



**HAL**  
open science

**Contribution à l'étude des couplages  
électro-magnéto-mécaniques pour l'acoustique des  
machines électriques d'un système de ventilation  
aéronautique**

Nicolas Abdelnour

► **To cite this version:**

Nicolas Abdelnour. Contribution à l'étude des couplages électro-magnéto-mécaniques pour l'acoustique des machines électriques d'un système de ventilation aéronautique. Energie électrique. Université de Technologie de Compiègne, 2021. Français. NNT : 2021COMP2631 . tel-03973835

**HAL Id: tel-03973835**

**<https://theses.hal.science/tel-03973835>**

Submitted on 4 Feb 2023

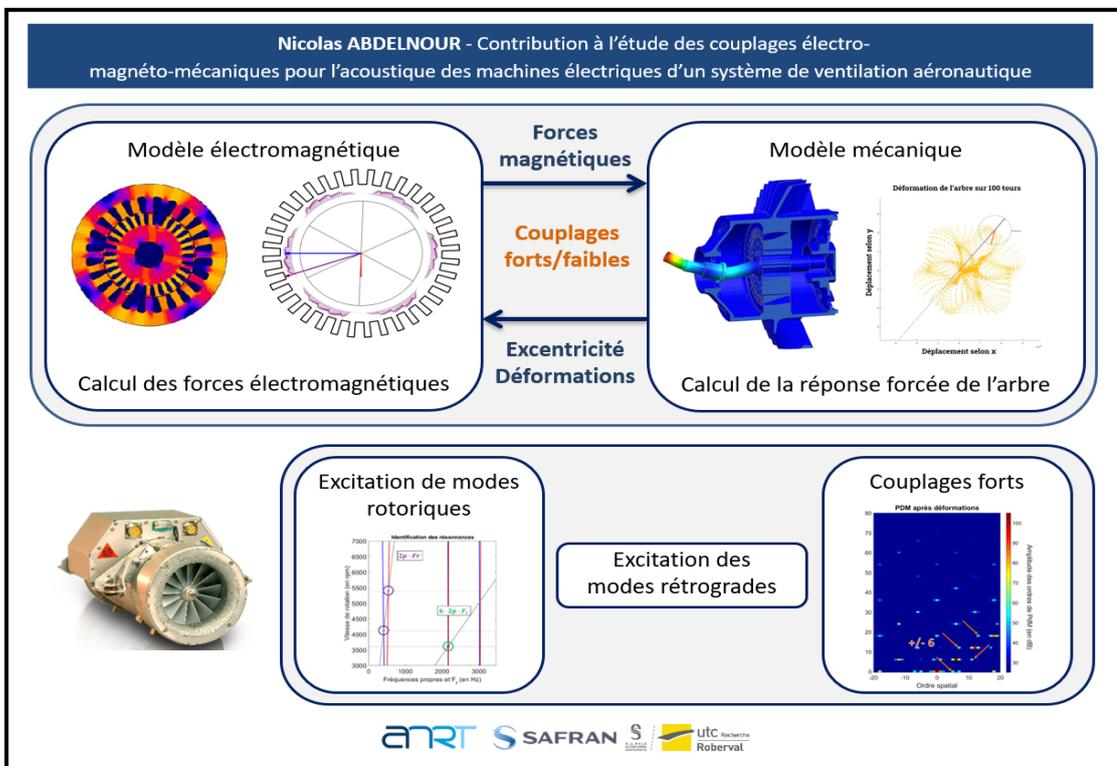
**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Par **Nicolas ABDELNOUR**

*Contribution à l'étude des couplages électro-magnéto-mécaniques pour l'acoustique des machines électriques d'un système de ventilation aéronautique*

Thèse présentée  
pour l'obtention du grade  
de Docteur de l'UTC



Soutenue le 17 septembre 2021

**Spécialité** : Génie Électrique : Unité de recherche en Mécanique - Laboratoire Roberval (FRE UTC - CNRS 2012)

D2631



Thèse de Doctorat de l'Université de  
Technologie de Compiègne préparée  
au Laboratoire Roberval

École doctorale n°71  
Sciences pour l'ingénieur

Doctorat en Génie Électrique

**Nicolas ABDELNOUR**

Contribution à l'étude des couplages électro-  
magnéto-mécaniques pour l'acoustique des machines  
électriques d'un système de ventilation aéronautique

Thèse soutenue à Compiègne, le 17 Septembre 2021

Composition du jury :

Thierry LUBIN	HDR, Université de Lorraine	Rapporteur
Georges JACQUET-RICHARDET	Professeur des Universités, INSA Lyon	Rapporteur
Delphine BRANCHERIE	Professeure des Universités, UTC	Examinatrice
Michel HECQUET	Professeur des Universités, Centrale Lille	Examineur
Vincent LANFRANCHI	Professeur des Universités, UTC	Co-directeur de thèse
Jean-Daniel CHAZOT	HDR, UTC	Co-directeur de thèse
Patrice CAULE	Responsable BE Calcul, Safran Vent. Syst.	Invité



---

# Table des matières

---

Résumé .....	6
Abstract.....	7
Chapitre I. Introduction .....	9
1. Contexte industriel.....	10
2. Architecture des ventilateurs avioniques .....	10
3. Acoustique des ventilateurs avioniques .....	11
A. Les bruits d'origine aérodynamique .....	12
B. Les bruits d'origine mécanique .....	12
C. Les bruits d'origine électromagnétique .....	13
4. Protocole d'essais vibro-acoustiques .....	16
5. Analyse spectrale des résultats expérimentaux .....	18
6. Focus sur les bruits d'origine électromagnétique .....	20
7. Objectifs de la thèse.....	21
Chapitre II. Etat de l'art.....	23
1. Etat de l'art des méthodes de détermination des forces électromagnétiques dans l'entrefer d'un moteur synchrone.....	24
A. Forces électromagnétiques dans les matériaux ferromagnétiques .....	24
B. Méthode de calcul des forces surfaciques de Maxwell .....	25
C. Modèles hybrides .....	31
2. Etat de l'art mécanique.....	32
A. Etudes de dynamique de rotor .....	32
B. Modélisation simplifiée des rotors en rotation .....	33
C. Méthodes de résolution numériques des équations différentielles .....	36
3. Conclusion de l'état de l'art .....	40
Chapitre III. Modèle électromagnétique de calcul des pressions de Maxwell d'un moteur synchrone à aimants permanents.....	41
1. Pressions de Maxwell dans l'entrefer d'un moteur synchrone.....	42
A. Expression du problème.....	42
B. Résolution des équations de Maxwell dans chaque sous-domaine .....	44
C. Détermination des constantes d'intégration en exprimant les grandeurs magnétiques aux interfaces entre les sous-domaines .....	54

---

D.	Résolution du système d'équations d'interfaces et déduction des composantes de l'induction magnétique .....	60
2.	Résultats du modèle électromagnétique comparé aux éléments finis (Flux 2D)..	60
A.	Induction magnétique .....	60
B.	Contenu harmonique des pressions de Maxwell.....	62
C.	Couple électromagnétique.....	65
3.	Terme de perturbation dû à l'excentricité.....	67
4.	Résultats du calcul avec excentricité comparé aux éléments finis (Flux 2D) .....	69
A.	Comparaison de l'induction magnétique et du terme de perturbation .....	69
B.	Comparaison du contenu harmonique des pressions de Maxwell.....	73
C.	Effet de l'excentricité sur le couple électromagnétique.....	73
5.	Conclusion sur le modèle électromagnétique .....	74
Chapitre IV.	Modèle mécanique de calcul des déformations d'un arbre en rotation....	75
1.	Paramétrage et mise en équations.....	76
A.	Paramétrage .....	76
B.	Formulation variationnelle de l'élastodynamique.....	77
2.	Résolution spatiale par la méthode des éléments finis.....	80
3.	Base modale et réponse totale du système .....	82
A.	Calcul de la base modale .....	82
B.	Réponse forcée et libre d'un arbre en rotation .....	84
4.	Introduction d'amortissement dans le modèle .....	86
A.	Amortissement proportionnel de Rayleigh.....	86
B.	Amortissement modal.....	86
C.	Introduction de l'amortissement dans le schéma temporel .....	86
D.	Coefficient d'amortissement modaux $\xi$ .....	87
5.	Validation des calculs mécaniques .....	88
A.	Calcul des modes et fréquences propres .....	88
B.	Calcul de réponse temporelle de l'arbre.....	92
6.	Conclusions sur le modèle mécanique .....	98
Chapitre V.	Modèle couplé de calcul des déformations d'arbre de moteur électrique en rotation soumis aux excitations électromagnétiques.....	99
1.	Algorithme à pas décalés de couplage des modèles .....	100

2.	Calcul et application des forces de Maxwell.....	101
3.	Discrétisation spatiale et temporelle des modèles et rang harmonique maximum dans les sous-domaines.....	103
A.	Discrétisation temporelle.....	103
B.	Discrétisation spatiale.....	104
C.	Discrétisation vitesse de rotation.....	105
D.	Rang harmonique maximum du modèle électromagnétique.....	105
4.	Résultats du modèle couplé.....	106
A.	Excitation des modes de l'arbre en présence d'excentricité.....	107
B.	Création d'une excentricité dynamique à partir d'excentricité statique.....	116
C.	Excitation et contribution de multiples modes de rotor à la réponse forcée temporelle.....	120
D.	Paramètres et tolérances de fabrication influant sur le contenu harmonique de l'excitation pouvant induire des vibrations.....	123
5.	Conclusion sur le modèle couplé.....	129
	Conclusions générales et perspectives.....	131
	Annexes.....	133
	Annexe 1. Potentiel vecteur associé aux différents types de bobinage.....	133
1.	Encochage non chevauchant.....	133
2.	Encochage chevauchant.....	134
	Annexe 2. Développement de l'énergie potentielle de déformation.....	135
	Annexe 3. Développement de la forme faible de l'élastodynamique.....	137
	Annexe 4. Matrice d'interpolation linéaire.....	138
	Annexe 5. Identification des facteurs $\alpha$ et $\beta$ de l'amortissement de Rayleigh.....	139
	Références.....	141

---

# Résumé

---

Le bruit ambiant entendu par les passagers d'un avion civil peut atteindre quatre-vingts décibels et être très dérangeant pour certains. Celui-ci provient en partie des systèmes de ventilation dont l'acoustique est devenue, ces dernières années, un critère important du cahier des charges pris en compte dès la conception.

Il apparait depuis quelques années de plus en plus de phénomènes de bruits d'origines électromagnétiques. Certains cas pratiques laissent à croire qu'ils pourraient être dues à l'installation de la ligne d'arbre dont le comportement dynamique générerait des excentricités. L'objectif des travaux présentés dans ce manuscrit est de proposer une modélisation analytique pour simuler la dynamique du rotor d'un moteur synchrone lorsque celui-ci est exposé aux forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer. Cette modélisation multiphysique permettant de simuler ces phénomènes se fait par le couplage de deux modèles :

1) Un modèle électromagnétique de calcul des forces électromagnétiques dans l'entrefer qui s'appliquent au rotor. L'induction magnétique dans l'entrefer est obtenue par la méthode des sous-domaines afin d'en déduire les pressions de Maxwell.

2) Un modèle mécanique du comportement dynamique de la ligne d'arbre exposée à ces forces. Le rotor est modélisé comme une poutre 1D de Timoshenko dont l'équation du mouvement d'un système gyroscopique dissipatif soumis à une résultante des pressions de Maxwell est résolue. Cette équation est résolue en temporel par un schéma aux différences finies de Crank-Nicholson.

Le calcul complet se fait par le couplage fort multi-physique des deux modèles des calculs électromagnétiques et mécaniques qui s'alternent puisqu'ils modifient chacun à tour de rôles les données d'entrée de l'autre.

Les résultats du modèle couplé ont permis la compréhension du mécanisme de création de phénomènes vibro-acoustiques observés expérimentalement sur les équipements. La finalité industrielle est de mieux maîtriser les tolérances et les paramètres qui conditionnent la naissance de ces vibrations et bruits indésirables (et donc de les éliminer) pour tendre vers des produits plus silencieux.

---

# Abstract

---

The noise heard by passengers on airplanes can reach eighty decibels and become a real burden. This noise mainly comes from the ventilation system. The acoustic of such systems has become, during the past years, an important requirement of the specifications, and is taken into consideration in the design phase.

Lately, many vibroacoustic phenomena seem to have an electromagnetic cause. Recent experiments have highlighted in the importance of the coupling between the shaft vibrations and the electromagnetic forces induced in the motor. It seems that those phenomena are due to the shaft implementation which dynamic behavior generates eccentricities. The aim of this work is to make an analytical model to simulate the dynamic of a synchronous motor rotor when it is exposed to the electromagnetic forces induced in the airgap. This multi-physic computation is made by coupling two models:

- 1) An electromagnetic model that computes the electromagnetic forces induced in the airgap that are applied to the rotor. The magnetic flux density is obtained with the subdomain method to deduct Maxwell pressure.

- 2) A mechanical model that computes the dynamic behavior of the rotor shaft when it is subjected to those electromagnetic forces. The rotor shaft is modeled as a 1D Timoshenko beam. Its motion equation is solved in temporal using the Crank Nicholson finite differential scheme.

By coupling these two models, we obtain a strong and multi-physic complete computation. The electromagnetic and mechanical computation steps alternate and the output data of one model is as an input data by the other model.

The multi-physic results allowed the comprehension of the creation mechanism of some vibro-acoustic phenomena that appear during tests on fans. The industrial aim is to have a better control of the parameters that create high vibration and noise (and eliminate them) and tend towards quieter products.

---

---

---

# Chapitre I. Introduction

---

<u>Chapitre I. Introduction</u> .....	9
<u>1. Contexte industriel</u> .....	10
<u>2. Architecture des ventilateurs avioniques</u> .....	10
<u>3. Acoustique des ventilateurs avioniques</u> .....	11
<u>A. Les bruits d'origine aérodynamique</u> .....	12
<u>B. Les bruits d'origine mécanique</u> .....	12
<u>C. Les bruits d'origine électromagnétique</u> .....	13
<u>4. Protocole d'essais vibro-acoustiques</u> .....	16
<u>5. Analyse spectrale des résultats expérimentaux</u> .....	18
<u>6. Focus sur les bruits d'origine électromagnétique</u> .....	20
<u>7. Objectifs de la thèse</u> .....	21

---

## 1. Contexte industriel

Les ventilateurs sont utilisés dans de nombreux domaines industriels, notamment en aéronautique où ils permettent la ventilation et la distribution d'air pour la pressurisation des cabines ou encore le refroidissement de certains équipements. Dans un secteur toujours plus compétitif, les exigences de confort et les différentes réglementations en matière de sécurité du passager imposent de plus en plus aux industriels de réduire le bruit de leurs installations tout en assurant la performance désirée. En effet, les ventilateurs sont de potentielles sources du bruit perçu par le passager, qui peuvent rapidement atteindre des niveaux pouvant être considérés comme une gêne.

Pour être conforme à ces attentes, la société Safran Ventilation Systems adresse, au sein du bureau d'étude mécanique, ces problématiques qui sont d'ordre aéroacoustique et/ou vibroacoustique. L'acoustique des produits est étudiée précisément depuis près de 20 ans et l'entreprise dispose de bancs normalisés ainsi que d'une chambre semi-anéchoïque permettant de tester les ventilateurs. Ceci permet de s'assurer que le niveau de bruit du ventilateur se situe sous le seuil défini par le client dans le cahier des charges. Pour aider au dimensionnement et à l'optimisation acoustique de tels équipements, des logiciels de prédiction fiables sont aujourd'hui nécessaires. C'est pourquoi Safran Ventilation Systems contribue au développement de modèles analytiques de prédiction du bruit des ventilateurs depuis maintenant plus de 10 ans.

## 2. Architecture des ventilateurs avioniques

Conformément à la définition adoptée à l'échelon international **[ISO/TC117, 1996]**, un ventilateur est une « turbomachine qui reçoit de l'énergie mécanique et l'utilise à l'aide d'une ou plusieurs roues à aubes de manière à entretenir l'écoulement continu d'un gaz ». Cet écoulement s'accompagne d'une différence de pression entre l'entrée et la sortie du ventilateur et si cette différence de pression est inférieure à 30kPa on l'appelle ventilateur sinon on l'appelle turbocompresseur.

Les ventilateurs aéronautiques sont des éléments avioniques intelligents autocontrôlés. Un ventilateur est principalement constitué des éléments suivants, visible à la figure I.1 :

- Une machine électrique (synchrone à aimants permanents ou asynchrone à rotor à cage à écureuil) alimentée par un réseau 400Hz de tension triphasé (115 / 200 V) ou encore par un bus d'alimentation de 28V DC suivant le type de ventilateur ;
- Une roue mise en rotation par le moteur qui met en mouvement le flux d'air ;
- Un redresseur placé derrière la roue qui permet de guider le flux et d'améliorer le rendement ;
- Un arbre relié au moteur électrique permettant de mettre en rotation la roue du ventilateur ;
- Deux jeux de roulement à billes qui guident la rotation de l'arbre et de la roue ;

- Un ressort de pré-charge permettant d'empêcher la bague extérieure du roulement de se déplacer axialement ;
- Une ogive permettant un traitement acoustique en aval du moteur ;
- Différents étages de puissance électrique ;
- Une carte de contrôle permettant la régulation de la vitesse de rotation du moteur.

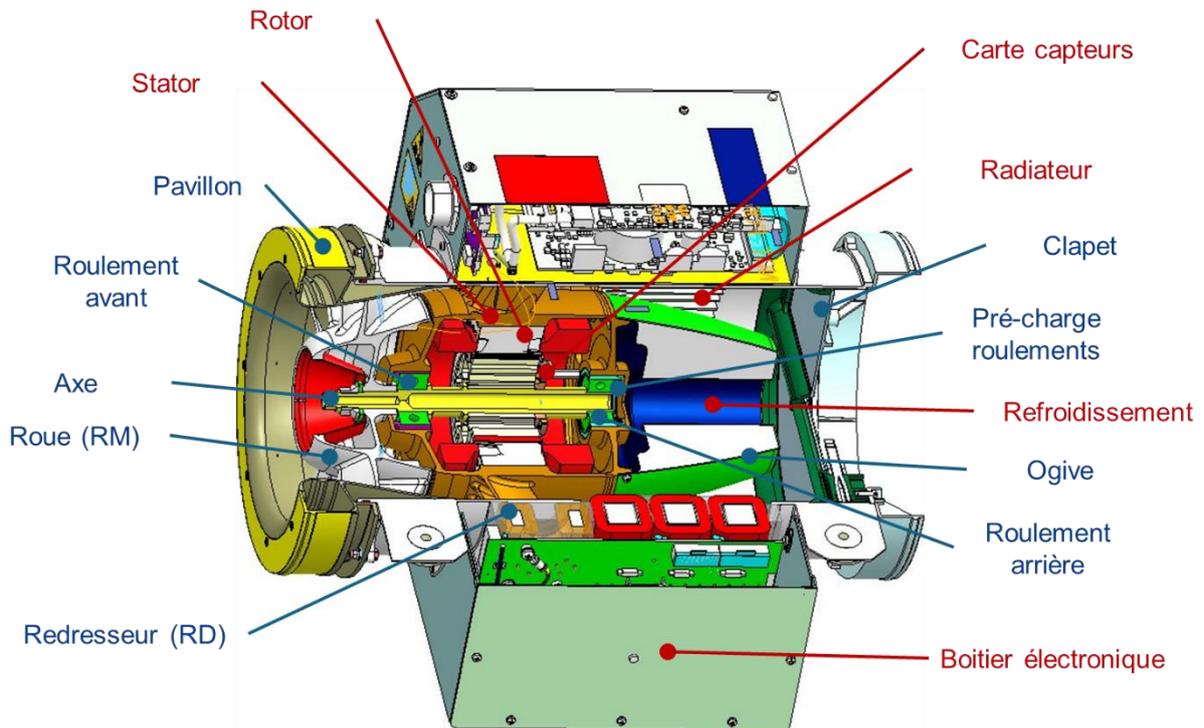


Figure I.1 - Les composants d'un ventilateur aéronautique

### 3. Acoustique des ventilateurs avioniques

Il est possible de classer les excitations acoustiques et vibratoires en trois catégories [Guedel, 1995] relatives aux 3 parties de ventilateurs de la figure I.2 :

- **Les bruits aérodynamiques** associés à l'interaction de l'écoulement avec les pales et les parties fixes du ventilateur.
- **Les bruits électromagnétiques** qui désignent ceux provenant du moteur électrique qui entraîne le ventilateur.
- **Les bruits mécaniques** issus des roulements, des paliers ou de l'accouplement entre le moteur et la roue.

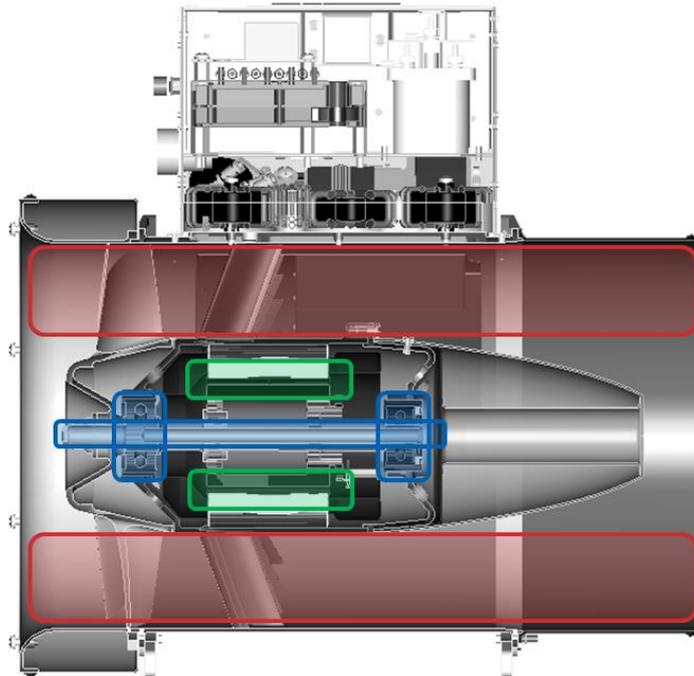


Figure 1.2 – Vue en coupe d'un ventilateur avionique avec les lieux d'apparition des différentes excitations vibrations-acoustiques

#### A. Les bruits d'origine aérodynamique

Les bruits d'origine aérodynamique désignent ceux associés à l'interaction de l'écoulement avec les pales et les parties fixes du ventilateur. Ils sont prédominants par rapport aux deux autres dans la majorité des cas pour des puissances aérauliques de l'ordre de celles des ventilateurs Safran Ventilation Systems. De nombreuses études ont déjà été réalisées sur ce type de bruit. Ils sont aujourd'hui très bien maîtrisés et un outil de prédiction nommé OPTIBRUI a été développé en interne par la société pour en prédire le niveau en phase de conception.

#### B. Les bruits d'origine mécanique

Les bruits d'origine mécanique ont plusieurs causes, les principales étant :

- Les **vibrations induites par un balourd [Pugnet, 1997]** (mauvais équilibrage de la roue, défaut d'alignement, ...), qui se produisent à des harmoniques de la fréquence de rotation. Ces vibrations se transmettent par voie solidienne au support et à l'enveloppe du ventilateur, qui peuvent rayonner du bruit.
- **Les bruits induits par un défaut au niveau des roulements. [Kass, 2019]** Ces bruits apparaissent à des fréquences particulières qui dépendent des données géométriques du roulement et sont liées à la vitesse de rotation. Chaque défaut possède sa propre signature associée à une fréquence particulière.
- Les **bruits induits par la vibration de la ligne d'arbre [Ikeda, 1999 ; Bill Forsthoffer, 2005 ; Swanson, 2005]** qui apparaissent notamment aux vitesses critiques. Celles-ci correspondent aux vitesses où la fréquence de rotation concorde avec celle d'un mode de ligne d'arbre.

### C. Les bruits d'origine électromagnétique

Les bruits d'origine électromagnétique désignent ceux du moteur électrique servant à entraîner la roue du ventilateur. Les bruits dus aux phénomènes électromagnétiques peuvent également dominer ou non suivant :

- La conception du moteur (nombre d'encoches, morphologie des dents, nombre de pôles, etc.),
- L'utilisation du moteur (son état de charge et sa vitesse),
- L'alimentation (déséquilibre de phase au stator),
- La commande du moteur (découpage du signal pour maîtriser la vitesse de rotation).

Les fréquences du bruit électromagnétiques sont aussi liées à la typologie et la constitution du moteur utilisé. Les différents moteurs utilisés sont cités ci-après en faisant le lien avec le mécanisme générateur de bruit électromagnétique.

#### i. Généralités sur les moteurs

Le stator et le rotor constituent les parties actives du moteur. Le stator est composé d'une partie magnétique, l'assemblage de tôles magnétiques, sur laquelle sont placées trois bobines de fil de cuivre, géométriquement décalées de  $120^\circ$ . Ces bobines sont parcourues par des courants alternatifs déphasés de  $120^\circ$  qui génèrent un champ magnétique tournant. Ce champ va interagir avec le rotor pour créer un couple moteur et ainsi mettre en rotation la machine.

Le stator, dont un exemple est observable à la figure I.3 se compose :

- d'un empilement de tôles dont la fonction est de conduire le flux magnétique ;
- d'un bobinage dont la fonction est de transformer un courant électrique alternatif en un champ magnétique tournant ;
- de divers isolants assurant l'isolation électrique entre les conducteurs et l'empilement ;
- d'une protection contre la corrosion et d'une éventuelle protection thermique.



Figure I.3 - Stator de moteur électrique – empilement de tôles et stator bobiné

Celui-ci est le même pour les deux types de moteurs énoncés ci-après.

---

### a) Moteurs synchrones

Avec l'évolution de l'électronique de puissance, le moteur synchrone est de plus en plus employé dans les projets récents de Safran Ventilation Systems. Ce type de moteur est intéressant car il présente les meilleurs rendements parmi les moteurs électriques mais est plus coûteux car les rotors comportent des aimants comportant des matériaux terre rare.

Comme la figure I.4c le présente, le rotor se compose d'un moyeu constitué :

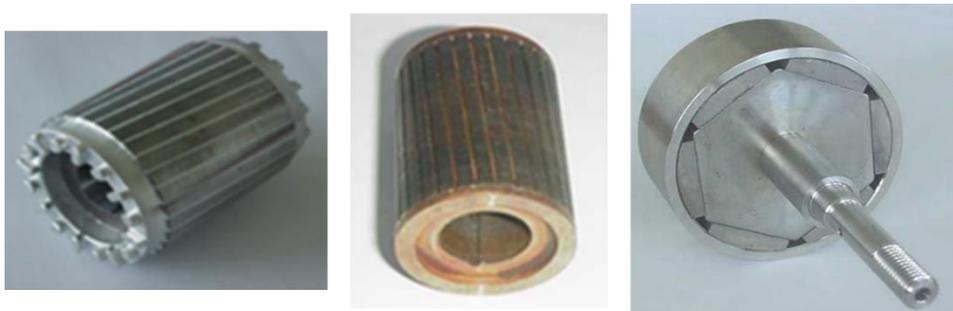
- d'une pièce massive ferromagnétique, nommée moyeu, dont la fonction est de conduire le flux des aimants des pôles nord vers les pôles sud et vice versa.
- d'aimants permanents collés sur le moyeu, de polarité alternativement inversée afin de créer un champ magnétique alternatif sur la circonférence du rotor.
- et d'une frette (en matériau amagnétique) dont la fonction est d'assurer une bonne tenue des aimants.

### b) Moteurs asynchrones

Le moteur asynchrone est une technologie de moteur très utilisée de nos jours. Ce type de moteurs demande peu d'entretien, est robuste et a un faible coût de fabrication puisque les rotors sont en matériau moins nobles et plus abordables. Toutefois, il présente un rendement moins bon, et génère plus de pertes thermiques, ce qui peut être contraignant dans la démarche de conception aéronautique qui souhaite faire des appareils plus compacts, plus légers et plus performants.

Le rotor est un ensemble de spires en court-circuit. Il est constitué d'un empilement de tôles, d'une cage d'écureuil dont la fonction est de générer un champ magnétique à partir d'un courant induit par le champ magnétique du stator. Cette cage d'écureuil peut être réalisée dans différents matériaux électriquement conducteurs (cuivre, aluminium) comme le montre la figure I.4.

Cette différence de constitution aura un impact sur le fonctionnement et le pilotage de ces moteurs. En effet, dans le cas du moteur synchrone, le rotor suit exactement le champ tournant généré par le stator alors que le rotor asynchrone présente une vitesse légèrement inférieure. Cette différence de vitesse, nommée le glissement  $g$ , est définie par  $g = \frac{\Omega_s - \Omega_r}{\Omega_s}$  où  $\Omega_s$  est la vitesse de rotation des champs magnétiques statoriques et  $\Omega_r$  la vitesse de rotation du rotor.



*Figure I.4 - Rotor de machine asynchrone coulé en aluminium (gauche), brasé en cuivre (milieu) et de machine synchrone à aimants permanents périphériques (droite)*

Ceci fait varier la signature des moteurs qui présentent des harmoniques différentes suivant son type, notamment les fréquences caractéristiques qui sont liées au glissement.

### c) Assemblage des sous-ensembles moteurs

L'assemblage des moteurs est fait sur le site de l'entreprise (voir la vue en coupe figure I.1). Un emmanchement chaud-froid est effectué entre le stator et le corps redresseur. Le corps redresseur permet, tout en protégeant le moteur, de redresser le flux d'air à la sortie de la roue, de telle sorte que l'écoulement se fasse dans l'axe du corps. Le flasque arrière est ensuite fixé pour fermer le corps redresseur, puis la roue de ventilation. En fonction du moteur utilisé, une électronique de commande peut être ajoutée.

### ii. Sources de bruit dans les moteurs électriques

Pour des machines à faible vitesse de rotation le bruit magnétique est presque toujours dominant, mais il peut aussi l'être sur des machines rapides.

On distingue les sources magnétiques en coupant l'alimentation et en laissant le moteur en roue libre ce qui conduit à les annuler presque immédiatement tandis que les bruits aérodynamiques et mécaniques décroissent lentement avec la vitesse.

Il est possible de distinguer deux catégories de bruits magnétiques associé aux matériaux ferromagnétiques :

- Les effets de magnétostriction. La magnétostriction désigne la propriété que possèdent les tôles à se déformer en fonction de la direction du champ magnétique. Elle induit des harmoniques dans le spectre de bruit à la fréquence double du réseau  $2nf_o$  (où  $n = 1, 2, 3, \dots$  et  $f_o = 50 \text{ Hz}$  pour un réseau EDF ou  $f_o = 400 \text{ Hz}$  pour un réseau avion).
- Les bruits d'origine électromagnétique liés aux forces (ou pressions) de Maxwell qui sont fonction de l'induction à l'entrefer rotor-stator et qui vont solliciter en vibration la structure externe du moteur. Le spectre du bruit associé comporte des raies à des fréquences multiples de la fréquence de rotation  $F_r$ , en particulier à la fréquence  $Z_s F_r$  (où  $Z_s$  est le nombre d'encoches du stator).

Ceux-ci sont simplement énoncés ici. Mais leur analyse est faite plus en détail dans le chapitre état de l'art puisque les bruits d'origines électromagnétiques sont le cœur de l'étude.

---

#### 4. Protocole d'essais vibro-acoustiques

Chaque ventilateur a une signature vibro-acoustique propre qu'il est possible d'analyser en réalisant des essais vibro-acoustiques. Ces essais sont réalisés sur tous les ventilateurs fabriqués en interne chez Safran Ventilation Systems à différentes étapes du projet ou lors de retours clients. En analysant la signature vibro-acoustique, il est possible, par analyse spectrale, d'identifier les différentes sources de bruit. Les graphiques expérimentaux présentés dans le manuscrit sont les résultats de ces études vibratoires ou acoustiques.

Les graphiques vibratoires sont obtenus en plaçant des accéléromètres sur le carter du ventilateur. Les données acoustiques sont obtenues par mesure microphonique en point fixe lors des essais de développement.

Des essais sont réalisés en salle semi-anéchoïque (figure I.5a) en phase de développement et de qualification des produits. Cette salle est recouverte de dièdres réalisés dans un matériau poreux permettent d'absorber les ondes sonores et de diminuer les réverbérations du bruit. Les enregistrements audio en condition proche du champ libre peuvent ainsi être faits :

- à l'aspiration du ventilateur (entrée du flux d'air)
- au refoulement (sortie du flux d'air)



*Figure I.5 – Salle anéchoïque de tests vibro-acoustiques et ventilateur placé sur le banc d'essai pour mesure du bruit à son aspiration*

Pour ces deux types de tests, le ventilateur est placé dans la salle anéchoïque sur un banc d'essai de pilotage. Le son est enregistré par des microphones placés dans toute les directions sur l'armature bleue des figures I.5b. Ces tests permettent de n'enregistrer que le sont à l'entrée (à l'aspiration) et à la sortie (au refoulée) du ventilateur. D'autres tests peuvent aussi être réalisés au rayonné, c'est-à-dire selon une direction orthogonale au sens du flux d'air. Dans ce cas, un seul microphone placé dans la bonne direction est utilisé.

Les essais suivants, appelés « test de vibration émise », peuvent être réalisés sur les ventilateurs isolés d'autres parties du conduit influant sur le comportement vibratoire. Des accéléromètres (identifiés en bleu sur la figure I.6) positionnés en axial et en radial (perpendiculaire au flux d'air) sur le carter extérieur sont alors utilisés pour des acquisitions vibratoires. Ce type de test permet d'identifier les vibrations de l'équipement seul. Il permet le contrôle de l'équilibrage et des niveaux vibratoires émis par la machine en basses fréquences (<2kHz). Accessoirement, un microphone peut être ajouté en champ proche (à une distance de 50 cm au rayonné) dans la salle de type réverbérante.



*Figure I.6 - Mesure de test de vibration émises sur banc d'essai en salle d'essai réverbérant avec mesure acoustique au rayonné*

Enfin, un troisième type de test est réalisé, en sortie de production, grâce à un microphone à une distance de 20cm, au rayonné, pour vérifier la bonne intégrité de l'équipement complet. Ce type d'acquisition acoustique permet de monitorer la production pour garantir un bon standard de qualité de fabrication.

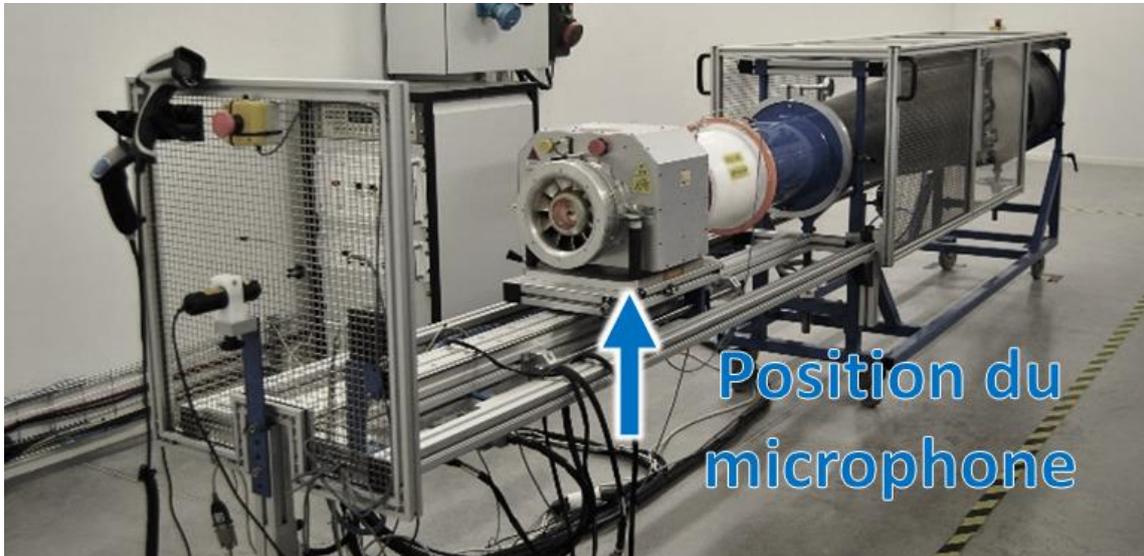


Figure I.7 - Ventilateur sur banc de test de sortie de production avec mesure acoustique au rayonné

Les protocoles de tests peuvent être des rampes de vitesse où le ventilateur réalise une montée en régime moteur ou de simples études temporelles de vibrations en régime stabilisé. Ces essais permettent de récupérer des signaux temporels de vibration ou de niveau sonore dont l'étude, faite en analyse spectrale, est expliquée ci-après.

## 5. Analyse spectrale des résultats expérimentaux

L'analyse se fait par l'application d'une transformée de Fourier sur le signal temporel des vibrations ou de l'enregistrement audio afin d'obtenir la signature du ventilateur comme celle de la figure I.8. Tous ces enregistrements vont révéler, une fois traités, une signature

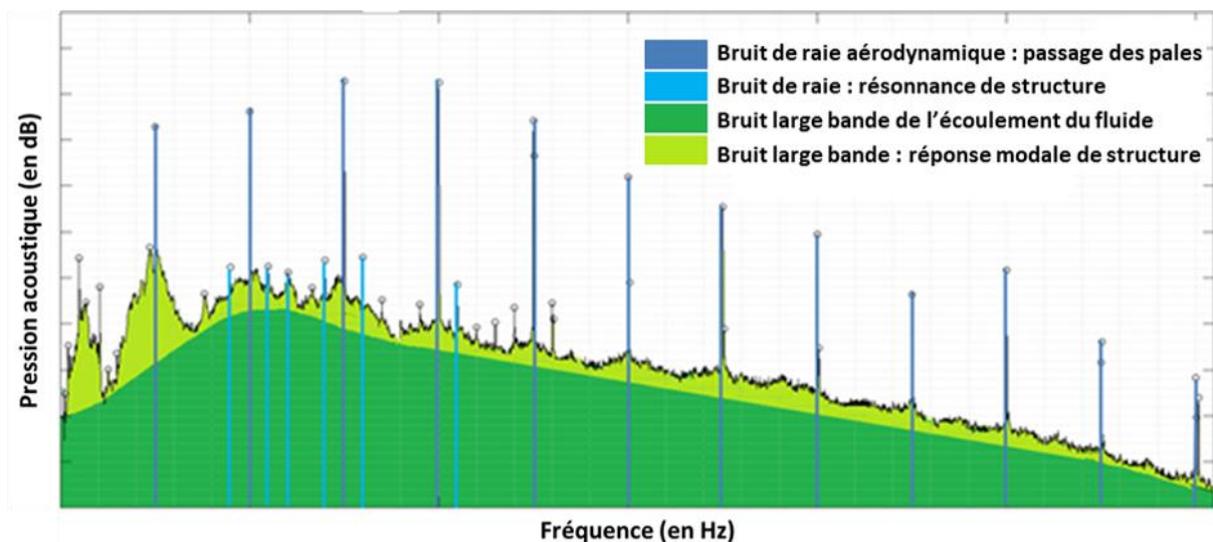


Figure I.8 – Analyse des émergences vibro-acoustique visibles sur les spectres d'essais

---

propre à la série de ventilateurs sur lesquels vont apparaître des phénomènes qui après analyse pourront être considérés normaux ou liés à un défaut du moteur.

Du spectre de la figure I.8 qui donne l'amplitude et la fréquence des vibrations ou du bruit obtenus pendant l'essai, il est possible d'identifier les différents types de rayonnement exposés dans la partie précédente :

- Les bruits liés à une charge stationnaire, principalement la rotation du ventilateur. Ces bruits sont visibles sur le spectre sous forme de raies à des fréquences qui sont multiples de la vitesse de rotation (bleu foncé).
- Le bruit de large bande qui correspond à une charge instationnaire (vert foncé). Il est principalement dû aux turbulences provoquées par l'écoulement de l'air.

Ces deux types de rayonnement sont aérauliques et proviennent directement de l'écoulement du fluide dans le ventilateur

Les autres causes sont d'ordre électromécanique et sont différentes puisqu'elles correspondent à des réponses vibratoires de la structure. Ces phénomènes proviennent directement de la mise en vibration d'une partie de la structure par le biais du moteur et non du fluide qui le traverse. Ils dépendent directement de l'architecture du moteur ou de l'assemblage du ventilateur.

Pour chaque morphologie de ventilateur, il est possible d'observer, à certaines fréquences, des raies résultant de la résonance d'une partie de la structure. Ceci correspond à des phénomènes déterministes apparaissant à une fréquence particulière. Ils peuvent provenir du moteur (bruit électromagnétique), des roulements (bruit mécanique) mais aussi d'une résonance purement mécanique de la structure due à l'assemblage des pièces entre elles. Il existe de nombreuses fréquences caractéristiques qui sont, pour la plupart, connues et chacun de ces harmoniques est présent sur le spectre mais à des amplitudes plus ou moins visibles.

Ainsi, s'il y a résonance, ces vibrations peuvent apparaître sous la forme d'un pic comme ceux référencés en bleu clair ou simplement se fondre dans le bruit de large bande et s'ajouter pour former l'enveloppe en vert clair.

La présence de ces pics à des niveaux élevés étant déterministe, il est possible de les analyser et d'en déterminer la source. Pour cela, il suffira d'en détecter la fréquence et d'essayer de l'associer à celle d'un mécanisme de création de bruit connu. C'est notamment ce qui est recherché dans un code nommé « DiagNoise » développé par Safran Ventilation Systems qui permet l'identification de ces phénomènes de réponse tonale. Par exemple, à la figure I.9, certaines des émergences acoustiques apparaissant sur le spectre vibratoire issu d'un essai ont pu être identifiées. Leur fréquence correspondait à celle d'un mécanisme générateur

de bruit de la base de données fréquentielles. Ici, les émergences proviennent d'une excentricité dynamique (identifiée en orange sur le spectre et issue du flasque arrière et/ou du redresseur) et de défauts sur les roulements (identifiés en vert).

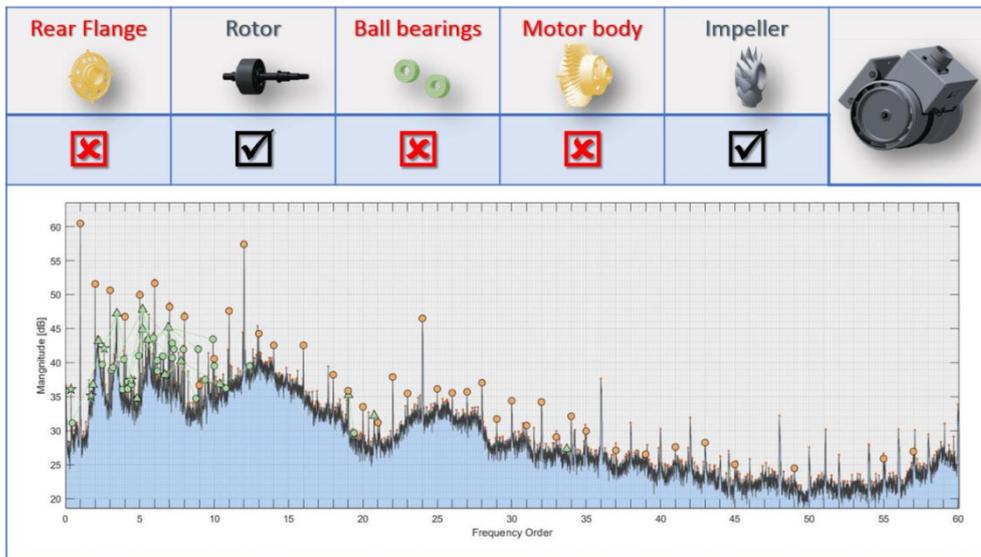


Figure I.9 - Identification de la source de résonances sur un ventilateur par le logiciel DiagNoise

Une grande partie de ces émergences tonales (repérées en orange) étant liées aux mécanismes de bruit d'origine électromagnétique, il est devenu nécessaire d'avoir un bon contrôle des paramètres de conception et d'assemblage du moteur (et éventuellement de son pilotage) afin de s'assurer un niveau sonore minimal du ventilateur.

## 6. Focus sur les bruits d'origine électromagnétique

Les travaux de thèse se concentrent principalement sur les bruits d'origine électromagnétiques, et plus particulièrement sur les vibrations induites par les déformations du rotor. Depuis quelques années et l'introduction de ventilateur à moteur synchrone à vitesse variable (pilotage MLI de l'électronique de puissance), de nouveaux phénomènes

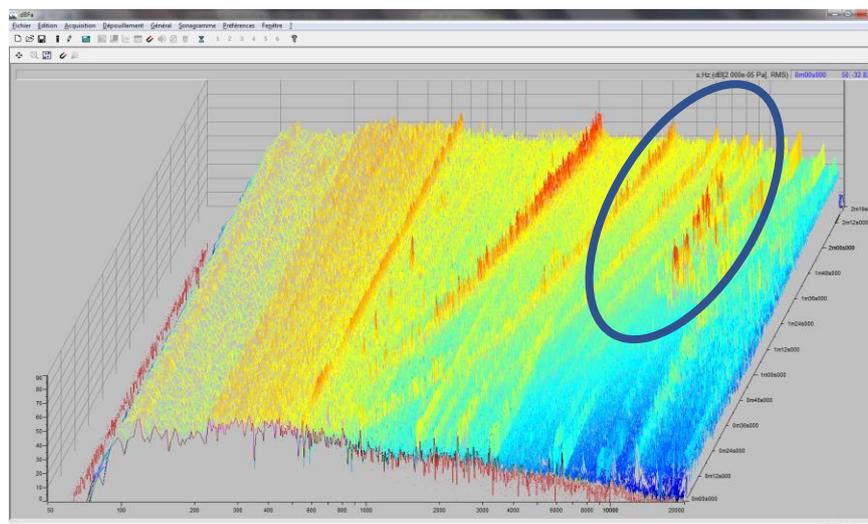


Figure I.10 - Spectrogramme acoustique d'un ventilateur synchrone à vitesse variable. Montée en vitesse avec apparition d'émergences hautes fréquences à certains régimes

erratiques avec un rayonnement acoustique très important (émergence de plus de 20dB) sont apparus (entourés en bleu sur la figure I.10). Avec l'état des connaissances actuelles, ces phénomènes ne peuvent être facilement quantifiés et prévus, ce qui est très néfaste pour un objectif de conception multi-physique parfaitement maîtrisée.

Les pistes d'explication de ces émergences tendent vers des couplages forts entre les excitations électromagnétiques des parties actives du moteur et la dynamique d'arbre avec variation d'entrefer. C'est dans cette démarche d'amélioration continue et suite à l'apparition de phénomènes vibro-acoustiques erratiques mis en exergue lors des études expérimentales faites sur les produits de la société que le besoin de réaliser des travaux de recherche s'est fait ressentir afin d'en améliorer la compréhension.

## 7. Objectifs de la thèse

L'objectif de la thèse est de modéliser le fonctionnement des moteurs électriques Safran Ventilation Systems afin d'identifier les phénomènes vibro-acoustiques observés expérimentalement. Ainsi, l'identification de ces phénomènes est faite par la modélisation de la ligne d'arbre couplée fortement à un calcul des forces d'excitations d'origines électromagnétiques.

Celle-ci doit être analytique afin d'être suffisamment rapide pour réaliser un calcul permettant de simuler la totalité du mécanisme de création de ces résonances. Ces phénomènes nécessitant d'être simulés en faisant un chainage des outils de prédiction électromagnétique et mécanique (avec notamment un remaillage à l'entrefer pour chaque position rotorique), ils sont difficilement modélisables par calcul numérique de type éléments finis. Les fréquences en jeu (au-delà de 5 kHz) et la nécessité de pouvoir visualiser le mécanisme rendent l'exercice très couteux en moyen et en temps de calcul.

La méthodologie de travail s'appuie sur des développements théoriques et expérimentaux. L'objet principal de la partie théorique est de proposer une modélisation analytique pour simuler ces phénomènes avec 3 volets principaux :

- modélisation des forces électromagnétiques (avec prise en compte de l'alimentation et de la commande moteur) ;
- modélisation du comportement dynamique de la ligne d'arbre ;
- interactions des deux modèles.

La finalité industrielle est de mieux maîtriser les tolérances et les paramètres qui conditionnent la naissance de phénomènes vibro-acoustiques néfastes (et donc de les éliminer). Les résultats de la thèse permettent également de mieux quantifier les interactions entre alimentation, commande, et comportement moteur pour tendre vers des produits plus silencieux.

---

Le manuscrit de thèse suit cette logique et présente d'abord les différents modèles séparément avant de donner les résultats du modèle couplé qui aide à l'analyse des phénomènes vibro-acoustiques observés expérimentalement qui ont pu être identifiés.

Le Chapitre II fait un état de l'art des études de ces phénomènes multi-physiques. Les différents modèles électromagnétiques de calcul de l'induction magnétique dans les moteurs synchrones y sont décrits et le plus approprié à l'étude y est choisi. S'en suit une étude comparative des modèles mécaniques de dynamique des rotors.

Le Chapitre III présente le modèle électromagnétique qui calcule l'induction magnétique dans l'entrefer d'un moteur dont le rotor est excentré par la méthode des sous-domaines afin d'en déduire les Pressions de Maxwell qui sont appliquées sur le rotor et le stator.

Le Chapitre IV présente le modèle mécanique qui calcule la réponse temporelle d'un modèle d'arbre en rotation soumis aux pressions de Maxwell. Le rotor est modélisé par une poutre 1D de Timoshenko et la résolution temporelle est faite par la règle généralisée des trapèzes.

Le Chapitre V présente le modèle multiphysique couplé et les résultats. L'analyse est faite en comparant avec des résultats expérimentaux vibro-acoustiques réalisés sur les banc d'essai Safran. Une critique et des perspectives d'amélioration du modèle y sont également développées.

Enfin, un dernier chapitre résume les principales conclusions de cette étude et donne les perspectives d'améliorations du modèle.

---

# Chapitre II. Etat de l'art

---

<u>Chapitre II. Etat de l'art</u> .....	23
<u>1. Etat de l'art des méthodes de détermination des forces électromagnétiques dans l'entrefer d'un moteur synchrone</u> .....	24
<u>A. Forces électromagnétiques dans les matériaux ferromagnétiques</u> .....	24
<u>B. Méthode de calcul des forces surfaciques de Maxwell</u> .....	25
<u>C. Modèles hybrides</u> .....	31
<u>2. Etat de l'art mécanique</u> .....	32
<u>A. Etudes de dynamique de rotor</u> .....	32
<u>B. Modélisation simplifiée des rotors en rotation</u> .....	33
<u>C. Méthodes de résolution numériques des équations différentielles</u> .....	36
<u>3. Conclusion de l'état de l'art</u> .....	40

L'objet de l'étude est de réaliser un modèle couplé multiphysique permettant d'analyser l'effet des forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer d'un moteur électrique sur la dynamique de son rotor. L'étude doit être positionnée dans le contexte scientifique afin de déterminer la technique de modélisation la plus adaptée à ce couplage. Ainsi, il est nécessaire de réaliser un état de l'art des techniques de calcul électromagnétique des forces de Maxwell et de calcul mécanique de la dynamique d'un arbre en rotation exposé à une force harmonique. Cet état de l'art est fait dans ce chapitre en commençant par le volet électromagnétique puis mécanique. Ceci permet de conclure sur le choix de méthodologie de calcul pour le modèle couplé de thèse.

## 1. Etat de l'art des méthodes de détermination des forces électromagnétiques dans l'entrefer d'un moteur synchrone

### A. Forces électromagnétiques dans les matériaux ferromagnétiques

Prédire les forces électromagnétiques en jeu dans les parties ferromagnétiques d'un moteur a été le sujet de nombreuses études [Belmans, 1991 ; Delaere, 2000a ; Delaere, 2000b ; Hilgert, 2007] on peut en discerner deux types (figure II.1).

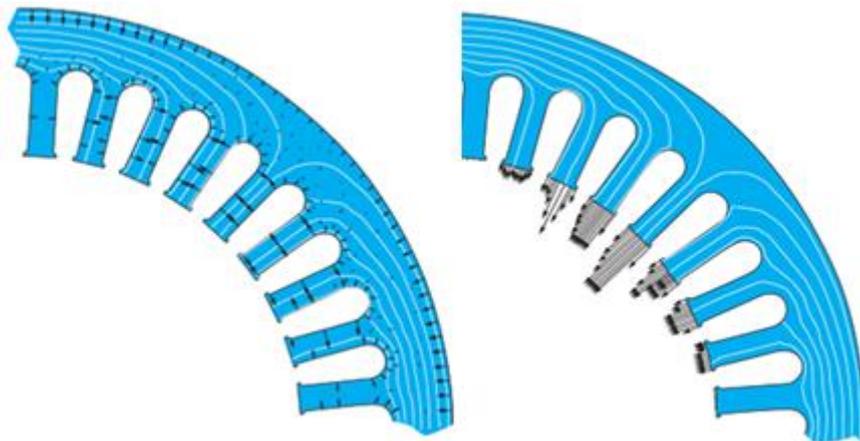


Figure II.1 - Représentation des forces magnétostrictives (gauche) et des forces de Maxwell (droite) dans un stator de moteur à induction [Le Besnerais 2008]

Les **forces équivalentes induites par les déformations magnétostrictives** qui agissent directement dans le matériau et vont le déformer en fonction de l'orientation de son aimantation sous l'influence d'un champ magnétique [Belahcen, 2004 ; Lahyaoui, 2018].

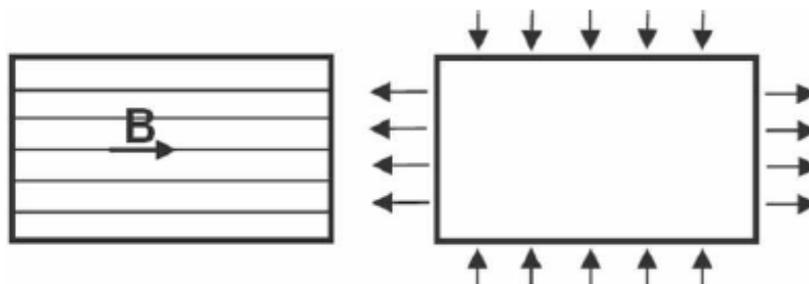


Figure II.2 - Représentation des lignes d'induction dans un matériaux (gauche) et les forces magnétostrictives résultantes (droite) [Le Besnerais 2008]

Les **forces de Maxwell** (figure II.1 droite) qui s'appliquent à l'interface de deux milieux magnétiques de différentes ré reluctances. Dans les machines électriques, elles s'exercent en particulier à l'interface entre entrefer et tôle statorique. Les lignes de flux étant quasiment radiales lorsque le fer est peu saturé, ces forces de Maxwell sont surtout dirigées radialement (elles tirent la denture statorique vers le rotor).

Les vibrations d'origine magnétostrictive se produisent aux mêmes fréquences que les vibrations dues aux forces de Maxwell, on ne peut donc a priori pas les différencier sur un spectre vibratoire ou acoustique. D'autre part, il n'est pas facile de quantifier de manière générale l'importance des forces magnétostrictives par rapport aux forces de Maxwell : suivant la forme des déformations de la tôle statorique, la magnétostriction a tendance à s'opposer ou à renforcer l'effet des forces de Maxwell. Plusieurs études [Garvey, 1999 ; Delaere, 2002 ; Vandeveld, 2003 ; Belahcen, 2004 ; Belahcen, 2006 ; Mbengue, 2016] ont été réalisées pour démontrer que les forces magnétostrictives y étaient souvent négligeables par rapport aux forces de Maxwell. Dans notre étude, seules ces dernières sont calculées.

#### B. Méthode de calcul des forces surfaciques de Maxwell

Les pressions de Maxwell, qui permettent d'obtenir les forces surfaciques de Maxwell, sont déterminées à partir de l'induction magnétique :

$$P_r = \frac{B_r^2 - B_t^2}{2\mu_0} \text{ et } P_t = \frac{B_r B_t}{\mu_0} \quad (2.1)$$

où  $P_r$  et  $P_t$  sont les composantes radiales et tangentielles de la pression de Maxwell et  $B_r$  et  $B_t$  sont celles de l'induction magnétique.

Le but est de trouver quelles fréquences sont excitées par les pressions de Maxwell pour ensuite les comparer à la base modale des parties actives afin de déterminer s'il y a résonance. L'induction magnétique est calculée sur un périmètre circulaire de points situés dans l'entrefer pour plusieurs positions du rotor afin de déterminer la distribution spatiale et temporelle des forces de Maxwell. Celles-ci permettent de déduire les pressions de Maxwell qui sont projetées sur leur surface d'application afin d'obtenir l'expression des forces de Maxwell à réinjecter dans le modèle mécanique.

D'après la littérature, il existe de nombreux modèles de calcul de l'induction magnétique. Dans le cas d'étude de cette thèse, cette méthode de calcul doit donner une estimation suffisamment précise de l'induction magnétique ; une certaine marge d'erreur est acceptable au profit du temps de calcul tant que le contenu harmonique des forces de Maxwell est bien restitué. Le calcul doit être nécessairement court afin de permettre l'étude du couplage fort entre les modèles électromagnétique et mécanique par la suite.

---

### *i. Méthode graphique de Lehmann*

La **méthode graphique de Lehmann**, [Lehmann, 1909] est historiquement la première méthode de calcul de l'induction magnétique dans un moteur électrique. C'est une méthode de détermination graphique du champ magnétique à partir d'une distribution d'excitation connue et en présence de matériaux magnétiques. La courbe liant l'induction magnétique au champ magnétique  $B(H)$  doit être donnée (et linéaire) pour cette étude. Cette méthode utilise les propriétés d'orthogonalité des lignes de champ et des équipotentielles magnétiques en tout point où il n'existe pas de courant. Elle est appliquée à des problèmes possédant une symétrie cylindrique ou une symétrie de révolution afin de se ramener à des problèmes plans.

L'intérêt de la méthode de Lehmann est sa rapidité pour peu de moyens mais elle est peu précise comme toute méthode graphique. Elle renseigne sur la répartition du flux dans les différentes parties d'une machine électrique. Elle a aujourd'hui été abandonnée au profit de méthodes plus récentes pour des raisons évidentes de précision et de temps de calcul.

