



HAL
open science

Modélisation et simulation de la réponse vibratoire des structures sculptées en roulage : Application aux pneumatiques

Zakaria Knar

► **To cite this version:**

Zakaria Knar. Modélisation et simulation de la réponse vibratoire des structures sculptées en roulage : Application aux pneumatiques. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022ECDL0007. tel-03982980

HAL Id: tel-03982980

<https://theses.hal.science/tel-03982980>

Submitted on 10 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE
CENTRALE LYON

N° d'ordre NNT : 2022ECDL0007

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON
membre de l'Université de Lyon

École Doctorale N°162
Mécanique - Énergétique - Génie Civil - Acoustique (MEGA)

Spécialité : Génie Mécanique

Soutenue publiquement le 20/10/2022, par :

Zakaria KNAR

**Modélisation et simulation de la réponse vibratoire des
structures sculptées en roulage
Application aux pneumatiques**

Devant le jury composé de :

ANTHONY GRAVOUIL

Professeur, Laboratoire LaMCoS, INSA de Lyon

EMELINE SADOULET-REBOUL

MCF HDR, Institut FEMTO-ST, Université de Franche-Comté

JEAN-LUC DION

Professeur, Laboratoire QUARTZ, ISAE-Supméca

VIVIEN CLAUZON

Docteur - Ingénieur R&D, Michelin, Clermont-Ferrand

THIBAUT DAIRAY

Docteur - Ingénieur R&D, Michelin, Clermont-Ferrand

SÉBASTIEN BESSET

MCF HDR, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon

JEAN-JACQUES SINOÛ

Professeur, Laboratoire LTDS, École Centrale de Lyon

Président

Rapporteure

Rapporteur

Examineur

Invité

Co-Directeur de thèse

Directeur de thèse

À mes parents,

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier mes directeurs de thèse, Jean-Jacques Sinou et Sébastien Besset, de m'avoir proposé ce travail de recherche passionnant. Je suis reconnaissant pour leur encadrement, suivi et implication sans faille et leur contribution scientifique significative. Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude pour la confiance qu'ils m'ont toujours témoignée.

J'adresse également mes profonds remerciements à Vivien Clauzon pour la grande attention avec laquelle il a suivi mes recherches, de son soutien et de ses conseils avisés qui m'ont guidés tout au long de cette thèse. Je tiens aussi à le remercier pour sa grande disponibilité à répondre à mes problèmes scientifiques et informatiques. Ce fut un véritable plaisir de travailler avec lui.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble des membres du service de simulation de Michelin pour leur accueil lors de mes déplacements à Clermont, leur disponibilité et de m'avoir apporté une aide précieuse pour l'avancée de mes travaux.

Je remercie très sincèrement Monsieur Anthony Gravouil d'avoir accepté de présider ce jury.

J'exprime également toute ma reconnaissance à Madame Émeline Sadoulet-Reboul et Monsieur Jean-Luc Dion d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire.

Je ne saurais oublier de remercier tout le personnel du E6 que j'ai pu côtoyer quotidiennement. Je les remercie de m'avoir accueilli et d'avoir créé une atmosphère agréable et stimulante. Je garderai toujours un bon souvenir des différents moments de convivialité (apéros, pauses café, foot, bbq..).

Je tiens de plus à remercier tous mes amis et mes proches qui se sont déplacés pour assister à ma soutenance et qui m'ont tant apporté sur le plan personnel.

Enfin, je tiens à saisir cette occasion pour adresser mes profonds remerciements à mes parents, ma famille et les personnes qui me sont chères pour leur soutien continu au cours de cette thèse.

Résumé

Avec l'avènement des véhicules électriques et les progrès réalisés par les constructeurs automobiles pour réduire le bruit d'origine aérodynamique, le bruit de roulement devient la première source de nuisance sonore du trafic routier. Ce bruit est généré par des mécanismes complexes influencés par les propriétés du pneumatique, la rugosité de la chaussée et les conditions de roulage. Cette pollution sonore est engendrée partiellement par le rayonnement acoustique induit par les vibrations du pneumatique.

La modélisation et la simulation de la réponse dynamique du pneumatique présentent une multitude de difficultés. Plusieurs non-linéarités doivent être prises en compte (non-linéarité géométrique, loi de comportement, phénomènes de contact et de frottement avec la chaussée) afin d'intégrer les caractéristiques inhérentes au roulage des pneumatiques. En outre, la réponse dynamique du pneumatique est multi-échelles puisque celle-ci est la résultante d'une dynamique macroscopique de roulage qui opère autour de la fréquence de rotation avec des amplitudes ayant un ordre de grandeur similaire aux dimensions du pneu d'une part, et d'une réponse vibratoire induite par la rugosité de la chaussée et la résonance de la sculpture de la bande de roulement d'autre part. Ce travail de thèse propose une méthodologie numérique de simulation de l'intégralité de la réponse dynamique des pneumatiques avec une approche multi-étapes.

La formulation mathématique de la méthode proposée est détaillée en justifiant les hypothèses effectuées. Deux applications numériques sont ensuite réalisées afin de déterminer les limites de validité en comparant avec la méthode d'intégration temporelle classique. Enfin, la méthode numérique est employée pour étudier la sensibilité du comportement vibratoire des pneumatiques par rapport aux conditions de roulage et aux paramètres de conception des sculptures de la bande de roulement. Les tendances obtenues sont comparées qualitativement avec celles observées expérimentalement.

Mots clés : Bruit de roulement, Dynamique non-linéaire, Contact mécanique, Frottement, Modélisation multi-échelles.

Abstract

Tire/road noise is becoming a major source of vehicle noise as the transition towards electrical vehicles is underway. This has resulted in tire manufacturers refining their tire design to help reduce traffic noise. The tire/road noise is generated by various mechanisms that are influenced by the tire's properties, the road's texture and the rolling conditions. This noise is partially caused by the acoustic radiation induced by the tire vibrations.

Simulating the full dynamic response of a rolling sculpted tyre requires not only taking into account various non-linearities (geometric nonlinearity, constitutive law, frictional contact with the road surface) but also considering the multi-scale nature of the dynamic response itself. On one hand, there is the macroscopic rolling dynamic behavior that operates around the rotating frequency with relatively high amplitudes. On the other hand, the vibratory response operates in a larger frequency window with relatively low amplitudes. In fact, the road roughness and the tyre's groove represent the mechanisms that generate the vibratory response. In contrast to a straightforward strategy that consists of using an energy-conserving stable time integrator to predict the multi-scale dynamic response, the proposed strategy is based on a two-steps approach to separate the dynamics operating at different scales.

The mathematical formulation of the proposed method is exposed alongside the several hypothesis that are made and justified. Afterwards, two numerical studies are realized in order to find the validity domain of the methodology by comparing it with the classical time integration method. Finally, the numerical method is used to study the vibrations response sensitivity with the respect to the rolling conditions and to the tread pattern parameters. The tendencies given by the numerical simulation are qualitatively compared with those observed experimentally.

Keywords : Rolling noise, Nonlinear dynamics, Contact mechanics, Friction, Multi-scale modelling

Table des matières

Introduction	1
1 Bruit de roulement	5
1.1 Introduction	6
1.2 Bruit de roulement	7
1.2.1 Le pneumatique	7
1.2.2 Mécanismes de génération du bruit de roulement	9
1.2.3 Mécanismes d'amplification du bruit de roulement	12
1.2.4 Mécanismes d'atténuation du bruit de roulement	16
1.3 Paramètres influant sur le bruit de roulement	18
1.3.1 Les conditions de roulage	18
1.3.2 Le pneumatique	19
1.3.3 La chaussée	22
1.4 Simulation du bruit de roulement	25
1.4.1 Modèles du pneumatique	25
1.4.2 Types de non-linéarités	26
1.4.3 Formulation ALE	27
1.4.4 Rayonnement acoustique	28
1.5 Conclusion	31
2 Éléments de la mécanique des milieux continus	33
2.1 Introduction	34
2.2 Notions de la théorie de la MMC	35
2.2.1 Référentiel	35
2.2.2 Configurations du système	35
2.2.3 Description lagrangienne	35
2.2.4 Description eulérienne	36
2.3 Cinématique	37
2.4 Contraintes	41
2.5 Loi de comportement	42
2.5.1 Hyperélasticité	42
2.5.2 Viscoélasticité	45
2.6 Équations d'équilibre en grandes transformations	48
2.6.1 Conservation de la masse	48
2.6.2 Conservation du moment linéaire	49
2.6.3 Conservation du moment angulaire	50
2.6.4 Formulation forte des équations d'équilibre	50
2.7 Méthode des éléments finis	52
2.7.1 Formulation faible des équations d'équilibre	52
2.7.2 Discrétisation spatiale	53

2.7.3	Résolution des équations de mouvement	57
2.8	Intégration temporelle	59
2.8.1	Méthode d'Euler	61
2.8.2	Méthode de Newmark	61
2.9	Conclusion	65
3	Introduction à la mécanique du contact	67
3.1	Introduction	68
3.2	Cinématique	69
3.3	Contact normal	71
3.3.1	Conditions de Signorini	71
3.3.2	Équations de mouvement	71
3.3.3	Méthodes numériques	73
3.4	Contact tangentiel	78
3.4.1	Contact adhérent	78
3.4.2	Frottement de Coulomb	79
3.4.3	Régularisation de la loi de Coulomb	81
3.5	Conclusion	83
4	Modélisation et simulation de la réponse vibratoire	85
4.1	Introduction	86
4.2	Méthode de linéarisation	87
4.3	Système masses - ressorts	91
4.3.1	Mise en équation	91
4.3.2	Résultats numériques	93
4.4	Prototype	101
4.4.1	Présentation de la structure	101
4.4.2	Roulage quasi-statique	103
4.4.3	Réponse vibratoire	111
4.4.4	Conclusion	118
4.5	Conclusion	122
5	Application aux structures pneumatiques	123
5.1	Introduction	124
5.2	Structure pneumatique	125
5.2.1	Influence de la vitesse de rotation	127
5.2.2	Influence de la flèche	129
5.2.3	Sensibilité par rapport à l'épaisseur des rainures	132
5.2.4	Sensibilité par rapport au ψ_2	135
5.2.5	Sensibilité par rapport au rib shifting	138
5.2.6	Synthèse des études de sensibilité	141
5.3	Pilotage du roulage en charge imposée	142
5.3.1	Problème mal posé	142
5.3.2	Équation de la charge	143

5.3.3	Application numérique	145
5.3.4	Conclusion	150
5.4	Conclusion	152
Conclusions et perspectives		153
Table des figures		157
Liste des tableaux		163
Nomenclature		165
Bibliographie		169

Introduction

Le bruit urbain est un facteur de stress dont les effets sur la santé publique suscitent l'attention. La circulation routière compte parmi les principales sources de cette nuisance. Les progrès réalisés par les constructeurs de véhicules ont permis une baisse significative du bruit moteur et l'avènement du véhicule électrique s'accompagne d'une véritable rupture dans le domaine. En parallèle, l'amélioration de l'aérodynamique des véhicules et la tendance à la baisse des limitations de vitesse en milieu péri-urbain contribuent à réduire le bruit d'origine aérodynamique. Les regards se tournent alors de plus en plus vers le bruit de roulement produit par le pneumatique dont la contribution relative s'est trouvée accrue jusqu'à devenir majoritaire. Par conséquent, les normes imposées par les pouvoirs publics et les spécifications des constructeurs automobiles portant sur le bruit émis par les pneumatiques se font de plus en plus exigeantes.

La conception d'un pneumatique s'avère complexe puisque ses performances (adhérence, usure, résistance au roulement, bruit...) sont antagonistes et supposent un compromis. La simulation apporte une aide précieuse à la conception de nouveaux pneumatiques et à la compréhension des différents phénomènes physiques inhérents à la mécanique du pneumatique. En effet, la simulation de la dynamique du roulage des pneumatiques permet de prédire les niveaux d'adhérence de la bande de roulement et d'obtenir la distribution des contraintes dans les matériaux qui est inaccessible avec les mesures expérimentales. D'autre part, la simulation numérique permet de réduire le nombre de tests de certification destinés à valider la fiabilité et les performances des structures pneumatiques.

La simulation de la réponse dynamique des pneumatiques présente une multitude de difficultés. Le cadre des grandes déformations nécessite le traitement d'une première non-linéarité dite géométrique. La simulation de la réponse dynamique ne peut plus être effectuée avec la méthode de la superposition modale comme dans le cadre de l'élastodynamique linéaire. De plus, le mélange des caoutchoucs du pneumatique est caractérisé en pratique par une loi de comportement visco-hyperélastique non-linéaire. Par ailleurs, les renforts métalliques ou textiles incrustés dans les nappes de l'architecture du pneumatique ont une rigidité très supérieure à celle du caoutchouc. Ceci peut induire une complexité supplémentaire lors de la modélisation de tels systèmes. La sollicitation du pneumatique résulte de son contact avec le revêtement de la chaussée. Les phénomènes de contact et de frottement sont caractérisés par des lois non-linéaires multi-valuées et nécessitent par conséquent un traitement numérique spécifique. Le caractère à deux échelles de la géométrie du pneumatique représente une source de difficulté supplémentaire. En effet, la dimension caractéristique du pneumatique correspond à son diamètre (50 centimètres) et pilote le roulage macroscopique dont la fréquence coïncide avec la fréquence de rotation. Par

ailleurs, la réponse vibratoire des pneumatiques est excitée en partie par la forme de la sculpture dont la taille est de l'ordre de quelques millimètres. Cette réponse vibratoire opère autour des moyennes et hautes fréquences avec de faibles amplitudes. Le rapport entre l'énergie de roulage et l'énergie vibratoire est de l'ordre de 10^4 .

La simulation du bruit de roulement rayonné par les vibrations solidiennes du pneumatique nécessite la prise en compte de toutes les complexités citées auparavant. Une approche directe de simulation consiste à résoudre le problème dynamique par une intégration temporelle avec un schéma numérique conservatif, stable et capable de donner l'intégralité de la réponse dynamique. Cependant, le coût de calcul considérable inhérent à cette approche rend celle-ci inadaptée actuellement pour les applications industrielles. Une autre approche consiste à développer des méthodes numériques plus adaptées qui se basent sur la compréhension de la physique. Il s'agit notamment de construire une configuration à perturber et de bien modéliser l'excitation représentant les phénomènes physiques de génération de bruit. C'est le cas par exemple de la formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne (ALE) utilisée dans la simulation du bruit intérieur qui est représentatif du confort des passagers et est généré principalement par la rugosité de la chaussée. Cette approche n'est adaptée que pour les pneus axisymétriques. Par conséquent, elle ne peut pas être utilisée dans la simulation du bruit extérieur étant donné l'importance de la géométrie de la sculpture.

L'objectif principal de ces travaux de thèse est le développement d'une stratégie de simulation numérique de la réponse vibratoire des pneumatiques. L'excitation engendrée par l'impact de la sculpture de la bande de roulement est particulièrement étudiée. Le bruit généré par cette excitation est calculé avec la résolution du problème de rayonnement acoustique dont la condition aux limites correspond à la vitesse des vibrations. La simulation numérique du problème acoustique n'est pas abordée dans ce mémoire. La modélisation de l'impact de la sculpture est importante étant donné que le bruit de roulement est souvent étudié à un stade où beaucoup de paramètres sont déjà fixés et l'optimisation de cette performance est généralement effectuée en modifiant la distribution des motifs de la sculpture.

Plan du mémoire

Ce mémoire de thèse est divisé en cinq chapitres :

- Le premier chapitre sera consacré à une étude bibliographique sur le bruit de roulement. Les mécanismes de génération, d'amplification et d'atténuation du bruit de roulement seront détaillés. Ensuite, l'influence des conditions de roulage, du pneumatique et du revêtement de la chaussée sur ce bruit sera exposée. La dernière partie de ce chapitre se focalisera sur les différentes approches de modélisation et sur les techniques numériques utilisées dans la simulation du bruit de roulement.

- Le second chapitre sera dédié à une introduction succincte des concepts de la mécanique des milieux continus avec les formulations mathématiques associées. Le cadre de l'hyperélasticité sera détaillé et complété avec la mise en équation du modèle viscoélastique. Les principes de conservation seront abordés et manipulés afin de mettre en place les équations de mouvement. Un formalisme lagrangien sera adopté afin de traiter la non-linéarité géométrique. Enfin, la méthode des éléments finis et l'intégration temporelle utilisées dans la résolution numérique des problèmes de dynamique non-linéaire seront présentées.

- Le cadre de la modélisation de la réponse dynamique des pneumatiques sera complété dans le troisième chapitre en introduisant des éléments de la mécanique du contact. Dans un premier temps, la formulation mathématique des conditions de contact unilatéral entre un solide déformable et une fondation rigide sera introduite. La loi de frottement de Coulomb sera choisie comme modèle de frottement sec macroscopique. Enfin, les différentes techniques numériques utilisées dans la résolution du problème de contact frottant seront exposées en précisant leurs avantages et inconvénients.

- Le quatrième chapitre concernera la modélisation et la simulation de la réponse vibratoire proposées dans ces travaux de thèse. La formulation mathématique de la stratégie numérique développée sera détaillée avec les différentes hypothèses effectuées. Deux études numériques seront mises en place afin de statuer sur la validité et la stabilité de la méthodologie. Dans un premier temps, la méthode numérique sera appliquée pour simuler la réponse dynamique d'un système masses/ressorts non-linéaire. La solution obtenue sera comparée avec la réponse calculée par la méthode d'intégration temporelle. Cette comparaison permettra de statuer sur la validité de la méthode en fonction de la non-linéarité représentée par une raideur cubique. La deuxième application portera sur la simulation de la réponse vibratoire d'un cylindre rainuré en roulage sur un sol rigide. La solution calculée sera comparée avec une solution de référence obtenue grâce à la géométrie et la loi de comportement relativement simples du prototype. La comparaison va servir à cerner les limites de validité de la méthodologie.

- La simulation de la réponse vibratoire d'une structure ayant la géométrie typique des pneumatiques sera proposée dans le cinquième chapitre. Une première étude portera sur l'influence des conditions de roulage sur les niveaux vibratoires. La sensibilité des vibrations par rapport aux paramètres de conception des sculptures de la bande de roulement sera ensuite examinée. Les tendances obtenues avec la simulation seront comparées qualitativement avec les tendances observées expérimentalement. La dernière partie de ce chapitre s'articulera autour de la modélisation du roulage en charge imposée avec les équations supplémentaires. La formulation mathématique de cette modélisation sera introduite. Enfin, la réponse vibratoire des pneumatiques obtenue avec ce nouveau mode de pilotage sera présentée et analysée.

Bruit de roulement

Sommaire

1.1	Introduction	6
1.2	Bruit de roulement	7
1.2.1	Le pneumatique	7
1.2.2	Mécanismes de génération du bruit de roulement	9
1.2.3	Mécanismes d'amplification du bruit de roulement	12
1.2.4	Mécanismes d'atténuation du bruit de roulement	16
1.3	Paramètres influant sur le bruit de roulement	18
1.3.1	Les conditions de roulage	18
1.3.2	Le pneumatique	19
1.3.3	La chaussée	22
1.4	Simulation du bruit de roulement	25
1.4.1	Modèles du pneumatique	25
1.4.2	Types de non-linéarités	26
1.4.3	Formulation ALE	27
1.4.4	Rayonnement acoustique	28
1.5	Conclusion	31

1.1 Introduction

Le bruit de roulement résulte de l'interaction complexe entre le pneumatique et le revêtement de la chaussée. La bande fréquentielle de ce bruit est large et est comprise entre 50 et 5000 Hz avec des pics entre 700 et 2000 Hz. L'oreille humaine est particulièrement sensible à ces pics sonores. Par conséquent, les manufactures de pneumatiques doivent développer des produits permettant de trouver le meilleur compromis entre la sécurité, le confort, la résistance au roulement et une faible émission sonore. De même, les fabricants des revêtements routiers doivent aussi trouver un compromis entre la qualité d'usage, la durabilité et la performance acoustique. L'étude du bruit de roulement nécessite la compréhension de divers mécanismes mécaniques et aérodynamiques. Plusieurs laboratoires de recherche se sont intéressés à cette problématique étant donné les enjeux économiques, sanitaires et environnementaux.

Une étude bibliographique sur le bruit de roulement est proposée dans ce chapitre. Dans un premier temps, les fonctions principales d'un pneumatique et la composition de son architecture sont rappelées. Ensuite, les mécanismes de génération, d'amplification et d'atténuation de ce bruit sont introduits. L'influence des conditions de roulage, du pneumatique et de la chaussée sur le bruit de roulement est discutée. Enfin, les différents modèles de simulation de ce phénomène avec les techniques numériques associées sont présentés.

1.2 Bruit de roulement

Le bruit de roulement est défini comme le bruit généré par le contact entre le pneumatique et le revêtement de la chaussée. Ce bruit est considéré comme la source principale du bruit émis par le véhicule (figure 1.1). Deux catégories de bruit de roulement sont distinguées. Le bruit extérieur qui se propage dans l'environnement autour du véhicule et gêne notamment les personnes à proximité des axes routiers et le bruit intérieur qui est transmis vers l'habitacle et perçu par le conducteur et les passagers.

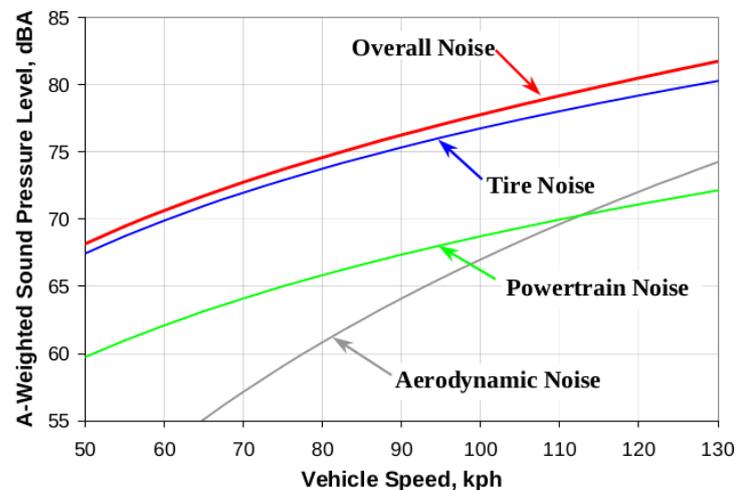


FIGURE 1.1 – Contribution du bruit de roulement au bruit global émis par le véhicule [Donavan 2007].

Les normes étatiques et spécifications des constructeurs de véhicules portant sur le bruit émis par les pneumatiques se font de plus en plus exigeantes [EU 2001]. Ajouté à cela, le système obligatoire d'étiquetage (grading) offre au consommateur un critère objectif et normatif de comparaison de performances au moment de son achat. Ce système inclut aujourd'hui une note sur le niveau de nuisance sonore (figure 1.2). Par conséquent, la conception des pneumatiques à faible émission de bruit sans sacrifier les autres performances s'avère un enjeu sociétal et business majeur.

1.2.1 Le pneumatique

Le pneumatique voit le jour en 1889 avec son invention par John Boyd Dunlop. Ce dernier fonde sa première manufacture de pneumatiques en 1889 qui fabrique des boudins de caoutchouc gonflés d'air destinés aux vélos. Edouard Michelin et son frère André mettent en place un nouveau système de pneu avec chambre à air qui est breveté en 1891. Ce concept fait ses preuves en permettant à Charles Terront de gagner la première course cycliste Paris-Brest-Paris. Le pneumatique est ensuite adapté à l'automobile. Il connaît plusieurs évolutions surtout avec l'introduction de la carcasse radiale qui est considérée comme une innovation de rupture et est bre-

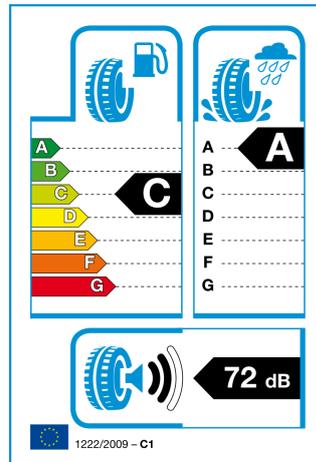


FIGURE 1.2 – Étiquetage des pneumatiques dans l'union européenne.

vetée le 4 juin 1946 par Michelin. Aujourd'hui, le pneumatique devient un produit de haute technologie qui doit répondre à des exigences fortes et diverses en termes de performances et de sécurité. Il doit notamment remplir 3 fonctions principales : porter, guider et transmettre des charges sur une très petite surface ayant le même ordre de grandeur que celle d'une carte postale [Michelin 2001].

→ **Porter** la charge résultante de la masse du véhicule et de toutes les surcharges liées aux mouvements dynamiques du véhicule ainsi que les surcharges aérodynamiques éventuelles à haute vitesse tout en absorbant les irrégularités de la route.

→ **Guider** le véhicule sur les trajectoires décidées par le conducteur ou par des intelligences artificielles avec le développement des voitures autonomes.

→ **Transmettre** au sol les efforts de freinage ou d'accélération pilotés par le conducteur ou des IA.

L'architecture moderne d'un pneumatique tourisme, schématisée sur la figure 1.3, est constituée d'un assemblage successif de différentes composantes. Cet assemblage est fabriqué à partir de caoutchouc naturel et synthétique, d'adjuvants chimiques comme le soufre, les huiles et d'autres, ainsi que des renforts textiles et métalliques.

- La *bande de roulement* est constituée de caoutchouc synthétique et naturel. Son rôle est de garantir un kilométrage important, une bonne adhérence sur la route ainsi qu'une bonne évacuation de l'eau grâce à la sculpture afin d'assurer une conduite sûre quelles que soient les conditions. La forme et la répartition des sculptures sont choisies de façon à réduire le rayonnement acoustique du pneumatique. Ce dernier point sera abordé en détails dans la suite de ce chapitre.

- La *nappe ceinture* permet de rouler à vitesse élevée. Cette nappe est faite d'une corde solide de nylon incrustée dans du caoutchouc. Cette corde s'enroule sur la circonférence du pneu, d'un côté à l'autre, sans se chevaucher.

- Les *nappes sommet* confèrent au pneu sa rigidité afin d'améliorer le maintien de la forme et de la stabilité directionnelle, de réduire la résistance au roulement et

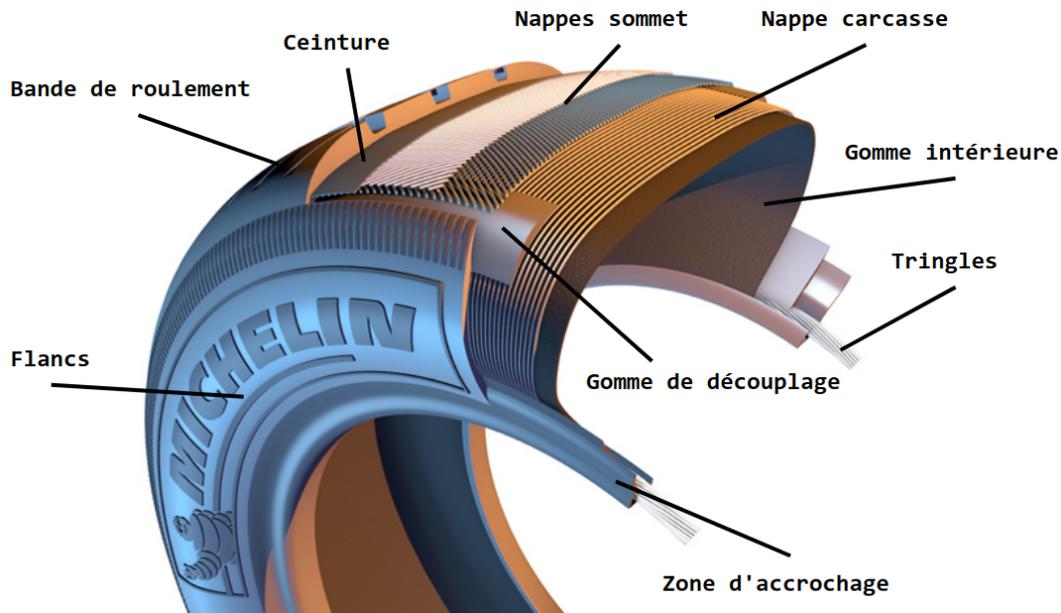


FIGURE 1.3 – Architecture d'un pneumatique tourisme.

d'augmenter la performance kilométrique du pneu.

- La *nappe carcasse* est composée de rayonne caoutchoutée ou de polyester et contrôle la pression interne du pneu afin de maintenir sa forme.
- Le *flanc* représente la partie latérale du pneu qui est reliée à la bande de roulement par l'épaule. Il est constitué de caoutchouc naturel et son rôle est de protéger la carcasse des dommages externes et des conditions atmosphériques.
- La *tringle* est constituée de fils d'acier incrustés dans du caoutchouc. Sa fonction est de garantir une attache sécurisée au bord de la jante.

1.2.2 Mécanismes de génération du bruit de roulement

Les mécanismes de génération englobent les phénomènes physiques responsables de la formation du bruit de roulement. Il existe deux catégories de mécanismes de génération. La première correspond aux mécanismes d'origine solidienne et résultent de l'interaction mécanique engendrée par le contact entre le pneumatique et la chaussée. La deuxième catégorie désigne les mécanismes d'origine aérodynamique induit par le mouvement de l'air au voisinage de la zone de contact.

1.2.2.1 Impact de la bande de roulement

Le bruit d'impact correspond aux vibrations générées par le choc entre la bande de roulement et la chaussée comme illustré sur la figure 1.4. Ces vibrations sont propagées dans le pneumatique dont la surface rayonne des ondes acoustiques. Ce mécanisme est semblable à une excitation par un marteau de choc qui vient taper sur la gomme de la bande de roulement. À l'entrée de l'aire de contact, le mécanisme

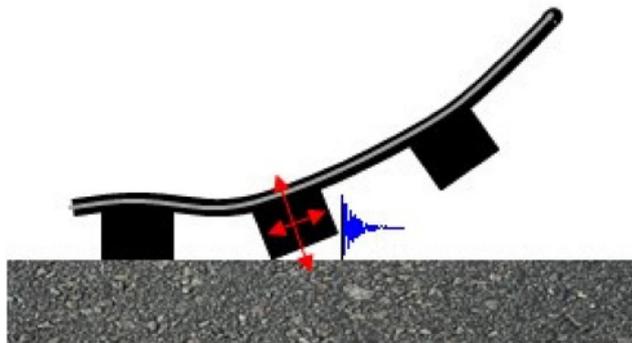


FIGURE 1.4 – Schématisation de l'impact de la bande de roulement sur la chaussée [Azizi 2020].

d'impact induit la déformation de la sculpture vers le centre du pneu. D'autre part, le relâchement des pains de gomme observé à la sortie de l'aire de contact est assimilé à un impact inverse.

Les facteurs principaux qui influencent le mécanisme d'impact sont la vitesse de roulage, la forme de la sculpture de la bande de roulement et la rugosité de la chaussée. Dans ce sens, le bruit d'impact d'un pneu slick roulant sur un sol lisse est considéré négligeable. Le bruit d'impact est une composante principale du bruit de roulement [Sandberg 2002] et sa fréquence est donnée par :

$$f_i = \frac{v}{\lambda_i} \quad i = \{1, 2\} \quad (1.1)$$

f_1 (respectivement f_2)(Hz) est la fréquence de l'impact de la bande de roulement (respectivement de la chaussée), v (m/s) est la vitesse du pneu, et λ_1 (respectivement λ_2)(m) est la longueur caractéristique des rainures de la sculpture de la bande de roulement (respectivement de la texture de la chaussée). La fréquence des mécanismes d'impact reste dans le domaine des basses fréquences (< 1500 Hz) pour les vitesses inférieures à 100 km/h [Azizi 2020]. Les vibrations générées par le mécanisme d'impact sont localisées aux alentours de l'entrée et de la sortie de l'aire de contact étant donné les propriétés d'amortissement visqueux des caoutchoucs de la bande de roulement.

1.2.2.2 Stick-Slip

Le mécanisme de *stick-slip* génère un bruit de crissement. Ce dernier est généralement observé quand le pneumatique roule sur des chaussée ayant une faible macro-texture et une forte micro-texture [Li 2019]. Ce mécanisme de rupture d'adhérence est associé aux forces de frottement dans la zone de contact (figure 1.5). La bande de roulement est collée sur la chaussée à l'entrée de l'aire de contact à cause de l'appui de la charge portée par le pneu et commence à glisser dès que les forces

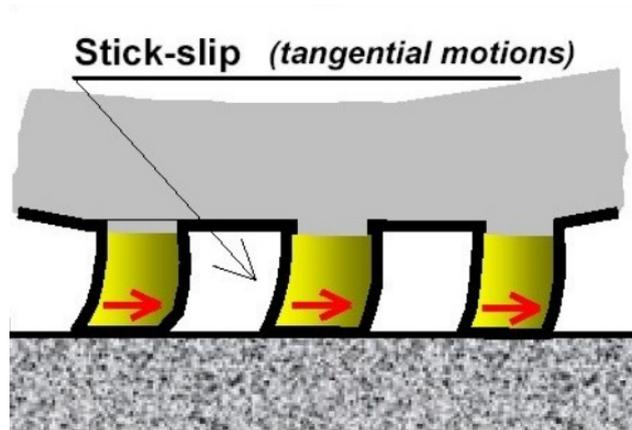


FIGURE 1.5 – Schématisation du mécanisme du stick-slip [Sandberg 2002].

tangentiels atteignent la limite d'adhérence pour basculer sur le régime glissant puis adhère à nouveau à la chaussée. À la sortie de l'aire de contact, les vibrations tangentiels génèrent du bruit en hautes fréquences (1000-2500 Hz) [Kröger 2010] induit par les forces de frottement. Le stick-slip est dû à la différence entre le coefficient de frottement statique et dynamique sur l'interface de contact. Le bruit généré par le stick-slip est important dans des situations dans lesquelles des forces tangentiels importantes sont appliquées sur le pneu telles que l'accélération, le freinage ou le braquage [Sandberg 2002]. D'ailleurs, le bruit de crissement est considéré négligeable dans le cas du roulage libre ou avec une vitesse constante.

1.2.2.3 Stick-Snap

Le mécanisme de *stick-snap* apparaît quand le pneumatique devient *collant* sur une chaussée propre. C'est le cas des pneus hiver en hautes températures où la bande de roulement est collante et la chaussée est propre [Sandberg 2002]. La bande de roulement est collée sur la chaussée et une force est nécessaire pour casser l'adhésion entre les deux. Les pains de gomme se détachent de la zone de contact avec une certaine déformation comme illustré sur la figure 1.6. Le retour à l'état d'équilibre va générer des vibrations engendrant une onde acoustique en hautes fréquences (> 1000 Hz). Le bruit généré ressemble à celui du détachement d'une ventouse d'une surface propre. Le bruit généré par le stick-snap ne représente pas une composante essentielle du bruit de roulement puisqu'une couche de saleté est souvent présente sur la chaussée. Cependant, la prise en compte du stick-snap peut s'avérer importante dans le cas des mesures expérimentales effectuées sur des tambours propres.

1.2.2.4 Pompage d'air

Le pompage d'air est considéré comme le mécanisme aérodynamique principal de génération de bruit de roulement [Conte 2008]. Ce mécanisme résulte des fluctuations d'air entrant et sortant de la zone de contact. En effet, l'air emprisonné

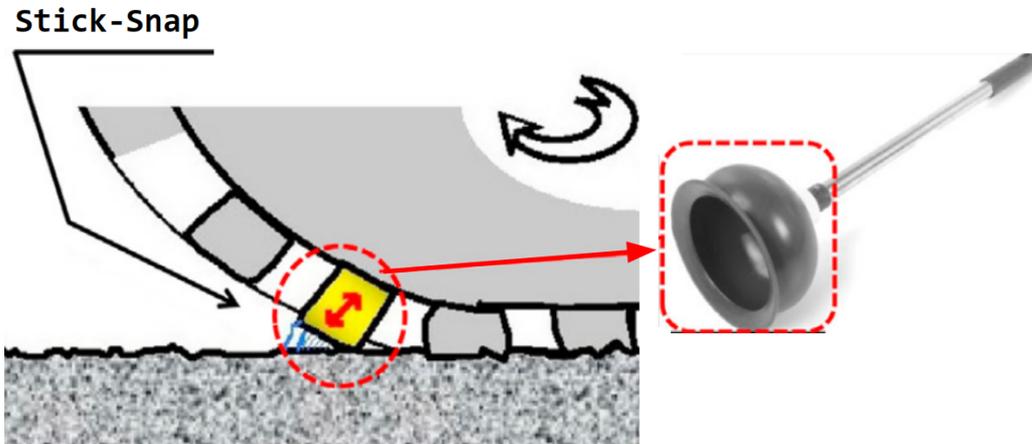


FIGURE 1.6 – Schématisation du mécanisme du stick-snap [Sandberg 2002].

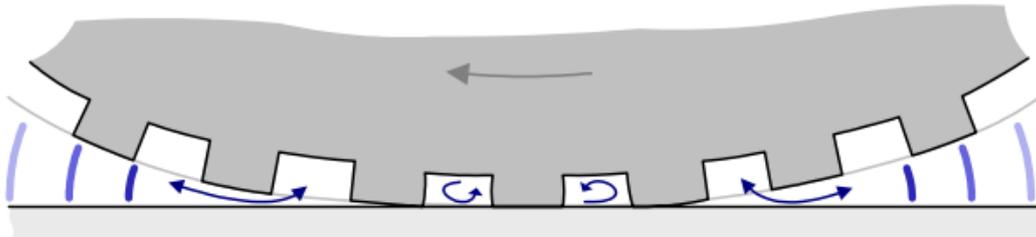


FIGURE 1.7 – Schématisation du mécanisme du pompage d'air [Conte 2008].

à l'entrée de l'aire de contact est comprimé dans les cavités de la sculpture de la bande de roulement et de la texture de la chaussée. Ces petits volumes d'air sont ensuite relâchés brusquement à la sortie de la zone de contact (figure 1.7). Ce mouvement d'air va générer des ondes de pression acoustique principalement en hautes fréquences (>1 kHz). Le bruit produit par ce phénomène de compression-détente est appelé chuintement.

Les phénomènes de turbulence favorisés par l'avancement et la rotation de la roue peuvent générer du bruit. Ces mécanismes de turbulence d'air sont considérés négligeables par rapport au mécanisme de pompage d'air [Hayden 1971] et sont plutôt associés au bruit aérodynamique du véhicule.

1.2.3 Mécanismes d'amplification du bruit de roulement

Les mécanismes d'amplification désignent les phénomènes physiques de résonance qui émergent par l'excitation des mécanismes de génération évoqués précédemment. Par conséquent, la réduction du bruit de roulement nécessite non seulement le traitement des mécanismes de génération mais aussi la prise en compte de la fréquence d'apparition des mécanismes d'amplification qui seront détaillés dans cette partie.

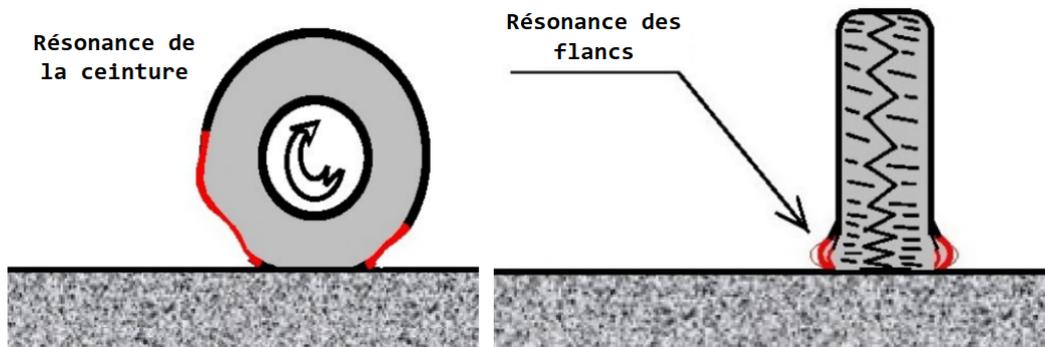


FIGURE 1.8 – Schématisation de la résonance de la ceinture et des flancs [Sandberg 2002].

1.2.3.1 Résonance du pneu

Le pneumatique est un assemblage complexe de plusieurs composantes. Chacune de celles-ci peut entrer en résonance quand elle est excitée à certaines fréquences. Les composantes qui contribuent principalement à l'amplification du bruit de roulement sont la ceinture, les flancs et la cavité de l'air de gonflage [Li 2019].

La majorité des spectres des pressions acoustiques obtenus avec les mesures expérimentales du bruit de roulement contient un pic entre 700 et 1300 Hz. Une analyse simpliste consisterait à relier ce pic aux différents mécanismes de générations de bruit exposés auparavant (impact, stick-slip) étant donné que leur fréquence peut être incluse dans cet intervalle fréquentiel. Cependant, ce pic persiste même pour les pneus slick roulant sur des chaussées lisses et reste indépendant de la vitesse de roulement. Il est alors probable que ce pic soit une conséquence de la résonance de la ceinture (figure 1.8) étant donné que celle-ci dépend uniquement de sa structure [Sandberg 2002]. D'autre part, les mesures expérimentales montrent que le changement de la rigidité et de la masse de la ceinture influence le bruit émis et plus particulièrement le pic observé entre 500 et 1000 Hz [Kropp 1998].

Les vibrations générées par les mécanismes d'interaction avec la chaussée se propagent vers les flancs déformés du pneumatique (figure 1.8). Ces derniers peuvent agir comme une caisse de résonance amplifiant les vibrations de la bande de roulement pour des fréquences allant jusqu'à 800 Hz [Sandberg 2002]. D'autre part, les mesures expérimentales montrent que les niveaux vibratoires de la bande de roulement sont supérieurs à ceux des flancs mais l'intensité du bruit émis par ces derniers est similaire à celle de la bande de roulement. Ceci s'explique par le fait que le rayonnement acoustique des flancs est supérieur à celui de la bande de roulement [Ruhala 1999].

Le couplage fluide-structure entre l'architecture du pneumatique et sa cavité engendre un transfert des vibrations dues aux impacts sur la chaussée. La cavité est généralement remplie d'air ou d'autres gaz tels que l'azote ou l'hélium par exemple. Le transfert vibratoire peut être considéré comme une source d'excitation du fluide de la cavité. La résonance de la cavité engendre une pression acoustique qui am-

plifie le bruit de roulement du pneumatique. Les modes de résonance de la cavité dépendent de sa géométrie et des conditions de roulage. Par exemple, la fréquence de résonance de la cavité d'air d'un pneu non écrasé est donnée par [Azizi 2020] :

$$f = \frac{c}{2\pi R} \quad (1.2)$$

c est la vitesse du son dans la cavité et R le rayon moyen de celle-ci. La première fréquence de résonance se situe entre 180 et 250 Hz pour les pneus tourisme. D'autre part, la rotation de la cavité induit une séparation des modes de résonance. Chaque mode donne naissance à un mode direct et un mode inverse. La fréquence propre de ces deux modes est donnée par :

$$f = \frac{c \pm \omega}{2\pi R} \quad (1.3)$$

ω est la vitesse de rotation de la cavité. La résonance acoustique de la cavité peut engendrer une amplification du bruit de roulement étant donné qu'un phénomène de couplage de modes avec l'architecture du pneu peut avoir lieu. Plusieurs solutions sont développées afin d'atténuer ce mécanisme d'amplification comme l'insertion des matériaux absorbant les ondes acoustiques sur la gomme intérieure ou sur la jante [Torra i Fernández 2006, Mohamed 2013].

1.2.3.2 Résonance des sillons

Les sillons de la sculpture de la bande de roulement forment des tuyaux d'air qui peuvent entrer en résonance comme illustré sur la figure 1.9. C'est le même mécanisme d'amplification observé sur les tuyaux des orgues. Cette résonance génère une sonorité pure ayant une fréquence qui dépend de la longueur, du diamètre et des ouvertures du sillon. Si le sillon a deux ouvertures, sa fréquence de résonance f_n est donnée par :

$$f_n = \frac{nc}{2(L + 0.8d)} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.4)$$

D'autre part, si le sillon n'a qu'une seule ouverture, sa fréquence de résonance f_n est donnée par :

$$f_n = \frac{(n - 1/2)c}{2(L + 0.8d)} \quad n \in \mathbb{N} \quad (1.5)$$

n est un entier naturel indiquant l'ordre de résonance, c est la vitesse de son, L est la longueur du sillon et d est le diamètre du sillon. La résonance des sillons amplifie les vibrations aérodynamiques induites par le mécanisme de pompage d'air. Cette résonance en hautes fréquences (800-3000 Hz) est davantage observée sur les chaussées lisses et sur les tambours utilisés dans les essais expérimentaux [Jennewein 1985].

1.2.3.3 Résonance de Helmholtz

La résonance de Helmholtz est un phénomène de résonance de l'air dans une cavité qui peut être assimilé à un oscillateur de type masse-ressort [Helmholtz 1885].

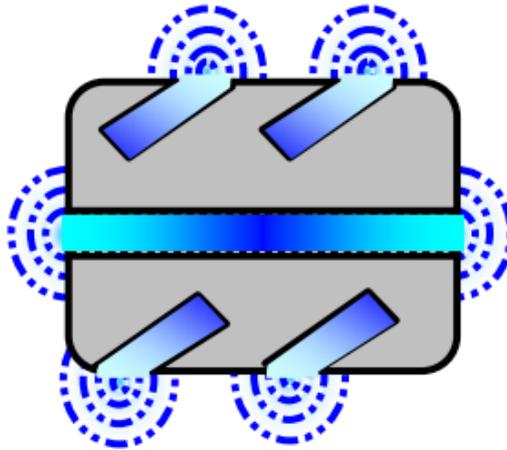


FIGURE 1.9 – Schématisation de la résonance des sillons [Sandberg 2002].

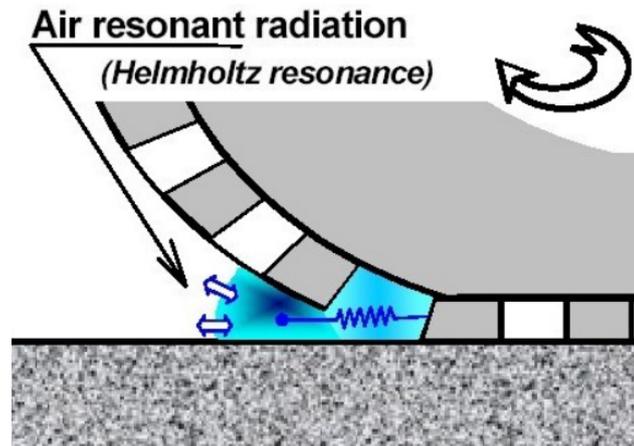


FIGURE 1.10 – Schématisation de la résonance de Helmholtz [Sandberg 2002].

Le volume de la cavité qui se forme vers la sortie de la zone de contact est assimilé à un ressort et l'air présent entre la bande de roulement et la chaussée agit comme une masse comme illustré sur la figure 1.10. Un système masse-ressort est alors formé dès que la cavité est ouverte à la sortie de l'air de contact. La fréquence de résonance varie en fonction du volume de la cavité et se situe entre 1000 et 2500 Hz. Dans ce sens, l'avancement du pneumatique engendre l'accroissement de cette fréquence qui s'accompagne d'une baisse de l'amplitude de résonance [Li 2019].

1.2.3.4 Effet dièdre

Le pneumatique et la chaussée forment un coin à l'entrée et à la sortie de l'aire de contact comme illustré sur la figure 1.11. Un phénomène de rayonnement sonore par effet dièdre (*Horn effect* en anglais) se produit dans ces coins. En effet, des phénomènes de réflexion acoustique successifs apparaissent dans le coin formé entre

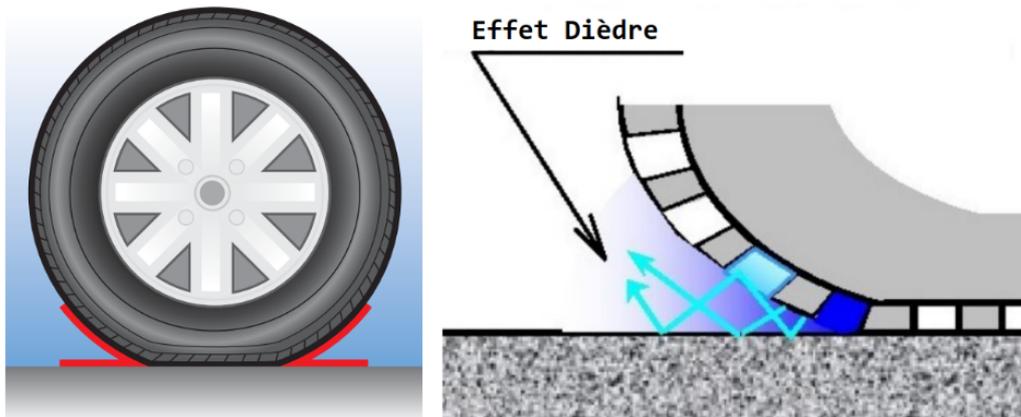


FIGURE 1.11 – Schématisation de l'effet dièdre [Sandberg 2002].

le pneu et le revêtement routier. Ce processus amplifie par conséquent le bruit généré par les autres mécanismes pour les fréquences supérieures à 800 Hz [Heckl 1986]. Le même principe est utilisé dans le fonctionnement d'un mégaphone. L'amplification induite par ce mécanisme dépend de la taille et de la forme du coin. Elle est estimée expérimentalement entre 10 et 20 dB [Graf 2002].

1.2.4 Mécanismes d'atténuation du bruit de roulement

La propagation du bruit de roulement intervient après la génération et l'amplification de celui-ci. Avant la réception de ce bruit par les piétons ou le conducteur, le revêtement de la chaussée absorbe une partie de ce bruit d'une part et le transfère vibratoire entre le pneumatique et la chaussée atténue une partie de ce bruit d'autre part.

1.2.4.1 Absorption de la chaussée

Les revêtements routiers ont une capacité à absorber le bruit émis par le pneumatique. Cette absorption dépend en grande partie de la porosité de la chaussée et sa tortuosité qui représente le chemin emprunté par l'onde acoustique au sein de la structure poreuse. Les vides reliés contenus dans le revêtement absorbent non seulement le bruit de contact pneu-chaussée mais également le bruit de moteur (ce qui est particulièrement intéressant en zone urbaine pour des vitesses faibles où les bruits de moteur sont importants) ainsi que les autres bruits environnants. L'impédance acoustique permet de caractériser les niveaux d'atténuation du bruit par le mécanisme d'absorption. Elle définit le niveau de pression acoustique généré par la vibration de l'air à une fréquence donnée. La porosité de la chaussée permet dans ce cas de baisser l'impédance acoustique de celle-ci.

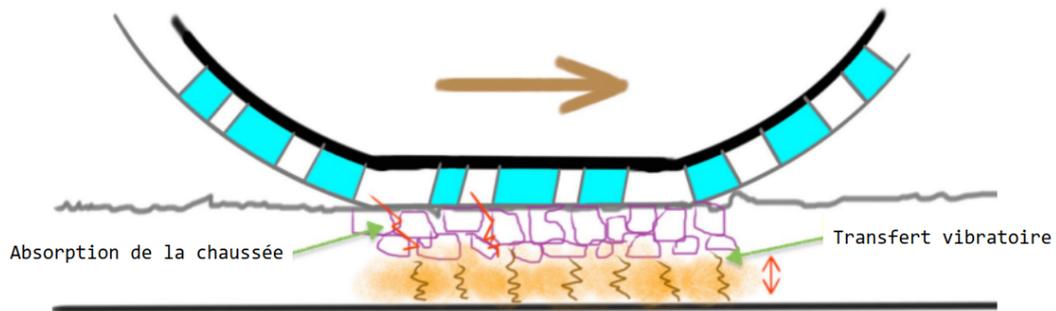


FIGURE 1.12 – Schématisation des mécanismes d’atténuation du bruit de roulement [Li 2019].

1.2.4.2 Transfert vibratoire

L’impédance mécanique est une mesure de la résistance opposée au mouvement par une structure soumise à une force périodique donnée. Celle-ci caractérise le transfert des vibrations entre le pneumatique et la chaussée. Si l’impédance mécanique de la chaussée est largement supérieure à celle du pneumatique, les vibrations restent emmagasinées dans le pneu et vont générer par conséquent du bruit. Par contre, si l’impédance mécanique de la chaussée est comparable à celle du pneumatique, un transfert de l’énergie vibratoire vers la chaussée se fait. Ce transfert permet qu’une partie des vibrations soit absorbée par la chaussée, atténuant ainsi le bruit de roulement.

1.3 Paramètres influant sur le bruit de roulement

Le bruit de roulement résulte de l'interaction entre le pneumatique et la chaussée. Les propriétés de ces deux derniers ont naturellement une influence importante sur les mécanismes associés au bruit de roulement. Cependant, les conditions de roulage, plutôt liées à la conduite du pilote, et les conditions météorologiques (température, pluie, vent...) impactent significativement le bruit de roulement. Une présentation non-exhaustive des paramètres ayant une influence sur le bruit de roulement est effectuée dans cette partie. Le lecteur pourra se référer à [Sandberg 2002, Li 2018b] afin d'avoir une description plus complète.

1.3.1 Les conditions de roulage

Les conditions de roulage correspondent aux paramètres du régime du roulage des pneumatiques. Elles concernent principalement la vitesse, les couples moteur et de freinage, la charge et la pression de gonflage. Ces paramètres ont une influence significative sur les mécanismes du bruit de roulement.

• La vitesse de roulage

La vitesse de roulage est considérée comme le paramètre opérationnel ayant la plus grande incidence sur le bruit de roulement étant donné son impact sur la quasi-totalité des mécanismes de génération et d'amplification. La relation entre la vitesse et les niveaux de bruit est estimée expérimentalement par [Dare 2013] :

$$L = 10n \log V + b \quad (1.6)$$

L est le niveau de pression acoustique [dB], V est la vitesse d'avancement [km/h], b est un coefficient qui dépend du pneumatique et n est l'exposant de la vitesse qui dépend du mécanisme de génération du bruit de roulement. Une estimation des valeurs de n est donnée dans le tableau 1.1.

Mécanisme	Exposant de la vitesse n
Impact de la sculpture	2.0-3.0
Impact de la chaussée	3.0-3.5
Stick-Slip	3.0-5.0
Stick-Snap	3.0-5.0
Pompage d'air	4.0-5.0

TABLE 1.1 – Estimation des exposants de vitesse n pour les mécanismes de génération de bruit [Kuijpers 2001].

L'impact de la vitesse sera étudié en détails dans le chapitre 4 dédié à la simulation de la réponse vibratoire des pneumatiques.

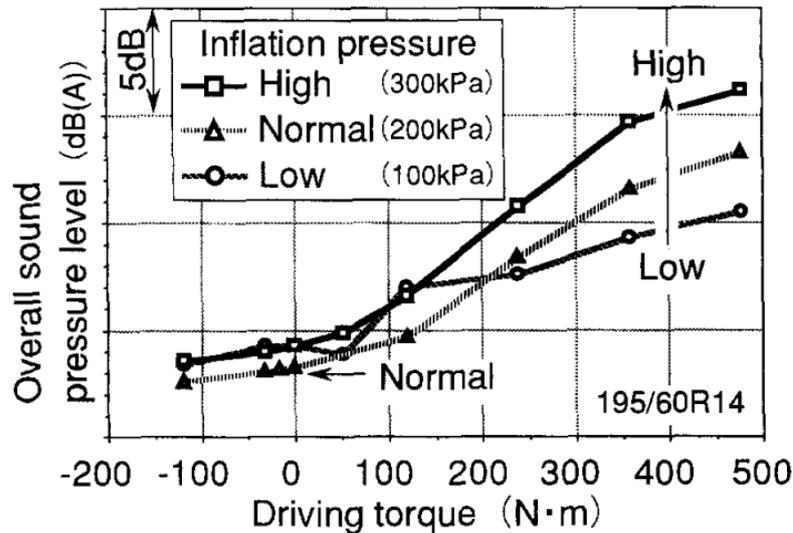


FIGURE 1.13 – Évolution du bruit de roulement en fonction du couple moteur et de la pression de gonflage [Iwao 1996].

- **La charge**

La charge portée par le pneumatique a une influence non négligeable sur le bruit de roulement étant donné qu'elle détermine en grande partie la taille de la zone de contact. Cette dernière s'élargit avec l'augmentation de la charge et induit généralement une croissance du bruit de roulement. Par exemple, un doublement de la charge des pneus tourisme peut augmenter les niveaux sonores de 1-2 dB si la pression de gonflage est ajustée et de 0.7-1.5 dB si elle ne l'est pas [Sandberg 2002]. L'impact de la charge sera revu en détails dans le chapitre 4.

- **La pression de gonflage**

La pression de gonflage impacte le bruit de roulement de la même façon que la charge étant donné que celle-ci influence la forme et la taille de la zone du contact. De plus, l'augmentation de la pression de gonflage rigidifie la nappe carcasse et modifie par conséquent les fréquences de résonance du pneumatique. D'autre part, la variation de la fréquence de résonance acoustique de la cavité par rapport à la pression de gonflage est marginale [Li 2018b].

L'influence de la pression de gonflage est surtout accentuée en phase d'accélération comme illustré sur la figure 1.13 contrairement en roulage à vitesse constante où elle devient plus ou moins négligeable.

1.3.2 Le pneumatique

Les différentes propriétés mécaniques du pneumatique ont une influence significative sur le bruit de roulement étant donné qu'elles déterminent sa réponse à

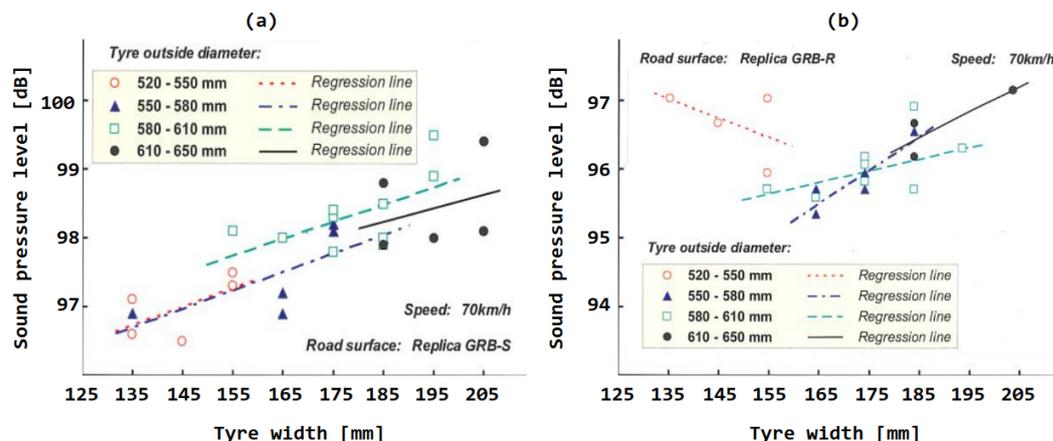


FIGURE 1.14 – Influence de la largeur du pneumatique sur le bruit de roulement sur un sol lisse (a) et sur un sol rugueux (b) [Sandberg 2002].

l'interaction avec le revêtement de la chaussée. L'effet des dimensions géométriques (largeur, diamètre) et de la sculpture est particulièrement important et est discuté dans cette partie. Les propriétés matériaux de la bande de roulement et des flancs, l'usure, et la structure de la ceinture et de la carcasse peuvent aussi avoir un impact plus ou moins important sur le bruit de roulement [Sandberg 2002].

