



**HAL**  
open science

# Prédiction du flottement de soufflante avec prise en compte des non-linéarités en pied d'aube

Nicolas Ombret

► **To cite this version:**

Nicolas Ombret. Prédiction du flottement de soufflante avec prise en compte des non-linéarités en pied d'aube. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022ECDL0011 . tel-03983272

**HAL Id: tel-03983272**

**<https://theses.hal.science/tel-03983272>**

Submitted on 10 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



ÉCOLE  
**CENTRALE** LYON

Numéro d'ordre : 2022ECDL0011

Année 2022

## THÈSE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de l'École Centrale de Lyon

ÉCOLE DOCTORALE N° 162

MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

SPÉCIALITÉ MÉCANIQUE

par

**Nicolas Ombret**

---

### PRÉDICTION DU FLOTTEMENT DE SOUFFLANTE AVEC PRISE EN COMPTE DES NON-LINÉARITÉS EN PIED D'AUBE

---

Soutenue publiquement le 09 novembre 2022, devant le jury d'examen :

R. FORTES-PATELLA	Professeure des universités, Grenoble INP	Présidente
V. CHENAUX	Ingénieure de recherche, DLR	Examinatrice
M. GRUIN	Ingénieure, Safran Aircraft Engines	Examinatrice
J.F. DEÜ	Professeur des universités, CNAM	Rapporteur
J.C. CHASSAING	Professeur, Sorbonne Université	Rapporteur
F. THOUVEREZ	Professeur, École Centrale de Lyon	Directeur de thèse
A. DUGEAI	Ingénieur de recherche, ONERA	Co-Encadrant de thèse
L. BLANC	Maître de conférences, École Centrale de Lyon	Co-Encadrant de thèse





# Remerciements

Quelle aventure que celle qui prend fin au moment où j'écris ces dernières lignes ! Je voudrais profiter de ces quelques mots pour adresser des remerciements bien mérités.

Tout d'abord, je souhaiterais remercier l'ensemble des membres du jury, qui ont accepté d'évaluer ce travail de thèse. Je les remercie notamment pour leur présence physique le jour de la soutenance, à une époque où ces dernières avaient pris l'habitude d'être à distance à cause du Covid.

Je souhaiterais ensuite remercier Fabrice Thouverez et Laurent Blanc, qui m'ont encadré depuis Centrale au cours de ces trois années de thèse. Je les remercie particulièrement pour avoir toujours répondu immédiatement présent quand un besoin d'aide se faisait sentir. En parlant de Centrale : comment ne pas remercier l'équipe de doctorants avec qui j'ai passé cette seconde année de thèse lors de mon séjour lyonnais ! Pour tous les moments inoubliables et autres galères passés ensemble, je tiens à remercier Hugo, Samuel, Nicolas, Anthony, Thibaut, Étienne, Nicolas et Corentin.

Je souhaiterais également remercier les membres de Safran Aircraft Engines qui m'ont accordé leur confiance pour me permettre de réaliser ces travaux de thèse. À ce titre, je remercie Nicolas De Cacqueray et Maxime De Pret, qui ont suivi le début de mes activités avant de laisser la place à Renaud Daon pour le reste de la thèse. Je tiens à remercier chaleureusement Renaud pour l'intérêt et l'implication dont il a fait preuve sur le sujet tout au long de son encadrement. Je remercie également l'ensemble des membres du Pôle Aéroélasticité pour leur accueil et la confiance qu'ils m'accordent pour la suite de ma carrière. Je remercie enfin les membres du maintenant bien connu "plateau AEL", auprès duquel j'ai découvert les joies du maillage, l'angoisse du mini-golf et une surprenante compétence en cuisine expérimentale (sacrés cookies !). Bon courage à Dimitri pour la suite !

Je remercie Alain Dugeai, pour son soutien indéfectible durant l'intégralité de ces travaux de thèse. Ta disponibilité, ton intérêt pour mes travaux, ton expérience et tes qualités humaines ont contribué à l'amélioration de chaque aspect de mon travail, sur le fond comme sur la forme (j'ai même réussi à arrêter d'employer le futur dans mes écrits grâce à toi !). Je tiens à ce titre à remercier l'ensemble des membres de MSAE à l'ONERA, pour tout ce que j'ai pu apprendre auprès d'eux et pour tous les bons moments passés ensemble. Un grand merci en particulier à Antoine, Yann et surtout à Thomas Berthelon, qui m'a aidé un nombre incalculable de fois. Partager ce bureau avec toi a été un plaisir, merci pour les discussions philosophiques sur la symétrie cyclique, le cinéma et la vie de manière générale. Te donner une leçon de basket fut l'un des grands succès de cette thèse. Un grand merci pour finir à Thomas Bontemps, dont les remarques pertinentes ont permis d'améliorer ma compréhension des phénomènes étudiés et le manuscrit final.

Je remercie mes amis de longues dates, qui m'ont permis de décompresser et de sortir la tête de mes travaux. Merci à mes amis de classe préparatoire, et en particulier à John, qui m'a aidé

à affronter des moments éprouvants. Merci à mes amis de Nantes pour tous les moments passés autour d'un verre, d'un repas, ou sur une piste de ski.

Pour terminer, je remercie mes soutiens de toujours : ma famille. À vous qui n'avez jamais hésité à me donner les moyens d'atteindre mes ambitions, je ne saurais jamais vous remercier suffisamment. Merci Maman, merci Papa, pour toutes les valeurs que vous m'avez inculquées. Merci à mon frère, Pierre-Olivier, qui m'a toujours guidé et qui demeure aujourd'hui un modèle à mes yeux. Enfin merci Clémence, ma fiancée, qui m'accompagne depuis déjà si longtemps. Modèle de simplicité et de joie de vivre, merci de répondre toujours présente dans les moments difficiles et de m'aider à construire ensemble notre avenir.

*À mes grand-mères.*



# Résumé

Le flottement est une instabilité de couplage aéroélastique entre un fluide et une structure élastique. Cette interaction libre conduit à une amplification exponentielle de l'amplitude de vibration des structures qui y sont sujettes, pouvant les mener à la rupture mécanique. Dans le cadre des soufflantes de turboréacteur et des architectures de nouvelle génération, prédire efficacement ce phénomène lors des phases de conception est un enjeu permanent pour assurer l'opérabilité de l'appareil en vol. Le but de cette thèse est d'améliorer les méthodes numériques de prédiction du flottement par rapport aux approches classiquement employées. Elle propose en particulier de prendre en compte les non-linéarités de frottement en pied d'aube dans l'analyse de stabilité aéroélastique. Ces non-linéarités sont en effet susceptibles de dissiper de l'énergie au-delà d'une certaine amplitude de vibration de la structure, pouvant donner naissance à de nouvelles solutions périodiques stables non prédites dans le cadre classique d'une structure linéaire.

Afin de prendre en compte les non-linéarités de frottement dans l'analyse de stabilité aéroélastique, une approche par mode complexe non-linéaire a été privilégiée. Initialement défini pour caractériser la dynamique des structures en frottement en absence de fluide, le concept de mode complexe non-linéaire a été étendu afin de tenir compte d'un terme externe d'interaction libre d'origine aérodynamique. Par la suite, deux méthodes de couplage ont été proposées selon une approche partitionnée afin de résoudre cette nouvelle définition des modes complexes non-linéaires dans un cadre aéroélastique.

Les méthodes de couplage proposées dans le cadre de ces travaux de thèse ont permis de déterminer la présence de solutions périodiques stables, aussi appelées cycles limites, à l'intérieur des zones de fonctionnement instables prédites par les méthodes classiques. L'amplitude de ces solutions périodiques est par ailleurs bien corrélée aux mesures expérimentales à disposition sur la configuration industrielle étudiée. Enfin, les interactions entre la dynamique non-linéaire de la structure et la dynamique du fluide sont analysées pour différents niveaux de non-linéarités. Un impact important de la fréquence libre de vibration est noté sur la stabilité aéroélastique en cas de flottement d'origine acoustique (flutter-bite).

**Mots-clés** Flottement, interaction fluide-structure, flutter-bite, frottement sec, dynamique libre non-linéaire, cycle limite, mode complexe non-linéaire



# Abstract

Flutter is an aeroelastic instability resulting from a coupling between a fluid and an elastic structure. This instability leads to an exponential increase of the structure vibration amplitude, eventually resulting in structural critical failure. For the next generation of jet engines, it is mandatory to predict properly fan blade flutter to ensure a safe flight of the aircraft as they are more prone to aeroelastic phenomenon. This work aims at improving existing methodologies to predict fan blade flutter. To do so, a methodology which takes into account nonlinear friction at blade roots is proposed. Dry friction forces are expected to lead to energy dissipation in the form of heat at blade roots, which contributes to the stabilization of the row by dissipating energy added from the fluid. Hence, stable periodic vibrations of the structure may arise beyond the stability limits classically predicted in the scope of a linear structure.

To take friction nonlinearities into account in the aeroelastic stability analyses, an approach using nonlinear complex mode has been chosen. Firstly defined to describe the nonlinear dynamics of structures in vacuum with friction interfaces, the nonlinear complex mode concept has been extended to take into account aerodynamic forces coming from the free interaction between the fluid and the nonlinear dynamics of the structure. Then, two partitionned coupling strategies have been proposed to solve the aeroelastic nonlinear complex mode.

Both coupling strategies proposed in the scope of this work successfully predicted flutter induced limit cycle of oscillations beyond the stability limits computed when considering only a linear structure. Furthermore, the computed limit cycle of oscillations amplitudes are well correlated to experimental data available for the studied state of the art fan. Finally, interactions between the structure nonlinear dynamics and the fluid dynamics are analyzed depending on the level of nonlinearities in the system. A strong impact of the free frequency of movement on the aeroelastic stability has been noticed in the case of inlet fan acoustic interactions (flutter bite).

**Keywords** Flutter, fluid structure interaction, flutter bite, dry friction, free nonlinear dynamics, limit cycle of oscillations, nonlinear complex mode





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>I Stabilité aéroélastique des soufflantes dans un cadre non conservatif</b>	<b>9</b>
1 Fonctionnement d'un turboréacteur . . . . .	10
1.1 Architecture et cycle thermodynamique . . . . .	10
1.2 Fonctionnement d'un étage de compression . . . . .	12
2 Phénomènes vibratoires sur les roues aubagées . . . . .	13
2.1 Excitations d'origine mécanique . . . . .	13
2.2 Excitations d'origine aérodynamique . . . . .	14
2.3 Outils de conception des roues aubagées . . . . .	20
3 Instabilités aéroélastiques des étages de compresseur . . . . .	24
4 Sources d'amortissement dans les roues aubagées . . . . .	27
4.1 Amortissement par dispositifs passifs . . . . .	27
4.2 Amortissement par dispositifs actifs . . . . .	29
4.3 Effets du frottement aube disque sur la stabilité aéroélastique . . . . .	29
4.4 Non-linéarités aube-disque : modélisation du contact frottant . . . . .	34
4.4.1 Lois de contact . . . . .	35
4.4.2 Modèles de frottement . . . . .	35
5 Bilan . . . . .	37
<b>II Formulation du problème aéroélastique</b>	<b>39</b>
1 Formulation du problème fluide . . . . .	41
1.1 Les équations de Navier-Stokes . . . . .	41
1.2 Considérations numériques en mécanique des fluides . . . . .	42
1.3 Modélisation de la turbulence . . . . .	44
1.3.1 L'hypothèse de Boussinesq . . . . .	44
1.3.2 Modélisation algébrique de la turbulence . . . . .	45
1.3.3 Modélisation de la turbulence par équations de transport . . . . .	45
2 Propagation acoustique en conduite . . . . .	46
2.1 Notion de mode de conduit . . . . .	46
2.1.1 Équation de Helmholtz convectée . . . . .	46
2.1.2 Solutions de l'équation de propagation acoustique . . . . .	47
2.1.3 Fréquence de coupure et relation de dispersion . . . . .	51
2.2 Réflexion d'un mode acoustique sur l'entrée d'air . . . . .	53
3 Formulation du problème mécanique . . . . .	55
3.1 Cinématique d'une particule en représentation lagrangienne . . . . .	55
3.2 Équations d'équilibre et lois de comportement . . . . .	56
3.3 Formulation forte de la dynamique linéaire des structures . . . . .	58

3.4	Formulation faible de la dynamique linéaire des structures . . . . .	59
3.5	Discrétisation du problème en formulation faible . . . . .	61
3.6	Réduction de modèle . . . . .	64
4	Modélisation des structures en symétrie cyclique . . . . .	65
4.1	Relation de propagation . . . . .	65
4.2	Transformée de Fourier et analyse modale en symétrie cyclique . . . . .	67
4.3	Dynamique de la structure complète en symétrie cyclique . . . . .	69
4.4	Correspondance harmonique spatiale/temporelle . . . . .	71
5	Mise en œuvre du couplage fluide structure . . . . .	73
5.1	Représentation spatiale du couplage . . . . .	74
5.1.1	Formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian . . . . .	74
5.1.2	Transfert des déplacements entre maillages incompatibles . . . . .	75
5.1.3	Déformation de maillage . . . . .	76
5.2	Représentation temporelle du couplage . . . . .	78
5.2.1	Hypothèse de couplage faible . . . . .	79
5.2.2	Calcul en couplage dynamique . . . . .	79
6	Stabilité aéroélastique d'un modèle industriel de soufflante dans un cadre de mécanique linéaire . . . . .	80
6.1	Modèle numérique et solveur fluide . . . . .	81
6.2	Calculs stationnaires . . . . .	83
6.3	Calcul de la stabilité aéroélastique . . . . .	85
6.3.1	Simulation en mouvement harmonique imposé . . . . .	85
6.3.2	Simulation en couplage dynamique . . . . .	96
6.4	Procédure de correction des caractéristiques modales du mode à sec . . . . .	99
7	Bilan . . . . .	108

### III Recherche des solutions périodiques d'une structure avec non-linéarités de frottement 109

1	Stabilité des systèmes non-linéaires autour d'une solution périodique . . . . .	111
1.1	Notions de stabilité . . . . .	111
1.2	Bifurcations . . . . .	119
2	Solutions périodiques par approche temporelle . . . . .	121
2.1	Différences finies et développement de Taylor . . . . .	121
2.2	Méthode de tir . . . . .	124
2.3	Collocation orthogonale . . . . .	126
3	Approches fréquentielles non-linéaires . . . . .	127
3.1	Procédure de Galerkin . . . . .	127
3.2	Méthode de la balance harmonique . . . . .	128
3.3	Time Spectral Method . . . . .	129
3.4	Application de la balance harmonique au problème de structure . . . . .	130
3.5	Condensation du système non-linéaire . . . . .	132
3.6	Algorithmes de résolution . . . . .	134
3.7	Méthodes de continuation . . . . .	135
3.8	Calcul des composantes fréquentielles des termes non-linéaires . . . . .	138
3.9	Calcul de la matrice jacobienne . . . . .	140
4	Synthèse modale non-linéaire . . . . .	143

4.1	Notion de mode normal non-linéaire . . . . .	143
4.2	Notion de mode complexe non-linéaire . . . . .	146
5	Bilan . . . . .	156
<b>IV Méthodologie et modélisation des non-linéarités dans l'analyse de stabilité</b>		
	<b>aéroélastique</b>	<b>157</b>
1	Objectifs du couplage avec la structure non-linéaire . . . . .	159
2	Stratégie de couplage faible du fluide avec la structure non-linéaire . . . . .	160
2.1	Présentation de la stratégie . . . . .	160
2.2	Prise en compte du décalage fréquentiel sur l'évaluation des composantes aérodynamiques . . . . .	163
3	Stratégie de couplage fort du fluide avec la structure non-linéaire . . . . .	164
3.1	Présentation de la stratégie . . . . .	164
3.2	Réduction de Craig-Bampton . . . . .	166
3.3	Transfert des efforts aérodynamiques du modèle complet vers le modèle réduit . . . . .	167
3.3.1	Identification des nœuds du modèle par plus proches voisins . . . . .	168
3.3.2	Réduction des efforts aérodynamiques dans la base de Craig- Bampton . . . . .	169
3.4	Transfert des déplacements du modèle réduit vers le modèle complet . . . . .	171
3.5	Conservation de la condition de phase fluide structure . . . . .	171
4	Application du couplage faible sur modèle phénoménologique . . . . .	172
4.1	Présentation du modèle . . . . .	172
4.2	Mise en équation du modèle . . . . .	173
4.3	Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec . . . . .	175
4.4	Implémentation du couplage faible sur le modèle phénoménologique . . . . .	179
4.5	Résultats numériques . . . . .	180
5	Bilan . . . . .	184
<b>V Application industrielle du couplage fluide structure avec prise en compte</b>		
	<b>des non-linéarités en pied d'aube</b>	<b>185</b>
1	Présentation du modèle industriel pour les calculs de dynamique non-linéaire . . . . .	187
2	Paramètres de simulation aéroélastique . . . . .	190
3	Considérations numériques pour la résolution de la dynamique non-linéaire sur configuration industrielle . . . . .	190
3.1	Hypothèse d'onde tournante dans un cadre non-linéaire . . . . .	190
3.2	Estimation des efforts non-linéaires par méthode DLFT . . . . .	191
4	Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec . . . . .	191
5	Application du couplage faible sur le modèle industriel . . . . .	195
5.1	Influence de l'acoustique sur le calcul de MCNL dans la procédure de couplage faible . . . . .	195
5.2	Influence du coefficient de frottement sur le calcul du cycle limite . . . . .	202
5.3	Influence de l'amortissement modal sur le calcul du cycle limite . . . . .	204
5.4	Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales . . . . .	204
6	Application du couplage fort sur le modèle industriel . . . . .	208
6.1	Considérations numériques pour l'application de la procédure de couplage fort . . . . .	208

6.2	Influence de la configuration étudiée sur le calcul du cycle limite . . . . .	208
6.3	Convergence de l'algorithme de couplage fort . . . . .	211
6.4	Influence de la dynamique non-linéaire de la structure sur l'évaluation des efforts aérodynamiques pour le couplage fort . . . . .	216
6.5	Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales	221
7	Synthèse et comparaison entre les deux approches de couplage . . . . .	222
8	Bilan . . . . .	225
<b>Conclusion</b>		<b>227</b>
<b>Références</b>		<b>231</b>
<b>Table des figures</b>		<b>243</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>249</b>
<b>Annexes</b>		<b>249</b>
A	Estimation des efforts non-linéaires de contact et de frottement par méthode DLFT	251
B	Critères de MAC entre harmoniques par amplitude du nœud $n_{obs}$ selon l'itération de couplage fort	255

---

# Nomenclature

## Symboles

$\beta$	Dissipation modale généralisée
$\gamma$	Raideur modale généralisée
$\Phi$	Base modale, matrice de monodromie
$\mathbf{C}$	Matrice d'amortissement
$\mathbf{J}$	Matrice jacobienne
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité
$\mathbf{M}$	Matrice de masse
$\mathbf{q}$	Coordonnée généralisée
$\mathbf{X}$	Composantes de Fourier du déplacement
$\mathbf{x}$	Déplacement de la structure
$\mathbf{Z}$	Matrice de rigidité multi-harmonique
$\mathcal{R}; \mathbf{r}$	Vecteur résidu
$\mu$	Masse modale généralisée, coefficient de frottement, ordre radial de mode acoustique de conduit
$\omega$	Pulsation
$\omega_c$	Pulsation de coupure
$\rho$	Densité
$\xi$	Amortissement modal généralisé
$k_{r,m,\mu}$	Nombre d'onde radial
$m$	Ordre azimutal de mode acoustique de conduit
$M_x$	Nombre de Mach axial
$N$	Nombre d'aubes
$n$	Nombre à diamètres

$N_h$	Nombre d'harmoniques
$p$	Composante instationnaire de la pression statique
$p_{m,\mu}^\pm$	Mode acoustique de conduit
$T$	Température, période temporelle
$k_{x_{m,\mu}}^\pm$	Nombre d'onde axial

### Indices et exposants

$\cdot^\infty$	Grandeur en champ lointain
$\cdot_{aero}$	Grandeur d'origine aérodynamique
$\cdot_t$	Grandeur totale
$\cdot^{\mathbf{I}}$	Partie imaginaire
$\cdot^{\mathbf{R}}$	Partie réelle
$\cdot_l$	Terme linéaire
$\cdot_{nl}$	Terme non-linéaire

### Acronymes

(U)RANS	(Unsteady - )Reynolds Averaged Navier Stokes
ADT	Accessory Drive Train
AFT	Alternate Frequency-Time
ALE	Arbitrary Lagrangian Eulerian
AMN	Méthode Asymptotique Numérique
BA	Bord d'attaque
BF	Bord de fuite
BLI	Boundary Layer Ingestion
BP	Basse Pression
CFD	Computational Fluid Dynamics
DLFT	Dynamic Lagrangian Frequency Time
DNS	Direct Numerical Simulation
DTS	Dual Time Stepping
HBM	Harmonic Balance Method
HP	Haute Pression

---

LCO	Limit Cycle Oscillations
LES	Large Eddy Simulation
MAC	Modal Assurance Criterion
MCNL	Mode Complexe Non-Linéaire
NES	Nonlinear Energy Sink
NSV	Non Synchronous Vibrations
OGV	Outlet Guide Vane
RBF	Radial Basis Functions
TFD	Transformée de Fourier Discrète
TMD	Tuned Mass Damper
TSM	Time Spectral Method





# Introduction

## Contexte

Dans ses rapports spéciaux à l'intention des décideurs de 2018 [4] et de 2019 [5], le Groupe d'experts Intergouvernemental sur l'Évolution du Climat (GIEC) indique les conséquences qu'aurait un réchauffement planétaire au-delà de 1.5°C par rapport aux niveaux pré-industriels. Parmi ces conséquences, ces rapports mentionnent entre autres l'apparition d'épisodes de chaleur intense dans les régions habitées, ainsi que des phénomènes climatiques variés et localisés selon les régions. Sont mentionnés sécheresses et déficits de précipitations pour les unes, ou épisodes de pluie intense pour les autres. Les risques liés au climat sur les populations y sont également décrits. Ceux-ci peuvent être directs comme les risques sur la sécurité alimentaire, ou indirects comme l'impact du réchauffement des eaux sur la faune et la flore marine, et par extension sur les bienfaits que l'on peut tirer de ces environnements.

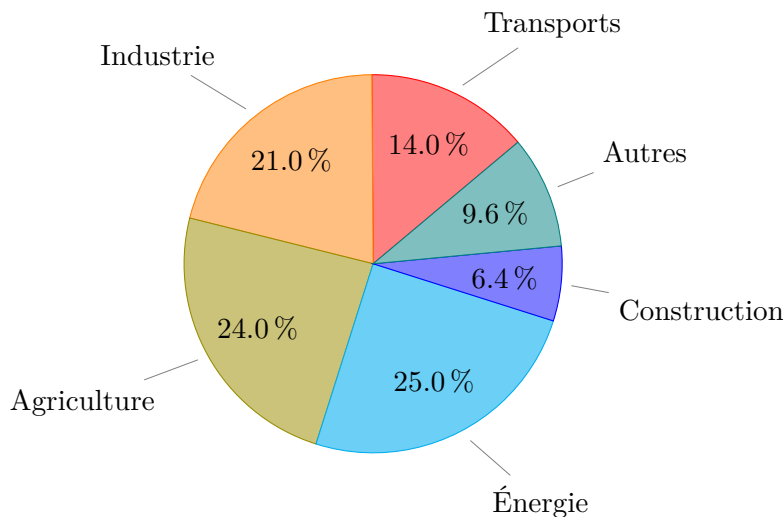


FIGURE 1 – Répartition des émissions d'origine humaine en équivalent CO<sub>2</sub> selon les secteurs économiques en 2010 (adaptée de [1])

Si ces rapports mentionnent qu'un réchauffement planétaire d'1.5°C est probable entre 2030 et 2052 au rythme actuel, ils soulignent également l'importance de limiter ce réchauffement à des valeurs inférieures à 2°C pour en limiter les effets néfastes. Les trajectoires proposées pour limiter l'accroissement de température à 1.5°C sont orientées vers la réduction majeure des émis-

sions de  $\text{CO}_2$  et des autres gaz à effets de serre (comme le méthane  $\text{CH}_4$  ou les oxydes d'azote  $\text{NO}_x$ ). En revanche, les délais fixés pour atteindre ces objectifs imposent de repenser radicalement les rapports publics à la fois à l'énergie, à l'industrie, aux transports, à l'aménagement du territoire et à l'urbanisme, comme le montre la Figure 1. Cette figure illustre la participation des différents secteurs économiques aux émissions de gaz à effet de serre en équivalent  $\text{CO}_2$  en 2010. On voit que tous les secteurs ont une part relativement similaire sur l'émission des gaz à effet de serre, et donc que leur fonctionnement respectif doit être repensé dans une perspective de réduction des émissions globales.

En ce qui concerne le secteur des transports en particulier, l'aviation possède un pourcentage non négligeable des émissions de  $\text{CO}_2$  relativement à l'ensemble des activités humaines. La Figure 2 illustre ce constat. En tenant compte de l'utilisation des terres (LUC pour Land Use Change), l'aviation atteint une fraction de 2.5% des émissions mondiales de  $\text{CO}_2$  en 2018. La contribution de l'aviation au réchauffement climatique devient d'autant plus importante si on considère l'ensemble des effets hors  $\text{CO}_2$  sur le réchauffement climatique. Lee *et al.* [90] indiquent dans leur travaux la part importante qu'ont en particulier les cirrus produits par les traînées de condensation en sortie de moteur sur l'effet de serre (malgré des incertitudes quant à leur contribution réelle). Ils mentionnent notamment que la réduction conjuguée des émissions de  $\text{CO}_2$  et des effets hors  $\text{CO}_2$  est indispensable pour réduire le bilan de l'aviation sur le réchauffement global.

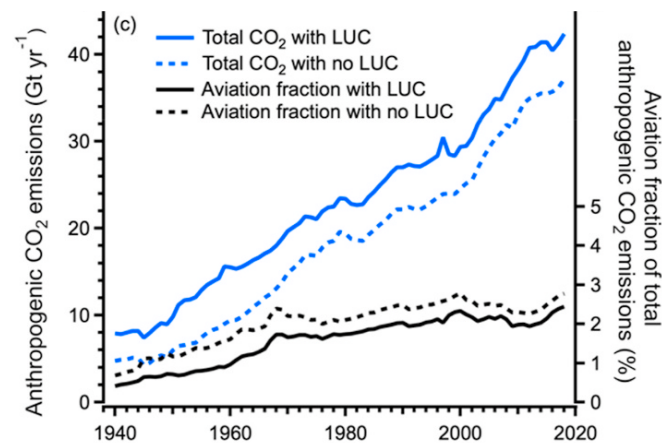


FIGURE 2 – Contribution de l'aviation aux émissions mondiales de  $\text{CO}_2$  d'origine humaine (d'après [90])

Les approches envisagées pour annuler l'impact de l'aviation sur le réchauffement climatique sont articulées autour de deux axes. Le premier axe est d'ordre politique. Les accords de Paris pour le climat en 2015 ont été suivis d'engagement de la part des pays signataires pour réduire leurs émissions globales de gaz à effet de serre, notamment pour le secteur de l'aviation. Cependant, ces dernières mesures n'engagent que les pays qui les prennent et ne sont donc pas globales. Or, 60% des vols sont internationaux : il est nécessaire que des règles internationales soient appliquées pour suivre les trajectoires d'émissions préconisées par le GIEC, les mesures locales ne pouvant compenser les émissions des pays ne régulant pas leur aviation.

Dans ce cadre, l'Union Européenne a mis en place en 2005 le *European Union Emission Trading Scheme*, un programme proposant l'établissement de quotas d'émission pour les entreprises et d'un marché du carbone au sein de l'Union Européenne. L'aviation civile a été incluse dans ce plan en 2012, obligeant les compagnies exploitant des routes aériennes avec l'Europe à y prendre part : 26 états extérieurs à l'Union Européenne ont contesté ce programme devant l'Organisation de l'Aviation Civile Internationale (OACI), faisant reculer l'Union Européenne qui finit par n'imposer ses mesures qu'aux vols internes à l'Union.

L'OACI propose alternativement en 2016 le programme international *Carbon Offsetting and Reduction Scheme for International Aviation* (CORSIA) [6] : il s'agit d'un programme de compensation d'émissions moins contraignant que le précédent, basé sur l'achat de crédit carbone de la part des exploitants du secteur aérien émettant plus d'une certaine quantité de CO<sub>2</sub> auprès de ceux qui en émettent le moins. Bien que ce plan soit un point de départ de régulation mondiale de l'aviation, il est toutefois critiqué pour son manque d'efficacité quant aux objectifs fixés par le GIEC. De nouvelles propositions alternatives continuent d'émerger en vue d'atteindre plus efficacement les objectifs du GIEC dans les délais impartis [20].

Le deuxième axe de travail pour annuler l'impact de l'aviation sur le réchauffement climatique est d'ordre technique et technologique. Il s'agit ici de mettre en place de nouvelles méthodes et pratiques pour réaliser des économies substantielles en termes de production de gaz à effet de serre. Cet axe d'amélioration concerne essentiellement les constructeurs du milieu aéronautique, ainsi que les entités de gestion de la flotte aérienne. Le rapport 2021 du *Shift Project* [20] établit une liste non exhaustive des différentes approches en ce sens. Parmi ces approches, l'amélioration des moteurs et des avions demeure l'un des axes de travail majeurs chez les constructeurs. Les systèmes de motorisation électriques, hybrides ou à carburants alternatifs sont à l'étude chez les grands acteurs du secteur aérien, ainsi que les architectures en rupture dans le domaine de l'aviation civile (comme le concept d'aile volante). Des gains en consommation sont également à envisager en termes de commandement de la flotte aérienne : gestion des avions au sol et en vol pour minimiser le temps de fonctionnement des moteurs, électrification de certaines opérations (roulage) sont des pistes envisageables. Toutefois, les innovations technologiques à elles seules ne peuvent suffire à réduire les émissions de CO<sub>2</sub> dont l'aviation est responsable. Comme le montre la Figure 3, malgré la très forte réduction des émissions de CO<sub>2</sub> par passager par kilomètre depuis les années 1950, l'accroissement du trafic aérien est tel que les innovations technologiques ne suffisent plus à réduire ces émissions à l'échelle globale.

La Figure 3 montre que malgré les gains colossaux déjà obtenus en termes de réduction des émissions de CO<sub>2</sub>, le progrès technique ne peut à lui seul résoudre le problème de la réduction des émissions de gaz à effet de serre dans le secteur de l'aviation : il est nécessaire de trouver un équilibre entre les deux aspects, politiques et technologiques, pour trouver une solution durable qui contribuera efficacement aux efforts menés pour atteindre les objectifs posés par le GIEC et qui assurera la pérennité du secteur aéronautique. Si le premier axe et la mise en place d'une politique internationale de régulation des émissions de gaz à effet de serre relèvent d'un débat public à mener, l'amélioration technologique est recherchée par les constructeurs aériens depuis la naissance de l'aéronautique.

Les innovations au cours des 20 dernières années sont nombreuses, et ont permis des réductions majeures de consommation de carburant. Parmi ces innovations, l'emploi de matériaux compo-

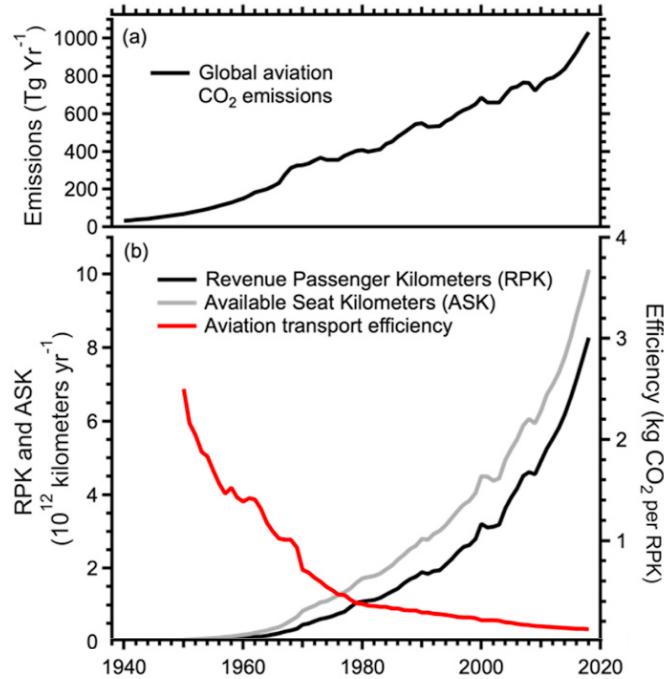


FIGURE 3 – Évolution des émissions en  $\text{CO}_2$  produits par l’aviation, du trafic aérien ramené en passager-kilomètre (RPK) et de l’efficacité de transport des passagers (d’après [90])

sites a grandement réduit la masse sèche embarquée, ce qui a notamment permis une réduction de masse d’un facteur 2 pour les aubes de soufflantes par rapport à des structures usuelles en titane [110]. Moins répandu, l’emploi de technologie d’étages monoblocs pour les turbomachines permet des réductions de masse non négligeables tout en améliorant les performances aérodynamiques des étages en question. Également, il est possible de concevoir des turboréacteurs avec un diamètre plus important afin d’augmenter le taux de dilution pour les moteurs double flux : un gain en rendement propulsif est ainsi observé. Cependant, augmenter le diamètre des moteurs augmente la masse de l’ensemble par l’utilisation de pièces plus grandes, de sorte que le gain en rendement propulsif finit par être compensé par les effets de la masse ajoutée augmentant la consommation en carburant. Une approche est alors de limiter cette augmentation de masse en concevant des entrées de moteur plus courte, mais cela a pour conséquence d’amplifier les effets des interactions entre la soufflante et son environnement sur la dynamique vibratoire des aubes. En particulier, des phénomènes d’interaction acoustique peuvent se produire entre l’entrée d’air du moteur et la soufflante, avec un impact au premier ordre sur la stabilité aéroélastique de la roue aubagée.

La conception d’un moteur relève d’un compromis entre un ensemble important de paramètres, parfois interdépendants et dont les lois d’évolution peuvent être peu prédictibles. La recherche de l’amélioration des performances des moteurs et de la réduction de la consommation nécessite une connaissance avancée de l’ensemble des phénomènes se déroulant au sein du moteur. Cette connaissance devient d’autant plus importante lorsqu’un objectif de conception est de réduire la masse globale du système, amenant certaines pièces à fonctionner jusqu’aux limites de leur état nominal. Dans le cadre des soufflantes, les phénomènes aéroélastiques résultant d’un couplage entre le fluide en écoulement (l’air) et une structure flexible (les aubes) ont une part importante

dans la sollicitation vibratoire des aubes. Ces phénomènes sont nombreux et souvent catégorisés selon qu'ils relèvent de la réponse forcée ou de la réponse libre de la structure. Parmi les phénomènes de réponse libre, le flottement est une instabilité aéroélastique pouvant conduire à un accroissement exponentiel de l'amplitude vibratoire des structures qui y sont soumises, jusqu'à la ruine de celles-ci. Ce phénomène apparaît généralement dans des régimes de fonctionnement non nominaux du moteur, mais qui peuvent néanmoins être rencontrés sur un système en fonctionnement. Il est associé à un ensemble de phénomènes multiphysiques complexes qui varient selon la zone de fonctionnement du moteur. Bien qu'étudié depuis de nombreuses décennies, les activités de recherche sur le sujet sont toujours en cours afin de comprendre les mécanismes qui peuvent déclencher cette instabilité : on souhaite être en mesure de mieux prédire son apparition, sa dynamique et ses limites dès les phases de conception des soufflantes.

Dans cette optique, des pistes ont été explorées dans la littérature scientifique afin de prendre en compte les effets que peuvent avoir des non-linéarités de structure sur le flottement. Dans un premier temps sur des modèles analytiques, puis sur des configurations industrielles, il a été observé que dans le cadre de non-linéarités de type frottement sec (en pied d'aube pour les soufflantes ou en tête de pales pour les turbines), la dissipation énergétique produite par le frottement pouvait stabiliser le système. Ainsi, des régimes stables de vibration sont atteints au delà des limites de stabilité prédites dans un cadre de mécanique linéaire.

## Objectifs

Les travaux de thèse décrits dans ce mémoire s'inscrivent dans le cadre d'une convention CIFRE avec Safran Aircraft Engines, en partenariat avec l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales (ONERA) et le Laboratoire de Tribologie et de Dynamique des Systèmes (LTDS) de l'École Centrale de Lyon. La problématique scientifique exprimée par Safran Aircraft Engines concerne la prédiction du phénomène de flottement de soufflante. Afin d'obtenir une meilleure corrélation entre les résultats observés en essai et ceux obtenus numériquement, le constructeur propose de développer une méthodologie intégrant les effets des non-linéarités de frottement en pied d'aube dans l'analyse de stabilité aéroélastique des soufflantes. La volonté principale derrière ces travaux de thèse est donc l'amélioration de la compréhension des phénomènes aéroélastiques dans le cadre des soufflantes de turboréacteur.

Ainsi, les objectifs de la thèse sont multiples :

- proposer des méthodes de prise en compte des non-linéarités de frottement en pied d'aube dans l'analyse de stabilité aéroélastique des soufflantes, dans un cadre d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air ;
- analyser les effets des non-linéarités de frottement sur le comportement aéroélastique de la soufflante ;
- identifier les paramètres physiques ou géométriques ayant un impact sur les non-linéarités en pied d'aube et la stabilité aéroélastique de la soufflante.

Outre la problématique scientifique à laquelle doivent répondre ces travaux de thèse, les méthodes proposées doivent tenir compte de certaines contraintes industrielles. Notamment, les travaux

doivent être applicables et fonctionnels sur des configurations de soufflantes typiques de ce que l'on peut trouver dans l'état de l'art, et permettre d'obtenir des résultats avec des temps de calcul acceptables pour une utilisation en bureau d'étude. En outre, ils doivent être adaptés à l'environnement logiciel du constructeur afin de pouvoir y exploiter au mieux les outils déjà en place.

## Organisation du mémoire

Le mémoire est organisé de la manière suivante :

- **le premier chapitre** propose d'aborder la problématique de stabilité aéroélastique de soufflante dans un cadre général. Après avoir expliqué le fonctionnement d'un turboréacteur et d'une machine de compression (dont les soufflantes sont un sous ensemble), les interactions entre le fluide et la structure sont abordés. Le flottement de soufflante est décrit, ainsi que les sources d'amortissement dans les roues aubagées. Une attention particulière est portée sur l'effet des non-linéarités de frottement sur la stabilité aéroélastique, et une revue de quelques modèles de frottement est proposée ;
- **le deuxième chapitre** met en place les équations relatives à la description du problème aéroélastique traité dans ces travaux de thèse. Ainsi, les équations de la mécanique des fluides sont dans un premier temps décrites, avec une attention portée sur des considérations d'ordre numérique. La propagation d'ondes acoustiques dans une conduite cylindrique est mise en équation, et le cas particulier des entrées d'air de turboréacteur est abordé. La dynamique des structures élastiques est ensuite mise en équation dans le cadre d'une structure linéaire, en tenant compte d'une hypothèse sur la symétrie cyclique de la structure. Le couplage aéroélastique est alors abordé en présentant les enjeux de ce type de simulation multiphysique. Une application industrielle de calcul de stabilité aéroélastique est finalement proposée, dans un cadre où la structure est considérée comme linéaire et où des effets d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air sont attendus ;
- **le troisième chapitre** a pour but de présenter un ensemble d'outils pour permettre la recherche de solutions périodiques d'un système mécanique non-linéaire en régime libre. Cette partie commence par la description de quelques définitions et propriétés concernant la stabilité des systèmes non-linéaires. Une liste non exhaustive de méthodes pour le calcul des solutions périodiques d'un système non-linéaire est ensuite proposée. Une attention est alors portée sur les systèmes présentant des non-linéarités de type frottement sec. Un ensemble de notions pour décrire la dynamique en régime libre de tels systèmes est finalement abordé, en particulier la notion de mode complexe non-linéaire qui a été retenue dans la suite des travaux de thèse ;
- **le quatrième chapitre** propose les méthodologies choisies dans le cadre des travaux de thèse pour prendre en compte les non-linéarités de frottement en pied d'aube dans l'analyse de stabilité aéroélastique. Les objectifs visés sont dans un premier temps décrits, puis deux méthodes sont proposées pour prendre en compte les non-linéarités de frottement dans l'analyse de stabilité. La première méthode est issue de travaux déjà existant dans le cadre de la réponse forcée de soufflante sous ingestion de vortex, mais réadaptée pour fonctionner dans le cadre de l'étude de stabilité aéroélastique de soufflante en régime libre. La deuxième méthode développée est en revanche inédite et permet d'obtenir un couplage plus fort entre le fluide non-linéaire et la structure non-linéaire. Un modèle phénoménologique d'aube en

frottement avec un disque est alors proposé pour vérifier la faisabilité de la première méthode de couplage ;

- **le cinquième chapitre** est un cas d'application industriel des deux méthodes proposées au quatrième chapitre. Le modèle non-linéaire industriel employé est dans un premier temps détaillé. Les deux méthodes de couplages entre le fluide et la structure non-linéaire sont testées et comparées entre elles, puis par rapport aux données expérimentales obtenues auprès du constructeur.





# Chapitre I

## Stabilité aéroélastique des soufflantes dans un cadre non conservatif

Ce chapitre a pour vocation de décrire la problématique des instabilités aéroélastiques de soufflantes. Pour cela, les éléments constitutifs et le fonctionnement des turboréacteurs sont tout d'abord rappelés. Une attention particulière est portée sur les compresseurs dont les soufflantes font partie. Les phénomènes vibratoires qui apparaissent sur les soufflantes sont ensuite abordés, notamment les phénomènes d'ordre aéroélastique qui sont ceux qui nous intéressent dans le cadre de ces travaux de thèse. La problématique des instabilités aéroélastiques de soufflantes est alors exposée, dans le contexte où des interactions acoustiques peuvent apparaître entre la soufflante et son environnement et avoir un impact sur la stabilité. Enfin, les sources d'amortissement dans les soufflantes sont abordées ainsi que le rôle qu'elles peuvent jouer sur la stabilité aéroélastique. Une attention particulière est portée sur le cas du frottement aube disque qui est celui qui nous intéresse dans le cadre de ce mémoire.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Fonctionnement d'un turboréacteur</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1	Architecture et cycle thermodynamique . . . . .	10
1.2	Fonctionnement d'un étage de compression . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Phénomènes vibratoires sur les roues aubagées</b> . . . . .	<b>13</b>
2.1	Excitations d'origine mécanique . . . . .	13
2.2	Excitations d'origine aérodynamique . . . . .	14
2.3	Outils de conception des roues aubagées . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Instabilités aéroélastiques des étages de compresseur</b> . . . . .	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Sources d'amortissement dans les roues aubagées</b> . . . . .	<b>27</b>
4.1	Amortissement par dispositifs passifs . . . . .	27
4.2	Amortissement par dispositifs actifs . . . . .	29
4.3	Effets du frottement aube disque sur la stabilité aéroélastique . . . . .	29
4.4	Non-linéarités aube-disque : modélisation du contact frottant . . . . .	34
4.4.1	Lois de contact . . . . .	35
4.4.2	Modèles de frottement . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>37</b>

---

# 1 Fonctionnement d'un turboréacteur

## 1.1 Architecture et cycle thermodynamique

Le turboréacteur est aujourd'hui le système de motorisation le plus répandu dans l'aviation civile. Son principe de fonctionnement repose sur la troisième loi de Newton : tout corps exerçant une force sur un autre corps reçoit en réaction une force de même intensité dirigée en sens inverse de la part de cet autre corps. Il s'agit du principe d'action-réaction. Un turboréacteur applique ce principe en aspirant une masse d'air ayant une vitesse initiale donnée et en l'éjectant à une vitesse plus importante. Une poussée résulte de la variation de quantité de mouvement entre le flux d'air entrant et le flux sortant.



FIGURE I.1 – Vue d'un turboréacteur LEAP-1A

Un turboréacteur est formé de plusieurs modules ayant chacun une fonction précise. L'assemblage de ces modules permet la réalisation de la fonction principale du moteur, qui est de créer une poussée. Selon le cahier des charges des constructeurs, on peut retrouver des variations dans l'architecture des turboréacteurs comme les turboréacteurs multi-corps et/ou multi-flux ou encore les turboréacteurs à soufflantes contra-rotatives [139]. Cependant, on retrouve toujours un ensemble de besoins auxquels les différents modules répondent pour faire fonctionner le moteur. Ces fonctions sont au nombre de trois, et sont décrites par le cycle thermodynamique de Brayton qui caractérise le fonctionnement des turbines à gaz [64]. La Figure I.2 illustre ce cycle thermodynamique.

Dans le cadre des turboréacteurs, le cycle de Brayton se caractérise par trois étapes successives :

- une phase de compression isentropique, au cours de laquelle le fluide passe de l'état 1 (température  $T_1$ , pression  $p_1$ ) à l'état 2 (température  $T_2$ , pression  $p_2$ ) ;
- une phase de combustion isobare, au cours de laquelle la combustion du mélange carburant/comburant apporte une quantité de chaleur au fluide qui passe de l'état 2 (température  $T_2$ ) à l'état 3 (température  $T_3$ ) ;
- une phase de détente isentropique, au cours de laquelle le fluide passe de l'état 3 (température  $T_3$ , pression  $p_2$ ) à l'état 4 (température  $T_4$ , pression  $p_1$ ).

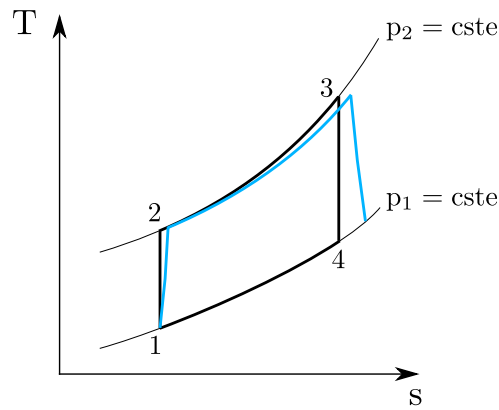


FIGURE I.2 – Cycle thermodynamique de Brayton (en noir : cycle fermé idéal ; en bleu : cycle ouvert réel)

Pour un cycle idéal (courbe fermée noire sur la Figure I.2), les différentes étapes sont effectuées sans perte énergétique. Pour un cycle réel en revanche (courbe ouverte bleue sur la Figure I.2), chaque étape s'accompagne de pertes énergétiques, caractérisant l'irréversibilité des différents processus. On définit alors un rendement pour chacune d'entre elles, qui se traduit par des rapports entre les énergies réelles transférées et les énergies théoriques nécessaires à la réalisation de chaque étape. Ces étapes sont communes à l'ensemble des turboréacteurs. Elles sont réalisées par différents modules qui, comme mentionné précédemment, peuvent avoir des formes différentes selon l'architecture du moteur. La Figure I.3 illustre les différents modules utilisés sur le moteur LEAP-1A, un turboréacteur double corps double flux typique de l'état de l'art.

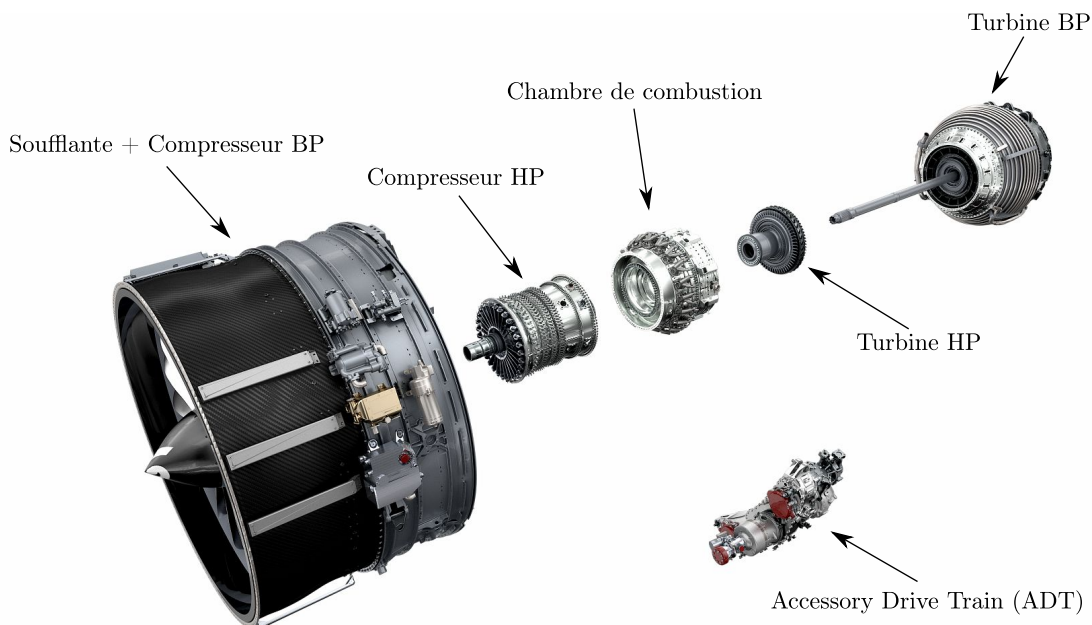


FIGURE I.3 – Vue éclatée d'un turboréacteur LEAP-1A

Ce turboréacteur se caractérise par la présence de deux axes de rotation concentriques décou-

plés pouvant tourner à des vitesses différentes. Cela permet la mise en place de deux étages, respectivement nommés Basse Pression (BP) et Haute Pression (HP), pour améliorer les performances globales des modules de compression et de détente. Ainsi, le module de compression est constitué de la soufflante et des compresseurs BP et HP, le module de combustion est formé de la chambre de combustion et le module de détente des gaz est composé des turbines HP et BP.

L'air entrant dans le moteur passe par la soufflante. Une fraction de cet air passe à l'intérieur du moteur par le flux primaire, tandis que le reste est évacué à l'extérieur par le flux secondaire qui assure 70% de la poussée du moteur. L'air du flux primaire passe par les compresseurs BP puis HP, avant d'être mélangé à du carburant et de passer dans la chambre de combustion. Une fois la combustion faite, les gaz passent par les turbines HP puis BP, qui récupèrent une partie de l'énergie contenue dans les gaz pour faire tourner les compresseurs et la soufflante. Une autre fraction de l'énergie contenue dans les gaz est employée pour faire tourner l'Accessory Drive Train (ADT), une boîte d'accessoire montée sur le moteur et utilisée pour faire fonctionner notamment les pompes à huile et à carburant, le démarreur du moteur et le générateur électrique.

Bien que n'ayant pas le même objectif que les compresseurs BP et HP, les soufflantes font partie de la famille des machines de compression. Nous allons maintenant décrire le fonctionnement de ce type de machine.

## 1.2 Fonctionnement d'un étage de compression

Nous nous plaçons dorénavant dans le cadre des machines à fluide compressible et considérons qu'il s'agit d'air. D'après Mérigoux [100], ces machines peuvent être classées selon leur objectif d'utilisation ou leur architecture. La première catégorie compare leurs caractéristiques de fonctionnement comme la vitesse des fluides ou les taux de compression recherchés, tandis que la seconde compare leurs géométries comme les compresseurs axiaux ou centrifuges. Toutefois, les performances d'un compresseur peuvent être tracées indépendamment de ces classifications sur le diagramme caractéristique. La Figure I.4 illustre la forme générale de ce diagramme pour les compresseurs.

