lambda_D = 0.333$  et  $\omega/\omega_{pe} = 1.2$ .

entreprises dans le but de tester la théorie développée au chapitre 4 pour les ondes adiabatiques, il est important de vérifier qu'un tel forçage fait croître le champ électrique à un taux  $\Gamma$  tel que  $\Gamma/kv_{th} < 0.1$ . Comme expliqué au chapitre 2, nous définissons l'amplitude du champ comme son maximum local sur une période spatiale,  $E_{\text{max}}(t) = \max_x [E(x, t)]$ , et, numériquement, nous estimons  $\Gamma$  comme le taux de croissance de  $E_{\text{max}}(t)$ .

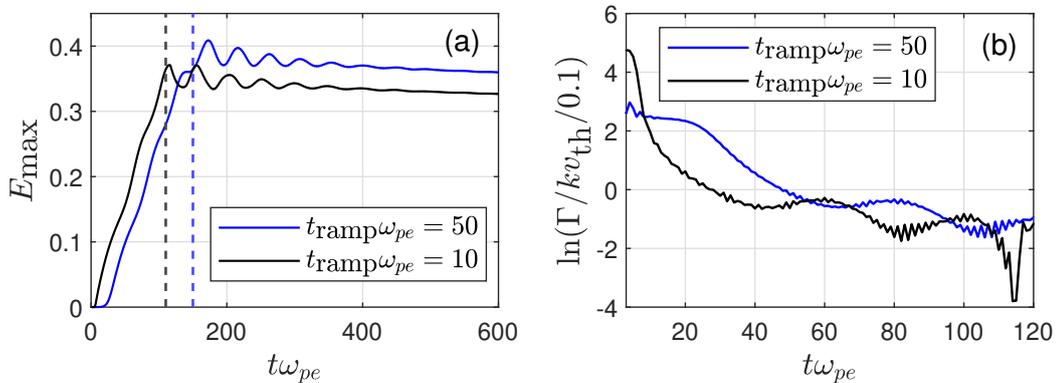


FIGURE 5.4 – (a) Evolution temporelle de  $E_{\text{max}}(t)$  défini comme le maximum sur une longueur d'onde spatiale du champ électrique. La courbe noire correspond à  $E_f^{in} = 1.4 \times 10^{-2}$  et à  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$ , et la courbe bleue à  $E_f^{in} = 1.3 \times 10^{-2}$  et  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 50$ . (b)  $\ln[\Gamma/(0.1kv_{th})]$  où  $\Gamma$  est le taux de croissance de  $E_{\text{max}}(t)$ . Les courbes noires et bleues correspondent aux mêmes scénarios que sur la figure (a).

L'évolution temporelle de  $E_{\text{max}}(t)$  et de son taux de croissance, lorsque  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$ , sont respectivement reportées sur les courbes noires des figures 5.4 (a) et (b). Comme on peut le voir sur ces figures,  $\ln[\Gamma/(0.1kv_{th})]$  devient négatif, et la condition d'adiabaticité est vérifiée, uniquement lorsque  $t\omega_{pe} \gtrsim 30$ . Nous sommes donc amenés à conclure que le scénario de forçage choisi n'est pas totalement adiabatique.

Pour essayer de nous rapprocher d'une situation adiabatique, nous avons augmenté le temps de rampe pour le faire passer de  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$  à  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 50$ . On constate effectivement, sur la figure 5.4 (a), une croissance globalement plus lente de l'onde plasma. Cependant, comme on peut le voir sur la figure 5.4 (b),  $\Gamma/kv_{\text{th}}$  ne devient inférieur à 1 qu'à partir de  $t\omega_{pe} = 50$ , c'est-à-dire plus tard que lorsque  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$ . Le caractère plus adiabatique de l'onde forcée, en utilisant une rampe plus longue, n'est donc pas évident. Il est à noter qu'on ne peut pas rallonger la rampe à l'infini sous peine de voir les modes satellites croître avant que l'EPW n'ait atteint l'amplitude  $\phi_1 = 0.33$ .

Puisqu'on ne peut pas se rapprocher du cas adiabatique en augmentant  $t_{\text{ramp}}$  nous avons envisagé d'augmenter la durée de forçage  $t_{\text{stop}}$  tout en gardant  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$ . Pour atteindre l'amplitude  $\phi_1 = 0.33$  au bout d'un temps de forçage plus long, nous avons besoin de réduire l'amplitude de forçage  $E_f^{\text{in}}$ . Cependant, en réduisant cette amplitude de forçage nous réduisons l'amplitude maximale qu'on peut atteindre. Comme on le voit sur la figure 5.5, en réduisant  $E_f^{\text{in}}$  d'un facteur 2 ou 4 il est impossible d'atteindre l'amplitude  $\phi_1 = 0.33$  avec un temps de forçage de  $(t_{\text{stop}} + t_{\text{ramp}})\omega_{pe} = 510$ .

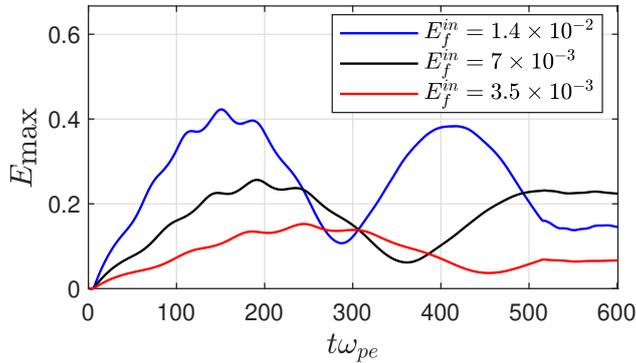


FIGURE 5.5 –  $E_{\text{max}}(t)$  lorsque  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$  et  $t_{\text{stop}}\omega_{pe} = 500$  pour différentes valeurs de  $E_f^{\text{in}}$ . Pour la courbe bleue  $E_f^{\text{in}} = 1.4 \times 10^{-2}$ , pour la courbe noire on a divisé  $E_f^{\text{in}}$  par 2, et par 4 pour la courbe rouge.

Ainsi, dans les simulations de type Bruner *et al.*, nous n'avons pas réussi à faire croître une EPW de manière totalement adiabatique. Néanmoins, les taux de croissance des modes instables que nous obtenons pour cette onde sont proches de ceux obtenus au paragraphe 5.2.2 à partir des simulations de Friou *et al.*, initialisées avec la fonction de distribution adiabatique. En particulier, on trouve  $\gamma_{\text{max}}/\omega_{pe} \approx 2.72 \times 10^{-2}$ , comme dans [Brunner *et al.* (2014)], alors qu'avec les simulations de Friou *et al.* on obtenait,  $\gamma_{\text{max}}/\omega_{pe} \approx 2.38 \times 10^{-2}$ . De plus, entre les deux types de simulations, la valeur de  $\kappa_1$  correspondant au taux de croissance maximum ne varie que de  $\delta\kappa_1 = 1/40$ , ce qui correspond à notre résolution en  $\kappa_1$ . Enfin, comme on peut le voir sur la figure 5.6, les spectres  $\gamma(\kappa_1)$  sont similaires.

En conclusion, les résultats numériques semblent totalement cohérents entre eux. On obtient les mêmes taux de croissance que l'on force une onde, même un peu trop

fort pour qu'elle soit adiabatique, ou que l'on initialise la simulation avec la fonction de distribution adiabatique comme on peut le voir notamment sur la figure 5.7. De plus, comme on l'a déjà mentionné au paragraphe 5.1, les taux de croissance calculés numériquement permettent de prédire le niveau de saturation de la SRS observé dans les simulations Vlasov.

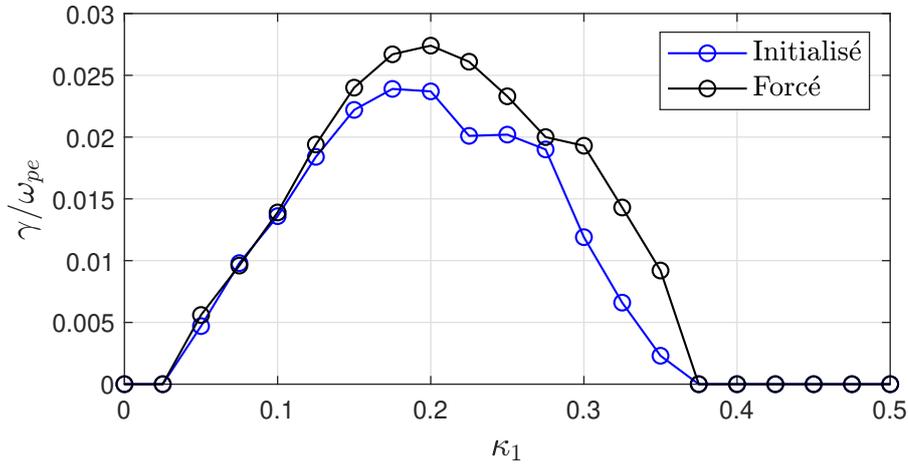


FIGURE 5.6 – Taux de croissance issus de simulations de type Friou *et al.* avec une distribution adiabatique initialisée à  $\phi_1 = 0.33$  et  $k\lambda_D = 0.333$  (courbe bleue) et obtenus dans les simulations de type Brunner *et al.* avec une onde forcée à une amplitude  $\phi_1 = 0.33$  avec une rampe  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$  et  $t_{\text{stop}}\omega_{pe} = 100$  (courbe noire).

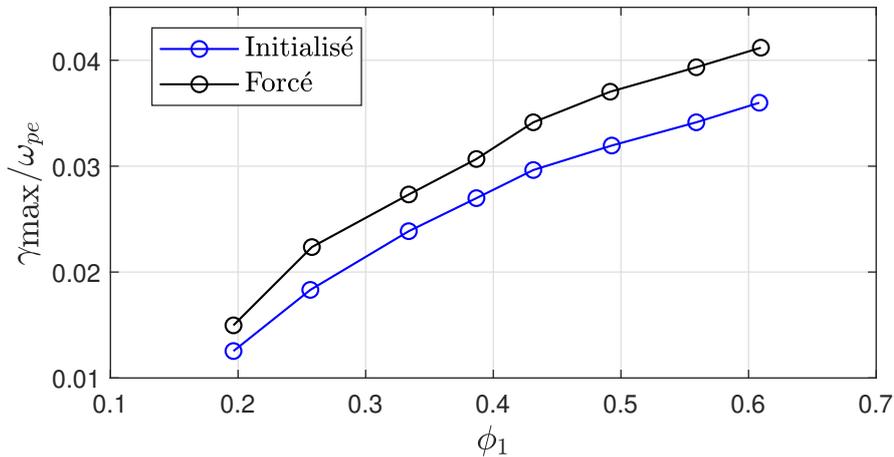


FIGURE 5.7 – Comparaison entre le taux de croissance maximal  $\gamma_{\text{max}}$  des simulations de type Brunner *et al.* et des simulations de type Friou *et al.* effectuées avec CNVS pour différentes amplitudes  $\phi_1$ . Dans les simulations où l'onde a été forcée, le scénario du forçage est resté le même avec  $t_{\text{ramp}}\omega_{pe} = 10$  et  $t_{\text{stop}}\omega_{pe} = 100$ , seule la valeur de l'amplitude du forçage  $E_f^{\text{in}}$  a varié. Dans le cas où l'onde a été initialisée à l'aide de la fonction de distribution adiabatique, les paramètres auto-cohérents comme les amplitudes des harmoniques et la vitesse de phase ont été calculés avec la méthode du chapitre 2.

## 5.3 Comparaisons entre théorie et simulations

### 5.3.1 Comparaisons à partir des mêmes fonctions de distribution

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5.2, dans les simulations de Brunner *et al.* utilisant un forçage extérieur pour faire croître une onde plasma électronique, la croissance de l'EPW est trop rapide pour que cette onde puisse être considérée adiabatique. Il semble donc peu pertinent de vouloir comparer les taux de croissance des modes satellites, obtenus dans ces simulations, avec ceux calculés théoriquement à partir de la fonction de distribution adiabatique décrite aux chapitres 2 et 4. De manière à faire des comparaisons plus maîtrisées entre théorie et simulations, il faudrait être sûr de partir de la même fonction de distribution,  $f(I)$ , que ce soit dans les calculs analytiques ou dans les simulations numériques. Cela nécessite d'être capable d'aboutir à une fonction de distribution qui ne dépende que de l'action, dans des simulations numériques du type de celles de Brunner *et al.* Nous obtenons une telle fonction de distribution de la manière suivante.

Nous reproduisons les simulations numériques décrites dans le paragraphe 5.2, utilisant un forçage extérieur comme dans [Brunner *et al.* (2014)], pour faire croître une EPW de vecteur d'onde  $k\lambda_D = 0.333$  à une amplitude  $\phi_1 \approx 0.33$ . Cependant, à la différence des simulations de [Brunner *et al.* (2014)], nous imposons des conditions périodiques sur une longueur d'onde plasma (au lieu de 40 longueurs d'onde), ce qui empêche la croissance de modes satellites. Une fois que le forçage est coupé, la fonction de distribution peut alors relaxer vers une fonction qui ne dépend que de l'action. Cela peut être observé sur la figure 5.8 représentant la fonction de distribution obtenue dans ces simulations, en coordonnées action-angle. Plus précisément, pour éviter des discontinuités dans la représentation, nous traçons sur la figure 5.8 les courbes de niveau de la fonction de distribution dans les coordonnées  $(\theta', I')$  définies de la manière suivante. Pour les orbites piégées,  $\theta' = \theta/2$  et  $I' = I$ , alors que pour les orbites non piégées,  $\theta' = \theta$  et  $I' = \eta(I - \eta v_\phi)$ , où  $\eta = 1$  dans la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases et  $\eta = -1$  dans la région ( $\beta$ ). On peut clairement voir sur les figures 5.8 (a) et (b) que la fonction de distribution dépend assez fortement de l'angle lorsque  $\omega_{pe}t = 100$ , au moment où le forçage est coupé, et en dépend encore beaucoup lorsque  $\omega_{pe}t = 1000$ . Néanmoins, comme on peut le constater sur la figure 5.8 (d), lorsque  $\omega_{pe}t = 15\,000$ , la fonction de distribution en dépend beaucoup moins et ne dépend pratiquement que de l'action lorsque  $\omega_{pe}t = 30\,000$ .

Nous utilisons la fonction de distribution, obtenue à  $\omega_{pe}t = 30\,000$  comme fonction de distribution,  $f(I)$ , utilisée dans l'équation (4.40) pour calculer les coefficients  $M_{nm}$ . A partir de ces valeurs de  $M_{nm}$ , nous calculons les taux de croissance des modes instables de manière théorique en résolvant la relation de dispersion  $\det(M) = 0$ . La courbe bleue de la figure 5.9 représente la variation de ces taux de croissance en fonction de  $\kappa_1$ . Par ailleurs, nous utilisons la fonction de distribution,  $f(I)$ , obtenue

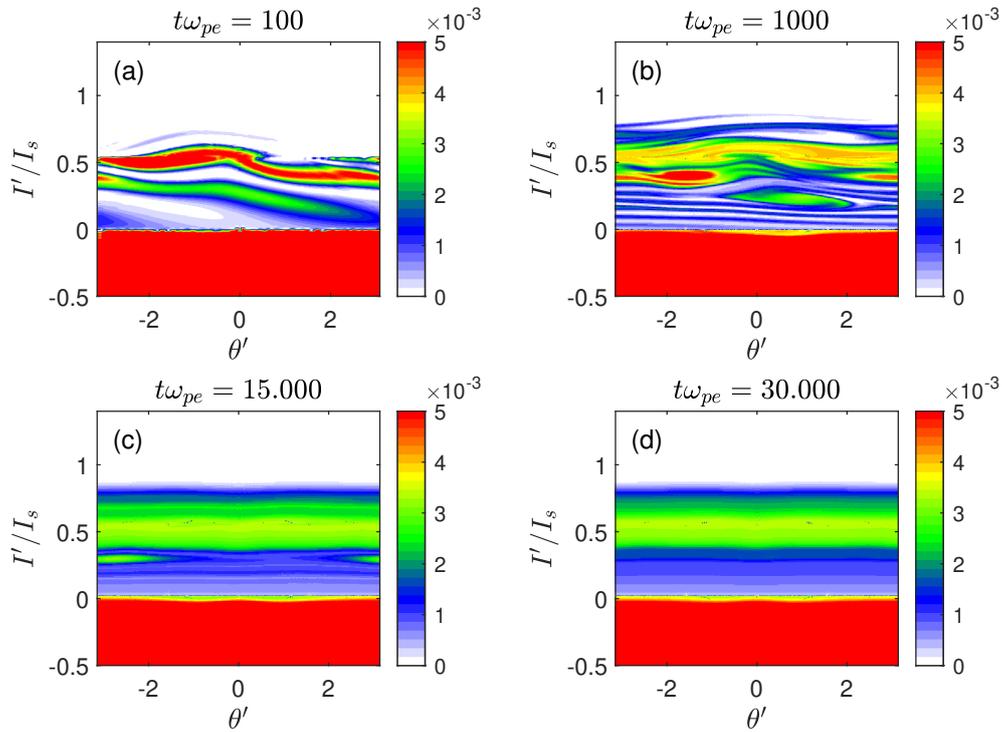


FIGURE 5.8 – Courbes de niveau de la fonction de distribution obtenue numériquement en faisant croître une EPW à l'aide d'un forçage extérieur, dans un plasma dont la période spatiale est égale à une longueur d'onde. L'amplitude de l'EPW est  $\phi_1 \approx 0.33$  et son nombre d'onde est tel que  $k\lambda_D = 0.333$ . La fonction de distribution est représentée dans les coordonnées  $(\theta', I')$  où  $I' = I$  pour les orbites piégées et  $I' = \eta(I - \eta v_\phi)$  pour les orbites non piégées, avec  $\eta = 1$  lorsque  $I' > I_s$ , dans la région  $(\alpha)$  de l'espace des phases, et  $\eta = -1$  lorsque  $I' < 0$ , dans la région  $(\beta)$  de l'espace des phases. Quant à  $\theta'$ , il vaut  $\theta/2$  pour les orbites piégées alors qu'il vaut  $\theta$  pour les orbites non piégées. **(a)** Fonction de distribution à  $t\omega_{pe} = 100$ , au moment où l'on coupe de forçage. **(b)** Fonction de distribution à  $t\omega_{pe} = 1000$ . C'est l'instant où, dans une simulation dont la période spatiale vaut 40 longueurs d'onde, la croissance des modes instables sature. **(c)** Fonction de distribution à  $t\omega_{pe} = 15000$ . **(d)** Fonction de distribution à  $\omega_{pe}t = 30000$ . A cet instant la fonction de distribution ne dépend essentiellement que de l'action.

à  $\omega_{pe} = 30\,000$  comme condition initiale d'une simulation Vlasov où l'on impose une période spatiale de 40 longueurs d'onde plasma. Les taux de croissance numériques sont alors calculés par la méthode exposée au paragraphe 5.2, et leurs valeurs sont reportées sur la courbe noire, cerclée, de la figure 5.9. Nous représentons aussi sur cette figure les taux de croissance obtenus à partir du modèle KDS et de Dodin. Il est à noter que les résultats du modèle KDS sont insensibles à la forme de la fonction de distribution, ils ne dépendent que de la fraction d'électrons piégés. C'est un des défauts du modèle. Quant au modèle de Dodin, il est aussi très peu sensible à la forme de la fonction de distribution. D'ailleurs, les calculs faits à partir de ces deux modèles n'utilisent pas la valeur auto-cohérente de la vitesse de phase. Le modèle KDS utilise la valeur linéaire issue de la relation de dispersion de Bohm et Gross, alors que le modèle de Dodin utilise la valeur linéaire cinétique, solution de l'équation (2.61).

On peut voir sur la figure 5.9 que l'accord entre les taux de croissance calculés numériquement et ceux déduits de notre théorie est presque parfait. En revanche, on peut nettement voir un désaccord entre les résultats numériques et ceux déduits des modèles KDS ou de Dodin. Cela montre, d'une part, la précision de notre théorie ainsi que de la méthode numérique, exposée au paragraphe 5.2, pour calculer le spectre des modes instables (sauf peut-être pour les plus petits taux de croissance pour lesquels la mesure numérique est plus délicate). D'autre part, cela met en évidence les limites des modèles KDS et de Dodin. On peut néanmoins remarquer que les prédictions du modèle KDS ne semblent pas si mauvaises, et sont même meilleures que celle du modèle de Dodin, qui décrit pourtant plus finement la réponse des électrons piégés à l'onde plasma principale. Dans ce cas, c'est principalement dû à l'utilisation de la vitesse de phase linéaire cinétique dans le modèle de Dodin, qui est plus petite que la vitesse de phase issue de la relation de dispersion de Bohm et Gross utilisée dans le modèle KDS. Si on utilisait la vitesse de phase fluide dans le modèle de Dodin on s'approcherait de la valeur du taux de croissance maximal prédite par KDS, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.9.