• Les dimensions géométriques

Les mesures expérimentales montrent que la croissance de la largeur de la bande de roulement engendre une augmentation des niveaux de bruit de roulement comme illustré sur la figure 1.14. En effet, la quantité d'air comprimé dans la zone de contact (pompage d'air) et la taille des coins d'air (effet dièdre) situés aux frontières de l'aire de contact augmentent avec la largeur du pneumatique. D'autre part, la quantité de matière qui impacte la chaussée s'accroît aussi avec la largeur. Le bruit de roulement d'origine solidienne est par conséquent amplifié.

Il est un peu plus difficile d'établir une tendance claire entre le bruit de roulement et le diamètre du pneumatique comme exposé sur les mesures expérimentales de la figure 1.15. L'accroissement du diamètre augmente les bruit de roulement sur un sol lisse et l'effet inverse est observé sur un sol rugueux. L'angle d'attaque du pneumatique schématisé sur la figure 1.16 qui est inversement proportionnel au diamètre du pneumatique peut expliquer cette tendance.

L'augmentation des niveaux de bruit sur un sol lisse peut s'expliquer par une amplification de l'effet de dièdre puisque la diminution de l'angle d'attaque induit une ouverture plus progressive des coins d'air à l'entrée et à la sortie de la zone de contact. D'autre part, les sols rugueux favorisent généralement les mécanismes d'impact de la sculpture. Un grand angle d'attaque engendre un impact abrupt contrairement aux faibles angles d'attaque où la déformation se fait d'une façon graduelle. Ceci explique l'atténuation du bruit de roulement engendrée par l'élargissement du diamètre.

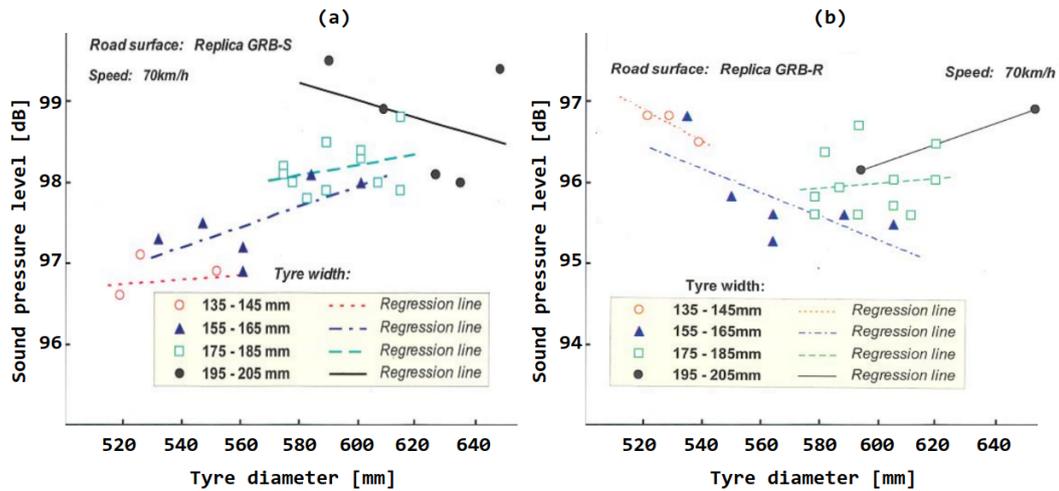


FIGURE 1.15 – Influence du diamètre du pneumatique sur le bruit de roulement sur un sol lisse (a) et sur un sol rugueux (b) [Sandberg 2002].

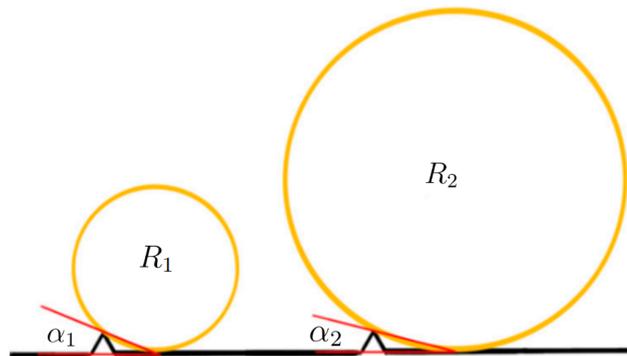


FIGURE 1.16 – Les angles d'attaque des pneumatiques ayant des rayons géométriques différents ($R_1 < R_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$).

• La sculpture

Le rôle principal de la sculpture de la bande de roulement est d'assurer un niveau d'adhérence acceptable en temps pluvieux. Cependant, les mécanismes de génération et d'amplification du bruit de roulement montrent que la sculpture a un impact significatif sur celui-ci. D'ailleurs, la randomisation et la ventilation de la sculpture sont considérées comme des solutions efficaces et faciles à mettre en oeuvre permettant la réduction du bruit de roulement.

La *randomisation* consiste à jouer sur la distribution et la taille des motifs de la sculpture. Le motif est défini comme l'élément de base d'une sculpture qui est constituée en le dupliquant dans la direction circonférentielle. Une sculpture construite à partir d'une distribution uniforme de motifs identiques va générer un pic de bruit concentré autour d'une seule fréquence définie par la taille du motif. Ce bruit tonal est considéré comme une nuisance sonore. La randomisation s'effectue en variant

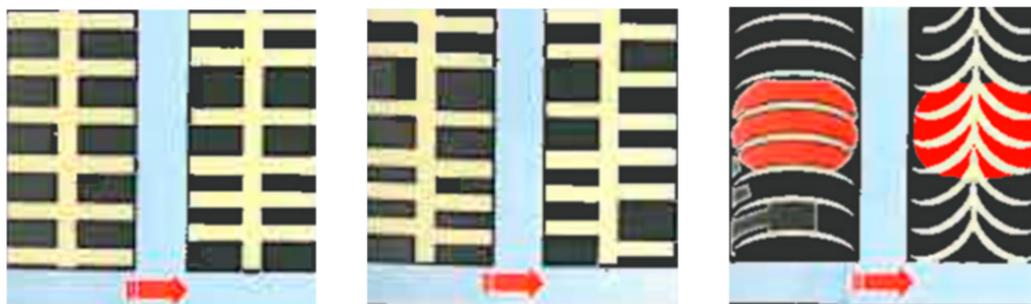


FIGURE 1.17 – Illustrations des exemples de randomisation [Sandberg 2002].

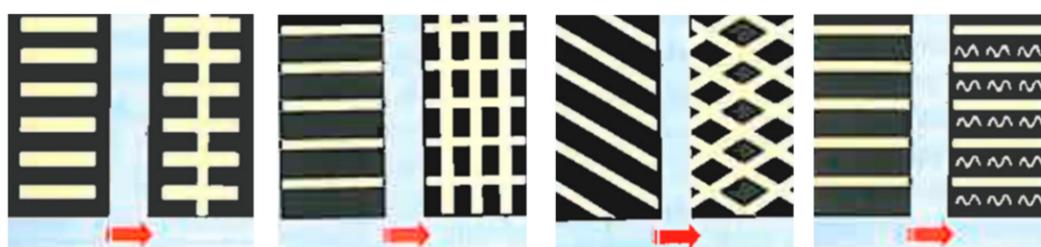


FIGURE 1.18 – Illustrations des exemples de ventilation [Sandberg 2002].

la distribution, la taille des motifs, le décalage entre les composantes du motif (rib shifting) ou l'inclinaison des rainures de la sculpture (figure 1.17). Ces opérations engendrent une baisse du pic sonore en élargissant la gamme fréquentielle du bruit.

La *ventilation* de l'air dans la zone de contact permet d'atténuer le pompage d'air et la résonance des sillons puisque ces deux mécanismes nécessitent que l'air reste piégé dans des poches fermées et formées par la sculpture. Le concepteur des pneumatiques peut alors dessiner des ouvertures d'échappement dans la sculpture avec l'air ambiant d'autant plus que cela permet d'assurer un drainage efficace du sol mouillé qui reste la fonction principale de la sculpture.

La figure 1.18 illustre quelques exemples de ventilation de sculptures de bande de roulement. Elle s'effectue principalement en rajoutant des rainures dans les directions circonférentielle ou latérale ou en insérant des lamelles sur les pains de gommes.

1.3.3 La chaussée

La chaussée est une structure complexe composée de plusieurs couches. Chacune de ces couches est réalisée à l'aide de différents matériaux hétérogènes (souvent des mélanges de granulats et de bitume assurant la cohésion). Les caractéristiques des revêtements de chaussée jouent un rôle primordial dans la génération du bruit de roulement. La texture, la porosité et la rigidité du revêtement sont considérées comme les paramètres les plus influents sur ce bruit [Anfosso Ledee 2019]. Leur impact sur celui-ci est étudié dans cette partie.

- **La texture**

La texture d'une chaussée caractérise la répartition, la taille et les profondeurs des irrégularités présentes sur la surface. Cette rugosité est évaluée par des mesures profilométriques grâce à des capteurs sans contact (généralement avec un profilomètre laser). Dans ce sens, l'amplitude z du profil est définie comme l'altitude par rapport à une surface moyenne et est caractérisée par une fonction stationnaire et aléatoire qui dépend de la position longitudinale x dans la direction de roulement :

$$z = z(x) \quad (1.7)$$

La transformée de Fourier Z de z par rapport à la position x permet de définir une fréquence spatiale ν et une longueur d'onde $\lambda = 1/\nu$. Le contenu spectral de cette dernière sert alors à caractériser les différentes échelles de texture ainsi que leur influence sur le bruit de roulement, l'adhérence et la résistance de roulement comme exposé sur la figure 1.19.

$$Z(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(x)e^{i2\pi\nu x} dx \quad (1.8)$$

- La *microtexture* ($\lambda < 0,5mm$) a une incidence significative sur les mécanismes d'impact et de stick-slip et conditionne principalement le bruit à hautes fréquences.

- La *macrotecture* ($0,5mm < \lambda < 50mm$) correspond à une échelle du même ordre de grandeur que celui des rainures de la sculpture de la bande de roulement. Cette échelle de rugosité a principalement une influence sur le bruit généré par le mécanisme d'impact.

- La *mégatexture* ($50mm < \lambda < 5000mm$) sollicite les vibrations du pneumatique en basses fréquence et atténue les mécanismes aérodynamiques puisque celle-ci favorise la formation de cavités permettant l'évacuation de l'air dans la zone de contact.

- **La porosité**

La porosité de la chaussée est définie comme la proportion du volume d'air sur le volume total du matériau. Celle-ci est considérée comme un paramètre important de réduction de bruit généré par les différents mécanismes cités auparavant [Donavan 2014]. Le bruit généré par le pompage d'air est fortement réduit étant donné que les pores du revêtement permettent une évacuation de l'air comprimé dans l'aire de contact. La résonance des sillons et de Helmholtz et l'effet dièdre sont aussi atténués grâce aux connectivités entre les pores. D'autre part, la réduction de la zone de contact engendrée par la porosité permet aussi d'atténuer les vibrations générées par le stick-slip et le stick-snap.

- **La rigidité de la chaussée**

L'influence de la rigidité de la chaussée sur le bruit de roulement est notable puisque le transfert vibratoire entre le pneumatique et la chaussée est principalement

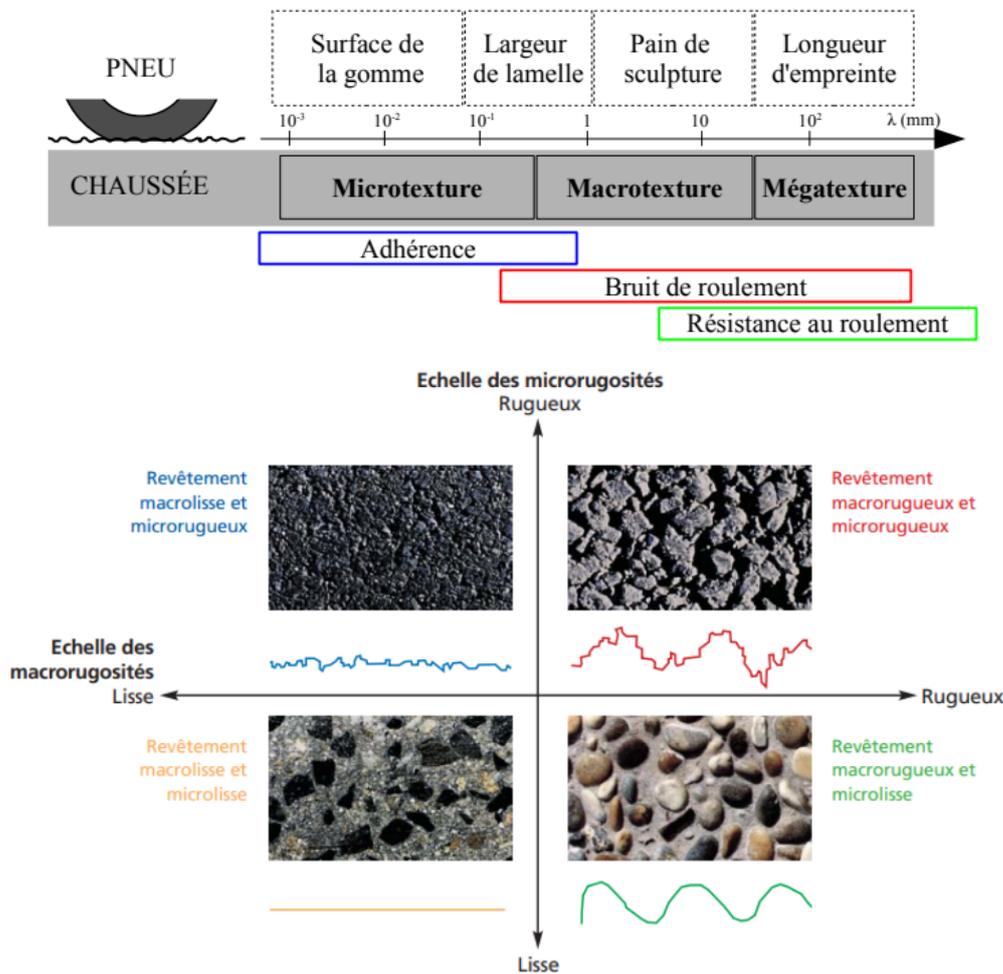


FIGURE 1.19 – Les différentes échelles de texture [Cesbron 2007].

déterminé par le rapport entre l'impédance mécanique de ces deux derniers comme exposé précédemment. Par exemple, les chaussées en béton de ciment sont beaucoup plus bruyantes que les chaussées en béton bitumineux à iso-texture. D'autre part, les mesures expérimentales montrent que l'addition dans le mélange bitumineux d'une proportion plus ou moins grande de copeaux de gomme ou de poudre de caoutchouc réduit significativement le bruit de roulement (jusqu'à 12 dB) [Świczko 2018]. Ce mélange peut être mis en place avec les caoutchoucs récupérés des pneus usés et présente alors un énorme potentiel de recyclage des pneumatiques. Par ailleurs, les particules générées par l'usure des pneumatiques est aussi réduite étant donné la faible abrasivité des revêtements proélastiques [Piotr 2019].

1.4 Simulation du bruit de roulement

La simulation du bruit de roulement a fait l'objet de plusieurs travaux dont le nombre a connu une grande augmentation au début des années 2000 [Li 2018c]. La modélisation de la réponse vibratoire du pneumatique demeure cruciale dans ce sens. Deux classes de modèles de pneumatiques peuvent être distinguées et seront présentées dans un premier temps. Ensuite, les phénomènes non-linéaires inhérents à la dynamique des pneumatiques sont détaillés. La formulation ALE est introduite étant donné son adaptabilité dans le calcul de la réponse vibratoire. Enfin, le problème de rayonnement acoustique est succinctement présenté afin de compléter le cadre de la simulation du bruit de roulement extérieur d'origine solidienne.

1.4.1 Modèles du pneumatique

La première classe des modèles de pneumatique correspond aux modèles phénoménologiques dont le majeur avantage est la possibilité de calculer des solutions analytiques. Le modèle d'anneau circulaire développé par Böhm [Böhm 1966] est l'un des modèles les plus étudiés dans la littérature. Il consiste à représenter le pneumatique par une poutre circulaire d'Euler-Bernoulli [Pahlevani 2018] ou de Timoshenko [Vu 2014] et de modéliser les flancs par des ressorts et des amortisseurs dans la direction radiale et orthoradiale (figure 1.20.a). Les résultats obtenus avec ce modèle sont pertinents en basses fréquences (< 400 Hz) et permettent notamment d'étudier l'effet de la rotation et de la pression de gonflage sur la réponse vibratoire [Meftah 2011]. Un deuxième modèle analytique consiste à représenter la ceinture et les flancs du pneumatique par des plaques orthotropes ayant des lois de comportement différentes [Kropp 1999] (figure 1.20.b). La solution du modèle de la plaque orthotrope est calculée analytiquement avec les fonctions de Green. Ce modèle donne des tendances plus ou moins similaires à celles observées expérimentalement en basses fréquences (< 1500 Hz). La plus grande difficulté réside dans le choix des paramètres matériaux des plaques. Les modèles phénoménologiques sont adaptés à des études rapides de pré-dimensionnement ou des analyses de sensibilité étant donné leur faible coût en terme de temps de calcul.

Les modèles analytiques restent incapables de décrire l'intégralité de la réponse vibratoire des pneumatiques étant donné la complexité de la géométrie et les matériaux de ceux-ci. Les modèles numériques permettent d'intégrer plus de complexité dans la modélisation. Ils sont davantage utilisés dans les applications industrielles grâce à la montée en puissance des machines de calcul. Dans ce sens, la méthode des éléments finis permet notamment de résoudre les équations de mouvement sur des géométries complexes (figure 1.20.c) en prenant en considération les phénomènes non-linéaires inhérents à la mécanique du pneumatique. D'ailleurs, la formulation ALE appliquée dans le cadre de la méthode des éléments finis permet de développer un formalisme adapté à la simulation du bruit de roulement qui sera présenté par la suite.

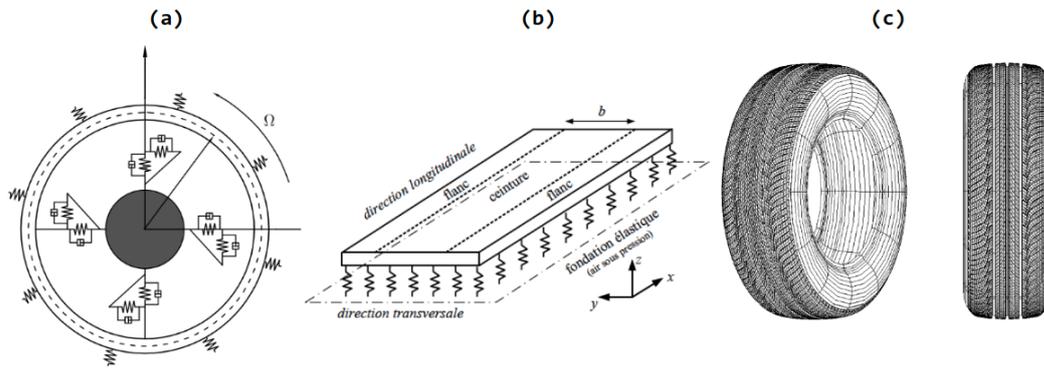


FIGURE 1.20 – Schématisation des modèles des pneumatiques - (a) Anneau circulaire - (b) Plaque orthotrope de Kropp - (c) Modèle éléments finis.

1.4.2 Types de non-linéarités

Le pneumatique est une structure industrielle de haute technicité régie par une physique complexe. De par sa structure composite et la nature des matériaux dont il est fait, il relève d'une mécanique fortement non-linéaire, hétérogène et anisotrope. Cette mécanique opère dans un cadre de grandes déformations sous l'effet de sollicitations multiples. La simulation de la réponse dynamique du pneumatique nécessite alors la prise en compte de plusieurs non-linéarités. Chacune de ces dernières demande un traitement numérique spécifique.

• Non-linéarité géométrique

La non-linéarité géométrique apparaît dans le cadre des grands déplacements / rotations et des grandes déformations. En effet, la configuration initiale et déformée ne peuvent plus être confondues comme dans le cadre de l'élasticité linéaire. Par exemple, un pneu qui s'aplatit au contact de la route subit une déformation significative par rapport à sa forme circulaire initiale et l'évolution du domaine en fonction de la charge imposée ne peut plus être négligée. Le traitement de cette non-linéarité nécessite l'utilisation d'une formulation lagrangienne totale. Celle-ci consiste à écrire les équations de mouvement sur la configuration initiale. Cette formulation sera détaillée dans le chapitre 2.

• Non-linéarité matérielle

La non-linéarité matérielle correspond aux phénomènes non-linéaires inhérents à loi de comportement reliant les contraintes aux déformations. Les nappes du pneumatique et la bande de roulement sont composés de mélanges de caoutchoucs naturels et synthétiques. Ce mélange a une loi de comportement visco-hyperélastique non linéaire. La formulation mathématique de ce type de lois de comportement est abordée dans le chapitre 2 en mentionnant des modèles utilisés dans la simulation du comportement des caoutchoucs des pneumatiques.

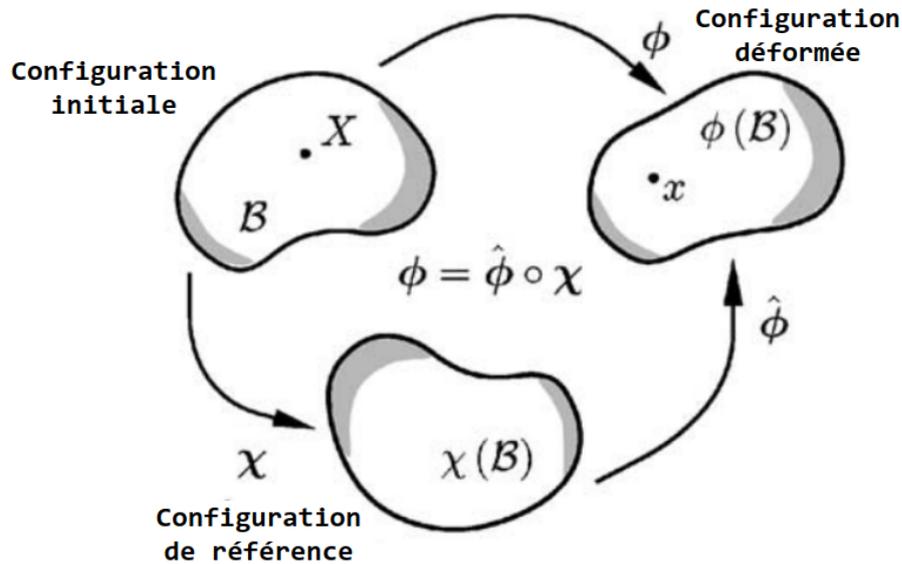


FIGURE 1.21 – La décomposition ALE [Nackenhorst 2004].

- **Non-linéarité de conditions aux limites**

La non-linéarité de conditions aux limites correspond aux problèmes de contact mécanique et aux phénomènes de frottement. L'interaction entre le pneumatique et la chaussée joue un rôle déterminant dans l'estimation des performances du pneumatique (adhérence, résistance au roulement, usure, bruit...). La simulation de la réponse dynamique du pneumatique nécessite par conséquent une bonne modélisation du contact avec la chaussée. Le chapitre 3 est consacré à l'introduction à la mécanique du contact et les techniques numériques utilisées dans la résolution des problèmes de contact.

1.4.3 Formulation ALE

La formulation arbitrairement lagrangienne-eulérienne (ALE) consiste à décomposer la cinématique du solide en une rotation rigide et sa déformation. Les équations de mouvement sont alors écrites sur une configuration de référence définie comme l'image de la configuration initiale donnée par la rotation rigide comme illustré sur la figure 1.21. La description de la rotation est effectuée avec une approche eulérienne tandis que la description de la déformation est réalisée avec une approche lagrangienne. La formulation ALE est introduite dans [Hughes 1981] comme une approche de description des problèmes de couplage fluide-structure.

L'observateur ALE est attaché à l'axe de rotation du pneumatique et visualise la déformation des points spatiaux de la configuration de référence contrairement à l'observateur lagrangien qui suit le mouvement des particules matérielles de la configuration initiale. Cette formulation permet de calculer facilement la configura-

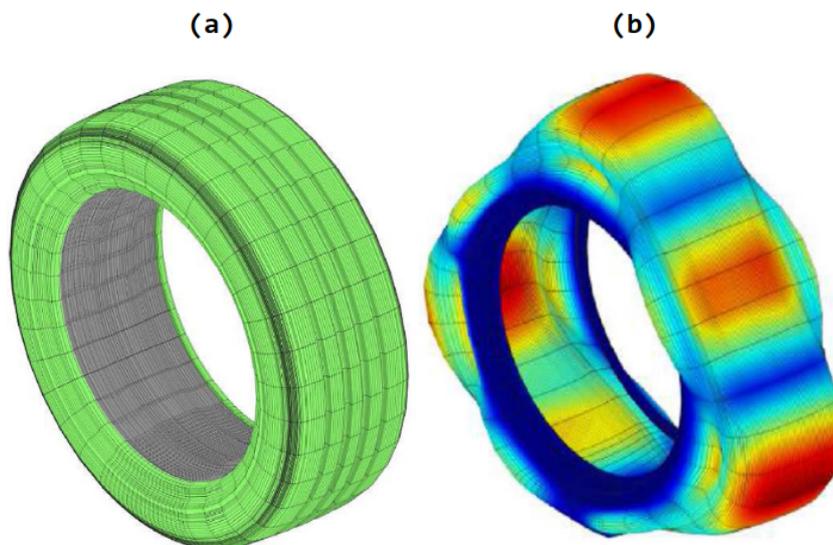


FIGURE 1.22 – Maillage ALE et une déformée modale [Gregoriisab 2019].

tion du roulage stationnaire des pneus axisymétriques en transformant les dérivées temporelles par des opérateurs gradient. Un autre avantage majeur de cette formulation est de mailler finement le voisinage de la zone de contact (à priori connu) et de conserver un maillage grossier sur le reste de la structure (figure 1.22.a). Ce maillage permet de gagner en temps de calcul sans perdre en précision par rapport à une approche lagrangienne classique.

La formulation mathématique et les techniques numériques associées au roulage stationnaire peuvent être trouvées dans [Nackenhurst 2004, Rahier 1991]. La réponse vibratoire générée par l'excitation de la rugosité de la chaussée peut être calculée avec la superposition modale (figure 1.22.b) en perturbant la configuration stationnaire. Cette stratégie numérique est par exemple utilisée pour simuler l'influence de la chaussée sur le bruit de roulement [Diaz 2016, Gregoriisab 2019]. Cette formulation reste valable que pour les pneus axisymétriques et s'avère par conséquent inapplicables sur les pneus sculptés. L'homogénéisation de la sculpture de la bande de roulement et des nappes de l'architecture du pneumatique [Beyer 2016, Krmela 2016] apparaît comme une solution pour utiliser la formulation ALE sur des pneus sculptés. Cependant, la mise en place d'un opérateur d'homogénéisation adapté aux problèmes de simulation de bruit extérieur n'est pas évidente.

1.4.4 Rayonnement acoustique

Le bruit de roulement généré par les vibrations solidiennes du pneumatique est calculé en résolvant le problème de rayonnement acoustique schématisé sur la figure 1.23. En ce sens, la vitesse des vibrations sur la frontière représente la condition aux limites du problème acoustique [Brinkmeier 2007]. Soit \mathbf{B} un solide vibrant sur le plan S_R . La surface du solide est notée S_N .

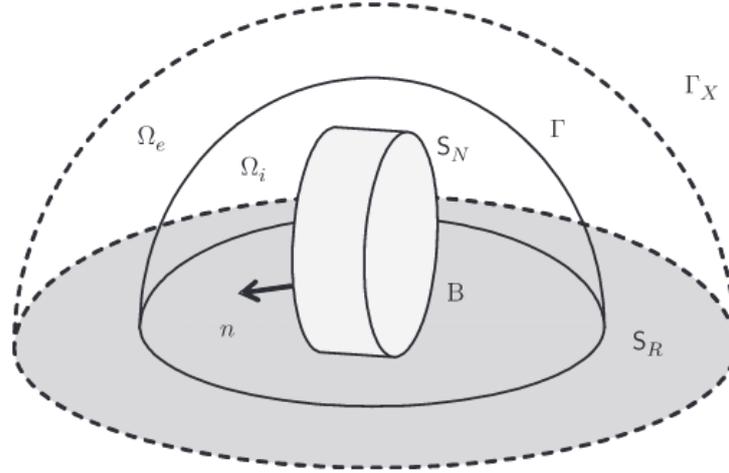


FIGURE 1.23 – Problème de rayonnement acoustique [Brinkmeier 2007].

La composante harmonique de la pression acoustique p associée à la fréquence ω dans les domaines Ω_i et Ω_e est la solution du problème de Helmholtz suivant :

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.9)$$

$k = \omega/c$ est le nombre d'onde et c est la vitesse de propagation de l'onde. Soit \mathbf{n} la normale des surfaces S_R et S_N . Les conditions aux limites harmoniques imposées sont données par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= -i\omega\rho v_n \text{ sur } S_N \\ \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} &= -i\alpha k p \text{ sur } S_R \end{aligned} \quad (1.10)$$

v_n est la vitesse normale définie sur la frontière du solide vibrant, ρ est la densité du fluide et α est le coefficient d'absorption du plan S_R . Une condition de Sommerfeld peut être appliquée sur la frontière Γ_X ou une couche PML [Johnson 2021] peut être ajoutée afin d'éviter les phénomènes de réflexion d'ondes et simuler la propagation dans un domaine infini. Une stratégie de discrétisation adaptée pour le problème de rayonnement acoustique consiste à utiliser la méthode des éléments finis dans le domaine Ω_i et d'utiliser la méthode des éléments infinis dans le domaine Ω_e [Autrique 2006].

Le problème de rayonnement acoustique présenté permet de simuler le bruit de roulement généré par les mécanismes d'origine solidienne. La prise en compte des mécanismes aérodynamiques de génération et d'amplification du bruit de roulement exige l'utilisation des techniques de simulation associées à la mécanique des fluides. Le lecteur intéressé par ces aspects de simulation peut consulter les ouvrages [Conte 2008, Wang 2018] pour plus de détails.

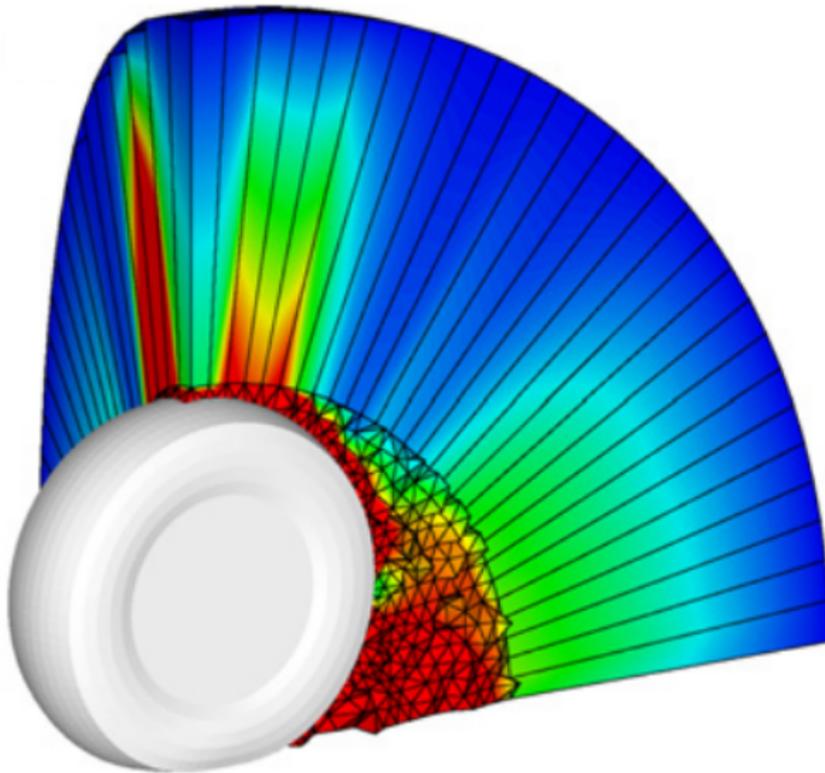


FIGURE 1.24 – Résultat de la simulation du rayonnement acoustique [Brinkmeier 2007].

1.5 Conclusion

L'étude bibliographique du bruit de roulement proposée dans ce chapitre démontre la complexité de la modélisation complète de celui-ci. En effet, elle nécessite l'intégration des différents phénomènes physiques exposés auparavant et schématisés sur la figure 1.25. L'impact mécanique de la bande de roulement sur la chaussée et le pompage d'air sont considérés comme les principaux mécanismes de génération du bruit de roulement. Ce dernier est amplifié par les phénomènes de résonance dus aux effets géométriques du roulage (coins d'air, sillons). Les conditions de roulage et les propriétés des pneumatiques et du revêtement de la chaussée ont un impact significatif sur le bruit de roulement. Les différentes approches de simulation de la réponse dynamique du pneumatique ont été exposées et complétées avec la présentation succincte du problème de rayonnement acoustique. Ce projet de thèse s'intéresse à la modélisation par éléments finis d'une partie du bruit de roulement. Celle-ci correspond à la réponse vibratoire induite par l'excitation de la sculpture de la bande de roulement (brique rouge de la figure 1.25).

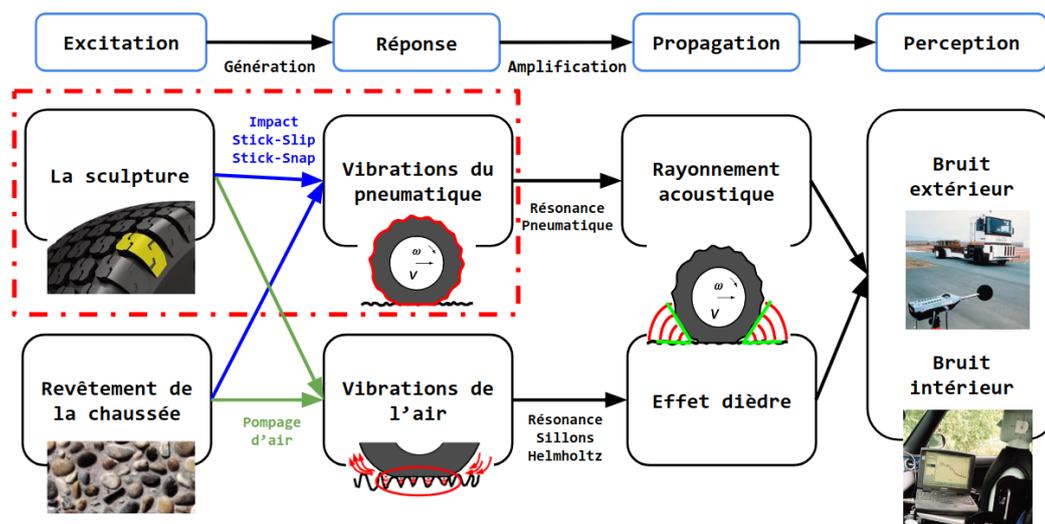


FIGURE 1.25 – Schématisation des différents aspects du bruit roulement.

Éléments de la mécanique des milieux continus

Sommaire

2.1	Introduction	34
2.2	Notions de la théorie de la MMC	35
2.2.1	Référentiel	35
2.2.2	Configurations du système	35
2.2.3	Description lagrangienne	35
2.2.4	Description eulérienne	36
2.3	Cinématique	37
2.4	Contraintes	41
2.5	Loi de comportement	42
2.5.1	Hyperélasticité	42
2.5.2	Viscoélasticité	45
2.6	Équations d'équilibre en grandes transformations	48
2.6.1	Conservation de la masse	48
2.6.2	Conservation du moment linéaire	49
2.6.3	Conservation du moment angulaire	50
2.6.4	Formulation forte des équations d'équilibre	50
2.7	Méthode des éléments finis	52
2.7.1	Formulation faible des équations d'équilibre	52
2.7.2	Discrétisation spatiale	53
2.7.3	Résolution des équations de mouvement	57
2.8	Intégration temporelle	59
2.8.1	Méthode d'Euler	61
2.8.2	Méthode de Newmark	61
2.9	Conclusion	65

2.1 Introduction

Le concept de milieu continu est une modélisation physique macroscopique issue de l'expérience courante. Sa validité est déterminée suivant la nature des problèmes abordés et en fonction de l'échelle des phénomènes étudiés. La formulation mathématique de ce concept consiste à représenter un système mécanique par un volume composé de particules. L'état géométrique de ces particules est caractérisé par la seule connaissance de leur position comme dans le cas de la mécanique du point. La perception intuitive de la continuité du milieu se réfère à l'évolution du système dans lequel des particules initialement voisines restent voisines.

Ce chapitre est consacré à une introduction succincte des concepts de la mécanique des milieux continus avec les formulations mathématiques associées. Le cadre de l'hyperélasticité est détaillé et complété avec la mise en équation du modèle viscoélastique. Les principes de conservation sont abordés et manipulés pour mettre en place les équations de mouvement. Ensuite, la méthode des éléments finis permettant la discrétisation spatiale du problème continu est exposée. Enfin, la méthode de l'intégration temporelle utilisée dans la recherche de solutions temporelles est présentée. Les différents concepts et techniques numériques introduits dans ce chapitre seront employés dans la mise en place de la méthodologie proposée dans ce travail de thèse.

2.2 Notions de la théorie de la MMC

Cette première partie sert à poser les premières notions utiles à la description de la dynamique d'un milieu continu. Dans un premier temps, le concept de référentiel permettant de suivre l'évolution d'un système est introduit. Ensuite, la notion de configuration du système est définie et s'avère utile dans le cadre des grandes transformations. Enfin, les descriptions lagrangienne et eulérienne utilisées pour suivre l'évolution d'un milieu continu sont présentées.

2.2.1 Référentiel

La formulation mathématique des concepts de la mécanique des milieux continus nécessite la description et le repérage du système étudié tout au long de son évolution temporelle. La notion de référentiel permet justement à mettre en place cette description en introduisant le concept d'observateur. Une chronologie est d'abord fixée comme l'échelle du temps valable pour tous les observateurs. Le référentiel est alors défini comme l'ensemble des points de l'espace euclidien animés du mouvement de corps rigide de l'observateur. Le référentiel, noté \mathcal{R} , est dit lié à l'observateur. Afin de repérer les positions spatiales des particules du système dans un référentiel \mathcal{R} , un repère R d'origine O est utilisé. Ce repère, animé du mouvement de corps rigide du référentiel \mathcal{R} , peut être considéré comme matérialisant \mathcal{R} . Dans un référentiel \mathcal{R} , changer le repère R pour le repère R' consiste à effectuer une transformation de coordonnées sur les composantes des grandeurs (vecteurs ou tenseurs) utilisées dans la description du mouvement du système.

2.2.2 Configurations du système

L'état du système \mathcal{S} à l'instant t dans un référentiel \mathcal{R} est appelé configuration de ce système. Cette configuration est désignée de façon générique par la configuration actuelle. Cette dernière est décrite par l'ensemble des positions repérées dans le référentiel \mathcal{R} de ses particules. Le volume occupé par cette configuration est noté Ω^t de frontière $\partial\Omega^t$. Les coordonnées des particules de cette configuration sont désignées par \mathbf{x} .

La configuration du système mécanique à un instant t_0 fixé est appelée configuration de référence. L'instant t_0 est souvent choisi comme l'instant initial $t_0 = 0$. Dans ce cas, la configuration de référence pourra aussi être appelée configuration initiale. Cette configuration occupe un volume Ω de frontière $\partial\Omega$. Les coordonnées des particules de cette configuration sont désignées par \mathbf{X} .

2.2.3 Description lagrangienne

La description lagrangienne ou matérielle consiste à identifier les particules constitutives du système par leur position géométrique dans la configuration de référence. La valeur de toute grandeur physique dans la configuration actuelle est

alors exprimée en fonction de la position de la particule dans la configuration de référence et de l'instant actuel. Ainsi, le vecteur position \mathbf{x} de la particule située initialement en \mathbf{X} est donné par

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t) \tag{2.1}$$

Cette description est adaptée à la mécanique des solides en grandes déformations puisque la configuration de référence ne plus être confondue avec la configuration déformée comme dans le cadre de l'élastodynamique linéaire. Elle sera par conséquent retenue pour la suite.

2.2.4 Description eulérienne

La description eulérienne ou spatiale consiste à étudier le mouvement d'un milieu continu à l'intérieur d'un volume géométrique donné. En effet, cette description se place sur la configuration actuelle et les variables spatiales qui y apparaissent ont une signification purement géométrique. Un point géométrique occupant la position \mathbf{x} à l'instant t a pour vitesse $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$. La détermination du champ des vitesses dans le volume considéré aux différents instants est le problème à résoudre. Le champ de vitesse n'est pas la seule inconnue à déterminer puisque la masse volumique et la contrainte peuvent aussi varier à l'intérieur du volume étudié. Cette description est plus souvent utilisée dans les problèmes de mécanique des fluides car elle permet de calculer facilement la variation spatiale d'une propriété du fluide au temps t . Les descriptions lagrangienne et eulérienne sont équivalentes.

2.3 Cinématique

Cette section est consacrée à la description mathématique de la déformation d'un solide dans l'intervalle $[0, T]$ dont l'intérieur de sa configuration de référence est noté Ω . L'adhérence $\bar{\Omega}$ coïncide avec le domaine occupé par la structure au temps $t = 0$. Une description lagrangienne est utilisée afin de traiter la non linéarité géométrique. Les grandeurs cinématiques sont alors décrites par rapport aux points matériels de la configuration de référence. La position d'un point matériel \mathbf{X} est une variable indépendante et la résolution des équations de mouvement consiste alors à trouver la position $\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}$ du point matériel dans la configuration déformée ou bien le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$.

$$\varphi : \begin{cases} \Omega \times [0, T] \rightarrow \Omega^t \\ (\mathbf{X}, t) \mapsto \varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} \end{cases} \quad (2.2)$$

À chaque instant $t \in [0, T]$, l'application $\mathbf{X} \mapsto \varphi(\mathbf{X}, t)$ est injective sur Ω pour une raison de non-interpénétration du matériau dans lui-même. Cependant, cette application n'est pas forcément injective sur $\bar{\Omega}$ afin de permettre des phénomènes d'auto-contact.

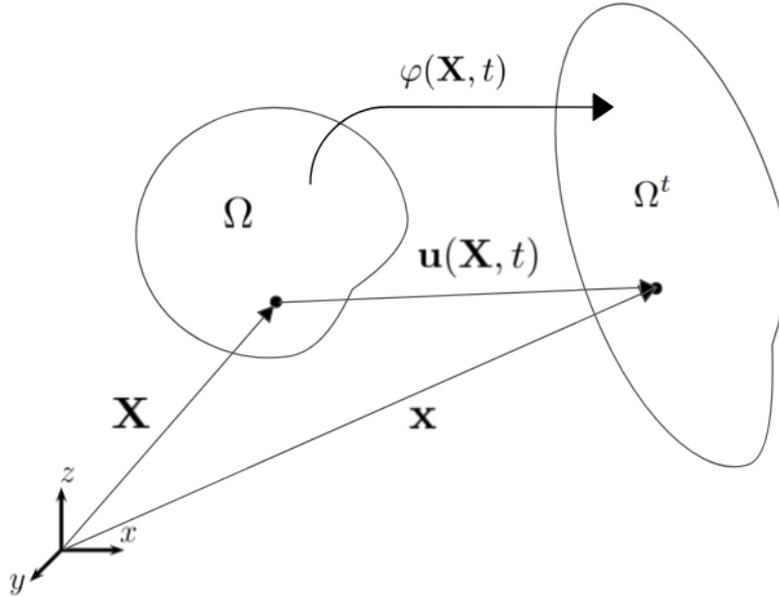


FIGURE 2.1 – Déformation de la configuration de référence Ω .

Le déplacement d'un point matériel est défini par (figure 2.1) :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (2.3)$$

Un tenseur essentiel permettant la description de la déformation du solide dans le contexte de la MMC est le tenseur de gradient de déformation \mathbf{F} . Celui-ci est défini comme la dérivée de la position d'un point de la configuration déformée par

rapport à son antécédent dans la configuration de référence. Le gradient par rapport aux coordonnées de la configuration de référence (respectivement actuelle) est noté $\nabla_{\mathbf{X}}$ (respectivement $\nabla_{\mathbf{x}}$).

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{X}, t) \\ &= \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)\end{aligned}\tag{2.4}$$

\mathbf{I} est le tenseur d'unité d'ordre 2. Ce tenseur permet de suivre la transformation géométrique d'un élément de longueur $d\mathbf{X}$ de la configuration de référence. Sa longueur dans la configuration actuelle est notée $d\mathbf{x}$.

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)d\mathbf{X}\tag{2.5}$$

En plus, la fonction de déformation respecte l'orientation des champs de vecteurs afin d'interdire un retournement du domaine sur lui-même. Ceci permet d'avoir $\det \mathbf{F} > 0$. Cette quantité représente aussi la transformation volumique entre les deux configurations.

$$\begin{aligned}d\Omega^t &= \det \mathbf{F} d\Omega \\ &= J(\mathbf{X}, t)d\Omega\end{aligned}\tag{2.6}$$

L'incompressibilité du matériau peut alors être formulée comme une contrainte cinématique de la façon suivante :

$$\det \mathbf{F} = 1\tag{2.7}$$

D'autre part, le tenseur de déformation permet aussi de suivre la transformation d'un élément surfacique entre les deux configurations selon la formule de Nanson.

$$d\mathbf{\Gamma}^t = J\mathbf{F}^{-\top}d\mathbf{\Gamma}:\tag{2.8}$$

$d\mathbf{\Gamma} = d\mathbf{\Gamma}\mathbf{N}$ (respectivement $d\mathbf{\Gamma}^t = d\mathbf{\Gamma}^t\mathbf{n}$) est un élément surfacique de la configuration de référence (respectivement actuelle) défini par la normale extérieure \mathbf{N} (respectivement \mathbf{n}).

Le théorème de la décomposition polaire permet de séparer la transformation en une rotation rigide et une déformation pure.

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}\tag{2.9}$$

\mathbf{R} est une matrice orthogonale de rotation et \mathbf{U} est un tenseur symétrique défini positif représentant la déformation. Les tenseurs d'allongement à gauche \mathbf{U} ou à droite \mathbf{V} sont déjà deux mesures possibles des grandes déformations qui sont définies directement par la factorisation polaire. Cependant, il est plus pratique d'utiliser d'autres mesures de déformation n'exigeant pas le passage par la décomposition

polaire et le calcul de la matrice de rotation. Dans ce sens, l'orthogonalité du tenseur de rotation permet de construire le tenseur des dilatations de Cauchy noté \mathbf{C} et défini par :

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= \mathbf{F}^T \mathbf{F} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^2\end{aligned}\tag{2.10}$$

Le tenseur des dilatations représente une mesure objective des déformations. En effet, il reste invariant par rapport aux mouvements des corps rigides contrairement au tenseur du gradient de transformation. Le tenseur de dilatation recèle toutes les informations concernant la différence de métrique entre la configuration de référence et la configuration actuelle.

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{C} d\mathbf{X}\tag{2.11}$$

Afin de s'assurer que la mesure de la déformation est nulle pour des transformations rigidifiantes ($\mathbf{C} = \mathbf{I}$), la différence entre le tenseur de dilatation et le tenseur identité est choisie comme mesure de déformation. Ceci permet d'introduire le tenseur de Green-Lagrange noté \mathbf{E} et défini par :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})\tag{2.12}$$

Le tenseur de Green-Lagrange est souvent utilisé en grandes transformations pour mesurer les déformations. Il existe d'autres tenseurs pour décrire les déformations comme le tenseur d'Euler-Almansi qui représente l'équivalent du tenseur de Green-Lagrange en description spatiale. Le tenseur logarithmique est par exemple utilisé dans le cadre des déformations inélastiques.

La vitesse, dans le référentiel \mathcal{R} , de la particule identifiée par sa position \mathbf{X} dans la configuration de référence est calculée à travers la dérivée particulaire. Cette dernière est égale à la dérivée partielle par rapport au temps en description lagrangienne.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)\end{aligned}\tag{2.13}$$

De la même manière, l'accélération de la particule est définie par :

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) &= \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2}(\mathbf{X}, t) \\ &= \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Le calcul de la dérivée particulaire en description eulérienne n'est pas aussi simple que celui en description lagrangienne puisque les grandeurs mécaniques sont définies en fonction des positions géométriques de la configuration actuelle. La dérivée particulaire d'une grandeur $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ défini en description eulérienne est donnée par :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d\mathbf{b}}{dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.15}$$

La formule 2.15 montre que la dérivée particulaire en description eulérienne est la somme de deux contributions. Le premier terme correspond à la variation de la grandeur $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ au point géométrique \mathbf{x} en fonction du temps. Il représente la seule cause de variation de la grandeur si la particule est immobile à l'instant t . Le second terme correspond à la variation de la grandeur $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ due au mouvement de la particule dans le référentiel, c'est-à-dire à son transport convectif. Il constitue la seule cause de variation de la grandeur si le champ est stationnaire à l'instant t . Ce second terme est appelé terme de convection. L'accélération $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ en description eulérienne peut alors être calculée en utilisant la formule 2.15 comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d\mathbf{v}}{dt}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\end{aligned}\tag{2.16}$$

2.4 Contraintes

Le champ des contraintes traduit les efforts de cohésion interne s'exerçant à travers un élément de surface interne et virtuel. Autrement dit, une contrainte actuelle en une particule P ayant \mathbf{x} comme coordonnées sur une facette matérielle $d\Gamma^t$ de normale actuelle \mathbf{n} est définie comme la force surfacique actuelle $\mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$ qui s'exerce en \mathbf{x} sur la frontière de tout sous-domaine passant par P et de normale unitaire extérieure \mathbf{n} . La force élémentaire $d\mathbf{f}$ qui s'exerce sur la surface élémentaire $d\Gamma^t$ de normale \mathbf{n} est définie par :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)d\Gamma^t \quad (2.17)$$

Le théorème de Cauchy, qui consiste à appliquer le théorème de la résultante dynamique à un domaine matériel tétraédrique que l'on fait tendre d'une certaine manière vers un volume nul, prouve l'existence d'un tenseur d'ordre 2 noté $\boldsymbol{\sigma}$ désigné par le tenseur de contraintes de Cauchy et défini par :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \quad (2.18)$$

Le tenseur de Cauchy représente bien les contraintes à l'intérieur de la structure dans la configuration déformée. Les termes diagonaux sont les contraintes normales et les termes hors diagonale représentent les contraintes de cisaillement. La formulation lagrangienne impose la définition des grandeurs mécaniques dans la configuration de référence. La force élémentaire peut être transposée dans la configuration de référence en utilisant la formule de Nanson exposée auparavant.

$$\begin{aligned} d\mathbf{f} &= \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}d\Gamma^t \\ &= J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{N}d\Gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

Ce changement de configuration permet de définir le premier tenseur de Piola-Kirchhoff comme suit :

$$\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top} \quad (2.20)$$

Ce tenseur mixte, mi-lagrangien mi-eulérien, permet ainsi d'associer les efforts de cohésion de la configuration actuelle avec les éléments de surface de la configuration de référence. Cette contrainte est aussi appelée contrainte de l'ingénieur puisque celle-ci est simple d'accès par la mesure. Il est aussi possible de construire un tenseur de contraintes défini purement sur la configuration de référence. En transformant le vecteur d'effort $d\mathbf{f}$,

$$\begin{aligned} d\mathbf{f}_0 &= \mathbf{F}^{-1}d\mathbf{f} \\ &= J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{N}d\Gamma \end{aligned} \quad (2.21)$$

Le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} est alors défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} \\ &= J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-\top} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Contrairement au tenseur de Cauchy, les termes des deux tenseurs de Piola n'ont pas de sens physique étant donné que ceux-ci sont reliés à la configuration de référence.

2.5 Loi de comportement

Les tenseurs utilisés pour caractériser les déformations et les contraintes ont été présentés précédemment. La loi de comportement relie les contraintes avec les déformations. La bande de roulement des pneumatiques est composée d'un mélange de caoutchoucs. Ce type de matériau a un comportement hyperélastique. Sa loi de comportement est définie dans cette partie. Ensuite, la loi de comportement est complétée en introduisant le cadre viscoélastique afin de fournir le cadre complet de la modélisation des lois de comportement des mélanges de caoutchoucs des pneumatiques. Les ouvrages [Le Tallec 1994, Fortin 2020] sont utilisés dans la rédaction de cette section.

2.5.1 Hyperélasticité

Un matériau est dit *élastique* si et seulement si le tenseur des contraintes \mathbf{P} au point \mathbf{X} ne dépend que de \mathbf{X} et du tenseur de gradient de transformation \mathbf{F} . Il existe alors une fonctionnelle \mathcal{T} tel que :

$$\mathcal{T} : (\mathbf{X}, \mathbf{F}) \in \Omega \times \mathbb{M}^+ \mapsto \mathbf{P} = \mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \quad (2.23)$$

Avec $\mathbb{M}^+ = \{\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \det \mathbf{F} > 0\}$. La relation $\mathbf{P} = \mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$ est appelée loi de comportement. Cette loi doit être définie pour chaque point $\mathbf{X} \in \bar{\Omega}$ et pour chaque tenseur de gradient de transformation conservant l'orientation des vecteurs $\mathbf{F} \in \mathbb{M}^+$. Le matériau est dit *homogène* si \mathcal{T} ne dépend pas de la position \mathbf{X} .

Un matériau est dit *hyperélastique* si et seulement si pour toute déformation de la forme :

$$\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{X} + \mathbf{c}(t) \quad \forall (t, \mathbf{X}) \in [0, \tau] \times \Omega$$

et τ -périodique :

$$\varphi(0, \mathbf{X}) = \varphi(\tau, \mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega$$

le travail fourni par le matériau compressible au cours d'une période est nul :

$$\int_0^\tau \int_\Omega \mathcal{T}(\mathbf{X}, F) : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega \, dt = 0$$

Pour un matériau hyperélastique, il existe une fonctionnelle d'énergie emmagasinée $\Psi : \Omega \times \mathbb{M}^+ \mapsto \mathbb{R}$ continûment différentiable par rapport à son deuxième argument, tel que :

$$\mathcal{T}(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}}(\mathbf{X}, \mathbf{F})$$

La démonstration peut être trouvée dans [Le Tallec 1994].

2.5.1.1 Forme indépendante du référentiel

L'énergie élastique doit être indépendante du choix de référentiel. En effet, Ψ ne doit pas dépendre du repère où la déformation est observée. Pour toute rotation $\mathbf{Q} \in SO_3^+$, le changement de variable de φ vers $\mathbf{Q}\varphi$ ne doit pas altérer la valeur de Ψ .

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{Q}\mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F})$$

En prenant $\mathbf{Q} = \mathbf{C}^{1/2} \cdot \mathbf{F}^{-1}$

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \Psi(\mathbf{X}, \mathbf{C}) \quad (2.24)$$

L'indépendance par rapport au référentiel permet d'exprimer l'énergie comme une fonction du tenseur de dilatation \mathbf{C} . La loi de comportement est alors donnée par :

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{F}} = 2\mathbf{F} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.25)$$

Le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff est alors donné par :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} \quad (2.26)$$

2.5.1.2 Isotropie

Un matériau hyperélastique est dit *isotrope* si pour toute rotation $\mathbf{Q} \in SO_3^+$, l'énergie emmagasinée vérifie

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}\mathbf{Q}) = \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{F}) \quad \forall \mathbf{F} \in \mathbb{M}^+$$

Cette définition permet de démontrer que Ψ peut être défini à partir des invariants de \mathbf{C}

$$\Psi(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = W(\mathbf{X}, I_1(\mathbf{C}), I_2(\mathbf{C}), I_3(\mathbf{C})) \quad (2.27)$$

Avec

$$I_1(\mathbf{C}) = \text{tr}(\mathbf{C}), \quad I_2(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2)), \quad I_3(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{C})$$

La relation entre le tenseur de déformations et celui des contraintes est non linéaire. Par conséquent, il est nécessaire d'établir le tenseur d'élasticité d'ordre 4 qui va servir dans la résolution des équations de mouvement.

$$\mathcal{C} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} \quad (2.28)$$

Ce tenseur est nécessaire dans la résolution du problème variationnel non-linéaire issu des équations d'équilibre local avec la méthode de Newton.

2.5.1.3 Exemples

Après avoir introduit le cadre théorique de la loi de comportement des matériaux hyperélastiques, des exemples de ces lois sont donnés ci-après.

Le modèle de *Saint-Venant Kirchhoff* est la généralisation aux grandes déformations de la loi de Hooke utilisée dans le cadre de l'élasticité linéaire. L'énergie de déformation W_{SVK} est définie par :

$$W_{\text{SVK}} = \frac{\lambda}{2} (\text{tr } \mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E} \quad (2.29)$$

λ et μ sont les coefficients de Lamé et peuvent être exprimés en fonction du module de Young E et du coefficient de Poisson ν comme suit :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.30)$$

Le deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff s'exprime en fonction du tenseur de déformations de Green-Lagrange de la façon suivante :

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E} \quad (2.31)$$

Le tenseur d'élasticité \mathcal{C} d'ordre 4 est alors donné par :

$$\mathcal{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathcal{I} \quad (2.32)$$

\mathcal{I} est le tenseur d'identité d'ordre 4.