Pour un débit d'air et une vitesse de rotation donnée, le diagramme caractéristique permet d'obtenir le taux de compression de la machine ainsi que le rendement isentropique de compression. Par ailleurs, la Figure I.4 met en évidence qu'une machine de compression fonctionne entre deux cas limites définis respectivement par les lignes de pompage et de blocage sonique.

La ligne de pompage est composée de l'ensemble des points de fonctionnement du compresseur au-delà desquels le phénomène de pompage apparaît. Le pompage se caractérise par le décrochage du fluide du profil suite à un angle d'incidence trop important ou trop faible. Dans des conditions de fonctionnement où le décrochage du profil est établi et pour des taux de compression importants, le flux d'air peut se stopper dans le moteur à cause du compresseur et parfois même s'inverser. Cette situation peut conduire à une ruine prématurée du moteur.

La ligne de blocage sonique caractérise un sous ensemble de points de fonctionnement de l'étage de compression. Pour ces points, la vitesse du fluide devient égale à la vitesse du son sur l'ensemble des sections composant les canaux interaubes. Ces canaux formant localement des structures convergentes puis divergentes, la vitesse du son atteinte au "col" et synonyme de blocage

du débit : il s'agit du blocage sonique.

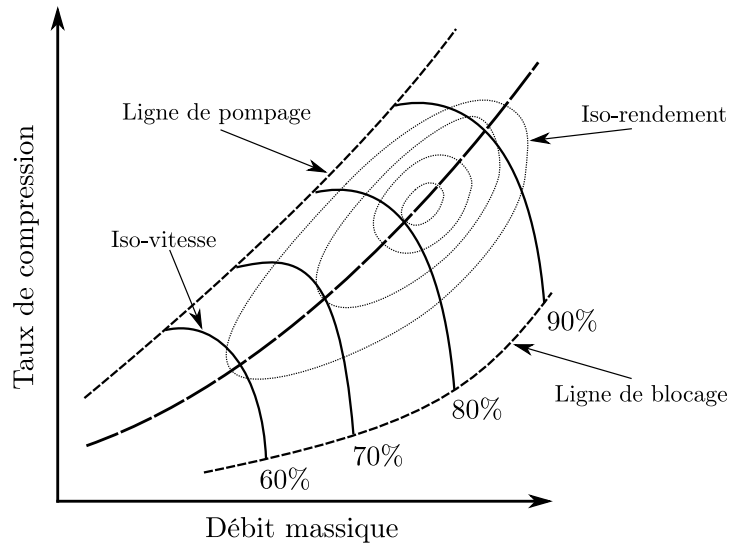


FIGURE I.4 – Exemple de diagramme caractéristique de compresseur

Le diagramme de fonctionnement d'un compresseur est un outil permettant de déterminer les performances de ce type de machine. Cependant, les indications qu'il fournit sont d'ordre aérodynamique ou énergétique et il ne s'agit que de données intégrées qui ne tiennent pas compte des phénomènes instationnaires pouvant intervenir, qu'ils soient d'ordre mécanique ou aérodynamique. La dynamique des structures demeure toutefois un sujet d'étude critique car les aubes doivent être conçues de sorte à avoir la plus grande durée de vie possible face aux différentes sollicitations dont elles peuvent être le siège, en plus de fournir les performances aérodynamiques recherchées. Dans ce cadre, nous allons maintenant aborder les différentes sources d'excitation vibratoire au sein des compresseurs de turboréacteur ainsi que des notions utiles à la conception des étages de compression d'un point de vue mécanique.

## 2 Phénomènes vibratoires sur les roues aubagées

Les phénomènes vibratoires qui animent le mouvement des aubes peuvent être distingués en deux catégories selon leur origine. Certains phénomènes n'ont pour cause qu'un ensemble de facteurs mécaniques, tandis que la majorité relèvent d'interactions entre la structure et un élément extérieur. Dans le cadre des compresseurs, cette deuxième catégorie est principalement attribuée à un couplage aéroélastique entre la structure et le fluide qui s'écoule autour. Nous proposons dans ce qui suit une liste non exhaustive de ces sources de vibrations.

### 2.1 Excitations d'origine mécanique

Les phénomènes vibratoires induits par des causes d'ordre purement structurel ne sont qu'une fraction de l'ensemble des phénomènes à l'origine des vibrations d'une roue aubagée. Cependant, certains de ces phénomènes font l'objet d'une attention particulière en phase de conception.

Les vibrations de rotor dues aux balourds figurent parmi les sources de vibration les plus

récurrentes. Sur un rotor, un balourd est associé à un écart entre la position du centre de gravité d'une section et son axe local de rotation. Cet axe de rotation peut être localement différent de celui global de la machine [107, 126]. Les causes du balourd peuvent être multiples : hétérogénéité des matériaux utilisés, méthodes d'assemblage et d'usinage (excentricité ou non symétrie des pièces). Ils peuvent notamment apparaître en cours de fonctionnement de la machine suite à une usure lente et progressive de certaines pièces, ou à des phénomènes relevant de la dynamique rapide (perte d'aube ou ingestion d'oiseau). Dans ce dernier cas, le balourd généré est de grande ampleur mais doit cependant rester suffisamment faible pour permettre au moteur de continuer à fonctionner correctement jusqu'à son arrêt. Le balourd a un impact sur le mouvement d'ensemble du rotor, pouvant le déformer statiquement et dynamiquement. Lors des phases de conception, on calcule le balourd fournissant la déformée maximale admissible de l'arbre du rotor, et on s'assure que la valeur obtenue est largement prépondérante face aux tolérances d'équilibrage. Le constructeur est ainsi assuré d'avoir une déformée liée au balourd acceptable, même en cas d'événements imprévus comme la perte d'une aube. Il est par ailleurs intéressant d'avoir de faibles balourds pour des raisons de maintenance, ceux-ci pouvant causer des problèmes d'étanchéité notamment au niveau des paliers.

Une autre source d'excitation mécanique est associée au contact entre les parties rotoriques et statoriques, notamment au niveau des têtes d'aubes. Plusieurs phénomènes peuvent en être la cause. Pour des questions de performances énergétiques des étages de roues mobiles, les constructeurs souhaitent réduire au maximum le jeu entre les aubes et le carter en tête de pale. Cependant, avec la mise en rotation des roues mobiles, des contraintes centrifuges s'appliquent en permanence sur les aubes qui finissent par se déformer irréversiblement : il s'agit du phénomène de fluage. Au cours de la durée de vie de la roue mobile, le jeu entre l'aube et le carter va se réduire progressivement, jusqu'à devenir nul et que le contact se produise. D'autres phénomènes faisant intervenir la dynamique de la structure peuvent également provoquer le contact, comme la réponse vibratoire de la roue à des sollicitations externes (d'origine aérodynamique notamment) ou encore les interactions modales entre le rotor et le stator. Pour éviter d'endommager irrémédiablement le carter et les aubes et de nuire à la durée de vie de celles-ci, il est aujourd'hui courant d'observer sur les carter des matériaux abrasables, qui sont progressivement usés par le passage des aubes mais qui n'endommagent pas celles-ci en cas de contact [157].

## 2.2 Excitations d'origine aérodynamique

Les phénomènes d'ordre aéroélastique figurent parmi les plus nombreux à solliciter les aubes de compresseur et provoquer leurs vibrations. L'aéroélasticité est une branche de la physique dans laquelle on étudie les interactions entre une structure élastique et un fluide en contact avec celle-ci. Le fluide et la structure sont reliés par trois types d'efforts qui définissent le triangle de Collar [41] (voir Figure I.5) : les efforts élastiques au sein de la structure, les efforts aérodynamiques et les efforts inertiels. Le couplage de ces trois efforts forme l'aéroélasticité dynamique qui caractérise la dynamique du système couplé fluide structure.

Les phénomènes relevant de l'aéroélasticité dynamique peuvent être classés selon qu'ils relèvent de la réponse forcée ou de la réponse libre, mais également selon les valeurs des fréquences qui les caractérisent. En particulier, si ces fréquences sont des multiples de la fréquence de rotation de la roue mobile, on parle de phénomènes synchrones. Dans le cas contraire, on parle de phénomène asynchrone.

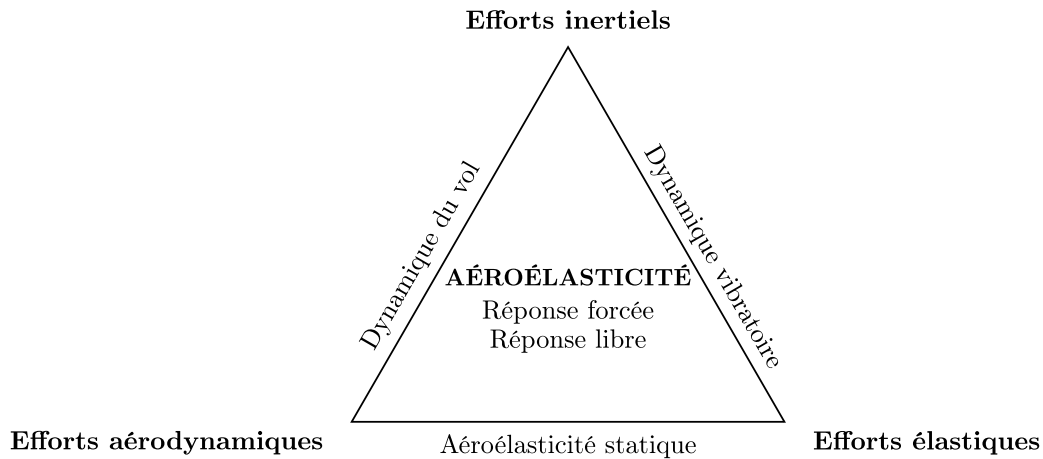


FIGURE I.5 – Triangle de Collar (adaptée de [41])

### Interactions de sillage

L'interaction de sillage est un phénomène de réponse forcée synchrone intervenant entre des étages successifs de roues aubagées ayant un différentiel de vitesse de rotation (typiquement une roue rotorique suivie d'une roue statorique). Une aube d'une roue "verra" le sillage laissé par le passage des aubes de la roue en amont. Ce sillage peut être une source de vibration pour l'ensemble des aubes d'une roue située en aval d'une autre roue aubagée.

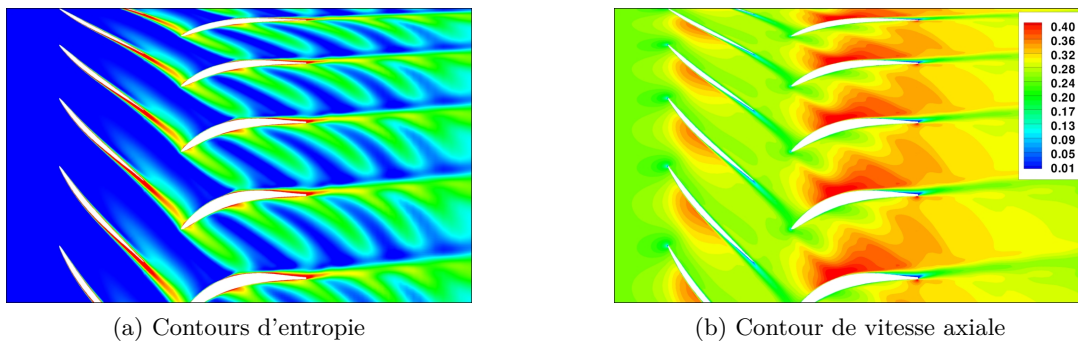


FIGURE I.6 – Illustration du sillage généré par une roue aubagée (d'après [144])

### Effets potentiels

Les effets potentiels résultent de la déformation du flux due à la présence d'un solide dans l'écoulement [115]. Dans le cas où des roues aubagées adjacentes sont proches, la modification des lignes de courant engendrée par la présence des aubes peut propager des perturbations entre les roues, de l'amont vers l'aval ou de l'aval vers l'amont. Il s'agit encore d'un phénomène de réponse forcée synchrone.



## Distorsions en entrée de moteur

Cette sous partie porte en particulier sur les soufflantes de turboréacteur. Une distorsion est une perturbation très localisée apparaissant sur une section d'entrée de la soufflante. Elle est responsable d'une excitation périodique des aubes de soufflantes à la fréquence de rotation du moteur. Il s'agit encore une fois d'un phénomène de réponse forcée synchrone. Les distorsions peuvent être causées par de nombreux phénomènes.

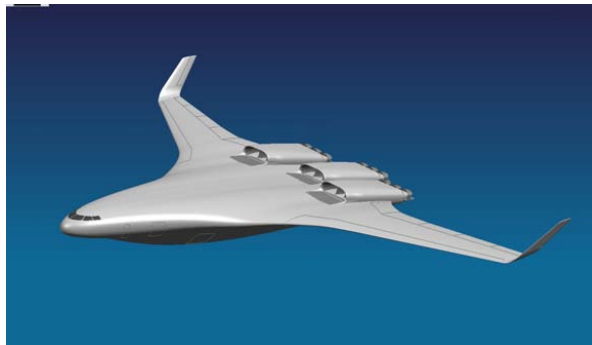
L'ingestion de vortex est un exemple de distorsion en entrée de moteur [17, 104]. Le fonctionnement de la soufflante d'un turboréacteur aspire une masse d'air délimitée par un tube de courant. Lorsque ce tube de courant a un diamètre important (dû à un débit massique d'air important), il peut intersecter le sol créant un point d'arrêt du fluide. En présence de vorticité, un vortex apparaît et traverse la soufflante (voir Figure I.7).



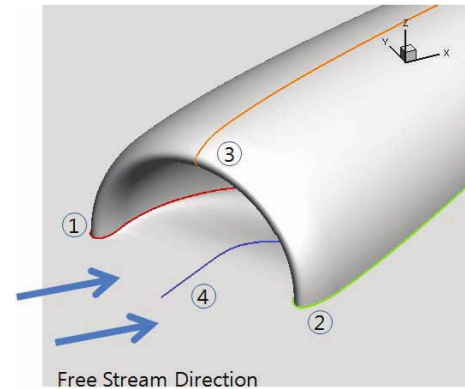
FIGURE I.7 – Ingestion de vortex sur le moteur Rolls-Royce RB211-524G ( Peter Thomas Octobre 2005)

Les distorsions peuvent aussi être caus e par l'environnement de la soufflante. Un premier exemple est celui du décollement de couche limite sur l'entrée de la nacelle produit par une ingestion de vent de travers [40, 168]. Un gradient de pression adverse dans la couche limite de la nacelle peut apparaître à faible débit, causant un décollement de la couche limite qui sera ingéré par la soufflante. Pour des débits plus importants, l'écoulement peut localement devenir sonique et causer l'apparition d'une onde de choc : l'interaction du choc avec la couche limite peut causer son décollement qui sera également ingéré par la soufflante. Dans les deux cas, une chute de pression totale sur une fraction de la section d'entrée de la soufflante est observé, d'où une sollicitation synchrone des aubes.

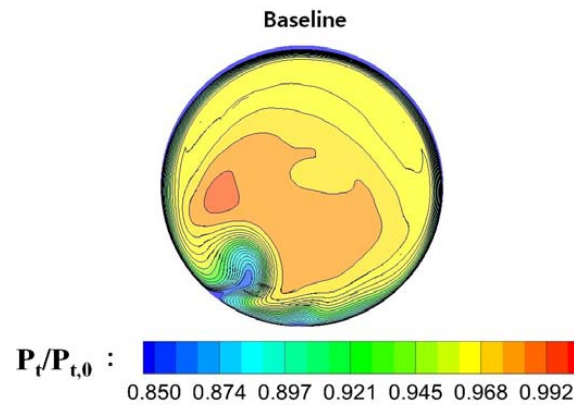
Un second exemple montre toutefois que les distorsions peuvent parfois être recherchées : il s'agit du cas d'ingestion de couche limite aussi appelé Boundary Layer Ingestion (BLI) (voir Figure I.8). Pour ce type d'architecture de moteur, celui-ci est partiellement "enterré" dans la nacelle de l'avion. La couche limite de l'avion ayant une vitesse axiale plus faible que l'écoulement externe, le différentiel de vitesse entre la couche limite et le fluide en sortie de moteur est plus important que pour une configuration classique : on améliore de cette manière le rendement propulsif comme montré par Plas *et al.* [124]. Ce type d'architecture de moteur est à l'étude pour équiper de nouveaux concepts d'appareils aéronautiques [93, 125].



(a) Concept d'avion avec BLI



(b) Entrée d'air du moteur



(c) Chute de pression totale en entrée de soufflante due à la couche limite

FIGURE I.8 – Illustration de la BLI (d'après [93])

### Décollements tournants

Le décollement tournant est un phénomène asynchrone d'origine purement aérodynamique dans le sens où il peut apparaître en considérant une structure rigide. Ce phénomène est caractérisé par l'apparition d'une ou plusieurs cellules réparties symétriquement sur la circonférence de la roue dans lesquelles les vitesses axiales du fluide s'inversent. Ces cellules peuvent occuper toute la veine dans la direction radiale, ou seulement une fraction de celle-ci. Par ailleurs, la présence de ces cellules induit des déviations des lignes de courant aux périphéries des cellules. Ainsi, les aubes adjacentes à la cellule se trouvent en sur-incidence pour les unes et en sous-incidence pour les autres. Ce changement d'incidence est responsable respectivement du décollement de la couche limite pour les premières et de recollement pour les secondes, amenant la cellule à tourner dans le même sens que la roue à une vitesse moindre dans le repère absolu. Une description plus détaillée de ce phénomène peut être trouvée dans les mémoires de thèse de Gourdain [66] et de Fiquet [59]. Bien que d'origine aérodynamique, ce phénomène peut solliciter les aubes et les mettre en vibration.

### Vibrations non-synchrones et "lock-in"

Le terme de vibrations non-synchrones, aussi appelé Non Synchronous Vibrations (NSV), désigne une interaction asynchrone entre une instabilité fluide et la dynamique de la structure.

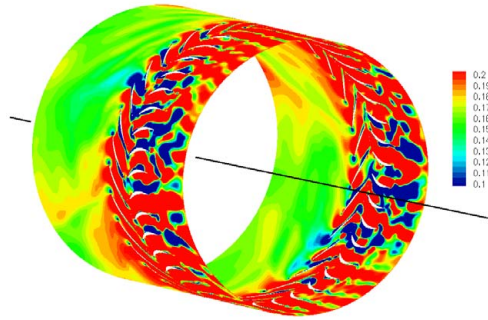


FIGURE I.9 – Cellules d'un décollement tournant issu d'une simulation URANS (d'après [66])

Cette interaction peut avoir pour origine plusieurs phénomènes (décollement tournant, lâchers tourbillonnaires ou instabilités en tête de pale) et être difficile à prédire car dépend de nombreux paramètres [38, 39]. Ce phénomène asynchrone peut conduire à de grandes amplitudes de vibration des aubes de turbomachine, notamment à cause du "lock-in". Le "lock-in" est une dénomination pouvant couvrir différents phénomènes. De manière générale, on emploie ce terme lorsqu'un phénomène physique périodique voit sa fréquence se verrouiller sur celle d'un autre phénomène physique. Un premier exemple de "lock-in" est le verrouillage de la fréquence du phénomène de *buffet* d'un profil 2D sur la fréquence propre du mouvement en pompage du profil [130]. Un autre exemple dans le cadre des turbomachines est le verrouillage de la fréquence des lâchers tourbillonnaires se produisant en tête de pale sur la fréquence de mouvement des aubes [152].

### Flottement

Le flottement est une instabilité de couplage aéroélastique en réponse libre entre une structure déformable et un fluide dans lequel elle est immergée. Ce phénomène est qualifié d'auto-entretenu car il est caractérisé par un échange d'énergie positif entre le fluide et la structure, amenant cette dernière à se déformer naturellement à des amplitudes de plus en plus importantes jusqu'à sa rupture. Apparaissant dans des domaines critiques comme le génie civil avec le tablier des ponts ou l'aéronautique pour les voilures fixes et les turboréacteurs, le flottement doit être prédit dès les phases de conception de tels systèmes.

Il existe de nombreuses formes de couplage aéroélastique instable. Pour les turbomachines, le flottement a historiquement été étudié pour la stabilité des mouvements de pompage puis de tangage d'une cascade de profils [172, 173]. Le couplage de ces deux mouvements par les efforts aérodynamiques a par la suite fait l'objet de nouveaux travaux [16, 32] pour caractériser de nouveaux mécanismes de flottement. À partir d'une certaine vitesse de l'écoulement axial appelée vitesse critique, les fréquences propres associées à ces modes coïncident et le système devient instable : il s'agit du flottement de décrochage classique à deux degrés de liberté. Des formes de flottement plus complexes existent cependant, en particulier dans le cas des compresseurs et des soufflantes illustré en Figure I.10. On observe sur le diagramme caractéristique de nombreuses zones en périphérie de la zone de fonctionnement nominale dans lesquelles un régime de flottement est établi. Les frontières de ces zones définissent les limites des zones de stabilité.

Chaque poche de flottement sur la Figure I.10 est associée à un ensemble de phénomènes com-

plexes qui dépendent des conditions de fonctionnement aérodynamiques du compresseur. Ces phénomènes permettent de classer différentes formes du flottement de compresseur, dont nous allons maintenant voir les caractéristiques [94, 153].

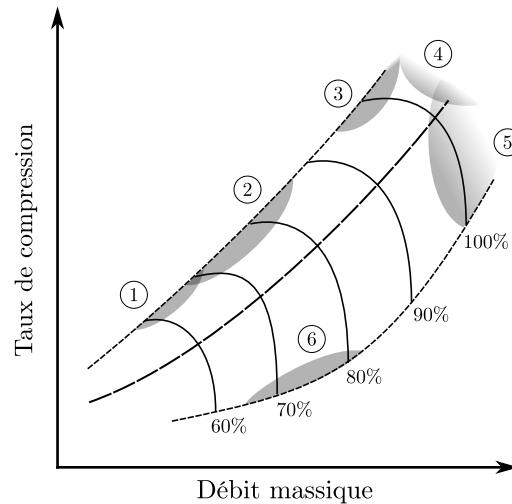


FIGURE I.10 – Poches de flottement pour un compresseur (adaptée de [96])

Pour un compresseur, six familles de flottement sont identifiées sur la Figure I.10 :

- Zone ① : le flottement de décrochage subsonique. Dans ces conditions de fonctionnement de la roue mobile, l'écoulement est intégralement subsonique. On se place dans une configuration où l'angle d'incidence des aubes est important et conduit à un décollement de la couche limite sur l'extrados à partir du bord d'attaque ;
- Zone ② : le flottement de décrochage transsonique. On se place dans des conditions où un choc en tête de pale apparaît. Une interaction entre le choc et la couche limite peut se produire et provoquer le décollement de cette dernière. Cette interaction peut être à l'origine d'un transfert d'énergie du fluide vers la structure et créer une situation d'instabilité ;
- Zone ③ : le flottement de décrochage supersonique. Ce régime de fonctionnement est situé autour des 100% de vitesse de rotation nominale, et est caractérisé par la présence d'un choc proche du bord d'attaque côté extrados. Ce choc peut passer devant l'aube adjacente tandis qu'un décollement de couche limite est possible à la base du choc [7] ;
- Zone ④ : le flottement supersonique à forte incidence. Ce régime est caractérisé par un écoulement relatif supersonique, avec une onde de choc bloquant le canal inter-aube [63] ainsi qu'un décollement partiel ou total de la couche limite ;
- Zone ⑤ : le flottement supersonique à faible incidence. Ce régime est caractérisé par un écoulement relatif supersonique et un faible angle d'incidence qui empêche le décollement de la couche limite [149] ;
- Zone ⑥ : le flottement de blocage. L'écoulement est caractérisé par la présence d'une onde de choc sur tout le canal inter-aubes, provoquant un blocage du débit. L'interaction entre l'onde de choc reliant deux aubes successives et leur couche limite provoque un transfert

d'énergie du fluide vers la structure, d'où une instabilité. Ce transfert est plus important sur l'extrados que sur l'intrados [127].

Les mécanismes physiques à l'origine du départ en flottement sont variés et font encore aujourd'hui l'objet de nombreuses recherches malgré des décennies d'études sur le sujet. L'augmentation de la puissance de calcul permet d'intégrer de nouveaux éléments dans les calculs de stabilité aéroélastique, et ainsi de révéler de nouveaux mécanismes d'échange d'énergie entre le fluide et la structure. Nous aborderons un exemple dans la sous-section 1.3.

Nous venons de voir dans cette sous section un ensemble de phénomènes d'origine mécanique, aérodynamique et aéroélastique pouvant mettre en vibration les aubes de soufflante. Ces vibrations étant inévitables sur un système réel, il est primordial dans le cadre d'une conception de savoir quantifier les niveaux de vibration qui seront atteints par les aubes. Ceci est particulièrement important sur les points de fonctionnement où sont attendus les phénomènes que nous venons de voir. Pour cela, des outils sont utilisés en phase de conception pour anticiper ces niveaux de vibration. Nous allons maintenant voir quelques uns de ces outils.

### 2.3 Outils de conception des roues aubagées

Lors de la conception des roues aubagées, un compromis est recherché entre la performance fournie par l'aérodynamique et la résistance de la structure aux différentes sollicitations qu'elle rencontre. La résistance de la structure ne comprend pas seulement la résistance aux chargements statiques et dynamiques, mais également sa tenue thermomécanique. Nous n'aborderons pas ce dernier aspect dans le cadre de ce mémoire.

La résistance des matériaux peut revêtir deux aspects. Le premier aspect consiste à vérifier que les contraintes statiques qui s'appliquent sur la structure sont suffisamment faibles pour permettre à celle-ci de remplir sa fonction principale. Généralement, cela consiste à vérifier dans un cadre statique que lors de son utilisation, la pièce soit placée dans sa zone d'élasticité pour laquelle les contraintes dépendent linéairement de la déformation. Au-delà de cette zone commence la zone de plasticité qui est critique car précédant la rupture. Il peut cependant être parfois trop restrictif de ne se placer que dans un cadre statique. On peut alors considérer un second aspect qui est celui du comportement dynamique de la structure.

L'analyse des contraintes dynamiques d'une structure permet de vérifier sa résistance à la fatigue. La fatigue vibratoire correspond à l'endommagement irréversible d'un matériau par application d'une contrainte instationnaire. Celle-ci peut être périodique, aléatoire ou transitoire. Elle se manifeste initialement par l'apparition d'une zone de déformation plastique microscopique due à une accumulation localisée de contraintes dynamiques. Ces contraintes peuvent avoir une amplitude faible devant les contraintes statiques. La zone microscopique de déformation plastique peut alors être le point de départ pour la propagation de nouvelles zones de plasticité dans son voisinage. Cette propagation est lente et est le fruit d'une sollicitation dynamique permanente. Elle peut conduire à la propagation de fissures et ainsi la ruine de la pièce.

#### Diagramme de Wöhler

Des outils existent pour avoir une mesure quantitative de la résistance d'une pièce aux sollicitations auxquelles elle est soumise. Un premier outil est la courbe de Wöhler [82]. Cette

courbe présente la durée de vie  $N$  en nombre de cycles pour une contrainte dynamique d'une valeur de  $\sigma$  (voir Figure I.11). On suppose par ailleurs que la contrainte moyenne (contrainte statique) est nulle. Cette courbe montre en particulier que pour des contraintes inférieures à une valeur limite appelée limite de contrainte en fatigue, la durée de vie de la pièce à la fatigue est infinie. Cette courbe est obtenue expérimentalement pour un matériau ou une pièce donnée. La procédure consiste à imposer une contrainte alternée au matériau (ou la pièce) et de voir au bout de combien de cycles une fissure conduit à la ruine de la pièce. Cela peut prendre plusieurs dizaines d'heures selon la fréquence de la vibration (exemple : pour une vibration de 80Hz, il faudra 34.7 heures pour réaliser  $10^7$  cycles ; pour une vibration à 130Hz, cela prendra 21.3 heures). Cela permet d'obtenir un point de la courbe : il faut réitérer le processus avec une contrainte différente pour obtenir d'autres points.

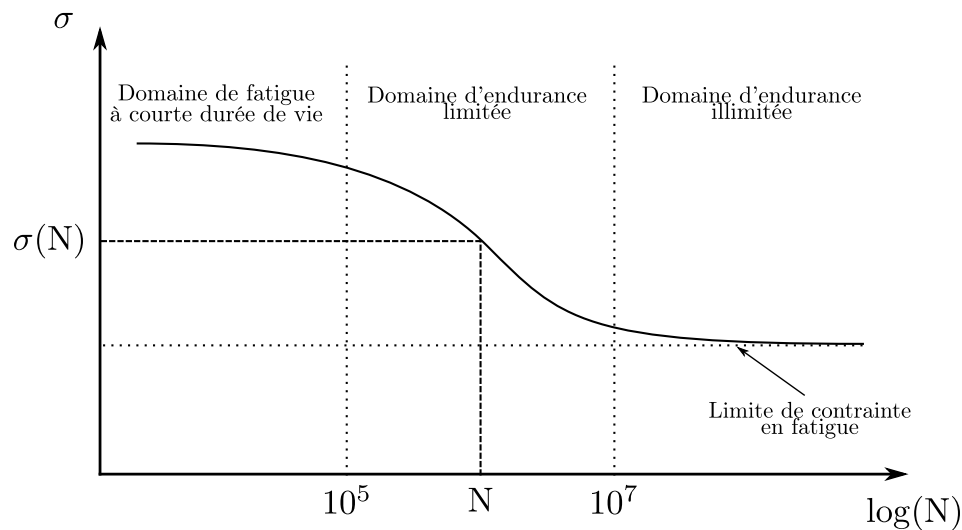


FIGURE I.11 – Courbe de Wöhler (adaptée de [82])

### Diagramme de Haigh

La courbe de Wöhler est généralement obtenue en supposant une contrainte moyenne nulle. Cette dernière peut toutefois avoir un impact important sur la durée de vie en fatigue [82]. Dans le cas des aubes de turbomachines, l'hypothèse de contrainte moyenne nulle est trop forte car elles sont soumises aux efforts centrifuges ainsi qu'aux efforts aérostatiques dus à la pression et à la viscosité : il est préférable d'utiliser lors de la conception des outils prenant en compte la contrainte statique. Le diagramme de Haigh propose de l'intégrer directement dans l'analyse de durée de vie de la pièce (voir Figure I.12). Il est utilisé pour tracer des courbes de contrainte dynamique  $\sigma_d$  en fonction de la contrainte statique  $\sigma_s$  pour différentes configurations. Par exemple, la droite de Goodman relie la limite de contrainte en fatigue pour une contrainte moyenne nulle à la contrainte de rupture statique  $\sigma_r$  ; la courbe de Söderberg relie la limite de contrainte en fatigue pour une contrainte moyenne nulle à la contrainte de limite élastique  $\sigma_e$ . Ces courbes ne sont pas les seules à pouvoir figurer sur le diagramme de Haigh, le lecteur est invité à se référer à [82] pour plus d'informations. La zone la plus sécuritaire du diagramme de Haigh est la surface située sous la courbe de Söderberg.

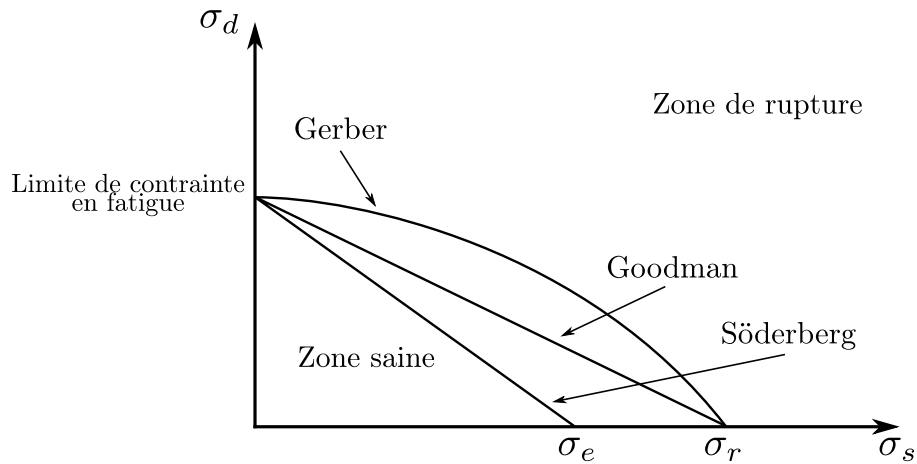


FIGURE I.12 – Diagramme de Haigh (adaptée de [82])

Remarque : les courbes sur le diagramme de Haigh sont généralement tracées pour un nombre de  $10^7$  cycles de vie.

Les outils que nous venons de voir concernent essentiellement les contraintes dans la structure. Cependant, dans un cadre de déformations élastiques, les contraintes sont reliées linéairement aux déformations selon la loi de Hooke. Ainsi, il peut être intéressant dans les phases de conception de privilégier des designs et des points de fonctionnement où les amplitudes vibratoires sont limitées afin de réduire les contraintes dynamiques. Dans ce cadre, le diagramme de Campbell est un outil fournissant des indications sur les régimes de fonctionnement où de grandes amplitudes de vibration sont attendues.

### Diagramme de Campbell

Nous avons vu précédemment que les sollicitations de la structure relevaient de la réponse forcée ou de la réponse libre. Dans le cadre de la réponse forcée et pour des phénomènes synchrones, il arrive que les fréquences des modes de déformation linéaires des aubes coïncident avec des multiples de la fréquence de rotation de la roue aubagée. Ces multiples sont appelés ordre moteur, ou encore Engine Order (EO) et sont présents naturellement pour les différents phénomènes mentionnés en sous-section I.2.2. Lorsqu'une coïncidence se produit entre un mode et un ordre moteur, on se place sur un point de résonance (ou proche résonance pour un système dissipatif [150]) : dans les deux cas, un haut niveau vibratoire est attendu pour une excitation donnée. Ces points de coïncidence sont inévitables sur un système réel, il est donc capital dès les phases de conception de les placer sur des points de fonctionnement éloignés du fonctionnement nominal ou de concevoir des pièces pouvant résister aux amplitudes de vibration atteintes sur les coïncidences. Le diagramme de Campbell, illustré en Figure I.13, permet de visualiser les points de coïncidence entre les ordres moteur représentés en bleu et les fréquences de vibration des modes représentées en rouge.

Nous venons de voir un ensemble d'outils utiles à la conception des roues aubagées de compresseur. Si ces outils sont particulièrement employés pour l'étude de phénomènes de réponse forcée, ils ne donnent en revanche pas beaucoup de critères de dimensionnement pour les phénomènes



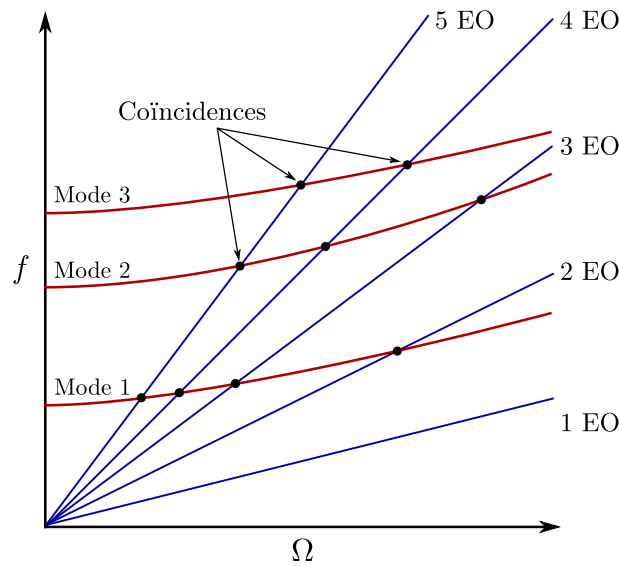


FIGURE I.13 – Diagramme de Campbell

d'instabilité aéroélastiques. Dans le cas du flottement, le critère de fréquence réduite a été utilisé pour prédire des conditions propices à l'apparition d'instabilités.

### Fréquence réduite

La fréquence réduite est un rapport de durée entre la période  $T$  d'un mouvement de structure oscillante et la durée que mettra une particule fluide à parcourir une distance de l'ordre de la dimension caractéristique  $d$  de la structure. Supposons un écoulement unidirectionnel à la vitesse  $u$ . La fréquence réduite s'écrit, d'après [177] :

$$f_r = \frac{2\pi d}{2T u} = \frac{2\pi f d}{2u} = \frac{\omega d}{2u} \quad (\text{I.1})$$

Ce rapport peut aussi être vu comme un rapport entre la dimension caractéristique de la structure  $d$  et la longueur de la perturbation  $u \times T$  générée par son mouvement dans le fluide (voir Figure I.14).

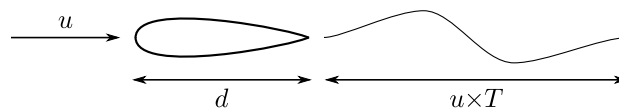


FIGURE I.14 – Interprétation de la fréquence réduite (adaptée de [153])

La fréquence réduite permet de caractériser trois régimes de couplage aéroélastique :

- $f_r \ll 1$  : le fluide n'est pas influencé par le mouvement de la structure. On se place dans une situation quasi-statique dans le sens où la structure est considérée comme immobile et où le fluide conserve ses caractéristiques au cours du temps. C'est le domaine de la mécanique du vol ;



- $f_r \sim 1$  : la structure et le fluide ont des temps caractéristiques d'évolution du même ordre de grandeur. On obtient un couplage fort entre les deux systèmes et des phénomènes instables sont susceptibles d'apparaître (flottement, "lock-in");
- $f_r \gg 1$  : l'écoulement fluide est très instationnaire. Une cellule fluide s'écoulant autour de la structure verra plusieurs fois la période de la structure.

Il est indiqué dans Srinivasan [153] que l'apparition du flottement a été corrélée dans plusieurs études expérimentales à des valeurs de fréquence réduite comprises entre 0.4 et 0.7.

Une instabilité se caractérise par l'amplification spontanée de toute perturbation apparaissant dans le système en question. Cette amplification est à priori non bornée, bien que des phénomènes non-linéaires puissent conduire à des situations de vibrations stabilisées. Nous aborderons cette dernière situation dans la sous-section I.4.3. Nous allons maintenant nous concentrer sur le phénomène de flottement de soufflante.

### 3 Instabilités aéroélastiques des étages de compresseur

Comme abordé précédemment, le flottement de soufflante est une instabilité de couplage aéroélastique entre la roue aubagée et l'air qui l'entoure. Nous allons nous intéresser aux mécanismes physiques rendant le système fluide structure instable, dans le cas du flottement de décrochage transsonique (Zone ② sur la Figure I.10).

#### Contribution de l'aérodynamique sur la stabilité aéroélastique

Une étude expérimentale réalisée par Stargardter en 1979 [154] sur une soufflante de 32 aubes a dégagé de premières tendances sur les mécanismes provoquant le flottement. Certains phénomènes ont été clairement mis en évidence au cours de l'étude. Notamment, les plus grandes amplitudes de pression instationnaire ont été observées en tête de pale, jusqu'à 25% de corde à partir du bord d'attaque. De plus, le flottement n'est apparu que pour des configurations où un choc apparaissait (aucun flottement n'a été observé avec un écoulement subsonique). À partir de là, d'autres hypothèses allant dans le sens des observations ont été formulées sur les mécanismes à l'origine du flottement. Cependant, les données présentées sont insuffisantes pour les confirmer ou les infirmer. Parmi ces hypothèses figurent le rôle que peuvent avoir respectivement un décollement de couche limite et une onde de choc dans un contexte où ils peuvent osciller sur la peau de l'aube. Leur oscillation pour un mouvement de l'aube pourrait en effet fournir de l'énergie au mouvement et être une source d'instabilité.

Une étude numérique réalisée par Isomura et Giles en 1998 [73] sur une soufflante transsonique à 22 aubes indique que le choc a un rôle prépondérant sur le départ en flottement. En particulier, le comportement oscillatoire du choc qui alterne entre détachement et rattachement à la paroi est propice à un échange énergétique déstabilisant du fluide vers l'aube. Les auteurs indiquent que ce mécanisme est à l'origine du flottement, tandis que le décrochage se produisant en aval du choc a en revanche tendance à stabiliser le système. Cette étude fournit de premiers éléments d'analyse quant aux suppositions formulées dans l'étude de Stargardter [154]. En outre, cette étude indique que le bord d'attaque de l'intrados de l'aube est la zone déstabilisée par le couplage.

Une autre étude numérique réalisée par Aotsuka *et al.* en 2008 [11] sur une soufflante transsonique de 18 aubes montre qu'une forte interaction entre le choc présent sur l'extrados et la couche limite se produit au fur et à mesure que l'on augmente le taux de compression. Cette interaction est à l'origine d'un décollement de la couche limite à partir du pied du choc. De plus, ils montrent que le flottement est fortement conditionné par cette interaction. En particulier, ils observent que l'onde de choc est déstabilisante, tandis que la zone décollée en aval est stabilisante. Une étude ultérieure réalisée par Aotsuka et Murooka en 2014 [10] fournit les mêmes tendances. Ces résultats sont donc en accord avec ceux d'Isomura et Giles [73], à l'exception que l'extrados est ici la zone déstabilisée.

La littérature s'accorde sur le fait qu'une interaction entre le choc et la couche limite est un mécanisme menant à des échanges énergétiques entre le fluide et la structure. Cependant, les conclusions ne sont pas toujours les mêmes. Dans l'étude de Vahdati *et al.* de 2011 [163], le rôle du choc et celui de la couche limite sont inversés par rapport aux conclusions de Aotsuka *et al.* [11] et de Aotsuka et Murooka [10] : le choc est stabilisant, tandis que le décollement induit par l'interaction est déstabilisant. Ce constat est notamment formulé par Dong *et al.* [54], qui émettent l'hypothèse que cet écart sur les deux interprétations résulte de la considération de deux modes tournants en sens inverses. Pour de tels modes, ils montrent que les effets du choc et de la couche limite décollée sur la stabilité sont inversés. Nous reviendrons sur la notion de mode tournant dans la section II.4.

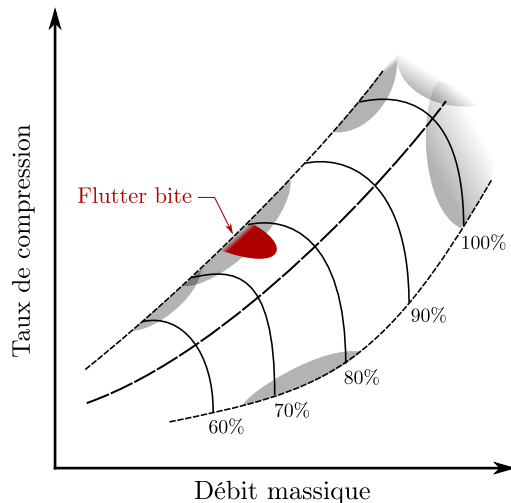
Bien que les conclusions ne soient pas exactement les mêmes entre les différentes sources, toutes mettent en évidence que l'interaction entre le choc et la couche limite en tête de pale est un mécanisme physique au sein duquel des échanges d'énergie apparaissent entre le fluide et la structure. Ces échanges d'énergie peuvent déstabiliser le système et placer la soufflante en régime de flottement.

### Couplage acoustique entre la soufflante et son environnement

Des études récentes ont mis en évidence que des zones d'instabilité pouvaient apparaître sur des conditions de fonctionnement très localisées sur le diagramme caractéristique d'une soufflante. Ce phénomène porte le nom de *flutter bite* et est illustré en Figure I.15.

Une étude publiée par Vahdati *et al.* [162] montre qu'une interaction entre la soufflante et la nacelle peut causer le phénomène de *flutter bite*. En particulier, cette étude met en évidence que les vibrations de la soufflante peuvent dans certaines conditions de fonctionnement être la source d'ondes acoustiques remontant l'entrée d'air du moteur. Selon la fréquence de ces ondes, celles-ci peuvent soit être atténuées dans l'entrée d'air et prendre ainsi la forme d'ondes évanescentes, soit s'y propager librement. L'étude montre la corrélation entre l'apparition du phénomène de *flutter bite* et la présence d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air.

Il est indiqué dans Vahdati *et al.* [163] puis Vahdati *et al.* [164] que les effets de l'acoustique sur la stabilité aéroélastique sont indépendants des effets aérodynamiques évoqués en sous partie I.3. Les phénomènes peuvent se combiner et déstabiliser le système. Par ailleurs, le mécanisme d'interaction acoustique entre la soufflante et la nacelle est expliqué plus en détails dans Vahdati *et al.* [164]. Pour des perturbations générées au delà d'une fréquence appelée fréquence de coupure de conduite, la propagation d'ondes acoustiques est possible dans l'entrée d'air. Une fraction

FIGURE I.15 – Illustration de la poche d’instabilité de *flutter bite*

de celles-ci se réfléchissent sur l’entrée d’air et retournent sur la soufflante. Il est montré que le déphasage entre l’onde émise par la soufflante et l’onde réfléchie revenant sur la soufflante est le paramètre clé indiquant le caractère déstabilisant de l’acoustique sur le système aéroélastique.

Sur la base de ces travaux, un critère simple proposé par Zhao *et al.* [180] permet d’identifier les conditions défavorables dans lesquelles l’acoustique a un impact négatif sur la stabilité. Ce critère est nommé le *flutter index*, et se définit comme :

$$\mathcal{F} = |\mathcal{R}| \times \sin(\Delta\Phi) \quad (\text{I.2})$$

où  $\mathcal{R}$  et  $\Delta\Phi$  sont respectivement le rapport d’amplitude complexe et le déphasage entre l’onde émise et l’onde réfléchie évalué au bord d’attaque de la soufflante. Ce déphasage s’écrit comme :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{\text{émis}} + \arg(\mathcal{R}_{\text{entrée}}) + \Delta\Phi_{\text{réfléchi}} \quad (\text{I.3})$$

avec  $\Delta\Phi_{\text{émis}}$  et  $\Delta\Phi_{\text{réfléchi}}$  les déphasages respectifs induits par les parcours des ondes émises et réfléchies, et  $\arg(\mathcal{R}_{\text{entrée}})$  la phase du coefficient complexe de réflexion de l’entrée d’air.

Les conditions de propagation acoustique étant indépendantes des effets aéroélastiques déstabilisant la soufflante (interaction choc/couche limite), il est possible d’étudier la propagation acoustique et ses conséquences sur la stabilité aéroélastique de manière indépendante. Un solveur acoustique peut par exemple être employé pour caractériser plusieurs formes de nacelle ou d’entrée d’air et avoir ainsi une mesure de l’impact de l’acoustique sur la stabilité.

L’instabilité de flottement peut être vue comme un transfert d’énergie positif du fluide vers les aubes de soufflante. Sur un système réel cependant, de nombreux phénomènes sont à l’origine de dissipation énergétique. La question est alors de savoir si la présence de ces phénomènes et des dissipations énergétiques qui les accompagnent peut avoir un effet sur la stabilité aéroélastique en dissipant l’énergie fournie par le fluide. Nous allons maintenant voir les sources de dissipation dans les roues aubagées.

## 4 Sources d'amortissement dans les roues aubagées

Il est possible de considérer différentes classifications de sources d'amortissement dans le cadre des turbomachines. Dans la littérature, une classification récurrente distingue les sources d'amortissement passives d'une part et les sources actives d'autre part. La première catégorie consiste à mettre en place un dispositif de dissipation spontanée sur le système. Par dissipation spontanée, il est entendu que la dissipation se produira d'elle même lors de la mise en marche du système sans intervention externe. La deuxième catégorie consiste à mettre en place un dispositif de contrôle actif qui produira de la dissipation. Ce genre de dispositif tient compte du fonctionnement de la machine et s'adapte en conséquence pour réaliser la dissipation : un apport énergétique est donc nécessaire. Si les dispositifs de contrôle actifs ont l'avantage de pouvoir opérer sur une plage de fonctionnement étendue du système, ils peuvent induire des contraintes de dimensionnement supplémentaires rendant leur déploiement difficile (ajout de masse, nécessiter d'installer des systèmes électriques sur des parties tournantes). De plus, la possibilité de panne d'un tel système pose la question de sa certification : il est nécessaire de savoir si un défaut de fonctionnement peut mettre en danger les utilisateurs ou le produit lui même. Les dispositifs passifs ont quant à eux l'avantage d'être souvent plus simples à mettre en place et de ne pas être sujets aux pannes. Ils doivent toutefois être conçus pour un point de fonctionnement précis. Les systèmes semi-actifs permettent d'atteindre un compromis en proposant des niveaux de performance approchant à ceux d'un système actifs pour une fraction de la consommation énergétique d'un tel système.

Une autre classification envisageable est de distinguer les sources d'amortissement naturelles de celles apportées intentionnellement lors des phases de conception. Cette classification se distingue de la précédente, puisque une source d'amortissement passive peut correspondre à de l'amortissement naturel tandis qu'une autre à de l'amortissement intentionnel. Nous considérerons dans les sous sections suivantes la classification selon sources passives ou sources actives.

### 4.1 Amortissement par dispositifs passifs

Une première source de dissipation passive est celle due aux assemblages mécaniques des roues aubagées. Bien que ces assemblages puissent prendre différentes formes (voir Figure I.16), le phénomène responsable de la dissipation énergétique est le frottement mécanique entre les pièces.

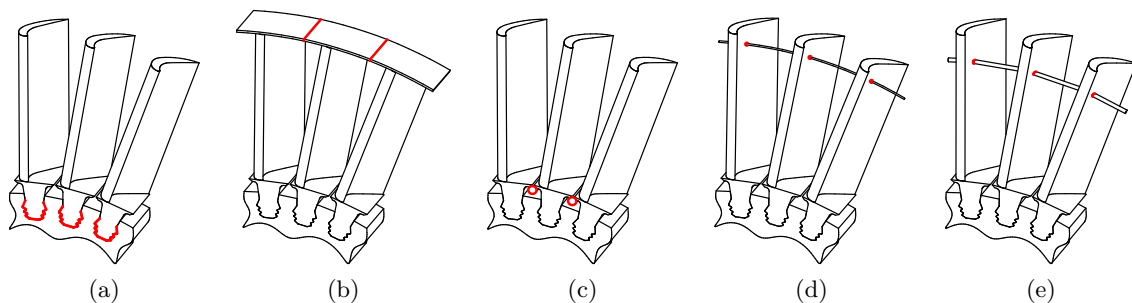


FIGURE I.16 – Zones de dissipation dans les assemblages mécaniques de roues aubagées : (a) contact aube disque, (b) contact entre les talons, (c) amortisseurs sous plateforme, (d) cables amortisseurs, (e) tiges rigides amortissantes (illustration d'après [80])

Dans le cas où les aubes sont apportées sur le disque par assemblage (en opposition aux structures monoblocs), les interfaces de contact entre les aubes et le disque forment une zone de dissipation énergétique naturelle. La mise en vibration des aubes peut être à l'origine de microglissements au niveau de ces interfaces qui vont provoquer la dissipation énergétique. Des études numériques et expérimentales (Nacivet [105], Petrov et Ewins [121], Charleux *et al.* [34], Zucca *et al.* [181]) s'intéressent aux effets de ce frottement sur la dynamique des aubes de compresseur. Notamment, il est montré que l'amortissement apporté par le frottement mécanique évolue en fonction de l'amplitude des sollicitations appliquées aux aubages (et donc en fonction de leur amplitude de vibration). Il est également montré que l'amortissement apporté par frottement est bien supérieur à l'amortissement naturel intrinsèque aux structures étudiées. Dans le même esprit, on peut retrouver des interfaces de contact susceptibles d'être des sources de dissipation entre les talons ou encore les nageoires des aubes de turbine [98].