L'excellent accord illustré sur la figure 5.9 est obtenu avec une fonction de distribution qui a relaxé pendant un temps assez long,  $\omega_{pe}t = 30\,000$ . On peut donc penser qu'elle correspondrait à une EPW qui mettrait un temps équivalent à croître à la même amplitude,  $\phi_1 \approx 0.33$ . Ce temps dépasse de plus d'un ordre de grandeur le temps de croissance d'une EPW créée par SRS, dans les conditions typiques des expériences de fusion. De manière à nous rapprocher de telles conditions, il faudrait plutôt faire un calcul à partir de la fonction de distribution de la figure 5.8 (b), obtenue au temps  $\omega_{pe}t = 1000$ . Cependant, cette fonction dépend encore assez fortement de l'angle alors que notre théorie suppose une fonction de distribution

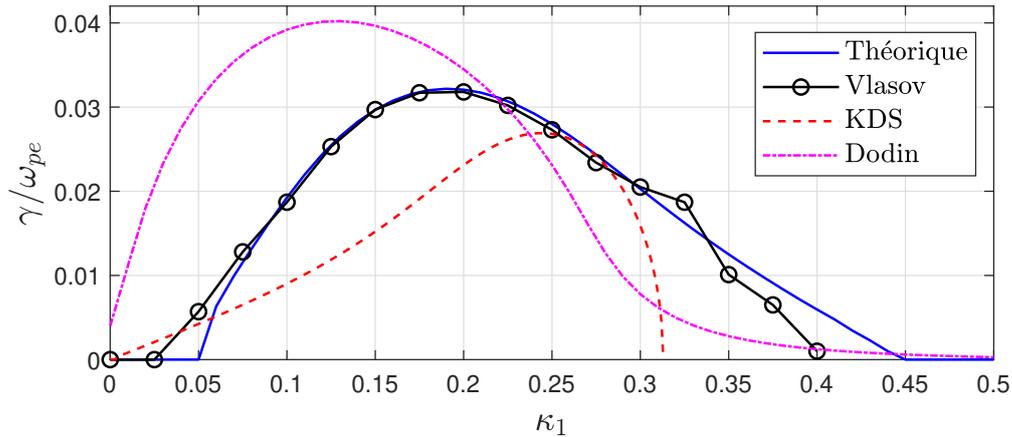


FIGURE 5.9 – Spectre des modes instables pour une fonction de distribution initiale correspondant à celle représentée sur la figure 5.8 (d). La courbe bleue correspond au calcul théorique et la courbe noire cerclée aux mesures numériques utilisant la méthode exposée au paragraphe 5.2. La courbe rouge en tirets représente les taux de croissance calculés à l’aide du modèle KDS, et la courbe magenta en tirets-points ceux déduits du modèle de Dodin.

initiale ne dépendant que de l’action. De manière à pouvoir tout de même faire des prédictions théoriques sur la situation à  $\omega_{pe}t = 1000$ , nous utilisons pour le calcul des coefficients  $M_{nm}$ , Eq. (4.40), la fonction de distribution  $f(I) \equiv \langle f \rangle_{\theta}(I)$ , c’est-à-dire la moyenne sur  $\theta$  de la fonction de distribution représentée sur la figure 5.8 (b). Le spectre instable ainsi obtenu est reporté sur la courbe bleue de la figure 5.10. Il est comparé aux résultats numériques obtenus avec une simulations Vlasov, dont la période spatiale vaut 40 longueurs d’onde, et initialisée avec la fonction de distribution de la figure 5.8 (b). Les taux de croissance ainsi obtenus sont représentés sur la courbe noire, cerclée, de la figure 5.10. Ils sont eux-mêmes comparés à ceux obtenus numériquement à partir d’une simulation Vlasov de période 40 longueurs d’onde mais initialisée avec  $\langle f \rangle_{\theta}(I)$  (courbe en tirets rouges sur la figure 5.10).

On peut clairement voir sur la figure 5.10 que les résultats numériques sont quasiment identiques, que l’on tienne compte de la dépendance angulaire de la fonction de distribution obtenue à  $\omega_{pe}t = 1000$ , ou que l’on parte de  $\langle f \rangle_{\theta}$ . Cela est probablement dû au fait que les modes satellites croissent suffisamment lentement pour n’être sensible qu’à la valeur moyenne, en  $\theta$ , de la fonction de distribution. Par ailleurs, comme on peut le voir sur la figure 5.11, cette fonction de distribution moyennée évolue très peu sur un temps de l’ordre de  $1000\omega_{pe}^{-1}$ , correspondant à l’intervalle de temps nécessaire aux modes satellites pour atteindre un niveau non linéaire. Par ailleurs, les résultats reportés sur la figure 5.10 montrent encore un très bon accord entre les résultats de notre théorie et ceux des simulations numériques. Les désaccords visibles pour les plus petits taux de croissance résultent essentiellement de la difficulté à les mesurer numériquement. On conclut donc des résultats reportés sur

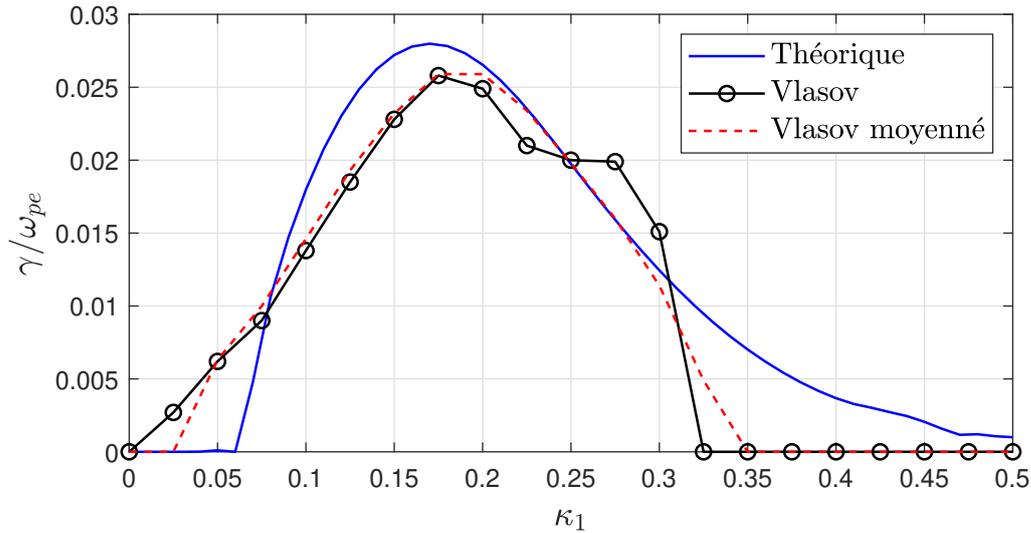


FIGURE 5.10 – Spectre des modes instables pour une situation correspondant à celle représentée sur la figure 5.8 (b). La courbe bleue correspond au calcul théorique, en utilisant  $f(I) = \langle f \rangle_\theta(I)$ , c'est-à-dire la moyenne angulaire de la fonction de distribution reportée sur la figure 5.8 (b). La courbe noire cerclée représente les résultats numériques obtenus à partir d'une simulation Vlasov initialisée avec la fonction de distribution de la figure 5.8 (b). La courbe rouge en tirets représente les résultats numériques obtenus à partir d'une simulation Vlasov initialisée avec  $\langle f \rangle_\theta(I)$ .

la figure 5.10 que notre théorie permet de calculer très précisément le spectre des modes instables même lorsque la fonction de distribution dépend de l'angle. Cela reste vrai tant que la dépendance angulaire de la fonction de distribution n'entraîne pas une variation significative de sa distribution en action sur un intervalle de temps plus petit que celui nécessaire à la saturation de l'instabilité.

Le fait que les taux de croissance soient peu sensibles à la dépendance angulaire de la fonction de distribution explique pourquoi on observe, numériquement, une croissance exponentielle quasi parfaite des modes instables. On peut d'ailleurs constater, sur la figure 5.11, qu'entre l'instant  $\omega_{pe}t$  où l'on coupe le forçage, et l'instant  $\omega_{pe}t = 1000$  où l'instabilité a saturé,  $\langle f \rangle_\theta$  a très peu varié.

### 5.3.2 Pertinence de la fonction de distribution adiabatique

Nous venons de voir au paragraphe 5.3.1 qu'il y avait un très bon accord entre théorie et simulations, à condition de partir de la même fonction de distribution,  $f(I)$ . Néanmoins, pour qu'une théorie soit réellement prédictive, elle doit aussi être capable d'indiquer la fonction de distribution à utiliser pour calculer correctement les taux de croissance des modes instables. En particulier, nous aimerions savoir si l'équation (4.52), utilisée avec la fonction de distribution adiabatique des chapitres 2 et 4, donne des résultats comparables à ceux des simulations Vlasov.

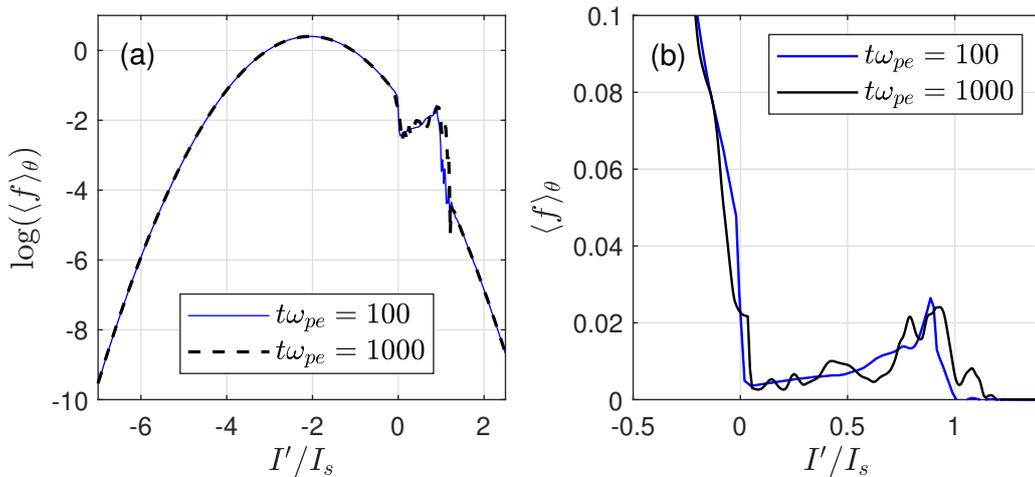


FIGURE 5.11 – Valeurs moyennées,  $\langle f \rangle_\theta$ , de la fonction de distribution calculées à  $\omega_{pe}t = 100$  (courbe bleue) et à  $\omega_{pe}t = 1000$  (courbe noire). Dans (a) les distributions sont représentées en échelle log. Dans (b) on agrandit la région piégée correspondant à  $0 \leq I'/I_s \leq 1$ .

Dans un premier temps, nous nous concentrons sur la situation physique correspondant à une onde d'amplitude  $\phi_1 \approx 0.33$  et de nombre d'onde  $k\lambda_D = 0.333$ . Sur la figure 5.12 (a), nous comparons les taux de croissance calculés théoriquement à partir de l'équation (4.52) à ceux déduits des simulations Vlasov de Brunner *et al.* et des simulations de Friou *et al.* Nous voyons que l'accord est loin d'être parfait. En particulier, nous prédisons la NMI qui n'apparaît pas dans les simulations. De plus, nous n'obtenons clairement pas un meilleur accord avec notre théorie qu'en utilisant le modèle KDS comme on peut le voir sur la figure 5.12 (b) comparant les résultats numériques à ceux des modèles KDS et de Dodin. Là encore, dans le modèle KDS, nous utilisons pour  $v_\phi$  la vitesse de phase issue de la relation de Bohm et Gross, et les résultats KDS surestimeraient significativement les résultats numériques si on utilisait la vraie valeur de  $v_\phi$ . Quant aux taux de croissance déduits du modèle de Dodin, ils ont été obtenus avec la valeur linéaire cinétique de  $v_\phi$ , solution de l'équation (2.61).

Le relativement mauvais accord avec les résultats de Brunner *et al.* ne sont pas si surprenants puisque, comme on l'a montré au paragraphe 5.3.1, l'EPW créée dans ces simulations n'est pas adiabatique. Cependant, il est beaucoup plus décevant en ce qui concerne les simulations de Friou *et al.*, puisque ces simulations sont censées être initialisées avec la fonction de distribution adiabatique. Nous discuterons de manière plus approfondie, dans le paragraphe 5.4, les raisons de ce mauvais accord.

Dans un deuxième temps, nous nous concentrons sur la situation physique correspondant à une onde d'amplitude  $\phi_1 \approx 0.197$  et de nombre d'onde  $k\lambda_D \approx 0.425$ . Sur la figure 5.13 (a), nous comparons les taux de croissance calculés théoriquement

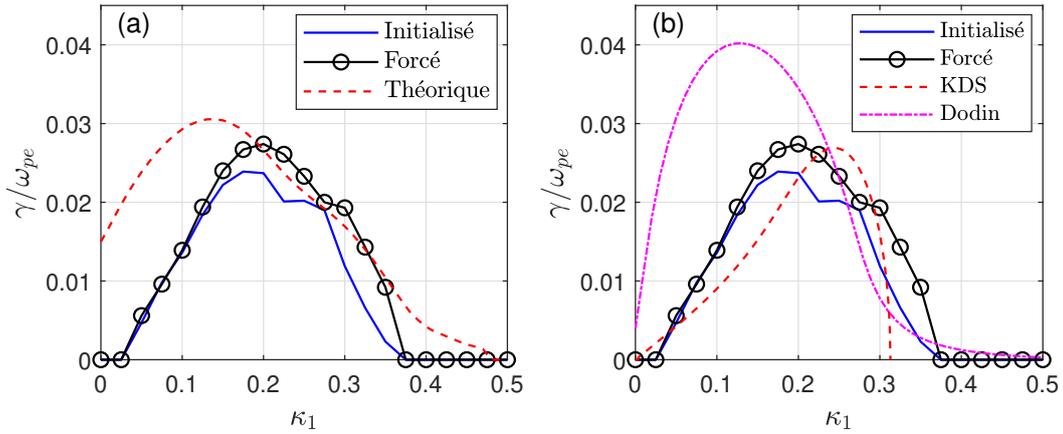


FIGURE 5.12 – Taux de croissance  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  lorsque  $\phi_1 = 0.33$  et  $k\lambda_D = 0.333$ . **(a)** On compare les résultats de notre théorie (courbe rouge en tirets) à ceux des simulations numériques de Brunner *et al.* (courbe noire cerclée) et de Friou *et al.* (courbe bleue). **(b)** On compare les résultats des modèles de KDS (courbe rouge en tirets) et de Dodin (courbe magenta en tirets-points) à ceux des simulations numériques de Brunner *et al.* (courbe noire cerclée) et de Friou *et al.* (courbe bleue).

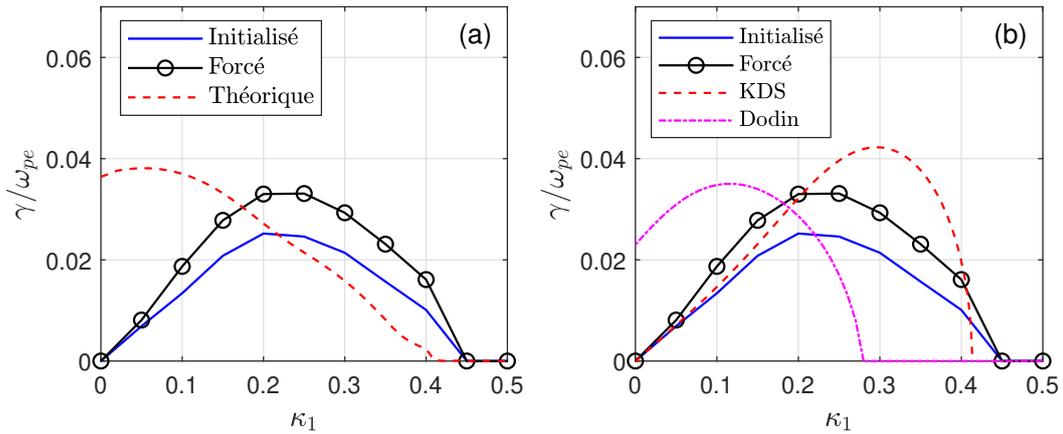


FIGURE 5.13 – Taux de croissance  $\gamma$  en fonction de  $\kappa_1$  pour  $\phi_1 = 0.1927$  et  $k\lambda_D = 0.425$ . **(a)** On compare les résultats de notre théorie (courbe rouge en tirets) à ceux des simulations numériques de Brunner *et al.* (courbe noire cerclée) et de Friou *et al.* (courbe bleue). **(b)** On compare les résultats des modèles de KDS (courbe rouge en tirets) et de Dodin (courbe magenta en tirets-points) à ceux des simulations numériques de Brunner *et al.* (courbe noire cerclée) et de Friou *et al.* (courbe bleue).

à partir de l'équation (4.52) à ceux déduits des simulations Vlasov de Brunner *et al.* et des simulations de Friou *et al.* L'accord est pire que dans le cas précédent où  $\phi_1 \approx 0.33$  et  $k\lambda_D = 0.333$ . On ne peut pas non plus dire qu'on s'approche plus des résultats numériques que les modèle KDS ou de Dodin comme on peut le voir sur la figure 5.13 (b).

Comme déjà discuté au chapitre 4, l'utilisation de l'équation (4.52) pour calculer les coefficients  $M_{nm}$  peut poser problème. Par ailleurs, nous avons vu au paragraphe 5.2.2 qu'on n'arrivait pas à faire croître une onde de manière suffisamment lente, à l'aide des simulations de type Brunner *et al.*, pour que cette onde puisse être considérée comme adiabatique. Cela peut expliquer les différences entre les résultats théoriques et ceux des simulations de Brunner *et al.* Néanmoins, les simulations de Friou *et al.* étant initialisées avec la fonction de distribution adiabatique, on pouvait s'attendre à un meilleur accord avec les résultats théoriques. La comparaison entre théorie et simulations numériques semble donc faire apparaître un problème dans l'étude de la stabilité d'une onde adiabatique, que ne révélaient pas les comparaisons entre résultats purement numériques. Pour mieux approfondir ce problème, nous étudions au paragraphe 5.4 les simulations de Friou *et al.* de manière plus détaillée, afin de mieux comprendre pourquoi elles ne correspondent pas exactement à la situation théorique qu'elles sont censées représenter.

## 5.4 Discussion des simulations numériques de Friou *et al.*

Les simulations de Friou *et al.* sont initialisées avec l'équivalent numérique de la fonction de distribution adiabatique. Cette fonction de distribution ne dépendant que de l'action, elle est stationnaire. Donc, si on calcule dans un code Vlasov l'équivalent numérique de  $\partial_t \mathfrak{F} = -v \partial_x \mathfrak{F} - \partial_x \phi \partial_v \mathfrak{F}$ , on devrait trouver une valeur très faible, de l'ordre du bruit numérique. Ce n'est cependant pas le cas, comme le montre la figure 5.14 (a). La discontinuité de la fonction de distribution adiabatique à la séparatrice entraîne une instationnarité effective dans les codes Vlasov. Ainsi, contrairement à ce qu'on pourrait croire, dans les simulations de Friou *et al.*, on ne calcule pas les taux de croissance de modes instables correspondant à une onde stationnaire.

Nous avons étudié l'évolution temporelle de la fonction de distribution adiabatique, telle que calculée par notre code Vlasov. Pour qu'elle ne soit pas perturbée par la croissance de modes satellites, nous avons décidé de la propager dans un plasma de longueur  $2\pi/k$ . Pour éviter aussi que la NMI ne se développe, nous avons supprimé la rétroaction sur le potentiel via l'équation de Poisson. Nous ne résolvons donc que l'équation de Vlasov, où  $\phi$  est issu du calcul auto-cohérent du chapitre 2. Comme on peut le voir sur la figure 5.14 (b),  $|\partial_t \mathfrak{F}|$  diminue significativement sur des temps longs de l'ordre de  $t\omega_{pe} = 30\,000$ , essentiellement par mélange de phase. C'est donc un effet de relaxation similaire à ce qu'on a pu observer sur la figure 5.8 dans le cas des simulations de Brunner *et al.*

Nous avons utilisé la fonction de distribution obtenue après un temps de relaxation  $t_r$  comme condition initiale d'une simulation Vlasov sur 40 longueurs d'onde. Nous avons alors observé que, non seulement les taux de croissance des modes satellites dépendaient de  $t_r$ , mais que, pour une même valeur de  $t_r$ , ils dépendaient aussi du pas de temps choisi,  $\Delta t$ . De plus, comme on peut le voir sur la figure 5.15, en augmentant  $t_r$ , on ne semble pas converger vers une valeur stationnaire, contrairement au cas des simulations de Brunner *et al.*

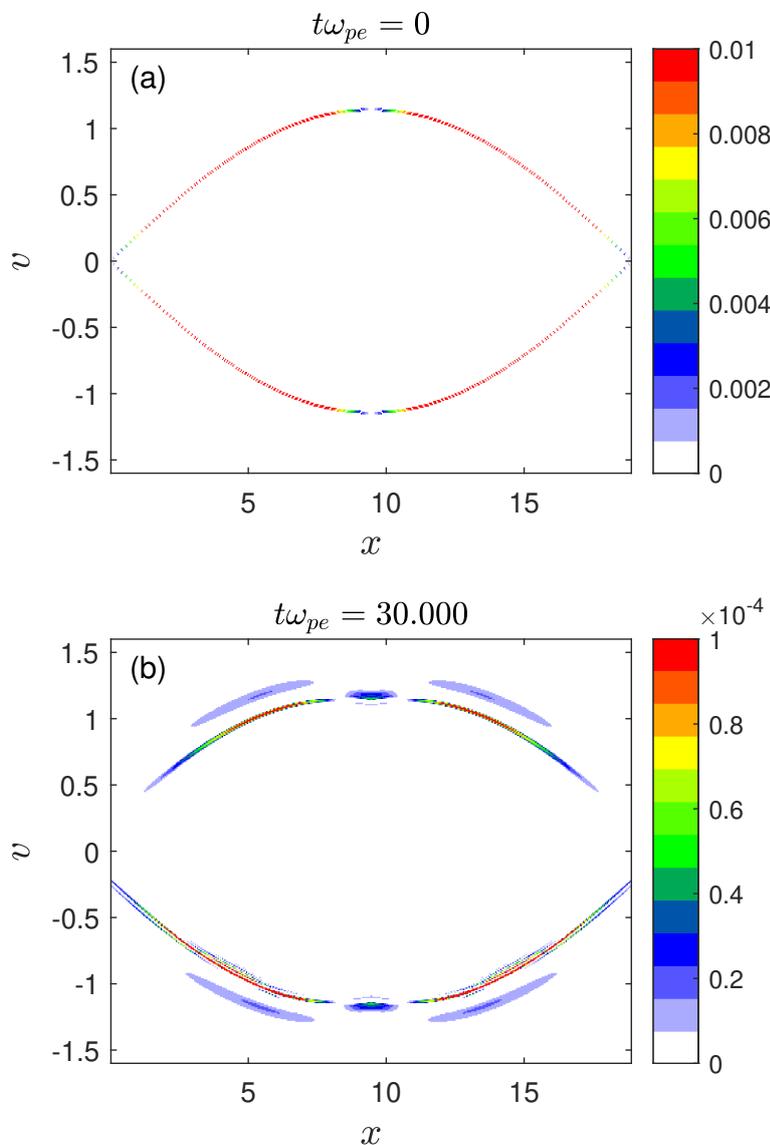


FIGURE 5.14 – Résultat d'une simulation ne résolvant que l'équation de Vlasov sur une longueur d'onde, et initialisée avec la fonction de distribution adiabatique correspondant à  $\phi_1 = 0.33$ ,  $v_\phi = 3.5285$  et  $k\lambda_D = 0.333$ . Le potentiel  $\phi$  est le potentiel auto-cohérent associé à la fonction de distribution adiabatique. On représente les valeurs de  $|-v\partial_x\mathfrak{F} - \partial_x\phi\partial_v\mathfrak{F}|$  issues d'une dérivation numérique, où  $2\Delta x\partial_x\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}(x + \Delta x, v) - \mathfrak{F}(x - \Delta x, v)$  avec  $\Delta x = L/500$  et  $2\Delta v\partial_v\mathfrak{F} \equiv \mathfrak{F}(x, v + \Delta v) - \mathfrak{F}(x, v - \Delta v)$  avec  $\Delta v = 10^{-2}$ . (a) Résultat avec la fonction de distribution initiale. (b) Résultat à  $t\omega_{pe} = 30.000$ .