Un autre modèle de matériau hyperélastique est le modèle *Néo-Hookéen* pour lequel l'énergie de déformation W_{NH} est donnée par :

$$\begin{aligned} W_{\text{NH}} &= \frac{\mu}{2} (\text{tr } \mathbf{C} - 3) - \mu \ln J + \frac{\lambda}{2} (\ln J)^2 \\ &= \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{\lambda}{8} (\ln I_3)^2 - \frac{\mu}{2} \ln I_3 \end{aligned} \quad (2.33)$$

de sorte que :

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \frac{\lambda}{2} (\ln I_3) \mathbf{C}^{-1} \quad (2.34)$$

Le tenseur d'élasticité \mathcal{C} d'ordre 4 est alors calculé comme suit :

$$\mathcal{C} = (\lambda \ln I_3 - 2\mu) \mathcal{J} + \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (2.35)$$

\mathcal{J} est le tenseur d'ordre 4 défini par :

$$\mathcal{J}_{ijkl} = -\frac{1}{2} (\mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{jl}^{-1} + \mathbf{C}_{il}^{-1} \mathbf{C}_{jk}^{-1}) \quad (2.36)$$

Il existe d'autres modèles de matériaux hyperélastiques et leur utilisation dépend de l'application recherchée. Le modèle de Mooney-Rivlin est souvent utilisé pour

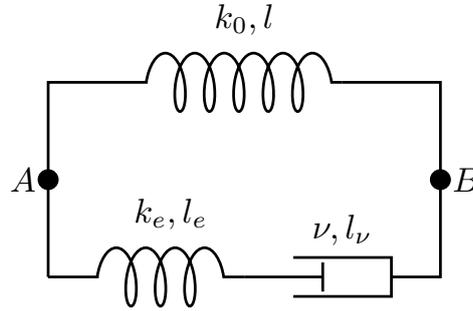


FIGURE 2.2 – Modèle rhéologique de Zener d'un matériau viscoélastique.

décrire la déformation des mélanges de caoutchoucs qui composent la structure des pneumatiques. Son énergie de déformation W_{MR} est définie par :

$$W_{MR} = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \quad (2.37)$$

C_1 et C_2 sont les modules d'élasticité du matériau et sont déterminés expérimentalement. La loi de comportement de Mooney-Rivlin est alors donnée par :

$$\mathbf{S} = 2(C_1 + C_2 I_1)\mathbf{I} - 2C_2\mathbf{C} \quad (2.38)$$

Le tenseur d'élasticité d'ordre est donnée par :

$$\mathcal{C} = 4C_2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \mathcal{I}) \quad (2.39)$$

2.5.2 Viscoélasticité

L'hypothèse d'hyperélasticité ne permet pas de prendre en compte l'historique de déformations des matériaux. La loi de comportement est alors complétée en introduisant le cadre viscoélastique [Le Tallec 1993]. La modélisation de la viscoélasticité est basée sur le modèle rhéologique de Zener illustré sur la figure 2.2. L'expression du tenseur des contraintes en fonction du tenseur des dilatations de Cauchy s'inspire de la relation entre la force f appliquée en A et B et l'élongation du système l .

Ce système est composé de deux branches parallèles. La première est purement élastique et composée d'un ressort de raideur k_0 d'élongation l . La deuxième branche est partiellement visqueuse. Celle-ci se compose d'un ressort de raideur k_e d'élongation l_e et d'un vérin de coefficient de viscosité ν d'élongation l_ν . L'évolution de la force exercée entre les extrémités A et B du système est décrite par le système d'équations :

$$\begin{cases} f = k_0 l + k_e l_e \\ \nu \dot{l}_\nu = k_e l_e \\ l = l_e + l_\nu \end{cases} \quad (2.40)$$

Dans le cadre des grandes déformations, une décomposition multiplicative des déformations est utilisée pour généraliser en trois dimensions le modèle rhéologique de Zener. Le tenseur des déformations \mathbf{F} se décompose par analogie en une partie visqueuse \mathbf{F}_v et une partie élastique \mathbf{F}_e .

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v \quad (2.41)$$

La décomposition polaire de la partie élastique du tenseur des déformations donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e &= \mathbf{R}(\mathbf{F}_e^\top \mathbf{F}_e)^{1/2} \\ &= \mathbf{R} \mathbf{C}_e^{1/2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

\mathbf{R} est la matrice de rotation et \mathbf{C}_e désigne le tenseur de dilatation de Cauchy de la partie élastique des déformations. La même décomposition polaire est appliquée sur la partie visqueuse en supposant que la rotation associée à la décomposition de \mathbf{F}_v a été reportée dans \mathbf{F}_e .

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{C}_v^{1/2} \quad (2.43)$$

\mathbf{C}_v désigne le tenseur de dilatation de Cauchy de la partie visqueuse des déformations. Le tenseur de dilatation de Cauchy peut être exprimé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{F}_v^\top \mathbf{F}_e^\top \mathbf{F}_e \mathbf{F}_v \\ &= \mathbf{C}_v^{1/2} \mathbf{C}_e \mathbf{C}_v^{1/2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ainsi, toute déformation du matériau est associée à deux champs de tenseurs de Cauchy-Green \mathbf{C} et \mathbf{C}_v . Ces deux tenseurs permettent de définir le tenseur de Cauchy-Green de la déformation élastique de la branche visqueuse par :

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}_v^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{C}_v^{-1/2} \quad (2.45)$$

L'énergie de déformation du matériau caractérisée par \mathbf{C} et \mathbf{C}_v est définie par analogie avec le modèle de Zener.

$$W(\mathbf{C}, \mathbf{C}_v) = W_0(\mathbf{C}) + W_e(\mathbf{C}_v^{-1/2} \mathbf{C} \mathbf{C}_v^{-1/2}) \quad (2.46)$$

W_0 est l'énergie de déformation de la branche élastique et W_e désigne l'énergie de déformation de la branche visqueuse.

Afin de compléter la généralisation du modèle de Zener aux grandes déformations, la formulation mathématique de la dissipation due à la branche visqueuse est introduite. Une variation $\delta \mathbf{C}_v$ de \mathbf{C}_v induit une énergie de dissipation sous la forme $\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) : \delta \mathbf{C}_v$ où $\phi(\dot{\mathbf{C}}_v)$ désigne le potentiel de dissipation. Le second principe de la thermodynamique impose :

$$\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) : \dot{\mathbf{C}}_v \geq 0 \quad \forall \dot{\mathbf{C}}_v \quad (2.47)$$

Un choix classique de la forme du potentiel de dissipation est donné par [Lubliner 1985] :

$$\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) = -\nu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v^{-1}) \quad (2.48)$$

Ce choix est intéressant puisque le paramètre ν est facilement identifiable grâce aux mesures expérimentales. Afin de vérifier que le choix du potentiel respecte le second principe de la thermodynamique, la quantité $\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) : \dot{\mathbf{C}}_v$ est explicitée en dérivant par rapport au temps la relation $\mathbf{C}_v \mathbf{C}_v^{-1} = \mathbf{I}$ comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v) \mathbf{C}_v^{-1} + \mathbf{C}_v \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v^{-1}) = 0 \quad (2.49)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v^{-1}) = -\mathbf{C}_v^{-1} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v) \mathbf{C}_v^{-1} \quad (2.50)$$

Le potentiel de dissipation est alors donné par :

$$\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) = \nu \mathbf{C}_v^{-1} \dot{\mathbf{C}}_v \mathbf{C}_v^{-1} \quad (2.51)$$

Le second principe de la thermodynamique est respecté puisque :

$$\phi(\dot{\mathbf{C}}_v) : \dot{\mathbf{C}}_v = \nu \mathbf{D}_v : \mathbf{D}_v \geq 0 \quad (2.52)$$

\mathbf{D}_v est le tenseur de déformations visqueuses donné par :

$$\mathbf{D}_v = \mathbf{C}_v^{-1/2} \dot{\mathbf{C}}_v \mathbf{C}_v^{-1/2} \quad (2.53)$$

La loi de comportement viscoélastique est alors obtenue en supposant que la dissipation correspond exactement à la diminution de l'énergie élastique du système :

$$-\nu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{C}_v^{-1}) = -\frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}_v} \quad (2.54)$$

La variable interne $\mathbf{A} = \mathbf{C}_v^{-1}$ caractérisant la déformation visqueuse est introduite et le bilan d'énergie est réécrit de la façon suivante :

$$\nu \mathbf{C}_v^{-1} \dot{\mathbf{C}}_v \mathbf{C}_v^{-1} = \mathbf{C}_v^{-1} \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \mathbf{C}_v^{-1} \quad (2.55)$$

En multipliant l'équation 2.55 à gauche et à droite par \mathbf{C}_v :

$$\nu \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{A}}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \quad (2.56)$$

L'équation 2.56 est une équation différentielle de premier ordre en temps et permet alors d'ajouter une dépendance temporelle à la loi de comportement.

2.6 Équations d'équilibre en grandes transformations

Dans le cadre de la mécanique non linéaire, où les déplacements ne sont plus suffisamment petit pour confondre la configuration de référence et la configuration actuelle, la forme des équations d'équilibre dépend de la description choisie. La formulation mathématique des principes de conservation de la masse, du moment linéaire et du moment angulaire permet d'obtenir les équations de mouvement. Ces équations, jointes à la loi de comportement et aux conditions initiales, définissent le problème à résoudre pour prédire l'évolution temporelle du système étudié.

2.6.1 Conservation de la masse

La conservation de la masse de tout système matériel au cours des transformations qu'il subit est un principe fondamental de la mécanique classique. La notion de milieu continu implique que la masse m d'un système matériel occupant un volume Ω^t dans la configuration actuelle s'obtienne comme l'intégrale d'une densité volumique finie, appelée *masse volumique* et désignée par $\rho(\mathbf{x}, t)$.

$$m = \int_{\Omega^t} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega^t \quad (2.57)$$

Le principe de conservation de la masse implique que pour tout système matériel,

$$\forall \Omega^t \quad \frac{dm}{dt} = \int_{\Omega^t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} \right) d\Omega^t = 0 \quad (2.58)$$

Ainsi,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \dot{\mathbf{u}} = 0 \quad (2.59)$$

L'équation 2.59 traduit la conservation de la masse et est aussi appelée équation de continuité. Le principe de la conservation de la masse peut aussi être exprimé sur la configuration de référence avec un changement de variables.

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Omega^t} \rho(\mathbf{x}, t) d\Omega^t \\ &= \int_{\Omega} J \rho(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t), t) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \rho_0 d\Omega \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le principe de conservation de la masse en description matérielle est alors donné par :

$$\forall \Omega \quad \frac{dm}{dt} = \int_{\Omega} \dot{\rho}_0 d\Omega = 0 \quad (2.61)$$

La formulation locale du principe de conservation de la masse en description matérielle est donnée par :

$$\dot{\rho}_0 = 0 \quad (2.62)$$

2.6.2 Conservation du moment linéaire

La conservation du moment linéaire en description spatiale stipule que la dérivée particulaire temporelle du moment linéaire est égale à la somme des efforts extérieurs agissant sur le système mécanique.

$$\forall \Omega^t \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} \rho \dot{\mathbf{u}} d\Omega^t = \int_{\Omega^t} \mathbf{g} d\Omega^t + \int_{\partial\Omega^t} \mathbf{f} d\Gamma^t \quad (2.63)$$

\mathbf{f} désigne la pression surfacique appliquée sur la frontière $\partial\Omega^t$ dans la configuration actuelle et \mathbf{g} représente la force volumique extérieure agissant sur le système. En appliquant le théorème de transport de Reynolds et l'équation de la conservation de la masse sur le terme à gauche et le théorème de la divergence de Gauss sur le terme à droite de l'équation 2.63, l'équation de la conservation du moment linéaire en description spatiale est exprimée de la façon suivante :

$$\forall \Omega^t \quad \int_{\Omega^t} \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega^t = \int_{\Omega^t} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}) d\Omega^t \quad (2.64)$$

La conservation du moment linéaire peut s'écrire sur la configuration de référence avec le même changement de variables utilisé précédemment pour la conservation de la masse :

$$\forall \Omega \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho_0 \dot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{g}_0 d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{f}_0 d\Gamma \quad (2.65)$$

\mathbf{f}_0 et \mathbf{g}_0 représentent respectivement la force surfacique et la force volumique appliquées sur la configuration de référence et sont définies à partir de \mathbf{f} et \mathbf{g} comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 &= J \mathbf{g} \\ \mathbf{f}_0 &= J \|\mathbf{F}^{-1} \mathbf{N}\| \mathbf{f} \end{aligned} \quad (2.66)$$

Le même raisonnement utilisé en description spatiale permet d'obtenir l'équation de conservation du moment linéaire suivante :

$$\forall \Omega \quad \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = \int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{g}_0) d\Omega \quad (2.67)$$

L'équation de conservation 2.64 (respectivement 2.67) est valide pour tout domaine spatial (respectivement matériel). Ainsi, les formulations locales du principe de conservation du moment linéaire en description spatiale et matérielle sont données par :

$$\begin{aligned} \rho \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} \\ \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} &= \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{g}_0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Ces deux équations représentent la formulation forte des équations d'équilibre local du système étudié.

2.6.3 Conservation du moment angulaire

Le principe de conservation du moment angulaire stipule que la dérivée temporelle du moment angulaire calculé par rapport à un point fixe est égale à la somme des moments appliqués sur le système mécanique. La formulation intégrale de ce principe en description spatiale est donnée par :

$$\forall \Omega^t \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega^t} (\rho \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{u}}) d\Omega^t = \int_{\Omega^t} (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) d\Omega^t + \int_{\partial\Omega^t} (\mathbf{x} \times \mathbf{f}) d\Gamma^t \quad (2.69)$$

Le changement de variables utilisé auparavant permet d'écrire le principe de conservation du moment angulaire sur la configuration de référence.

$$\forall \Omega \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (\rho_0 \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{u}}) d\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{x} \times \mathbf{g}_0) d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{x} \times \mathbf{f}_0) d\Gamma \quad (2.70)$$

Les deux équations 2.69 et 2.70 imposent la symétrie du tenseur de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ et du deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} .

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}^\top &= \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{S}^\top &= \mathbf{S} \end{aligned} \quad (2.71)$$

2.6.4 Formulation forte des équations d'équilibre

Les équations de mouvement en mécanique non linéaire d'un solide déformable est la synthèse des concepts présentés auparavant. La conservation du moment linéaire permet de relier la variation des grandeurs cinématiques avec les contraintes. La conservation du moment angulaire impose la symétrie du tenseur des contraintes. Ces principes de conservation sont complétés par une loi de comportement qui permet de fermer le problème mécanique. Ces équations sont complétées par les conditions aux limites que la solution doit respecter sur le bord. Le bord $\partial\Omega$ est composé de Γ_u où un déplacement \mathbf{u}_d est imposé, de Γ_σ où une force surfacique \mathbf{f}_0 est imposée et Γ_p où une pression suiveuse ($\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = p\mathbf{n}$) est imposée. Cette dernière suit la direction de la normale de la configuration actuelle (contrairement à une condition de Neumann classique) et sera utilisée par la suite dans la modélisation de la pression de gonflage du pneumatique. Les différentes partitions de $\partial\Omega$ sont disjointes.

$$\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_p = \partial\Omega, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset, \quad \Gamma_u \cap \Gamma_p = \emptyset, \quad \Gamma_p \cap \Gamma_\sigma = \emptyset \quad (2.72)$$

Les équations d'équilibre local écrites sur la configuration de référence sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{g}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma_u \times [0, T] \\ \mathbf{P}\mathbf{N} = \mathbf{f}_0 & \text{sur } \Gamma_\sigma \times [0, T] \\ \mathbf{P}\mathbf{N} = pJ(\mathbf{F}^{-\top}\mathbf{N}) & \text{sur } \Gamma_p \times [0, T] \end{array} \right. \quad (2.73)$$

\mathbf{g}_0 représente le vecteur des forces volumiques. Une dépendance temporelle du problème mécanique est constatée étant donné que l'accélération $\ddot{\mathbf{u}}$ est présente dans les équations de mouvement, il est alors nécessaire de compléter le problème en considérant un déplacement initial \mathbf{u}_0 et une vitesse initiale \mathbf{v}_0 .

$$\begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{X}, 0) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{X}) && \text{dans } \Omega \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, 0) &= \mathbf{v}_0(\mathbf{X}) && \text{dans } \Omega\end{aligned}\tag{2.74}$$

Le problème défini ci-dessus constitue la formulation forte du problème de la mécanique non linéaire. Le calcul de solutions analytiques n'est possible que pour des rares cas où la géométrie est assez simple et avec des hypothèses très restrictives. Cependant, il existe des méthodes numériques capables d'approximer la solution dans un cadre plus général. C'est le cas de la méthode des éléments finis qui est présentée dans la partie suivante.

2.7 Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode employée dans la résolution numérique des équations aux dérivées partielles modélisant les différents phénomènes physiques. Elle permet notamment d'intégrer la complexité géométrique des systèmes étudiés contrairement à la méthode des différences finies. D'ailleurs, la méthode des éléments finis peut être utilisée dans la résolution de plusieurs problèmes physiques (mécanique, thermique, électromagnétisme...). Cependant, la méthode des volumes finis reste plus adaptée pour la résolution des équations traduisant des lois de conservation hyperboliques (mécanique des fluides). L'idée fondamentale de la méthode des éléments finis consiste à construire une approximation simple des inconnues pour transformer les équations continues en un système d'équations de dimension finie. Cette approximation permet également de construire des opérateurs discrets représentés par des matrices creuses optimisant le temps de calcul et la mémoire de stockage à l'instar des autres schémas en espace dont les stencils sont souvent compacts.

Dans un premier temps, les équations aux dérivées partielles (ou formulation forte du problème) sont transformées en une formulation variationnelle (ou formulation faible). La solution approchée est ensuite cherchée comme une combinaison linéaire de fonctions données. Les fonctions considérées correspondent à des polynômes d'interpolation qui génèrent un espace de dimension finie proche de l'espace des fonctions dans lequel se trouve la solution. Cette combinaison permet de transformer la formulation faible continue en un système d'équations non linéaires de dimension finie. La méthode de Newton, utilisée dans la résolution par un processus itératif des équations obtenues, est par la suite présentée.

2.7.1 Formulation faible des équations d'équilibre

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à trouver la formulation faible des équations d'équilibre local. L'équation de mouvement est multipliée par une fonction test \mathbf{w} et une intégration sur Ω est ensuite effectuée :

$$\int_{\Omega} (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{g}_0) \cdot \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} d\Omega \quad (2.75)$$

Une intégration par parties est effectuée sur l'intégrale du tenseur de contraintes de Piola :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w} d\Omega \\ &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} pJ(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w} d\Omega \end{aligned} \quad (2.76)$$

Le gradient de la fonction test apparaît après le développement de l'intégration par parties. Les espaces fonctionnels, auxquels la solution \mathbf{u} et les fonctions test \mathbf{w} appartiennent, sont introduits afin que les intégrales soient bien définies.

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{u}_d \text{ sur } \Gamma_u\} \\ \mathcal{V} &= \{\mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_u\}\end{aligned}\quad (2.77)$$

$H^1(\Omega)$ est l'espace de Sobolev des fonctions dont la première dérivée faible appartient à l'espace des fonctions d'énergie finie ($L^2(\Omega)$). \mathcal{U} désigne l'espace des déplacements cinématiquement admissibles et dépend du temps puisque le déplacement imposé \mathbf{u}_d peut évoluer dans le temps. La formulation faible du problème mécanique est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{U} \\ \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} pJ(\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (2.78)$$

Une solution de la formulation forte est naturellement une solution de la formulation faible. Sous certaines hypothèses de régularité, la solution de la formulation faible est aussi une solution de la formulation forte.

Il est possible de chercher la solution du problème variationnel dans le même espace des fonctions test \mathcal{V} avec *le relèvement des conditions aux limites essentielles* [Fortin 2020]. Cette opération consiste à décomposer la fonction \mathbf{u} comme la somme d'une fonction $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{V}$ et d'une fonction \mathbf{u}_g égale à \mathbf{u}_d sur Γ_u . L'opérateur *trace* assure l'existence de la fonction \mathbf{u}_g . La formulation faible peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w} d\Omega \\ + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} pJ(\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (2.79)$$

Le remplacement de la fonction test \mathbf{w} par un déplacement virtuel $\delta \mathbf{u} \in \mathcal{V}$ permet de retrouver le principe des travaux virtuels.

2.7.2 Discrétisation spatiale

La première étape de la méthode des éléments finis consiste à découper le domaine Ω en sous domaines Ω_e . Le domaine Ω est alors approché par un maillage noté Ω_h et constitué des éléments Ω_e .

$$\overline{\Omega} \approx \Omega_h = \bigcup_{e=1}^{\overline{N_e}} \Omega_e \quad (2.80)$$

N_e est le nombre total des éléments du maillage Ω_h . $\partial\Omega_h$ représente la frontière du maillage et Γ_h est aussi une discrétisation de la frontière du domaine de la configuration de référence $\partial\Omega$. Toutes les grandeurs indexées par h correspondent aux approximations des grandeurs continues sur le maillage.

La méthode des éléments finis consiste à approximer le déplacement \mathbf{u}^e défini sur chaque élément Ω_e avec des fonctions d'interpolation $N_i(\mathbf{X})$ comme suit :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}^e(\mathbf{X}, t) &\approx \mathbf{u}_h^e(\mathbf{X}, t) \\ &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\mathbf{X}) \mathbf{q}_i(t)\end{aligned}\quad (2.81)$$

n_e est le nombre de noeuds de l'élément Ω_e . Le vecteur $\mathbf{q}_i = [u_x^i \ u_y^i \ u_z^i]^\top$ regroupe les composantes du déplacement nodal. Les fonctions d'interpolation N_i sont généralement appelées des fonctions de forme et correspondent souvent à des polynômes d'interpolation. Si \mathbf{X}_j correspond au vecteur des coordonnées du $j^{\text{ème}}$ noeud de l'élément Ω_e , les fonctions de forme doivent vérifier la condition suivante :

$$N_i(\mathbf{X}_j) = \delta_{ij} \quad (2.82)$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker. Les fonctions de forme dépendent de la géométrie de l'élément réel Ω_e et sont donc différentes d'un élément à l'autre. Il est alors plus simple de les exprimer sur un élément de référence $\hat{\Omega}$. Ce qui donne des fonctions d'interpolation $N_i(\boldsymbol{\xi})$ indépendantes de la géométrie de l'élément réel. Afin de relier la géométrie de l'élément de référence avec celle de l'élément réel, les mêmes fonctions d'interpolation sont utilisées. On parle alors de transformation isoparamétrique.

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_h^e(\boldsymbol{\xi}, t) &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{q}_i(t) \\ \mathbf{X}_h^e &= \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}_i\end{aligned}\quad (2.83)$$

La transformation isoparamétrique est caractérisée par la matrice jacobienne qui servira à calculer les intégrales de la formulation faible sur l'élément de référence.

$$\begin{aligned}\mathbf{J}^e &= \frac{\partial \mathbf{X}^e}{\partial \boldsymbol{\xi}} \\ &= \sum_{i=1}^{n_e} \mathbf{X}_i \otimes \nabla_{\boldsymbol{\xi}} N_i\end{aligned}\quad (2.84)$$

La fonction test \mathbf{w}_h est aussi décomposée dans la même base que le déplacement \mathbf{u}_h (méthode dite de Bubnov-Galerkin). Ce choix n'a rien d'obligatoire étant donné qu'un choix différent des fonctions d'interpolation est possible comme la méthode de Petrov-Galerkin [Griffiths 1978].

$$\mathbf{w}_h^e(\mathbf{X}, t) = \sum_{i=1}^{n_e} N_i(\mathbf{X}) \delta \mathbf{q}_i \quad (2.85)$$

En examinant l'approximation du déplacement, la méthode des éléments finis peut être vue comme une méthode qui induit une restriction sur l'espace des solutions et l'espace des fonctions tests. La solution est alors cherchée dans un espace $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ de dimension finie dont la base est constituée des fonctions de forme. La formulation faible discrétisée s'écrit sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_h \in \mathcal{V}_h \\ \int_{\Omega_h} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{w}_h d\Omega + \int_{\Omega_h} \mathbf{P}_h : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}_h d\Omega_h = \int_{\Omega_h} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w}_h d\Omega_h \\ + \int_{\Gamma_{\sigma,h}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w}_h d\Gamma_h + \int_{\Gamma_{p,h}} pJ(\mathbf{F}_h^{-T} \mathbf{N}_h) \cdot \mathbf{w}_h d\Gamma_h \quad \forall \mathbf{w}_h \in \mathcal{V}_h(t) \end{array} \right. \quad (2.86)$$

Chaque intégrale de la formulation faible discrétisée est calculée élément par élément avec la méthode de quadrature de Gauss. Ensuite, les grandeurs élémentaires sont assemblées afin de trouver le système global des équations de mouvement discrétisées. L'opérateur d'assemblage est noté $\bigcup_{e=1}^{N_e}$ et le processus de construction du système global est donné par :

$$\int_{\Omega_h} (\dots) d\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_e} (\dots) d\Omega_e = \bigcup_{e=1}^{N_e} \int_{\hat{\Omega}_e} (\dots) \det \mathbf{J}^e d\hat{\Omega}_e \quad (2.87)$$

La prochaine étape de la méthode des éléments finis est d'utiliser l'approximation du déplacement avec les fonctions de forme afin d'exprimer chaque terme intégrale de la formulation faible discrétisée en fonction du vecteur du déplacement nodal et de ses dérivées.

Le terme variationnel associé à l'inertie est approximé comme suit :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{w}_h d\Omega &= \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{i,j=1}^{n_e} \delta \mathbf{q}_j \int_{\hat{\Omega}_e} \rho_0 N_i(\boldsymbol{\xi}) N_j(\boldsymbol{\xi}) \det \mathbf{J}^e d\hat{\Omega}_e \ddot{\mathbf{q}}_i \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2.88)$$

\mathbf{M} est la matrice de masse. Avant de discrétiser le terme de la formulation faible relatif aux efforts intérieurs, celui-ci est reformulé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \mathbf{P}_h : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}_h d\Omega_h &= \int_{\Omega_h} \mathbf{F}_h \mathbf{S}_h : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}_h d\Omega_h \\ &= \int_{\Omega_h} \mathbf{S}_h : \delta \mathbf{E}_h d\Omega_h \end{aligned} \quad (2.89)$$

$\delta \mathbf{E}_h$ est donné par :

$$\delta \mathbf{E}_h = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_e} (\mathbf{F}_h^{eT} (\delta \mathbf{q}_i \otimes \nabla_{\mathbf{X}} N_i) + (\nabla_{\mathbf{X}} N_i \otimes \delta \mathbf{q}_i) \mathbf{F}_h^e) \quad (2.90)$$

La symétrie du tenseur $\delta \mathbf{E}_h$ permet de le représenter sous la forme vectorielle suivante :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E}_h &= [\delta \mathbf{E}_{h,11} \quad \delta \mathbf{E}_{h,22} \quad \delta \mathbf{E}_{h,33} \quad 2\delta \mathbf{E}_{h,12} \quad 2\delta \mathbf{E}_{h,23} \quad 2\delta \mathbf{E}_{h,13}]^\top \\ &= \sum_{i=1}^{n_e} \mathcal{B}_i \delta \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (2.91)$$

Cette représentation permet d'exprimer le tenseur $\delta \mathbf{E}_h$ comme un produit matriciel de $\delta \mathbf{q}_i$ avec les matrices \mathcal{B}_i définies par :

$$\mathcal{B}_i = \begin{bmatrix} F_{11}N_{i,1} & F_{21}N_{i,1} & F_{31}N_{i,1} \\ F_{12}N_{i,2} & F_{22}N_{i,2} & F_{32}N_{i,2} \\ F_{13}N_{i,3} & F_{23}N_{i,3} & F_{33}N_{i,3} \\ F_{11}N_{i,2} + F_{12}N_{i,1} & F_{21}N_{i,2} + F_{22}N_{i,1} & F_{31}N_{i,2} + F_{32}N_{i,1} \\ F_{12}N_{i,3} + F_{13}N_{i,2} & F_{22}N_{i,3} + F_{23}N_{i,2} & F_{32}N_{i,3} + F_{33}N_{i,2} \\ F_{11}N_{i,3} + F_{13}N_{i,1} & F_{21}N_{i,3} + F_{23}N_{i,1} & F_{31}N_{i,3} + F_{33}N_{i,1} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

F_{ij} sont les composantes du tenseur de gradient de déformation \mathbf{F}_h^e défini sur l'élément Ω_e et $N_{i,j}$ désigne la dérivée partielle de N_i par rapport à la $j^{\text{ème}}$ variable. La symétrie du deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff permet aussi de le représenter sous la forme vectorielle suivante :

$$\mathbf{S}_h = [\mathbf{S}_{h,11} \quad \mathbf{S}_{h,22} \quad \mathbf{S}_{h,33} \quad 2\mathbf{S}_{h,12} \quad 2\mathbf{S}_{h,23} \quad 2\mathbf{S}_{h,13}]^\top \quad (2.93)$$

Le terme de la formulation faible relatif aux efforts intérieurs est alors discrétisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} \mathbf{P}_h : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w}_h \, d\Omega_h &= \int_{\Omega_h} \delta \mathbf{E}_h^\top \mathbf{S}_h \, d\Omega_h \\ &= \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \delta \mathbf{q}_i^\top \int_{\Omega_e} \mathcal{B}_i^\top \mathbf{S}_h \, d\Omega_e \\ &= \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \delta \mathbf{q}_i^\top \int_{\hat{\Omega}_e} \mathcal{B}_i^\top \mathbf{S}_h \det \mathbf{J}_e \, d\hat{\Omega}_e \\ &= \delta \mathbf{q}^\top \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.94)$$

Les termes de la formulation faible relatifs aux efforts extérieurs sont discrétisés de la façon suivante :

$$\int_{\Omega_h} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{n_e} \delta \mathbf{q}_i \cdot \int_{\hat{\Omega}_e} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{g}_0 \det \mathbf{J}^e \, d\hat{\Omega}_e \quad (2.95)$$

$$\int_{\Gamma_{\sigma,h}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{N_r} \sum_{i=1}^{m_e} \delta \mathbf{q}_i \cdot \int_{\hat{\Gamma}_{\sigma,h}} N_i(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{f}_0 \, d\hat{\Gamma}_e \quad (2.96)$$

N_r est le nombre d'éléments de la frontière $\Gamma_{\sigma,h}$ et m_e désigne le nombre noeuds sur chaque frontière $\Gamma_{\sigma,h}$. Ainsi, les termes de la formulation faible associés aux efforts extérieurs sont regroupés comme suit :

$$\int_{\Omega_h} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma,h}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w}_h \, d\Omega = \delta \mathbf{q}^T \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.97)$$

\mathbf{f}_{ext} désigne le vecteur global des efforts extérieurs. Le terme de la formulation faible associé à la pression suiveuse est discrétisé de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{p,h}} pJ(\mathbf{F}_h^{-T} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{w}_h \, d\Gamma &= \bigcup_{e=1}^{N_p} \sum_{i=1}^{p_e} \delta \mathbf{q}_i \cdot \int_{\Gamma_{p,h}} pJ(\mathbf{F}_h^{-T} \mathbf{N}_h) N_i(\boldsymbol{\xi}) \, d\Gamma \\ &= \delta \mathbf{q}^T \mathbf{F}_p(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

\mathbf{F}_p représente le vecteur global de la pression suiveuse et dépend du vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q} .

L'assemblage des grandeurs élémentaires permet alors d'écrire la formulation faible discrétisée sous la forme suivante :

$$\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_p(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (2.99)$$

L'équation 2.99 est valable pour tout $\delta \mathbf{q}$. Ainsi,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_p(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (2.100)$$

Les équations de mouvement obtenues sont des équations non linéaires différentielles ordinaires en temps. Le vecteur des déplacements \mathbf{q}_0 et vitesses $\dot{\mathbf{q}}_0$ nodaux initiaux sont calculés en exprimant le déplacement et la vitesse initiaux dans la base des fonctions de forme N_i .

2.7.3 Résolution des équations de mouvement

Les équations de mouvement semi-discrétisées obtenues avec la méthode des éléments finis sont non-linéaires. Le terme d'inertie est négligé dans cette partie ($\mathbf{M} = \mathbf{0}$) étant donné que la résolution du problème dynamique sera abordée dans la partie suivante avec la méthode de l'intégration temporelle. Dans ce cas, le problème est dit quasi-statique puisque les efforts extérieurs peuvent toujours dépendre du temps. La méthode de Newton est un algorithme utilisé dans la recherche du zéro d'une fonction. Les étapes principales de l'algorithme sont exposées dans cette partie. La solution du problème quasi-statique est le zéro du résidu \mathbf{r} défini par :

$$\mathbf{r}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_p(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} \quad (2.101)$$

L'algorithme consiste à linéariser le résidu autour d'un point considéré comme une approximation du zéro recherché. En ce sens, si \mathbf{q}^i est une première approximation du zéro de \mathbf{r} , la linéarisation s'effectue autour $\mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}$ afin de chercher

l'incrément $\Delta \mathbf{q}$ permettant de trouver le zéro recherché.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q}) &= \mathbf{r}(\mathbf{q}^i) + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) \Delta \mathbf{q} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.102)$$

La linéarisation fait apparaître la dérivée du résidu par rapport au vecteur des déplacements nodaux. Cette dérivée est dénommée la matrice tangente du système des équations. Cette dernière est définie par :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{q}^i) &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) \\ &= \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{int}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) - \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{p}}}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}^i) \\ &= \mathbf{K}_{\text{T}}(\mathbf{q}^i) - \mathbf{K}_{\text{p}}(\mathbf{q}^i) \end{aligned} \quad (2.103)$$

\mathbf{K}_{T} est la matrice tangente de raideur associée au vecteur des efforts intérieurs et \mathbf{K}_{p} est la matrice tangente associée au vecteur de la pression suiveuse. L'incrément est solution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}^i) \Delta \mathbf{q} = -\mathbf{r}(\mathbf{q}^i) \quad (2.104)$$

Le vecteur des déplacements nodaux \mathbf{q} est mis à jour comme suit :

$$\mathbf{q}^{i+1} = \mathbf{q}^i + \Delta \mathbf{q} \quad (2.105)$$

La procédure présentée est réitérée jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint. La résolution des équations de mouvement non linéaires est ramenée à la résolution successive de systèmes linéaires avec la méthode de Newton. Dans les cas favorables, les approximations successives obtenues convergent avec une vitesse quadratique. Le calcul et l'assemblage de la matrice tangente à chaque itération peut s'avérer coûteux dans le cas des matrices de grande dimension ou des lois de comportement complexes. Une approximation de la matrice tangente peut être effectuée afin de palier à cette contrainte à l'instar de la méthode de la sécante. Cela réduit par contre la vitesse de convergence [Phillips 1996, Petković 2013]. La résolution du système linéaire 2.104 peut également devenir coûteuse si la matrice $\mathbf{K}(\mathbf{q}^i)$ est mal conditionnée. Ceci est notamment observé au niveau de la matrice de rigidité de raideur des pneumatiques étant donné le grand écart entre la rigidité des renforts textiles ou métalliques des nappes et celle des caoutchoucs. Les méthodes itératives (gradient conjugué, Jacobi, Gauss-Seidel...) combinées avec un préconditionnement judicieux peuvent être employées dans le traitement de cette problématique [Ye 2020]. D'autre part, il existe des techniques numériques permettant de robustifier la convergence de la méthode de Newton comme l'algorithme de recherche linéaire [Dennis 1996].

2.8 Intégration temporelle

Le produit final de la procédure de semi-discrétisation par la méthode des éléments finis en dynamique non linéaire est un système d'équations non linéaires différentielles ordinaires en temps. La méthode traditionnelle de la superposition modale, qui est de grande utilité pour réduire le coût de la résolution d'un problème en dynamique linéaire, n'est plus valide en dynamique non linéaire, puisque les modes propres de vibrations libres changent après chaque modification itérative de la matrice tangente de raideur. Ainsi, la stratégie d'intégration temporelle figure parmi les méthodes permettant d'intégrer le problème de dynamique non linéaire.

Les étapes principales de la résolution d'un problème de dynamique non linéaire par un schéma d'intégration temporelle sont présentées. Ceci implique que l'intervalle de temps $[0, T]$ soit divisé en un nombre choisi d'incrémentes ou de pas. Le schéma d'intégration temporelle est utilisé pour calculer la solution du problème de dynamique non linéaire aux instants choisis.

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < T \quad (2.106)$$

Le pas de temps est défini comme la différence entre deux instants fixés :

$$\Delta t_n = t_{n+1} - t_n \quad \forall n \quad (2.107)$$

Le pas de temps est supposé constant par la suite et est noté Δt afin d'alléger les notations. Les équations de mouvement obtenues après une discrétisation par éléments finis sont données par :

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}) - \mathbf{F}_{\text{p}}(\mathbf{q}) - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{0} \\ \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \end{cases} \quad (2.108)$$

Les équations différentielles de second ordre de la dynamique non linéaire peuvent être écrites sous forme d'un système de premier ordre avec le changement de variable suivant :

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{G}(t, \mathbf{Z}), \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}(t, \mathbf{Z}) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{p}}(\mathbf{q}) + \mathbf{f}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q})) \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

L'idée principale de l'intégration temporelle consiste à appliquer le théorème fondamental de l'analyse sur la fonctionnelle \mathbf{G} entre deux instants t_n et t_{n+1} .

$$\mathbf{Z}(t_{n+1}) = \mathbf{Z}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{G}(t, \mathbf{Z}) dt \quad (2.110)$$

La manière avec laquelle est approximée l'intégrale de l'équation 2.110 détermine le type du schéma utilisé. L'approximation de $\mathbf{Z}(t_{n+1})$ (respectivement $\mathbf{Z}(t_n)$) est notée \mathbf{Z}_{n+1} (respectivement \mathbf{Z}_n). Une suite (\mathbf{Z}_n) de premier terme $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}(0)$ est construite à partir de la relation suivante :

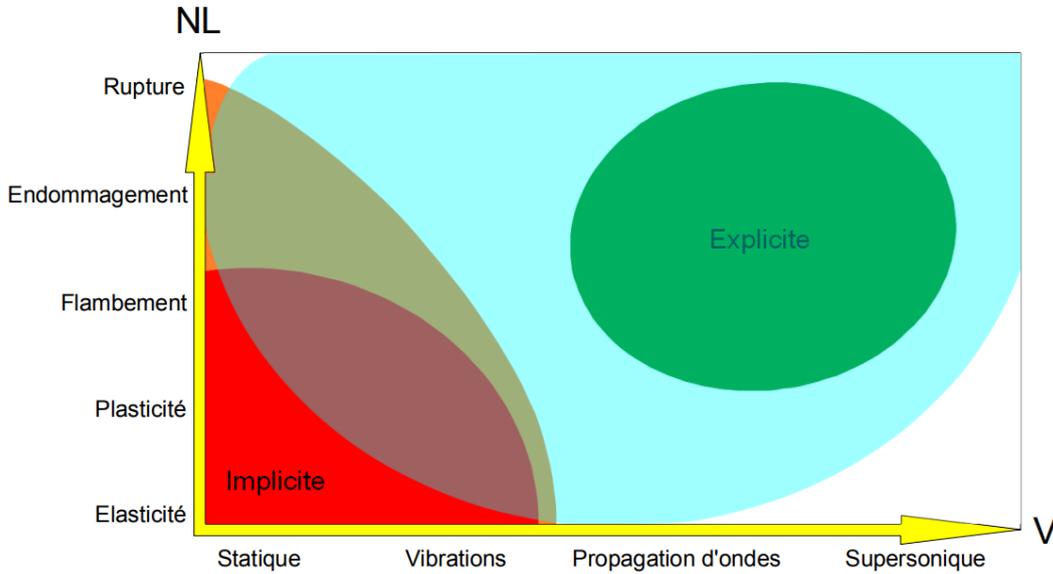


FIGURE 2.3 – Domaines d'utilisation des schémas implicite et explicite [Manet 2013]

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \mathbf{H}(t_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1}, t_n, \mathbf{Z}_n) \quad (2.111)$$

Le schéma d'intégration est dit *explicite* dans le cas où la fonction \mathbf{H} ne dépend pas de \mathbf{Z}_{n+1} . La suite (\mathbf{Z}_n) peut être déterminée au moyen d'une relation de récurrence. Dans l'autre cas, le schéma d'intégration est dit *implicite*. Il est alors nécessaire d'effectuer une inversion du système d'équations non linéaires afin de calculer \mathbf{Z}_{n+1} . La méthode de Newton peut alors être utilisée pour résoudre le système d'équations non linéaires. Les schémas implicites sont souvent utilisés dans le cadre de la dynamique lente contrairement aux schémas explicites qui sont généralement utilisés dans le cadre de la dynamique rapide (figure 2.3). Les deux familles de schémas sont parfois adaptées à la même application (simulation de l'endommagement par exemple). Dans ce cas, le choix peut être effectué en fonction de la facilité d'implémentation, de l'ordre de consistance et de la stabilité du schéma numérique.

La transformation des équations différentielles de la dynamique non linéaire en un système d'équations différentiels de premier ordre permet de poser le cadre théorique des schémas d'intégration temporelle. Cependant, le changement de variables induit le dédoublement de la taille du système à résoudre. Cette approche ne va pas forcément mener à l'implémentation la plus efficace. L'efficacité peut être améliorée d'une manière significative par un schéma écrit directement sur le système des équations de second ordre. Des exemples de schémas explicites et implicites sont présentés par la suite.

2.8.1 Méthode d'Euler

La méthode d'Euler est la méthode la plus simple utilisée dans la résolution numérique des équations différentielles du premier d'ordre. L'intégrale de l'équation 2.110 est approximée avec la méthode des rectangles. Le schéma d'Euler explicite est donné par :

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \Delta t \mathbf{G}(t_n, \mathbf{Z}_n) \quad (2.112)$$

En fixant un déplacement initial \mathbf{q}_0 et une vitesse initiale $\dot{\mathbf{q}}_0$, la solution est construite selon le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_p(\mathbf{q}_n) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_n) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_n)) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Le schéma d'Euler implicite est donné par :

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \Delta t \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1}) \quad (2.114)$$

La solution des équations de dynamique non linéaire est alors calculée comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_p(\mathbf{q}_{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{n+1}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_{n+1})) \end{aligned} \quad (2.115)$$

Le déplacement est calculé en résolvant le système d'équations non linéaires suivant :

$$\mathbf{q}_{n+1} = \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_p(\mathbf{q}_{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{n+1}) - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_{n+1})) \quad (2.116)$$

La θ -méthode est une combinaison pondérée des schémas d'Euler explicite et implicite.

$$\mathbf{Z}_{n+1} = \mathbf{Z}_n + \theta \Delta t \mathbf{G}(t_n, \mathbf{Z}_n) + (1 - \theta) \Delta t \mathbf{G}(t_{n+1}, \mathbf{Z}_{n+1}) \quad (2.117)$$

$\theta \in [0, 1]$ est le paramètre de pondération de la méthode. Le cas où $\theta = 1/2$ correspond à l'utilisation de la méthode des trapèzes pour l'approximation de l'intégrale de l'équation 2.110. Le schéma est dit de Crank-Nicolson. Ce schéma implicite est inconditionnellement stable et permet de conserver l'énergie mécanique dans le cadre de la dynamique linéaire.

2.8.2 Méthode de Newmark

La méthode de Newmark consiste à approximer la vitesse et l'accélération avec les développements de Taylor. Le déplacement et la vitesse à l'instant t_{n+1} sont approximés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_n + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \end{aligned} \quad (2.118)$$

γ et β sont deux paramètres du schéma qui déterminent les différents schémas de Newmark. Quelques exemples de schémas obtenus avec la méthode de Newmark sont maintenant présentés.

2.8.2.1 Schéma explicite de différences centrées

Le schéma est dit de différences centrées dans le cas où $\beta = 0$ et $\gamma = 1/2$. Le déplacement et la vitesse sont donnés par :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_n + \Delta t^2\frac{1}{2}\ddot{\mathbf{q}}_n\end{aligned}\quad (2.119)$$

L'accélération $\ddot{\mathbf{q}}_n$ est calculée à partir des équations de mouvement. Ensuite, le déplacement \mathbf{q}_{n+1} est calculé directement avec l'approximation donnée par le schéma. Enfin, la vitesse $\dot{\mathbf{q}}_{n+1}$ est calculée avec la formule 2.119 après avoir récupéré l'accélération $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}$ des équations de mouvement. Par exemple, pour un comportement hyperélastique avec une énergie de déformation W et une approximation éléments finis avec un maillage de taille maximale h , la stabilité impose une restriction sur le pas de temps Δt donnée par [Oden 1973] :

$$\Delta t \leq \frac{h}{\sqrt{6}c_m}, \quad c_m = \max_{\lambda>0} \sqrt{\frac{1}{\rho_0} \frac{d^2W}{d\lambda^2}} \quad (2.120)$$

La restriction placée par la stabilité conditionnelle du schéma peut exiger un pas de temps beaucoup plus petit que celui qui est suffisant pour assurer la précision du calcul. Par conséquent, le schéma d'intégration explicite de différences centrées reste surtout utilisé pour les problèmes en dynamique rapide tels que l'impact ou la propagation des ondes en hautes fréquences. Dans le cas échéant, le pas de temps est déjà restreint sur la base de la précision afin d'intégrer les phénomènes opérants en hautes fréquences.

2.8.2.2 Schéma implicite de l'accélération moyenne

Le schéma implicite de l'accélération moyenne est obtenu avec $\beta = 1/4$ et $\gamma = 1/2$. Ce schéma peut être aussi obtenu en appliquant la règle des trapèzes pour approximer l'intégrale de l'équation 2.110. Ce schéma correspond alors au schéma de Crank-Nicolson appliqué pour la résolution des systèmes différentiels d'ordre 2. Le déplacement et la vitesse sont approximés comme suit :

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{2}\Delta t\ddot{\mathbf{q}}_{n+1} \\ \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t\dot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{4}\Delta t^2\ddot{\mathbf{q}}_n + \frac{1}{4}\Delta t^2\ddot{\mathbf{q}}_{n+1}\end{aligned}\quad (2.121)$$

Ces deux approximations sont implicites puisqu'elles sont dépendantes des valeurs du déplacement à l'instant t_{n+1} . Ceci nécessite la résolution des équations algébriques non linéaires avec la méthode de Newton. Le résidu peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}) &= \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M}(\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n - \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{\mathbf{q}}_n) \\ &\quad - \mathbf{F}_p(\mathbf{q}_{n+1}) - \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{n+1}) + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_{n+1}) \end{aligned} \quad (2.122)$$

La correction à calculer pour incrémenter le déplacement est solution du système linéaire suivant :

$$\left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \mathbf{K}(\mathbf{q}_{n+1}^i) \right) \Delta \mathbf{q}^i = -\mathbf{r}(\mathbf{q}_{n+1}^i) \quad (2.123)$$

Le déplacement est alors actualisé suivant le schéma itératif :

$$\mathbf{q}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{q}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{q}^i \quad (2.124)$$

Les itérations sont poursuivies jusqu'à ce que le critère de convergence soit atteint. Le schéma de l'accélération moyenne est non seulement inconditionnellement stable mais aussi capable d'assurer la conservation d'énergie pour des problèmes linéaires. Cependant, la stabilité inconditionnelle du schéma de l'accélération moyenne s'applique aux problèmes de dynamique non linéaire si l'approximation discrète de l'énergie de déformation W vérifie la condition suivante [Belytschko 1975, Hughes 1977] :

$$W_{n+1} = W_n + (\mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n) \cdot (\mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_{n+1}) + \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{q}_n)) \geq 0 \quad (2.125)$$

D'autre part, ce schéma n'est plus capable d'assurer la conservation d'énergie pour un problème non linéaire. Le schéma *du point milieu* permet de retrouver cette propriété dans le cadre non-linéaire. La différence entre le schéma de l'accélération moyenne et le schéma *du point milieu* réside dans la façon avec laquelle le vecteur des efforts intérieurs et le vecteur de la pression suivieuse sont évalués. L'approximation du déplacement donnée par le schéma de l'accélération moyenne est reprise :

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_{n+1} &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\ddot{\mathbf{q}}_n + \ddot{\mathbf{q}}_{n+1}}{2} \\ &= \mathbf{q}_n + \Delta t \dot{\mathbf{q}}_n + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_{n+1/2} \end{aligned} \quad (2.126)$$

Le schéma *du point milieu* consiste à approximer la dérivée $\ddot{\mathbf{q}}_{n+1/2}$ de la façon suivante :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{n+1/2} = \mathbf{M}^{-1} \left(\frac{\mathbf{f}_{\text{ext}}(t_{n+1}) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(t_n)}{2} + \mathbf{F}_p \left(\frac{\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n}{2} \right) - \mathbf{F}_{\text{int}} \left(\frac{\mathbf{q}_{n+1} + \mathbf{q}_n}{2} \right) \right) \quad (2.127)$$

La modification apportée permet de vérifier les équations de mouvement à l'instant $t_{n+1/2}$ qui est le milieu de l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$. Le schéma est non seulement inconditionnellement stable mais aussi conservatif pour tout problème de dynamique non linéaire où la loi de comportement dérive d'un potentiel comme dans le cadre de l'hyperélasticité non linéaire [Simo 1991]. D'autre part, il est possible de construire des intégrateurs dits *symplectiques* capables de conserver simultanément l'énergie et les moments linéaire et angulaire dans le cadre de l'hyperélasticité non linéaire. Le lecteur peut se référer aux [Gonzalez 2000a, Simo 1992a, Simo 1992b] pour avoir plus de détails sur ce type de schémas.

2.9 Conclusion

Les concepts théoriques et les outils mathématiques de la mécanique des milieux continus nécessaires à la modélisation du comportement d'un solide déformable viennent d'être présentés. Une description lagrangienne a été privilégiée dans le cadre des grandes déformations. La loi de comportement des matériaux hyperélastiques a été introduite et complétée avec la définition du cadre viscoélastique. Les principes de conservation de la masse, du moment linéaire et du moment angulaire permettent de retrouver les équations de mouvement. La formulation mathématique des méthodes numériques (éléments finis, intégration temporelle) utilisées par la suite dans la résolution des équations de mouvement a été détaillée. Le prochain chapitre est consacré à la description des phénomènes de contact et de frottement appliqués aux solides ainsi que leur formulation mathématique afin de fournir le cadre complet de modélisation de la réponse dynamique des pneumatiques.

Introduction à la mécanique du contact

Sommaire

3.1	Introduction	68
3.2	Cinématique	69
3.3	Contact normal	71
3.3.1	Conditions de Signorini	71
3.3.2	Équations de mouvement	71
3.3.3	Méthodes numériques	73
3.4	Contact tangentiel	78
3.4.1	Contact adhérent	78
3.4.2	Frottement de Coulomb	79
3.4.3	Régularisation de la loi de Coulomb	81
3.5	Conclusion	83

3.1 Introduction

La prise en compte des phénomènes de contact et de frottement dans la modélisation des systèmes mécaniques est d'une importance capitale étant donné que ces phénomènes sont présents dans de nombreux secteurs industriels tels que l'automobile, l'aéronautique ou la biomécanique. Par exemple, la compréhension des phénomènes de contact entre le pneumatique et la chaussée reste essentielle dans la conception de nouveaux pneumatiques puisque plusieurs performances de ceux-ci (usure, adhérence, bruit...) sont intrinsèquement liées à leur interaction avec la chaussée. D'ailleurs, la simulation numérique des phénomènes de contact mécanique nécessite une bonne modélisation de la physique de l'interface, une formulation mathématique rigoureuse et une maîtrise des techniques d'optimisation numérique afin de bien quantifier l'influence du comportement des interfaces de contact sur le fonctionnement du système global.

Ce chapitre est consacré à l'introduction des éléments de la mécanique du contact qui seront utilisés par la suite dans la simulation de la réponse vibratoire des pneumatiques. Dans un premier temps, la formulation mathématique des conditions de contact unilatéral entre un solide déformable et une fondation rigide est introduite. Ensuite, les techniques numériques utilisées dans la résolution du problème de contact sont exposées. Enfin, la loi de frottement de Coulomb choisie comme modèle de frottement sec macroscopique est détaillée ainsi que la régularisation adoptée dans les travaux présentés ultérieurement.

3.2 Cinématique

Cette section est consacrée à la formulation mathématique du contact unilatéral entre un solide déformable ayant Ω comme configuration initiale et une fondation rigide Γ_o comme illustré sur la figure 3.1. Le grand écart entre la rigidité de la chaussée et celle de la bande de roulement du pneumatique justifie la considération d'une fondation rigide.

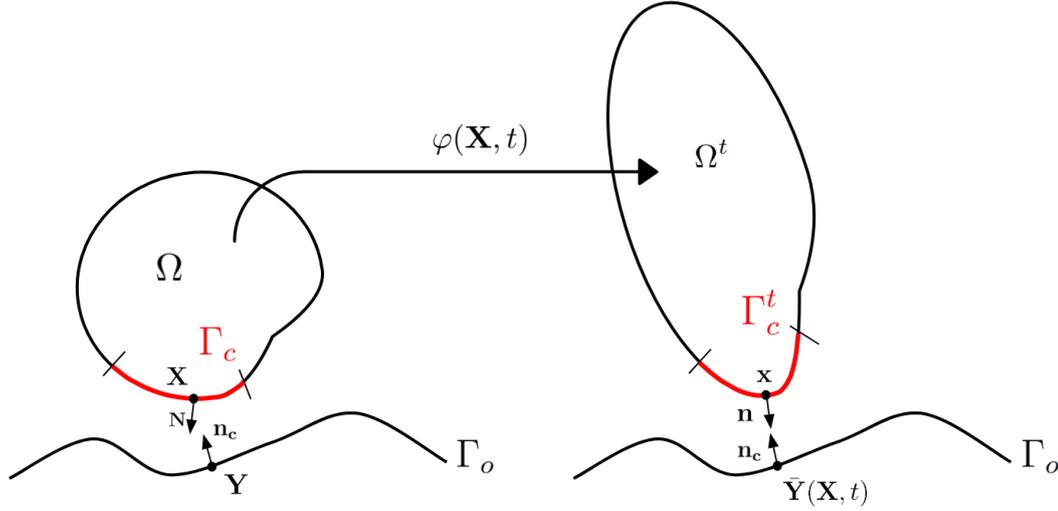


FIGURE 3.1 – Déformation du solide Ω en contact unilatéral avec la fondation rigide Γ_o .

La partie de la frontière $\partial\Omega$ qui peut entrer en contact avec la fondation est notée Γ_c . Cette zone potentielle de contact est disjointe avec les autres zones où les autres types de conditions aux limites sont appliquées. Afin de bien définir la condition de non-interpénétration entre le solide déformable et la surface Γ_o , la projection euclidienne du point $\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{X}, t)$ sur la surface Γ_o est définie de la façon suivante :

$$\bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t) = \arg \min_{\mathbf{Y} \in \Gamma_o} \|\varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{Y}\| \quad (3.1)$$

La surface Γ_o est supposée suffisamment régulière pour garantir l'unicité de la projection $\bar{\mathbf{Y}}$. Il existe d'autres méthodes pour mesurer la distance entre les points de la zone de contact et la fondation rigide comme la méthode du *ray-tracing*. Cette dernière est plus stable que la méthode de la projection dans le cas des surfaces non régulières [Poulios 2015]. La fonction gap normal mesurant la distance normale entre la position \mathbf{x} et son projeté $\bar{\mathbf{Y}}$ est définie par :

$$g_n(\mathbf{X}, t) = \mathbf{n}_c \cdot (\varphi(\mathbf{X}, t) - \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)) \quad (3.2)$$

La condition de non-interpénétration est formulée mathématiquement comme suit :

$$g_n(\mathbf{X}, t) \geq 0 \quad (3.3)$$

Afin de définir le plan tangent sur chaque point en contact avec la fondation rigide, la surface Γ_o est paramétrée avec les coordonnées curvilignes ξ_1 et ξ_2 de la façon suivante :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(\xi_1, \xi_2) \quad (3.4)$$

Les vecteurs définissant la base du plan tangentiel au point \mathbf{Y} sont alors donnés par :

$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \xi_i}, \quad i = \{1, 2\} \quad (3.5)$$

Le gap tangentiel \mathbf{g}_t peut alors être défini comme suit ($\mathbf{n} = -\mathbf{n}_c$ sur la zone de contact) :

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_t &= g_{t_1} \boldsymbol{\tau}_1 + g_{t_2} \boldsymbol{\tau}_2 \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c)(\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) - \bar{\mathbf{Y}}(\mathbf{X}, t)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La dérivée temporelle du gap tangentiel $\dot{\mathbf{g}}_t$ représente naturellement la vitesse de glissement puisque la fondation rigide est immobile. La vitesse de glissement sera utilisée par la suite dans la formulation des lois de frottement.

Les phénomènes de contact mécanique imposent une relation entre les grandeurs cinématiques et les contraintes sur la zone de contact. Par conséquent, le vecteur contrainte est exprimé à partir du premier tenseur de Piola-Kirchhoff puisque les équations de mouvement sont écrites sur la configuration de référence dans le cadre des grandes déformations.

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)\mathbf{N}(\mathbf{X}) \quad (3.7)$$

La formulation complète des conditions de contact nécessite aussi la décomposition du vecteur contrainte dans la base définie aux points de contact.

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) = \Pi_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\Pi}_t \quad (3.8)$$

Π_n est la pression normale. En suivant la même décomposition de la fonction gap, la pression tangentielle est définie par :

$$\boldsymbol{\Pi}_t = (\mathbf{I} - \mathbf{n}_c \otimes \mathbf{n}_c)\mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \quad (3.9)$$

Les grandeurs mécaniques présentées dans cette partie seront utilisées par la suite pour formuler les conditions de contact unilatéral et les lois de frottement dans le cadre de la mécanique non linéaire.

3.3 Contact normal

Après avoir défini les grandeurs mécaniques permettant de formuler cinématiquement la condition de non-interpénétration, la formulation du contact unilatéral non frottant est complétée dans cette partie. Les méthodes numériques issues de la théorie de l'optimisation sous contraintes sont utilisées dans la résolution du problème de contact et sont exposées par la suite.

3.3.1 Conditions de Signorini

La condition sur la fonction de gap normal définie dans l'équation 3.3 permet de formuler cinématiquement la condition de non-interpénétration. Afin d'empêcher la pénétration du solide déformable dans la fondation rigide Γ_o , la pression normale Π_n définie sur la zone de contact Γ_c doit être compressive.

$$\Pi_n \leq 0 \quad (3.10)$$

Si un point est en contact avec la fondation rigide, alors $g_n = 0$. Par contre, si le point n'est pas en contact, alors $\Pi_n = 0$. Ceci permet de définir la condition de complémentarité suivante :

$$g_n \Pi_n = 0 \quad (3.11)$$

Les conditions 3.3, 3.10 et 3.11 définissent les contraintes de contact normal à respecter sur Γ_c . Ces conditions sont appelées les conditions de Hertz-Signorini-Morea (HSM) ou de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) [Signorini 1959].

$$g_n \geq 0, \quad \Pi_n \leq 0, \quad g_n \Pi_n = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.12)$$

La loi de contact normal est illustrée sur la figure 3.2. Les conditions de Signorini définissent non seulement une loi de contact non linéaire mais aussi une loi multi-valuée pour $g_n = 0$. La forme des conditions ressemblent aux conditions d'optimalité de KKT présentes dans les problèmes d'optimisation sous contraintes [Nocedal 1999]. Ainsi, les techniques utilisées dans la résolution de ce type de problèmes sont adoptées dans le traitement des conditions de contact.