Pour ces différents exemples, les interfaces de contact sont naturelles dans le sens où elles résultent des choix de conception du système mécanique considéré. Ces interfaces ne répondent pas nécessairement à un besoin direct formulé dans le cahier des charges concernant la présence de technologies amortissantes. Ainsi, elles peuvent ne pas apporter suffisamment d'amortissement par rapport à un tel besoin. Il est alors courant pour les constructeurs de créer intentionnellement de nouvelles interfaces de contact pour générer de la dissipation énergétique. Ces technologies amortissantes peuvent prendre différentes formes : on retient notamment l'usage des joncs de friction [88, 155], d'amortisseurs sous plateforme [178], de câbles amortisseurs [71] ou encore de tiges rigides amortissantes [158].

Une autre approche passive pour apporter de l'amortissement à la structure consiste à employer des matériaux aux propriétés dissipatives. Dans cette optique, de nombreux brevets exploitant les propriétés des matériaux viscoélastiques ont vu le jour. Les matériaux en question peuvent être employés de différentes manières : les brevets US Pat. 3, 357, 850 [13] et US Pat. 9, 541, 061 B2 [145] proposent l'emploi de ces matériaux comme une couche appliquée sur l'aube ; le brevet US Pat. 4, 594, 761 [103] propose d'implémenter le long d'aubes creuses une ou plusieurs colonnes composées de fluoroélastomère ; le brevet US Pat. 6, 102, 664 [109] propose un revêtement de surface en matériau viscoélastique pour les interfaces de frottement entre les aubes et le disque.

Certaines approches font également appel à des fluides pour réaliser de la dissipation énergétique de manière passive. Mathies *et al.* [97] ont employé un amortisseur à film d'air pour réduire les niveaux vibratoires d'une structure creuse représentant une aube. Un autre exemple de ce genre de technologie amortissante est fourni par Zhang *et al.* [179] dans un contexte éolien, où un réservoir partiellement rempli de fluide est placé en tête des pales d'une éolienne. La présence de ce fluide et le ballonnement qui résulte de son interaction avec le mouvement de la pale permettent de dissiper l'énergie de vibration, si bien qu'une éolienne en régime de flottement peut être stabilisée par ce dispositif. Ce dernier exemple peut être placé dans la catégorie des Tuned Mass Damper (TMD), qui désignent une masse additionnelle reliée à la structure à l'aide d'un dispositif raidissant et amortissant. La mise en mouvement de la masse permet alors d'atténuer la réponse de la structure sur un ou plusieurs modes d'intérêts selon le réglage des raideurs. Si les TMD permettent d'atténuer la réponse de la structure selon quelques modes prédéfinis, on peut leur préférer leur version non-linéaire, nommés Nonlinear Energy Sink (NES). Ces dispositifs ont l'avantage de pouvoir fonctionner pour tous les modes de la structure grâce

aux non-linéarités du dispositif qui couplent ces modes. Celles-ci sont introduites généralement grâce à des raideurs non-linéaires [174].

Une dernière famille de solutions passives regroupe les amortisseurs à impacts. Le principe de ce genre de dispositif consiste à mettre en place des cavités dans une structure en vibration, partiellement remplies de particules libres (des billes par exemple). Lorsque la structure vibre, les particules s'entrechoquent et il en résulte une diminution des niveaux vibratoires par dissipation énergétique [35, 57, 77]. Les études sur ce type de système dans un contexte de turbomachine ne sont toutefois pas nombreuses.

## 4.2 Amortissement par dispositifs actifs

Les dispositifs de contrôle actif de l'amortissement peuvent impliquer des contraintes de conception importantes. Elles permettent en revanche d'obtenir des réductions majeures d'amplitudes de vibration. Un premier exemple de dispositif de contrôle actif consiste à employer des actionneurs piézoélectriques pouvant se déformer sous l'effet d'un champ électrique. Choi *et al.* [37] montrent expérimentalement qu'en utilisant une paire capteur/actionneur piézoélectrique sur une poutre, une réduction de l'amplitude de vibration de 83% a été observée sur le troisième mode de flexion. Un système de contrôle électrique coûteux en énergie est toutefois nécessaire, et il devient encore plus compliqué de considérer une telle installation sur une machine tournante de par la gestion de l'interface rotor stator.

Une autre approche repose sur l'utilisation de matériaux aux propriétés rhéologiques variables selon le champ électromagnétique dans lequel ils se placent. Ainsi, une étude réalisée par Hasheminejad *et al.* [72] propose d'employer des structures creuses remplies de fluide électrorhéologique pour contrôler activement le niveau de vibration de la structure. Un tel fluide a en effet la particularité de pouvoir se rigidifier sous l'action d'un champ électrique. Ils montrent notamment qu'il est possible de stabiliser un système aéroélastique en régime de flottement en utilisant une loi de commande du champ électrique par mode glissant. Une étude plus récente proposée par Bornassi *et al.* [22] emploie un fluide magnétorhéologique (dont les propriétés rhéologiques changent selon le champ magnétique ambiant) pour stabiliser un système sujet au flottement.

L'ensemble des processus d'amortissement, qu'ils soient passifs, semi-actifs ou actifs, permettent de réduire substantiellement le niveau vibratoire. Une autre source de dissipation, très présente dans les machines tournantes, est celle engendrée par le frottement entre les pieds d'aube et le disque. C'est cet aspect que nous allons développer et en particulier son impact sur la stabilité aéroélastique des roues aubagées.

## 4.3 Effets du frottement aube disque sur la stabilité aéroélastique

Comme nous avons pu le voir en sous-section I.4.1, les interfaces de contact entre les aubes et le disque sur lequel elles sont montées forment une interface naturelle de dissipation énergétique. Dès lors, il est possible que ce frottement puisse avoir un impact sur la stabilité aéroélastique du système étudié. Les premières études traitant des effets du frottement aube disque sur la stabilité aéroélastique d'une roue aubagée semblent remonter aux travaux de Sinha et Griffin [146, 147]. Leur travaux se reposent sur l'analyse mathématique de modèles phénoménologiques pour établir de premiers résultats. La Figure I.17 illustre ce genre de modèle.

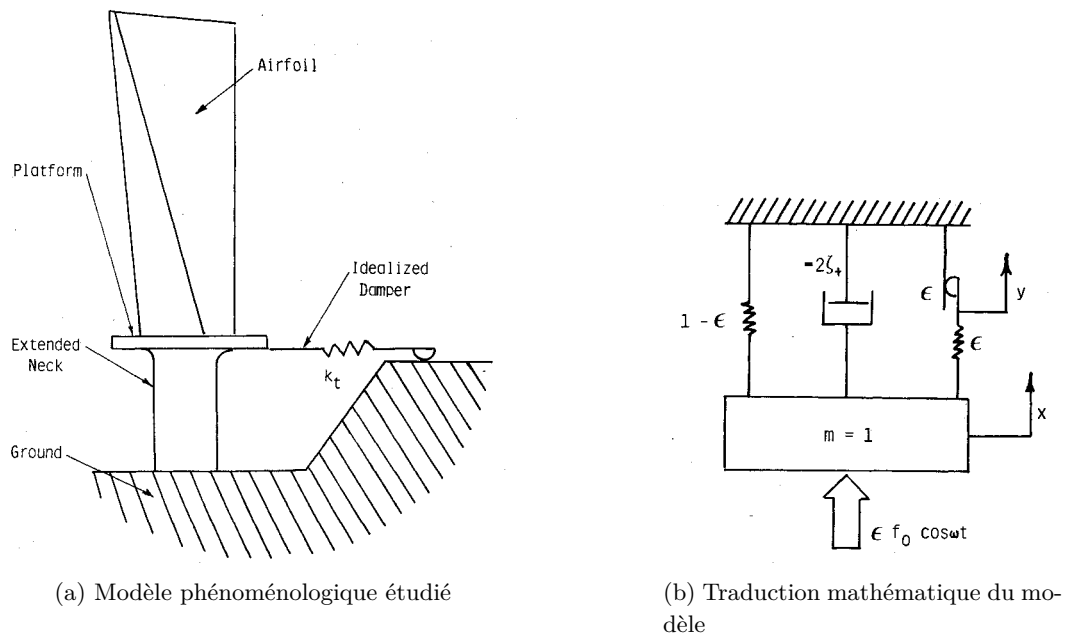


FIGURE I.17 – Illustration d’une aube avec frotteur en configuration *blade-to-ground* (d’après [146])

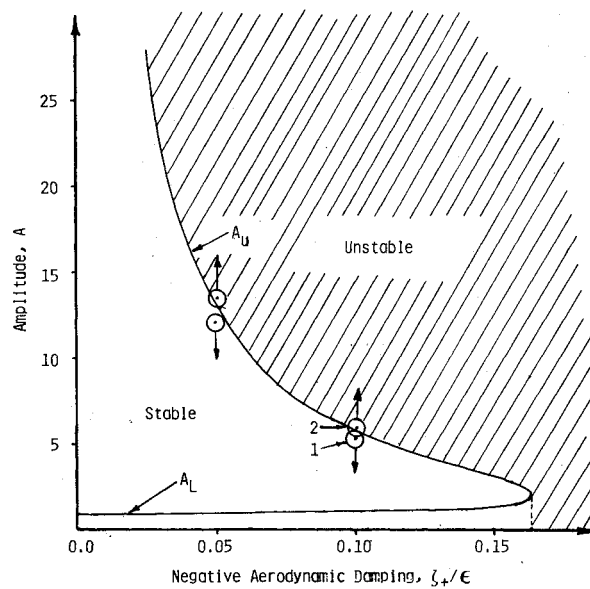


FIGURE I.18 – Illustration de la courbe de cycles limites pour le modèle phénoménologique (d’après [146])



Un résultat majeur fourni par Sinha et Griffin [146] est que les efforts non-linéaires générés par la présence du frotteur peuvent stabiliser un système en régime de flottement sans forçage externe. Il est en effet possible d'atteindre un régime d'oscillations périodiques appelé *cycle limite d'oscillations* (ou LCO pour *Limit Cycle Oscillations*) grâce aux non-linéarités de friction. Ces non-linéarités étant déclenchées pour des amplitudes de vibrations de plus en plus importantes, on passe d'un état instable à faible amplitude à un état stabilisé à grande amplitude.

La Figure I.18 illustre la courbe de cycles limites pour différentes conditions d'instabilité aéroélastique en absence de chargement externe. Cette instabilité est indiquée en abscisse par un scalaire appelé amortissement aérodynamique. Plus la valeur de ce scalaire est importante, plus le système est instable. Une définition plus approfondie de l'amortissement aérodynamique sera fournie en section II.5.

L'existence de cette courbe traduit l'équilibre entre l'énergie apporté au système par le fluide et l'énergie dissipée par le frottement non-linéaire pour un amortissement aérodynamique donné. Si on se place à gauche de la courbe, on est dans une situation où l'amplitude de vibration est importante et où on dissipe plus d'énergie par frottement qu'on n'en reçoit par le fluide : le système est stable et les amplitudes de vibration diminueront jusqu'à atteindre l'équilibre donné par la courbe. Si on se place à droite de la courbe (partie hachurée de la Figure I.18), on n'est plus sur l'équilibre énergétique et on reçoit plus d'énergie du fluide qu'on en dissipe par frottement : le système est instable et les amplitudes de vibration augmenteront.

Un résultat important fourni par la Figure I.18 est que les frottements non-linéaires ne peuvent pas toujours rendre le système aéroélastique stable. Il existe en effet une certaine valeur critique de l'amortissement aérodynamique au delà de laquelle le système aéroélastique est toujours instable, malgré la présence des non-linéarités de friction. Pour une valeur d'amortissement aérodynamique inférieure à cette valeur critique, on observe alors qu'il existe toujours deux solutions périodiques car la courbe d'équilibre énergétique est coupée deux fois. L'une de ces solutions est stable et systématiquement à faible amplitude, tandis que l'autre est instable et à une amplitude plus importante.

La présence de ces deux solutions peut être expliquée par des considérations énergétiques : en considérant que les efforts aérodynamiques exercés sur les aubes sont linéaires par rapport au mouvement qui les engendre, le travail associé évolue avec le carré de l'amplitude de vibration. D'autre part, l'énergie dissipée par un frotteur simple selon une loi de Coulomb (voir paragraphe 4.4.2) évolue de manière linéaire avec l'amplitude de glissement. Ainsi, à très faible amplitude, le fluide apporte de l'énergie qui n'est pas dissipée car le frotteur est bloqué. Quand l'amplitude augmente, la dissipation apparaît et devient plus importante que l'énergie fournie par le fluide : un premier LCO est atteint à l'équilibre des deux énergies. Au delà d'une certaine amplitude, l'accroissement quadratique du travail des efforts aérodynamiques redevient prépondérant devant le travail dissipé par friction : un second LCO est atteint sur l'équilibre à plus grande amplitude. La Figure I.19 illustre cette représentation des cycles limites : les courbes d'évolution du travail des forces aérodynamiques  $W_{aero}$  en pointillés et des forces de frottement  $W_{micro}$  (micro-glissement) et  $W_{macro}$  (macro-glissement) en trait plein se coupent aux cycles limites. La notion de micro-glissement est abordée plus en détail dans le paragraphe 4.4.2.



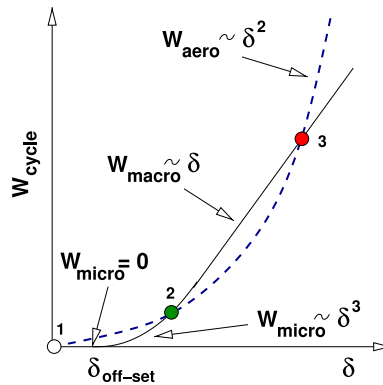


FIGURE I.19 – Représentation énergétique des cycles limites. En trait plein : énergie dissipée par frottement sec en fonction de l'amplitude d'oscillation périodique d'un frotteur ; en pointillés : travail des efforts aérodynamiques en fonction de l'amplitude d'oscillation périodique d'une aube (d'après [42])

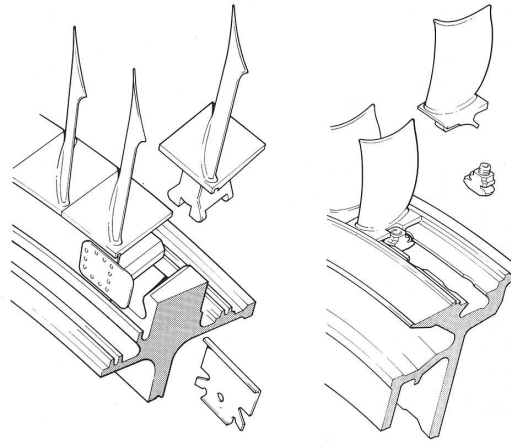


FIGURE I.20 – Technologies d'accroches classiques aube disque pour les compresseurs : accroche queue d'arronde à gauche, accroche marteau à droite (d'après [139])

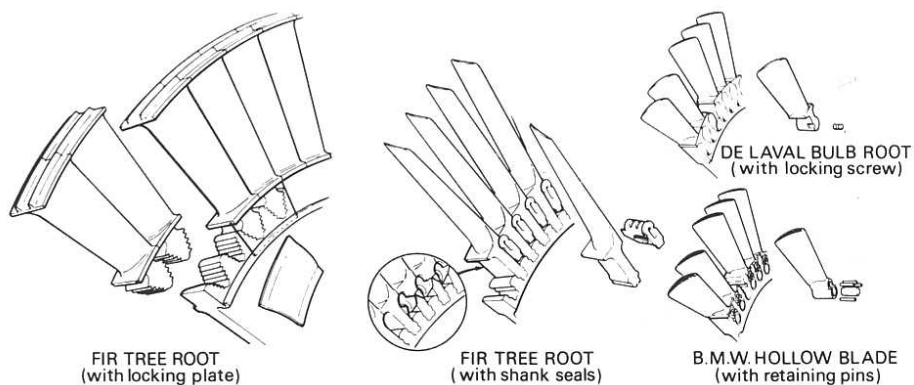


FIGURE I.21 – Technologies d'accroches classiques aube disque pour les turbines (d'après [139])

Un dernier résultat notable montré par Sinha et Griffin [146] concerne la stabilité du système aéroélastique présenté en Figure I.17 lorsqu'un chargement extérieur est pris en compte. Sous l'hypothèse que ce forçage est appliqué à la fréquence naturelle de la structure, ils montrent que pour une amplitude d'excitation supérieure à une valeur critique, la zone stable en Figure I.18 disparaît totalement. Dans cette situation, malgré la dissipation énergétique en pied d'aube, l'énergie fournie par le fluide est trop importante et un état stable d'oscillations n'est plus atteignable. Ainsi, dans une situation concrète où un LCO est attendu pour une configuration donnée, la présence d'une perturbation telle qu'une ingestion de vortex pourrait rendre le système instable. Dans la suite du mémoire, nous ne considérerons aucun forçage externe sur les systèmes étudiés.

Ces résultats préliminaires mettent en évidence des phénoménologies quant aux effets du frottement sec sur la stabilité aéroélastique d'une roue aubagée, mais utilisent une représentation très simplifiée du système aube disque. En pratique, il existe cependant de nombreuses technologies d'accroches pour assembler un système aube disque selon la fonction de la roue aubagée. Les Figures I.20 et I.21 illustrent les quelques technologies d'accroches classiquement utilisées respectivement pour les compresseurs et les turbines. Pour ce type d'accroche, des études plus récentes ont étudié le rôle du frottement aube disque sur la dynamique non-linéaire du système aéroélastique pour des géométries représentatives de l'état de l'art.

Dans un cadre de réponse forcée, Tokar *et al.* [159] et Charleux *et al.* [34] ont par exemple montré expérimentalement et numériquement les effets du frottement non-linéaire sur la dynamique du système aube disque. Ces études réalisées en absence d'aérodynamique mettent notamment en évidence les saturations en amplitude de vibration dues aux frottements non-linéaires : là où pour un système linéaire, l'amplitude des oscillations normée par l'amplitude de forçage ne change pas selon l'amplitude de chargement, une décroissance est observée à la résonance pour la réponse non-linéaire (voir Figure I.22). En d'autres termes, une partie de l'énergie fournie au système mécanique par forçage est dissipée par le frottement non-linéaire.

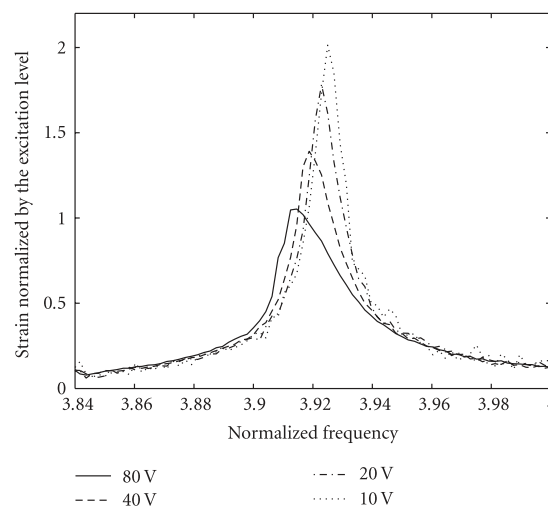


FIGURE I.22 – Évolution de la réponse non-linéaire normée par l'amplitude de forçage d'un système frottant aube disque pour différentes amplitudes de forçage (d'après [34])

Ces études montrent que de la dissipation énergétique par frottement a lieu sur un système aube disque typique de l'état de l'art. Cette dissipation est donc susceptible d'avoir un impact sur la stabilité aéroélastique. Les effets de la dissipation énergétique par frottement sec sur la stabilité aéroélastique d'une roue aubagée industrielle a été étudiée dans de nombreuses configurations. Toutefois, le cas du frottement aube disque n'est pas majoritaire dans la littérature. En effet, des études telles que celles de Berthold *et al.* [18, 19] proposent par exemple d'étudier l'effet du frottement sur le talon des aubes de turbine, tandis que Petrov [118] étudie le frottement entre les nageoires des aubes d'une roue aubagée. Les seules études trouvées traitant d'une configuration industrielle avec frottement en pied d'aube sont une étude de Lassalle et Firrone [84] sur turbine BP et le mémoire de thèse de Lassalle [83]. Les méthodes et résultats obtenus sont cependant transposables d'une configuration à l'autre.

Dans l'étude de Lassalle et Firrone [84], une méthode numérique a été développée pour prédire l'amplitude d'un LCO pour une turbine basse pression instable en présence de non-linéarités de frottement en pied d'aube. Cette méthode a été confrontée et validée à l'aide de résultats expérimentaux. La Figure I.23 illustre ces résultats.

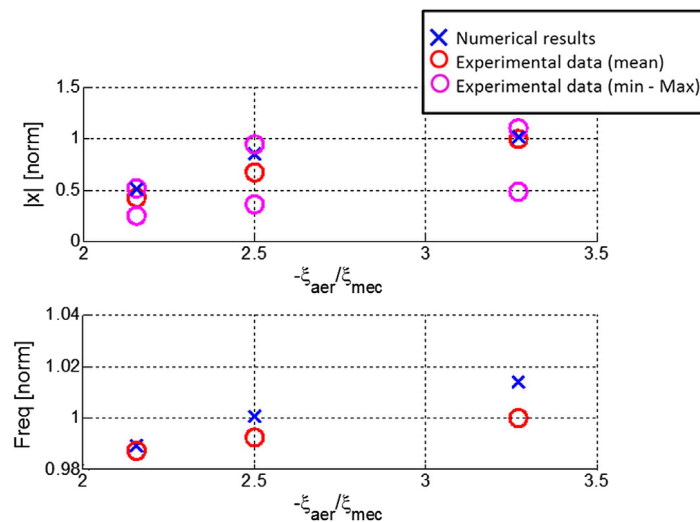


FIGURE I.23 – Comparaison des résultats numériques de calcul de LCO aux mesures expérimentales (d'après [84])

Nous venons de voir dans cette sous-section que le frottement non-linéaire, notamment en pied d'aube, pouvait permettre à un système aéroélastique instable d'atteindre un régime d'oscillations stable appelé cycle limite d'oscillations. Dans l'optique de développer une méthode numérique pour prendre en compte ces non-linéarités de friction dans l'analyse de stabilité aéroélastique des soufflantes dans un contexte d'interaction acoustique avec l'entrée d'air, il est nécessaire de modéliser les lois de frottement et de contact. Nous allons dans la prochaine sous-section nous intéresser à la question de cette modélisation.

#### 4.4 Non-linéarités aube-disque : modélisation du contact frottant

Pour que le frottement soit possible entre l'aube et le disque, il est nécessaire que ces deux corps soient en contact. Ainsi, une modélisation du contact en plus de la modélisation du frottement est nécessaire pour caractériser la dynamique non-linéaire du système aube disque. Nous allons nous intéresser dans cette sous-section à la modélisation de ces deux aspects. Nous y

employons les notations  $\delta$  et  $F$  pour décrire respectivement les déplacements relatifs entre structures et les efforts de contacts, ainsi que les indices  $.N$  et  $.T$  pour désigner les composantes normales et tangentielles aux parois.

#### 4.4.1 Lois de contact

La modélisation du contact entre solides peut se faire à différentes échelles. En considérant une échelle macroscopique, le contact entre deux solides peut être modélisé selon une loi unilatérale dure traduisant l'impénétrabilité des solides entre eux. L'implémentation d'une telle loi dans un calcul numérique peut toutefois poser des problèmes en raison de son caractère hautement irrégulier. La Figure I.24a illustre cette loi.

D'un point de vue microscopique cependant, la topologie de la surface d'un solide n'est jamais parfaitement plane, indépendamment du traitement de surface qui y est appliqué. En pratique, ces surfaces sont composées de micro-aspérités dont les caractéristiques géométriques ne sont pas maîtrisées. Des études se sont basées sur cette représentation des surfaces pour établir des modèles de contact, notamment en considérant le contact entre micro-aspérités comme un contact entre sphères ou ellipses selon la théorie de Hertz [68, 111].

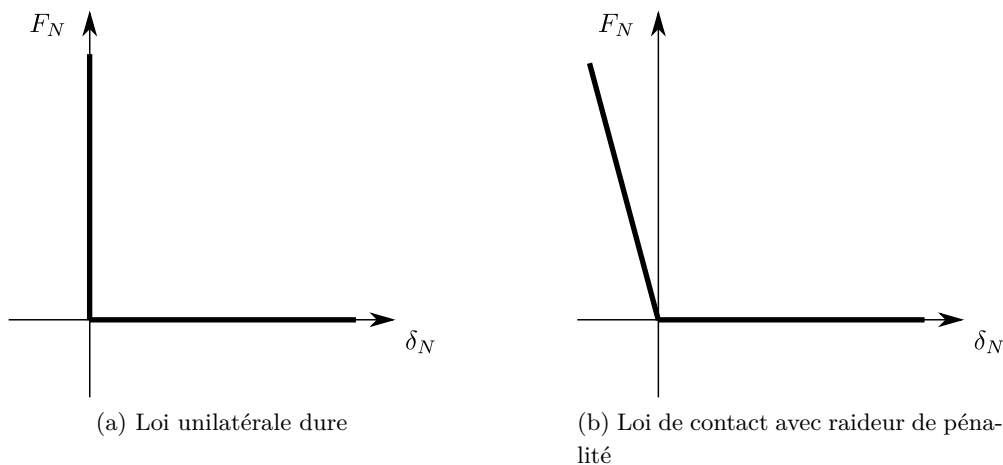


FIGURE I.24 – Illustration de lois de contact macroscopiques

Face aux difficultés numériques qu'imposent la loi de contact dure et compte tenu de la topologie microscopique des surfaces de contact, certaines études emploient une loi de contact mettant en avant une raideur de pénalité autorisant une interpénétration des structures [36, 120]. Cette loi, illustrée en Figure I.24b, permet de donner une valeur explicite de la force normale en fonction du déplacement relatif des structures. Les problèmes numériques engendrés par la loi de contact dure sont de cette manière réduits. Un argument supplémentaire fourni par certains auteurs employant cette loi [120] concerne l'interprétation physique de l'interpénétration, qui caractériserait en réalité les déformations élastiques et plastiques des micro-aspérités.

#### 4.4.2 Modèles de frottement

Les lois dictant l'évolution des efforts tangentiels de frottement entre deux solides en contact dépendent de nombreux paramètres. Notamment, la vitesse relative des structures en question, leur état de surface ainsi que le chargement normal ont un impact sur ces lois.

Il a été montré expérimentalement par Parker et Hatch [114] puis Courtney-Pratt et Eisner [43] qu'il existait deux régimes de glissement pour deux solides en contact. Le premier régime prend place lorsqu'une partie seulement de l'interface de contact entre en glissement sous l'effet d'un effort tangentiel. Cela se traduit physiquement par un ensemble de déformations élastiques et plastiques des aspérités des surfaces en contact. On parle de régime de micro-glissement. Au delà d'une certaine valeur de l'effort tangentiel, l'intégralité de la surface de contact entre en régime de glissement. On parle alors de glissement total.

Pour un chargement normal donné entre deux surfaces, la force tangentielle nécessaire pour qu'un glissement total soit observé entre les deux structures est appelée force de libération. Elle dépend du taux d'accroissement temporel de l'effort tangentiel appliqué, selon les résultats expérimentaux de Richardson et Nolle [131]. Les travaux expérimentaux de Rabinowicz [128] ont montré que la force de libération était plus importante que l'effort tangentiel nécessaire pour maintenir le glissement. Ce constat n'est toutefois pas retrouvé par les travaux expérimentaux de Parker et Hatch [114] ou de Courtney-Pratt et Eisner [43]. Il semble que le type de surface, de la lubrification ou encore des matériaux employés y jouent un rôle. Les résultats obtenus par Bristow [25] montrent que l'état de lubrification a notamment un impact.

Différents modèles de friction ont été établis sur la base des résultats expérimentaux obtenus. Les travaux de Olsson *et al.* [112] ainsi que de Pennestri *et al.* [116] proposent des revues non exhaustives de ces différents modèles. Nous aborderons dans les deux prochains paragraphes les modèles de Coulomb et de Dahl qui figurent parmi les plus connus.

### Modèle de Coulomb

Ce modèle est le plus classique, et consiste à dire que l'effort tangentiel s'oppose toujours à la vitesse relative de glissement. Il se formule mathématiquement :

$$\begin{cases} |F_T| \leq \mu_s |F_N| & ; \text{ pour } \dot{\delta}_T = 0 \\ |F_T| = \mu_d |F_N| & ; \text{ pour } \dot{\delta}_T \neq 0 \end{cases} \quad (\text{I.4})$$

où  $\mu_s$  et  $\mu_d$  sont les coefficients de frottement statique et dynamique.

Ce modèle revient à définir un cône de frottement, pour lequel le système est bloqué si l'effort tangentiel bidimensionnel est dans le cône, et en limite de glissement s'il est sur le cône. Le cône de frottement ainsi que le modèle sont représentés en Figures I.25a et I.25b. La gestion de la transition entre interfaces collées et glissantes pouvant poser des problèmes numériques, il arrive que des fonctions trigonométriques régulières soient employées pour adoucir la non-linéarité du modèle [75, 169]. Ce genre de modèle est représenté en Figure I.25c.

### Modèle de Dahl

Le modèle de Dahl [45, 46] est un modèle dynamique décrit par une équation différentielle liant l'effort tangentiel à la vitesse relative de glissement :

$$\frac{dF_T}{d\delta} = k_T \left( 1 - \frac{F_T}{\mu_d F_N} \times \text{sgn}(\dot{\delta}) \right)^i \quad (\text{I.5})$$

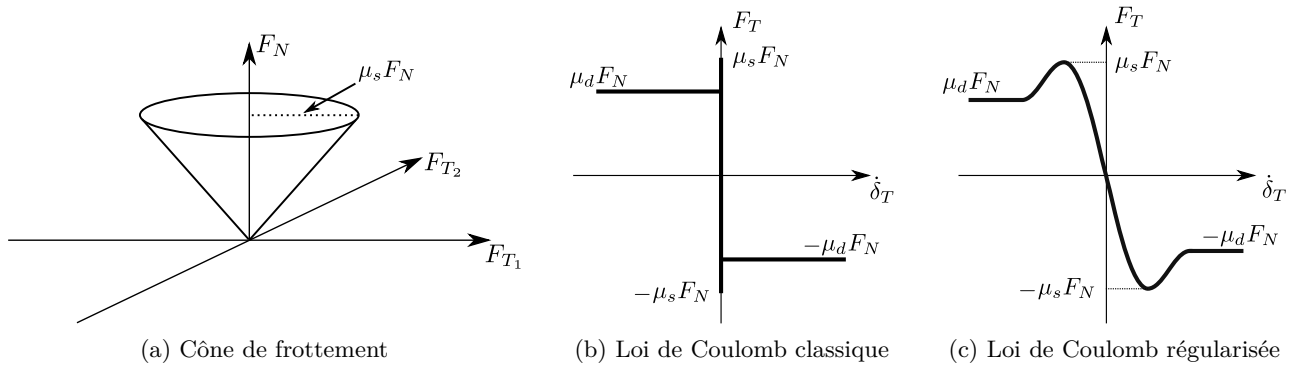


FIGURE I.25 – Modèle de Coulomb

où  $k_T$  est la raideur à l'origine telle que  $\frac{dF_T}{d\delta}(\delta = 0) = k_T$  et où  $i$  est un paramètre décrivant la forme de la fonction de frottement. Différentes valeurs peuvent être employées selon le cas étudié, plusieurs exemples sont fournis dans l'étude de Dahl [46]. Ce terme est basé sur l'observation expérimentale de l'évolution de l'effort tangentiel pour un micro-déplacement. L'intérêt de ce modèle est donc de permettre la modélisation du micro-glisement par rapport au modèle de Coulomb classique.

## 5 Bilan

Nous venons de voir dans ce chapitre des généralités sur le fonctionnement des turboréacteurs. Nous nous sommes ensuite concentrés sur la soufflante et ses interactions avec l'air traversant le moteur. Une attention particulière a été portée sur le phénomène de flottement de soufflante et sur les mécanismes propices aux échanges énergétiques entre le fluide et la structure. Nous avons finalement abordé les sources d'amortissement présentes sur les roues aubagées, celles-ci étant susceptibles de dissiper l'énergie fournie par le fluide à la structure. Une attention a été portée sur les sources passives d'amortissement présentes naturellement sur les soufflantes, en particulier sur les zones de frottement entre les aubes et le disque dans le cas d'aubes rapportées. Il apparaît que ces zones de frottement sont susceptibles de stabiliser un système placé sur un point de fonctionnement aéroélastiquement instable. Dans une optique de réduction de la masse sèche du moteur, il est prioritaire pour les motoristes de connaître précisément les sollicitations appliquées à ses différents composants. La prédiction d'un régime d'oscillations stables des aubes de soufflante dans les poches de flottement, leur amplitude et les contraintes mécaniques associées, entre dans ce cadre. Ainsi, un premier objectif visé par ce travail de thèse est de mettre en place une méthodologie d'analyse de stabilité aéroélastique des soufflantes intégrant les effets des non-linéarités de frottement aube disque. L'idée est de pouvoir prédire un LCO à l'intérieur des poches d'instabilité prédites dans un cadre où les interfaces aube disque sont collées. Un second objectif visé par ce travail de thèse est d'améliorer la compréhension des mécanismes physiques propres aux phénomènes aéroélastiques de turbomachines. Pour finir, les méthodes développées devront tenir compte des contraintes industrielles et être exploitables en bureau d'étude afin d'être intégrées aux pratiques de conception pour la conception des moteurs à venir.

Le prochain chapitre s'intéresse à la formulation mathématique du problème aéroélastique de soufflante, dans un cadre d'interaction acoustique entre celle-ci et l'entrée d'air.

## Chapitre II

# Formulation du problème aéroélastique

Ce chapitre présente la mise en équation du problème aéroélastique avec une représentation linéaire de la structure. Dans ce cadre, la mise en équation du problème fluide est dans un premier temps abordée, avec une attention particulière sur la propagation d'ondes acoustiques en conduite circulaire et la réflexion de celles-ci sur une ouverture de conduite. Par la suite, la dynamique du système mécanique est mis en équation en adoptant une approche par formulation faible. Le cas particulier des structures à symétrie cyclique est décrit. Le couplage fluide structure et les problématiques liées à ce type de modélisation sont finalement présentés, avec un cas d'application sur une soufflante typique de l'état de l'art.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Formulation du problème fluide</b>	<b>41</b>
1.1	Les équations de Navier-Stokes	41
1.2	Considérations numériques en mécanique des fluides	42
1.3	Modélisation de la turbulence	44
1.3.1	L'hypothèse de Boussinesq	44
1.3.2	Modélisation algébrique de la turbulence	45
1.3.3	Modélisation de la turbulence par équations de transport	45
<b>2</b>	<b>Propagation acoustique en conduite</b>	<b>46</b>
2.1	Notion de mode de conduit	46
2.1.1	Équation de Helmholtz convectée	46
2.1.2	Solutions de l'équation de propagation acoustique	47
2.1.3	Fréquence de coupure et relation de dispersion	51
2.2	Réflexion d'un mode acoustique sur l'entrée d'air	53
<b>3</b>	<b>Formulation du problème mécanique</b>	<b>55</b>
3.1	Cinématique d'une particule en représentation lagrangienne	55
3.2	Équations d'équilibre et lois de comportement	56
3.3	Formulation forte de la dynamique linéaire des structures	58
3.4	Formulation faible de la dynamique linéaire des structures	59
3.5	Discrétisation du problème en formulation faible	61
3.6	Réduction de modèle	64



---

<b>4</b>	<b>Modélisation des structures en symétrie cyclique</b>	<b>65</b>
4.1	Relation de propagation	65
4.2	Transformée de Fourier et analyse modale en symétrie cyclique	67
4.3	Dynamique de la structure complète en symétrie cyclique	69
4.4	Correspondance harmonique spatiale/temporelle	71
<b>5</b>	<b>Mise en œuvre du couplage fluide structure</b>	<b>73</b>
5.1	Représentation spatiale du couplage	74
5.1.1	Formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian	74
5.1.2	Transfert des déplacements entre maillages incompatibles	75
5.1.3	Déformation de maillage	76
5.2	Représentation temporelle du couplage	78
5.2.1	Hypothèse de couplage faible	79
5.2.2	Calcul en couplage dynamique	79
<b>6</b>	<b>Stabilité aéroélastique d'un modèle industriel de soufflante dans un cadre de mécanique linéaire</b>	<b>80</b>
6.1	Modèle numérique et solveur fluide	81
6.2	Calculs stationnaires	83
6.3	Calcul de la stabilité aéroélastique	85
6.3.1	Simulation en mouvement harmonique imposé	85
6.3.2	Simulation en couplage dynamique	96
6.4	Procédure de correction des caractéristiques modales du mode à sec	99
<b>7</b>	<b>Bilan</b>	<b>108</b>

---

## 1 Formulation du problème fluide

Pour décrire le mouvement des particules dans un milieu continu, deux approches sont généralement utilisées. La première consiste à suivre une particule dans son mouvement au cours du temps : on parle d'*approche lagrangienne* du mouvement, qui est décrit au sein du milieu continu par les coordonnées des particules (ou coordonnées matérielles) qui le composent. Une seconde approche consiste à ne plus décrire le mouvement selon la position des particules, mais selon une position géométrique du milieu dans le référentiel absolu : on parle alors d'*approche eulérienne*. Ces deux approches sont complètement équivalentes, puisque la vitesse d'une particule à un instant donné est égale à la vitesse du milieu aux coordonnées géométriques où se trouve la particule. L'approche lagrangienne est plus classiquement utilisée en mécanique des structures, tandis que l'approche eulérienne est préférée en mécanique des fluides.

### 1.1 Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont un ensemble d'équations permettant de décrire les fluides et leur état. Elles lient les grandeurs conservatives de l'écoulement : la densité  $\rho$ , la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{u}$  et la densité énergétique  $\rho E$ . Nous considérons ici une formulation eulérienne du mouvement, qui est caractérisé par les coordonnées géométriques du milieu, et non par les coordonnées des particules qui le composent. Ces équations s'écrivent (d'après [171]) :

*Équation de continuité - Forme conservative :*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (\text{II.1})$$

*Équation de la quantité de mouvement - Forme conservative :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho u \mathbf{u}) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho f_x \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho v \mathbf{u}) &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho f_y \\ \frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho w \mathbf{u}) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho f_z \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

*Équation de l'énergie - Forme conservative :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho E \mathbf{u}) &= \rho \dot{q} - \frac{\partial j_{th,x}}{\partial x} - \frac{\partial j_{th,y}}{\partial y} - \frac{\partial j_{th,z}}{\partial z} \\ &\quad - \frac{\partial u p}{\partial x} - \frac{\partial v p}{\partial y} - \frac{\partial w p}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial u \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial u \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial u \tau_{zx}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial v \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial v \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial v \tau_{zy}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{\partial w \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial w \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial w \tau_{zz}}{\partial z} + \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

où  $\vec{\nabla} \bullet$  est l'opérateur gradient défini en repère cartésien par :

$$\vec{\nabla} \bullet = \frac{\partial \bullet}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial \bullet}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial \bullet}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{II.4})$$

Dans ces équations, on désigne par :

- $\rho$  et  $\mathbf{u}$  respectivement la densité et le vecteur vitesse du fluide aux coordonnées géométriques considérées. Les composantes de  $\mathbf{u}$  dans le repère cartésien sont  $u$ ,  $v$  et  $w$  ;
- $\rho E$  la densité d'énergie totale contenue dans un élément fluide ;
- $\rho \mathbf{f}$  et les  $\tau_{ij}$  respectivement les forces volumiques et les composantes du tenseur des contraintes visqueuses appliquées aux frontières d'un élément fluide ;
- $\dot{q}$  la production massique de chaleur par unité de temps au sein d'un élément fluide, et  $j_{th,i}$  la  $i$ -ème composante du vecteur densité de flux thermique à travers les frontières d'un élément fluide (égal à  $-\lambda \cdot \vec{\nabla} T$  d'après la loi de Fourier, avec  $\lambda$  la conductivité thermique du milieu et  $\vec{\nabla} T$  le gradient de température).

## 1.2 Considérations numériques en mécanique des fluides

Selon ce que l'on cherche à observer à l'aide d'un calcul CFD (Computational Fluid Dynamics), différents niveaux de représentation des grandeurs de l'écoulement peuvent être utilisés. Il est en effet souvent pratique de seulement modéliser certaines grandeurs de l'écoulement plutôt que de chercher à les résoudre, permettant ainsi de réduire le coût des calculs en question. En pratique, ce choix est souvent conditionné par la représentation souhaitée de la turbulence au sein de l'écoulement étudié [24, 144]. Une liste non-exhaustive de différentes méthodes de simulation d'un écoulement fluide est rappelée ci-dessous.

### Direct Numerical Simulation

La DNS, pour Direct Numerical Simulation, consiste à résoudre l'écoulement dans son intégralité grâce aux équations de Navier-Stokes discrétisées. La turbulence est ainsi calculée, quelle que soit l'échelle des cellules turbulentes. Cette méthode implique une discrétisation très fine du domaine fluide étudié, en particulier dans les zones proches de la paroi pour capter la topologie turbulente de la couche limite. Un pas de temps adapté à la stabilité du schéma d'intégration temporel et au suivi de l'évolution des petites échelles de la turbulence est également nécessaire. Ces contraintes sont trop fortes pour permettre l'étude de configurations industrielles compte tenu des puissances de calcul actuelles.

### Large Eddy Simulation

La LES, pour Large Eddy Simulation, est une méthode intermédiaire entre modélisation et simulation de la turbulence dans un calcul CFD. Celle-ci consiste à résoudre les grandes échelles de la turbulence, tandis que les plus petites sont modélisées. Un filtre spatial passe-bas est appliqué aux équations de Navier-Stokes, qui ne comportent plus que les plus faibles fréquences spatiales de l'écoulement, c'est-à-dire les grandes échelles de la turbulence. Les petites échelles sont quant à elles modélisées grâce à un modèle de sous-mailles. Une description plus approfondie de la théorie propre à la LES peut être trouvée dans Piomelli [122].

### (Unsteady -) Reynolds Averaged Navier-Stokes

Une dernière méthode consiste à décomposer les quantités conservatives en contributions stationnaires et fluctuantes. Pour cela, les moyennes de Reynolds et de Favre sont usuellement

utilisées, et s'écrivent pour une quantité conservative  $\psi$  de l'écoulement comme :

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' , \text{ avec } \bar{\psi} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \psi(\mathbf{x}, t) dt \text{ la moyenne de Reynolds,} \quad (\text{II.5})$$

$$\psi = \tilde{\psi} + \psi'' , \text{ avec } \tilde{\psi} = \frac{\overline{\rho\psi}}{\bar{\rho}} \text{ la moyenne de Favre.} \quad (\text{II.6})$$

où le temps  $T$  de la moyenne de Reynolds est grand en ordre de grandeur par rapport à la durée caractéristique des phénomènes fluctuants. Ces moyennes sont donc des filtres temporels passe-bas appliqués aux grandeurs conservatives de l'écoulement. On a de plus :

$$\overline{\bar{\psi}} = \bar{\psi}, \quad \overline{\psi'} = 0, \quad \overline{\psi\phi} = \bar{\psi}\bar{\phi} + \overline{\psi'\phi'}, \quad \overline{\psi\phi'} = \overline{\psi'\phi} = \overline{\psi\psi'} = \overline{\phi\phi'} = 0 \quad (\text{II.7})$$

L'application directe de la moyenne de Reynolds aux équations de Navier-Stokes donne :

*Équation de continuité :*

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}) = 0 \quad (\text{II.8})$$

*Équation de la quantité de mouvement :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{u} + \overline{\rho u''u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{v} + \overline{\rho u''v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{u}\tilde{w} + \overline{\rho u''w''})}{\partial z} \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zx}}}{\partial z} + \bar{\rho} \tilde{f}_x \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{u} + \overline{\rho v''u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{v} + \overline{\rho v''v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{v}\tilde{w} + \overline{\rho v''w''})}{\partial z} \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zy}}}{\partial z} + \bar{\rho} \tilde{f}_y \\ \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w}\tilde{u} + \overline{\rho w''u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w}\tilde{v} + \overline{\rho w''v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{w}\tilde{w} + \overline{\rho w''w''})}{\partial z} \\ = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{\tau_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau_{yz}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau_{zz}}}{\partial z} + \bar{\rho} \tilde{f}_z \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

*Équation de l'énergie :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{u} + \overline{\rho E''u''})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{v} + \overline{\rho E''v''})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{\rho}\tilde{E}\tilde{w} + \overline{\rho E''w''})}{\partial z} \\ = \bar{\rho} \tilde{q} - \frac{\partial \overline{j_{th,x}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{j_{th,y}}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{j_{th,z}}}{\partial z} \\ - \frac{\partial \overline{u\bar{p}}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v\bar{p}}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w\bar{p}}}{\partial z} \\ + \frac{\partial \overline{u\tau_{xx}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u\tau_{yx}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u\tau_{zx}}}{\partial z} \\ + \frac{\partial \overline{v\tau_{xy}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v\tau_{yy}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v\tau_{zy}}}{\partial z} \\ + \frac{\partial \overline{w\tau_{xz}}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{w\tau_{yz}}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w\tau_{zz}}}{\partial z} + \bar{\rho} \tilde{\mathbf{f}} \cdot \tilde{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Cette nouvelle formulation des équations de Navier-Stokes grâce aux moyennes de Reynolds et de Favre est nommée (U)RANS pour (Unsteady -) Reynolds Averaged Navier Stokes. Elle fait apparaître de nouvelles inconnues :

- l'énergie cinétique turbulente  $k = \frac{1}{2} \overline{u_i'' u_i''}$ , issue de  $\overline{\rho E} = \overline{\rho e} + \frac{1}{2} (\overline{\rho \tilde{u}_i \tilde{u}_i} + \overline{\rho u_i'' u_i''})$ , en utilisant la convention de sommation d'Einstein. Ici,  $e$  est l'énergie interne massique de l'élément fluide considéré ;
- les termes en  $\overline{\rho u_i'' u_j''}$ , avec  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  et  $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ . L'opposé de ces termes sont les composantes d'un tenseur symétrique appelé tenseur de Reynolds. Ces termes traduisent un couplage entre une grandeur moyenne du flux (la densité) et les grandeurs de fluctuations de petite échelle (la turbulence) ;
- les termes en  $\overline{\rho E'' u_i''}$ , avec  $i \in \{1, 2, 3\}$  et  $u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$ , qui sont des termes de diffusion d'énergie turbulente dans le flux.

Nous aboutissons de cette manière à un système avec plus d'inconnues que d'équations, que l'on va chercher à résoudre en y apportant des équations supplémentaires par une modélisation.

### 1.3 Modélisation de la turbulence

La procédure consistant à fermer le système d'équations (U)RANS passe par la mise en place d'une modélisation de la turbulence. Ces modèles peuvent lier entre elles les inconnues déjà existantes, ou bien introduire de nouvelles équations et inconnues au système [3, 176].

#### 1.3.1 L'hypothèse de Boussinesq

L'hypothèse de Boussinesq est à la base de nombreux modèles pour représenter la turbulence au sein d'un écoulement. Elle introduit deux nouveaux scalaires dans les équations (U)RANS afin de modéliser le tenseur de Reynolds et les termes de diffusion d'énergie turbulente :

$$-\overline{\rho u_i'' u_j''} = -\frac{2}{3} \delta_{ij} (\overline{\rho k} + \mu_t \vec{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}}) + 2\mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{II.11})$$

$$\overline{\rho E'' u_i''} = -\frac{\mu_t c_p}{Pr_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \quad (\text{II.12})$$

où  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, u_1 = u, u_2 = v, u_3 = w$  et  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker.

L'hypothèse de Boussinesq consiste donc à supposer que le tenseur de Reynolds est de la même forme que le tenseur des contraintes pour une particule fluide, et que le terme de diffusion d'énergie turbulente a une forme similaire à la loi de Fourier de la conduction thermique.

Les deux scalaires introduits,  $\mu_t$  et  $Pr_t$ , sont respectivement la viscosité turbulente et le nombre de Prandtl turbulent. Finalement, on modélise la turbulence via les trois scalaires que sont  $k, \mu_t$  et  $Pr_t$ . Ceux-ci sont liés grâce aux modèles de turbulence, qui définissent un ensemble d'équations permettant de fermer le système d'équations (U)RANS. De nombreux modèles existent, dont nous allons donner une brève description dans les paragraphes suivants.

### 1.3.2 Modélisation algébrique de la turbulence

Les modèles algébriques consistent à lier directement les grandeurs turbulentes entre elles via des équations algébriques. Parmi ces modèles, nous pouvons par exemple citer les modèles de Baldwin-Lomax [14] et de Michel-Quemard-Durant [3] qui sont des modèles fournissant des valeurs de viscosité turbulente selon la distance à la paroi (on parle de modèles à longueur de mélange). L'énergie cinétique turbulente  $y$  est négligée.

Ces modèles sont faciles à implémenter et les coûts de calcul sont limités, mais leur capacité à modéliser correctement la turbulence est très sensible au cas d'étude. Notamment, ces modèles lient les valeurs turbulentes de manière instantanée, de telle sorte que celles-ci ne peuvent qu'évoluer en phase. En réalité, il peut exister des retards dans l'évolution des variables turbulentes les unes par rapport aux autres. Les modèles de transport permettent de représenter ce phénomène de retard.

### 1.3.3 Modélisation de la turbulence par équations de transport

Les modèles à équations de transport décrivent l'évolution de la turbulence au sein d'un fluide en tenant compte de la dynamique de l'écoulement. Ces équations lient la turbulence convectée par l'écoulement, le transfert d'énergie du champ moyen vers le champ turbulent, l'énergie turbulente dissipée en chaleur par viscosité et la diffusion spatiale de la turbulence au sein de l'écoulement. De nombreux modèles de turbulence avec équations de transport existent, généralement à une ou deux équations. Nous pouvons par exemple citer les modèles de Spalart-Allmaras [151],  $k - \epsilon$  [85],  $k - \omega$  avec ses variantes ( $k - \omega$  de Wilcox [175], de Menter [99], *etc.*),  $k - l$  de Smith [148] où pour ces modèles,  $k$  est l'énergie cinétique turbulente,  $\epsilon$  est le taux de dissipation isotrope de la turbulence,  $\omega$  est le taux de dissipation spécifique de la turbulence (égal à  $\frac{\epsilon}{Ck}$  avec  $C$  une constante) et  $l$  est la longueur caractéristique de la turbulence dans l'écoulement. Il n'existe cependant pas encore de modèle suffisamment robuste pour modéliser de manière réaliste la turbulence dans tous les cas d'étude, et le choix du modèle à employer dépendra fortement de l'étude que l'on cherche à réaliser. Plus d'informations sur les modèles de turbulence peuvent être trouvées dans le livre de Wilcox [176].