Nous interprétons ces résultats de la manière suivante. L'instationnarité effective de la fonction de distribution adiabatique, ou plutôt de son équivalent discrétisé, est un problème purement numérique. Il résulte de l'incapacité du code Vlasov à traiter la discontinuité à la séparatrice. Cela entraîne une diffusion effective et lente de l'action, qui n'est absolument pas physique, et qui explique pourquoi on n'arrive pas à converger vers une valeur stationnaire des taux de croissance. Par ailleurs, cette diffusion étant purement numérique, elle va dépendre, notamment, de  $\Delta t$ , ce qui explique la divergence entre les courbes bleue et noire sur la figure 5.15, correspondant à deux valeurs différentes de  $\Delta t$ .

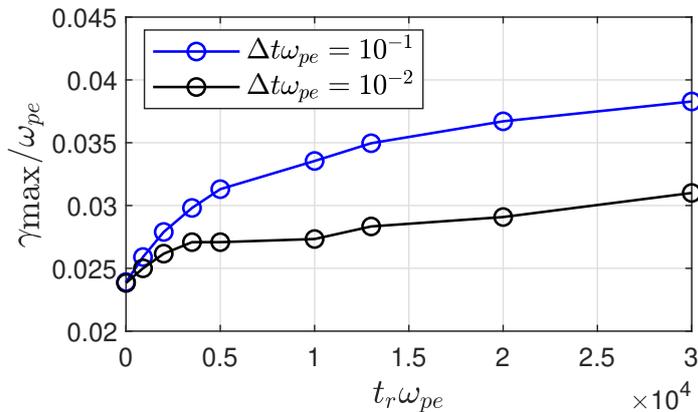


FIGURE 5.15 – Taux de croissance  $\gamma_{\max}$  mesuré en initialisant  $\mathfrak{F}(x, v, t_r)$  dans un plasma de longueur  $L = 40 \times 2\pi/k$ . La fonction  $\mathfrak{F}$  a été propagée pendant  $t_r$ , uniquement par l'équation de Vlasov avec  $\Delta t \omega_{pe} = 10^{-1}$  (courbe bleue) et avec  $\Delta t \omega_{pe} = 10^{-2}$  (courbe noire) à partir de  $\mathcal{F}$ .

En conclusion, nous n'avons pas réussi à faire converger correctement les simulations de type Friou *et al.* Il semble effectivement très difficile à un code Vlasov de traiter une variation rapide de la fonction de distribution à la séparatrice. De manière effective, la fonction de distribution adiabatique apparaît non stationnaire dans le code. Il est alors difficile de comprendre le problème physique exact que les simulations de type Friou *et al.* simulent. Ces simulations sont, à l'évidence, mal maîtrisées.

## 5.5 Conclusion

Plusieurs conclusions importantes peuvent être tirées de l'étude présentée dans ce chapitre. D'une part, pour une fonction  $f(I)$  donnée, il y a un excellent accord entre les taux de croissance calculés théoriquement et ceux déduits des simulations Vlasov. Cela prouve la validité des développements théoriques du chapitre 4 ainsi que celle de la mesure numérique des taux de croissance décrite dans ce chapitre. Quant aux modèles KDS ou de Dodin, nous avons montré qu'ils donnaient des résultats beaucoup moins précis que notre théorie.

D'autre part, même pour une fonction de distribution dépendant assez fortement de l'angle, notre théorie donne des résultats en très bon accord avec ceux issus des simulations Vlasov, à condition d'utiliser  $f(I) \equiv \langle f \rangle_\theta(I)$ , c'est-à-dire la moyenne en angle de la fonction de distribution. C'est dû au fait que les modes satellites croissent suffisamment lentement pour n'être sensibles qu'à la valeur moyenne, en angle, de la fonction de distribution. Cela prouve aussi que notre théorie n'est pas limitée aux ondes BGK, ou aux ondes strictement adiabatiques, induisant une fonction de distribution électronique essentiellement indépendante de l'angle.

Enfin et surtout, nous avons montré l'incapacité des simulations numériques à reproduire une situation purement adiabatique. Dans les cas des simulations de type Brunner *et al.*, où l'on fait croître une EPW à l'aide d'un forçage extérieur, on ne peut pas rendre cette croissance assez lente pour être adiabatique. D'ailleurs, la figure 5.8 montre de manière flagrante qu'après que le forçage soit coupé, la fonction de distribution ne correspond pas à celle d'une onde adiabatique puisqu'elle dépend fortement de l'angle. L'accord assez bon que l'on trouvait entre les résultats des simulations de Brunner *et al.* et de celles de Friou *et al.* auraient plutôt suggéré le contraire, puisque ces dernières sont initialisées avec la fonction de distribution adiabatique. Néanmoins cette fonction, une fois discrétisée, est vue par le code comme dépendant de manière effective du temps. Un code Vlasov semble, en pratique, incapable de gérer correctement une fonction discontinue ou variant suffisamment vite à la séparatrice pour reproduire les résultats adiabatiques. C'est un des mérites de notre étude d'avoir mis en lumière ce problème. A partir de comparaisons faites uniquement entre codes, on aurait pu croire que, numériquement, on avait réussi à calculer les taux de croissance des modes satellites instables dans la limite où l'EPW variait infiniment lentement. Cela aurait pourtant été très utile puisque les taux de croissance ainsi calculés auraient été valables pour toute onde variant suffisamment lentement. Quant à l'approche théorique, elle n'est pas non plus exempte de défaut parce que l'expression Eq. (4.52) que nous avons obtenue pour les coefficients  $M_{nm}$ , dans le cas où  $f(I)$  variait infiniment rapidement à la séparatrice, ne peut s'appliquer qu'à une onde dont la croissance aurait été beaucoup trop lente pour être réaliste.

Cela prouve, qu'en pratique, contrairement au calcul du décalage non linéaire en fréquence d'une EPW, on ne peut pas utiliser une limite adiabatique pour estimer des taux de croissance pour les modes satellites qui auraient été valables pour toute EPW variant suffisamment lentement. Il est nécessaire de faire un calcul non adiabatique, dépendant explicitement de la manière dont l'EPW croît. Une approche théorique semble donc, *a priori*, plus adaptée qu'une approche numérique et, à cet égard, les développements non adiabatiques décrits dans [Bénisti (2018)] peuvent s'avérer très utiles.

---

# 6

## Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse s'inscrivent dans un effort de recherche à long terme sur les ondes plasma électroniques, et permettent d'en obtenir une description complète et précise depuis l'instant où l'onde croît à partir du bruit thermique, jusqu'au moment où elle se brise. Nos résultats sont cependant restreints aux ondes qui croissent suffisamment lentement, c'est-à-dire telles que  $\Gamma/k\lambda_D\omega_{pe} \lesssim 0.1$ , où  $\Gamma$  est le taux de croissance typique de l'onde, tel que vu par un électron. Cette condition est vérifiée dans le cas des ondes plasma électroniques créées par diffusion Raman stimulée lors des expériences de fusion par confinement inertiel (FCI). De fait, nos travaux ont été essentiellement motivés par leur application à la FCI, mais c'est loin d'être la seule application possible. En effet, les ondes plasma électroniques jouent un rôle important dans pratiquement tous les domaines de la physique des plasmas. Quant à la résolution du couple d'équations Vlasov-Poisson, qui est au cœur de la problématique abordée dans cette thèse, son champ d'application va au-delà de la physique des plasmas, puisqu'il s'étend jusqu'aux problèmes gravitationnels, notamment liés à la matière noire.

Dans [Bénisti & Gremillet (2007)], les auteurs ont montré qu'une EPW croissant lentement dans un plasma Maxwellien pouvait être décrite de manière très précise en connectant les résultats d'une théorie perturbative en amplitude à ceux d'une théorie adiabatique. Les propriétés de l'onde plasma dans le régime perturbatif sont très proches de ses propriétés linéaires, décrites en détail dans [Bénisti (2015)]. En parti-

culier, son potentiel peut être considéré sinusoïdal, et son taux d'amortissement non collisionnel est très proche du taux d'amortissement Landau [L.D.Landau (1946)]. La transition entre le régime perturbatif et le régime adiabatique est très abrupte, et a lieu lorsque  $\int \omega_B dt \approx 5$ . Dans le régime adiabatique, le taux d'amortissement non collisionnel est nul, et la propagation de l'onde est décrite par les équations d'enveloppe publiées dans la Ref. [Bénisti *et al.* (2022)]. Elles sont valables quelle que soit la forme du potentiel de l'onde, qui n'est cependant pas précisée. Les travaux présentés dans ce manuscrit permettent de prédire la forme du potentiel de l'onde, quelle que soit son amplitude et son nombre d'onde. En effet, dans le chapitre 2, nous avons résolu le couple d'équations Vlasov-Poisson en utilisant l'approximation adiabatique (ou, plus précisément, la théorie néo-adiabatique [Cary *et al.* (1986)]). Cela nous a permis de calculer, de manière auto-cohérente, la fonction de distribution électronique, la forme du potentiel scalaire de l'onde, ainsi que son décalage en fréquence non linéaire. De plus, nous avons montré qu'une EPW non linéaire possédait un potentiel vecteur non nul. La prise en compte de ce potentiel vecteur est primordiale pour estimer correctement le décalage en fréquence non linéaire de l'onde. Le négliger peut aboutir à une mauvaise prédiction sur le signe même du décalage en fréquence. Puisqu'une EPW possède un potentiel vecteur non nul, elle crée un champ magnétique que nous estimons à l'ordre le plus bas dans les variations transverses de son amplitude. Un tel champ magnétique a été observé numériquement dans des simulations d'interaction laser-plasma [Masson-Laborde *et al.* (2010)] ou lors de mesures de satellites dans la magnétopause [Andersson *et al.* (2009)].

La procédure que nous avons employée au chapitre 2 est très générale et précise, mais aussi très lourde à mettre en œuvre. Dans le chapitre 3, nous montrons que le potentiel anharmonique calculé au chapitre 2 peut être très précisément approché par des expressions analytiques explicites. En particulier, lorsque  $k\lambda_D \lesssim 0.2$ , la forme du potentiel calculée par Dawson [Dawson (1959)] pour un plasma froid est très proche de celle déduite par la théorie adiabatique. Lorsque  $k\lambda_D \gtrsim 0.2$ , le potentiel de l'onde est presque sinusoïdal. Ainsi, nous savons calculer analytiquement la forme du potentiel de l'onde, quel que soit son nombre d'onde, et quelle que soit son amplitude, du moins tant qu'elle n'est pas trop proche de la limite de wave breaking. Quant à cette limite, nous savons en prédire une borne supérieure en prouvant que la relation non linéaire de l'EPW n'a pas de solution au-delà d'une certaine amplitude. Cette amplitude maximale, exprimée en termes de l'amplitude de la première harmonique,  $\Phi_1$ , du potentiel scalaire normalisé à  $T/e(k\lambda_D)^2$ , suit une loi très simple, linéaire par morceaux, en fonction de  $(k\lambda_D)$ .  $\Phi_1^{\max} \approx 0.795 - k\lambda_D$  lorsque  $k\lambda_D < 0.6$  et  $\Phi_1^{\max} \approx 0.39 - 0.3k\lambda_D$  si  $k\lambda_D > 0.6$ . Nous avons vérifié que cette loi très simple était très précise pour  $0.05 \leq k\lambda_D \leq 1$ . Elle donne des valeurs systématiquement

inférieures à la limite prédite par Dawson,  $\Phi_1^{\max} \approx 0.88$ , et supérieures à la limite prédite par Coffey [Coffey (1971)], sauf pour les très petites valeurs de  $k\lambda_D$ . Il est à noter que la limite de wave breaking trouvée par Dawson est déduite d'une condition portant sur le fait que le champ ne peut pas être multivalué en un même point de l'espace. C'est donc une condition moins forte que celle que nous utilisons, et qui porte sur l'existence d'une solution à la relation de dispersion. Néanmoins, pour un plasma de température nulle, la notion de relation de dispersion n'existe pas. C'est la raison pour laquelle notre résultat ne peut pas être prolongé jusqu'à  $k\lambda_D = 0$ . En ce qui concerne la limite de Coffey, elle résulte d'une approche théorique simplifiée, supposant que la fonction de distribution électronique est de type waterbag. On s'attend donc à ce qu'elle soit moins précise que la nôtre, ce que nous avons vérifié numériquement. En effet, les résultats de simulations PIC indiquent une limite de wave breaking supérieure à celle prédite par Coffey, mais proche, et effectivement inférieure, à la borne supérieure déduite de notre théorie. Il est à noter que, dans le cas où l'EPW est créée par diffusion Raman stimulée, le fait de savoir à quelle amplitude cette onde se brise permet aussi de savoir quand elle ne pourra plus rétrodiffuser efficacement l'onde laser qui lui a donné naissance. Cela permet donc de prédire le niveau de saturation de la SRS.

Les résultats que nous avons obtenus sur la limite de wavebreaking et sur le décalage en fréquence non linéaire ont été utilisés dans un code bidimensionnel, modélisant la SRS de manière simplifiée. Ce code utilise une méthode originale de tracé de rayons non linéaire que nous avons nommée Ray In Cell (RIC). A l'aide de ce code, nous avons pu simuler, environ  $10^7$  fois plus vite qu'avec un code PIC, la croissance d'une EPW résultant de la SRS d'une onde laser focalisée dans un plasma. L'inhomogénéité du décalage en fréquence non linéaire de l'EPW induit la courbure de son front de phase et, par là même, le développement de modes transverses à la direction moyenne de propagation de l'onde laser. A l'aide de la méthode RIC, nous avons pu prédire très précisément le spectre des modes transverses, ainsi que l'angle moyen de ces modes par rapport à la direction de l'onde laser. C'est une donnée importante pour la SRS puisque la courbure de son front de phase fait se comporter l'EPW comme un miroir qui se courbe au fur et à mesure qu'il renvoie de la lumière. En conséquence, la rétrodiffusion Raman ne se fait pas à  $180^\circ$ , comme l'aurait prédit une théorie linéaire. Dans le cas que nous avons étudié, il y aurait plutôt une réflexion à  $145^\circ$ . Ainsi, les calculs théoriques du chapitre 2 ont trouvé une application directe et importante à la modélisation cinétique non linéaire de la diffusion Raman stimulée d'une onde laser, dans les conditions typiques des expériences de fusion par confinement inertiel.

Nous venons de souligner l'importance de connaître la limite de wave breaking pour une onde plasma non linéaire. Cependant, au chapitre 3, nous n'avons prédit qu'une borne supérieure, et non une valeur précise. Pour atteindre ce but, il faut traiter précisément l'effet qui mène à la brisure de l'onde plasma, c'est-à-dire la croissance instable de modes satellites. C'est ce que nous avons fait au chapitre 4 en nous focalisant sur l'instabilité dite des particules piégées. Elle a été introduite par Kruer, Dawson et Sudan (KDS) en 1969 [Kruer *et al.* (1969)] pour interpréter une expérience de Wharton *et al.* [Wharton *et al.* (1968)]. Par ailleurs, Goldman a publié en 1970 [Goldman (1970)] une version rigoureuse du modèle de KDS, qui n'a jamais vraiment été exploitée. Seuls les modèles de KDS et, dans une moindre mesure celui introduit par Dodin en 2013 [Dodin *et al.* (2013)], ont été utilisés en pratique pour prédire les taux de croissance des modes instables. Le modèle de KDS repose sur deux hypothèses simplificatrices. D'une part, les électrons piégés dans le puits de potentiel de l'onde sont assimilés à une macroparticule, localisée en fond de puits. D'autre part, les électrons non piégés sont supposés répondre de manière linéaire à l'onde plasma. Quant au modèle de Dodin, il fait toujours l'hypothèse d'une réponse linéaire des électrons non piégés, suppose aussi que les électrons piégés restent au fond de puits, mais tient compte du fait que leur fréquence d'oscillation dans le puits de potentiel dépend de leur énergie. Dans le chapitre 4, nous ne faisons aucune de ces hypothèses, et développons un calcul aussi rigoureux que celui de la théorie de Goldman. La seule différence avec cette théorie réside dans le fait que nous résolvons l'équation de Vlasov en coordonnées action-angle, en supposant donnée la fonction de distribution non perturbée (par les modes satellites),  $f(I)$ . Cela nous permet, d'une part, de pousser le calcul jusqu'au bout et de résoudre la relation de dispersion permettant de calculer le spectre instable des modes satellites. A notre connaissance, c'est la seule fois qu'un tel calcul a été fait, plus de 50 ans après la théorie originale. D'autre part, à une onde adiabatique variant lentement dans le temps et l'espace, on peut associer une fonction de distribution,  $f(I)$ , ne dépendant que de l'action. Ainsi, notre calcul n'est pas restreint à un mode BGK, mais peut s'appliquer à une onde adiabatique créée, par exemple, par diffusion Raman stimulée. Nous avons calculé le spectre instable pour une telle onde, en utilisant la fonction de distribution du chapitre 2, et nous avons montré qu'il pouvait différer de manière significative des spectres déduits des modèles de KDS et de Dodin. De plus, nous avons montré que, pour une telle fonction de distribution, le calcul théorique présentait une difficulté majeure à cause de la discontinuité de  $f(I)$  à la séparatrice. En pratique, nous avons remplacé cette discontinuité par une variation infiniment rapide dans la zone non piégée au voisinage immédiat de la séparatrice. Néanmoins, cette approximation n'est pas forcément précise parce que, comme nous l'avons montré au paragraphe 4.7, le spectre instable est très sensible à la varia-

tion de la fonction de distribution au voisinage de la séparatrice. Cela pose donc un problème en ce qui concerne l'applicabilité de la théorie aux ondes adiabatiques, problème que nous avons abordé de manière plus approfondie au chapitre 5.

Dans le chapitre 5, nous avons comparé les prédictions des modèles de KDS, de Dodin et de notre théorie aux résultats de simulations numériques de type Vlasov. Nous avons tiré plusieurs enseignements de ces comparaisons. Tout d'abord, dans des situations bien maîtrisées, où l'on part de la même fonction de distribution lisse,  $f(I)$ , les spectres instables extraits des simulations numériques sont en excellent accord avec ceux prédits par notre théorie. L'accord est en particulier bien meilleur qu'avec le modèle de KDS. Cela valide à la fois nos développements théoriques du chapitre 4 et la méthode de calcul des taux de croissance à partir des simulations numériques. Toujours dans une situation maîtrisée où l'on part de la même fonction de distribution, mais lorsque cette dernière dépend aussi de l'angle  $\theta$ , on obtient quand même un bon accord entre résultats théoriques et numériques, à condition d'utiliser dans la théorie  $\langle f \rangle_\theta$ , c'est-à-dire la moyenne en angle de la fonction de distribution électronique. Ce résultat n'est pas du tout trivial, et montre tout l'intérêt de la théorie développée au chapitre 4. Elle marche même lorsque la fonction de distribution ne dépend pas uniquement de l'action, et peut donc bien s'appliquer aux ondes créées par diffusion Raman stimulée puisque, pour ces ondes, l'approximation adiabatique reste une approximation. La fonction de distribution électronique, pour ces ondes, dépend légèrement de l'angle. Cependant, un problème persiste, à la fois d'un point de vue théorique et numérique, pour calculer de manière précise le spectre instable des modes satellites pour les ondes adiabatiques. En effet, on s'attend à ce que la fonction de distribution associée à une onde ayant crû très lentement varie de manière abrupte autour de la séparatrice. Or, un code aura beaucoup de mal à traiter une telle variation abrupte. En particulier, nous avons montré au chapitre 5 que, si l'on part de la fonction de distribution adiabatique calculée au chapitre 2, un code Vlasov la fera évoluer de manière non maîtrisée. Il n'est alors pas du tout clair de comprendre à quoi correspondrait le spectre instable que l'on obtiendrait ainsi. Par ailleurs, nous avons aussi montré que si, numériquement, on essayait de faire croître une EPW à l'aide d'un forçage non auto-cohérent, on se heurtait à une limite en ce qui concerne la lenteur à laquelle on peut faire croître l'onde. On ne peut donc pas se rapprocher à volonté d'une situation adiabatique. D'un point de vue théorique, les calculs du chapitre 4 ont montré la limitation de l'hypothèse consistant à supposer une variation infiniment rapide de la fonction de distribution à la séparatrice. Nous sommes donc obligés d'aller au-delà de l'approximation adiabatique pour calculer la fonction de distribution, en utilisant par exemple les techniques développées dans [Bénisti (2018)], mêlant théorie de perturbation en amplitude et

théorie adiabatique.

En résumé, à l'aide des résultats obtenus pendant cette thèse et complétant des travaux antérieurs, nous pouvons désormais décrire très précisément les propriétés cinétiques non linéaires d'une onde plasma électronique, depuis le moment où elle croît à partir du bruit thermique, jusqu'au moment où elle se brise. De plus, nous avons, pour la première fois depuis le papier original de 1969, mis en œuvre un calcul analytique rigoureux en ce qui concerne l'instabilité des particules piégées, quelle que soit la fonction de distribution électronique associée à un mode BGK donné. Nous avons, de plus, validé nos calculs théoriques en les comparant à ceux de simulations numériques. Nous avons aussi montré que nos développements théoriques pouvaient être appliqués à une fonction de distribution dépendant suffisamment faiblement de l'angle. Enfin, alors que les résultats numériques publiés jusqu'à présent semblaient cohérents entre eux, nous avons mis en évidence un problème de fond en ce qui concerne le traitement de la stabilité d'une EPW adiabatique. Ce problème est dû à la variation rapide de la fonction de distribution électronique au voisinage de la séparatrice. Il pose d'ailleurs la question de la pertinence des niveaux de saturation de la SRS déduits de simulations numériques. D'un point de vue théorique, nous savons que pour traiter définitivement le problème, il nous faut être capable de calculer la fonction de distribution électronique sans uniquement faire appel à l'approximation adiabatique. Cela dégage clairement la voie de recherche à poursuivre dans le futur.