3.3.2 Équations de mouvement

Les équations de mouvement d'un solide déformable en contact unilatéral avec la fondation Γ_o sont obtenues en ajoutant les conditions de Signorini exposées précédemment aux équations de mouvement détaillées au chapitre précédent.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{g}_0 = \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur } \Gamma_u \times [0, T] \\ \mathbf{PN} = \mathbf{f}_0 & \text{sur } \Gamma_\sigma \times [0, T] \\ \mathbf{PN} = pJ(\mathbf{F}^{-\top} \mathbf{N}) & \text{sur } \Gamma_p \times [0, T] \\ g_n \geq 0, \quad \Pi_n \leq 0, \quad g_n \Pi_n = 0 & \text{sur } \Gamma_c \times [0, T] \end{array} \right. \quad (3.13)$$

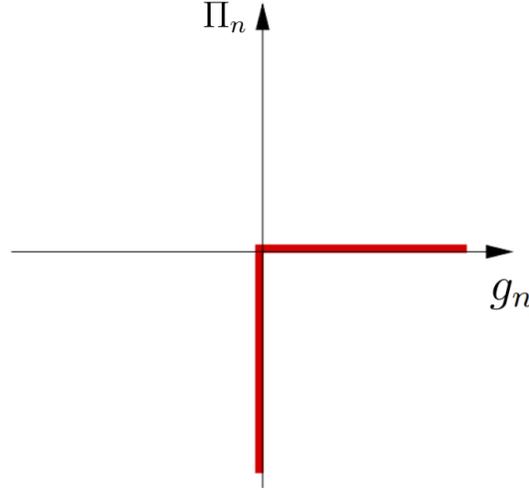


FIGURE 3.2 – Schématisation des conditions de Signorini.

\mathbf{g}_0 représente le vecteur des forces volumiques qui est distinct des fonctions gap normal g_n et tangentiel \mathbf{g}_t . La formulation faible est obtenue en multipliant l'équation issue de l'équilibre du moment linéaire par une fonction test $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$ et en effectuant une intégration par parties comme suit :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{w} d\Omega &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} d\Omega \\
 &= \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} d\Gamma + \int_{\Gamma_p} pJ(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \\
 &+ \int_{\Gamma_c} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{w} d\Omega
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

Une intégrale sur la zone potentielle de contact Γ_c représentant le travail virtuel des forces de contact apparaît et peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_c} \mathbf{P}\mathbf{N} \cdot \mathbf{w} d\Gamma &= \int_{\Gamma_c} (\Pi_n w_n + \mathbf{\Pi}_t \cdot \mathbf{w}_t) d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_c} \Pi_n w_n d\Gamma
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La pression tangentielle $\mathbf{\Pi}_t$ est nulle dans le cadre du contact non frottant. Les formulations relatives au contact tangentiel seront traitées par la suite dans ce chapitre. La formulation faible peut s'écrire ainsi de la façon suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \\ G(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = G_c(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \end{cases} \tag{3.16}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Omega} \rho_0 \ddot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{w} d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{w} d\Omega \\
&\quad - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{w} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} p J(\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} d\Gamma \\
G_c(\mathbf{u}, \mathbf{w}) &= \int_{\Gamma_c} \Pi_n w_n d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Les méthodes numériques présentées dans la partie suivante vont permettre d'approximer le travail virtuel des forces de contact G_c .

3.3.3 Méthodes numériques

Les conditions de Signorini 3.12 sont identiques aux conditions de KKT issues du problème d'optimisation sous contraintes. Le problème de mécanique non linéaire est réécrit sous forme de problème d'optimisation sous contraintes afin de montrer la pertinence des méthodes exposées ultérieurement. Pour des raisons de simplicité, le cadre quasi-statique est privilégié et la pression suiveuse est négligée afin que le système mécanique soit conservatif. Cependant, les méthodes présentées pour traiter les conditions de Signorini restent applicables dans un cadre plus général.

La solution du problème mécanique est le résultat de la minimisation de l'énergie potentielle définie par [Laurson 2003] :

$$\mathcal{W}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} W(\mathbf{E}) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{g}_0 \cdot \mathbf{u} d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbf{f}_0 \cdot \mathbf{u} d\Gamma \tag{3.18}$$

W est la densité de l'énergie de déformation définie dans le chapitre précédent. Le déplacement doit être recherché dans un espace \mathcal{K} dans lequel la condition de non-interpénétration est respectée.

$$\mathcal{K} = \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} \mid g_n(\mathbf{u}) \geq 0 \text{ sur } \Gamma_c\} \tag{3.19}$$

La solution du problème de contact unilatéral est alors donnée par :

$$\mathbf{u} = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{K}} \mathcal{W}(\mathbf{u}) \tag{3.20}$$

Les méthodes utilisées dans la résolution des problèmes d'optimisation sous contraintes sont maintenant présentées.

3.3.3.1 Multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange consiste à ajouter une inconnue supplémentaire λ_n afin d'imposer la condition de contact normal. La fonctionnelle à minimiser est alors définie par :

$$\mathcal{W}_L(\mathbf{u}, \lambda_n) = \mathcal{W} + \int_{\Gamma_c} \lambda_n g_n d\Gamma \tag{3.21}$$

Le problème d'optimisation sous contrainte d'inégalité 3.20 est équivalent au problème du point de selle suivant :

$$\inf_{\mathbf{u} \in \mathcal{V}} \sup_{\lambda_n \geq 0} \mathcal{W}_L(\mathbf{u}, \lambda_n) \quad (3.22)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème du point de selle 3.22 sont prouvées dans [Kikuchi 1988] et cette solution correspond à la solution du problème 3.20. De plus, cette dernière doit vérifier les conditions d'optimalité de premier ordre suivantes [Nocedal 1999] :

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{W} &= \left. \frac{d}{d\alpha} \mathcal{W}(\mathbf{u} + \alpha \mathbf{w}, \lambda_n) \right|_{\alpha=0} \\ &= G(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + \int_{\Gamma_c} \lambda_n w_n d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$g_n \geq 0, \quad \lambda_n \geq 0, \quad g_n \lambda_n = 0 \quad (3.24)$$

La formulation faible des équations de mouvement et les conditions de contact de Signorini sont retrouvées. Ceci justifie l'utilisation des techniques d'optimisation sous contraintes d'inégalité. Le multiplicateur de Lagrange λ_n n'est que l'opposé de la pression normale de contact.

$$\Pi_n = -\lambda_n \quad (3.25)$$

L'avantage de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est que la condition de contact normal est exactement respectée et que le multiplicateur de Lagrange calculé représente bien la pression normale de contact. Cependant, une inconnue supplémentaire est ajoutée au problème.

Une autre difficulté du problème de contact réside dans le fait que la zone active du contact est une inconnue du problème. La stratégie de contraintes actives est associée avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour traiter cette problématique [Nocedal 1999, Luenberger 2008]. Les points de la zone potentielle de contact sont répartis en deux ensembles. Le premier ensemble \mathcal{A} désigne l'ensemble des contraintes actives et le deuxième ensemble \mathcal{I} désigne l'ensemble des contraintes inactives.

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\mathbf{X} \in \Gamma_c \mid g_n(\mathbf{X}, t) = 0\} \\ \mathcal{I} &= \{\mathbf{X} \in \Gamma_c \mid g_n(\mathbf{X}, t) > 0\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

La stratégie des contraintes actives consiste à chercher itérativement la zone active de contact. En se donnant un choix initial de l'ensemble \mathcal{A}^0 , la résolution du problème 3.20 se ramène à un problème d'optimisation sous contrainte d'égalité suivant :

$$\mathbf{u}^k = \arg \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{A}^k} \mathcal{W}(\mathbf{u}) \quad (3.27)$$

À la fin de chaque itération, la contrainte de non-interpénétration est vérifiée pour tous les points appartenant à la zone potentielle de contact. En effet, un point \mathbf{X} de l'ensemble des contraintes inactives est inclus dans l'ensemble des contraintes actives \mathcal{A}^{k+1} si $g_n(\mathbf{X}, t) \leq 0$ et inversement, un point est transmis à l'ensemble des contraintes inactives \mathcal{I}^{k+1} si $g_n(\mathbf{X}, t) > 0$. Cette procédure est réitérée jusqu'à la convergence de l'ensemble des contraintes actives ($\mathcal{A}^{k+1} = \mathcal{A}^k$). Cette approche simple est facile à implémenter mais très coûteuse dans le cadre de la mécanique non linéaire puisque la résolution du problème nécessite le passage par deux boucles imbriquées. Une première boucle de Newton servant à la résolution des équations de mouvement et une deuxième boucle pour chercher la zone active de contact.

Une autre difficulté de la méthode des multiplicateurs de Lagrange est le choix des espaces d'approximation du déplacement et du multiplicateur de Lagrange étant donné que ceux-ci doivent vérifier la condition *inf-sup* afin d'assurer la stabilité de la résolution numérique [Barbosa 1991, Brezzi 1974].

Un autre inconvénient majeur de la méthode des multiplicateurs de Lagrange appliquée au problème de contact est le changement significatif de la structure creuse de la matrice tangente du problème global engendrant un coût de calcul plus élevé. D'autre part, le changement induit par la variation de l'ensemble des contraintes actives peut conduire à des difficultés de convergence de la procédure itérative de Newton. Deux méthodes alternatives peuvent palier à cette difficulté. C'est le cas de la méthode de pénalisation et celle du Lagrangien augmenté qui seront présentées par la suite.

3.3.3.2 Méthode de pénalisation

Afin d'éviter d'introduire des multiplicateurs de Lagrange comme variable supplémentaire et de conserver ainsi le format standard des équations de mouvement, la méthode de pénalisation peut servir comme alternative. Celle-ci consiste à approximer le travail virtuel des efforts de contact par [Laursen 2003, Wriggers 2003] :

$$\int_{\Gamma_c} \Pi_n w_n d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_n g_n^- w_n d\Gamma \quad (3.28)$$

ε_n est le paramètre de pénalisation normale et $g_n^- = \min(0, g_n)$ est la fonction de pénétration. La définition de la fonction pénétration permet de pénaliser seulement les points appartenant à la zone active du contact et de s'affranchir par conséquent de la stratégie des contraintes actives. D'ailleurs, la solution obtenue avec une pénalisation $\varepsilon_n = \infty$ est égale à la solution exacte obtenue avec les multiplicateurs de Lagrange [Kikuchi 1981]. Cependant, des grandes valeurs de ε_n engendrent un mauvais conditionnement de la matrice tangente.

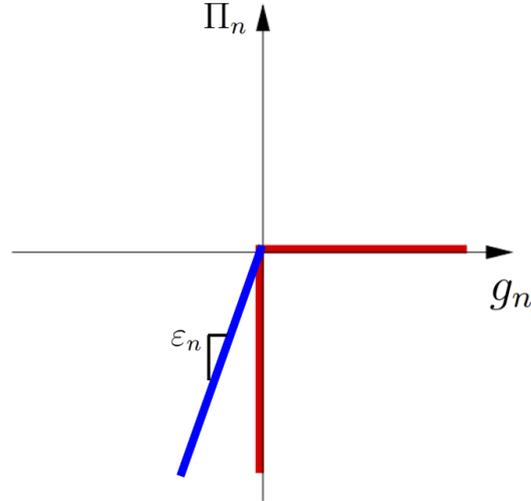


FIGURE 3.3 – Schématisation de l'approximation de loi de contact normal avec la méthode de pénalisation.

La figure 3.3 montre que la méthode de pénalisation autorise une pénétration dans la zone active de contact mais son implémentation numérique reste assez simple. Cette pénétration est contrôlée naturellement avec le coefficient de pénalisation ε_n . D'autre part, la méthode de pénalisation peut être interprétée comme l'insertion d'un ressort de rigidité ε_n agissant sur les points en contact avec la fondation rigide Γ_o .

3.3.3.3 Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté représente une combinaison judicieuse des méthodes de pénalisation et des multiplicateurs de Lagrange [J.C.Simo 1992, Mijar 2004]. Cette méthode consiste à utiliser un terme de pénalisation avec un coefficient ε_n suffisamment faible pour éviter le mauvais conditionnement de la matrice tangente tout en gardant un multiplicateur de Lagrange qui représente physiquement la pression normale de contact. Cette méthode consiste à approximer le travail virtuel des forces de contact de la façon suivante :

$$\int_{\Gamma_c} \Pi_n w_n d\Gamma = \int_{\Gamma_c} (\lambda_n + \varepsilon_n g_n)^- w_n d\Gamma \quad (3.29)$$

Il existe deux façons de résoudre le problème avec la méthode du Lagrangien augmenté. La première consiste à considérer le multiplicateur de Lagrange comme une inconnue du problème. Dans ce cas, le rôle de la pénalisation est de robustifier la convergence de la boucle de Newton comparé à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La deuxième façon consiste à utiliser l'algorithme d'Uzawa qui consiste à considérer les multiplicateurs comme étant fixes et de les mettre à jour suivant une procédure itérative. En se donnant un choix initial de multiplicateur $\lambda_n^0 = 0$, le multiplicateur de Lagrange est mis à jour selon le schéma itératif suivant après la

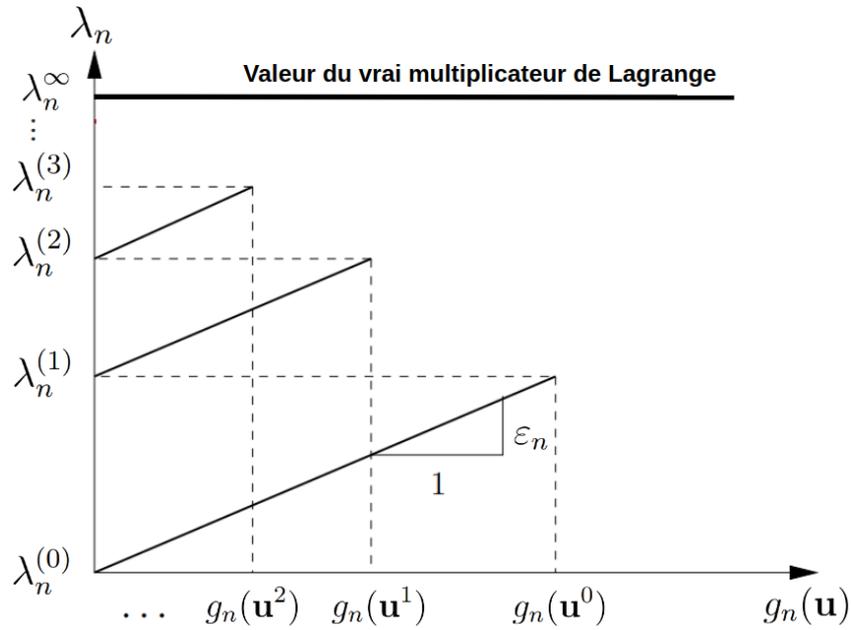


FIGURE 3.4 – Schématisation de la méthode du Lagrangien augmenté avec l'algorithme d'Uzawa [Popp 2012].

boucle de Newton du système mécanique.

$$\lambda_n^{k+1} = \lambda_n^k + \varepsilon_n g_n(\mathbf{u}^k) \quad (3.30)$$

Le schéma itératif 3.30 est réitéré jusqu'à ce qu'un critère de convergence soit respecté. Ce critère porte souvent sur la condition $g_n(\mathbf{u}^k) = 0$. Les propriétés de convergence de l'algorithme d'Uzawa peuvent être trouvées dans [Bacuta 2006, Langer 1986]. L'inconvénient de la méthode du Lagrangien augmenté est la boucle itérative de mise à jour du multiplicateur de Lagrange qui engendre un temps de calcul plus élevé que celui de la méthode de pénalisation.

3.4 Contact tangentiel

Les phénomènes physiques de frottement qui se produisent sur l'interface de contact s'avèrent très importants dans l'étude de l'interaction entre le pneumatique et la chaussée. La science qui s'occupe de l'étude de tels phénomènes est la tribologie. Celle-ci englobe les domaines de frottement, de l'usure, de l'adhésion et de la lubrification. Malgré la désignation relativement récente du domaine de la tribologie, des études scientifiques sur les frictions peuvent être datées dès 1493 avec les travaux de Léonard de Vinci, ou ceux de Guillaume Amontons en 1699 [Hutchings 2021] et de Coulomb en 1821 [Coulomb 1821] qui ont formalisé de façon simple et précise les phénomènes de frottement. La loi de frottement de Coulomb est adaptée pour la description macroscopique des phénomènes de frottement sec. Les lois d'interface qui prennent en compte des phénomènes physiques tels que l'usure, la lubrification ou l'adhésion peuvent être trouvées dans [Wriggers 2003].

Cette partie est consacrée à la formulation mathématique du contact adhérent et du contact frottant de Coulomb qui sera pris en compte par la suite dans la modélisation de la réponse vibratoire. Ensuite, la méthode de régularisation de la loi Coulomb est détaillée avec l'approximation du travail virtuel des efforts de frottement associée et choisie par la suite dans la résolution du problème de contact frottant.

3.4.1 Contact adhérent

Le contact est dit adhérent ou collant quand aucun mouvement relatif n'est autorisé sur l'interface de contact. La condition du contact adhérent peut alors être formulée cinématiquement à travers la vitesse de glissement ou le gap tangentiel comme suit [Wriggers 2003] :

$$\dot{\mathbf{g}}_{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{g}_{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \quad (3.31)$$

Cette contrainte cinématique sur l'interface de contact peut être traitée numériquement en introduisant un multiplicateur de Lagrange tangentielle $\lambda_{\mathbf{t}}$ qui représente la pression tangentielle de contact qui bloque le mouvement sur l'interface de contact. Le travail virtuel des forces tangentielles de contact est approximé par :

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \lambda_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (3.32)$$

Les méthodes utilisées dans le traitement des conditions de contact normal restent valables puisque le problème du contact adhérent peut toujours se mettre sous forme de problème de minimisation sous contraintes. Par exemple, la méthode de pénalisation consiste à approximer le travail virtuel des forces tangentielles de contact par :

$$\int_{\Gamma_c} \mathbf{\Pi}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{t}} \, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} \varepsilon_t \mathbf{g}_{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{w}_{\mathbf{t}} \, d\Gamma \quad (3.33)$$

ε_t est la pénalisation tangentielle et peut être perçue comme la rigidité d'un ressort empêchant le mouvement tangentiel des points appartenant à la zone active du contact.

3.4.2 Frottement de Coulomb

La loi de frottement sur l'interface de contact peut être introduite sous la forme générale suivante [Yastrebov 2011] :

$$\mathbf{\Pi}_t = \mathbf{\Pi}_t(\Pi_n, \dot{\Pi}_n, \dot{\mathbf{g}}_t, t, \dots) \quad (3.34)$$

$\dot{\Pi}_n$ est la dérivée temporelle de la pression normale de contact, $\dot{\mathbf{g}}_t$ est la vitesse de glissement et t représente le temps. Les travaux de Coulomb sur le frottement stipulent que la pression tangentielle de contact ne dépend que de la pression normale et de la direction de glissement.

$$\mathbf{\Pi}_t = \mathbf{\Pi}_t(\Pi_n, \mathbf{s}) \quad (3.35)$$

\mathbf{s} est un vecteur unitaire déterminant la direction de glissement et défini par :

$$\mathbf{s} = \begin{cases} \frac{\dot{\mathbf{g}}_t}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| > 0 \\ \mathbf{0} & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

Le mouvement d'un point dans la zone active du contact est déterminé par la valeur de la norme de la pression tangentielle. Celle-ci doit être toujours inférieure à une valeur critique proportionnelle à la pression normale dans le cadre du frottement de Coulomb.

$$\|\mathbf{\Pi}_t\| \leq \mu |\Pi_n| \quad (3.37)$$

μ est le coefficient de frottement. Dans le régime glissant, la pression tangentielle est donnée par :

$$\mathbf{\Pi}_t = -\mu |\Pi_n| \mathbf{s} \quad (3.38)$$

Cette condition peut être généralisée au régime adhérent en la multipliant par la norme de la vitesse de glissement $\|\dot{\mathbf{g}}_t\|$. La figure 3.5 illustre la différence entre le régime glissant et adhérent.

$$\|\dot{\mathbf{g}}_t\| \mathbf{\Pi}_t = -\mu |\Pi_n| \dot{\mathbf{g}}_t \quad (3.39)$$

La condition de complémentarité permettant de distinguer le régime glissant et adhérent est donnée par :

$$\|\mathbf{s}\| \|\mathbf{\Pi}_t + \mu |\Pi_n| \mathbf{s}\| = 0 \quad (3.40)$$

Les équations 3.37, 3.39 et 3.40 forment les conditions de loi de frottement de Coulomb.

$$\|\mathbf{\Pi}_t\| \leq \mu |\Pi_n|, \quad \|\dot{\mathbf{g}}_t\| \mathbf{\Pi}_t = -\mu |\Pi_n| \dot{\mathbf{g}}_t, \quad \|\mathbf{s}\| \|\mathbf{\Pi}_t + \mu |\Pi_n| \mathbf{s}\| = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c \quad (3.41)$$

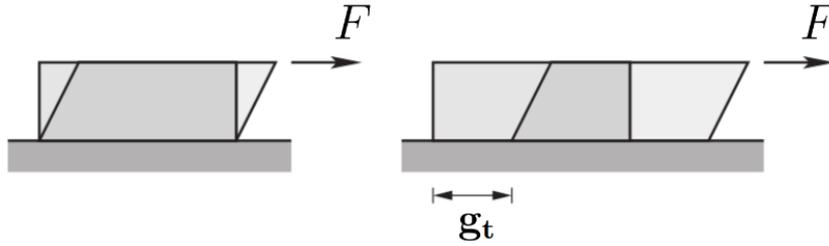


FIGURE 3.5 – Schématisation du régime adhérent et du régime glissant.

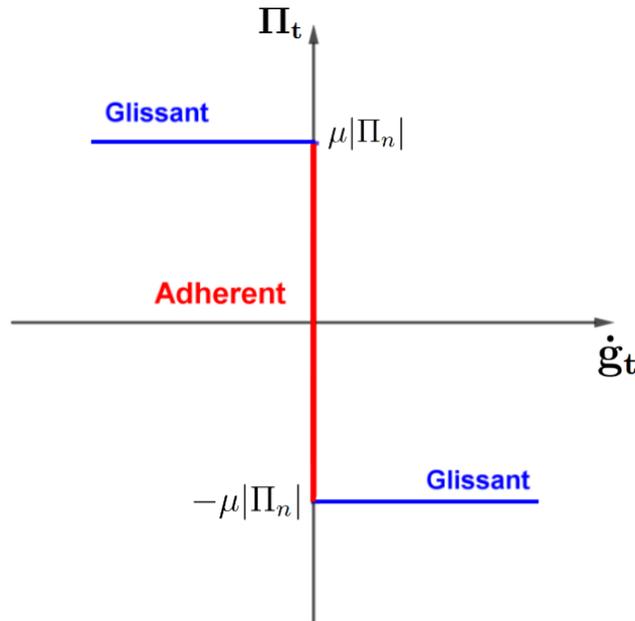


FIGURE 3.6 – Schématisation du frottement de Coulomb.

La loi de frottement de Coulomb est schématisée sur la figure 3.6 dans le cas 2D. Le coefficient de frottement est souvent choisi en fonction du type des matériaux qui composent l'interface de contact. Cependant, ce coefficient peut dépendre d'autres paramètres tels que la rugosité de la zone de contact, la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{g}}_t$, la pression normale de contact ou de la température. Un exemple de dépendance de μ vis-à-vis de la vitesse de glissement est donné par :

$$\mu(\dot{\mathbf{g}}_t) = \mu_d + (\mu_s - \mu_d)e^{-c\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} \quad (3.42)$$

μ_d est le coefficient de frottement dynamique et μ_s est le coefficient de frottement statique qui est supérieur à μ_d . La relation 3.42 montre que $\mu \approx \mu_d$ pour les grandes valeurs de vitesse de glissement et $\mu = \mu_s$ pour le régime adhérent. Le paramètre $c > 0$ définit l'écart entre μ_d et μ_s . Dans le cas où la rugosité de l'interface ou la vitesse de glissement ne varient pas énormément, le coefficient de frottement peut être supposé constant.

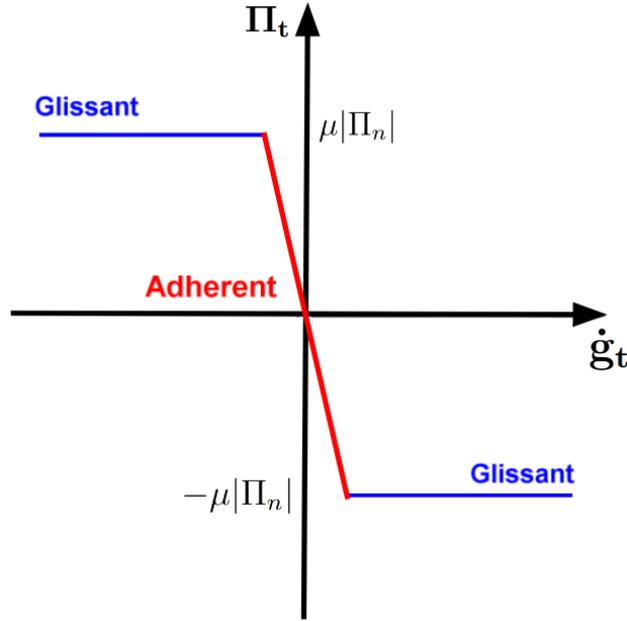


FIGURE 3.7 – Schématisation de la régularisation de la loi frottement de Coulomb.

3.4.3 Régularisation de la loi de Coulomb

La loi de frottement de Coulomb, illustrée sur la figure 3.6, est une loi non linéaire multi-valuée et non différentiable. Le problème de contact frottant engendre une dissipation rendant le système non conservatif. Les techniques numériques issues de la théorie de l'optimisation ne sont plus utilisables puisque le problème ne peut plus se mettre sous forme de problème de minimisation. Pour ces différentes raisons, la loi est régularisée en introduisant un paramètre ε_r permettant de séparer le régime adhérent du régime glissant. Une régularisation linéaire continue est illustrée sur la figure 3.7 et sera utilisée par la suite.

La régularisation permet de relier la pression tangentielle Π_t de contact avec la vitesse de glissement $\dot{\mathbf{g}}_t$ comme suit :

$$\mathbf{\Pi}_t = -\mu|\Pi_n| \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_r} \left(2 - \frac{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|}{\varepsilon_r} \right) \dot{\mathbf{g}}_t & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| < \varepsilon_r \\ \frac{1}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} \dot{\mathbf{g}}_t & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| \geq \varepsilon_r \end{cases} \quad (3.43)$$

Le loi classique de Coulomb est retrouvée quand $\varepsilon_r \rightarrow 0$. Cependant, le choix de faibles valeurs de ε_r peut induire un mal-conditionnement de la matrice tangente. D'autres lois de régularisation continues et dérivables (quadratique, tangente hyperbolique) peuvent être trouvées dans [Wriggers 2003].

Le travail virtuel des forces de frottement est alors approximé de la façon sui-

vante :

$$\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\Pi}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} -\mu |\Pi_n| \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_r} \left(2 - \frac{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|}{\varepsilon_r} \right) \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| < \varepsilon_r \\ \frac{1}{\|\dot{\mathbf{g}}_t\|} \dot{\mathbf{g}}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma & \text{si } \|\dot{\mathbf{g}}_t\| \geq \varepsilon_r \end{cases} \quad (3.44)$$

Dans le cadre quasi-statique, la vitesse de glissement peut être approximée avec un schéma de différences finies afin de conserver une formulation en déplacement.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{g}}_t &\approx \frac{\Delta \mathbf{g}_t}{\Delta t} \\ &\approx \frac{\mathbf{g}_t - \mathbf{g}_t^p}{\Delta t} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Δt est le pas de temps "quasi-statique" et \mathbf{g}_t^p est le gap tangentiel à l'instant précédent $t - \Delta t$. Le pas de temps Δt n'a pas d'incidence sur la loi de frottement de Coulomb 3.41. L'approximation du travail des forces de frottement peut alors s'écrire en fonction de la variation du gap tangentiel $\Delta \mathbf{g}_t$ comme suit :

$$\int_{\Gamma_c} \boldsymbol{\Pi}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma = \int_{\Gamma_c} -\mu |\Pi_n| \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_r} \left(2 - \frac{\|\Delta \mathbf{g}_t\|}{\varepsilon_r} \right) \Delta \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma & \text{si } \|\Delta \mathbf{g}_t\| < \varepsilon_r \\ \frac{1}{\|\Delta \mathbf{g}_t\|} \Delta \mathbf{g}_t \cdot \mathbf{w}_t \, d\Gamma & \text{si } \|\Delta \mathbf{g}_t\| \geq \varepsilon_r \end{cases} \quad (3.46)$$

La contribution du travail virtuel des forces de frottement à la matrice tangente globale du système peut être trouvée dans [Fortin 2020].

3.5 Conclusion

La formulation mathématique du problème de contact unilatéral d'un solide déformable avec une fondation rigide a été présentée dans ce chapitre. Les techniques numériques d'optimisation sous contraintes d'inégalité sont utilisées dans le traitement des conditions normales étant donné que celles-ci sont identiques aux conditions d'optimalité du premier ordre (KKT). Le frottement de Coulomb a été introduit et sera utilisé par la suite puisqu'il représente un modèle pertinent du frottement macroscopique sec. Une régularisation linéaire par morceaux est aussi choisie par la suite pour le traitement numérique du frottement de Coulomb. La discrétisation par éléments finis et l'intégration temporelle du problème de contact frottant n'ont pas été abordées dans ce chapitre. Le lecteur intéressé par ces aspects peut consulter les ouvrages [Wriggers 2003, Laursen 2003]. Les chapitres 2 et 3 fournissent le cadre complet de la modélisation de la dynamique non linéaire des pneumatiques avec les méthodes numériques utilisées dans la simulation numérique. Ce cadre servira pour présenter la méthodologie numérique de la simulation de la réponse vibratoire des pneumatiques dans le chapitre suivant.

Modélisation et simulation de la réponse vibratoire

Sommaire

4.1	Introduction	86
4.2	Méthode de linéarisation	87
4.3	Système masses - ressorts	91
4.3.1	Mise en équation	91
4.3.2	Résultats numériques	93
4.4	Prototype	101
4.4.1	Présentation de la structure	101
4.4.2	Roulage quasi-statique	103
4.4.3	Réponse vibratoire	111
4.4.4	Conclusion	118
4.5	Conclusion	122

4.1 Introduction

La modélisation de la réponse dynamique du pneumatique nécessite non seulement le traitement de plusieurs non-linéarités (non-linéarité géométrique, loi de comportement, contact entre le pneu et la chaussée) mais aussi la prise en compte du caractère à deux échelles de celle-ci. En effet, la réponse dynamique du pneumatique est la résultante d'une dynamique macroscopique de roulage qui opère autour de la fréquence de rotation avec des amplitudes ayant un ordre de grandeur similaire aux dimensions du pneu d'une part, et d'une réponse vibratoire induite par la rugosité de la chaussée et la résonance de la sculpture de la bande de roulement d'autre part [Ling 2021, Sandberg 2002].

Une approche directe de simulation consiste à résoudre le problème dynamique par une intégration temporelle avec un schéma numérique conservatif, stable et capable de donner l'intégralité de la réponse dynamique [Gonzalez 2000b, Hauret 2004]. Cependant, le coût de calcul considérable inhérent à cette approche rend celle-ci inadaptée pour les applications industrielles. Une autre stratégie consiste à perturber une configuration de référence pour calculer la réponse vibratoire. La méthode proposée et mise en place dans le cadre de ces travaux de thèse consiste alors à effectuer une première simulation quasi-statique non-linéaire afin d'éviter le passage par un schéma d'intégration temporelle. Ensuite, le problème dynamique est linéarisé en prenant la configuration quasi-statique comme point de fonctionnement. La résolution d'un problème linéaire avec un schéma d'intégration temporelle permet ensuite de calculer la réponse vibratoire.

La formulation mathématique de la méthodologie développée est détaillée dans un premier temps. Les hypothèses effectuées sont introduites et justifiées. Ensuite, deux études numériques sont réalisées. La première concerne la simulation de la réponse dynamique d'un système masses/ressorts non-linéaire. Un ressort de raideur cubique compose ce système et représente la non-linéarité considérée. La solution donnée par une intégration temporelle est comparée avec la solution de la méthode développée afin de statuer sur sa validité par rapport à cette raideur cubique. La deuxième application concerne la simulation de la réponse vibratoire d'un prototype en roulage sur un sol rigide. La géométrie et la loi de comportement relativement simples du prototype permettent de calculer une solution de référence avec une intégration temporelle classique. Celle-ci va servir à donner des éléments de validation de la méthodologie et de déterminer les limites de la modélisation.

4.2 Méthode de linéarisation

L'idée principale de la méthodologie proposée est de linéariser le problème dynamique en utilisant la configuration quasi-statique comme point de fonctionnement. La formulation mathématique de la méthode est détaillée dans cette section. Les hypothèses effectuées sont explicitées et justifiées. Toutes les grandeurs mathématiques présentées seront indexées par 1 (respectivement 2) pour le problème quasi-statique (respectivement dynamique). Un contact unilatéral est considéré entre le domaine ayant Ω comme configuration de référence et un plan rigide de normale \mathbf{n}_c . Les notations introduites dans les chapitres précédents sont reprises dans les développements qui suivent. L'opérateur gradient par rapport aux coordonnées de la configuration de référence $\nabla_{\mathbf{X}}$ est désormais noté ∇ afin d'alléger les notations.

Le problème variationnel à résoudre pour calculer la réponse quasi-statique est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_1 \in \mathcal{U} \\ \int_{\Omega} \mathbf{P}_1 : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_1^c \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

\mathbf{R}_e représente le terme variationnel des efforts extérieurs et \mathbf{R}_1^c est le terme variationnel des efforts de contact.

Le problème variationnel à résoudre pour calculer la réponse dynamique est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_2 \in \mathcal{U} \\ \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_2 \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{P}_2 : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = \mathbf{R}_e + \mathbf{R}_2^c \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

ρ est la masse volumique. \mathbf{R}_e représente le terme variationnel des efforts extérieurs qui est identique à celui du problème quasi-statique. \mathbf{R}_2^c est le terme variationnel des efforts de contact.

L'expression mathématique de \mathbf{R}_1^c et de \mathbf{R}_2^c dépend du type de contact considéré (glissant, adhérent, frottant) et de la méthode numérique utilisée pour la gestion des conditions de contact (pénalisation, Lagrangien augmenté...) [Wriggers 2003].

L'hypothèse principale de la méthode est que le déplacement dynamique \mathbf{u}_2 est la résultante du déplacement quasi-statique \mathbf{u}_1 et de la réponse vibratoire \mathbf{u}_v . Les termes d'ordre supérieur sont négligés ($\|\mathbf{u}_v\| \ll 1$).

$$\mathbf{u}_2(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}_1(\mathbf{X}, t) + \mathbf{u}_v(\mathbf{X}, t) + o(\mathbf{u}_v) \quad (4.3)$$

L'effet de l'inertie est pris en compte uniquement dans le calcul des vibrations et un processus quasi-statique est supposé suffisant pour décrire le roulage macro-

scopique de la structure. En effet, le temps caractéristique des effets de l'inertie est supposé inférieur à celui de l'excitation de la réponse vibratoire et supérieur à celui du roulage macroscopique.

$$t_{vibration} < t_{inertie} = \sqrt{\frac{m_e}{k_e}} < t_{roulage} \quad (4.4)$$

m_e (respectivement k_e) est une grandeur caractérisant la masse (respectivement la rigidité) globale de la structure comme la norme de la matrice de masse (respectivement de raideur) par exemple.

La condition aux limites de Dirichlet est la même pour les deux problèmes. Ainsi, un déplacement vibratoire nul est imposé sur Γ_u :

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{0} \quad \text{sur } \Gamma_u$$

La zone active du contact et les termes variationnels des efforts de contact sont supposés invariants entre les deux problèmes.

$$\Gamma_{c,1}^t \approx \Gamma_{c,2}^t \approx \Gamma_c^t, \quad \mathbf{R}_2^c \approx \mathbf{R}_1^c$$

En réalité, la zone active de contact n'est pas vraiment identique entre les deux problèmes étant donné que l'inertie change la rigidité de contact et modifie par conséquent la forme de celle-ci [Winroth 2014]. Le changement induit par la variation de la rigidité est supposé négligeable. Une autre différence notable entre les termes variationnels des efforts de contact est le calcul de la vitesse de glissement dans le cas du contact frottant. Celle-ci est approximée par un schéma de différences finies dans le calcul quasi-statique alors qu'elle est égale à la vitesse tangentielle dans le calcul dynamique. Cependant, la loi de frottement de Coulomb est principalement formulée à partir de la direction de glissement (équation 3.41).

La composante normale du déplacement dans la zone active du contact est déterminée par la position du sol rigide pour les deux problèmes. Ainsi, les vibrations normales sont nulles sur la zone active du contact Γ_c^t donnée par la résolution du problème quasi-statique.

$$\mathbf{u}_v \cdot \mathbf{n}_c = 0 \quad \text{sur } \Gamma_c^t \quad (4.5)$$

\mathbf{n}_c est la normale du sol rigide. Cette condition aux limites est une interprétation de conditions de contact comme une condition aux limites de Dirichlet. Celle-ci est problématique d'un point de vue mathématique étant donné que la zone active de contact Γ_c^t n'est pas attachée à un domaine matériel fixe. En effet, l'aire de contact est spatialement incluse dans la déformée de la zone potentielle $\varphi(\Gamma_c, t)$. Cependant, son implémentation numérique ne pose pas de difficulté particulière après une discrétisation par éléments finis.

Les grandeurs mécaniques du problème dynamique sont exprimées en fonction des grandeurs du problème quasi-statique tout en négligeant les termes d'ordre supérieur. La linéarisation des tenseurs de déformation s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_2 &= \mathbf{F}_1 + \nabla \mathbf{u}_v \\
\mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{F}_1^\top \nabla \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_v \mathbf{F}_1 + \underbrace{\nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{u}_v}_{\approx 0}) \\
&= \mathbf{E}_1 + \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_1 \nabla \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{u}_1) \\
&= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

La loi de comportement se linéarise de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_2 &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}_2) \\
&= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}) \\
&= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}_1) + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}}(\mathbf{E}_1) : \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1} \\
&= \mathbf{S}_1 + \mathcal{C}_1 : \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Avec les expressions obtenues dans (4.6) et (4.7), la linéarisation du terme variationnel de déformation est effectuée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_2 : \nabla \mathbf{w} &= \mathbf{S}_2 : (\mathbf{F}_2^\top \nabla \mathbf{w}) \\
&= (\mathbf{S}_1 + \mathcal{C} : \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}) : (\mathbf{F}_1^\top \nabla \mathbf{w} + \nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{w}) \\
&= \mathbf{P}_1 : \nabla \mathbf{w} + \mathbf{S}_1 : \nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{w} + (\mathcal{C} : \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}) : (\mathbf{F}_1^\top \nabla \mathbf{w})
\end{aligned} \tag{4.8}$$

En remplaçant l'équation (4.3) dans le problème variationnel dynamique (4.2) et en négligeant les termes d'ordre supérieur, le problème variationnel à résoudre pour calculer la réponse vibratoire est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}_v \in \mathcal{V} \\ \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_v \cdot \mathbf{w} \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{S}_1 : \nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{w} + (\mathcal{C}_1 : \mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1}) : (\mathbf{F}_1^\top \nabla \mathbf{w}) \, d\Omega = - \int_{\Omega} \rho \ddot{\mathbf{u}}_1 \cdot \mathbf{w} \, d\Omega \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V} \tag{4.9}$$

avec

$$\mathbf{E}_{\mathbf{u}_v, \mathbf{u}_1} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_1 \nabla \mathbf{u}_v + \nabla^\top \mathbf{u}_v \nabla \mathbf{u}_1)$$

Le problème à résoudre pour obtenir la réponse vibratoire est par conséquent linéaire par rapport à \mathbf{u}_v . Le terme variationnel de déformation représente naturellement la matrice tangente de rigidité du problème quasi-statique [Fortin 2020]. La force d'excitation du problème vibratoire dépend de l'accélération quasi-statique $\ddot{\mathbf{u}}_1$. Un schéma de différences finies est utilisé pour approximer cette accélération. L'erreur d'approximation induite par la dérivation numérique est la résultante d'une

erreur d'arrondi déterminée par le nombre de chiffres significatifs et d'une erreur de troncature déterminée par le pas de discrétisation. D'ailleurs, la dérivation numérique amplifie le bruit numérique en hautes fréquences. Plusieurs solutions existent pour traiter ces différentes problématiques. Un filtre passe-bas peut être utilisé pour filtrer ce bruit. Sa fréquence de coupure est choisie selon la limite du domaine fréquentiel étudié. Une autre technique consiste à interpoler le déplacement avec des fonctions dérivables (polynômes d'interpolation, splines) avant d'effectuer la dérivation numérique [Knowles 2012].

Les conditions initiales du problème vibratoire sont extraites à partir des résultats du calcul quasi-statique et les conditions initiales du problème dynamique :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_v(\mathbf{X}, 0) &= \mathbf{u}_2(\mathbf{X}, 0) - \mathbf{u}_1(\mathbf{X}, 0) \\ \dot{\mathbf{u}}_v(\mathbf{X}, 0) &= \dot{\mathbf{u}}_2(\mathbf{X}, 0) - \dot{\mathbf{u}}_1(\mathbf{X}, 0)\end{aligned}\tag{4.10}$$

La vitesse quasi-statique initiale est aussi approximée avec un schéma de différences finies. Le problème vibratoire linéaire peut être résolu, après une discrétisation par éléments finis, avec une intégration temporelle. Il dépend des résultats du problème quasi-statique. La discrétisation temporelle du problème vibratoire est alors identique à celle utilisée dans la résolution du problème quasi-statique.

4.3 Système masses - ressorts

Cette section est consacrée à l'application de la méthode de linéarisation au système mécanique illustré sur la figure 4.1. Ce système est composé de deux masses m_1 et m_2 . Un ressort de raideur k_2 relie les deux masses. La masse m_1 est attachée au bâti avec un ressort de raideur k_1 monté parallèlement avec un ressort non-linéaire de raideur cubique k_{NL} . Cette non-linéarité polynomiale est choisie pour deux raisons. Elle permet d'une part le calcul analytique de la matrice jacobienne et d'utiliser par conséquent la méthode de Newton dans des conditions optimales pour la résolution des équations de mouvement. D'autre part, la raideur cubique est parfois utilisée dans la modélisation des forces de contact [Sinou 2017] qui sont essentielles dans l'étude de la réponse dynamique des pneumatiques. Une force extérieure $f(t)$ est appliquée sur la masse m_2 . L'objectif de cette section est d'étudier la validité de la linéarisation pour différentes valeurs de la raideur non-linéaire k_{NL} .

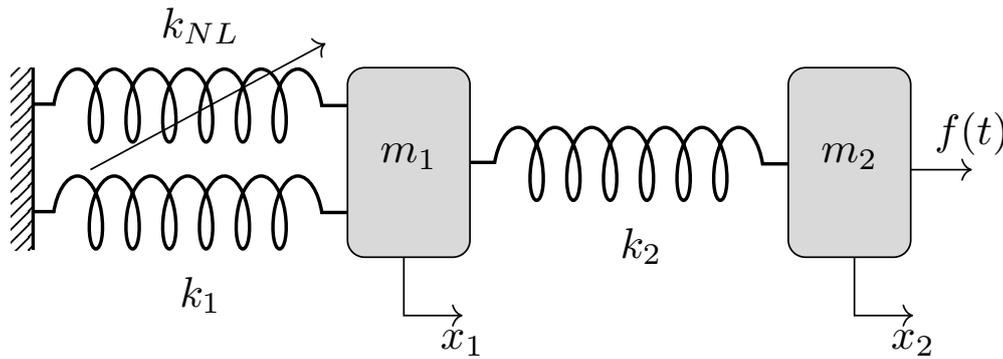


FIGURE 4.1 – Le système masses - ressorts étudié.

4.3.1 Mise en équation

Le principe fondamental de la dynamique est appliqué sur chaque masse afin d'obtenir les équations de mouvement de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -k_1 x_1 - k_{NL} x_1^3 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -k_2 (x_2 - x_1) + f(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Les équations de mouvement peuvent alors être mises sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_{NL}(\mathbf{X}) \quad (4.12)$$

Avec

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 + A \cos(\omega_e t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -k_{\text{NL}} x_1^3 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.13)$$

La force extérieure $f(t)$ est composée d'une force statique F_0 et d'une force sinusoïdale ayant A comme amplitude et ω_e comme fréquence d'excitation. Les conditions initiales sont formulées de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(0) &= \mathbf{X}_0 \\ \dot{\mathbf{X}}(0) &= \dot{\mathbf{X}}_0 \end{aligned} \quad (4.14)$$

Le déplacement \mathbf{X} est décomposé en une réponse quasi-statique \mathbf{X}_{QS} et une réponse vibratoire \mathbf{W} .

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_{\text{QS}}(t) + \mathbf{W}(t) \quad (4.15)$$

Le déplacement quasi-statique est défini comme la solution du problème 4.12 en négligeant le terme d'inertie.

$$\mathbf{K}\mathbf{X}_{\text{QS}}(t) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}}) \quad (4.16)$$

Le déplacement quasi-statique est calculé avec la méthode de Newton. La décomposition du déplacement 4.15 est injectée dans les équations de mouvement comme suit :

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{X}}_{\text{QS}} + \ddot{\mathbf{W}}) + \mathbf{K}(\mathbf{X}_{\text{QS}} + \mathbf{W}) = \mathbf{F}(t) + \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}} + \mathbf{W}) \quad (4.17)$$

La force non linéaire est linéarisée autour du déplacement quasi-statique :

$$\mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}} + \mathbf{W}) \approx \mathbf{F}_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}}) + \mathbf{F}'_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}})\mathbf{W} \quad (4.18)$$

$\mathbf{F}'(\mathbf{X}_{\text{QS}})$ est la matrice jacobienne relative à la force non linéaire définie par :

$$\mathbf{F}'_{\text{NL}}(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} -3k_{\text{NL}}x_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Finalement, le déplacement \mathbf{W} est obtenu en résolvant le système matriciel suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + (\mathbf{K} - \mathbf{F}'_{\text{NL}}(\mathbf{X}_{\text{QS}}))\mathbf{W} = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}_{\text{QS}} \quad (4.20)$$

Le problème 4.20 est linéaire par rapport à \mathbf{W} . L'accélération quasi-statique apparaît comme la force d'excitation et est approximée numériquement avec un schéma de différences finies. La matrice de raideur dépend du déplacement quasi-statique \mathbf{X}_{QS} . Les conditions initiales du problème 4.20 sont obtenues à partir des conditions initiales du problème 4.12.

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(0) &= \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_{\text{QS}}(0) \\ \dot{\mathbf{W}}(0) &= \dot{\mathbf{X}}_0 - \dot{\mathbf{X}}_{\text{QS}}(0) \end{aligned} \quad (4.21)$$

La vitesse quasi-statique initiale $\dot{\mathbf{X}}_{\text{QS}}(0)$ est approximée numériquement avec un schéma de différences finies au même titre que l'approximation de l'accélération quasi-statique $\ddot{\mathbf{X}}_{\text{QS}}$.

4.3.2 Résultats numériques

Une intégration temporelle avec un schéma de Crank-Nicolson est utilisée pour résoudre les problèmes 4.12 et 4.20 puisque celui-ci est inconditionnellement stable et est d'ordre 2 en précision dans le cadre de la dynamique linéaire. Ceci permettra de comparer la solution obtenue par l'intégration temporelle avec la solution obtenue par la linéarisation pour différentes valeurs de k_{NL} . Les résultats numériques présentés sont calculés avec les valeurs numériques regroupées dans le tableau 4.1 et avec les conditions initiales $\{\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_{QS}(0), \dot{\mathbf{X}}_0 = \dot{\mathbf{X}}_{QS}(0)\}$. Les conditions initiales du problème vibratoire sont alors homogènes et compatibles avec l'hypothèse de linéarisation ($\|\mathbf{W}\| \ll 1$). Le pas de temps utilisé dans la simulation correspond au résultat d'une étude de convergence par rapport à celui-ci.

Un écart relatif entre les deux solutions est utilisé afin de quantifier la différence entre les deux méthodes. Cet écart est défini par :

$$\text{Err} = \frac{\|\mathbf{X} - \mathbf{X}_{QS} - \mathbf{W}\|_{\infty}}{\|\mathbf{X}\|_{\infty}} \quad (4.22)$$

Les figures 4.2, 4.4, 4.6, 4.8, 4.10, 4.12 et le tableau 4.2 montrent que l'écart relatif

$m_1(\text{kg})$	$m_2(\text{kg})$	$k_1(\text{N.m}^{-1})$	$k_2(\text{N.m}^{-1})$	$F_0(\text{N})$	$A(\text{N})$	$\omega_e(\text{rad.s}^{-1})$	$\Delta t(\text{s})$
8	17	$5 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^6$	10^5	10^3	$2\pi 10^2$	10^{-7}

TABLE 4.1 – Paramètres numériques de la simulation.

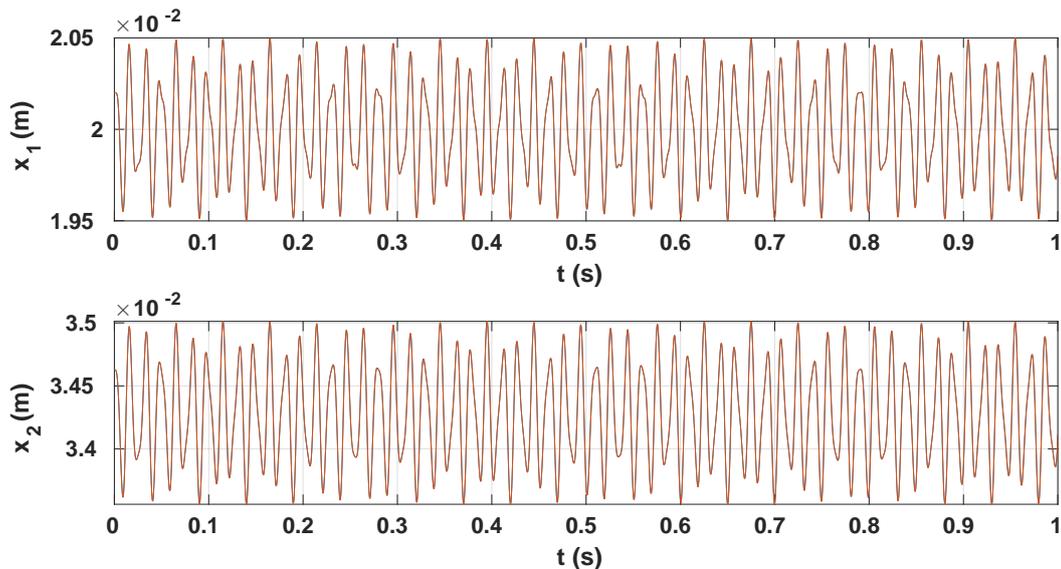


FIGURE 4.2 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 0 \text{ N.m}^{-3}$.

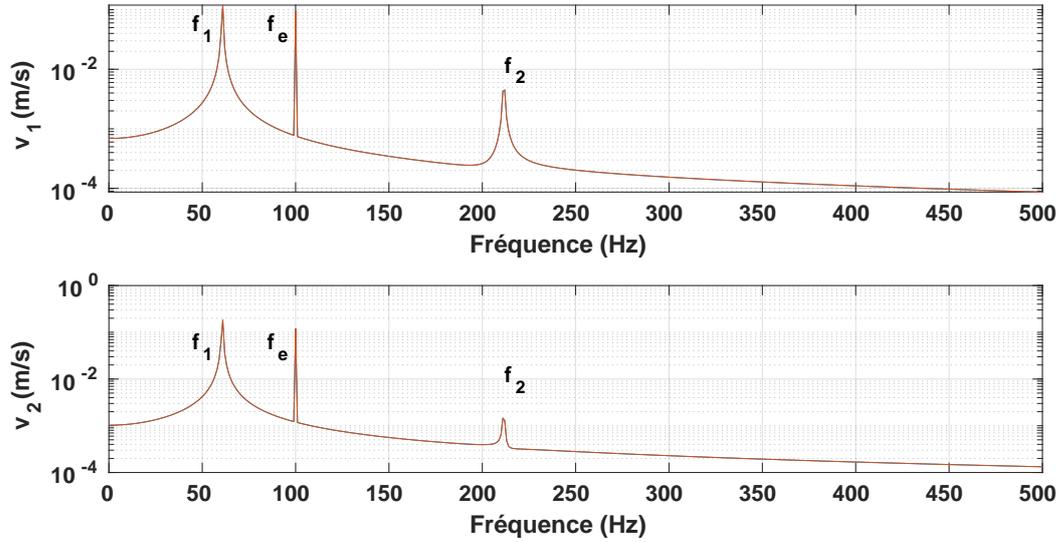


FIGURE 4.3 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 0 \text{ N.m}^{-3}$.

$k_{NL} \text{ (N.m}^{-3}\text{)}$	0	10^8	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{14}
Err (%)	3.10^{-8}	6.10^{-4}	0.01	0.1	1.3	58.6

TABLE 4.2 – Écart relatif entre la solution obtenue par l'intégration temporelle et la solution obtenue par la linéarisation pour différentes valeurs de k_{NL} .

entre les deux méthodes s'accroît en augmentant la valeur de la raideur cubique k_{NL} mais celui-ci reste à peu près négligeable à l'exception du cas où $k_{NL} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$.

Dans le cas linéaire ($k_{NL} = 0$), le faible écart relatif est dû à l'approximation par différences finies de l'accélération quasi-statique. Le spectre fréquentiel des vitesses, illustré sur la figure 4.3, est composé de deux harmoniques localisées autour des deux fréquences propres $f_{1,2} = \{61, 212\} \text{ Hz}$ qui correspondent à la signature fréquentielle de la réponse libre induite par les conditions initiales et l'absence de l'amortissement. La troisième harmonique correspond naturellement à la fréquence de la réponse forcée induite par l'excitation ($f_e = 100 \text{ Hz}$).

La figure 4.4 montre que la réponse dynamique calculée avec $k_{NL} = 10^8 \text{ N.m}^{-3}$ est plus ou moins identique à celle obtenue dans le cadre linéaire. Le spectre des vitesses (figure 4.5) montre une légère distorsion harmonique qui se traduit par l'apparition d'une harmonique autour de $2f_e$. Cependant, l'amplitude autour de cette fréquence reste très faible.

L'augmentation de la raideur cubique ($k_{NL} \geq 10^{10} \text{ N.m}^{-3}$) engendre une altération de la réponse dynamique par rapport au cas linéaire. Des phénomènes de distorsion harmonique des oscillations sont identifiés sur les spectres des figures 4.7, 4.9 et 4.11. En effet, la non-linéarité cubique induit une variation des fréquences de réso-

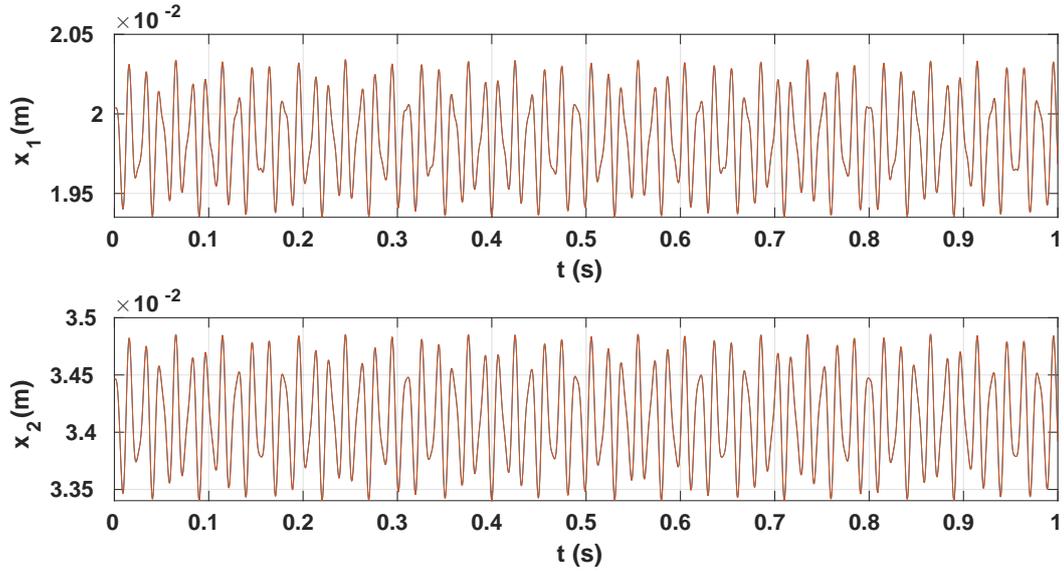


FIGURE 4.4 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{\text{NL}} = 10^8 \text{ N.m}^{-3}$.

nance puisque celles-ci dépend de l'amplitude de vibration. En outre, des résonances secondaires sont observées avec l'apparition d'une sous-harmonique localisée autour de $f = f_e - f_1$ et de super-harmoniques localisées autour de $f = \{2f_1, f_1 + f_e, 2f_e\}$ [Bergeot 2021, Thomas 2011].

Les figures 4.12 et 4.13 montrent que le système devient instable pour $k_{\text{NL}} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$. Cette instabilité n'est pas reproduite par la méthode de linéarisation puisque l'amplification de l'amplitude des composantes de \mathbf{X} au cours du temps n'est plus compatible avec l'hypothèse de linéarisation ($\|\mathbf{W}\| \ll 1$).

Cette première étude numérique montre que la méthode de linéarisation proposée permet de retrouver la solution calculée avec une intégration temporelle classique à condition que l'hypothèse de linéarisation soit respectée. Cette première validation est encourageante et ouvre la porte vers des applications prenant en compte les non-linéarités intégrées dans la modélisation de la réponse dynamique des pneumatiques.