Dans le cadre de ce travail de thèse, le modèle de turbulence  $k - l$  de Smith a été choisi pour les calculs CFD, notamment dans le cadre turbomachine pour sa robustesse au vannage le long de l'isovitesse étudiée. Par ailleurs, moins de points sont nécessaires pour décrire la sous-couche visqueuse qu'avec un modèle  $k - \epsilon$ , tandis que les effets de compressibilité dans la couche limite turbulente sont mieux représentés [148]. Ce modèle est décrit par les équations suivantes, en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

*Équation sur  $k$  :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(2\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial(2\bar{\rho}k\tilde{u}_i)}{\partial x_i} = & -2\overline{\rho u_i'' u_j''} \frac{\tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{2\bar{\rho}(2k)^{\frac{3}{2}}}{B_1 l} - 2\mu \frac{\partial(2k)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} \frac{\partial(2k)^{\frac{1}{2}}}{\partial x_i} + \dots \\ & + \frac{\partial(\mu + S_q \mu_t)}{\partial x_i} \frac{\partial 2k}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

Équation sur  $l$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}l)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}l\tilde{u}_i)}{\partial x_i} = (2 - E_2) \frac{\bar{\rho}(2k)^{\frac{1}{2}}}{B_1} \left( 1 - \left( \frac{l}{\mathcal{K}L} \right)^2 \right) - \frac{\mu_t S_q}{l} \frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{\partial l}{\partial x_i} \left( \frac{l}{\mathcal{K}L} \right)^2 + \dots \\ + 2 \frac{S_q \mu_t}{k} \frac{\partial l}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{\partial(\mu + S_q \mu_t)}{\partial x_i} \frac{\partial l}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Dans les équations II.13 et II.14, un ensemble de paramètres sont définis. La distance  $L$  est la distance à la paroi. Pour les autres paramètres, on a :

$$\begin{cases} \mu_t = \mu \chi f_\mu \\ \chi = \frac{\bar{\rho}(2k)^{\frac{1}{2}} l}{\mu B_1^{\frac{1}{3}}} \\ f_\mu = \left( \frac{c_1^4 f_1 + c_2^2 \chi^2 + \chi^4}{c_1^4 + c_2^2 \chi^2 + \chi^4} \right)^{\frac{1}{4}} \\ f_1 = \exp \left[ -50 \left( \frac{l}{\mathcal{K}L} \right)^2 \right] \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

Les constantes du modèles sont définies empiriquement et résumées dans le Tableau II.1

$c_1$	$c_2$	$B_1$	$E_2$	$\mathcal{K}$	$S_q$
25.5	2.0	18	1.2	0.41	0.7

TABLEAU II.1 – Paramètres empiriques du modèle  $k-l$  de Smith (d'après [3, 148])

La modélisation (U)RANS vient d'être explicitée et a été retenue dans le cadre des calculs CFD menés au cours des travaux de thèse. Elle permet d'obtenir notamment un bon compromis entre précision des résultats et temps de calcul. Dans le contexte du flottement de soufflante, des phénomènes d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air sont à envisager. Nous allons aborder la question de la propagation d'ondes acoustiques en conduite cylindrique dans la prochaine section.

## 2 Propagation acoustique en conduite

Des études récentes [21, 163, 164, 180] ont mis en évidence la dépendance des limites de stabilité aéroélastique de soufflante aux phénomènes de propagation d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air du moteur. Nous allons dans cette section aborder les notions fondamentales à la propagation des ondes acoustiques en conduite.

### 2.1 Notion de mode de conduit

#### 2.1.1 Équation de Helmholtz convectée

Dans le cadre de la propagation acoustique, certaines hypothèses doivent être effectuées à la fois sur le milieu fluide et sur le domaine de propagation. On considère d'une part une conduite annulaire infinie, pouvant éventuellement posséder un moyeu lui aussi infini, tous deux selon l'axe  $\mathbf{e}_x$ . Le rayon du carter est noté  $R_c$  et celui du moyeu est noté  $R_m$ . On introduit la notion de rapport de moyeu  $\sigma$ , qui s'écrit  $\sigma = \frac{R_m}{R_c}$  et qui est compris entre 0 et 1. Par ailleurs, on

considère le fluide assimilable à un gaz parfait, compressible, non visqueux et non conducteur de chaleur. L'écoulement est ainsi considéré comme isentropique. De plus, on suppose l'écoulement irrotationnel, avec une vitesse uniforme dans la conduite selon l'axe  $\mathbf{e}_x$ , subsonique et telle que  $\bar{\mathbf{u}} = M_x c_0 \mathbf{e}_x$  [56].

En faisant l'hypothèse de petites perturbations et en linéarisant les équations d'Euler au premier ordre en temps, on fait apparaître l'équation de d'Alembert vérifiée par la pression instationnaire. Cette équation caractérise la propagation d'ondes acoustiques au sein du fluide et s'écrit :

$$\Delta p - \frac{1}{c_0^2} \frac{D^2 p}{Dt^2} = 0 \quad (\text{II.16})$$

où la dérivée particulaire s'écrit :

$$\frac{D\bullet}{Dt} = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \vec{\nabla}) \bullet = \frac{\partial\bullet}{\partial t} + M_x c_0 (\mathbf{e}_x \cdot \vec{\nabla}) \bullet \quad (\text{II.17})$$

Puisque l'on considère une conduite cylindrique dans le cadre des entrée d'air de soufflante, il est naturel dès lors de considérer un repère en coordonnées cylindriques  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_x)$ . On écrit alors les opérateurs en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \bullet = \frac{\partial\bullet}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\bullet}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial\bullet}{\partial x} \mathbf{e}_x \quad (\text{II.18a})$$

$$\Delta \bullet = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \bullet) = \frac{\partial^2 \bullet}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\bullet}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \bullet}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \bullet}{\partial x^2} \quad (\text{II.18b})$$

En supposant une évolution harmonique en temps de la pression à la pulsation  $\omega$ , on réécrit l'équation de d'Alembert dans le repère cylindrique [23, 135]. On obtient de cette manière l'équation de Helmholtz convectée :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} + (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} - 2jkM_x \frac{\partial p}{\partial x} + k^2 p = 0, \quad k = \frac{\omega}{c_0} \quad (\text{II.19})$$

Le nombre  $k$  est nommé nombre d'onde.

### 2.1.2 Solutions de l'équation de propagation acoustique

L'équation de Helmholtz II.19 se résout en procédant par séparation des variables. On cherche ainsi une solution de la forme :

$$p(x, r, \theta, t) = \text{Re} \left( f(x)g(r)h(\theta)e^{j\omega t} \right) \quad (\text{II.20})$$

En injectant l'équation II.20 dans l'équation II.19, on obtient :

$$\frac{1}{f(x)} \left( (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - 2jkM_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) + \frac{1}{g(r)} \left( \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 h(\theta)} \frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta^2} + k^2 = 0 \quad (\text{II.21})$$



Les variables ayant été séparées et étant indépendantes, les sous-équations de II.21 relatives à chaque variable sont constantes et de la forme :

$$\frac{1}{h(\theta)} \frac{\partial^2 h(\theta)}{\partial \theta^2} = -m^2 \quad (\text{II.22a})$$

$$\frac{1}{g(r)} \left( \frac{\partial^2 g(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g(r)}{\partial r} \right) = \frac{m^2}{r^2} - k_r^2 \quad (\text{II.22b})$$

$$\frac{1}{f(x)} \left( (1 - M_x^2) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} - 2jkM_x \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right) = k_r^2 - k^2 \quad (\text{II.22c})$$

Remarque : on notera que les deux constantes  $m$  et  $k_r$  sont suffisantes pour établir les relations II.22a, II.22b et II.22c.

L'équation différentielle II.22a vérifiée par  $h$  admet pour solution :

$$h(\theta) = e^{-jm\theta}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \infty \quad (\text{II.23})$$

Cette solution vérifie en outre la périodicité azimuthale de la solution.

L'équation différentielle II.22b vérifiée par  $g$  est une équation différentielle de Bessel. Les solutions de ces équations différentielles s'écrivent pour l'entier  $m$ , dans le cas général :

$$g(r) = N_m \cdot J_m(k_r r) + M_m \cdot Y_m(k_r r) \quad (\text{II.24})$$

où les fonctions  $J_m$  et  $Y_m$  sont respectivement les fonctions de Bessel d'ordre  $m$  de première et seconde espèce.

Dans notre cas, les conditions limites de pression dans le sens radial doivent être vérifiées. Ces conditions sont, dans le cas où les parois de carter et de moyeu (si il y a un moyeu) sont rigides :

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r) = 0 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial r}(r) = 0, \quad \text{pour } r \in \{R_m; R_c\} \quad (\text{II.25})$$

En implémentant ces conditions limites dans II.24, on a :

$$\frac{M_m}{N_m} = -\frac{J'_m(k_r R_m)}{Y'_m(k_r R_m)} = -\frac{J'_m(k_r R_c)}{Y'_m(k_r R_c)} \quad (\text{II.26})$$

On aboutit alors à la relation :

$$J'_m(k_r R_m) Y'_m(k_r R_c) - J'_m(k_r R_c) Y'_m(k_r R_m) = 0 \quad (\text{II.27})$$

Ainsi, on définit  $g_m$  la fonction de  $k_r$  telle que :

$$g_m(k_r) = J'_m(k_r R_m) Y'_m(k_r R_c) - J'_m(k_r R_c) Y'_m(k_r R_m) \quad (\text{II.28})$$

et on note  $k_{r_{m,\mu}}$  la  $\mu$ -ième valeur strictement positive telle que  $g_m(k_{r_{m,\mu}})$  s'annule ( $\mu$  commence à 0). Le terme  $k_{r_{m,\mu}}$  est appelé dans la littérature *nombre d'onde radial*.

Remarque : le nombre d'onde radial ne caractérise pas une onde se propageant selon le vecteur radial  $\mathbf{e}_r$ . Il s'agit d'un abus de langage. En réalité, ce nombre est la projection du vecteur d'onde total  $\mathbf{k}$ , dont la norme est le nombre d'onde  $k$  et dont la direction est celle de la propagation locale de l'onde acoustique, sur la section normale à l'axe de la conduite (voir mémoire de thèse de Bouley [23]). Nous conserverons tout de même cette dénomination du nombre d'onde radial dans la suite.

On renomme respectivement  $N_m$  et  $M_m$  en  $N_{m,\mu}$  et  $M_{m,\mu}$  car ces nombres changent en fonction de l'ordre radial  $\mu$ .

Le nombre d'onde radial ayant été déterminé, il convient de fixer la norme de la fonction  $g$  pour déterminer les termes d'amplitude  $N_{m,\mu}$  et  $M_{m,\mu}$ . Pour cela, on propose d'utiliser la norme associée à un produit scalaire défini sur l'espace des fonctions de carré intégrable de  $(r, \theta) \in [R_m, R_c] \times [0, 2\pi]$  à valeur dans  $\mathbb{C}$ . On choisit le produit scalaire suivant :

$$\langle u|v \rangle = \frac{1}{2\pi R_c^2} \int_{R_m}^{R_c} \int_0^{2\pi} u(r, \theta) \overline{v(r, \theta)} r dr d\theta \quad (\text{II.29})$$

La norme associée à ce produit scalaire s'écrit, pour une fonction  $u$  de  $[R_m, R_c] \times [0, 2\pi]$  à valeur dans  $\mathbb{C}$  :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u|u \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi R_c^2} \int_{R_m}^{R_c} \int_0^{2\pi} |u(r, \theta)|^2 r dr d\theta} \quad (\text{II.30})$$

On va faire le choix d'une norme unitaire pour  $g$ . On choisit également de redéfinir la fonction  $g$  sous la forme :

$$g(r) = g_{m,\mu}(r) = N_{m,\mu} (\cos(\tau_{m,\mu}) \cdot J_{m,\mu}(k_{r_{m,\mu}} r) - \sin(\tau_{m,\mu}) \cdot Y_{m,\mu}(k_{r_{m,\mu}} r)) \quad (\text{II.31})$$

avec :

$$\tau_{m,\mu} = \arctan \left( \frac{J'_m(k_{r_{m,\mu}} R_c)}{Y'_m(k_{r_{m,\mu}} R_c)} \right) \quad (\text{II.32})$$

On vérifie aisément que cette nouvelle définition de la fonction  $g$  vérifie bien les conditions limites acoustiques définies à l'équation II.25. La normalisation de cette nouvelle fonction à 1 donne, d'après Rienstra [132] :

$$N_{m,\mu} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pi k_{r_{m,\mu}} R_c}{\sqrt{\frac{1 - \left(\frac{m}{k_{r_{m,\mu}} R_c}\right)^2}{J'_m(k_{r_{m,\mu}} R_c)^2 + Y'_m(k_{r_{m,\mu}} R_c)^2} - \frac{1 - \left(\frac{m}{k_{r_{m,\mu}} R_m}\right)^2}{J'_m(k_{r_{m,\mu}} R_m)^2 + Y'_m(k_{r_{m,\mu}} R_m)^2}}} \quad (\text{II.33})$$

Remarque : la solution  $g$  de II.22b qui vient d'être détaillée n'est valable que s'il y a un moyeu dans la représentation de la conduite. En effet, les fonctions de Bessel de seconde espèce ont

un taux d'accroissement tendant vers l'infini en 0. Dans le cas où il n'y a pas de moyeu, une solution dégénérée à II.22b existe tout de même (d'après Rienstra [134]). La fonction  $g$  s'écrit dans ce cas-là :

$$g_{m,\mu}(r) = N_{m,\mu} J_{m,\mu}(k_{r_{m,\mu}} r) \quad (\text{II.34})$$

avec :

$$N_{m,\mu} = \frac{\sqrt{2}}{J_m(k_{r_{m,\mu}} R_c) \sqrt{1 - \left(\frac{m}{k_{r_{m,\mu}} R_c}\right)^2}} \quad (\text{II.35})$$

Pour finir, l'équation différentielle II.22c vérifiée par  $f$  admet pour solution :

$$f(x) = e^{-jk_{x_{m,\mu}}^{\pm} x}, \quad \text{avec } k_{x_{m,\mu}}^{\pm} = \frac{-kM_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - M_x^2) k_{r_{m,\mu}}^2}}{1 - M_x^2} \quad (\text{II.36})$$

Le terme  $k_{x_{m,\mu}}^{\pm}$  est appelé dans la littérature *nombre d'onde axial*. On constate que pour chaque couple  $(m, \mu)$ , une composante de l'onde se propage de l'amont vers l'aval (de l'entrée d'air vers la soufflante par exemple), tandis qu'une autre se propage dans la direction inverse.

En conclusion, les ondes acoustiques dans la conduite s'écrivent comme une superposition de *modes acoustiques* (car les opérateurs traités sont linéaires), aussi appelés *modes de conduit* :

$$p(x, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} p_{m,\mu}^{\pm}(x, r, \theta, t) \quad (\text{II.37})$$

où chaque mode est de la forme :

$$p_{m,\mu}^{\pm}(x, r, \theta, t) = \text{Re} \left( A_{m,\mu}^{\pm} g_{m,\mu}(r) e^{j(\omega t - k_{x_{m,\mu}}^{\pm} x - m\theta)} \right) \quad (\text{II.38})$$

avec :

- $A_{m,\mu}^{\pm}$  un terme d'amplitude complexe ;
- $g_{m,\mu}(r)$  l'évolution radiale du mode. Celle-ci s'écrit comme une somme de fonctions de Bessel d'ordre  $m$  de première et de seconde espèce ;
- $k_{x_{m,\mu}}^{\pm}$  la propagation de l'onde selon l'axe de la conduite. Ce terme peut être complexe. La partie imaginaire est alors responsable d'une décroissance exponentielle du mode selon l'axe de la conduite. On parle pour ce cas de *mode évanescent* ;
- $\omega$  la pulsation du mode ;
- $m$  le nombre de diamètres nodaux pour une section de conduite donnée ;
- $\mu$  est le nombre de cercles nodaux pour une section de conduite donnée.

Les diamètres et cercles nodaux sont les lignes et/ou les courbes de l'espace à 3 dimensions sur lesquelles, à un instant donné, la pression instationnaire linéarisée est nulle. Les variations de pression sont alternativement positives et négatives de chaque côté d'une de ces courbes (voir figure II.1).

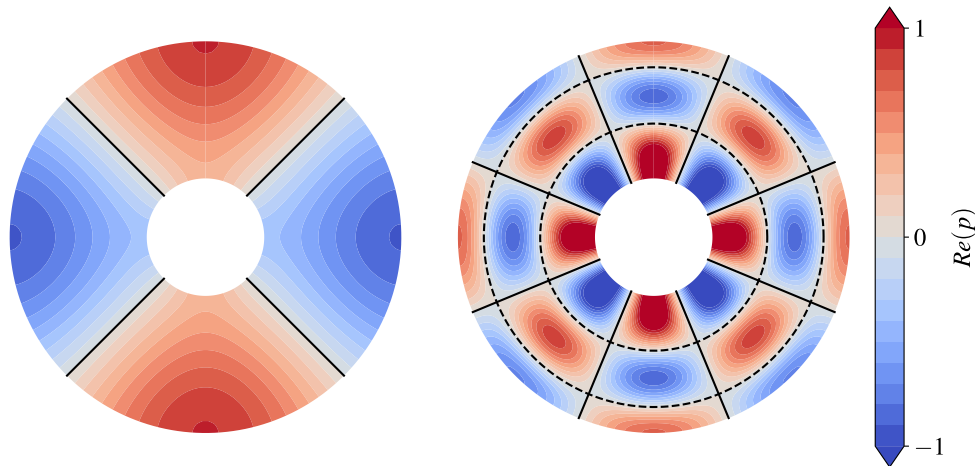


FIGURE II.1 – Répartitions radiales et azimuthales de deux modes acoustiques sur une section :  $(m, \mu) = (2, 0)$  à gauche,  $(m, \mu) = (4, 2)$  à droite (d'après Bontemps [21])

### 2.1.3 Fréquence de coupure et relation de dispersion

Dans le cadre de la propagation acoustique en conduite cylindrique ou annulaire, la relation II.36 montre que plusieurs scénarios sont envisageables selon la fréquence d'excitation des ondes acoustiques. Reprenons ici l'expression du nombre d'onde axial :

$$k_{x_{m,\mu}}^{\pm} = \frac{kM_x \pm \sqrt{k^2 - (1 - M_x^2)k_{r_{m,\mu}}^2}}{1 - M_x^2}, \quad \text{avec } k = \frac{\omega}{c_0}$$

On voit que selon la valeur de la pulsation d'excitation  $\omega$ , le signe de la partie sous la racine carré peut changer. Le cas limite est celui pour lequel la pulsation d'excitation est égale à  $\omega_c$ , où :

$$\omega_c = c_0 \sqrt{1 - M_x^2 k_{r_{m,\mu}}^2} \quad (\text{II.39})$$

La pulsation  $\omega_c$  est appelée fréquence de coupure du mode  $p_{m,\mu}^{\pm}$ . Cette fréquence est fonction de  $k_{r_{m,\mu}}$  et est donc complètement dépendante des conditions limites de la conduite, autrement dit de sa géométrie. En revanche, celle-ci ne dépend pas du sens de propagation de l'onde selon l'axe de la conduite. On observe deux cas de figure :

- $\omega < \omega_c$  : le nombre d'onde axial est complexe. La partie réelle du nombre d'onde axial caractérise la propagation de l'onde selon l'axe  $\mathbf{e}_x$ , tandis que la partie imaginaire est associée à une décroissance exponentielle en amplitude du mode acoustique. Il s'agit du mode évanescent, que nous avons évoqué plus haut. On dit dans ce cas de figure que le mode est coupé ;
- $\omega_c < \omega$  : le nombre d'onde axial est réel. La propagation s'effectue selon l'axe  $\mathbf{e}_x$ , avec deux nombres d'onde différents selon que l'onde se propage en sens inverse à l'écoulement (on parle de mode *amont*) ou dans le même sens que celui-ci (on parle de mode *aval*). On dit dans ce cas de figure que le mode est passant.

Dans le cas des turbomachines, les sources d'excitation ont des fréquences finies, si bien que seul un certain nombre de modes acoustiques ne seront pas coupés par la conduite.

L'expression du nombre d'onde axial révèle une dépendance entre ce nombre et la pulsation d'excitation. Ce genre d'expression porte le nom de *relation de dispersion*. En reprenant le carré de l'équation II.36, on a la relation :

$$(1 - M_x^2) k^2 + 2M_x (1 - M_x^2) k k_{x_{m,\mu}}^\pm - (1 - M_x^2)^2 k_{x_{m,\mu}}^{\pm 2} - (1 - M_x^2) k_{r_{m,\mu}}^2 = 0 \quad (\text{II.40})$$

Cette relation définit une hyperbole dans le plan  $(k, k_{x_{m,\mu}}^\pm)$ , dont le centre est le point  $(0, 0)$  et dont les asymptotes sont les droites d'équation :

$$k_{x_{m,\mu}}^\pm = \frac{k}{M_x - 1} \quad (\text{II.41a})$$

$$k_{x_{m,\mu}}^\pm = \frac{k}{M_x + 1} \quad (\text{II.41b})$$

Une illustration de la relation de dispersion se trouve en figure II.2.

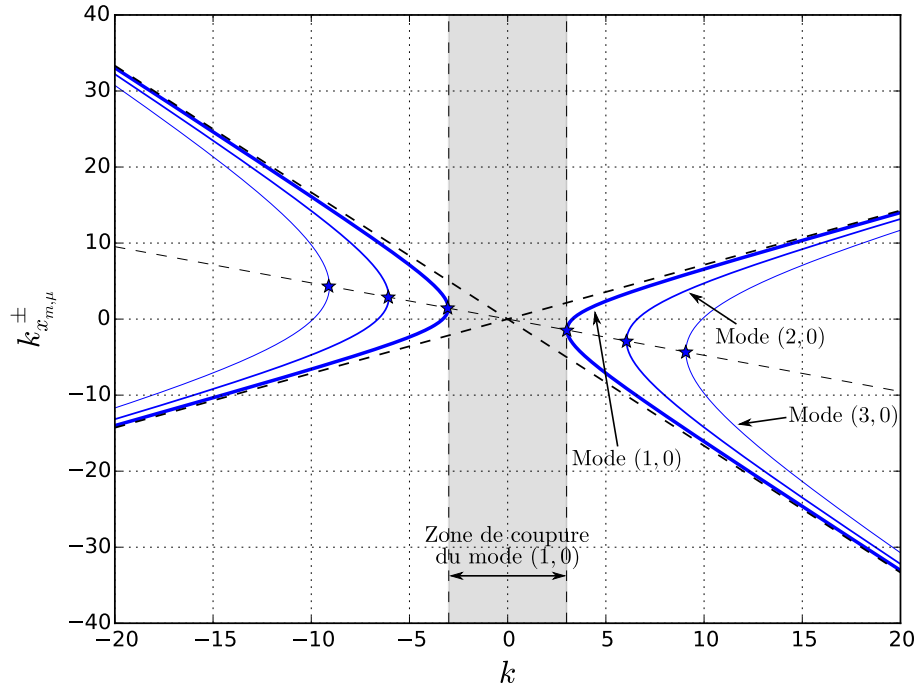


FIGURE II.2 – Illustration de la relation de dispersion pour un nombre de Mach non nul

Sur la figure II.2, les étoiles bleues indiquent respectivement les pulsations de coupure de chaque mode. Pour un nombre d'onde inférieur à celui associé à la fréquence de coupure du mode, l'onde sera coupée par la conduite. La zone grisée représente la zone de coupure du mode  $(1, 0)$ .

## 2.2 Réflexion d'un mode acoustique sur l'entrée d'air

Nous venons de voir dans la sous-section précédente que les ondes acoustiques pouvaient être décomposées selon une superposition de modes de conduite se propageant dans les deux sens selon l'axe de la conduite. Une soufflante de turboréacteur se comporte comme une source acoustique : si la fréquence de cette source est supérieure à la fréquence de coupure d'au moins un mode, des ondes acoustiques se propagent dans l'entrée d'air. L'ouverture de l'entrée d'air sur l'environnement externe constitue quant à elle une condition limite réflexive du point de vue de l'acoustique : une fraction de l'onde incidente émise par la soufflante est diffusée vers cet environnement, tandis que la partie restante est réfléchiée et renvoyée vers l'intérieur du moteur. Cette onde réfléchiée peut perturber la stabilité aéroélastique de la soufflante et doit être modélisée.

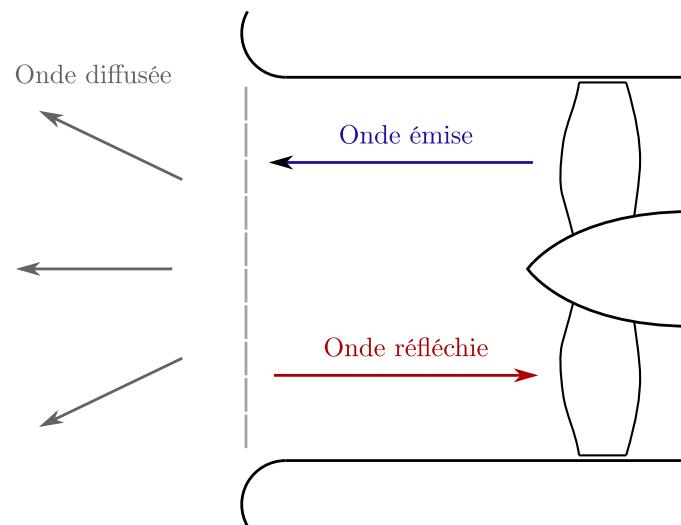


FIGURE II.3 – Illustration de la réflexion acoustique en entrée d'air

De nombreux travaux se sont intéressés à la réflexion et la diffusion des ondes acoustiques sur l'ouverture d'une conduite circulaire, dont une revue non-exhaustive peut être trouvée dans l'article de Peters et al. [117]. Ces résultats ont tout d'abord été établis pour des ondes planes en absence d'écoulement (*i.e*  $m = M_x = 0$ ). Dans ces conditions, Levine et Schwinger [92] sont les premiers à avoir fourni une expression analytique du taux de réflexion en termes d'amplitude et de déphasage. Ce résultat a montré de bonnes corrélations avec des mesures expérimentales réalisées pour des écoulements axiaux de faible vitesse, notamment dans les travaux de Alfredson et Davies [8]. Par la suite, Carrier [31] a proposé une formulation du coefficient de réflexion basé sur les travaux de Levine et Schwinger en tenant compte d'un écoulement axial uniforme à l'intérieur et à l'extérieur de la conduite. Munt [101, 102] a proposé une nouvelle formulation du coefficient de réflexion en présence d'un écoulement de jet, en prenant en compte les travaux de Weinstein [170] qui généralisent de la propagation acoustique à plusieurs modes. Rienstra [132] propose également une formulation analytique du coefficient de réflexion en tenant compte d'un écoulement de conduite uniforme et de la participation de plusieurs modes. Les équations présentées dans la sous-section II.2.1 reprenant le formalisme de Rienstra, nous allons maintenant expliciter le modèle de réflexion en entrée d'air qu'il propose.

On considère une conduite semi infinie pouvant posséder un moyeu lui aussi semi infini. Nous reprenons les notations de la sous-section II.2.1 : on note respectivement  $R_c$ ,  $R_m$  et  $\sigma$  les rayons

de carter, de moyeu et le rapport de moyeu qui leur est associé. La conduite d'axe  $\mathbf{e}_x$  est définie pour  $x > 0$ . La conduite s'ouvre sur l'espace extérieur en  $x = 0$ . Les parois extérieures sur le rayon  $R_c$  sont infiniment fines et une condition de continuité en pression et en vitesse est imposée au niveau de la singularité en  $x = 0$ . On ne traite ici que le cas de la réflexion d'un mode d'amplitude unitaire d'ordre  $(m, \mu)$  sur l'entrée d'air. On suppose que celui-ci se propage de  $x = +\infty$  vers  $x = 0$ . En se réfléchissant sur l'entrée d'air, celui-ci active l'ensemble des modes d'ordre  $(m, \nu)$ , pour  $\nu \in \mathbb{N}$ . Le champ acoustique dans la conduite est alors de la forme :

$$p(x, r, \theta, t) = \left( g_{m,\mu}(r) e^{j(-k_{x_m,\mu}^- x)} + \sum_{\nu=0}^{\infty} R_{m,\mu,\nu} g_{m,\nu}(r) e^{j(-k_{x_m,\nu}^+ x)} \right) e^{j(\omega t - m\theta)} \quad (\text{II.42})$$

où  $R_{m,\mu,\nu}$  est le coefficient de réflexion complexe du mode d'ordre  $(m, \mu)$  sur le mode d'ordre  $(m, \nu)$ . D'après Rienstra [132], ce coefficient s'écrit :

$$R_{m,\mu,\nu} = -\frac{1}{4} g_{m,\mu}(R_c) g_{m,\nu}(R_c) \frac{(1 + \Omega_{m,\mu})(1 + \Omega_{m,\nu})}{\Omega_{m,\nu}(\Omega_{m,\mu} + \Omega_{m,\nu})} \frac{1 - M_x \Omega_{m,\nu}}{1 + M_x \Omega_{m,\mu}} \tilde{K}_-(\Omega_{m,\mu}) \tilde{K}_-(\Omega_{m,\nu}) \quad (\text{II.43})$$

où :

$$\Omega_{m,\nu} = \begin{cases} \sqrt{1 - \left(\frac{\beta k_{r_{m,\nu}}}{k}\right)^2} & \text{si } k \geq \beta k_{r_{m,\nu}} \\ -j \sqrt{\left(\frac{\beta k_{r_{m,\nu}}}{k}\right)^2 - 1} & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.44a})$$

$$\tilde{K}_-(\Omega_{m,\mu}) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln \tilde{K}(\tau)}{\tau - \Omega_{m,\mu}} d\tau\right) \quad (\text{II.44b})$$

$$\tilde{K}(\tau) = L\left(\frac{k\sqrt{1 - \tau^2}}{\beta}\right) \quad (\text{II.44c})$$

$$L(zR_c) = \pi \frac{H_m^{(2)'}(zR_c)}{H_m^{(2)'}(zR_m)} (J_m'(zR_m) Y_m'(zR_c) - Y_m'(zR_m) J_m'(zR_c)) \quad (\text{II.44d})$$

$$H_m^{(2)} = J_m + jY_m \quad (\text{II.44e})$$

$$\beta = 1 - M_x^2 \quad (\text{II.44f})$$

Une propriété remarquable de ce modèle est que la réflexion d'un mode d'ordre  $(m, \mu)$  sur lui-même est totale à sa fréquence de coupure  $\omega_c$  :  $R_{m,\mu,\mu} = -1$ . Elle y est en revanche nulle pour les autres mode d'ordre  $(m, \nu)$  avec  $\nu \neq \mu$  [132].

Cette section a permis de caractériser la propagation des ondes acoustiques en conduite cylindrique selon un ensemble de modes de conduite. La réflexion de ces ondes en bout de conduite a été modélisée en exploitant cette formulation de mode de conduite.

Cette section ainsi que la précédente ont permis de mettre en place les équations qui caractérisent le comportement aérodynamique et acoustique du système que nous souhaitons étudier. Dans un cadre d'interaction entre un fluide et une structure, une description de la dynamique de cette dernière est nécessaire pour avoir une vision complète du problème aéroélastique. Nous allons dans la prochaine section décrire la mise en équations du problème mécanique.

### 3 Formulation du problème mécanique

Dans cette section, nous allons mettre en place les équations qui régissent la dynamique des solides déformables. Le développement des paragraphes suivants est basé sur le travail de Gmür [62] et de Joannin [75]. On considère une approche lagrangienne du mouvement : les particules sont donc suivies dans l'espace au cours du temps à partir de leur position initiale. Pour rester cohérent avec les notations usuelles en mécanique des structures, une partie des notations introduites précédemment en section II.1.1 va être redéfinie dans ce qui suit.

#### 3.1 Cinématique d'une particule en représentation lagrangienne

On écrit  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  le repère du référentiel absolu supposé galiléen. On considère dans cette section un solide déformable, occupant dans l'espace un domaine noté  $\Omega$  délimité par sa surface externe  $\partial\Omega$ . La position d'un point  $P$  dans le repère absolu est fournie par le vecteur de coordonnées  $\mathbf{y}$ .

À l'instant initial, une particule  $P$  est repérée par sa position  $P_0$ , de coordonnées  $\mathbf{x}_0 = (x_0 \ y_0 \ z_0)^T$  dans le repère orthonormé lié, ou corotationnel  $(O_1, \mathbf{e}_{x,1}, \mathbf{e}_{y,1}, \mathbf{e}_{z,1})$  du référentiel attaché au solide. On suppose en outre que ce repère coïncide avec le repère du référentiel absolu à l'instant initial.

À un instant  $t_1 > t_0$ , le solide est déformé et la position de la particule  $P$  est identifiée dans le repère orthonormé lié par  $\mathbf{x}$ , de sorte que :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_1) = (x_0 + u_x \quad y_0 + u_y \quad z_0 + u_z)^T \quad (\text{II.45})$$

Le vecteur  $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t)$  est le vecteur déplacement associé à la particule  $P$  dans le référentiel orthonormé lié. Celui-ci n'est pas forcément nul car le solide est supposé déformable.

On admet que le référentiel orthonormé lié est en mouvement par rapport au référentiel absolu. Ce mouvement se décompose comme une translation de l'origine  $O_1$  du référentiel orthonormé lié, notée  $\mathbf{s}(t) = (s_1 \ s_2 \ s_3)^T$ , et une rotation autour d'un axe quelconque passant par  $O_1$  notée  $\omega(t) = (\omega_1 \ \omega_2 \ \omega_3)^T$ , dont les composantes sont exprimées dans le repère orthonormé lié.

Dans le repère absolu, la position du point  $P$  à un instant  $t_1$  quelconque est donné par :

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_0, t_1) = \mathbf{s}(t_1) + \mathbf{R}(t_1)\mathbf{x} = \mathbf{s}(t_1) + \mathbf{R}(t_1) (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_1)) \quad (\text{II.46})$$

où la matrice  $\mathbf{R}(t_1)$  est la matrice de passage du repère absolu au repère orthonormé lié qui s'écrit comme :

$$\mathbf{R}(t_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{x,1} & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{y,1} & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_{z,1} \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{x,1} & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{y,1} & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_{z,1} \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{x,1} & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{y,1} & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{z,1} \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_{x,1}' \quad \mathbf{e}_{y,1}' \quad \mathbf{e}_{z,1}') \quad (\text{II.47})$$

La Figure II.4 reprend la configuration ainsi définie. Le produit  $\mathbf{R}(t_1)\mathbf{x}$  permet d'exprimer le vecteur  $\mathbf{x}$  dans le référentiel absolu. De plus, la matrice  $\mathbf{R}(t_1)$  est orthogonale.



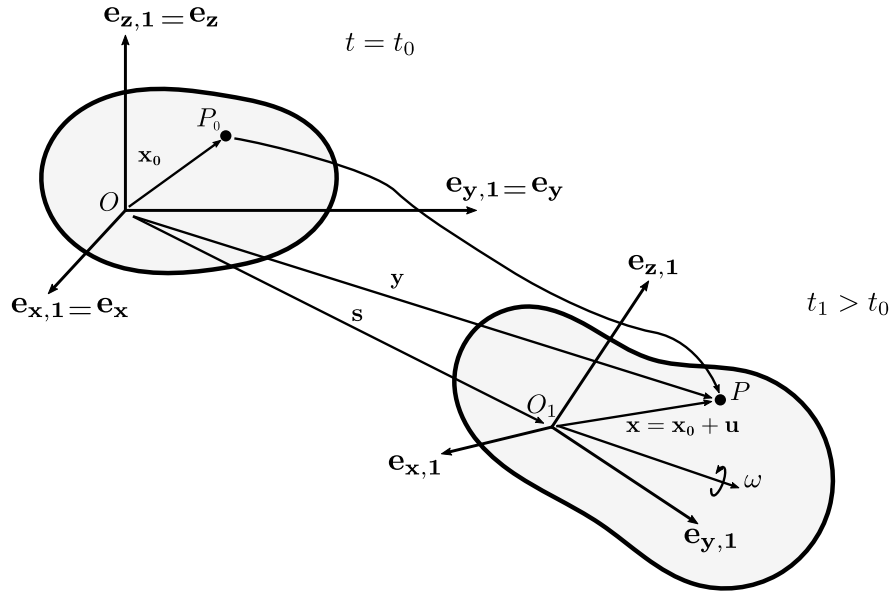


FIGURE II.4 – Cinématique d'une structure continue déformable

À partir de l'équation II.46, on écrit les dérivées temporelles première et seconde de  $\mathbf{y}$ . En ce qui concerne la dérivée première tout d'abord, on a à partir de la loi de composition des vitesses :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) \quad (\text{II.48})$$

où  $\boldsymbol{\Omega}$  est définie comme :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.49})$$

La loi de composition des accélérations permet d'écrire la dérivée seconde de  $\mathbf{y}$  projetée dans le repère du référentiel absolu :

$$\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{R}\ddot{\mathbf{u}} + \ddot{\mathbf{s}} + \mathbf{R}\dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + \mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + 2\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{II.50})$$

où :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\dot{\omega}_3 & \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 & 0 & -\dot{\omega}_1 \\ -\dot{\omega}_2 & \dot{\omega}_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.51})$$

On réécrit alors l'équation II.50 dans le repère orthonormé lié :

$$\mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{y}} = \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\Omega}^2(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega}\dot{\mathbf{u}} \quad (\text{II.52})$$

### 3.2 Équations d'équilibre et lois de comportement

L'écriture de la conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire l'équation de la dynamique locale d'une structure :

$$\overrightarrow{\text{div}} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_v = \rho R^T \ddot{\mathbf{y}} + \xi_a \dot{\mathbf{u}} \quad (\text{II.53})$$

Dans cette équation, on observe :

- $\overrightarrow{div}$  est l'opérateur différentiel de divergence d'un tenseur.  $\overrightarrow{div} \overline{\sigma}$ , représente les forces internes à l'élément considéré.  $\overline{\sigma}$  est le tenseur symétrique des contraintes de Cauchy ;
- $\mathbf{f}_v$  sont les efforts volumiques au sein de l'élément ;
- $\rho R^T \ddot{\mathbf{y}}$  sont les efforts inertiels appliqués à l'élément considéré dans le repère orthonormé lié.  $\rho$  et  $\ddot{\mathbf{y}}$  représentent respectivement la masse volumique et l'accélération locale du solide dans le référentiel absolu ;
- $\xi_a \dot{\mathbf{u}}$  sont les efforts de dissipation de type *effort visqueux*. Ces efforts sont proportionnels à la vitesse du point considéré dans le référentiel orthonormé lié.  $\xi_a$  est un coefficient d'amortissement visqueux.

Remarque : on retrouve l'équation d'équilibre statique en considérant une accélération  $\ddot{\mathbf{y}}$  et un vitesse  $\dot{\mathbf{u}}$  nulle.

Les contraintes au sein de la structure dépendent des déformations de cette dernière. Pour écrire le tenseur des contraintes, on exprime au préalable le tenseur d'ordre 2  $\overline{\mathbf{F}}$  nommé *gradient de déformation* tel que :

$$\overline{\mathbf{F}}(\mathbf{x}_0, t_1) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \quad (\text{II.54})$$

Ce tenseur peut être interprété comme étant la mesure à l'instant  $t_1$  de la transformation d'un élément  $\partial \mathbf{x}$  de la structure par rapport à sa configuration initiale  $\partial \mathbf{x}_0$ . Il permet alors de définir le *tenseur de déformation de Green-Lagrange* tel que :

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \overline{\mathbf{F}}^T \overline{\mathbf{F}} - \overline{\mathbf{I}} \right) \quad (\text{II.55})$$

Ce tenseur se réécrit, en considérant que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$  :

$$\overline{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left( \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0}}_{\text{linéaire en } \mathbf{u}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T + \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0}}_{\text{ordre 2 en } \mathbf{u}} \right) \quad (\text{II.56})$$

Dans l'hypothèse de petites perturbations, on peut négliger les termes d'ordre 2 du tenseur de déformation de Green-Lagrange, de sorte que le tenseur des déformations soit de la forme :

$$\overline{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \right) \quad (\text{II.57})$$

On fait de plus l'hypothèse d'une loi de viscoélasticité linéaire entre le tenseur des contraintes et celui des déformations. Cette loi s'écrit :

$$\overline{\sigma} = \overline{\mathbf{H}} : \left( \overline{\mathbf{e}} + \xi_b \dot{\overline{\mathbf{e}}} \right) \quad (\text{II.58})$$

Dans l'équation II.58, le tenseur  $\overline{\mathbf{H}}$  est le *tenseur d'élasticité* de la loi de Hooke (tenseur d'ordre

4) et  $\xi_b$  est un terme d'amortissement visqueux interne.

Le tenseur de Hooke contient 81 termes. Cependant, des hypothèses simples permettent de réduire le nombre de coefficients à 21. En particulier, en supposant que le tenseur des contraintes dérive d'une énergie potentielle et par symétrie des tenseurs de contrainte  $\bar{\sigma}$  et de déformation  $\bar{\epsilon}$ , il est possible de réduire le nombre de termes indépendants à 21. La notation de Voigt permet d'écrire la loi de Hooke en exploitant ces propriétés pour exprimer  $\bar{\mathbf{H}}$  sous la forme d'un tenseur d'ordre 2 à 36 coefficients. Ce tenseur étant symétrique, les 21 coefficients du triangle supérieur forment les coefficients indépendants du tenseur de Hooke. La notation de Voigt permet de mettre  $\bar{\sigma}$  et  $\bar{\epsilon}$  sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{\sigma} \sim \sigma = (\sigma_{xx} \sigma_{yy} \sigma_{zz} \sigma_{yz} \sigma_{zx} \sigma_{xy})^T \\ \bar{\epsilon} \sim \epsilon = (\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} 2\epsilon_{yz} 2\epsilon_{zx} 2\epsilon_{xy})^T \end{cases} \quad (\text{II.59})$$

On peut reformuler la loi de viscoélasticité sous la forme :

$$\sigma = \mathbf{H}(\epsilon + \xi_b \dot{\epsilon}), \quad \bar{\mathbf{H}} \sim \mathbf{H} \quad (\text{II.60})$$

où  $\mathbf{H}$  est le tenseur élastique de la loi de Hooke d'ordre 2 selon la notation de Voigt.

On finit de définir le problème en prenant en compte les éventuelles conditions limites à appliquer sur les limites du domaine  $\partial\Omega$ . On sépare ce domaine en deux sous-domaines supplémentaires :

$$\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_\sigma \quad (\text{II.61a})$$

$$\emptyset = \partial\Omega_u \cap \partial\Omega_\sigma \quad (\text{II.61b})$$

Le sous domaine  $\partial\Omega_u$  désigne la partie de la surface externe sur laquelle on applique des conditions cinématiques de la forme :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_1) = \mathbf{u}_d(\mathbf{x}_0, t_1), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_u \quad (\text{II.62})$$

Le sous domaine  $\partial\Omega_\sigma$  désigne la partie de la surface externe sur laquelle on applique des contraintes de la forme :

$$\bar{\sigma}(\mathbf{x}_0, t_1) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_0, t_1) = \mathbf{t}(\mathbf{x}_0, t_1), \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_\sigma \quad (\text{II.63})$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale sortante sur l'élément de surface  $\partial\Omega_\sigma$  considéré.

### 3.3 Formulation forte de la dynamique linéaire des structures

En reprenant les équations de l'accélération dans le repère absolu [II.52](#), d'équilibre [II.53](#), de loi de comportement [II.57](#) et [II.58](#), et de conditions limites [II.62](#) et [II.63](#), on aboutit à la formulation forte du problème de dynamique des structures, dont nous cherchons à déterminer la solution en déplacement  $\mathbf{u}$  dans le repère orthonormé lié. Cette formulation du problème

s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{\text{div}} (\overline{\mathbf{H}} : (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \xi_b \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}})) + \mathbf{f}_v = \rho (\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + \boldsymbol{\Omega}^2 (\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) + 2\boldsymbol{\Omega} \dot{\mathbf{u}}) + \xi_a \dot{\mathbf{u}} \\ \\ \overline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0} \right)^T \right) \\ \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_u \\ \\ \overline{\mathbf{H}} : (\overline{\boldsymbol{\varepsilon}} + \xi_b \dot{\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_\sigma \\ \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}_0 \text{ à } t = 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.64})$$

Le problème en formulation forte ne peut être résolu directement que pour des configurations académiques, comme pour caractériser les vibrations longitudinales d'une barre ou celles transversales d'une corde vibrante. Cependant, il peut être remplacé par une autre formulation du problème permettant de traiter les géométries les plus complexes. Nous allons voir en particulier le cas de la formulation faible, point de départ de la méthode des éléments finis.

### 3.4 Formulation faible de la dynamique linéaire des structures

La solution du problème défini par II.64 n'étant pas facilement calculable dans la plupart des cas, on préfère substituer à la formulation forte une forme dite *faible*. Cela signifie que l'on va chercher une solution dans un espace fonctionnel plus régulier, plus simple que l'espace initial. Pour cela, on pondère par des *fonctions tests* l'équation différentielle à résoudre, et on procède à des intégrations par partie sur le domaine  $\Omega$  afin qu'il y ait autant de termes de dérivée de la solution que de termes de dérivée des fonctions tests. On suppose ainsi une certaine régularité des fonctions tests employées, de même qu'une différentiabilité de ces fonctions. En outre, on peut choisir le même espace fonctionnel entre les fonctions tests et la solution [95].

Dans notre cas, les fonctions tests vont être des champs de déplacement  $\delta \mathbf{u}$  dits *virtuels*, appartenant à l'espace des solutions cinématiquement admissibles. Ces déplacements virtuels sont de la forme  $\delta \mathbf{u} = (\delta u_1 \quad \delta u_2 \quad \delta u_3)^T$ . De plus, puisque nous supposons qu'ils font partie de l'espace des solutions cinématiquement admissibles, les déplacements virtuels vérifient :

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{u}_d, \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \partial\Omega_u \quad (\text{II.65})$$

Nous allons maintenant pondérer l'équation d'équilibre dynamique II.53 par un déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$  et intégrer sur le domaine  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T (\overrightarrow{\text{div}} \overline{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{f}_v - \rho R^T \ddot{\mathbf{y}} - \xi_a \dot{\mathbf{u}}) d\Omega = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \{\text{espace cinématiquement admissible}\} \quad (\text{II.66})$$

avec  $\ddot{\mathbf{y}}$  donné par l'équation II.52 et  $\overline{\boldsymbol{\sigma}}$  donné par la loi de comportement viscoélastique II.58. On réalise une intégration par partie du terme relatif aux efforts internes.

En utilisant le fait que  $\text{div}(\bar{\sigma}\delta\mathbf{u}) = \bar{\sigma} : \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}_0} + \delta\mathbf{u}^T \overrightarrow{\text{div}}\bar{\sigma}$  (obtenu par identité vectorielle [61] et propriété de symétrie du tenseur des contraintes), on obtient :

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \overrightarrow{\text{div}}\bar{\sigma} d\Omega = \int_{\partial\Omega} \delta\mathbf{u}^T (\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n}) d(\partial\Omega) - \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}_0} \right)^T : \bar{\sigma} d\Omega \quad (\text{II.67})$$

Le premier terme du membre à droite du signe = résulte de l'application du *théorème de Green-Ostrogradski*. Le vecteur  $\mathbf{n}$  est le vecteur de normale extérieure à  $\partial\Omega$ . Le deuxième terme est bien un scalaire du fait du produit doublement contracté de deux tenseurs d'ordre 2. De plus, le tenseur  $\frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}_0}$  est le *tenseur de gradient de déplacement virtuel*.

En considérant que les contraintes externes ne sont appliquées que sur  $\partial\Omega_{\sigma}$ , on aboutit finalement à la forme faible de l'équation d'équilibre dynamique :

$$\int_{\Omega} \rho R^T \delta\mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{y}} d\Omega + \int_{\Omega} \xi_a \delta\mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial(\delta\mathbf{u})}{\partial\mathbf{x}_0} \right)^T : \bar{\bar{\mathbf{H}}} : (\bar{\epsilon} + \xi_b \dot{\bar{\epsilon}}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega),$$

$$\forall \delta\mathbf{u} \in \{\text{espace des déplacements cinématiquement admissible}\} \quad (\text{II.68})$$

On obtient la même expression que si nous avons employé le principe des travaux virtuels [113]. L'espace des fonctions admissibles pour les composantes de  $\mathbf{u}$  et de  $\delta\mathbf{u}$  est le sous-espace fonctionnel de Sobolev  $H^1(\Omega)$  [62] pour lequel sont vérifiées les conditions limites sur  $\partial\Omega_u$  et  $\partial\Omega_{\sigma}$ .

Il est possible d'alléger l'expression II.68 en profitant de la notation de Voigt. Nous allons pour cela repartir de l'équation II.66.

$$\int_{\Omega} \delta\mathbf{u}^T (\overrightarrow{\text{div}}\bar{\sigma} + \mathbf{f}_v - \rho R^T \ddot{\mathbf{y}} - \xi_a \dot{\mathbf{u}}) d\Omega = 0$$

La notation de Voigt permet de reformuler l'opérateur de divergence sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{div}}\bullet \sim \nabla^T \bullet = \begin{pmatrix} \partial \bullet / \partial x_0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial \bullet / \partial y_0 & 0 \\ 0 & 0 & \partial \bullet / \partial z_0 \\ 0 & \partial \bullet / \partial z_0 & \partial \bullet / \partial y_0 \\ \partial \bullet / \partial z_0 & 0 & \partial \bullet / \partial x_0 \\ \partial \bullet / \partial y_0 & \partial \bullet / \partial x_0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (\text{II.69})$$

Avec cet opérateur de divergence, on note également que l'hypothèse des petits déplacements conduits à :

$$\epsilon = \nabla \mathbf{u} \quad (\text{II.70})$$

De plus, il convient de réécrire le vecteur de normale extérieure à  $\partial\Omega$  compte tenu de la nouvelle

forme du tenseur des contraintes dans la notation de Voigt. Cette normale s'écrit :

$$\mathbf{n} \sim \mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & n_1 \\ n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.71})$$

où les  $n_i$  sont les composantes du vecteur  $\mathbf{n}$  dans le référentiel orthonormé lié.

Ces considérations permettent de réécrire l'équation II.66 sous la forme :

$$\int_{\Omega} \rho R^T \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{y}} d\Omega + \int_{\Omega} \xi_a \delta \mathbf{u}^T \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \delta \mathbf{u})^T \mathbf{H}(\epsilon + \xi_b \dot{\epsilon}) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega),$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \in \{\text{espace des déplacements cinématiquement admissible}\}, \text{ avec } \epsilon = \nabla \mathbf{u} \quad (\text{II.72})$$

### 3.5 Discrétisation du problème en formulation faible

La dynamique de la structure exprimée en formulation faible n'est à ce stade pas plus simple à résoudre que lorsqu'elle est exprimée en formulation forte. On a alors recours à des méthodes d'approximation de la solution : celle-ci est projetée sur des sous-espaces de l'espace fonctionnel où elle est initialement recherchée.

Notons  $\mathcal{U}$  l'espace fonctionnel auquel doivent appartenir respectivement le déplacement recherché  $\mathbf{u}$  et le déplacement virtuel  $\delta \mathbf{u}$ . Les méthodes d'approximations consistent à rechercher respectivement  $\mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{u}$  dans  $\mathcal{W} \subset \mathcal{U}$  et  $\delta \mathcal{W} \subset \mathcal{U}$  de dimensions finies tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \mathbf{W}(\mathbf{x}_0) \mathbf{q}(t) \\ \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t) = \delta \mathbf{W}(\mathbf{x}_0) \delta \mathbf{q}(t) \end{cases} \quad (\text{II.73})$$

où  $\mathbf{W}(\mathbf{x}_0)$  et  $\delta \mathbf{W}(\mathbf{x}_0)$  sont des fonctions de base représentées par des matrices de taille  $3 \times w$  et  $3 \times \delta w$ , avec  $w$  et  $\delta w$  les dimensions de  $\mathcal{W}$  et  $\delta \mathcal{W}$ .