## Annexes

### A.1 Calcul de la relation de dispersion

Dans cette annexe, nous partons des équations (2.51) et (2.52) donnant la relation de dispersion de l'onde plasma,

$$n^2 \Phi_n = -2 \langle \cos(n\varphi) \rangle, \quad (\text{A.1})$$

où

$$\langle \cos(n\varphi) \rangle = \frac{k}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \int_{\mathbb{R}} dv \mathcal{F}(\varphi, v, t) \cos(n\varphi), \quad (\text{A.2})$$

et nous exprimons l'intégrale du membre de droite de l'équation (A.2) en faisant apparaître la fonction de distribution  $f(I)$  que l'on a calculée au paragraphe 2.3.1. Pour cela, on commence par effectuer le changement de variables  $(\varphi, v) \rightarrow (I, \theta)$ , dont le Jacobien est égal à l'unité puisque ce changement de variables est canonique.

L'angle vaut la dérivée en fonction de  $I$  de la fonction génératrice  $G = \int_0^\varphi v d\varphi'$ ,

$$\theta = \frac{\partial G}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial(kI)} \left( \int_0^\varphi \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi'))} d\varphi' \right) = \frac{\partial H}{\partial(kI)} \int_0^\varphi \frac{\pm d\varphi'}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi'))}} \quad (\text{A.3})$$

En utilisant maintenant les équations (2.14), (2.16) et (2.18) pour calculer  $\partial H / \partial(kI)$ , on trouve,

— Région  $\alpha$  :

$$\frac{\partial H}{\partial(kI)} = \frac{1}{kdI^{(\alpha)}/dH} = \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \quad (\text{A.4})$$

— Région  $\beta$  :

$$\frac{\partial H}{\partial(kI)} = \frac{1}{kdI^{(\beta)}/dH} = \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \quad (\text{A.5})$$

— Région  $\gamma$  :

$$\frac{\partial H}{\partial(kI)} = \frac{1}{kdI^{(\gamma)}/dH} = \frac{\pi}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}, \quad (\text{A.6})$$

où  $\varphi_{\max}$  est tel que  $H + \phi(\varphi_{\max}) = 0$ . De ces expressions on tire la définition de  $\theta$  dans les trois régions de l'espace des phases :

— Région  $\alpha$  :

$$\theta = \frac{\pi \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}. \quad (\text{A.7})$$

$\theta$  varie entre  $-\pi$  et  $\pi$  lorsque  $\varphi$  parcourt l'intervalle  $[-\pi, \pi]$ .

— Région  $\beta$  :

$$\theta = -\frac{\pi \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}. \quad (\text{A.8})$$

$\theta$  varie entre  $-\pi$  et  $\pi$  lorsque  $\varphi$  varie de  $\pi$  à  $-\pi$ .

— Région  $\gamma$  :

Lorsque  $kv > v_\phi$ ,

$$\theta = \frac{\pi \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}. \quad (\text{A.9})$$

$\theta$  varie entre  $-\pi$  et  $\pi$  lorsque  $\varphi$  varie de  $-\varphi_{\max}$  à  $\varphi_{\max}$ .

Lorsque  $kv < v_\phi$ ,

$$\theta = 2\pi - \frac{\pi \int_0^\varphi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}. \quad (\text{A.10})$$

$\theta$  varie entre  $\pi$  et  $3\pi$  lorsque  $\varphi$  varie de  $\varphi_{\max}$  à  $-\varphi_{\max}$ .

L'angle  $\theta$  étant défini à une constante près, on a choisi de rajouter  $2\pi$  dans la région des piégés telle que  $kv < v_\phi$  pour éviter un saut de l'angle lors de la description d'une orbite piégée. Avec cette nouvelle définition  $\theta$  est continu et varie de  $-\pi$  à  $3\pi$  lorsque  $\varphi$  varie d'abord de  $-\varphi_{\max}$  à  $\varphi_{\max}$  puis de  $\varphi_{\max}$  à  $-\varphi_{\max}$ . On a représenté un exemple de plusieurs orbites dans la figure suivante pour résumer la situation.

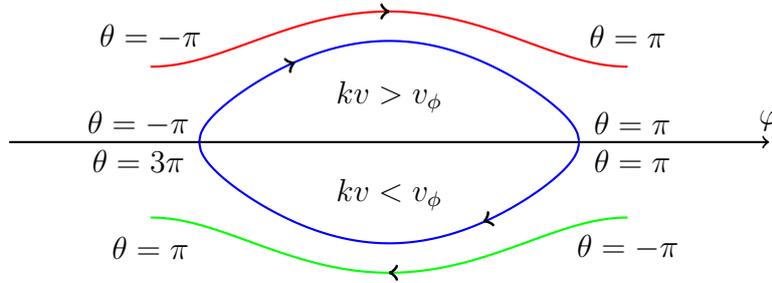


FIGURE A.1 – Représentation de la convention pour l'angle  $\theta$  sur l'exemple de trois orbites dans l'espace des phases  $(\varphi, kv)$ . Comme prévu, l'angle varie entre  $-\pi$  et  $\pi$  pour les orbites non piégées, avec des sens contraires. On remarquera la variation angulaire de  $4\pi$  pour l'orbite piégée contrairement aux deux autres.

Maintenant qu'on sait comment s'exprime l'angle et dans quelles limites il varie, on utilise le fait que  $kI^{(\alpha)} \in [kI_s + v_\phi, +\infty[$ ,  $kI^{(\beta)} \in [kI_s - v_\phi, +\infty[$  et que  $kI^{(\gamma)} \in [0, kI_s]$  pour écrire, en utilisant l'expression (2.41) pour la fonction de distribution,

$$\begin{aligned} -\pi n^2 \phi_n &= \int_{kI_s + v_\phi}^{+\infty} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta \right] f_\alpha(I) d(kI) \\ &+ \int_{kI_s - v_\phi}^{+\infty} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta \right] f_\beta(I) d(kI) \\ &+ \int_0^{kI_s} \left[ \int_{-\pi}^{3\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta \right] \frac{f_\gamma(I)}{2} d(kI) \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

On effectue maintenant le changement de variable  $\theta \rightarrow \varphi$  pour obtenir,

$$\int \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta = \int \cos(n\varphi) \frac{d\theta}{d\varphi}(I, \varphi) d\varphi. \quad (\text{A.12})$$

On obtient les valeurs de  $d\theta/d\varphi$  à partir des équations (A.7), (A.8) et (A.9), ce qui permet de déduire les résultats suivants,

— Région  $\alpha$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi = \frac{2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \quad (\text{A.13})$$

— Région  $\beta$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta = - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\varphi) \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi = \frac{2\pi \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \quad (\text{A.14})$$

— Région  $\gamma$  :

$$\int_{-\pi}^{3\pi} \cos(n\varphi(I, \theta)) d\theta = 2 \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} \cos(n\varphi) \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi = \frac{4\pi \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \quad (\text{A.15})$$

On trouve, en reportant ces expressions dans l'équation (A.11) et en effectuant une translation de  $v_\phi$  dans l'intégrale correspondant à la région  $\alpha$  et de  $-v_\phi$  dans celle correspondant à la région  $\beta$ ,

$$\begin{aligned} -\frac{n^2 \phi_n}{2} = & \int_{kI_s}^{+\infty} \left( \frac{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \right) [f_\alpha(I + v_\phi/k) + f_\beta(I - v_\phi/k)] d(kI) \\ & + \int_0^{kI_s} \left( \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi') d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H+\phi(\varphi'))}}} \right) f_\gamma(I) d(kI). \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Pour conclure, dans un plasma homogène, pour une onde qui n'a cessé de croître et telle que  $|dv_\phi/d(kI_s)| < 1$  durant toute sa croissance, on utilise les expression (2.25) pour  $f_{\alpha,\beta}$  et (2.37) pour  $f_\gamma$ . Cela donne,

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{n^2 \Phi_n}{2} - \int_{kI_s}^{+\infty} \left( \frac{\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) [\mathfrak{f}_0(kI + v_\phi) + \mathfrak{f}_0(-kI + v_\phi)] d(kI) \\ - \int_0^{kI_s} \left( \frac{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} \right) \left[ \mathfrak{f}_0(kI + v_\phi^*) \left( 1 + \frac{dv_\phi^*}{dI} \right) + \mathfrak{f}_0(-kI + v_\phi^*) \left( 1 - \frac{dv_\phi^*}{dI} \right) \right] d(kI) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

## A.2 Calcul numérique des intégrales du membre de gauche du système (2.53)

Ici, nous détaillons les techniques numériques utilisées pour calculer les intégrales présentes dans le membre de gauche de l'équation (2.53).

Commençons par le plus simple, la valeur de  $\varphi_{\max}(H)$  telle que  $H + \phi(\varphi_{\max}) = 0$ , que nous trouvons par dichotomie.

Par ailleurs, pour que les intégrales en  $(kI)$  du membre de gauche de l'Eq. (2.53) aient un sens, il faut nous assurer que la fonction  $H(I)$  est bien bijective, au moins dans chaque sous-région de l'espace des phases. On s'en assure facilement en dérivant les équations (2.14) à (2.18) par rapport à  $H$  pour montrer  $dI/dH > 0$  dans chaque sous-région. Par ailleurs, en pratique, pour calculer les intégrales en  $(kI)$ , il nous faut connaître la fonction  $H(I)$ , que l'on calcule en résolvant les équations (2.14) à (2.18) pour  $H$  par dichotomie.

Numériquement, le calcul direct des intégrales en  $\varphi$  se fait sans difficulté en utilisant la méthode des trapèzes tant que  $I > I_s$ . Cependant, pour  $I \leq I_s$ , la fonction à intégrer diverge lorsque  $\varphi \rightarrow \varphi_{\max}$  puisque  $H + \phi(\varphi_{\max}) = 0$ . Pour contourner ce problème on écrit,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{f(\varphi)}{\sqrt{H + \phi(\varphi)}} d\varphi = \\ & \int_0^{\varphi_{\max}} \left( \frac{f(\varphi)}{\sqrt{H + \phi(\varphi)}} - \frac{f(\varphi_{\max})}{\sqrt{-\phi'(\varphi_{\max})(\varphi_{\max} - \varphi)\sqrt{1 \pm \eta^2(\varphi_{\max} - \varphi)}}} \right) d\varphi \\ & + \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{f(\varphi_{\max})}{\sqrt{-\phi'(\varphi_{\max})(\varphi_{\max} - \varphi)\sqrt{1 \pm \eta^2(\varphi_{\max} - \varphi)}}} d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

où le terme qu'on soustrait correspond au développement limité à l'ordre deux de  $H + \phi(\varphi) = -\phi'(\varphi_{\max})(\varphi_{\max} - \varphi) + \phi''(\varphi_{\max})(\varphi_{\max} - \varphi)^2/2$ . Ici  $\eta^2 = |\phi''(\varphi_{\max})/\phi'(\varphi_{\max})|/2$  et le signe  $\pm$  correspond au signe de  $\phi''(\varphi_{\max})$ , puisque  $\phi'(\varphi_{\max})$  est supposé négatif. Dans la première intégrale du membre de droite de l'équation (A.18), la fonction à intégrer reste bornée, ce qui accélère considérablement la convergence de l'intégration numérique. Quant à la deuxième intégrale du membre de droite de l'équation (A.18), on en connaît une expression analytique,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\varphi_{\max}} \frac{f(\varphi_{\max})}{\sqrt{-\phi'(\varphi_{\max})(\varphi_{\max} - \varphi)\sqrt{1 \pm \eta^2(\varphi_{\max} - \varphi)}}} d\varphi \\ & = \frac{f(\varphi_{\max})}{\eta\sqrt{-\phi'(\varphi_{\max})}} \begin{cases} \text{Arcsin}(\eta\varphi_{\max}) & \text{si } \phi''(\varphi_{\max}) < 0 \\ \ln(\eta\sqrt{\varphi_{\max}} + \sqrt{1 + \eta^2\varphi_{\max}}) & \text{si } \phi''(\varphi_{\max}) > 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

En pratique, pour calculer les intégrales en  $\varphi$  du membre de gauche de l'équation (2.53), on utilisera  $f(\varphi) = 1$  ou  $f(\varphi) = \cos(n\varphi)$ . Apparemment, il reste encore un problème lorsque  $\phi'(\varphi_{\max}) = 0$ . Cependant, à l'aide des équations (A.18) et (A.19), on trouve que lorsque  $\phi'(\varphi_{\max}) \rightarrow 0$ ,

$$\int_0^{\varphi_{\max}} \frac{f(\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi}} \sim \frac{f(\varphi_{\max})}{\eta\sqrt{-\phi'(\varphi_{\max})}} \text{Arcsin}(\eta\varphi_{\max}), \quad (\text{A.20})$$

puisque  $\phi''(\varphi_{\max}) > 0$ . Or,  $\phi'(\varphi_{\max}) = 0$  lorsque  $\varphi_{\max} = \pi$  puisque, par hypothèse, le potentiel admet son minimum en  $\pi$ . Cette hypothèse est vérifiée lors de notre résolution auto-cohérente du système Vlasov-Maxwell. On obtient donc finalement, dans la limite  $\phi'(\varphi_{\max}) \rightarrow 0$ ,

$$\frac{\int_0^\pi \frac{\cos(n\varphi) d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{H+\phi(\varphi)}}} = \cos(n\pi) = (-1)^n.$$

### A.3 Calcul de $\langle d_t \varphi \rangle$

À partir de l'expression de l'Hamiltonien Eq. (2.10), on trouve,

$$\langle d_t \varphi \rangle = \left\langle \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi, t))} \right\rangle.$$

Pour calculer la valeur moyenne  $\langle \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi, t))} \rangle$  on commence par remarquer que seule la contribution de la fonction de distribution non piégée doit être prise en compte. En effet, à cause du signe "+" dans la partie non piégée telle que  $kv > v_\phi$  et du signe "-" dans la partie piégée telle que  $kv < v_\phi$  la contribution des piégés s'annule, la fonction de distribution  $f_\gamma$  étant symétrique par rapport à  $kv = v_\phi$ . En passant en coordonnées action-angle, on obtient, comme dans l'annexe A.1,

$$\begin{aligned} \left\langle \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi, t))} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{kI_s + v_\phi}^{+\infty} f_\alpha(I) \sqrt{2(H + \phi[\varphi(I, \theta), t])} d(kI) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{kI_s - v_\phi}^{+\infty} f_\beta(I) \sqrt{2(H + \phi[\varphi(I, \theta), t])} d(kI) d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

On effectue maintenant un changement de variables  $\theta \rightarrow \varphi$  dans les deux intégrales pour obtenir :

$$\begin{aligned} \left\langle \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi, t))} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{kI_s + v_\phi}^{+\infty} f_\alpha(I) d(kI) \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2[H + \phi(\varphi, t)]} \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{kI_s - v_\phi}^{+\infty} f_\beta(I) d(kI) \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2[H + \phi(\varphi, t)]} \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

On remplace maintenant  $d\theta/d\varphi$  par leurs expressions respectives dans les régions ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) de l'espace des phases, Eqs. (A.7) et (A.8),

$$\begin{aligned} \left\langle \pm \sqrt{2(H + \phi(\varphi, t))} \right\rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{kI_s + v_\phi}^{+\infty} f_\alpha(I) d(kI) \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(H + \phi(\varphi))} \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi))}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi'))}}} d\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{kI_s - v_\phi}^{+\infty} f_\beta(I) d(kI) \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2(H + \phi(\varphi))} \frac{\frac{\pi}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi))}}}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi'))}}} d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

En exploitant les simplifications et la symétrie du potentiel par rapport à  $\varphi = 0$  et en faisant une translation de  $\pm v_\phi$  dans les intégrales on obtient finalement,

$$\boxed{\langle d\varphi/dt \rangle = \int_{kI_s}^{+\infty} [f_\alpha(I + v_\phi/k) - f_\beta(I - v_\phi/k)] \frac{\pi}{\int_0^\pi \frac{d\varphi'}{\sqrt{2(H + \phi(\varphi'))}}} d(kI).} \quad (\text{A.24})$$

## A.4 Calcul des probabilités de transition

On sait que lorsque  $kI = kI_s + \delta_\xi v_\phi$ , et que  $(2|\delta_\xi| - 1)k\dot{I}_s + \delta_\xi \dot{v}_\phi > 0$  où  $\delta_\xi$  est tel que  $\delta_\alpha = 1, \delta_\beta = -1$  et  $\delta_\gamma = 0$ , l'orbite quitte la région  $(\xi)$  de l'espace des phases pour aller vers une autre région. Notons  $p^{(\xi \rightarrow \zeta)}$  la probabilité qu'elle transite vers la région  $(\zeta)$ , où  $(\xi)$  et  $(\zeta)$  sont soit  $(\alpha)$ , soit  $(\beta)$  soit  $(\gamma)$ . On obtient alors que la traversée de séparatrice induit le changement suivant dans la fonction de distribution,

$$f^>(I^{(\zeta)}) |dI^{(\zeta)}| = \sum_{\xi \neq \zeta} p^{(\xi \rightarrow \zeta)} f^<(I^{(\xi)}) |dI^{(\xi)}|. \quad (\text{A.25})$$

Or, on aimerait exprimer la distribution  $f^>$  en fonction de  $f^<$  en la variable d'arrivée, donc  $I = I^{(\zeta)}$ . Pour cela, on remarque que  $I^{(\xi)} = I^{(\zeta)} + (I^{(\xi)} - I^{(\zeta)}) = I^{(\zeta)} - (\delta_\zeta - \delta_\xi)v_\phi = I^{(\zeta)} - \mu_{\xi \rightarrow \zeta} v_\phi$ . Le terme supplémentaire dans l'équation précédente est le saut géométrique de l'action lors du passage de la séparatrice, où  $\mu_{\xi \rightarrow \zeta} \in \{-2, -1, 1, 2\}$  et où  $v_\phi$  est prise au moment de la traversée de séparatrice. Calculons le rapport  $dI^{(\xi)}/dI^{(\zeta)}$  à l'aide de l'expression précédente des actions

$$\frac{dI^{(\xi)}}{dI^{(\zeta)}} = \frac{dkI_s + \delta_\xi dv_\phi}{dkI_s + \delta_\zeta dv_\phi} = \frac{1 + \sigma\delta_\xi}{1 + \sigma\delta_\zeta}, \quad (\text{A.26})$$

où  $\sigma = dv_\phi/dkI_s = \dot{v}_\phi/k\dot{I}_s$ , dont va dépendre la probabilité de transition  $p^{(\xi \rightarrow \zeta)}$  comme on va le voir par la suite. Maintenant on peut exprimer la distribution  $f^>(I)$ , où  $I = I^{(\zeta)}$  comme

$$f^>(I) = \sum_{\xi \neq \zeta} p^{(\xi \rightarrow \zeta)} f^<(I - \mu_{\xi \rightarrow \zeta} v_\phi) \left| \frac{1 + \sigma\delta_\xi}{1 + \sigma\delta_\zeta} \right|. \quad (\text{A.27})$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la probabilité de transition de  $(\xi)$  vers  $(\zeta)$  pour finir la discussion sur l'évolution de la fonction de distribution d'une onde non monotone. Il est à noter que ces probabilités ont déjà été calculées par de nombreux auteurs auparavant [Neishtadt (1975); Cary *et al.* (1986); Bénisti (2017a)] et on ne fera que rappeler brièvement leur dérivation et comment on peut les exprimer dans notre cas d'une onde non sinusoidale. Pour ce faire on commence par réécrire les équations de Hamilton en prenant  $\varphi$  comme le nouveau temps et  $v$  comme le nouvel Hamiltonien,

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\partial v}{\partial H} \\ \frac{dH}{d\varphi} = -\frac{\partial v}{\partial t}. \end{cases} \quad (\text{A.28})$$

Soit maintenant  $h$  tel que :

$$h = H + \phi(\pi). \quad (\text{A.29})$$

Puisque  $\phi(\pi)$  ne dépend que du temps,  $h$  est un Hamiltonien qui décrit le mouvement tout comme  $H$ . De plus  $h > 0$  sur les orbites non piégées et  $h < 0$  pour les orbites piégées. On va utiliser cette définition de  $h$  pour montrer que,

$$p^{(\xi \rightarrow \zeta)} = \min \left[ \max \left( \frac{2^{1-|\delta_\xi|} k \dot{I}_s + \delta_\xi \dot{v}_\phi}{2^{1-|\delta_\zeta|} k \dot{I}_s + \delta_\zeta \dot{v}_\phi}, 0 \right), 1 \right]. \quad (\text{A.30})$$

Pour cela on se reporte aux résultats numériques de [Bénisti (2017a)] pour remarquer qu'une orbite, avant de quitter la région  $(\alpha)$ , parcourt une orbite très proche de la séparatrice de  $\varphi = -\pi$  à  $\varphi = \pi$  après quoi elle fait de même dans la région  $\beta$  en allant de  $\pi$  à  $-\pi$ . Il s'ensuit par l'équation (A.28) que le changement en  $h$  durant la première partie de sa trajectoire qu'on note  $\delta h_1$  vaut :

$$2\pi \delta h_1 = h(\pi) - h(-\pi) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{-\pi}^{\pi} v \, d\varphi \right) = -\left( k \dot{I}_s + \dot{v}_\phi \right) \quad (\text{A.31})$$

De même pour  $\delta h_2$  de la région  $\beta$  :

$$2\pi \delta h_2 = h(-\pi) - h(\pi) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\pi}^{-\pi} v \, d\varphi \right) = -\left( k \dot{I}_s - \dot{v}_\phi \right) \quad (\text{A.32})$$

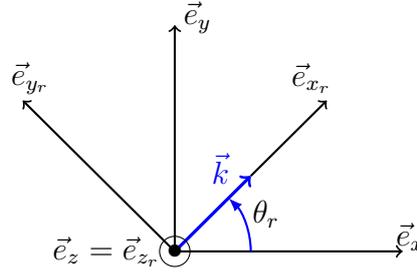
Pour le changement total  $\delta h$  on fait donc la somme  $2\pi \delta h = 2\pi \delta h_1 + 2\pi \delta h_2 = -2k \dot{I}_s$ . Clairement, une orbite est dans la région  $(\alpha)$  si  $0 < h < -\delta h_1$ , et elle transite vers la région  $(\beta)$  si  $h > -(\delta h_1 + \delta h_2)$ . Il s'ensuit donc pour une fraction d'orbites équidistribuées en  $h$  que la probabilité de transition pour le passage de  $(\alpha)$  à  $(\beta)$  est donnée par le rapport  $\delta h_2 / \delta h_1$ . En procédant de même pour les autres transitions on trouve l'équation (A.30) pour les probabilités de transition. Ainsi, on peut maintenant calculer le changement de la fonction de distribution lors d'une traversée arbitraire de la séparatrice. Ce changement est donné par l'équation suivante,

$$f^>(I) = \sum_{\xi \neq \zeta} f^< [I - (\delta_\zeta - \delta_\xi) v_\phi] \left| \frac{1 + \sigma \delta_\xi}{1 + \sigma \delta_\zeta} \right| \min \left[ \max \left( \frac{2^{1-|\delta_\xi|} k \dot{I}_s + \delta_\xi \dot{v}_\phi}{2^{1-|\delta_\zeta|} k \dot{I}_s + \delta_\zeta \dot{v}_\phi}, 0 \right), 1 \right]. \quad (\text{A.33})$$

On peut donc en déduire, numériquement, en implémentant cette fonction de distribution générale dans un code, comment évolue une onde plasma adiabatique homogène quelle que soit la variation de son amplitude. Des effets intéressants peuvent alors être observés pour une onde croissante puis décroissante comme une hystérésis dans le décalage en fréquence non linéaire [Bénisti (2017b)].