### *ii. Méthode par transformée conforme*

La **méthode par transformée conforme** (Schwarz-Christoffel) [Sylvester, 1968 ; Driscoll, 2002 ; Ragot, 2008] consiste à simplifier le calcul de l'induction en lissant les parties saillantes du moteur. Pour cela, on introduit un coefficient  $\lambda$  nommé **perméance relative complexe** défini tel que  $B_{saillant} = \lambda \cdot B_{lisse}$  [Žarko, 2006]. Ce coefficient dépend de la géométrie du moteur et permet d'introduire dans le modèle les effets d'encoche et la géométrie rotorique.

Cette méthode permet désormais de prendre en compte les effets d'encoche du modèle dans les machines à aimant permanents [Žarko, 2006, 2009 ; Boughrara, 2009]. Plus récemment, d'autres travaux ont permis d'y introduire les effets d'excentricité [Alam, 2016].

Bien qu'il soit possible de trouver dans la littérature plusieurs modèles utilisant ce précepte pour calculer l'induction magnétique, cette méthode reste efficace pour des géométries simples afin d'y calculer rapidement  $\lambda$ . De plus, les composantes de l'induction magnétique ne peuvent être calculées qu'à une seule position rotorique [Žarko 2009]. [O'Connell, 2008] essaye de faire le calcul pour plusieurs positions mais montrent que ceci a un effet néfaste sur les temps de calcul puisqu'il est nécessaire de réitérer le calcul de  $\lambda$  à chaque position.

### *iii. Méthode par fonction de perméance et force magnétomotrice*

La **méthode par fonction de perméance et force magnétomotrice**, initialement développée dans [Doherty, 1926], calcule l'induction comme étant le produit de la perméance par la force magnétomotrice [Brudny, 1997 ; Le Besnerais, 2008 ; Gaussens, 2012].

$$B_e(t, \alpha_s) = \Lambda(t, \alpha_s) * (f_{mm}^s(t, \alpha_s) + f_{mm}^r(t, \alpha_s)) \quad (2.2)$$

avec  $\Lambda$  la perméance de l'entrefer,  $f_{mm}^s$  la force magnétomotrice statorique et  $f_{mm}^r$  la force magnétomotrice rotorique.

La perméance est inversement proportionnelle à la largeur effective de l'entrefer. Un modèle simplifié de perméance consiste à considérer qu'elle ne prend que les 4 valeurs illustrées dans la figure II.3 pour un moteur asynchrone, où  $e$  est la largeur de l'entrefer,  $l_s$  la longueur d'une dent statorique et  $l_r$  la longueur d'une dent rotorique. Lorsque la distance est maximum (d'encoche à encoche), la perméance est minimale alors qu'entre deux dents, la perméance est maximale.

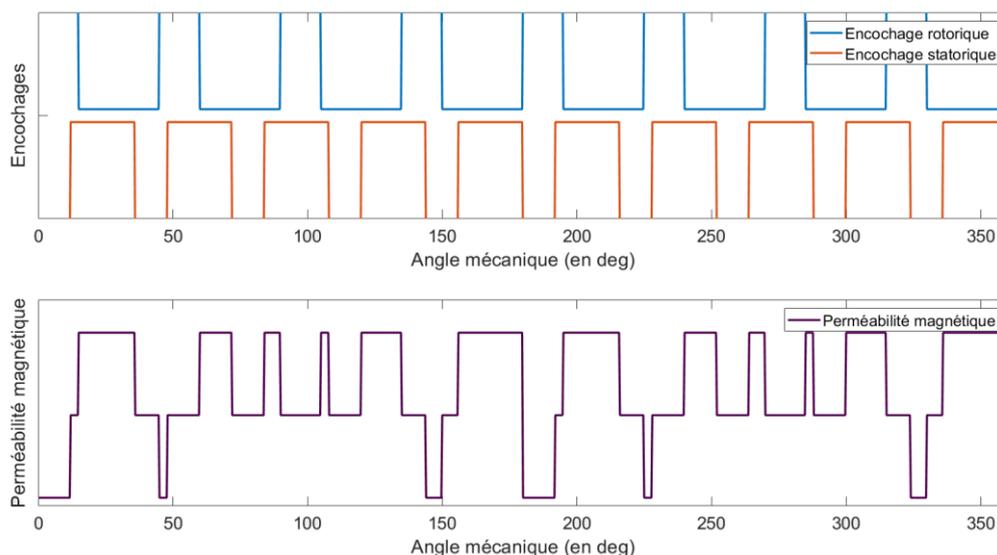


Figure II.3 – Encochage et fonction de perméance d'un moteur encochage rotorique et statorique

Ce calcul peut également être réalisé pour les moteurs synchrones. La perméabilité des aimants étant très proche de celle de l'air, la différence avec les moteurs synchrones se fait dans l'absence d'encochage rotorique.

La force magnétomotrice quant à elle dépend directement du bobinage du moteur. Pour la calculer, il faut définir des fonctions de bobinage qui permettront d'obtenir les courbes suivantes :

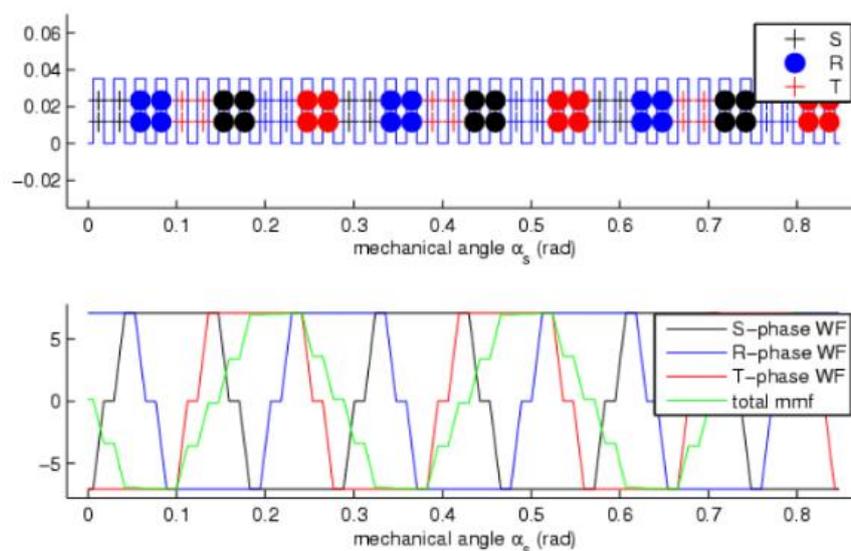


Figure II.4 - Force magnétomotrice d'un moteur synchrone en fonction de son bobinage [Le Besnerais 2008]

---

En précisant le sens de courant et le nombre de spires dans chaque encoche en sachant quelles phases y sont alimentées, il est possible d'obtenir la contribution de chaque phase à la force magnétomotrice sur une période mécanique. Il ne reste plus qu'à sommer ces courbes pour obtenir la courbe en vert qui représente directement la force magnétomotrice.

Ce modèle est très efficace et permet de répondre à beaucoup de critères du cahier des charges de l'étude :

- Il est facile de séparer le contenu spatial et fréquentiel des grandeurs du calcul [Brudny, 1997] ;
- L'excentricité rotorique peut aisément être ajoutée au terme de perméabilité [Al-Nuaim, 1998] ;
- Les effets de saturation peuvent être pris en compte dans le modèle en modulant l'entrefer par une fonction de saturation dans le terme de perméance [Nandi, 2004].

Néanmoins, ce modèle ne permet que de calculer la composante radiale de l'induction magnétique [Serrano-Iribarnegaray, 2013]. Afin de calculer fidèlement la dynamique rotor, il est important de connaître toutes les composantes de force en jeu dans l'entrefer. Il est donc nécessaire de choisir une méthode qui calcule aussi les contraintes tangentielles afin de prendre en compte leur incidence sur la dynamique du rotor.

De plus, cette méthode présente des imprécisions qui croissent avec l'épaisseur d'entrefer [Gaussens, 2012]. Les courbes de perméance ne sont pas aussi linéaires dans le cas où l'entrefer est grand et le modèle y perd fortement en précision [Serrano-Iribarnegaray, 2013]. Dans le cas des moteurs utilisés dans les ventilateurs, ceux-ci présentent une frette magnétique permettant de maintenir les aimants permanents qui agrandit fortement l'entrefer. Cette méthodologie leurs est donc peu adaptée.

#### *iv. Méthode circuit équivalent électrique à réseau de réluctance*

La **méthode circuit équivalent électrique à réseau de réluctance** consiste à représenter le circuit magnétique sous la forme d'un réseau de réluctance (figure II.5) [Ostovic, 1989]. Par exemple, une réluctance électromagnétique y est représentée comme une résistance électrique et la loi d'Ohm électrique devient la loi d'Hopkinson :

$$\mathcal{F} = \mathcal{R}\Phi \quad (2.3)$$

où  $\mathcal{F}$  est le potentiel scalaire magnétique,  $\mathcal{R}$  la réluctance du circuit en  $H^{-1}$  et  $\Phi$  le flux d'induction magnétique en Wb. Ainsi, il suffirait de calculer le flux dans le circuit au moyen de lois de calcul simples puis de retrouver l'induction magnétique par

$$\Phi = B * S \quad (2.4)$$

où  $B$  est l'induction magnétique en T et  $S$  la surface d'application en  $m^2$ .

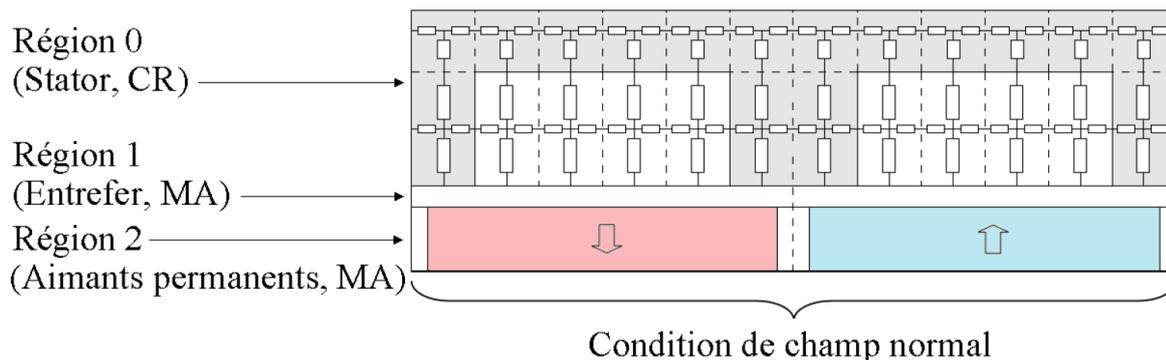


Figure II.5 – Réseau de réluctance représentant le stator d'un moteur synchrone

Cette méthode de calcul se montre robuste pour calculer les composantes de l'induction magnétique dans les machines à aimants permanents [Bracikowski, 2012] et pourrait fonctionner. Cependant, pour réaliser le réseau de réluctance, à défaut d'expérience du concepteur, un calcul préliminaire permettant de définir le chemin du champ magnétique doit être fait. Celui-ci est souvent fait par éléments finis, et devrait être fait pour chacune des positions rotoriques [Bracikowski, 2012 ; Zhu, 2009]. Dans le cas de notre étude où la géométrie varie à chaque pas de temps et est imprédictible, cette étude préliminaire ne pourra être définie et réalisée et le remaillage de la réluctance de l'entrefer à chaque pas de temps serait trop long [Fakam, 2014].

#### v. Méthodes des éléments finis

La **méthode numérique des éléments finis**, très connue, est celle qui permet d'obtenir les résultats les plus précis. Elle consiste à diviser le moteur en petits éléments de même forme géométrique (en triangles sur la figure II.6a) et de calculer les grandeurs magnétiques à chacun des sommets de ces triangles, que l'on nomme nœuds. Ainsi, avec cette méthode, il est possible de dessiner les lignes de champs magnétique d'un moteur (II.6b) ou réaliser une cartographie de l'induction magnétique (II.6c).



Figure II.6 - Maillage, lignes de champs magnétique et mapping de l'induction magnétique d'un moteur synchrone à aimants permanents réalisés sous Flux2D

Néanmoins, elle reste **couteuse en temps**, notamment lorsque le rotor du moteur est excentré, puisqu'il serait nécessaire de remailler la surface entre chaque pas de calcul et ainsi impacter fortement la durée du calcul lors du bouclage fort. Nous utilisons quand même cette méthode afin de valider nos calculs grâce au logiciel flux 2D [Flux 2D, 2008 ; Jin, 2002]

La **méthode analytique des sous-domaines** consiste à diviser le moteur en différents sous-domaines, délimités par une géométrie particulière ou un changement de matériau, où l'induction magnétique  $y$  est calculée séparément en résolvant les équations de Maxwell [Doherty, 1926 ; Hague, 1929]. Celles-ci peuvent être résolues avec deux types de grandeurs abstraites : le potentiel vecteur ou le potentiel scalaire.

Des études ont montré que le potentiel scalaire n'a pu être utilisé que dans des modèles sans courant [Zhu, 2010b ; De La Barrière, 2012 ; Meessen, 2012 ; Youmssi, 2006] ce qui n'est pas envisageable dans notre cas, à l'inverse du calcul en potentiel vecteur qui est plus adapté pour un problème 2D [Gysen, 2010 ; Dubas, 2009 ; Lubin, 2010]. L'induction magnétique est ainsi exprimée comme :

$$\text{rot}(\vec{A}) = -\vec{B} \quad (2.5) \quad \text{div}(\vec{A}) = \vec{0} \quad (2.6)$$

où  $B$  est l'induction magnétique définie par  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$  (2.7) avec  $\mu_0$  la perméabilité de l'air,  $\vec{H}$  la densité de champ magnétique et  $\vec{M}$  la magnétisation du matériau. L'induction magnétique  $\vec{B}$  est remplacée par le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dans la première équation :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \nabla \wedge \vec{H} - \mu_0 \nabla \wedge \vec{M} \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \nabla \wedge \vec{M} \quad (2.9)$$

où  $\vec{J}$  est la densité de courant qui est égale à  $\vec{J} = \nabla \wedge \vec{H}$  selon le théorème d'Ampère.

Un bon état de l'art des méthodes analytiques de calcul de l'induction magnétique dans un moteur synchrone a été réalisé par E. Devillers [2016]. Les travaux réalisés dans cette thèse ont principalement été inspirés de ceux de Lijian Wu [Wu, 2011 ; Wu 2012] en s'aidant d'autres travaux préliminaires [Zhu, 2002 ; Dubas, 2009 ; Lubin, 2011]. Le modèle était utilisé dans les travaux de thèse de Devillers [2018] afin de calculer le bruit rayonné par les parties statoriques des machines, sans s'intéresser à la dynamique du rotor qui est l'objet de notre étude.

Le modèle électromagnétique permet de calculer l'induction sur une ligne de points dans l'entrefer pour un certain nombre de positions angulaires rotoriques réparties régulièrement sur un tour. Ceci permet d'obtenir une cartographie spatio-temporel des pressions de Maxwell qui s'appliquent sur le rotor. Ces dernières sont par la suite injectées sous forme de vecteurs force dans un modèle mécanique afin de prédire les déformations de l'axe du moteur.

Les déformations du rotor vont créer des excentricités dans le modèle électromagnétique, et peuvent tout à fait être intégrées dans le modèle des sous-domaines comme ont pu l'étudier [Fu, 2012] en les introduisant à l'aide d'un terme de perturbation d'ordre 1 ou par le principe de superposition comme étudié par Li [Li, 2015].

Cette technique est choisie pour l'étude puisqu'elle permet d'obtenir une estimation **suffisamment précise** pour un **bon temps de calcul**. Les composantes radiales et tangentielles des inductions peuvent être calculées et il est très aisé d'obtenir la répartition spatio-temporelle des efforts. Elle est développée dans la partie suivante du manuscrit.

### C. Modèles hybrides

Il existe aussi de nombreuses méthodes hybrides qui consistent à combiner les méthodes présentées précédemment. L'hybridation peut se faire de manière séquentielle, les modèles sont résolus successivement puis les résultats sont recombinaés pour déterminer la solution générale. Elle peut aussi être faite de manière intrinsèque à savoir qu'un modèle est utilisé pour modéliser une partie du moteur, et un autre pour le reste. En effet, certains modèles peuvent se montrer plus robuste pour modéliser les contributions du rotor et inversement.

Parmi les différentes combinaisons, on peut trouver celles-ci qui permettent d'ajouter des nouveaux phénomènes à la méthode des sous-domaines :

- La méthode circuit électrique équivalent est utilisée pour introduire les effets de saturation dans d'autres modèles où elle est ignorée. Par hybridation intrinsèque et modélisation des parties ferromagnétiques par un réseau de réluctance, le terme de saturation locale peut être introduit dans la méthode des sous-domaines [**Ghoizad, 2007 ; Ouagued, 2015 ; Bazhar, 2017 ; Zhang, 2017**] ou dans la méthode de transformée conforme [**Hanic, 2016 ; Tessarolo, 2015**].
- Les effets de saturation et de géométrie particulière de certains moteurs peuvent également être introduits dans la méthode des sous-domaines en superposant la solution avec une autre obtenue par la méthode des éléments finis [**Lee, 1991**].
- Coupler la méthode des sous-domaines et la méthode de transformée conforme permet de calculer la fonction de perméance complexe avec la méthode des sous-domaines puis la réintroduire dans le calcul par transformée conforme. Ceci permet d'omettre la transformée conforme du modèle dans le calcul de la perméance complexe et d'y introduire a posteriori le terme d'excentricité de manière plus simple que s'il fallait l'introduire dans la méthode des sous-domaines. [**Zhu, 2010a ; Gaussens, 2013a**]

Ces méthodes hybrides permettent de rendre la méthode des sous-domaines plus précise et réaliste. Néanmoins, l'utilisation des autres modèles vient introduire les différents inconvénients qui font que la méthode des sous-domaines a été préférée. Notamment les temps de calculs sont grandement impactés par l'utilisation de ces autres méthodes qui sont moins agiles dans le cas où l'excentricité est modifiée à chaque pas de temps. C'est pour cette raison que la méthode des sous-domaines non hybridée est utilisée.

---

## 2. Etat de l'art mécanique

Dans la conception des machines en rotation, il est nécessaire de bien prédire la dynamique des rotors en torsion et flexion afin de s'assurer un bon fonctionnement du système **[Childs, 1993]**. Il est important de calculer la base modale du système pour déterminer les vitesses critiques **[Berthier, 1983 ; Lalanne 1983 ; Lacroix, 1988]** qui correspondent aux vitesses où les maximums de déformation sont atteints. Une fois la base modale bien calculée, elle est utilisée pour calculer la réponse forcée d'un système lorsqu'il est soumis à une force harmonique.

Dans cette partie, un état de l'art des études de dynamique de rotor est fait ; puis, un état de l'art des méthodologies de modélisation plus simplifiées et adaptées au modèle couplé. Enfin, une comparaison des différents schémas mathématiques temporels permettant le calcul de la réponse forcée d'un rotor soumis à une force harmonique est faite.

### A. Etudes de dynamique de rotor

La dynamique des rotors est étudiée en phase de conception des ventilateurs chez Safran Ventilation Systems. Des modèles réalisés sur RotorInsa sont utilisés pour déterminer les vitesses critiques de l'arbre. Ceci correspond à la vitesse où la fréquence de rotation intercepte le premier mode rotorique direct. Les déformations maximales sont atteintes à cette vitesse, notamment en bout d'arbre où se situe la roue du ventilateur. Il est donc important de s'assurer que ces déformations soient suffisamment petites pour ne pas risquer qu'il y ait de contact entre la roue et le carter.

Au-delà de cette vitesse, il est possible que les déplacements du rotor deviennent instables. La première étude d'instabilité a été faite par Smith et al. **[Smith, 1933]** qui ont étudié la dynamique d'un rotor sans masse portant un ou plusieurs disques de masse montés sur des paliers isotropes. Cette étude a permis de définir pour la première fois la vitesse critique d'un rotor au-delà de laquelle apparaissent les instabilités de mouvement. Au-delà de cette vitesse, les ensembles rotor-disques subissent de fortes vibrations. Ceci a également été montré expérimentalement par Newkirk **[Newkirk, 1924]**.

S'inspirant de ces travaux, de nombreuses recherches ont été faites sur l'influence de l'amortissement sur la dynamique des machines tournantes. En effet, au-delà la vitesse critique, l'amortissement interne de la structure déstabilisent les systèmes tournants **[Adams, 2001]**. Ainsi, Zorzi réalisa en 1977 **[Zorzi, 1977]** la première étude de stabilité prenant en compte les effets gyroscopiques dans la détermination des vitesses critiques. D'autres études portent plus précisément sur l'influence de l'amortissement interne **[Kimball, 1924]** (frottement sec **[Walton, 1993]**, contact rotor/Stator **[Jacquet-Richardet, 2013]**, matériaux **[Forrai 2001 ; Chatelet, 2002 ; Sino, 2007]**) ou externe (nature des différents paliers, paliers hydrodynamiques, ... **[Viana Serra Villa, 2005]**). La prise en compte des paliers introduit également dans le modèle de nombreuses non-linéarités telles que le contact de Hertz ou le jeu radial.

Les effets combinés des deux types d'amortissements ont aussi été modélisés par Mazzei [Mazzei, 2003] et Montagnier [Montagnier, 2005].

Ces modèles s'intéressent à une petite partie des phénomènes particuliers de la dynamique des rotors. Il serait possible d'en citer bien d'autres encore. Néanmoins, l'intérêt principal des travaux de thèse est l'effet des forces électromagnétiques induites dans le moteur sur la dynamique des rotors de machines électriques. Il est intéressant de noter que la plupart de ces phénomènes sont modélisés en se basant sur la méthode des éléments finis 3D, qui, nous le rappelons, nécessite des temps de calcul bien trop long pour le modèle couplé.

Ainsi, un simple modèle donnant la dynamique linéaire d'un rotor est préféré ici pour cette première étude, bien qu'il pourrait être intéressant de compléter ce modèle en y incluant ces différents phénomènes. Ceci serait néanmoins un travail conséquent et pourrait justifier une seconde thèse. Ainsi, un état de l'art des modèles simplifiés de rotor, notamment inspiré de la théorie des poutres est fait ci-après parmi lesquels est choisie la méthodologie la plus adaptée à l'étude des couplages électro-magnéto-mécanique.

## B. Modélisation simplifiée des rotors en rotation

### i. Rotor de Jeffcott

Il s'agit du modèle de rotor le plus simple développé d'abord par [Föppl, 1895] puis plus en détail par [Jeffcott, 1919]. Son étude a été poursuivie par de nombreux chercheurs répertoriés dans [Genta, 2005]. Le modèle est constitué d'un disque simple monté symétriquement sur un arbre élastique. Les premiers modèles développés sur cette méthodologie étaient encastres à leurs extrémités (figure II.7a) mais de nouvelles versions présentent des liaisons plus flexibles (figure II.7b). L'arbre est de masse négligeable et sa rigidité est égale à celle d'une poutre en quasi-statique.

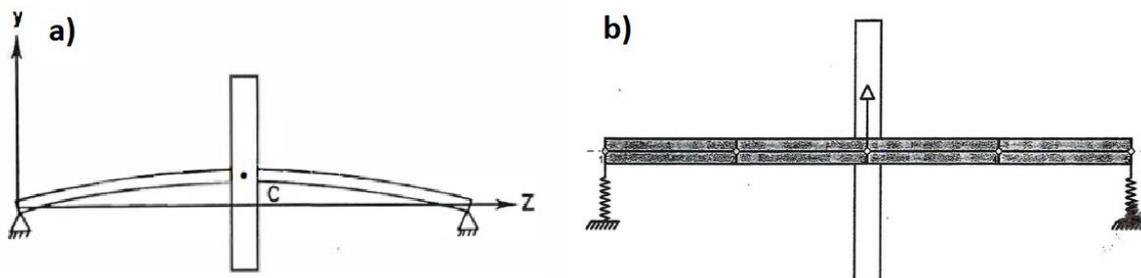


Figure II.7 - Modèle de rotor de Jeffcott encasté à ses extrémités (a) ou avec des appuis souples (b)

Ce modèle, qui est très simplifié, est utilisé pour calculer les vitesses critiques du rotor et des réponses libres ou forcées. Une analyse poussée des résultats et des limites de ce modèle a été réalisée par [Gunter, 2002]. Il est très performant pour des premières phases de conception rapide puisqu'il donne des résultats acceptables pour la détermination des vitesses critiques et du comportement dynamique relatif au premier mode de l'arbre. Ce dernier point est une des principales faiblesses du modèle puisqu'il ne permet de prendre en compte qu'un mode alors que les phénomènes vibro-acoustiques expérimentaux étudiés pendant la thèse peuvent apparaître sur plusieurs modes. Ce modèle est donc intéressant historiquement mais

---

d'autres modèles plus précis et moins rigides géométriquement sont privilégiés dans notre étude.

### *ii. Modélisation de rotor comme une poutre d'Euler-Bernoulli*

Une étude de la dynamique des rotors a été réalisée par **[Lalanne et Ferraris 1998]** dans laquelle ils s'intéressent aux aspects dynamiques à prendre en compte lors de la conception d'un rotor. La modélisation est faite en calculant dans un premier temps les termes d'énergies cinétiques et d'énergie potentielle de déformations des éléments de rotor.

Le rotor est constitué d'un arbre, d'un ou plusieurs disques de masse permettant d'introduire une masse déportée, de paliers et de joints avec leur rigidité et amortissement. L'arbre est modélisé comme une poutre d'Euler Bernoulli. Cette théorie a pour particularité de prendre pour hypothèse que la section de la poutre reste toujours perpendiculaire à sa fibre neutre. Cette hypothèse néglige donc les effets de cisaillement lorsque l'on s'intéresse au comportement en flexion de l'arbre.

La résolution du système se fait en différentes étapes :

- Les expressions des énergies cinétiques et de déformations des différents éléments du système sont calculées ;
- Les équations de Lagrange du système sont déterminées sous cette forme :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad (2.10)$$

où  $E_c$  est l'énergie cinétique,  $E_p$  l'énergie potentielle de déformation,  $N$  ( $1 \leq i \leq N$ ) est le nombre de degrés de liberté,  $q_i$  est une des coordonnées généralisées,  $F_{q_i}$  sont les forces généralisées et  $\dot{x}$  dénote la dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ . Les forces extérieures sont principalement induites par les paliers et les joints ;

- Les équations temporelles sont ensuite résolues par un modèle élément finis **[Imbert, 1979]**.

Cette méthode de calcul est ensuite appliquée à de simples modèles de mono-rotor **[Berthier, 1987 ; Guilhen, 1988a ; Guilhen, 1988b]**. Elle est utilisée pour calculer les fréquences propres en fonction de la vitesse de rotation et tracer le diagramme de Campbell. Puis, pour déterminer les effets de différentes excitations : une force induite par un balourd mécanique, une force asynchrone ou harmonique fixée dans l'espace. Les effets d'une asymétrie du rotor et de l'introduction d'amortissement  $\gamma$  sont étudiés aussi. Elles sont aussi appliquées à des modèles de multi-rotor coaxiaux **[Ferraris, 1996]**, à savoir des rotors présentant plusieurs disques de masse répartis sur la longueur d'un même arbre.

Enfin, la méthode est utilisée pour calculer les bases modales, les coefficients d'amortissement visqueux et la stabilité du système de différentes applications industrielles. Les réponses forcées des systèmes lorsqu'ils sont soumis à différentes excitations sont aussi étudiées. Parmi ces systèmes, on peut retrouver différentes turbomachines **[Lalanne, 1985 ; Vance, 1988]**,

une pompe turbo-moléculaire hybride, un compresseur centrifuge, un ventilateur industriel, un turbochargeur [Gjika, 1993], etc.

Cette méthodologie a été fortement étudiée, notamment par [Guyader, 2002] et nous disposons aujourd'hui de solutions analytiques théoriques de comparaison utilisant cette méthodologie permettant d'en valider certains calculs. Toutefois, la non-prise en compte du cisaillement affecte fortement la précision du modèle pour les poutres à faible élancement, c'est-à-dire dont le rapport longueur/diamètre n'est pas grand. En effet, pour des poutres longues et fines, l'angle réel de cisaillement  $\gamma_2 = \varphi_2 + w_{,x}$  de la figure II.8 est négligeable. Ainsi il est possible d'admettre que la section reste perpendiculaire à la fibre neutre.

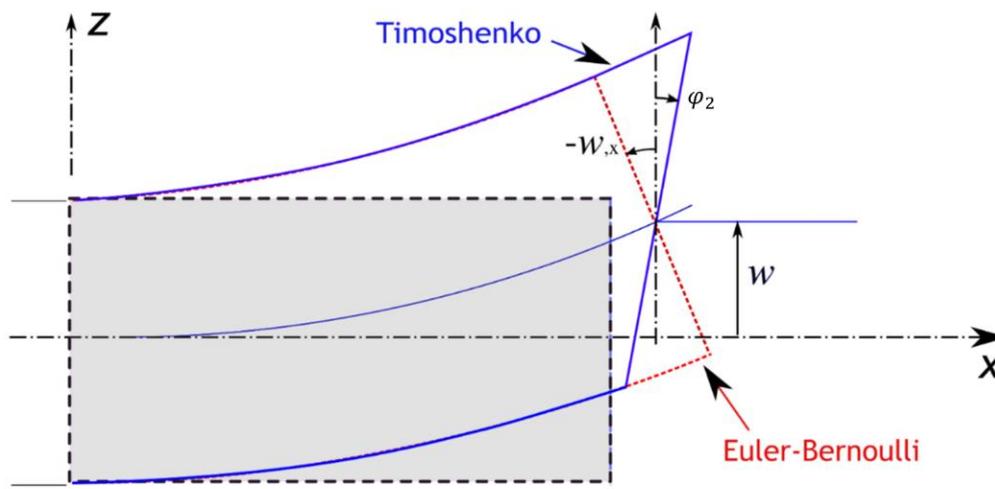


Figure II.8 - Rotation d'une section droite de poutre selon les théories d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko

### iii. Modélisation du rotor comme une poutre de Timoshenko

Les calculs précédents peuvent être réalisés en utilisant une théorie des poutres différente afin de modéliser l'arbre. La théorie des poutres de Timoshenko se différencie de celle d'Euler-Bernoulli par le fait que la section droite normale à la fibre neutre ne reste pas nécessairement perpendiculaire à la fibre neutre (figure II.8). Par conséquent, les déformations de cisaillement sont prises en compte dans ce modèle et il est nécessaire d'introduire la nouvelle variable  $\varphi_2$  qui représente l'angle de rotation totale de la section autour de l'axe Y sur la figure II.8. Ceci a pour effet d'ajouter un nouveau terme de cisaillement dans l'équation de l'énergie potentielle de déformation.

Ce nouveau terme permet de prendre plus précisément en compte du cisaillement pour les poutres plus courtes. Ainsi, la base modale et la réponse harmonique d'un arbre rotorique dont le rapport d'élancement est faible sont déterminées plus précisément par cette méthodologie. Elle est utilisée pour modéliser mécaniquement la dynamique du rotor dans notre étude.

---

### C. Méthodes de résolution numériques des équations différentielles

Les méthodes décrites ci-après permettent de déterminer une solution approchée d'une équation différentielle. Elles sont notamment applicables aux problèmes mécaniques tels que la résolution des équations du mouvement d'un système.

#### i. Principe des méthodes numériques

Soit  $y(t)$  la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Le principe général consiste à discrétiser l'intervalle  $I = [t_0, t_0 + T]$ , en introduisant des points  $t_0, t_1, \dots, t_N = t_0 + T$  qui peuvent être équidistants mais ce n'est pas obligatoire. La quantité  $h_n = t_{n+1} - t_n$  s'appelle le pas. Une approximation de  $y(t_n)$ , pour  $n = 1, \dots, N$ , notée  $z_n \approx y(t_n)$ , est cherchée à l'aide d'un procédé itératif.

L'idée la plus simple consiste dans un premier temps à écrire le développement de Taylor de  $y(t)$  en  $t = t_n$ . Ainsi, comme la solution est dérivable par rapport à  $t$  au moins une fois,  $y(t_{n+1})$  peut s'écrire :

$$\begin{aligned} y(t_{n+1}) &= y(t_n + h) = y(t_n) + h y'(t_n) + \frac{h^2}{2} y''(\xi) + O(h^2), \xi \in [t_n, t_n + 1] \\ &= y(t_n) + h f(t_n, y(t_n)) + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le pas de temps  $h_n$  est supposé constant et égal à  $h = \frac{T}{N}$  où  $N$  est un entier fixé. Si  $h$  est suffisamment petit, le schéma itératif suivant peut être proposé :

$$\begin{cases} z_0 = y_0 \\ z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n), 0 \leq n \leq N - 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

Ce procédé itératif s'appelle **schéma d'Euler simple** ou **schéma d'Euler explicite**.

On distingue deux grandes familles de schémas de résolution numérique des problèmes aux conditions initiales pour les équations différentielles :

- **Les schémas à un pas.** Pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point  $t_{n+1}$ , seule la valeur calculée au temps  $t_n$  est utilisée. Le gros avantage est de permettre de changer de pas très facilement au cours du calcul en fonction des estimations d'erreur qui sont obtenues en même temps que les valeurs approchées au cours du calcul.
- **les schémas multi-pas.** Dans ces méthodes, pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée en un point  $t_{n+1}$ , on utilise les valeurs calculées en  $t_n, t_{n-1}, \dots$ . Cela permet une meilleure précision, mais un coût de calcul plus élevé,

rend les valeurs plus interdépendantes de sorte qu'il est plus difficile de changer le pas localement au cours du calcul.

La performance d'un schéma peut être caractérisée par 3 critères : sa stabilité, sa convergence et son erreur locale :

- Un schéma est stable s'il n'amplifie ni les erreurs sur la condition initiale, ni les erreurs introduites dans le schéma : il s'agit d'une notion de continuité. Elle dépend généralement du pas de temps. Il peut exister un pas de temps limite au-delà duquel un schéma stable devient instable.
- La convergence d'un schéma est son aptitude à tendre vers la solution exacte quand le pas de temps tend vers 0.
- L'erreur locale relative au schéma est la différence entre l'approximation et la solution exacte de l'équation différentielle à un temps donnée.

## ii. Schémas à un pas

### a) Schémas d'Euler à partir de l'intégration numérique

Pour définir certains schémas numériques de résolution d'équation différentielle, la solution exacte  $y(t)$  vérifie  $y'(t) = f(t, y(t))$ , ce qui donne

$$y(t_{n+1}) = y(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t, y(t)) dt \quad (2.13)$$

L'intégrale peut alors être approchée par une formule utilisant des valeurs de  $f(t, y(t))$  sur l'intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  bien que  $y(t)$  ne soit pas connue sur cet intervalle. Pour simplifier l'écriture, le pas  $h_n = t_{n+1} - t_n$  est supposé constant. Ainsi,  $h = \frac{T}{N}$  où  $N$  est un entier, mais la généralisation à un pas non constant est évidente.

Pour commencer, la méthode des rectangles "à gauche" est utilisée pour le calcul approché de l'intégrale, (ceci est équivalent à la formule de Taylor appliquée à  $y(t)$  en  $t = t_n$  (2.10)) qui permet d'introduire le **schéma d'Euler simple** :

$$z_{n+1} = z_n + h f(t_n, z_n), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (2.14)$$

L'intégrale peut aussi être approchée par la méthode des rectangles "à droite". Un calcul équivalent provient de la formule de Taylor cette fois appliquée à  $y(t_n)$  :

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) - h f(t_{n+1}, y(t_{n+1})) + \frac{h^2}{2} y''(\xi), \xi \in [t_n, t_{n+1}] \quad (2.15)$$

Ceci conduit au **schéma d'Euler rétrograde** ou **Euler implicite** :

$$z_{n+1} = z_n + h f(t_{n+1}, z_{n+1}), \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (2.16)$$

Ce schéma est dit **implicite** car  $z_{n+1}$  est défini implicitement comme solution de l'équation :

$$z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, x) \quad (2.17)$$

Il est alors nécessaire de faire appel à des méthodes de type point fixe ou Newton. Cependant, comme le pas  $h$  est petit, le nombre d'itérations nécessaires en pratique est petit. Une première estimation de  $z_{n+1}$  peut être faite avec  $z'_n$ .

Il est aussi possible d'utiliser un nouveau schéma dit prédicteur-correcteur :

- Une première estimation grossière de  $z_{n+1}$ , notée  $\tilde{z}_{n+1}$  est déterminée, par la méthode d'Euler explicite par exemple ;
- Cette estimation est améliorée en s'inspirant du schéma d'Euler rétrograde.

Le schéma devient alors :

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1}) \end{cases} \quad (2.18)$$

Parmi les schémas prédicteur les plus connus, on peut citer le **schéma de Crank-Nicolson** :

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, z_{n+1})), 0 \leq n \leq N - 1 \quad (2.19)$$

ou encore le **schéma prédicteur-correcteur d'Euler-Cauchy** :

$$\begin{cases} \tilde{z}_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n) \\ z_{n+1} = z_n + \frac{h}{2}(f(t_n, z_n) + f(t_{n+1}, \tilde{z}_{n+1})) \end{cases}, \quad 0 \leq n \leq N - 1 \quad (2.20)$$

Ces deux schémas ont l'avantage d'être précis à l'ordre 2 alors que les schémas d'Euler explicite et implicite ne sont précis qu'à l'ordre 1.

#### b) Méthodes de Runge et Kutta

Il s'agit de schémas qui permettent de retrouver les bonnes propriétés des schémas de Taylor (ordre élevé), sans en présenter les inconvénients (calcul des dérivées successives de  $f$ ). Il s'agit de schémas à un pas, donc se mettant sous la forme

$$\begin{cases} z_0 = y_0, \\ z_{n+1} = z_n + hf(t_n, z_n, h), n \geq 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

où  $\phi$  prend la forme particulière suivante :

$$f(t, z, h) = \sum_{i=1}^q \gamma_i k_i \quad (2.22)$$

Les  $k_i$  sont définis récursivement et sont simplement donnés pour  $q = 4$  qui est la forme la plus courante permettant de créer le **schéma de Runge-Kutta d'ordre 4** :

$$\begin{cases} k_1 = f(t_n, z_n) \\ k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_1) \\ k_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, z_n + \frac{h}{2}k_2) \\ k_4 = f(t_{n+1}, z_n + hk_3) \end{cases}$$

$$z_{n+1} = z_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.23)$$

Ce schéma a l'avantage d'atteindre une précision d'ordre  $q$ , donc d'ordre 4 pour le schéma de Runge-Kutta 4. Néanmoins, il est légèrement plus long à calculer que les autres schémas à un pas du fait de devoir calculer tous les termes  $k_i$  à chaque pas de temps.

### iii. Schémas multi-pas

Les schémas multi-pas utilisent plusieurs valeurs calculées aux pas de temps précédents pour calculer une approximation de la valeur de la fonction cherchée au pas de temps suivant. Il en existe de nombreux mais l'un des plus connus reste la Méthode d'Adams et Bashforth qui permet d'atteindre un ordre de précision équivalent aux méthodes de Runge-Kutta en allégeant les calculs. Le schéma s'écrit :

$$z_{n+1} = z_n + \sum_{k=0}^q b_k f(t_{n-k}, z_{n-k}), n \geq q \quad (2.24)$$

où  $b_k$  représente un polynôme de Lagrange d'approximation de l'intégrale de l'équation (2.13). Ce schéma d'ordre  $q + 1$  fait intervenir  $q + 1$  points où la fonction  $f$  est évaluée. D'autres schémas multi-pas peuvent être cités tels que la méthode d'Adams et Moulton ou la technique de Nystöm.

Les schémas multi-pas peuvent permettre d'atteindre une précision plus fine que les schémas à un pas – hors Runge-Kutta – puisque leur précision est souvent liée aux nombres de pas précédents utilisés. Toutefois, l'utilisation de ces derniers requiert une bonne détermination des premiers pas de temps qui sont utilisés pour initialiser le modèle. Souvent, ces premiers pas de temps sont déterminés en utilisant l'un des schémas à pas unique décrit à la partie 2.A). Ainsi, la précision de ces schémas multi-pas se retrouve limitée par la précision du schéma à un pas utilisé pour déterminer les conditions initiales.

De plus, ces schémas sont moins flexibles puisqu'il est très difficile de changer le pas de temps pendant le calcul. De plus, les schémas à un pas étant plus rapides à calculer que les schémas multi-pas ils sont préférés pour le modèle couplé ; notamment le schéma de Crank-Nicholson qui permet d'atteindre une précision d'ordre 2 largement suffisante.

---

### 3. Conclusion de l'état de l'art

Le chapitre II donne un état de l'art des méthodes de calcul de l'induction magnétique dans un moteur électrique afin de calculer les forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer. Il fait aussi le point sur les études de la dynamique des rotors en rotation avant de se focaliser sur les modèles simplifiés de calcul de la réponse temporelle d'un arbre en rotation soumis à des forces harmoniques. Les modèles choisis se veulent rapide aux dépens de la précision de calcul. Le modèle électromagnétique se doit néanmoins de donner une estimation suffisamment précise du contenu harmonique des forces de Maxwell et le modèle mécanique doit donner une bonne estimation de la dynamique du rotor.

Cet état de l'art a permis de choisir les méthodologies les plus adaptées afin de concevoir un modèle multiphysique fortement couplé calculant la dynamique d'un rotor de moteur synchrone soumis aux forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer. L'induction magnétique est calculée en utilisant la méthode des sous-domaines qui donne une estimation suffisamment précise vis-à-vis du temps de calcul et permet la prise en compte des excentricités rotoriques. Les déformations rotoriques sont quant à elles calculées en modélisant le rotor comme une poutre de Timoshenko. La résolution temporelle se fait par le schéma aux différences finies de Crank-Nicholson appliqué à un modèle éléments-finis.

---

# Chapitre III. Modèle électromagnétique de calcul des pressions de Maxwell d'un moteur synchrone à aimants permanents

---

<u>Chapitre III. Modèle électromagnétique de calcul des pressions de Maxwell d'un moteur synchrone à aimants permanents</u> .....	41
<u>1. Pressions de Maxwell dans l'entrefer d'un moteur synchrone</u> .....	42
<u>A. Expression du problème</u> .....	42
<u>B. Résolution des équations de Maxwell dans chaque sous-domaine</u> .....	44
<u>C. Détermination des constantes d'intégration en exprimant les grandeurs magnétiques aux interfaces entre les sous-domaines</u> .....	54
<u>D. Résolution du système d'équations d'interfaces et déduction des composantes de l'induction magnétique</u> .....	60
<u>2. Résultats du modèle électromagnétique comparé aux éléments finis (Flux 2D)</u> ..	60
<u>A. Induction magnétique</u> .....	60
<u>B. Contenu harmonique des pressions de Maxwell</u> .....	62
<u>C. Couple électromagnétique</u> .....	65
<u>3. Terme de perturbation dû à l'excentricité</u> .....	67
<u>4. Résultats du calcul avec excentricité comparé aux éléments finis (Flux 2D)</u> .....	69
<u>A. Comparaison de l'induction magnétique et du terme de perturbation</u> .....	69
<u>B. Comparaison du contenu harmonique des pressions de Maxwell</u> .....	73
<u>C. Effet de l'excentricité sur le couple électromagnétique</u> .....	73
<u>5. Conclusion sur le modèle électromagnétique</u> .....	74

## 1. Pressions de Maxwell dans l'entrefer d'un moteur synchrone

### A. Expression du problème

Dans cette section est présenté un modèle analytique de moteur synchrone à rotor à aimants permanents. Il est basé sur la méthode des sous-domaines qui consiste à diviser le moteur en régions et d'y résoudre les équations de Poisson (3.7) et Laplace (3.8), afin d'obtenir les composantes radiales et orthoradiales de l'induction magnétique. Ces différents domaines sont délimités par un matériau ou une géométrie particulière tel que sur la figure III.1b.

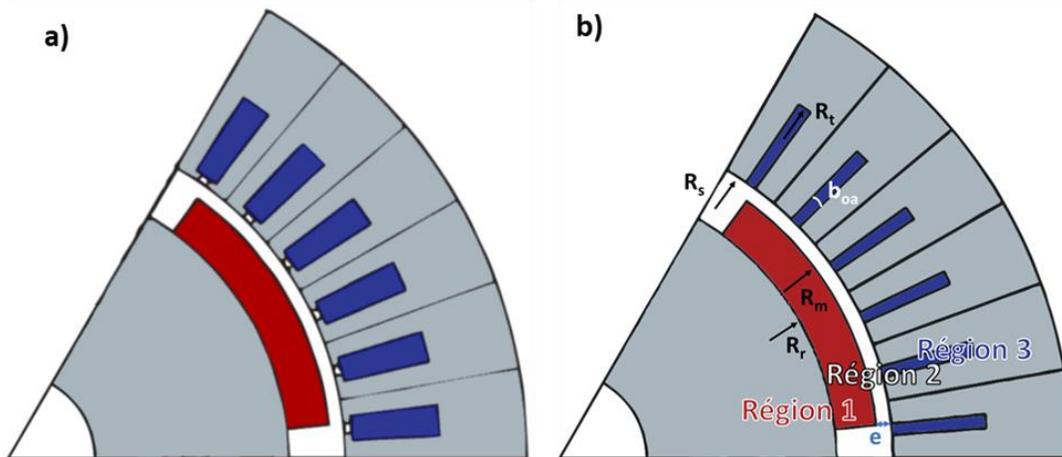


Figure III.1 – Grandeurs géométriques et type de sous-domaines d'un moteur synchrone (a) moteur à aimants tuiles, (b) géométrie simplifiée utilisée dans la méthode des sous-domaines

Pour pouvoir réaliser ce calcul, il est nécessaire de faire les hypothèses suivantes :

- 1) La culasse rotorique et la surface des aimants permanents est considérée parfaitement cylindrique.
- 2) Les moteurs sont considérés comme non saturés. Il est possible de négliger la saturation des éléments ferromagnétiques en considérant leur perméabilité comme infinie.
- 3) L'étude se fait en 2D, sur une tranche de rotor. Ainsi les effets de bord aux extrémités du rotor sont négligés.
- 4) La perméabilité et la magnétisation des aimants est constante.
- 5) Les tôles sont considérées non conductrices électriques afin de négliger l'effet des courants de Foucault.
- 6) Les axes du rotor et du stator sont parallèles.

La géométrie d'un moteur à aimants tuiles simple de la figure III.1a est simplifiée pour rendre le calcul plus rapide. Cette hypothèse est acceptable puisque, le calcul se faisant sans prise en compte des effets de saturation, les lignes de champs au milieu de l'entrefer sont les mêmes pour les deux modèles si les deux encoches présentent une densité de courant recalée en fonction de la surface active. L'utilisation de cette géométrie simplifiée pour le calcul de l'induction magnétique par la méthode des sous-domaines a été validé dans la littérature mais des calculs comparatifs sont tout de même réalisés dans la partie III.2). Ici, les 3 sous-domaines définis sont donc l'aimant (1), l'entrefer d'épaisseur  $e$  (2), et les encoches (3).

Afin de calculer l'induction magnétique dans le moteur, une grandeur abstraite nommée potentiel vecteur  $\vec{A}$  est introduite. Elle est définie comme :

$$\text{rot}(\vec{A}) = \vec{B} \quad (3.2)$$

$$\text{div}(\vec{A}) = \vec{0} \quad (3.3)$$

où  $\vec{B}$  est l'induction magnétique en T définie par :

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} \quad (3.4)$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité de l'air en H/m,  $\vec{H}$  la densité de champ magnétique en T et  $\vec{M}$  la magnétisation du matériau en A/m. L'induction magnétique  $\vec{B}$  est remplacée par le potentiel vecteur  $\vec{A}$  dans l'équation (3.3) :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \nabla \wedge \vec{H} - \mu_0 \nabla \wedge \vec{M} \quad (3.5)$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} - \mu_0 \nabla \wedge \vec{M} \quad (3.6)$$

où  $\vec{J} = \text{rot}(\vec{H})$  est la densité de courant en A/m<sup>2</sup>.

L'étude se faisant en 2D et les effets de bords étant négligé, seule la composante sur l'axe z est prise en compte dans l'étude. L'équation (3.5) devient alors, dans le cas général :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \alpha^2} = -\mu_0 J - \frac{\mu_0}{r} \left( M_\alpha - \frac{\partial M_r}{\partial \alpha} \right) \quad (3.7)$$

connue sous le nom d'équation de Poisson où  $A_z$  est la composante selon z du potentiel vecteur,  $r$  et  $\alpha$  sont les coordonnées polaires du point où l'induction est calculée,  $M_r$  et  $M_\alpha$  sont les coordonnées de la magnétisation des aimants et  $J$  est la densité de courant.

Dans le cas où le matériau n'est ni magnétisé ni parcouru par un courant, l'équation devient :

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \alpha^2} = 0 \quad (3.8)$$

que l'on nomme équation de Laplace.

La résolution de ces équations se fait en suivant cette démarche :

- 1) Les solutions des équations de Maxwell sont données dans chacun des sous-domaines en prenant en compte le milieu ;
- 2) Les expressions des potentiels vecteurs sont simplifiées en utilisant les périodicités, la géométrie et les conditions aux limites des sous-domaines ;
- 3) Les conditions à l'interface des sous-domaines sont utilisées pour constituer un système d'équations permettant de calculer les constantes d'intégrations, inconnues du système ;

- 
- 4) Le système d'équations est résolu et les constantes sont réinjectées dans les expressions de l'induction magnétique.

L'induction magnétique est ainsi calculée sur une ligne de capteurs fictifs placés au milieu de l'entrefer afin d'obtenir une répartition spatiale des composantes de pressions de Maxwell.

#### B. Résolution des équations de Maxwell dans chaque sous-domaine

Le potentiel vecteur permettant d'obtenir l'induction magnétique a une expression différente dans chacun des sous-domaines. Celle-ci dépend du milieu (air, aimant ou encoche bobinée), de la géométrie et de la périodicité du sous-domaine. La solution générale des équations (3.6) et (3.7) est donnée dans un premier temps, avant de prendre en compte les variations correspondant à chaque sous-domaine.

##### *i. Solution sans second membre*

L'équation (3.7) est résolue en utilisant la méthode de la séparation de la variable [Polyanin, 2002] qui consiste à poser :

$$A_z(r, \alpha) = R(r) \cdot S(\alpha) \quad (3.9)$$

Ensuite, l'expression (3.8) est réinjectée dans (3.7) en isolant les termes en  $r$  et ceux en  $\alpha$ , pour obtenir :

$$\frac{1}{R} \left( r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} \right) = -\frac{1}{S} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} \right) = v^2 \quad (3.10)$$

où  $v$  est un nombre réel ( $v \in \mathbb{N}$ ) représentant le rang harmonique, de telle manière que la solution soit périodique en  $\alpha$ . Ainsi le système se retrouve composé des deux équations indépendantes suivantes :

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - v^2 R = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} + v^2 S = 0 \quad (3.12)$$

Ces deux équations possèdent des solutions connues :

$$R = Cr^v + Dr^{-v} \quad (3.13)$$

$$S = A\cos(v\alpha) + B\sin(v\alpha) \quad (3.14)$$

Les solutions (3.12) et (3.13) sont injectées dans (3.8) afin d'obtenir la solution générale sans second membre :

$$A_z = \sum_{v=1}^{\infty} (Cr^v + Dr^{-v})(A\cos(v\alpha) + B\sin(v\alpha)) \quad (3.15)$$

La solution (3.14) est par la suite sommée à une solution particulière dépendant du milieu s'il y a un second membre à l'équation différentielle. Ces solutions particulières sont calculées dans le sous-chapitre suivant pour les sous-domaines aimant et encoche bobinées.

### ii. Solutions particulières des équations de Maxwell

Dans ce chapitre, les solutions particulières liées au second membre de l'équation (3.6) sont calculées. Il s'agit des solutions particulière associée à un milieu dont la magnétisation ( $\vec{M}$ ) ou les courants ( $\vec{J}$ ) y sont non nuls.

#### a) Prise en compte de la magnétisation

Expression de l'équation de Maxwell dans l'aimant

Les aimants permanents sont des sous-domaines magnétisés dans lesquels  $\vec{M} \neq 0$ . La solution de l'équation est la somme de la solution générale (3.14) avec une solution particulière relative au milieu. Cette solution particulière est calculée dans cette partie.

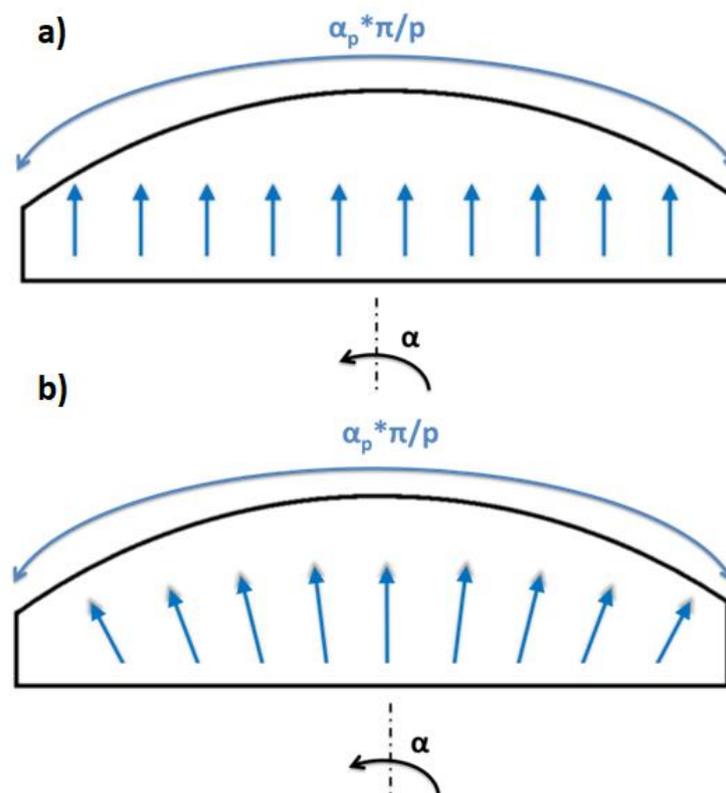


Figure III.2 - Vecteur magnétisation d'un aimant bombé parallèle (a) et radiale (b)

Pour une machine à plusieurs pôles équipés d'aimants fonctionnant linéairement dans le second quadrant, l'amplitude du vecteur magnétisation est égale à  $|\vec{M}| = \frac{B_r}{\mu_0}$  tandis que sa direction dépend de l'orientation de leur aimantation. Dans le cas des moteurs de l'étude, la magnétisation des aimants est principalement **parallèle** (figure III.2(a)) et parfois **radiale** (figure III.2(b)). De plus, ils ne recouvrent pas totalement le pôle, mais simplement une proportion de celui-ci définie par le rapport  $\alpha_p$ .

Dans les deux cas, le vecteur magnétisation peut être écrit en coordonnées polaires :

$$\vec{M} = M_r \vec{r} + M_\alpha \vec{\alpha} \quad (3.16)$$

Les formes d'ondes des coordonnées radiales et tangentielles du vecteur magnétisation sont obtenues à un point fixe du stator en faisant tourner le rotor sur deux pôles. Pour un aimant parallèle, elles ont la forme suivante :

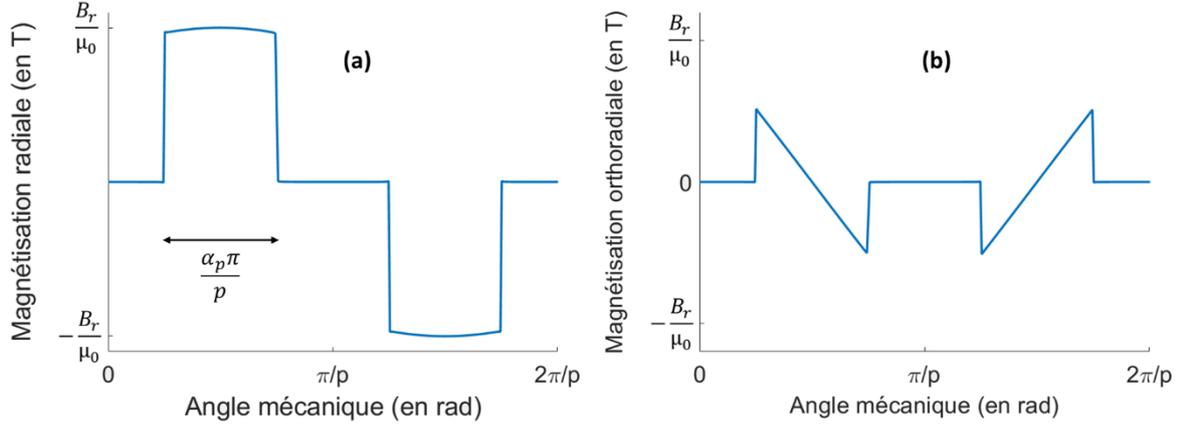


Figure III.3 - Composante radiale(a) et orthoradiale(b) de la magnétisation d'un aimant parallèle

Pour définir le vecteur magnétisation correspondant à ce résultat, il suffit ensuite d'exprimer ses composantes à l'aide des séries de Fourier suivantes :

$$\begin{cases} M_r = \sum_{k=1}^{\infty} M_{rck} k \cos(k \cdot \alpha_r) + M_{rsk} \sin(k \cdot \alpha_r) \\ M_\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} M_{ask} k \sin(k \cdot \alpha_r) + M_{ack} \cos(k \cdot \alpha_r) \end{cases} \quad (3.17a)$$

avec

$$\begin{cases} M_{rck} = M_{rk} \cos(k\omega_r t + k\alpha_0) \\ M_{rsk} = M_{rk} \sin(k\omega_r t + k\alpha_0) \\ M_{ack} = M_{ak} \cos(k\omega_r t + k\alpha_0) \\ M_{ask} = M_{ak} \sin(k\omega_r t + k\alpha_0) \\ M_{rck} = M_{rsk} = M_{ask} = M_{ack} = 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{pour } k = p, 3p, 5p, \dots, K_{max}p \quad (3.16b)$$

et

$$\begin{cases} M_{rk} = \frac{4pB_r}{k\pi\mu_0} \sin\left(\frac{k\pi\alpha_p}{2p}\right) \\ M_{ak} = 0 \end{cases} \quad (3.16c)$$

pour les aimants radiaux et

$$\begin{cases} M_{rk} = \frac{B_r \alpha_p}{\mu_0} (A_{1k} + A_{2k}) \\ M_{\alpha k} = \frac{B_r \alpha_p}{\mu_0} (A_{1k} - A_{2k}) \end{cases} \quad (3.16d)$$

pour les aimants parallèles, où :

$$A_{1k} = \frac{\sin \left[ (k+1) \alpha_p \left( \frac{\pi}{2p} \right) \right]}{(k+1) \alpha_p \left( \frac{\pi}{2p} \right)} \quad \text{et} \quad A_{2k} = \frac{\sin \left[ (k-1) \alpha_p \left( \frac{\pi}{2p} \right) \right]}{(k-1) \alpha_p \left( \frac{\pi}{2p} \right)} \quad (3.16e)$$

Dans ces expressions,  $\omega_r$  est la vitesse de rotation du moteur en rad/s,  $\theta_0$  est la position initiale du rotor en radians,  $B_r$  le flux rémanent de l'aimant en T et  $p$  le nombre de paires de pôles du moteur. Le réel  $K_{max}$  représente le rang harmonique maximum pris en compte dans l'aimant. Par la suite,  $k(1 \leq k \leq K_{max})$  remplace  $\nu$  dans le sous-domaine aimant pour représenter le rang harmonique.