Si de plus, on choisit les mêmes fonctions de base pour la solution et la fonction test, alors on parle de procédure de Galerkinge (nous reviendrons sur cette procédure dans un chapitre ultérieur). On se place dans ce cas de figure pour faciliter la mise en équations. On injecte les déplacements de II.73, ainsi que l'accélération du point matériel  $P$  de l'équation II.52 dans II.72. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho (\mathbf{W} \delta \mathbf{q})^T (\mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{W} \mathbf{q}) + \boldsymbol{\Omega}^2 (\mathbf{x}_0 + \mathbf{W} \mathbf{q}) + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}) + \dots \\ + \int_{\Omega} \xi_a (\mathbf{W} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{W} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{H}(\nabla \mathbf{W} \mathbf{q} + \xi_b \nabla \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}) d\Omega - \dots \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{W} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{f}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} (\mathbf{W} \delta \mathbf{q})^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.74})$$

D'où, en sortant  $\delta \mathbf{q}$  de l'intégrale car uniquement dépendant du temps :

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}^T \left( \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T (\mathbf{W} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} (\mathbf{x}_0 + \mathbf{W} \mathbf{q}) + \boldsymbol{\Omega}^2 (\mathbf{x}_0 + \mathbf{W} \mathbf{q}) + 2\boldsymbol{\Omega} \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}) + \dots \right. \\ \left. + \int_{\Omega} \xi_a \mathbf{W}^T \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}} d\Omega + \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{W})^T \mathbf{H} (\nabla \mathbf{W} \mathbf{q} + \xi_b \nabla \mathbf{W} \dot{\mathbf{q}}) d\Omega - \dots \right. \\ \left. - \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{f}_v d\Omega - \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{W}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{II.75})$$

L'équation II.75 étant valable pour tout déplacement virtuel  $\delta \mathbf{q}$ , le problème de viscoélastodynamique en formulation faible discrétisée revient à chercher le vecteur  $\mathbf{q}$  vérifiant l'équation :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N}) \mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{II.76})$$

ainsi que les conditions initiales :

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 \quad (\text{II.77a})$$

$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 \quad (\text{II.77b})$$

Dans l'équation II.76, on note les différents termes :

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \mathbf{W} d\Omega \quad (\text{II.78a})$$

$$\mathbf{C} = \int_{\Omega} \xi_a \mathbf{W}^T \mathbf{W} d\Omega + \int_{\Omega} \xi_b (\nabla \mathbf{W})^T \mathbf{H} (\nabla \mathbf{W}) d\Omega \quad (\text{II.78b})$$

$$\mathbf{G} = \int_{\Omega} 2\rho \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Omega} \mathbf{W} d\Omega \quad (\text{II.78c})$$

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{W})^T \mathbf{H} (\nabla \mathbf{W}) d\Omega \quad (\text{II.78d})$$

$$\mathbf{P} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{W} d\Omega \quad (\text{II.78e})$$

$$\mathbf{N} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{W} d\Omega \quad (\text{II.78f})$$

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{W}^T \mathbf{f}_v d\Omega + \int_{\partial\Omega_\sigma} \mathbf{W}^T \mathbf{t} d(\partial\Omega) \quad (\text{II.78g})$$

$$\mathbf{r} = - \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \left( \mathbf{R}^T \ddot{\mathbf{s}} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \mathbf{x}_0 + \boldsymbol{\Omega}^2 \mathbf{x}_0 \right) d\Omega \quad (\text{II.78h})$$

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \mathbf{u}_0 d\Omega \quad (\text{II.78i})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \rho \mathbf{W}^T \dot{\mathbf{u}}_0 d\Omega \quad (\text{II.78j})$$

Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{N}$  sont nommées respectivement *matrice de masse*, *matrice d'amortissement*, *matrice de rigidité* et *matrice d'assouplissement centrifuge*. Elles sont symétriques de dimension  $w \times w$ . Les matrices  $\mathbf{G}$  et  $\mathbf{P}$  sont nommées *matrice de Coriolis* et *matrice d'accélération angulaire*. Elles sont également de dimension  $w \times w$ , mais antisymétriques.

Il est courant lorsque l'on étudie la dynamique d'un solide de se placer dans l'état d'équilibre atteint après application des contraintes statiques. Dans le cas où de grandes déformations statiques sont attendues, l'hypothèse consistant à négliger les termes d'ordre 2 dans l'équation II.56 du tenseur de déformation de Green-Lagrange n'est plus valide. La prise en compte de ces termes non-linéaires dans la loi de viscoélasticité linéaire fait apparaître une raideur géométrique non-linéaire supplémentaire notée  $\mathbf{K}_G$  [33, 74] dans l'équation de la dynamique II.76. La valeur de cette raideur géométrique dépend de la précontrainte et donc de l'équilibre statique atteint. La résolution de l'équation II.79 à l'aide d'un algorithme de type Newton-Raphson permet de calculer simultanément le déplacement statique  $\mathbf{q}_{\text{stat}}$  et la raideur géométrique associée.

$$(\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_{\text{stat}}))\mathbf{q}_{\text{stat}} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{II.79})$$

Les équations d'équilibre autour de la position statique  $\mathbf{q}_{\text{stat}}$  peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{C} + \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_{\text{stat}}))\mathbf{q} = \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{II.80})$$

Pour alléger l'écriture, nous négligeons les effets de Coriolis ( $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ ) et effectuons le changement de notation suivant :

$$\mathbf{K} \sim \mathbf{K} + \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_{\text{stat}}) \quad (\text{II.81a})$$

$$\mathbf{x} \sim \mathbf{q} \quad (\text{II.81b})$$

$$\mathbf{f} \sim \mathbf{f} + \mathbf{r} \quad (\text{II.81c})$$

La nouvelle équation de la dynamique de la structure se note donc :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{II.82})$$

Les matrices intervenant dans l'équation II.82 peuvent être de taille importante. En particulier, il est courant d'observer des configurations industrielles contenant plusieurs centaines de milliers de degrés de liberté. Il peut être intéressant d'avoir recours à des méthodes de réduction pour réduire la taille d'un modèle numérique. Nous allons rappeler le principe des méthodes de réduction dans la prochaine sous-section et en particulier la méthode de Craig-Bampton, utilisée dans le cadre de ce travail de thèse.



### 3.6 Réduction de modèle

Le principe des méthodes de réduction est de rechercher la solution au problème dans un espace de dimension plus petit. Plus formellement et dans le cadre de la dynamique des structures, il s'agit de projeter le vecteur des déplacements sur une base dont la dimension est inférieure à celle de l'espace initial des solutions. Cela s'écrit :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{q} \quad (\text{II.83})$$

où  $\mathbf{T}$  est la matrice de passage de la base complète à la base réduite. On peut alors exprimer l'équation de la dynamique en base réduite selon :

$$\mathbf{M}_r\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}_r\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_r\mathbf{q} = \mathbf{f}_r \quad (\text{II.84})$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_r &= \mathbf{T}^T\mathbf{M}\mathbf{T} \\ \mathbf{C}_r &= \mathbf{T}^T\mathbf{C}\mathbf{T} \\ \mathbf{K}_r &= \mathbf{T}^T\mathbf{K}\mathbf{T} \\ \mathbf{f}_r &= \mathbf{T}^T\mathbf{f} \end{cases} \quad (\text{II.85})$$

Les méthodes de réduction permettent de réaliser des calculs sur des configurations industrielles qui ne seraient pas possibles autrement en raison des temps de calcul et des ressources informatiques disponibles aujourd'hui. Une description détaillée des méthodes de réduction usuelles peut être trouvée dans le mémoire d'habilitation à diriger des recherches de Tran [161].

Dans le cadre de ce travail de thèse, la méthode de réduction de Craig-Bampton [44] a été employée pour traiter la structure avec non-linéarités de frottement. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre V.

Cette méthode propose de réduire la dynamique de la structure étudiée en la caractérisant seulement par un ensemble de degrés de liberté physiques et en réduisant tous les autres. Les degrés de liberté physiques sont décrits par les relevés statiques  $\Psi_{\mathbf{C}}$ , obtenus en imposant successivement un déplacement unitaire à chacun de ces degrés de liberté. Les degrés de liberté réduits sont quant à eux décrits par un ensemble de modes normaux à interface fixe  $\Phi$ , obtenus en bloquant les degrés de liberté physiques précédemment retenus et en calculant les modes propres  $\Phi$  de la structure dans cette configuration. La Figure II.5 illustre ces deux familles de modes.

En notant  $\mathbf{x}_f$  les degrés de liberté physiques retenus, aussi appelés degrés de liberté *frontières*, et  $\mathbf{q}_i$  les degrés de liberté généralisés des modes normaux  $\Phi$ , alors on peut écrire la réduction :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Psi_{\mathbf{C}} & \Phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_f \\ \mathbf{q}_i \end{pmatrix}$$

La réduction intervient dans le choix du nombre de modes normaux conservés : plus on en conserve et plus le modèle est précis, mais plus il est grand. La réduction est exacte si on conserve tous les modes possibles, soit si :

$$\dim(\mathbf{x}) = \dim(\mathbf{x}_f) + \dim(\mathbf{q}_i) \quad (\text{II.86})$$

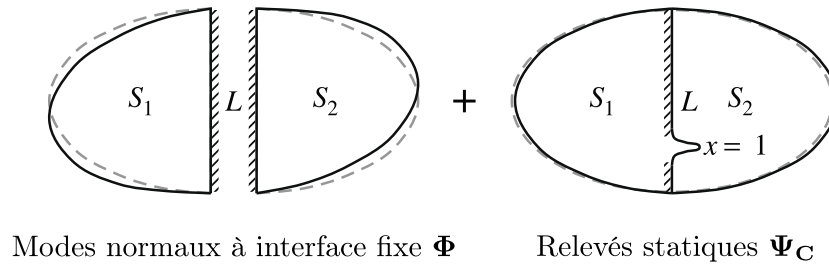


FIGURE II.5 – Illustration de la base de projection dans la réduction de Craig-Bampton (adapté de Tran [160])

Il existe de nombreuses méthodes de réduction dans le cadre de la mécanique des structures. Le choix de la méthode dépend majoritairement du problème traité. Le phénomène physique étudié, la géométrie employée ainsi que les conditions limites appliquées au système sont des critères pouvant permettre de choisir la méthode de réduction la plus adaptée au problème à résoudre. Dans le cas de la méthode de Craig-Bampton, l'intérêt est de pouvoir conserver des nœuds physiques sur lesquels on pourra observer ou appliquer de façon directe des efforts particuliers en base physique. Notons qu'il est également possible d'imposer des efforts en base réduite en passant par la matrice de projection  $\mathbf{T}$ .

Les méthodes de réduction permettent de réduire la taille du problème en le projetant sur un espace de plus petite dimension. Il est également possible de réduire cette taille en exploitant les propriétés du système étudié, sans passer par l'emploi de méthode de réduction. Dans le cadre des turbomachines, la propriété de symétrie cyclique permet d'exprimer le mouvement de la roue aubagée complète en résolvant la dynamique d'un seul de ces secteurs. Cette propriété va être décrite dans la prochaine section.

## 4 Modélisation des structures en symétrie cyclique

### 4.1 Relation de propagation

Une structure à symétrie cyclique est une structure se fermant sur elle-même dont la géométrie peut être construite entièrement par rotations successives d'un secteur de référence. À ce titre, les turbomachines peuvent être considérées comme des structures à symétrie cyclique : on peut construire une roue aubagée contenant  $N$  aubes grâce à  $N - 1$  rotations du secteur de référence autour de l'axe de rotation de la roue. L'angle entre deux secteurs est noté  $\beta = \frac{2\pi}{N}$ .

Nous allons utiliser la propriété de symétrie cyclique pour décrire la dynamique de ce type de structure. On considère une structure  $\mathcal{S}$  possédant cette propriété. La structure est formée de  $N$  secteurs notés  $\mathcal{S}_k$  pour  $k \in \{0, \dots, N - 1\}$  et tels que  $\mathcal{S} = \bigcup_k \mathcal{S}_k$ . Le déplacement de la

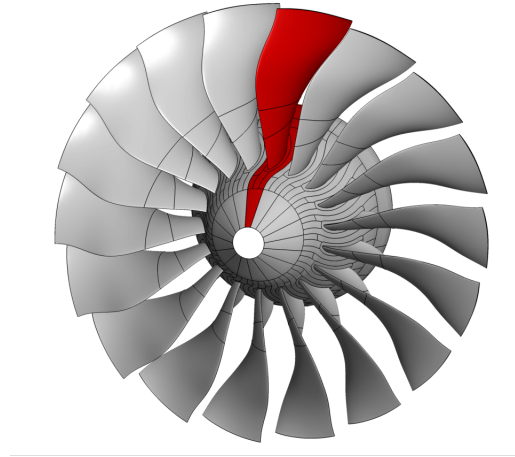


FIGURE II.6 – Structure à symétrie cyclique construite à partir du secteur de référence (rouge)

structure  $\mathcal{S}$  est décrit par le vecteur  $\mathbf{x}$  tel que :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1} \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k,g} \\ \mathbf{x}_{k,i} \\ \mathbf{x}_{k,d} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{x}_{k+1,d} = \mathbf{x}_{k,g} \quad (\text{II.87})$$

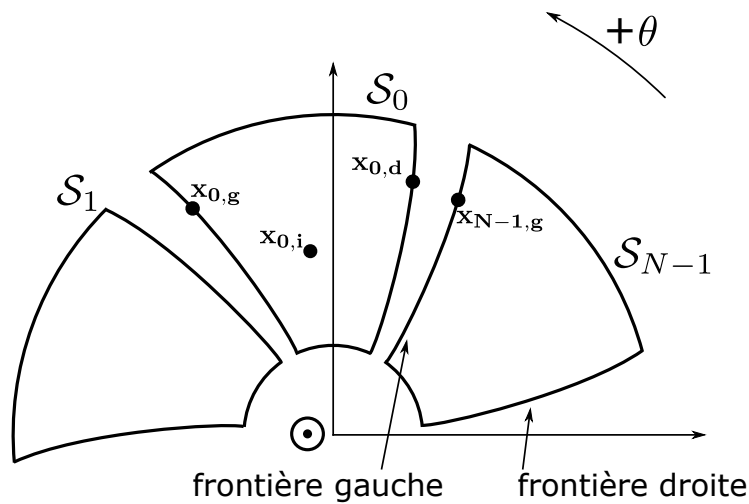


FIGURE II.7 – Représentation des frontières entre secteurs consécutifs

Dans l'équation II.87, les  $\mathbf{x}_k$  contiennent respectivement les degrés de liberté du secteur  $\mathcal{S}_k$  correspondant. Les secteurs sont indexés dans l'ordre croissant dans le sens trigonométrique par rapport à l'axe de rotation de la structure. Les vecteurs  $\mathbf{x}_{k,g}$  et  $\mathbf{x}_{k,d}$  contiennent quant à eux les degrés de liberté sur les frontières inter-secteurs gauche et droite du secteur  $\mathcal{S}_k$ .  $\mathbf{x}_{k,i}$  sont les degrés de liberté internes au secteur  $\mathcal{S}_k$ . On passe de la frontière droite d'un secteur à sa frontière gauche en effectuant une rotation d'un angle  $\beta$  dans le sens trigonométrique. La Figure II.7 illustre la structure ainsi considérée.

Compte tenu de l'équation II.87, on s'aperçoit que certains nœuds sont redondants dans la formulation de  $\mathbf{x}$ . Il est possible d'exprimer les déplacements sur un vecteur  $\mathbf{x}$  défini tel que :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_k \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N-1} \end{pmatrix}, \text{ avec } \mathbf{x}_k = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{k,i} \\ \mathbf{x}_{k,d} \end{pmatrix} \quad (\text{II.88})$$

L'équation de la dynamique de  $\mathcal{S}$  peut ainsi être écrite selon :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{II.89})$$

où  $\mathbf{f}$  est un éventuel effort extérieur appliqué sur  $\mathcal{S}$ . Cette structure étant périodique en azimuth, on peut écrire :

$$\mathbf{x}_{k+N} = \mathbf{x}_k ; \forall k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.90})$$

Par ailleurs, la périodicité spatiale de la structure permet de décomposer le mouvement de celle-ci selon une somme d'harmoniques spatiales. Cela revient à dire que le mouvement sur un secteur  $k$  quelconque peut être construit à partir du mouvement d'un secteur de référence. En notation complexe pour une harmonique  $\alpha$  donné, cette relation de propagation du mouvement s'écrit :

$$\mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}}_\alpha e^{j\alpha k}, \quad \text{où } \tilde{\mathbf{x}}_\alpha \in \mathbb{C}^{N_{S_0}} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \quad (\text{II.91})$$

où  $N_{S_0}$  est le nombre de degré de liberté du secteur de référence.

Compte tenu de l'équation II.90, on peut réécrire l'équation II.91 comme :

$$e^{j\alpha N} = 1 \quad (\text{II.92})$$

On obtient donc :

$$\alpha \equiv 0 \pmod{\left(\frac{2\pi}{N}\right)} \equiv 0 \pmod{\beta} \quad (\text{II.93})$$

En notant  $\tilde{\mathbf{x}}_n \sim \tilde{\mathbf{x}}_\alpha$  le déplacement complexe du secteur de référence, on réécrit l'équation II.91 comme :

$$\mathbf{x}_k = \tilde{\mathbf{x}}_n e^{jn k \beta} ; \forall n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{II.94})$$

Le nombre  $n$  porte le nom de *nombre à diamètres*.

## 4.2 Transformée de Fourier et analyse modale en symétrie cyclique

La solution  $\mathbf{x}_k$  s'écrit à partir de la relation II.94 comme la résultante des harmoniques spatiales  $\tilde{\mathbf{x}}_n$  :

$$\mathbf{x}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\mathbf{x}}_n e^{jn k \beta} \quad (\text{II.95})$$

où :

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \mathbf{x}_{\mathbf{k}} e^{-jnk\beta} \quad (\text{II.96})$$

La décomposition du mouvement de la structure selon l'équation II.95 permet de mettre en évidence l'apparition de motifs à diamètres. Par ailleurs, il est possible de montrer que  $\tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{N}-\mathbf{n}} = \overline{\tilde{\mathbf{x}}_{-\mathbf{n}}}$  et ainsi que :

$$\mathbf{x}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}} e^{jnk\beta} + \tilde{\mathbf{x}}_{-\mathbf{n}} e^{-jnk\beta} \right) + (-1)^k \tilde{\mathbf{x}}_{\frac{N}{2}} & \text{si } N \text{ pair} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}} + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \left( \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}} e^{jnk\beta} + \tilde{\mathbf{x}}_{-\mathbf{n}} e^{-jnk\beta} \right) & \text{si } N \text{ impair} \end{cases} \quad (\text{II.97})$$

L'analyse de la dynamique du secteur de référence seul permet d'obtenir la dynamique de la roue complète. Nous allons donc chercher les modes propres du secteur de référence, en supposant un motif à  $n$  diamètres sur la structure. Pour cela, on se place en régime libre ( $\mathbf{f} = 0$ ) conservatif ( $\mathbf{C} = 0$ ). L'équation du mouvement s'écrit dans ce cas :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{gg}} & \mathbf{M}_{\mathbf{gi}} & \mathbf{M}_{\mathbf{gd}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{ig}} & \mathbf{M}_{\mathbf{ii}} & \mathbf{M}_{\mathbf{id}} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{dg}} & \mathbf{M}_{\mathbf{di}} & \mathbf{M}_{\mathbf{dd}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{n},\mathbf{i}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{gg}} & \mathbf{K}_{\mathbf{gi}} & \mathbf{K}_{\mathbf{gd}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{ig}} & \mathbf{K}_{\mathbf{ii}} & \mathbf{K}_{\mathbf{id}} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{dg}} & \mathbf{K}_{\mathbf{di}} & \mathbf{K}_{\mathbf{dd}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{i}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}} \\ 0 \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} \end{pmatrix} \quad (\text{II.98})$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}}$  et  $\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}}$  sont les efforts de liaison produits par les secteurs adjacents sur le secteur de référence. Compte tenu de la relation de propagation II.91, nous avons de plus les relations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} e^{jn\beta} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{g}} = -\tilde{\mathbf{f}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} e^{jn\beta} \end{cases} \quad (\text{II.99})$$

On peut réécrire l'équation de la dynamique II.98 en tenant compte des conditions limites cycliques II.99 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_{\mathbf{ii}} & \mathbf{M}_{\mathbf{id}} + \mathbf{M}_{\mathbf{ig}} e^{jn\beta} \\ \mathbf{M}_{\mathbf{di}} + \mathbf{M}_{\mathbf{gi}} e^{-jn\beta} & \mathbf{M}_{\mathbf{dd}} + \mathbf{M}_{\mathbf{gg}} + \mathbf{M}_{\mathbf{dg}} e^{jn\beta} + \mathbf{M}_{\mathbf{gd}} e^{-jn\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{n},\mathbf{i}} \\ \ddot{\tilde{\mathbf{x}}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{II.100}) \\ + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\mathbf{ii}} & \mathbf{K}_{\mathbf{id}} + \mathbf{K}_{\mathbf{ig}} e^{jn\beta} \\ \mathbf{K}_{\mathbf{di}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gi}} e^{-jn\beta} & \mathbf{K}_{\mathbf{dd}} + \mathbf{K}_{\mathbf{gg}} + \mathbf{K}_{\mathbf{dg}} e^{jn\beta} + \mathbf{K}_{\mathbf{gd}} e^{-jn\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{i}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_{\mathbf{n},\mathbf{d}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

que l'on peut réécrire plus simplement :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{n}} \ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{n}} + \mathbf{K}_{\mathbf{n}} \mathbf{x}_{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{II.101})$$

Le problème aux valeurs propres associé est :

$$\left( \mathbf{K}_{\mathbf{n}} - \omega_n^2 \mathbf{M}_{\mathbf{n}} \right) \mathbf{x}_{\mathbf{n}} = 0 \quad (\text{II.102})$$

La résolution du problème aux valeurs propres défini par l'équation II.102 permet de déterminer les  $N_{S_0}$  modes complexes  $(\Phi_{\mathbf{n}}, \omega_n)$  sur le secteur de référence pour un nombre à diamètre  $n$ .

Les problèmes aux valeurs propres associés aux nombres à diamètre 0 et  $\frac{N}{2}$  (dans le cas où  $N$  est pair pour ce dernier) sont définis à l'aide de matrices réelles symétriques. Celles-ci sont diagonalisables, et les valeurs propres et vecteurs propres sont réels. On parle de modes non-dégénérés. Pour les autres nombres à diamètre, les matrices de masse et de raideur sont hermitiennes, d'où des valeurs propres réelles associées à des sous-espaces propres deux à deux orthogonaux. On parle dans ce cas là de modes dégénérés.

Puisque  $\tilde{\mathbf{x}}_{-n} = \overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}$  d'après l'équation II.96, le problème aux valeurs propres II.102 pour un nombre à diamètre  $-n$  fournit les modes suivants :

$$\begin{cases} \Phi_{-n} = \overline{\Phi_n} \\ \omega_{-n} = \omega_n \end{cases} \quad (\text{II.103})$$

Une fois les modes obtenus sur le secteur de référence, on peut reconstruire les déplacements sur la structure  $\mathcal{S}$ . Nous allons aborder ce point dans la prochaine sous-section.

### 4.3 Dynamique de la structure complète en symétrie cyclique

#### Description de la dynamique en base complexe

À partir des équations II.88 et II.97, on peut exprimer l'équation II.89 de la dynamique sur  $\mathcal{S}$  dans la base cyclique en effectuant le changement de base suivant (on suppose  $N$  pair pour alléger l'écriture) :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \Phi_0 & \Phi_1 & \Phi_{-1} & \dots & \Phi_{\frac{N}{2}} \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j\beta} & \Phi_{-1} e^{-j\beta} & \dots & -\Phi_{\frac{N}{2}} \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j2\beta} & \Phi_{-1} e^{-j2\beta} & \dots & \Phi_{\frac{N}{2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi_0 & \Phi_1 e^{j(N-1)\beta} & \Phi_{-1} e^{-j(N-1)\beta} & \dots & -\Phi_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_{-1} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{\frac{N}{2}} \end{pmatrix} = \Phi \mathbf{q}, \quad \Phi \in \mathbb{C}^{N \times N_{S_0}, N \times N_{S_0}} \quad (\text{II.104})$$

En raison de l'hypothèse de symétrie cyclique, les matrices de masse et de raideur de l'équation II.89 sont circulantes par bloc. Or, les matrices circulantes sont diagonalisées par les matrices de Fourier définies par :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j\beta} & e^{-j\beta} & \dots & -1 \\ 1 & e^{j2\beta} & e^{-j2\beta} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{j(N-1)\beta} & e^{-j(N-1)\beta} & \dots & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{II.105})$$

Ainsi, les matrices de masse et de raideur sont diagonalisées par bloc par  $\mathbf{G} \otimes \mathbf{I}$  où  $\otimes$  désigne le produit de Kronecker et  $\mathbf{I}$  la matrice identité. Chaque diamètre peut donc être étudié indépendamment.

Malgré l'usage de modes complexes pour décrire la dynamique de  $\mathcal{S}$ , le mouvement de la structure est réel. Considérons une structure se déformant selon un mode  $\Phi_n$  avec une phase initiale

nulle, le mouvement s'obtient par :

$$\mathbf{x} = \text{Re} \left( \mathbf{q}_n \Phi_n e^{j\omega_n t} \right) = \mathbf{q}_n \left( \Phi_n^{\text{R}} \cos(\omega_n t) - \Phi_n^{\text{I}} \sin(\omega_n t) \right) \quad (\text{II.106})$$

en utilisant la décomposition suivante :

$$\Phi_n = \Phi_n^{\text{R}} + j\Phi_n^{\text{I}} \quad (\text{II.107})$$

D'après II.106, l'utilisation de modes complexes revient à déplacer la structure selon un motif d'onde tournante à  $n$  diamètres dans le référentiel de la roue. Dans le cas d'un rotor, on parlera d'onde directe si l'onde tourne dans le même sens de rotation que celui de la roue dans le référentiel absolu. Dans le cas contraire, on parlera d'onde rétrograde. Les modes complexes à diamètres  $n$  et  $-n$  désignent des ondes tournantes en sens opposés.

### Description de la dynamique en base réelle

Dans les sous-sections précédentes, nous avons décrit la dynamique de  $\mathcal{S}$  selon une base d'ondes tournantes définie par des modes complexes. Il est toutefois possible de décrire le mouvement de la structure selon une base constituée de modes réels. En effet, à l'aide de l'équation II.97 dans le cas où  $N$  est pair (la démarche pour le cas impair est identique) et des relations II.103 - II.107, on montre que :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k = \Phi_0 \mathbf{q}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} & \left( \left( \Phi_n^{\text{R}} \cos(nk\beta) - \Phi_n^{\text{I}} \sin(nk\beta) \right) (\mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{-n}) + \dots \right. \\ & \left. + \left( \Phi_n^{\text{I}} \cos(nk\beta) + \Phi_n^{\text{R}} \sin(nk\beta) \right) j (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{-n}) \right) + (-1)^k \Phi_{\frac{N}{2}} \mathbf{q}_{\frac{N}{2}} \end{aligned} \quad (\text{II.108})$$

Compte tenu du fait que  $\tilde{\mathbf{x}}_n = \Phi_n \mathbf{q}_n$ , on utilise le fait que  $\tilde{\mathbf{x}}_{-n} = \overline{\tilde{\mathbf{x}}_n}$  et que  $\Phi_{-n} = \overline{\Phi_n}$  pour montrer que  $\mathbf{q}_{-n} = \overline{\mathbf{q}_n}$ . On peut donc réécrire l'équation II.108 sous la forme :

$$\mathbf{x}_k = \Phi'_0 \mathbf{q}'_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \left( \Phi'_n \mathbf{q}'_n + \Phi''_n \mathbf{q}''_n \right) + (-1)^k \Phi'_{\frac{N}{2}} \mathbf{q}'_{\frac{N}{2}} \quad (\text{II.109})$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi'_{0,k} = \Phi_0 & \text{et } \mathbf{q}'_0 = \mathbf{q}_0 \\ \Phi'_{n,k} = \Phi_n^{\text{R}} \cos(nk\beta) - \Phi_n^{\text{I}} \sin(nk\beta) & \text{et } \mathbf{q}'_n = \mathbf{q}_n + \mathbf{q}_{-n} \\ \Phi''_{n,k} = \Phi_n^{\text{I}} \cos(nk\beta) + \Phi_n^{\text{R}} \sin(nk\beta) & \text{et } \mathbf{q}''_n = j (\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_{-n}) \\ \Phi'_{\frac{N}{2},k} = \Phi_{\frac{N}{2}} & \text{et } \mathbf{q}'_{\frac{N}{2}} = \mathbf{q}_{\frac{N}{2}} \end{array} \right. \quad (\text{II.110})$$

Les équations II.109 et II.110 caractérisent le mouvement de la structure selon des modes à diamètres définis en base réelle. Considérons un mode réel  $\Phi'_{n,k}$ . La déformée de la structure selon ce mode réel s'écrit alors :

$$\mathbf{x} = \text{Re} \left( \mathbf{q}'_n \Phi'_{n,k} e^{j\omega_n t} \right) = \mathbf{q}'_n \Phi'_{n,k} \cos(\omega_n t) \quad (\text{II.111})$$

D'après II.111, l'utilisation de modes réels revient à déplacer la structure selon un motif d'ondes stationnaires à  $n$  diamètres dans le référentiel de la roue. Pour un mode réel, tous les secteurs

vibrent en phase, contrairement aux modes complexes décrits au paragraphe précédent où les secteurs sont déphasés en raison du caractère tournant de l'onde. Les représentations réelles et complexes des modes à diamètres sont totalement équivalentes. En effet, la résultante d'un mode direct à  $n$  diamètres avec le mode rétrograde correspondant à  $-n$  diamètres de même amplitude est une onde stationnaire à  $n$  diamètres dans le référentiel de la roue. À l'inverse, la combinaison des deux modes stationnaires correspondants avec le bon déphasage temporel crée une onde tournante dans un sens ou dans l'autre.

### Passage de la base réelle à la base complexe

Les bases modales complexes et réelles sont équivalentes. On peut passer d'une base à l'autre par l'emploi de la matrice de passage adaptée. La matrice de passage est définie par  $\mathbf{R}$  telle que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{q}'_n \\ \mathbf{q}''_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I} \\ j\mathbf{I} & -j\mathbf{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_{-n} \end{pmatrix} = \mathbf{R} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_{-n} \end{pmatrix} \quad (\text{II.112})$$

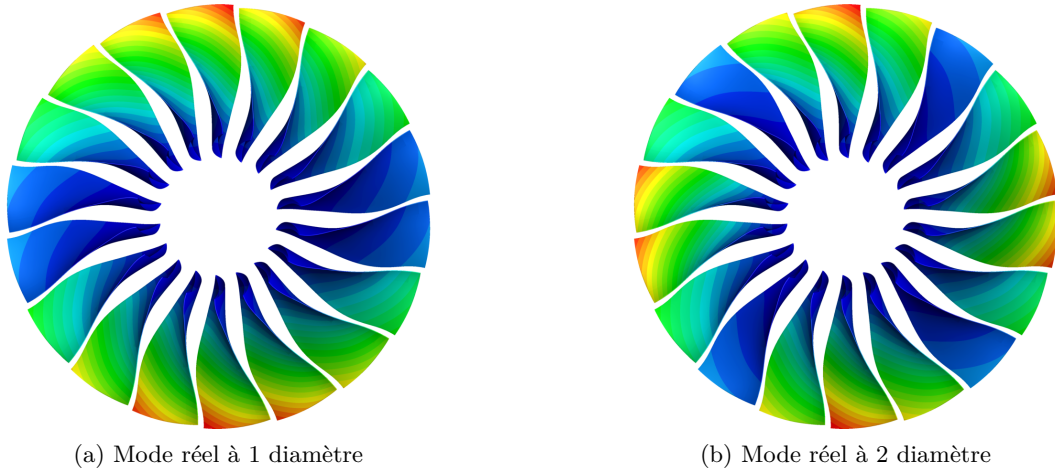


FIGURE II.8 – Illustration des amplitudes de déformation de deux modes réels de flexion

### 4.4 Correspondance harmonique spatiale/temporelle

Dans le cadre des phénomènes d'interaction fluide structure en turbomachine, des efforts d'origine aérodynamique sont attendus sur la roue aubagée. Les phénomènes d'interaction relevant de la réponse libre (dont le flottement fait partie) sont caractérisés par des fréquences naturelles identiques pour les dynamiques respectives du fluide et de la structure. Considérons un effort externe périodique en temps  $\mathbf{f}$  à  $m$  diamètres appliqué sur la roue aubagée. Celui-ci s'écrit :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_0 \\ \mathbf{f}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (\text{II.113})$$

avec  $\mathbf{f}_k$  l'effort appliqué sur le secteur  $k$ . Les efforts étant périodiques, celui appliqué sur le



secteur de référence se décompose en série de Fourier dans le domaine temporel selon :

$$\mathbf{f}_0 = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh\omega t} \quad (\text{II.114})$$

où  $\tilde{\mathbf{f}}_h$  sont les coefficients complexes de la décomposition en série de Fourier de  $\mathbf{f}_0$ . Pour le secteur  $k$ , on supposera que les efforts aérodynamiques sont les mêmes que pour le secteur 0, avec un retard de phase dépendant du numéro du secteur. Ainsi, on a pour le secteur  $k$  :

$$\mathbf{f}_k = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh(\omega t - km\beta)} \quad (\text{II.115})$$

On peut réécrire  $\mathbf{f}$  comme :

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh\omega t} \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh(\omega t - m\beta)} \\ \vdots \\ \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh(\omega t - (N-1)m\beta)} \end{pmatrix} \quad (\text{II.116})$$

Considérons une déformée de la structure complète  $\mathcal{S}$  selon un mode  $\Phi \in \mathbb{C}^{N \times N_{s_0}}$  à  $n$  diamètres. La déformée s'écrit pour tous les secteurs à partir de l'équation II.104 :

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_n \\ \Phi_n e^{jn\beta} \\ \vdots \\ \Phi_n e^{j(N-1)n\beta} \end{pmatrix} \quad (\text{II.117})$$

La projection des efforts aérodynamiques  $\mathbf{f}$  sur le mode  $\Phi$  donne les forces aérodynamiques généralisées associées à ce mode :

$$\mathbf{f}_{\text{ag},n} = \Phi^H \mathbf{f} = \sum_{k=0}^{N-1} \Phi_n^H e^{-jk n \beta} \mathbf{f}_k \quad (\text{II.118})$$

avec la définition du vecteur transconjugué  $\bullet^H = \overline{\bullet}^T$ .

À partir de II.118, on obtient :

$$\mathbf{f}_{\text{ag},n} = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \Phi_n^H \tilde{\mathbf{f}}_h e^{jh\omega t} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\beta(n+hm)} \quad (\text{II.119})$$

L'équation II.119 fait apparaître la somme d'une suite géométrique. Deux solutions sont alors possibles :

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{-jk\beta(n+hm)} = \begin{cases} N & \text{si } n + hm \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.120})$$

L'équation II.120 met en évidence une condition entre l'harmonique spatiale  $n$  du mode et l'harmonique temporelle  $h$  de l'effort externe à  $m$  diamètres pour que l'harmonique temporelle

de l'effort en question excite le mode à  $n$  diamètres. Cette condition est souvent mise en équation comme :

$$hm = pN - n \quad , \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.121})$$

La même démarche peut être appliquée avec une onde  $-n$ , menant à l'expression :

$$hm = pN + n \quad , \quad \forall p \in \mathbb{Z} \quad (\text{II.122})$$

On la représente graphiquement selon le diagramme Zig-Zag illustré en Figure II.9.

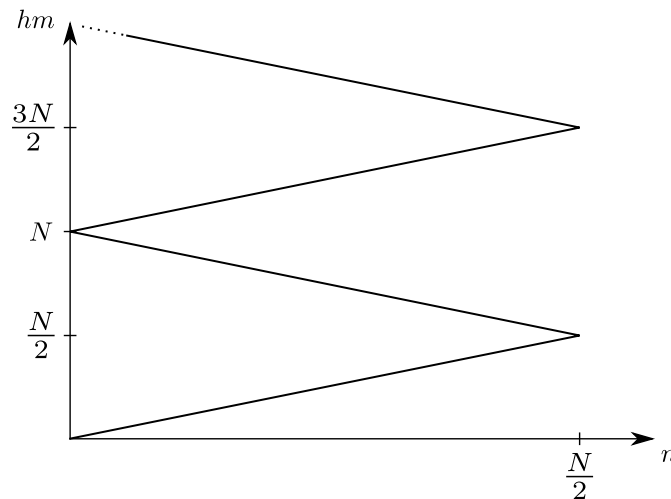


FIGURE II.9 – Illustration du diagramme Zig-Zag

Nous venons de voir dans les sections précédentes les mises en équation des problèmes fluides, acoustiques et mécaniques séparément. Dans le cadre de l'étude des comportements aéroélastiques de soufflante, il convient de décrire le couplage fluide structure, liant entre elles les différentes physiques que nous venons d'aborder. Nous allons décrire la mise en œuvre du couplage fluide structure dans la prochaine section.

## 5 Mise en œuvre du couplage fluide structure

La résolution numérique d'un problème multi-physique peut généralement être abordée de deux manières différentes. La première approche consiste à résoudre simultanément l'ensemble des équations caractérisant les physiques étudiées en n'utilisant qu'un seul solveur. Cette approche est nommée *méthode monolithique*. Une seconde approche consiste à employer des solveurs différents conçus respectivement pour l'étude d'une physique donnée, puis à les faire communiquer entre eux pour réaliser le couplage. Cette seconde approche est nommée *approche partitionnée*.

Les approches partitionnées ont l'avantage de n'utiliser que des solveurs déjà existants. Ces solveurs font généralement appel à des méthodes numériques avancées pour optimiser les différentes étapes de résolution des physiques qu'ils traitent. Une question à considérer reste toutefois la gestion du transfert d'informations d'un solveur à l'autre. En particulier, l'énergie du système doit être conservée au cours du transfert. Dans le cadre de ces travaux de thèse, une approche

partitionnée a été employée afin d'utiliser au mieux les outils numériques déjà existants au sein des laboratoires ainsi que chez le partenaire industriel.

Dans un contexte de simulation fluide structure, les informations à transférer entre le fluide et la structure sont les efforts produits par le fluide sur la structure et le déplacement de cette dernière au sein du fluide au cours du temps. Il y a donc deux aspects à considérer dans ce type de problème : le transfert spatial de l'information et son évolution temporelle. Nous allons aborder ces deux aspects dans les sous-sections suivantes.

## 5.1 Représentation spatiale du couplage

### 5.1.1 Formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian

La formulation Arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) [53] est une méthode permettant de prendre en compte une déformation de la structure étudiée dans les calculs aérodynamiques. La formulation ALE est mise en œuvre dans cette thèse dans le cadre de la méthode des volumes finis utilisée par le solveur fluide *elsA*. Pour rappel, la méthode des volumes finis travaille sur une discrétisation de la géométrie complexe du domaine fluide selon un ensemble discret de volumes simples, comme des tétraèdres ou des hexaèdres. L'ensemble de ces volumes finis forment le maillage du domaine fluide. La méthode des volumes finis consiste alors à intégrer les équations de Navier-Stokes sur chacun de ces domaines élémentaires.

La méthode ALE permet de prendre en compte dans la méthode des volumes finis une vitesse de grille  $\mathbf{s}$  du maillage aérodynamique qui est amené à se déformer en suivant les déformations de la structure. Reprenons les équations RANS en supposant l'absence de termes volumiques. Elles peuvent être écrites sous la forme alternative suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{R}(\mathbf{W}) = 0 \quad (\text{II.123})$$

avec :

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\rho} \tilde{E} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{W}) = \vec{\nabla} \cdot \mathcal{F}(\mathbf{W}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}} \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^T \otimes \tilde{\mathbf{u}} + \bar{p} \mathbf{I} - (\tau + \tau_{\mathbf{r}}) \\ \bar{\rho} \tilde{E} \tilde{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{j}_{\text{th}}} + \bar{p} \tilde{\mathbf{u}} - \tau \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} \quad (\text{II.124})$$

où  $\tau$  est le tenseur des forces visqueuses appliquées sur les surfaces externes du volume,  $\tau_{\mathbf{r}}$  le tenseur de Reynolds et  $\overline{\mathbf{j}_{\text{th}}}$  le vecteur densité de flux thermique décrit en sous-section II.1.1. L'équation II.123 est intégrée sur un volume de noté  $\Omega_c$ . Par application du théorème de Green-Ostrogradski, on a :

$$\int_{\Omega_c} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} \mathcal{F}(\mathbf{W}) d\partial\Omega = 0 \quad (\text{II.125})$$

où  $\partial\Omega_c$  est la surface externe du volume de contrôle. En tenant compte d'une vitesse de grille  $\mathbf{s}$  du maillage aérodynamique, l'équation II.125 peut être réécrite en tenant compte du théorème de transport de Reynolds. Ce dernier s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \mathbf{W} d\Omega = \int_{\Omega_c} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{W} (\mathbf{s} \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{e}}) d\partial\Omega \quad (\text{II.126})$$

où  $\mathbf{n}_e$  est la normale sortante à l'élément de surface  $d\partial\Omega$ . En utilisant l'équation II.126, on peut réécrire les équations RANS selon la méthode des volumes finis en formulation ALE :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_c} \mathbf{W} d\Omega + \int_{\partial\Omega_c} \begin{pmatrix} \bar{\rho} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{s}) \\ \bar{\rho} \tilde{\mathbf{u}}^T \otimes (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{s}) + \bar{p} \mathbf{I} - (\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_r) \\ \bar{\rho} \tilde{E} (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{s}) + \bar{\mathbf{j}}_{th} + \bar{p} \tilde{\mathbf{u}} - \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{u}} \end{pmatrix} d\partial\Omega = 0 \quad (\text{II.127})$$

L'équation II.127 permet de déterminer l'évolution temporelle des variables conservatives moyennées de l'écoulement en tenant compte d'une vitesse de déformation du maillage aérodynamique. La déformation du maillage est généralement provoquée par la déformation d'une condition limite. Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous nous intéressons à la déformation des aubes de soufflante lorsque celles-ci sont en rotation. Il y a donc deux aspects à prendre en compte : la déformation de la condition limite, et la propagation de la déformation dans tout le maillage aérodynamique. Nous allons aborder ces deux notions dans les prochains paragraphes.

### 5.1.2 Transfert des déplacements entre maillages incompatibles

Pour une approche de couplage partitionnée, les déplacements des interfaces aéroélastiques sont calculés sur un modèle mécanique. Ces interfaces ne sont pas nécessairement coïncidentes entre le modèle mécanique et le modèle aérodynamique (comme illustré en Figure II.10). Un traitement de l'information doit être effectué pour avoir une représentation du déplacement sur le modèle aérodynamique cohérente avec le déplacement obtenu sur le modèle mécanique.

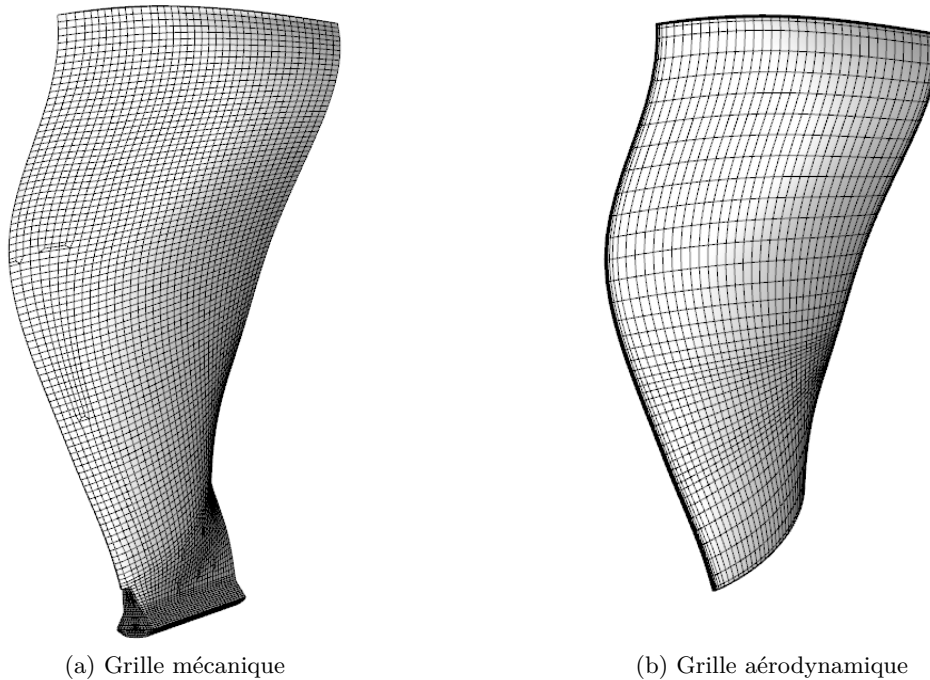


FIGURE II.10 – Illustration des interfaces aéroélastiques incompatibles

On considère dans ce paragraphe un système de coordonnées eulériennes. L'approche utilisée pour transférer les déplacements du maillage mécanique vers la grille aérodynamique est une

approche par Radial Basis Functions (RBF) [47]. Cette approche permet d'interpoler sur un espace un champ connu seulement sur une grille de référence  $\mathbf{x}_r$  de cet espace. Notons  $\mathbf{d}$  un tel champ et  $\mathbf{x}$  un point quelconque de l'espace. L'interpolation par RBF consiste à définir les valeurs de  $\mathbf{d}$  en  $\mathbf{x}$  tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{d}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \phi(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r^i\|) + \mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{d}(\mathbf{x}_r^i) &= \mathbf{d}_r^i \end{cases} \quad (\text{II.128})$$

où  $n_r$  est le nombre de points sur lequel le champ  $\mathbf{d}$  est supposé connu,  $\mathbf{d}_r^i$  sont les valeurs connues de  $\mathbf{d}$  sur le point de référence  $\mathbf{x}_r^i = (x_r^i \ y_r^i \ z_r^i)^T$  appartenant à la grille de référence  $\mathbf{x}_r$ ,  $\alpha_i$  sont des scalaires,  $\phi$  une RBF par rapport à une distance euclidienne  $\|\cdot\|$  et  $\mathbf{p}$  un polynôme. On ajoute au système II.128 la condition suivante :

$$\sum_{i=1}^{n_r} \alpha_i \mathbf{q}(\mathbf{x}_r^i) = \mathbf{0} \quad (\text{II.129})$$

valable pour tout polynôme  $\mathbf{q}$  de degré inférieur ou égal au degré du polynôme  $\mathbf{p}$ . Il est indiqué dans Beckert et Wendland [15] que choisir des RBF conditionnellement définies positives d'ordre 2 permet de choisir un polynôme  $\mathbf{p}$  linéaire de la forme :

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_r^i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_r^i + \beta_2 \cdot y_r^i + \beta_3 \cdot z_r^i \quad (\text{II.130})$$

Les valeurs des coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  sont déterminées en résolvant le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_r & \mathbf{P}_r \\ \mathbf{P}_r^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_r^i \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{II.131})$$

où  $\mathbf{M}_r$  est la matrice de taille  $n_r \times n_r$  contenant les termes  $\phi_{ij} = \phi(\|\mathbf{x}_r^i - \mathbf{x}_r^j\|)$ ,  $\mathbf{P}_r$  est la matrice de taille  $n_r \times 4$  dont la  $i$ -ème ligne est  $(1 \ x_r^i \ y_r^i \ z_r^i)$ ,  $\alpha$  est le vecteur des coefficients  $\alpha_i$  et  $\beta$  le vecteur des coefficients  $\beta_i$  du polynôme  $\mathbf{p}$ .

On a ainsi une évaluation de la déformée sur la nouvelle grille. De nombreuses fonctions peuvent être utilisées pour les RBF [47]. Dans le cadre de ce travail de thèse, des RBF de type Thin Plate Spline ont été utilisées :  $\phi(x) = x^2 \log(x^2)$ .

### 5.1.3 Déformation de maillage

Afin de déformer le maillage aérodynamique utilisé au cours des simulations aéroélastiques, une analogie avec la déformation d'un matériau élastique a été utilisée. Cette analogie emploie le maillage aérodynamique en tant que modèle élément fini [58]. Chaque maille représente un élément, possédant un module d'Young  $E$  et un coefficient de Poisson  $\nu$ . La déformation du maillage consiste à résoudre le problème statique du domaine élastique pour une déformation connue des limites du domaine. Dans la suite de ce manuscrit, on considère un maillage aérodynamique structuré.

On introduit pour chaque élément la base  $N$  des fonctions d'interpolation  $N_i$  et les coordonnées isoparamétriques  $(r, s, t)$ . Le domaine associé à chaque élément est alors défini par :

$$(r, s, t) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (\text{II.132})$$

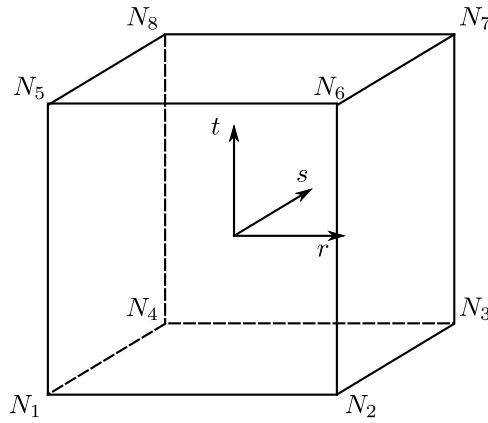


FIGURE II.11 – Élément hexaédrique du maillage aérodynamique structuré

Le maillage étant structuré, les éléments sont hexaédriques. Les composantes d'un champ sont ses valeurs aux sommets de l'hexaèdre. Les coordonnées de ces sommets sont indépendantes de l'élément considéré en coordonnées isoparamétriques. On définit les fonctions d'interpolation  $N_i$  comme :

$$\begin{cases} N_1 = 1/8(1-r)(1-s)(1-t) \\ N_2 = 1/8(1+r)(1-s)(1-t) \\ N_3 = 1/8(1+r)(1+s)(1-t) \\ N_4 = 1/8(1-r)(1+s)(1-t) \\ N_5 = 1/8(1-r)(1-s)(1+t) \\ N_6 = 1/8(1+r)(1-s)(1+t) \\ N_7 = 1/8(1+r)(1+s)(1+t) \\ N_8 = 1/8(1-r)(1+s)(1+t) \end{cases} \quad (\text{II.133})$$

La matrice de raideur de cet élément s'obtient par intégration sur le volume de l'élément :

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} d\Omega \quad (\text{II.134})$$

où :

$$\mathbf{C} = \frac{E}{(1+\nu)(1-\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{II.135})$$

Dans l'équation II.134, la matrice  $\mathbf{B}$  donne la relation linéaire entre le champ de déplacement et le champ de déformation du volume. Dans la méthode utilisée, l'intégrale est calculée avec une méthode d'intégration par  $n_G$  points de Gauss :

$$\mathbf{K}_e = \Omega_e \sum_{i=1}^{n_G} \omega_i \mathbf{B}_i^T \mathbf{C} \mathbf{B}_i \quad (\text{II.136})$$

Dans l'équation II.136,  $\Omega_e$  est le volume de l'élément considéré. Les matrices  $\mathbf{B}_i$  sont évaluées aux points de Gauss affectés des poids  $\omega_i$  et donnent la relation linéaire entre les composantes du champ de déplacement  $\mathbf{q}_i$  sur la base des fonctions d'interpolation  $N_i$  et le champ de déformation :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 & \dots & \mathbf{B}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_8 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (\text{II.137})$$

Une fois obtenu l'ensemble des matrices de raideur élémentaires, on peut assembler les éléments pour obtenir la matrice de raideur globale du maillage. On calcule alors la déformation du maillage pour un déplacement d'une condition limite en résolvant le problème d'équilibre statique linéaire associé au maillage élément fini :

$$\mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (\text{II.138})$$

On partitionne les degrés de liberté de  $\mathbf{x}$  en  $\mathbf{x}_f$  (déplacements connus à la frontière) et  $\mathbf{x}_i$  (déplacements inconnus à déterminer). L'équation II.138 se réécrit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{if} \\ \mathbf{K}_{fi} & \mathbf{K}_{ff} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{f}_f \end{pmatrix} \quad (\text{II.139})$$

Il n'y a pas d'effort externe sur les degrés de liberté  $\mathbf{x}_i$ , on a donc la relation suivante, permettant de déterminer le déplacement des degrés de liberté  $\mathbf{x}_f$  :

$$\mathbf{K}_{ii}\mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_{if}\mathbf{x}_f \quad (\text{II.140})$$

La résolution de II.140 permet de calculer la déformation de maillage associée à un déplacement prédéterminé d'une ou plusieurs conditions limites. Dans la méthode utilisée, le module d'Young de chaque élément est une fonction de son volume : la raideur de l'élément augmente lorsque le volume de la cellule diminue. Cela permet d'éviter des problèmes numériques au cours de la déformation de maillage comme l'apparition de cellules négatives. Différentes fonctions peuvent être utilisées pour lier le module d'Young au volume de la cellule, pouvant améliorer la qualité de la déformation selon les cas d'étude. De manière non exhaustive, on utilise par exemple des relations du type :  $E \sim \frac{1}{\Omega_e} \sim \sqrt{\frac{1}{\Omega_e}}$ .