## A.5 Effet de la rotation du nombre d'onde

Dans cette annexe, nous étudions l'effet de la rotation du vecteur d'onde  $\vec{k}$  sur la fonction de distribution électronique, en nous limitant à une géométrie bidimensionnelle. Nous nous donnons un système de coordonnées  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  fixe et un autre  $(\vec{e}_{x_r}, \vec{e}_{y_r}, \vec{e}_{z_r})$  qui suit le vecteur  $\vec{k}$  orienté selon  $\vec{e}_{x_r}$  dans le référentiel tournant autour de l'axe  $\vec{e}_z$ . Dans cette configuration, l'axe  $\vec{e}_{z_r}$  est confondu avec  $\vec{e}_z$  et l'angle polaire  $\theta_r$  varie sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  comme représenté sur le schéma suivant :



Considérons un électron dont la position dans le référentiel tournant  $\mathcal{R}_r$  est donnée par  $\vec{x} = x_r \vec{e}_{x_r} + y_r \vec{e}_{y_r}$ . Le même électron s'il est regardé depuis le référentiel fixe  $\mathcal{R}$  a sa position décrite par  $\vec{x} = x \vec{e}_x + y \vec{e}_y$ . Dans les variables  $(\vec{x}, \vec{p})$  tel que  $\vec{p} = m d_t \vec{x} - e \vec{A}_0$ , l'Hamiltonien caractérisant le mouvement de l'électron s'écrit :

$$H_{2D} = \frac{(\vec{p} + e\vec{A}_0)^2}{2m} - \frac{\phi(\vec{x}, t)}{m}. \quad (\text{A.34})$$

Commençons par effectuer le changement de variables suivant  $(x, y, p_x, p_y) \longrightarrow (x_r, y_r, p_{x_r}, p_{y_r})$ , où les coordonnées,  $(x, y)$  sont reliées à  $(x_r, y_r)$  par,

$$\begin{aligned} x_r &= x \cos(\theta_r) + y \sin(\theta_r) \\ y_r &= -x \sin(\theta_r) + y \cos(\theta_r), \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

La fonction génératrice qui nous permet de faire un changement de variables canonique s'écrit,

$$F_G = x_r p_{x_r} + y_r p_{y_r}. \quad (\text{A.36})$$

Le problème se simplifie grandement si l'on considère  $\theta_r$  comme une fonction du temps pour chaque électron (et non une fonction des coordonnées). On obtient alors, pour chaque électron, l'Hamiltonien suivant,

$$H_r = \frac{(\vec{p}_r + e\vec{A}_0)^2}{2m} - \frac{\phi}{m} + \dot{\theta}_r (y_r p_{x_r} - x_r p_{y_r}), \quad (\text{A.37})$$

où l'on a noté  $\phi$  le potentiel exprimé dans les coordonnées du référentiel tournant. Il nous reste cependant encore une étape avant de pouvoir exprimer l'évolution de l'action. On effectue maintenant le changement de variables  $(x_r, p_{x_r}) \longrightarrow (\varphi, p')$ , où  $\varphi$  est l'eikonale qui ne dépend que de la variable  $x_r$  et du temps et  $p'$  sera défini un peu plus loin. Soit  $G$  la fonction génératrice telle que  $G(x_r, p', t) = \varphi p'$ . On peut alors exprimer :  $p_{x_r} = \partial_{x_r} G|_{v,t} = k p'$ , donc  $p' = p_{x_r}/k$ . En développant  $\vec{A}_0$  comme  $\vec{A}_0 = A_0^{x_r} \vec{e}_{x_r} + A_0^{y_r} \vec{e}_{y_r}$  et en prenant  $v = p'/m$ , notre nouvel Hamiltonien  $H_0$  s'écrit dans les variables  $(\varphi, v)$  comme

$$\begin{aligned} H_0 &= H - \frac{v_\phi^2}{2} + \frac{eA_0^2}{2m} + \frac{(v_{y_r} + eA_0^{y_r}/m)^2}{2} - \dot{\theta}_r v_{y_r} x_r, \\ H &= \frac{(kv - v_\phi)^2}{2} - \phi(\varphi, t), \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

où

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} - \frac{eA_0}{m} - \dot{\theta}_r y_r. \quad (\text{A.39})$$

Passons maintenant en variables action-angles. L'action est toujours définie par  $(2\pi)^{-1} \oint v d\varphi$ , où l'intégrale est le long d'une orbite calculée en gelant toutes les variables à l'exception de  $\varphi$ . C'est donc toujours l'action du seul Hamiltonien  $H$ , dont l'expression est la même qu'en 1-D. En supposant que  $\theta_r$  varie suffisamment lentement pour appliquer les résultats adiabatiques, on trouve alors  $d_t I^{(\alpha,\beta)} \approx -\eta(\partial_{x_r} H_0)/k$ , où  $\eta = 1$  pour  $I^{(\alpha)}$  et  $\eta = -1$  pour  $I^{(\beta)}$ . Si on se concentre maintenant sur la variation de  $I$  due à la seule rotation de  $\vec{k}$ , en oubliant tous les autres effets, on trouve,

$$\frac{dI^{(\alpha,\beta)}}{dt} = -\frac{\eta}{k} \frac{\partial H_0}{\partial x_r} = \frac{\eta \dot{\theta}_r v_{y_r}}{k}. \quad (\text{A.40})$$

Les variations de l'action sont maintenant couplées à celles de  $v_{y_r}$ , qui sont données par,

$$\frac{dv_{y_r}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial y_r} = -\dot{\theta}_r v_\phi + \frac{\partial v_\phi}{\partial y_r} \frac{\partial I}{\partial v_\phi} \frac{\partial H}{\partial I} = -\dot{\theta}_r \left( \frac{\eta}{k} \frac{\partial H}{\partial I} + v_\phi \right). \quad (\text{A.41})$$

En combinant les deux équations précédentes, ce qui nous amène à définir  $\theta_r$  comme le nouveau temps, ainsi qu'à poser  $J = k\eta I$ , on arrive à l'équation suivante :

$$\frac{d^2 J}{d\theta_r^2} = - \left( \frac{\partial H}{\partial J} + v_\phi \right), \quad (\text{A.42})$$

qui s'intègre une fois comme :

$$\left(\frac{dJ}{d\theta_r}\right)^2 = (J_0^2 - J^2)\chi^2(J), \text{ où la fonction } \chi(J) \text{ est définie par :}$$

$$\chi(J) = \sqrt{1 - \frac{2H(J) - (J - v_\phi)^2}{J_0^2 - J^2}} \text{ avec } J_0 \text{ une constante telle que } J_0 > |J|. \quad (\text{A.43})$$

L'équation (A.43) ne peut pas être résolue exactement sans connaître la façon dont l'amplitude de l'onde varie en fonction de l'angle  $\theta_r$ . Cependant, de manière générale, on peut remarquer que  $\chi(J)$  est toujours inférieur à 1. En effet, pour un potentiel sinusoidal,  $2H - (J - V_\phi)^2$  varie de 0 pour une orbite gelée infiniment loin de la séparatrice jusqu'à  $(2 - \pi^2/16)\phi_1$  lorsque l'orbite gelée est sur la séparatrice. Alors,  $\theta'_r = \int_0^{\theta_r} \chi[J(u)]du < \theta_r$ . Ici, on considère la situation où l'amplitude de l'onde est infiniment petite à l'instant initial. Ainsi, lorsque  $\theta_r \rightarrow 0$ ,  $J \rightarrow v_x(0)$ ,  $d_{\theta_r}J \rightarrow v_y(0)$  et  $\theta'_r/\theta_r \rightarrow 1$  (puisque toutes les orbites peuvent être considérées infiniment loin de la séparatrice lorsque l'amplitude de l'onde est infinitésimale). Alors on peut tirer de l'équation (A.43)

$$J = v_x(0) \cos[\theta'_r(J)] + v_y(0) \sin[\theta'_r(J)]. \quad (\text{A.44})$$

Pour continuer, il nous faut en dire un peu plus sur  $\theta'_r$ . Remarquons que pour la plupart des orbites non piégées,  $\theta'_r(J) \approx \theta_r$ . En reprenant l'exemple d'une onde sinusoidale, on a :  $0.9 < d_{\theta_r}\theta'_r < 1$  dès que  $\zeta \leq 0.8$ , où  $\zeta = 2\phi_1/(H + \phi_1) \leq 1$ . De plus, pour la plupart des orbites non piégées  $J \approx v_{x_r}$ , et l'équation (A.44) avec  $\theta'_r$  remplacé par  $\theta_r$  donne simplement l'expression de la composante longitudinale de la vitesse dans le référentiel  $\mathcal{R}$  :  $v_{x_r} = v_x \cos(\theta_r) + v_y \sin(\theta_r)$ .

Supposons maintenant que les fonction de distribution de  $v_x(0)$  et de  $v_y(0)$  sont des Maxwelliennes avec comme vitesses thermiques respectives :  $v_{\text{th}_x}$  et  $v_{\text{th}_y}$ . De l'équation (A.44) on voit que lorsque  $\cos(\theta_r) \neq 0$ , la distribution en  $J$  des électrons non piégés tels que  $\theta'_r \approx \theta_r$ , s'approche de

$$f_u(J) = \frac{1}{2\pi |\cos(\theta_r)| v_{\text{th}_x} v_{\text{th}_y}} \int \exp\left(-\frac{v_y^2}{2v_{\text{th}_y}^2}\right) \exp\left\{-\frac{[J - \sin(\theta_r)v_y]^2}{2v_{\text{th}_x}^2 \cos^2(\theta_r)}\right\} dv_y. \quad (\text{A.45})$$

Lorsque  $\cos(\theta_r) = 0$ ,  $f_u(J)$  est obtenue de l'équation précédente en remplaçant  $\cos(\theta_r)$  par 1, en échangeant  $v_{\text{th}_x}$  et  $v_{\text{th}_y}$ , ainsi qu'en remplaçant  $v_x$  par  $v_y$ . De plus, en effectuant le changement de variable  $v \rightarrow v_y/v_{\text{th}_y}$  dans l'équation précédente on trouve après quelques étapes de calcul

$$f_u(J) = \frac{e^{-J^2/2v_{\text{th}}^2}}{2\pi |\cos \theta_r| v_{\text{th}_x}} \int e^{-\frac{v_{\text{th}}^2}{2 \cos^2 \theta_r v_{\text{th}_x}^2} \left[ v - \frac{J v_{\text{th}_y} \sin \theta_r}{v_{\text{th}}^2} \right]^2} dv, \quad (\text{A.46})$$

où  $v_{\text{th}} = \sqrt{v_{\text{thx}}^2 \cos^2 \theta_r + v_{\text{thy}}^2 \sin^2 \theta_r}$ . Si la température électronique initiale est anisotrope, le nombre d'électrons non piégés peut changer avec  $\theta_r$  sous l'effet d'un changement de température effective. De plus, si l'onde plasma électronique croît et si  $\dot{\mathcal{A}}_s > |\dot{v}_\phi|$  (où, dans cette annexe, nous notons  $\mathcal{A}_s = kI_s$ ), les électrons sont piégés dès que  $|J - v_\phi| = \mathcal{A}_s$ , et ils restent piégés à moins que  $\mathcal{A}_s$  ne décroisse. Or, comme  $J$  dépend de  $\theta'_r$  conformément à l'équation (A.44), la condition de piégeage sur la vitesse initiale des électrons en dépend aussi. Par conséquent, si  $\vec{k}$  tourne, l'onde plasma continue de piéger de nouveaux électrons durant sa rotation, même si l'augmentation de  $\mathcal{A}_s$  n'est pas significative. Cela ne serait clairement pas le cas à une dimension si  $\theta_r$  n'aurait pas changé. On conclut que la rotation de  $\vec{k}$  peut conduire à une augmentation du piégeage des électrons puisque la rotation permet à l'onde d'avoir accès à de nouvelles classes d'électrons à piéger. Plus précisément, si l'onde plasma continue de croître, avec  $\dot{\mathcal{A}}_s > |\dot{v}_\phi|$ , un électron n'est pas piégé à un temps donné  $t^*$  si, quel que soit  $t < t^*$ ,

$$\left| \frac{v_y(0) \sin[\theta'_r(t) - \theta'_r(t^*)] + J \cos \theta'_r(t)}{\cos \theta'_r(t^*)} - v_\phi \right| > \mathcal{A}_s[\theta'_r(t)], \quad (\text{A.47})$$

où dans l'équation (A.47)  $J \equiv J(t^*)$ . Pour des électrons tels que  $\theta'_r \approx \theta_r$ ,  $f_u(J)$  est donné par le terme de droite de l'équation (A.46), où l'intégrale porte seulement sur les valeurs de  $v = v_y(0)/v_{\text{thy}}$  vérifiant l'équation (A.47). Pour ces électrons :

$$f_u(J) \leq \frac{e^{-J^2/2v_{\text{th}}^2}}{\sqrt{2\pi}v_{\text{th}}}, \quad (\text{A.48})$$

l'égalité étant atteinte lorsque  $\theta'_r$  reste constant, i.e., lorsque la direction de  $\vec{k}$  ne change pas. Lorsque la température électronique initiale est isotrope, l'équation précédente montre clairement que la fraction d'électrons non piégés est plus petite que dans le cas où la direction de  $\vec{k}$  reste constante. Cet argument confirme l'augmentation du piégeage induit par la rotation du nombre d'onde  $\vec{k}$ . Si  $\mathcal{A}_s$  décroît durant  $[t_0, t^*]$ , les électrons qui sont dépiégés sont ceux pour lesquels l'équation (A.47) est satisfaite ne serait-ce qu'une fois lorsque  $t$  varie de  $t_0$  jusqu'à  $t^*$ . A nouveau, l'équation (A.48) est retrouvée, l'égalité étant atteinte que si la direction du vecteur d'onde  $\vec{k}$  reste constante ou si  $\mathcal{A}_s[\theta'_r(t^*)] = 0$ .

L'écart de la distribution  $f_u(J)$  à une distribution Maxwellienne dépend beaucoup de la situation physique considérée. Dans cette section on veut tout d'abord trouver les conditions pour lesquelles l'approximation unidimensionnelle reste valable. Pour cela on estime l'augmentation de la fraction des particules piégées en utilisant l'approximation  $\theta'_r = \theta_r$ . En effet, puisque  $\theta'_r < \theta_r$ , remplacer  $\theta'_r$  par  $\theta_r$  dans l'équation (A.44) surestime légèrement la variation de  $J$  et donc le changement en

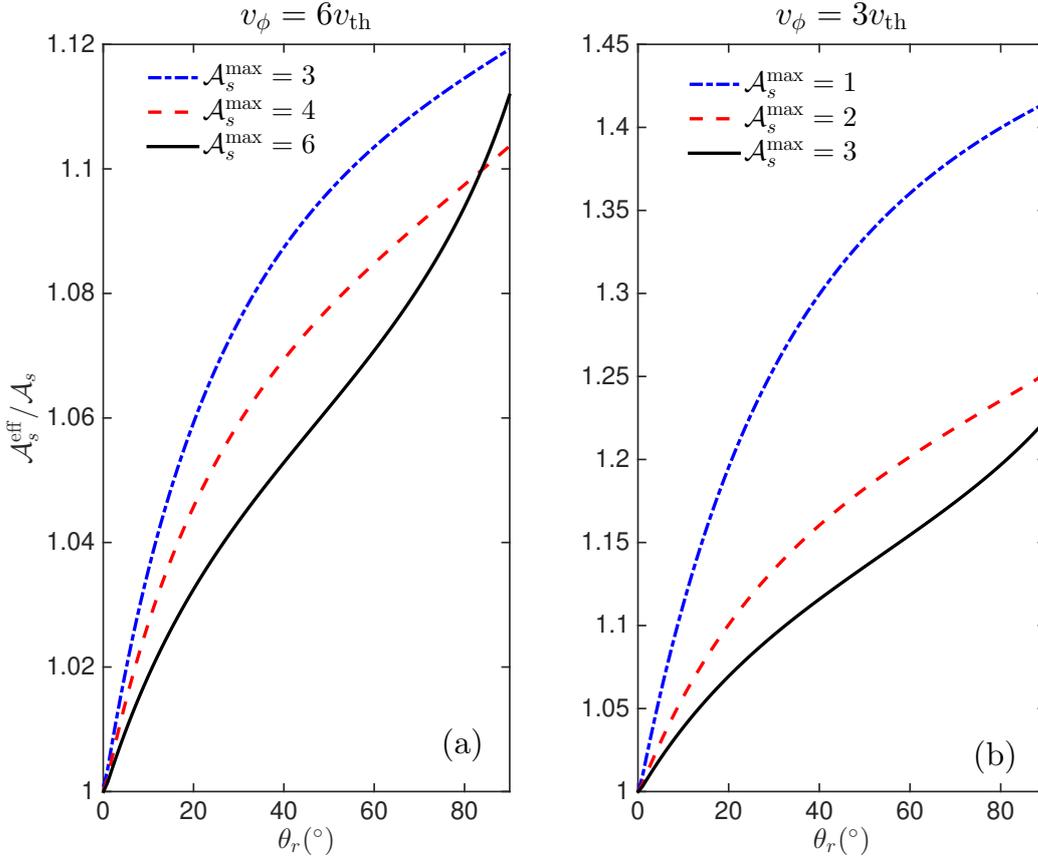


FIGURE A.2 – (a) Valeurs de  $\mathcal{A}_s^{\text{eff}}/\mathcal{A}_s$  lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 6$ . La courbe bleue est pour  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 3$ , la courbe rouge est pour  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 4$  et la courbe noire est pour  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 6$ . (b)  $\mathcal{A}_s^{\text{eff}}/\mathcal{A}_s$  en fonction de  $\theta_r$  lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 3$ . La courbe bleue correspond à  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 1$ , la courbe rouge est pour  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 2$  et la courbe noire est pour  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}/v_{\text{th}} = 3$ .

action de la fonction de distribution. De plus, par souci de simplification, on suppose que la dépendance en  $\theta_r$  de  $\mathcal{A}_s$  est la même pour tous les électrons. Lorsque la rotation de  $\vec{k}$  est essentiellement due à la courbure du front de phase induite par le décalage en fréquence non linéaire,  $\mathcal{A}_s$  croît significativement, avant que le nombre d'onde commence à changer de manière appréciable. Ici, on considère les variations de  $\mathcal{A}_s$  en fonction de  $\theta_r$  qui correspondent à cette situation. Plus précisément, on suppose que  $\mathcal{A}_s$  croît systématiquement avec  $\theta_r$  jusqu'à ce qu'il atteigne sa valeur maximale,  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}$ , correspondant à la limite en amplitude  $\phi_1^{\text{max}}$  au-delà de laquelle il n'y a plus de solution à la relation de dispersion non linéaire (ce qui correspond à la limite de déferlement). De plus, on suppose que  $\mathcal{A}_s$  croît d'abord jusqu'à  $\mathcal{A}_s^0$  ( $0 < \mathcal{A}_s^0 < \mathcal{A}_s^{\text{max}}$ ) lorsque  $\theta_r \approx 0$ , puis varie de manière lisse avec  $\theta_r$ . On a vérifié que nos résultats dépendaient peu de  $\mathcal{A}_s^0$  et de la manière dont  $\mathcal{A}_s$  variait avec  $\theta_r$  pourvu que la variation soit lisse. La figure A.2 correspond à  $\mathcal{A}_s^0 = \mathcal{A}_s^{\text{max}}/2$  et à une variation linéaire de  $\mathcal{A}_s$  avec  $\theta_r$  lorsque  $0 \leq \theta_r \leq \max(\theta_r)$ .

Afin d'estimer l'effet de l'augmentation du nombre de particules piégées, on calcule la fraction des électrons piégés  $n_t = 1 - \int_{|J-v_\phi| \geq \mathcal{A}_s} f_u(J) dJ$  en fonction de  $\theta_r$ . A chaque valeur de  $n_t$ , on associe  $\mathcal{A}_s^{\text{eff}}$  tel que

$$n_t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}v_{\text{th}}} \int_{|J-v_\phi| \leq \mathcal{A}_s^{\text{eff}}} e^{-J^2/2v_{\text{th}}^2} dJ. \quad (\text{A.49})$$

$\mathcal{A}_s^{\text{eff}}$  serait la valeur prise par  $\mathcal{A}_s$  si la distribution en action avait été une Maxwellienne i.e., si la direction du nombre d'onde était restée constante. Puisque la variation de  $\vec{k}$  accroît le piégeage  $\mathcal{A}_s^{\text{eff}} \geq \mathcal{A}_s$ , comme on peut le voir sur les figures A.2 (a) et (b) respectivement lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 6$  et  $v_\phi/v_{\text{th}} = 3$ . Ces figures ont été tracées avec trois choix de  $\mathcal{A}_s^{\text{max}}$ , qui varient d'une valeur où les effets non linéaires sont négligeables, jusqu'à une valeur proche du déferlement. Comme on peut le voir sur la figure A.2 (a), lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 6$ ,  $\mathcal{A}_s^{\text{eff}}$  n'excède pas  $\mathcal{A}_s$  de plus de 10% même pour des angles aussi grands que  $90^\circ$ . On conclut que lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 6$ , la rotation de  $\vec{k}$  ne change pas beaucoup la physique de l'interaction onde-particules, qui se trouve être bien décrite par l'approche à une dimension. La figure A.2 (b) montre que la même conclusion peut être tirée lorsque  $v_\phi/v_{\text{th}} = 3$ , mais seulement si  $\theta_r \leq 30^\circ$ . Pour des angles plus grands, la rotation de  $\vec{k}$  doit être prise en compte, conformément à la situation physique considérée.