L'équation de Maxwell (3.7) dans le sous-domaine aimant devient :

$$\frac{\partial^2 A_{z1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z1}}{\partial r} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 A_{z1}}{\partial \alpha^2} = -\mu_0 r \sum_k^{K_{max}} \frac{1}{k^2 - 1} [(M_{\alpha ck} - kM_{rsk}) * \cos(k\alpha) + (M_{\alpha sk} + kM_{rck}) * \sin(k\alpha)] \quad (3.18)$$

Solution de l'équation de Maxwell dans un aimant permanent

L'aimant permanent étant un milieu magnétisé, le potentiel vecteur  $A_{z1}$  dans ce sous-domaine est obtenu en sommant la solution générale sans second membre (3.14) avec une solution particulière prenant en compte le second membre de l'équation (3.17) :

$$A_{z1} = \sum_k^{K_{max}} \left( A_1 \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + B_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right) \cos(k\alpha) + \left( C_1 \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + D_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right) \sin(k\alpha) + \frac{\mu_0 r}{k^2 - 1} [(M_{\alpha ck} - kM_{rsk}) \cos(k\alpha) + (M_{\alpha sk} + kM_{rck}) \sin(k\alpha)] \quad (3.19)$$

Dans cette expression, la seconde partie représentant la magnétisation est nulle pour tous les rangs  $k$  qui ne sont pas des multiples impairs du nombre de paires de pôles (cf eq. 3.16b) Les divisions par  $R_m$  et  $R_r$  extraites des constantes d'intégrations sont introduites dans le calcul afin que les quotients  $\frac{r}{R_m}$  et  $\frac{r}{R_r}$  soient proches de 1 et ne tendent pas vers l'infini lorsque  $k$  tend vers l'infini. Cette modification mathématique est faite pour chacune des expressions de potentiel vecteur.

## b) Prise en compte des courants statoriques

Des conducteurs de courant passent dans les encoches du moteur afin de générer un champ magnétique au stator permettant de créer un couple par interaction avec le champ rotorique et de mettre en rotation le moteur. Ces bobines de courant apportent une électrification au sous-domaine encoche, traduit par la présence d'un vecteur  $\vec{J}$  non nul au second membre de l'équation. L'expression du potentiel vecteur dans la  $i^{\text{ème}}$  encoche, noté  $A_{z3i}$ , est la somme de la solution générale (3.14) avec une solution particulière dépendant du bobinage du moteur qui est calculée dans cette partie. Le rang harmonique  $\nu$  dans ce sous-domaine est nommé  $n$  dans les calculs suivants.

### Expression du terme densité de courant dans une encoche

Le vecteur densité de courant  $\vec{J}$  est différent suivant la répartition des courants de phase dans les encoches. Plusieurs cas sont possibles, comme ceux figurant à la figure III.4. Seul le cas d'encochage plein a été utilisé et est développé par la suite, les autres peuvent être trouvés à l'annexe 1.

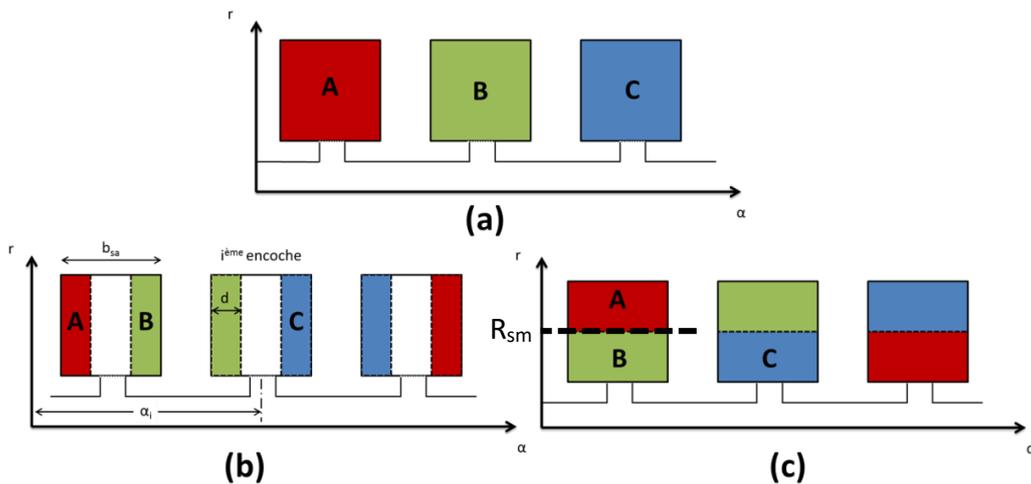


Figure III.4 - Bobinage plein (a), non-overlapping winding (b), overlapping winding (c)

Dans le cas d'un bobinage plein, la densité de courant est constante dans toute l'encoche, soit  $J = J_i$  (3.20) pour  $\alpha \in \left[ \alpha_i - \frac{b_{sa}}{2}; \alpha_i + \frac{b_{sa}}{2} \right]$  où  $J_i$  est la densité de courant de la  $i^{\text{ème}}$  encoche. La densité de courant  $J_i$  est exprimée par la série de Fourier :

$$J_i = J_{i0} + \sum_{\nu}^{V_{max}} J_{i\nu} \quad (3.21)$$

où  $J_{i0}$  représente la composante continue de la densité de courant et les termes  $J_{i\nu}$  permettent de décrire les variations de la répartition spatiale du courant dans une encoche. Dans le cas d'un encochage plein, la densité de courant est la même dans toute l'encoche. Ainsi,  $J_{i\nu} = 0$  et  $J_i = J_{i0}$ .

Solution de l'équation de Maxwell

L'encoche est un milieu non-magnétique ( $\vec{M} = 0$ ) mais étant remplies de bobines de courant qui sont parcourues par un courant. La densité de courant du milieu est donc non nulle ( $\vec{J} \neq 0$ ). L'équation différentielle dans chacune des encoches  $i$  est la suivante :

$$\frac{\partial^2 A_{z3i}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z3i}}{\partial r} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 A_{z3i}}{\partial \alpha^2} = -\mu_0 \vec{J}_i \quad (3.22)$$

La solution de l'équation est composée de la solution générale (3.14) à laquelle est sommée une solution particulière où apparait le terme source induit par la présence de courant. Dans le cas général, cette somme de solutions prend la forme :

$$A_{z3i} = \frac{\mu_0 J_{i0} r^2}{4} + \sum_v A_v (A_{3i} \cos(v\alpha) + B_{3i} \sin(v\alpha)) \quad (3.23)$$

$$A_v = \left( C_{3i} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^v + D_{3i} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-v} \right) + J_{iv}$$

$J_{i0}$  et  $J_{in}$  sont des termes qui dépendent du type de bobinage issus de la série de Fourier (3.23). Dans le cas d'un bobinage plein, (3.22) devient :

$$A_{z3i} = \frac{\mu_0 J_{i0} r^2}{4} + \sum_v A_v (A_{3i} \cos(v\alpha) + B_{3i} \sin(v\alpha)) \quad (3.24)$$

$$A_v = \left( C_{3i} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^v + D_{3i} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-v} \right) \quad (J_{iv} = 0 \text{ dans ce cas})$$

### iii. Expression du potentiel vecteur dans chaque sous-domaine

Dans cette partie, les expressions de potentiel vecteur sont simplifiées en prenant en compte la géométrie du moteur, notamment les symétries puis en appliquant les conditions aux limites avec les tôles rotoriques et statoriques de la figure III.5.

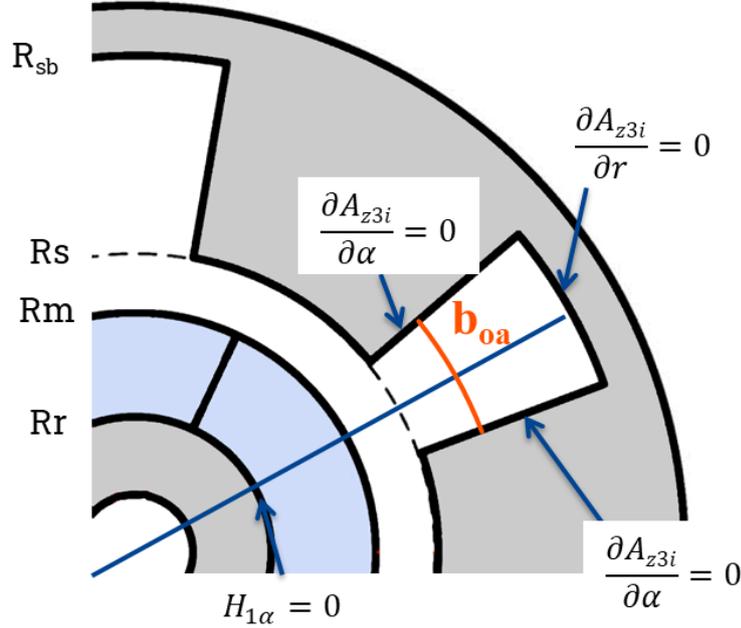


Figure III.5 - Conditions aux limites avec les parties ferromagnétiques

#### a) Sous-domaine aimant

La solution (3.18) est simplifiée en utilisant la condition à la limite entre l'aimant et la culasse rotorique

$$A_{z1} = \sum_k^{K_{max}} \left( A_1 \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + B_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right) \cos(k\alpha) + \left( C_1 \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + D_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right) \sin(k\alpha) + \frac{\mu_0 r}{k^2 - 1} [(M_{\alpha ck} - kM_{rsk}) \cos(k\alpha) + (M_{\alpha sk} + kM_{rck}) \sin(k\alpha)] \quad (3.25)$$

La perméabilité des tôles statoriques est supposée infinie. Ainsi, au niveau de la culasse rotorique ( $r = R_r$ ), les lignes de champs magnétiques sont totalement dirigées vers les parties ferromagnétiques, soit dans le sens radial. La composante ortho-radiale  $H_{1\alpha}$  y est alors nulle et peut être écrite selon (3.3) comme :

$$H_{1\alpha}|_{r=R_r, \forall \alpha} = \frac{1}{\mu_0} B_{1\alpha}|_{r=R_r, \forall \alpha} - M_{\alpha}|_{r=R_r, \forall \alpha} = 0 \quad (3.26)$$

ou, en développant :

$$\begin{cases} B_1 = A_1 G_1 + \frac{\mu_0}{k^2 - 1} (kM_{\alpha ck} - M_{rsk}) \\ D_1 = C_1 G_1 + \frac{\mu_0}{k^2 - 1} (vM_{\alpha sv} + vM_{rck}) \end{cases} \quad (3.27)$$

avec  $G_1 = \left(\frac{R_r}{R_m}\right)^k$ . D'où, en réinjectant (3.26) dans (3.24) :

$$A_{z1} = \sum_k (C_{1k}A_1 + C_{2k}M_{\alpha ck} - C_{3k}M_{rsk}) \cos(k\alpha) + (C_{1k}C_1 + C_{2k}M_{\alpha sk} - C_{3k}M_{rck}) \sin(k\alpha) \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{cases} C_{1k} = \left[ \left(\frac{r}{R_m}\right)^k + G_1 \left(\frac{r}{R_r}\right)^{-k} \right] \\ C_{2k} = \frac{\mu_0}{k^2 - 1} \left[ R_r k \left(\frac{r}{R_r}\right)^k + r \right] \\ C_{3k} = \frac{\mu_0}{k^2 - 1} \left[ R_r \left(\frac{r}{R_r}\right)^{-k} + kr \right] \end{cases}$$

#### b) Sous-domaine entrefer

L'entrefer étant composé d'air il n'est ni magnétisé ( $M=0$ ), ni parcouru par un courant ( $J = 0$ ). Le potentiel vecteur est simplement la solution de l'équation de Laplace (3.7) sans terme source.

$$A_{z2} = \sum_k \left( A_2 \left(\frac{r}{R_s}\right)^k + B_2 \left(\frac{r}{R_m}\right)^{-k} \right) \cos(k\alpha) + \left( C_2 \left(\frac{r}{R_s}\right)^k + D_2 \left(\frac{r}{R_m}\right)^{-k} \right) \sin(k\alpha) \quad (3.29)$$

Ici, le même rang harmonique  $k$  est choisi que pour le sous-domaine aimant car ces deux sous-domaines ont la même périodicité.

#### c) Sous-domaine encoche

Le sous-domaine encoche est soumis aux conditions aux limites avec la culasse statorique. Pour simplifier le potentiel vecteur à partir des symétries, de la géométrie et des conditions aux limites, les variables  $r$  et  $\alpha$  de la décomposition du potentiel vecteur (3.8) sont prises séparément. Les calculs sont faits à vide, sans la solution particulière où apparaît  $\vec{j}$ .

$$A_{z3i} = R_{3i}(r)S_{3i}(\alpha)$$

En plaçant l'origine du signal à  $\alpha = \alpha_i$ , le potentiel vecteur devient un signal pair ce qui signifie que  $S_{3i}(\alpha) = S_{3i}(-\alpha)$ . Il est donc possible de supprimer le terme en sinus de la formule. Et  $S$  devient  $S_{3i}(\alpha) = A_{3i} \cos(v\alpha)$ .

Les conditions aux limites des encoches de la figure III.6 sont maintenant exprimées pour simplifier l'expression.

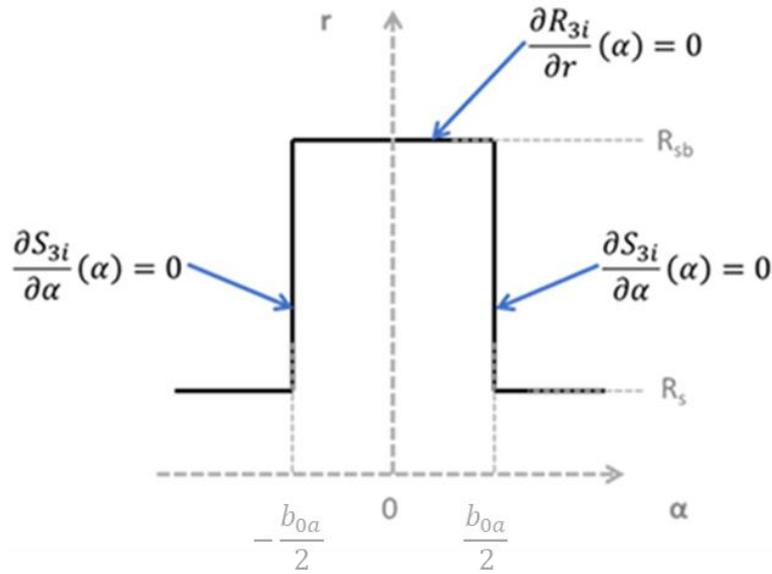


Figure III.6 - Conditions aux limites des sous-domaines encoches

La condition aux limites gauche et droite de l'encoche, à  $\alpha = \frac{b_{0a}}{2}$ , s'écrit :

$$\frac{\partial S_{3i}}{\partial \alpha} \left( \alpha = \frac{b_{0a}}{2} \right) = 0 \leftrightarrow -nA \sin \left( n \frac{b_{0a}}{2} \right) = 0 \leftrightarrow n \frac{b_{0a}}{2} = \pi (\text{modulo } \pi) \quad (3.30)$$

Ceci revient à dire que la périodicité du sous-domaine encoche n'est plus en  $n$ , mais en  $E_n = \frac{n\pi}{b_{0a}}$  qui est utilisé par la suite pour dénommer le rang harmonique. Dans le cas d'étude où l'origine est placée au milieu d'une dent statorique, la condition (3.29) en  $\alpha_i - b_{0a}$ . Ceci crée un déphasage et  $S$  devient  $S_{3i}(\alpha) = A_{3i} \cos \left( E_n \left( \alpha + \frac{b_{0a}}{2} - \alpha_i \right) \right)$ .

De la même manière pour l'interface entre le haut de l'encoche et la culasse statorique :

$$\frac{\partial R_{3i}}{\partial r} (R_{sb}) = 0 \leftrightarrow E_n C_{3i} \frac{R_{sb}^{E_n-1}}{R_{sb}} - E_n D_{3i} \frac{R_{sb}^{-E_n-1}}{R_s} = 0 \leftrightarrow C_{3i} = D_{3i} G_3$$

Ainsi, l'expression du potentiel vecteur dans le sous-domaine encoche  $A_{z3i}$  devient :

$$A_{z3i} = \frac{\mu_0 J_{i0} r^2}{4} + \sum_n A_n \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{0a}}{2} - \alpha_i \right) \right] \quad (3.31)$$

$$A_n = D_{3i} \left( G_3 \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n} + \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n} \right)$$

avec  $G_3 = \frac{R_{sb}}{R_s}$ .

*iv. Expression de l'induction dans chaque sous-domaine*

Le potentiel vecteur et l'induction magnétique sont reliés par la relation (3.1). Cette méthode a l'avantage de donner les composantes de l'induction magnétique de manière indépendante. Les composantes radiales et tangentielles sont égales à :

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \alpha} \text{ et } B_\alpha = -\frac{\partial A_z}{\partial r} \quad (3.32)$$

Bien que seul le calcul dans l'entrefer soit utile pour l'étude, les expressions de l'induction magnétique dans chacun des sous-domaines sont données ici. A noter que  $B_{jr}$  et  $B_{j\alpha}$  représentent respectivement la composante radiale et tangentielle de l'induction dans le sous-domaine  $j$ .

a) Dans l'aimant

$$B_{1r} = -\frac{1}{r} \left( \sum_k k(C_{1k}A_1 + C_{2k}M_{\alpha ck} - C_{3k}M_{rsk}) \sin(k\alpha) - \sum_k k(C_{1k}C_1 + C_{2k}M_{\alpha sk} + C_{3k}M_{rck}) \cos(k\alpha) \right) \quad (3.33a)$$

$$B_{1\alpha} = -\frac{1}{r} \left( \sum_k (C_{4k}A_1 + C_{5k}M_{\alpha ck} - C_{6k}M_{rsk}) \cos(k\alpha) + \sum_k (C_{4k}C_1 + C_{5k}M_{\alpha sk} + C_{6k}M_{rck}) \sin(k\alpha) \right) \quad (3.32b)$$

avec

$$\begin{cases} C_{4k} = k \left[ \left( \frac{r}{R_m} \right)^k - G_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right] \\ C_{5k} = \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} \left[ -R_r(k)^2 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} + r \right] \\ C_{6k} = \frac{\mu_0 k}{(k)^2 - 1} \left[ -R_r \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-p} + r \right] \end{cases}$$

b) Dans l'entrefer

$$B_{2r} = -k \left( \sum_k \left( \frac{A_2}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{k-1} + \frac{B_2}{R_m} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-k-1} \right) \sin(k\alpha) - \sum_k \left( \frac{C_2}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{k-1} + \frac{D_2}{R_m} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-p-1} \right) \cos(k\alpha) \right) \quad (3.34a)$$

$$B_{2\alpha} = -k \sum_k \left( \frac{A_2}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{k-1} - \frac{B_2}{R_m} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-k-1} \right) \cos(k\alpha) - k \sum_k \left( \frac{C_2}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{k-1} - \frac{D_2}{R_m} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-k-1} \right) \sin(k\alpha) \quad (3.33b)$$

c) Dans la  $i^{\text{ème}}$  encoche

$$B_{3ir} = - \sum_k E_n D_{3i} \left( \frac{G_3}{R_{sb}} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n-1} + \frac{1}{R_t} \left( \frac{r}{R_t} \right)^{-E_n-1} \right) \sin \left( E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right) \quad (3.35)$$

$$B_{3i\alpha} = \frac{\mu_0 J_{i0} r}{2} + \sum_k E_n D_{3i} \left( \frac{G_3}{R_{sb}} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n-1} - \frac{1}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n-1} \right) \cos \left( E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right) \quad (3.34b)$$

C. Détermination des constantes d'intégration en exprimant les grandeurs magnétiques aux interfaces entre les sous-domaines

$A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D_2$  et  $D_{3i}$  sont des constantes d'intégration à déterminer en utilisant les conditions aux interfaces de sous-domaines. Comme sur la figure III.7, appliquer les conditions aux limites revient à exprimer la continuité des grandeurs magnétiques à l'interface des sous-domaines mitoyens.

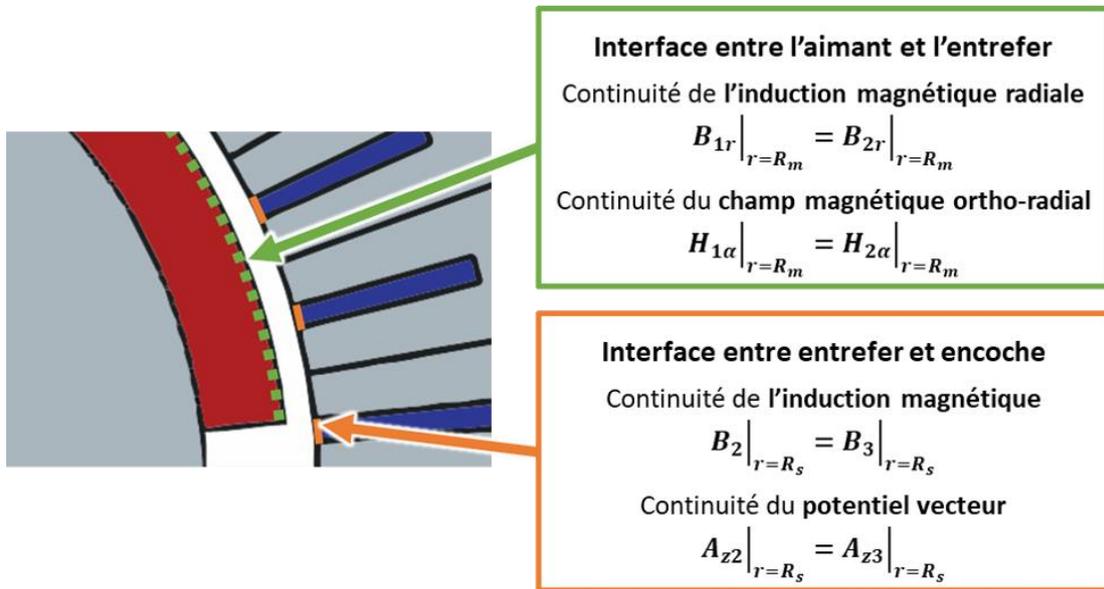


Figure III.7 - Equations de continuité des grandeurs électromagnétiques à l'interface des sous-domaines

La continuité est complète à l'interface entre les sous-domaines entrefer et encoche qui sont tous les deux constitués d'air. La ligne d'interface appartenant aux deux sous-domaines, ceci revient à calculer la grandeur magnétique dans les deux formalismes en un même point et d'égaliser.

Ces équations permettent de définir un système de  $6 * K_{max} + N_s * N_{max}$  équations à 12 inconnues. Afin d'optimiser le temps de calcul, celui-ci est transformé en un système matriciel  $Q \cdot X = Y$  où  $X$  est le vecteur des inconnus, à savoir les constantes d'intégration,  $Q$  est une matrice dont les termes dépendent de la géométrie et des matériaux et  $Y$  le vecteur des termes source.

i. Interface entre l'aimant permanent et l'entrefer

a) Continuité de l'induction magnétique

Il y a continuité de la composante normale de l'induction magnétique, à savoir :

$$B_{1r}|_{r=R_m} = B_{2r}|_{r=R_m} \quad (3.36)$$

où, d'après (3.32a) :

$$\begin{cases} C_{1k}|_{r=R_m} = \left[ \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^k + G_1 \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{-k} \right] = (1 + G_1^2) \\ C_{2k}|_{r=R_m} = \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} \left[ R_r k \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{-k} + R_m \right] = \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} (R_r k G_1 + R_m) \\ C_{3k}|_{r=R_m} = \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} \left[ R_r \left( \frac{R_m}{R_r} \right)^{-k} + p k R_m \right] = \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} (R_r G_1 + k R_m) \end{cases}$$

Donc

$$\begin{aligned} B_{1r}|_{r=R_m} = & \left( A_1(1 + G_1^2) + \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} [(R_r k G_1 + R_m)M_{\alpha ck} - (R_r G_1 + k R_m)M_{rsk}] \right) \cos(k\alpha) \\ & + \left( C_1(1 + G_1^2) + \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} [(R_r k G_1 + R_m)M_{\alpha sk} - (R_r G_1 + k R_m)M_{rck}] \right) \sin(k\alpha) \end{aligned} \quad (3.37)$$

De même, d'après (3.33a) :

$$B_{2r}|_{r=R_m} = (A_2 G_2 + B_2) \cos(k\alpha) + (C_2 G_2 + D_2) \sin(k\alpha) \quad (3.38)$$

En égalisant (3.36) et (3.37) et isolant les termes en  $\cos(k\alpha)$  et  $\sin(k\alpha)$ , les équations suivantes sont obtenues :

$$A_1(1 + G_1^2) + \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} [(R_r k G_1 + R_m)M_{\alpha ck} - (R_r G_1 + k R_m)M_{rsk}] = A_2 G_2 + B_2 \quad (3.39)$$

$$C_1(1 + G_1^2) + \frac{\mu_0}{(k)^2 - 1} [(R_r k G_1 + R_m)M_{\alpha sk} + (R_r G_1 + k R_m)M_{rck}] = C_2 G_2 + D_2 \quad (3.40)$$

Pour avoir des calculs plus rapides, ces équations sont réécrites sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \mathbb{K}_{11}A_1 + \mathbb{K}_{13}A_2 + \mathbb{K}_{14}B_2 = Y_1 \\ \mathbb{K}_{22}C_1 + \mathbb{K}_{25}C_2 + \mathbb{K}_{26}D_2 = Y_2 \end{cases} \quad (3.41)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{11} = \mathbb{I}_K + \mathbb{G}_1^2 \\ \mathbf{K}_{22} = \mathbb{I}_K + \mathbb{G}_1^2 \\ \mathbf{K}_{13} = -\mathbb{G}_2 \\ \mathbf{K}_{25} = -\mathbb{G}_2 \\ \mathbf{K}_{14} = -\mathbb{I}_K \\ \mathbf{K}_{26} = -\mathbb{I}_K \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 = -\mu_0(\mathbb{K}^2 - \mathbb{I}_K)^{-1}[(\mathbf{R}_r \mathbb{K} \mathbb{G}_1 + \mathbf{R}_m \mathbb{I}_k) \mathcal{M}_{ack} - (\mathbf{R}_r \mathbb{G}_1 + \mathbf{R}_m \mathbb{K}) \mathcal{M}_{rsk}] \\ \mathbf{Y}_2 = -\mu_0(\mathbb{K}^2 - \mathbb{I}_K)^{-1}[(\mathbf{R}_r \mathbb{K} \mathbb{G}_1 + \mathbf{R}_m \mathbb{I}_k) \mathcal{M}_{ask} + (\mathbf{R}_r \mathbb{G}_1 + \mathbf{R}_m \mathbb{K}) \mathcal{M}_{rck}] \end{cases}$$

$A_1, C_1, A_2, B_2, C_2, D_2, \mathcal{M}_{rsk}, \mathcal{M}_{rck}, \mathcal{M}_{ack}$ , et  $\mathcal{M}_{ask}$  sont des vecteurs colonnes construits tels que  $A_1 = [A_1(1), A_1(2), \dots, A_1(K_{max})]^T$  où  $K_{max}$  représente le rang harmonique maximum et

$$\begin{cases} \mathbf{G}_1 = \text{diag}(G_1(1), G_1(2), \dots, G_1(K_{max})) \\ \mathbf{G}_2 = \text{diag}(G_2(1), G_2(2), \dots, G_2(K_{max})) \\ \mathbf{K} = \text{diag}(1, 2, \dots, K_{max}) \\ \mathbf{I}_K = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)_{K_{max} \times K_{max}} \end{cases}$$

avec  $G_1(k) = \left(\frac{R_r}{R_m}\right)^k$  et  $G_2(k) = \left(\frac{R_m}{R_s}\right)^k$ .

Ce sous-système est constitué de  $2K_{max}$  équations.

#### b) Continuité du champ magnétique

La continuité de la composante tangentielle du champ magnétique s'exprime :

$$H_{1\alpha}|_{r=R_m} = H_{2\alpha}|_{r=R_m} \quad (3.42)$$

Le sous-domaine 1 étant magnétisé et non-parcouru par un courant, l'équation (3.3) y devient  $B_1 = \mu_0 \mu_r H_1 + \mu_0 M_1$  donc  $H_{1\alpha} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} B_{1\alpha} - \frac{1}{\mu_r} M_\alpha$  et  $H_{2\alpha} = \frac{1}{\mu_0} B_{2\alpha}$  qui deviennent en  $r = R_m$  :

$$\begin{aligned} H_{1\alpha}|_{r=R_m} &= \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \sum_k C_{1k}|_{r=R_m} A_1 + [C_{2k}|_{r=R_m} M_{ack} - C_{3k}|_{r=R_m} M_{rsk}] \cos(ka) \\ &\quad + C_{1k}|_{r=R_m} A_1 + [C_{2k}|_{r=R_m} M_{ask} + C_{3k}|_{r=R_m} M_{rck}] \sin(ka) \\ &\quad - \sum_{k=p*(1,3,5,\dots)}^\infty M_{ack} \cos(k\alpha) + M_{ask} \sin(k\alpha) \end{aligned}$$

$$H_{1\alpha}|_{r=R_m} = A_1(1 - G_1^2) + \frac{\mu_0}{k^2 - 1} [k(R_m + R_r G_1) M_{ack} - (R_m - R_r G_1) M_{rsk}] \quad (3.43)$$

$$H_{2\alpha}|_{r=R_m} = \mu_r (A_2 G_2 - B_2) \cos(k\alpha) + \mu_r (C_2 G_2 - D_2) \sin(k\alpha) \quad (3.44)$$

Ce qui devient en égalisant (3.42) et (3.43) et isolant les termes en  $\cos(k\alpha)$  et  $\sin(k\alpha)$  :

$$A_1(1 - G_1^2) + \frac{\mu_0}{k^2 - 1} [k(R_m + R_r G_1)M_{ack} - (R_m - R_r G_1)M_{rsk}] = A_2 G_2 - B_2 \quad (3.45)$$

$$C_1(1 - G_1^2) + \frac{\mu_0}{k^2 - 1} [k(R_m + R_r G_1)M_{ask} - (R_m - R_r G_1)M_{rck}] = C_2 G_2 - D_2 \quad (3.46)$$

Exprimé sous forme matricielle :

$$\begin{cases} K_{31}A_1 + K_{33}A_2 + K_{34}B_2 = Y_3 \\ K_{42}C_1 + K_{45}C_2 + K_{46}D_2 = Y_4 \end{cases} \quad (3.47)$$

$$\begin{cases} K_{31} = \mathbb{I}_K - \mathbb{G}_1^2 \\ K_{42} = \mathbb{I}_K - \mathbb{G}_1^2 \\ K_{33} = -\mathbb{G}_2 \\ K_{45} = -\mathbb{G}_2 \\ K_{34} = \mathbb{I}_K \\ K_{46} = \mathbb{I}_K \end{cases} \begin{cases} Y_3 = -\mu_0(K^2 - \mathbb{I}_K)^{-1} [K(R_m \mathbb{I}_K - R_r \mathbb{G}_1) \mathcal{M}_{ack} - (R_m \mathbb{I}_K + R_r \mathbb{G}_1) \mathcal{M}_{rsk}] \\ Y_4 = -\mu_0(K^2 - \mathbb{I}_K)^{-1} [K(R_m \mathbb{I}_K - R_r \mathbb{G}_1) \mathcal{M}_{ask} + (R_m \mathbb{I}_K + R_r \mathbb{G}_1) \mathcal{M}_{rck}] \end{cases}$$

Ce sous-système est constitué de  $2K_{max}$  équations.

### ii. Interface entre l'entrefer et l'ouverture d'encoche

L'entrefer et l'ouverture d'encoche sont tous les deux constitués d'air, il y a donc continuité totale des grandeurs magnétiques à leur interface. Ici, la continuité de l'induction magnétique et du potentiel vecteur sont étudiées.

#### a) Continuité de l'induction magnétique

De la même manière ici, en étudiant la continuité de l'induction magnétique

$$B_{3i\alpha}|_{r=Rs} = B_{2\alpha}|_{r=Rs} \quad (3.48)$$

Où

$$B_{3i\alpha}|_{r=Rs} = \mu_0 J_{i0} \frac{R_s^2}{2} - \sum_n E_n D_{3i} (G_3^2 - 1) \cos \left( E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right) \quad (3.49)$$

$$B_{2\alpha}|_{r=Rs} = k \sum_k (-A_2 + G_2 B_2) \cos(k\alpha) + (-C_2 + G_2 D_2) \sin(k\alpha) \quad (3.50)$$

Cette fois-ci, les périodicités des sous-domaines étant différentes, il n'est pas possible de simplement égaliser les termes en cosinus et en sinus. Afin de pouvoir égaliser (3.48) et (3.49), il est nécessaire de modifier l'expression de  $B_{3i\alpha}$  afin d'avoir le même cosinus dans les deux termes. Pour cela l'expression de l'induction magnétique dans l'encoche est développée à l'aide des séries de Fourier en cherchant à obtenir les expressions suivantes qui permettent de réécrire les termes en  $\cos \left( E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right)$  en  $\cos(k\alpha)$  ou  $\sin(k\alpha)$ :

$$\begin{cases} B_{3i\alpha}|_{r=R_s} = \mu_0 J_{i0} \frac{R_s^2}{2} - \sum_n B_{nc} \cos(ka) \\ B_{3i\alpha}|_{r=R_s} = \mu_0 J_{i0} \frac{R_s^2}{2} - \sum_n B_{ns} \sin(ka) \end{cases} \quad (3.51)$$

Avec

$$\begin{cases} B_{nc} = -\frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\alpha_i - \frac{b_{oa}}{2}}^{\alpha_i + \frac{b_{oa}}{2}} \sum_n E_n D_{3i} (G_3^2 - 1) \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right] \cos(k\alpha) d\alpha \\ B_{ns} = -\frac{1}{\pi} \sum_i \int_{\alpha_i - \frac{b_{oa}}{2}}^{\alpha_i + \frac{b_{oa}}{2}} \sum_n E_n D_{3i} (G_3^2 - 1) \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i \right) \right] \sin(k\alpha) d\alpha \end{cases}$$

Ceci revient à, après développement :

$$\begin{cases} B_{nc} = \sum_n E_n D_{3i} (G_3^2 - 1) \eta \\ B_{ns} = \sum_n E_n D_{3i} (G_3^2 - 1) \xi \end{cases} \quad (3.52)$$

L'équation (3.47) devient alors :

$$\begin{cases} \left\{ \sum_i \frac{\mu_0 J_{i0} R_s^2}{2} \eta_{i0} - \sum_i \sum_n E_n D_{3i} \left( \frac{G_3}{R_{sb}} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n - 1} - \frac{1}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n - 1} \right) \eta_i = -kA_2 + kG_2 B_2 \right. \\ \left. \sum_i \frac{\mu_0 J_{i0} R_s^2}{2} \xi_{i0} - \sum_i \sum_n E_n D_{3i} \left( \frac{G_3}{R_{sb}} \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n - 1} - \frac{1}{R_s} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n - 1} \right) \xi_i = -kC_2 + kG_2 D_2 \right. \end{cases} \quad (3.53)$$

avec

$$\begin{cases} \eta_{i(M,K)} = \frac{1}{\pi} \frac{-k}{(F_m^2 - k^2)} \left[ \cos(m\pi) \sin \left( k\alpha_i + k \frac{b_{oa}}{2} \right) - \sin \left( k\alpha_i - k \frac{b_{oa}}{2} \right) \right] \\ \xi_{i(M,K)} = \frac{1}{\pi} \frac{k}{(F_m^2 - k^2)} \left[ \cos(m\pi) \cos \left( k\alpha_i + k \frac{b_{oa}}{2} \right) - \cos \left( k\alpha_i - k \frac{b_{oa}}{2} \right) \right] \\ \eta_{i0(k)} = \frac{2}{k\pi} \sin \left( k \frac{b_{oa}}{2} \right) \cos(k\alpha_i) \\ \xi_{i0(k)} = \frac{2}{k\pi} \sin \left( k \frac{b_{oa}}{2} \right) \sin(k\alpha_i) \end{cases}$$

Sous forme matricielle, celles-ci s'expriment de la forme suivante :

$$\begin{cases} K_{53}A_2 + K_{54}B_2 + K_{57}D_{3i} = Y_5 \\ K_{65}C_2 + K_{66}D_2 + K_{67}D_{3i} = Y_6 \end{cases} \quad (3.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{53} = -\mathbb{K} \\ K_{54} = \mathbb{G}_2 * \mathbb{K} \\ K_{57} = \eta^T E_{tn} (\mathbb{G}_{3t}^2 - 1) \\ K_{65} = -\mathbb{K} \\ K_{66} = \mathbb{G}_2 * \mathbb{K} \\ K_{67} = \xi^T E_{tn} (\mathbb{G}_{3t}^2 - 1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_5(k) = \sum_i \mu_0 J_{i0} \frac{R_s^2}{2} \eta_{i0}(k) \\ Y_6(k) = \sum_i \mu_0 J_{i0} \frac{R_s^2}{2} \xi_{i0}(k) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = (\eta_1^T, \eta_2^T, \dots, \eta_{N_s}^T)^T \\ \xi = (\xi_1^T, \xi_2^T, \dots, \xi_{N_s}^T)^T \\ E_{tn} = \text{diag}(E_n, E_n, \dots, E_n)_{N_s * N_{max}} \\ \mathbb{G}_{3t} = \text{diag}(\mathbb{G}_3, \mathbb{G}_3, \dots, \mathbb{G}_3)_{N_s * N_{max}} \end{array} \right.$$

Ce sous-système est constitué de  $2K_{max}$  équations.

b) Continuité du potentiel vecteur

De même l'équation de continuité du potentiel vecteur

$$A_{z2}|_{r=R_s} = A_{z3}|_{r=R_s} \quad (3.55)$$

devient de la même manière :

$$D_{3i}(G_3^2 + 1) = \sum_k [(A_2 + B_2 G_2) \sigma_i + (C_2 + D_2 G_2) \tau_i] \quad (3.56)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} \sigma_i = \left(\frac{2\pi}{b_{oa}}\right) \eta_i \\ \tau_i = \left(\frac{2\pi}{b_{oa}}\right) \xi_i \end{array} \right.$  pour transformer les  $\cos(k\alpha)$  et les  $\sin(k\alpha)$  en  $\cos\left(E_n \left(\alpha + \frac{b_{sa}}{2} - \alpha_i\right)\right)$

Ce qui donne sous forme matricielle :

$$K_{73}A_2 + K_{74}B_2 + K_{75}C_2 + K_{76}D_2 + K_{77}D_{3i} = 0 \quad (3.57)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{73} = \sigma \\ K_{74} = \sigma \mathbb{G}_2 \\ K_{75} = \tau \\ K_{76} = \tau \mathbb{G}_2 \\ K_{77} = \mathbb{G}_{3t}^2 + \mathbb{I}_{M * N_s} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma = (\sigma_1^T, \sigma_2^T, \dots, \sigma_{N_s}^T)^T \\ \tau = (\tau_1^T, \tau_2^T, \dots, \tau_{N_s}^T)^T \end{array} \right.$$

Ce sous-système est constitué de  $N_s * N_{max}$  équations.

D. Résolution du système d'équations d'interfaces et déduction des composantes de l'induction magnétique

Calculer l'induction magnétique revient à résoudre un système de  $6K_{max} + N_s N_{max}$  équations à  $6K_{max} + N_s N_{max}$  inconnues. Il est exprimé sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & K_{26} & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{42} & 0 & 0 & K_{45} & K_{46} & 0 \\ 0 & 0 & K_{53} & K_{54} & 0 & 0 & K_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{65} & K_{66} & K_{67} \\ 0 & 0 & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \\ Y_7 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Il ne reste plus qu'à résoudre ce système afin d'obtenir toutes les constantes d'intégration qui sont réinjectées dans les formules de l'induction magnétique (3.32) ~ (3.34).

2. Résultats du modèle électromagnétique comparé aux éléments finis (Flux 2D)

A. Induction magnétique

Dans cette partie, les résultats du modèle électromagnétiques sont validés à l'aide d'un outil élément fini, Flux 2D. La comparaison est faite avec un modèle présentant des encoches avec ouverture (figure III.8a), et un autre où elles ont été remplacées par des encoches fines comme il est fait dans le modèle analytique (figure III.8b). Ce second modèle est dénommé « modèle à encoches fines ». Le moteur étudié est un moteur synchrone à aimants permanents à 3 paires de pôles et 36 encoches. Les parties ferromagnétiques y sont supposées sans saturation (leur perméabilité magnétique est supposée infinie), et les aimants fonctionnent dans la partie linéaire de leur courbe  $B(H)$ . Les différentes données géométriques et matériaux sont données dans le tableau III.1.

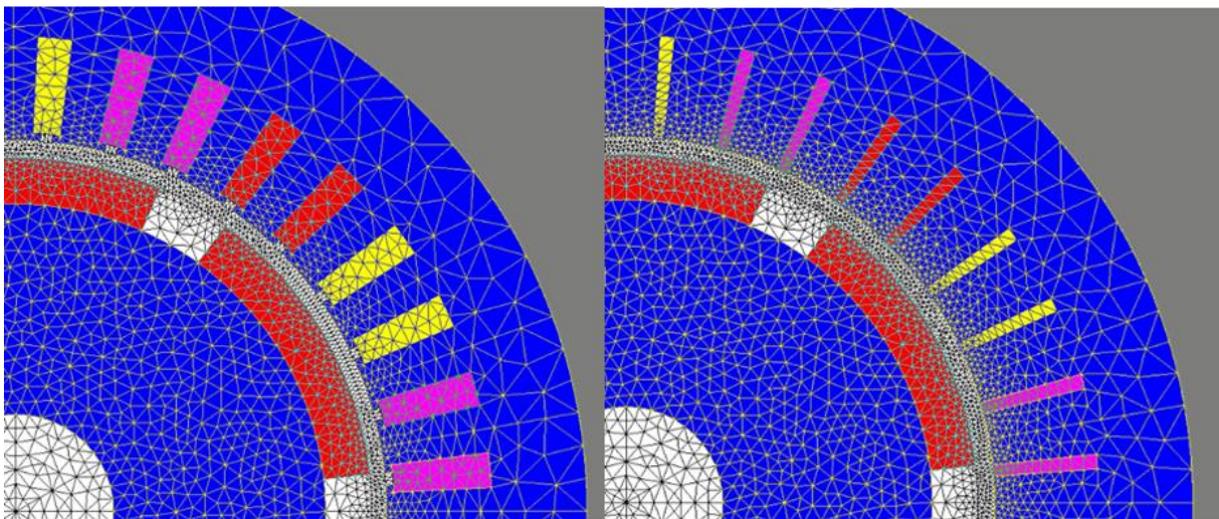


Figure III.8 - Modèles éléments finis de comparaison

Tableau III-1 - Paramètres géométriques et des matériaux du moteur étudié

$2p/Z_s$	6/36	Ouverture d'encoche (m) $b_{oa}$	$1.80 \times 10^{-3}$
Ratio aimant $\alpha_p$	0.8	Rayon culasse rotor (m) $R_r$	0.027
Flux Rémanent (T) $B_r$	1.08	Rayon ext rotor (m) $R_m$	0.03105
Perméabilité rel aimant $\mu_r$	1.07	Rayon int stator (m) $R_s$	0.0325
Courant (A) I	12	Rayon ext encoche (m) $R_{sb}$	0.0417

Dans un premier temps, les composantes radiales et orthoradiales de l'induction magnétique issues des trois modèles sont comparées aux figures III.9 et III.10. Ces figures sont obtenues en calculant l'induction magnétique sur une ligne de points imaginaires placée au milieu de l'entrefer magnétique. Seule l'induction sur un pôle magnétique ( $\frac{360}{2p}$  degrés) y est visible.

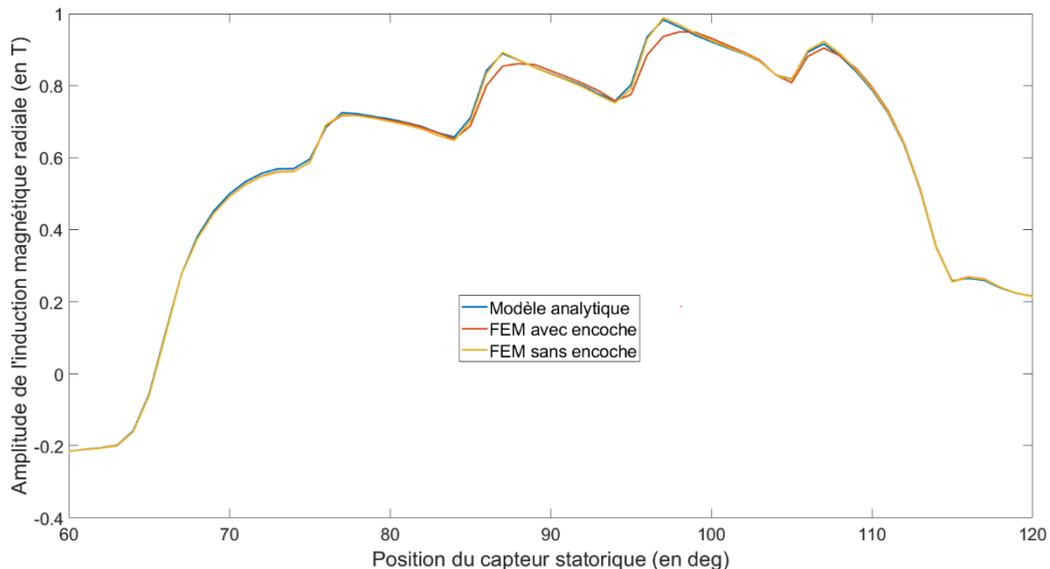


Figure III.9 - Comparaison de la composante radiale de l'induction magnétique obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis sur un pôle magnétique

Les résultats sont très proches. Particulièrement entre le modèle analytique et le modèle FEM à encoches fines. Il y a néanmoins quelques petites différences. Il faudra s'assurer que celles-ci n'aient pas d'impact sur le contenu harmonique des pressions de Maxwell.

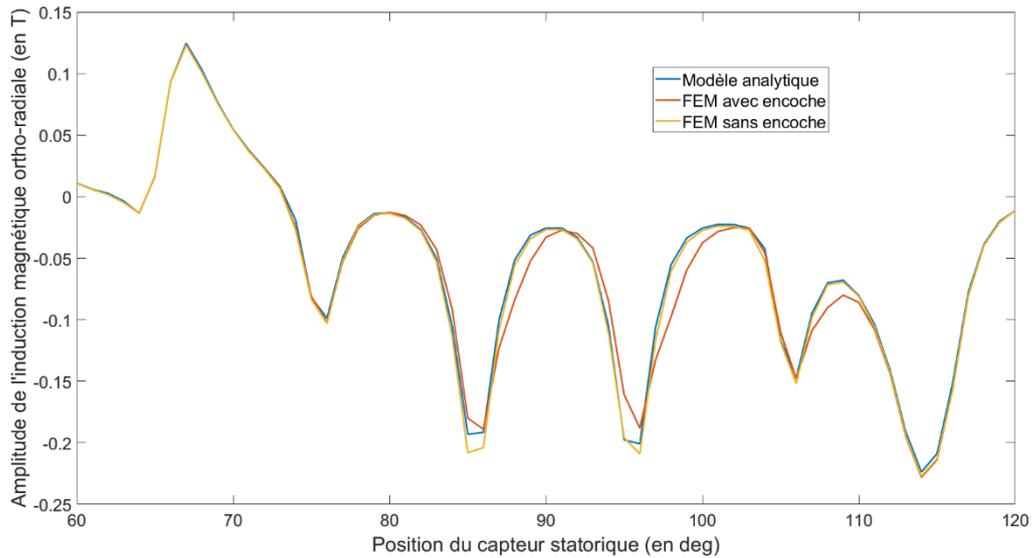


Figure III.10 - Comparaison de la composante ortho-radiale de l'induction magnétique obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis (zoom sur un pôle magnétique)

### B. Contenu harmonique des pressions de Maxwell

Le contenu harmonique est calculé en effectuant une transformation de Fourier sur le signal temporel et la répartition spatiale de l'induction magnétique. Un exemple de spectre est donné à la figure III.11, puis une comparaison de l'amplitude des pics principaux est faite entre les 3 modèles aux figure III.12 et III.13.

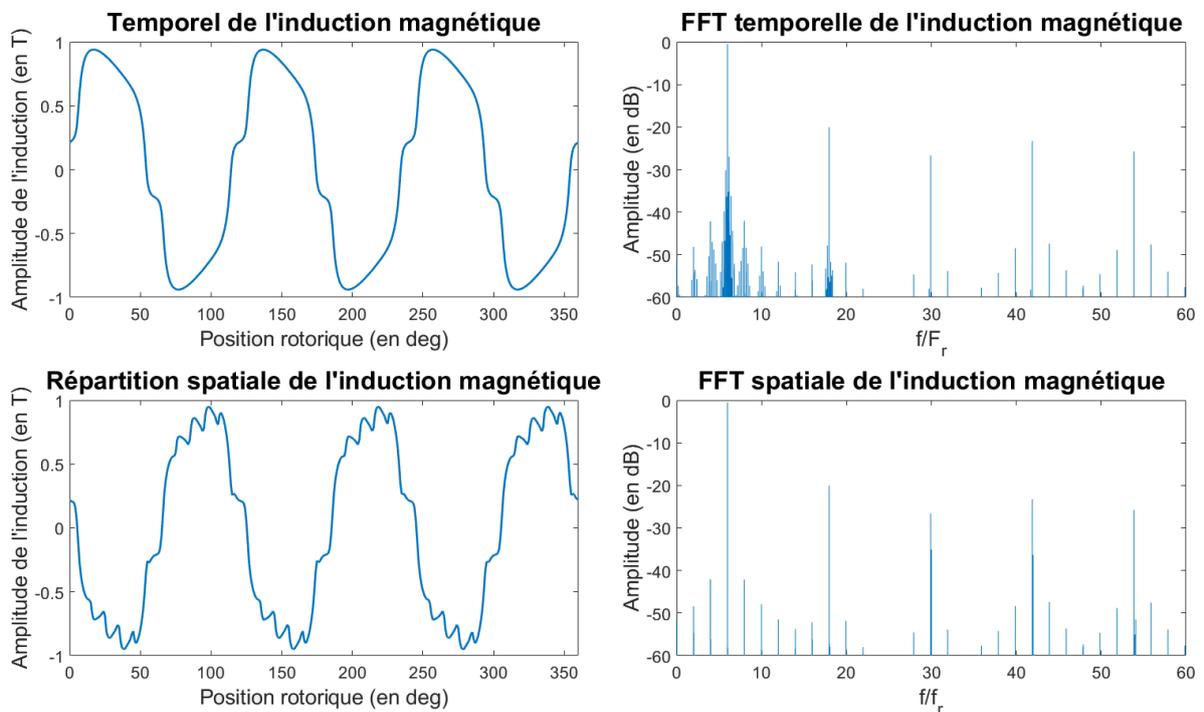


Figure III.11 - Transformée de Fourier spatiale et temporelle de l'induction magnétique

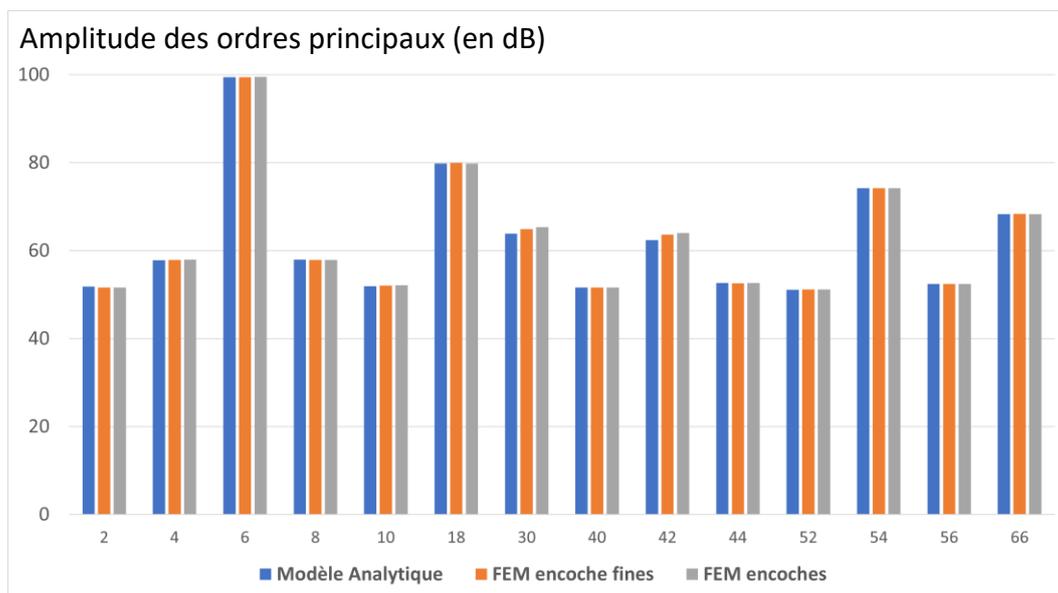


Figure III.12 - Comparaison des ordres spatiaux principaux de l'induction magnétique

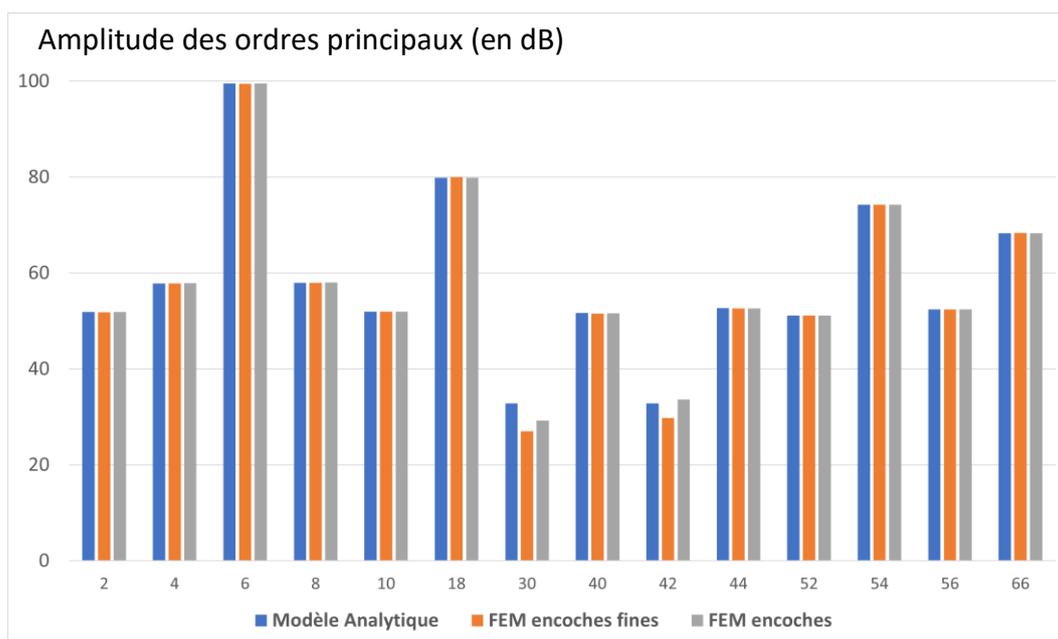


Figure III.13 - Comparaison des ordres temporels principaux de l'induction magnétique

L'amplitude du contenu harmonique est très proche pour les 3 modèles, hormis pour les ordres 30 et 42 temporels. La variation de ces ordres témoigne des petites différences au niveau des encoches. Leur effet sur le contenu harmonique étant très faible (moins de 5dB de différence), ces écarts dus aux approximations géométriques sont acceptés tout en les gardant à l'esprit en cas de besoin pour les conclusions futures.