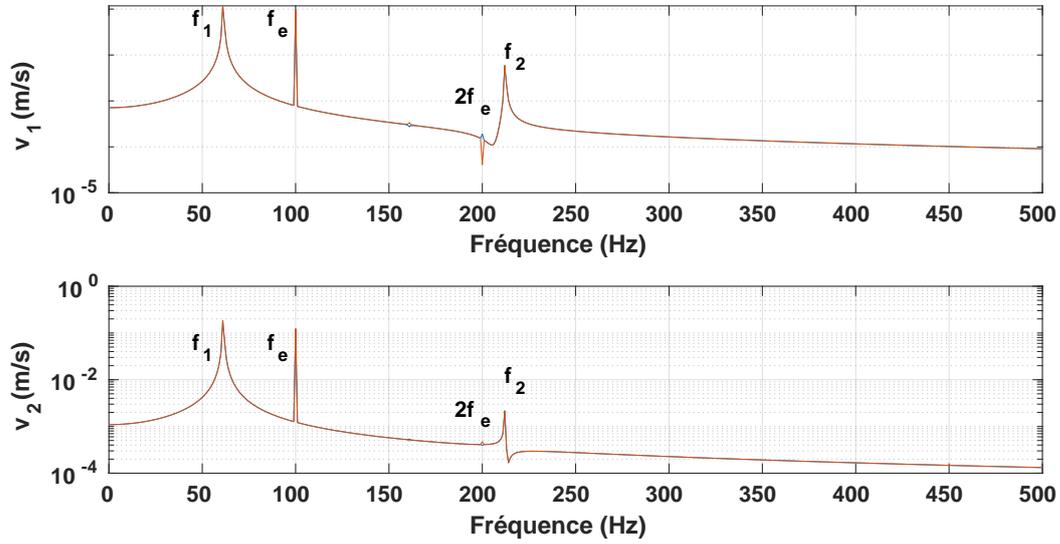


FIGURE 4.5 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^8 \text{ N.m}^{-3}$.

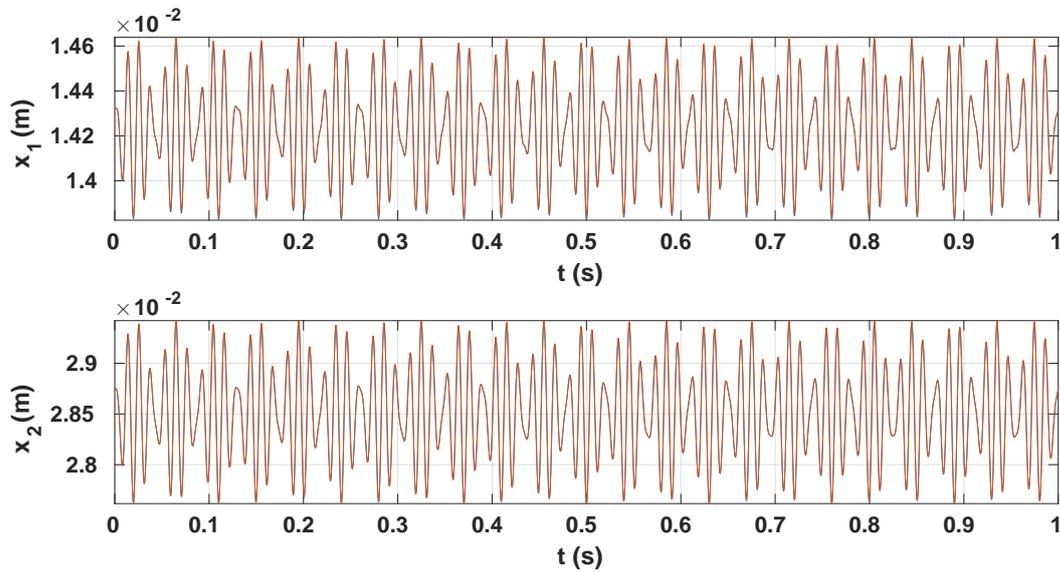


FIGURE 4.6 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{10} \text{ N.m}^{-3}$.

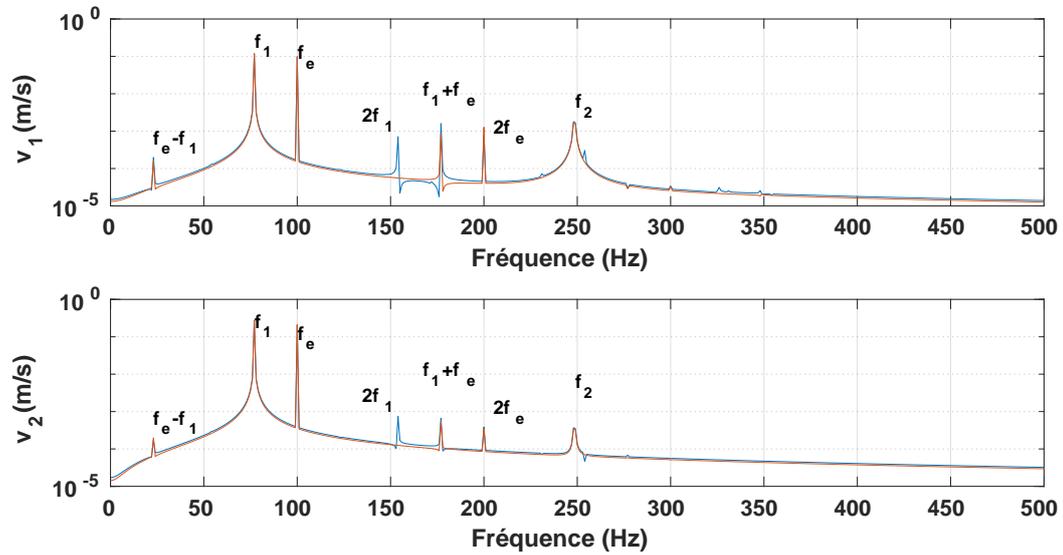


FIGURE 4.7 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{\text{NL}} = 10^{10} \text{ N.m}^{-3}$.

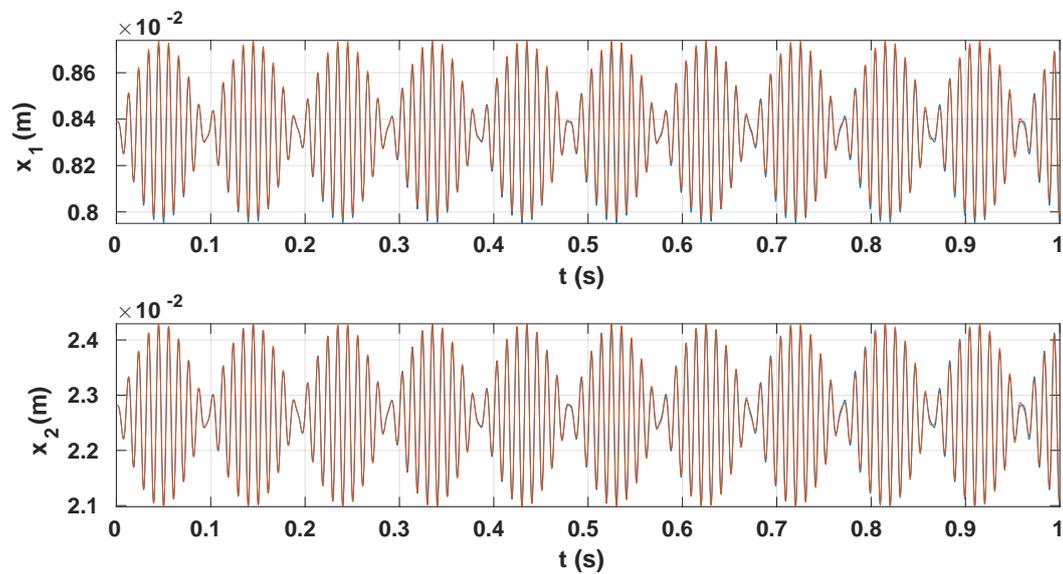


FIGURE 4.8 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{\text{NL}} = 10^{11} \text{ N.m}^{-3}$.

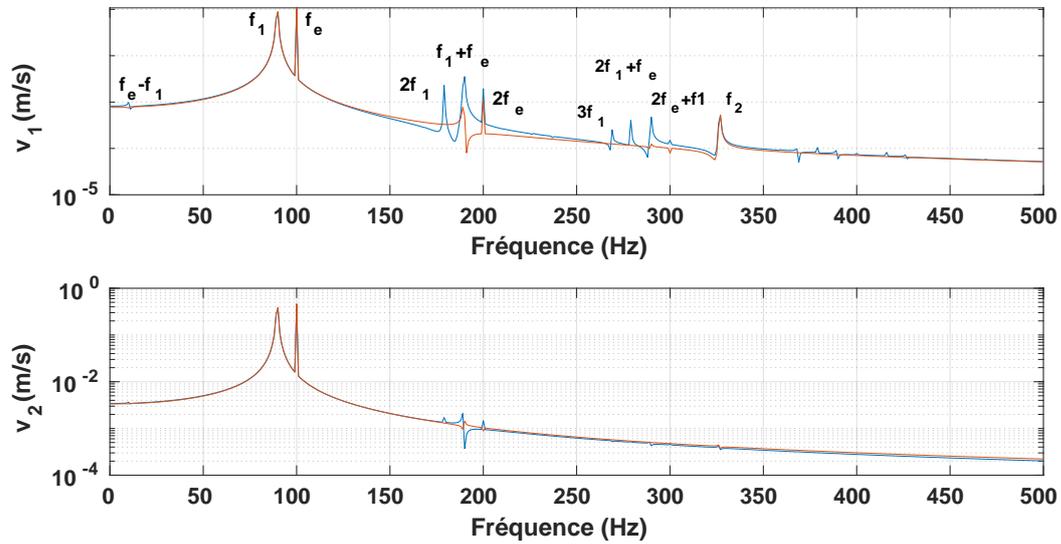


FIGURE 4.9 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{11} \text{ N.m}^{-3}$.

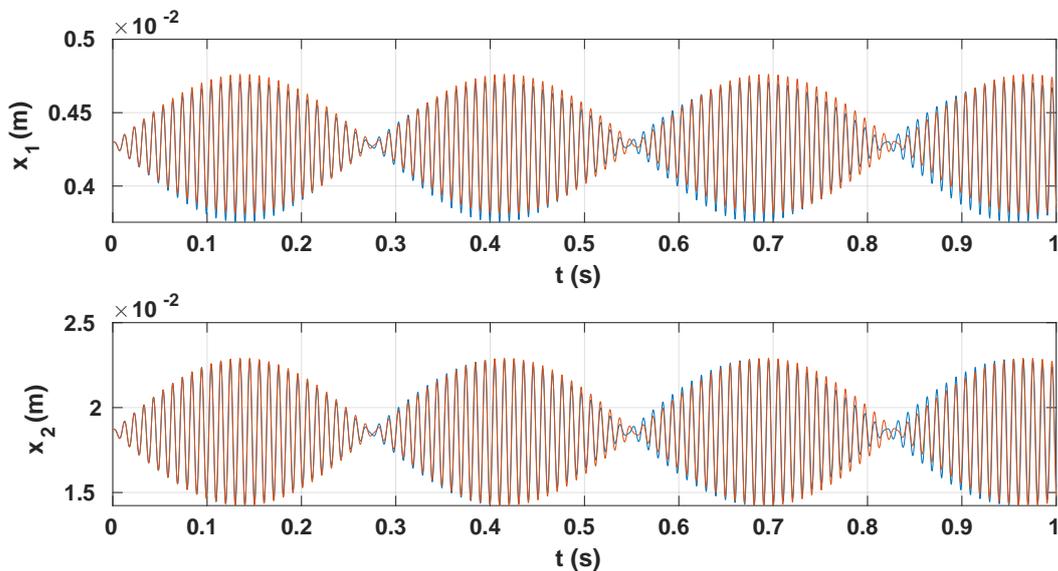


FIGURE 4.10 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$.

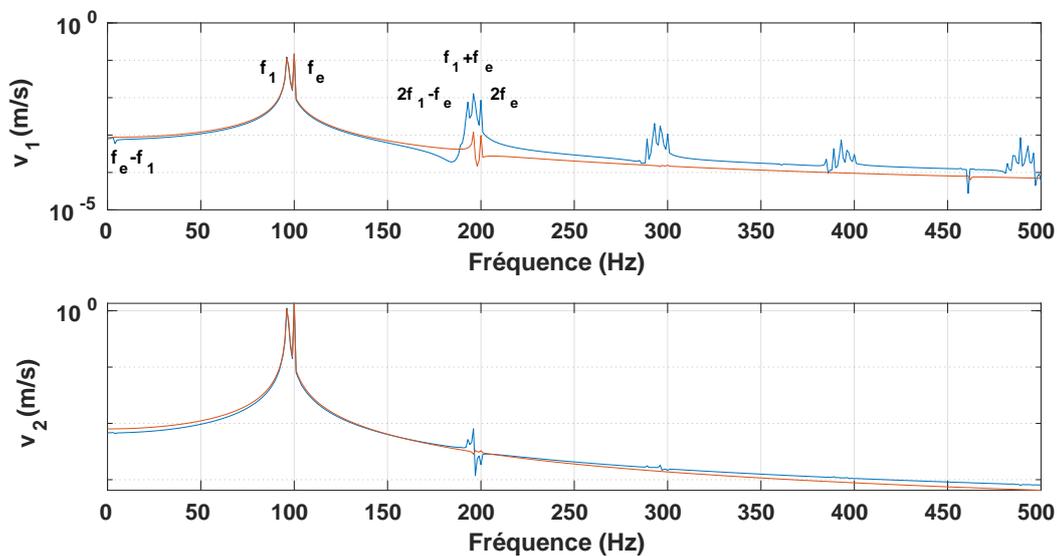


FIGURE 4.11 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{\text{NL}} = 10^{12} \text{ N.m}^{-3}$.

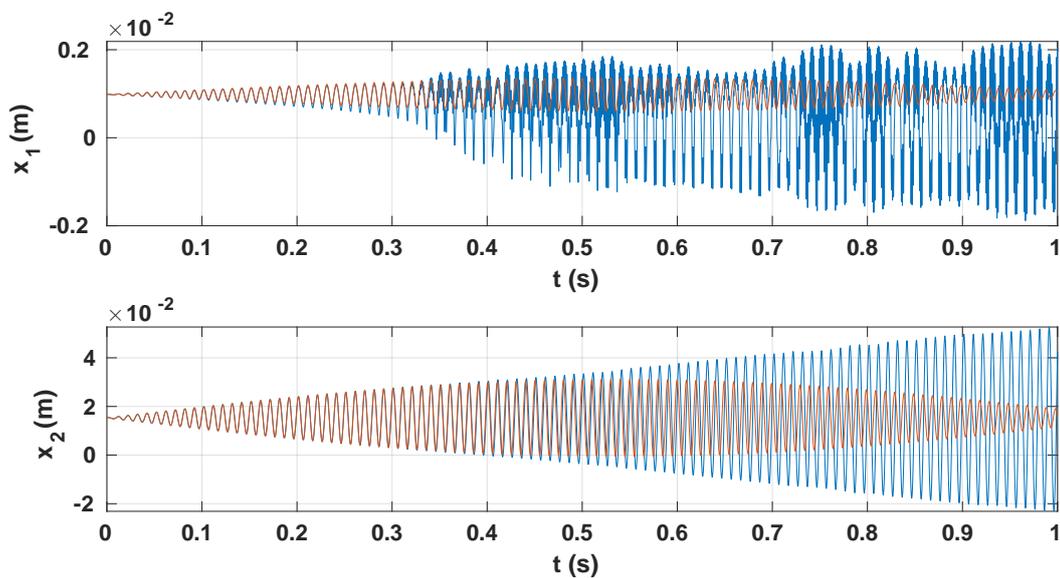


FIGURE 4.12 – Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{\text{NL}} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$.

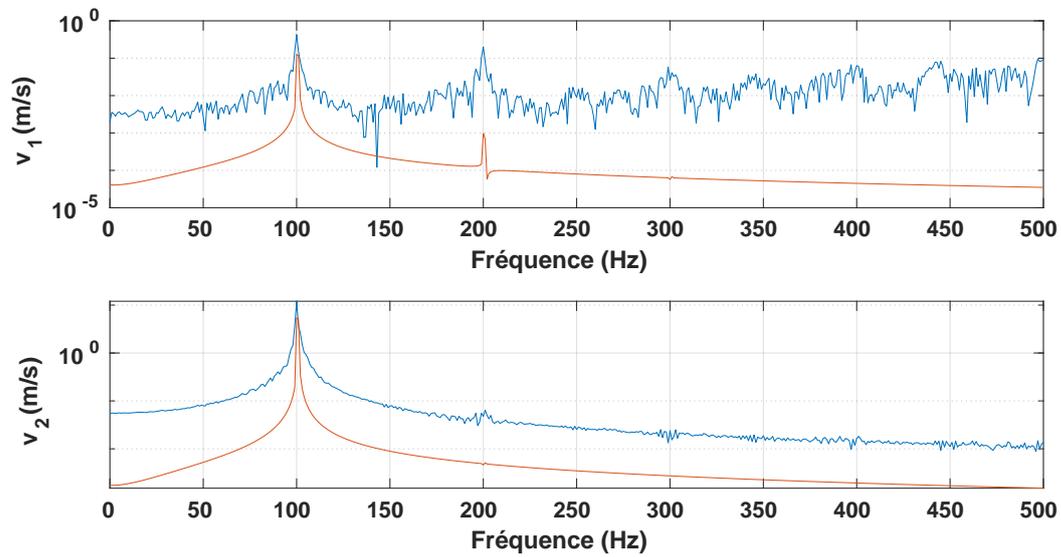


FIGURE 4.13 – Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$.

4.4 Prototype

La méthode de linéarisation présentée précédemment est utilisée pour simuler la réponse vibratoire d'un prototype en roulement sur un sol rigide. Celui-ci a une géométrie plus simple que celle d'un vrai pneumatique. Dans un premier temps, la géométrie et la loi de comportement du matériau du prototype sont présentées. Ensuite, les résultats du roulement quasi-statique sont analysés afin de valider la modélisation. Enfin, la réponse vibratoire est calculée avec la méthode de linéarisation et est comparée avec une solution de référence calculée avec une intégration temporelle classique. Un contact non frottant est considéré en premier dans le but de valider la méthodologie. La loi de Coulomb est ensuite utilisée dans la modélisation du frottement. L'impact du coefficient du frottement sur le roulement quasi-statique et sur la réponse vibratoire est examiné.

4.4.1 Présentation de la structure

Le prototype étudié est présenté sur la figure (4.14). Il s'agit d'un cylindre rainuré dont la bande de roulement (en rouge) est composée de 10 rainures dans la direction latérale. Le maillage choisi est le résultat d'une étude de convergence par rapport au déplacement quasi-statique et aux efforts de contact. Le maillage est composé de 35640 nœuds et de 29440 éléments hexaédriques linéaires.

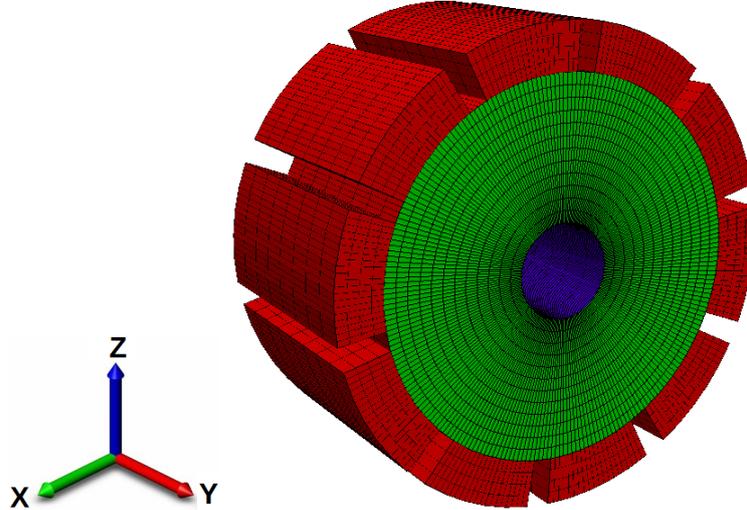
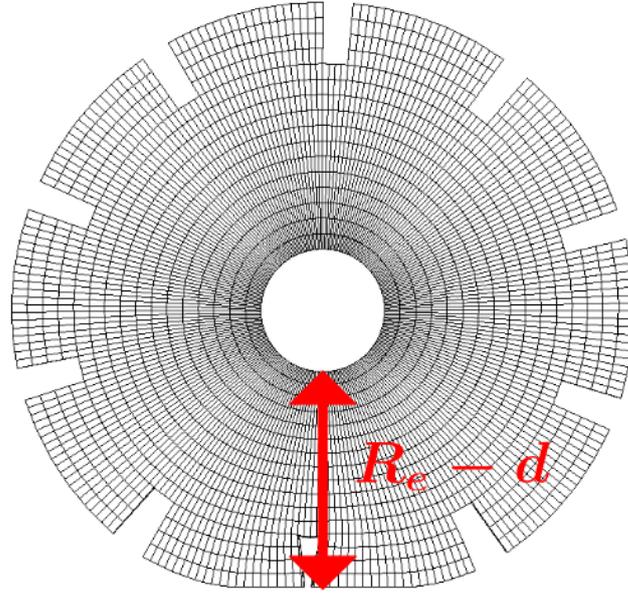


FIGURE 4.14 – Maillage du prototype.

La bande de roulement (en rouge) représente naturellement la surface potentielle de contact Γ_c et la zone bleue représente la zone jante Γ_u . Cette entité est utilisée pour piloter le roulement de la structure en appliquant la condition aux limites de Dirichlet suivante :

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = [Vt \quad 0 \quad -d]^T + \mathbf{R}(\omega t)\mathbf{X} - \mathbf{X} \quad \text{sur } \Gamma_u \quad (4.23)$$

FIGURE 4.15 – Illustration du chargement cinématique du prototype - $d = 0.01$ m.

La structure est chargée cinématiquement en appliquant une flèche d dans la direction verticale. Il s'agit d'imposer un déplacement vertical sur tous les noeuds de la zone jante comme illustré sur la figure 4.15. La charge portée par le prototype peut être calculée en intégrant les efforts de contact dans l'aire de contact. V est la vitesse de translation et \mathbf{R} est la matrice de rotation associée à la vitesse de rotation ω . La direction latérale est choisie comme axe de rotation de la structure.

$$\mathbf{R}(\omega t) = \begin{bmatrix} \cos \omega t & 0 & \sin \omega t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \omega t & 0 & \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

La vitesse de translation est reliée à la vitesse de rotation via le rayon de roulage $r_\omega = V/\omega$. Le rayon de roulage est défini comme le rayon de la structure indéformable et ayant la même vitesse de translation que celle de la structure déformable. Une approximation du rayon de roulage est donnée en fonction du rayon géométrique R_e et de la flèche d ([Jazar 2014]) comme suit :

$$r_\omega \approx R_e - \frac{d}{3} \quad (4.25)$$

Le matériau du prototype est homogène, isotrope et suit une loi de Saint Venant-Kirchhoff présentée dans la section 2.5.1. Les résultats numériques présentés ultérieurement sont obtenus en utilisant les paramètres numériques donnés dans le tableau 4.3.

Les valeurs numériques du module de Young et de la masse volumique correspondent à celles du caoutchouc. Les conditions de roulage et les paramètres numériques de simulation sont donnés dans le tableau 4.4.

Rayon géométrique	$R_e = 0.1$ m
Rayon de la jante	$R_i = 0.02$ m
Largeur	$w = 0.1$ m
Module de Young	$E = 2.10^8$ Pa
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 900$ kg/m ³

TABLE 4.3 – Propriétés mécaniques du prototype.

Flèche	$d = 0.01$ m
Vitesse de rotation	$\omega = 150$ rad/s
Pénalisation normale	$\varepsilon_n = 10^{12}$
Coefficient de régularisation	$\varepsilon_r = 10^{-6}$
Pas de temps	$\Delta t = 10^{-4}$ s

TABLE 4.4 – Paramètres de simulation.

Les paramètres choisis correspondent aux résultats d’une étude de convergence. En effet, le déplacement quasi-statique obtenu est invariant par rapport à des valeurs plus grandes de ε_n et des valeurs plus petites de ε_r et de Δt .

La simulation du roulage quasi-statique est réalisée avec le solveur éléments finis **MEF++** [Fortin 2020]. Ce solveur générique est développé conjointement par le Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Éléments Finis (GIREF) de l’Université Laval et Michelin.

4.4.2 Roulage quasi-statique

Les résultats du roulage quasi-statique sont maintenant présentés. Pour étudier la déformation de la structure, le déplacement quasi-statique est tracé pour les différents points sélectionnés sur la figure 4.16.

La première sélection (figure 4.16.a) permet de visualiser la variation du déplacement suivant la direction radiale et la deuxième sélection (figure 4.16.b) permet de visualiser la variation du déplacement suivant la direction latérale. Dans un premier temps, un contact non frottant est considéré. La distribution des grandeurs cinématiques et des efforts de contact est analysée pour valider la modélisation. Ensuite, la loi de frottement de Coulomb est intégrée au modèle dans le but d’étudier l’impact du coefficient de frottement sur le roulage quasi-statique et sur la distribution des efforts de contact.

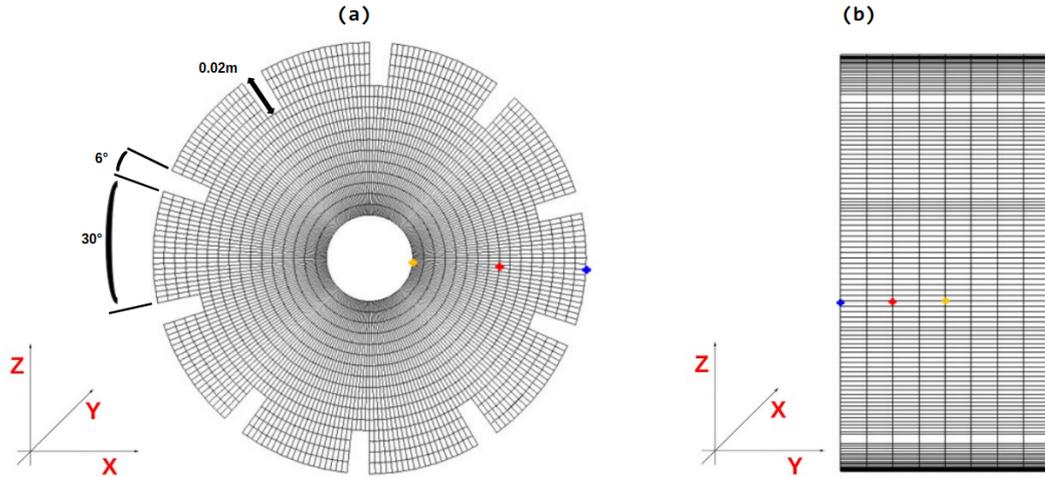


FIGURE 4.16 – Points d'évaluation : (a) $r = R_e$ (●), $r = (R_e + R_i)/2$ (●), $r = R_i$ (●) - (b) $y = w/2$ (●), $y = w/4$ (●), $y = 0$ (●).

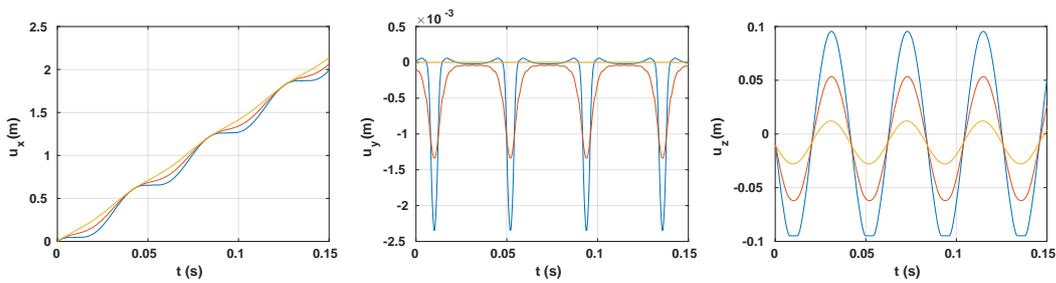


FIGURE 4.17 – Évolution temporelle du déplacement quasi-statique pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$.

4.4.2.1 Contact non frottant

L'analyse du roulement quasi-statique est entamée en visualisant l'évolution temporelle du déplacement quasi-statique illustrée sur les figures 4.17 et 4.18.

La figure 4.17 montre l'évolution temporelle des composantes du déplacement quasi-statique qui est périodique. L'évolution du déplacement longitudinal u_x montre que le passage dans l'aire de contact engendre le ralentissement de l'avancement du prototype dans la direction longitudinale ($0.045s \leq t \leq 0.057s$). En effet, cette cinématique est expliquée par la variation de la distance entre la bande de roulement et l'axe de rotation. Cette distance est minimale au centre de l'aire de contact (AdC) et maximale à l'opposé de l'AdC. La vitesse locale d'avancement suit la même variation puisqu'elle est définie comme le produit de cette distance par la vitesse de rotation [Jazar 2014]. La variation du déplacement longitudinal décroît en s'éloignant de l'AdC.

L'amplitude du déplacement latéral u_y décroît en s'éloignant de l'AdC à cause de l'effet de Poisson. Le maximum du déplacement latéral est localisé au centre de

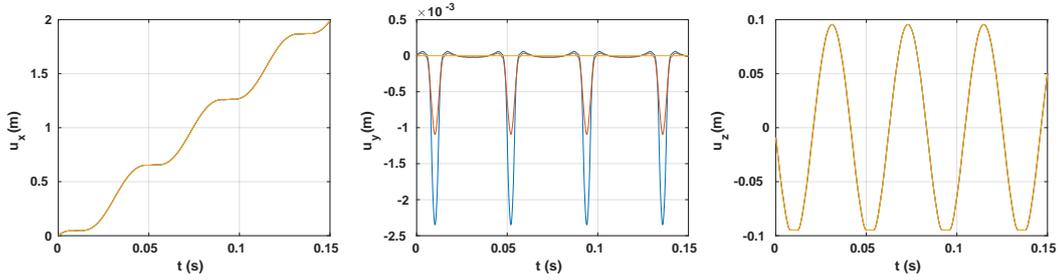


FIGURE 4.18 – Évolution temporelle du déplacement quasi-statique pour $y = w/2$ (—), $y = w/4$ (—) et $y = 0$ (—) avec $r = R_e$.

l'AdC et s'annule à l'opposé de l'AdC ($t \approx 0.07s$). D'ailleurs, l'évolution du déplacement latéral est symétrique ; la déformation à l'entrée de l'AdC est similaire à celle de la sortie et le maximum est localisé au centre de l'AdC ($t \approx 0.052s$). Le sens de rotation n'a pas d'impact sur la cinématique du roulage. En effet, le problème étudié est conservatif puisque le contact considéré est non frottant [Wriggers 2003]. Le déplacement vertical u_z montre que la condition de non-interpénétration est bien respectée dans l'AdC ($0.05s \leq t \leq 0.055s$). Le déplacement des nœuds de la zone jante montre que la condition de Dirichlet imposée est bien respectée.

La variation du déplacement quasi-statique suivant la position latérale y est illustrée sur La figure 4.18. Les déplacements longitudinal u_x et vertical u_z ne sont pas impactés par la position latérale. L'amplitude du déplacement latéral u_y décroît vers 0 en se dirigeant vers le centre de l'AdC. Ce constat est cohérent puisque le plan ($y = 0$) est un plan de symétrie de la structure.

L'équation 4.9 montre que l'accélération quasi-statique apparaît comme la force d'excitation du problème vibratoire. L'évolution temporelle de cette accélération dans la direction circonférentielle et son spectre fréquentiel sont étudiés pour analyser les mécanismes d'excitation de la réponse vibratoire.

La figure 4.19 illustre l'évolution temporelle de l'accélération quasi-statique dans le repère mobile. L'angle $\theta = 0$ deg désigne le centre de l'AdC et les angles négatifs désignent sa sortie. L'observation de l'évolution temporelle montre que le maximum des composantes de l'accélération est atteint quand un bloc entre ou quitte l'AdC ($t \approx 0.052s$). Le maximum des accélérations verticale a_z et latérale a_y est localisé aux frontières de l'AdC et leurs évolutions ne varient pas entre l'entrée ($\theta \approx 20$ deg) et la sortie de l'AdC ($\theta \approx -17$ deg). L'accélération verticale a_z est nulle dans l'AdC étant donné que le déplacement vertical est constant dans cette zone. L'accélération latérale a_y s'annule en s'éloignant des alentours de l'AdC (-45 deg $\leq \theta \leq 45$ deg). Une distribution de cisaillement est observée pour l'accélération longitudinale a_x dans l'AdC. En effet, une accélération à l'entrée et une décélération à la sortie de l'AdC sont constatées. L'accélération (respectivement la décélération) des points à l'entrée (respectivement la sortie) de l'AdC s'explique par le retard (respectivement

l'avance) de ceux-ci par rapport à la zone jante qui pilote l'avancement de la structure. L'équilibre entre l'accélération et la décélération varie en fonction de la position longitudinale des blocs dans l'AdC.

La figure 4.20 est composée du spectre fréquentiel de l'amplitude des composantes de l'accélération quasi-statique. Le spectre est tracé en fonction de l'ordre qui est égal à la fréquence divisée par la fréquence de rotation. L'utilisation de

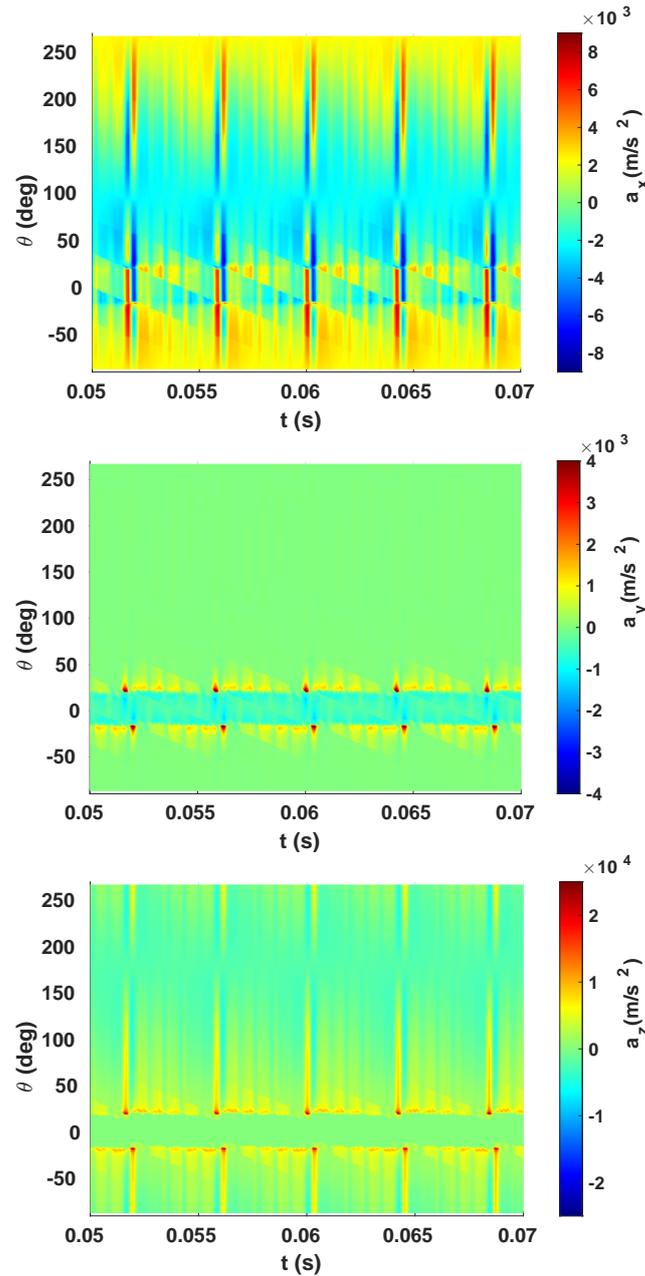


FIGURE 4.19 – Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique dans la direction circonférentielle ($y = w/2$ et $r = R_e$).

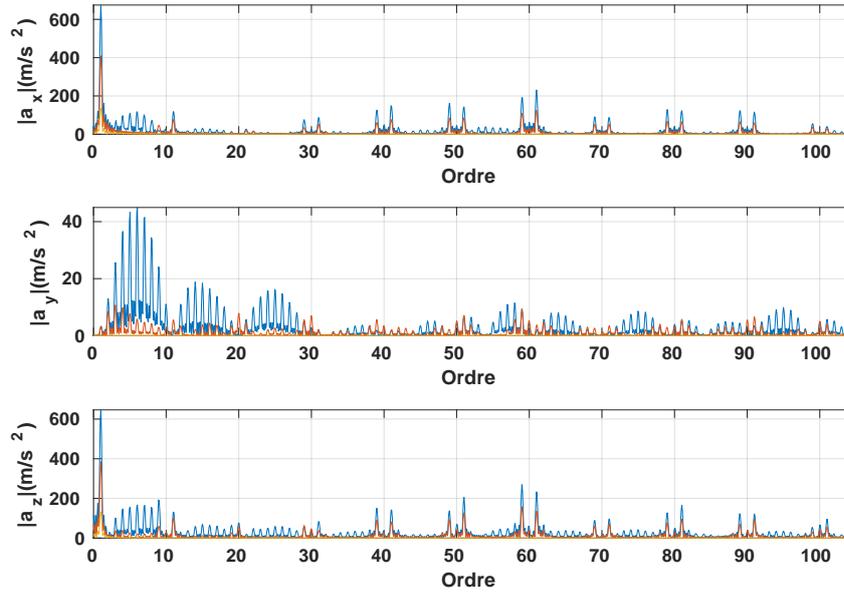


FIGURE 4.20 – Spectre de l'accélération quasi-statique pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$.

l'ordre dans l'analyse des spectres permet de s'affranchir de l'effet de la vitesse de rotation. La fréquence fondamentale est égale à la fréquence de rotation (Ordre = 1). Deux familles d'harmoniques peuvent être distinguées et leur émergence est due aux différentes non linéarités prises en compte. La première famille d'harmoniques est localisée autour des multiples de la fréquence de rotation (Ordre = $k \in \mathbb{N}$). La deuxième famille d'harmoniques est localisée autour de 10 fois la fréquence de rotation (Ordre = $10k, k \in \mathbb{N}$) avec un effet de modulation. Il s'agit de la fréquence des efforts de contact puisque la bande de roulement est composée de 10 rainures. La modulation est expliquée par la rotation de la structure [Chipato 2021, Zhou 2019]. En effet, les grandeurs cinématiques sont calculées dans le repère fixe alors que les efforts de contact sont portés par le repère tournant. Ce phénomène de modulation n'est pas observé sur le spectre de l'accélération latérale puisque la direction latérale représente l'axe de rotation. Les accélérations longitudinale et verticale ont le même ordre de grandeur au niveau de l'amplitude qui est supérieure à celle de l'accélération latérale. Finalement, l'amplitude de l'accélération décroît en s'éloignant de la bande de roulement dans la direction radiale.

La figure 4.22.a montre l'évolution de la pression normale de contact suivant la position du bloc dans l'AdC. Quand un bloc entre dans l'AdC, la pression normale est concentrée à l'entrée du bloc. Dès que le bloc avance dans l'AdC, la pression de contact devient similaire à la pression de contact cylindrique décrite dans la théorie de Hertz [Hertz 1881]. Quand le bloc quitte l'AdC, la pression de contact se concentre sur le bord du bloc avec la même distribution observée à l'entrée de l'AdC. Une variation de la charge verticale F_z portée par la structure est observée sur la figure 4.22.b étant donné que la flèche est constante et la forme de l'AdC varie. Le

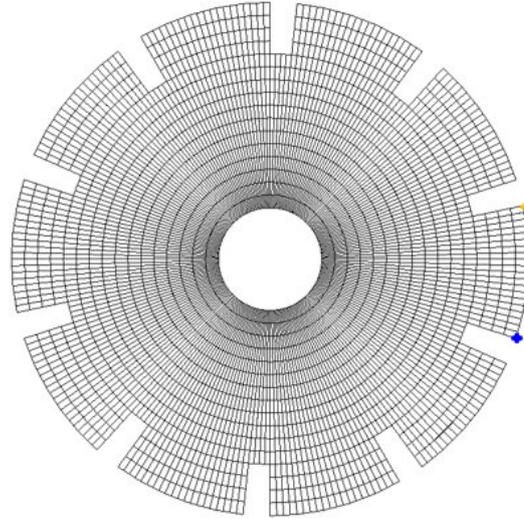


FIGURE 4.21 – Nœuds sélectionnés pour l’analyse de la pression normale de contact : entrée du bloc θ_e (—), centre du bloc θ_c (—), sortie du bloc θ_s (—).

spectre de la variation de la charge δF_z qui est égale à la différence entre la charge et sa moyenne est tracée sur la figure 4.22.c. Les harmoniques de ce spectre sont localisées autour des multiples de la fréquence de passage des rainures dans l’AdC.

Les résultats du roulage quasi-statique avec un contact non frottant sont cohérents. En effet, l’analyse de la cinématique et de la répartition des forces de contact valide la modélisation des effets de la rotation et de l’impact de la bande de roulement sur le plan rigide.

4.4.2.2 Contact frottant

Le frottement de Coulomb est maintenant pris en compte dans la modélisation. La méthode de régularisation présentée précédemment est utilisée dans la résolution numérique. L’impact du coefficient de frottement sur le roulage quasi-statique est étudié. La valeur du coefficient de frottement μ dépend des conditions d’adhérence. Elle appartient généralement à l’intervalle $[0.1, 1]$ étant donné que $\mu \approx 1.0$ correspond au roulage des pneus sur un revêtement sec et $\mu \approx 0.1$ correspond au roulage sur un revêtement mouillé [Ghandour 2010].

La figure 4.23 montre l’évolution temporelle du déplacement quasi-statique dans la zone de contact pour différentes valeurs de μ . Les grandes valeurs de μ favorisent le régime adhérent. Le déplacement longitudinal u_x reste constant pour $\mu \geq 0.3$ et l’amplitude du déplacement latéral u_y diminue en augmentant la valeur de μ . En effet, la valeur de pression tangentielle nécessaire pour basculer sur le régime glissant augmente avec μ à iso-pression normale. Le maximum du déplacement latéral u_y est localisé vers la sortie de l’AdC quand le frottement est pris en compte. Le déplacement vertical u_z reste plus ou moins identique puisque le frottement agit sur les composantes tangentes. Les petites différences sont dues à la variation de la

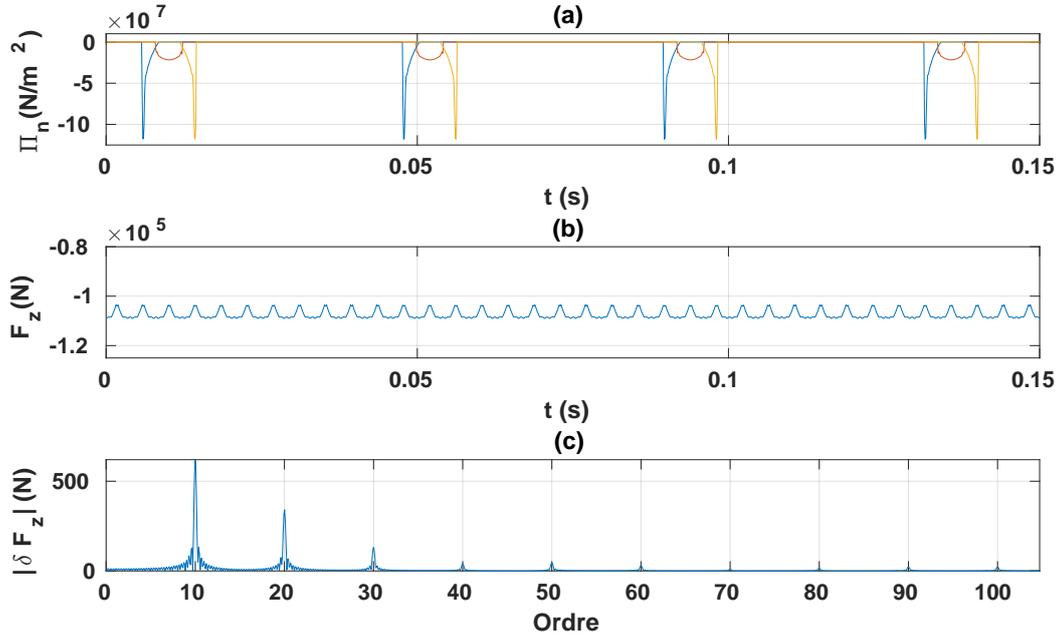


FIGURE 4.22 – (a) Évolution temporelle de la pression normale de contact, (b) de la charge verticale et (c) le spectre fréquentiel de la variation de la charge verticale.

taille de l'AdC.

La prise en compte de la loi de frottement altère l'évolution de la pression normale de contact comme illustré sur la figure 4.24. Contrairement au contact non frottant, l'évolution de la pression normale à l'entrée du bloc n'est plus similaire à celle à la sortie du bloc. Ceci s'explique par la dépendance temporelle de la loi de frottement et le caractère non conservatif du système mécanique. L'augmentation des valeurs de μ engendre une saturation de la pression normale. Aussi, la pression normale s'annule plus rapidement pour des faibles valeurs de μ . Ceci s'explique par le fait que les nœuds restent plus longtemps collés dans l'AdC pour les grandes valeurs de μ .

La figure 4.25 montre que la norme de la pression tangentielle s'accroît en aug-

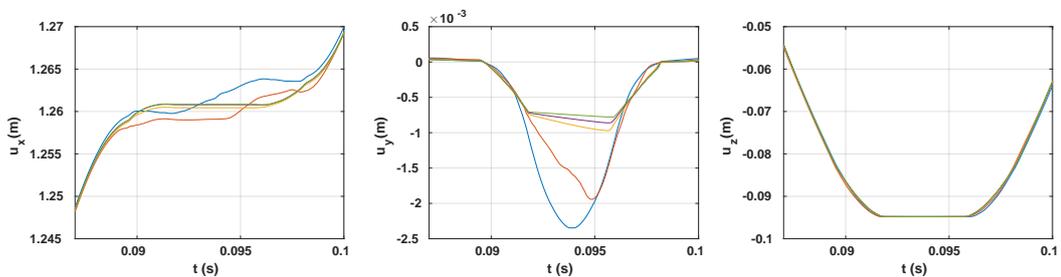


FIGURE 4.23 – Évolution temporelle du déplacement quasi-statique dans l'aire de contact ($y = w/2$ et $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) and $\mu = 1.0$ (—).

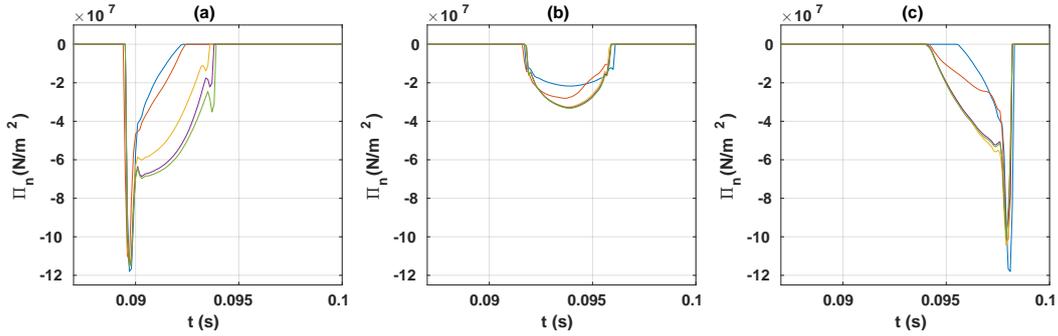


FIGURE 4.24 – Évolution temporelle de la pression normale de contact ($y = w/2$, $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) and $\mu = 1.0$ (—) – $\theta = \theta_e$ (a) – $\theta = \theta_c$ (b) – $\theta = \theta_s$ (c).

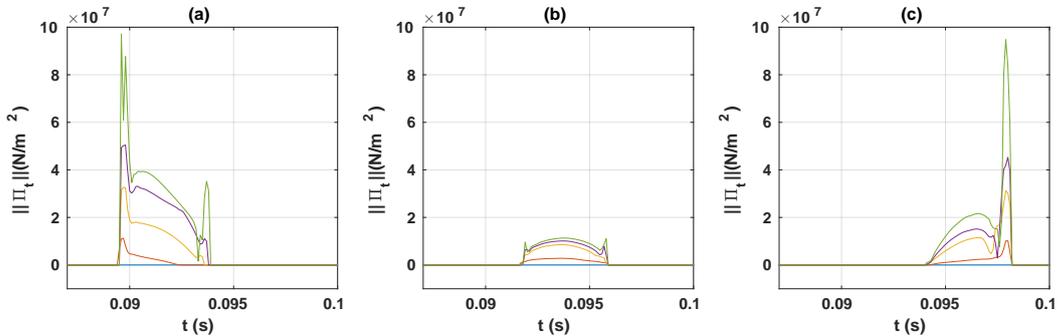


FIGURE 4.25 – Évolution temporelle de la norme de la pression tangentielle dans l'aire de contact ($y = w/2$ et $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) et $\mu = 1.0$ (—) – $\theta = \theta_e$ (a) – $\theta = \theta_c$ (b) – $\theta = \theta_s$ (c).

mentant la valeur de μ contrairement à la pression normale où un effet de saturation est observé. La norme de la pression tangentielle de contact suit la même évolution que la pression normale de contact au niveau des points d'évaluation. Les différences constatées au niveau des pressions tangentielles de contact pour différentes valeurs de μ s'expliquent par la variation de la pente dans le régime adhérent et la variation de la valeur limite dans le régime glissant pour chaque valeur de μ .

L'intégration des pressions de contact sur l'AdC permet de calculer les forces totales de contact et de voir l'impact de μ sur leur évolution comme illustré sur la figure 4.26. La force latérale F_y est nulle pour les différentes valeurs de μ au regard de la symétrie de la géométrie du prototype dans la direction latérale. La variation de la force verticale F_z s'accroît légèrement en augmentant la valeur de μ avant d'avoir une évolution invariante pour $\mu \geq 0.3$. Ceci est cohérent avec la saturation de la pression normale de contact observée sur la figure 4.24. Une décroissance de la valeur de la force longitudinale F_x est observée avec une apparition d'oscillations en hautes fréquences pour les valeurs de $\mu \geq 0.3$. Ces oscillations sont une conséquence de la variation de la pression tangente observée sur la figure 4.25.

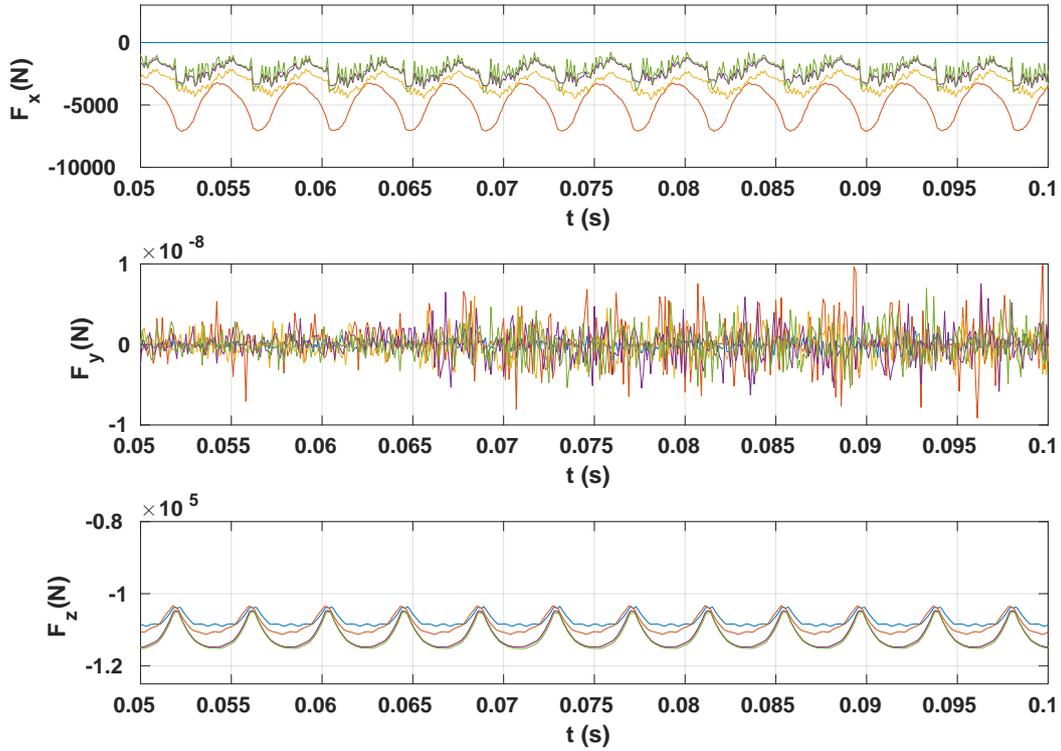


FIGURE 4.26 – Évolution temporelle de la somme des efforts de contact pour le contact non frottant ($\mu = 0$), $\mu = 0.1$, $\mu = 0.3$, $\mu = 0.5$ and $\mu = 1.0$

L'analyse du roulage quasi-statique avec un contact frottant sont cohérents avec la loi de Coulomb utilisée. En ce sens, l'augmentation de la valeur du coefficient de frottement réduit le glissement dans l'aire de contact et induit naturellement un meilleur niveau d'adhérence.

4.4.3 Réponse vibratoire

La méthode de linéarisation, présentée au début de ce chapitre, est utilisée pour calculer la réponse vibratoire de la structure. Le problème vibratoire 4.9 est résolu par une intégration temporelle avec un schéma d'Euler implicite. Ce dernier est choisi étant donné sa stabilité inconditionnelle contrairement aux schémas de Newmark qui ne sont pas adaptés aux problèmes dynamiques de contact à cause des oscillations artificielles générées dans la zone de contact. Il est possible de stabiliser ces oscillations avec des opérateurs de projections ou en introduisant de la dissipation numérique [Deuffhard 2008]. La géométrie et la loi de comportement du prototype sont relativement simples. Ainsi, l'intégralité de la réponse dynamique peut aussi être calculée par une intégration temporelle avec le même schéma numérique. Par conséquent, la validation de la linéarisation et des hypothèses formulées peuvent être réalisées en comparant la solution linéarisée avec une solution de référence définie comme la différence entre la réponse dynamique et la réponse quasi-statique ($\mathbf{u}_{\mathbf{v},\text{référence}} = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1$).

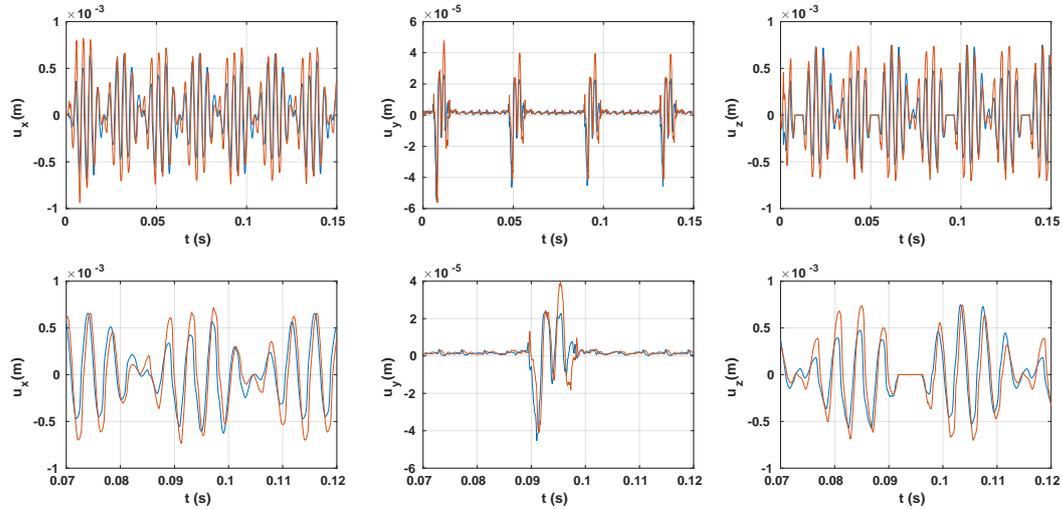


FIGURE 4.27 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire pour $(y = w/2, r = R_e)$ de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) – La totalité de la simulation (haut) et un zoom sur une période (bas).

4.4.3.1 Contact non frottant

Dans un premier temps, un contact non frottant est considéré comme dans l’analyse du roulage quasi-statique. La solution obtenue avec la méthode de linéarisation est comparée avec la solution de référence. Ensuite, le spectre de la vitesse des vibrations est analysé. L’étude des vitesses des vibrations est importante puisque celle-ci représente la condition aux limites du problème acoustique. Enfin, l’évolution des vibrations dans la direction circonférentielle est tracée pour analyser le comportement vibratoire global de la structure.

La figure 4.27 illustre la comparaison des réponses vibratoires de la solution de la méthode de la linéarisation avec la solution de référence. Les deux réponses oscillent avec la même fréquence avec une légère différence au niveau des amplitudes. Les vibrations verticales u_z sont nulles sur l’AdC. Ainsi, le traitement de la condition normale de contact comme une condition aux limites de Dirichlet semble être un choix judicieux. Le maximum de l’amplitude des vibrations longitudinales u_x est atteint dans l’AdC et a le même ordre de grandeur que celui des vibrations verticales qui est localisé en dehors de l’AdC. L’essentiel des vibrations latérales u_y est observé dans l’AdC et leur amplitude s’annule en s’éloignant de cette dernière.