Quant aux électrons piégés, leur action est conservée et  $H$  ne dépend pas de  $v_\phi$ , donc l'équation de Hamilton pour  $v_{y_r}$  s'écrit

$$\frac{dv_{y_r}}{dt} = -\dot{\theta}_r v_\phi. \quad (\text{A.50})$$

Or,  $v_\phi \approx \omega_{\text{lin}}/k$ , puisque le décalage en fréquence non linéaire reste toujours petit comparé à la fréquence linéaire de l'onde. Donc,  $\delta v_{y_r} \approx -\theta_r v_\phi$ . La rotation du vecteur d'onde fait donc apparaître une composante transverse dans la densité de courant, d'où découle un champ magnétique par effet d'induction.

## A.6 Théorie générale pour la stabilité d'une onde BGK

Nous partons de l'Hamiltonien dont dérive la dynamique des électrons, écrit en unités normalisées,

$$H_0 = H - \delta\phi, \quad (\text{A.51})$$

où  $H$  est défini par l'équation (4.15) et où  $\delta\phi$  est la perturbation de potentiel due au mode satellite. En reprenant les notations de l'équation (4.1), on écrit  $\delta\phi$  sous la forme,

$$\delta\phi = e^{i(\kappa_1\varphi - \omega_1 t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\phi_n e^{in\varphi} + c.c. \quad (\text{A.52})$$

### A.6.1 Coordonnées action-angle

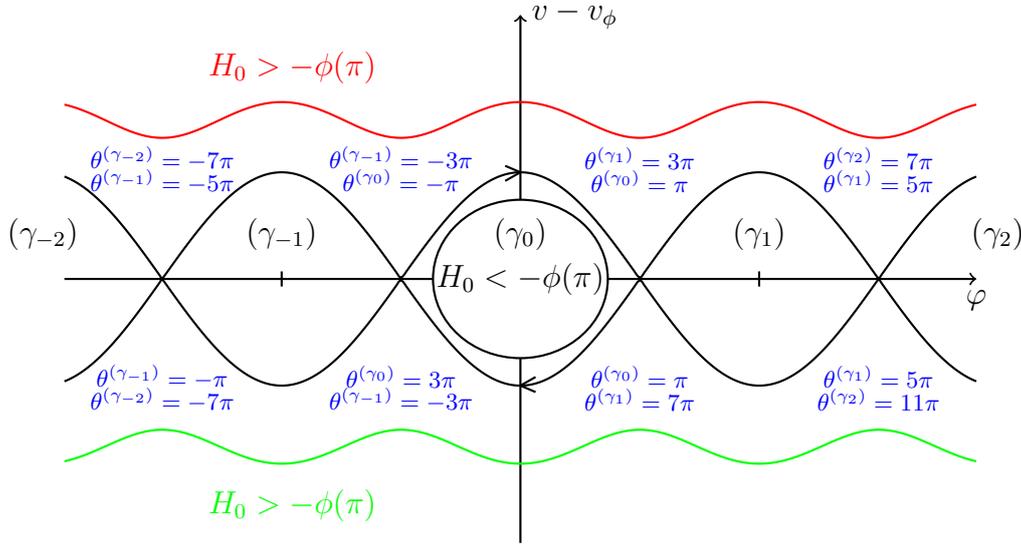


FIGURE A.3 – Représentation schématique des orbites piégées et non piégées ainsi que de la convention choisie pour l'angle  $\theta$ . Ainsi,  $\theta^{(\gamma_0)}$  varie entre  $-\pi$  et  $3\pi$ ,  $\theta^{(\gamma_1)}$  varie de  $3\pi$  à  $7\pi$  et  $\theta^{(\gamma_{-1})}$  varie entre  $-5\pi$  et  $-\pi$ .

Nous étudions la dynamique électronique dans les coordonnées action-angle de l'Hamiltonien  $H$ . Elles sont définies comme dans le chapitre 2 et dans l'annexe A.1 (au changement de normalisation  $I \rightarrow kI/v_{th}$  près). Néanmoins, comme on le verra dans le sous-paragraphe A.6.2, on ne peut plus se contenter de considérer l'angle entre 0 et  $2\pi$  pour les non piégés. De même, nous définissons un jeu de coordonnées action-angle par région de piégeage, comme indiqué dans la figure A.3

### A.6.2 Développement en série de Fourier

En coordonnées action-angle, l'Hamiltonien  $H_0$  défini par l'équation (A.51) s'écrit

$$H_0 = H(I) - e^{i[\kappa_1\varphi(\theta,I) - \varpi_1 t]} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\phi_n e^{in\varphi(\theta,I)} - c.c. \quad (\text{A.53})$$

Pour poursuivre, il nous faut donc maintenant expliciter la valeur de  $e^{i(\kappa_1+n)\varphi(\theta,I)}$ .

→ **Région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases.**

Dans la région ( $\alpha$ ),  $\varphi(\theta+2\pi) = \varphi(\theta) + 2\pi$ , si bien que  $\varphi(\theta) - \theta$  est  $2\pi$ -périodique en  $\theta$ . On peut donc développer  $e^{i[(\kappa_1+n)\varphi - \kappa_1\theta]}$  en série de Fourier ce qui permet d'écrire,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}(I) e^{i(\kappa_1+l)\theta}, \quad (\text{A.54})$$

et on montre assez facilement que

$$V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(\kappa_1+n)\varphi - (\kappa_1+l)\theta] d\theta. \quad (\text{A.55})$$

En pratique, nous calculons numériquement les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}$  à l'aide d'une méthode des trapèzes. Comme on peut le voir sur la figure A.4 pour  $n = 0$  et  $\kappa_1 = 0.2$ , les coefficients  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}$  décroissent rapidement avec  $l$ , ce qui assure une convergence satisfaisante de la série de Fourier dès qu'on prend  $|l| \leq 10$ . En particulier la norme  $L^1$  de la différence est inférieure à 5%.

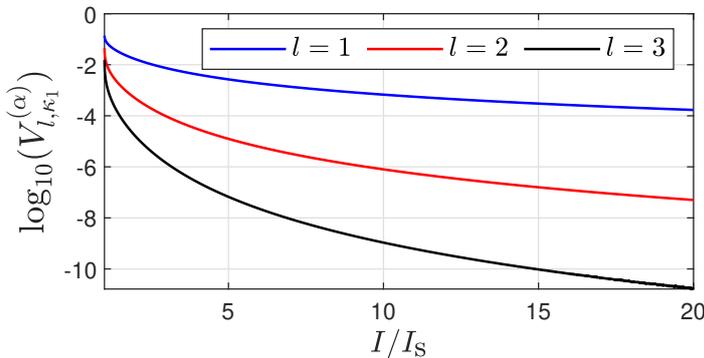


FIGURE A.4 – Variations de  $\log_{10}(V_{l,\kappa_1}^{(\alpha)})$ , lorsque  $\kappa_1 = 0.2$  et  $l = 1, 2, 3$  en fonction de  $I/I_s$ . On considère ici un potentiel sinusoïdal tel que  $\phi_1 = 0.33$ . On voit la décroissance assez rapide des valeurs des  $V_l$  avec  $l$ .

→ **Région  $(\beta)$  de l'espace des phases.**

Dans la région  $(\beta)$ ,  $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta) - 2\pi$ , si bien que  $e^{i[(\kappa_1+n)\varphi + \kappa_1\theta]}$  peut être développé en série de Fourier, ce qui donne avec le changement  $l \rightarrow -l$ ,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}(I) e^{-i(\kappa_1+l)\theta}, \quad (\text{A.56})$$

avec,

$$V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(\kappa_1 + n)\varphi + (\kappa_1 + l)\theta] d\theta. \quad (\text{A.57})$$

En remarquant que  $\varphi(\theta^{(\beta)}) = -\varphi(\theta^{(\alpha)})$ , on se rend compte que les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}$  ont exactement la même valeur que les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}$  ou, plus précisément, en tenant compte du saut géométrique d'action à la séparatrice,  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}(I - v_\phi) = V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}(I + v_\phi)$ .

→ **Région  $(\gamma_m)$  de l'espace des phases.**

Dans chaque zone de piégeage, on peut identifier  $(\theta + 4\pi)$  à  $\theta$ , ce qui permet de décomposer directement  $e^{i(\kappa_1+n)\varphi}$  en série de Fourier, mais les coefficients de Fourier vont dépendre de la sous-région considérée. En effet, si dans la région  $(\gamma_0)$  telle que  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2}, \quad (\text{A.58})$$

dans la sous région  $(\gamma_m)$  telle que  $(2m - 1)\pi \leq \varphi \leq (2m + 1)\pi$ ,

$$e^{i(\kappa_1+n)\varphi} = e^{2im\kappa_1\pi} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2}. \quad (\text{A.59})$$

Par ailleurs, on montre assez facilement que

$$V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \cos[(\kappa_1 + n)\varphi - l\theta/2] d\theta + \frac{(-1)^l}{2\pi} \int_0^\pi \cos[(\kappa_1 + n)\varphi + l\theta/2] d\theta. \quad (\text{A.60})$$

De même que les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}$ , les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma)}$  décroissent rapidement avec  $l$ , comme le montre la figure A.5. Cela assure une bonne convergence de la série de Fourier qui permet de se limiter à  $|l| \leq 10$ . En particulier la norme  $L^1$  de la différence est inférieure à 5%.

### A.6.3 Équation de Vlasov linéarisée

On écrit la fonction de distribution électronique sous la forme  $f_{\text{tot}} = f(I) + \delta f(I, \theta, t)$ . Ici  $f(I)$  peut être *a priori* n'importe quelle fonction de  $I$  correspondant

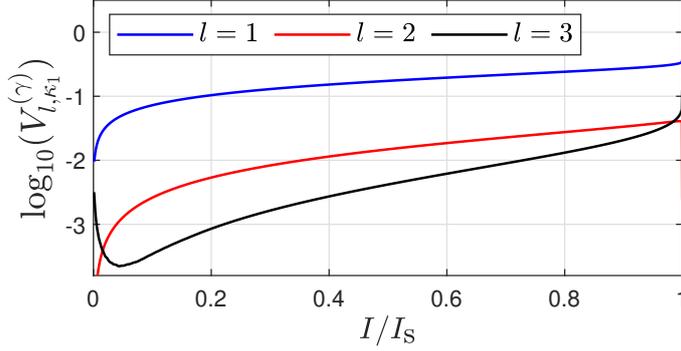


FIGURE A.5 – Variations de  $\log_{10}(V_{l, \kappa_1}^{(\gamma)})$ , lorsque  $\kappa_1 = 0.2$  et  $l = 1, 2, 3$  en fonction de  $I/I_s$ . On considère ici un potentiel sinusoïdal tel que  $\phi_1 = 0.33$ . On voit la décroissance assez rapide des valeurs des  $V_l$  avec  $l$ .

à l'onde BGK considérée. Cependant, on va accorder une attention particulière à la fonction de distribution adiabatique, calculée dans le chapitre 2.

L'équation de Vlasov linéarisée en  $\delta f$  s'écrit,

$$\frac{\partial \delta f}{\partial t} + \Omega(I) \frac{\partial \delta f}{\partial \theta} + f'(I) \frac{\partial \delta \phi}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{A.61})$$

où  $\Omega(I) = d_I H$  et où  $f'(I)$  est la dérivée de la fonction de distribution non perturbée. Dans le cas de la fonction de distribution calculée au chapitre 2, qui est discontinue à la séparatrice comme illustré sur la figure 2.2, le calcul de  $f'(I)$  fera apparaître deux distributions de Dirac, en  $I^{(\alpha)} = I_s + v_\phi$  et en  $I^{(\beta)} = I_s - v_\phi$ .

Nous considérons le cas où, comme pour la fonction de distribution adiabatique,  $f(I)$  est définie par morceaux, sur chaque région,  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma_m)$  de l'espace des phases, et nous résolvons de manière séparée l'équation (A.61) sur chaque sous-région.

→ **Région  $(\alpha)$  de l'espace des phases.**

Dans la région  $(\alpha)$  le potentiel perturbé s'écrit

$$\delta \phi = e^{-i\omega_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta \phi_n V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} e^{i(\kappa_1+l)\theta} + c.c., \quad (\text{A.62})$$

ce qui mène à chercher  $\delta f^{(\alpha)}$  sous la forme

$$\delta f^{(\alpha)} = e^{-i\omega_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta f_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} e^{i(\kappa_1+l)\theta} + c.c. \quad (\text{A.63})$$

L'équation de Vlasov dans la région  $(\alpha)$  s'écrit alors

$$[-i\omega_1 + i(\kappa_1 + l)\Omega] \delta f_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} + i(\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} \delta \phi_n f'_\alpha = 0, \quad (\text{A.64})$$

ce qui nous donne pour les coefficients de  $\delta f$

$$\delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)} = \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}\delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} f'_\alpha. \quad (\text{A.65})$$

Ainsi, dans la région  $(\alpha)$ ,

$$\delta f^{(\alpha)} = e^{-i\varpi_1 t} f'_\alpha \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}\delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} e^{i[\kappa_1+l]\theta} + c.c. \quad (\text{A.66})$$

Si on considère la fonction de distribution adiabatique pour une onde ayant crû dans un plasma Maxwellien, alors, pour  $I > I_s + v_\phi$ ,

$$f_\alpha(I) = \frac{e^{-I^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{A.67})$$

→ **Région  $(\beta)$  de l'espace des phases.**

Dans la région  $(\beta)$  le potentiel perturbé s'écrit

$$\delta\phi = e^{-i\varpi_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta\phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)} e^{-i(\kappa_1+l)\theta} + c.c., \quad (\text{A.68})$$

on cherche donc  $\delta f^{(\beta)}$  comme précédemment sous la forme

$$\delta f^{(\beta)} = e^{-i\varpi_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)} e^{-i(\kappa_1+l)\theta} + c.c. \quad (\text{A.69})$$

L'équation de Vlasov dans la région  $(\beta)$  s'écrit alors

$$[-i\varpi_1 - i(\kappa_1 + l)\Omega]\delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)} - i(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}\delta\phi_n f'_\beta = 0, \quad (\text{A.70})$$

ce qui donne

$$\delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)} = -\frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}\delta\phi_n}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} f'_\beta. \quad (\text{A.71})$$

Finalement, dans la région  $(\beta)$ ,  $\delta f$  vaut

$$\delta f^{(\beta)} = e^{-i\varpi_1 t} f'_\beta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{-(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}\delta\phi_n}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} e^{i[\kappa_1+l]\theta} + c.c., \quad (\text{A.72})$$

Dans le cas où  $f_\beta$  est la fonction de distribution adiabatique pour une onde ayant crû dans un plasma Maxwellien, alors, pour  $I > I_s - v_\phi$ ,

$$f_\beta(I) = \frac{e^{-I^2/2}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (\text{A.73})$$

→ Dans chaque sous-région ( $\gamma_m$ ) de l'espace des phases.

Dans chaque sous-région ( $\gamma_m$ ), on suppose que la fonction de distribution  $f(I)$  s'écrit,

$$f(I) = f_\gamma(I)/2. \quad (\text{A.74})$$

Dans le cas d'une onde adiabatique,  $f_\gamma(I) dI$  est la fraction d'électrons piégés dont l'action est comprise entre  $I$  et  $I+dI$ . Dans le cas général, on peut toujours introduire une fonction  $f_\gamma$  valant simplement  $2f(I)$ . De plus, dans le cas d'une onde adiabatique croissant dans un plasma Maxwellien,

$$f_\gamma(I) = \frac{e^{-(I+v_\phi^*)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 + \frac{dv_\phi^*}{dI} \right] + \frac{e^{-(I-v_\phi^*)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left[ 1 - \frac{dv_\phi^*}{dI} \right]. \quad (\text{A.75})$$

Par ailleurs, dans chaque sous-région ( $\gamma_m$ )

$$\delta\phi = e^{-i\varpi_1 t} e^{2im\kappa_1\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta\phi_n \sum_{l=-\infty}^{+\infty} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2} + c.c. \quad (\text{A.76})$$

On cherche donc  $\delta f^{(\gamma_m)}$  sous la forme

$$\delta f^{(\gamma_m)} = e^{-i\varpi_1 t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_m)} e^{il\theta/2} + c.c., \quad (\text{A.77})$$

ce qui nous donne après injection dans l'équation de Vlasov

$$i[-\varpi_1 + l\Omega/2] \delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_m)} + i \frac{l}{2} e^{2im\kappa_1\pi} \delta\phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} \frac{f'_\gamma}{2} = 0. \quad (\text{A.78})$$

L'équation précédente nous donne l'expression des coefficients de la distribution  $\delta f$  dans la région ( $\gamma_m$ ), qui valent

$$\delta f_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_m)} = \frac{l\delta\phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} e^{2im\kappa_1\pi} \frac{f'_\gamma}{2}. \quad (\text{A.79})$$

L'expression de la fonction de distribution perturbée dans la sous-région  $(\gamma_m)$  est donc

$$\delta f^{(\gamma_m)} = e^{-i\varpi_1 t} e^{2im\kappa_1\pi} \frac{f'_\gamma}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{l\delta\phi_n V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} e^{il\theta/2} + c.c. \quad (\text{A.80})$$

#### A.6.4 Calcul de la densité de charges

Notons  $\mathcal{F}_{\text{tot}}(\varphi, v, t) = \mathcal{F}(\varphi, v, t) + \delta\mathcal{F}(\varphi, v, t)$  la fonction de distribution électronique dans les variables  $(\varphi, v)$ , où  $\mathcal{F}(\varphi, v, t)$  est induite par l'onde BGK et  $\delta\mathcal{F}(\varphi, v, t)$  par le mode satellite. La densité de charges électronique vaut alors  $\rho_{\text{tot}}(\varphi_0) = \rho(\varphi_0) + \delta\rho(\varphi_0, t)$ , où  $\rho(\varphi_0)$  est reliée à  $\phi(\varphi_0, t)$  par la relation de Poisson, alors que

$$\begin{aligned} \frac{-\delta\rho(\varphi_0, t)}{n_0 e} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\mathcal{F}(\varphi_0, v, t) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\mathcal{F}(\varphi, v, t) \delta(\varphi - \varphi_0) d\varphi dv. \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

En passant en coordonnées action-angle, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{-\delta\rho(\varphi_0, t)}{n_0 e} &= \int \int \delta f(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &= \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f^{(\alpha)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &\quad + \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta f^{(\beta)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &\quad + \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \int_0^{I_s} \int_{4m-\pi}^{4m+3\pi} \delta f^{(\gamma_m)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

Notons néanmoins que, si  $(2m_0 - 1)\pi \leq \varphi_0 < (2m_0 + 1)\pi$ , seul le terme  $m = m_0$  est non nul dans la dernière somme du membre de droite de l'équation (A.83). Quant à la première intégrale, pour la même raison, elle peut être réduite à une intégrale sur l'intervalle  $[(2m_0 - 1)\pi, (2m_0 + 1)\pi]$ , et la deuxième à une intégration sur  $[-(2m_0 + 1)\pi, -(2m_0 - 1)\pi]$ . Donc, lorsque  $(2m_0 - 1)\pi \leq \varphi_0 < (2m_0 + 1)\pi$ ,

$$\begin{aligned} \frac{-\delta\rho(\varphi_0, t)}{n_0 e} &= \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \delta f^{(\alpha)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &\quad + \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-(2m_0+1)\pi}^{-(2m_0-1)\pi} \delta f^{(\beta)}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta \\ &\quad + \int_0^{I_s} \int_{4m_0-\pi}^{4m_0+3\pi} \delta f^{(\gamma_{m_0})}(\theta, I) \delta[\varphi(\theta, I) - \varphi_0] dI d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.83})$$

Par ailleurs, étant donnée la forme de la perturbation de potentiel, on doit forcément avoir  $\delta\rho = \delta\rho_c + c.c$  où

$$\delta\rho_c(\varphi_0) = e^{-i\varpi_1 t} \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \delta\rho_\nu e^{i(\kappa_1+\nu)\varphi_0}, \quad (\text{A.84})$$

et, si  $(2m_0 - 1)\pi \leq \varphi_0 < (2m_0 + 1)\pi$ ,

$$\begin{aligned} \delta\rho_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \delta\rho_c(\varphi_0) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi_0 - \varpi_1 t]} d\varphi_0 \\ &\equiv \delta\rho_\nu^{(\alpha)} + \delta\rho_\nu^{(\beta)} + \delta\rho_\nu^{(\gamma)}. \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

→ **Contribution de la région** ( $\alpha$ )

En notant  $\delta f^{(\alpha)}(\theta, I) = \delta f_c^{(\alpha)}(\theta, I) + c.c.$ , on trouve,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\rho_\nu^{(\alpha)}}{n_0 e} &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \delta f_c^{(\alpha)} \delta[\varphi - \varphi_0] dI d\theta e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi_0 - \varpi_1 t]} d\varphi_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \delta f_c^{(\alpha)}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

En remarquant que  $\delta f_c^{(\alpha)}(\theta - 2m\pi, I) = e^{-i2m\kappa_1\pi} \delta f_c^{(\alpha)}(\theta, I)$  et que  $e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta - 2m\pi, I)]} = e^{i2m\kappa_1\pi} e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I)]}$ , on trouve que

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\alpha)}}{n_0 e} = \frac{1}{2\pi} \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta f_c^{(\alpha)}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \quad (\text{A.87})$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que les  $V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)}$  sont réels,

$$e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I)]} = \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} V_{l', \kappa_1+\nu}^{(\alpha)} e^{-i(\kappa_1+l')\theta}, \quad (\text{A.88})$$

et en utilisant l'expression de  $\delta f^{(\alpha)}$  donnée par l'équation (A.66), on trouve que l'intégrande dans l'équation (A.87) vaut

$$f'_\alpha \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1+l)V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} \delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1+l)\Omega} e^{i[\kappa_1+l]\theta} V_{l', \kappa_1+\nu}^{(\alpha)} e^{-i(\kappa_1+l')\theta}$$

et n'apporte de contribution dans l'intégrale que si  $l = l'$ . On trouve donc finalement,

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\alpha)}}{n_0 e} = \int_{I_s+V_\phi}^{+\infty} f'_\alpha(I) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1+l)V_{l, \kappa_1+n}^{(\alpha)} V_{l, \kappa_1+\nu}^{(\alpha)} \delta\phi_n}{\varpi_1 - (\kappa_1+l)\Omega} dI. \quad (\text{A.89})$$