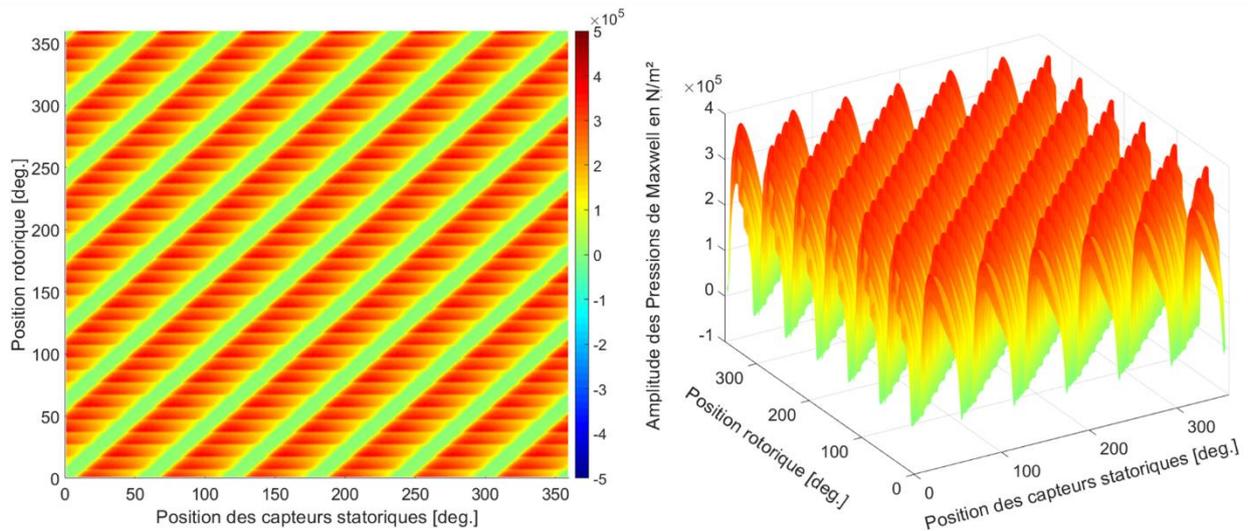


Figure III.14 - Cartographie spatio temporelle des pressions de Maxwell

Il est aussi possible d'étudier le contenu harmonique en 2D. Pour cela, une cartographie spatio-temporelle des pressions de Maxwell est réalisée (figure III.14). Elle est obtenue en calculant les pressions de Maxwell sur la ligne de point dans l'entrefer pour un nombre donné de positions rotoriques sur un tour. S'y déplacer sur l'axe des abscisses revient à observer les pressions à chaque capteur pour une position rotorique. Regarder une verticale revient à la mesure des pressions de Maxwell par un capteur statorique pour chacune des positions rotoriques. Une transformée de Fourier 2D est ensuite réalisée afin de connaître les ordres spatiaux et fréquentiels correspondant à cette excitation (figure III.15). Ce formalisme permet d'observer facilement le contenu des excitations électromagnétiques appliquées au stator et est utilisé dans le chapitre qui présente les résultats du modèle couplé.

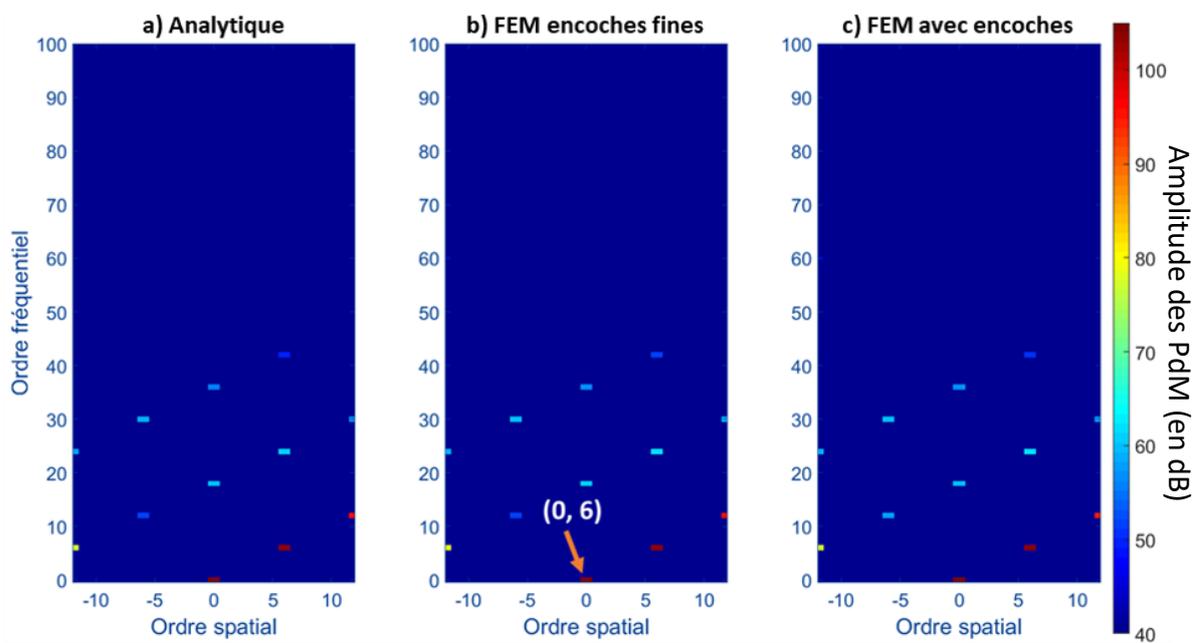


Figure III.15 - Comparaison du contenu harmonique des pressions de Maxwell obtenus par les trois modèles

Sur la figure III.15, le point (0, 6) mis en avant est le point d'ordre spatial 0 et d'ordre fréquentiel 6. Cette ordre de nomination est utilisé dans la suite du manuscrit. Les mêmes ordres d'excitation sont visibles sur les différents graphiques indépendamment de la méthode. Les amplitudes sont répertoriées dans le tableau ci-après avec un calcul d'erreur. Celle-ci reste très faible, mais semble croître plus les ordres sont hauts en fréquentiel. La simplification du modèle semble aussi avoir un fort effet sur l'ordre (-6, 12) puisque son amplitude varie de 10% entre les modèles à encoches fines et celui avec encoches normales. Néanmoins le modèle donne de très bon résultats. La prochaine étape consiste à introduire de l'excentricité relative à la position du rotor en référence au stator. Celle-ci est prise en compte en ajoutant un terme de perturbation dont la méthodologie de calcul est décrite dans le chapitre suivant.

Tableau.III-2 – Comparaison de l'amplitude des ordres spatio-temporel d'excitation des Pressions de Maxwell (en dB)

	Analytique	FEM enc fines	erreur	FEM enc	erreur
<b>(0, 0)</b>	111.1	111.1	0.00%	111	0.09%
<b>(6, 6)</b>	103.2	103.4	0.19%	103.3	0.10%
<b>(12, 12)</b>	94.87	94.89	0.02%	94.82	0.05%
<b>(-12, 6)</b>	77.62	78.12	0.64%	77.26	0.47%
<b>(-6, 12)</b>	51.84	52.17	0.63%	57.28	9.50%
<b>(0, 18)</b>	59.31	60.59	2.11%	60.11	1.33%
<b>(6, 24)</b>	60.36	61.9	2.49%	61.78	2.30%
<b>(-6, 30)</b>	58.43	59.75	2.21%	59.4	1.63%
<b>(0, 36)</b>	55.69	56.81	1.97%	56.54	1.50%
<b>(6, 42)</b>	49.8	51.31	2.94%	50.5	1.39%

### C. Couple électromagnétique

Le couple électromagnétique est une des grandeurs les plus importantes à calculer lors du dimensionnement des moteurs électriques. Celui-ci permet de déterminer la charge que peut entraîner le moteur et sa dynamique de rotation. Il est calculé en utilisant la formule de la loi du bras de levier, soit en sommant le produit des forces orthoradiales identifiées par les flèches violettes sur la figure III.16 avec le bras de levier identifié en rouge :

$$C = \sum_{p_{calc}} F_{o-r} * r_{calc} \quad (3.59)$$

où  $C$  est le couple électromagnétique en Nm,  $r_{calc}$  est la longueur du bras de levier en met  $F_{o-r}$  représente les forces orthoradiales en N, calculées à chaque point de calcul  $p_{calc}$ .

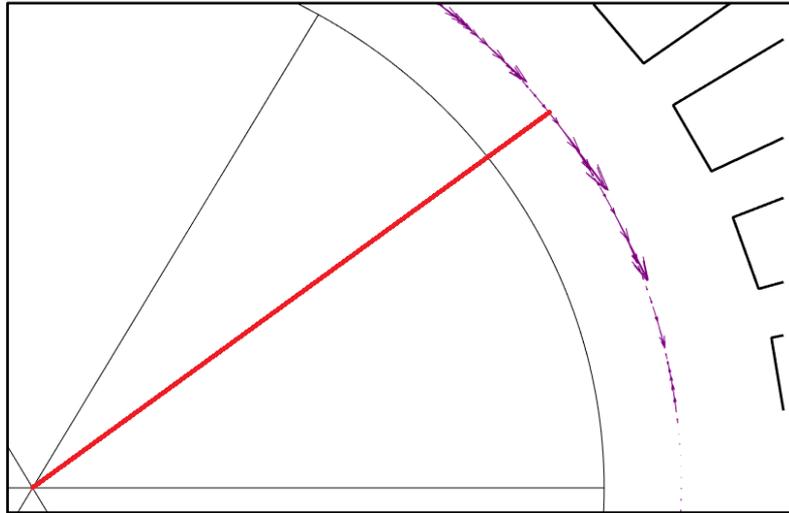


Figure III.16 - Représentation schématique des forces de Maxwell orthoradiales et du bras de levier permettant de calculer le couple

Ce calcul est fait à différentes positions rotoriques afin d'obtenir le signal temporel du couple de la figure III.17. Celui-ci y est comparé avec les résultats issus des différents modèles éléments finis. La figure III.17 montre que le modèle analytique semble tout aussi performant que les modèles éléments finis pour calculer le couple électromagnétique et cette étude renforce sa validation.

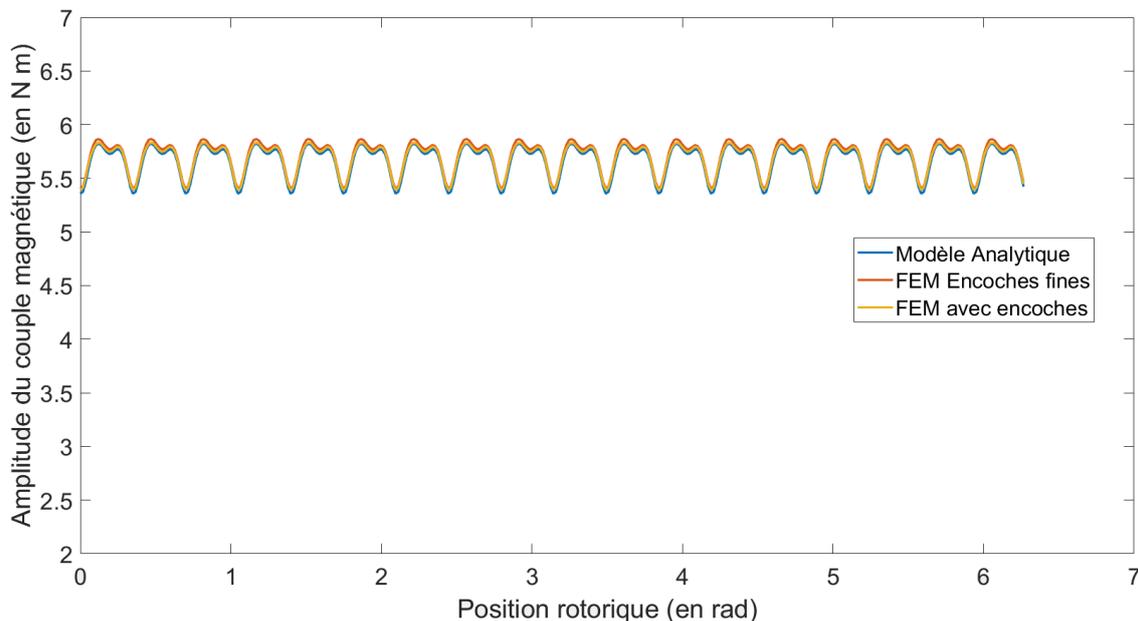


Figure III.17 - Comparaison du temporel du couple électromagnétique obtenu par les différents modèles

La méthodologie de calcul électromagnétique étant validée, elle doit maintenant être modifiée afin de pouvoir y introduire de l'excentricité qui représente les déplacements rotoriques lorsque celui-ci se déforme sous l'effet des forces de Maxwell. Ceci se fait par ajout d'un terme de perturbation, facteur de l'amplitude de l'excentricité, à l'induction magnétique calculée selon la méthodologie décrite précédemment.

### 3. Terme de perturbation dû à l'excentricité

Afin de réaliser cette étude, il est nécessaire de définir un second repère attaché au rotor. La figure III.18 présente les deux repères ainsi que les coordonnées  $\varepsilon$  et  $\phi$  de l'excentricité caractérisant la position du rotor rotorique.

On parle d'excentricité lorsque l'axe du rotor n'est plus confondu avec celui du stator. On peut alors discerner 2 types d'excentricités différentes. La première, dite statique, signifie que le rotor est déplacé du centre du stator mais tourne toujours autour de son propre axe. Ceci revient à dire que les paramètres  $\varepsilon$  et  $\phi$  de la figure III.18 restent constants au cours du temps. Pour l'excentricité dynamique, il est décalé du centre du stator tout en tournant toujours autour de ce dernier. Dans ce cas, le paramètre  $\phi$  est lié à la vitesse de rotation  $\omega_r$ .

Les coordonnées d'un point du rotor excentré peuvent ainsi être exprimés dans les coordonnées polaires du repère rotorique  $(O_r, \rho, \psi)$  en fonction des coordonnées dans le repère statorique  $(O_s, r, \alpha)$  :

$$\begin{cases} \rho = r + \varepsilon \cos(\alpha - \phi) + O(\varepsilon^2) \\ \psi = \alpha + \omega_r t + \frac{\varepsilon}{r} \sin(\alpha - \phi) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.59)$$

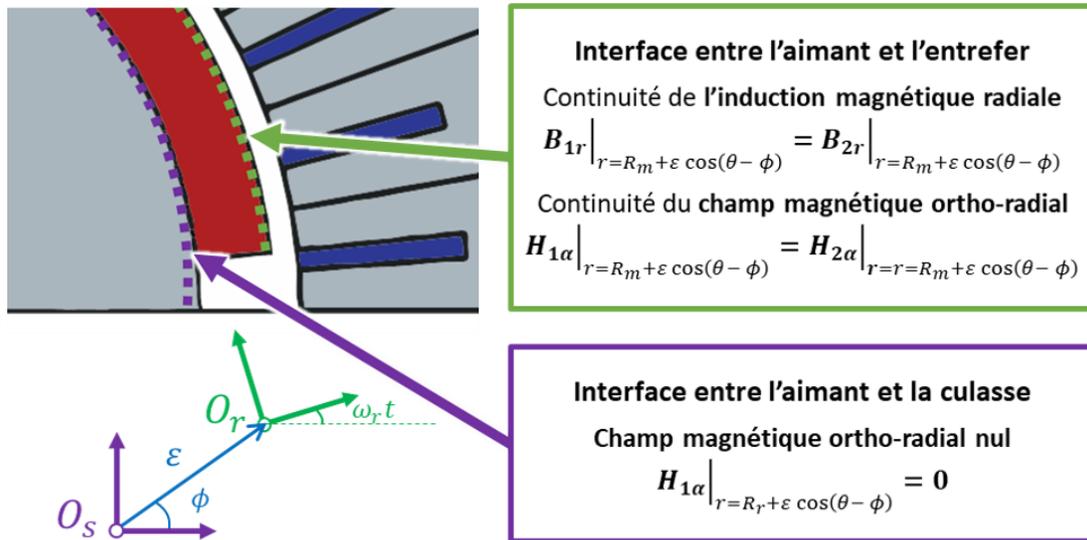


Figure III.18 - Nouvelles conditions aux limites du sous-domaine aimant pour un rotor excentré

Le rotor étant déplacé, les conditions aux limites du sous-domaine aimant sont modifiées puisque les rayons d'applications sont désormais fonction de l'excentricité comme à la figure III.18 comme :

$$\begin{cases} H_{1\alpha}|_{r=R_r+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} = \frac{1}{\mu_0} B_{1\alpha}|_{r=R_r+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} - M_\alpha = 0 \\ B_{1r}|_{r=R_m+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} = B_{2r}|_{r=R_m+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} \\ H_{1\alpha}|_{r=R_m+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} = H_{2\alpha}|_{r=R_m+\varepsilon \cos(\alpha-\phi), \forall \alpha} \end{cases} \quad (3.60)$$

Afin de résoudre ce nouveau système d'équation, les grandeurs magnétiques des milieux excentrés devront être développées à l'ordre 2 en fonction de l'excentricité de la même manière que les coordonnées d'un point du rotor (3.60).

$$\begin{cases} A_{zi}(r, \alpha, \varepsilon) = A_{zi}^{(0)}(r, \alpha) + \varepsilon A_{zi}^{(1)}(r, \alpha) + O(\varepsilon^2) \\ H_{r,i}(r, \alpha, \varepsilon) = H_{r,i}^{(0)}(r, \alpha) + \varepsilon H_{r,i}^{(1)}(r, \alpha) + O(\varepsilon^2) \\ H_{\alpha,i}(r, \alpha, \varepsilon) = H_{\alpha,i}^{(0)}(r, \alpha) + \varepsilon H_{\alpha,i}^{(1)}(r, \alpha) + O(\varepsilon^2) \\ B_{r,i}(r, \alpha, \varepsilon) = B_{r,i}^{(0)}(r, \alpha) + \varepsilon B_{r,i}^{(1)}(r, \alpha) + O(\varepsilon^2) \\ B_{\alpha,i}(r, \alpha, \varepsilon) = B_{\alpha,i}^{(0)}(r, \alpha) + \varepsilon B_{\alpha,i}^{(1)}(r, \alpha) + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3.61)$$

Par substitution de ces expressions, les nouvelles équations aux limites de sous-domaines et à l'interface de sous-domaines sont obtenues. Le système d'ordre 0 est le même que pour le calcul sans excentricité. Les expressions de potentiels vecteurs et d'induction magnétique d'ordre 1 permettront de calculer le terme de perturbation dû à l'excentricité. Les équations sont les suivantes, elles sont obtenues de la même manière que pour la première partie. Ici, les termes de source ne sont pas pris en compte puisque le terme de perturbation n'est calculé qu'en fonction de la géométrie du moteur.

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{z1}^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z1}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{z1}^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \frac{\partial A_{z2}^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z2}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{z2}^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0 \\ \frac{\partial A_{z3i}^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_{z3i}^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_{z3i}^{(1)}}{\partial \alpha^2} = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

Leurs solutions sont les mêmes que pour le système d'ordre 0 (3.27), (3.28) et (3.30) auxquelles sont retirées les seconds termes sources :

$$A_{z1}^{(1)} = \sum_k \left[ \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + G_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right] A_1^{(1)} \cos(k\alpha) + \left[ \left( \frac{r}{R_m} \right)^k + G_1 \left( \frac{r}{R_r} \right)^{-k} \right] C_1^{(1)} \sin(k\alpha) \quad (3.63)$$

$$A_{z2}^{(1)} = \sum_k \left( A_2^{(1)} \left( \frac{r}{R_s} \right)^k + B_2^{(1)} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-k} \right) \cos(k\alpha) + \left( C_2^{(1)} \left( \frac{r}{R_s} \right)^k + D_2^{(1)} \left( \frac{r}{R_m} \right)^{-k} \right) \sin(k\alpha) \quad (3.64)$$

$$A_{z3i}^{(1)} = \sum_n D_{3i}^{(1)} \left( G_3 \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n} + \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n} \right) \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{oa}}{2} - \alpha_i \right) \right] \quad (3.65)$$

Ces nouvelles équations pourront être réinjectées dans les équations aux limites (3.59) afin de trouver les nouvelles constantes d'intégrations d'ordre 1. Le développement du système d'équation d'ordre 1, qui est fonction des constantes d'intégration d'ordre 0 et des paramètres géométriques peut être trouvé dans **[Fu, 2012]**.

#### 4. Résultats du calcul avec excentricité comparé aux éléments finis (Flux 2D)

##### A. Comparaison de l'induction magnétique et du terme de perturbation

De la même manière que dans la partie 2., l'induction magnétique calculée sur une ligne de points placée dans l'entrefer est validée pour une excentricité statique de 10%. Cette excentricité est placée selon l'axe horizontal du stator. Une représentation volontairement exagérée peut être trouvée à la figure III.19 où le cercle en pointillé noir représente la ligne de point de calcul de l'induction.

Ainsi, on se retrouve avec l'entrefer le plus petit au niveau de la flèche verte à 0° mécanique, l'amplitude de l'induction magnétique y est maximale tandis qu'à l'opposé, au niveau de la flèche bleue à 180° mécanique, elle est minimale. Ces positions particulières sont répertoriées sur les graphiques d'induction puisque c'est à ces positions qu'est visible l'excentricité. Les crêtes les plus proches de ces positions sont identifiées sur les graphiques de résultats des figures III.20 et III.21.

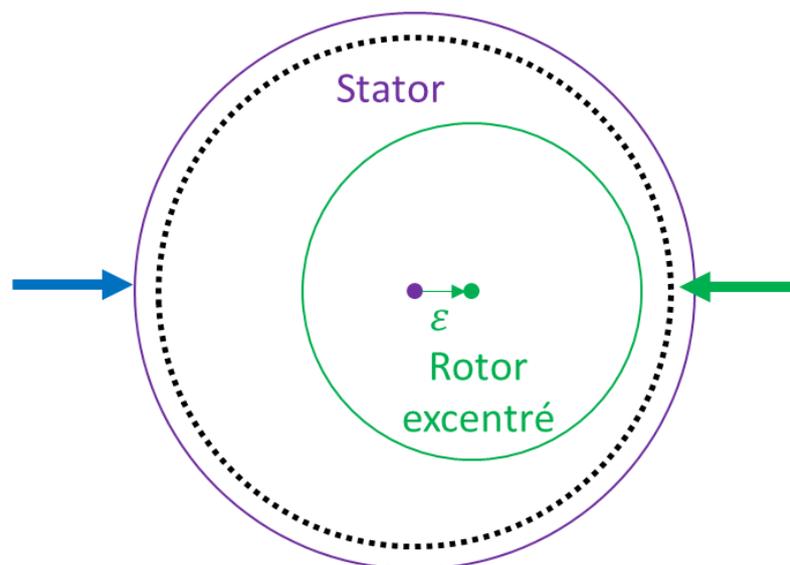


Figure III.19 - Excentricité statique placée selon l'axe x du stator, à l'horizontal

Cette validation se fait sur la composante radiale (figure III.20), la composante ortho-radiale (figure III.21) et sur le terme de perturbation dû à l'excentricité radial (figure III.22) et tangentiel (III.23). Sur les graphes, on voit qu'au niveau de la crête d'induction la plus proche de la flèche verte, le maximum d'induction est plus élevé qu'à l'opposé au niveau de la flèche bleue, témoins de l'excentricité qui rajoute cette enveloppe générale au système. A nouveau ici, les parties ferromagnétiques y sont supposées sans saturation (leur perméabilité magnétique est supposée infinie), et les aimants fonctionnent dans la partie linéaire de leur courbe  $B(H)$ .

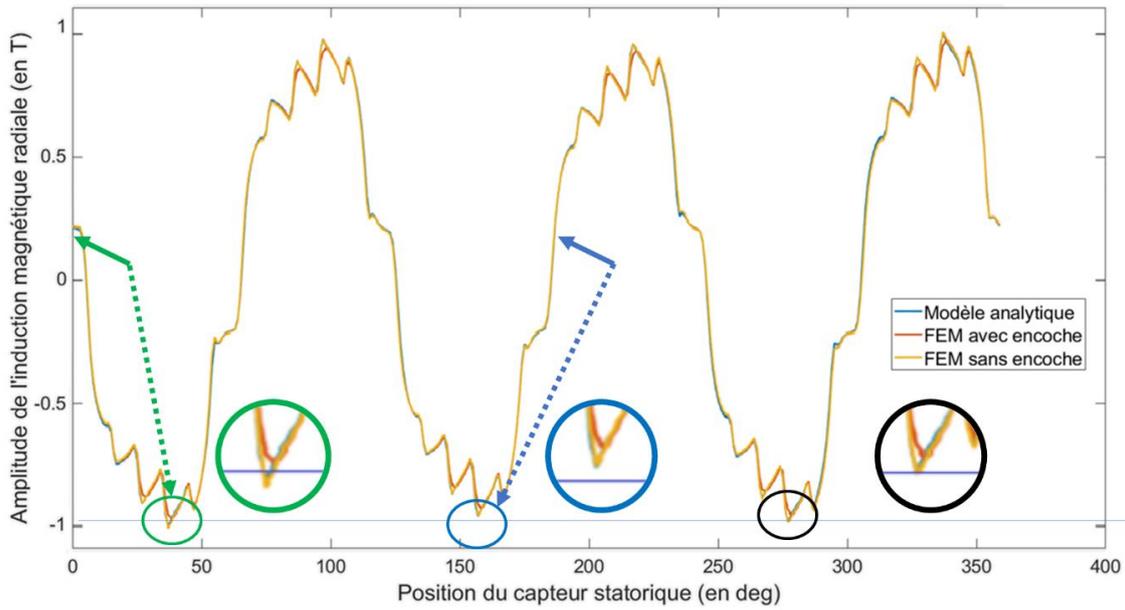


Figure III.20 - Comparaison de la composante radiale de l'induction magnétique obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis avec 10% d'excentricité statique

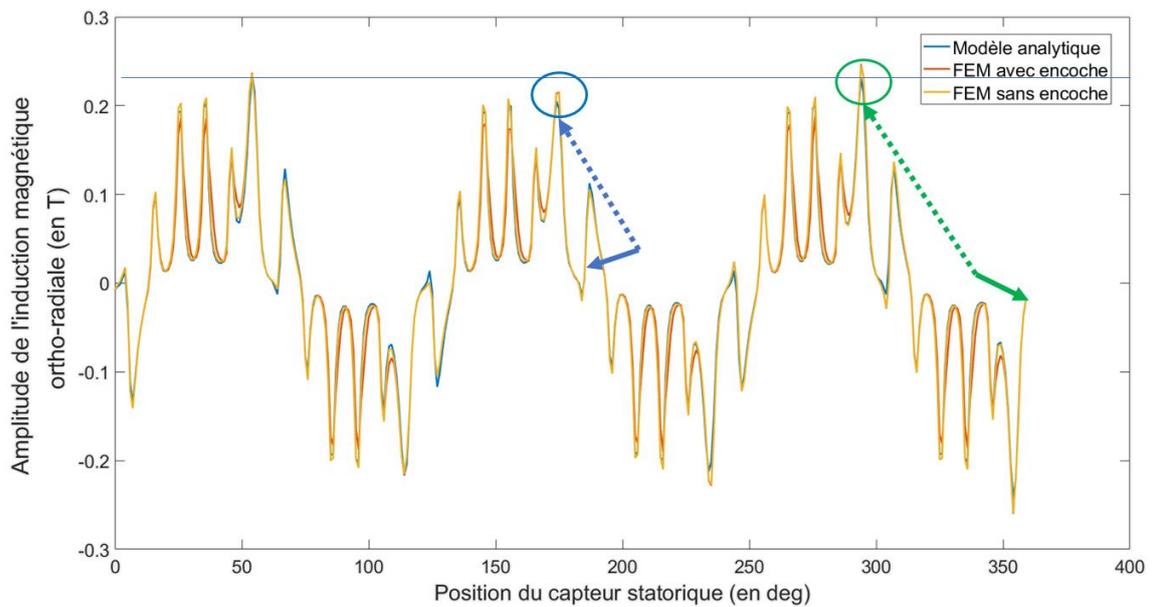


Figure III.21 - Comparaison de la composante ortho-radiale de l'induction magnétique obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis avec 10% d'excentricité statique

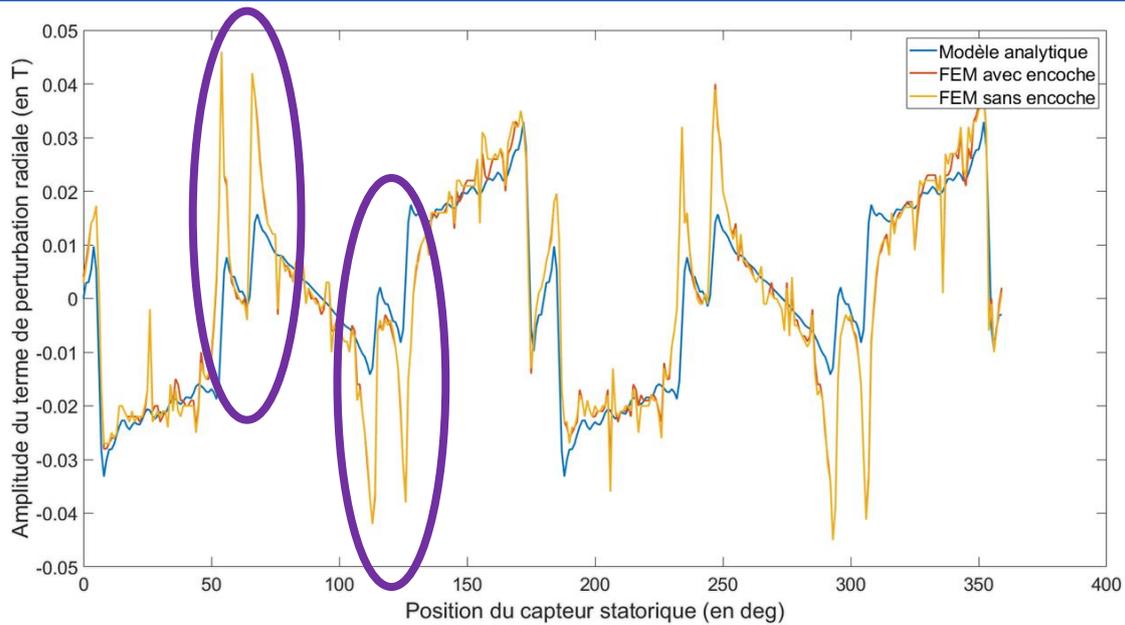


Figure III.22 - Comparaison de la composante radiale du terme de perturbation dû à l'excentricité statique de 10% obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis

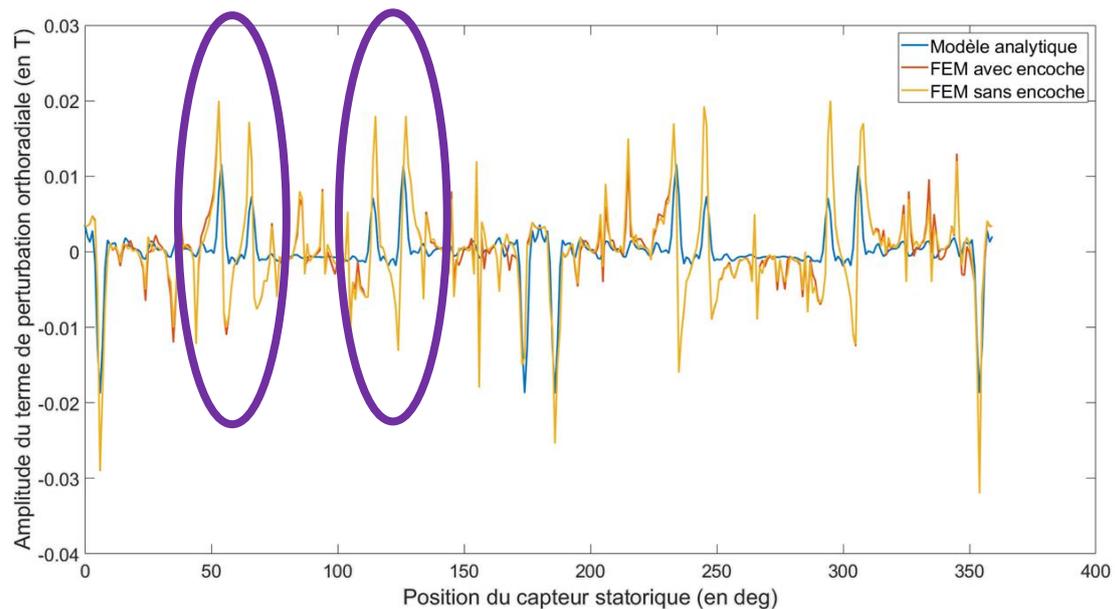


Figure III.23 - Comparaison de la composante ortho-radiale du terme de perturbation dû à l'excentricité statique de 10% obtenue par le modèle analytique et les modèles éléments finis

L'enveloppe générale du terme de perturbation paraît très similaire. Néanmoins, le modèle éléments finis présente des différences au niveau de l'espace entre les deux aimants (reperé en violet sur les graphiques). Il y a aussi beaucoup de petites oscillations autour de l'enveloppe principale que l'on ne retrouve pas en analytique. Ces dernières correspondent à du bruit de maillage dû au fait que les nœuds du maillage ne tombent pas exactement sur les points de calcul. Les résultats concordent néanmoins fortement que l'on compare avec le modèle éléments finis à géométrie simplifiée ou avec les encoches totalement modélisées. Il

reste néanmoins à vérifier le contenu spatio-temporel des pressions de Maxwell pour terminer de valider le modèle. Cette étude est faite dans la sous-partie suivante.

L'induction magnétique est ensuite calculée avec le modèle analytique à différents niveaux d'excentricité pour vérifier que la variation d'amplitude évolue avec le taux d'excentricité. Cette vérification est faite sur les composantes radiales (figure III.23), orthoradiales (figure III.24) de l'induction magnétique.

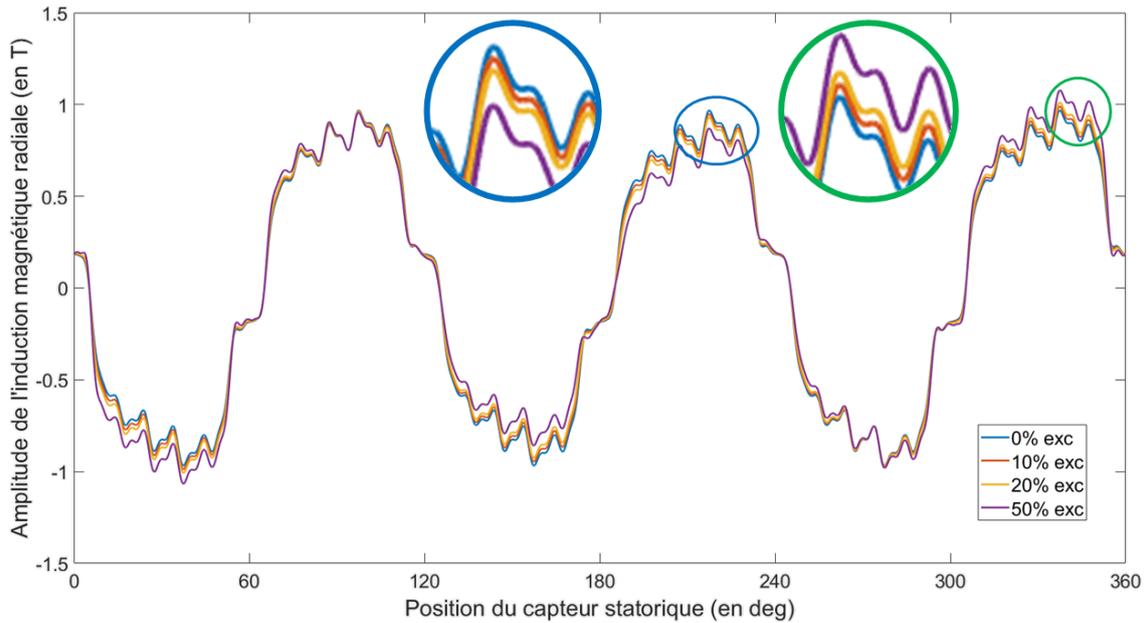


Figure III.24 - Comparaison de l'effet du taux d'excentricité sur la composante radiale de l'induction magnétique

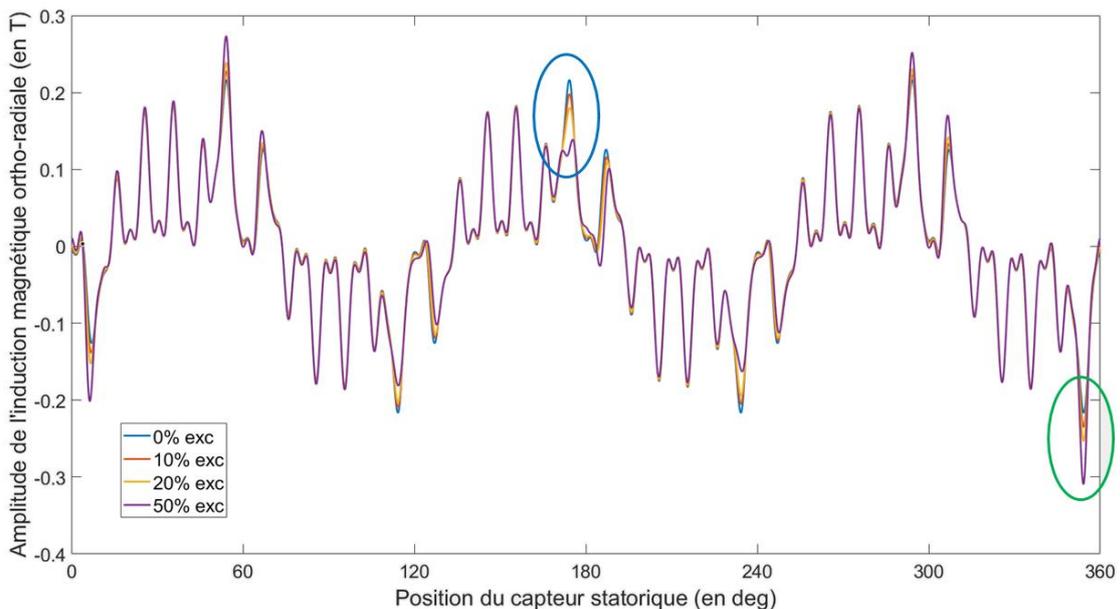


Figure III.25 - Comparaison de l'effet du taux d'excentricité sur la composante ortho-radiale de l'induction magnétique

Ces figures montrent bien l'effet de l'excentricité sur l'induction magnétique. On remarque dans les zones bleues où l'entrefer est le plus grand, que plus il y a d'excentricité, plus le rotor est éloigné du stator, plus l'amplitude de l'induction magnétique est faible. A l'inverse dans les zones vertes où le rotor est proche du stator et l'entrefer plus petit.

### B. Comparaison du contenu harmonique des pressions de Maxwell

Le contenu harmonique des pressions de Maxwell en présence d'excentricité est calculé de la même manière que précédemment. Les résultats de la figure III.26 sont obtenus. Des ordres +/- 1 et 2 spatiaux typiques de l'excentricité statique sont apparus comme vu dans [Le Besnerais, 2013].

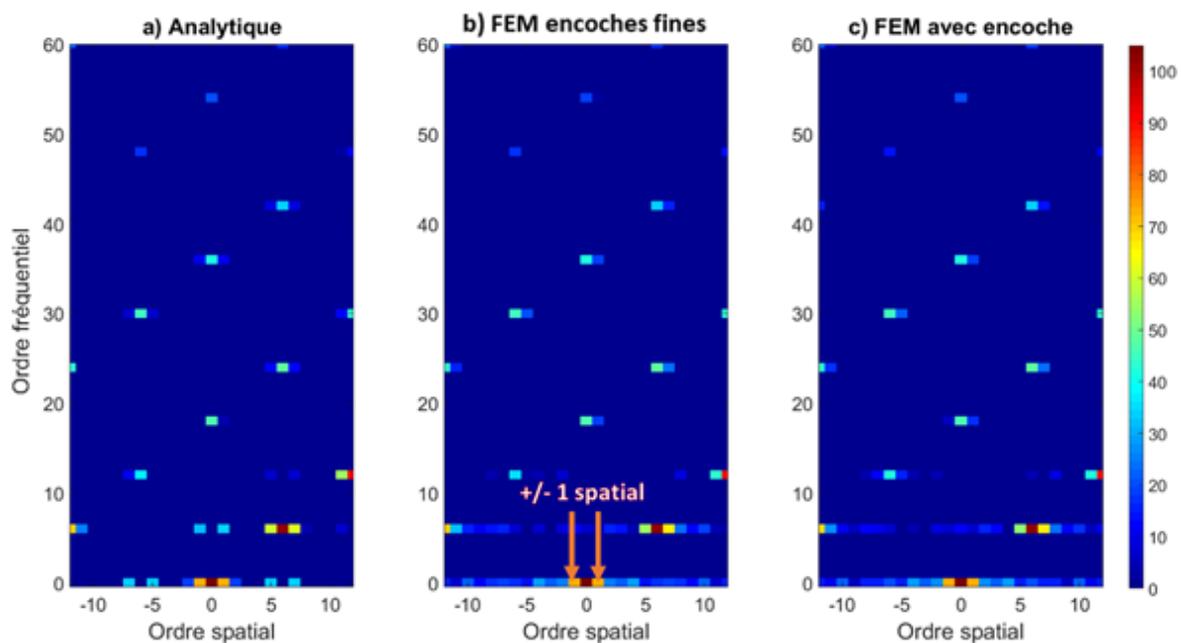


Figure III.26 - Comparaison du contenu harmonique des pressions de Maxwell obtenus par les trois modèles avec une excentricité statique de 10%

Le contenu harmonique des pressions de Maxwell d'un moteur excentré semble être le même pour les 3 modèles. On remarque néanmoins du bruit de maillage sur les résultats issus du modèle élément finis mais les ordres principaux sont les mêmes à des amplitudes similaires. Ceci valide la bonne prise en compte de l'excentricité dans le calcul, le modèle électromagnétique peut donc être utilisé pour réaliser les calculs couplés multiphysiques.

### C. Effet de l'excentricité sur le couple électromagnétique

Le terme de perturbation dû à l'excentricité exerçant une influence sur les forces orthoradiales, il modifie aussi le couple. L'étude est réalisée dans cette sous-partie où le contenu harmonique fréquentiel du couple électromagnétique est calculé et comparé entre le cas sain et les cas d'excentricité statique et dynamique. Les résultats obtenus sont ceux de la figure III.27.

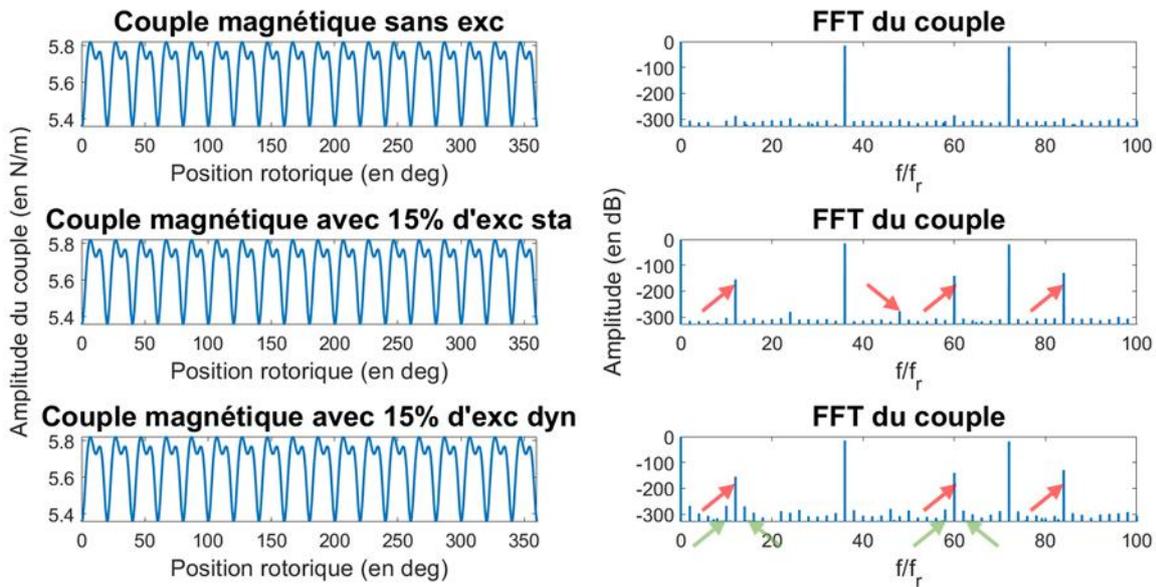


Figure III.27 - Comparaison du contenu temporel du couple électromagnétique obtenu avec et sans excentricité

On observe au niveau des flèches rouges l'apparition de nouvelles pulsations de couples en présence d'excentricité. Celles-ci apparaissent à des fréquences égales aux multiples de 12 fois la fréquence de rotation. Néanmoins, leur amplitude reste très faibles vis-à-vis des raies principales qui sont déjà présentes sans excentricité à 36 et 72  $f_r$ . Ceci est dû au fait que ces pulsations supplémentaires sont issues d'un reliquat de force induit par l'excentricité qui est très faible. Les forces tangentielles étant elles-mêmes petites vis-à-vis des forces radiales et mêmes souvent négligées dans la plupart des études vibro-acoustiques de moteur. Dans le modèle couplé, elles sont négligées et l'hypothèse que ces pulsations n'ont pas d'effet sur la dynamique du rotor est faite. C'est pourquoi elles ne sont pas incorporées au modèle mécanique, bien qu'elles pourraient l'être à l'avenir si désiré car compatible avec la méthode de modélisation mécanique. Il suffirait d'ajouter des termes de moment sur les lignes du vecteur force correspondant aux degrés de liberté en rotation.

## 5. Conclusion sur le modèle électromagnétique

Le chapitre III décrit le modèle analytique électromagnétique de calcul des pressions de Maxwell d'un moteur synchrone à aimants permanents dont le rotor est excentré. Ce modèle calcule l'induction magnétique dans l'entrefer par la méthode des sous-domaines et en déduit les forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer qui excitent le rotor lorsque le moteur est en fonctionnement. Ce module est utilisé pour réaliser les calculs couplés dont les résultats sont présentés au chapitre V et permet de calculer et visualiser les pressions de Maxwell à tout moment de la simulation.

---

# Chapitre IV. Modèle mécanique de calcul des déformations d'un arbre en rotation

---

<u>Chapitre IV.</u>	<u>Modèle mécanique de calcul des déformations d'un arbre en rotation</u> ....	75
<u>1.</u>	<u>Paramétrage et mise en équations</u> .....	76
<u>A.</u>	<u>Paramétrage</u> .....	76
<u>B.</u>	<u>Formulation variationnelle de l'élastodynamique</u> .....	77
<u>2.</u>	<u>Résolution spatiale par la méthode des éléments finis</u> .....	80
<u>3.</u>	<u>Base modale et réponse totale du système</u> .....	82
<u>A.</u>	<u>Calcul de la base modale</u> .....	82
<u>B.</u>	<u>Réponse forcée et libre d'un arbre en rotation</u> .....	84
<u>4.</u>	<u>Introduction d'amortissement dans le modèle</u> .....	86
<u>A.</u>	<u>Amortissement proportionnel de Rayleigh</u> .....	86
<u>B.</u>	<u>Amortissement modal</u> .....	86
<u>C.</u>	<u>Introduction de l'amortissement dans le schéma temporel</u> .....	86
<u>D.</u>	<u>Coefficient d'amortissement modaux <math>\xi</math></u> .....	87
<u>5.</u>	<u>Validation des calculs mécaniques</u> .....	88
<u>A.</u>	<u>Calcul des modes et fréquences propres</u> .....	88
<u>B.</u>	<u>Calcul de réponse temporelle de l'arbre</u> .....	92
<u>6.</u>	<u>Conclusions sur le modèle mécanique</u> .....	98

L'arbre de moteur est modélisé comme une poutre de Timoshenko comme retenu après l'état de l'art mécanique. La résolution temporelle est faite par le schéma aux différences finies de Crank Nicholson (ou règle des trapèzes). Dans cette partie, la méthodologie mécanique permettant de calculer la réponse temporelle de l'arbre aux pressions de Maxwell est détaillée. Elle suit ces étapes :

- Paramétrage du mouvement de l'arbre et mise en place des degrés de liberté associés ;
- Détermination de la forme faible de l'élastodynamique ;
- Mise en place de la méthode des éléments finis : Discrétisation de l'arbre et interpolation des degrés de liberté entre les nœuds pour obtenir la déformée totale ;
- Calcul et assemblage des matrices élémentaires afin d'obtenir le système matriciel global ;
- Calcul de la base modale ;
- Utilisation de la méthode de superposition modale pour obtenir la réponse totale (libre + forcée) de l'arbre ;
- Calcul de la réponse en temporel par l'utilisation d'un schéma aux différences finies.

Un dernier sous-chapitre est dédié aux résultats obtenus par différents modules du modèle mécanique. Leur validation est faite en les comparant avec d'autres modèles analytiques ou du commerce.

## 1. Paramétrage et mise en équations

Dans cette section, la flexion d'une poutre à section circulaire dans les deux directions transverses est étudiée. Cette poutre est de plus en rotation autour de son axe. Dans un premier temps les rotations des sections droites sont paramétrées afin d'établir ensuite la forme faible de l'élastodynamique propre à notre système.

### A. Paramétrage

Le mouvement est paramétré avec les déplacements  $v$  et  $w$  de la fibre neutre selon  $\vec{y}_0$  et  $\vec{z}_0$  respectivement, et avec les rotations successives  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  et  $\theta = \omega_r t$ , dans cet ordre, respectivement autour des axes  $\vec{y}_{0,1}$ ,  $\vec{z}_{1,2}$  et  $\vec{x}_{2,m}$  telles que

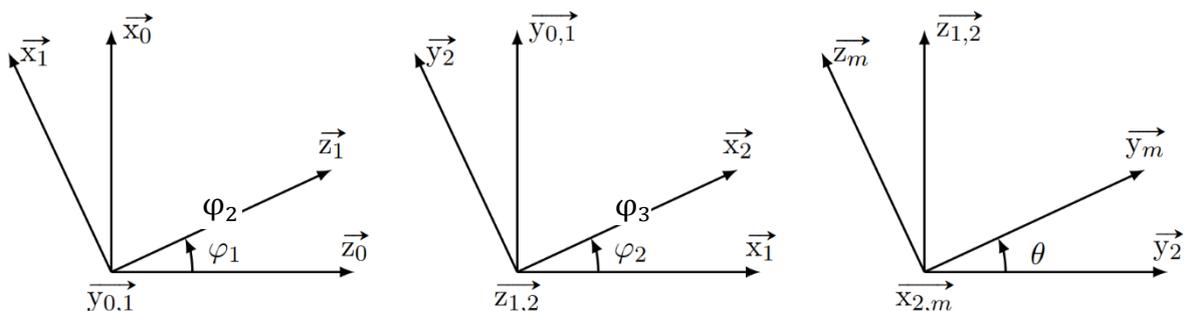


Figure IV.1 - Paramétrage des rotations des sections droites et nouveaux repères

Sur la figure (IV.1),  $\mathcal{B}_0(x_0, y_0, z_0)$ ,  $\mathcal{B}_m(x_m, y_m, z_m)$ ,  $\mathcal{B}_1(x_1, y_1, z_1)$  et  $\mathcal{B}_2(x_2, y_2, z_2)$  représentent respectivement la base galiléenne de référence, la base mobile liée au rotor et deux bases intermédiaires utilisées pour les calculs.

En utilisant ce paramétrage, le vecteur de vitesse angulaire, de la base mobile  $\mathcal{B}_m$  par rapport à la base galiléenne  $\mathcal{B}_0$ ,  $\vec{\Omega}_m^0 = \dot{\varphi}_2 \vec{y}_{0,1} + \dot{\varphi}_3 \vec{z}_{1,2} + \omega_r \vec{x}_{2,m}$  s'exprime dans le repère mobile sous la forme :

$$\vec{\Omega}_m^0 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_3 + \omega_r \\ \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \cos \theta + \dot{\varphi}_3 \sin(\theta) \\ -\dot{\varphi}_2 \cos \varphi_3 \sin \theta + \dot{\varphi}_3 \cos(\theta) \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_m} \quad (4.1)$$

## B. Formulation variationnelle de l'élastodynamique

### i. Énergie cinétique et potentielle de déformation

La forme faible de l'élastodynamique est établie en appliquant le principe d'Hamilton qui se calcule à partir de l'énergie cinétique  $E_c$  et de l'énergie potentielle de déformation  $E_p$ .

L'énergie cinétique est calculée à partir de l'équation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_S \int_0^L \left( \rho S \vec{V}_m^0(G)^2 + \rho \vec{\Omega}_m^0{}^T \mathbb{I}(G) \vec{\Omega}_m^0 \right) dx dS \quad (4.2)$$

où  $\rho$ ,  $L$ , et  $S$  sont la masse volumique, la longueur de la poutre et la surface de la section,  $\vec{V}_m^0(G)$  est la vitesse au point  $G$ , centre de masse de la section droite et  $\mathbb{I}(G)$  est la matrice des moments quadratique de la section droite au point  $G$  dans la base mobile égale à

$$\mathbb{I}(G) = \begin{bmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix}_{\mathcal{B}_m}$$

Ceci donne :

$$E_c = \frac{\rho S}{2} \int_0^L (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dx + \frac{\rho}{2} \int_0^L (I_y \dot{\varphi}_2^2 + I_z \dot{\varphi}_3^2) dx + \frac{1}{2} \rho I_x L \omega_r^2 + \rho I_x \omega_r \int_0^L \varphi_3 \dot{\varphi}_2 dx \quad (4.3)$$

Les termes ci-dessus correspondent respectivement à l'énergie cinétique de **translation** et de **rotation**. Le **3ème terme**, qui est constant, représente l'énergie cinétique d'un arbre qui tourne à la vitesse  $\omega_r$  et le **dernier terme** représente l'effet gyroscopique. Dans l'expression, les propriétés utilisées sont le moment quadratique axial  $I_x$ , les moments quadratiques de flexion,  $I_y$  et  $I_z$  et la vitesse de rotation  $\omega_r$ .

L'énergie potentielle de déformation est quant à elle calculée à partir du produit doublement contracté du tenseur de déformation  $\varepsilon$  et celui de contrainte  $\sigma$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S \int_0^L \varepsilon : \sigma \, dx \, dS \quad (4.4a)$$

Ces deux tenseurs s'expriment :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \text{grad}(\vec{u}(M)) + \text{grad}^T(\vec{u}(M)) \right) \quad (4.4b)$$

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{I} \quad (4.4c)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson et

$$\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} -y\varphi_3 \cos\varphi_2 + z\varphi_2 \\ v - z\varphi_3 \sin\varphi_2 \\ w + y\varphi_3 \sin\varphi_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_0} \quad (4.4d)$$

est le vecteur de déplacement d'un point  $M$  exprimé dans la base  $\mathcal{B}_0$ .

Le développement de (4.4a) peut être trouvé en annexe. Pour sa résolution, les hypothèses suivantes ont été faites, elles sont également plus détaillées en annexe :

- Les mouvements décrits par l'arbre sur la période donnée sont suffisamment petits et les termes d'ordre supérieur à deux sont négligés.
- La section est supposée symétrique et comporter les mêmes inerties selon  $y$  et  $z$ . Ainsi, les inerties  $I_y$  et  $I_z$  sont égales et remplacée par  $I_d$  par la suite et  $I_x$  par  $I_p$ .