## 5.2 Représentation temporelle du couplage

L'enjeu de la représentation temporelle du couplage dans une approche partitionnée est de transmettre correctement les informations d'un solveur à l'autre au cours des simulations sans introduire de retard entre les physiques. Deux approches peuvent alors être envisagées. La première est une approche One-Way, où un des solveurs effectue une unique analyse avant de diffuser l'information à l'autre solveur sans rétroaction du second sur le premier. La seconde est

une approche de couplage dynamique, ou Two-Way, où les solveurs s'échangent les informations à chaque étape de calcul.

La première approche constitue une approche de couplage faible, où la première physique résolue est supposée être peu impactée par la seconde. La seconde approche constitue une approche de couplage plus forte, où des précautions doivent être prises dans le transfert des informations entre solveurs. Nous allons voir ces deux aspects dans les deux prochains paragraphes.

### 5.2.1 Hypothèse de couplage faible

La première approche suppose que la dynamique de la structure est peu impactée par les efforts fluides qui s'appliquent sur celle-ci : les déformées, fréquences propres et raideurs généralisées des modes ne dépendent pas du fluide. Ainsi, on peut étudier le comportement aéroélastique du système en utilisant le principe de superposition de la structure linéaire : on étudie séparément les effets du fluide sur chacun des modes de structure.

En pratique, cela revient à imposer dans un calcul fluide un mouvement harmonique aux interfaces aéroélastiques selon un mode de structure à la fréquence propre de ce mode. Dans le cas de l'étude du comportement aéroélastique de soufflante, un mouvement harmonique d'une certaine amplitude est imposé aux aubes de la soufflante, et on étudie le comportement du fluide sur une période de vibration. Cette démarche suppose que les modes de la structure linéaire ont été déterminés à l'avance pour un modèle mécanique, avant d'être transmis au fluide, d'où la dénomination de couplage One-Way.

### 5.2.2 Calcul en couplage dynamique

Le couplage dynamique ne fait pas d'hypothèse sur les effets d'une physique sur l'autre. Celles-ci doivent être résolues conjointement en échangeant des informations entre les solveurs à chaque étape de calcul, d'où la dénomination de couplage Two-Way. À ce stade encore, différents niveaux de couplage existent, offrant des compromis entre complexité algorithmique et précision du couplage.

La Conventional Serial Staggered Procedure constitue la méthode de couplage dynamique la plus simple entre deux physiques. Elle consiste à résoudre alternativement et successivement chacune des physiques en utilisant les résultats de la dernière itération de chacune d'entre elles.

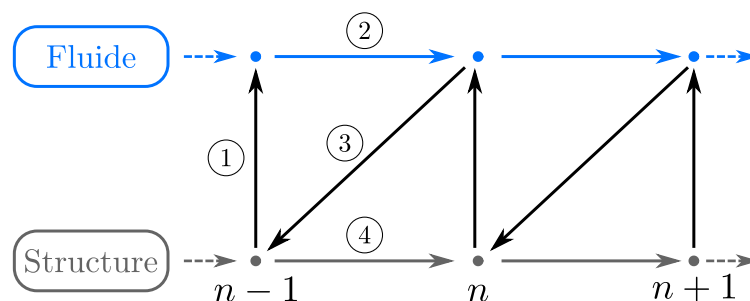


FIGURE II.12 – Illustration de la Conventional Serial Staggered Procedure

La Figure II.12 illustre cette procédure : la position de la structure à un instant  $n$  est fournie au solveur fluide, qui évalue le nouveau champ à l'instant  $n + 1$  compte tenu de la position de



la structure à l'instant  $n$ . Les efforts du fluide à l'instant  $n + 1$  sont transmis à la structure à l'instant  $n$  pour évaluer le nouveau déplacement à l'instant  $n + 1$ . Ce type d'algorithme introduit donc un décalage temporel entre les physiques du fluide et de la structure, pouvant se traduire par un apport d'énergie au système d'origine purement numérique [123]. Dans le cadre de l'étude de la stabilité aéroélastique des soufflantes, cela signifie que la limite de stabilité de flottement pourrait être mal prédite avec ce type d'algorithme.

Afin de s'affranchir des problèmes de conservation de l'énergie induits par l'algorithme temporel de couplage, d'autres algorithmes plus coûteux ou complexes ont été développés. Parmi ces nouvelles méthodes de couplage plus fortes, la méthode de couplage par point fixe demeure la plus simple à mettre en œuvre. Celle-ci consiste à faire converger à chaque étape de calcul les deux physiques résolues en chaînant les calculs selon une méthode de point fixe. De cette manière, on s'assure qu'à convergence des deux physiques dans la boucle de point fixe, l'énergie est conservée (dans la mesure où les procédures de transfert des déplacements et des efforts n'introduisent pas de biais). La Figure II.13 illustre la procédure en question.

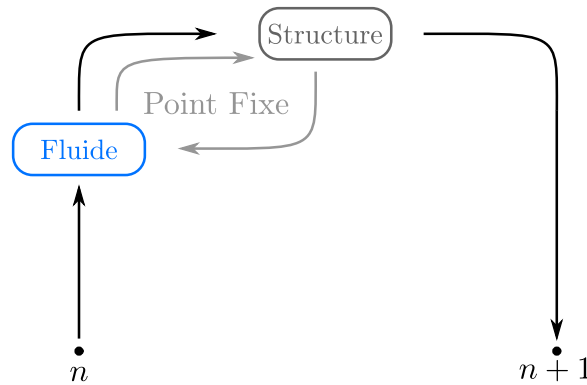


FIGURE II.13 – Illustration du couplage par point fixe

Pour les calculs aéroélastiques réalisés en couplage dynamique dans le cadre de ces travaux de thèse, ce dernier algorithme a été choisi afin de s'affranchir des problèmes de conservation de l'énergie.

Maintenant que les physiques définissant le problème aéroélastique des soufflantes ont été décrites, nous allons dans la prochaine section déterminer la stabilité de flottement d'une soufflante typique de ce que l'on peut trouver dans l'état de l'art.

## 6 Stabilité aéroélastique d'un modèle industriel de soufflante dans un cadre de mécanique linéaire

Nous allons dans cette section déterminer la stabilité aéroélastique d'une soufflante industrielle. Nous nous plaçons pour le moment dans un cadre de mécanique linéaire, où l'on considère les interfaces aube disque comme collées. Le modèle numérique va tout d'abord être décrit. Nous aborderons ensuite les résultats obtenus pour des calculs stationnaires, avant de passer aux calculs aéroélastiques instationnaires. Nous décrirons les méthodes de simulation en couplage faible et en couplage dynamique, et analyserons des écarts sur les résultats obtenus en termes de

stabilité aéroélastique.

### 6.1 Modèle numérique et solveur fluide

La configuration étudiée est une soufflante industrielle de 18 aubes représentée en roue complète, avec une entrée d'air de type "Bellmouth" : il s'agit d'une entrée d'air axi-symétrique permettant d'assurer une homogénéité de l'écoulement amont, utilisée pour caractériser les performances d'un moteur. Il a été choisi d'étudier cette configuration afin de pouvoir comparer les résultats numériques obtenus avec des données expérimentales fournies par Safran Aircraft Engines. Cette configuration reprend celle utilisée dans les travaux de Bontemps [21]. La Figure II.14 illustre la soufflante placée dans son entrée d'air.

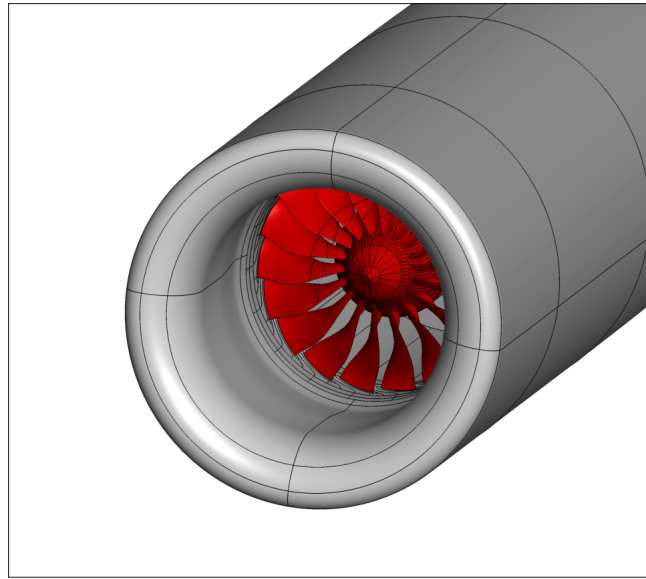


FIGURE II.14 – Modèle utilisé pour les calculs CFD

#### Paramètres du solveur fluide

Le solveur utilisé pour réaliser les calculs de mécanique des fluides est *elsA*, développé par l'ONERA [27, 28]. Il s'agit d'un code volume fini résolvant les équations 3D URANS en écoulement compressible. Le modèle de turbulence  $k-l$  de Smith (voir paragraphe 1.3.3) a été choisi, notamment pour sa robustesse au vannage le long de l'isovitesse étudiée. Le schéma spatial permettant d'estimer les flux convectifs à chaque cellule est le schéma de Roe [136] avec correcteur de van Albada [165] (schéma décentré d'ordre 2).

Les calculs stationnaires aérodynamiques sont résolus en employant une méthode par pseudo-pas de temps local à chaque cellule [144]. L'algorithme d'intégration temporelle pour résoudre les pas de temps fluide lors des calculs aéroélastiques instationnaires est le Dual Time Stepping (DTS) [12]. Le pas de temps des calculs aéroélastiques a été choisi de sorte à réaliser 384 itérations par période de vibration du mode propre étudié, tandis que 40 sous-itérations duales ont été conservés entre deux pas de temps physiques. Le maillage aérodynamique est déformé selon la méthode par analogie avec la déformation d'un matériau élastique définie en sous-section 5.1.3. Les déformées étudiées sont des déformées selon des modes de structure linéaire, que ce soit

pour la méthode de couplage faible définie en sous-section 5.2.1 ou celle en couplage dynamique définie en sous-section 5.2.2. Pour le couplage dynamique, un schéma de point fixe est réalisé entre la structure et le fluide. Les équations mécaniques résolues sont des équations modales : les efforts aérodynamiques calculés par *elsA* sont projetés sur la base des modes considérés, et l'avance en temps de la structure est réalisée avec un schéma de Newmark (ce schéma est détaillé dans la sous-section III.2.1).

## Maillage

On maille le domaine fluide entourant une structure 360° de soufflante avec son entrée d'air. Le maillage complet a été obtenu en fusionnant deux maillages générés sur deux logiciels différents : le premier est le maillage de la soufflante dont la limite amont se situe juste avant le bout du moyeu pour éviter des singularités, le second est le maillage de l'entrée d'air et du domaine externe au moteur. Le maillage de la soufflante a été réalisé sous *Autogrid*, celui de l'entrée d'air sous *ICEM*. Le maillage final contient 11 millions de cellules, dont environ 3 millions pour l'entrée d'air et 410000 par secteur de la soufflante. Une étude de convergence en maillage réalisée sur le même modèle dans une autre étude [21] a montré que celui utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse était suffisant pour représenter les phénomènes que l'on cherche à caractériser. En particulier, les topologies et niveaux d'énergie échangée entre le fluide et la structure sont correctement représentés pour le maillage à 11 millions de cellules.

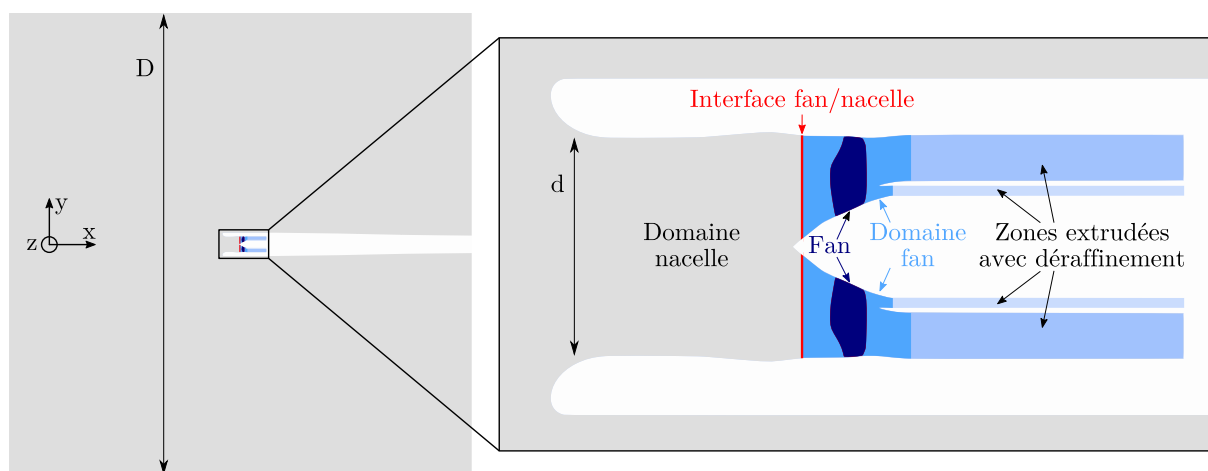


FIGURE II.15 – Vue en coupe du domaine maillé pour les calculs CFD (adapté de Bontemps [21])

Les flux primaires et secondaires en aval de la soufflante ont été extrudés par rapport à la configuration réelle, en imposant un facteur de dilatation des cellules de l'ordre de 1.2 selon l'axe du moteur entre deux cellules consécutives. Ce choix a été fait pour des considérations acoustiques : les conditions limites en sortie de domaine peuvent conduire à des effets de réflexion acoustique parasite d'origine purement numérique. On évite ces effets non physiques en utilisant les propriétés dissipatives du schéma de Roe ainsi que l'expansion des cellules dans l'axe du moteur qui atténuent d'autant plus les éventuelles ondes qui pourraient se réfléchir sur la condition limite.

Les mêmes considérations ont été prises pour le maillage du domaine extérieur au moteur, où un déraffinement des cellules a également été appliqué dans les directions s'éloignant du moteur

avec un facteur 1.2 entre deux cellules consécutives. Les limites du domaine constituent un cube, dont le côté est un multiple du diamètre de la soufflante ( $D/d \sim 30$ ). La Figure II.15 illustre le domaine maillé (la partie grise est le domaine maillé avec *ICEM*, celles en bleu forment celui obtenu avec *Autogrid*).

### Conditions limites

Les conditions limites externes du domaine sont les conditions dénommées *nref* dans *elsA*. Il s'agit de conditions de non-réflexion utilisant l'ensemble des grandeurs conservatives en champ lointain pour fonctionner par application des relations caractéristiques. On se place dans les conditions atmosphériques standards suivantes en champ lointain :

$$\begin{cases} p_t^\infty & = 101325 \text{ Pa} \\ T_t^\infty & = 288.15 \text{ K} \\ M_x^\infty & = 0.1 \end{cases} \quad (\text{II.141})$$

Les conditions limites aux parois sont des conditions d'adhérence de type *walladia*, pour lesquelles la vitesse à la paroi de l'écoulement est égale à la vitesse de la paroi en question, et où aucun échange de chaleur n'est observé avec celle-ci. De plus, on étudie l'iso-vitesse à 75% de la vitesse de rotation nominale, pour laquelle des interactions acoustiques entre la soufflante et l'entrée d'air sont attendues.

Des conditions d'équilibre radial sont appliquées en sortie des flux primaire et de secondaire, imposant une évolution radiale de la pression statique : les équations de quantité de mouvement sont projetées selon la direction radiale en repère cylindrique en supposant un flux axi-symétrique et une vitesse radiale nulle, menant à la loi d'évolution radiale de la pression :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho u_\theta^2}{r} \quad (\text{II.142})$$

où  $u_\theta$  est la vitesse orthoradiale du fluide telle que  $\mathbf{u}_\theta = u_\theta \mathbf{e}_\theta$ .

Remarque : en pratique, le flux n'est pas axisymétrique, et une valeur moyennée en azimuth de  $u_\theta$  est utilisée.

Enfin, le raccord des maillages entre l'entrée d'air et la soufflante est effectué à l'aide d'un plan de mélange pour les calculs stationnaires, et avec une interface RNA (pour Réduction du Nombre d'Aubes) pour les calculs instationnaires (voir Annexe A de Bontemps [21]). Le plan de mélange réalise une moyenne azimuthale du champ en amont de l'interface par rapport au sens de l'écoulement, et transmet les valeurs obtenues directement au champ en aval de l'interface rotor stator. On perd ainsi la topologie de l'écoulement lors de la transmission de l'information, ce qui est problématique dans un cas instationnaire en présence d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air. Ainsi, on préfère employer dans un cas instationnaire une interface de type RNA pour interpoler le champ d'une grille à l'autre de part et d'autre de l'interface.

## 6.2 Calculs stationnaires

Cette sous-section décrit le comportement stationnaire de la soufflante à 75% de la vitesse de rotation nominale. La Figure II.16 illustre le diagramme caractéristique de la soufflante consi-

dérée. Le taux de compression  $\Pi$  affiché est le rapport de pression totale entre deux sections situées respectivement à l'aval et à l'amont de la soufflante. Il a été calculé pour la soufflante seule, la section avale étant placée avant le bec séparant les flux primaire et secondaire. Le débit en abscisse est adimensionné par rapport à un des points calculés. Sur cette Figure sont tracées l'iso-vitesse à 75% de régime nominal calculée avec *elsA* ainsi que des iso-vitesses déterminées expérimentalement. Plus particulièrement, on y retrouve les iso-vitesses à 70% et 80%, ainsi que deux iso-vitesses obtenues dans un voisinage de 75% du régime nominal.

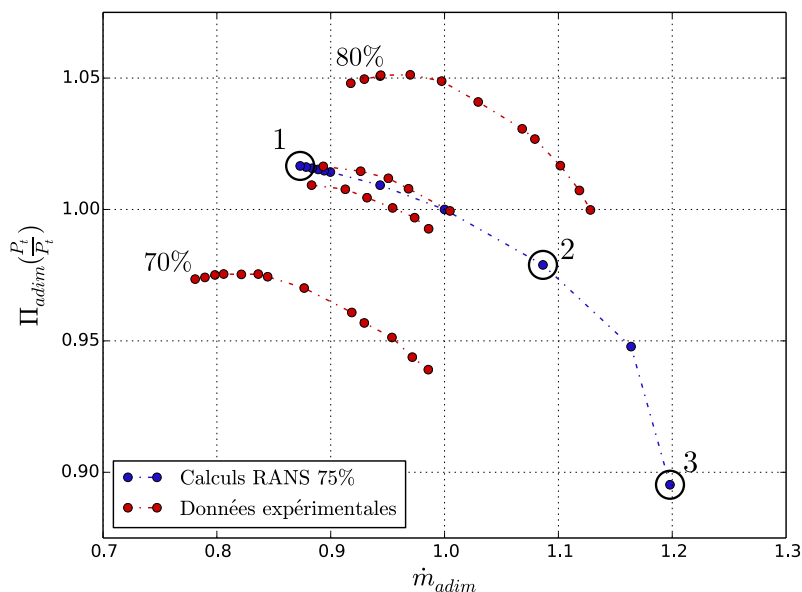


FIGURE II.16 – Diagramme caractéristique de la soufflante considérée

On constate que pour de faibles débits à 75% de régime nominal, les résultats numériques sont bien corrélés avec les mesures expérimentales. Pour des débits plus importants, il semble en revanche que les iso-vitesses expérimentales tendent vers le blocage sonique plus rapidement que ce qu'indiquent les résultats numériques. Cet écart s'explique de plusieurs manières. Tout d'abord, les calculs stationnaires ont été réalisés avec la même géométrie d'aube en fonctionnement. Cette géométrie est toutefois susceptible d'évoluer le long de l'iso-vitesse étudiée selon le point de fonctionnement considéré. Un impact est donc à prévoir sur les performances de la roue aubagée obtenues par calculs. De plus, l'iso-vitesse calculée à 75% de régime nominale caractérise la soufflante seule, tandis que les mesures expérimentales tiennent compte de la présence d'un Outlet Guide Vane (OGV). Les résultats expérimentaux affichés décrivent donc l'ensemble soufflante-OGV. La présence du stator est susceptible d'induire des pertes de performance de l'étage complet soufflante-OGV, d'où un taux de compression expérimental diminuant plus rapidement à l'approche du blocage. Enfin, les conditions limites imposées en champ lointain, constantes sur toute l'iso-vitesse calculée numériquement, ne permettent pas de maintenir jusqu'à l'entrée du moteur un champ strictement conforme à ce qui est observé en essai, notamment du point de vue des grandeurs turbulentes.

Pour les points 1, 2 et 3 représentés sur la Figure II.16, les topologies de l'écoulement ont été tracées en Figure II.17. Les Figures II.17a, II.17b et II.17c sont des coupes à 90% de la hau-

teur de veine. En passant du point 3 au point 1 le long de l'iso-vitesse, on observe des topologies déjà abordées en sous-section 1.2.2. En particulier, le canal inter-aube est bloqué en tête d'aube par une onde de choc en sortie de soufflante dans le cas 3 (Figures II.17e et II.17f), tandis qu'un choc se développe en tête d'aube en extrados en passant du point 2 au point 1 (Figures II.17a à II.17d). Le choc en tête d'aube devient de plus en plus fort comme le montre la Figure II.17b, entraînant une déviation de l'écoulement.

Dans la suite de ce mémoire, il sera fait référence à plusieurs points précis de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal. Ces points, nommés dpXX, sont identifiés par un débit précis qui est indiqué dans le Tableau II.2.

	dp00	dp10	dp18	dp19	dp20	dp21	dp22
$\dot{m}_{adim}$	1.	0.943	0.900	0.894	0.889	0.884	0.878

TABLEAU II.2 – Points de fonctionnement de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal étudiés pour les analyses de stabilité aéroélastique

Dans le cadre de ces travaux de thèse, nous sommes intéressés par les points de fonctionnement proches de la ligne de pompage à 75% de régime nominal (zone ② sur la Figure 1.10). Les résultats des calculs stationnaires étant bien corrélés aux mesures expérimentales, nous validons ainsi le modèle utilisé sur cette plage de fonctionnement. Nous allons déterminer dans la sous-section suivante la stabilité aéroélastique de la soufflante sur l'iso-vitesse à 75% de la vitesse de rotation nominale. Nous allons en particulier considérer les deux méthodes de couplage détaillées en sous-sections 5.2.1 et 5.2.2.

## 6.3 Calcul de la stabilité aéroélastique

### 6.3.1 Simulation en mouvement harmonique imposé

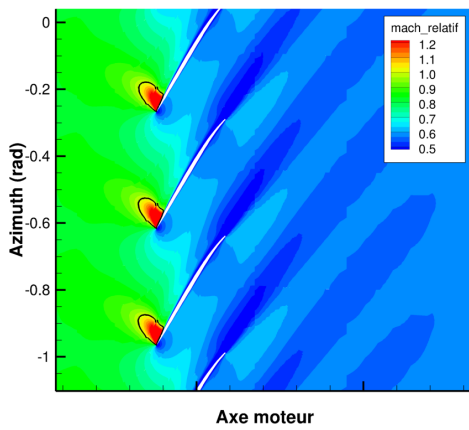
Nous nous intéressons ici au calcul de la stabilité aéroélastique d'une soufflante dans un cadre de couplage faible. Par couplage faible, il est entendu que les modes de la structure sont supposés n'être ni couplés entre eux par le fluide, ni impactés par celui-ci. Il est ainsi possible d'étudier la stabilité de chacun des modes de la structure séparément, en prescrivant à cette dernière la dynamique d'un mode de vibration donné au cours d'une simulation aéroélastique instationnaire : un bilan énergétique incluant les efforts aérodynamiques associés au mouvement prescrit permet à posteriori de statuer sur la stabilité du système couplé.

#### Méthode de calcul de la stabilité

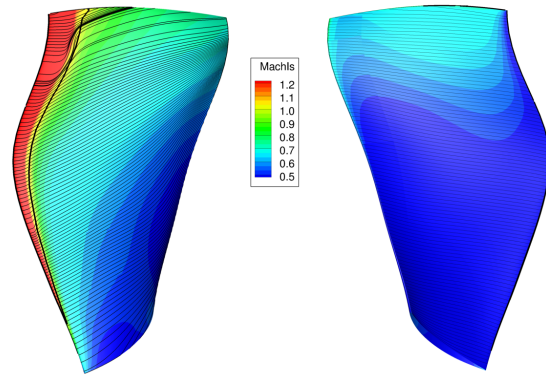
Considérons l'équation de la dynamique de la structure, dans laquelle une force externe d'origine aérodynamique  $\mathbf{f}_{aero}$  est appliquée. Cette force n'est pas un terme de forçage, mais un terme d'interaction libre entre le fluide et la structure : il s'agit d'une force répondant au mouvement de la structure. L'équation de la dynamique s'écrit :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f}_{aero}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) \quad (\text{II.143})$$

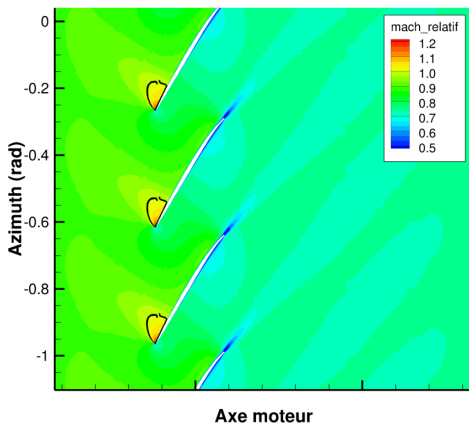
On projette le mouvement de la structure sur un mode complexe tournant  $\Phi$ . On peut alors



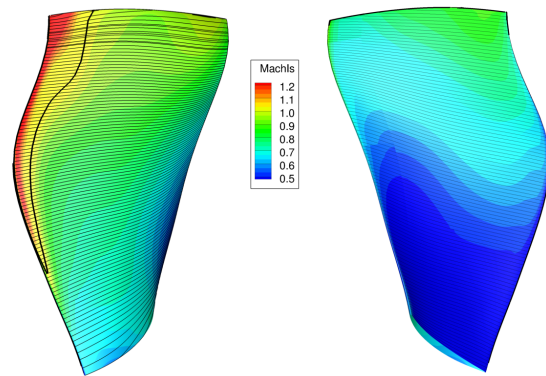
(a) Mach relatif : point 1



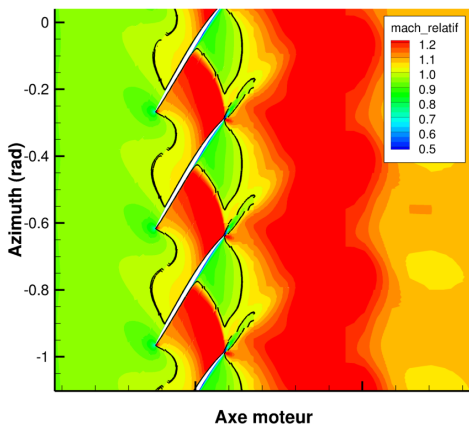
(b) Mach isentropique et lignes de courant : point 1



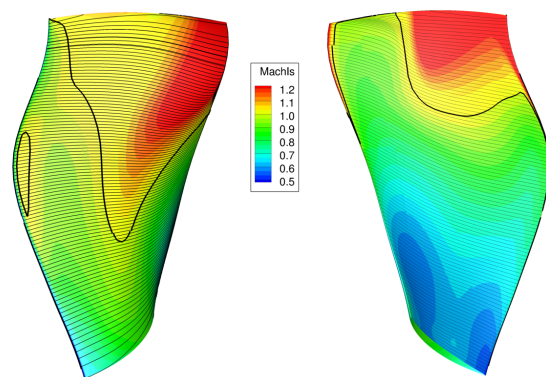
(c) Mach relatif : point 2



(d) Mach isentropique et lignes de courant : point 2



(e) Mach relatif : point 3



(f) Mach isentropique et lignes de courant : point 3

FIGURE II.17 – Topologie de l'écoulement à 90% de hauteur de veine. Courbes noires épaisses : nombres de Mach ou Mach isentropique sur aubage égaux à 1. Courbes noires fines : lignes de courant.



décrire le mouvement de la structure à l'aide d'un unique scalaire nommé coordonnée généralisée, associé au mode  $\Phi$ . On considère dorénavant un mode à  $n$  diamètres  $\Phi_n$  :

$$\mathbf{x} = \Phi_n \mathbf{q} \quad (\text{II.144})$$

En injectant l'équation II.144 dans l'équation III.4, on obtient l'équation dynamique de la structure sur le mode  $\Phi_n$  :

$$\mu \ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma q = g_{aero}(q, \dot{q}) \quad (\text{II.145})$$

où

$$\begin{cases} \mu & = \Phi_n^H \mathbf{M} \Phi_n & \text{est la masse généralisée du mode } \Phi_n \\ \beta & = \Phi_n^H \mathbf{C} \Phi_n & \text{est la dissipation généralisée du mode } \Phi_n \\ \gamma & = \Phi_n^H \mathbf{K} \Phi_n & \text{est la raideur généralisée du mode } \Phi_n \\ g_{aero} & = \Phi_n^H \mathbf{f}_{aero}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) & \text{est la force aérodynamique généralisée} \end{cases}$$

On fait de plus l'hypothèse que le mouvement de la structure est de suffisamment faible amplitude pour que les efforts aérodynamiques de perturbation par rapport à l'état stationnaire dépendent linéairement du mouvement et de la vitesse de la structure. Cette hypothèse permet d'écrire :

$$g_{aero}(q, \dot{q}) = Aq + B\dot{q}; A, B \in \mathbb{C} \quad (\text{II.146})$$

d'où :

$$\mu \ddot{q} + \beta \dot{q} + \gamma q = Aq + B\dot{q} \quad (\text{II.147})$$

Pour déterminer la stabilité aéroélastique de la soufflante, on va alors considérer un mouvement purement harmonique de la structure et calculer le travail des efforts aérodynamiques selon la méthode proposée par Carta [32]. Le mouvement de la structure est écrit sous la forme :

$$q(t) = q_0 e^{j\omega_0 t} \quad (\text{II.148})$$

où  $\omega_0$  est la pulsation propre du mode linéaire étudié. En l'injectant dans l'équation II.146, on obtient :

$$\begin{aligned} g_{aero} &= (A + j\omega_0 B) q \\ &= \left( (A^R - \omega_0 B^I) + j\omega_0 \left( \frac{A^I}{\omega_0} + B^R \right) \right) q \\ &= (\gamma_{aero} + j\omega_0 \beta_{aero}) q \end{aligned} \quad (\text{II.149})$$

Dans l'équation II.149,  $\gamma_{aero}$  et  $\beta_{aero}$  sont respectivement les termes de raideur et de dissipation aérodynamique. Le premier terme caractérise la composante des forces aérodynamiques en phase avec le mouvement de la structure, tandis que le second caractérise la composante des forces aérodynamiques en phase avec sa vitesse. La dissipation généralisée de la structure  $\beta$  peut être difficile à évaluer précisément : celle-ci est en pratique souvent négligée dans les calculs de stabilité aéroélastique. On reste ainsi conservatif sur la prédiction de la limite de stabilité qui sera prédite plus tôt que sur un système présentant à sec un amortissement. Dans cette sous-section, nous négligerons donc ce terme. Le travail des efforts aérodynamiques sur une période de mouvement s'écrit :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \int_0^{2\pi/\omega_0} g_{aero} \bar{q} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left( \int_0^{2\pi/\omega_0} (A + j\omega_0 B) q_0 e^{j\omega_0 t} (-j\omega_0 \bar{q}_0 e^{-j\omega_0 t}) dt \right) \\ &= \pi \omega_0 \beta_{aero} |q_0|^2 \end{aligned} \quad (\text{II.150})$$



D'après les équations II.147 et II.150, on peut exprimer la dissipation d'origine aérodynamique  $\beta_{aero}$  sous la forme d'un amortissement aérodynamique  $\xi_{aero}$  :

$$\xi_{aero} = -\frac{\beta_{aero}}{2\mu\omega_0} = -\frac{W}{2\pi\mu\omega_0^2 |q_0|^2} \quad (\text{II.151})$$

Le signe de l'amortissement aérodynamique  $\xi_{aero}$  permet de déterminer la stabilité du mode étudié. Avec la convention adoptée ici, un travail  $W$  positif des efforts aérodynamiques est synonyme d'un apport d'énergie du fluide vers la structure au cours d'une période de vibration. Le système dynamique fluide structure est ainsi instable : on se place dans un régime de flottement. Le flottement est donc atteint dès lors que l'amortissement aérodynamique  $\xi_{aero}$  est négatif (d'après l'équation II.151).

### Résultats numériques

La méthode proposée dans ce paragraphe a été utilisée pour déterminer la stabilité aéroélastique de la soufflante décrite en sous-section II.6.1 selon les modes 1F2D et 1F3D. Ces derniers ont été choisis à la lumière des mesures expérimentales. Le phénomène de flottement a en effet été observé pour le mode 1F2D sur la plage de fonctionnement étudiée, pour laquelle la propagation d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air est attendue. Dans le cas du mode 1F3D, ces ondes sont toutefois évanescentes pour la même plage de fonctionnement. Les résultats de ces calculs de stabilité sont illustrés en Figure II.18.

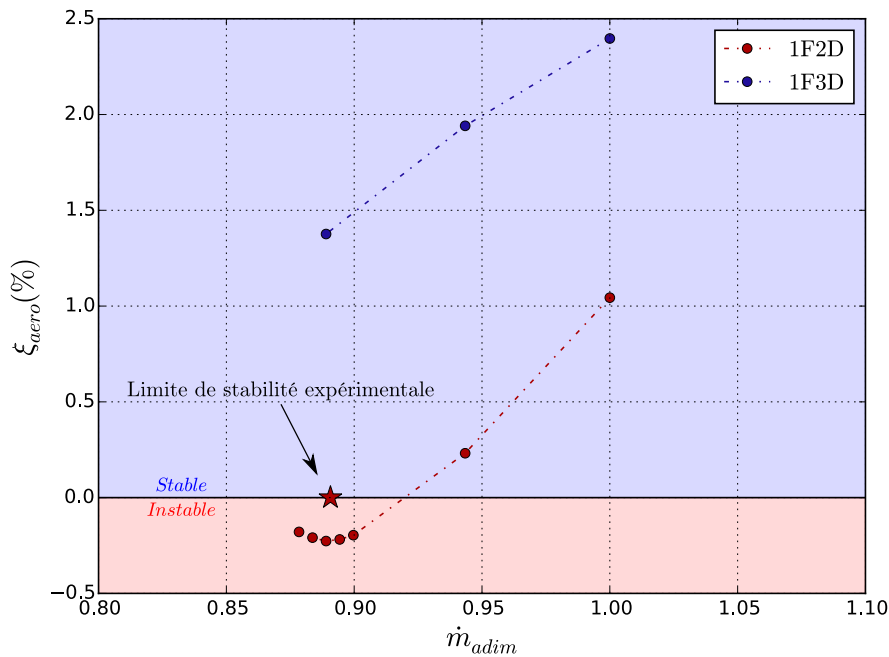


FIGURE II.18 – Résultats des calculs de stabilité en mouvement harmonique imposé à 75% de régime nominal

Les résultats affichés en Figure II.18 montrent que le mode 1F2D est instable lorsque l'on se rapproche de la ligne de pompage à 75% de régime nominal. En particulier, le mode 1F2D est instable sur les points de fonctionnement allant de dp18 à dp22. Le mode 1F3D est quant à lui stable sur l'iso-vitesse étudiée.

De plus, on remarque que le flottement du mode 1F2D est détecté numériquement pour de plus grandes valeurs de débit massique que ce qui a été observé expérimentalement. Ce constat est cohérent du fait que dans cette première approche numérique, aucun amortissement lié à la structure n'a été considéré. Sur un système réel, des sources d'amortissement sont toutefois présentes, ce qui explique que l'on peut aller plus loin sur l'iso-vitesse sans pour autant être instable. On dit que l'approche numérique est conservatrice, dans le sens où si le système réel est instable, alors la méthode numérique a déjà prédit l'instabilité pour de plus grandes valeurs de débit.

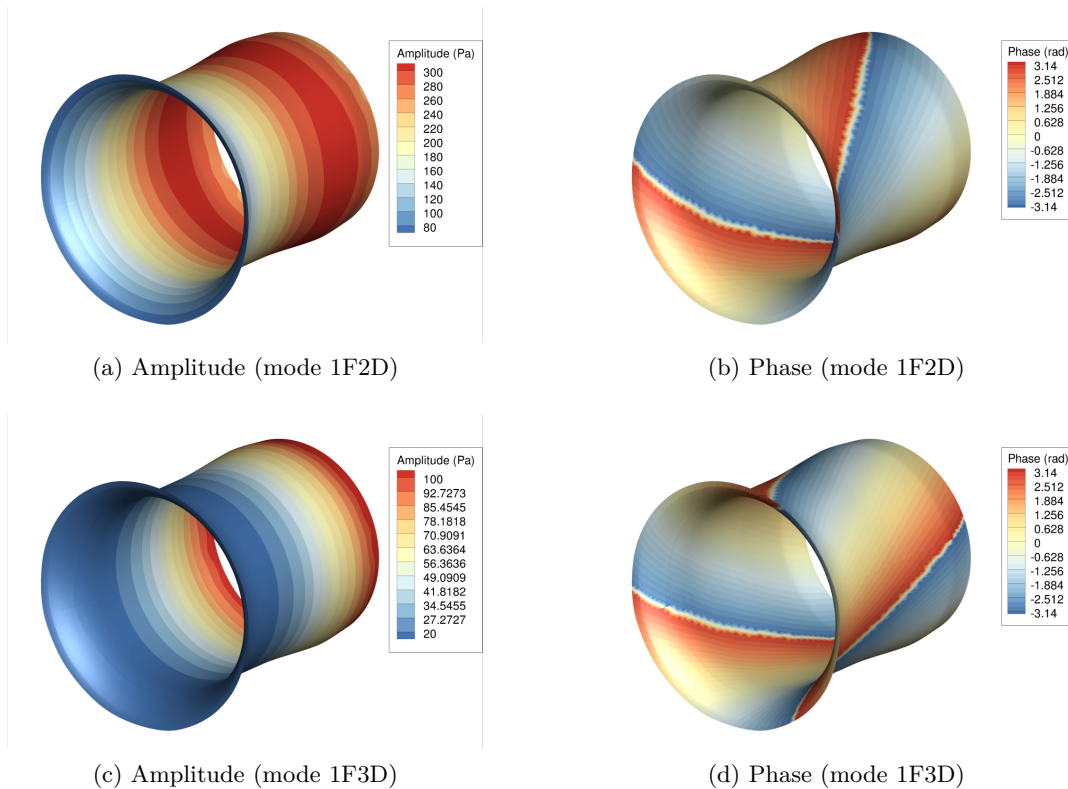


FIGURE II.19 – Amplitude et phase du fondamental de pression statique dans l'entrée d'air à 90% de hauteur de veine sur le point de fonctionnement  $dp_{20}$

Pour les deux modes étudiés, une transformée de Fourier a été réalisée dans le domaine de calcul au cours de la dernière période de vibration sur le point de fonctionnement  $dp_{20}$  de l'iso-vitesse. Les résultats de cette transformée dans l'entrée d'air du moteur sont visibles sur la Figure II.19. L'amplitude du fondamental de pression statique est affichée pour les modes 1F2D et 1F3D sur les Figures II.19a et II.19c, tandis que la phase est affichée sur les Figures II.19b et II.19d. On constate que pour les deux modes, une onde acoustique est présente dans l'entrée d'air, comprenant respectivement 2 et 3 diamètres. Les Figures II.19b et II.19d illustrent ces topologies à diamètres en montrant des motifs de phase hélicoïdaux. Toutefois, le comportement de l'onde acoustique est très différent dans les deux cas. La Figure II.19a montre que l'amplitude de l'onde acoustique se maintient dans l'ensemble de l'entrée d'air jusqu'à l'ouverture sur l'extérieur. La Figure II.19c en revanche montre que l'onde a une amplitude maximale au niveau de la source acoustique (la soufflante), qui décroît rapidement au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'ouverture sur l'extérieur : il s'agit d'une onde évanescence.

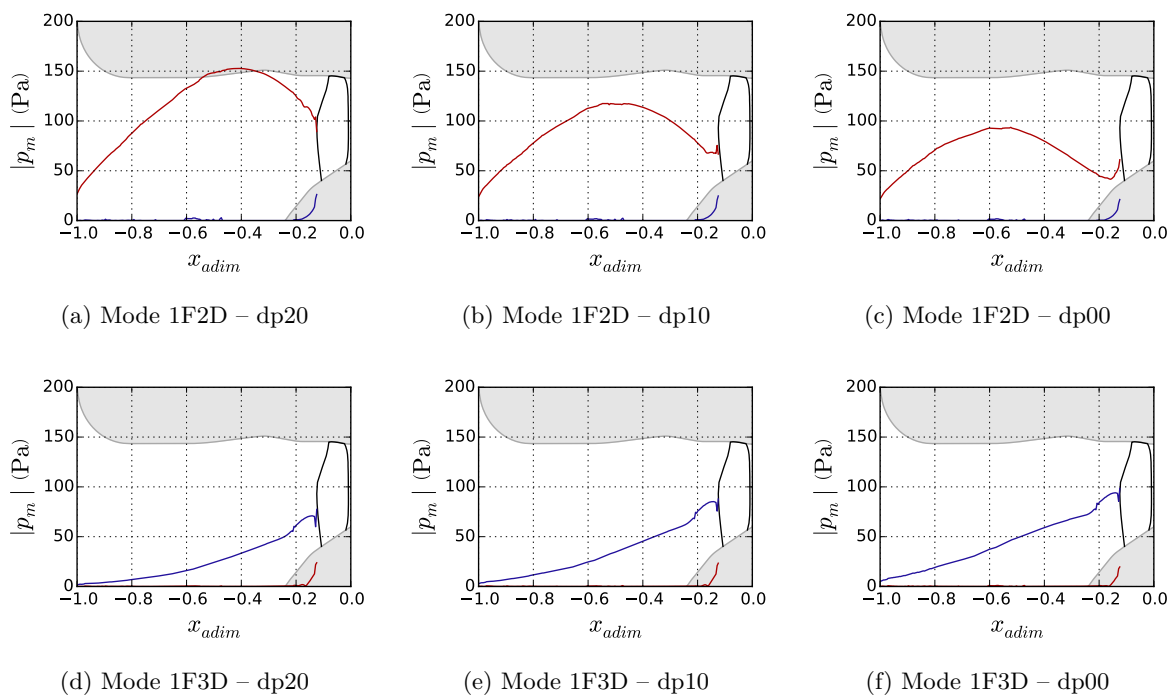


FIGURE II.20 – Évolution de l’amplitude de l’harmonique spatiale de pression  $p_m$  dans l’entrée d’air à 90% de hauteur de veine :  $m = 2$  en — ;  $m = 3$  en —

Afin d’illustrer ce dernier constat, une transformée de Fourier spatiale a été réalisée sur un instant du champ convergé, de sorte à visualiser la projection du champ de pression statique sur des structures à diamètres pour différents modes structuraux. En particulier, pour une hauteur de veine  $h$  donnée, le champ de pression statique instantané a été projeté sur les modes azimutaux à 2 et 3 diamètres selon la relation :

$$p_m(x, h, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(x, h, \theta, t) e^{im\theta} d\theta \quad (\text{II.152})$$

Les résultats de cette projection sont visibles en Figure II.20. En particulier, lorsque la structure se déplace selon le mode 1F2D, on constate qu’une structure acoustique à deux diamètres est présente dans toute l’entrée d’air. Cette structure évolue selon le vannage étudié sur l’iso-vitesse en raison du changement du nombre de Mach moyen selon le point de fonctionnement étudié. Lorsque la structure se déforme selon le mode 1F3D en revanche, on observe les mêmes tendances que celles présentées en Figure II.19c, à savoir une atténuation de l’onde selon la direction axiale et ce, dès sa source d’émission. Ces résultats sont en accord avec la théorie de propagation acoustique développée en section II.2. Le Tableau II.3 indique les rapports entre les fréquences de coupure des modes acoustiques d’ordre  $(m, \mu)$  et les fréquences des sources acoustiques dans le repère lié à la nacelle. En particulier, en notant  $f_{mode}^{abs}$  la fréquence de la source acoustique dans le repère lié la nacelle, les fréquences de coupure  $f_c$  des modes acoustiques d’ordre  $(2, 0)$  et  $(3, 0)$  sont respectivement inférieures et supérieures aux fréquences des sources acoustiques liées aux modes de vibration 1F2D et 1F3D. Cela revient à dire que l’onde acoustique d’ordre  $(2, 0)$  est passante, tandis que celle d’ordre  $(3, 0)$  est évanescence. Pour finir, on remarque sur la Figure II.20 que les modes structuraux 1F2D et 1F3D génèrent respectivement des composantes acous-

tiques à 3 et 2 diamètres dans le voisinage des aubes. Ces composantes tendent très rapidement vers 0 en direction de l'entrée d'air. On attribue ces termes non nuls aux effets potentiels qui apparaissent au voisinage des 18 aubes.

	Mode (2, 0)	Mode (3, 0)
$f_c$	$0.973 \times f_{1F2D}^{abs}$	$1.036 \times f_{1F3D}^{abs}$

TABLEAU II.3 – Fréquences de coupure des modes acoustiques d'ordre azimutaux 2 et 3 et d'ordre radial 0 par rapport à la fréquence de la source acoustique dans le repère de la nacelle

Pour les points de fonctionnement dp00, dp10 et dp20 de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal, les cartographies de travail adimensionné des efforts aérodynamiques ont été calculées pour une déformation harmonique de la structure selon les modes 1F2D et 1F3D. Celles-ci sont affichées sur la Figure II.21.

On remarque que le voisinage du choc côté extrados est une zone où les échanges d'énergie sont les plus importants. Pour le mode 1F2D, un transfert d'énergie s'opère du fluide vers la structure en aval du choc : ce transfert est déstabilisant, en opposition au transfert d'énergie stabilisant s'opérant de la structure vers le fluide en amont du choc. Pour le mode 1F3D en revanche, le choc est stabilisant pour tous les points de fonctionnement étudiés. En dehors du voisinage du choc, les gradients de travail des efforts aérodynamiques sont faibles. On observe de faibles variations du travail ainsi que des échanges énergétiques moins intenses.

Ces répartitions de travail peuvent être analysées plus finement à l'aide des Figures II.22a, II.22b et II.22c.

La Figure II.22a indique la répartition de travail surfacique le long de l'abscisse curviligne de l'aube à 91% de hauteur de veine. La valeur 0 de cette abscisse désigne le bord d'attaque, tandis que les valeurs  $\pm 1$  désignent le bord de fuite à la hauteur de veine considérée. Les valeurs positives d'abscisse désignent l'extrados, tandis que les valeurs négatives désignent l'intrados. Pour finir, les étoiles permettent de situer l'abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1.

Comme mentionné précédemment, le voisinage du choc sur l'extrados est la zone où les échanges énergétiques sont les plus importants, quel que soit le point de fonctionnement étudié. Le fait de passer du point de fonctionnement dp00 au dp20 favorise les échanges énergétiques déstabilisants du fluide vers la structure : le pic de travail des efforts aérodynamiques en amont du choc tend vers des valeurs croissantes au fur et à mesure que l'on se rapproche de la ligne de pompage. En passant du point de fonctionnement dp00 au dp20, on observe un changement de comportement du choc qui passe de stabilisant à déstabilisant. On retrouve ainsi pour le point dp20 un comportement décrit par Isomura et Giles [73] et Aotsuka et Murooka [10], selon lesquels le choc est déstabilisant. Notons toutefois que contrairement à ces études, aucun décollement de couche limite n'a été observé au voisinage du choc.