→ **Contribution de la région**  $(\beta)$

En notant  $\delta f^{(\beta)}(\theta, I) = \delta f_c^{(\beta)}(\theta, I) + c.c.$ , on trouve,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\rho_\nu^{(\beta)}}{n_0e} &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-(2m_0+1)\pi}^{-(2m_0-1)\pi} \delta f_c^{(\beta)} \delta[\varphi - \varphi_0] dI d\theta e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi_0 - \varpi_1 t]} d\varphi_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-(2m_0+1)\pi}^{-(2m_0-1)\pi} \delta f_c^{(\beta)}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

En remarquant que  $\delta f_c^{(\beta)}(\theta+2m_0\pi, I) = e^{-i2m_0\kappa_1\pi} \delta f_c^{(\beta)}(\theta, I)$  et que  $e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta+2m_0\pi, I)]} = e^{i2m_0\kappa_1\pi} e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I)]}$ , on trouve que

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\beta)}}{n_0e} = \frac{1}{2\pi} \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \delta f_c^{(\beta)}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \quad (\text{A.91})$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que les  $V_{l, \kappa_1+n}^{(\beta)}$  sont réels, on trouve

$$e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I)]} = \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} V_{l', \kappa_1+\nu}^{(\beta)} e^{i(\kappa_1+l')\theta}. \quad (\text{A.92})$$

En utilisant l'expression de  $\delta f^{(\beta)}$  donnée par l'équation (A.72), on trouve que l'intégrande dans l'équation (A.91) vaut

$$f'_\beta \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} -\frac{(\kappa_1+l)V_{l, \kappa_1+n}^{(\beta)} \delta\phi_n}{\varpi_1 + (\kappa_1+l)\Omega} e^{-i[\kappa_1+l]\theta} V_{l', \kappa_1+\nu}^{(\beta)} e^{i(\kappa_1+l')\theta}$$

et n'apporte de contribution dans l'intégrale que si  $l = l'$ . On trouve donc finalement,

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\beta)}}{n_0e} = \int_{I_s-V_\phi}^{+\infty} f'_\beta(I) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} -\frac{(\kappa_1+l)V_{l, \kappa_1+n}^{(\beta)} V_{l, \kappa_1+\nu}^{(\beta)} \delta\phi_n}{\varpi_1 + (\kappa_1+l)\Omega} dI. \quad (\text{A.93})$$

### A.6.5 Contribution de la région $(\gamma)$

En notant  $\delta f^{(\gamma_{m_0})}(\theta, I) = \delta f_c^{(\gamma_{m_0})}(\theta, I) + c.c.$ , on trouve,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0e} &= \frac{1}{2\pi} \int_{(2m_0-1)\pi}^{(2m_0+1)\pi} \int_0^{I_s} \int_{4m_0-\pi}^{4m_0+3\pi} \delta f_c^{(\gamma_{m_0})} \delta[\varphi - \varphi_0] dI d\theta e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi_0 - \varpi_1 t]} d\varphi_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_s} \int_{4m_0-\pi}^{4m_0+3\pi} \delta f_c^{(\gamma_{m_0})}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.94})$$

En remarquant qu'avec notre convention sur  $\theta$ ,  $\delta f_c^{(\gamma_{m_0})}(\theta+4m\pi, I) = e^{i2m_0\kappa_1\pi} \delta f_c^{(\gamma_0)}(\theta, I)$  et que  $\varphi^{(\gamma_{m_0})}(\theta+4m_0\pi, I) = \varphi^{(\gamma_0)}(\theta, I) + 2m_0\pi$ , on trouve,

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0e} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{I_s} \int_{-\pi}^{3\pi} \delta f_c^{(\gamma_0)}(\theta, I) e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta, I) - \varpi_1 t]} dI d\theta. \quad (\text{A.95})$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que les  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}$  sont réels, on trouve

$$e^{-i[(\kappa_1+\nu)\varphi(\theta,I)]} = \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} V_{l',\kappa_1+\nu}^{(\gamma_0)} e^{-il'\theta/2} \quad (\text{A.96})$$

En utilisant l'expression de  $\delta f^{(\gamma_0)}$  donnée par l'équation (A.80), on trouve que l'intégrande dans l'équation (A.95) vaut

$$\frac{f'_\gamma}{2} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} \delta\phi_n}{2\varpi_1 - l\Omega} e^{il\theta/2} V_{l',\kappa_1+\nu}^{(\gamma_0)} e^{-l'\theta/2}$$

et n'apporte de contribution dans l'intégrale que si  $l = l'$ .

On trouve donc finalement,

$$-\frac{\delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0e} = \int_0^{I_s} f'_\gamma(I) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+\nu}^{(\gamma_0)} \delta\phi_n}{2\varpi_1 - l\Omega} dI. \quad (\text{A.97})$$

### A.6.6 Équation de Poisson et relation de dispersion

L'équation de Poisson s'écrit

$$(k\lambda_D)^2 \frac{d^2\delta\phi}{d\varphi^2} = -\frac{\delta\rho}{n_0e}. \quad (\text{A.98})$$

En utilisant le développement Eq. (A.52) pour  $\delta\phi$ , ainsi que les expressions Eqs. (A.84), (A.85), pour  $\delta\rho$ , l'équation de Poisson devient,

$$(k\lambda_D)^2 (\kappa + \nu)^2 \delta\phi_\nu = \frac{\delta\rho_\nu^{(\alpha)} + \delta\rho_\nu^{(\beta)} + \delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0e}. \quad (\text{A.99})$$

En utilisant les expressions Eqs. (A.89), (A.93) et (A.97) respectivement pour  $\delta\rho_\nu^{(\alpha)}$ ,  $\delta\rho_\nu^{(\beta)}$  et  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$ , on obtient la relation de dispersion suivante,

$$M_{nm} \delta\phi_m = 0, \quad (\text{A.100})$$

avec

$$\begin{aligned} M_{nm} = & (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_{I_s+v_\phi}^{+\infty} \frac{f'_\alpha(I)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l) V_{l,\kappa_1+m}^{(\alpha)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dI \\ & + \int_{I_s-v_\phi}^{+\infty} \frac{f'_\beta(I)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} -\frac{(\kappa_1 + l) V_{l,\kappa_1+m}^{(\beta)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dI \\ & + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dI. \end{aligned} \quad (\text{A.101})$$

Si, maintenant, on pose  $J = I - v_\phi$  dans la première intégrale et  $J = I + v_\phi$  dans la deuxième intégrale, compte tenu du fait que  $V_{l,\kappa_1+n}^{(\alpha)}(I - v_\phi) = V_{l,\kappa_1+n}^{(\beta)}(I + v_\phi) \equiv V_{l,\kappa_1+n}^u(J)$ , on obtient,

$$\begin{aligned}
M_{nm} = & \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_\alpha(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_\beta(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(J)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dJ. \quad (\text{A.102})
\end{aligned}$$

Dans le cas d'une onde adiabatique ayant crû dans un plasma Maxwellien,

$$f_\alpha(J) = f_{G^+}(J), \quad (\text{A.103})$$

$$f_\beta(J) = f_{G^-}(J), \quad (\text{A.104})$$

$$\frac{f_\gamma(J)}{2} = \frac{f_{G^-}^*(J) + f_{G^+}^*(J)}{2}, \quad (\text{A.105})$$

où

$$f_{G^\pm}(J) = \frac{\exp[-(J \pm v_\phi)^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \quad (\text{A.106})$$

$$f_{G^\pm}^*(J) = \frac{\exp[-(J \pm v_\phi^*)^2/2]}{\sqrt{2\pi}} \left(1 \pm \frac{dv_\phi^*}{dJ}\right). \quad (\text{A.107})$$

Par souci de simplicité, et parce que cela n'apporte pas une grande différence dans les résultats (puisque en général  $d_J v_\phi^* \ll 1$ ) on assimilera dans la suite  $f_{G^\pm}^*$  à  $f_{G^\pm}$ . Lorsque  $J$  varie de  $I_s - \varepsilon$  à  $I_s + \varepsilon$ , en traversant la branche de la séparatrice correspondant à la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases,  $f$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^+}$ , alors que si la traversée de la séparatrice se fait vers la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases,  $f$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^-}$ . On en déduit que,

$$f'_\alpha(J) = f'_{G^+}(J) + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{2} \delta(J - I_s), \quad (\text{A.108})$$

$$f'_\beta(J) = f'_{G^-}(J) - \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{2} \delta(J - I_s). \quad (\text{A.109})$$

L'équation (A.110) devient alors,

$$\begin{aligned}
M_{nm} = & \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dI \\
& + \frac{f_{G^+} - f_{G^-} - \Delta}{(k\lambda_D)^2 \varpi_1}, \tag{A.110}
\end{aligned}$$

où, en utilisant l'équation (A.110) et le fait que  $\Omega = 0$  à la séparatrice,

$$\Delta = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u, \tag{A.111}$$

les  $V_{l,\kappa_1+m}^u$  étant censés être évalués à la séparatrice. C'est là que réside un problème mathématique délicat, que nous résolvons en utilisant un argument physique qui va révéler toute la difficulté de traiter la stabilité d'une onde adiabatique.

Puisque les  $V_{l,\kappa_1+m}^u$  sont définis dans les régions ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) de l'espace des phases, on voudrait les calculer en utilisant les expressions trouvées pour  $J > I_s$ . Or, pour de telles valeurs de  $J$ ,

$$\left[ d_\theta e^{i\sigma(\kappa_1+n)\varphi} \right] e^{-i\sigma(\kappa_1+m)\varphi} = i \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^u e^{i(\kappa_1+l)\theta} V_{l',\kappa_1+m}^u e^{-i(\kappa_1+l')\theta}, \tag{A.112}$$

où  $\sigma = 1$  dans la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases et  $\sigma = -1$  dans la région ( $\beta$ ). Donc,

$$-\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ d_\theta e^{i\sigma(\kappa_1+n)\varphi} \right] e^{-i\sigma(\kappa_1+m)\varphi} d\theta = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+n}^u V_{l,\kappa_1+m}^u. \tag{A.113}$$

Lorsque  $\theta$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ ,  $\varphi$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$  dans la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases, et de  $\pi$  à  $-\pi$  dans la région ( $\beta$ ). Donc, en effectuant le changement de

variables,  $\varphi \rightarrow \sigma\varphi$ , on obtient,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1 + n}^u V_{l, \kappa_1 + n'}^u &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [d_\theta e^{i(\kappa_1 + n)\varphi}] e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[ d_\varphi e^{i(\kappa_1 + n)\varphi} \frac{d\varphi}{d\theta} \right] e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} i(\kappa_1 + n) e^{i(\kappa_1 + n)\varphi} e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} d\varphi \\
&= (\kappa_1 + n) \delta_{nn'}. \tag{A.114}
\end{aligned}$$

Néanmoins, on aurait pu vouloir faire porter la contribution des Dirac à la dérivée de la fonction de distribution des électrons piégés, ce qui aurait impliqué de remplacer  $V_{l, \kappa_1 + m}^u$  par  $V_{l, \kappa_1 + m}^{(\gamma_0)}$ . Dans ce cas, on aurait dû calculer,

$$[d_\theta e^{i(\kappa_1 + n)\varphi}] e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} = i \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \sum_{l'=-\infty}^{+\infty} (l/2) V_{l, \kappa_1 + n}^{(\gamma_0)} e^{il\theta/2} V_{l', \kappa_1 + n'}^{(\gamma_0)} e^{-il'\theta/2}. \tag{A.115}$$

Donc,

$$-\frac{i}{2\pi} \int_{-\pi}^{3\pi} [d_\theta e^{i(\kappa_1 + n)\varphi}] e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} d\theta = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + l) V_{l, \kappa_1 + n}^{(\gamma_0)} V_{l, \kappa_1 + n'}^{(\gamma_0)}. \tag{A.116}$$

Lorsque  $\theta$  varie de  $-\pi$  à  $\pi$ ,  $\varphi$  varie de  $-\varphi_{\max}$  à  $\varphi_{\max}$ , et lorsque  $\theta$  varie de  $\pi$  à  $3\pi$ ,  $\varphi$  varie de  $\varphi_{\max}$  à  $-\varphi_{\max}$ . Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{l=-\infty}^{+\infty} l V_{l, \kappa_1 + n}^{(\gamma_0)} V_{l, \kappa_1 + n'}^{(\gamma_0)} &= -\frac{i}{2\pi} \left\{ \int_{-\varphi_{\max}}^{\varphi_{\max}} + \int_{\varphi_{\max}}^{-\varphi_{\max}} \right\} [d_\varphi e^{i(\kappa_1 + n)\varphi}] e^{-i(\kappa_1 + n')\varphi} d\varphi \\
&= 0. \tag{A.117}
\end{aligned}$$

On ne trouve donc pas le même résultat selon le choix fait sur l'endroit où reporter les Dirac dans le calcul de la dérivée de  $f(I)$ , ainsi que selon le choix des  $V_{l, \kappa_1 + m}^u$ .

En fait, aucun des deux choix précédents n'est correct lorsque  $J = I_s$ . Si on avait voulu faire une évaluation en  $J = I_s$ , on aurait encore trouvé un autre résultat, mais qui n'aurait pas non plus été pertinent. Cela tient aux valeurs des coefficients de Fourier à la séparatrice où  $\varphi(\theta)$  est discontinu et vaut soit  $\pi$ , soit  $-\pi$ , selon le signe de  $\theta$ . Nous n'entrerons cependant pas dans ces détails mathématiques parce qu'on ne s'attend pas à ce qu'une fonction de distribution physique soit discontinue. Dès lors, nous allons plutôt supposer que  $f(I)$  varie de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^+}$  lorsque  $J$  varie de  $I_s$  à  $I_s + \delta I$  vers la région ( $\alpha$ ) de l'espace des phases et de  $(f_{G^+} + f_{G^-})/2$  à  $f_{G^-}$  lorsque  $J$  varie de  $I_s$  à  $I_s + \delta I$  vers la région ( $\beta$ ) de l'espace des phases, et nous

considérons la limite  $\delta I \rightarrow 0$ . Dans cette limite, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
M_{nm} = & \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 - (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l,\kappa_1+m}^u V_{l,\kappa_1+n}^u}{\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\
& + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l,\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{2\varpi_1 - l\Omega} dI \\
& + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{(k\lambda_D)^2} \frac{(\kappa_1 + n)\delta_{nm}}{\varpi_1}. \tag{A.118}
\end{aligned}$$

### A.6.7 Réduction aux modèles de Dodin et KDS

Les modèles de Dodin et KDS reposent sur l'hypothèse d'une réponse linéaire des électrons non piégés à l'onde BGK, supposée sinusoïdale.

Dans nos notations, l'approximation linéaire pour les électrons non piégés revient à l'approximation suivante,

$$-\frac{\rho_\nu^{(\alpha)} + \rho_\nu^{(\beta)}}{n_0 e} \approx (k + \nu)^2 (k\lambda_D)^2 \left( \varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} - 1 \right) \delta\phi_\nu, \tag{A.119}$$

où

$$\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} = P.P. \left[ \int \frac{f'_0(v_0) dv_0}{v_0 - v_\phi - \varpi_1 / (\kappa_1 + \nu)} \right], \tag{A.120}$$

$f_0$  étant la fonction de distribution non perturbée, exprimée en unités normalisées pour la vitesse. Dans le cas où l'onde BGK a crû dans un plasma Maxwellien,  $f_0(v_0) = e^{-v_0^2/2} / \sqrt{2\pi}$ . En remplaçant  $v_\phi$  par  $\omega/kv_{th}$  et  $\varpi_1$  par  $\omega_1/kv_{th}$ , on trouve que

$$\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} = \varepsilon_L(k' + \nu k, \omega' + \nu\omega), \tag{A.121}$$

où  $k' = \kappa_1 k$  et  $\omega' = \kappa_1 \omega + \omega_1$ , comme dans les modèles KDS ou de Dodin.

En ce qui concerne les électrons piégés, pour une onde sinusoïdale [Bénisti & Gremillet (2007)],

$$\sin(\varphi/2) = \sqrt{m_1} \text{sn} \left[ \frac{K(m_1)\theta}{\pi}, m \right], \tag{A.122}$$

où  $m_1 = (H + \phi_1)/2\phi_1$ ,  $K$  est l'intégrale elliptique de deuxième espèce et  $\text{sn}(\theta)$  est la fonction jacobienne elliptique [Abramowitz & Stegun (1972)].

Dans la limite considérée par Dodin, où les électrons sont localisés près du fond du puits de potentiel, ce qui implique  $\varphi \approx 0$  et  $\sin(\varphi) \approx \varphi$ , on obtient,

$$\sin(\varphi) \approx \sqrt{m_1} \sin(\theta/2). \quad (\text{A.123})$$

Or, l'approximation  $\varphi \approx 0$  revient à supposer  $m_1 \approx 0$ , ce qui fournit les approximations suivantes,

$$\Omega(I) \equiv \frac{dH}{dI} = \frac{\pi\sqrt{\phi_1}}{K} \approx 2\sqrt{\phi_1}, \quad (\text{A.124})$$

et

$$I = \frac{4\sqrt{\phi_1}}{\pi} [E + (m_1 - 1)K] \approx m_1\sqrt{\phi_1}, \quad (\text{A.125})$$

soit,

$$m_1 \approx \frac{2I}{\Omega}. \quad (\text{A.126})$$

L'équation (A.123) devient alors

$$\sin(\varphi) \approx 2\sqrt{\frac{2I}{\Omega}} \sin(\theta/2). \quad (\text{A.127})$$

On en déduit que, si  $l \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} V_{l,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{3\pi} e^{i[(\kappa_1+n)\varphi - l\theta/2]} d\theta \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{3\pi} 2(\kappa_1 + n) \sqrt{\frac{2I}{\Omega}} \sin(\theta/2) \sin(l\theta/2) d\theta \\ &= (\kappa_1 + n) \sqrt{\frac{2I}{\Omega}} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{3\pi} [\cos(l-1)\theta/2 - \cos(l+1)\theta/2] d\theta \\ &= (\kappa_1 + n) \sqrt{\frac{2I}{\Omega}} \text{ si } l = 1, \end{aligned} \quad (\text{A.128})$$

$$= -(\kappa_1 + n) \sqrt{\frac{2I}{\Omega}} \text{ si } l = -1, \quad (\text{A.129})$$

$$= 0 \text{ sinon.} \quad (\text{A.130})$$

En notant que  $\Omega = 2\Omega_D$ , où  $\Omega_D = \Omega_0/kv_{th}$ ,  $\Omega_0$  étant défini par l'équation (4.10), on trouve,

$$V_{1,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} V_{1,\kappa_1+\nu}^{(\gamma_0)} = V_{-1,\kappa_1+n}^{(\gamma_0)} V_{-1,\kappa_1+\nu}^{(\gamma_0)} = \frac{(\kappa_1 + n)(\kappa_1 + \nu)I}{\Omega_D}, \quad (\text{A.131})$$

et, l'équation (A.97) pour  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$  devient,

$$\begin{aligned} -\frac{\delta\rho_\nu^{(\gamma)}}{n_0 e} &= \frac{1}{\Omega_D} \int_0^{I_s} f'_\gamma \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{(\kappa_1 + n)(\kappa_1 + \nu)}{2(\varpi_1 - \Omega_D)} - \frac{(\kappa_1 + n)(\kappa_1 + \nu)}{2(\varpi_1 + \Omega_D)} \right] \delta\phi_n I \, dI \\ &= (\kappa_1 + \nu) \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + n) \delta\phi_n \right] \int_0^{I_s} \frac{I f'_\gamma}{2(\varpi_1^2 - \Omega_D^2)} \, dI. \end{aligned} \quad (\text{A.132})$$

En utilisant les équations (A.119) pour  $\delta\rho_\nu^{(\alpha)}$  et  $\delta\rho_\nu^{(\beta)}$ , ainsi que l'équation (A.132) pour  $\delta\rho_\nu^{(\gamma)}$ , l'équation de Poisson Eq. (A.99) devient,

$$(\kappa_1 + \nu) \varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu} \delta\phi_\nu + \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + n) \delta\phi_n \right] \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma}{2(k\lambda_D)^2} \frac{I}{\varpi_1^2 - \Omega_D^2} \, dI = 0, \quad (\text{A.133})$$

soit encore,

$$(\kappa_1 + \nu) \delta\phi_\nu = -\frac{1}{\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu}} \left[ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + n) \delta\phi_n \right] \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma}{2(k\lambda_D)^2} \frac{I}{\varpi_1^2 - \Omega_D^2} \, dI = 0. \quad (\text{A.134})$$

En sommant sur  $\nu$ , et en simplifiant l'équation par  $\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} (\kappa_1 + \nu) \delta\phi_\nu$ , on obtient la relation de dispersion de Dodin,

$$1 + \frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \frac{I}{\varpi_1^2 - \Omega_D^2} \, dI = 0, \quad (\text{A.135})$$

avec,

$$\frac{1}{\varepsilon_{\text{eff}}} = \left( \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\varepsilon_{\text{lin}}^{\kappa_1 + \nu}} \right). \quad (\text{A.136})$$

On peut facilement se convaincre que l'équation (A.135) est la même que l'équation (4.11) en notant que  $\varpi_1 = \omega_1/(k\lambda_D\omega_{pe})$ , que  $\Omega_D = \Omega_0/(k\lambda_D\omega_{pe})$  et que  $f(I) = f_\gamma/2$ .

Une fois que l'on s'est ramené à la relation de dispersion de Dodin, on retrouve immédiatement celle de KDS, comme montré dans le paragraphe 4.4.