La figure 4.28 montre que les spectres des vitesses de vibrations longitudinale v_x et verticale v_z sont plus ou moins similaires entre les deux solutions. La plus grande différence entre les deux solutions est observée au niveau de la vitesse latérale v_y . Une famille d’harmoniques autour des multiples de la fréquence de passage des rainures dans l’AdC (Ordre = $10k, k \in \mathbb{N}$) est observée avec le même phénomène de modulation constaté dans l’analyse de l’accélération quasi-statique pour les vibrations longitudinale et verticale. Le spectre de la vitesse latérale est un peigne de

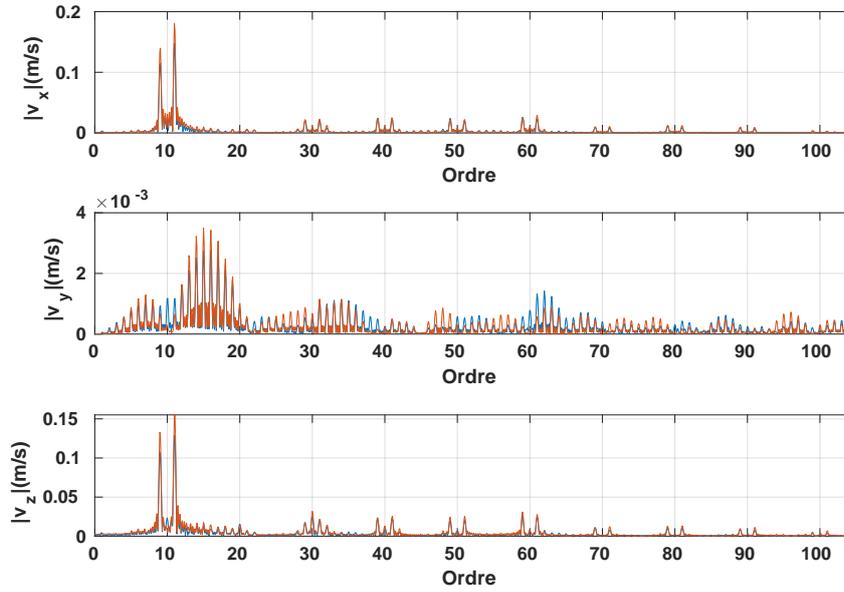


FIGURE 4.28 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2$, $r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—).

fréquence. Ceci est cohérent avec l'évolution temporelle du déplacement vibratoire latéral. Les harmoniques autour des multiples de la fréquence de rotation ont disparu. Ainsi, la méthode de linéarisation permet de séparer la dynamique de roulement de la réponse vibratoire de la bande de roulement. Ces deux dynamiques opèrent dans deux échelles différentes puisque le rapport des amplitudes entre le déplacement quasi-statique et la réponse vibratoire est de l'ordre de 200.

L'amplitude de la réponse vibratoire décroît en s'éloignant de la bande de roulement dans la direction radiale comme illustré sur la figure 4.29. Les vibrations latérales s'annulent dans le centre de l'AdC étant donné la symétrie de la géométrie du prototype. Cependant, les vibrations longitudinales et verticales ne dépendent pas de la position latérale (figure 4.30). Le même constat était observé précédem-

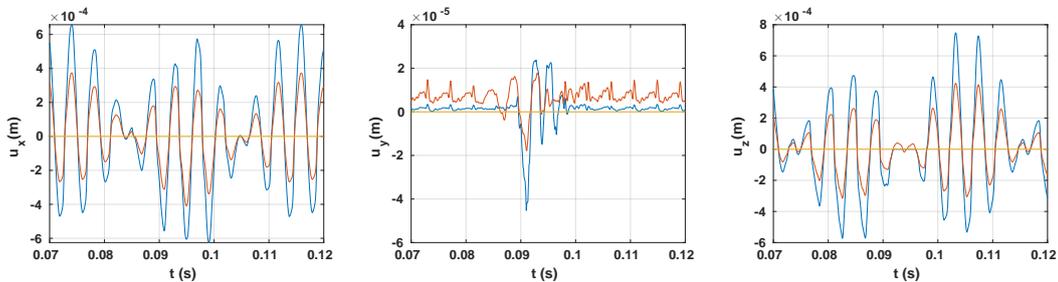


FIGURE 4.29 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$.

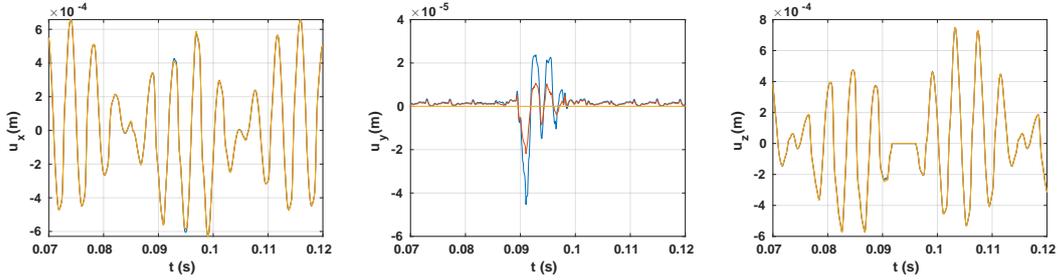


FIGURE 4.30 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation pour $y = w/2$ (—), $y = w/4$ (—) et $y = 0$ (—) avec $r = R_e$.

ment pour le déplacement quasi-statique.

Contrairement à l'accélération quasi-statique, la réponse vibratoire varie entre l'entrée et la sortie de l'AdC comme illustré sur la figure 4.31. La vitesse des vibrations verticales v_z est naturellement nulle dans l'AdC et à l'opposé de l'AdC ($\theta = 180$ deg). L'essentiel des vibrations latérales v_y est situé aux frontières de l'AdC et le maximum est localisé vers l'entrée de l'AdC ($\theta \approx 45$ deg). La vitesse des vibrations longitudinales v_x est caractérisée par une distribution symétrique par rapport au plan ($z = 0$). Les mesures expérimentales montre que l'essentiel des vibrations est localisé à l'entrée et à la sortie de l'AdC étant donné les propriétés d'amortissement visqueux du mélange des caoutchoucs du pneumatique. Ce constat n'est pas observé sur la figure 4.31 puisque l'amortissement n'a pas été intégré à la modélisation.

4.4.3.2 Contact frottant

Le frottement de Coulomb est maintenant pris en compte dans la modélisation du roulage quasi-statique. Cette section est consacrée à l'analyse de l'impact du coefficient de frottement sur la réponse vibratoire. La solution obtenue avec la méthode de linéarisation est comparée avec la solution de référence pour différentes valeurs de μ . La question qui se pose est de savoir si la condition 4.5 utilisée pour le traitement de la contrainte de contact reste valide dans le cas du contact frottant. Cette condition consiste à imposer des vibrations nulles dans la direction normale sur l'aire de contact.

Contrairement au contact non frottant, une grande différence entre la solution calculée avec la méthode de linéarisation et la solution de référence est observée sur la figure 4.32. Cette différence est particulièrement marquée dans l'AdC au niveau des vibrations longitudinales u_x et latérales u_y . Ces dernières vibrations obtenues avec la solution de référence sont constantes pour $\mu \geq 0.3$ sur la zone de contact. En effet, les résultats du roulage quasi-statique montrent que le régime adhérent est favorisé pour les grandes valeurs de μ . Ainsi, le déplacement vibratoire reste constant dans l'AdC pour ces valeurs de μ . La valeur constante du déplacement dans l'AdC n'est pas nulle puisque l'inertie altère la rigidité de contact [Winroth 2014]. Par

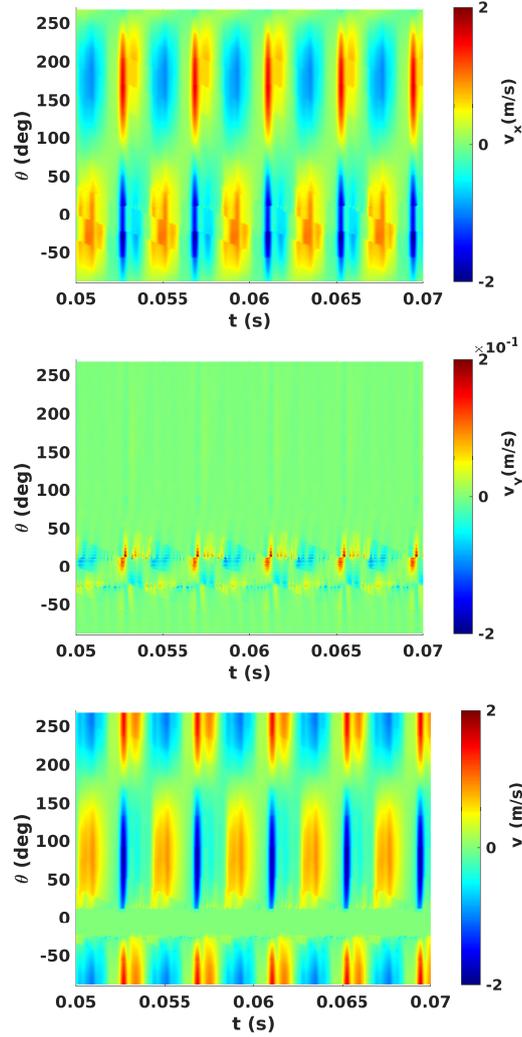


FIGURE 4.31 – Évolution temporelle de la vitesse des vibrations dans la direction circonférentielle de la solution calculée avec la méthode de linéarisation ($r = R_e$, $y = w/2$).

conséquent, la position longitudinale et latérale varie légèrement entre le problème dynamique et le problème quasi-statique. La condition aux limites utilisée pour traiter la condition de contact n'est alors plus valide.

Un changement simple de condition aux limites consiste à imposer un déplacement vibratoire nul dans la zone active de contact.

$$\mathbf{u}_v = \mathbf{0} \quad \text{sur} \quad \Gamma_c^t \quad (4.26)$$

Les résultats du changement de la condition aux limites sont donnés sur la figure 4.34.

Le changement de la condition aux limites améliore la solution calculée avec la

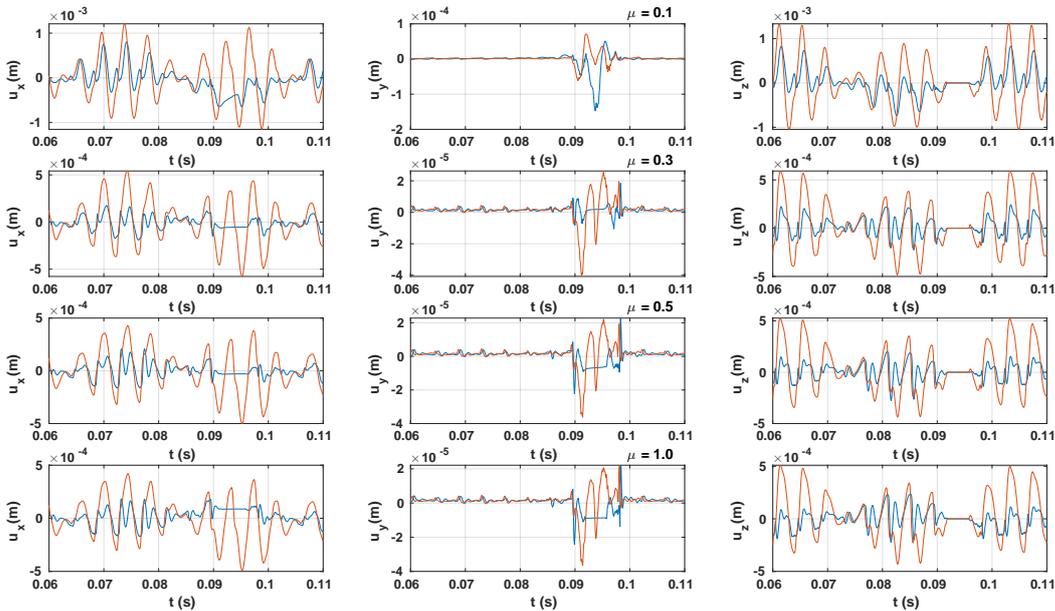


FIGURE 4.32 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour différentes valeurs de μ – ($y = w/2, r = R_e$).

méthode de linéarisation par rapport à la solution de référence. Cette amélioration est constatée à la fois dans l’AdC et hors l’AdC surtout pour les grandes valeurs de μ . La plus grande différence entre les deux solutions est observée pour $\mu = 0.1$. En effet, le roulage quasi-statique montre que pour cette valeur de μ , la vitesse de glissement est non nulle. Ceci est clairement incompatible avec la nouvelle condition aux limites et est confirmé par la comparaison des déformées quasi-statique et dynamique illustrées sur la figure 4.33. Par contre, cette nouvelle condition améliore la solution linéarisée en dehors de l’AdC pour toutes les valeurs de μ . Une meilleure condition pour traiter la contrainte de contact dans le problème vibratoire devrait dépendre probablement du régime de frottement. En ce sens, il faut imposer des vibrations nulles dans l’AdC si le contact est adhérent et imposer une force, qui reste à définir, si le contact est glissant. L’impact du coefficient de frottement sur les niveaux de vibrations est illustré sur la figure 4.35.

La même sensibilité de la réponse vibratoire par rapport à μ est observée pour les deux solutions sauf dans le cas de $\mu = 0.1$. Ceci est expliqué par l’incompatibilité de la condition aux limites avec le régime de frottement. Les plus grands niveaux de vibrations sont observés pour le contact non frottant. Augmenter la valeur de μ engendre une baisse des niveaux de vibrations jusqu’à une valeur de saturation pour $\mu > 0.3$. Cet effet n’est que la résultante de la saturation observée dans l’analyse du roulage quasi-statique. Cette baisse des niveaux vibratoires est compatible avec les mesures expérimentales dans le sens où le roulage sur un revêtement mouillé engendre une augmentation du bruit de roulement allant jusqu’à 6 dB par rapport

au roulage sur un revêtement sec [Sandberg 2002]. Cependant, cette conclusion encourageante doit être considérée avec précaution puisque la géométrie et les lois de comportement d'un vrai pneumatique sont plus complexes que celles du prototype. D'ailleurs, les mécanismes aérodynamiques ne sont pas pris en compte dans la modélisation.

Le spectre des vitesses de vibrations est maintenant examiné pour analyser l'impact du frottement sur la réponse vibratoire dans le domaine fréquentiel.

La prise en compte du frottement fait apparaître des harmoniques autour des multiples de la fréquence de passage des rainures dans l'AdC (Ordre = $10k$, $k \in \mathbb{N}$) pour les deux solutions en plus des harmoniques modulées (Ordre = $10k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$). L'émergence de ces harmoniques est expliquée par la composante latérale des efforts tangentiels de frottement. Cette composante a la même direction que celle de l'axe de rotation et une fréquence égale au nombre de passage des rainures dans l'AdC multipliée par la fréquence de rotation.

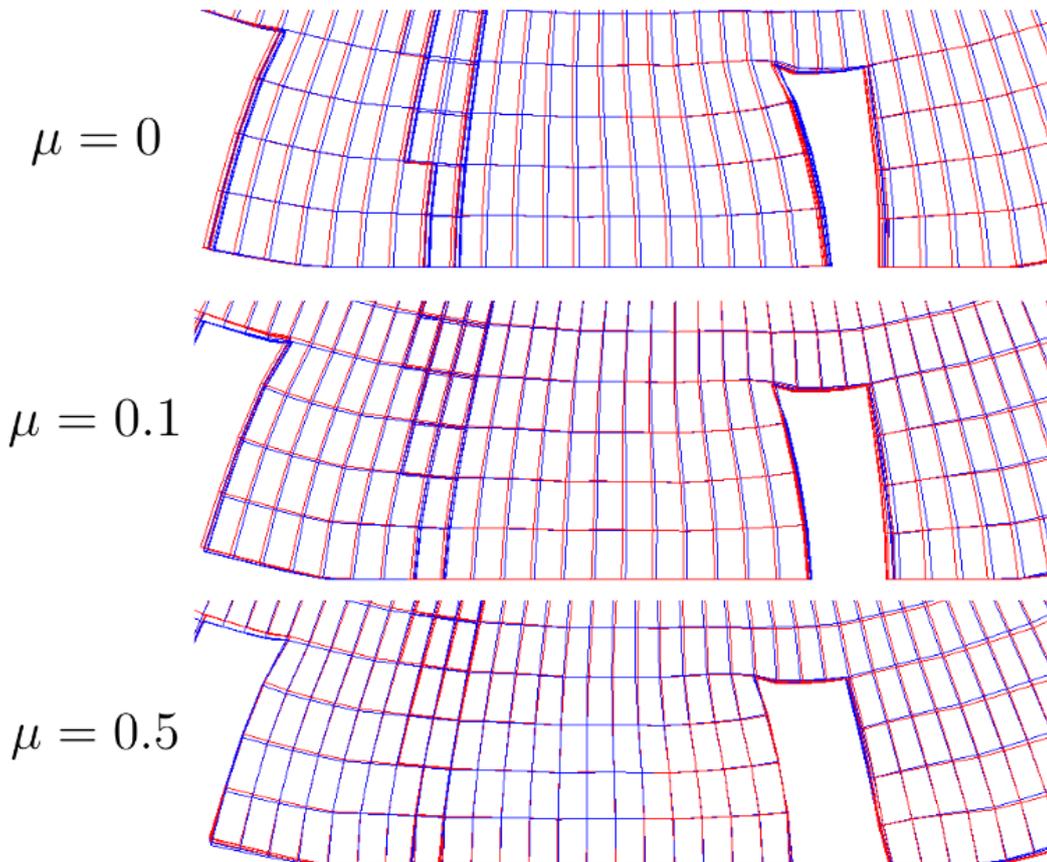


FIGURE 4.33 – Comparaison de l'aire de contact du roulage quasi-statique (—) et du roulage dynamique (—) pour les différentes valeurs de μ .

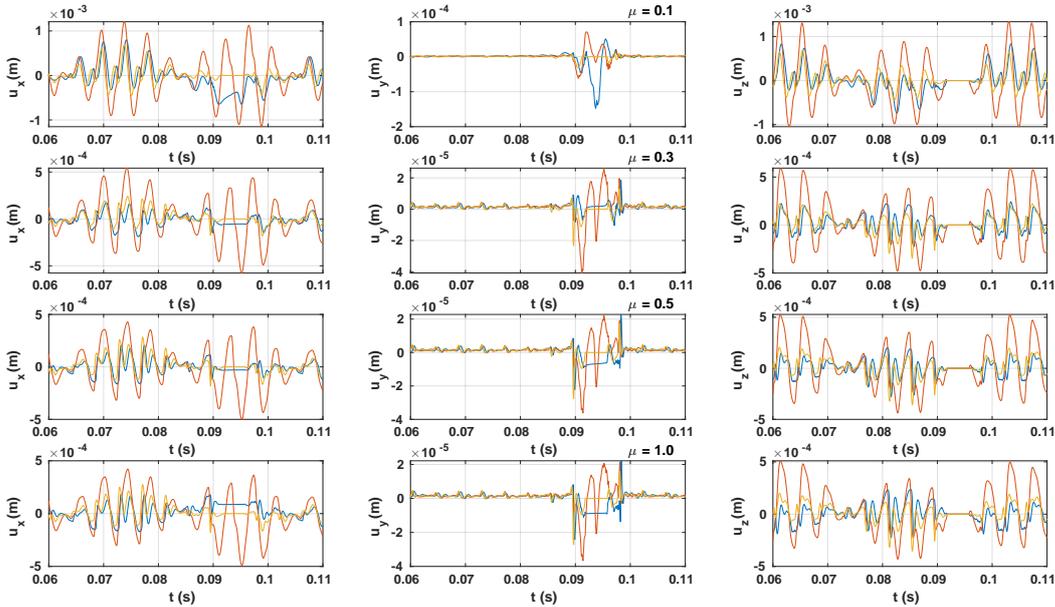


FIGURE 4.34 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) avec la nouvelle condition aux limites (—) et de la solution de référence (—) pour différentes valeurs de μ ($y = w/2, r = R_e$).

4.4.4 Conclusion

La simulation de la réponse vibratoire d'un cylindre rainuré en roulement sur un plan rigide a été réalisée dans cette partie. La méthode proposée est plus stable que l'intégration temporelle classique puisque les non-linéarités sont intégrées dans la configuration quasi-statique. Les résultats du roulement quasi-statique sont cohérents et reflètent les effets des phénomènes de rotation et de frottement pris en compte dans la modélisation. Les réponses vibratoires dans le cas du contact non frottant sont similaires à celles de la solution de référence. Cependant, une correction de la condition de contact utilisée dans le cadre du contact frottant devrait être apportée quand le régime de frottement est glissant. La sensibilité de la réponse vibratoire par rapport au coefficient de frottement, obtenue avec la méthode de linéarisation, est cohérente avec la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions d'adhérence. L'intégration de l'amortissement reste cruciale afin obtenir un comportement vibratoire similaire à celui observé expérimentalement.

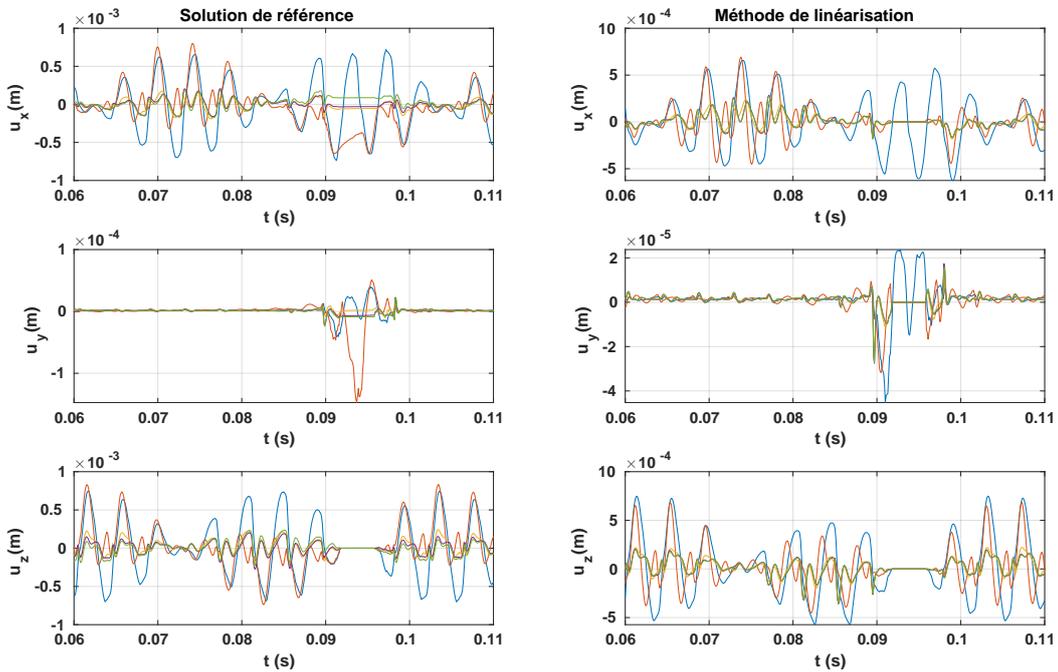


FIGURE 4.35 – Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation avec la nouvelle condition aux limites (à droite) et de la solution de référence (à gauche) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) et $\mu = 1.0$ (—) – ($y = w/2$, $r = R_e$).

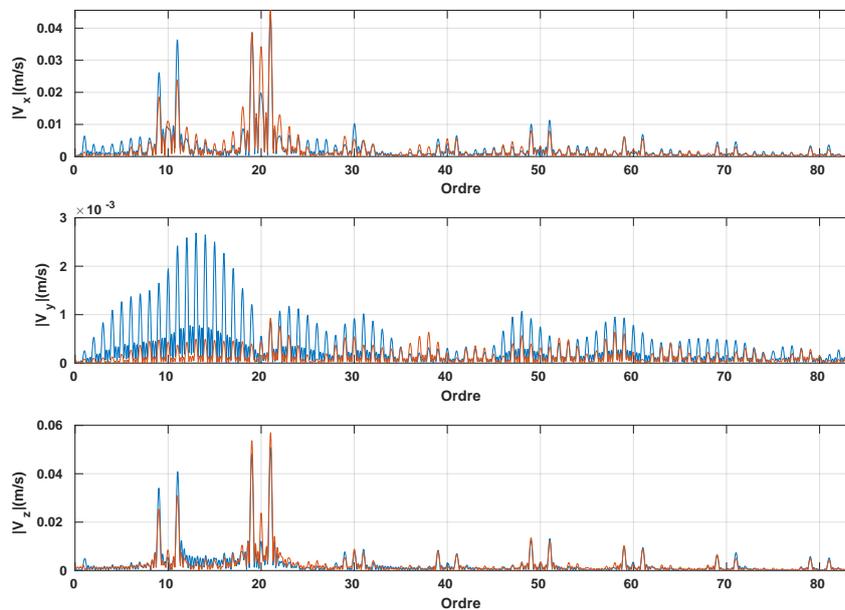


FIGURE 4.36 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2$, $r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.1$.

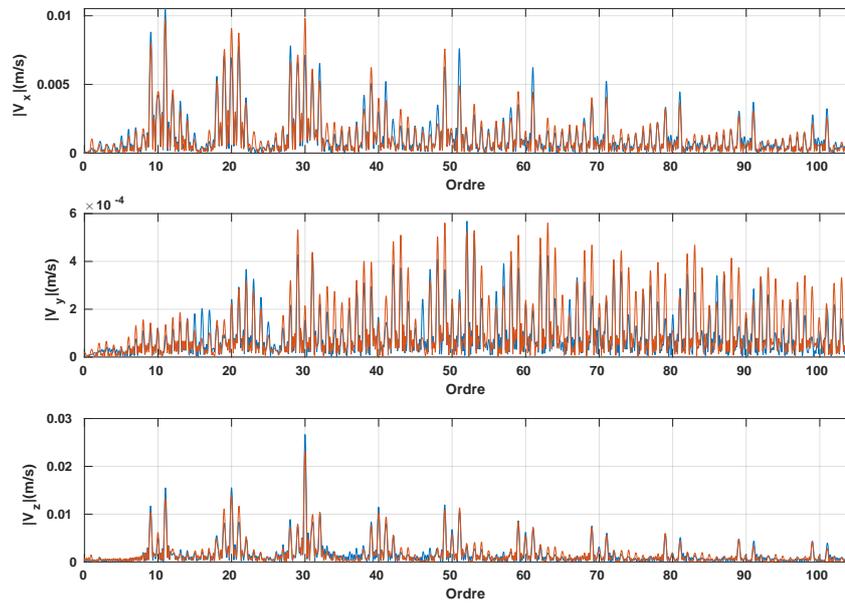


FIGURE 4.37 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour $(y = w/2, r = R_e)$ de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.3$.

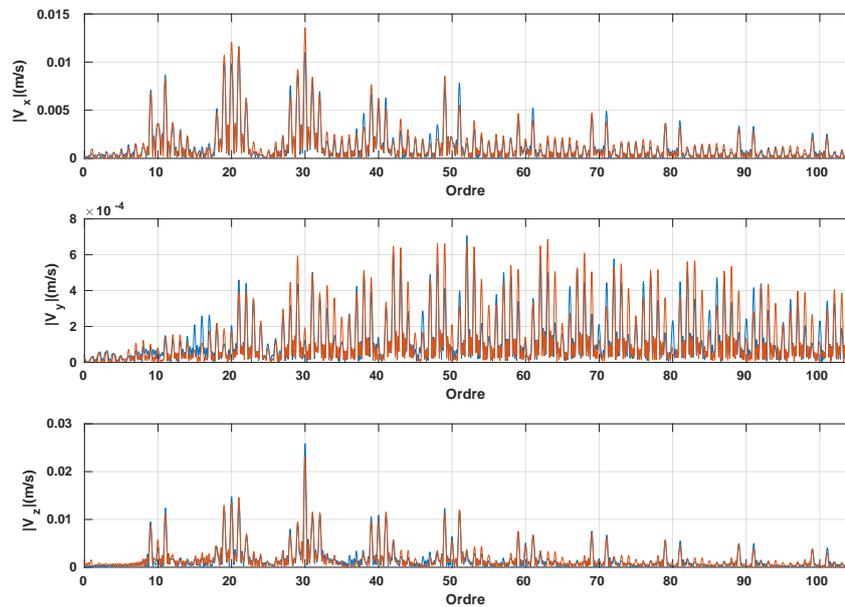


FIGURE 4.38 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour $(y = w/2, r = R_e)$ de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.5$.

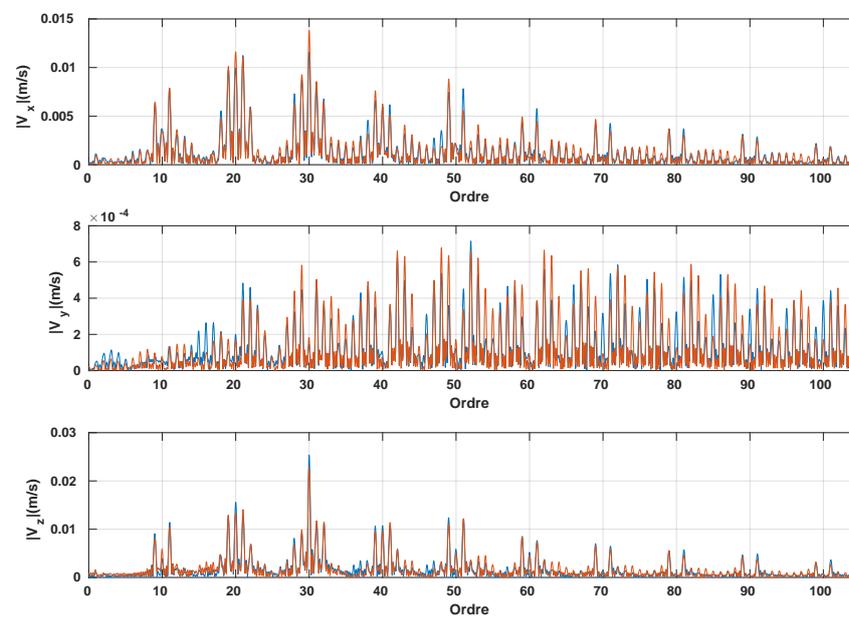


FIGURE 4.39 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2$, $r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 1.0$.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une stratégie numérique de simulation de la réponse vibratoire des structures hyperélastiques en roulage sur un plan rigide a été présentée. L'idée fondamentale de la méthode a été de modéliser le roulage macroscopique par un processus quasi-statique non-linéaire et d'intégrer les effets de l'inertie seulement dans le calcul de la réponse vibratoire. Le rapport entre les amplitudes et les temps caractéristiques de ces deux dynamiques justifie cette hypothèse.

Une première application de la méthode a été réalisée en travaillant sur un système masses-ressorts non-linéaire. Cette étude a montré que la méthode donne une réponse plus ou moins identique à celle obtenue avec une intégration temporelle classique pour toutes les valeurs considérées de la raideur cubique.

Par la suite, la méthode a été utilisée pour simuler la réponse vibratoire d'un cylindre rainuré en roulage sur un plan rigide. La simplicité de la géométrie et de la loi de comportement permettent de calculer une solution de référence. Ceci a permis de statuer sur la validité de la modélisation. La solution calculée avec la linéarisation a été similaire à la solution de référence dans le cas du contact non frottant. Cependant, l'introduction du frottement de Coulomb dans la modélisation a engendré une augmentation de l'écart entre la solution obtenue avec la méthode proposée et la solution de référence. Une correction de la condition cinématique utilisée dans la zone de contact a réduit les écarts entre les deux solutions. La sensibilité de la réponse vibratoire par rapport au coefficient de frottement, obtenue avec la méthode de linéarisation, est cohérente avec la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions d'adhérence.

Les résultats de la simulation de la réponse vibratoire sont globalement encourageants pour les deux cas test. Par conséquent, le prochain chapitre sera dédié à la simulation de la réponse vibratoire des structures hyperélastiques intégrant la complexité géométrique des pneumatiques.

Application aux structures pneumatiques

Sommaire

5.1	Introduction	124
5.2	Structure pneumatique	125
5.2.1	Influence de la vitesse de rotation	127
5.2.2	Influence de la flèche	129
5.2.3	Sensibilité par rapport à l'épaisseur des rainures	132
5.2.4	Sensibilité par rapport au ψ_2	135
5.2.5	Sensibilité par rapport au rib shifting	138
5.2.6	Synthèse des études de sensibilité	141
5.3	Pilotage du roulage en charge imposée	142
5.3.1	Problème mal posé	142
5.3.2	Équation de la charge	143
5.3.3	Application numérique	145
5.3.4	Conclusion	150
5.4	Conclusion	152

5.1 Introduction

La méthode développée au début du chapitre 4 est appliquée pour simuler la réponse vibratoire d'une structure pneumatique sculptée en roulage sur un plan rigide. Dans un premier temps, la géométrie, les propriétés mécaniques de la structure et les paramètres de la simulation sont introduits. Des études numériques sont ensuite réalisées afin de statuer sur la précision et la validité de la méthodologie proposée. La première étude portera sur l'influence des conditions de roulage sur le comportement vibratoire des pneumatiques. La sensibilité des vibrations par rapport aux paramètres de conception des sculptures de la bande de roulement est par la suite examinée. Les tendances obtenues sont comparées qualitativement avec les tendances observées expérimentalement. La dernière partie de ce chapitre s'articule autour de la modélisation du roulage en charge imposée avec les équations supplémentaires. La formulation mathématique de cette modélisation est introduite. Enfin, la réponse vibratoire des pneumatiques obtenue avec ce nouveau mode de pilotage est présentée et analysée.

5.2 Structure pneumatique

La coupe méridienne du pneumatique étudié est illustrée sur la figure 5.1. Celle-ci permet de générer le maillage 3D du pneu en dupliquant un motif de base dans la direction circonférentielle avec une sculpture donnée. La bande de roulement est composée d'un rib centre et de deux ribs épauale. Les noeuds utilisés comme points de mesure de la réponse vibratoire sont localisés sur la gomme intérieure (GI) comme exposé sur la figure 5.1. Le premier point (en rouge) est localisé en dessous du milieu du rib centre et le second point (en bleu) est localisé en dessous du rib épauale. Ces deux points sont pris au niveau de la gomme intérieure puisque le maillage de celle-ci est identique pour les pneus ayant des sculptures différentes et qui seront étudiés ultérieurement. Ceci permet aussi d'examiner l'effet de la largeur sur la réponse vibratoire des pneumatiques.

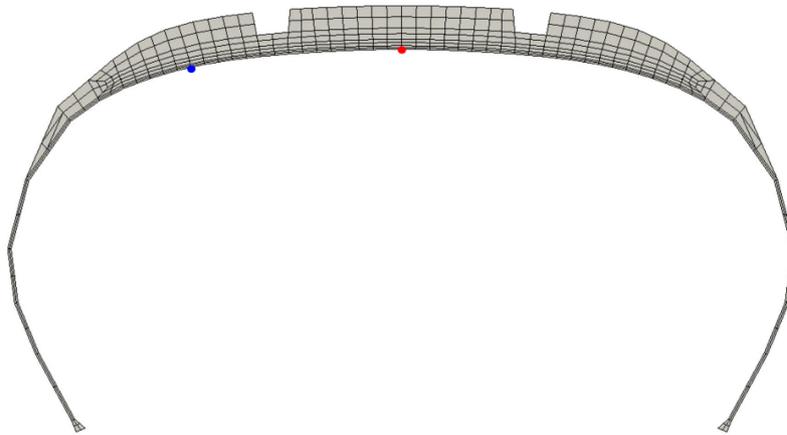


FIGURE 5.1 – Coupe méridienne du pneumatique avec les points de mesure sur la gomme intérieure (GI) - Centre (●) et Épauale (●).

Un exemple de génération du maillage 3D de pneumatique est affiché sur la figure 5.2. Ce maillage est composé de 15660 noeuds, de 10944 éléments hexaédriques linéaires et de 216 éléments prismatiques linéaires. La bande de roulement (en rouge) du pneu illustré sur la figure 5.2 est composée de 36 rainures latérales d'épaisseur 10 mm. Celle-ci représente naturellement la zone potentielle de contact. L'entité jaune représente la zone de gonflage où une pression suiveuse statique est appliquée pour prendre en compte le gonflage du pneu. L'entité en bleu englobe les noeuds qui entrent en contact avec la jante et sert à piloter cinématiquement le roulage du pneumatique avec la condition aux limites 4.23.

Les propriétés géométriques et mécaniques du pneumatique sont données dans le tableau 5.1. Un modèle de matériau homogène et isotrope de Saint Venant-Kirchhoff est utilisé comme loi de comportement du pneumatique. Un contact non frottant avec un plan rigide est considéré et celui-ci est géré avec la méthode de pénalisation. Ainsi, l'impact de la sculpture est le seul mécanisme de génération de vibrations qui est pris en compte. Les mécanismes aérodynamiques et les lois de comportement ainsi

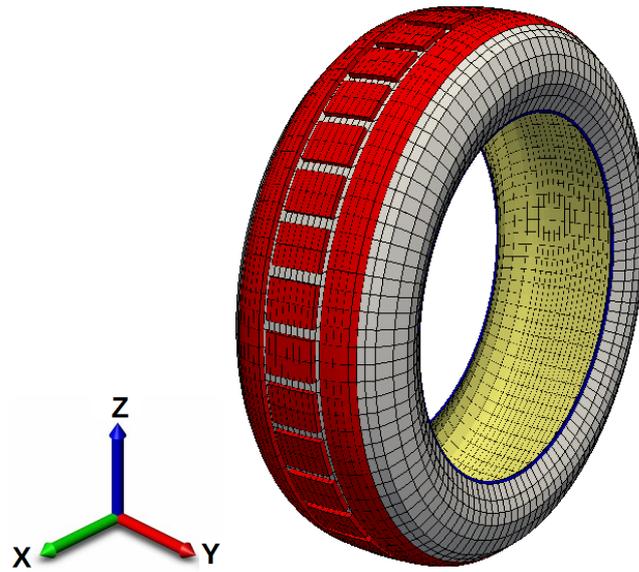


FIGURE 5.2 – Maillage 3D du pneumatique.

que l'orthotropie des nappes de l'architecture ne sont pas intégrés à la modélisation sachant leur influence significative sur le bruit de roulement. L'objectif de l'étude présentée est alors d'examiner seulement l'influence de la géométrie des sculptures des pneumatiques sur la réponse vibratoire générée par l'impact de la sculpture en utilisant la méthodologie détaillée dans la partie 4.2.

La simulation du roulage quasi-statique est effectuée en trois étapes principales. La première étape consiste à simuler le gonflage en appliquant une pression suivieuse statique. Le résultat du premier calcul est utilisé comme initialisation de la simulation de l'écrasement. Cette simulation consiste à imposer un déplacement vertical sur la zone jante. Finalement, le roulage quasi-statique est simulé en imposant la condition cinématique 4.23 sur la zone jante en utilisant le résultat de l'écrasement comme initialisation.

Une intégration temporelle avec un schéma d'Euler implicite est utilisée pour résoudre le problème vibratoire 4.9. Dans un premier temps, l'influence des conditions de roulage (vitesse de rotation, flèche) sur les niveaux vibratoires du pneumatique

Rayon géométrique	$R_e = 268 \text{ mm}$
Rayon de la jante	$R_i = 180 \text{ mm}$
Largeur	$w = 77 \text{ mm}$
Module de Young	$E = 2.10^8 \text{ Pa}$
Coefficient de Poisson	$\nu = 0.3$
Masse volumique	$\rho = 900 \text{ kg/m}^3$

TABLE 5.1 – Propriétés mécaniques du pneumatique.

Pression de gonflage	$p = 1.5 \text{ bar}$
Pénalisation normale	$\varepsilon_n = 10^6$
Pas de temps	$\Delta t = 3.10^{-5} \text{ s}$

TABLE 5.2 – Paramètres numériques de la simulation.

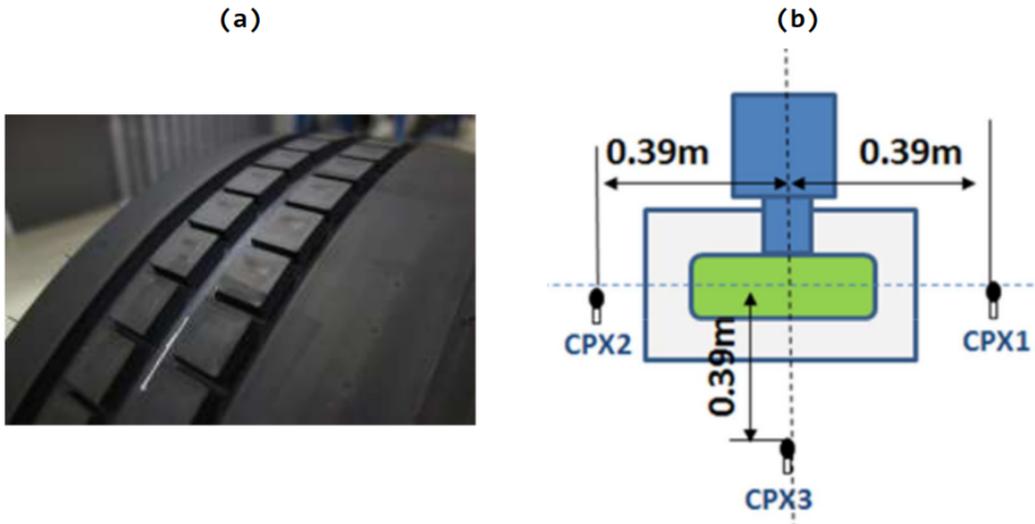


FIGURE 5.3 – (a) Pneumatique utilisé dans les mesures - (b) Montage expérimental CPX.

illustré sur la figure 5.2 est étudiée. Ensuite, la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport aux paramètres de conception des sculptures est examinée.

L'objectif est de comparer qualitativement les tendances données par les résultats de la simulation numérique avec les tendances expérimentales retrouvées dans la littérature [Li 2018b, Sandberg 2002] ou réalisées par Michelin [Saito 2016]. Ces dernières mesures ont été effectuées dans la chambre sourde de Michelin sur le prototype pneumatique illustré sur la figure 5.3.a. Le montage expérimental de la méthode CPX, utilisé dans les essais, est schématisé sur la figure 5.3.b. Les résultats expérimentaux permettent d'observer l'évolution du bruit de roulement en fonction de la vitesse et sont illustrés sur les figures 5.15, 5.21 et 5.27.

5.2.1 Influence de la vitesse de rotation

La vitesse de roulage est considérée comme le facteur le plus influent sur les niveaux de bruit extérieur [Li 2018a]. L'accroissement de la vitesse engendre une augmentation de la fréquence de l'impact entre le pneumatique et la chaussée. A partir des mesures expérimentales, une relation entre le niveau de pression acoustique (SPL) et la vitesse d'avancement peut être formulée comme suit [Sandberg 2002] :

$$L = A + B \log(V) \quad (5.1)$$

L est le niveau de pression acoustique [dB], A et B sont des coefficients constants qui dépendent du type de pneumatique et de la méthode de mesure utilisée. V est la vitesse de translation [km/h]. Des exemples de valeurs de A et B peuvent être trouvés dans [Sandberg 2002].

L'influence de la vitesse de rotation sur la réponse vibratoire est maintenant simulée avec la méthode de calcul des vibrations développée auparavant. Trois simulations de roulage quasi-statique avec trois vitesses de rotations $\omega = \{50, 100, 150\}$ rad/s sont exécutées avec une flèche de $d = 10$ mm. Ces trois vitesses de rotation correspondent aux vitesses de translation $V = \{48, 96, 144\}$ km/h calculées en utilisant l'approximation du rayon de roulage 4.25.

Les figures 5.4 et 5.5 illustrent la comparaison des spectres fréquentiels des composantes des vitesses de vibrations calculées avec les 3 vitesses de rotations considérées. Les spectres fréquentiels contiennent essentiellement des harmoniques situées autour du nombre de rainures latérales multiplié par la fréquence de rotation (Ordre = 36). La méthodologie permet ainsi de séparer les deux échelles de la réponse dynamique du pneumatique et les vibrations calculées résultent de l'impact entre la sculpture de la bande de roulement et le plan rigide. Les niveaux de vibrations sont très faibles pour $\omega = 50$ rad/s comparés aux roulages avec $\omega = \{100, 150\}$ rad/s. Les harmoniques apparaissant autour de la fréquence de passage des rainures dans

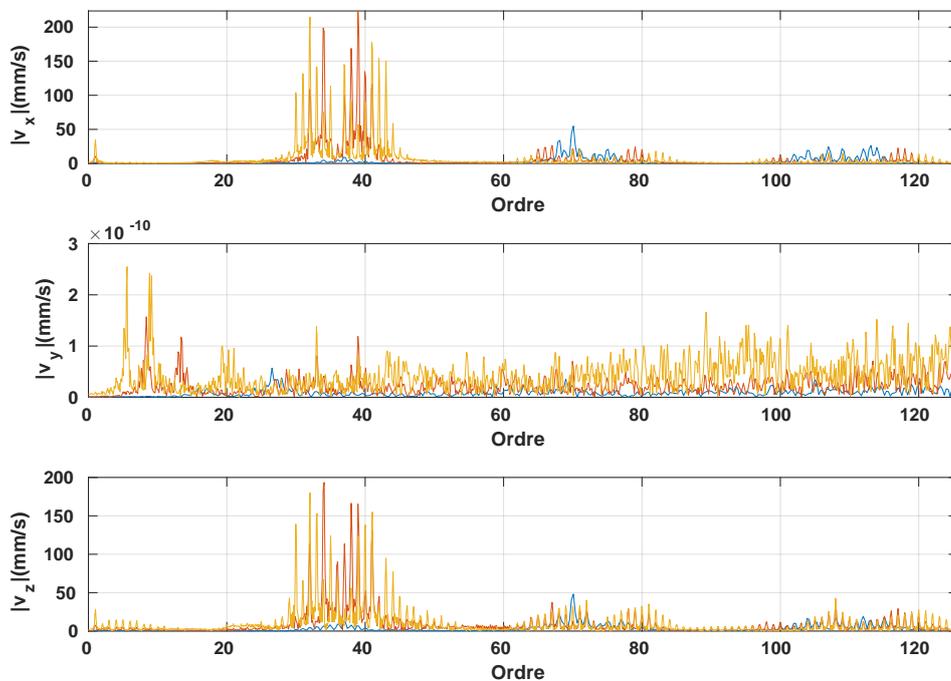


FIGURE 5.4 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $\omega = 50$ rad/s (—), $\omega = 100$ rad/s (—) et $\omega = 150$ rad/s (—).

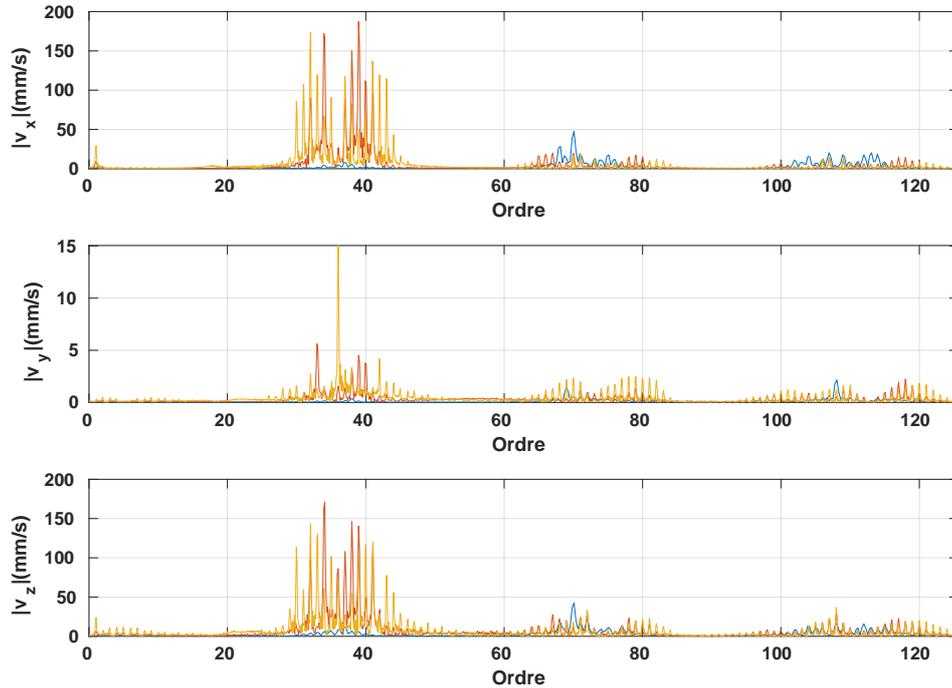


FIGURE 5.5 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $\omega = 50$ rad/s (—), $\omega = 100$ rad/s (—) et $\omega = 150$ rad/s (—).

l'AdC sont plus nombreux pour $\omega = 150$ rad/s par rapport à $\omega = \{50, 100\}$ rad/s. Les niveaux vibratoires sont plus ou moins identiques pour $\omega = \{100, 150\}$ rad/s. Les mesures expérimentales montrent que les niveaux du bruit de roulement sont également stabilisés en hautes vitesses avec un pic aux alentours de 90 km/h (figures 5.15, 5.21 et 5.27). Les vitesses de vibrations latérales v_y calculées au centre de la GI sont nulles étant donné la symétrie latérale de la structure étudiée. Par contre, les niveaux des vibrations latérales v_y calculées sur l'épaule sur la GI s'accroissent en augmentant la vitesse de rotation. L'augmentation de la vitesse de rotation décale les niveaux de vibrations vers les hautes fréquences puisque que la fréquence de l'impact entre la sculpture et le sol dépend de la vitesse de rotation. Les résultats de la simulation et les mesures expérimentales montrent que la vitesse de roulage a une influence prépondérante sur la réponse vibratoire. Cependant, ce paramètre reste externe à la conception du pneumatique et dépend du comportement du conducteur.

5.2.2 Influence de la flèche

Le deuxième paramètre important du roulage des pneumatiques est la charge portée par ceux-ci. La charge portée détermine principalement la forme de l'aire de contact. Les mécanismes de génération du bruit extérieur sont localisés autour de l'AdC. Les mesures expérimentales montrent que généralement un élargissement de l'AdC augmente les niveaux de bruit [Li 2018b]. Tong et al. [Tong 2013] a montré

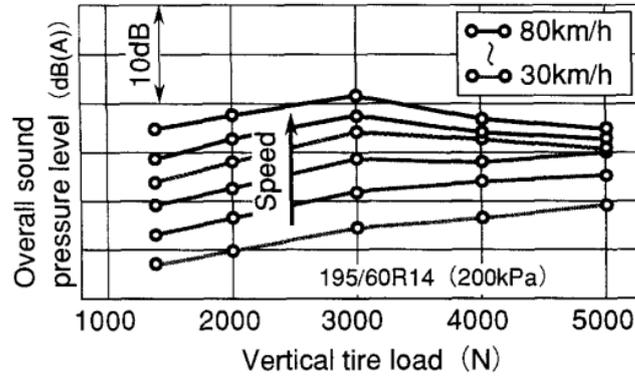


FIGURE 5.6 – Évolution du bruit extérieur du pneu en fonction de la charge pour différentes vitesses [Iwao 1996].

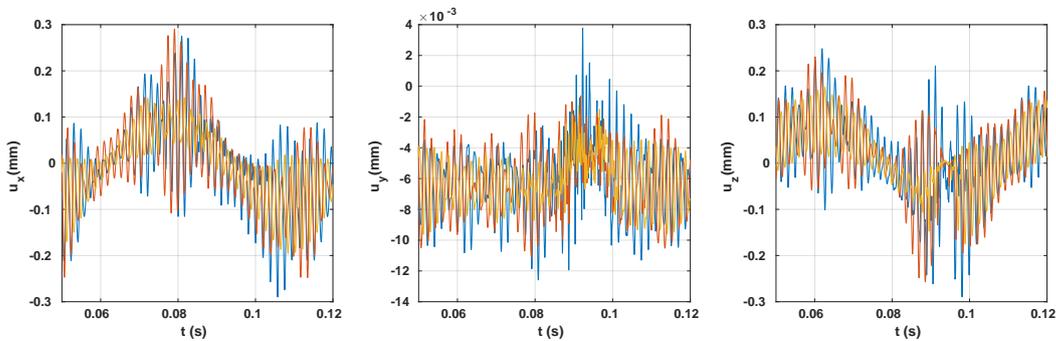


FIGURE 5.7 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $d = 5$ mm (—), $d = 10$ mm (—) et $d = 15$ mm (—).

que cette augmentation reste marginale comparée à d'autres facteurs. D'autres mesures expérimentales [Iwao 1996] ont montré que la pression acoustique générée par le roulement des pneumatiques atteint un pic pour une certaine valeur de la charge quand la vitesse de rotation augmente comme illustré sur la figure 5.6.

L'objectif de l'étude présentée dans cette partie est d'examiner l'influence de la flèche sur la réponse vibratoire. La simulation de la réponse vibratoire du pneu présenté sur la figure 5.2 avec trois flèches différentes $d = \{5, 10, 15\}$ mm est effectuée avec une vitesse de rotation $\omega = 100$ rad/s. Il faut noter que l'écrasement est simulé cinématiquement à travers la flèche. La question de la modélisation du roulage quasi-statique avec une charge imposée sera abordée à la fin de ce chapitre.

Les signaux temporels de l'évolution de la réponse vibratoire du nœud localisé sur l'épaule de la GI des trois cas étudiés sont illustrés sur la figure 5.7. Les amplitudes des vibrations sont plus faibles avec la plus grande flèche $d = 15$ mm. Une légère atténuation des niveaux vibratoires est constatée avec un roulage avec une flèche de $d = 10$ mm par rapport au roulage avec une flèche de $d = 5$ mm.

Les spectres fréquentiels des vitesses de vibrations de la figure 5.8 confirment les

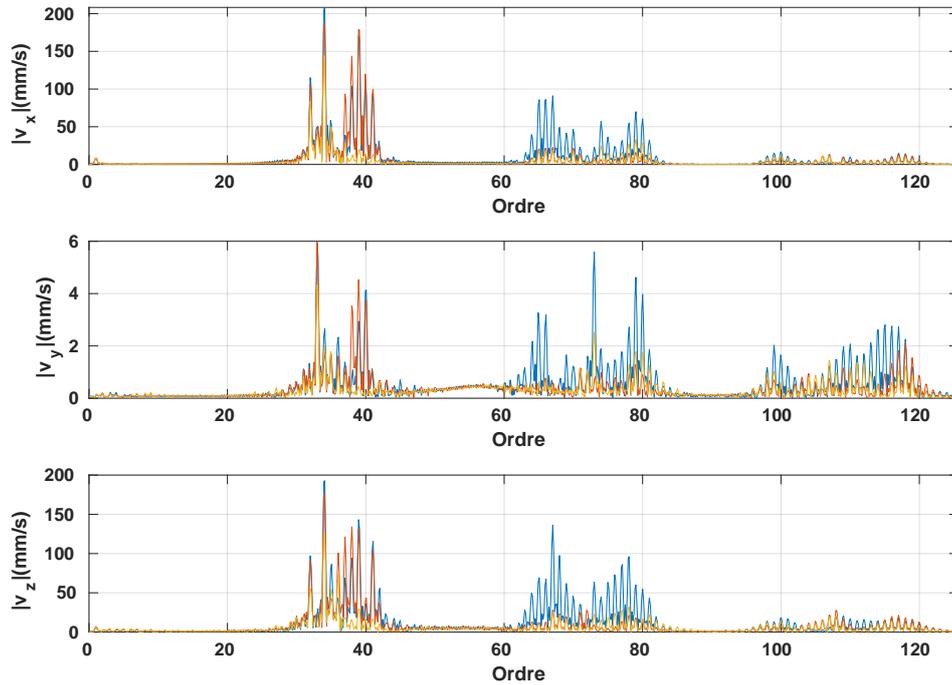


FIGURE 5.8 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaupe de la GI pour $d = 5$ mm (—), $d = 10$ mm (—) et $d = 15$ mm (—).

tendances constatées dans l'analyse de la réponse vibratoire. L'augmentation de la flèche engendre l'atténuation des niveaux vibratoires. D'autre part, l'amplitude des harmoniques autour du double de la fréquence de passage des rainures dans l'AdC (Ordre = 72) devient comparable à celle des harmoniques qui apparaissent autour de Ordre = 36 pour $d = 5$ mm. Ceci n'est pas observé pour les deux autres cas. La tendance donnée par la simulation n'est pas compatible avec les observations expérimentales. Afin d'essayer de comprendre cette tendance, la forme des aires de contact obtenue pour chaque flèche est examinée.

La figure 5.9 montre la distribution de la pression normale de contact calculée avec les trois chargements étudiés. Dans le cas de $d = 5$ mm, le rib centre rainuré est le seul à entrer en contact avec le plan. L'AdC calculée avec une flèche $d = 10$ mm montre que les trois ribs portent la charge. Cependant, la charge verticale est portée essentiellement par les ribs épaupe avec un cloquage au niveau du rib centre dans le cas de $d = 15$ mm. Autrement dit, les flancs portent l'essentiel de la charge verticale. Les spectres fréquentiels montrent que les rainures latérales du rib centre génèrent l'essentiel des vibrations. Ainsi, les tendances données par le modèle peuvent être expliquées par le fait que l'appui ajouté par les ribs épaupe non rainurés amortit les niveaux vibratoires générés par les rainures latérales. L'apparition du cloquage dans le cas de $d = 15$ mm résulte de l'omission de la loi de comportement des nappes sommet. En effet, la rigidité de ces nappes composites est supérieure à celle des flancs et pilotent principalement la forme de l'AdC. Ceci explique alors la différence entre les résultats numériques et les tendances expérimentales.

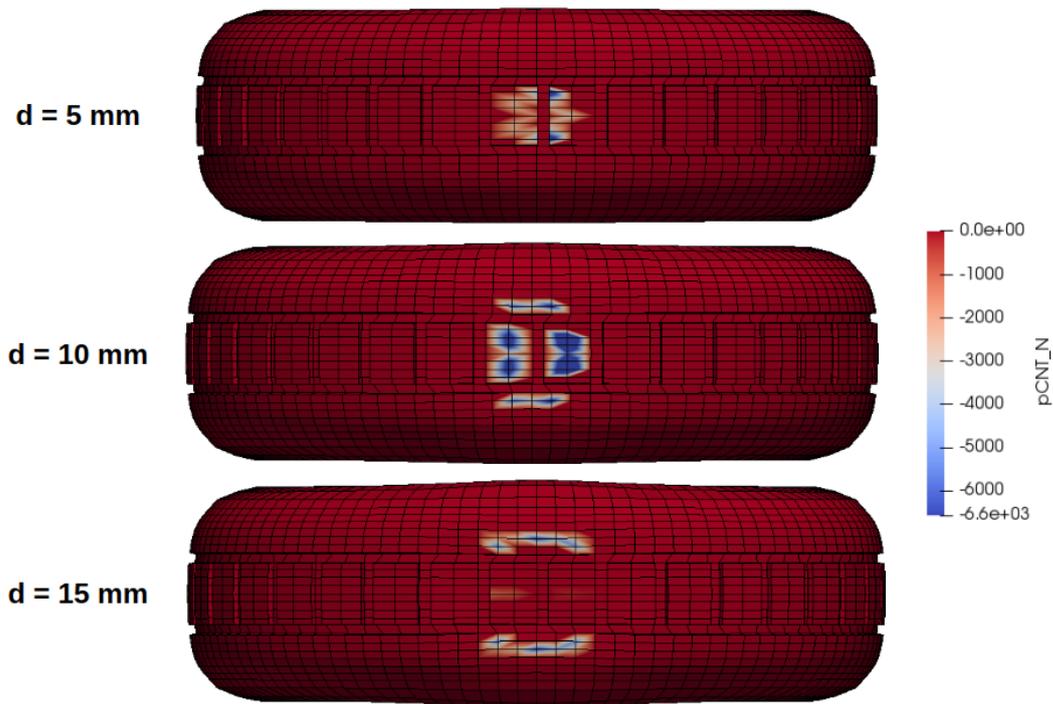


FIGURE 5.9 – Pression normale de contact calculée avec une flèche $d = \{5, 10, 15\}$ mm.