L'expression de l'énergie potentielle devient :

$$E_p = \frac{EI_d}{2} \int_0^L \left( \varphi_{2,x}^2 + \varphi_{3,x}^2 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa G S (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) dx \quad (4.5)$$

Les termes correspondent à l'énergie potentielle de **traction-compression** et de **cisaillement**. Les propriétés du matériau apparaissent dans les expressions des énergies : le module de cisaillement  $G$  et la masse volumique  $\rho$ , le facteur de correction en cisaillement  $\kappa = 6/7$  pour une section circulaire pleine, et  $\kappa = 1/2$  pour une section circulaire creuse. Ainsi que les paramètres géométriques : le moment quadratique de flexion  $I_d$ , la surface de la section  $S$ , la longueur de la poutre  $L$ , les angles de cisaillement  $\gamma_2 = \varphi_2 + w_{,x}$ ,  $\gamma_3 = \varphi_3 - v_{,x}$ .

ii. *Forme faible de l'élastodynamique par application du principe d'Hamilton*

Afin de passer des énergies à la forme faible de l'élastodynamique, le **principe d'Hamilton** est utilisé. Il affirme que la somme des variations d'énergie cinétique et potentielle et de la variation du travail effectué par les forces non conservatives notées  $f_y$  et  $f_z$  par la suite (respectivement selon  $y$  et  $z$ ) prises pendant un intervalle de temps quelconque  $t_1$  à  $t_2$  est identiquement nulle [Clough 1975] :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(E_c - E_p) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{f_z} + \delta W_{f_y} dt = 0 \quad (4.6)$$

où  $\delta(\cdot)$  représente une petite variation. En réintroduisant les équations (4.3) et (4.5) dans (4.6), le résultat suivant est obtenu :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{\rho S}{2} \int_0^L \dot{w}^2 + \dot{v}^2 dx + \frac{\rho I_d}{2} \int_0^L \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 dx + \frac{1}{2} \rho I_p L \omega_r^2 + \frac{1}{2} \rho I_p \omega_r \int_0^L \varphi_3 \varphi_2 dx - \frac{EI_d}{2} \int_0^L \varphi_{2,x}^2 + \varphi_{3,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GS (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) dx + v f_y + w f_z \right) = 0$$

Ceci donne après développement de l'opérateur variationnel  $\delta$  et en intégrant par partie l'intégrale sur le temps (le développement est trouvable à l'annexe 3) :

$$\int_0^L \left( \delta w \rho S \ddot{w} + \delta \varphi_2 \rho I_d \ddot{\varphi}_2 + \delta \varphi_2 \rho I_p \omega_r \dot{\varphi}_3 + \delta \varphi_{2,x} EI_d \varphi_{2,x} + \delta \gamma_2 \kappa GS \gamma_2 - \delta w f_z \right) dx + \int_0^L \left( \delta v \rho S \ddot{v} + \delta \varphi_3 \rho I_d \ddot{\varphi}_3 - \delta \varphi_3 \rho I_p \omega_r \dot{\varphi}_2 + \delta \varphi_{3,x} EI_d \varphi_{3,x} + \delta \gamma_3 \kappa GS \gamma_3 - \delta v f_y \right) dx = 0$$

$$\forall \delta w, \delta \varphi_2, \delta v, \delta \varphi_3 \quad (4.7)$$

Cette équation de la forme faible de l'élastodynamique doit être vérifiée pour des conditions aux limites  $x = 0$  et  $x = L$  et des conditions initiales imposées.

 iii. *Equations du mouvement*

L'intégrale en espace (4.7) est vraie pour tous les degrés de liberté virtuels, notamment lorsque ceux-ci sont égaux à 0. Ceci permet de déduire les équations du mouvement en résolvant par partie l'intégrale spatiale :

$$\begin{cases} f_y + \kappa GS (v_{,x} - \varphi_3)_{,x} = \rho S \ddot{v}, & (\forall \delta v, \delta \varphi_2 = \delta w = \delta \varphi_3 = 0) \\ f_z + \kappa GS (w_{,x} + \varphi_2)_{,x} = \rho S \ddot{w}, & (\forall \delta w, \delta v = \delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = 0) \\ EI_d \varphi_{2,xx} - \kappa GS (v_{,x} + \varphi_2)_{,x} = \rho I_d \ddot{\varphi}_2 + \rho I_p \omega_r \dot{\varphi}_3, & (\forall \delta \varphi_2, \delta w = \delta v = \delta \varphi_3 = 0) \\ EI_d \varphi_{3,xx} + \kappa GS (w_{,x} - \varphi_3)_{,x} = \rho I_d \ddot{\varphi}_3 - \rho I_p \omega_r \dot{\varphi}_2, & (\forall \delta \varphi_3, \delta w = \delta \varphi_2 = \delta v = 0) \end{cases} \quad (4.8a)$$

Ces équations doivent être vérifiées dans l'intervalle  $x \in [0, L]$  avec les quatre paires de conditions aux limites suivantes qui doivent être imposées.

$$\begin{cases} v(0, t) & v(L, t) \\ w(0, t) & w(L, t) \\ EI_d \left[ \frac{\partial \varphi_2(0, t)}{\partial x} \right] & EI_d \left[ \frac{\partial \varphi_2(L, t)}{\partial x} \right] \\ EI_d \left[ \frac{\partial \varphi_3(0, t)}{\partial x} \right] & EI_d \left[ \frac{\partial \varphi_3(L, t)}{\partial x} \right] \end{cases} \quad (4.8b)$$

ainsi que des conditions initiales imposées. Ces équations sont données ici par habitude mais dans notre étude c'est la forme faible de l'élastodynamique (4.7) qui est utilisée afin de calculer la réponse de notre arbre. Pour faciliter l'implémentation du calcul dans les outils de calcul numérique, le chapitre suivant en donne une forme matricielle.

#### iv. Formulation matricielle de la forme faible

La formulation matricielle de la forme faible de l'élastodynamique est obtenue en rangeant les degrés de liberté du problème et les degrés de liberté virtuels dans les vecteurs  $\vec{u} = (v, w, \varphi_2, \varphi_3)^T$  et  $\delta\vec{u} = (\delta v, \delta w, \delta\varphi_2, \delta\varphi_3)^T$ . Ainsi, la forme faible du problème revient à déterminer, dans un repère fixe, le vecteur  $\mathbf{u}$  qui vérifie la relation suivante quel que soit  $\delta\mathbf{u}$ .

$$\int_0^L (\nabla_u \delta\mathbf{u})^T \mathbf{C} (\nabla_u \mathbf{u}) dx + \int_0^L \delta\mathbf{u}^T (\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}\dot{\mathbf{u}}) dx = \int_0^L \delta\mathbf{u}^T \mathbf{F} dx \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (4.9)$$

définie avec les opérateurs suivants :

$$\nabla_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho I_p \omega_r \\ 0 & 0 & -\rho I_p \omega_r & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \text{diag}(kGS, kGS, EI_d, EI_d) \quad \mathbf{F} = (f_y, f_z, 0, 0)^T \quad \mathbf{M} = \text{diag}(\rho S, \rho S, \rho I_d, \rho I_d)$$

## 2. Résolution spatiale par la méthode des éléments finis

Afin de calculer les déformations de l'arbre, la méthode des éléments finis est utilisée. Celle-ci consiste à diviser l'axe en plusieurs éléments de longueur  $l_e$ . Ensuite, en interpolant les degrés de liberté sur chaque élément, les matrices élémentaires  $\mathbb{M}_e$ ,  $\mathbb{G}_e$  et  $\mathbb{K}_e$  sont calculées. Ces matrices sont ensuite assemblées pour obtenir les matrices globales du système  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{G}$  et  $\mathbb{K}$ . La formulation matricielle du problème est ainsi obtenue et résolue pour obtenir les degrés de liberté à chaque nœud. La déformée de la poutre est ensuite reconstituée par interpolation des déplacements et des rotations entre chacun des nœuds.

Pour ce faire, l'équation 9 est réécrite en divisant l'intégrale sur  $[0, L]$  en une somme d'intégrale sur les  $n$  éléments de la poutre discrétisée :

$$\sum_n \int_0^{l_e} (\nabla_u \delta \mathbf{u}^n)^T \mathbf{C} (\nabla_u \mathbf{u}^n) dx + \int_0^{l_e} \delta \mathbf{u}^{nT} (\mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^n + \mathbf{G} \mathbf{u}^n) dx = \sum_n \int_0^{l_e} \delta \mathbf{u}^{nT} \mathbf{F} dx \quad \forall \delta \mathbf{u}^n \quad (4.10)$$

Les déplacements réels approchés sont interpolés par des fonctions d'interpolation linéaires :

$$\mathbf{u}^n(x, t) = \mathbb{H}(x) \mathbf{q}^n(t) \quad (4.11)$$

où  $\mathbb{H}(x)$  est la matrice **d'interpolation des degrés de liberté** définie en annexe [Petyt, 2010], et  $\mathbf{q}(t)$  désigne le **vecteur des degrés de liberté réels discrets**, donnant les degrés de liberté associés aux nœuds de l'élément.

Les déplacements virtuels  $\delta \mathbf{u}^n$  sont approchés par les mêmes fonctions de forme :

$$\delta \mathbf{u}^n = \mathbb{H}(x) \delta \mathbf{q}^n. \quad (4.12)$$

La relation (4.10) devient

$$\begin{aligned} \sum_n \delta \mathbf{q}^{nT} \left[ \int_0^{l_e} (\nabla_u \mathbb{H})^T \mathbf{C} (\nabla_u \mathbb{H}) \mathbf{q}^n dx + \mathbb{H}^T \mathbf{M} \mathbb{H} \dot{\mathbf{q}}^n dx + \int_0^{l_e} \mathbb{H}^T \mathbf{G} \mathbb{H} \mathbf{q}^n dx \right] \\ = \sum_n \int_0^{l_e} \mathbb{H}^T \mathbf{F} dx \quad \forall \delta \mathbf{q}^n \end{aligned} \quad (4.13)$$

Finalement, en posant  $\nabla_u \mathbb{H} = \mathbb{B}$ , l'expression des matrices élémentaires du système est obtenue :

$$\mathbb{M}_e = \int_0^{l_e} \mathbb{H}^T \mathbf{M}_e \mathbb{H} dx \quad \mathbb{G}_e = \int_0^{l_e} \mathbb{H}^T \mathbf{G}_e \mathbb{H} dx \quad \mathbb{K}_e = \int_0^{l_e} \mathbb{B}^T \mathbf{C}_e \mathbb{B} dx \quad \mathbf{r}_e = \int_0^{l_e} \mathbb{H}^T \mathbf{F}_e dx \quad (4.14)$$

Celles-ci sont ensuite assemblées afin de constituer les matrices globales du système. La résolution de la formulation matricielle de la forme faible associée aux vibrations transversales des arbres consiste à rechercher le vecteur  $\mathbf{q}(t)$ , satisfaisant les conditions aux limites, tel que les relations

$$\mathbb{M} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{G} \mathbf{q}(t) + \mathbb{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (4.15)$$

$$\mathbf{q}(t = 0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(t = 0) = \dot{\mathbf{q}}_0,$$

soient vérifiées. Les matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  sont les matrices de masse et de rigidité de la structure, tandis que  $\mathbb{G}$  représente la matrice dite **gyroscopique**, dont les termes dépendent de la vitesse de rotation de l'arbre. Les composantes de  $\mathbf{r}$  forment les forces discrètes, alors que  $\mathbf{q}_0$  et  $\dot{\mathbf{q}}_0$  dénotent les vecteurs des déplacements et des vitesses discrets initiaux.

Une fois ces matrices constituées, elles sont utilisées afin de calculer la base modale qui caractérise le système permettant par superposition modale de reconstituer la réponse temporelle (libre + forcée) de l'arbre en rotation soumis à une composition de forces. Ces calculs sont détaillés dans la partie suivante.

### 3. Base modale et réponse totale du système

#### A. Calcul de la base modale

La base modale est obtenue en partant des équations différentielles semi-discrètes régissant le comportement de notre structure en régime libre qui correspond à l'équation (4.15) en éliminant les termes de force :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{G}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{q}(t) = 0 \quad (4.16)$$

La solution générale de l'équation (4.16) est exprimée sous forme exponentielle

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}\alpha e^{\lambda t} \quad (4.17)$$

dans laquelle  $\alpha$ ,  $\lambda$  et  $\mathbf{p}$  sont des grandeurs complexes dénotant respectivement une amplitude de référence, les valeurs propres et les vecteurs propres du système.

L'expression (4.17) est insérée dans la relation (4.16) afin d'aboutir au problème aux valeurs propres généralisé :

$$(\lambda^2\mathbb{M} + \lambda\mathbb{G} + \mathbb{K})\mathbf{p} = 0 \quad (4.18)$$

Le système (4.18) de  $n$  équations linéaires admet  $2n$  solutions non triviales définissant les fréquences propres et les formes de vibration de la structure. Il est donc nécessaire de le modifier pour le résoudre. Ceci se fait par une adaptation de la transformation de Duncan pour les systèmes amortis. Une identité auxiliaire d'ordre  $n$  est ajoutée au système afin de transformer le système en une forme linéaire de dimension  $2n$ . En ajoutant l'équation triviale suivante :

$$\mathbb{K}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbb{K}\dot{\mathbf{q}}(t) \quad (4.19)$$

Le système de  $2n$  équations du premier ordre suivant est obtenu :

$$\mathbb{B}\dot{\mathbf{g}}(t) - \mathbb{A}\mathbf{g}(t) = 0 \quad (4.20a)$$

avec

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ -\mathbb{K} & -\mathbb{G} \end{bmatrix} (b) \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{bmatrix} (c) \quad \mathbf{g} = (\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^T (d)$$

où  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  d'ordre  $2n$  sont dites matrices augmentées tandis que  $\mathbf{g}$  désigne le vecteur d'état du système.

L'introduction de la solution (4.17) dans la définition (4.20d)

$$\mathbf{g} = \{\mathbf{p}\alpha e^{\lambda t}, \lambda \mathbf{p}\alpha e^{\lambda t}\}^T = \alpha e^{\lambda t} \{\mathbf{p}, \lambda \mathbf{p}\}^T \quad (4.21)$$

et l'intégration de cette expression dans la relation (4.20a) permet finalement d'établir le problème aux valeurs propres généralisé relatif aux systèmes tournants conservatifs sous la forme

$$(\mathbb{A} - \lambda \mathbb{B})\mathbf{V}_{pr} = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{V}_{pr} = \{\mathbf{p}, \lambda \mathbf{p}\}^T \quad (4.22)$$

dans laquelle  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  jouent le rôle de matrices de rigidité et de masse du problème augmenté, dont les grandeurs propres sont les variables  $\lambda$  et  $\mathbf{V}_{pr}$ .

La modification du système et l'ajout de l'identité auxiliaire double la dimension du vecteurs des valeurs propres qui est en réalité composé de  $n$  couples conjugués de valeur imaginaires pures  $\lambda_i = j\omega_i$  et  $\bar{\lambda}_i = -j\omega_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $j = \sqrt{-1}$ ). Les grandeurs  $\omega_i$  sont les **pulsations propres** de la structure. Il y a de plus  $n$  paires de vecteurs complexes conjugués  $\mathbf{V}_{pr_i}$  et  $\bar{\mathbf{V}}_{pr_i}$ . Ceux-ci étant de dimension  $2n$ , les formes propres  $\mathbf{p}_i$  et  $\bar{\mathbf{p}}_i$  du système rotatif sont obtenues en tronquant les  $n$  premiers termes. Les  $2n$  solutions non triviales de l'équation homogène satisfont les relations suivantes :

$$(\mathbb{A} - \lambda_i \mathbb{B})\mathbf{V}_{pr_i} = (\mathbb{A} - j\omega_i \mathbb{B})\mathbf{V}_{pr_i} = 0 \quad (4.23a)$$

$$(\mathbb{A} - \bar{\lambda}_i \mathbb{B})\bar{\mathbf{V}}_{pr_i} = (\mathbb{A} - j\bar{\omega}_i \mathbb{B})\bar{\mathbf{V}}_{pr_i} = 0 \quad (4.23b)$$

Il ne reste plus qu'à ordonner les pulsations propres et à les diviser par  $2\pi$  afin de retrouver les fréquences propres du système. Le vecteur propre  $\mathbf{p}_i$  correspondant à cette fréquence donne, quant à lui, la forme du mode dont l'amplitude est liée aux conditions de calcul.

Ces modes sont tournants, et leur fréquence dépendra de la vitesse de rotation. Chaque mode aura son sens de rotation. Ainsi, ils peuvent soit être directs s'ils tournent dans le même sens que l'arbre, soit indirects dans le cas contraire. Leur fréquence est représentée en fonction de la vitesse de rotation sur des diagrammes de Campbell [**Campbell, 1924**] qui sont utilisés pour la validation du modèle mécanique à la partie IV.1).

La base modale ainsi calculée peut être utilisée afin de reconstituer la réponse de l'arbre par la méthode de superposition modale. Cette réponse est faite en temporelle afin de pouvoir extraire l'état de déformation de l'arbre à tout moment de la simulation. Ceci permet d'observer les évolutions de forces électromagnétiques et déterminer le mécanisme de création des phénomènes vibro-acoustiques.

---



---

## B. Réponse forcée et libre d'un arbre en rotation

### i. Mise en équation

La réponse totale de l'arbre (forcée + libre) est calculée par un schéma temporel des différences finies d'ordre 2 appliqué à l'équation du mouvement d'un système conservatif tournant à une vitesse angulaire constante (4.15). Une modification similaire à celle faite pour obtenir (4.20) est faite pour transformer l'équation différentielle du second ordre (4.25) de dimension  $n$  en une équation du première ordre de dimension  $2n$ . Le système devient le suivant :

$$\mathbb{B}\dot{\mathbf{g}}(t) - \mathbb{A}\mathbf{g}(t) = \mathbb{h}(t) \quad (4.24)$$

associé à la condition initiale  $\mathbf{g}(0) = \mathbf{g}_0$  avec

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ -\mathbb{K} & -\mathbb{G} \end{bmatrix} \quad \mathbb{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{g} = (q, \dot{q})^T \\ \mathbf{g}_0 = \{q_0, \dot{q}_0\}^T \\ \mathbb{h} = \{0, \mathbb{r}\}^T \end{cases}$$

A nouveau ici  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  d'ordre  $2n$ , dites matrices augmentées, sont respectivement antisymétrique et symétrique définie strictement positive, tandis que  $\mathbf{g}$  désigne le vecteur d'état du système avec sa valeur initiale  $\mathbf{g}_0$  à  $t_0$ . De plus,  $\mathbb{h}$  dénote le vecteur augmenté des forces excitatrices.

### ii. Résolution temporelle par un schéma aux différences finies

Un changement de base est alors réalisé afin de s'affranchir des nombres complexes. Le vecteur augmenté  $\mathbf{g}$  est réécrit comme une combinaison linéaire des  $2n$  vecteurs propres modaux complexes conjugués  $\mathbf{V}_{pr_i}$  et  $\overline{\mathbf{V}}_{pr_i}$  obtenus en résolvant (4.22). Pour cela, la matrice

$$\mathbb{Q} = \mathbb{V}_{pr} \mathbb{T} \quad (4.25)$$

est introduite dans le système avec

$$\begin{cases} \mathbb{V}_{pr} = [\mathbf{V}_{pr_1}, \overline{\mathbf{V}}_{pr_1}, \mathbf{V}_{pr_2}, \overline{\mathbf{V}}_{pr_2}, \dots, \mathbf{V}_{pr_n}, \overline{\mathbf{V}}_{pr_n}] \\ \mathbb{T} = \text{diag} \left( \dots, \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-j & 1+j \\ 1+j & 1-j \end{bmatrix}, \dots \right) \end{cases} \quad (4.26)$$

La matrice  $\mathbb{Q} = [y_1 + z_1, y_1 - z_1, \dots, y_n + z_n, y_n - z_n]$  construite avec des sommes et différences de parties réelles et imaginaires  $y_i$  et  $z_i$  des formes propres permet de récrire la solution  $\mathbf{g}$  comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= w_1(t)(y_1 + z_1) + w_2(t)(y_1 - z_1) + w_3(t)(y_2 + z_2) + w_4(t)(y_2 - z_2) + \dots \\ &\quad + w_{2n-1}(t)(y_n + z_n) + w_{2n}(t)(y_n - z_n) \\ &= \sum_{i=1}^n w_{2i-1}(t)(y_i + z_i) + w_{2i}(t)(y_i - z_i) = \mathbb{Q}\mathbf{w}(t) \end{aligned} \quad (4.27)$$

où  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}^T$  est le vecteur des  $2n$  coordonnées modales qui caractérise la contribution de chacun des modes à la réponse forcée.

La décomposition (4.25) est utilisée pour déterminer une expression du vecteur des coordonnées modales  $\mathbf{w}$ , elle est réinjectée dans (4.24) et multipliée à gauche par la matrice  $\mathbb{Q}^t = (\mathbb{U}\mathbb{T})^t = (\bar{\mathbb{U}}\bar{\mathbb{T}})^t$  pour obtenir :

$$\mathbb{Q}^t \mathbb{B} \mathbb{Q} \mathbf{w}(t) - \mathbb{Q}^t \mathbb{A} \mathbb{Q} \dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbb{Q}^t \mathbf{h}(t) \quad (4.28)$$

Les vecteurs propres sont normalisés avec les relations d'orthogonalisation :

$$\mathbb{V}_{pr}^T \mathbb{B} \mathbb{V}_{pr} = \mathbb{I} \quad (4.29a) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}_{pr}^T \mathbb{A} \mathbb{V}_{pr} = \mathbb{\Lambda} \quad (4.29b)$$

où  $\mathbb{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_n, \bar{\lambda}_n)$  est la matrice spectrale et  $\mathbb{I}$  est la matrice d'identité d'ordre  $2n$ . L'équation (4.28) devient alors, grâce à ces relations d'orthogonalisation :

$$\bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{T} \dot{\mathbf{w}}(t_k) - \bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{\Lambda} \mathbb{T} \mathbf{w}(t_k) = \mathbf{s}(t_k) = \mathbb{Q}^t \mathbf{h}(t_k) \quad (4.30a)$$

$$\bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{T} \mathbf{w}(0) = \mathbb{Q}^t \mathbf{g}_0 \quad (4.30b)$$

où  $\mathbf{s}$  dénote le vecteur des forces modales.

L'équation différentielle matricielle (4.30a) étant définie du premier ordre, il est désormais possible de résoudre le système en temporel au moyen de modèles numériques connus. Dans notre étude, la méthode choisie est le **schéma de Crank-Nicholson** qui est un cas particulier de la **règle des trapèzes généralisée** pour les équations différentielles du premier ordre. Dans sa version élargie, elle s'exprime sous la forme :

$$w(t_k) = w(t_{k-1}) + [(1 - \zeta) \dot{w}(t_{k-1}) + \zeta \dot{w}(t_k)] \Delta t \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (4.31a)$$

accompagné de la condition initiale :

$$w(t_0) = w(0) \quad (4.31b)$$

Dans ces expressions,  $w(t_k)$  et  $\dot{w}(t_k)$  désignent les approximations au temps  $t_k$  des coordonnées normales et de leurs dérivées. Les grandeurs  $\Delta t = t_k - t_{k-1}$  et  $\zeta = \frac{1}{2}$  sont respectivement le pas de temps et le paramètre de contrôle de stabilité de l'algorithme.

En isolant et égalisant les termes en  $w(t_k)$  dans les équations (4.30a) et (4.31a), les vitesses modales au temps  $t_k$  peuvent être explicitées en fonctions des grandeurs cinématiques du pas de temps précédent  $t_{k-1}$  et le vecteur des forces modales à l'instant  $t_k$  notée  $s(t_k)$  :

$$\dot{w}(t_k) = (\bar{T}^T T - \bar{T}^T \Lambda T \zeta \Delta t)^{-1} (s(t_k) + \bar{T}^T \Lambda T [w_{k-1} + \Delta t(1 - \zeta)\dot{w}_{k-1}]) \quad (4.32)$$

Ainsi, une fois le vecteur de vitesse modale au temps  $t_k$  obtenu, il est introduit dans l'expression du schéma des différences finies (4.31a) afin d'en déduire le vecteur des coordonnées modales au temps  $t_k$ . Ce dernier est réinjecté dans l'équation (4.27) pour déterminer les déplacements et rotations. Le calcul est ensuite réitéré aux pas de temps suivants sur toute la période de calcul pour constituer un temporel des déplacements et rotation des nœuds.

#### 4. Introduction d'amortissement dans le modèle

##### A. Amortissement proportionnel de Rayleigh

L'amortissement est introduit dans la forme faible de l'élastodynamique en flexion d'un système tournant (4.15) sous la forme d'une matrice d'amortissement global, nommée  $\mathbb{C}$  tel que :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbb{C} + \mathbb{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbb{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{r}(t) \quad (4.33)$$

Cette matrice est définie en utilisant la relation correspondant au frottement dit proportionnel, aussi appelé amortissement de Rayleigh :

$$\mathbb{C} = \alpha\mathbb{K} + \beta\mathbb{M} \quad (4.34)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les facteurs de proportionnalité entre les matrices de rigidité, de masse et de dissipation. Ce type d'amortissement a l'avantage d'être facile à mettre en place, et permet d'avoir une matrice d'amortissement diagonale mais est fortement dépendant de l'identification des coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  qui sont liés aux coefficients d'amortissement modaux  $\xi$ .

##### B. Amortissement modal

L'amortissement peut aussi être introduit en modifiant chacun des modes et leur ajoutant une partie facteur de l'amortissement. Les valeurs propres qui étaient alors purement imaginaires se retrouvent sous la forme :  $\lambda_i = -\omega_i \left( \xi_i \pm j\sqrt{1 - \xi_i^2} \right)$ . Une fois encore, il est important de bien déterminer les coefficients d'amortissement modaux pour cette méthode.

##### C. Introduction de l'amortissement dans le schéma temporel

La réécriture (4.33) est résolue d'une manière légèrement différente du fait que les valeurs propres ne sont plus imaginaires pures. De ce fait, les relations d'orthogonalités (4.30a) et (4.30b) sont réécrites

$$\mathbb{V}_{pr}^d \mathbb{B} \mathbb{V}_{pr}^g = \mathbb{I} \quad (4.35a) \quad \text{et} \quad \mathbb{V}_{pr}^d \mathbb{A} \mathbb{V}_{pr}^g = \Lambda \quad (4.35b)$$

en faisant intervenir la matrice des vecteur propres à droites  $\mathbb{V}_{pr}^d = \{V_{pr_1}^d, \bar{V}_{pr_1}^d, V_{pr_2}^d, \dots, \bar{V}_{pr_n}^d\}$  et à gauche  $\mathbb{V}_{pr}^g = \{V_{pr_1}^g, \bar{V}_{pr_1}^g, V_{pr_2}^g, \dots, \bar{V}_{pr_n}^g\}$  qui résultent des problèmes aux valeurs propres

$$\mathbb{V}_{pr_i}^d(\mathbb{A} - \lambda_i \mathbb{B}) = 0 \quad (4.36a) \quad \text{et} \quad (\mathbb{A} - \lambda_j \mathbb{B})\mathbb{V}_{pr_i}^g = 0. \quad (4.36b)$$

La solution  $\mathbf{g}$  devient :

$$\mathbf{g}(t) = \sum_{i=1}^n w_{2i-1}(t)(y_i + z_i) + w_{2i}(t)(y_i - z_i) = \mathbb{V}_{pr}^d \mathbb{T} \mathbf{w}(t) \quad (4.37)$$

et la matrice pseudo-modale gauche  $\mathbb{Q} = \mathbb{V}_{pr}^g \bar{\mathbb{T}}$  est maintenant constituée des valeurs réelles et imaginaires des vecteurs propres à gauche.

Après avoir fait le même développement que pour les systèmes non amortis, il est possible d'obtenir les mêmes équations qui régissent le régime forcé augmenté sous la forme pseudo-modale :

$$\bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{T} \dot{\mathbf{w}}(t_k) - \bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{A} \mathbb{T} \mathbf{w}(t_k) = \mathbf{s}(t_k) = \mathbb{Q}^t \mathbf{h}(t_k) \quad (4.38a)$$

$$\bar{\mathbb{T}}^t \mathbb{T} \mathbf{w}(0) = \mathbb{Q}^t \mathbb{B} \mathbf{g}_0 \quad (4.38b)$$

Ces équations sont résolues par le schéma temporelle de la même manière que pour le système gyroscopique non amorti. La seule différence est faite à l'application de (43) pour retrouver les degrés de libertés à partir des coordonnées modales  $w$  qui est faite avec la matrice des vecteur propres à droite et non à gauche.

#### D. Coefficient d'amortissement modaux $\xi$

Ces deux méthodes sont dépendantes de l'identification des coefficients d'amortissement modaux de la structure  $\xi$ . Ceux-ci peuvent être obtenus par recalage expérimental. Néanmoins cette étude n'a pas été faite durant la thèse. Il est donc très dur d'avoir une bonne estimation des coefficients. Un amortissement arbitraire est implémenté dans le modèle, si nécessaire.

Toutefois, les phénomènes vibro-acoustiques étant identifiés de manière qualitative, il est préférable de maximiser les déformations pour avoir des phénomènes plus visibles. C'est pour cela que la plupart des résultats présentés sont issus de calculs sans amortissement. Les phénomènes vibro-acoustiques étant principalement dus à des résonances de parties actives du ventilateur, il est nécessaire d'avoir une discrétisation fréquentielle suffisamment bonne pour ne pas manquer de pics de déformations qui apparaissent à des fréquences très précises sans amortissement.

## 5. Validation des calculs mécaniques

### A. Calcul des modes et fréquences propres

Il est nécessaire d'avoir un bon calcul des matrices du système pour en déterminer la base modale. Ce calcul est réalisé sur différents arbres et les résultats obtenus sont validés par le logiciel commercial RotorINSA. Cette étape permet de valider le calcul de la base modale qui est utilisée par la méthode de la superposition modale pour calculer la réponse forcée aux pressions de Maxwell.

#### i. Base modale d'une poutre élancée

La validation de la méthodologie de calcul de la base modale est faite sur une poutre fine et élancée. Elle est faite en comparant les résultats obtenus avec le modèle numérique avec ceux obtenus par le logiciel RotorINSA, logiciel de validation mécanique utilisé par Safran Ventilation Systems. Les calculs réalisés par le logiciel sont basés sur la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli, qui est plus efficace lorsque le rapport longueur/diamètre de la poutre est très grand. Les poutres élancées présentent des angles de cisaillement plus faibles, ainsi la section reste bien perpendiculaire à la fibre neutre.

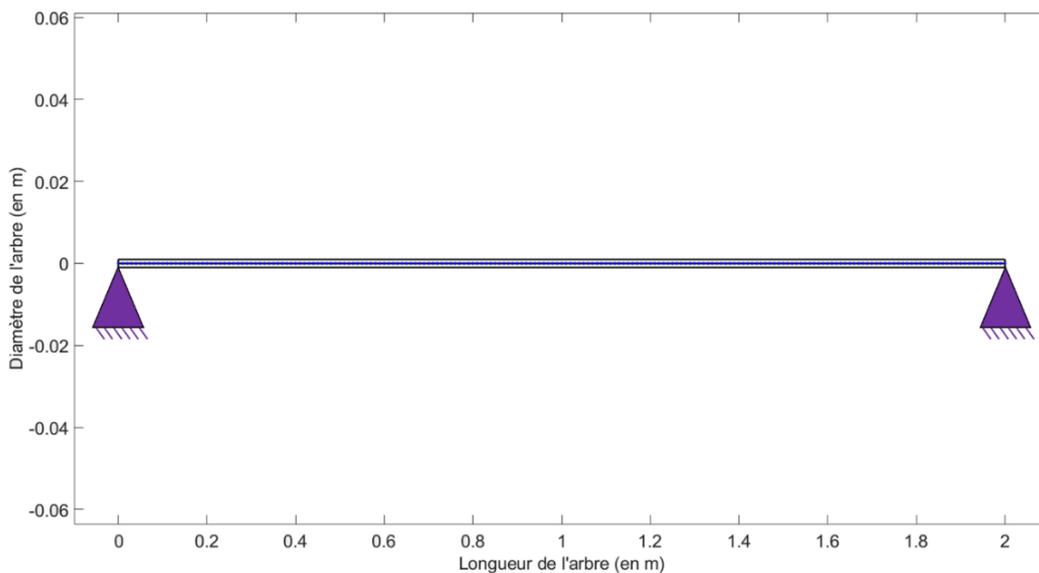


Figure IV.2 - Poutre longue et élancée en appui à ses extrémités utilisée pour la validation du modèle

La poutre étudiée est celle de la figure IV.2, à savoir une poutre en appui-à ses extrémités de longueur 2 mètres et de diamètre 1 millimètre. Les données géométriques et matériaux de la poutre sont données dans le tableau IV.1

Tableau IV-1 - Données géométriques et matériau de la poutre élancée

Longueur (m) $L$	2	Masse volumique ( $kg/m^3$ ) $\rho$	7800
Diamètre (m) $D$	0.001		
Module d'Young (MPa) $E$	19700	Coefficient de correction en cisaillement $\kappa$	5/6 (plein)
Coefficient de poisson $\nu$	0.29		1/2 (creux)

ii. *Comparaison des fréquences propres*

Les fréquences propres du tableau IV.2 sont obtenus à vitesse de rotation nulle avec les deux modèles.

Tableau IV-2 - Comparaison des fréquences propres obtenues par le modèle analytique et RotorINSA

Numéro fréquence propre	Modèle analytique	Calcul théorique	Erreur
1	4.93500E-01	4.93500E-01	0.00000%
2	1.97400E+00	1.97400E+00	0.00000%
3	4.44000E+00	4.44000E+00	0.00000%
4	7.89400E+00	7.89400E+00	0.00000%
5	1.23300E+01	1.23300E+01	0.00000%
6	1.77600E+01	1.77600E+01	0.00000%
7	2.41800E+01	2.41800E+01	0.00000%
8	3.99600E+01	3.99600E+01	0.00000%
9	4.93400E+01	4.93400E+01	0.00000%
10	5.97000E+01	5.97000E+01	0.00000%
11	7.10500E+01	7.10500E+01	0.00000%
12	8.33300E+01	8.33400E+01	0.01200%
13	9.67000E+01	9.67100E+01	0.01034%
14	1.11000E+02	1.11010E+02	0.00901%

Les fréquences propres du modèle analytique concordent tout à fait avec la solution de référence. Ils ne présentent que de petites erreurs à hautes fréquences dans ce cas d'étude. Celles-ci n'ont pas d'influence sur le calcul de réponse forcée puisque la contribution des modes hautes fréquences est négligeable par rapport à celles des premiers modes. Il est alors possible de conclure que les matrices  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{M}$  ainsi que le calcul de base modale du modèle mécanique sont bien implémentés et peuvent être utilisés.

iii. *Modélisation simplifiée et base modale de l'arbre du ventilateur*

Le rotor de ventilateur à modéliser est celui de la figure 6. Il comporte des discontinuités de section, un stack rotorique représenté par une **masse déportée**, un volant d'inertie représentant la roue du ventilateur, elle-même représentée par un **disque de masse**, et de **roulements à billes**.

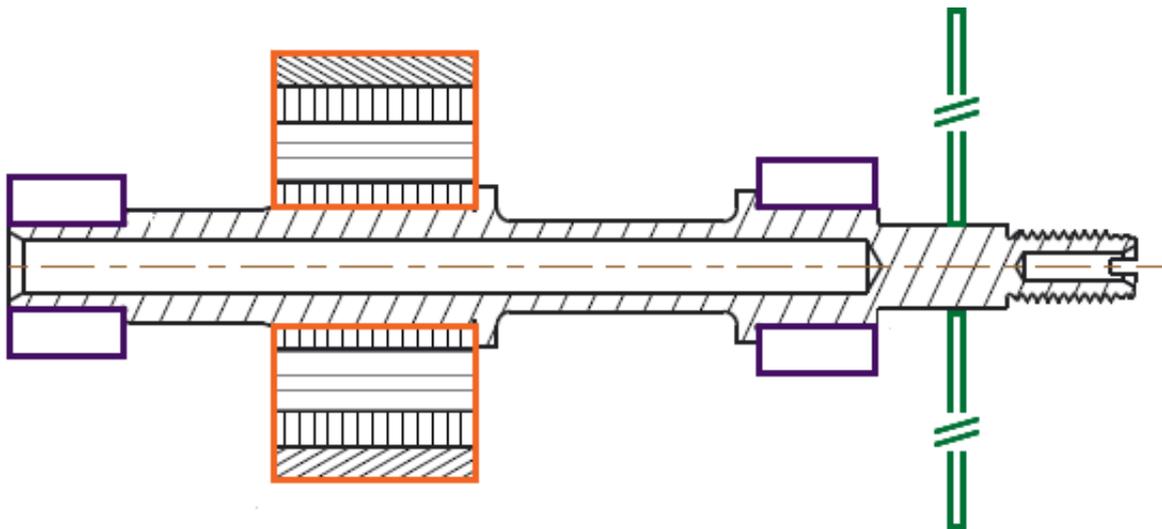


Figure IV.3 - Représentation schématique de l'arbre de ventilateur

Dans l'étude de la thèse, le rotor est simplifié et est celui de la figure IV.4. Le modèle se veut simple afin d'avoir un petit modèle éléments finis rapide en calcul permettant de donner la dynamique physique principale. Ainsi les simplifications faites sont :

- L'arbre fait la même longueur que celui du ventilateur mais présente une section creuse de diamètre unique.
- Les paliers sont remplacés par des appuis ponctuels où les déplacements des nœuds sont annulés dans les deux directions.
- Enfin, deux masses déportées sont ajoutées sur les éléments portants respectivement le rotor et le volant d'inertie. Leur matrice de masse, rigidité et gyroscopique sont donc pris en compte dans le calcul lors de l'assemblage des matrices élémentaires. Elles sont sommées aux matrices des éléments de l'arbre.

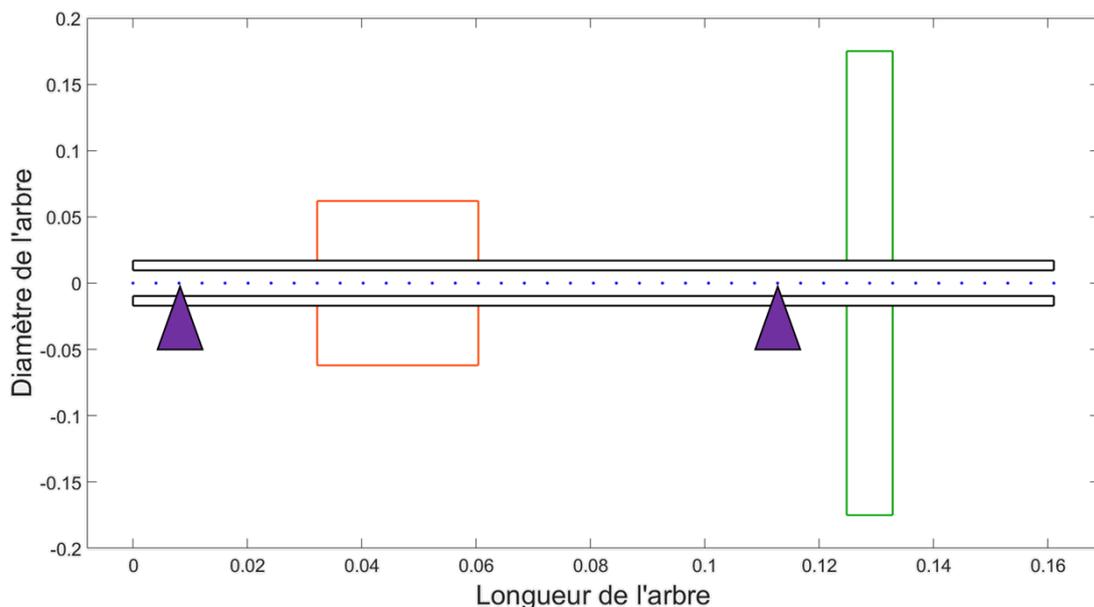


Figure IV.4 – Représentation schématique de l'arbre de ventilateur implémentée dans le modèle mécanique

Cette simplification a un effet sur les fréquences propres et les formes modales de l'arbre qui sont différentes de la réalité. Celles-ci varient tout de même en fonction de la vitesse de rotation comme l'arbre réel (figure IV.5).

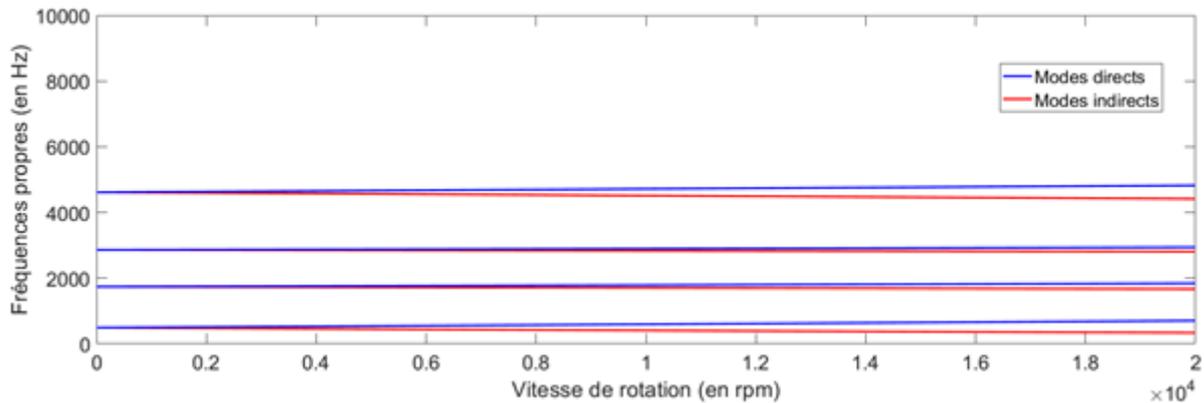


Figure IV.5 - Comparaison des diagrammes de Campbell du modèle analytique d'arbre avec celui du modèle RotorINSA

Il est tout de même possible de réaliser l'identification des phénomènes vibro-acoustiques observés expérimentalement de manière qualitative. Il est admis que la dynamique du modèle est suffisamment similaire pour que les phénomènes vibro-acoustique apparaissent de la même manière pour le modèle de l'étude mais à des fréquences et vitesses différentes. Cette identification de phénomènes vibro-acoustiques est expliquée de manière détaillée dans la partie modèle couplée où sont présentés les résultats finaux.

#### iv. Déformée modale du modèle d'arbre simplifié

Les valeurs propres du système permettent de calculer les fréquences propres de l'arbre tandis que les vecteurs propres permettent quant à eux de donner la forme de l'arbre associée à chaque mode. Cette déformée modale est illustrée en figure IV.6. La déformée étant touronnante, chaque nœud peut se trouver sur le cercle vert qui lui est associé. La déformée maximale selon l'axe y est donnée en rouge.

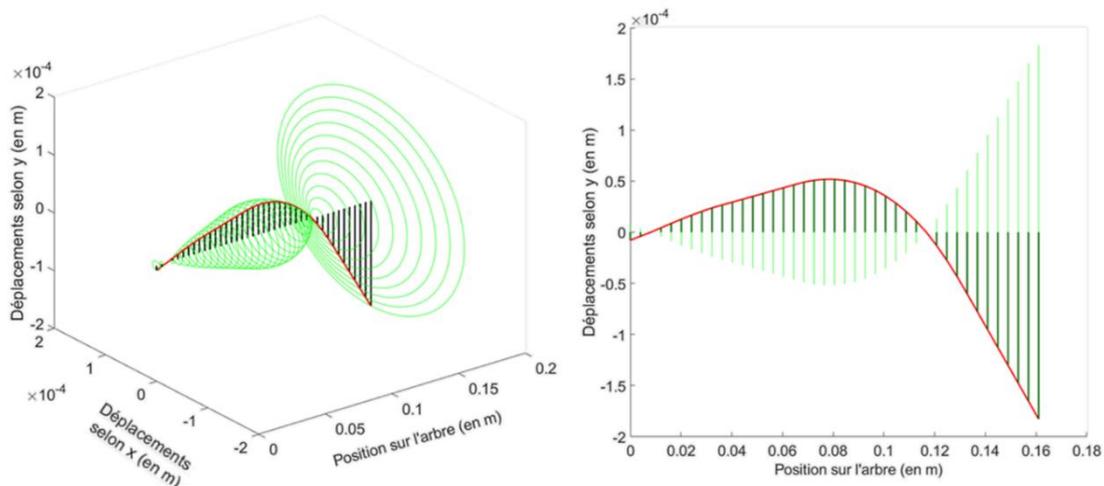


Figure IV.6 - Déformée modale d'ordre 1 de l'arbre simplifié

Sur cette figure, on peut voir que les appuis sont bien positionnés sur les déformées modales puisque les déplacements des nœuds d'appuis sont bien égaux à 0. Ces appuis sont retrouvés sur la réponse forcée, pour donner la bonne dynamique de l'arbre, notamment le bout d'arbre libre porteur de la roue du ventilateur. On observe aussi que la forme correspond bien à celle d'un premier mode à un lobe.

La base modale du système ayant été validée, elle peut être utilisée pour calculer la réponse temporelle du système par combinaison linéaire des déformées modales. Différentes comparaisons avec des solutions théoriques sont réalisées dans la partie suivante afin de valider la bonne implémentation du vecteur force et du schéma temporel dans le code.

### B. Calcul de réponse temporelle de l'arbre

L'implémentation du schéma aux différences finies est validée sur un modèle 1D masse-ressort amorti simple dont il est possible de déterminer théoriquement la réponse libre et forcée. L'équation du mouvement de ce système est :

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + kq = F \quad (4.39)$$

où  $m$  est la masse du système,  $k$  la rigidité du ressort et  $F$  la force appliquée au système. Les grandeurs  $\ddot{q}$  et  $q$  sont respectivement l'accélération et le déplacement du système. Il devient, en faisant apparaître la pulsation propre de ce système  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  :

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2q = \frac{F}{m} \quad (4.40)$$

où  $\xi = \frac{c}{2m\omega_0}$  est le taux d'amortissement du modèle avec  $c$  le coefficient d'amortissement.

Afin d'avoir le calcul forcé à un degré de liberté dans le même formalisme que pour le modèle d'arbre (qui en présente 4 par nœuds), l'équation du second ordre (4.40) est linéarisée sous la forme :

$$\mathbb{A}g(t) + \mathbb{B}\dot{g}(t) = \mathbb{h}(t) \quad (4.41)$$

avec  $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & 2\xi\omega_0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{B} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbb{h} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{m} \end{bmatrix}$  et  $g = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$ .

Ce système d'équation est résolu en temporel dans plusieurs cas d'étude en le comparant à la réponse théorique du déplacement d'un système masse-ressort amorti. Il peut être utilisé pour le système à  $4n$  degrés de liberté.

## i. Réponse libre du système masse-ressort 1D

La réponse libre d'un système masse-ressort amorti est régie par l'équation :

$$u_{libre} = e^{-\xi\omega_0 t} \left[ u_0 \cos(\Omega_0 t) + \left( \frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_0 u_0}{\omega} \right) \sin(\Omega_0 t) \right] \quad (4.42)$$

où  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  sont les conditions initiales en déplacement et vitesses du système et  $\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$  est la pseudo-pulsation amortie du système.

Dans un premier temps les deux modèles sont initialisés avec un même déplacement initial

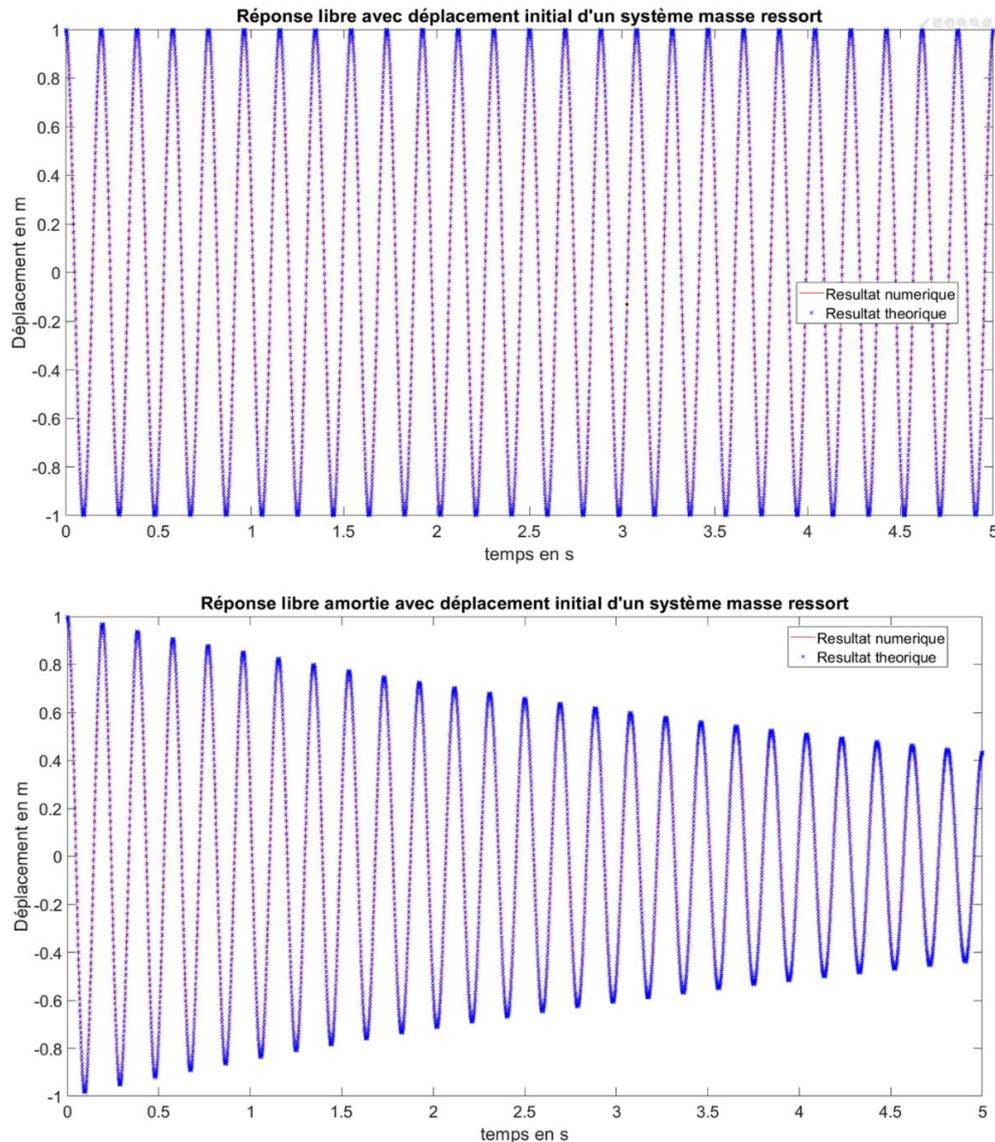


Figure IV.7 - Réponse libre avec condition initiale de déplacement d'un système masse ressort calculé avec le schéma des différences finies comparé à la réponse théorique

$u_0$  et les réponses sont comparés aux figures IV.7 avec et sans amortissement. Les résultats sont très bons et le modèle temporel converge directement vers la solution exacte pour un pas de temps qui est très petit vis-à-vis de la constante de temps du système.

La même étude est ensuite réalisée en initialisant le modèle avec une vitesse initiale  $\dot{u}_0$ , les résultats de la figure IV.8 sont obtenus. La réponse libre résultant d'une condition initiale en vitesse appliquée au système est tout aussi bien calculée par le schéma temporel.

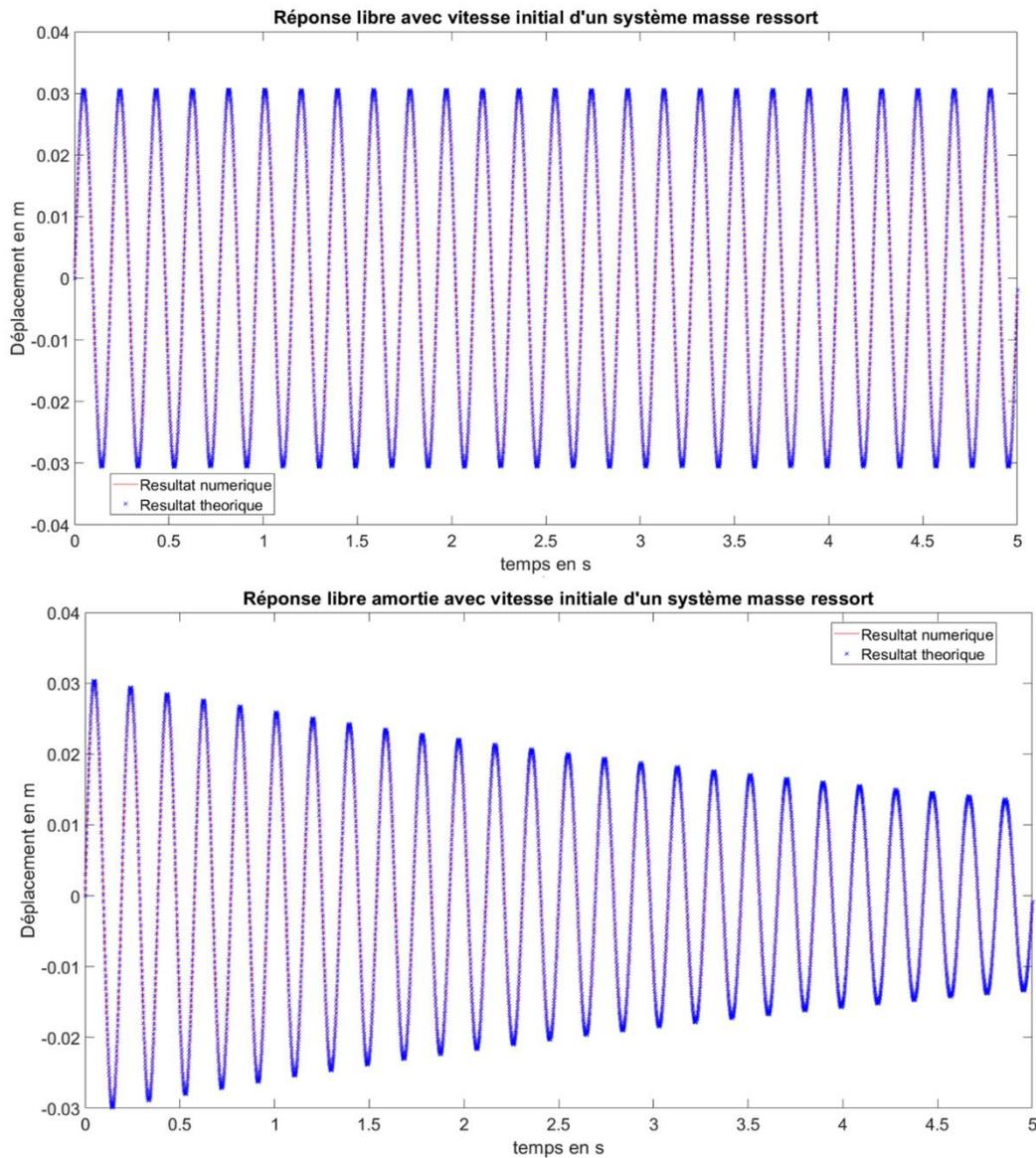


Figure IV.8 - Réponse libre avec condition initiale de vitesse d'un système masse ressort calculé avec le schéma des différences finies comparé à la réponse théorique

Ces deux études montrent la bonne prise en compte des conditions initiales dans le schéma temporel. Elles permettent aussi de conclure que ce dernier est bien implémenté et permet de calculer une réponse temporelle du système masse-ressort. L'étape suivante est d'introduire une excitation afin d'étudier la réponse forcée du système.

## ii. Réponse forcée du système masse-ressort 1D

$$u_{forcée} = \text{imag} \left( \frac{f(t)e^{-j\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\xi\omega_0\omega} \right) \quad (4.43)$$

Le modèle est cette fois-ci initialisé avec un déplacement et une vitesse nulle, et une force harmonique sinusoïdale de pulsation  $\omega$  est appliquée à une position sur la longueur du rotor sur une période donnée. La réponse forcée est ensuite calculée avec le schéma aux différences finies et le résultat est comparé avec la solution théorique (4.43).

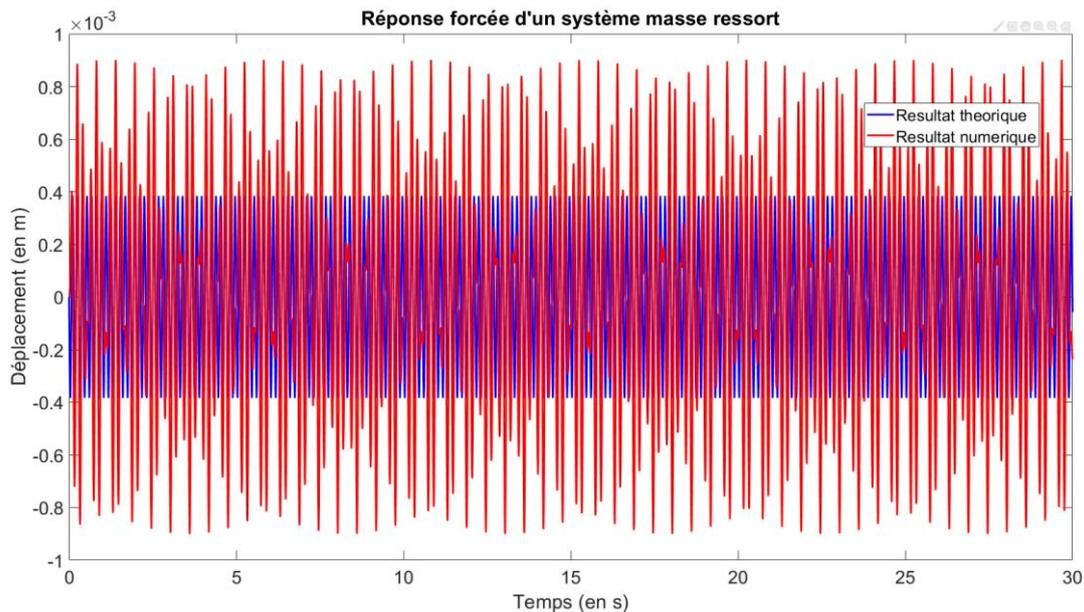


Figure IV.9 - Réponse forcée système masse-ressort

Les deux résultats ne semblent pas correspondre. Ceci est dû au fait que la force est imposée instantanément à  $t_0$ . Cet échelon de force (en rouge sur la figure IV.10) va créer une forte réponse libre de la structure qui perdura au cours du temps si elle n'est pas amortie. Pour parer à cela, deux solutions sont possibles : ajouter de l'amortissement au modèle pour faire disparaître progressivement cette réponse libre ou écrêter la force en lui donnant l'amplitude croissante de la courbe bleue de la figure IV.10 afin d'éviter la forte discontinuité à  $t_0$ . Ici, l'écrêtage est fait par une fonction exponentielle pour avoir une pente très faible à  $t_0$ . Les deux résultats sont donnés respectivement aux figures IV.11 et IV.12.