## A.7 Symétrie du calcul par rapport au nombre d'onde

Pour tester la symétrie de notre relation de dispersion par rapport à  $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$ , nous considérons l'équation suivante

$$\det M[\varpi_1(-\kappa_1)] = 0. \quad (\text{A.137})$$

Les éléments de matrice  $M_{nm}$  donnés par l'équation (A.118) deviennent alors après changement  $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$  ainsi que  $l \rightarrow -l$

$$\begin{aligned} M_{nm} &= \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{-l, -\kappa_1+m}^u V_{-l, -\kappa_1+n}^u}{-\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{-l, -\kappa_1+m}^u V_{-l, -\kappa_1+n}^u}{-\varpi_1 + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad + (\kappa_1 - n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{-l, -\kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{-l, -\kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{-2\varpi_1 - l\Omega} dI \\ &\quad + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{(k\lambda_D)^2} \frac{(-\kappa_1 + n)\delta_{nm}}{\varpi_1}. \end{aligned} \quad (\text{A.138})$$

L'équation  $\det(M) = 0$  étant invariante par le changement  $n, m \rightarrow -n, -m$ , on peut considérer  $M_{-n, -m}$  au lieu de  $M_{nm}$ . On vérifie de plus que  $V_{-l, -\kappa_1-n}^u = V_{l, \kappa_1+n}^u$  ainsi que  $V_{-l, -\kappa_1-n}^{(\gamma_0)} = V_{l, \kappa_1+n}^{(\gamma_0)}$  en utilisant les équations (A.55) et (A.60). En prenant le complexe conjugué après avoir effectué le changement  $n, m \rightarrow -n, -m$  on obtient l'expression suivante des éléments de matrice

$$\begin{aligned} M_{-n, -m}^* &= \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^+}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l, \kappa_1+m}^u V_{l, \kappa_1+n}^u}{-\varpi_1^* + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad - \int_{I_s}^{+\infty} \frac{f'_{G^-}(J)}{(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{(\kappa_1 + l)V_{l, \kappa_1+m}^u V_{l, \kappa_1+n}^u}{-\varpi_1^* + (\kappa_1 + l)\Omega} dJ \\ &\quad + (\kappa_1 + n)^2 \delta_{mn} + \int_0^{I_s} \frac{f'_\gamma(I)}{2(k\lambda_D)^2} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{lV_{l, \kappa_1+m}^{(\gamma_0)} V_{l, \kappa_1+n}^{(\gamma_0)}}{-2\varpi_1^* - l\Omega} dI \\ &\quad + \frac{f_{G^+} - f_{G^-}}{(k\lambda_D)^2} \frac{(\kappa_1 + n)\delta_{nm}}{-\varpi_1^*}. \end{aligned} \quad (\text{A.139})$$

Puisque  $\det(M) = 0$  est également invariant par passage au complexe conjugué, on obtient en utilisant l'équation (A.137)

$$\det M[-\varpi_1^*(\kappa_1)] = 0. \quad (\text{A.140})$$

En cas d'unicité de la solution, ce qu'on observe numériquement, on en tire

$$\begin{aligned}\omega_r(-\kappa_1) &= -\omega_r(\kappa_1) \\ \gamma(-\kappa_1) &= \gamma(\kappa_1).\end{aligned}\tag{A.141}$$

Le spectre est donc bien symétrique par rapport à  $\kappa_1 \rightarrow -\kappa_1$ , on peut l'étudier sur  $0 \leq \kappa_1 \leq 0.5$ .



---

## Bibliographie

- ABRAMOWITZ, M. & STEGUN, I. (1972). *Handbook of mathematical functions*. Dover, New-York.
- ABU-SHAWAREB, H., ACREE, R., ADAMS, P. & AL. (2022). *Lawson Criterion for Ignition Exceeded in an Inertial Fusion Experiment*. Phys. Rev. Lett. **129**, p. 075001.
- AFEYAN, B., CASAS, F., CROUSEILLES, N. & AL. (2014). *Simulations of kinetic electrostatic electron nonlinear (KEEN) waves with variable velocity resolution grids and high-order time-splitting*. Eur. Phys. J. D **68**, no. 295.
- AKHIEZER, A. I. & LYUBARSKIZS, G. V. (1951). Doklady Akad. Nauk.S.S.S.R. **80**, p. 193–195.
- ANDERSSON, L., ERGUN, R. E., TAO, J. & AL. (2009). *New Features of Electron Phase Space Holes Observed by the THEMIS Mission*. Phys. Rev. Lett. **102**, p. 225004.
- ARTEMYEV, A. V., VASILIEV, A. A., MOURENAS, D. & AL. (2013). *Nonlinear electron acceleration by oblique whistler waves : Landau resonance vs. cyclotron resonance*. Physics of Plasmas **20**, no. 12, p. 122901.

- BANKS, J. W., BERGER, R. L., BRUNNER, S. & AL. (2011). *Two-dimensional Vlasov simulation of electron plasma wave trapping, wavefront bowing, self-focusing, and sideloss*. *Physics of Plasmas* **18**, no. 5, p. 052102.
- BAZZANI, A., FRYE, C., GIOVANNOZZI, M. & AL. (2014). *Analysis of adiabatic trapping for quasi-integrable area-preserving maps*. *Phys. Rev. E* **89**, p. 042915.
- BÉNISTI, D. (2015). *Kinetic description of linear wave propagation in inhomogeneous, nonstationary, anisotropic, weakly magnetized, and collisional plasma*. *Physics of Plasmas* **22**, no. 7, p. 072106.
- BÉNISTI, D. (2016). *Envelope equation for the linear and nonlinear propagation of an electron plasma wave, including the effects of Landau damping, trapping, plasma inhomogeneity, and the change in the state of wave*. *Physics of Plasmas* **23**, no. 10, p. 102105.
- BÉNISTI, D. (2017a). *Nonlocal adiabatic theory. I. The action distribution function*. *Physics of Plasmas* **24**, no. 9, p. 092120.
- BÉNISTI, D. (2017b). *Nonlocal adiabatic theory. II. Nonlinear frequency shift on an electron plasma wave in a multidimensional inhomogeneous plasma*. *Physics of Plasmas* **24**, no. 9, p. 092121.
- BÉNISTI, D. (2018). *Self-consistent theory for the linear and nonlinear propagation of a sinusoidal electron plasma wave. Application to stimulated Raman scattering in a non-uniform and non-stationary plasma*. *Plasma Phys. Control. Fusion* **60**, p. 014040.
- BÉNISTI, D. & ESCANDE, D. F. (1997). *Origin of diffusion in Hamiltonian dynamics*. *Physics of Plasmas* **4**, no. 5, p. 1576–1581.
- BÉNISTI, D. & GREMILLET, L. (2007). *Nonlinear plasma response to a slowly varying electrostatic wave, and application to stimulated Raman scattering*. *Physics of Plasmas* **14**, no. 4, p. 042304.
- BÉNISTI, D., MINENNA, D., TACU, M. & AL. (2022). *Nonlinear adiabatic electron plasma waves. II*. *Physics of Plasmas* **29**, no. 5, p. 052109.
- BÉNISTI, D., RAM, A. & BERS, A. (1997). *Lower bound in energy for chaotic dynamics of ions*. *Physics Letters A* **233**, no. 3, p. 209–215.
- BÉNISTI, D., RAM, A. K. & BERS, A. (1998a). *Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. I. Coherent acceleration*. *Physics of Plasmas* **5**, no. 9, p. 3224–3232.

- BÉNISTI, D., RAM, A. K. & BERS, A. (1998b). *Ion dynamics in multiple electrostatic waves in a magnetized plasma. II. Enhancement of the acceleration*. Physics of Plasmas **5**, no. 9, p. 3233–3241.
- BÉNISTI, D., STROZZI, D. J. & GREMILLET, L. (2008). *Breakdown of electrostatic predictions for the nonlinear dispersion relation of a stimulated Raman scattering driven plasma wave*. Physics of Plasmas **15**, no. 3, p. 030701.
- BERGER, R. L., BRUNNER, S., BANKS, J. W. & AL. (2015). *Multi-dimensional Vlasov simulations and modeling of trapped-electron-driven filamentation of electron plasma waves*. Physics of Plasmas **22**, no. 5, p. 055703.
- BERGER, R. L., BRUNNER, S., CHAPMAN, T. & AL. (2013). *Electron and ion kinetic effects on non-linearly driven electron plasma and ion acoustic waves*. Physics of Plasmas **20**, no. 3, p. 032107.
- BERNSTEIN, I. B., GREENE, J. M. & KRUSKAL, M. D. (1957). *Exact Nonlinear Plasma Oscillations*. Phys. Rev. **108**, p. 546–550.
- BOHM, D. & GROSS, E. P. (1949). *Theory of Plasma Oscillations. A. Origin of Medium-Like Behavior*. Phys. Rev. **75**, p. 1851–1864.
- BRET, A., GREMILLET, L., BÉNISTI, D. & AL. (2008). *Exact Relativistic Kinetic Theory of an Electron-Beam-Plasma System : Hierarchy of the Competing Modes in the System-Parameter Space*. Phys. Rev. Lett. **100**, p. 205008.
- BRUNNER, S., BERGER, R. L., COHEN, B. I. & AL. (2014). *Kinetic simulations and reduced modeling of longitudinal sideband instabilities in non-linear electron plasma waves*. Physics of Plasmas **21**, no. 10, p. 102104.
- BULANOV, S. & SHASHARINA, S. (1992). *Behaviour of the adiabatic invariant near the separatrix in a stellarator*. Nuclear Fusion **32**, no. 9, p. 1531.
- CARY, J. R., ESCANDE, D. F. & TENNYSON, J. L. (1986). *Adiabatic-invariant change due to separatrix crossing*. Phys. Rev. A **34**, p. 4256–4275.
- CHENG, C. & KNORR, G. (1976). *The integration of the Vlasov equation in configuration space*. Journal of Computational Physics **22**, no. 3, p. 330–351.
- COFFEY, T. P. (1971). *Breaking of Large Amplitude Plasma Oscillations*. The Physics of Fluids **14**, no. 7, p. 1402–1406.
- CROUSEILLES, N., LUKAS, E. & ERWAN, F. (2015). *Hamiltonian splitting for the Vlasov–Maxwell equations*. Journal of Computational Physics **283**, p. 224–240.
- CROUSEILLES, N., MEHRENBERGER, M. & SONNENDRÜCKER, E. (2010). *Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations*. Journal of Computational Physics p. 1927–1953.

- CURTET, M. & BONNAUD, G. (1999). *Landau damping of an electron plasma wave in a plasma with modulated density*. Phys. Rev. E **60**, p. R5052–R5055.
- DAWSON, J. M. (1959). *Nonlinear Electron Oscillations in a Cold Plasma*. Phys. Rev. **113**, p. 383–387.
- DEBAYLE, A., RUYER, C., MORICE, O. & AL. (2019). *A unified modeling of wave mixing processes with the ray tracing method*. Physics of Plasmas **26**, no. 9, p. 092705.
- DEWAR, R. L. (1973). *Saturation of kinetic plasma instabilities by particle trapping*. The Physics of Fluids **16**, no. 3, p. 431–435.
- DODIN, I. Y. & FISCH, N. J. (2012a). *Adiabatic nonlinear waves with trapped particles. I. General formalism*. Physics of Plasmas **19**, no. 1, p. 012102.
- DODIN, I. Y. & FISCH, N. J. (2012b). *Adiabatic nonlinear waves with trapped particles. III. Wave dynamics*. Physics of Plasmas **19**, no. 1, p. 012104.
- DODIN, I. Y., RUIZ, D. E., YANAGIHARA, K. & AL. (2019). *Quasioptical modeling of wave beams with and without mode conversion. I. Basic theory*. Physics of Plasmas **26**, no. 7, p. 072110.
- DODIN, I. Y., SCHMIT, P. F., ROCKS, J. & AL. (2013). *Negative-Mass Instability in Nonlinear Plasma Waves*. Phys. Rev. Lett. **110**, p. 215006.
- DOVEIL, F., VOISLISANT, Y. & TSUNODA, S. I. (1992). *Localization of Langmuir waves in a fluctuating plasma*. Phys. Rev. Lett. **69**, p. 2074–2077.
- EBRARDT, J. & CHAPUT, J. M. (2010). *LMJ on its way to fusion*. Journal of Physics : Conference Series **244**, no. 3, p. 032017.
- ELSKENS, Y. & ESCANDE, D. (2003). *Microscopic Dynamics of Plasmas and Chaos*. IOP Publishing Ltd.
- ESCANDE, D., BÉNISTI, D., ELSKENS & AL. (2018). Rev. Mod. Plasma Phys. **2**, p. 9.
- ESCANDE, D. F. & SOUILLARD, B. (1984). *Localization of Waves in a Fluctuating Plasma*. Phys. Rev. Lett. **52**, p. 1296–1299.
- FIJALKOW, E. (1999). *A numerical solution to the Vlasov equation*. Computer Physics Communications **116**, no. 2, p. 319–328.
- FILBET, F. & SONNENDRÜCKER, E. (2003). *Comparison of Eulerian Vlasov solvers*. Computer Physics Communications **150**, no. 3, p. 247–266.

- FILBET, F., SONNENDRÜCKER, E. & BERTRAND, P. (2001). *Conservative Numerical Scheme for the Vlasov Equation*. *Journal of Computational Physics* **172**, no. 1, p. 166–187.
- FRANKLIN, R. N., HAMBERGER, S. M., IKEZI, H. & AL. (1972). *Nature of the Instability Caused by Electrons Trapped by an Electron Plasma Wave*. *Phys. Rev. Lett.* **28**, p. 1114–1117.
- FRIOU, A., BÉNISTI, D., GREMILLET, L. & AL. (2013). *Saturation mechanisms of backward stimulated Raman scattering in a one-dimensional geometry*. *Physics of Plasmas* **20**, no. 10, p. 103103.
- GHIZZO, A., IZRAR, B., BERTRAND, P. & AL. (1988). *Stability of Bernstein, Greene, Kruskal plasma equilibria. Numerical experiments over a long time*. *The Physics of Fluids* **31**, no. 1, p. 72–82.
- GOLDMAN, M. V. (1970). *Theory of Stability of Large Periodic Plasma Waves*. *The Physics of Fluids* **13**, no. 5, p. 1281–1289.
- GOLDMAN, M. V. & BERK, H. L. (1971). *Stability of a Trapped Particle Equilibrium*. *The Physics of Fluids* **14**, no. 4, p. 801–804.
- HAIRER, E., LUBICH, C. & WANNER, G. (2010). *Geometric Numerical Integration : Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, New-York.
- HANNAY, J. H. (1986). *Accuracy loss of action invariance in adiabatic change of a one-freedom Hamiltonian*. *Journal of Physics A : Mathematical and General* **19**, no. 17, p. L1067.
- HARA, K., CHAPMAN, T., BANKS, J. & AL. (2015). *Quantitative study of the trapped particle bunching instability in Langmuir waves*. *Physics of Plasmas* **22**, no. 2, p. 022104.
- HARTMANN, D. A. & DRISCOLL, C. F. (2001). *Measurements of the trapped particle sideband instability compared to the macroparticle model*. *Physics of Plasmas* **8**, no. 7, p. 3457–3466.
- HUTCHINSON, I. H. (2017). *Electron holes in phase space : What they are and why they matter*. *Physics of Plasmas* **24**, no. 5, p. 055601.
- KRAPCHEV, V. B. & RAM, A. K. (1980). *Adiabatic theory for a single nonlinear wave in a Vlasov plasma*. *Phys. Rev. A* **22**, p. 1229–1242.
- KRUEER, W. L., DAWSON, J. M. & SUDAN, R. N. (1969). *Trapped-Particle Instability*. *Phys. Rev. Lett.* **23**, p. 838–841.

- KYRALA, G. A., KLINE, J. L., DIXIT, S. & AL. (2011). *Symmetry tuning for ignition capsules via the symcap technique*. *Physics of Plasmas* **18**, no. 5, p. 056307.
- LAX, M., LOUISELL, W. H. & MCKNIGHT, W. B. (1975). *From Maxwell to paraxial wave optics*. *Phys. Rev. A* **11**, p. 1365–1370.
- L.D.LANDAU (1946). *On oscillations of electron plasma*. *Acad. Sci. USSR. J. Phys.* **93**, no. 10, p. 25–34.
- LE QUÉAU, D. R. (1987). *Quasi-monochromatic wave-particle interactions in magnetospheric plasmas*. *Sol Phys* **111**, no. 59–80.
- LINDBERG, R. R. (2007). *Nonlinear and Multi-Wave Effects in Fast-Scale Laser-Plasma Interactions*. Thèse de doctorat, University of California, Berkeley.
- LINDL, J. D., AMENDT, P., BERGER, R. L. & AL. (2004). *The physics basis for ignition using indirect-drive targets on the National Ignition Facility*. *Physics of Plasmas* **11**, no. 2, p. 339–491.
- MASSON-LABORDE, P. E., ROZMUS, W., PENG, Z. & AL. (2010). *Evolution of the stimulated Raman scattering instability in two-dimensional particle-in-cell simulations*. *Physics of Plasmas* **17**, no. 9, p. 092704.
- MEEZAN, N. B., ATHERTON, L. J., CALLAHAN, D. A. & AL. (2010). *National Ignition Campaign Hohlraum energetics*. *Physics of Plasmas* **17**, no. 5, p. 056304.
- MOODY, J. D., DATTE, P., KRAUTER, K. & AL. (2010). *Backscatter measurements for NIF ignition targets (invited)*. *Review of Scientific Instruments* **81**, no. 10, p. 10D921.
- MOUHOT, C. & VILLANI, C. (2011). *On Landau damping*. *Acta Mathematica* **207**, no. 1, p. 29 – 201.
- NEISHTADT, A. (1975). *Sov. Phys. Dokl.* **20**, p. 189.
- NEISHTADT, A. (1986). *Sov. J. Plasma Phys.* **12**, p. 568.
- PERMITIN, G.V., S. A. (2001). *Wave packets in smoothly inhomogeneous dispersive media*. *J. Exp. Theor. Phys.* **92**, p. 10–19.
- RAM, A. K., BERS, A. & BÉNISTI, D. (1998). *Ionospheric ion acceleration by multiple electrostatic waves*. *Journal of Geophysical Research : Space Physics* **103**, no. 5, p. 9431–9440.
- RAMPF, C. (2021). *Cosmological Vlasov–Poisson equations for dark matter*. *Rev. Mod. Plasma Phys.* **5**, no. 10.

- RIAZUELO, G. & BONNAUD, G. (2000). *Coherence properties of a smoothed laser beam in a hot plasma*. *Physics of Plasmas* **7**, no. 10, p. 3841–3844.
- RIYOPOULOS, S. & TANG, C. M. (1988). *The structure of the sideband spectrum in free electron lasers*. *The Physics of Fluids* **31**, no. 6, p. 1708–1719.
- ROSE, H. A. & RUSSELL, D. A. (2001). *A self-consistent trapping model of driven electron plasma waves and limits on stimulated Raman scatter*. *Physics of Plasmas* **8**, no. 11, p. 4784–4799.
- ROUSSEAUX, C., BATON, S. D., BÉNISTI, D. & AL. (2009). *Experimental Evidence of Predominantly Transverse Electron Plasma Waves Driven by Stimulated Raman Scattering of Picosecond Laser Pulses*. *Phys. Rev. Lett.* **102**, p. 185003.
- SHARP, W. M. & YU, S. S. (1990). *Two dimensional Vlasov treatment of free electron laser sidebands*. *Physics of Fluids B : Plasma Physics* **2**, no. 3, p. 581–605.
- SILVA, T., SCHOEFFLER, K., VIEIRA, J. & AL. (2020). *Anisotropic heating and magnetic field generation due to Raman scattering in laser-plasma interactions*. *Phys. Rev. Research* **2**, p. 023080.
- STARKE, T. P. & MALMBERG, J. H. (1978). *Experiment on sideband dispersion*. *The Physics of Fluids* **21**, no. 12, p. 2242–2252.
- TACU, M. & BÉNISTI, D. (2022). *Nonlinear adiabatic electron plasma waves. I. General theory and nonlinear frequency shift*. *Physics of Plasmas* **29**, no. 5, p. 052108.
- TOUATI, M. J. (2021). *ESVM : an open-source finite volume Electrostatic Vlasov-Maxwell code*. *Journal of Open Source Software* **6**, no. 67, p. 3618.
- TSUNODA, S. I. & MALMBERG, J. H. (1989). *Trapped particle sideband studies*. *Physics of Fluids B : Plasma Physics* **1**, no. 10, p. 1958–1963.
- VAN HOVEN, G. & JAHNS, G. (1975). *Behavior of the sideband instability*. *The Physics of Fluids* **18**, no. 1, p. 80–88.
- VASIL'EV, A. & GUZEV, M. (1986). *Theor. Math. Phys.* **68**, p. 907.
- V.I.ARNOLD (1986). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag.
- VAN WAKEREN, J. H. A. & HOPMAN, H. J. (1972). *Trapping of Electrons in Large-Amplitude Electrostatic Fields Resulting from Beam-Plasma Interaction*. *Phys. Rev. Lett.* **28**, p. 295–298.
- WEIBEL, E. S. (1959). *Spontaneously Growing Transverse Waves in a Plasma Due to an Anisotropic Velocity Distribution*. *Phys. Rev. Lett.* **2**, p. 83–84.

- WHARTON, C. B., MALMBERG, J. H. & O'NEIL, T. M. (1968). *Nonlinear Effects of Large Amplitude Plasma Waves*. *The Physics of Fluids* **11**, no. 8, p. 1761–1763.
- W.H.PRESS, S.A.TEUKOLSKY, VETTERLING, W. & AL. (1996). *Numerical Recipes in Fortran 90, The Art of Parallel Scientific Computing 2nd Edition*. Cambridge University Press.
- YIN, L., ALBRIGHT, B. J., BOWERS, K. J. & AL. (2007). *Saturation of Backward Stimulated Scattering of a Laser Beam in the Kinetic Regime*. *Phys. Rev. Lett.* **99**, p. 265004.
- YIN, L., ALBRIGHT, B. J., BOWERS, K. J. & AL. (2008). *Saturation of backward stimulated scattering of laser in kinetic regime : Wavefront bowing, trapped particle modulational instability, and trapped particle self-focusing of plasma waves*. *Physics of Plasmas* **15**, no. 1, p. 013109.
- YIN, L., ALBRIGHT, B. J., ROSE, H. A. & AL. (2009). *Onset and saturation of backward stimulated Raman scattering of laser in trapping regime in three spatial dimensions*. *Physics of Plasmas* **16**, no. 11, p. 113101.
- YIN, L., ALBRIGHT, B. J., ROSE, H. A. & AL. (2012). *Self-Organized Bursts of Coherent Stimulated Raman Scattering and Hot Electron Transport in Speckled Laser Plasma Media*. *Phys. Rev. Lett.* **108**, p. 245004.
- YIN, L., ALBRIGHT, B. J., ROSE, H. A. & AL. (2013). *Self-organized coherent bursts of stimulated Raman scattering and speckle interaction in multi-speckled laser beams*. *Physics of Plasmas* **20**, no. 1, p. 012702.
- ZASLAVSKY, G. (2002). *Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport*. *Physics Reports* **371**, no. 6, p. 461–580.
- ZELDOVICH, Y. B. (1970). *Gravitational instability : an approximate theory for large density perturbations*. *Astron. Astrophys.* **500**, no. 13-18.