5.2.3 Sensibilité par rapport à l'épaisseur des rainures

Cette partie est consacrée à l'étude de l'influence de l'épaisseur des rainures sur la réponse vibratoire du pneumatique. Les sculptures étudiées sont illustrées dans la figure 5.10. Une flèche $d = 10 \text{ mm}$ et une vitesse de rotation de $\omega = 100 \text{ rad/s}$ ($V = 96 \text{ km/h}$) correspondent aux conditions de roulage.

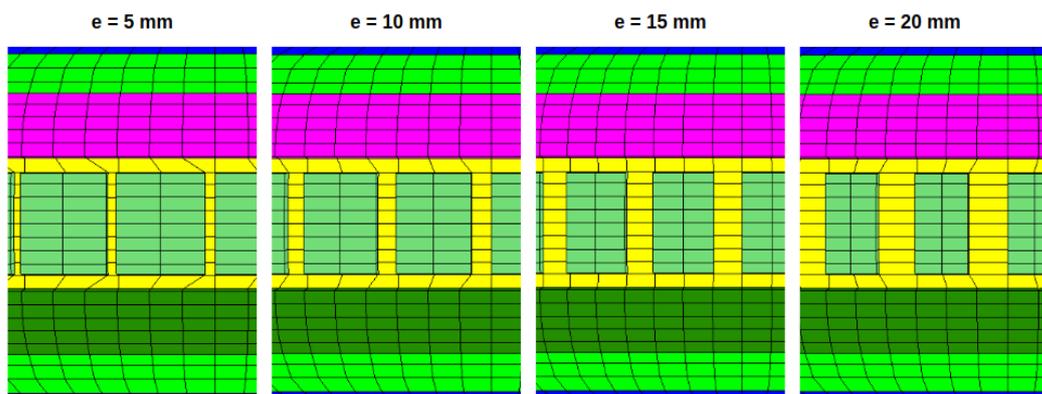


FIGURE 5.10 – Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport à l'épaisseur des rainures latérales.

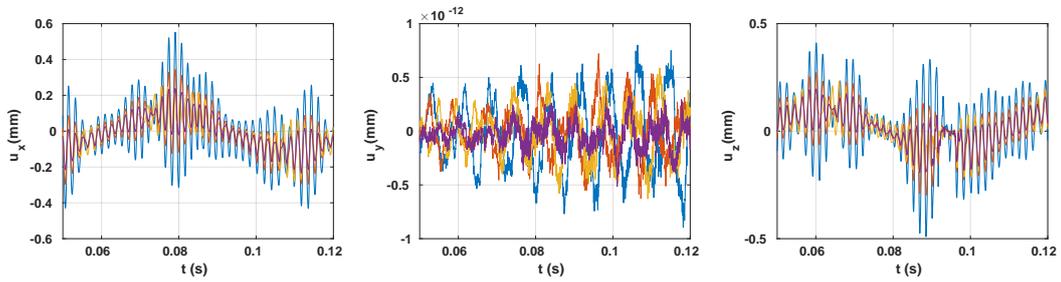


FIGURE 5.11 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).

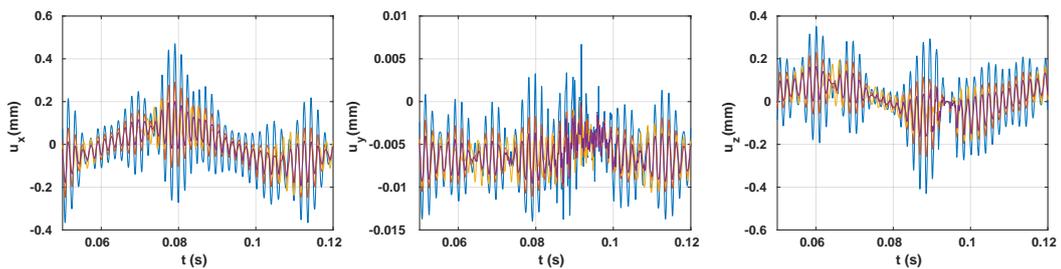


FIGURE 5.12 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).

Les nœuds de la gomme intérieure (GI), illustrés dans la figure 5.1, sont sélectionnés comme points de mesures puisque cette partie reste invariante dans les maillages des pneus utilisés dans l'étude de sensibilité. Le déplacement vibratoire et le spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations sont tracés afin de comparer l'évolution des niveaux de vibrations en fonction de l'épaisseur des rainures.

Les figures 5.11 et 5.12 montrent une atténuation des niveaux vibratoires avec l'augmentation de l'épaisseur des rainures. Les vibrations latérales u_y calculées au centre de la GI sont nulles étant donné la symétrie latérale des structures pneumatiques. Cependant, les vibrations latérales u_y calculées sur l'épaule de la GI sont non nulles à cause de l'effet Poisson et suivent les mêmes tendances que les vibrations longitudinales u_x et verticales u_z calculées au centre de la GI.

Les spectres fréquentiels des vitesses de vibrations, affichés sur les figures 5.13 et 5.14 donnent les mêmes tendances relevées dans l'analyse du déplacement vibratoire. Le spectre des vitesses de vibrations longitudinales v_y est composé d'harmoniques autour du nombre des rainures de la roue avec un effet de modulation. Les mêmes harmoniques apparaissent dans les spectres fréquentiels des vitesses latérales v_y et verticales v_z en plus d'une harmonique autour de la fréquence de passage des rainures dans l'AdC. Cette atténuation des niveaux vibratoires est expliquée par la diminution de la surface d'impact sur le plan rigide engendrée par l'augmentation de l'épaisseur des rainures. Les résultats expérimentaux, illustrés sur la figure 5.15, affichent plutôt la tendance inverse. Cette dernière s'explique par le mécanisme de pompage d'air qui est enclin à s'amplifier avec des rainures plus larges puisque la

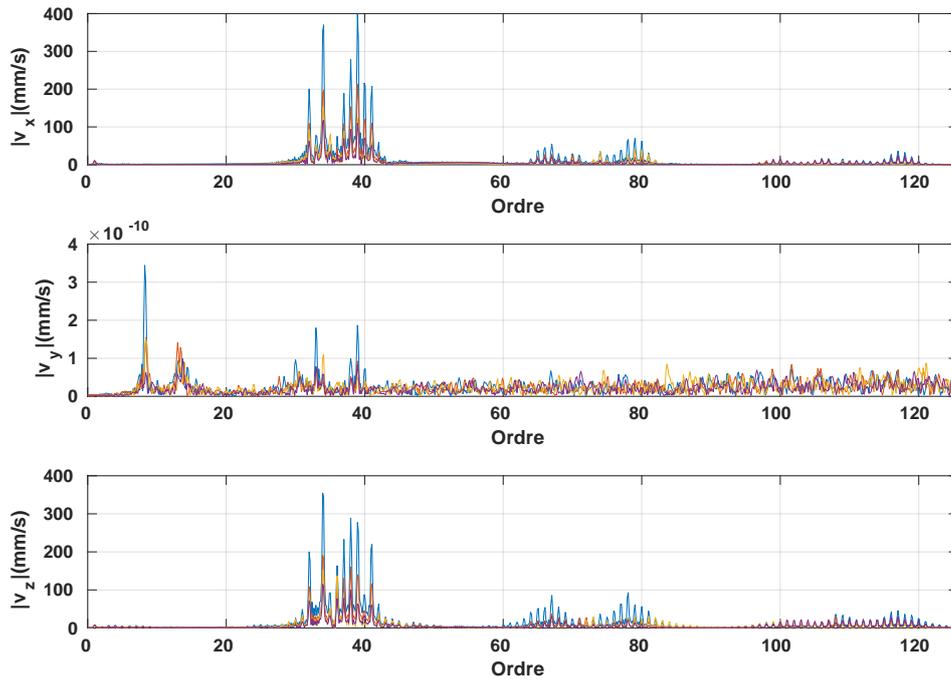


FIGURE 5.13 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).

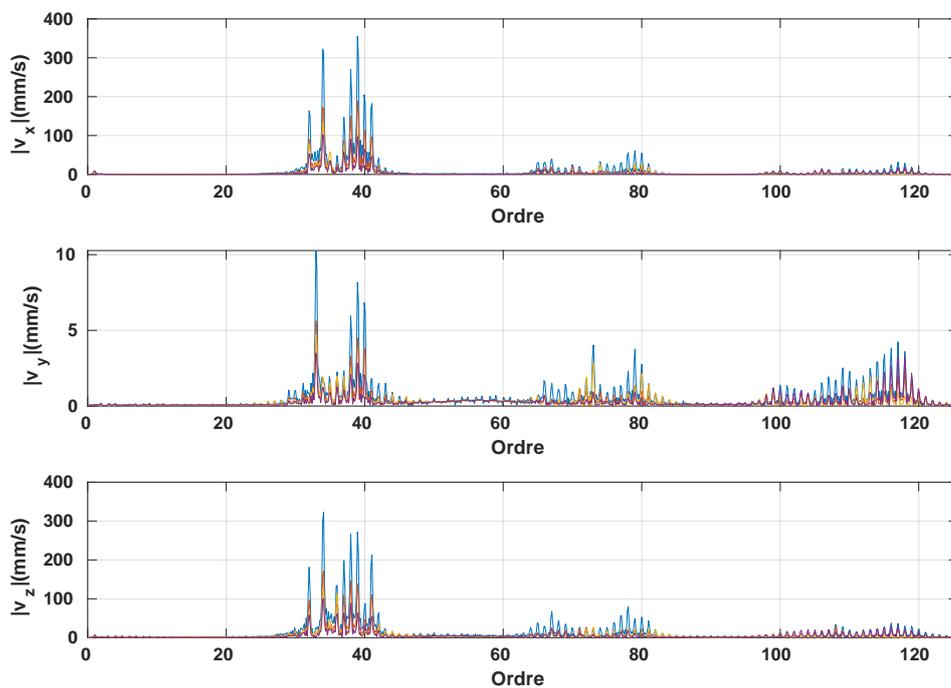


FIGURE 5.14 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).

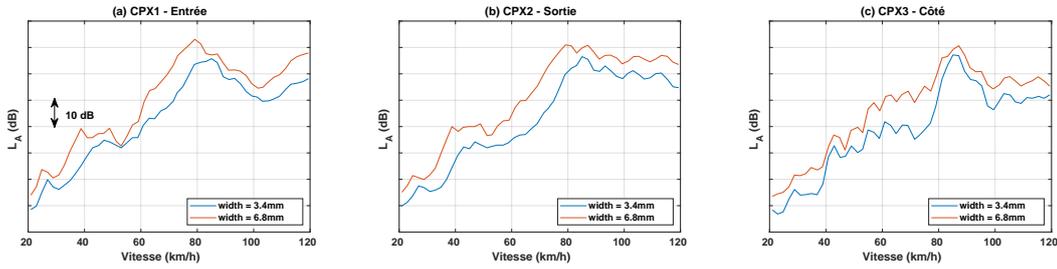


FIGURE 5.15 – Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de l'épaisseur des rainures - (a) Microphone situé à l'entrée de l'AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l'AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].

quantité d'air emprisonnée dans l'AdC s'accroît avec la taille des rainures. D'ailleurs, les mesures expérimentales retrouvées dans la littérature ne donnent pas une tendance claire sur l'évolution du bruit extérieur par rapport à l'épaisseur des rainures latérales [Sandberg 2002, Li 2018b] puisque les mécanismes d'impact et de pompage d'air entrent en compétition. D'autre part, il est délicat de comparer ces tendances avec les mesures expérimentales puisque la variation de la charge portée par le pneu induite par la variation de l'épaisseur est non négligeable. Le pilotage avec une charge imposée pour cette étude serait plus adapté.

5.2.4 Sensibilité par rapport au ψ_2

Un autre paramètre utilisé dans la conception des sculptures est l'angle ψ_2 . Cet angle représente l'angle de l'inclinaison des rainures latérales par rapport à la direction latérale. L'influence de ce paramètre sur le comportement vibratoire est examinée en calculant la réponse vibratoire des pneus ayant les sculptures illustrées sur la figure 5.16.

Les conditions de roulage de la partie précédente ($\omega = 100$ rad/s, $d = 10$ mm)

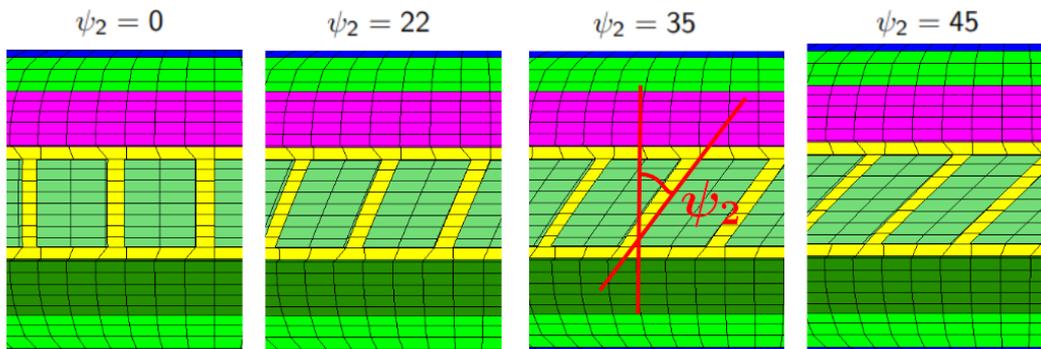


FIGURE 5.16 – Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport à l'angle d'inclinaison ψ_2 .

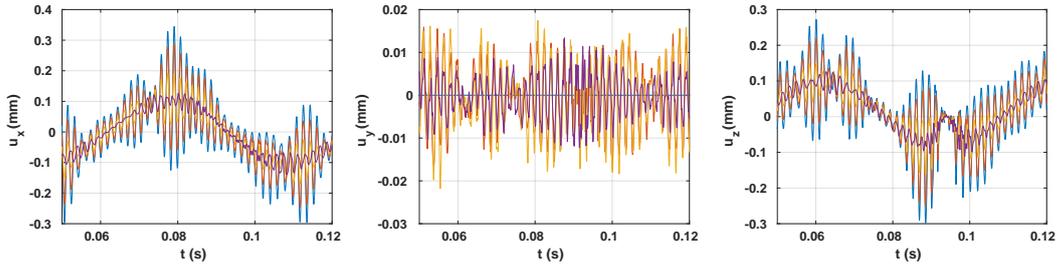


FIGURE 5.17 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).

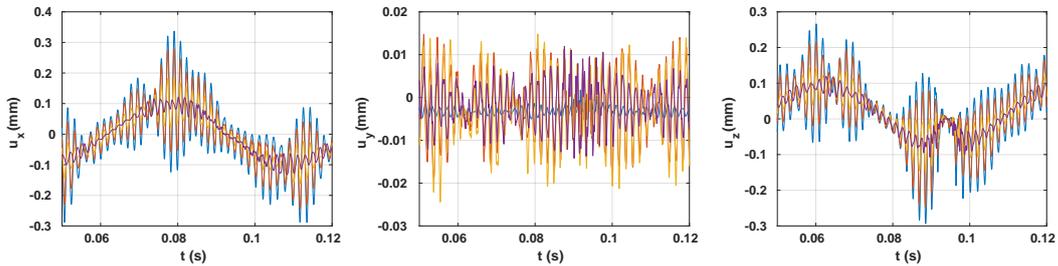


FIGURE 5.18 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).

sont utilisées dans l'étude de sensibilité présentée dans cette partie. Les réponses vibratoires calculées sont comparées au niveau des points de mesure de la gomme intérieure (GI).

Les figures 5.17 et 5.18 montrent l'évolution temporelle des composantes de la réponse vibratoire des nœuds de la GI localisés sur le centre et sur l'épaule pour différentes valeurs de ψ_2 . Une atténuation globale des amplitudes des vibrations longitudinale et verticale est observée en augmentant les valeurs de ψ_2 . Cependant, les vibrations latérales u_y calculées au centre ou à l'épaule de la GI sont plus faibles pour $\psi_2 = 0$. Ceci est dû au fait que les sculptures avec des $\psi_2 > 0$ cassent la symétrie latérale du pneumatique. L'amplitude des vibrations latérales u_y est plus faible que celle des vibrations longitudinales u_x et verticales u_z .

Les spectres fréquentiels des vitesses de vibrations affichés sur les figures 5.19 et 5.20 donnent les mêmes tendances observées dans l'analyse de la réponse vibratoire. L'amplitude des vitesses de vibrations diminue en augmentant la valeur de l'angle d'inclinaison ψ_2 . Les fréquences des harmoniques des spectres sont identiques à celles des spectres examinés précédemment. L'atténuation des niveaux vibratoires par rapport au ψ_2 est expliquée par l'entrée et la sortie progressives des rainures dans l'aire de contact contrairement aux rainures latérales ($\psi_2 = 0$) où l'entrée et la sortie se font d'une manière instantanée.

Les mesures expérimentales illustrées sur la figure 5.21 ainsi que celles retrouvées dans la littérature [Sandberg 2002, Li 2018b] montrent que le bruit extérieur suit la même tendance par rapport à l'angle d'inclinaison des rainures ψ_2 .

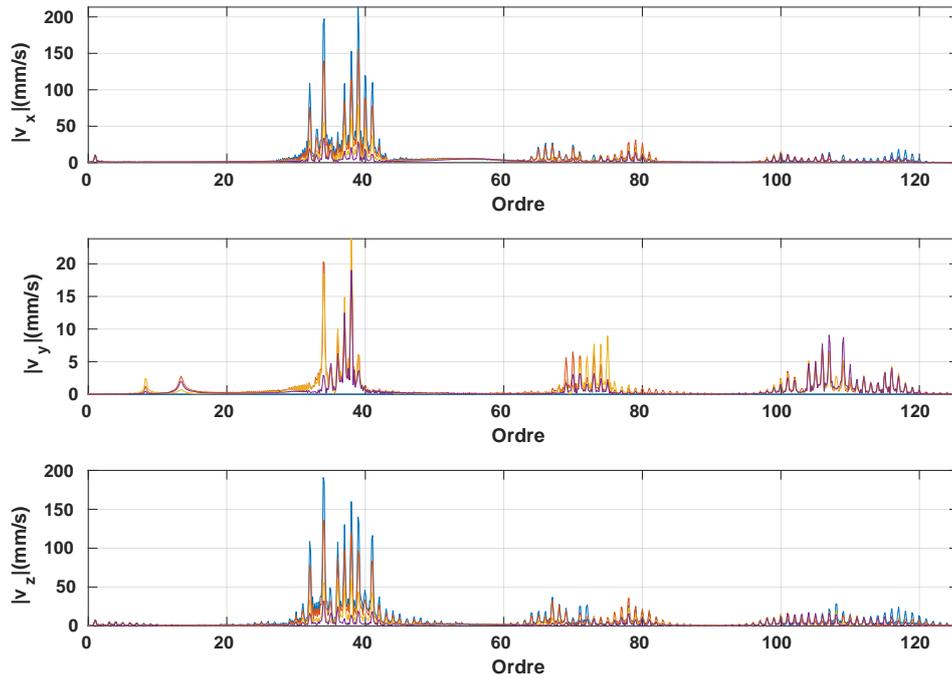


FIGURE 5.19 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).

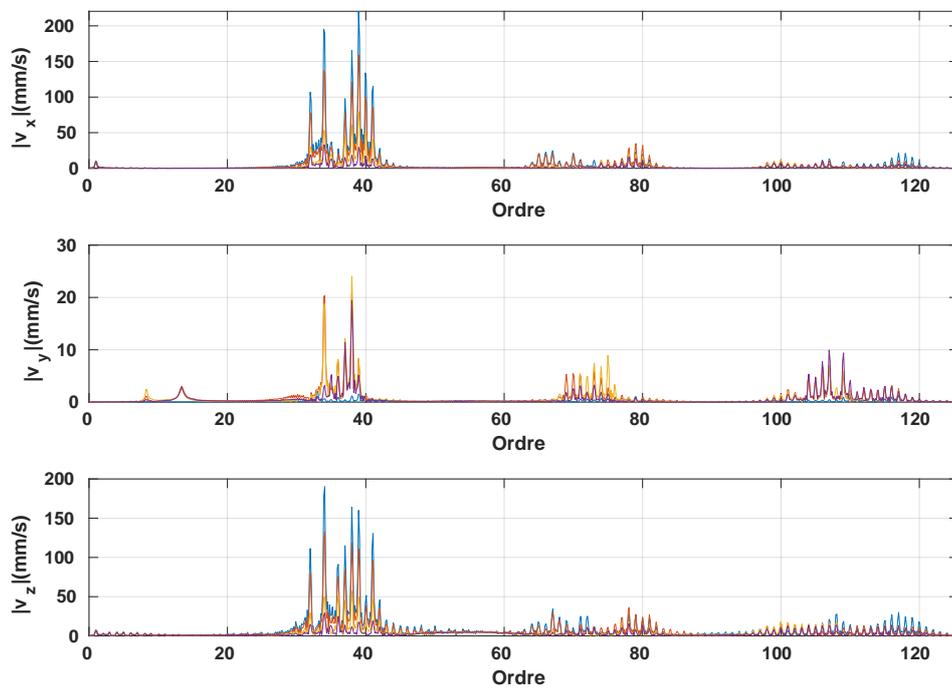


FIGURE 5.20 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).

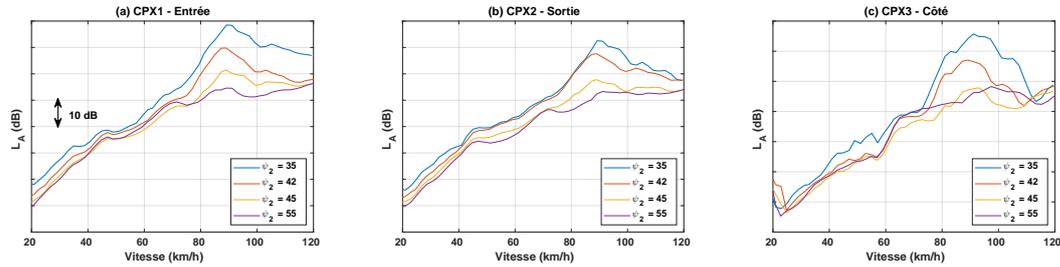


FIGURE 5.21 – Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de ψ_2 - (a) Microphone situé à l'entrée de l'AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l'AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].

5.2.5 Sensibilité par rapport au rib shifting

Un autre paramètre utilisé dans la conception des sculptures est le rib shifting. Ceci est utile dans le cas où les ribs épaules sont aussi rainurés. Le rib shifting consiste à choisir l'alignement des rainures des ribs épaules par rapport à celles du rib centre. Dans cette partie, 3 configurations sont étudiées. Les ribs épaules sont composés de 36 rainures latérales. Les sculptures étudiées sont illustrées sur la figure 5.22. Les rainures des trois ribs sont alignés dans la première configuration. Un shift de 25% est appliqué à un des ribs épaules dans la deuxième configuration. La troisième configuration consiste à garder le même shift de 25% de la deuxième configuration tout en appliquant un shift de 50% sur l'autre rib épaule.

La simulation de la réponse vibratoire est effectuée avec les mêmes conditions de roulage des études antérieures ($\omega = 100$ rad/s, $d = 10$ mm). Le comportement vibratoire est analysé en observant le déplacement et la vitesse vibratoires au niveau des points de mesure localisés sur la gomme intérieure (GI).

Les figures 5.23, 5.24, 5.25 et 5.26 montrent que le rib shifting choisi dans les configurations 2 et 3 atténue légèrement les niveaux des vibrations longitudinales et

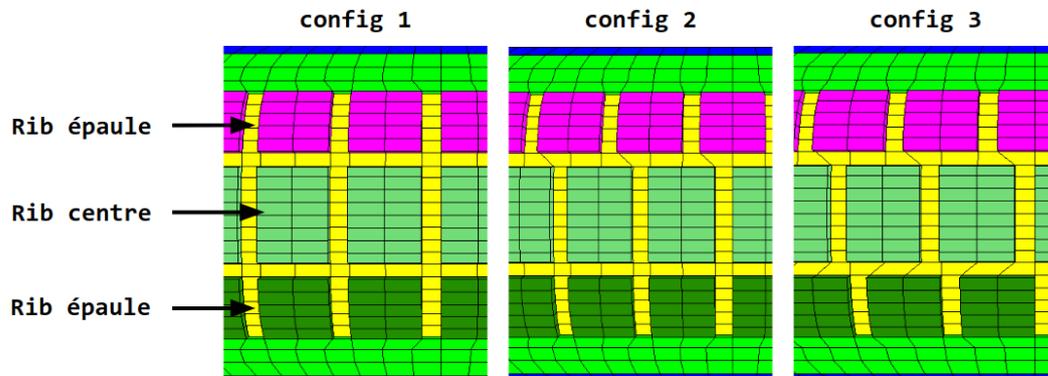


FIGURE 5.22 – Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport au rib shifting.

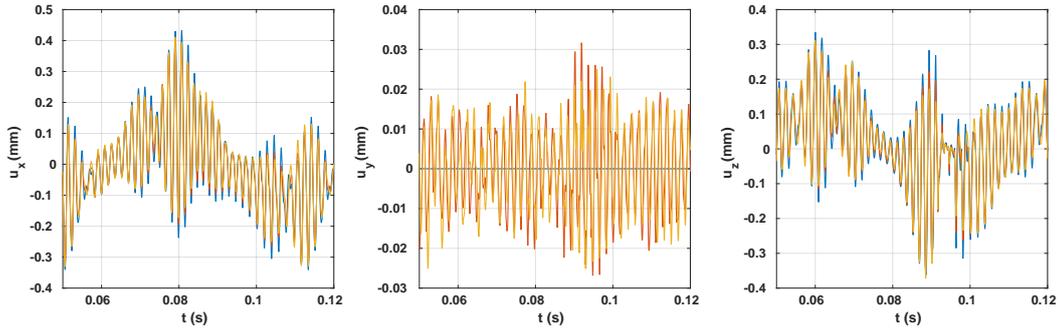


FIGURE 5.23 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).

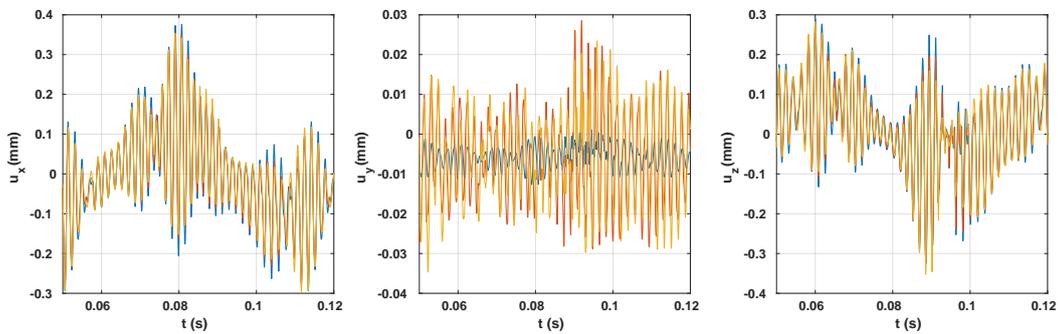


FIGURE 5.24 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).

verticales par rapport à la configuration 1. Cette atténuation peut s'expliquer par le décalage créé par le rib shifting au niveau de l'entrée et la sortie des rainures dans l'AdC. En effet, le but du rib shifting est de casser la synchronie de l'impact des rainures des trois ribs sur la chaussée. Par contre, le rib shifting génère des vibrations latérales u_y au centre de la roue puisque celui-ci casse la symétrie latérale du pneumatique. Ces vibrations latérales u_y calculées sur l'épaule avec le rib shifting restent aussi supérieures à celles calculées avec la sculpture dans laquelle les rainures latérales sont alignées (configuration 1).

Les mesures expérimentales montrent que le rib shifting atténue généralement les niveaux de bruit de roulement comme illustré sur la figure 5.27. Ce degré d'atténuation dépend des conditions de roulement et des autres paramètres de la sculpture de la bande de roulement [Sandberg 2002, Li 2018b].

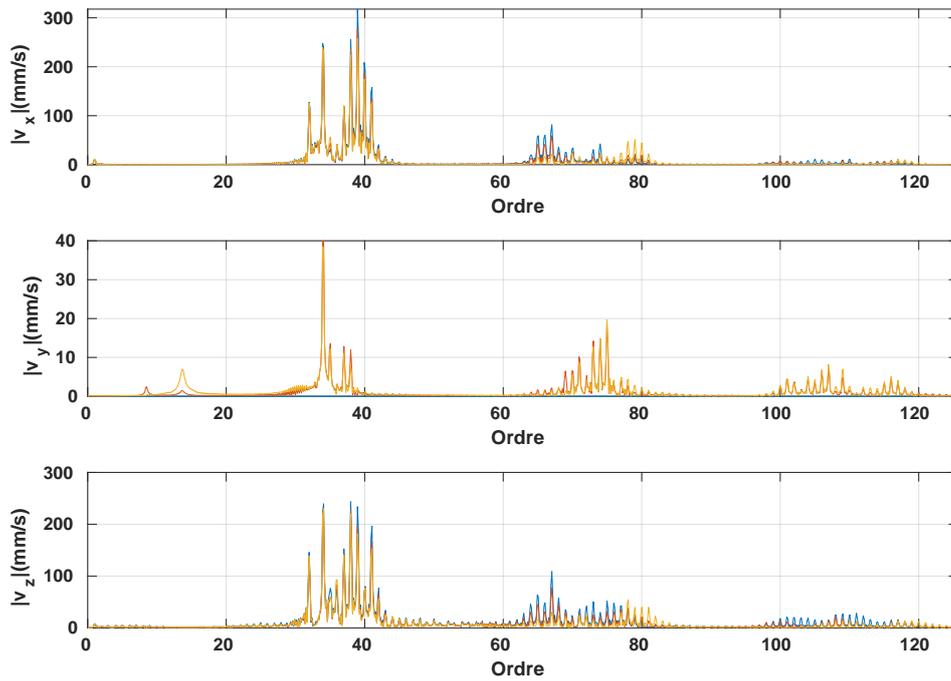


FIGURE 5.25 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).

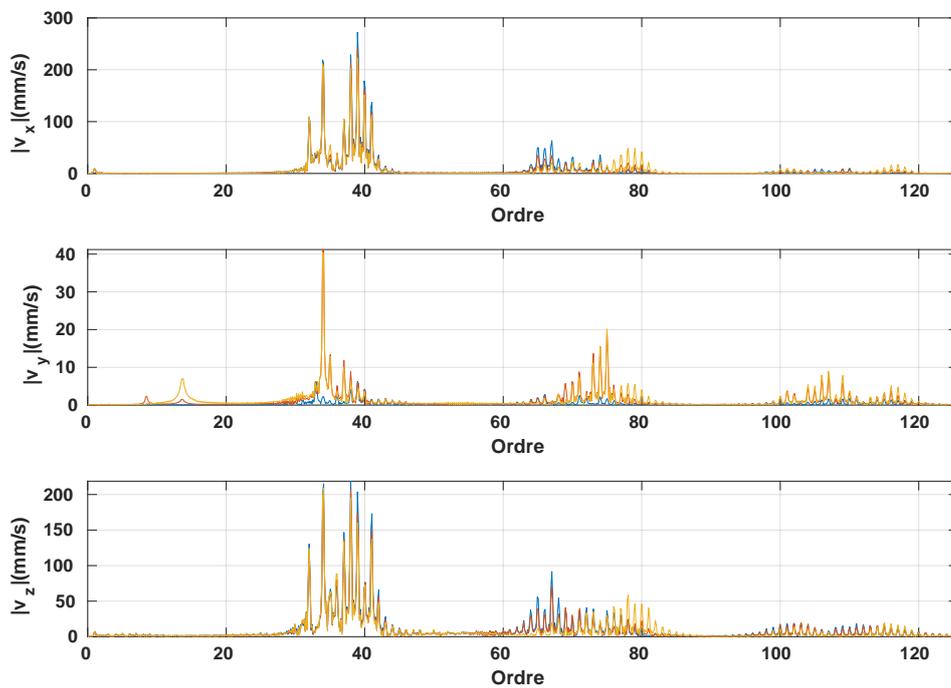


FIGURE 5.26 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).

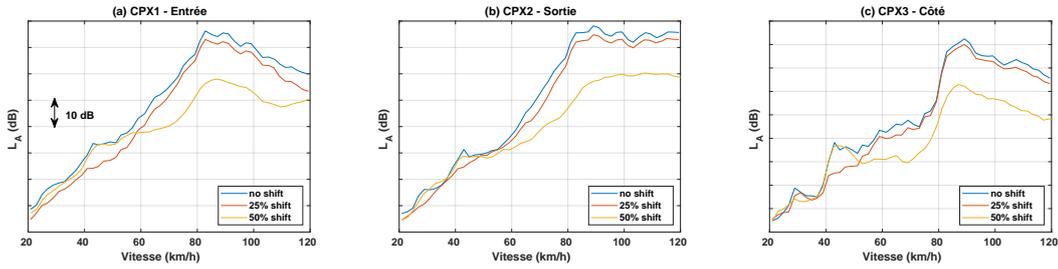


FIGURE 5.27 – Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de rib shifting - (a) Microphone situé à l’entrée de l’AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l’AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].

5.2.6 Synthèse des études de sensibilité

La synthèse des différentes études de sensibilité réalisées dans cette partie est donnée dans le tableau 5.3. Le symbole ↗ (respectivement ↘) signifie que le paramètre engendre une augmentation (respectivement réduction) des niveaux vibratoires ou acoustiques. Le symbole • signifie que le paramètre n’a pas d’impact significatif. L’étude de sensibilité concerne les réponses vibratoires dans le cas de la simulation numérique alors que c’est la pression acoustique qui est mesurée expérimentalement.

La méthode de linéarisation donne des tendances similaires à celles des mesures expérimentales par rapport à la vitesse et à l’angle d’inclinaison des rainures ψ_2 . L’évolution des niveaux vibratoires par rapport à la flèche est antagonique à celle des résultats expérimentaux. L’impact du rib shifting sur les niveaux vibratoire est négligeable contrairement à ce qui est observé expérimentalement. Les écarts de tendances entre les résultats numériques et les mesures expérimentales sont expliqués par le choix du mode de pilotage et l’absence du mécanisme de pompage d’air et des lois de comportement de l’architecture du pneumatique dans la modélisation. Par conséquent, la géométrie de la sculpture n’est pas suffisante pour simuler correctement la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions de roulage et aux paramètres de conception de la sculpture.

	Méthode de linéarisation	Mesures expérimentales
Vitesse	↗	↗
Flèche	↘	↗
Épaisseur des rainures	↗	↗↘
ψ_2	↘	↘
Rib shifting	•	↘

TABLE 5.3 – Synthèse des études de sensibilité.

5.3 Pilotage du roulage en charge imposée

La simulation de l'écrasement du pneumatique est effectuée jusqu'à maintenant en imposant un déplacement vertical sur la zone jante. Ce pilotage du roulage quasi-statique avec la flèche ne correspond pas à la réalité puisque les pneus roulent en portant la charge du véhicule. Cependant, imposer une force verticale sur la zone jante rend le problème mécanique mal posé. Par conséquent, il faut ajouter une équation supplémentaire qui permet de calculer la flèche assurant que la charge portée par le pneu est égale à la charge cible à chaque instant. Dans un premier temps, le caractère mal posé du problème mécanique est démontré quand une force verticale est appliquée sur la zone jante. Dans un second temps, l'équation de la charge va être détaillée avec le changement à effectuer pour piloter le roulage avec une charge imposée. Ensuite, la méthode est appliquée pour simuler un roulage quasi-statique du pneumatique illustré sur la figure 5.2. Enfin, la réponse vibratoire est calculée avec ce nouveau mode de pilotage en utilisant la méthode développée au début du chapitre 4.

5.3.1 Problème mal posé

La notion de problème bien posé a été introduite par Hadamard [Hadamard 1923] dès 1923. Il s'agit d'un problème dont :

- la solution existe (existence)
- la solution est unique (unicité)
- la solution dépend continûment des données (stabilité)

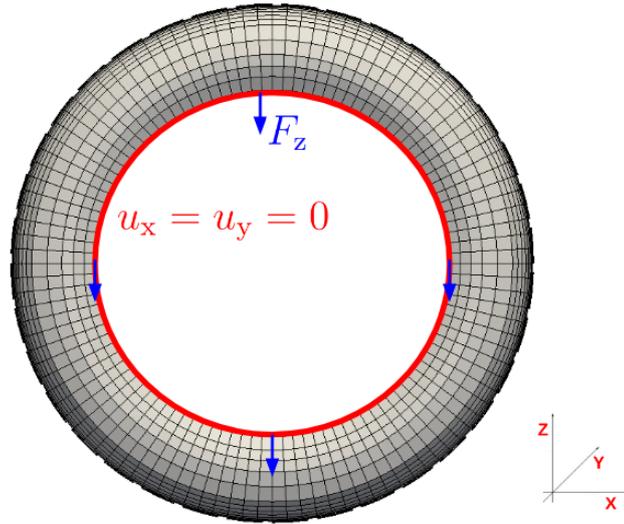
Une force verticale F_z est appliquée sur la zone jante à la place de la flèche. Les déplacements longitudinal u_x et latéral u_y sont supposés nuls sur la zone jante Γ_u comme illustré sur la figure 5.28. La solution \mathbf{u} est recherchée dans l'espace fonctionnel \mathcal{V}_1 défini par :

$$\mathcal{V}_1 = \{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega) \mid u_x = u_y = 0 \text{ sur } \Gamma_u \} \quad (5.2)$$

La condition de contact peut être interprétée comme une condition de Neumann où les forces de contact sont appliquées sur la zone de contact [Yastrebov 2011]. En ce sens, la formulation variationnelle des équations de mouvement modélisant l'écrasement statique du pneumatique sur un plan rigide sous l'effet de la force F_z est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{V}_1 \\ \int_{\Omega} \mathbf{P} : \nabla \mathbf{w} \, d\Omega = \int_{\Gamma_p} pJ(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_u} F_z w_z \, d\Gamma + \int_{\Gamma_c} \Pi_n w_n \, d\Gamma \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}_1 \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Si \mathbf{u} est une solution, alors le champ $\mathbf{u}_e = \mathbf{u} + c \mathbf{e}_z$ (c est une constante non nulle et \mathbf{e}_z est le vecteur unitaire de la direction verticale) est aussi une solution du problème :

FIGURE 5.28 – Schématisation de l'écrasement avec une charge F_z .

- Les conditions aux limites cinématiques imposées sur Γ_u sont vérifiées par \mathbf{u}_e puisque ses composantes longitudinale et latérale sont identiques à celles de \mathbf{u} .
- Les conditions aux limites sur la pression suivieuse p et sur les forces de contact sont vérifiées par \mathbf{u}_e puisque son gradient est identique à celui de \mathbf{u} .

Ainsi, la solution du problème 5.3 n'est pas unique. Par conséquent, celui-ci est mal posé. Ce résultat est classique dans la mécanique des solides. En effet, la solution d'un problème mécanique est déterminée à un corps rigide près quand une condition aux limites en déplacement n'est pas imposé sur toutes les directions de l'espace. Cette difficulté peut être contournée en gardant le pilotage de l'écrasement avec la flèche imposée et en ajoutant une équation supplémentaire au problème mécanique. Cette technique sera détaillée dans la partie suivante.

5.3.2 Équation de la charge

La charge verticale portée par la structure est calculée en intégrant la pression normale dans l'aire de contact. Afin d'exprimer analytiquement la fonction gap g_n en fonction de la flèche d , les noeuds de la jante sont encastrés et la position du sol z_p est variable et égale à la valeur de la flèche comme illustré sur la figure 5.29.

La charge F_z se calcule de la façon suivante quand la méthode de pénalisation est choisie pour gérer la condition de non-interpénétration :

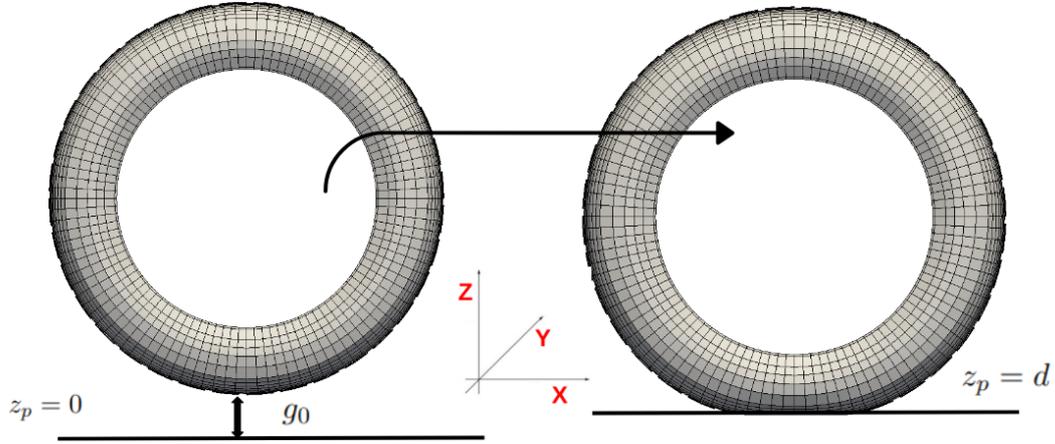


FIGURE 5.29 – Paramétrage de la position du sol.

$$\begin{aligned}
 F_z(\mathbf{u}, d) &= \int_{\Gamma_c^t(d)} p_n d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_c^t(d)} \varepsilon_n g_n d\Gamma \\
 &= \int_{\Gamma_c^t(d)} \varepsilon_n (g_0 + u_n - d) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Le roulement est piloté avec la même condition aux limites 4.23 mais avec une flèche variable qui dépend du temps. Celle-ci est le zéro de l'équation supplémentaire suivante :

$$Eq(d) = (F_z(d) - C_z)^2 \tag{5.5}$$

C_z représente la charge imposée. La méthode de Newton est utilisée pour trouver le zéro de l'équation 5.5. Après avoir choisi une valeur initiale de la flèche d_0 , celle-ci est mise à jour avec le schéma itératif suivant :

$$\begin{aligned}
 d_{i+1} &= d_i + \Delta d_i \\
 &= d_i - \frac{Eq'(d_i)}{Eq(d_i)}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Le calcul de la dérivée de l'équation supplémentaire s'avère nécessaire dans la mise en place du schéma itératif donné par la méthode de Newton. Une approximation de cette dérivée est obtenue grâce à l'expression analytique de la fonction gap g_n .

$$\begin{aligned}
 Eq'(d) &= 2(F_z(d) - C_z) \frac{\partial F_z}{\partial d} \\
 &\approx -2\varepsilon_n |\Gamma_c^t(d)| (F_z(d) - C_z)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

1 - Initialisation

Initialisation du déplacement et de la flèche à partir du calcul d'écrasement (\mathbf{u}, d)

Choix des seuils de convergence $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ et le nombre maximal d'itérations N

2 - Boucle temporelle à l'instant t_k **Boucle itérative i**

Calculer \mathbf{u}_k solution du problème quasi-statique à l'instant t_k avec la flèche d_i

Calculer la charge $F_z(d_i)$

Test de convergence

Si $(|F_z(d_i) - C_z| < \varepsilon_1)$ ou $(|\Delta d_i| < \varepsilon_2)$ ou $(i = N)$

Sortir de la boucle

Sinon

$$d_{i+1} = d_i + \Delta d_i$$

Répéter $(i = i + 1)$.

Passer à l'instant t_{k+1}

TABLE 5.4 – Algorithme de simulation du roulage quasi-statique en charge imposée

$|\Gamma_c^t(d)|$ représente la surface de l'aire de contact. Le calcul de la dérivée de l'expression du gap par rapport à la flèche est direct. Cependant, la dérivation du domaine d'intégration $\Gamma_c(d)$ par rapport à la flèche est plus compliquée à effectuer et cette partie de la dérivée n'est pas prise en compte en espérant qu'elle soit négligeable au voisinage de la solution. La résolution de l'équation de la charge est réalisée avec une méthode de quasi-Newton. Sa convergence, avec une vitesse plus faible que celle de la méthode de Newton, reste conditionnée par l'initialisation de la flèche. L'algorithme permettant de simuler le roulage quasi-statique avec une charge imposée est donné dans le tableau 5.4.

La structure de l'algorithme 5.4 montre bien que le temps de calcul de la simulation du roulage quasi statique avec une charge imposée est supérieur à celui avec une flèche imposée puisque plusieurs résolutions du problème quasi statique sont effectuées à chaque pas de temps puisque sa boucle de Newton est imbriquée dans la boucle de quasi-Newton de la flèche. Un couplage faible entre le déplacement \mathbf{u} et la flèche d est alors considéré. La convergence de la boucle itérative peut être accélérée en multipliant la correction Δd_i par un coefficient $\alpha > 1$.

5.3.3 Application numérique

La méthode présentée précédemment est utilisée pour simuler le roulage quasi-statique en charge imposée du pneu illustré sur la figure 5.2. Les propriétés mécaniques et les paramètres numériques de la simulation sont identiques à ceux de la section précédente. Une charge de 500 daN et une vitesse de rotation de $\omega = 100$ rad/s sont imposées.

La charge portée par le pneumatique est bien égale à la charge imposée comme

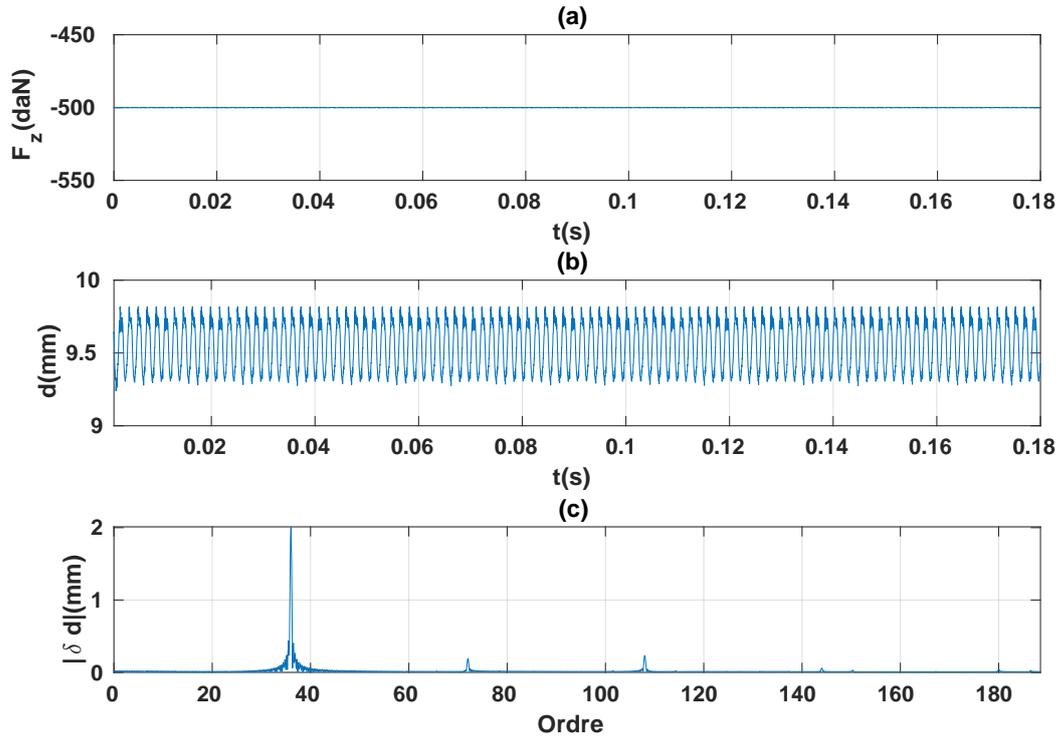


FIGURE 5.30 – (a) - Évolution temporelle de la charge portée par le pneumatique. (b) - Évolution temporelle de la flèche. (c) - Spectre fréquentiel de la variation de la flèche.

illustré sur la figure 5.30.(a). La figure 5.30.(b) montre l'évolution de la flèche permettant d'avoir une charge verticale égale à la charge cible. Cette variation est expliquée par la variation de la forme de l'AdC due aux rainures latérales qui composent la sculpture de la bande de roulement. Le spectre fréquentiel de la variation de la flèche δd définie comme étant la différence entre la flèche d et sa valeur moyenne \bar{d} est composé d'harmoniques autour des multiples de la fréquence de passage des rainures dans l'AdC (Ordre = $36k$, $k \in \mathbb{N}$).

Les figures 5.31 et 5.32 montrent l'évolution de la réponse vibratoire du pneumatique dont le roulage quasi-statique est effectué avec une charge imposée. Une amplification au cours du temps est constatée au niveau des vibrations longitudinales et des vibrations latérales calculées sur le rib épau de la GI. Cette amplification numérique est liée à la modélisation du roulage quasi-statique. Afin d'investiguer la source de cette amplification, l'accélération quasi-statique qui représente le signal d'excitation du problème vibratoire est examinée au niveau des points de mesure.

Les figures 5.33 et 5.34 montrent bien une amplification de l'accélération quasi-statique longitudinale au niveau des deux points de mesures de la GI. Cet effet d'amplification n'est pas observé sur les accélérations latérales. Ainsi, l'amplification des vibrations latérales est une conséquence de l'effet de Poisson. Cette amplification numérique s'explique par la condition utilisée pour piloter l'avancement

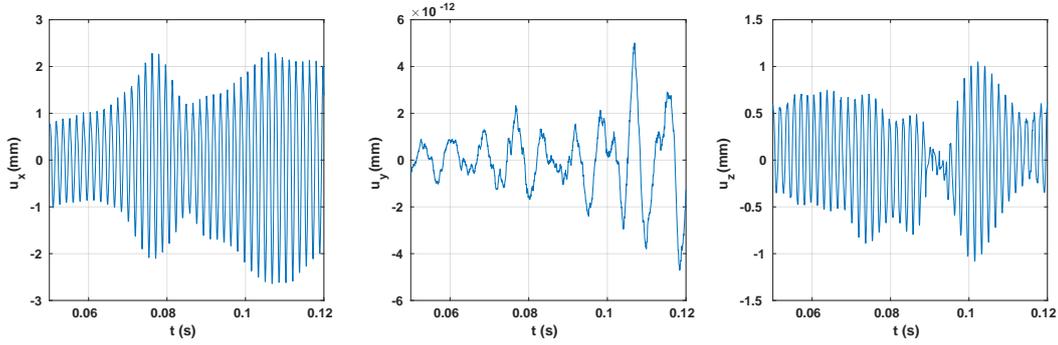


FIGURE 5.31 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.

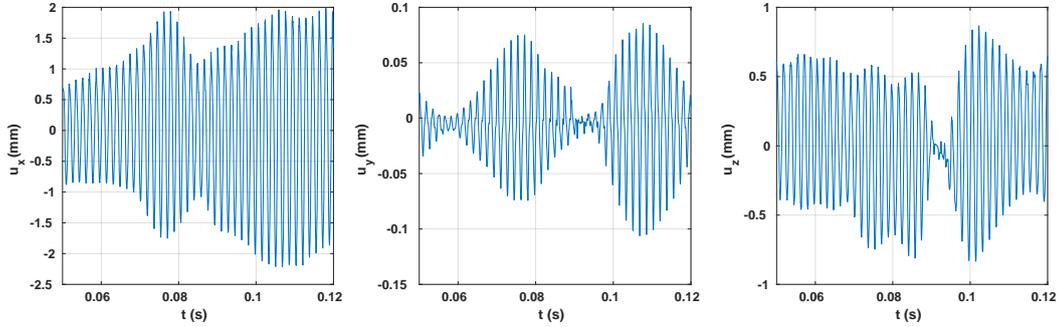


FIGURE 5.32 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.

du pneumatique avec une charge imposée. Afin de démontrer cela, le déplacement longitudinal u_x imposé sur la zone jante et ses dérivés sont examinés.

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z, t) &= \left(R_e - \frac{d(t)}{3}\right)\omega t + x \cos(\omega t) + z \sin(\omega t) - x \\
 \dot{u}_x(x, y, z, t) &= \left(R_e - \frac{d(t)}{3}\right)\omega - \frac{\dot{d}(t)}{3}\omega t - \omega x \sin(\omega t) + z\omega \cos(\omega t) \\
 \ddot{u}_x(x, y, z, t) &= -\frac{2\dot{d}(t)}{3}\omega - \frac{\ddot{d}(t)}{3}\omega t - \omega^2 x \cos(\omega t) - z\omega^2 \sin(\omega t)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

x , y et z représentent les coordonnées du vecteur position \mathbf{X} d'un point de la configuration de référence. L'équation 5.8 montre bien que la variation de la flèche amplifie l'accélération longitudinale quasi-statique imposée dans le pilotage du roulage quasi-statique. Ceci va impacter l'accélération quasi-statique de l'ensemble de la structure. Une méthode simple pour corriger cette amplification consiste à remplacer la flèche par sa valeur moyenne \bar{d} . Le nouveau déplacement longitudinal imposé sur la zone jante est donné par :

$$u_x(x, y, z, t) = \left(R_e - \frac{\bar{d}}{3}\right)\omega t + x \cos(\omega t) + z \sin(\omega t) - x \tag{5.9}$$

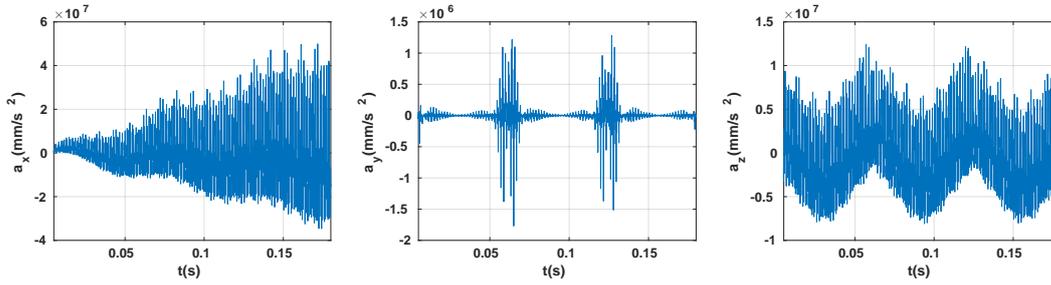


FIGURE 5.33 – Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique du nœud centre de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.

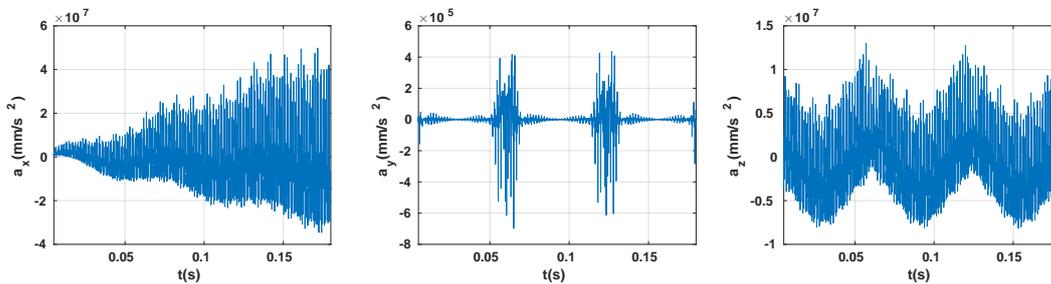


FIGURE 5.34 – Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique du nœud épaule de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.

Les résultats de la correction apportée à la condition cinématique imposée pour piloter le roulage quasi-statique sont donnés sur la figure 5.35. La charge portée par le pneumatique est égale à la charge imposée. L'évolution de la flèche d et le spectre fréquentiel de la variation de la flèche δd sont identiques à ceux obtenus avec l'ancienne condition de roulage. Par conséquent, la correction permet de conserver la même zone de contact tout en éliminant l'amplification numérique de l'accélération quasi-statique induite par la variation de la flèche. La réponse vibratoire est maintenant calculée avec la méthode développée en début de ce chapitre en utilisant la réponse quasi-statique obtenue avec la nouvelle condition de pilotage du roulage.

La comparaison entre les réponses vibratoires est donnée sur les figures 5.36 et 5.37. La nouvelle condition de roulage permet d'éliminer l'amplification numérique observée au niveau des vibrations longitudinales et au niveau des vibrations latérales calculées sur l'épaule de la GI. Elle induit une légère atténuation de l'amplitude des vibrations verticales. La fréquence des vibrations ne varie pas avec la correction apportée à la condition de roulage. Ainsi, la correction de la condition de roulage permet de retrouver un comportement vibratoire périodique cohérent avec les phénomènes physiques intégrés dans la modélisation (rotation, contact).