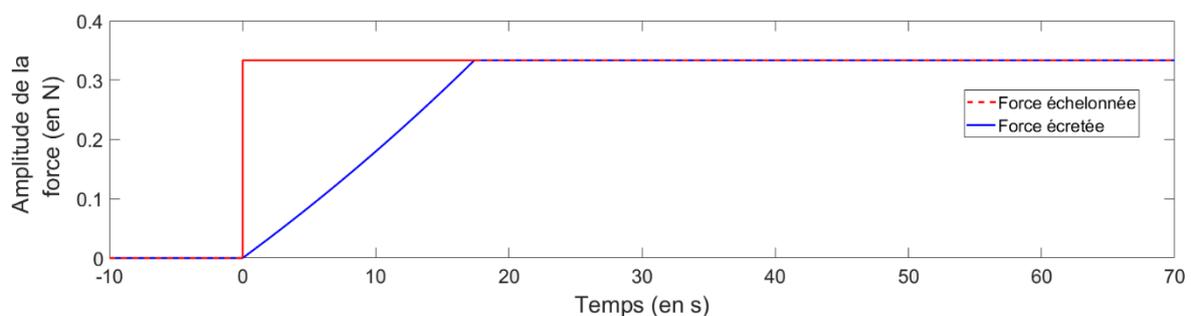


Figure IV.10 - Ecrêtage du vecteur temporel de force

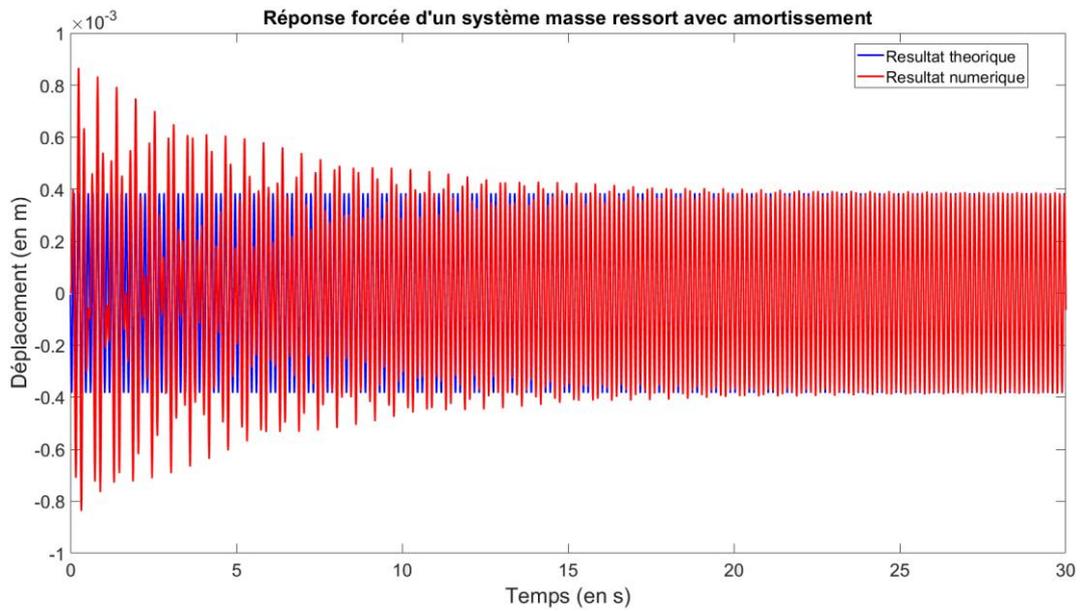


Figure IV.11 - Réponse forcée système masse-ressort amorti

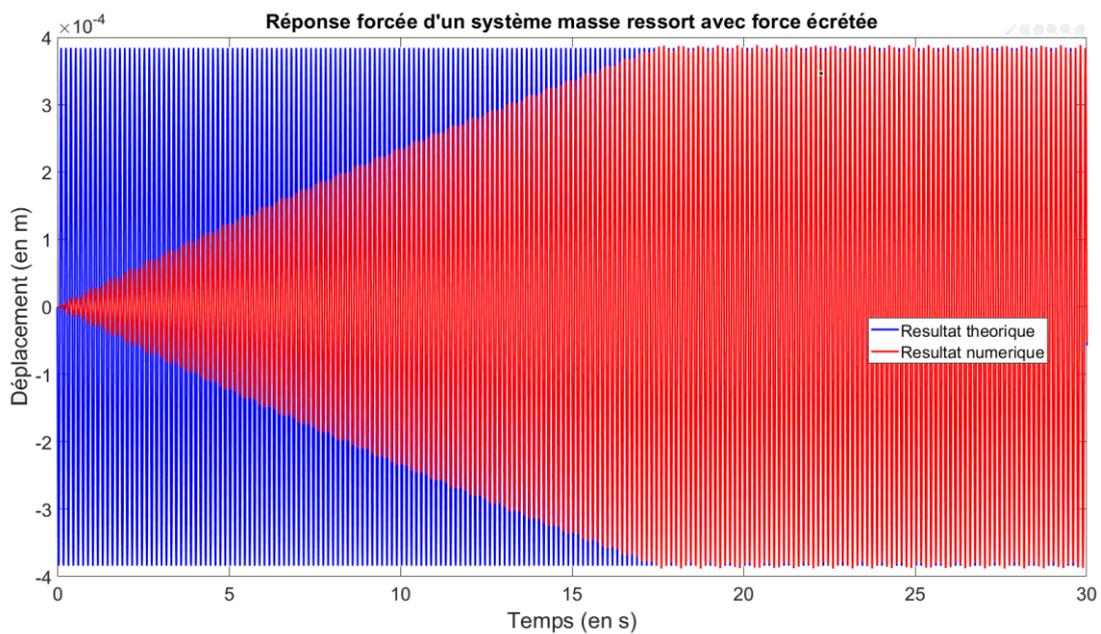


Figure IV.12 - Réponse forcée système masse-ressort avec un vecteur force écriété

Sur ces deux figures, la solution numérique présente une période transitoire permettant soit de faire disparaître la réponse libre dans le cas amorti, soit de faire croître la force jusqu'à son amplitude finale. Une fois cette période transitoire passée, les deux solutions sont quasiment superposées, montrant la bonne implémentation du vecteur force dans le calcul et confirmant le bon fonctionnement du schéma aux différences finies.

iii. Réponse temporelle du modèle simplifié de l'arbre de ventilateur

Les différents modules permettent de calculer la base modale et la réponse temporelle d'un arbre en rotation. La méthode de calcul peut désormais être appliquée au modèle d'arbre simplifié de ventilateur (figure IV.5) pour en calculer la réponse temporelle lorsqu'une force harmonique lui est appliquée. Ceci permet d'obtenir les résultats de la figure IV.13 lorsqu'il est soumis à une composition de force sinusoïdale au niveau des nœuds porteurs du rotor. Le graphe a) donne le parcours du centre entre 0.5 et 0.6 secondes montrant que le nœud central parcourt une spirale dont l'amplitude croît avec le temps. L'amplitude sur toute la période est donnée par le graphe b).

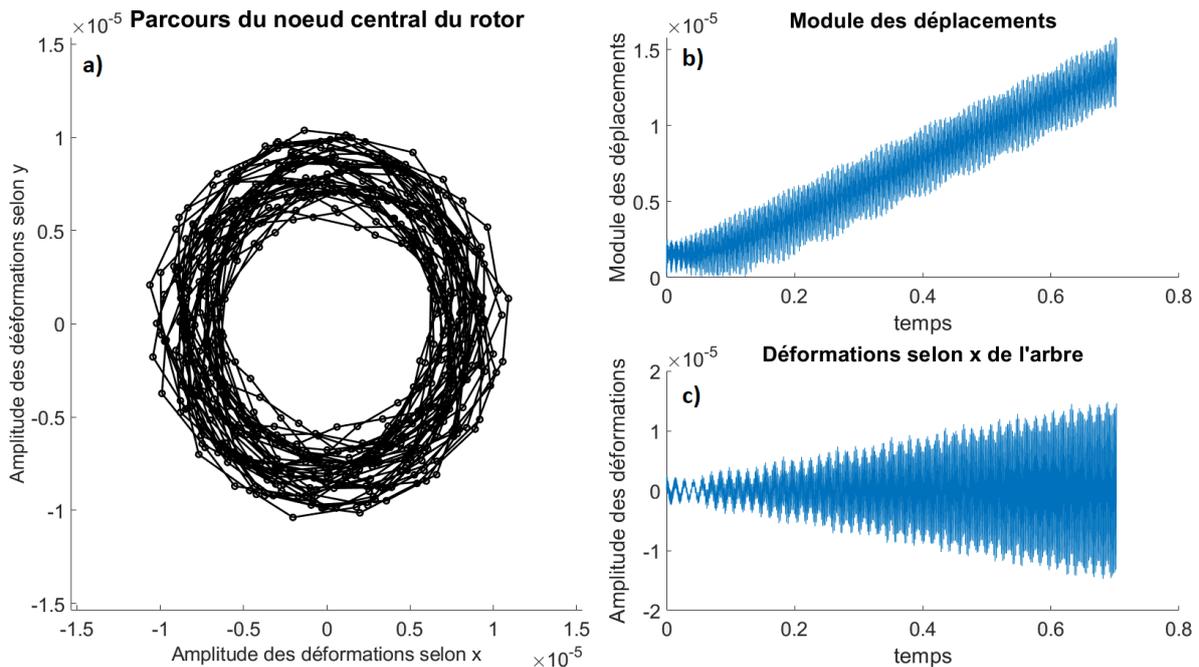


Figure IV.13 - Réponse temporelle du modèle simplifié d'arbre de ventilateur à une force harmonique

Cette forme circulaire est due au fait que les modes sont tournants. La réponse temporelle en étant une combinaison linéaire, ce résultat est cohérent. Toutefois, la période étudiée ne représente qu'une partie du transitoire où l'arbre n'y décrit qu'une spirale et non un cercle puisque l'amplitude est encore en train de croître sur cette période. Ce type de calcul peut être réalisé avec des forces homologues aux pressions de Maxwell pour coupler les physiques dans la partie suivante.

---

## 6. Conclusions sur le modèle mécanique

Ce chapitre donne la méthodologie de calcul mécanique de la base modale et la réponse temporelle d'un arbre en rotation. Le rotor du ventilateur est modélisé comme une poutre de Timoshenko à laquelle sont ajoutées des masses déportées représentant le stack rotorique et la roue du ventilateur. Ce modèle a été validé en utilisant des solutions théoriques ou le logiciel RotorInsa.

Ce modèle est utilisé dans le modèle couplé pour calculer les déformations de l'arbre lorsqu'il est soumis aux forces électromagnétiques induites dans le moteur. Bien que le modèle soit simplifié et que la base modale soit donc différente, il peut tout de même être utilisé pour identifier les phénomènes vibro-acoustiques expérimentaux. En effet, le modèle restitue bien la dynamique de l'arbre et les phénomènes apparaissent juste à des fréquences et vitesses moteurs différents.

Les deux modèles ayant été introduits, le chapitre suivant donne l'algorithme de couplage et les résultats issus du modèle multiphysique qui ont permis d'identifier certains phénomènes vibro-acoustiques observés expérimentalement.

---

# Chapitre V. Modèle couplé de calcul des déformations d'arbre de moteur électrique en rotation soumis aux excitations électromagnétiques

---

<u>Chapitre V. Modèle couplé de calcul des déformations d'arbre de moteur électrique en rotation soumis aux excitations électromagnétiques</u> .....	99
<u>1. Algorithme à pas décalés de couplage des modèles</u> .....	100
<u>2. Calcul et application des forces de Maxwell</u> .....	101
<u>3. Discrétisation spatiale et temporelle des modèles et rang harmonique maximum dans les sous-domaines</u> .....	103
<u>A. Discrétisation temporelle</u> .....	103
<u>B. Discrétisation spatiale</u> .....	104
<u>C. Discrétisation vitesse de rotation</u> .....	105
<u>D. Rang harmonique maximum du modèle électromagnétique</u> .....	105
<u>4. Résultats du modèle couplé</u> .....	106
<u>A. Excitation des modes de l'arbre en présence d'excentricité</u> .....	107
<u>B. Création d'une excentricité dynamique à partir d'excentricité statique</u> .....	116
<u>C. Excitation et contribution de multiples modes de rotor à la réponse forcée temporelle</u> .....	120
<u>D. Paramètres et tolérances de fabrication influant sur le contenu harmonique de l'excitation pouvant induire des vibrations</u> .....	123
<u>5. Conclusion sur le modèle couplé</u> .....	129

Dans ce chapitre, sont développés les résultats issus du couplage des deux modèles validés précédemment. Il s'agit du couplage du modèle électromagnétique calculant les forces de Maxwell en jeu dans l'entrefer d'un moteur synchrone à aimant permanent et du modèle mécanique de calcul de déformation d'une ligne d'arbre en rotation. Les différentes conclusions permettent une meilleure compréhension de certains phénomènes vibro-acoustiques identifiables sur les spectres et signaux temporels issus des tests de validation d'équipement. La cause de certains phénomènes vibro-acoustiques observé expérimentalement a ainsi pu être analysée. Les conclusions faites dans ce chapitre peuvent être utilisées afin de mieux prédire le comportement vibro-acoustique de systèmes électromécaniques et même d'en améliorer la conception.

### 1. Algorithme à pas décalés de couplage des modèles

Les deux modèles étant validés, les résultats suivants sont obtenus par couplage des physiques. Le couplage est fait par un algorithme à pas décalés. Ceci consiste à faire des pas successifs des différents modèles où les résultats de l'un influencent ceux de l'autre lors de son pas de calcul suivant comme le montre la figure V.1.

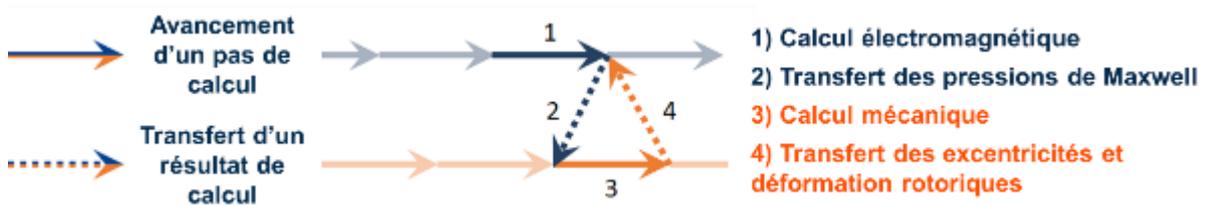


Figure V.1 - Algorithme à pas décalés du modèle couplé

Il y a un échange d'information successif entre les deux modèles, le modèle électromagnétique communique à chaque pas de temps la répartition des pressions de Maxwell sur le rotor, tandis que le modèle mécanique convertit cette pression en un vecteur résultant de force de Maxwell et transmet un état de déformation de l'arbre qui est perçu comme une excentricité instantanée par le modèle électromagnétique.

Pour rappel, comme vu au chapitre III, le contenu harmonique des pressions de Maxwell est directement lié à l'entrefer qui varie au cours du temps quand le rotor se déforme. Les déformations du rotor sont elles-mêmes dépendantes des forces qui lui sont appliquées. Les physiques y sont donc couplées fortement puisque l'une affecte l'autre en permanence.



Figure V.2 - Echange d'informations entre les modèles couplés

## 2. Calcul et application des forces de Maxwell

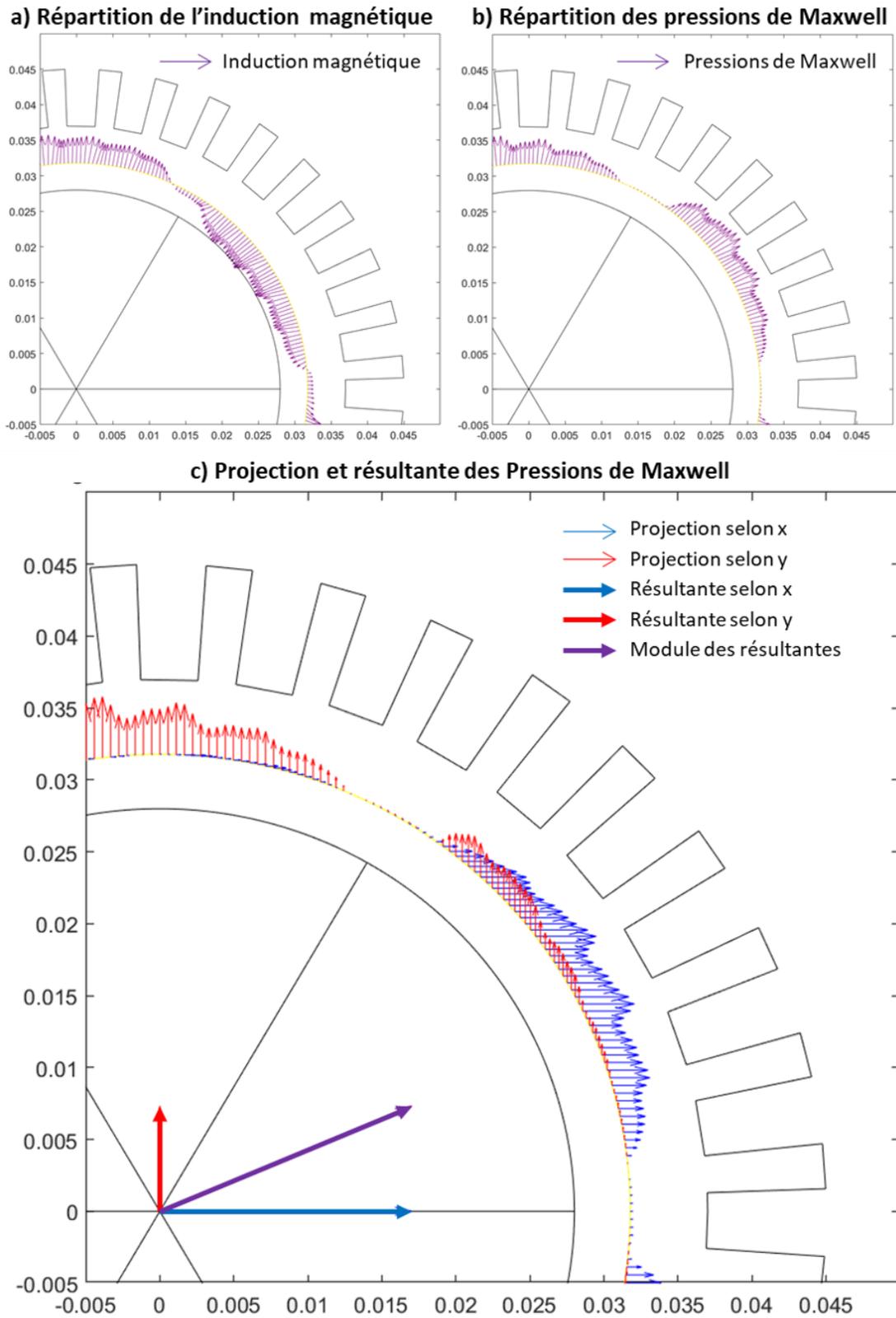


Figure V.3 - Transformation de l'induction magnétique en deux vecteur de résultantes de forces de Maxwell appliquées au rotor

Le modèle électromagnétique est initialisé avec une excentricité arbitraire représentant les défauts d'un moteur synchrone (erreur de centrage, d'équilibrage, etc.). Un premier calcul de forces surfaciques de Maxwell est réalisé dans cette configuration. Pour cela, l'induction magnétique est calculée sur une ligne de points dans l'entrefer (figure V.3a.) de laquelle est déduite une répartition des pressions de Maxwell (figure V.3b.) grâce aux équations (2.1). Les forces locales issues des pressions de Maxwell qui sont appliquées au rotor sont projetées selon les axes  $X$  et  $Y$  du rotor (figure V.3c.) et ensuite sommées afin d'obtenir les résultantes totales selon  $x$  (en bleu sur le graphique V.3c) et selon  $y$  (en rouge) des pressions pour cette configuration de déformation du rotor.

Ces résultantes de force de Maxwell sont appliquées sur les nœuds du rotor afin de calculer les déformations de l'arbre sur le pas de temps mécanique défini. Elles sont représentées par les flèches noires sur la figure V.4, pour leur composante selon  $X$ . Les résultantes de forces selon  $y$  sont également appliquées dans le plan correspondant.

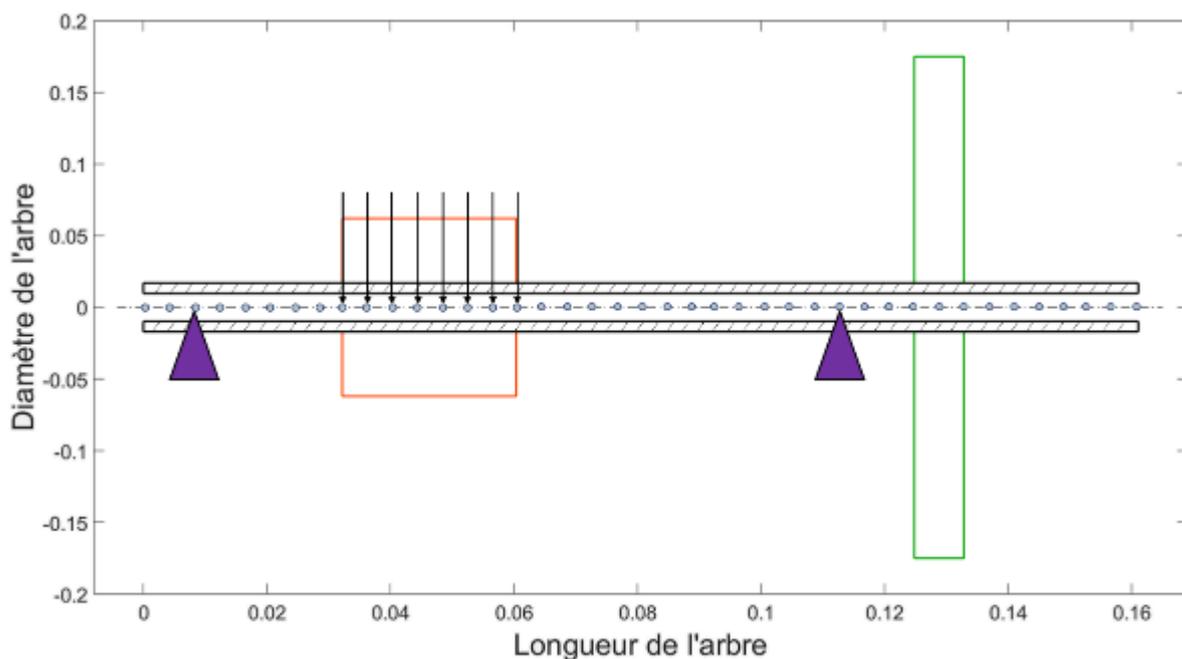


Figure V.4 - Répartition des forces de Maxwell sur le modèle d'arbre

Dans le cas où le calcul est réalisé à vitesse fixe, la base modale n'est calculée qu'une seule fois avant le début de la boucle de couplage puisqu'elle ne varie pas au cours du calcul. Elle est utilisée dans le calcul de la réponse forcée de notre modèle aux pressions de Maxwell. Dans les études à vitesses variables, elle est recalculée à chaque modification de vitesse de rotation.

A chaque pas de temps mécanique, la déformée du rotor permet de calculer l'excentricité instantanée  $\varepsilon_{exc}(t)$  et  $\phi_{exc}(t)$  (figure V.5). Ces paramètres sont réinjectés dans le modèle électromagnétique et perçus à cet instant comme une excentricité statique pour recalculer les pressions de Maxwell et recommencer tout le processus.

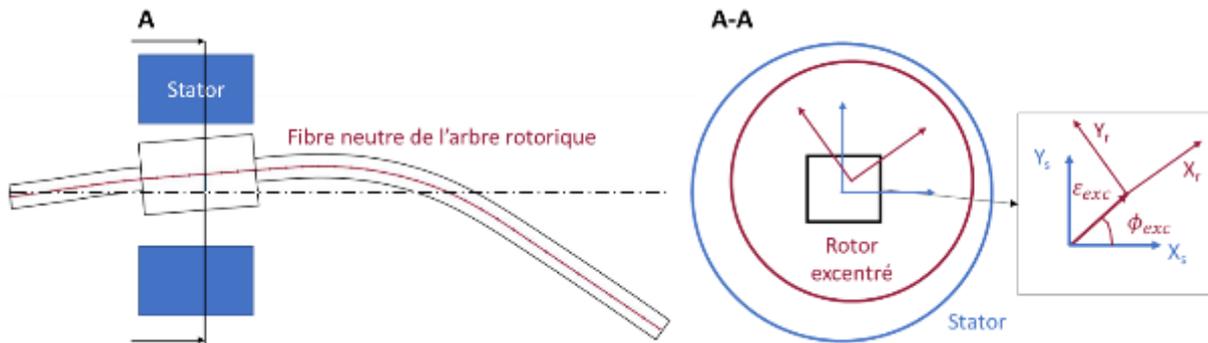


Figure V.5 - Assimilation des déformations rotoriques en excentricité statique par le modèle électromagnétique

L'avantage de cet algorithme est qu'il est possible d'extraire la déformée du rotor après chaque calcul. De même, l'extraction des pressions de Maxwell à chaque pas de temps afin d'observer l'évolution des excitations électromagnétiques appliquées sur le rotor est rendue possible. De plus, les deux physiques n'ayant pas la même dynamique, il est tout à fait possible d'utiliser des pas de temps différents sur les deux modèles et d'ainsi réaliser plusieurs pas de temps mécanique avant la mise à jour des forces de Maxwell. Ceci est étudié dans la partie suivante.

### 3. Discrétisation spatiale et temporelle des modèles et rang harmonique maximum dans les sous-domaines

Le modèle mécanique étant basé sur un schéma aux différences finies couplé à un modèle éléments finis, la discrétisation spatiale et temporelle influe directement sur le résultat. Il est nécessaire de bien régler ces paramètres afin de bien simuler les phénomènes étudiés tout en gardant un temps de calcul acceptable.

#### A. Discrétisation temporelle

Comme expliqué dans le chapitre IV expliquant le modèle mécanique, le schéma aux différences finies est stable quel que soit le pas de temps  $\Delta t$ . Celui-ci calcule les déplacements et rotations de chaque nœud au pas de temps suivant en utilisant les vitesses et vitesses angulaires au temps actuel. Néanmoins, le pas de temps doit être choisi de manière à pouvoir observer le contenu harmonique des forces électromagnétiques. Le pas de temps est donc lié à la fréquence maximale d'excitation par le critère de Shannon :

$$\Delta t < \frac{1}{2f_{max}}$$

Ce critère permet d'avoir une discrétisation temporelle suffisamment fine pour que les oscillations des forces électromagnétiques de fréquence  $f_{max}$  soient perçues par le modèle. Il est évident que plus ce pas de temps est petit plus le calcul devient long. Toutefois, pour être certain d'observer toutes les oscillations, il convient généralement de prendre ce pas de temps comme l'inverse de 4 à 6 fois la plus grande fréquence d'excitation. Dans le cas de l'étude, le pas de temps est déterminé par la position angulaire du rotor. Il correspond au temps qu'il faut au rotor pour se déplacer de 0.1 degré. Cette précision est largement suffisante pour observer les oscillations de force.

### B. Discrétisation spatiale

Dans le modèle mécanique, la discrétisation spatiale correspond au nombre d'éléments finis de poutre de Timoshenko 1D. Ajouter des éléments permet de prendre en compte plus de modes de rotor dans le calcul. Plus ceux-ci sont nombreux, plus il y a de vecteurs propres à combiner linéairement dans le calcul mécanique de réponse forcée, rendant le calcul plus précis mais aussi plus long car les matrices sont plus grandes. Aussi, augmenter le nombre de nœuds améliore la précision de calcul des fréquences des modes.

Le nombre de modes de rotor à prendre en compte est déterminé en fixant une plage de fréquence sur laquelle les déformations de l'arbre sont étudiées. En effet, il suffit de calculer les fréquences propres des modes de rotor et garder ceux qui sont compris dans une plage de fréquence un peu plus grande que celle de l'étude. Il est donc nécessaire de discrétiser assez finement le modèle pour prendre en compte suffisamment de modes dans le calcul. Pour être sûr, il est préférable d'avoir au moins 2 nœuds sur une longueur d'onde pour un mode donné afin d'observer tous les ventres de vibration. Sur la figure V.6, deux types de discrétisations sont proposées pour une déformée modale de poutre. Celle en vert possède 4 nœuds par longueur d'onde, tandis que la rouge en possède 6.

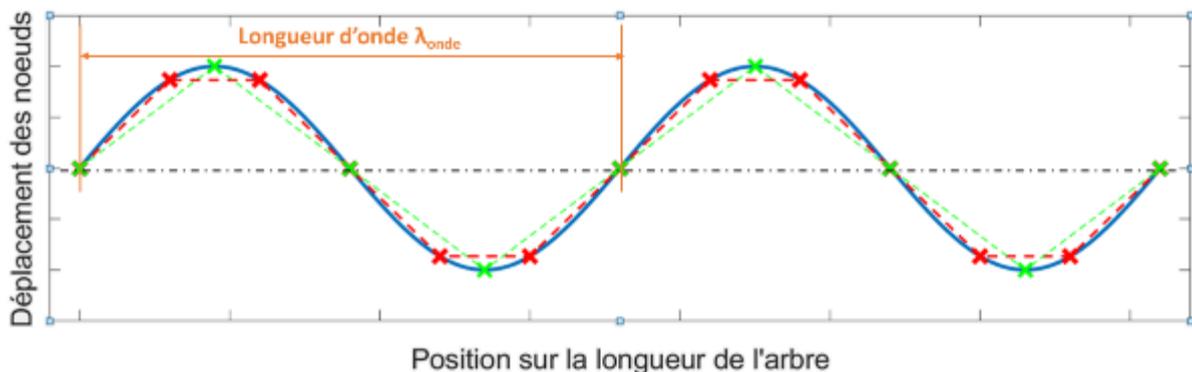


Figure V.6 - Discrétisation d'un arbre par différents modèles éléments finis 1D de finesse différente

Le nombre de nœuds doit être au moins deux fois supérieur au nombre d'onde  $k_{max}$  du dernier mode à prendre en compte dans le calcul. Ce nombre est calculé par  $k = \frac{L}{\lambda_{onde}}$ . Ainsi le nombre de nœuds doit être choisi tel que  $N_{noeuds} > 2k_{max}$ . Le maillage vert de la figure permet de respecter ce critère. Toutefois, pour être certain de bien observer les modes, il est préférable de prendre un maillage un peu plus fin comme celui en rouge par exemple.

Ceci s'applique de la même manière pour le modèle électromagnétique et la discrétisation de la ligne de capteur d'inductions magnétique dans l'entrefer. Le nombre de capteurs d'induction statorique  $N_{capt}$  doit être au moins deux fois supérieur à l'ordre spatial maximal des forces de Maxwell  $N_{harmospat}$  qui nous intéresse :  $N_{capt} > 2N_{harmospat}$ .

### C. Discrétisation vitesse de rotation

Dans le cas d'études à vitesse variable, le comportement dynamique de la structure soumise aux forces de Maxwell ne est pas le même aux différentes vitesses de rotations. Certains phénomènes apparaîtront à un régime précis, et il est nécessaire, pour leur identification que ces vitesses soient comprises dans l'étude. La précision en vitesse nécessaire du modèle est déterminée par l'amortissement qui aura une influence sur la largeur fréquentielle des pics de déformation. L'erreur étant relative, celle acceptée est plus grande lorsque le mode est haute fréquence. Pour l'étude sans amortissement, le pas de vitesse se doit d'être très précis pour identifier les pics qui sont très fins. Il est de 1 tour par minute pour les résultats qui sont présentés par la suite.

### D. Rang harmonique maximum du modèle électromagnétique

Les rangs harmoniques maximum dans chaque sous domaine  $K_{max}$  et  $N_{max}$  définis au chapitre III sont les derniers paramètres du modèle à bien définir afin de pouvoir coupler les modèles. Dans la théorie, la solution exacte a une infinité d'harmonique. Toutefois, plus l'harmonique est haut, plus sa contribution à l'amplitude du signal est faible, voire négligeable pour les harmoniques très hauts. Plus ce nombre d'harmoniques est élevé, plus les matrices et vecteurs de l'équation (3.57) sont de grande dimension et longues à inverser. Ceci rendant la résolution du système plus longue.

De plus, ces rangs harmoniques étant placé en exposant de certaines grandeurs dans le calcul, ils ne peuvent pas être trop grands car cette puissance du rang harmonique risque de dépasser la limite infinie du solveur mathématique. Ceci limite fortement le calcul notamment pour  $E_{n_{max}} = \frac{N_{max}\pi}{b_{oa}}$  qui tend vite vers l'infini quand  $N_{max}$  tend vers l'infini puisque  $b_{oa}$  est très inférieur à 1. Dans le modèle électromagnétique, ce paramètre a dû être fixé à 12 pour le moteur 3p/36Zs. La valeur de  $K_{max}$  peut quant à elle être plus grande puisque ce sont des puissances de  $k$  dans le modèle. Après avoir étudié plusieurs valeurs, le résultat donné par le modèle électromagnétique semble varier très peu pour  $K_{max} > 60$ . Il a donc été décidé que  $K_{max}$  soit fixé à 100.

---

#### 4. Résultats du modèle couplé

Les graphiques expérimentaux sont les résultats d'études vibratoires ou acoustiques présentés dans le chapitre d'introduction. Différents phénomènes liés à la dynamique du rotor visibles sur les spectrogrammes réalisés sur les ventilateurs ont pu être identifiés grâce au modèle couplé multiphysique développé pendant la thèse. Ceux dont la cause a pu être identifiée vont être énumérés ici en précisant le procédé de calcul utilisé.

Pour rappel, les phénomènes ne sont identifiés que de manière qualitative. Ils apparaissent à des fréquences et amplitudes différentes. Néanmoins, la physique de la dynamique d'arbre étant la même que celle du modèle, il est toutefois possible d'identifier leur mécanisme de création. Seules les choses comparables sont prises en compte, à savoir identifier quel mode du rotor réagit à quel ordre d'excitation des pressions de Maxwell.

Le modèle se limite à la dynamique du rotor couplée aux efforts électromagnétiques alors que les résultats expérimentaux décrivent la dynamique et le rayonnement acoustique du ventilateur complet. Dans le cas où il y a des vibrations visibles sur les spectres expérimentaux, il est nécessaire d'étudier par quel moyen les déformations du rotor ont pu générer des vibrations visibles par les capteurs de vibrations. Il existerait deux mécanismes de transmission :

- La vibration du rotor entraîne une modification suffisante de l'entrefer pour modifier le contenu harmonique des excitations électromagnétiques. Ces modifications peuvent prendre plusieurs formes. Soit une croissance de l'amplitude de certains ordres ou l'émergence de nouveaux ordres. S'il y a concordance modale et fréquentielle de cette nouvelle excitation avec un mode du stator, celui-ci peut se déformer, voir même entrer en résonance, et ses vibrations peuvent alors être observables. Ces vibrations peuvent mêmes, sous certaines conditions, rayonner du bruit et être visibles en étude acoustique.
- L'autre cas apparaîtrait si la vibration du rotor n'est pas suffisamment grande pour entraîner une modification du contenu harmonique des excitations électromagnétiques ou l'est mais ces nouvelles émergences ne génèrent pas de déformations statoriques. Il est alors imaginable que les déformations du rotor sont suffisantes pour avoir un impact mécanique au niveau des paliers et transmettre la vibration à une partie rayonnante. Le rotor créerait du bruit purement solidien visible par les capteurs de l'étude.

La première étude décrite permet de montrer qu'un déséquilibre de force de Maxwell en présence d'excentricité peut exciter des modes de rotor. Il est montré comment le code permet l'analyse précise donnant quels harmoniques excitent quels modes d'arbre. Dans un second temps, des études subsidiaires de résultats expérimentaux sont faites, notamment des cas particuliers où plusieurs émergences de vibrations apparaissent à une même vitesse de rotation. Enfin, pour conclure, une étude plus systémique est faite afin de montrer que les émergences ne proviennent pas que de ce déséquilibre de force mais aussi du cumul d'autres phénomènes physiques dans le ventilateur.

#### A. Excitation des modes de l'arbre en présence d'excentricité

Les fréquences propres des arbres évoluent en fonction de la vitesse de rotation. Ils peuvent être directs dans le cas où le mode tourne dans le même sens que le rotor, ou indirects dans le cas contraire. Sur la figure V.7, des zones d'émergences vibro-acoustiques dont la fréquence varie avec la vitesse de rotation ont pu être identifiés expérimentalement. Ces vibrations fortes, qui peuvent parfois même rayonner du bruit, correspondent à la résonance d'un mode indirect de l'arbre du ventilateur excité par les forces électromagnétiques.

Ces phénomènes de vibration sont visibles sur le spectrogramme de la figure V.7. Ceci correspond aux deux zones de vibrations dont la fréquence évolue avec la vitesse de rotation. La fréquence de la première droite décroît avec la vitesse de rotation (pointillés violets) tandis que l'autre croît (pointillés verts). Ceci correspond à un mode de rotor en rotation observable sur les diagrammes de Campbell du chapitre IV. La droite violette correspond à un mode indirect de rotor tandis que l'autre est son mode direct associé.

De fortes vibrations ont lieu à l'intersection entre ces droites et certains harmoniques de la vitesse de rotation ( $F_r$  pour rotating frequency) au niveau des cercles violets et verts. Cette mesure montre que les efforts électromagnétiques, à la différence d'un balourd mécanique, peuvent exciter tous les modes du rotor, y compris les modes indirects. La présence des ordres fréquentiels  $(2p \pm n)F_r$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) dans le contenu harmonique des forces harmoniques est caractéristique de l'excentricité rotorique. Les émergences indiquées en noires sont, quant à elle, des raies de roulements qui apparaissent à des fréquences à  $X \cdot f_r$  avec  $X$  un nombre qui dépend des caractéristiques géométriques et matériaux des roulements.

Le modèle développé pendant la thèse est utilisé afin de vérifier ce phénomène, à savoir que le déséquilibre de forces électromagnétiques induit en présence d'excentricité peut exciter les modes du rotor, rétrogrades inclus. Pour cela, une étude est réalisée où les déformations de l'arbre soumis aux pressions de Maxwell sont calculées en présence d'excentricité à différentes vitesses de rotation. Ceci permet de déterminer les vitesses critiques de rotation où l'arbre se déforme le plus. Il est de plus possible d'identifier quel harmonique de vitesse de rotation est responsable de ces déformations et d'analyser la source de la présence de ces harmoniques dans le contenu harmonique de la force.

L'analyse de l'excitation du rotor par le déséquilibre de force induit par la présence d'une excentricité statique est faite dans un premier temps avant de s'intéresser aux effets de l'excentricité dynamique. Un tableau récapitulatif est donné en fin de sous-partie.

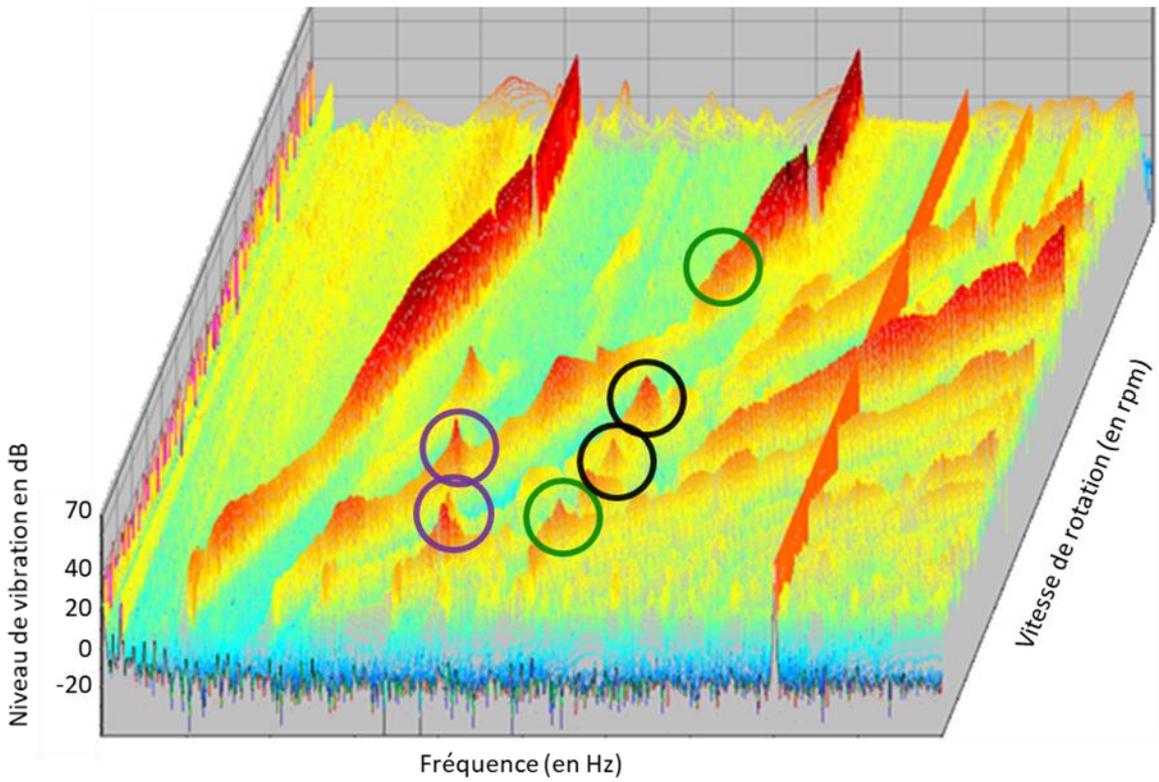
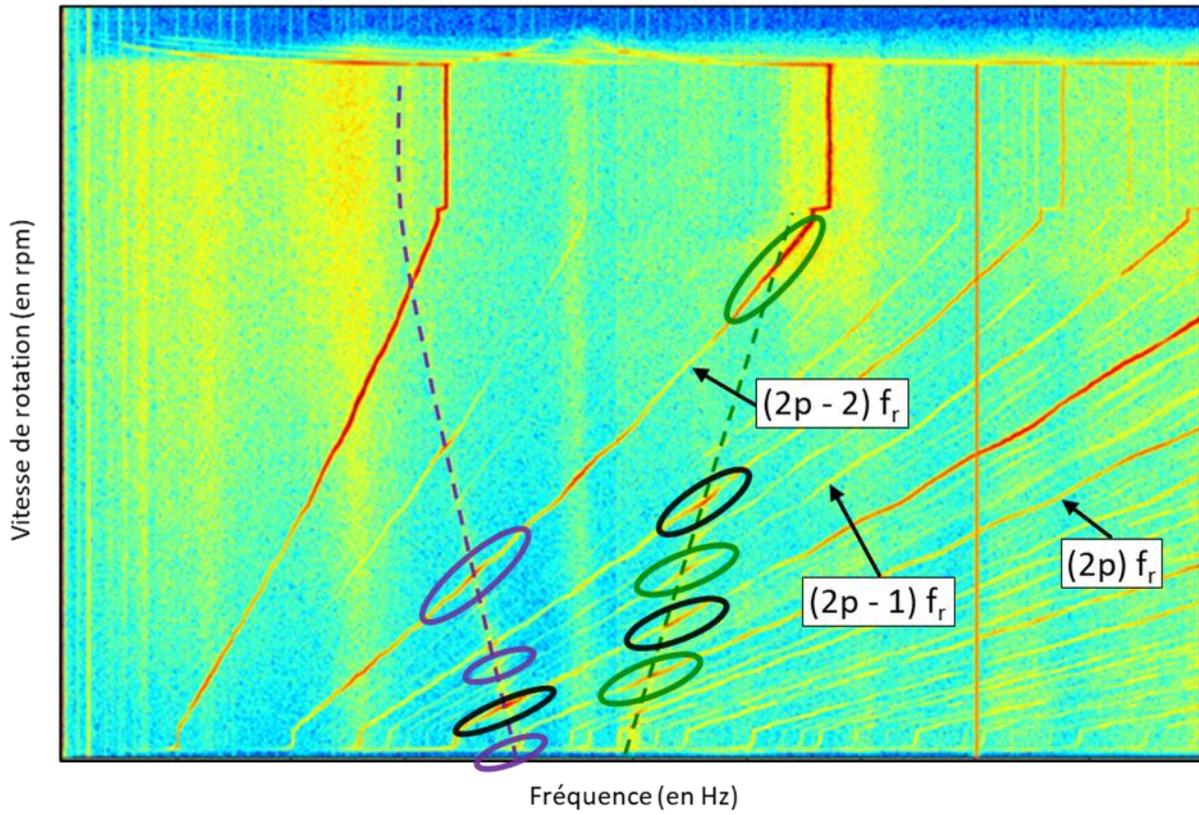


Figure V.7 - Spectrogramme vibratoire expérimental d'une rampe de vitesse de ventilateur avionique avec identification de résonances d'un mode rotorique rétrograde

i. *Excitation de l'arbre par les forces de Maxwell déséquilibrées en présence d'excentricité statique*

Le moteur est initialisé avec une excentricité statique arbitraire de 5% de l'entrefer et est soumis aux pressions de Maxwell associées à cette excentricité sur une durée de 100 tours. Cette durée de calcul est choisie suffisamment longue pour permettre d'observer des déformations rotoriques significatives. Le calcul est effectué sur la même plage de vitesse que celle de l'étude expérimentale de la figure V.7 en choisissant un pas de vitesse qui est cohérent avec le critère décrit à la partie 3.C. afin d'être sûr de ne rater aucun événement de vibration.

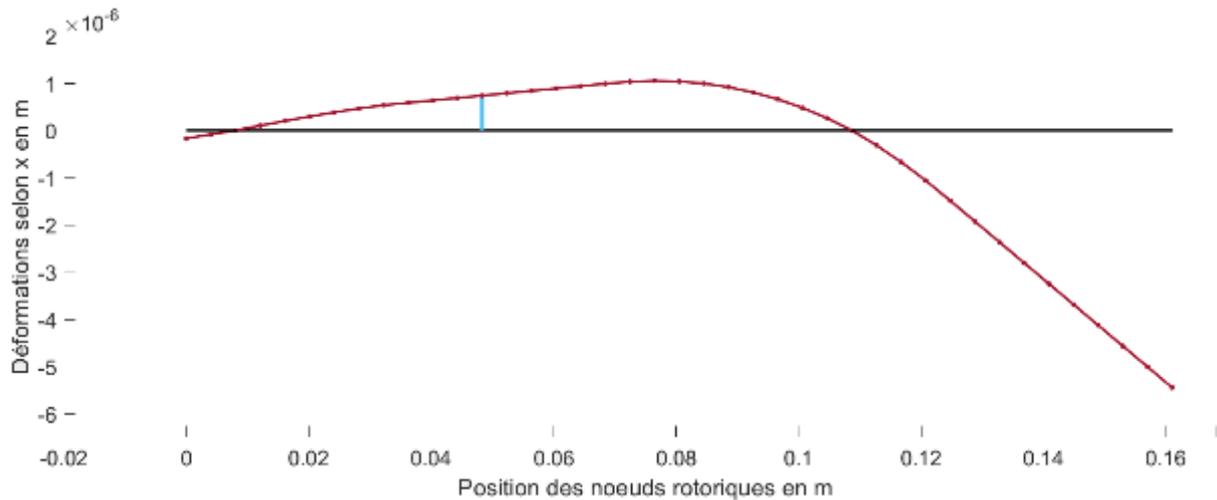


Figure V.8 – Déformée de l'arbre rotorique après 100 tours

La déformée maximale atteinte pendant ces 100 tours (figure V.8) est récupérée à chaque vitesse. A chaque changement de vitesse, les déformations du rotor sont remises à 0 afin de visualiser uniquement les déformations qui apparaissent à ce régime. Ceci diffère de la rampe de vitesse expérimentale du fait que le cumul des effets induits à chaque régime est perdu mais permet ainsi de vraiment étudier chaque régime et son niveau de déformation associé.

La valeur de déplacement maximum du nœud central du rotor visible en bleu sur la figure 8 est répertoriée sur la figure V.9 pour chacune des vitesses étudiées. Il est ainsi possible d'y observer des pics correspondant à des émergences de déformations à certaines vitesses de rotation. Ces dernières peuvent être considérées comme des vitesses critiques où le rotor entre en résonance.

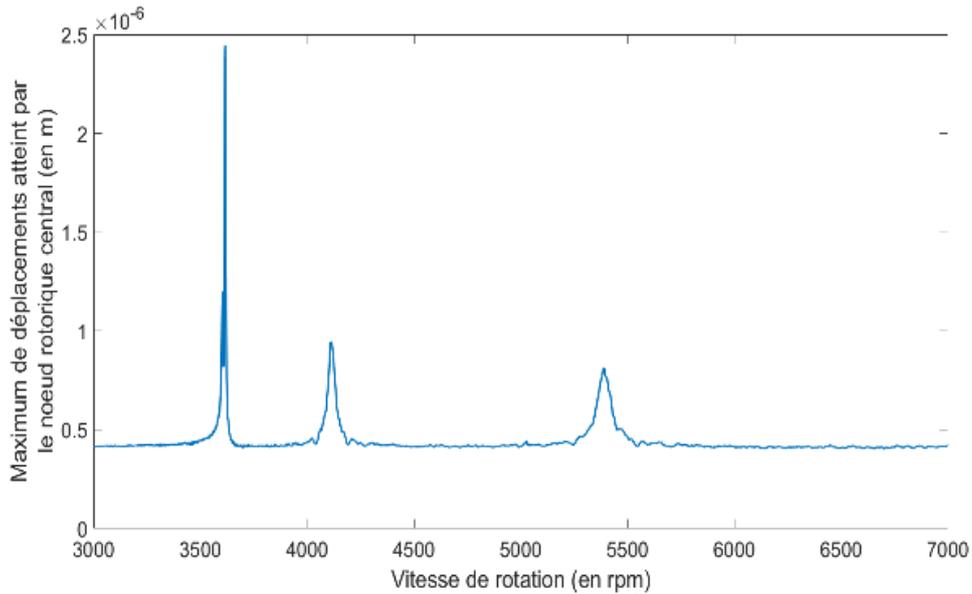


Figure V.9 – Déformation du rotor à différentes vitesse de rotation lorsqu'il est soumis aux Pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité statique

Il est possible d'identifier quelle raie de force électromagnétique a excité ces résonances. Ceci est fait en identifiant quel harmonique des pressions de Maxwell intercepte quel fréquence propres de rotor aux vitesses d'apparitions des déformations. Le contenu fréquentiel des résultantes de pression de Maxwell est analysé par traitement du signal. Il est obtenu en calculant la résultante de pression de Maxwell pour chacune des positions rotoriques sur un tour (figure V.10 gauche). Une transformée temporelle de Fourier est alors faite pour identifier par quelle composition de fréquences est excitée la structure. Toutefois le fait de travailler en résultante de force a le défaut de perdre le contenu spatial des forces appliquées au rotor.

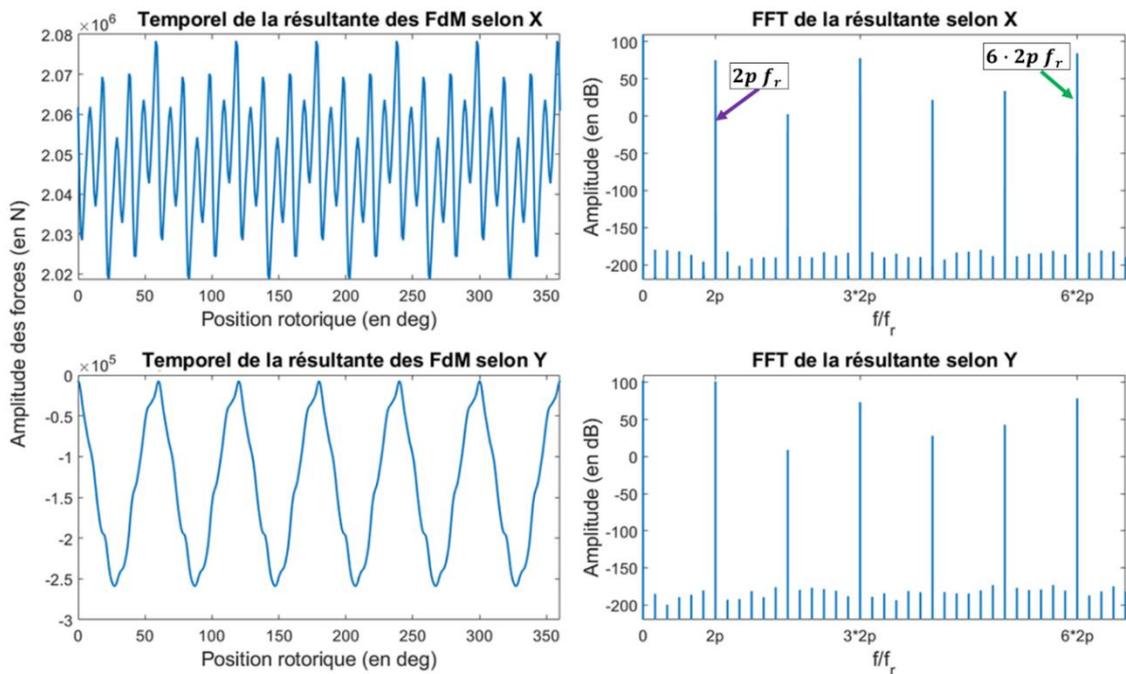


Figure V.10 - Analyse spatio-temporelle des pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité statique

La norme de la résultante selon  $X$  est supérieure à celle selon  $Y$  puisque le calcul a été initialisé avec une excentricité statique selon l'axe  $X$ . Les ordres temporels principaux induits par les pressions de Maxwell en présence d'excentricité statique semblent être les multiples du nombre de paires de pôles. Il est intéressant de noter que le contenu harmonique des forces de Maxwell est le même que celui des pressions de Maxwell puisque ces deux grandeurs sont proportionnelles.

Maintenant que le contenu fréquentiel des résultantes de pressions de Maxwell appliquées au rotor en présence d'excentricité statique est connu, il faut observer si les résonances de la figure V.9 apparaissent à des fréquences où il y a intersection d'une fréquence propre rotorique avec un de ces ordres d'excitation. Cette identification est faite à la figure V.11.

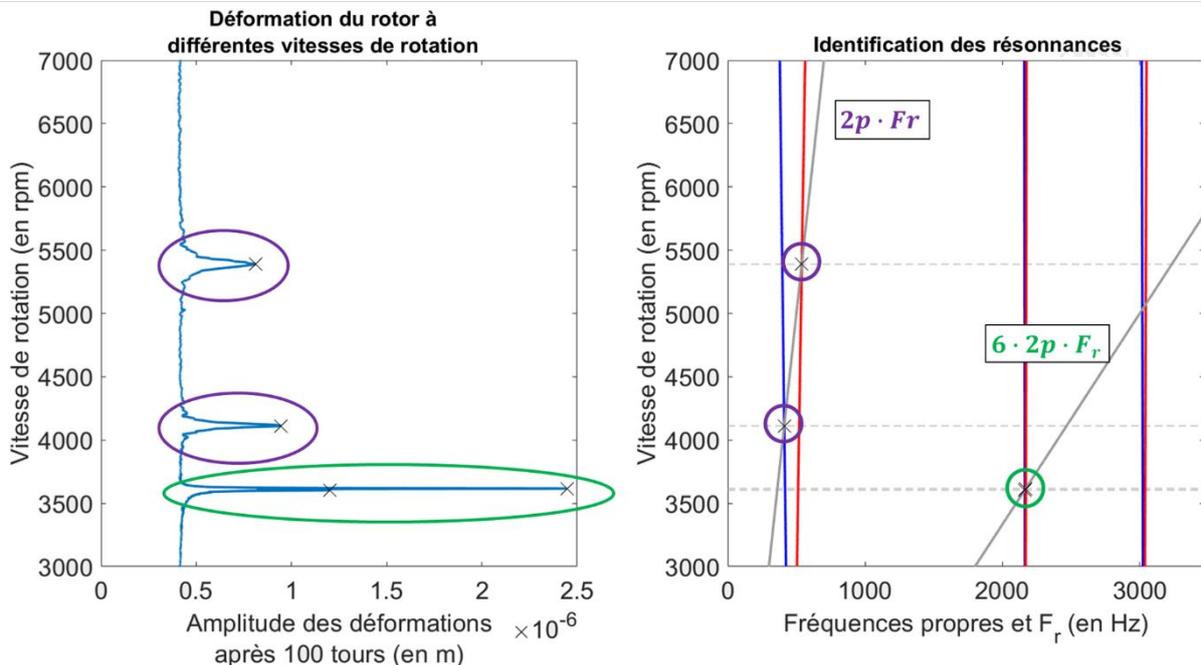


Figure V.11 - Identification de la provenance des résonances d'un rotor soumis aux pressions de Maxwell associées à 5% d'excentricité statique

Une fonction qui permet la détection des pics d'amplitude est utilisée sur le graphique de la figure V.9 que l'on retrouve à gauche de la figure V.11 afin d'identifier les vitesses auxquelles il y a résonance du rotor. Elle est utilisée pour détecter chaque émergence supérieur à un seuil donné sur le graphique de gauche. Le graphique de droite est obtenu en traçant le diagramme de Campbell de l'arbre étudié. certains harmoniques de vitesse de rotation  $F_r$  y sont superposés et sont utilisés par la suite. Ainsi, 3 régimes de vitesses doivent être étudiés. Ces vitesses critiques sont affichées sur le diagramme de Campbell en pointillés gris. Il ne reste qu'à vérifier s'il y a intersection entre un harmonique de vitesse de rotation et un mode rotorique à ces vitesses.

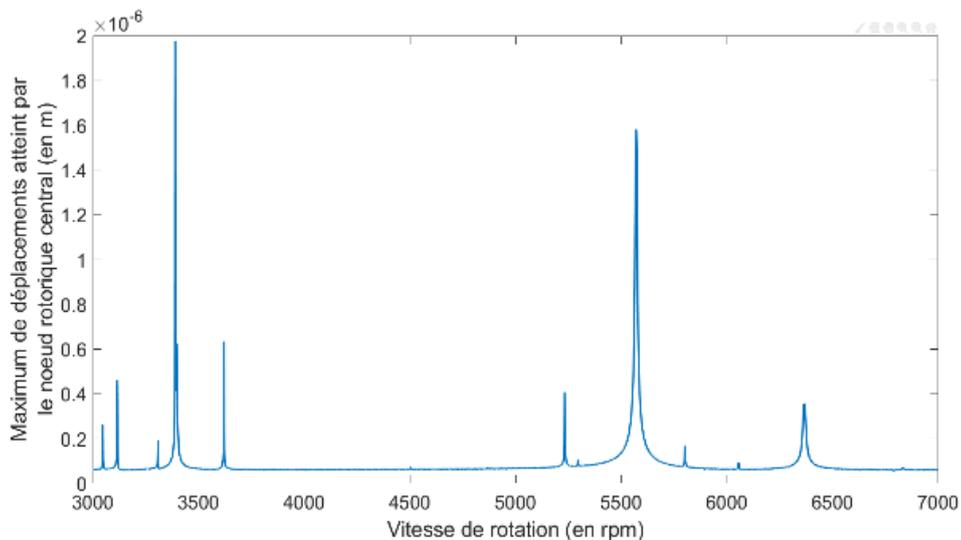
C'est bien le cas puisqu'on remarque sur le graphe de gauche que les pics identifiés en violet apparaissent exactement à la fréquence où il y a intersection entre l'harmonique  $(2p) \cdot F_r$  de vitesse de rotation avec le premier mode indirect à 4150 tours par minute puis direct à 5400 tours par minute. De même, les pics en verts apparaissent à la fréquence d'intersection

de l'harmonique  $6 \cdot 2p \cdot F_r$  avec les seconds modes. L'harmonique de vitesse de rotation intercepte le mode indirect puis le direct qui ont une fréquence très proche. Ceci montre que les déformations repérées à certains régimes à la figure V.9 sont bien dues à la présence de ce déséquilibre de force magnétique induit par l'excentricité directe.