Les Figures II.22b et II.22c illustrent respectivement les répartitions de travail linéique selon la hauteur de veine pour les modes 1F2D et 1F3D sur chacun des vannages dp00, dp10 et dp20 : les travaux surfaciques ont été intégrés pour chaque hauteur de veine le long de l'abscisse cur-

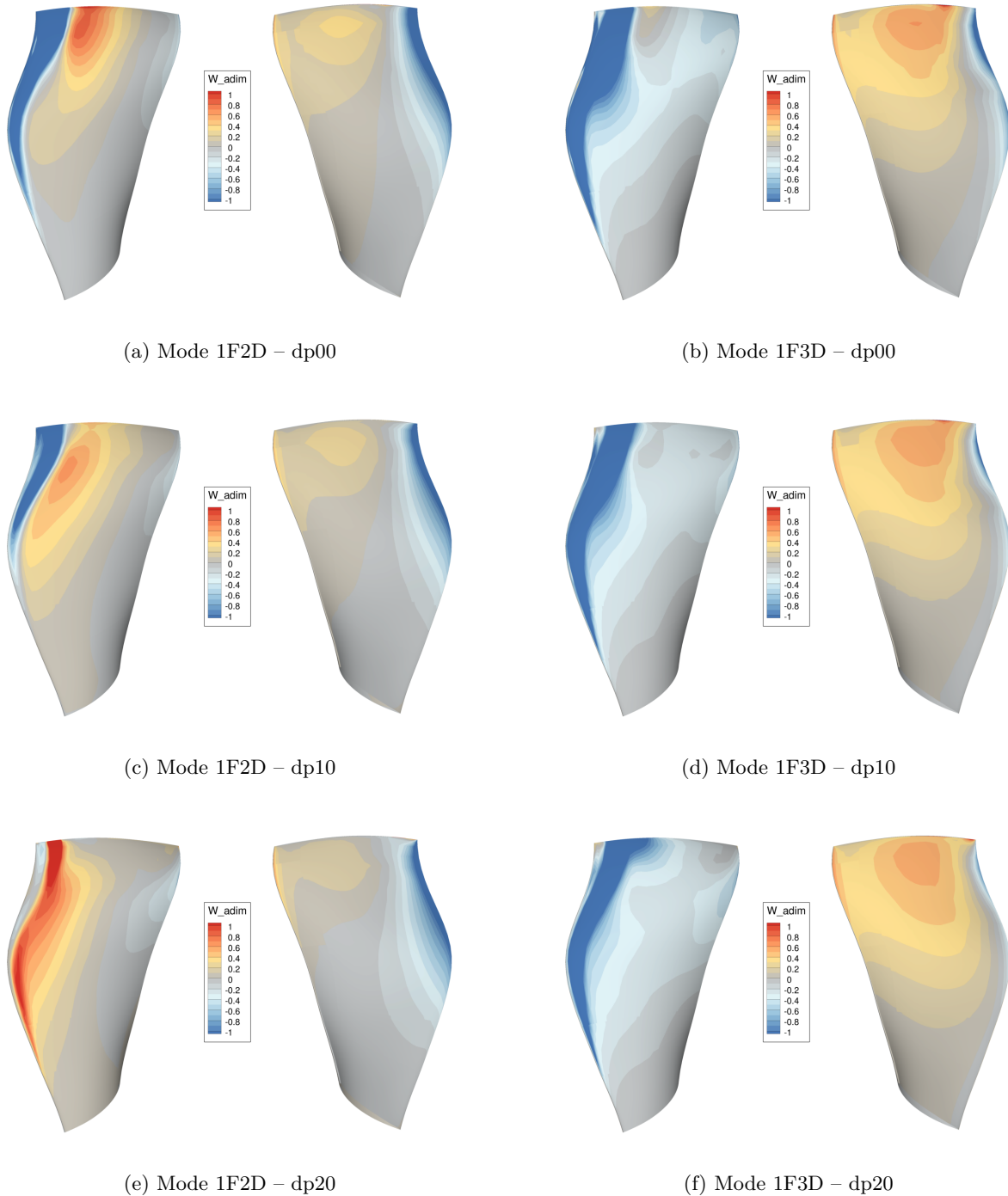
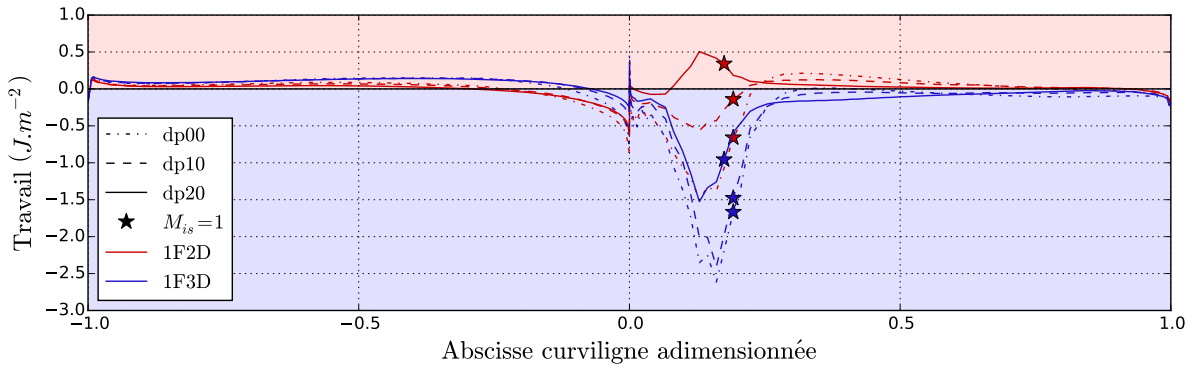
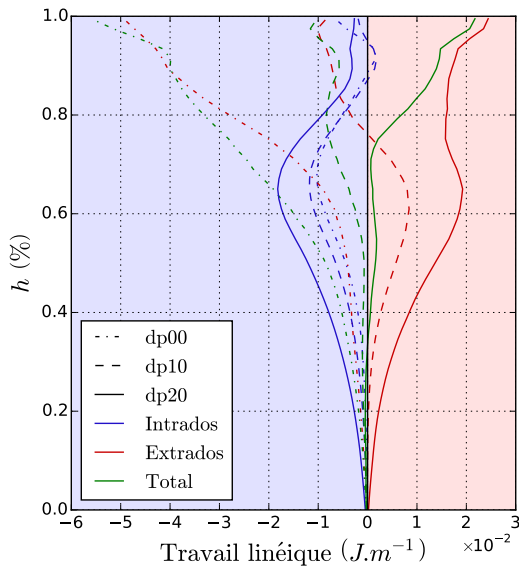


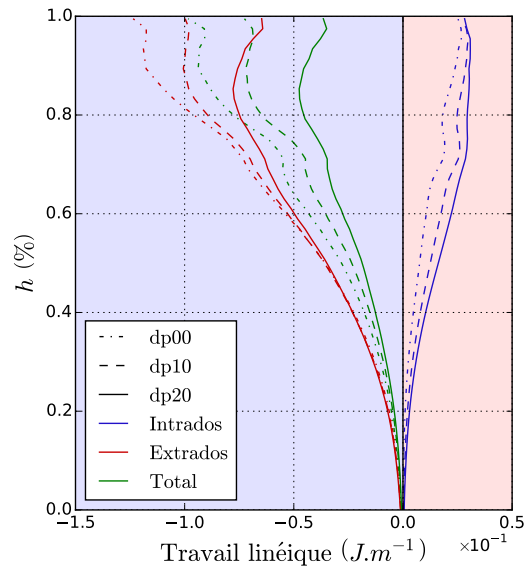
FIGURE II.21 – Travail surfacique adimensionné pour trois points de fonctionnement sur l'isovitesse à 75% de régime nominal



(a) Travail surfacique sur l'abscisse curviligne à 91% de hauteur de veine. ★ : abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1 sur la hauteur de veine considérée.



(b) Travail linéique sur la hauteur de veine – Mode 1F2D



(c) Travail linéique sur la hauteur de veine – Mode 1F3D

FIGURE II.22 – Répartition des travaux des forces aérodynamiques pour une période de vibration des modes 1F2D et 1F3D sur les points de fonctionnement dp00, dp10 et dp20, le long de l'isovitesse à 75% de régime nominal

viligne avant d'être tracés en fonction de la hauteur de veine. Pour le mode 1F2D, les effets du vannage sont particulièrement visibles sur l'extrados qui est initialement stable sur le point dp00 et devient totalement instable sur le point dp20. L'intrados reste en revanche stable quel que soit le point de fonctionnement mais ne permet pas de dissiper l'énergie reçue sur l'extrados, rendant l'ensemble instable sur le point dp20. Pour le mode 1F3D, le vannage a un impact plus limité sur les répartitions de travail. L'intrados est cette fois-ci déstabilisant contrairement au cas précédent, mais l'énergie qui y est transférée du fluide à la structure reste faible par rapport à celle dissipée sur l'extrados. De légères variations de travail sont observées en tête de d'aube côté extrados, mais celles-ci n'ont pas beaucoup d'impact sur la stabilité du mode 1F3D car l'énergie moyenne qui y est dissipée demeure plus importante que ces variations.

Il apparaît que la présence du choc permet d'importants échanges énergétiques entre le fluide et la structure, qui peuvent être stabilisants ou non. Conformément à ce qui été observé dans l'état de l'art, ces échanges peuvent être à l'origine d'une instabilité aéroélastique, comme pour le mode 1F2D sur le point de fonctionnement dp20. Toutefois, l'interaction du choc avec la couche limite n'est pas suffisamment important pour que cette dernière décolle : le mécanisme physique à l'origine du flottement pour le mode 1F2D à 75% de régime nominal ne relève pas de l'interaction entre le choc et la couche limite, comme cela peut être couramment observé dans l'état de l'art. D'autres phénomènes sont en jeu et contribuent à l'instabilité de flottement, telle que la propagation acoustique dans l'entrée d'air.

Afin de vérifier l'impact de l'acoustique sur la stabilité aéroélastique, le flutter index [180] a été calculé dans le domaine d'opérabilité de la soufflante exploré lors des calculs aéroélastiques. Reprenons la définition de cette grandeur d'après l'équation I.2 :

$$\mathcal{F} = |\mathcal{R}| \times \sin(\Delta\Phi) \quad (\text{II.153})$$

où  $\mathcal{R}$  et  $\Delta\Phi$  sont respectivement le rapport d'amplitude complexe et le déphasage entre l'onde émise et l'onde réfléchié évalué au bord d'attaque de la soufflante.

Nous allons expliciter plus en détails les termes de l'équation II.153. Le module du rapport d'amplitude complexe  $\mathcal{R}$  entre l'onde émise et l'onde réfléchié permet de quantifier dans quelle mesure l'onde acoustique revient sur la soufflante après réflexion sur l'entrée d'air. Si ce rapport est égal à 1, l'onde acoustique émise par la soufflante a été réfléchié en totalité et est revenue sur la soufflante sans aucune forme de dissipation. Dans cette situation, la propagation acoustique dans l'entrée d'air est susceptible d'avoir le plus grand impact sur la stabilité aéroélastique de la soufflante. On mesure  $|\mathcal{R}|$  en tenant compte de la propagation de l'onde depuis sa source d'émission en  $x = x_{FAN}$  jusqu'à l'entrée d'air en  $x = x_{entrée}$ , de sa réflexion selon le taux de réflexion complexe que l'on note  $\mathcal{R}_{entrée}$ , et de la propagation de l'onde réfléchié jusqu'à la soufflante. En notant respectivement  $p^+$  et  $p^-$  les ondes acoustiques émises (montantes) et réfléchiées (descendantes), on écrit :

$$|\mathcal{R}| = \frac{|p^+(x_{entrée})|}{|p^+(x_{FAN})|} \times \mathcal{R}_{entrée} \times \frac{|p^-(x_{FAN})|}{|p^-(x_{entrée})|} \quad (\text{II.154})$$

Le déphasage  $\Delta\Phi$  entre l'onde émise et l'onde réfléchié est la résultante du déphasage généré par



le parcours de l'onde émise, de la réflexion sur l'entrée d'air et de celui induit par le parcours de l'onde réfléchi jusqu'à la soufflante. Lorsque  $\Delta\Phi$  est égal à  $-90^\circ$ , l'onde réfléchi est en phase avec la vitesse de l'aube, l'aidant ainsi à se déplacer : on se retrouve dans le cas le plus défavorable, où l'onde acoustique est susceptible de déstabiliser la soufflante. Lorsque le déphasage est égal à  $+90^\circ$  en revanche, l'onde réfléchi est en opposition de phase avec la vitesse de l'aube, d'où un gain en stabilité. Comme évoqué au cours du Chapitre I, le déphasage s'écrit :

$$\Delta\Phi = \Delta\Phi_{p^+} + \arg(\mathcal{R}_{\text{entrée}}) + \Delta\Phi_{p^-} \quad (\text{II.155})$$

Le calcul du flutter index dans notre cas d'application exploite deux modèles analytiques :

- le modèle de propagation acoustique en conduite. Nous avons abordé au cours de la sous-section II.2.1 la propagation acoustique en conduite selon un ensemble de modes acoustiques d'ordre  $(m, \mu)$ . Pour notre application, ce modèle de propagation a été utilisé en supposant un terme source d'ordre  $(2, 0)$  et en tenant compte d'une géométrie cylindrique à rayon lentement variable selon l'axe moteur. Il en résulte une mise à jour des équations présentées dans la sous-section II.2.1 pour tenir compte d'une dépendance en  $x$ , selon la méthode proposée par Rienstra [133] ;
- le modèle de réflexion acoustique sur l'entrée d'air. Le modèle analytique employé est le modèle de Rienstra présenté en sous-section II.2.2. Comme nous l'avons vu, une onde d'ordre  $(m, \mu)$  se réfléchit sur toutes les ondes d'ordre  $(m, \nu)$  avec  $\nu \in \mathbb{N}$ . Puisque nous sommes proches de la fréquence de coupure du mode d'ordre  $(2, 0)$  d'après le Tableau II.3, le coefficient de réflexion des modes d'ordre  $(2, \nu)$  pour  $\nu \in \mathbb{N}^*$  a une amplitude proche de 0 d'après les équations II.43. Nous ne considérerons que la réflexion du mode d'ordre  $(2, 0)$  sur lui-même : on a ainsi  $\mathcal{R}_{\text{entrée}} = R_{2,0,0}$ .

La Figure II.23 illustre la cartographie de flutter index dans le diagramme caractéristique de la soufflante étudiée en employant les modèles analytiques. De plus, les points de fonctionnement dp00, dp10 et dp20 sont affichés pour visualiser l'impact de l'acoustique sur la stabilité de ces points. On remarque sur cette Figure l'apparition de franges de flutter index représentées par les bandes de couleur. Ces franges désignent les domaines sur lesquels la réflexion acoustique modifie la stabilité de flottement. Elles sont alternativement stabilisantes (franges bleues) et déstabilisantes (franges rouges). Comme cela a déjà pu être observé dans l'état de l'art [21, 180], le rôle de l'acoustique n'est pas systématiquement déstabilisant : l'utilisation de cette propriété dans les phases de conception de l'entrée d'air pourrait permettre de stabiliser des points de fonctionnement qui serait instables en absence d'acoustique.

En ce qui concerne notre cas d'étude, on remarque que lorsque l'on réduit le débit sur la ligne de fonctionnement à 75% de régime nominal, on passe d'un état où l'acoustique a tendance à stabiliser le système vers un état où elle le déstabilise. Ce résultat montre que l'acoustique est un des mécanismes à l'origine de l'instabilité de flottement détectée pour le mode 1F2D.

Remarque : les modèles analytiques employés permettent de fournir des tendances intéressantes sur le rôle de l'acoustique dans l'analyse de stabilité. Toutefois, ils sont sujets à une certaine incertitude compte tenu des fortes hypothèses qu'ils nécessitent. Le lecteur est invité à se référer au mémoire de thèse de Bontemps [21], où une comparaison des résultats fournis par les modèles analytiques et un solveur acoustique haute fidélité est proposée.



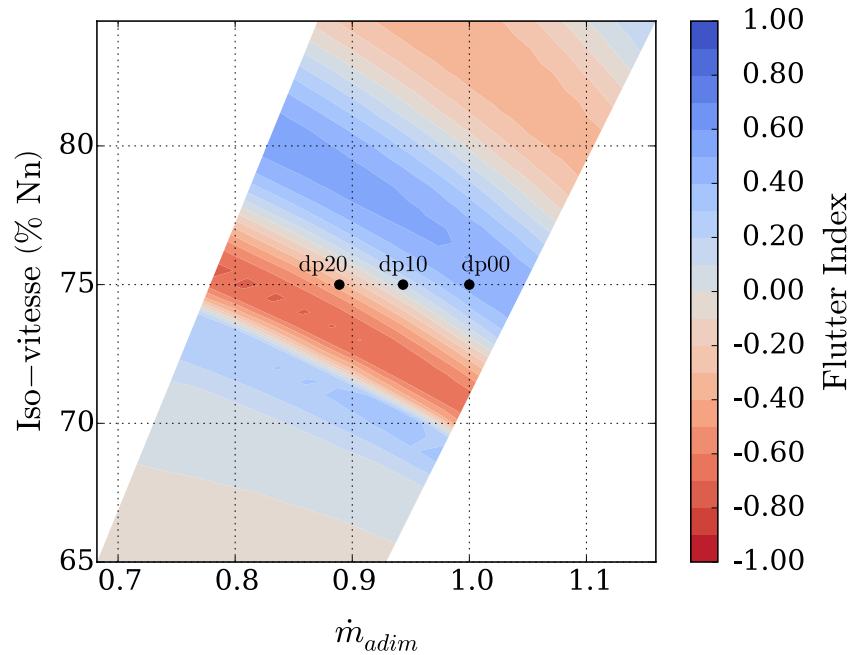


FIGURE II.23 – Cartographie du flutter index dans le diagramme caractéristique de la soufflante

### 6.3.2 Simulation en couplage dynamique

Cette partie s'intéresse au calcul de la stabilité aéroélastique d'une soufflante dans un cadre de couplage dynamique. La dynamique de la structure et celle du fluide sont résolues simultanément selon la méthode d'avance en temps par point fixe décrite dans le paragraphe 5.2.2. Une étude de convergence en nombre d'itérations de point fixe a montré que 3 itérations de la boucle suffisaient pour obtenir à chaque pas de temps la convergence simultanée du fluide et de la structure. Ce paramètre a donc été conservé dans les calculs réalisés en couplage dynamique. Les modes de la structure qui ont été étudiés sont les modes 1F2D et 1F3D afin de comparer les résultats de stabilité obtenus à ceux du paragraphe 6.3.1.

La Figure II.24 illustre l'évolution de la partie réelle de la coordonnée généralisée des modes tournants 1F2D et 1F3D sur le point dp20. Les modes ont été initialisés respectivement sur une onde tournante directe, ce qui signifie que les informations d'amplitude et de vitesse initiale sont celles d'une onde tournant dans le même sens de rotation que celui de la soufflante. On observe en particulier que le mode 1F3D est stable (1F2D est instable) car l'amplitude de la coordonnée généralisée tend vers 0 (s'accroît).

Le flottement du mode 1F2D est le résultat d'un transfert d'énergie du fluide vers la structure, qui provoque un accroissement de l'amplitude de vibration du mode. Toutefois, on observe d'après la Figure II.24 que le régime de flottement de ce mode n'est pas immédiatement installé dans la simulation. Cette tendance est similaire à celle déjà observée par Vahdati *et al.* [163], où la décroissance observée correspond à la vibration de la soufflante avant que la réflexion acoustique en entrée d'air n'ait atteint son régime permanent et ne déstabilise le système. Le flottement du mode 1F2D semble donc ici d'origine acoustique.

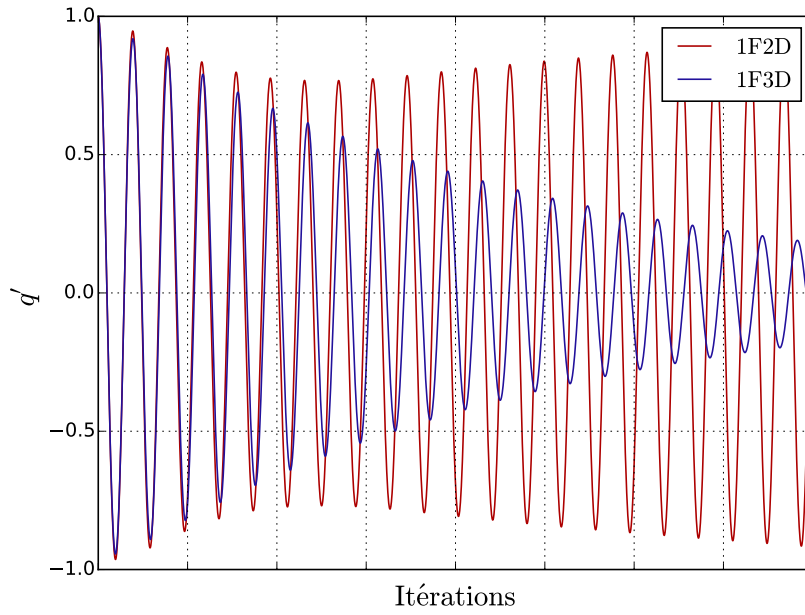


FIGURE II.24 – Évolution des coordonnées généralisées en couplage dynamique sur le point dp20 à 75% de régime nominal

### Méthode de calcul de la stabilité

La méthode pour analyser la stabilité aéroélastique de la soufflante consiste à mesurer le décrément logarithmique de l'amplitude du mode étudié. Prenons l'équation générale d'une structure libre normée par la masse :

$$\ddot{q} + 2\xi\omega_0\dot{q} + \omega_0^2q = 0 \quad (\text{II.156})$$

où :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu}} \quad (\text{II.157})$$

La solution de l'équation différentielle II.156 s'obtient en déterminant les racines du polynôme caractéristique. Elle s'écrit :

$$q(t) = Q_1 e^{-\xi\omega_0 t} e^{j\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t} + Q_2 e^{-\xi\omega_0 t} e^{-j\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t} \quad (\text{II.158})$$

où les  $Q_i$  sont des paramètres dépendant des conditions initiales du mouvement. Notons  $T$  la pseudo-période du mouvement  $q$ . Au cours d'une pseudo-période  $T$ , l'amplitude a évolué selon le rapport :

$$\frac{q(t+T)}{q(t)} = \frac{e^{-\xi\omega_0(t+T)}}{e^{-\xi\omega_0 t}} = e^{-\xi\omega_0 T} \quad (\text{II.159})$$

Le décrément logarithmique est défini par :

$$\delta = \ln \left( \frac{q(t)}{q(t+T)} \right) = \ln \left( e^{+\xi\omega_0 T} \right) = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad (\text{II.160})$$

D'où :

$$\xi = \sqrt{\frac{\delta^2}{4\pi^2 + \delta^2}} \quad (\text{II.161})$$

### Résultats numériques

La mesure du décrement logarithmique permet de déterminer la valeur de  $\xi$  et ainsi la stabilité du système étudié. Cette méthode a été employée dans le cadre des calculs en couplage dynamique réalisés en tenant compte d'une structure linéaire. Les résultats des calculs de stabilité sont illustrés en Figure II.25, où les résultats de calculs en mouvement harmonique imposé ont été retenus pour les mêmes points de fonctionnement.

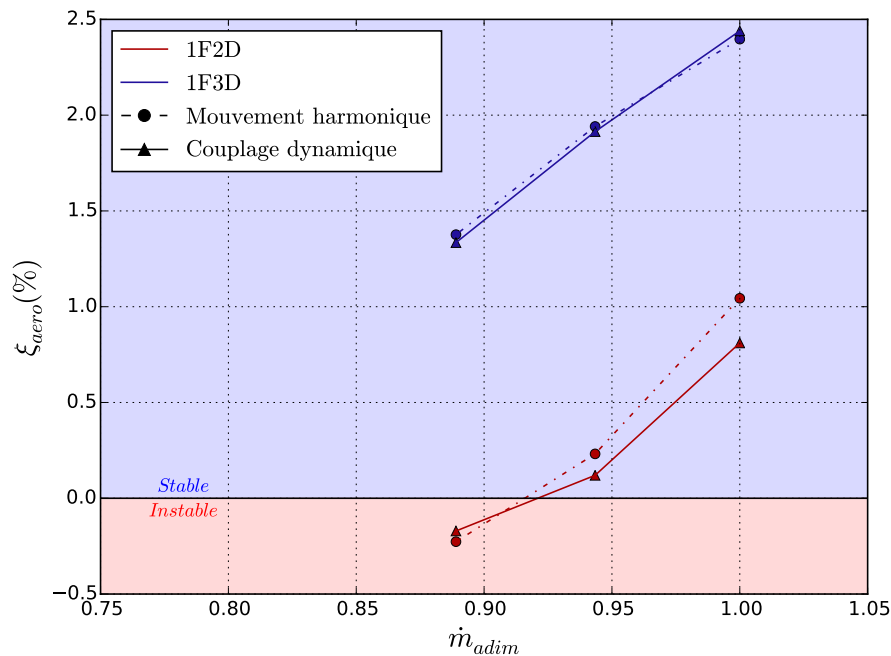


FIGURE II.25 – Stabilité de modes 1F2D et 1F3D en couplage dynamique sur l'iso-vitesse à 75% de régime nominal

Les tendances observées entre les calculs en mouvement harmonique imposé et en couplage dynamique sont très similaires. En particulier, l'amortissement du mode 1F3D peut être considéré comme identique pour les deux méthodes de simulation, les faibles écarts visibles étant de l'ordre de l'incertitude numérique des méthodes. De plus, la limite de flottement pour le mode 1F2D est obtenue pour le même débit (à l'incertitude numérique près) pour les deux méthodes de calcul.

Pour le mode 1F2D toutefois, des écarts plus marqués sont présents, notamment pour les points dp00 et dp10. Ces écarts sont trop importants pour être uniquement lié à l'incertitude numérique des méthodes de post-traitement : un phénomène d'ordre physique doit donc en être la cause. Dans la prochaine sous-section, nous allons voir que le phénomène physique déterminant permettant d'expliquer ces écarts est la réflexion acoustique en entrée d'air.

## 6.4 Procédure de correction des caractéristiques modales du mode à sec

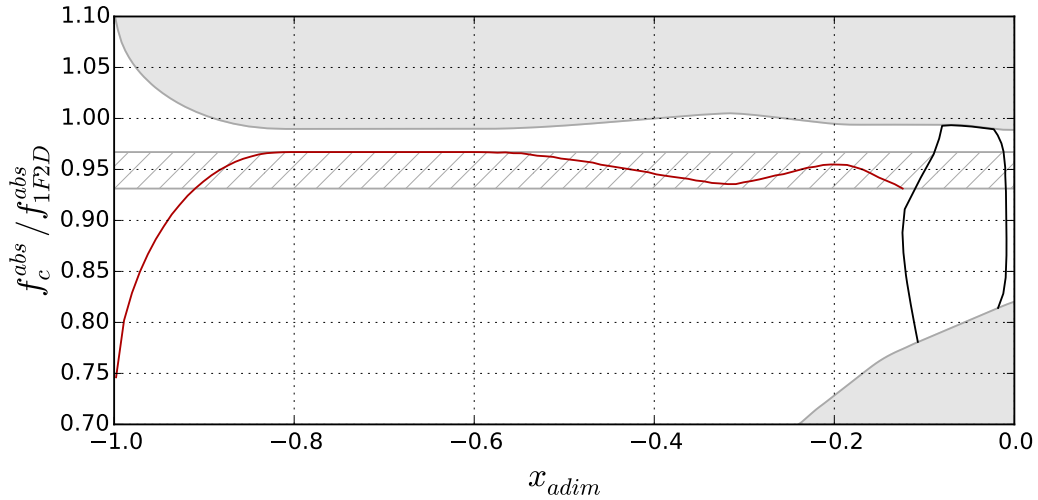
### Positionnement du problème

Les résultats obtenus dans les deux sous-sections précédentes montrent des écarts sur les résultats de calcul de stabilité aéroélastique de la soufflante considérée. Ces écarts semblent encore plus marqués lorsque des effets d'interaction acoustique se produisent entre la soufflante et l'entrée d'air. Dans ces conditions de fonctionnement, l'hypothèse de couplage faible consistant à supposer que l'impact du fluide est suffisamment faible pour permettre d'étudier directement les modes de la structure à sec n'est probablement plus valable. C'est l'approche que nous allons étudier dans la suite.

Dans l'hypothèse de linéarité des efforts fluides par rapport au mouvement de la structure, la raideur aérodynamique générée par la composante des efforts aérodynamiques en phase avec le déplacement induit un décalage fréquentiel du mode étudié. Dans un contexte où des ondes acoustiques sont attendues, un changement de la fréquence de vibration peut avoir un impact au premier ordre sur le calcul de l'amortissement aérodynamique par modification du coefficient de réflexion acoustique. D'après le modèle de réflexion de Rienstra [21, 132], la valeur de ce coefficient est conditionnée par le rapport entre la fréquence de la source acoustique et la fréquence de coupure du mode de conduite étudié. Or, la fréquence de coupure d'un mode acoustique d'ordre  $(m, \mu)$  dans une conduite de section légèrement variable dépend de la position axiale considérée, comme le montre la Figure II.26a. On y observe l'évolution de la fréquence de coupure du mode d'ordre  $(2, 0)$  dans le repère fixe de référence à travers la conduite étudiée depuis sa source d'émission. La courbe est normée par la valeur de fréquence propre du mode 1F2D dans le repère fixe de référence. On note la possibilité qu'une onde acoustique soit réfléchiée en milieu de conduite si la fréquence de coupure du mode étudié dépasse la fréquence de la source acoustique associée pour une position axiale donnée. À ce titre, la zone hachurée illustrée en Figure II.26a représente l'intervalle de fréquences pour lequel un mode émit par une source acoustique d'ordre  $(2, 0)$  se réfléchira dans la conduite. En tenant compte de cette sensibilité de la fréquence de coupure à la géométrie de la conduite, le coefficient de réflexion acoustique sur la soufflante pour une source acoustique d'ordre  $(2, 0)$  de fréquence  $f^{abs}$  dans le repère fixe de référence évolue selon les Figures II.26b et II.26c.

Sur ces Figures sont représentées respectivement le module du rapport complexe d'amplitude  $\mathcal{R}$  et le déphasage  $\Delta\Phi = \arg(\mathcal{R})$  entre l'onde émise et l'onde réfléchiée au bord d'attaque de la soufflante en fonction de la fréquence de la source acoustique d'ordre  $(2, 0)$ . Cette fréquence, exprimée dans le repère fixe de la nacelle, a été adimensionnée par rapport à la fréquence du mode propre 1F2D dans le même repère. Les zones hachurées sont les mêmes intervalles de fréquence de coupure que ceux représentés en Figure II.26a. L'existence de ces zones signifie qu'une onde acoustique peut être réfléchiée dans l'entrée d'air avant d'avoir atteint la sortie, en passant d'un état cut-on à un état cut-off à cause du changement de section de la nacelle. On constate que dans un voisinage de  $f^{abs}/f_{1F2D}^{abs}$  au-delà de 1, de fortes variations de  $|\mathcal{R}|$  et de  $\Delta\Phi$  sont observées : une modification de la fréquence de vibration par apport de raideur aérodynamique est susceptible de modifier rapidement les effets de la réflexion acoustique sur la stabilité aéroélastique en changeant la valeur du déphasage  $\Delta\Phi$ .

Remarque : comme évoqué précédemment, les résultats obtenus avec les modèles analytiques



(a) Évolution de la fréquence de coupure du mode acoustique d'ordre (2, 0) le long de l'axe moteur

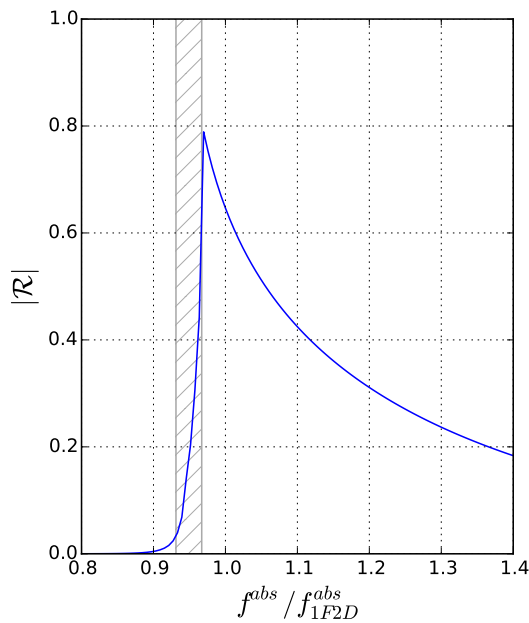
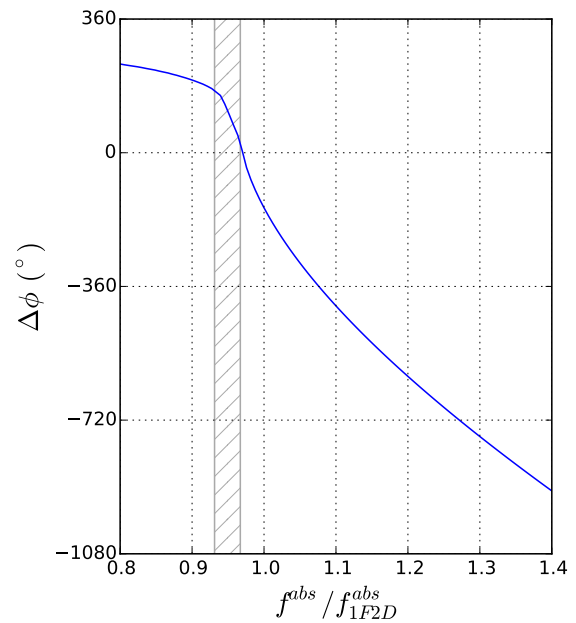
(b) Module du rapport d'amplitude  $\mathcal{R}$ (c) Déphasage  $\Delta\Phi = \arg(\mathcal{R})$ 

FIGURE II.26 – Caractérisation de la réflexion acoustique sur le point de fonctionnement dp20 avec les modèles analytiques de propagation et de réflexion de Rienstra en fonction de la fréquence de la source acoustique. Zone hachurée : intervalle fréquentiel pour lequel il existe une réflexion acoustique en conduite.

utilisés ici sont présentés pour fournir uniquement des tendances sur le comportement de l'acoustique en fonction de la fréquence source. Il a été montré dans le mémoire de thèse de Bontemps [21] que pour une géométrie de type "Bellmouth", les tendances obtenues avec un solveur acoustique haute fidélité étaient les mêmes, malgré un écart important sur la prédiction de la valeur de  $|\mathcal{R}|$  avec les modèles analytiques.

Compte tenu des tendances fournies par les modèles analytiques, une étude d'influence de la fréquence de vibration du mode tournant 1F2D sur l'amortissement aérodynamique a été effec-

tuée avec *elsA* selon l'hypothèse de couplage faible. Pour un point de fonctionnement stable de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal, différents calculs aéroélastiques ont été menés en imposant un mouvement harmonique à la structure pour différentes valeurs de fréquence de mouvement. Le calcul de l'amortissement aéroélastique se fait alors selon une hypothèse de fluide léger : on suppose que l'écart entre la fréquence de mouvement employée dans le calcul et la fréquence propre du mode 1F2D est intégralement attribué à un changement de raideur généralisée du mode. De cette manière, on recrée artificiellement le décalage fréquentiel que produirait une valeur donnée de raideur aéroélastique.

On calcule l'amortissement aéroélastique à l'aide de la relation II.151 :

$$\xi_{aero} = -\frac{W}{4\pi\gamma(\omega) |q_0|^2} \quad (\text{II.162})$$

où la valeur de  $\gamma$  tient compte du décalage en fréquence par rapport à la fréquence propre du mode étudié. En notant respectivement  $\omega_s$  et  $\gamma_s$  la pulsation propre et la raideur généralisée du mode propre de la structure à sec, on a :

$$\gamma(\omega) = \gamma_s \times \left(\frac{\omega}{\omega_s}\right)^2 \quad (\text{II.163})$$

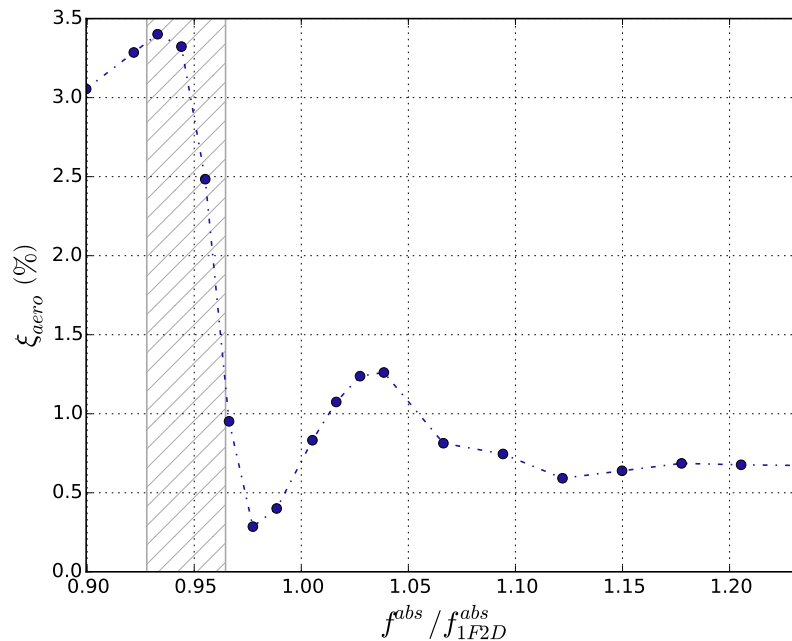


FIGURE II.27 – Évolution de l'amortissement aéroélastique en fonction de la fréquence de vibration du mode 1F2D

Les résultats de cette étude sont visibles en Figure II.27. On observe de grandes variations d'amortissement aéroélastique sur la plage fréquentielle parcourue. Ces résultats sont en accord avec les tendances fournies par les modèles analytiques exploités en Figures II.26b et II.26c : l'amortissement aéroélastique oscille de la même manière que le flutter index selon la variation

de  $\Delta\Phi$  en fonction de la fréquence de vibration. Les oscillations sont de plus en plus importantes lorsque l'on se rapproche de la zone de coupure du mode acoustique d'ordre  $(2, 0)$ , pour laquelle le module du rapport complexe d'amplitude  $\mathcal{R}$  est maximal. On observe que dans un cas d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air, la fréquence de vibration a un impact au premier ordre sur la stabilité aéroélastique de la soufflante. Une forte sensibilité de l'amortissement à la fréquence de vibration est en particulier observée au voisinage de la fréquence de coupure du mode acoustique d'ordre correspondant. Il apparaît ainsi que l'hypothèse de couplage faible permettant d'étudier la stabilité de la soufflante selon les modes propres de la structure à sec n'est plus valable dans un tel contexte acoustique. La raideur aérodynamique pouvant provoquer des glissements fréquentiels sur le mouvement libre du système fluide structure, il convient de définir une procédure permettant la prise en compte dans l'analyse de stabilité. Nous allons proposer une telle procédure dans le prochain paragraphe.

### Présentation de la procédure de correction

La procédure pour tenir compte de la raideur aérodynamique dans les calculs de stabilité aéroélastique selon l'approche par couplage faible s'appuie sur une correction des caractéristiques modales du mode propre de la structure à sec. Celle-ci est illustrée en Figure II.28.

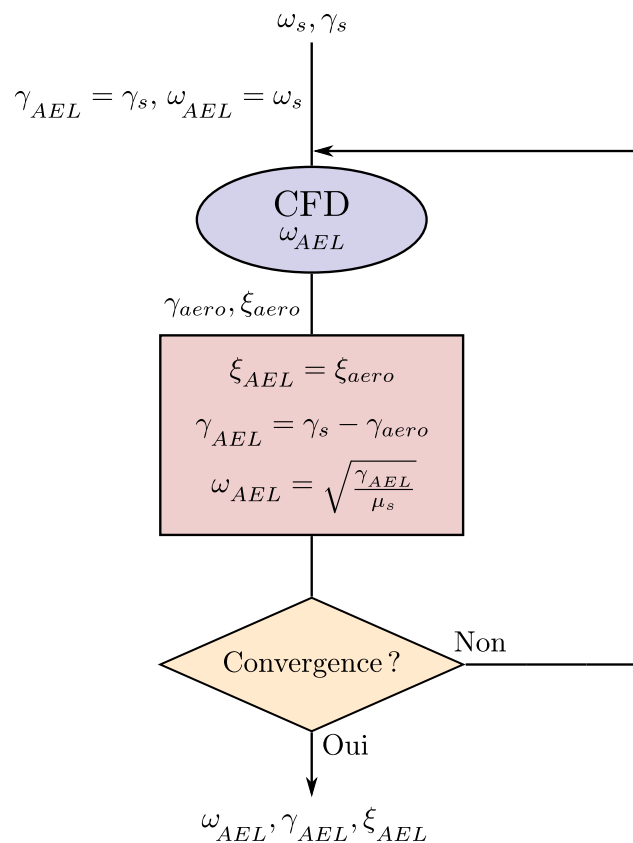


FIGURE II.28 – Procédure de correction du mode propre aéroélastique

Il s'agit d'une procédure itérative visant à faire converger le décalage en fréquence du mouvement libre induit par le fluide. En partant des données modales initiales  $\omega_s$  et  $\gamma_s$  du mode de structure à sec, on réalise successivement une suite de calcul en mouvement harmonique imposé selon la déformée du mode considéré. À la fin d'un calcul aéroélastique, une analyse harmonique

des grandeurs aérodynamiques permet de déterminer l'amortissement aérodynamique  $\xi_{aero}$  et la raideur aérodynamique  $\gamma_{aero}$ . La raideur aérodynamique est utilisée pour corriger la raideur généralisée  $\gamma_s$  du mode de structure à sec selon la formulation des équations II.147 et II.149, et ainsi permettre d'obtenir la raideur généralisée du mode dit aéroélastique  $\gamma_{AEL}$ . Cette nouvelle raideur est utilisée pour calculer le décalage en fréquence correspondant selon l'hypothèse de fluide léger grâce à l'équation II.163. Un nouveau calcul en mouvement harmonique imposé est alors effectué en employant la fréquence  $\omega_{AEL}$  corrigée grâce à la raideur généralisée du mode aéroélastique  $\gamma_{AEL}$ .

La procédure de correction du mode à sec a été utilisée pour les modes 1F2D et 1F3D. On a ainsi une mesure de l'impact d'un décalage en fréquence sur la stabilité aéroélastique dans les cas avec et sans acoustique. Les résultats obtenus sont présentés dans le prochain paragraphe et comparés aux résultats précédemment établis dans le cadre du couplage dynamique.

### Résultats numériques

La Figure II.29 indique les décalages en fréquence provoqués par l'aérodynamique par rapport aux modes propres de la structure à sec pour les points dp00, dp10 et dp20. Le décalage en fréquence est calculé selon l'équation :

$$\Delta f^{abs} = \frac{f^{abs} - f_0^{abs}}{f_0^{abs}} \quad (\text{II.164})$$

où  $f_0^{abs}$  est la fréquence propre du mode considéré en absence d'aérodynamique. Les courbes en traits pleins et en pointillés indiquent respectivement le décalage en fréquence qui résulte d'un calcul en couplage dynamique et celui obtenu à partir de la raideur aérodynamique après calcul en mouvement harmonique imposé selon la fréquence du mode propre à sec.

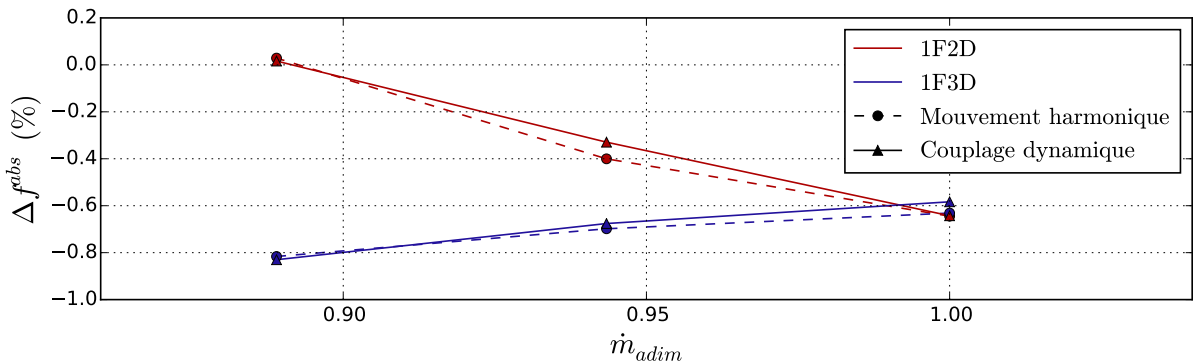


FIGURE II.29 – Décalage fréquentiel dans le repère fixe causé par l'aérodynamique par rapport à la fréquence propre du mode propre associé

On remarque qu'en un calcul en mouvement harmonique imposé, la fréquence du mode corrigé est cohérente avec la fréquence observée lors des calculs en couplage dynamique pour les modes 1F2D et 1F3D.

À partir des résultats affichés en Figure II.29, de nouveaux calculs en mouvement harmonique imposé ont été lancés à la fréquence  $\omega_{AEL}$  selon la procédure de correction du mode à sec détaillée dans le paragraphe précédent. L'analyse de stabilité aéroélastique de ces calculs est superposée aux précédents sur la Figure II.30.



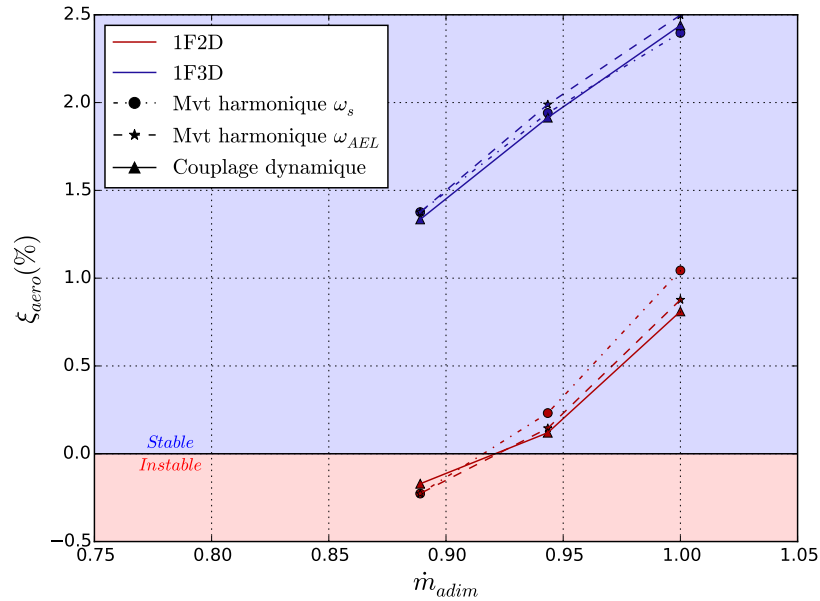


FIGURE II.30 – Amortissement aérodynamique après application de la procédure de correction du mode à sec

Pour le mode 1F2D, on constate que la procédure de correction a permis de réduire l'écart observé entre les résultats de calcul en mouvement harmonique imposé à la fréquence de mode à sec et ceux en couplage dynamique. Ceci est particulièrement visible pour les points dp00 et dp10, où l'écart observé entre les deux méthodes se retrouve dans l'erreur numérique après application de la procédure de correction. En ce qui concerne le point dp20, la stabilité n'est pas impactée par la raideur aérodynamique car le décalage fréquentiel en ce point est nul d'après la Figure II.29.

Pour le mode 1F3D, la procédure ne semble pas améliorer la prédiction de l'amortissement aérodynamique. Pour les points dp00 et dp10, elle semble même nous éloigner de la courbe de couplage dynamique. Toutefois, il doit être mentionné que les trois courbes restent très proches pour ce mode malgré des post-traitements d'amortissement aérodynamique différents. Les résultats de la Figure II.30 montrent de plus que la stabilité du mode 1F3D est peu impactée par le décalage en fréquence induit par le fluide, pourtant plus important pour ce mode que pour le mode 1F2D d'après la Figure II.29. Ces tendances suggèrent que la propagation acoustique en entrée d'air conditionne la nécessité de prendre en compte la raideur aérodynamique dans l'analyse de stabilité aéroélastique. On aura en particulier intérêt à appliquer la procédure de correction abordée dans cette sous-section dans un contexte de propagation acoustique. Nous allons maintenant analyser plus précisément les changements induits par la procédure de correction sur la répartition des travaux des forces aérodynamiques. Nous allons pour cela nous appuyer sur les Figures II.31 et II.32.

L'application de la procédure a eu un impact notable sur la répartition de travail des efforts aérodynamiques dans le cas du mode 1F2D. La Figure II.31a montre que l'application de la procédure n'a pas changé la topologie des zones d'échange énergétique à 91% de hauteur de veine, mais qu'elle a modifié les niveaux d'énergie échangée. Le choc, indiqué par les étoiles,

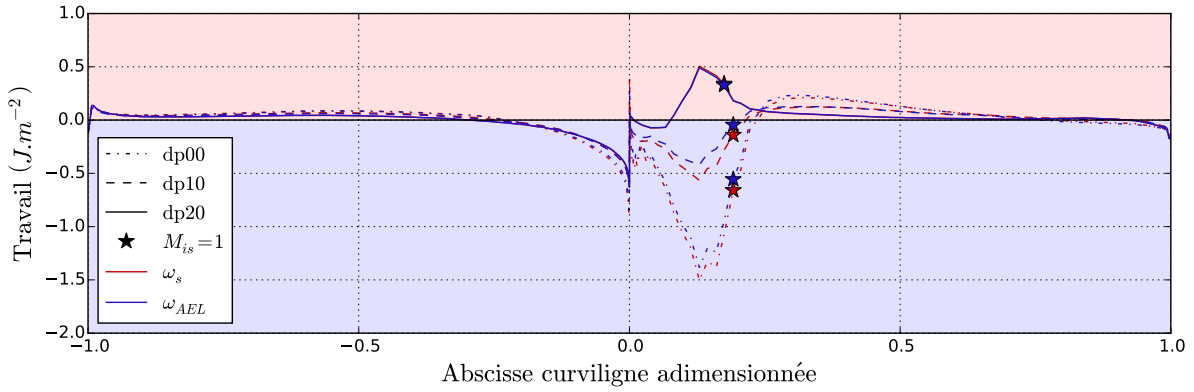
se situe toujours au même endroit sur l'abscisse curviligne, et on n'observe pas l'apparition de nouvelles zones d'échange. En revanche, l'application de la procédure a favorisé un échange d'énergie déstabilisant sur le choc comme indiqué par les valeurs de travail plus élevées pour les points dp00 et dp10 après application de la procédure. Pour le point dp20, on n'observe pas de changement sur les niveaux d'énergie échangée, ce qui était attendu compte tenu du fait que le décalage fréquentiel en ce point est nul.

À 65% de hauteur de veine (Figure II.31b), l'application de la procédure a eu un impact similaire. Un voisinage plus étendu autour du choc semble toutefois être sensible à la procédure de correction contrairement au cas précédent. On note en particulier que seulement le voisinage aval du choc est impacté par la procédure pour le point dp00, tandis que ce sont les voisinages amont et aval qui le sont pour le point dp10. De plus, l'application de la procédure a eu pour effet d'étendre la zone d'échange instable vers le bord d'attaque sur l'extrados. La position du choc reste toutefois le même quel que soit le point de fonctionnement.

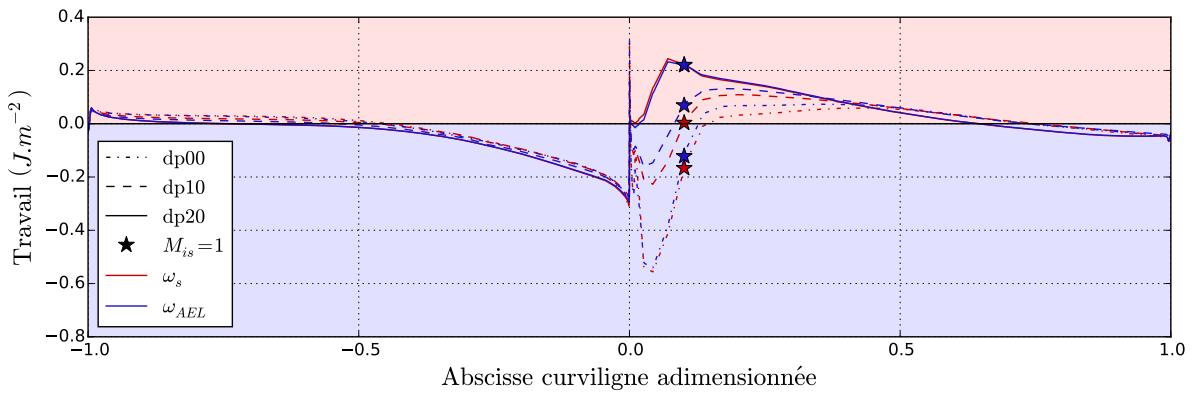
Sur les Figures II.31c, II.31d et II.31e sont affichées les répartitions de travail linéique le long de la hauteur de veine. Comme pour les Figures précédentes, on n'observe aucun changement pour le point dp20 car le décalage en fréquence fourni par la procédure est nul. Pour les points dp00 et dp10 en revanche, des écarts apparaissent avant et après correction principalement sur l'extrados, en accord avec les résultats des Figures II.31a et II.31b.