Les spectres fréquentiels des vitesses de vibrations calculées avec une charge imposée sont donnés dans les figures 5.38 et 5.39. La plus grande différence avec les calculs avec une flèche imposée est observée au niveau des vitesses de vibrations verticales. En effet, le spectre des vitesses verticales est composé d'harmoniques si-

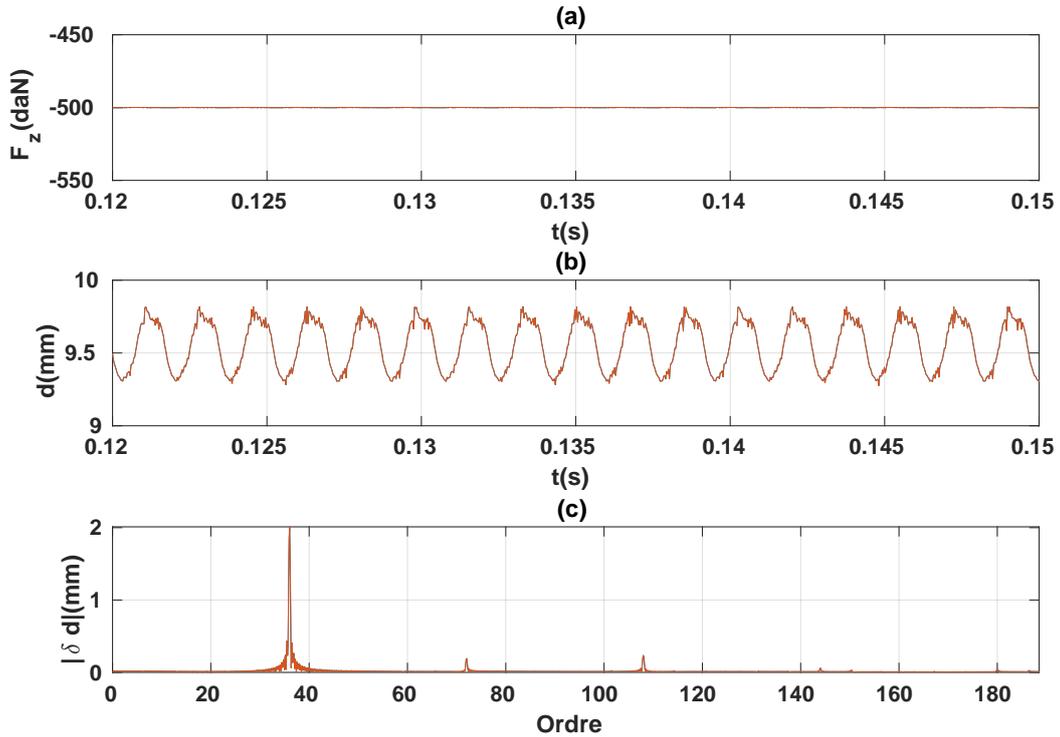


FIGURE 5.35 – (a) - Évolution temporelle de la charge portée par le pneumatique. (b) - Évolution temporelle de la flèche. (c) - Spectre fréquentiel de la variation de la flèche - (—) avec l'ancienne condition de roulage (—) avec la nouvelle condition de roulage.

tuées autour des multiples de fréquence de passages des rainures dans l'AdC (Ordre = $36k$, $k \in \mathbb{N}$). Ce changement s'explique par la variation du déplacement quasi-statique vertical induit par la variation de la flèche. Les vitesses longitudinales de vibrations ne varient pas énormément comparé aux calculs avec une flèche imposée. Les spectres de ces vitesses sont composés essentiellement d'harmoniques localisés autour de la fréquence de passage des rainures dans l'AdC. L'amplitude des vitesses verticales est largement supérieure à celle des vitesses longitudinales dans le cas du roulage avec une charge imposée contrairement au roulage avec une flèche imposée dans lequel les vitesses verticales et longitudinales avaient le même ordre de grandeur. Le rapport d'amplitudes entre la vitesse verticale et la vitesse longitudinale est approximativement égale à 3. Ce coefficient correspond à l'impact de la flèche sur le rayon de roulage défini dans l'équation 4.25. La vitesse latérale s'annule au centre de la GI étant donné la symétrie mentionnée auparavant. Cependant, des harmoniques autour des multiples des efforts de contact apparaissent avec un effet de modulation dans le spectre des vitesses de vibrations latérales.

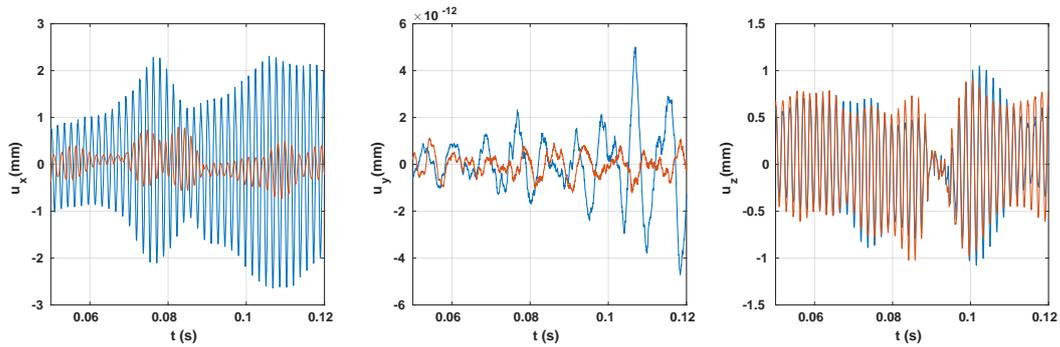


FIGURE 5.36 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI avec l'ancienne condition de roulage (—) et avec la nouvelle condition de roulage (—).

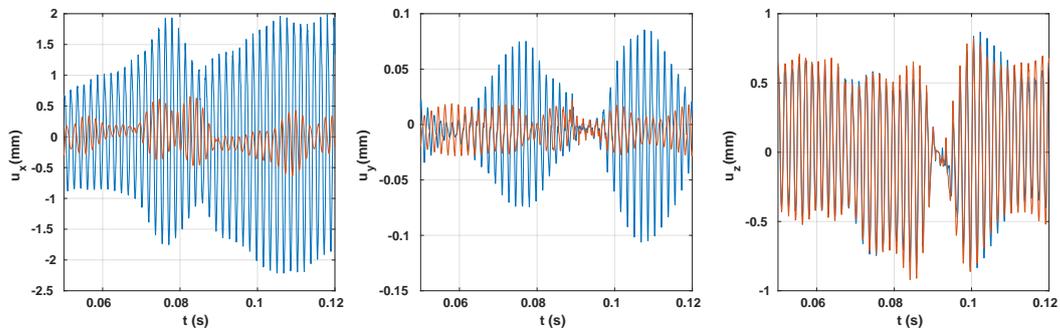


FIGURE 5.37 – Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI avec l'ancienne condition de roulage (—) et avec la nouvelle condition de roulage (—).

5.3.4 Conclusion

Cette partie a été consacrée au pilotage du roulage quasi-statique avec une charge imposée en passant par une équation supplémentaire. Cette méthode a permis de contourner le caractère mal posé du problème mécanique induit par l'application de la force verticale sur la zone jante. L'amplification de l'accélération quasi-statique engendrée par les dérivées temporelles de la flèche a été corrigée en considérant sa valeur moyenne dans le pilotage du roulage quasi-statique. La réponse vibratoire a été ensuite calculée avec la méthode de linéarisation 4.2. Les résultats obtenus avec ce nouveau mode de pilotage montre que celui-ci induit un changement notable au niveau des vibrations verticales. Ce changement est cohérent avec la variation de la forme de l'AdC. Ce nouveau mode de pilotage correspond au chargement réaliste des pneumatiques et doit être utilisé par la suite dans la simulation du comportement vibratoire.

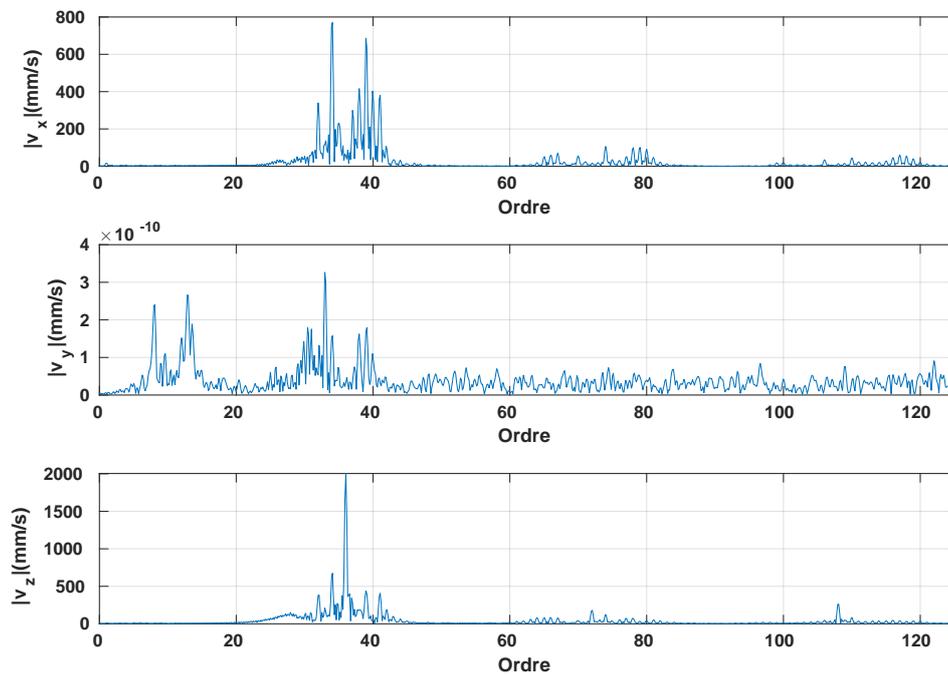


FIGURE 5.38 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI avec une charge imposée $C_z = 500$ daN.

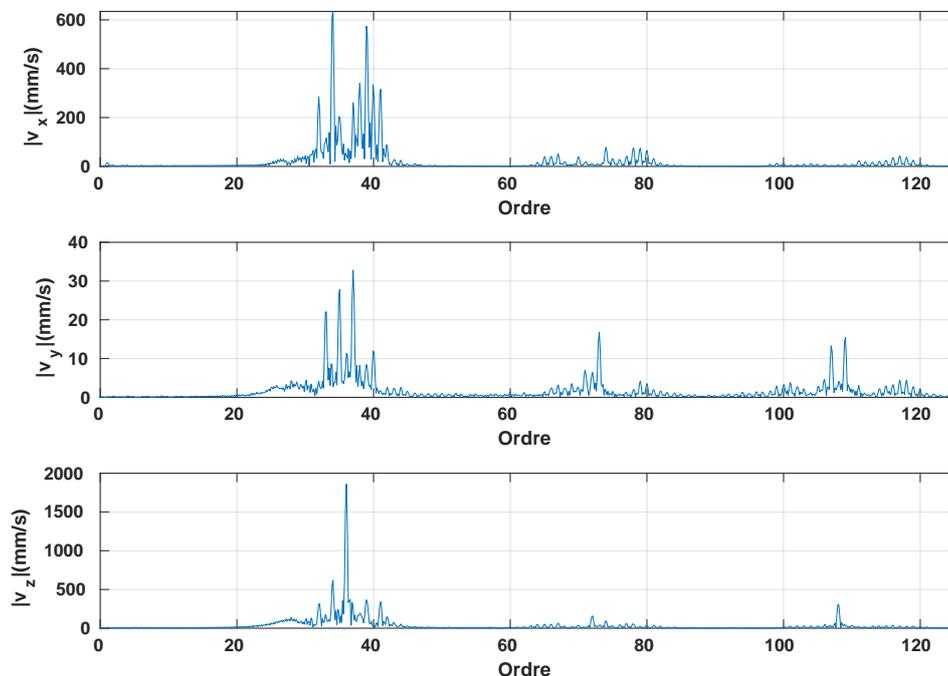


FIGURE 5.39 – Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI avec une charge imposée $C_z = 500$ daN.

5.4 Conclusion

La méthodologie est appliquée pour simuler le comportement vibratoire d'une structure ayant une géométrie représentative du pneumatique. Une première étude portait sur l'influence des conditions de roulage sur les niveaux vibratoires. Ensuite, la sensibilité des vibrations par rapport à quelques paramètres de conception des sculptures de la bande de roulement a été examinée. La comparaison qualitative des tendances obtenues avec celles observées expérimentalement montre que la géométrie de la sculpture n'est pas suffisante pour simuler correctement la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions de roulage et aux paramètres de conception de la sculpture. Le mécanisme de pompage d'air et les lois de comportement orthotropes des nappes doivent être intégrés afin de simuler complètement le bruit de roulement.

La dernière partie de ce chapitre a été consacrée au pilotage du roulage quasi-statique avec une charge imposée en passant par une équation supplémentaire. La formulation mathématique du nouveau pilotage a été introduite. La réponse vibratoire a été ensuite calculée avec la méthode développée au début du chapitre. Les résultats obtenus avec ce nouveau mode de pilotage montre que celui-ci engendre une augmentation des amplitudes des vibrations verticales par rapport aux vibrations longitudinales. Ceci est cohérent avec la déformation verticale du pneumatique induite par la variation de l'aire de contact.

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'objectif principal de ce travail de thèse était de proposer une stratégie numérique pour simuler la réponse vibratoire des pneumatiques dont l'excitation est pilotée par la sculpture. Le mécanisme d'impact de la bande de roulement est particulièrement étudié. Ce phénomène est considéré comme le mécanisme principal de génération du bruit d'origine solidienne.

Le cadre mathématique nécessaire au développement de la méthodologie proposée dans ces travaux de thèse a été détaillé. Une attention particulière a été portée sur les différentes techniques numériques choisies dans la simulation de la réponse dynamique. Ce cadre a permis de mettre en place la formulation mathématique de la méthode numérique en précisant les différentes hypothèses effectuées.

Plusieurs études numériques ont été réalisées afin d'étudier la stabilité et de cerner le domaine de validité de la méthode numérique. La première application sur le système masses/ressorts non-linéaire a montré que la méthode donnait des résultats identiques à ceux obtenus avec une intégration temporelle classique pour toutes les valeurs considérées de la raideur cubique. La deuxième application portait sur la simulation de la réponse vibratoire d'un cylindre rainuré en roulage sur un sol lisse. L'analyse des résultats a montré que la méthode numérique proposée donnait des résultats satisfaisants dans le cas du contact non frottant. La correction de la condition cinématique dans la zone de contact a permis d'améliorer la précision de la méthode surtout pour les grandes valeurs du coefficient de frottement. Par ailleurs, la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport au coefficient de frottement, obtenue avec la méthode de linéarisation, est cohérente avec la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions d'adhérence.

Les deux premières applications académiques ont donné des résultats encourageants. Par conséquent, la méthodologie a été appliquée pour simuler le comportement vibratoire d'un pneumatique en conservant la loi matériau du prototype. Il s'agissait principalement de tester la fiabilité de la méthode vis à vis de la complexité géométrique des pneumatiques. L'analyse des spectres des vitesses de vibrations, composés principalement par des harmoniques autour de la fréquence d'impact des rainures, a montré que la méthodologie permet de séparer la dynamique de roulage macroscopique et la réponse vibratoire induite par l'excitation de la sculpture. La comparaison qualitative des tendances obtenues avec la méthode numérique par rapport aux tendances observées expérimentalement a montré que les niveaux vibratoires et le bruit de roulement ont la même sensibilité par rapport à la vitesse et à l'angle d'inclinaison des rainures. Par contre, ce n'est plus le cas par rapport

à la flèche, l'épaisseur des rainures et le rib shifting. Ceci est expliqué par le choix du mode de pilotage et l'absence du mécanisme de pompage d'air et des lois de comportement de l'architecture du pneumatique dans la modélisation. Par conséquent, la géométrie de la sculpture n'est pas suffisante pour simuler complètement la sensibilité du bruit de roulement par rapport aux conditions de roulage et aux paramètres de conception de la sculpture.

La dernière partie des travaux de thèse a été consacrée au pilotage du roulage quasi-statique en charge imposée. L'idée fondamentale de ce pilotage était de faire varier la flèche à chaque pas de temps afin que la charge portée par la structure soit égale à la charge cible. Les résultats obtenus avec ce nouveau mode de pilotage ont montré que celui-ci engendre une augmentation des amplitudes des vibrations verticales par rapport aux vibrations longitudinales contrairement au roulage avec une flèche imposée. Ceci est cohérent avec la déformation verticale du pneumatique induite par la variation de l'aire de contact.

Perspectives

Les résultats des différentes études numériques ouvrent des nouvelles perspectives académiques et industrielles sur l'intégration de nouveaux phénomènes physiques dans la modélisation de la réponse dynamique des pneumatiques.

Perspectives académiques

Le traitement de la condition du contact frottant dans le problème vibratoire nécessiterait la prise en compte du régime de frottement (glissant/adhérent). Une fois cette correction mise en place, l'intégration de lois de frottement plus complexe serait envisageable. Par exemple, il serait intéressant de considérer un coefficient de frottement discontinu séparant les phases "collées" et "glissées" ou bien un coefficient de frottement qui dépend de la vitesse de glissement. Cette modélisation permettrait d'intégrer les phénomènes de stick-slip et de stick-snap dans la modélisation et de couvrir tous les mécanismes structurels de génération de bruit de roulement.

Le pilotage du roulage quasi-statique en charge imposée a été effectué en supposant un couplage faible entre la flèche et le déplacement. Cette formulation est facile à implémenter mais pénalise la vitesse de convergence. Par conséquent, une formulation en couplage fort, où la dérivée de l'équation supplémentaire par rapport au déplacement serait intégrée à la matrice tangente, permettrait de calculer simultanément le déplacement et la flèche dans une seule boucle de Newton. Le couplage fort permettrait de retrouver le même ordre de grandeur du temps de calcul du pilotage en flèche imposée. La sensibilité de la réponse vibratoire par rapport aux conditions de roulage et aux paramètres de conception de la sculpture pourrait être

étudiée avec un temps de calcul optimisé.

L'essentiel des vibrations des pneumatiques est localisé au voisinage de l'entrée et de la sortie de l'aire de contact étant donné les propriétés d'amortissement visqueux du caoutchouc du pneumatique. L'intégration d'un modèle d'amortissement dans la modélisation est cruciale afin d'obtenir une distribution circonférentielle réaliste de la réponse vibratoire. La loi de dissipation visqueuse du modèle rhéologique de Zener présentée dans le deuxième chapitre pourrait être intégrée au problème vibratoire.

Le pilotage du roulage du pneumatique a été exécuté en imposant simultanément la vitesse de rotation et la vitesse de translation. Ces deux dernières ont été reliées par une approximation du premier ordre du rayon de roulage. Ce pilotage purement cinématique est stable et facile à implémenter. Le roulage pourrait aussi être piloté en couple imposé avec une équation supplémentaire reliant la vitesse de rotation imposée sur la zone jante et le couple appliqué sur la roue. Par ailleurs, la reproduction réaliste du pilotage du roulage consisterait à imposer seulement la rotation (respectivement translation) en laissant les forces tangentielles de contact piloter l'avancement (respectivement la rotation) du pneumatique. Ce pilotage pourrait être implémenté en imposant la cinématique sur un point fictif défini géométriquement comme le centre de la roue et relié rigidement avec la zone jante.

Le mécanisme d'impact de la rugosité de la chaussée pourrait être pris en compte dans la modélisation en intégrant le profil de la texture dans le calcul de la fonction gap normal. La question qui pourrait se poser est de savoir si la texture devrait être intégrée dans le roulage quasi-statique ou dans le problème vibratoire. La première option nécessiterait un maillage fin capable de capter les micro-textures de la chaussée afin de capter l'intégralité de la signature fréquentielle de l'excitation du problème vibratoire. La deuxième option nécessiterait un raffinement de maillage uniquement pour le problème vibratoire linéaire dont la résolution est moins coûteuse que celle du problème quasi-statique non-linéaire. Dans ce cas, le profil de la chaussée serait imposé cinématiquement sur la zone de contact donnée par le roulage quasi-statique qui serait effectué sur un sol lisse.

Perspectives industrielles

L'industrialisation de la méthodologie proposée nécessiterait l'introduction des lois de comportement complexes intégrant l'orthotropie des nappes et l'amortissement visqueux des mélanges de caoutchoucs. Ces lois matériaux sont déjà développées et leur intégration dans la modélisation ne poserait, a priori, pas de difficulté particulière. En outre, l'assemblage de la matrice de rigidité du problème vibratoire n'est pas nécessaire puisque celle-ci correspond à la matrice tangente de rigidité du problème quasi-statique non-linéaire.

Le maillage de la bande de roulement devrait aussi être capable de capter les échelles de la sculpture et de la micro-texture de la chaussée. La prise en compte de ces différentes complexités entraînerait un coût de calcul important. Les méthodes de réduction de modèles non-linéaires permettraient de répondre à cette problématique. Une première approche consisterait à tester les méthodes de sous-structuration (Craig-Bampton par exemple). En ce sens, le vecteur réduit des degrés de liberté concernerait la bande de roulement puisqu'elle représente la zone potentielle de contact avec la chaussée. Une autre approche envisagée se baserait sur les techniques de l'apprentissage statistique pour la réduction de modèle non-linéaire (ROM) couplées avec la décomposition de domaine [Heinlein 2021].

Table des figures

1.1	Contribution du bruit de roulement au bruit global émis par le véhicule [Donavan 2007].	7
1.2	Étiquetage des pneumatiques dans l'union européenne.	8
1.3	Architecture d'un pneumatique tourisme.	9
1.4	Schématisation de l'impact de la bande de roulement sur la chaussée [Azizi 2020].	10
1.5	Schématisation du mécanisme du stick-slip [Sandberg 2002].	11
1.6	Schématisation du mécanisme du stick-snap [Sandberg 2002].	12
1.7	Schématisation du mécanisme du pompage d'air [Conte 2008].	12
1.8	Schématisation de la résonance de la ceinture et des flancs [Sandberg 2002].	13
1.9	Schématisation de la résonance des sillons [Sandberg 2002].	15
1.10	Schématisation de la résonance de Helmholtz [Sandberg 2002].	15
1.11	Schématisation de l'effet dièdre [Sandberg 2002].	16
1.12	Schématisation des mécanismes d'atténuation du bruit de roulement [Li 2019].	17
1.13	Évolution du bruit de roulement en fonction du couple moteur et de la pression de gonflage [Iwao 1996].	19
1.14	Influence de la largeur du pneumatique sur le bruit de roulement sur un sol lisse (a) et sur un sol rugueux (b) [Sandberg 2002].	20
1.15	Influence du diamètre du pneumatique sur le bruit de roulement sur un sol lisse (a) et sur un sol rugueux (b) [Sandberg 2002].	21
1.16	Les angles d'attaque des pneumatiques ayant des rayons géométriques différents ($R_1 < R_2$, $\alpha_2 < \alpha_1$).	21
1.17	Illustrations des exemples de randomisation [Sandberg 2002].	22
1.18	Illustrations des exemples de ventilation [Sandberg 2002].	22
1.19	Les différentes échelles de texture [Cesbron 2007].	24
1.20	Schématisation des modèles des pneumatiques - (a) Anneau circulaire - (b) Plaque orthotrope de Kropp - (c) Modèle éléments finis.	26
1.21	La décomposition ALE [Nackenhurst 2004].	27
1.22	Maillage ALE et une déformée modale [Gregoriisab 2019].	28
1.23	Problème de rayonnement acoustique [Brinkmeier 2007].	29
1.24	Résultat de la simulation du rayonnement acoustique [Brinkmeier 2007].	30
1.25	Schématisation des différents aspects du bruit roulement.	31
2.1	Déformation de la configuration de référence Ω	37
2.2	Modèle rhéologique de Zener d'un matériau viscoélastique.	45
2.3	Domaines d'utilisation des schémas implicite et explicite [Manet 2013]	60
3.1	Déformation du solide Ω en contact unilatéral avec la fondation rigide Γ_o	69

3.2	Schématisation des conditions de Signorini.	72
3.3	Schématisation de l'approximation de loi de contact normal avec la méthode de pénalisation.	76
3.4	Schématisation de la méthode du Lagrangien augmenté avec l'algorithme d'Uzawa [Popp 2012].	77
3.5	Schématisation du régime adhérent et du régime glissant.	80
3.6	Schématisation du frottement de Coulomb.	80
3.7	Schématisation de la régularisation de la loi frottement de Coulomb.	81
4.1	Le système masses - ressorts étudié.	91
4.2	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 0$ $N.m^{-3}$	93
4.3	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 0$ $N.m^{-3}$	94
4.4	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^8$ $N.m^{-3}$	95
4.5	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^8$ $N.m^{-3}$	96
4.6	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{10}$ $N.m^{-3}$	96
4.7	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{10}$ $N.m^{-3}$	97
4.8	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{11}$ $N.m^{-3}$	97
4.9	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{11}$ $N.m^{-3}$	98
4.10	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{12}$ $N.m^{-3}$	98
4.11	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{12}$ $N.m^{-3}$	99
4.12	Évolution temporelle des composantes du déplacement \mathbf{X} calculé avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{14}$ $N.m^{-3}$	99

4.13	Spectre fréquentiel des composantes de la vitesse $\dot{\mathbf{X}}$ calculée avec l'intégration temporelle (—) et avec la linéarisation (—) pour $k_{NL} = 10^{14} \text{ N.m}^{-3}$	100
4.14	Maillage du prototype.	101
4.15	Illustration du chargement cinématique du prototype - $d = 0.01 \text{ m}$	102
4.16	Points d'évaluation : (a) $r = R_e$ (●), $r = (R_e + R_i)/2$ (●), $r = R_i$ (●) - (b) $y = w/2$ (●), $y = w/4$ (●), $y = 0$ (●).	104
4.17	Évolution temporelle du déplacement quasi-statique pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$	104
4.18	Évolution temporelle du déplacement quasi-statique pour $y = w/2$ (—), $y = w/4$ (—) et $y = 0$ (—) avec $r = R_e$	105
4.19	Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique dans la direction circonférentielle ($y = w/2$ et $r = R_e$).	106
4.20	Spectre de l'accélération quasi-statique pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$	107
4.21	Nœuds sélectionnés pour l'analyse de la pression normale de contact : entrée du bloc θ_e (—), centre du bloc θ_c (—), sortie du bloc θ_s (—).	108
4.22	(a) Évolution temporelle de la pression normale de contact, (b) de la charge verticale et (c) le spectre fréquentiel de la variation de la charge verticale.	109
4.23	Évolution temporelle du déplacement quasi-statique dans l'aire de contact ($y = w/2$ et $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) and $\mu = 1.0$ (—).	109
4.24	Evolution temporelle de la pression normale de contact ($y = w/2$, $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) and $\mu = 1.0$ (—) - $\theta = \theta_e$ (a) - $\theta = \theta_c$ (b) - $\theta = \theta_s$ (c).	110
4.25	Évolution temporelle de la norme de la pression tangentielle dans l'aire de contact ($y = w/2$ et $r = R_e$) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) et $\mu = 1.0$ (—) - $\theta = \theta_e$ (a) - $\theta = \theta_c$ (b) - $\theta = \theta_s$ (c).	110
4.26	Évolution temporelle de la somme des efforts de contact pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) and $\mu = 1.0$ (—).	111
4.27	Évolution temporelle de la réponse vibratoire pour ($y = w/2$, $r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) - La totalité de la simulation (haut) et un zoom sur une période (bas).	112
4.28	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2$, $r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—).	113
4.29	Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation pour $r = R_e$ (—), $r = (R_e + R_i)/2$ (—) et $r = R_i$ (—) avec $y = w/2$	113

4.30	Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation pour $y = w/2$ (—), $y = w/4$ (—) et $y = 0$ (—) avec $r = R_e$	114
4.31	Évolution temporelle de la vitesse des vibrations dans la direction circonférentielle de la solution calculée avec la méthode de linéarisation ($r = R_e, y = w/2$).	115
4.32	Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour différentes valeurs de μ - ($y = w/2, r = R_e$).	116
4.33	Comparaison de l'aire de contact du roulage quasi-statique (—) et du roulage dynamique (—) pour les différentes valeurs de μ	117
4.34	Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) avec la nouvelle condition aux limites (—) et de la solution de référence (—) pour différentes valeurs de μ - ($y = w/2, r = R_e$).	118
4.35	Évolution temporelle de la réponse vibratoire de la solution calculée avec la méthode de linéarisation avec la nouvelle condition aux limites (à droite) et de la solution de référence (à gauche) pour le contact non frottant (—), $\mu = 0.1$ (—), $\mu = 0.3$ (—), $\mu = 0.5$ (—) et $\mu = 1.0$ (—) - ($y = w/2, r = R_e$).	119
4.36	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2, r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.1$	119
4.37	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2, r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.3$	120
4.38	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2, r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 0.5$	120
4.39	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations pour ($y = w/2, r = R_e$) de la solution calculée avec la méthode de linéarisation (—) et de la solution de référence (—) pour $\mu = 1.0$	121
5.1	Coupe méridienne du pneumatique avec les points de mesure sur la gomme intérieure (GI) - Centre (●) et Épaule (●).	125
5.2	Maillage 3D du pneumatique.	126
5.3	(a) Pneumatique utilisé dans les mesures - (b) Montage expérimental CPX.	127
5.4	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $\omega = 50$ rad/s (—), $\omega = 100$ rad/s (—) et $\omega = 150$ rad/s (—).	128
5.5	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $\omega = 50$ rad/s (—), $\omega = 100$ rad/s (—) et $\omega = 150$ rad/s (—).	129
5.6	Évolution du bruit extérieur du pneu en fonction de la charge pour différentes vitesses [Iwao 1996].	130

5.7	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $d = 5$ mm (—), $d = 10$ mm (—) et $d = 15$ mm (—).	130
5.8	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $d = 5$ mm (—), $d = 10$ mm (—) et $d = 15$ mm (—).	131
5.9	Pression normale de contact calculée avec une flèche $d = \{5, 10, 15\}$ mm.	132
5.10	Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport à l'épaisseur des rainures latérales.	132
5.11	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).	133
5.12	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).	133
5.13	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).	134
5.14	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $e = 5$ mm (—), $e = 10$ mm (—), $e = 15$ mm (—) et $e = 20$ mm (—).	134
5.15	Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de l'épaisseur des rainures - (a) Microphone situé à l'entrée de l'AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l'AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].	135
5.16	Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport à l'angle d'inclinaison ψ_2	135
5.17	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).	136
5.18	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).	136
5.19	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).	137
5.20	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI pour $\psi_2 = 0$ deg (—), $\psi_2 = 22$ deg (—), $\psi_2 = 35$ deg (—) et $\psi_2 = 45$ deg (—).	137
5.21	Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de ψ_2 - (a) Microphone situé à l'entrée de l'AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l'AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].	138

5.22	Sculptures utilisées dans l'étude de la sensibilité de la réponse vibratoire par rapport au rib shifting.	138
5.23	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).	139
5.24	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).	139
5.25	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).	140
5.26	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI de la config 1 (—), de la config 2 (—) et de la config 3 (—).	140
5.27	Évolution de la pression acoustique mesurée avec la méthode CPX en fonction de la vitesse pour différentes valeurs de rib shifting - (a) Microphone situé à l'entrée de l'AdC - (b) Microphone situé à la sortie de l'AdC - (c) Microphone situé en face du pneumatique [Saito 2016].	141
5.28	Schématisation de l'écrasement avec une charge F_z	143
5.29	Paramétrage de la position du sol.	144
5.30	(a) - Évolution temporelle de la charge portée par le pneumatique. (b) - Évolution temporelle de la flèche. (c) - Spectre fréquentiel de la variation de la flèche.	146
5.31	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.	147
5.32	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.	147
5.33	Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique du nœud centre de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.	148
5.34	Évolution temporelle de l'accélération quasi-statique du nœud épaule de la GI avec une charge imposée de $C_z = 500$ daN.	148
5.35	(a) - Évolution temporelle de la charge portée par le pneumatique. (b) - Évolution temporelle de la flèche. (c) - Spectre fréquentiel de la variation de la flèche - (—) avec l'ancienne condition de roulage (—) avec la nouvelle condition de roulage.	149
5.36	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud centre de la GI avec l'ancienne condition de roulage (—) et avec la nouvelle condition de roulage (—).	150
5.37	Évolution temporelle du déplacement vibratoire du nœud épaule de la GI avec l'ancienne condition de roulage (—) et avec la nouvelle condition de roulage (—).	150
5.38	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud centre de la GI avec une charge imposée $C_z = 500$ daN.	151
5.39	Spectre fréquentiel de la vitesse des vibrations du nœud épaule de la GI avec une charge imposée $C_z = 500$ daN.	151

Liste des tableaux

1.1	Estimation des exposants de vitesse n pour les mécanismes de génération de bruit [Kuijpers 2001].	18
4.1	Paramètres numériques de la simulation.	93
4.2	Écart relatif entre la solution obtenue par l'intégration temporelle et la solution obtenue par la linéarisation pour différentes valeurs de k_{NL}	94
4.3	Propriétés mécaniques du prototype.	103
4.4	Paramètres de simulation.	103
5.1	Propriétés mécaniques du pneumatique.	126
5.2	Paramètres numériques de la simulation.	127
5.3	Synthèse des études de sensibilité.	141
5.4	Algorithme de simulation du roulage quasi-statique en charge imposée	145

Nomenclature

Mécanique des milieux continus

Ω	Configuration de référence
$\partial\Omega$	Frontière de la configuration de référence
Ω^t	Configuration actuelle
$\partial\Omega^t$	Frontière de la configuration actuelle
\mathbf{X}	Coordonnées des particules de la configuration de référence
\mathbf{x}	Coordonnées des particules de la configuration actuelle
φ	Champ de transformation
\mathbf{u}	Vecteur déplacement
$\nabla_{\mathbf{X}}$	Gradient par rapport aux coordonnées de la configuration de référence
$\nabla_{\mathbf{x}}$	Gradient par rapport aux coordonnées de la configuration actuelle
\mathbf{I}	Tenseur d'identité d'ordre 2
\mathbf{F}	Tenseur de gradient de déformation
\mathbf{N}	Vecteur normal de la configuration de référence
\mathbf{n}	Vecteur normal de la configuration actuelle
$d\Omega$	Élément volumique de la configuration de référence
$d\Omega^t$	Élément volumique de la configuration actuelle
$d\Gamma$	Élément surfacique de la configuration de référence
$d\Gamma^t$	Élément surfacique de la configuration actuelle
\mathbf{C}	Tenseur de Cauchy-Green
\mathbf{E}	Tenseur de déformations de Green-Lagrange
$\boldsymbol{\sigma}$	Tenseur de contraintes de Cauchy
\mathbf{P}	Premier tenseur de Piola-Kirchhoff
\mathbf{S}	Deuxième tenseur de Piola-Kirchhoff
W	Densité d'énergie de déformation
\mathcal{C}	Tenseur d'élasticité d'ordre 4
(λ, μ)	Coefficients de Lamé
E	Module de Young

ν	Coefficient de Poisson
ρ	Masse volumique
Γ_u	Zone de Dirichlet dans la configuration de référence
Γ_u^t	Zone de Dirichlet dans la configuration actuelle
Γ_σ	Zone de Neumann dans la configuration de référence
Γ_σ^t	Zone de Neumann dans la configuration de actuelle
Γ_p	Zone de la pression suiveuse dans la configuration de référence
\mathbf{u}_d	Déplacement imposé sur Γ_u
\mathbf{f}_0	Force surfacique imposée sur Γ_f
\mathbf{g}_0	Force volumique
p	Pression suiveuse imposée sur Γ_p
\mathbf{u}_0	Vecteur déplacement initial
\mathbf{v}_0	Vecteur vitesse initiale
$H^1(\Omega)$	Espace de Sobolev
\mathcal{U}	Espace des déplacements cinématiquement admissibles
\mathcal{V}	Espace tangent de \mathcal{U}
\mathbf{q}	Vecteur des déplacements nodaux
\mathbf{M}	Matrice de masse
\mathbf{K}	Matrice tangente
Δt	Pas de temps
Mécanique du contact	
Γ_c	Zone potentielle de contact
Γ_c^t	Zone active de contact
Γ_o	Fondation rigide
\mathbf{n}_c	Vecteur normal de la fondation rigide Γ_o
g_n	Gap normal
\mathbf{g}_t	Gap tangentiel
Π_n	Pression normale
$\mathbf{\Pi}_t$	Pression tangentielle
\mathcal{K}	Espace des déplacements respectant la condition de non-interpénétration
λ_n	Pression de contact normal

\mathcal{A}	Espace des contraintes actives
\mathcal{I}	Espace des contraintes inactives
g_n^-	Fonction de pénétration
ε_n	Paramètre de pénalisation normale
$\dot{\mathbf{g}}_t$	Vitesse de glissement
λ_t	Pression tangentielle de contact
\mathbf{s}	Direction de glissement
μ	Coefficient de frottement
μ_s	Coefficient de frottement statique
μ_d	Coefficient de frottement dynamique
ε_r	Coefficient de régularisation de la loi de Coulomb

Autres notations

V	Vitesse de translation
ω	Vitesse de rotation
r_ω	Rayon de roulage
d	Flèche
R_e	Rayon géométrique
R_i	Rayon de la jante
w	Largeur de la bande de roulement
u_x	Déplacement longitudinal
u_y	Déplacement latéral
u_z	Déplacement vertical
v_x	Vitesse longitudinale
v_y	Vitesse latérale
v_z	Vitesse verticale
a_x	Accélération longitudinale
a_y	Accélération latérale
a_z	Accélération verticale
F_z	Charge verticale
δF_z	Variation de la charge verticale
F_x	Force longitudinale de contact

F_y	Force latérale de contact
e	Épaisseur des rainures
ψ_2	Angle d'inclinaison des rainures
C_z	Charge cible
\bar{d}	Valeur moyenne de la flèche
δd	Variation de la flèche

Bibliographie

- [Anfosso Ledee 2019] Fabienne Anfosso Ledee et Julien Cesbron. Bruit de roulement automobile : influence du revêtement de chaussée. Techniques de l'Ingenieur, no. BR2060V2, page 32 p, Janvier 2019. Publisher : Techniques de l'ingénieur. (Cité en page 22.)
- [Autrique 2006] Jean-Christophe Autrique et Frédéric Magoulès. Studies of an infinite element method for acoustical radiation. Applied Mathematical Modelling, vol. 30, no. 7, pages 641–655, Juillet 2006. (Cité en page 29.)
- [Azizi 2020] Yousof Azizi. Chapter 6 - Generation mechanisms of tire/road noise. In Xu Wang, editeur, Automotive Tire Noise and Vibrations, pages 91–114. Butterworth-Heinemann, Janvier 2020. (Cité en pages 10, 14 et 157.)
- [Bacuta 2006] Constantin Bacuta. A Unified Approach for Uzawa Algorithms. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 44, no. 6, pages 2633 – 2649, 2006. Publisher : Society for Industrial and Applied Mathematics. (Cité en page 77.)
- [Barbosa 1991] Helio J. C. Barbosa et Thomas J. R. Hughes. The finite element method with Lagrange multipliers on the boundary : circumventing the Babuška-Brezzi condition. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 85, no. 1, pages 109–128, Janvier 1991. (Cité en page 75.)
- [Belytschko 1975] T. Belytschko et D. F. Schoeberle. On the Unconditional Stability of an Implicit Algorithm for Nonlinear Structural Dynamics. Journal of Applied Mechanics, vol. 42, no. 4, pages 865–869, Décembre 1975. (Cité en page 63.)
- [Bergeot 2021] Baptiste Bergeot. Vibrations non linéaires. page 102, 2021. (Cité en page 95.)
- [Beyer 2016] Robert Beyer et Udo Nackenhorst. Homogenization of thermomechanical tread-road contact for the investigation of tire rolling resistance : Homogenization of thermomechanical tread-road contact for the investigation of tire rolling resistance. PAMM, vol. 16, no. 1, pages 513–514, Octobre 2016. (Cité en page 28.)
- [Brezzi 1974] F. Brezzi. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique, vol. 8, no. R2, pages 129–151, 1974. (Cité en page 75.)
- [Brinkmeier 2007] M. Brinkmeier, U. Nackenhorst et H. Volk. A finite element approach to the transient dynamics of rolling tires with emphasis on rolling noise simulation. Tire Science and Technology35, no. 3, pages 165—182, 2007. (Cité en pages 28, 29, 30 et 157.)

- [Böhm 1966] F. Böhm. Mechanik des Gürtelreifens. Ingenieur-Archiv, vol. 35, no. 2, pages 82–101, Mars 1966. (Cité en page 25.)
- [Cesbron 2007] Julien Cesbron. Influence de la texture de chaussée sur le bruit de contact pneumatique/chaussée. These de doctorat, Nantes, Janvier 2007. (Cité en pages 24 et 157.)
- [Chipato 2021] E.T Chipato, A. D.Shaw et M.I. Friswell. Nonlinear rotordynamics of a MDOF rotor–stator contactsystem subjected to frictional and gravitational effects. Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 159, 2021. (Cité en page 107.)
- [Conte 2008] Frédéric Conte. Modélisation CFD du phénomène acoustique de pompage d’air dans un contact pneumatique/chaussée. PhD thesis, INSA Lyon, Décembre 2008. (Cité en pages 11, 12, 29 et 157.)
- [Coulomb 1821] Charles Augustin Coulomb. Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages. 1821. (Cité en page 78.)
- [Dare 2013] Tyler Dare et Robert Bernhard. Accelerometer Measurements of Tire Tread Vibrations and Implications to Wheel-Slap Noise. Tire Science and Technology, vol. 41, no. 2, pages 109–126, Avril 2013. Publisher : Allen Press. (Cité en page 18.)
- [Dennis 1996] J. E. Dennis et Robert B. Schnabel. Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Numéro 16 de Classics in applied mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1996. (Cité en page 58.)
- [Deuffhard 2008] Peter Deuffhard, Rolf Krause et Susanne Ertel. A contact-stabilized Newmark method for dynamical contact problems. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 73, no. 9, pages 1274–1290, Février 2008. (Cité en page 111.)
- [Diaz 2016] C. Gonzalez Diaz et et al. Dynamic behaviour of a rolling tyre : Experimental and numerical analyses. Journal of Sound and Vibration, vol. 364, page 147–164, 2016. (Cité en page 28.)
- [Donavan 2007] Paul R. Donovan et Richard Schumacher. Exterior Noise of Vehicles—Traffic Noise Prediction and Control. In Handbook of Noise and Vibration Control, pages 1427–1437. John Wiley & Sons, Ltd, 2007. Section : 120. (Cité en pages 7 et 157.)
- [Donavan 2014] Paul R. Donovan. Effect of Porous Pavement on Wayside Traffic Noise Levels. Transportation Research Record, vol. 2403, no. 1, pages 28–36, Janvier 2014. Publisher : SAGE Publications Inc. (Cité en page 23.)
- [EU 2001] EU. Directive 2001/43/EC of the European Parliament and of the Council of 27 June 2001 amending Council Directive 92/23/EEC relating to tyres for motor vehicles and their trailers and to their fitting, Juin 2001. (Cité en page 7.)

- [Fortin 2020] A. Fortin et A. Garon. Les éléments finis : de la théorie à la pratique. GIREF, 1997-2020. (Cité en pages 42, 53, 82, 89 et 103.)
- [Ghandour 2010] Raymond Ghandour, Alessandro Victorino, Moustapha Doumiati et Ali Charara. Tire/road friction coefficient estimation applied to road safety. In 18th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'10, pages 1485–1490, Marrakech, Morocco, Juin 2010. IEEE. (Cité en page 108.)
- [Gonzalez 2000a] O Gonzalez. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, no. 13-14, pages 1763–1783, Décembre 2000. Publisher : Elsevier. (Cité en page 64.)
- [Gonzalez 2000b] O. Gonzalez. Exact energy and momentum conserving algorithms for general models in nonlinear elasticity. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, pages 1763–1783, 2000. (Cité en page 86.)
- [Graf 2002] R. A. G. Graf, C. Y. Kuo, A. P. Dowling et W. R. Graham. ON THE HORN EFFECT OF A TYRE/ROAD INTERFACE, PART I : EXPERIMENT AND COMPUTATION. Journal of Sound and Vibration, vol. 256, no. 3, pages 417–431, Septembre 2002. (Cité en page 16.)
- [Gregoriisab 2019] D. De Gregoriisab, F.Naetsbc, P. Kindta et W. Desmetbc. Development and validation of a fully predictive high-fidelity simulation approach for predicting coarse road dynamic tire/road rolling contact forces. Journal of Sound and Vibration, vol. 452, pages 147–168, 2019. (Cité en pages 28 et 157.)
- [Griffiths 1978] D. F. Griffiths et J. Lorenz. An analysis of the petrov—galerkin finite element method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 14, no. 1, pages 39–64, Avril 1978. (Cité en page 54.)
- [Hadamard 1923] Jacques Hadamard. Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations. Yale University Press, 1923. (Cité en page 142.)
- [Hauret 2004] P. Hauret. Méthodes numériques pour la dynamique des structures non-linéaires incompressibles à deux échelles. PhD Thesis., vol. Ecole polytechnique, 2004. (Cité en page 86.)
- [Hayden 1971] R. E. Hayden. Roadside Noise from the Interaction of the Rolling Tire with the Road Surface. The Journal of the Acoustical Society of America, 1971. (Cité en page 12.)
- [Heckl 1986] M. Heckl. Tyre noise generation. Wear, vol. 113, no. 1, pages 157–170, Décembre 1986. (Cité en page 16.)
- [Heinlein 2021] Alexander Heinlein, Axel Klawonn, Martin Lanser et Janine Weber. Combining machine learning and domain decomposition methods for the solution of partial differential equations—A review. GAMM-Mitteilungen, vol. 44, Mars 2021. (Cité en page 156.)

- [Helmholtz 1885] Hermann von Helmholtz. On the Sensations of Tone as a Physiological Basis for the Theory of Music. Longmans, Green, 1885. (Cité en page 14.)
- [Hertz 1881] Heinrich Hertz. On the Contact of Elastic Solids. *Journal für die reine und angewandte mathematik*, pages 156–171, 1881. (Cité en page 107.)
- [Hughes 1977] Thomas J. R. Hughes. A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, no. 2, pages 383–386, 1977. (Cité en page 63.)
- [Hughes 1981] Thomas J. R. Hughes, Wing Kam Liu et Thomas K. Zimmermann. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 29, no. 3, pages 329–349, Décembre 1981. (Cité en page 27.)
- [Hutchings 2021] Ian M Hutchings. A note on Guillaume Amontons and the laws of friction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J : Journal of Engineering Tribology*, vol. 235, no. 12, pages 2530–2536, Décembre 2021. Publisher : IMECHE. (Cité en page 78.)
- [Iwao 1996] Keijiro Iwao et Ichiro Yamazaki. A study on the mechanism of tire/road noise. *JSAE Review*, vol. 17, no. 2, pages 139–144, Avril 1996. (Cité en pages 19, 130, 157 et 160.)
- [Jazar 2014] R.N. Jazar. Vehicle Dynamics : Theory and Application. Springer Science+Business Media New York, 2014. (Cité en pages 102 et 104.)
- [J.C.Simo 1992] J.C.Simo et T.A.Laursen. An augmented lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computers & Structures*, vol. 42, no. 1, pages 97–116, 1992. (Cité en page 76.)
- [Jennewein 1985] M Jennewein et M Bergmann. Investigations Concerning Tyre/Road Noise Sources and Possibilities of Noise Reduction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D : Transport Engineering*, vol. 199, no. 3, pages 199–206, Juillet 1985. Publisher : SAGE Publications. (Cité en page 14.)
- [Johnson 2021] Steven G. Johnson. Notes on Perfectly Matched Layers (PMLs). Rapport technique, arXiv, Août 2021. (Cité en page 29.)
- [Kikuchi 1981] Noboru Kikuchi et Young Song. Penalty/finite-element approximation of a class of unilateral problems in linear elasticity. *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 39, Avril 1981. (Cité en page 75.)
- [Kikuchi 1988] N. Kikuchi, Noboru Kikuchi et J. T. Oden. Contact Problems in Elasticity : A Study of Variational Inequalities and Finite Element Methods. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1988. (Cité en page 74.)
- [Knowles 2012] Ian Knowles et Robert J Renka. METHODS FOR NUMERICAL DIFFERENTIATION OF NOISY DATA. *Electronic Journal of Differential Equations*, page 12, 2012. (Cité en page 90.)

- [Krmela 2016] Jan Krmela et Vladimíra Krmelová. Replacement of Belt Structure for FEA of Tire. *Procedia Engineering*, vol. 136, pages 132–136, 2016. (Cité en page 28.)
- [Kropp 1998] Wolfgang Kropp, Krister Larsson et Stephane Barrelet. The influence of belt and tread band stiffness on the tire noise generation mechanisms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 103, no. 5, pages 2919–2919, Mai 1998. Publisher : Acoustical Society of America. (Cité en page 13.)
- [Kropp 1999] W. Kropp. A mathematical model of tyre noise generation. *International Journal of Heavy Vehicle Systems*, vol. 6, no. 1/2/3/4, page 310, 1999. (Cité en page 25.)
- [Kröger 2010] Matthias Kröger et Patrick Moldenhauer. Influences on the vibration frequencies of tire tread blocks. *PROCEEDINGS OF ISMA*, page 8, 2010. (Cité en page 11.)
- [Kuijpers 2001] Ard Kuijpers et Gijsjan Blokland. Tyre/road noise models in the last two decades : a critical evaluation. Août 2001. (Cité en pages 18 et 163.)
- [Langer 1986] U. Langer et W. Queck. On the convergence factor of Uzawa's algorithm. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 15, no. 2, pages 191–202, Juin 1986. (Cité en page 77.)
- [Laursen 2003] Tod A. Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003. (Cité en pages 73, 75 et 83.)
- [Le Tallec 1993] Patrick Le Tallec, Christophe Rahier et Ahmed Kaiss. Three-dimensional incompressible viscoelasticity in large strains : Formulation and numerical approximation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 109, no. 3, pages 233–258, Novembre 1993. (Cité en page 45.)
- [Le Tallec 1994] Patrick Le Tallec. Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity. In *Handbook of Numerical Analysis*, volume 3, pages 465–622. Elsevier, Janvier 1994. (Cité en page 42.)
- [Li 2018a] T. Li, J. Feng, R. Burdisso et C. Sandu. Effects of Speed on Tire–Pavement Interaction Noise (Tread–Pattern–Related Noise and Non–Tread–Pattern–Related Noise). *Tire Science and Technology*, vol. 46, no. 2, pages 54–77, Avril 2018. Publisher : Allen Press. (Cité en page 127.)
- [Li 2018b] Tan Li. Influencing Parameters on Tire–Pavement Interaction Noise : Review, Experiments, and Design Considerations. *Designs*, vol. 2, no. 4, page 38, 2018. Number : 4 Publisher : Multidisciplinary Digital Publishing Institute. (Cité en pages 18, 19, 127, 129, 135, 136 et 139.)
- [Li 2018c] Tan Li, Ricardo Burdisso et Corina Sandu. Literature review of models on tire-pavement interaction noise. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 420, pages 357–445, Avril 2018. (Cité en page 25.)

- [Li 2019] Tan Li. A Review on Physical Mechanisms of Tire-Pavement Interaction Noise. SAE International Journal of Vehicle Dynamics, Stability, and NVH, vol. 3, Mai 2019. (Cité en pages 10, 13, 15, 17 et 157.)
- [Ling 2021] S. Ling, F. Yu et D. Sun et al. A comprehensive review of tire-pavement noise : Generation mechanism, measurement methods, and quiet asphalt pavement. Journal of Cleaner Production 287, 2021. (Cité en page 86.)
- [Lubliner 1985] J. Lubliner. A model of rubber viscoelasticity. Mechanics Research Communications, vol. 12, no. 2, pages 93–99, Mars 1985. (Cité en page 47.)
- [Luenberger 2008] David G. Luenberger et Yinyu Ye. Linear and nonlinear programming. International series in operations research and management science. Springer, New York, NY, 3rd ed édition, 2008. (Cité en page 74.)
- [Manet 2013] Vincent Manet. Méthode des Éléments Finis. page 397, 2013. (Cité en pages 60 et 157.)
- [Meftah 2011] Rabie Meftah. Une approche par formalisme de green réduit pour le calcul des structures en contact dynamique : application au contact pneumatique/chaussée. These de doctorat, Paris Est, Novembre 2011. (Cité en page 25.)
- [Michelin 2001] Michelin. Le pneu cet inconnu - Les fonctions du pneu | Michelin Tout sur le pneu, 2001. (Cité en page 8.)
- [Mijar 2004] A.R. Mijar et J.S. Arora. An augmented Lagrangian optimization method for contact analysis problems, 1 : formulation and algorithm. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 28, no. 2-3, Septembre 2004. (Cité en page 76.)
- [Mohamed 2013] Zamri Mohamed, Xu Wang et Reza Jazar. A survey of wheel tyre cavity resonance noise. International Journal of Vehicle Noise and Vibration, vol. 9, pages 276–293, Juillet 2013. (Cité en page 14.)
- [Nackenhorst 2004] U. Nackenhorst. The ALE-formulation of bodies in rolling contact : Theoretical foundations and finite element approach. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, no. 39, pages 4299–4322, 2004. (Cité en pages 27, 28 et 157.)
- [Nocedal 1999] Jorge Nocedal et Stephen J. Wright. Numerical optimization. Springer series in operations research. Springer, New York, 1999. (Cité en pages 71 et 74.)
- [Oden 1973] J. T. Oden et R. B. Fost. Convergence, accuracy and stability of finite element approximations of a class of non-linear hyperbolic equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 6, no. 3, pages 357–365, 1973. (Cité en page 62.)
- [Pahlevani 2018] Ladan Pahlevani, Denis Duhamel, Gwendal Cumunel et Yin Hai-Ping. Comparison of different tyre models for tyre/road noise applications. International Journal of Vehicle Noise and Vibration, vol. 14, no. 1, page 16, 2018. Publisher : Inderscience. (Cité en page 25.)

- [Petković 2013] Miodrag S. Petković, Beny Neta, Ljiljana D. Petković et Jovana Džunić. Chapter 6 - Multipoint methods with memory. In *Multipoint Methods for Solving Nonlinear Equations*, pages 189–237. Academic Press, Boston, Janvier 2013. (Cité en page 58.)
- [Phillips 1996] G. M. Phillips et P. J. Taylor. Chapter 8 - SOLUTION OF ALGEBRAIC EQUATIONS OF ONE VARIABLE. In G. M. Phillips et P. J. Taylor, éditeurs, *Theory and Applications of Numerical Analysis* (Second Edition), pages 196–220. Academic Press, London, Janvier 1996. (Cité en page 58.)
- [Piotr 2019] Mioduszewski Piotr, Ejsmont Jerzy, Ronowski Grzegorz et Taryma Stanisław. Further development of the poroelastic road surface within the new Polish project SEPOR. page 9, 2019. (Cité en page 24.)
- [Popp 2012] Alexander Popp. Mortar Methods for Computational Contact Mechanics and General Interface Problems. PhD thesis, Technische Universität München, 2012. (Cité en pages 77 et 158.)
- [Poulios 2015] Konstantinos Poulios et Yves Renard. An unconstrained integral approximation of large sliding frictional contact between deformable solids. *Computers and Structures*, vol. 153, pages 75–90, Juin 2015. Publisher : Elsevier. (Cité en page 69.)
- [Rahier 1991] Christophe Rahier. Analyse numerique du roulage stationnaire de structures viscoelastiques non lineaires en grandes deformations. These de doctorat, Paris 6, Janvier 1991. (Cité en page 28.)
- [Ruhala 1999] Richard James Ruhala. A study of tire/pavement interaction noise using near-field acoustical holography. PhD thesis, The Pennsylvania State University, 1999. (Cité en page 13.)
- [Saito 2016] Yoshinori Saito. Noise3D : Analytical study of tread pattern design for tire exterior noise. Michelin internal report, 2016. (Cité en pages 127, 135, 138, 141, 161 et 162.)
- [Sandberg 2002] U. Sandberg et J.A. Ejsmont. Tyre/Road Noise Reference Book. INFORMEX Ejsmont and Sandberg Handelsbolag Harg, vol. 1st edition, 2002. (Cité en pages 10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 86, 117, 127, 128, 135, 136, 139 et 157.)
- [Signorini 1959] Antonio Signorini. Questioni di elasticita non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni*, no. 18, page 95–139, 1959. (Cité en page 71.)
- [Simo 1991] J. C. Simo. Nonlinear stability of the time-discrete variational problem of evolution in nonlinear heat conduction, plasticity and viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 88, no. 1, pages 111–131, Juin 1991. (Cité en page 64.)
- [Simo 1992a] J. C. Simo et N. Tarnow. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. *ZAMP Zeitschrift fr*

- angewandte Mathematik und Physik, vol. 43, no. 5, pages 757–792, Septembre 1992. (Cité en page 64.)
- [Simo 1992b] J. C. Simo, N. Tarnow et K. K. Wong. Exact energy-momentum conserving algorithms and symplectic schemes for nonlinear dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 100, no. 1, pages 63–116, Octobre 1992. (Cité en page 64.)
- [Sinou 2017] J.-J. Sinou et S. Besset. Simulation of Transient Nonlinear Friction-Induced Vibrations Using Complex Interface Modes : Application to the Prediction of Squeal Events. Shock and Vibration, vol. 2017, page e6107251, Janvier 2017. Publisher : Hindawi. (Cité en page 91.)
- [Thomas 2011] Olivier Thomas. Dynamique linéaire et non linéaire de structures élastiques et piézoélectriques. Instruments de musique, micro/nano systèmes électromécaniques, contrôle de vibration. page 168, 2011. (Cité en page 95.)
- [Tong 2013] Guang Tong, Qiang Wang, Kun Yang et Xian Chuan Wang. An Experiment Investigation to the Radial Tire Noise. Advanced Materials Research, vol. 694-697, pages 361–365, Mai 2013. (Cité en page 129.)
- [Torra i Fernández 2006] Èric Torra i Fernández. The influence of tyre air cavities on vehicle acoustics. PhD thesis, KTH Royal Institute of Technology, 2006. Publisher : KTH. (Cité en page 14.)
- [Vu 2014] Trong Dai Vu. Modélisation des effets tournants du pneumatique et des forces decontact pour le bruit de roulement basses fréquences. Theses, Université Paris-Est, Février 2014. (Cité en page 25.)
- [Wang 2018] Bin Wang et Denis Duhamel. Horn effect of tyre/road noise : modelling and experiments of acoustic network resonators in horn-like structures. International Journal of Vehicle Noise and Vibration, vol. 14, pages 191 – 217, Octobre 2018. Publisher : Inderscience. (Cité en page 29.)
- [Winroth 2014] J. Winroth, P.B.U. Andersson et W. Kropp. Importance of tread inertia and damping on the tyre/road contact stiffness. Journal of Sound and Vibration, vol. 333, page 5378–5385, 2014. (Cité en pages 88 et 114.)
- [Wriggers 2003] P. Wriggers. Computational Contact Mechanics. Computational Mechanics, vol. 32, no. 141, 2003. (Cité en pages 75, 78, 81, 83, 87 et 105.)
- [Yastrebov 2011] V. Yastrebov. Computational contact mechanics : geometry, detection and numerical techniques. PhD Thesis. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2011. (Cité en pages 79 et 142.)
- [Ye 2020] Qiang Ye. Preconditioning for accurate solutions of ill-conditioned linear systems. Numerical Linear Algebra with Applications, vol. 27, no. 4, Août 2020. (Cité en page 58.)
- [Zhou 2019] P. Zhou et et al. Study on intra-wave frequency modulation phenomenon in detection of rub-impact fault. Mechanical Systems and Signal Processing, no. 122, page 342–363, 2019. (Cité en page 107.)

[Świczko 2018] Beata Świczko. Poroelastic Road Surfaces State of The Art.
page 19, 2018. (Cité en page 24.)

AUTORISATION DE SOUTENANCE

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur J-J. SINOÛ

et les rapports de

Mme E. SADOULET-REBOUL
Maître de Conférences HDR- ENSMM - Département Mécanique Appliquée, équipes V3MQI
D-SMART, UFC - UFR ST - 15B avenue des Montboucons, 25030 Besançon cedex

et de

M. J-L. DION
Professeur - Laboratoire QUARTZ - ISAE-Supméca 3 rue Fernand Hainaut
93400 SAINT-OUEN

Monsieur KNAR Zakaria

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 10 octobre 2022

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon
Le directeur des Formations

Grégory VIAL