Toutefois, cette étude n'a permis d'identifier que les émergences à l'intersection entre le mode rotorique et l'harmonique  $k(2pF_r)$  ( $k \in \mathbb{N}$ ). Les vibrations induites à l'intersection des harmoniques  $(2p \pm n)F_r$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ne semblent pas être dû à de l'excentricité statique puisque ces ordres n'apparaissent pas dans le contenu fréquentiel de la figure V.10. Ils sont plutôt dû à la présence d'excentricité dynamique dont l'effet est analysé ci-après.

*i. Excitation de l'arbre par les forces de Maxwell déséquilibrées en présence d'excentricité dynamique*

Un calcul similaire qu'à la partie A.i. est réalisé mais en initialisant le modèle avec une excentricité dynamique. De la même manière que pour la figure V.10, le contenu harmonique de la force est celui de la figure V.12 :



*Figure V.12 – Déformation du rotor à différentes vitesse de rotation lorsqu'il est soumis aux Pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité dynamique*

Les ordres impairs  $(k \cdot (2p) - 1)F_r$  et  $(k \cdot (2p) + 1)F_r$  apparaissent cette fois-ci fortement à la fois sur la résultante en  $x$  (flèches rouges) que sur la résultante en  $y$  (flèches violettes). Ce contenu diffère du contenu de la résultante induite par l'excentricité statique puisque celle-ci est tournante, donc le maximum de force est successivement perçu selon  $x$  puis selon  $y$ . Ceci modifie l'excitation et génère des pics différents sur le balayage en vitesse que l'on observe à la figure V.13.

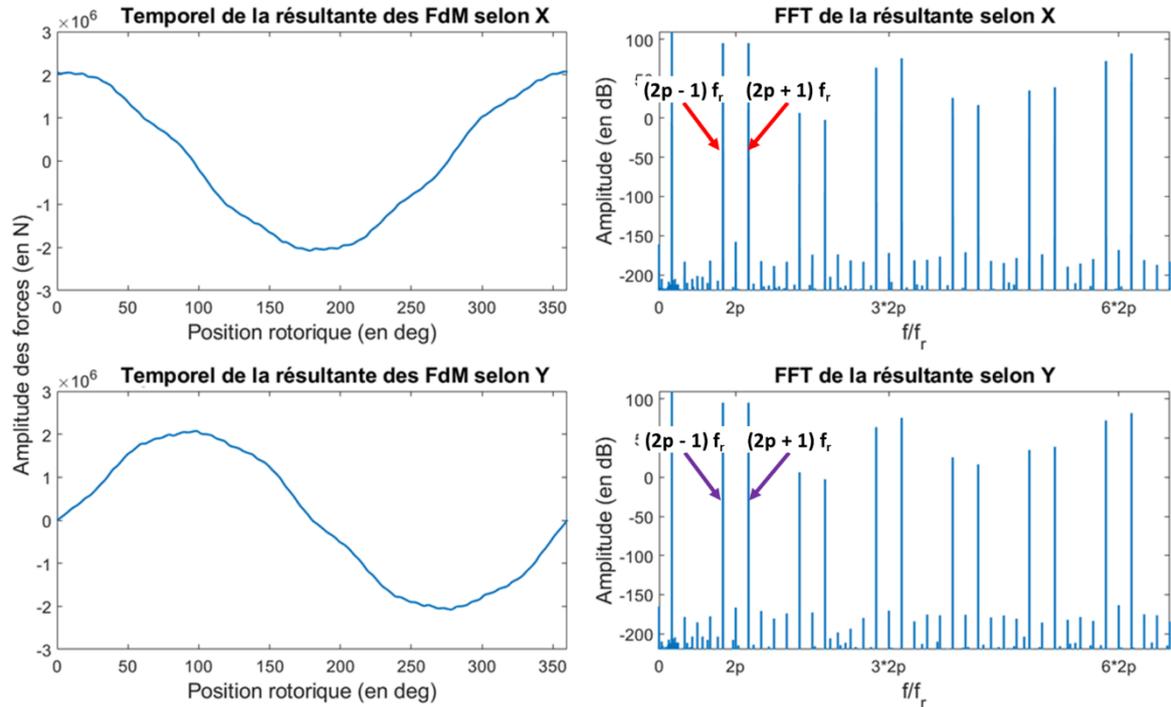


Figure V.13 – Analyse spatio-temporelle des pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité dynamique

Les émergences de vibration apparaissent à des vitesses différentes de celles de la figure V.11. Les pics à 3600 tours par minutes ne sont plus présents et ont été remplacés par d'autres émergences. Ceux-ci sont identifiés de la même manière sur la figure V.14.

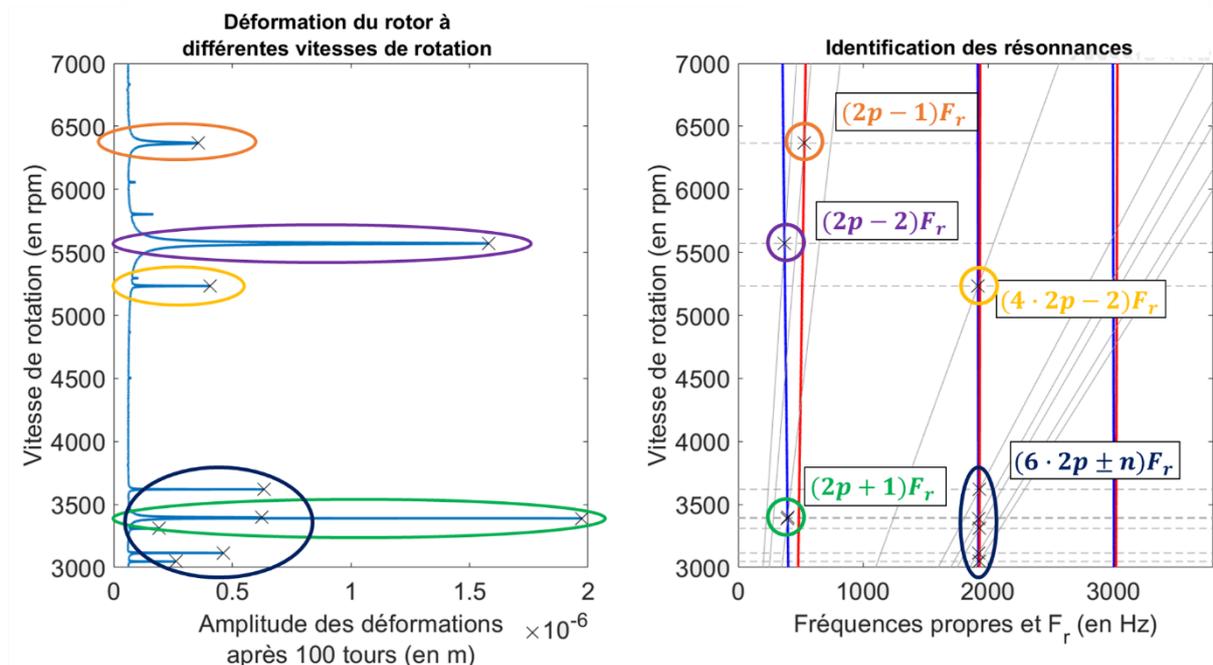


Figure V.14 - Identification de la provenance des résonances à certaines vitesses en présence de 5% d'excentricité dynamique

Il y a bien plus de pics sur le graphique qui apparaissent à des vitesses différentes. Le seuil de détections des pics a été réglé pour s'intéresser aux plus grands, dont l'émergence est supérieure à  $1e^{-7}m$ . Ils apparaissent à l'intersection des harmoniques de vitesse de rotation  $(2p - 2)F_r$ ,  $(2p - 1)F_r$  et  $(2p + 1)F_r$  avec le premier mode rotorique. D'autres pics apparaissent aussi aux intersections des harmoniques  $(6 \cdot 2p - 2)F_r$ ,  $(6 \cdot 2p - 1)F_r$ ,  $(6 \cdot 2p + 1)F_r$ , et  $(6 \cdot 2p + 2)F_r$ , avec le second mode rotorique. Il est même possible d'identifier une résonance du 3<sup>ème</sup> mode rotorique à certains régimes si l'on cherche à identifier les petits pics entre 5000 et 6500 tours par minute.

Cette étude permet bien d'identifier les émergences à l'intersection des modes de rotor avec les harmoniques  $(2p \pm n)F_r$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Ainsi, les vibrations identifiés à la figure V.7 serait induit par un cumul d'excentricité statique et dynamique. Ce cas de figure a pu être identifié expérimentalement sur d'autres ventilateurs (figure V.15) où un mode de rotor identifié en pointillé gris est excité par plusieurs harmoniques de la vitesse de rotation successifs (entourés en violet et orange).

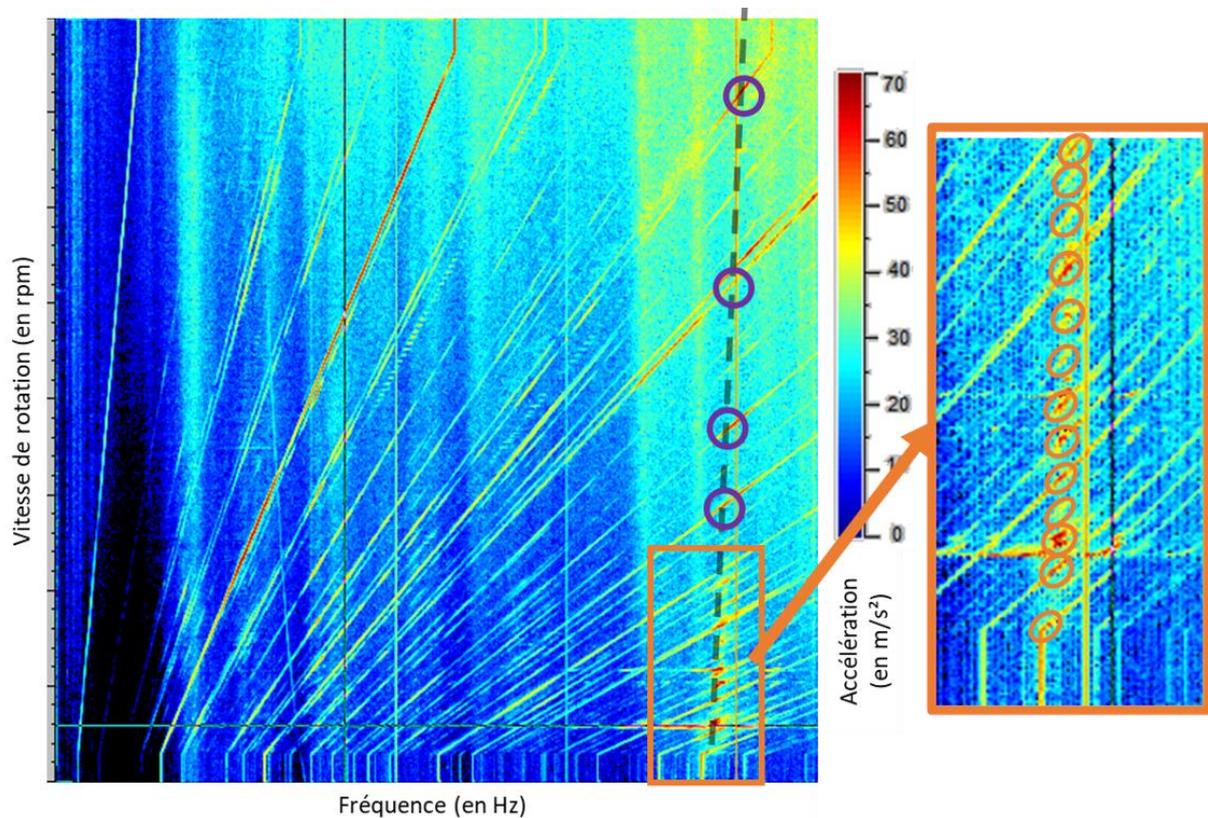


Figure V.15 - Spectrogramme vibratoire expérimental de rampe de vitesse de ventilateur avionique  
Zoom sur les basses fréquences avec identification de résonances d'un mode rotorique

L'apparition de tous ces harmoniques de vitesse de rotation autour d'un mode rotorique ne peut être dû qu'à la présence d'une combinaison d'excentricités statique et dynamique. Ce phénomène peut être identifié en simulation sur la figure V.14 où des raies de déformations apparaissent à des fréquences qui correspondent à l'intersection d'harmoniques successifs de la vitesse de rotation avec certains modes rotoriques.

Dans le cas de l'étude analytique, les modes d'arbre semblent bien être excités à des fréquences égales à celle de nombreux harmoniques de vitesse de rotation. Il y a même émergence de déformations à des fréquences égales à  $(2p \pm 2)F_r$  Hz bien que ces harmoniques n'émergent que très peu sur le graphique de la FFT de la figure V.12. Ceci doit être dû au paramétrage du modèle qui ne permet pas de faire suffisamment émerger ces harmoniques de force.

Il est aussi intéressant de noter que le déséquilibre de forces de Maxwell induit par la présence d'excentricité dynamique ne semble pas exciter les modes rotoriques par tous les harmoniques de vitesse de rotation. Ceci expliquerait pourquoi une émergence de déformation apparaît à l'intersection de l'harmonique  $(2p + 1)F_r$  de la vitesse de rotation, indiqué en vert sur la figure V.14 avec le premier mode indirect mais pas avec le mode direct associé.

Il semblerait que les sinusoïdes composant la résultante de force ne tournent pas forcément dans le même sens que le rotor et n'exciterait que les modes qui tournent dans la même direction qu'eux. La transformée de Fourier utilisée a la force de séparer les contributions fréquentiels d'un signal, mais la phase de celles-ci est perdue dans le processus. Ainsi, certains harmoniques tels que le  $(2p + 1)F_r$  et le  $(2p - 2)F_r$  tourneraient dans un sens opposé au moteur et exciteraient les modes rétrogrades tandis que d'autres tels que le  $(2p - 1)F_r$  et  $(2p + 2)F_r$  excitent les modes directs. Le tableau suivant récapitule les ordres fréquentiels excités par les forces de Maxwell dans les différents cas d'excentricité.

Les deux études des sous-chapitres A.i. et A.ii. ont permis de montrer que le déséquilibre des pressions de Maxwell dans un moteur électrique dû à la présence d'excentricité génère des déformations rotoriques non négligeables. Ces forces peuvent tout autant exciter les modes directs qu'indirects de la structure. Celles-ci peuvent même rayonner du bruit si les vibrations sont transmises aux parties rayonnantes telles que le carter. Ceci a permis d'identifier de nouvelles vitesses critiques à prendre en compte lors de la conception des ventilateurs. Les vitesses d'apparition de ces phénomènes sont importantes dans le but d'une conception multiphysique maîtrisée. L'étude des excentricités et de leur provenance est faite dans la suite du chapitre.

*Tableau V-1 Récapitulatif des ordres excités par le déséquilibre de forces de Maxwell induits par la présence d'excentricité rotorique*

Type d'excentricité	Transformée de Fourier de la résultante de force selon X	Harmonique excités
Excentricité statique		$(k \cdot 2p)$
Excentricité dynamique		Excitation des modes directs : $\begin{cases} (k \cdot 2p) - 1 \\ (k \cdot 2p) + 2 \end{cases}$  Excitation des modes indirects : $\begin{cases} (k \cdot 2p) + 1 \\ (k \cdot 2p) - 2 \end{cases}$

### B. Création d'une excentricité dynamique à partir d'excentricité statique

La réponse couplée relative aux différentes excentricité ayant été identifiée, il faut maintenant déterminer d'où proviennent ces excentricités. L'excentricité statique est très commune dans les moteurs synchrones puisque le positionnement du rotor dans le stator ne peut être fait parfaitement. Aussi, les roulements présentent des tolérances de fabrication telles que celle de centrage de la bague interne ou le jeu entre la bague externe et le carter du ventilateur qui sont certes petites, mais peuvent toute de même représenter 2 à 3% de l'entrefer. Ainsi, les moteurs (synchrone et asynchrone) présentent souvent une excentricité statique de quelques pourcents qui est difficilement quantifiable précisément. Néanmoins, ces quelques pourcents suffisent à créer les phénomènes de la partie A. De la même manière, il peut arriver que le rotor soit cintré, déséquilibré en dynamique ou présenter un défaut de cylindricité et ainsi il y a présence d'excentricité dynamique qui correspond aux phénomènes de la partie B.

Il semblerait toutefois qu'il soit aussi possible de créer de l'excentricité dynamique à partir d'une excentricité statique. Celle-ci, couplée aux effets gyroscopique, génère des déformations dynamiques qui sont assimilables à une excentricité dynamique.

L'excentricité statique génère un vecteur force dirigé vers l'endroit où l'entrefer est le plus faible. Ce vecteur garde cette direction tant que les déformations restent petites pendant la première partie du calcul mais présente des petites oscillations du fait de la rotation du moteur. Les fréquences de ces oscillations sont fonction du nombre de paires de pôles et du nombre d'encoches statoriques. Pour rappel, dans le cas où il n'y a pas d'excentricité, les efforts radiaux diamétralement opposés sont égaux et s'annulent ne laissant aucune résultante pour déformer l'axe du ventilateur.

Comme vu à la partie A, dans le cas d'une excentricité statique, il y a certains régimes où la fréquence de la partie oscillante du vecteur force concorde avec une fréquence de résonance de l'arbre, le faisant se déformer. Nous allons observer le résultat du modèle couplé lorsque l'on se place au régime de la résonance sur le 1<sup>er</sup> mode rétrograde, pic identifié en violet sur la figure 11, autour de 4200 tours par minute. L'excentricité statique est définie selon l'axe x à savoir à l'horizontal. La résultante de la force, toujours dirigée vers l'entrefer le plus faible, se trouve donc dans cette direction à  $t_0$ .

En début de simulation, les déformations restent très faibles en amplitude vis-à-vis de l'excentricité de départ. Celle-ci reste prépondérante, l'entrefer ne varie que très peu et il en est de même pour la direction du vecteur force. Le rotor se met donc à osciller selon la direction de ce vecteur force (figure V.16a).

Après quelques tours, le couplage des déplacements selon les axes x et y du rotor dû aux effets gyroscopiques entraînent une rotation et une ovalisation de cette déformée. L'amplitude totale de la déformée va continuer de croître et la rotation du rotor va entraîner la création de déplacements selon y alors que le vecteur force est selon l'axe x. (figure V.16b et c)

Une fois un certain niveau de déformation atteint, le couplage des déplacements dans les deux directions est total et le parcours d'un point de la fibre neutre dessine une spirale dont le diamètre continue de croître au cours du temps. Cette spirale n'augmentant pas rapidement en amplitude, il est possible d'assimiler sur des petits pas de temps que la déformée du moteur dessine un cercle comme on peut le voir à la figure V.16d.

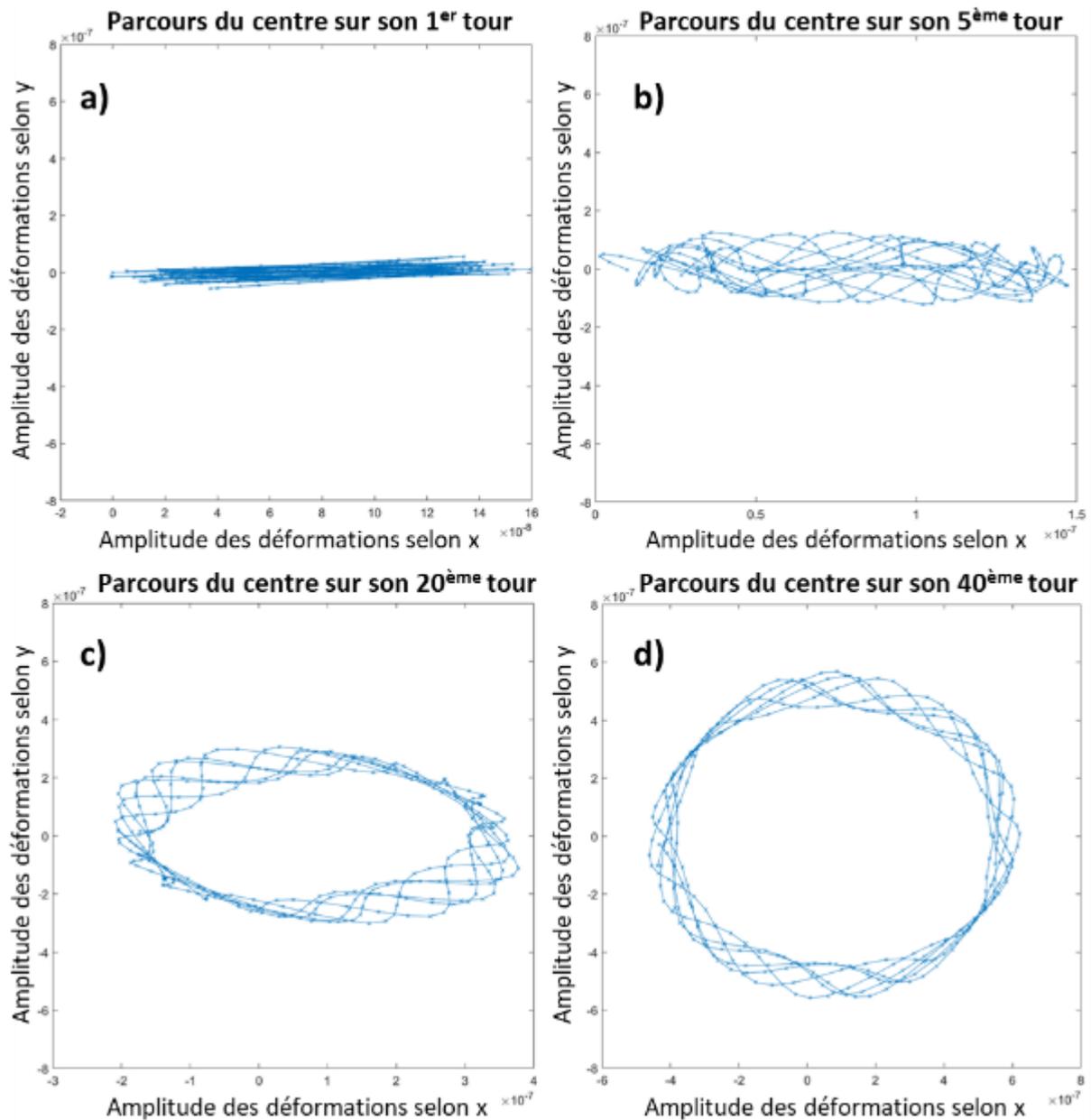


Figure V.16 - Couplage gyroscopique des déformations d'un axe en rotation soumis aux pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité statique

Dans le cas où notre modèle ne présente pas d'amortissement, la spirale ne fait que croître jusqu'à une valeur irréaliste où le rotor touche le stator (figure V.17 en rouge orangé). Ceci n'arrive pas dans la réalité puisque les matériaux présentent un amortissement interne qui atténue les résonances et empêche les déformations infinies de ce type. Ce facteur d'amortissement des matériaux est difficile à déterminer, mais il est tout de même possible d'en introduire dans le modèle comme vu dans la partie qui définit le modèle mécanique. Dans le cas où le premier mode est amorti, les autres déplacements de la figure V.17 sont obtenus.

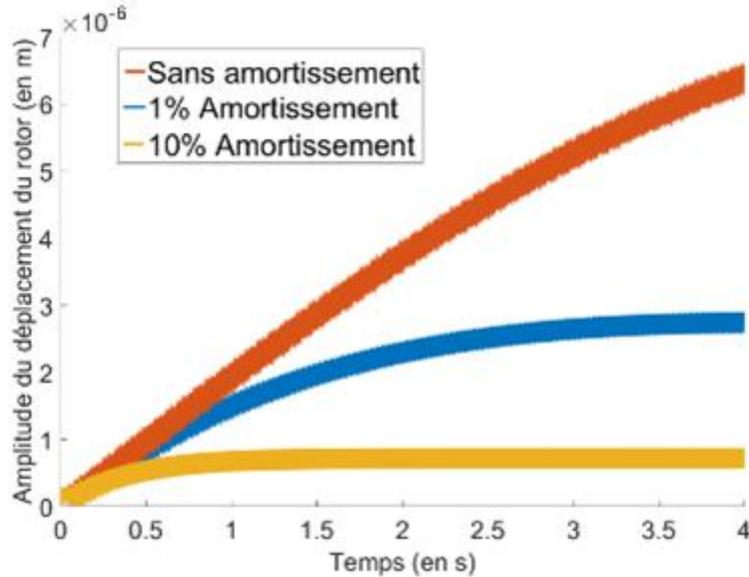


Figure V.17 – Parcours du centre de la fibre neutre du rotor sur 100 tours avec et sans amortissement

Sur le graphique, les déplacements du rotor ne semblent plus croître et le rotor se stabilise à une amplitude de déformation. Le parcours du nœud central du rotor y dessine alors un cercle. Toutefois, à cette vitesse, comme démontré à la partie A, la résonance de l'arbre est excitée par le 2<sup>p</sup><sup>ème</sup> harmonique de la vitesse de rotation. Ceci veut dire que la fréquence de la force qui excite la structure est égale à 2p fois la vitesse de rotation. Ainsi, le rotor effectue 6 oscillations de déformations lors d'un seul tour de rotation.

Les nouveaux harmoniques excités par cette double excentricité dynamique sont donc différents. En effet, si on reprend l'expression analytique des pressions de Maxwell radiales issue de [Pellerey, 2012], obtenu en composant l'induction magnétique de la somme du terme classique d'induction avec un terme de perturbation dû à l'excentricité :

$$\begin{aligned} \sigma_r = [ & B_0^2 \cos(2p(\theta - \omega t) - 2\varphi) + B_e^2 \cos(2(p \pm 1)(\theta - \omega t) - 2(\varphi \pm \alpha_d)) \\ & + 4B_0B_e \cos((2p \pm 1)(\theta - \omega t) - (2\varphi \pm \alpha_d)) \\ & + 4B_0B_e \cos(\pm(\theta - \omega t) \pm \alpha_d)] / 4\mu_0 \end{aligned}$$

où  $B_0$  est l'amplitude de l'induction magnétique,  $B_e$  l'amplitude du terme de perturbation dû à l'excentricité,  $\theta$  la position initiale du rotor,  $\omega$  la vitesse de rotation,  $\mu_0$  la perméabilité du vide,  $\varphi$  l'angle de phase de la force magnétomotrice,  $\alpha_d$  l'angle d'excentricité noté  $\phi_{exc}$  dans notre modèle. L'amplitude de l'excentricité  $\varepsilon_{exc}$  est incluse dans le terme  $B_e$ .

Les ordres spatiaux excités sont ceux en facteur de  $\theta$  dans les équations. Ainsi, en plus des ordres normaux  $2p$ , l'excentricité rajouterait des nouveaux ordres spatiaux et temporels d'ordre  $2(p \pm 1)$ ,  $2p \pm 1$  et  $\pm 1$ . Toutefois, dans le cas où l'excentricité ne tourne plus à la vitesse  $\omega t$  mais  $2p$  fois plus vite, soit à  $2p\omega t$ , alors l'expression devient :

$$\sigma_r = [B_0^2 \cos(2p(\theta - \omega t) - 2\varphi) + B_e^2 \cos(2(p \pm 1)\theta - 2(p \pm 2p)\omega t - 2(\varphi \pm \alpha_d)) + 4B_0B_e \cos((2p \pm 1)\theta - (2p \pm 1)\omega t - (2\varphi \pm \alpha_d)) + 4B_0B_e \cos(\pm(\theta - 2p\omega t) \pm \alpha_d)]/4\mu_0$$

Ainsi, ce ne sont plus les ordres +/- 1 temporels caractéristiques d'une excentricité dynamique pure qui apparaîtront, mais des nouveaux ordres +/- 2p comme visible sur la figure V.18.

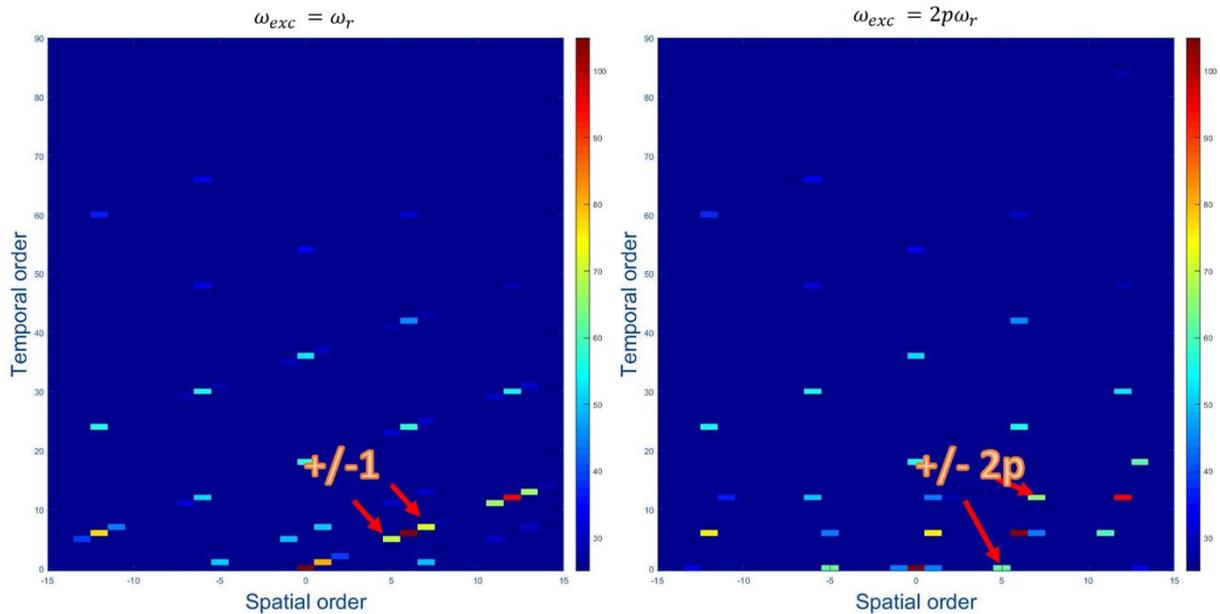


Figure V.18 - Analyse spatio-temporelle d'une excentricité dynamique qui tourne à la vitesse de rotation (a) ou à 6 fois la vitesse de rotation (b)

Ce chapitre a permis de montrer que bien qu'il y ait présence récurrente d'excentricité statique comme dynamique dans les moteurs électriques, celles-ci génèrent un déséquilibre de force magnétique qui peut générer des niveaux de déformations suffisant à modifier le contenu harmonique des excitations magnétiques. Cet ajout de forces excite la structure à des fréquences différentes de l'excitation sans déformations, et peut entraîner des déformations de parties statiques voir les faire entrer en résonance. Ceci pourrait même résulter à des vibrations visible par des accéléromètres voir même rayonner du bruit.

### C. Excitation et contribution de multiples modes de rotor à la réponse forcée temporelle

Les études précédentes ont montré que le contenu harmonique des forces électromagnétiques déséquilibrées est complexe et peut varier pendant une mise en fonctionnement de ventilateur. Ainsi, il est possible qu'à certaines vitesses un épisode vibratoire résulte d'une excitation complexe à différentes fréquences pouvant concorder avec différents modes de structures. C'est notamment ce que l'on cherche à faire lors des mesures expérimentales de la base modale d'un système en l'excitant avec un marteau de choc afin de simuler une impulsion de Dirac qui excite tous les modes propres du système.

Il est possible d'identifier ce genre de phénomènes sur la figure V.19 issue d'un spectrogramme vibratoire de rampe où des émergences d'accélération apparaissent à différentes fréquences pour une vitesse donnée :

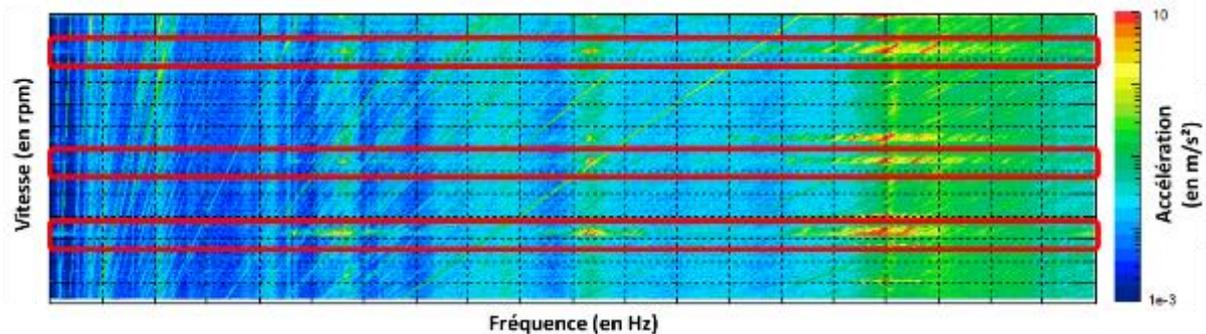


Figure V.19 - Spectrogramme des vibrations du carter d'un ventilateur lors d'une rampe de vitesse avec émergences vibratoires à différentes fréquences à une vitesse de rotation donnée

Comme expliqué dans la partie mécanique, la réponse forcée de la structure est calculée, dans le modèle analytique, en faisant une combinaison linéaire des vecteurs propres de la structure qui représentent ses déformées modales. Ainsi, dans le cas d'une excitation complexe, il est possible de ne considérer que certains modes sur la plage de fréquence, voir un seul, afin de déterminer la contribution de ce mode à la déformée résultant de l'excitation. La figure V.20 compare la contribution du 1<sup>er</sup> mode avec les 49 suivants au déplacement du centre lorsque celui-ci est excité par une force de fréquence très proche de sa première fréquence propre.

La structure étant excitée à une fréquence très proche de la première fréquence propre de l'arbre, il est normal d'obtenir une réponse forcée avec une contribution aussi forte du premier mode. C'est bien ce mode qui dessine le parcours du centre alors que les autres ne font que générer de petites oscillations autour de la première déformée modale.

Dans le cas où un pic semble apparaître à la fréquence qui pourraient concorder avec plusieurs interceptions de fréquence propre par des harmoniques de vitesse de rotation comme à la figure V.21. Le point fort du modèle mécanique est de permettre d'identifier laquelle de ces résonances contribue le plus aux déplacements.

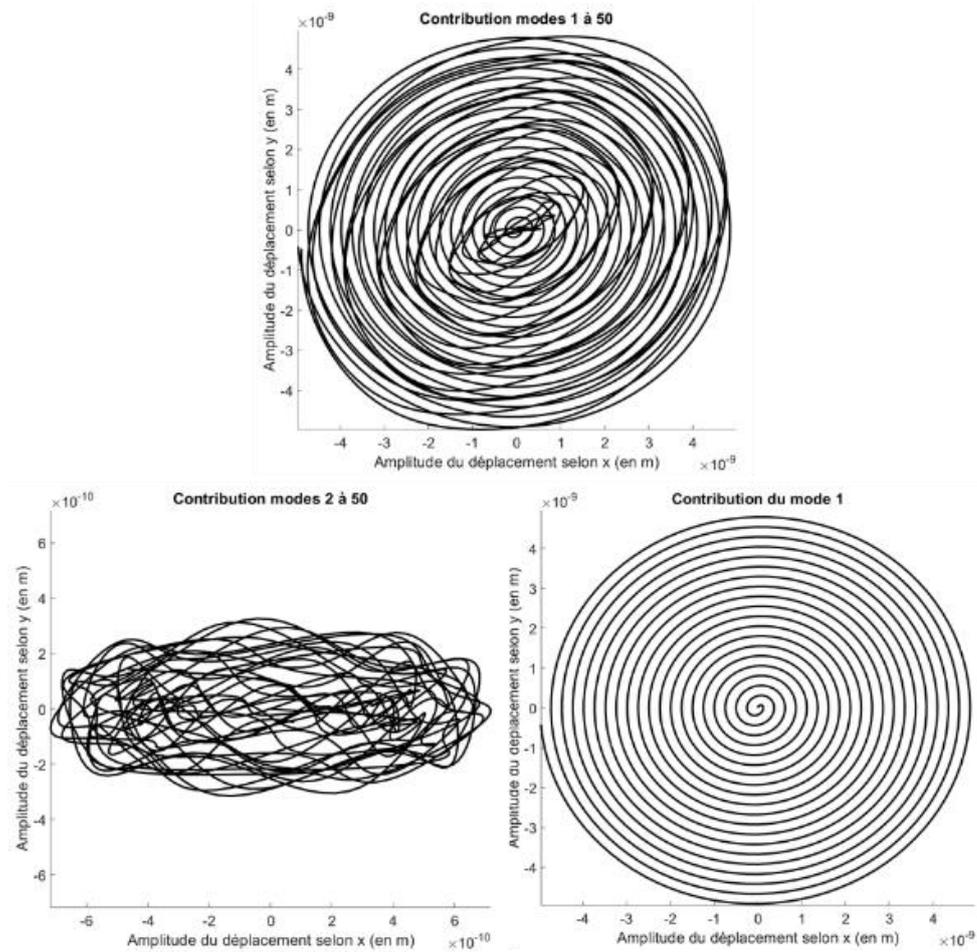


Figure V.20 - Contribution des modes au déplacements du rotor

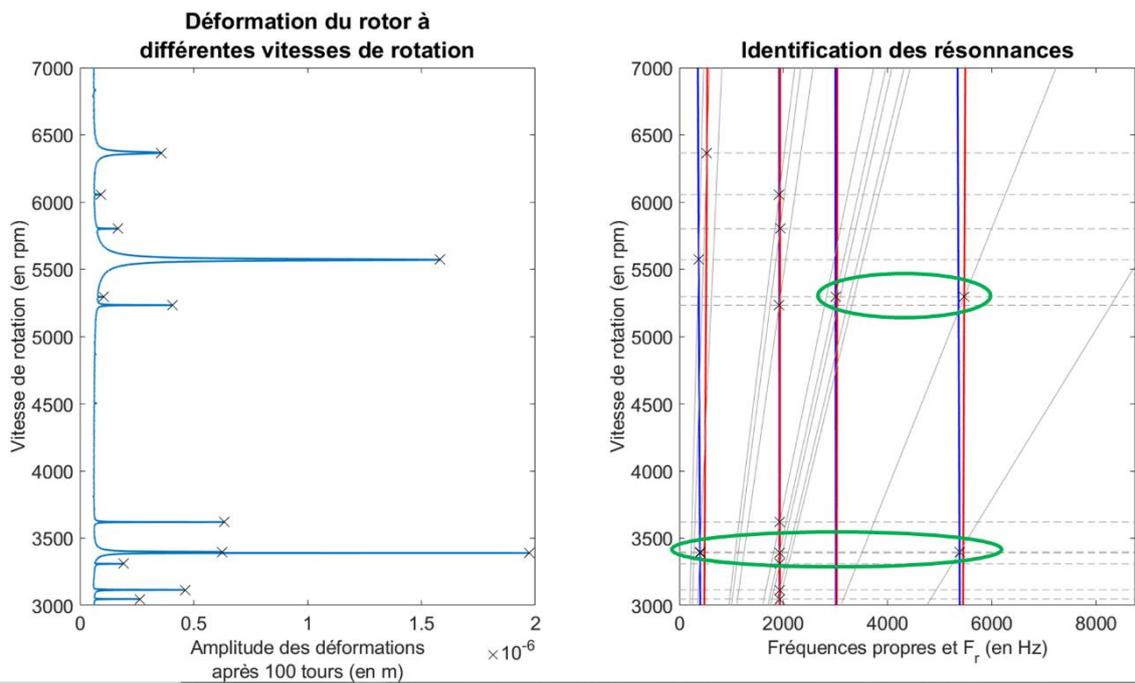


Figure V.21 - Identification de résonances multiples à une vitesse de rotation en présence d'excentricité dynamique

D. Paramètres et tolérances de fabrication influant sur le contenu harmonique de l'excitation pouvant induire des vibrations

Dans ce chapitre sont étudiés certains paramètres et tolérances de fabrication afin de voir leur influence sur le contenu harmonique de la force et s'il est possible que certaines vibrations soient créées ou accentuées par leur présence.

*i. Imperfection des courants statoriques*

Des phénomènes de résonances hautes fréquences ( $f > 6000\text{Hz}$ ) indiqués par les encadrés blancs sur la figure V.22 ont pu être identifiés sur certaines rampes de vitesse. Ces émergences acoustiques de près de 20 dB par rapport au bruit de fond apparaissent à des fréquences audibles et peuvent être perçues par un être humain. Elles semblent correspondre à la résonance d'un mode de structure d'une partie rayonnante du ventilateur. Ces phénomènes sont étudiés dans cette partie en les comparant à des résultats obtenus par le modèle analytique afin d'en identifier la cause.

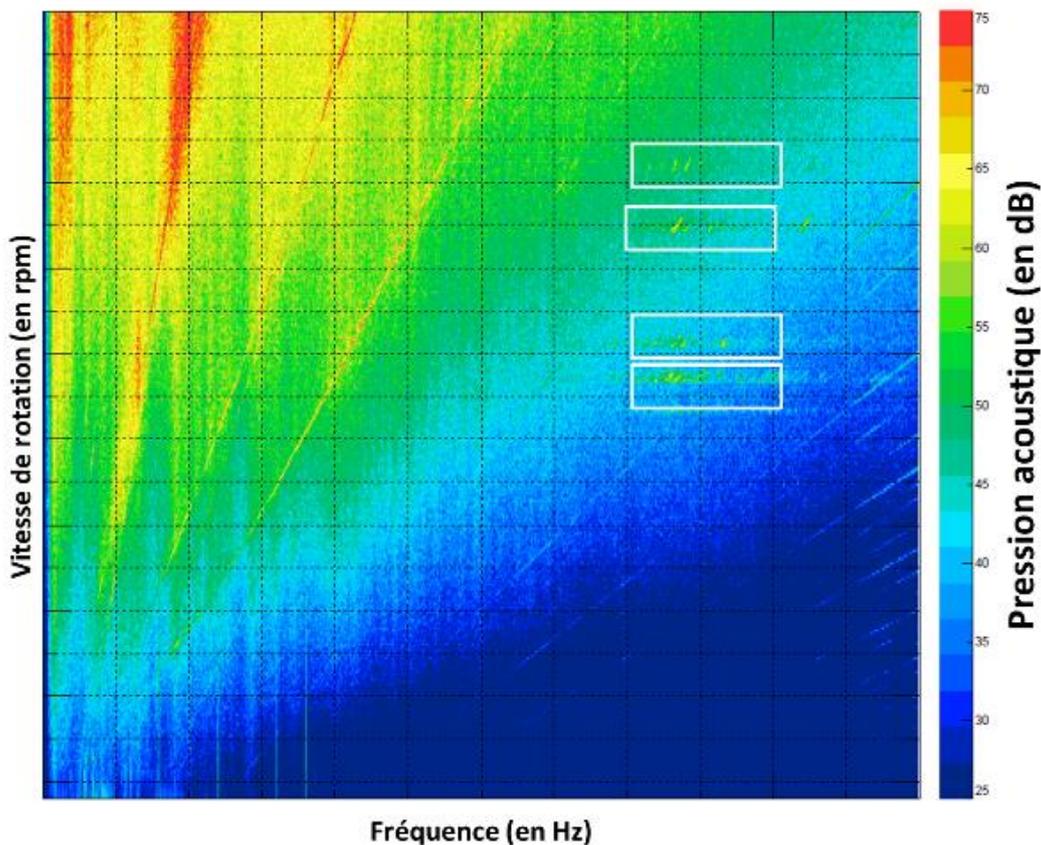


Figure V.22 - Diagramme temps-fréquence expérimental de pression acoustique sur une rampe de vitesse

Ces émergences acoustiques peuvent être corrélées à l'augmentation d'amplitude de la fonction de réponse fréquentielle de l'accélération  $\gamma/m$  du sous-ensemble moteur de la figure V.23. L'étude ne porte que sur le sous-ensemble moteur à savoir les éléments énoncés sur la figure sans le carter, ni le boîtier électronique du ventilateur.

La fonction de réponse fréquentielle réalisée par Safran présente une comparaison des résultats obtenus expérimentalement avec ceux d'un modèle élément fini réalisé lors d'une étude commandée à la société VIBRATEC. Les courbes correspondent aux vibrations observées au niveau de la flèche verte de la figure 24 lorsque l'on excite la structure au niveau de la flèche jaune (cf. vue en perspective du sous-ensemble moteur).

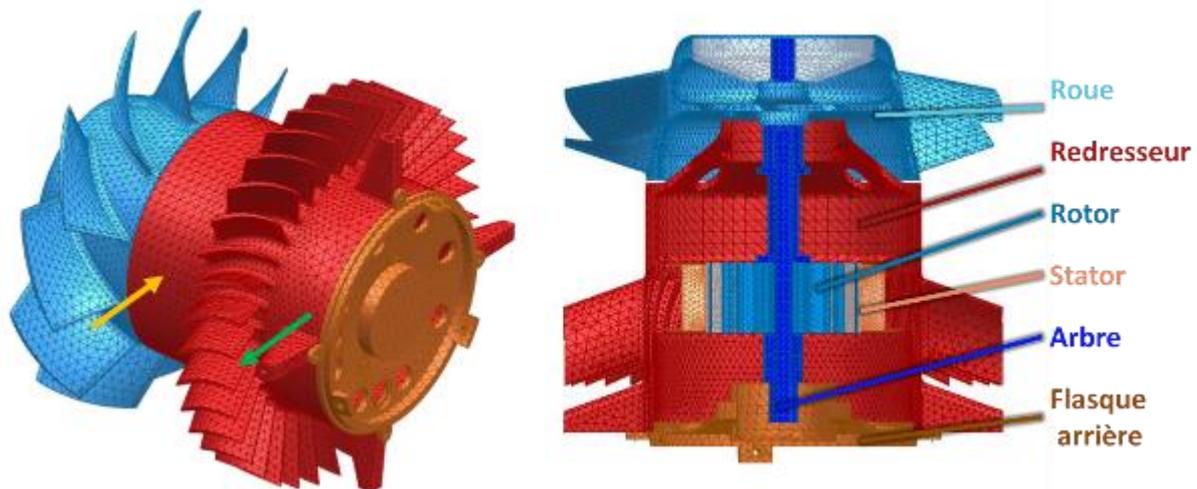


Figure V.23 - Modèle élément fini du sous-ensemble moteur et accélération utilisée pour la fonction de réponse fréquentielle

La fonction de réponse fréquentielle de la figure V.24 présente une réponse dont l'amplitude des vibrations haute fréquence est à peu près dix fois plus grande que celles basse fréquence. Une transition entre deux paliers peut être repéré autour de 2500Hz. Au-delà de

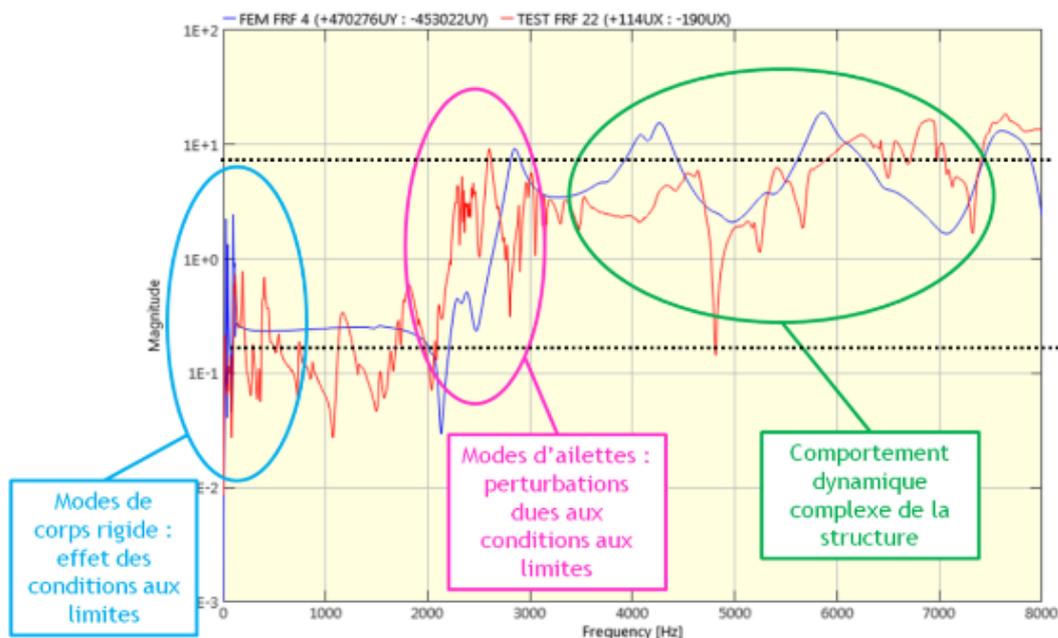
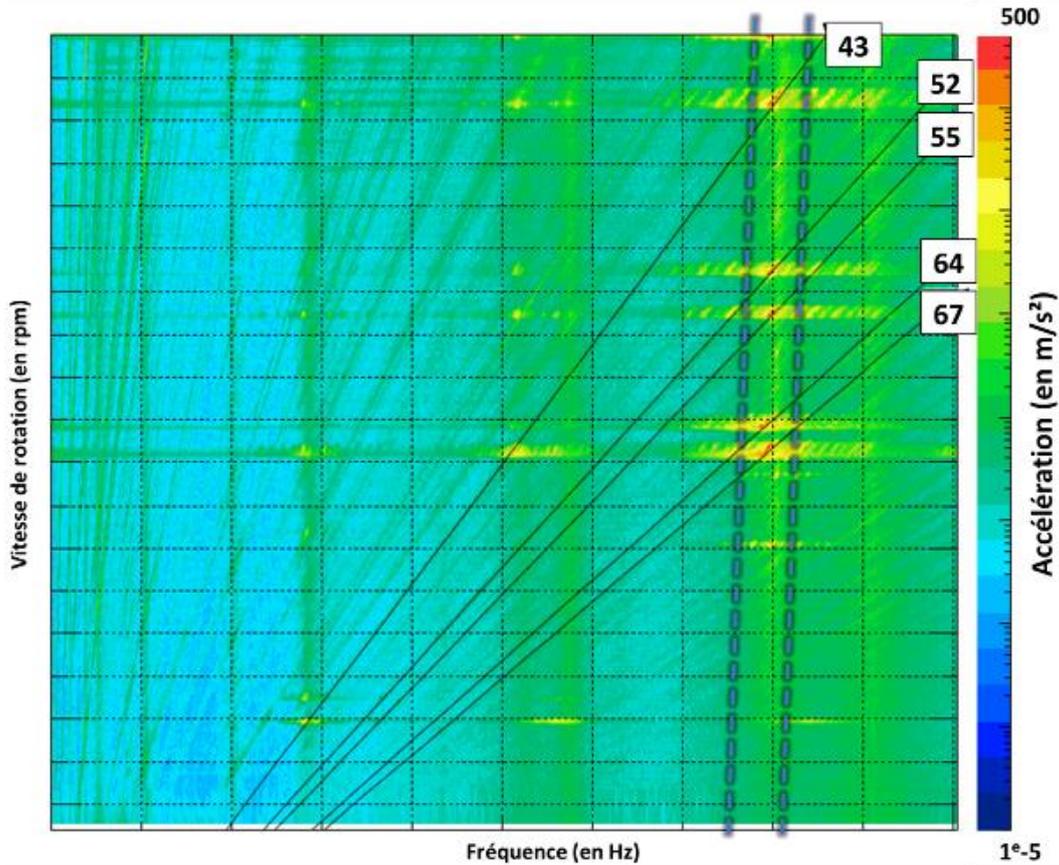


Figure V.24 - Fonction de réponse fréquentielle du sous-ensemble moteur *expérimentale* et *éléments finis*



3000Hz, de nombreux pics apparaissent à l'endroit où un comportement dynamique complexe de la structure a été identifié. Ceci est indicateur de la présence de nombreuses fréquences de résonances dont la réponse est bien plus forte que ceux basse fréquence à iso-force.

Dans un premier temps, le diagramme temps fréquence des niveaux vibratoires obtenus sur le palier avant est étudié afin de déterminer quels ordres moteurs semblent être responsables de ces émergences vibro-acoustiques. Cette identification est faite à la figure V.25.

Les émergences de bruit apparaissent à l'intersection des ordres moteur 43, 52, 55, 64 et 67 avec ce qui semble être un mode de structure situé entre les deux droites en pointillés bleus. Ces ordres fréquentiels sont caractéristiques d'un moteur avec un défaut d'excentricité dynamique et ne sont pas attendus dans un moteur parfait.

Ceci rappelle les analyses temporelles des pressions de Maxwell en présence d'excentricité dynamique de la figure V.12. En effet, ces ordres correspondent à des harmoniques  $((k \cdot 2p) \pm 1)F_r$  et  $((k \cdot 2p) \pm 2)F_r$ . La figure V.26 suivante présente une FFT 2D spatio-temporelle des pressions de Maxwell **appliquées au stator** en présence d'excentricité dynamique sur laquelle nous cherchons s'il est possible d'y identifier les ordres 43, 52, 55, 64 et 67.

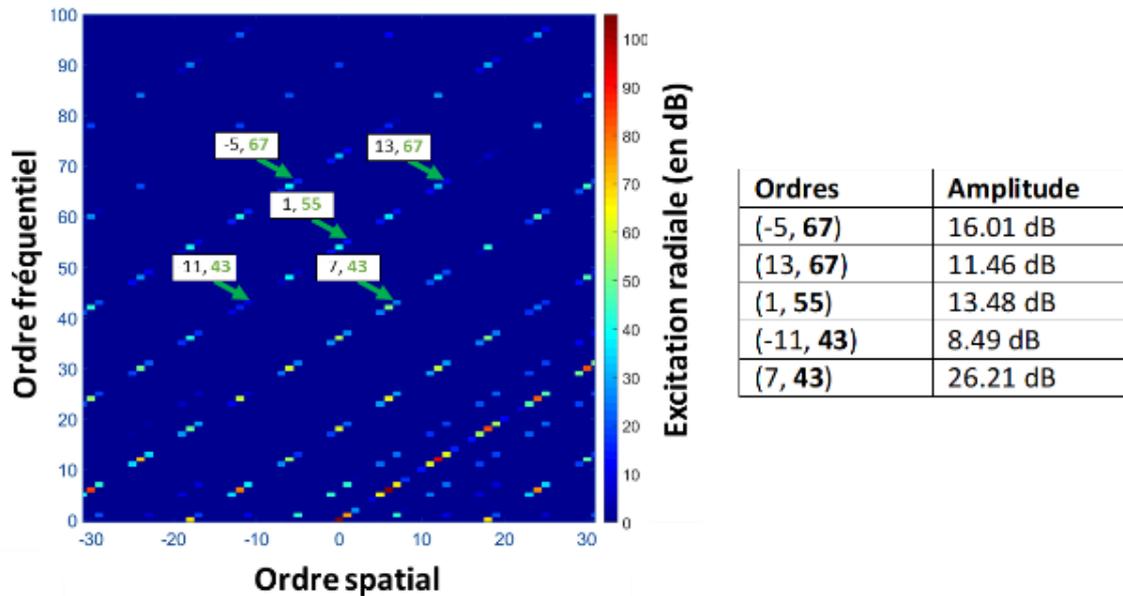


Figure V.26 - FFT 2D des pressions de Maxwell en présence de 5% d'excentricité dynamique (cas d'un moteur  $2p=6$ ,  $Z_s=36$ )

La figure V.26 montre qu'en présence d'excentricité dynamique, il est possible d'exciter la structure par des forces de fréquences égales à 43, 55 et 67 fois la vitesse de rotation. De manière générale, il est possible d'identifier une multitude de fréquences d'excitation, principalement d'ordre moteur +/- 1 par rapport aux ordres moteurs normaux. Néanmoins, les ordres +/- 2 n'apparaissent pas dans cette configuration. Il est probable que dans ce cas l'excentricité ne soit pas suffisante. Ainsi, la même étude est réalisée à la figure V.27 pour une excentricité de 30% cette fois.

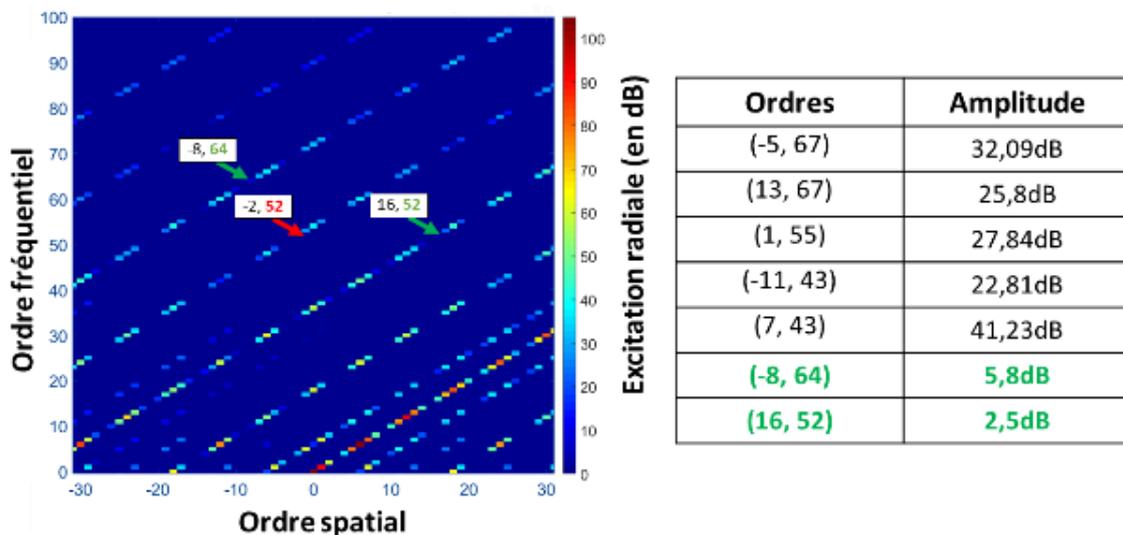


Figure V.27 - FFT 2D des pressions de Maxwell en présence de 30% d'excentricité dynamique (cas d'un moteur  $2p=6$ ,  $Z_s=36$ )

A 30% d'excentricité, l'amplitude des ordres +/- 1 fréquentiels a fortement augmenté dans le cas général ainsi que de nouveaux ordres +/- 2 apparaissent. De plus, il est intéressant de noter que les courants dans les bobinages statoriques ne sont pas parfaitement sinusoïdaux. En effet, les courants des réseaux électriques avioniques sont plutôt de forme trapézoïdale.

Cette différence exerce une forte influence sur le contenu harmonique des pressions de Maxwell comme on peut le voir à la figure V.28 :

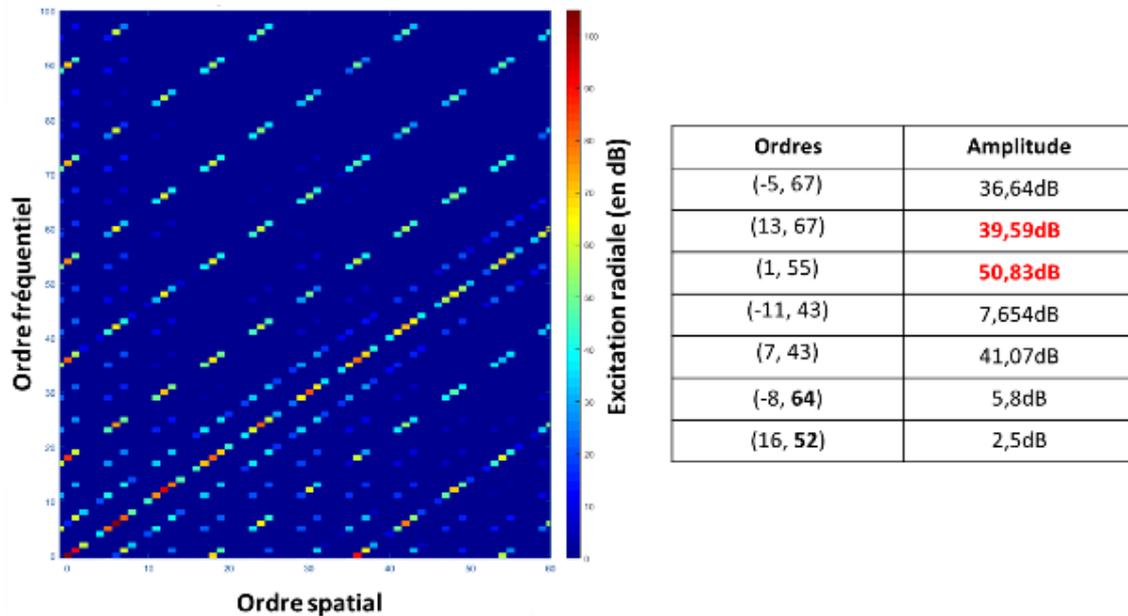


Figure V.28 - FFT 2D des pressions de Maxwell en présence de 30% d'excentricité dynamique avec des courants d'induits de forme créneaux

L'imperfection des courants modifie l'amplitude des ordres +/- 1 fréquentiels avec certaines excitation qui peuvent même atteindre 50dB. Avec un modèle plus précis géométriquement et permettant d'admettre un nombre d'harmonique plus grand dans les encoches, il devrait être possible d'obtenir des ordres +/- 2 à de plus fortes amplitudes. Ces derniers semblent néanmoins être la cause de déformations à haute fréquence.

#### ii. Excitation magnétique et balourd mécanique

A certains points de fonctionnement, les résultantes de pressions de Maxwell appliquées au rotor vont le déformer et entraîner un déplacement de sa fibre neutre équivalent à un certain pourcentage d'excentricité non négligeable. Cette variation d'excentricité peut générer de nouveaux efforts comme le montre le tableau V.2. Ces résultats sont obtenus à la vitesse du 4<sup>ème</sup> pic de la figure V.14 aux alentours de 3500rpm après avoir effectué 100 tours. Cette vitesse correspond à l'intersection entre l'harmonique  $(2p + 1)F_r$  de vitesse de rotation avec la fréquence propre du premier mode indirect de l'arbre.

Tableau V-2 – Amplitude de déformations et de force induites atteinte sur 100 tours pour différents niveaux d'excentricité dynamique

% Excentricité dynamique initiale (en % entrefer)	Déplacement du nœud central du rotor (en $\mu\text{m}$ )	Excentricité créée en 100 tours (en % entrefer)	Amplitude Force de Maxwell (en N)
1	1,5	0,1%	30.8
5	5,4	0,36%	140
10	13,5	0.90%	294
30	30	2%	840

Bien que ces excitations semblent être faibles, elles sont suffisantes pour générer des émergences vibro-acoustiques. Mais elles n'en seraient pas la seule cause. Elle proviendrait du cumul de plusieurs phénomènes couplés, notamment l'imperfection des courants, les tolérances de fabrications, le rodage des pièces (des roulements notamment) et l'équilibrage des pièces tournantes.

Ce dernier point est intéressant puisqu'un défaut d'équilibrage du rotor peut créer des efforts centrifuges pouvant déformer le rotor et ainsi augmenter l'excentricité et les efforts électromagnétiques. En effet, un balourd mécanique génère une force dont la norme  $F$  est égale à  $F = mr\omega_r^2$  où  $m$  est la masse du balourd,  $r$  le rayon auquel il se trouve et  $\omega_r$  la vitesse de rotation. Ainsi, à partir des normes de pressions de Maxwell du tableau V.2 il est possible de déduire un balourd équivalent qui, placé comme à la figure V.29, génèrerait une force centrifuge de même norme. La masse des balourds équivalents est répertoriée dans le tableau V.3.

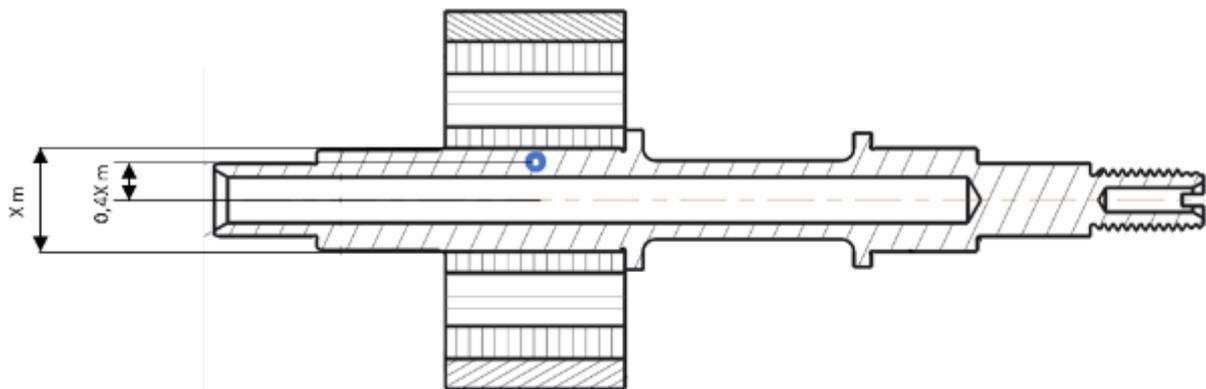


Figure V.29 - Placement d'un balourd équivalent générant des efforts équivalents aux forces électromagnétiques sur la longueur de l'arbre

Ainsi, un balourd de 100mg placé comme sur la figure V.29 à 3500rpm suffirait à générer des forces équivalentes aux efforts magnétiques en présence de 5% d'excentricité dynamique. Ces efforts génèrent des déformations de l'arbre et donc une augmentation de l'excentricité. Ainsi, ce balourd magnétique s'ajouterait au balourd mécanique inhérent à la structure.

Tableau V-3 – Masse de balourd générant une force centrifuge de même amplitude que la force électromagnétique induite par une excentricité dynamique

% Excentricité dynamique initiale (en % entrefer)	Amplitude Force de Maxwell (en N)	Balourd équivalent (en g)
1	30.8	0.0237
5	140	0.1077
10	294	0.2262
30	840	0.6462

Il ne faut pas seulement prendre en compte les excitations électromagnétiques mais un couplage de celles-ci avec des efforts centrifuges pour s'intéresser au phénomène total de dynamique de rotor.

## 5. Conclusion sur le modèle couplé

Les résultats présentés ici sont ceux du modèle couplé développé à partir d'un modèle électromagnétique calculant les forces de Maxwell en jeu dans l'entrefer d'un moteur synchrone à aimant permanent et d'un modèle mécanique de calcul de déformation d'une ligne d'arbre en rotation. Ce modèle couplé a permis d'identifier les causes de certains phénomènes apparus expérimentalement. Parmi ces phénomènes, les principaux mis en lumière sont ceux relatifs à la dynamique de la ligne d'arbre du moteur électrique lorsque celle-ci est soumise aux forces électromagnétiques qui sont en jeu dans son entrefer.

L'identification de ces phénomènes est de leur cause devrait permettre d'améliorer la conception des systèmes électromécaniques. La théorie développée ici, une fois recalée plus précisément par rapport aux arbres réels, peut être utilisée en phase de conception afin de prédire certains comportements vibro-acoustiques de la structure. Il est ainsi possible, de retravailler les paramètres et tolérances du système pour modifier certaines fréquences d'excitation ou propres de la structure afin d'éviter l'apparition de vibration néfastes au bon fonctionnement de l'équipement.



---

## Conclusions générales et perspectives

---

L'analyse de la dynamique des rotors de moteurs synchrones soumis aux forces électromagnétiques induites dans l'entrefer est un sujet complexe principalement dû à son caractère multiphysique. L'alimentation du moteur permet de générer un champ magnétique dont l'interaction avec le rotor permet sa mise en rotation. Mais certains défauts de conception et tolérances de fabrication, notamment l'excentricité du rotor, peut ajouter du contenu harmonique dans les forces qui peuvent exciter des modes propres de la structure. Ceci peut entraîner des déformations rotoriques modifiant à nouveau le contenu harmonique des forces réitérant ainsi le processus, ou simplement exciter des parties rayonnantes et entraîner des vibrations ou l'émission de bruits non désirés.

Dans un objectif de conception multi-physique totalement maîtrisé, la bonne compréhension des phénomènes vibro-acoustiques pouvant apparaître sur les équipements est primordiale. C'est pour cela que des outils de modélisation analytique sont développés depuis plusieurs années chez Safran. Les travaux de thèse se sont inscrits dans cette démarche d'amélioration continue des produits et a contribué à l'amélioration des méthodologies d'analyses et de dimensionnement des moteurs de ventilateurs. Ils se sont aussi inscrits comme une des premières études de la dynamique des rotors de moteurs électriques soumis à un déséquilibre de force électromagnétique en présence d'excentricité rotorique. Elle propose une simulation multiphysique calculant les forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer couplée à un modèle mécanique de calcul de réponse temporelle d'un arbre en rotation.

Un premier apport de la thèse est de montrer qu'il est possible d'exciter des résonances d'arbre par les forces électromagnétiques en jeu dans l'entrefer. Les vibrations induites par ces excitations peuvent atteindre des niveaux suffisamment grands pour altérer une partie de la structure, notamment les roulements. Le contenu harmonique induit par le déséquilibre de forces électromagnétiques dû à l'excentricité peut même exciter une partie rayonnante de la structure et générer du bruit indésirable vis-à-vis du cahier des charges.

Les seconds apports sont les prémices d'un outil de conception de rotor de système électromécanique. La théorie de ce modèle analytique permet de prédire, dès la phase de design, les vitesses de rotation auxquelles l'arbre est excité par les forces électromagnétiques déséquilibrées en présence d'excentricité. Ainsi, en modifiant certains paramètres géométriques ou matériau de l'arbre, il est possible de modifier les fréquences propres de la structure et déplacer les régimes moteur néfastes en dehors des régimes nominaux d'utilisation. L'outil proposé est pour le moment très simplifié pour obtenir des premiers résultats couplés, mais la méthodologie utilisée peut tout à fait inclure de nouveaux éléments permettant de modéliser plus précisément l'arbre réel.

---

Parmi les perspectives d'améliorations possibles des outils de modélisation, les principales seraient :

- Pour le modèle mécanique :
  - Ajouter des roulements à bille en prenant en compte leur rigidité et éventuellement les effets non-linéaires ;
  - Introduire l'amortissement interne de la structure en déterminant expérimentalement les coefficients d'amortissement des matériaux ;
  - Trouver des méthodes de recalage afin de prendre en compte les variations de sections ;
- Pour le modèle électromagnétique :
  - Inclure les pulsations de couple générées par l'excentricité dans le modèle mécanique sous forme de moments afin de déterminer leur effet sur la dynamique du rotor ;
  - Optimiser le modèle électromagnétique afin de prendre en compte des rangs harmoniques maximaux plus hauts dans les sous-domaines et estimer encore plus précisément le contenu harmonique des forces électromagnétiques ;
  - Introduire de nouveaux types de défauts de conception moteurs tels que des conducteurs statoriques défailants, des désalignements d'aimants, etc ;
  - Ajouter un modèle de cylindre équivalent de stator sur lequel appliquer les résultantes de forces de Maxwell déséquilibrées en présence d'excentricité statorique. La transmission de ces vibrations aux parties rayonnantes pourrait être analysées par la suite ;
  - Réappliquer la méthodologie pour des moteurs asynchrones.
- Coder une fonction permettant de faire des rampes de vitesses et réaliser des spectrogrammes de la dynamique rotor pendant ce type d'étude ;

Du point de vue expérimental, il pourrait aussi être intéressant de trouver un protocole de test permettant d'observer les déformations du rotor lors du passage sur ces vitesses critiques. L'idée avait été réfléchi pendant la thèse mais le rotor étant dans le stator, lui-même dans le carter du ventilateur, il était difficile d'accès. Ainsi, il ne semblait pas possible de le pointer avec un vibromètre laser dans le sens radial sans altérer fortement la structure. Ce type de test pourrait être fait sur d'autres moteurs où le rotor est plus apparent. Il serait toutefois possible, sur le moteur de l'étude, de mesurer les déformations axiales en perçant un trou dans le flasque du ventilateur.

Enfin, il est important de noter que bien que cette étude ait été focalisée sur les moteurs de ventilateurs avioniques, la théorie développée ici est applicable à tout type de système électromécanique. L'outil développé, bien que simple, peut être utilisé pour des premiers calculs de conception afin d'avoir une première estimation des phénomènes de dynamique de rotor induits par les déséquilibres de force de Maxwell dû à l'excentricité rotorique.

# Annexes

## Annexe 1. Potentiel vecteur associé aux différents types de bobinage

### 1. Encochage non chevauchant

La densité de courant sur une encoche est définie sur la figure 5 :

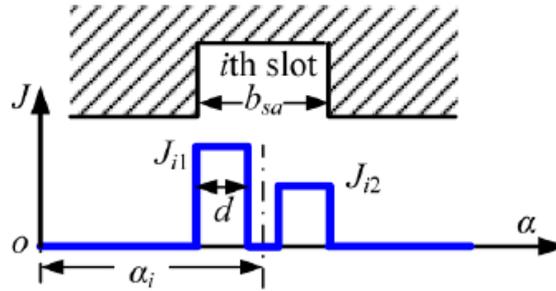


Figure A.1.1 - Densité de courant dans une encoche à encochage non-chevauchant

Dans ce cas, la densité de courant dans une encoche est égale à

$$J = J_{i0} + \sum_n J_{in} (\cos(v\alpha) + \sin(v\alpha))$$

pour  $\alpha_i - \frac{b_{sa}}{2} \leq \alpha \leq \alpha_i + \frac{b_{sa}}{2}$ , où  $\alpha_i$  est la position de l' $i^{\text{ème}}$  encoche et  $b_{oa}$  l'ouverture de l'encoche.

$$J_{i0} = \frac{(J_{i1} + J_{i2})d}{b_{oa}} \quad J_{in} = \frac{2}{n\pi} (J_{i1} + J_{i2} \cos n\pi) \sin\left(\frac{n\pi d}{b_{oa}}\right)$$

Ainsi, le potentiel vecteur s'écrit :

$$A_{z3} = \frac{\mu_0 J_{i0} (2R_{sb}^2 \ln r - r^2)}{4} + \sum_v A_v \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{oa}}{2} - \alpha_i \right) \right]$$

$$A_v = D_{3i} \left( G_3 \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n} + \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n} \right) + \mu_0 \frac{J_{in}}{E_n^2 - 4} \left[ r^2 - \frac{2}{E_n} R_{sb}^2 \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n} \right]$$

---

## 2. Encochage chevauchant

L'encoche chevauchante est résolue en la considérant comme deux encoches pleines. Ainsi, on définit le rayon  $R_{sm}$  au milieu de l'encoche et il faut prendre la bonne valeur de densité de courant dans chacune des deux moitiés. Ceci donne par la suite deux expressions du potentiel vecteur qui sont fonctions du rayon. L'une dans le bas de l'encoche :

$$A_{z3} = A_{bio} + \sum_v A_{bin} \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{oa}}{2} - \alpha_i \right) \right]$$

et l'autre pour le haut de l'encoche :

$$A_{z3} = A_{tio} + \sum_v A_{tin} \cos \left[ E_n \left( \alpha + \frac{b_{oa}}{2} - \alpha_i \right) \right]$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{bio} = \frac{\mu_0 J_{i2} (2R_{sb}^2 \ln r - r^2)}{4} \\ A_{tio} = \frac{\mu_0 J_{i1} (2R_{sb}^2 \ln r - \frac{r^2}{2})}{2} + \frac{\mu_0 J_{i2} (R_{sb}^2 - R_{sm}^2) \ln r}{2} \\ A_{bin} = A_{tin} = D_{3i} \left( G_3 \left( \frac{r}{R_{sb}} \right)^{E_n} + \left( \frac{r}{R_s} \right)^{-E_n} \right) \end{array} \right.$$

## Annexe 2. Développement de l'énergie potentielle de déformation

Cette annexe donne les détails du calcul de l'énergie potentielle de déformation ou le développement qui permet de passer de (4.3) à (4.4).

L'énergie potentielle est obtenue en faisant produit doublement contracté du tenseur de déformation  $\varepsilon$  et celui de contrainte  $\sigma$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S \int_0^L \varepsilon : \sigma dx \quad (A2.1)$$

avec

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \text{grad}(\vec{u}(M)) + \text{grad}^T(\vec{u}(M)) \right) \quad (A2.2)$$

$$\sigma = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbb{I} \quad (A2.3)$$

où  $E$  est le module de Young,  $\nu$  est le coefficient de Poisson

$$\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix}_{B_0} - \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix}_{B_0} \wedge \begin{pmatrix} \varphi_3 \sin \varphi_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \cos \varphi_2 \end{pmatrix}_{B_0} = \begin{pmatrix} -y\varphi_3 \cos \varphi_2 + z\varphi_2 \\ v - z\varphi_3 \sin \varphi_2 \\ w + y\varphi_3 \sin \varphi_2 \end{pmatrix}_{B_0} \quad (A2.4)$$

est le vecteur de déplacement d'un point  $M$  exprimé dans la base  $B_0$ .

Le produit doublement contracté revient à calculer :

$$\frac{1}{2} \int_S \int_0^L \varepsilon : \sigma dx = \int_S \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon_{xx} \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \sigma_{zz} + 2\varepsilon_{xy} \sigma_{xy} + 2\varepsilon_{xz} \sigma_{xz} + 2\varepsilon_{yz} \sigma_{yz} \quad (A2.5)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -y\varphi_{3,x} \cos \varphi_2 + z\varphi_{2,x} + y\varphi_3 \varphi_{2,x} \sin \varphi_2 \\ \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2} (-\varphi_3 \cos \varphi_2 + v_{,x} - z\varphi_{3,x} \sin \varphi_2 - z\varphi_3 \varphi_{2,x} \cos \varphi_2) \\ \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2} (\varphi_2 + w_{,x} + y\varphi_{3,x} \sin \varphi_2 + y\varphi_3 \varphi_{2,x} \sin \varphi_2) \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0 \end{array} \right. \quad (A2.6a)$$

$$\sigma_{ii} = E \varepsilon_{ii}, \quad i = x, y, z \quad (A2.6b)$$

$$\sigma_{ij} = 2G \varepsilon_{ij} = \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_{ij}, \quad i, j = x, y, z, \quad i \neq j \quad (A2.6c)$$

Les formules donnant le tenseur de contrainte  $\sigma$  en fonction de  $\varepsilon$  proviennent de la loi de Hooke de comportement en traction/compression pour (A2.6b) et la loi de Hooke en cisaillement pour (A.2.6c). Les termes en rouge des équations (A.2.6a) sont d'ordre supérieur à 2 et peuvent être supposés égaux à 0 grâce à l'hypothèse des petits mouvements. De même, cette hypothèse permet d'écrire que  $\cos\varphi_2 = 1$  et  $\sin\varphi_2 = 0$ .

L'équation A2.5 devient alors, en notant que les termes en bleu sont égaux à 0 étant donné que  $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = 0$  :

$$E_p = \frac{1}{2} \int_S \int_0^L E(-y\varphi_{3,x} + z\varphi_{2,x})^2 + G(\varphi_3 - v_{,x})^2 + G(\varphi_2 + w_{,x} + y\varphi_{3,x})^2$$

L'intégrale sur la section fait apparaître la surface  $S$  et le moment quadratique de flexion  $I_d$  dans l'expression. Après développement des termes dans l'intégrale et suppression des termes d'ordre supérieur à 2 comme pour (A2.6b), avec  $\gamma_2 = \varphi_2 + w_{,x}$  et  $\gamma_3 = \varphi_3 - v_{,x}$  (A2.8) est obtenue :

$$E_p = \frac{EI_d}{2} \int_0^L (\varphi_{2,x}^2 + \varphi_{3,x}^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GS(\gamma_2^2 + \gamma_3^2) dx$$

Le facteur de correction  $\kappa$  est ajouté afin d'introduire les effets de cisaillement dans l'énergie potentielle de déformation.

### Annexe 3. Développement de la forme faible de l'élastodynamique

Cette annexe donne le développement de la forme faible de l'élastodynamique (4.6):

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \left( \frac{\rho S}{2} \int_0^L \dot{w}^2 + \dot{v}^2 dx + \frac{\rho I_d}{2} \int_0^L \dot{\varphi}_2^2 + \dot{\varphi}_3^2 dx + \frac{1}{2} \rho I_d L \omega_r^2 + \frac{1}{2} \rho I_d \omega_r \int_0^L \varphi_3 \dot{\varphi}_2 dx \right. \\ \left. - \frac{EI_d}{2} \int_0^L \varphi_{2,x}^2 + \varphi_{3,x}^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^L \kappa GS (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) dx + v f_y + w f_z \right) = 0$$

Le développement est fait pour le premier terme de l'équation mais il est le même pour les autres. Ainsi, il s'agit ici de résoudre l'intégrale :

$$\int_0^L \delta \left( \int_{t_1}^{t_2} \dot{w}^2 dt \right) dx = \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} 2\dot{w} \delta \dot{w} dt dx \quad (A3.1)$$

L'intégration par le temps se fait par partie et donne :

$$\int_0^L \int_{t_1}^{t_2} 2\dot{w} \delta \dot{w} dt dx = 2 \int_0^L \left( [\dot{w} \delta w]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt \right) dx = -2 \int_0^L \int_{t_1}^{t_2} \ddot{w} \delta w dt dx \quad (A3.2)$$

où le produit en rouge est nul puisque  $\delta w = 0$  en  $t_1$  et  $t_2$ . Appliquer cette intégration sur tous les termes de l'équation (4.6) permet d'obtenir :

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left( \delta w \rho S \ddot{w} + \delta \varphi_2 \rho I_y \ddot{\varphi}_2 + \delta(\varphi_2) \rho I_y \omega_r \dot{\varphi}_3 + \delta \varphi_{2,x} E I_y \varphi_{2,x} + \delta \gamma_2 \kappa G S \gamma_2 - \delta w f_z \right) \\ + \left( \delta v \rho S \ddot{v} + \delta \varphi_3 \rho I_z \ddot{\varphi}_3 - \delta(\varphi_3) \rho I_y \omega_r \dot{\varphi}_2 + \delta \varphi_{3,x} E I_z \varphi_{3,x} + \delta \gamma_3 \kappa G S \gamma_3 - \delta v f_y \right) dx dt = 0$$

Cette équation est vraie  $\forall t$ , (A3.3) peut alors être réécrite comme (4.7) :

$$\int_0^L \left( \delta w \rho S \ddot{w} + \delta \varphi_2 \rho I_y \ddot{\varphi}_2 + \delta(\varphi_2) \rho I_y \omega_r \dot{\varphi}_3 + \delta \varphi_{2,x} E I_y \varphi_{2,x} + \delta \gamma_2 \kappa G S \gamma_2 - \delta w f_z \right) dx \\ + \int_0^L \left( \delta v \rho S \ddot{v} + \delta \varphi_3 \rho I_z \ddot{\varphi}_3 - \delta(\varphi_3) \rho I_y \omega_r \dot{\varphi}_2 + \delta \varphi_{3,x} E I_z \varphi_{3,x} + \delta \gamma_3 \kappa G S \gamma_3 - \delta v f_y \right) dx = 0 \\ \forall \delta w, \delta \varphi_2, \delta v, \delta \varphi_3$$

---



---

## Annexe 4. Matrice d'interpolation linéaire

---

La matrice d'interpolation linéaire  $\mathbb{H}$  issue de [Petyt, 2010] est donnée sur l'un des éléments de longueur  $l_e$ . Elles sont données en faisant un changement de variable et introduisant le déplacement  $\xi = \frac{x}{l_e}$  selon la longueur d'un élément en plaçant l'origine au milieu de ce dernier. La matrice d'interpolation est alors égale à :

$$\mathbb{H}(\xi) = \begin{bmatrix} N_1(\xi) & l_e N_2(\xi) & N_3(\xi) & l_e N_4(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1(\xi) & l_e N_2(\xi) & N_3(\xi) & l_e N_4(\xi) \\ \frac{1}{l_e} N_5(\xi) & N_6(\xi) & \frac{1}{l_e} N_7(\xi) & N_8(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l_e} N_5(\xi) & N_6(\xi) & \frac{1}{l_e} N_7(\xi) & N_8(\xi) \end{bmatrix}$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{2 + 6\beta - 3(1+2\beta)\xi + \xi^3\} \\ N_2(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{1 + 3\beta - \xi - (1+3\beta)\xi^2 + \xi^3\} \\ N_3(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{2 + 6\beta + 3(1+2\beta)\xi - \xi^3\} \\ N_4(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{-(1+3\beta) - \xi + (1+3\beta)\xi^2 + \xi^3\} \\ N_5(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} (-3 + 3\xi^2) \\ N_6(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{-1 + 6\beta - (2+6\beta)\xi + 3\xi^2\} \\ N_7(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} (3 - 3\xi^2) \\ N_8(\xi) = \frac{1}{4(1+3\beta)} \{-1 + 6\beta + (2+6\beta)\xi + 3\xi^2\} \end{array} \right.$$

où

$$\beta = \frac{EI_d}{\kappa S G l_e^2}$$

## Annexe 5. Identification des facteurs $\alpha$ et $\beta$ de l'amortissement de Rayleigh

Il y a trois cas d'identifications simples des facteurs de proportionnalité qui ont une influence sur les plages de fréquences amorties.

- **Amortissement proportionnel aux caractéristiques d'inerties :  $\alpha = 0$  et  $\beta = \beta_i$**

Ceci revient à dire que la matrice de dissipation  $\mathbb{C}$  est proportionnelle à la matrice de masse  $\mathbb{M}$ . Le coefficient  $\beta$  peut être identifié à l'amortissement réduit mesuré expérimentalement  $\xi_i$  du  $i^{\text{ème}}$  mode propre qui contribue le plus à la réponse par  $\beta_i = 2\xi_i\omega_i$ . Pour toute autre pulsation  $\omega$ , l'amortissement modal réduit est égal à  $\xi = \frac{\beta_i\omega_i}{\omega}$ . Ces paramètres sont liés par la courbe :

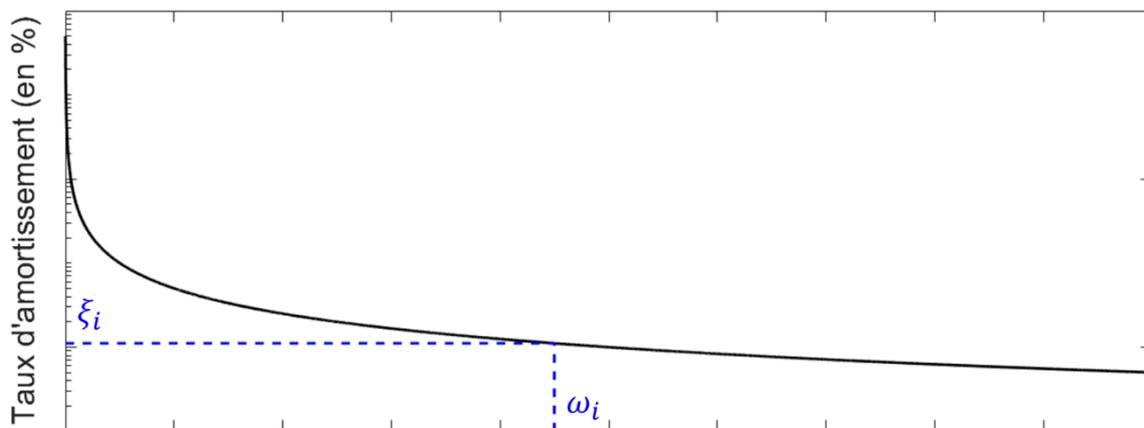


Figure A3.1 - Courbe d'amortissement proportionnelle aux caractéristiques d'inerties

On remarque que par cette méthode les modes basses fréquences sont fortement amortis, à l'inverse des modes hautes fréquences qui sont peu amortis.

- **Amortissement proportionnel aux caractéristiques de rigidité** :  $\alpha = \alpha_j$  et  $\beta = 0$

Ceci revient à dire que la matrice de dissipation  $\mathbb{C}$  est proportionnelle à la matrice de masse  $\mathbb{K}$ . Le coefficient  $\alpha$  est défini comme précédemment par  $\alpha_j = \frac{2\xi_j}{\omega_j}$ . Pour toute autre pulsation  $\omega$ , l'amortissement modal réduit est égal à  $\xi = \frac{\alpha_j \omega}{\omega_i}$ . Ces paramètres sont liés par la courbe :

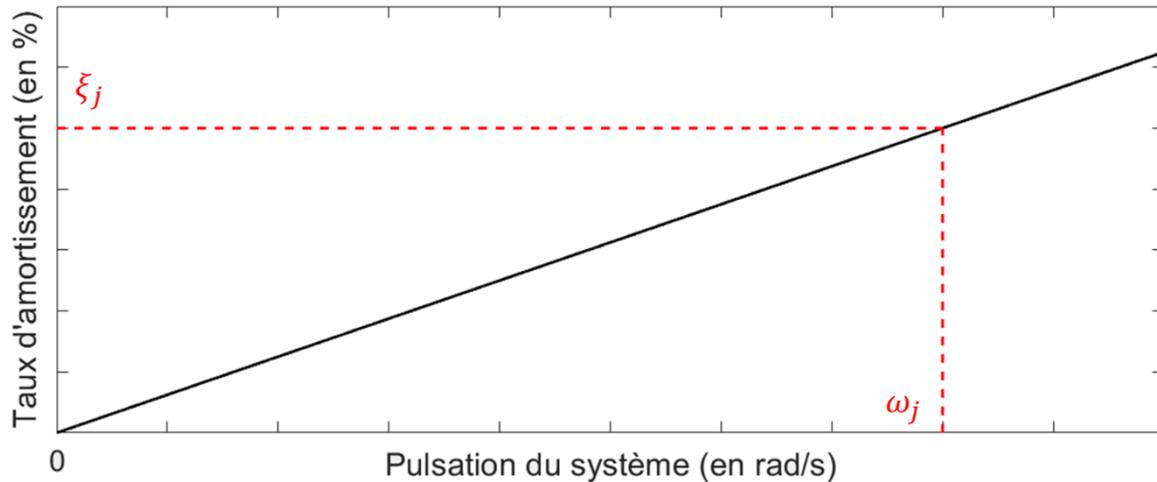


Figure A3.2 - Courbe d'amortissement proportionnelle aux caractéristiques de rigidité

Cette fois-ci, les modes basses fréquences sont peu amortis, à l'inverse des modes hautes fréquence.

- **Amortissement proportionnel complet** :  $\alpha = \alpha_j$  et  $\beta = \beta_i$

Ce cas revient à la somme des deux cas précédents permettant d'avoir un amortissement bien défini sur la plage de pulsation entre  $\omega_i$  et  $\omega_j$ . Néanmoins, les modes situés à l'extérieur de cet intervalle sont trop amortis, comme visible sur la figure A3.3.

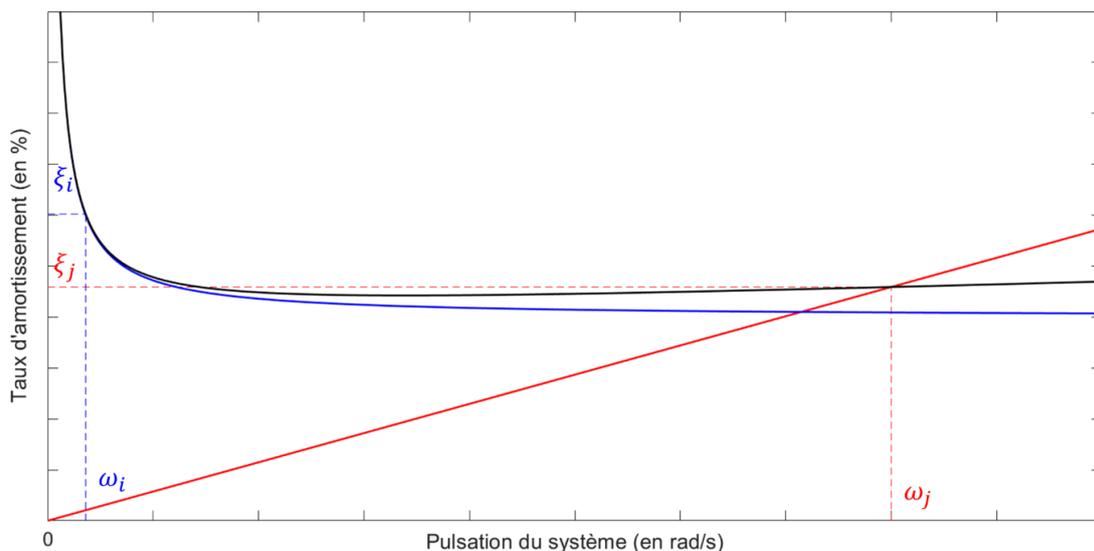


Figure A3.3 - Courbe d'amortissement proportionnelle complet

---

## Références

---

[Adams, 2001] M. L. JR. Adams (2001) - "Rotating machinery vibration. Marcel Dekker" - 153(1) :354

[Alam, 2016] Alam F. R. and Abbaszadeh K. (2016). - "Magnetic Field Analysis in Eccentric Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors Using an Improved Conformal Mapping Method." - IEEE Transactions on Energy Conversion, 31(1):333–344

[Al-Nuaim, 1998] Al-Nuaim N. A. and Toliyat H. A. (1998). - "A novel method for modeling dynamic air-gap eccentricity in synchronous machines based on modified winding function theory." - IEEE Transactions on Energy Conversion, 13(2):156–162

[Bazhar, 2017] Bazhar S., Fontchastagner J., Takorabet N., and Labbe N. (2017). - "Hybrid Analytical Model Coupling Laplace's Equation and Reluctance Network for Electrical Machines." - IEEE Transactions on Magnetics, 53(6):1–4

[Belahcen, 2004] Belahcen A. (2004) – "Magnetoelasticity, magnetic forces and magnetostriction in electrical machines." - PhD thesis, Helsinki University of Technology, Finland, Aug

[Belahcen, 2006] Belhacen, A. (2006)- Vibrations of rotating electrical machines due to magneto-mechanical coupling and magnetostriction. - IEEE Trans. on Magnetics 42, 4

[Belluzzo, 1905] G. Belluzzo - "Le turbine a vapore ed a gas. " - Hoepli, Milano, Italy, 1905.

[Belmans, 1991] Belmans R.J.M., Verdyck D., Geysen W., and Findlay R.D. (1991) – "Electro-mechanical analysis of the audible noise of an inverter-fed squirrel cage induction motor." - IEEE Trans. on Ind. Appl. 27, 3

[Berthier, 1983] Berthier P., Ferraris G., and Lalanne M., - " Prediction of critical speeds, unbalance and nonsynchronous forced response of rotors." – ASME J. Vib. Ac., 118, July 1996

[Berthier, 1987] Berthier P., Ferraris G., Der Hagopian J., and Lalanne M., - "Application d'une méthode pseudo-modale à la détermination du comportement dynamique des mono-rotors et des multirotors coaxiaux." - Proceedings 7th World IFToMM Congress, Pergamon Press, 1987

[Bianchini, 2011] C. Bianchini, F. Immovilli, M. Cocconcelli, R. Rubini, and A. Bellini, - "Fault detection of line bearings in brushless AC linear motors by vibration analysis," - IEEE Trans. Ind. Electron., vol.58, no. 5, pp. 1684–1694, 2011.

[Bill Forsthoffer, 2005] W.E. Bill Forsthoffer - " Forsthoffer's Rotating Equipment Handbooks" Chapitre 19: "Critical speeds and rotor response" - Elsevier Science - Pages 213-224

---

[Boughrara, 2009] Boughrara K., Chikouche B. B. L., Ibtouen R., Zarko D., and Touhami O. (2009). - "Analytical Model of Slotted Air-Gap Surface Mounted Permanent-Magnet Synchronous Motor With Magnet Bar sMagnetized in the Shifting Direction." - IEEE Transactions onMagnetics, 45(2):747–758

[Bracikowski, 2012] Bracikowski N., Hecquet M., Brochet P., and Shirinskii S. V. (2012). - "Multiphysics modeling of a permanent magnet synchronous machine by using lumped models." - IEEE Transactions on Industrial Electronics, 59(6):2426–2437

[Brudny, 1997] Brudny J. F. (1997) - "Modélisation de la denture des machines asynchrones : phénomènes de résonances." - Journal of Physics III, 37(7) : 1009–1023

[Campbell, 1924] Campbell W. (1924) - "Protection of Steam Turbine Disk Wheels from Axial Vibration" - Transactions of the ASME: 31–160

[Childs, 1993] Childs D., - "Turbomachinery Rotordynamics" – Wiley, 1993

[Clough, 1975] Clough R. W., Penzien J. (1975) – "Dynamics of Structures" McGraw-Hill Book Company, New York

[De La Barrière, 2012] De La Barrière O., Hlioui S., Ben Ahmed H., Gabsi M., and LoBue M. (2012). - "3-D formal resolution of maxwell equations for the computation of the no-load flux in an axial flux permanent-magnet synchronous machine." - IEEE Transactions onMagnetics, 48(1):128–136

[Delaere, 2000a] Delaere K., Heylen W., Belmans R., and Hameyer K. (2000) – "Finite element analysis of electrical machine vibrations caused by Lorentz, Maxwell and Magnetostriction forces." - IEE Seminar on Current Trends in the Use of Finite Elements in Electromechanical Design and Analysis

[Delaere, 2000b] Delaere K., Heylen W., Belmans R., and Hameyer K. (2000) "Local magnetostriction forces for finite element analysis." IEEE Trans on Magnetics 36, 5

[Delaere, 2002] Delaere K., Heylen W., Belmans R., and Hameyer K. (2002) – "Comparison of induction machine stator vibration spectra induced by reluctance forces and magnetostriction." - IEEE Trans. on Magnetics 38, 2

[Devillers, 2016] E. Devillers, J. Le Besnerais, T. Lubin, M. Hecquet, and J. P. Lecointe, (2016) - "A review of subdomain modeling techniques in electrical machines: performances and applications" - ICEM International Conference on Electrical Machines

[Devillers, 2018] E. Devillers (2018) - "Electromagnetic subdomain modeling technique for the fast prediction of radial and circumferential stress harmonics in electrical machines" - Phd Thesis, Ecole Centrale de Lille, France

---

[Dimaragonas, 1983] Dimaragonas A., Papetis S., - "Analytical Methods in Rotordynamics" – Applied Sciences, 1983

[Doherty, 1926] Doherty R. E., and Nickle C. A. (1926). - "Synchronous machines I-an extension of Blondel's two-reaction theory." - Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, XLV:912–947

[Driscoll, 2002] Driscoll T.A. and, Trefethen L.N. (2002) – "Schwarz-Christoffel mapping" - Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press

[Dubas, 2009] Dubas F. and, Espanet C. (2009) – "Analytical Solution of the Magnetic Field in Permanent-Magnet Motors Taking Into Account Slotting Effect: No-Load Vector Potential and Flux Density Calculation" - IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 45, NO. 5

[Dubas, 2017] Dubas F. and, Boughrara K. – "New Scientific Contribution on the 2-D Subdomain Technique in Cartesian Coordinates: Taking into Account of Iron Parts" - Mathematical and Computation Applications 2017, 22, 17

[Ehrich, 1992] Ehrich F., - "Handbook on Rotordynamics." – McGraw-Hill, 1992

[Fakam, 2014] M. Fakam Tchakoue – "Dimensionnement vibro-acoustique des machines synchrones à aimants permanents pour la traction ferroviaire : Règles de conception silencieuse." – Thèse, Ecole Centrale de Lille, 2014. France.

[Ferraris, 1996] Ferraris G., Maisonneuve V., Lalanne M., - "Prediction of the dynamic behavior of nonsymmetric coaxial co or counter-rotating rotors" – Journal of Sound and Vibration, 195(4), 1996

[Flux 2D, 2008] Flux2D, General operating instructions - Version 10.2.1. Cedrat S.A. Electrical Engineering, 2008, Grenoble, France.

[Föppl, 1895] A. Föppl (1895) - "Das problem der laval'shen turbinewelle" - Civilingenieur, pp. 332–342

[Forraï, 2001] L. Forraï (2001) - "Stability analysis of isotropic rotor-bearing systems within-ternal damping using finite elements." - International Symposium on Stability Control of Rotating Machinery, ISCORMA, page 13

[Fu, 2012] Fu J. and, Zhu, C. (2012) - "Subdomain Model for Predicting Magnetic Field in Slotted Surface Mounted Permanent-Magnet Machines With Rotor Eccentricity." - IEEE Transactions on Magnetics, 48(5): 1906–1917.

[Garvey, 1999] Garvey S., and Glew G. (1999) - "Magnetostrictive excitation of vibration in machines - a modal approach." - In Proceedings of the 9th Int. Conf. Electrical Machines and Drives

---

[Gaussens, 2012] Gaussens B., Hoang E., De La Barriere O., Saint-Michel J., Lécrivain M., and Gabsi M. (2012) - "Analytical Approach for Air-Gap Modeling of Field-Excited Flux-Switching Machine: No-Load Operation." - IEEE Transactions on Magnetics, 48(9): 2505–2517.

[Gaussens, 2013] Gaussens B., Hoang E., De La Barriere O., Saint-Michel J., Manfe P., Lécrivain M., and Gabsi M. (2013a). - "Analytical armature reaction field prediction in field-excited flux-switching machines using an exact relative permeance function." - IEEE Transactions on Magnetics, 49(1): 628–641.

[Ghoizad, 2007] Ghoizad H., Mirsalim M., Member S., and Mirzayee M. (2007). - "Coupled magnetic equivalent circuits and the analytical solution in the air-gap of squirrel cage induction machines." - International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 25(1-4):749–754.

[Gjika, 1993] Gjika K., Dufour R., Swider P., THouvenin D., - " The dynamic behavior of a turbocharger rotor involving subassembly" - NAFEMS Int. Conf. Structural Dynamics Modelling, Analysis and Correlation, 1993

[Guedel, 1995] Guedel A. (1995) - "Acoustique des ventilateurs – Génération du bruit et moyens de réduction" - Edition Cetiati

[Guilhen, 1988a] Guilhen P. M., - " Prédiction du comportement dynamique de rotors dans le cas d'équations à coefficients périodiques : Instabilité - Réponse aux balourds. " – Thèse de Doctorat, INSA, Lyon, 1988

[Guilhen, 1988b] Guilhen P.M., Berthier P., Ferraris G., Lalanne M., - "Instability and unbalance response of dissymmetric rotor bearing systems." – ASME J. Vib. Ac. Str. Rel. Des., 110, July 1988

[Gysen, 2010] Gysen B. L. J., Meessen K. J., Paulides J. J. H., and Lomonova E. A. (2010). - "General Formulation of the Electromagnetic Field Distribution in Machines and Devices Using Fourier Analysis." - Magnetics, IEEE Transactions on, 46(1):39–52.

[Hague, 1929] Hague B. (1929). - "Electromagnetic Problems in Electrical Engineering." - Oxford University Press, London.

[Hanic, 2016] Hanic A., Zarko D., and Hanic Z. (2016). - "A Novel Method for No-Load Magnetic Field Analysis of Saturated Surface Permanent-Magnet Machines Using Conformal Mapping and Magnetic Equivalent Circuits." - IEEE Transactions on Energy Conversion, 31(2):740–749.

[Hilgert, 2007] Hilgert T., Vandeveld A., and Melkebeek J. (2007) - "Numerical analysis of the contribution of magnetic forces and magnetostriction to the vibrations in induction machines." - IET Sci. Meas. Technol. 1, 1

---

[Ikeda, 1999] T. Ikeda, S. Murakami – "Dynamic Response and Stability of a Rotating Asymmetric Shaft-Mounted on a Flexible Base" - *Nonlinear Dynamics* 20:1–19, 1999.

[Imbert, 1979] Imbert J.F., - "Analyse des structures par éléments finis" – Cepadues Editions, 1979

[ISO/TC117, 1996] "ISO/TC117 : Ventilateurs industriels – Terminologie." *Projet de Norme Internationale ISO/DIS 13349.2* (1996)

[Jacquet-Richardet, 2013] G. Jacquet-Richardet, M. Torkhanib, P. Cartraudc, F. Thouverzd, T. Nouri Barangera, M. Herranf, C. Gibertd, S. Bagueta, P. Almeida, L. Peletan (2013) -"Rotor to stator contacts in turbomachines. Review and application " - *Mechanical Systems and Signal Processing* Volume 40, Issue 2, Pages 401 - 420

[Jalan, 2009] A. K. Jalan and A. R. Mohanty, - "Model based fault diagnosis of a rotor-bearing system for misalignment and unbalance under steady-state condition," - *J. Sound Vib.*, 2009.

[Jeffcott, 1919] H. Jeffcott – "The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed-the effect of want of balance" - *Phil. Mag.*, vol. 37, no. 6, pp. 304–314, 1919.

[Jin, 2002] Jin, J. (2002) - "The finite element method in electromagnetic – Second Edition", New York: John Wiley & Sons, Inc.

[Kass, 2019] Souhayb Kass - "Diagnostic vibratoire autonome des roulements." - Thèse de Doctorat, Université de Lyon; Université libanaise, 2019. Français.

[Kimball, 1924] A. L. Kimball. (1924) - "Internal friction theory of shaft whirling. *General Electric Review*" - 27 :244–251

[Lacroix, 1988] Lacroix J., - "Comportement dynamique d'un rotor au passage des vitesses critiques" – Thèse de Doctorat, INSA Lyon, 1998

[Lahyaoui, 2018] Lahyaoui O. (2019) – "Contribution to the study of magnetostrictive energy conversion: from material to device." - PhD thesis, Université de Technologie de Compiègne, France

[Lalanne et Ferraris, 1990] Lalanne M., Ferraris G., - "Rotordynamics Prediction in Engineering " – first edition, Wiley 1990

[Lalanne et Ferraris, 1998] Lalanne M., Ferraris G., - "Rotordynamics Prediction in Engineering " – second edition, Wiley 1998

[Lalanne, 1983] Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J., Ferraris G., Lacroix J., - "Vibrations non-linéaires de rotors de turbomachines." – Contact Report DRET, 1985

---

[Lalanne, 1985] Lalanne M., Berthier P., Der Hagopian J., - " Mécanique des Vibrations Linéaires " – Masson, 1986

[Le Besnerais, 2008] Le Besnerais J. (2008) – "Reduction of magnetic noise in PWM-supplied induction machines - low-noise design rules and multi-objective optimization: Reduction of electromagnetic audible acoustic noise and vibrations in electrical machines. Electric power" - PhD thesis, Ecole Centrale de Lille, France. tel-00348730

[Le Besnerais, 2013] Le Besnerais J., Lanfranchi V., Hecquet M., Brochet P. (2013) - "Bruit audible d'origine magnétique dans les machines asynchrones" - Techniques de l'ingénieur D3580 v2

[Lee, 1991] Lee K., DeBortoli M., Lee M., and Salon S. (1991) - "Coupling finite elements and analytical solution in the airgap of electric machines" - IEEE Transactions on Magnetics, 27(5):3955–3957.

[Lehmann, 1909] Lehmann, T. (1909) "Méthode graphique pour déterminer le trajet des lignes de force dans l'air. Revue d'Électricité : La Lumière Électrique" 43-45, 103-110 & 137-142 & 163-168.

[Li, 2015] Li Y., Lu Q., Zhu Z. Q., Wu L. J., Li G. J., and Wu, D. (2015) - "Analytical Synthesis of Air-Gap Field Distribution in Permanent Magnet Machines With Rotor Eccentricity by Superposition Method." - IEEE Transactions on Magnetics, 51(11):1–4.

[Lubin, 2010] Lubin T., Mezani S., and Rezzoug A. (2010) - " Exact Analytical Method for Magnetic Field Computation in the Air Gap of Cylindrical Electrical Machines Considering Slotting Effects." - IEEE Transactions on Magnetics, 46(4):1092–1099.

[Lubin, 2011] Lubin T., Mezani S., and Rezzoug A., (2011) – "2-D Exact Analytical Model for Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors with Semi-Closed Slots", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 47, NO. 2

[Mazzei, 2003] A. J. Mazzei, R. A. Scott (2003) - "Effects of internal damping on the stability of a rotating shaft driven through a universal joint." - Journal of Sound and Vibration, 265 :863–885

[Mbengue, 2016] Serigne M., Buiron N., Lanfranchi V. – "An Anisotropic Model for Magnetostriction and Magnetization Computing for Noise Generation in Electric Devices." Sensors, MDPI, 2016, 16 (4), pp.553.

[Meessen, 2012] Meessen K. J. (2012) - "Electromagnetic Fields and Interactions in 3D Cylindrical Structures: Modeling and Application door." - PhD thesis, University of Eindhoven.

[Montagnier, 2005] O. Montagnier, C. Hochard. (2005) - "Etude théorique et expérimentale de la dynamique des arbres de transmission supercritiques." - 17ème congrès Français de Mécanique, Troyes

---

[Nandi, 2004] Nandi S. (2004) - "A Detailed Model of Induction Machines With Saturation Extendable for Fault Analysis." IEEE Transactions on Industry Applications, 40(5):1302–1309

[O'Connell, 2008] O'Connell T. C. (2008) - "An investigation of boundary-based field analysis methods for electric machines: the Schwarz-Christoffel and Boundary Element Methods." - PhD thesis, University of Illinois.

[Ostovic, 1989] Ostovic, V. (1989) - "Dynamics of Saturated Electric Machines." - Springer New York, New York, NY.

[Ouagued, 2015] Ouagued S., Aden Diriye A., Amara Y., and Barakat G. (2015) - "A General Framework Based on a Hybrid Analytical Model for the Analysis and Design of Permanent Magnet Machines." - IEEE Transactions on Magnetics, 51(11):1–4.

[Pellerey, 2012] Pellerey, P., Lanfranchi, V., Friedrich, G. (2012) - "Numerical simulations of rotor dynamic eccentricity effects on synchronous machine vibrations for full run up," in Electrical Machines (ICEM), 2012 XXth International Conference on , vol., no., pp.3008-3014, 2-5 Sept. 2012

[Petyt, 2010] Petyt M. (2010) - "Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Second Edition" - Cambridge University Press

[Polyanin, 2002] A. D. Polyanin, - "Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists" -, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002. ISBN 1-58488-299-9.

[Pugnet, 1997] Pugnet, Jean-Marc. (1997) - "Équilibrage des rotors rigides et flexibles" - dans "Mécanique des éléments tournants" - Techniques de l'ingénieur Mécanique des éléments tournants

[Ragot, 2008] Ragot P. – (2008) "Modélisation analytique multiphysique pour la conception optimale de moteurs synchrones à aimants permanents", Phd Thesis, Ecole polytechnique de Lausanne, Suisse

[Rao, 1983] Rao J.S., - " Rotordynamics " – John Wiley Eastern, 1983

[Serrano-Iribarnegaray, 2013] Serrano-Iribarnegaray L., Cruz-Romero P., and Gomez-Exposito A. (2013) - "Critical Review of the Modified Winding Function Theory." - Progress In Electromagnetics Research, 133(November 2012):515–534.

[Sino, 2007] R. Sino (2007) - "Comportement dynamique et stabilité des rotors : Application aux rotors composites" - Thèse, INSA Lyon

[Stodola, 1927] A. Stodola - "Steam and Gas Turbines." - Mc Graw-Hill, New York, 1927.

---

[Swanson, 2005] E. Swanson, C. D. Powell, S. Weissman (2005) - "A Practical Review of Rotating Machinery Critical Speeds and Modes" - SOUND AND VIBRATION/MAY 2005

[Sylvester, 1968] Sylvester P. (1968) - "Modern electromagnetic fields" - London, U.K.: Prentice-Hall

[Tessarolo, 2015] Tessarolo A. (2015) - "Modeling and Analysis of Synchronous Reluctance Machines With Circular Flux Barriers Through Conformal Mapping." - IEEE Transactions on Magnetics, 51(4):1–11

[Vance, 1988] Vance J.M., - "Rotordynamics of Turbomachinery " – Wiley, 1988

[Vandeveld, 2003] Vandeveld L., and Melkebeek J. (2003) - "Magnetic forces and magnetostriction in electrical machines and transformer cores." IEEE Trans. on Magnetics 39, 3

[Walton, 1993] J.F. Walton and M. R. Martin. (1993) - "Internal rotor friction induced instability in high-speed rotating machinery. Vibration of Rotating Systems" - 60 :297–303, 1993

[Wu, 2011] Wu L.J., Zhu Z. Q., Staton D., Popescu M., and Hawkins D. (2011) - "An improved subdomain model for predicting magnetic field of surface mounted permanent magnet machines accounting for tooth-tips", IEEE Trans. Magn., vol. 47, no. 6, pp. 1693–1704

[Wu, 2012] Wu L. J., Zhu Z. Q., Staton D., Popescu M., and Hawkins D., (2012) "Analytical Model for Predicting Magnet Loss of Surface-Mounted Permanent Magnet Machines Accounting for Slotting Effect and Load", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 48, NO. 1

[Youmssi, 2006] Youmssi A. (2006). - "A Three-Dimensional Semi-Analytical Study of the Magnetic Field Excitation in a Radial Surface Permanent-Magnet Synchronous Motor." - IEEE Transactions on Magnetics, 42(12):3832– 3841.

[Žarko, 2006] Žarko D., Ban D., and Lipo T. A. (2006). - "Analytical Calculation of Magnetic Field Distribution in the Slotted Air Gap of a Surface Permanent-Magnet Motor Using Complex Relative Air-Gap Permeance." - IEEE Transactions on Magnetics, 42(7):1828–1837.

[Žarko, 2009] Žarko D., Ban D., and Lipo T. A. (2009). - "Analytical Solution for Electromagnetic Torque in Surface Permanent-Magnet Motors Using Conformal Mapping." - IEEE Transactions on Magnetics, 45(7):2943–2954.

[Zhang, 2017] Zhang Z., Xia C., Yan Y., Geng Q., and Shi T. (2017) - "A hybrid analytical model for open-circuit field calculation of multilayer interior permanent magnet machines." - Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 435:136–145.

[Zhu, 2002] Zhu Z. Q., Howe D., and Chan C. C., (2002) - "Improved Analytical Model for Predicting the Magnetic Field Distribution in Brushless Permanent-Magnet Machines", IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 38, NO. 1, JANUARY 2002

[Zhu, 2009] Zhu L., Jiang S. Z., Zhu Z. Q. and Chan, C. C. (2009). - "Analytical Modeling of Open-Circuit Air-Gap Field Distributions in Multisegment and Multilayer Interior Permanent-Magnet Machines." - IEEE Transactions on Magnetics, 45(8):3121–3130.

[Zhu, 2010a] Zhu Z. Q., Popescu M., Hawkins D., Wu L. J. and Staton D. (2010a). - "Combined complex permeance and sub-domain model for analytical predicting electromagnetic performance of surface-mounted pm machines." - 5th IET International Conference on Power Electronics, Machines and Drives (PEMD 2010), pages 111–111.

[Zhu, 2010b] Zhu Z. Q., Wu L. J., and Xia Z. P. (2010b). - "An Accurate Subdomain Model for Magnetic Field Computation in Slotted Surface-Mounted Permanent-Magnet Machines." - IEEE Transactions on Magnetics, 46(4):1100–1115.

[Zhu, 2010c] Zhu Z. Q., Xia Z. P., Wu L. J., and Jewell G. W. (2010). - "Analytical Modeling and Finite-Element Computation of Radial Vibration Force in Fractional-Slot Permanent-Magnet Brushless Machines." - IEEE Transactions on Industry Applications, 46(5):1908–1918.