Pour le mode 1F3D, l'application de la procédure ne produit pas les changements observés dans le cas du mode 1F2D. Quel que soit le point de fonctionnement, les Figures II.32a et II.32b montrent que les répartitions de travail à 91% et 65% de hauteur de veine sont identiques avant et après correction de la fréquence de mouvement. Ce constat est également vérifié sur les Figures II.32c, II.32d et II.32e, où les répartitions de travail linéique le long de la hauteur de veine restent les mêmes après application de la procédure de correction du mode à sec.

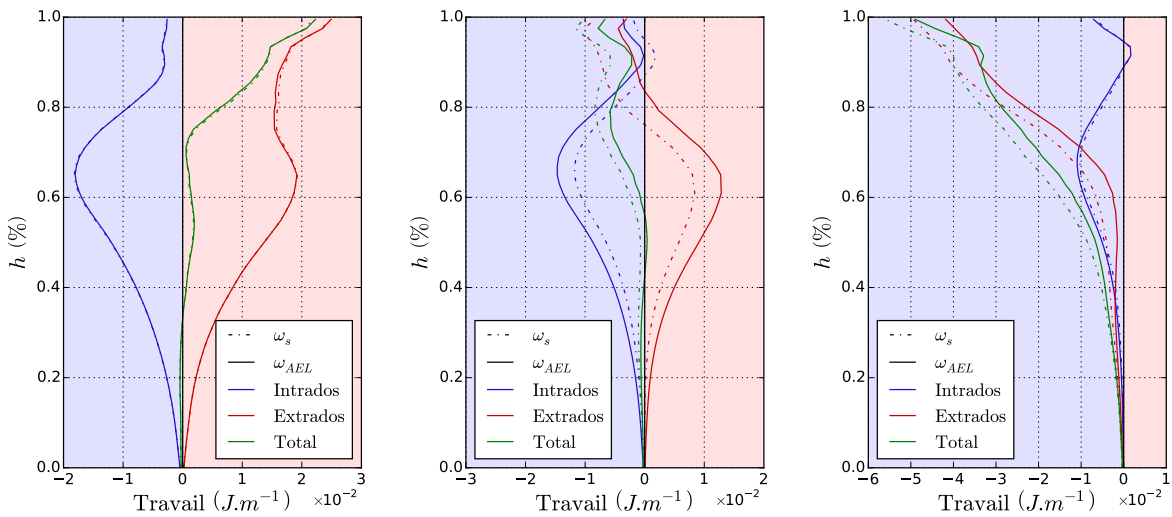
Les résultats obtenus en Figure II.30 sont particulièrement importants car ils montrent que l'hypothèse de couplage faible n'est plus valable dans des conditions d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air. Afin d'estimer les bons niveaux d'amortissement aérodynamique, c'est à dire pour retrouver les niveaux d'amortissement d'un couplage fort fluide structure, une correction des données modales est nécessaire : la procédure de correction détaillée dans le paragraphe précédent et illustrée en Figure II.28 permet d'obtenir en deux calculs seulement en mouvement harmonique imposé les niveaux d'amortissement d'un calcul en couplage dynamique.



(a) Travail surfacique sur l'abscisse curviligne à 91% de hauteur de veine. ★ : abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1 sur la hauteur de veine considérée.



(b) Travail surfacique sur l'abscisse curviligne à 65% de hauteur de veine. ★ : abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1 sur la hauteur de veine considérée.

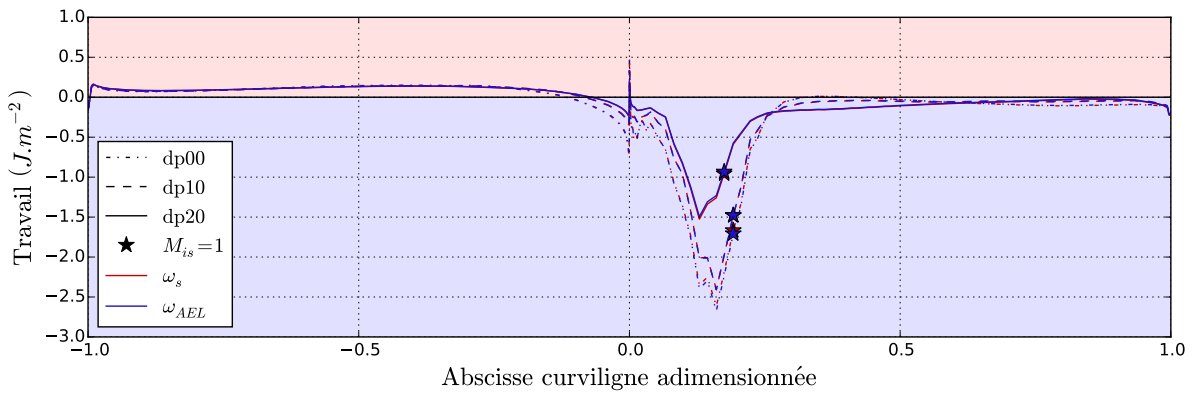


(c) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp20

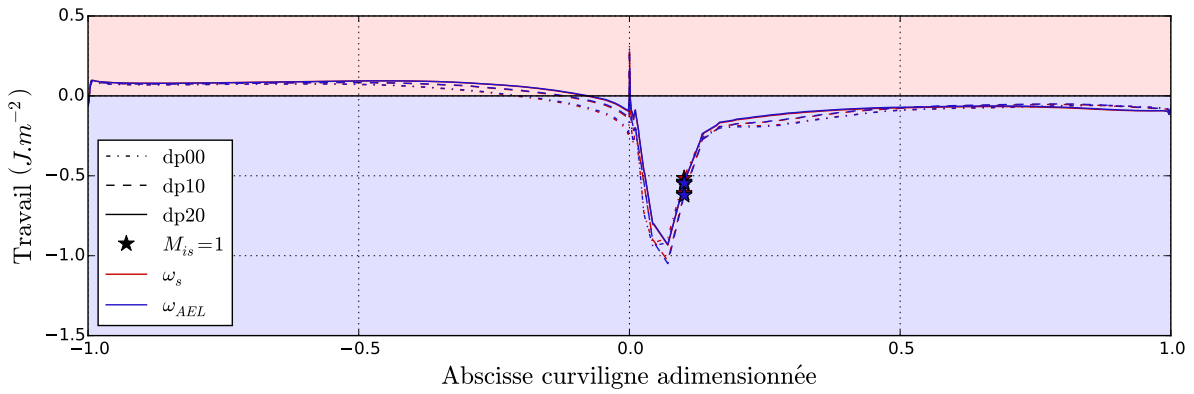
(d) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp10

(e) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp00

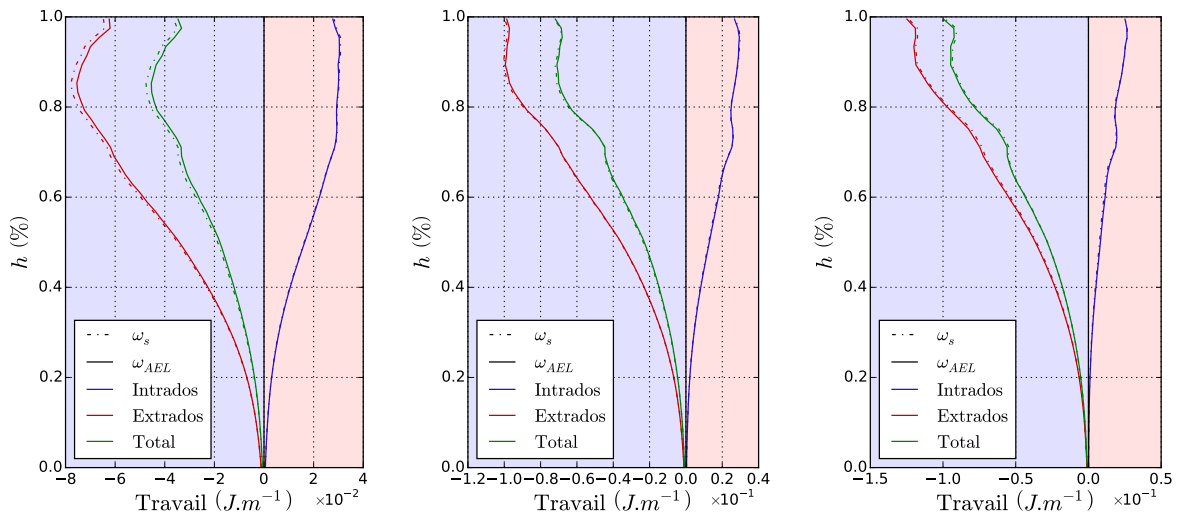
FIGURE II.31 – Application de la procédure de correction des caractéristiques modales pour le mode 1F2D



(a) Travail surfacique sur l'abscisse curviligne à 91% de hauteur de veine. ★ : abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1 sur la hauteur de veine considérée.



(b) Travail surfacique sur l'abscisse curviligne à 65% de hauteur de veine. ★ : abscisse curviligne où le Mach isentropique moyen est égal à 1 sur la hauteur de veine considérée.



(c) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp20 (d) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp10 (e) Travail linéique sur la hauteur de veine – dp00

FIGURE II.32 – Application de la procédure de correction des caractéristiques modales pour le mode 1F3D

## 7 Bilan

Au cours de ce chapitre, les physiques qui caractérisent le système fluide structure étudié dans ces travaux de thèse ont été mises en équations. Dans ce cadre, les équations décrivant la mécanique des fluides ont d'abord été abordées. Une attention particulière a été portée sur la propagation des ondes acoustiques dans une conduite cylindrique. La dynamique de la structure a ensuite été mise en équations selon une approche par formulation faible. Le cas particulier des structures possédant des propriétés de symétrie cyclique (telles que les soufflantes) a été traité, ces dernières se caractérisant par l'apparition de motifs de déformée spatiale harmoniques en azimuth, aussi appelés modes à diamètres. Les problématiques liées à la notion de couplage fluide structure ont alors pu être abordées. La mise en place de tous ces éléments a permis l'étude de la stabilité aéroélastique d'une soufflante industrielle, dans un cas où des interactions acoustiques entre celle-ci et une entrée d'air sont présentes et impactent la stabilité. Des écarts entre deux méthodes de simulation ont permis de révéler que, dans un cas de propagation acoustique dans l'entrée d'air et compte tenu de la forte sensibilité du taux de réflexion à la fréquence, les effets de raideur aérodynamique pouvaient avoir un impact au premier ordre sur la stabilité aéroélastique de la soufflante. Une procédure de correction des caractéristiques modales des modes structuraux a alors été proposée et a permis de prendre en compte ces effets de raideur aérodynamique dans l'analyse de stabilité aéroélastique, permettant de retrouver des résultats cohérents entre les méthodes de calcul. Dans le prochain chapitre, nous allons aborder les méthodes pour déterminer les solutions périodiques d'un système présentant cette fois des non-linéarités de type frottement.

## Chapitre III

# Recherche des solutions périodiques d'une structure avec non-linéarités de frottement

Ce chapitre s'intéresse à la recherche de solutions périodiques stables d'un système présentant des non-linéarités de frottement. La notion de stabilité d'un système va être abordée dans le cas des systèmes non-linéaires. Nous nous intéresserons par la suite aux méthodes pour déterminer les solutions périodiques d'un tel système. Dans ce cadre, un premier axe proposera d'étudier les approches temporelles, tandis que les approches fréquentielles seront abordées dans un second temps. Nous nous intéresserons pour finir au cas des systèmes en régime libre, qui sont ceux étudiés dans le cadre de ces travaux de thèse.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Stabilité des systèmes non-linéaires autour d'une solution périodique . .</b>	<b>111</b>
1.1	Notions de stabilité . . . . .	111
1.2	Bifurcations . . . . .	119
<b>2</b>	<b>Solutions périodiques par approche temporelle . . . . .</b>	<b>121</b>
2.1	Différences finies et développement de Taylor . . . . .	121
2.2	Méthode de tir . . . . .	124
2.3	Collocation orthogonale . . . . .	126
<b>3</b>	<b>Approches fréquentielles non-linéaires . . . . .</b>	<b>127</b>
3.1	Procédure de Galerkin . . . . .	127
3.2	Méthode de la balance harmonique . . . . .	128
3.3	Time Spectral Method . . . . .	129
3.4	Application de la balance harmonique au problème de structure . . . . .	130
3.5	Condensation du système non-linéaire . . . . .	132
3.6	Algorithmes de résolution . . . . .	134
3.7	Méthodes de continuation . . . . .	135
3.8	Calcul des composantes fréquentielles des termes non-linéaires . . . . .	138
3.9	Calcul de la matrice jacobienne . . . . .	140
<b>4</b>	<b>Synthèse modale non-linéaire . . . . .</b>	<b>143</b>
4.1	Notion de mode normal non-linéaire . . . . .	143

4.2	Notion de mode complexe non-linéaire . . . . .	146
<b>5</b>	<b>Bilan . . . . .</b>	<b>156</b>

---

# 1 Stabilité des systèmes non-linéaires autour d'une solution périodique

## 1.1 Notions de stabilité

La dynamique d'un système non-linéaire ne peut plus être décrite grâce au principe de superposition, ce dernier caractérisant les systèmes linéaires : pour des conditions limites données, différentes solutions peuvent caractériser la dynamique d'un tel système. Celui-ci évolue alors vers la solution stable la plus attractive selon l'état dans lequel il se trouve initialement. Dans cette sous-section, nous allons aborder la notion de stabilité mathématique d'une solution d'un système non-linéaire. Le lecteur est par ailleurs invité à se référer au livre de Nayfeh et Balachandran [108] pour plus d'informations sur le sujet.

### Système non-linéaire autonome

On considère un système non-linéaire évoluant au cours du temps. La dynamique d'un tel système peut être décrite de manière générale par une équation de la forme :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (\text{III.1})$$

où  $\mathbf{y}$  est le vecteur d'état du système considéré de dimension finie, et  $\mathbf{f}$  un champ vectoriel pouvant dépendre du temps et décrivant la dynamique du système. Lorsque  $\mathbf{f}$  ne dépend pas du temps (*i.e*  $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{f}(\mathbf{y})$ ), on parle de système autonome. Dans le cas contraire, on parle de système non autonome. Nous nous intéressons dans le cadre de ce travail de thèse aux cas des systèmes autonomes.

### Stabilité globale

La définition de la stabilité n'est pas unique. La plus répandue est la stabilité au sens de Lyapunov. Considérons une solution  $\mathbf{y}_0$  de l'équation dynamique III.1. Cette solution est dite stable au sens de Lyapunov si :

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid \forall \mathbf{y} \text{ solution du système différentiel,} \\ \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{y}_0(t_0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| < \epsilon, \forall t > t_0 \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Graphiquement, l'équation III.2 signifie que la solution  $\mathbf{y}$  reste dans un tube centré sur  $\mathbf{y}_0$  de rayon  $\epsilon$  pour tout  $t > t_0$ .

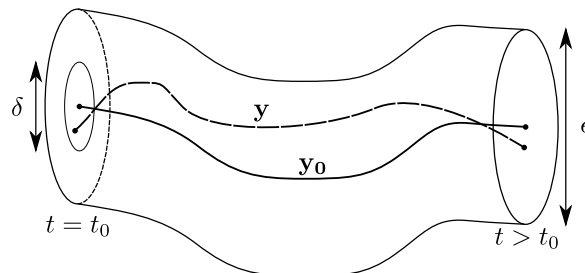


FIGURE III.1 – Représentation géométrique de la stabilité au sens de Lyapunov (adapté de Nayfeh et Balachandran [108])



La solution  $\mathbf{y}_0$  est globalement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov si  $\mathbf{y}_0$  est stable au sens de Lyapunov, et qu'en plus :

$$\forall \mathbf{y} \text{ solution du système différentiel, } \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{y}(t) - \mathbf{y}_0(t)\| = 0 \quad (\text{III.3})$$

La stabilité au sens de Lyapunov peut être restrictive dans le sens où les solutions  $\mathbf{y}$  doivent être proches de  $\mathbf{y}_0$  à chaque instant  $t$ . Pour l'étude de solutions périodiques, il peut être difficile de vérifier cette condition si les périodes ne sont pas les mêmes. On préfère alors comparer les trajectoires dans l'espace d'état pour définir la stabilité. Cette notion de stabilité orbitale est nommée stabilité de Poincaré. Comme indiqué au début de ce paragraphe, il existe de nombreuses autres définitions de la stabilité (stabilité au sens de Poisson, de Lagrange, *etc.*) que nous n'allons pas détailler.

La notion de stabilité asymptotique est globale : aucune hypothèse n'est effectuée sur l'écart entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}_0$  à  $t_0$ , qui peut donc a priori être aussi grand que l'on souhaite. En pratique cependant, les propriétés de stabilité des systèmes peuvent dépendre de l'écart initial entre  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{y}_0$ . On définit un bassin d'attraction de la solution  $\mathbf{y}_0$ , qui constitue le sous espace de l'espace d'état sur lequel  $\mathbf{y}_0$  est localement asymptotiquement stable.

### Stabilité locale

Reprenons l'équation du mouvement de la structure  $\mathcal{S}$ , en prenant en compte un terme de forçage non-linéaire  $\mathbf{f}_{nl}$  et un terme linéaire  $\mathbf{f}_l$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} - \mathbf{f}_{nl} = \mathbf{f}_l \quad (\text{III.4})$$

On pose le vecteur  $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$  de taille  $2 \times n$ . Ce vecteur d'état partagé en deux entre degrés de liberté de déplacements et de vitesses est également nommé vecteur de phase. Il permet de décrire l'espace des phases. L'équation du mouvement se ré-écrit dans l'espace des phases sous la forme très générale III.1 :

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{pmatrix} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_{nl} + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{f}_l \end{pmatrix} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.5})$$

L'étude de la stabilité locale de cette équation peut se faire de plusieurs manières, selon que l'on cherche à étudier un point d'équilibre (*i.e* un point tel que  $\mathbf{f}(\mathbf{y}) = 0$ ), ou une solution périodique.

Lorsque l'on cherche à déterminer la stabilité d'un point d'équilibre, une première approche consiste à linéariser le système non-linéaire autour de celui-ci. On analyse alors les valeurs propres de la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  évaluée au point d'équilibre pour conclure sur la stabilité locale de la solution.

En particulier, on distingue deux cas de figure :

- toutes les valeurs propres de la jacobienne ont une partie réelle non nulle : on parle de point fixe hyperbolique. Le point fixe est instable s'il existe au moins une valeur propre à

partie réelle strictement positive. Dans le cas contraire, le système non-linéaire est localement asymptotiquement stable au sens de Lyapunov sur le point fixe par le théorème de Hartman-Grobman : le portrait de phase du système non-linéaire au voisinage du point est topologiquement équivalent à celui du système linéarisé ;

- il existe au moins une valeur propre à partie réelle nulle. Dans ce cas, l'étude du système linéarisé ne permet pas de conclure. Il devient nécessaire d'employer d'autres outils, tels que les fonctions de Lyapunov, pour déterminer la stabilité asymptotique locale autour du point étudié.

Ces méthodes sont adaptées pour l'étude de stabilité des points d'équilibre. Dans le cadre de ces travaux de thèse cependant, nous sommes intéressés par les solutions périodiques décrivant des cycles limites. Nous allons nous concentrer sur des méthodes permettant de déterminer la stabilité de ce type de solution dans les prochains paragraphes.

### Théorie de Floquet

La théorie de Floquet, résumée dans Nayfeh et Balachandran [108] s'applique sur les équations différentielles à coefficients périodiques. Reprenons l'équation générale du système non linéaire :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.6})$$

On suppose que l'on connaît une solution T-périodique  $\mathbf{y}_0$  du système. Nous allons introduire une perturbation  $\mathbf{p}$  sur la solution T-périodique  $\mathbf{y}_0$  :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \mathbf{p}(t) \quad (\text{III.7})$$

En substituant cette solution perturbée dans le système non-linéaire, et en utilisant pour les efforts non-linéaires la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (en supposant donc la perturbation de classe  $\mathcal{C}^2$ ), on obtient :

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_f(t) \mathbf{p} + \mathcal{O}(\|\mathbf{p}\|^2) \approx \mathbf{J}_f(t) \mathbf{p} \quad (\text{III.8})$$

où  $\mathbf{J}_f(t)$  est la matrice jacobienne de  $\mathbf{f}$  évaluée sur  $\mathbf{y}_0(t)$ . Dans le cas de notre équation du mouvement, on obtient au premier ordre :

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_f(t) \mathbf{p} \quad (\text{III.9})$$

Du fait de la linéarisation autour de la solution périodique, l'analyse de stabilité sera bien locale. Par ailleurs, la jacobienne  $\mathbf{J}_f$  est T-périodique, car la solution sur laquelle a été linéarisé le système possède cette propriété de périodicité par hypothèse.

En supposant la continuité temporelle de l'application  $\mathbf{J}_f$ , le système différentiel de  $2 \times n$  équations traduisant le comportement de la perturbation  $\mathbf{p}$  admet, par le théorème de Cauchy-Lipschitz,  $2 \times n$  solutions linéairement indépendantes. La base formée par ces solutions porte le

nom de système fondamental de solutions. Cette base peut être représentée sous forme matricielle  $\mathbf{P}(t)$  comme la concaténation des  $2 \times n$  solutions :

$$\mathbf{P}(t) = [\mathbf{p}_1(t) \quad \dots \quad \mathbf{p}_{2 \times n}(t)] \quad (\text{III.10})$$

La matrice  $\mathbf{P}$  est également solution du système différentiel traduisant le comportement de la perturbation :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{J}_f(t) \mathbf{P} \quad (\text{III.11})$$

On pose le changement de variable  $t' = t + T$ . D'après l'équation précédente, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{P}}{dt'}(t') &= \frac{d\mathbf{P}}{dt}(t') = \mathbf{J}_f(t') \mathbf{P}(t') \\ &= \mathbf{J}_f(t + T) \mathbf{P}(t') \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Or, puisque  $\mathbf{J}_f$  est T-périodique, on a :

$$\mathbf{J}_f(t') = \mathbf{J}_f(t + T) = \mathbf{J}_f(t) \quad (\text{III.13})$$

Cela signifie que la matrice :

$$\mathbf{P}(t + T) = [\mathbf{p}_1(t + T) \quad \dots \quad \mathbf{p}_{2 \times n}(t + T)] \quad (\text{III.14})$$

est aussi un système fondamental de solutions du système différentiel linéarisé.

Cependant, le théorème de Cauchy-Lipschitz assure exactement  $2 \times n$  solutions linéairement indépendantes au système différentiel traduisant le comportement de la perturbation  $\mathbf{p}$ . Ainsi,  $\mathbf{P}(t + T)$  est combinaison linéaire de  $\mathbf{P}(t)$ , ce qui s'écrit :

$$\mathbf{P}(t + T) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\Phi} \quad (\text{III.15})$$

La matrice  $\mathbf{\Phi}$ , non unique, dépend du système fondamental de solutions  $\mathbf{P}$  choisi. Une manière pour déterminer cette matrice est d'imposer l'ensemble de conditions initiales suivant :

$$\mathbf{P}(0) = \mathbf{I} \quad (\text{III.16})$$

De cette manière, en utilisant la propriété  $\mathbf{P}(t + T) = \mathbf{P}(t) \mathbf{\Phi}$ , on en déduit :

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{P}(T) \quad (\text{III.17})$$

La matrice  $\mathbf{\Phi}$  est appelée matrice de monodromie. L'analyse de ses valeurs propres, appelées multiplicateurs de Floquet, permet de statuer sur la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{y}_0$ .

De plus, le théorème de Floquet [51] affirme que le système fondamental de solutions  $\mathbf{P}$  s'écrit :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t) e^{\mathbf{B}t} \quad (\text{III.18})$$

avec  $\Phi = e^{\mathbf{B}T}$ , et  $\mathbf{Q}$  une matrice  $T$ -périodique de taille  $(2 \times n)^2$ .

La solution du système linéarisé est donc une solution périodique associée à un terme exponentiel. Les valeurs propres de  $\mathbf{B}$  permettent de statuer sur la stabilité de la solution périodique. En effet, puisque  $\Phi = e^{\mathbf{B}T}$ , les valeurs propres de  $\Phi$  et de  $e^{\mathbf{B}T}$  sont identiques, et  $\Phi$  et  $\mathbf{B}$  ont les mêmes vecteurs propres :

$$\text{Sp}(\Phi) = \text{Sp}(e^{\mathbf{B}T}), \mathbf{V}_p(\Phi) = \mathbf{V}_p(\mathbf{B}) \quad (\text{III.19})$$

où les ensembles  $\text{Sp}(\cdot)$  et les matrices  $\mathbf{V}_p(\cdot)$  sont respectivement les spectres et les matrices constituées des vecteurs propres du terme entre parenthèses.

Notons  $\lambda_{\Phi_i}$  et  $\lambda_{\mathbf{B}_i}$  les valeurs propres des matrices  $\Phi$  et de  $\mathbf{B}$ . On a, d'après la relation précédente :

$$\lambda_{\mathbf{B}_i} = \frac{1}{T} \ln \lambda_{\Phi_i} \quad (\text{III.20})$$

Cette relation signifie que les valeurs propres de  $\mathbf{B}$ , nommés exposants de Floquet ou encore exposants de Lyapunov, permettent de traduire la stabilité de la solution périodique de la même manière que les multiplicateurs de Floquet.

Pour conclure sur la stabilité de la solution périodique du système non-linéaire, on peut utiliser au choix les exposants ou les multiplicateurs de Floquet :

- les exposants de Floquet indiquent que la solution est stable si toutes les valeurs propres  $\lambda_{\mathbf{B}_i}$  ont leur partie réelle négative ;
- les multiplicateurs de Floquet indiquent que la solution est stable si toutes les valeurs propres  $\lambda_{\Phi_i}$  sont incluses dans le cercle unité du plan complexe.

Reste à calculer la matrice de monodromie pour la solution périodique trouvée. Bien qu'il existe des méthodes pour déterminer cette matrice en cours de calcul (d'après Von Groll [167]), cette matrice est généralement déterminée après avoir trouvé la solution en question. Reprenons le système linéarisé régissant le comportement de la perturbation :

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{J}_f(t) \mathbf{P} \quad (\text{III.21})$$

où  $\mathbf{J}_f$  est la jacobienne de la fonction  $\mathbf{f}$  évaluée sur la solution périodique  $\mathbf{y}_0$  et  $\mathbf{P}$  le système fondamental de solutions du problème linéarisé. Puisque nous connaissons la valeur de la solution périodique au cours d'une période, nous pouvons en particulier calculer numériquement la valeur de  $\mathbf{J}_f$  à chaque instant de la période. Discrétisons cette période en  $n_t$  pas de temps. On a  $t_0 = 0$ , et  $t_{n_t} = T$ . Le pas de temps entre deux instants vaut  $\Delta t = \frac{T}{n_t}$ .

En appliquant un schéma des différences centrées [51] sur  $\dot{\mathbf{x}}(t_i)$ , sachant que  $\mathbf{x}(t_{-1}) = \mathbf{x}(t_{n_t})$  :

$$\dot{\mathbf{x}}(t_i) = \frac{\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_{i-1}))}{2\Delta t} \quad (\text{III.22})$$

On obtient :

$$\mathbf{y}_0(t_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_i) \\ \frac{\mathbf{x}(t_{i+1}) - \mathbf{x}(t_{i-1})}{2\Delta t} \end{pmatrix}, \forall i \in \{0 \dots n_t\} \quad (\text{III.23})$$

On calcule  $\mathbf{J}_{f_i} = \mathbf{J}_f(t_i)$  pour tout  $i \in \{0 \dots n_t\}$ . On peut alors résoudre  $\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{J}_f(t)\mathbf{P}$  aux mêmes instants en utilisant le schéma aux différences centrées. Sachant que l'on n'a que la valeur initiale  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{I}$  (condition initiale imposée pour avoir  $\Phi = \mathbf{P}(T)$ ), il est nécessaire d'initialiser la procédure incrémentale en utilisant une méthode d'Euler :

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_0 + \Delta t \mathbf{J}_{f_0} \mathbf{P}_0 = \mathbf{I} + \Delta t \mathbf{J}_{f_0} \quad (\text{III.24})$$

On peut alors poursuivre la procédure par schéma aux différences centrées :

$$\mathbf{P}_{i+1} = \mathbf{P}_{i-1} + 2\Delta t \mathbf{J}_{f_i} \mathbf{P}_i \quad (\text{III.25})$$

La matrice de monodromie est donnée par  $\Phi = \mathbf{P}(T) = \mathbf{P}_{n_t}$ .

### Section de Poincaré

Les sections de Poincaré fournissent des informations permettant de décrire la dynamique de différents types de solutions. Elles peuvent en outre permettre de décrire la stabilité des solutions périodiques d'un système non-linéaire. Le principe est de définir (au moins) une hypersurface de l'espace vectoriel dans lequel évolue la solution  $\mathbf{y}_0$ . Cette hypersurface doit être construite de manière à intersecter la solution  $\mathbf{y}_0$ . On note  $\Sigma$  cette hypersurface et  $\chi$  son intersection avec  $\mathbf{y}_0$ .

Considérons un point  $\zeta$  dans le voisinage de  $\mathbf{y}_0$  appartenant à  $\Sigma$ . On choisit de définir à  $t_0$  une trajectoire à partir de ce point et suivant la dynamique non-linéaire du système selon l'équation III.1. Après un temps fini réel  $\tau$  unique, la trajectoire issue de  $\zeta$  traversera une nouvelle fois  $\Sigma$  en  $\tilde{\zeta}$ . En répétant cette opération, on obtient une suite de points d'intersection  $\zeta_i$  entre la trajectoire issue de  $\zeta_0 = \zeta$  et  $\Sigma$ .

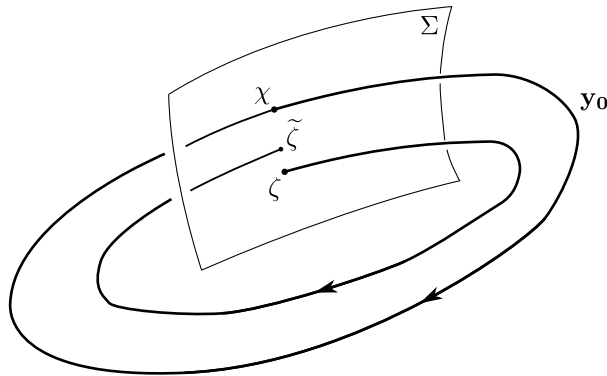


FIGURE III.2 – Représentation d'une section de Poincaré

On définit l'application de Poincaré  $\mathbf{P}$  qui pour un point  $\zeta_i$  de  $\Sigma$  fournit l'intersection  $\zeta_{i+1}$  entre la trajectoire non-linéaire III.1 issue de  $\zeta_i$  et  $\Sigma$  :

$$\zeta_{i+1} = \mathbf{P}(\zeta_i), \quad \forall \zeta_i \in \Sigma \quad (\text{III.26})$$

Le point  $\chi$  est un point d'équilibre de l'application de Poincaré : déterminer la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{y}_0$  revient à déterminer la stabilité du point d'équilibre  $\chi$  de l'application de Poincaré. Les solutions évoquées plus haut, à savoir la linéarisation autour du point d'équilibre ou encore l'emploi des fonctions de Lyapunov s'appliquent à ce cas d'étude. Les valeurs propres de la linéarisation de l'application de Poincaré autour du point fixe  $\frac{\partial \mathbf{P}(\chi)}{\partial \zeta}$  sont égales aux valeurs propres de la matrice de monodromie de la théorie de Floquet [142], dont on déduit la stabilité de la solution périodique  $\mathbf{y}_0$ .

### Méthode de Hill

La méthode de Hill permet de déterminer la stabilité d'une solution périodique d'un système non linéaire en calculant les exposants de Floquet par une approche fréquentielle. Le point de départ de cette méthode est l'équation générale régissant la dynamique non-linéaire du système :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) \quad (\text{III.27})$$

Une perturbation  $\mathbf{p}$  est de nouveau appliquée sur une solution T-périodique  $\mathbf{y}_0$  de l'équation III.27 :

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0(t) + \mathbf{p}(t) \quad (\text{III.28})$$

D'après le paragraphe sur la théorie de Floquet,  $\mathbf{p}$  est solution d'un système différentiel linéaire à coefficients périodiques de dimension  $2 \times n$ , dont le système fondamental de solutions est noté  $\mathbf{P}$ . D'après le théorème de Floquet, on a de plus :

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{Q}(t)e^{\mathbf{B}t} \quad (\text{III.29})$$

avec  $\mathbf{Q}$  une fonction T-périodique.

On considère  $\mathbf{P}'$  la projection de  $\mathbf{P}$  sur la base des vecteurs propres de  $\mathbf{B}$ . Nous utilisons ici l'indice  $l$  pour exprimer le système dans cette nouvelle base. Le système fondamental de solutions se réécrit sous la forme de Floquet, d'après Lazarus et Thomas [89] :

$$\mathbf{P}'(t) = \mathbf{Q}'(t)e^{\lambda_{\mathbf{B}}t} \quad (\text{III.30})$$

où  $\lambda_{\mathbf{B}}$  est la matrice des valeurs propres de  $\mathbf{B}$ .

L'équation différentielle que vérifie  $\mathbf{P}'$  est :

$$\frac{d\mathbf{P}'}{dt} = \mathbf{J}'_{\mathbf{f}}(t) \mathbf{P}' \quad (\text{III.31})$$

La matrice  $\mathbf{Q}'$  est T-périodique par construction. On exprime alors cette matrice sous la forme d'une série de Fourier, de pulsation fondamentale  $\omega$  :

$$\mathbf{Q}'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}'_k e^{jk\omega t} \quad (\text{III.32})$$

La base de projection dans l'espace de Fourier est ainsi de dimension infinie ( $\forall k \in \mathbb{N}^*$ ) :

$$\mathcal{F} = \{ \dots e^{-jk\omega t} \dots e^{-j\omega t} \quad 1 \quad e^{j\omega t} \dots e^{jk\omega t} \dots \} \quad (\text{III.33})$$

On injecte l'équation III.32 dans III.30 :

$$\mathbf{P}'(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{Q}'_k e^{\lambda_{\mathbf{B}} t} e^{jk\omega t} \quad (\text{III.34})$$

De même, on développe la matrice  $\mathbf{J}'_{\mathbf{f}}$ , qui est la matrice  $\mathbf{J}_{\mathbf{f}}(t)$  exprimée dans la base des vecteurs propres de  $\mathbf{B}$ , en série de Fourier :

$$\mathbf{J}'_{\mathbf{f}}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}'_k e^{jk\omega t} \quad (\text{III.35})$$

On considère les produits scalaires suivants, définis pour chaque valeur propre  $\lambda_{\mathbf{B}_i}$  de  $\mathbf{B}$  sur l'ensemble des fonctions continues sur  $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$  à valeur dans  $\mathbb{C}$  :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \left(0; \frac{2\pi}{\omega}\right)^2, \langle f|g \rangle_i = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \overline{g(t)} e^{-\lambda_{\mathbf{B}_i} t} dt \quad (\text{III.36})$$

On va alors projeter l'équation différentielle vérifiée par  $\mathbf{P}'$  sur chaque fonction  $\varphi$  de la base de Fourier  $\mathcal{F}$ . En particulier, cette équation différentielle est vérifiée pour chaque vecteur  $\mathbf{p}'_i$ , égal à la  $i$ -ième colonne de  $\mathbf{P}'$  ( $\forall i \in \{1; 2 \times n\}$ ). L'équation que nous allons projeter sur les fonctions de  $\mathcal{F}$  est :

$$\frac{d\mathbf{p}'_i}{dt} = \mathbf{J}'_{\mathbf{f}}(t) \mathbf{p}'_i \quad (\text{III.37})$$

avec :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{p}'_i}{dt}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\lambda_{\mathbf{B}_i} + jk\omega) \mathbf{q}'_{i,k} e^{(\lambda_{\mathbf{B}_i} + jk\omega)t} \\ \mathbf{p}'_i(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{q}'_{i,k} e^{(\lambda_{\mathbf{B}_i} + jk\omega)t} \\ \mathbf{J}'_{\mathbf{f}}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbf{J}'_k e^{jk\omega t} \end{cases} \quad (\text{III.38})$$

où  $\lambda_{\mathbf{B}_i}$  est le  $i$ -ième valeur propre de  $\mathbf{B}$ .

Ce procédé, qui porte le nom d'équilibrage harmonique, sera abordé plus en détails dans la section III.3. Les vecteurs de base étant orthogonaux pour le produit scalaire choisi, on obtient l'équation algébrique suivante :

$$(\mathbf{H} - \lambda_{\mathbf{B}_i} \mathbf{I}) \mathbf{q}'_i = 0 \quad (\text{III.39})$$

où la matrice  $\mathbf{H}$  est la matrice de Hill de dimension infinie de la forme :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \dots & \mathbf{J}'_0 + j\omega \mathbf{I} & \mathbf{J}'_{-1} & \mathbf{J}'_{-2} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}'_1 & \mathbf{J}'_0 & \mathbf{J}'_{-1} & \dots \\ \dots & \mathbf{J}'_2 & \mathbf{J}'_1 & \mathbf{J}'_0 - j\omega \mathbf{I} & \dots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{III.40})$$

avec  $\mathbf{q}'_i$  de la forme :

$$\mathbf{q}'_i = \left( \cdots \mathbf{q}'_{i,-k} \cdots \mathbf{q}'_{i,-1} \mathbf{q}'_{i,0} \mathbf{q}'_{i,1} \cdots \mathbf{q}'_{i,k} \cdots \right)^T \quad (\text{III.41})$$

Les valeurs propres de la matrice de Hill sont les multiplicateurs de Floquet  $\lambda_{\mathbf{B},i}$ , associées aux vecteurs propres  $\mathbf{q}'_i$ . Le calcul de la matrice de Hill puis de son spectre permet de déterminer la stabilité du système non-linéaire selon la théorie de Floquet. En pratique, la matrice de Hill est calculée en dimension finie en tronquant le développement en série de Fourier en  $N_h$  harmoniques avant de réaliser l'équilibrage harmonique.

## 1.2 Bifurcations

### Définitions

La dynamique des systèmes non-linéaires peut dépendre de nombreux paramètres. Pour certains systèmes, la variation de ces paramètres a un impact important sur la présence de points d'équilibres ou de solutions périodiques ainsi que sur la stabilité de ces solutions : on parle de phénomène de bifurcation.

Les bifurcations ont été introduites par Poincaré en dynamique non linéaire pour décrire un changement qualitatif du comportement des systèmes non-linéaires suite à la modification d'un ou plusieurs paramètres du système. Ces changements peuvent se présenter sous plusieurs formes selon le système étudié : passage d'un point d'équilibre à une orbite périodique, perte ou gain de stabilité, apparition ou suppression d'une dynamique chaotique... L'état du système pour lequel la bifurcation apparaît est nommé point de bifurcation.

On distingue les bifurcations continues et discontinues. Elles caractérisent respectivement une modification continue et discontinue de la dynamique du système pour une variation continue de ses paramètres. En pratique, une bifurcation discontinue s'observe par un changement brutal du comportement du système : dans le cas du contact rotor stator par exemple [167], une bifurcation discontinue des amplitudes de réponse du rotor est observée pour un changement continu de sa vitesse de rotation. Le système saute d'une amplitude à l'autre au passage du point de bifurcation.

### Cas des solutions périodiques

Les bifurcations sont liées à la notion de stabilité locale des solutions du système non-linéaire. Il est possible de décrire la perte de stabilité d'une solution périodique en suivant le module des multiplicateurs de Floquet : un multiplicateur sortant du cercle unité traduit l'apparition d'un point de bifurcation. Pour les solutions périodiques, on observe différentes formes de bifurcation selon les trajectoires de sortie des multiplicateurs de Floquet du cercle unité. On distingue trois trajectoires de sortie, illustrées en Figure III.3 :

- un multiplicateur de Floquet réel sort du cercle unité en passant par le point +1. Plusieurs types de bifurcation peuvent apparaître. La forme la plus connue est le point de retournement. Le passage du point de bifurcation rend la solution étudiée localement instable. Un saut est alors opéré par le système afin d'aller accrocher la dynamique stable la plus attractive si celle-ci existe. L'oscillateur de Duffing est un exemple classique pour ce cas ;



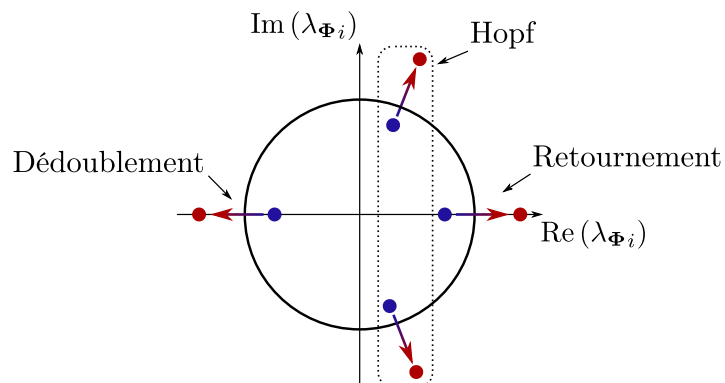


FIGURE III.3 – Représentation des trois manières pour un multiplicateur de Floquet de sortir du cercle unité

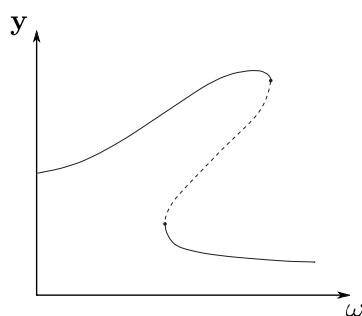


FIGURE III.4 – Bifurcation de type point de retournement : oscillateur de Duffing (solution instable en pointillés)

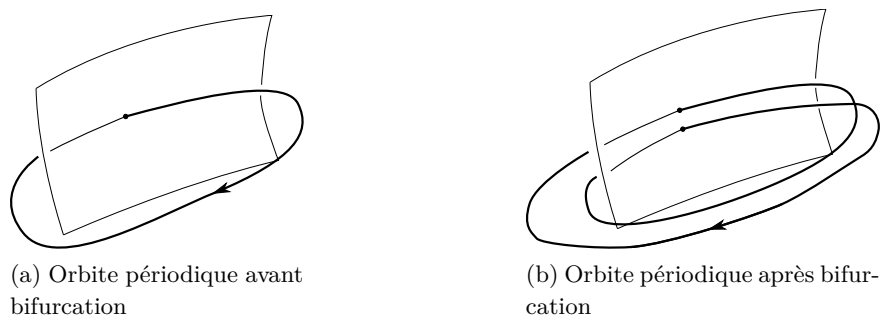


FIGURE III.5 – Bifurcation de type dédoublement de période

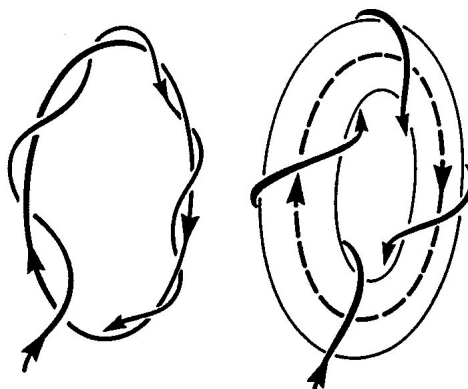


FIGURE III.6 – Bifurcation de Hopf de type 2

- un multiplicateur de Floquet réel sort du cercle unité en passant par le point  $-1$ . On parle de bifurcation sub-harmonique, ou encore de dédoublement de période. Le passage du point de bifurcation rend la solution étudiée instable et fait apparaître de nouvelles solutions. Ces dernières peuvent être stables ou instables. Un dédoublement de la période de la solution périodique initiale est observé au passage du point de bifurcation. Ce type de bifurcation est souvent considéré comme le point de départ d'une transition vers le chaos. La suite logistique en est un exemple académique ;
- une paire de multiplicateurs de Floquet conjugués sortent simultanément du cercle unité complexe. La bifurcation qui en résulte porte le nom de bifurcation de Hopf de type 2, ou encore bifurcation de Neimark-Sacker. Le passage du point de bifurcation rend la solution étudiée instable et de nouvelles solutions quasi-périodiques apparaissent. Ces dernières peuvent être stables ou instables. L'ensemble de ces solutions forme un tore centré sur la solution périodique initiale. On parle de bifurcation en tore.

Le lecteur est invité à se référer au livre de Nayfeh et Balachandran [108] pour plus d'informations sur les bifurcations.

Dans cette section, nous avons passé en revue les notions de stabilité des solutions des systèmes dynamiques non-linéaires. En particulier, nous nous sommes intéressés aux solutions périodiques de ces systèmes, aussi appelés cycles limites, afin de nous rapprocher des problématiques de la thèse. Nous allons voir dans les prochaines sections les méthodes pour calculer numériquement ces solutions périodiques.

## 2 Solutions périodiques par approche temporelle

### 2.1 Différences finies et développement de Taylor

Trouver analytiquement les solutions périodiques d'un système non-linéaire est souvent impossible sauf pour quelques cas académiques. Une méthode numérique simple pour trouver ces solutions consiste à employer des schémas d'intégration temporelle afin d'évaluer le comportement du système pour des conditions initiales données. Reprenons le système différentiel étudié :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \tag{III.42}$$

On va compléter le système par une condition initiale pour mettre en place le schéma d'intégration temporelle :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_{\text{init}} \end{cases} \tag{III.43}$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution unique au problème III.43. Une représentation discrète du temps est utilisée pour évaluer le futur état du système à partir d'un état connu. Différents schémas d'intégration temporelle existent pour évaluer le terme de dérivée en temps. Nous allons voir quelques-uns de ces schémas dans les paragraphes qui suivent.

### Les $\theta$ -méthodes

Les  $\theta$ -méthodes sont un ensemble de schémas d'intégration temporelle basés sur un développement de Taylor-Young au premier ordre de  $\mathbf{y}$ . De cette manière, on peut obtenir une approximation du terme de dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{y}}$  à chaque instant :

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) \quad (\text{III.44})$$

où  $\mathbf{y}_i = \mathbf{y}(t_i)$  est l'évaluation de  $\mathbf{y}$  à l'instant  $t_i$ .

De plus, on évalue la fonction  $\mathbf{f}$  en  $\mathbf{y}(t_\theta)$  par une approximation affine de  $\mathbf{f}$  entre deux instants  $t_i$  et  $t_{i+1}$  :

$$\begin{cases} \theta \in [0; 1] \\ t_\theta = (1 - \theta)t_i + \theta t_{i+1} \\ \mathbf{y}(t_\theta) = (1 - \theta)\mathbf{y}_i + \theta\mathbf{y}_{i+1} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{y}_{i+1} - \mathbf{y}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_\theta), t_\theta) \end{cases} \quad (\text{III.45})$$

Selon la valeur de  $\theta$ , on retrouve trois schémas d'intégration classiques :

- $\theta = 0$  : schéma d'Euler explicite, aussi nommé Forward Euler Method ;
- $\theta = \frac{1}{2}$  : schéma de Crank-Nicolson ;
- $\theta = 1$  : schéma d'Euler implicite, aussi nommé Backward Euler Method.

Les principales différences entre ces méthodes concernent la stabilité du schéma numérique et la précision des résultats obtenus : la méthode d'Euler explicite est stable à condition que le pas de temps soit inférieur à un pas de temps critique  $\Delta t_c$ , et est moins précise que le schéma d'Euler implicite qui lui est inconditionnellement stable. Les méthodes de Runge-Kutta sont des méthodes d'ordre supérieur qui, bien que plus coûteuses, sont plus précises que les méthodes d'Euler, grâce à plusieurs évaluations de la fonction  $\mathbf{f}$  pour le calcul de  $\mathbf{y}$  à chaque pas de temps [55].

### Schéma de Runge-Kutta

Les méthodes de Runge-Kutta [129] [55] constituent une autre famille de méthodes pour résoudre les équations différentielles d'ordre 1 où  $s$  évaluations de la fonction  $\mathbf{f}$  sont réalisées. Ces méthodes sont de la forme :

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta t \int_{t_i}^{t_{i+1}} \mathbf{f}(t, \mathbf{y}) dt = \mathbf{y}_i + \Delta t \sum_{j=1}^s b_j k_j \quad (\text{III.46})$$

où :

$$k_j = \mathbf{f}(t_i + c_j \Delta t, \mathbf{y}_i + \Delta t \sum_{k=1}^s a_{jk} k_k) \quad (\text{III.47})$$

Si  $a_{jk} = 0$  pour  $j \geq k$ , la méthode est explicite. Si  $a_{jk} = 0$  pour  $j > k$  et qu'au moins un des  $a_{jj} \neq 0$ , la méthode est dite diagonalement implicite. Si tous les  $a_{jj}$  sont égaux à un terme non

nul, on parle de "singly diagonal implicit method". Dans les autres cas, on parle de méthode de Runge Kutta implicite. Les coefficients  $b_j$ ,  $c_j$  et  $a_{jk}$  dépendent de la méthode de Runge Kutta employée (ordre 2 ou ordre 4 par exemple). D'après Dit Sandretto [52], l'ordre de méthode de Runge-Kutta est  $p$  si et seulement si l'erreur locale, c'est-à-dire l'écart entre la solution exacte et la solution calculée numériquement est un  $\mathcal{O}(\Delta t^{p+1})$ . La stabilité des méthodes de Runge-Kutta dépend de l'ordre de la méthode utilisée, ainsi que du caractère explicite ou implicite de celle-ci. Il existe des résultats mathématiques qui lient  $s$  et  $p$ , selon que la méthode soit implicite ou explicite. La méthode de Runge-Kutta classique d'ordre 4 (explicite) a la particularité de n'avoir que 4 évaluations de  $\mathbf{f}$ .

### Schéma de Newmark

Dans le cas d'équations différentielles d'ordre 2, les méthodes ci-dessus peuvent s'appliquer en passant en représentation d'état du système. Cependant, ce faisant, on double la taille du système à résoudre.

Il est possible, pour ne pas augmenter la taille du problème, de calculer la solution à chaque instant en utilisant la méthode de Newmark. Celle-ci se définit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_{i+1} = \dot{\mathbf{y}}_i + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_i + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \\ \mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \Delta t \dot{\mathbf{y}}_i + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{y}}_i + \Delta t^2 \beta \ddot{\mathbf{y}}_{i+1} \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

avec  $\gamma$  et  $\beta$  les paramètres du schéma. En injectant ces approximations des expressions de la vitesse et de la position en  $t_{i+1}$  dans l'équation du système du second ordre, on obtient une formule de récurrence sur  $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$ . Dans le cas des systèmes non linéaires, en raison de l'expression du système en  $t_{i+1}$ , le calcul de  $\ddot{\mathbf{y}}_{i+1}$  n'est pas forcément trivial, et des méthodes particulières doivent être employées (méthode de point fixe, Newton-Raphson). Nous reviendrons plus tard sur les méthodes de résolutions des équations algébriques non-linéaires.

Selon les valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $\beta$ , pour les problèmes linéaires conservatifs, le schéma de Newmark a les propriétés différentes :

- $\gamma < \frac{1}{2}$  : le schéma est instable ;
- $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $\beta \geq \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2$  : le schéma est inconditionnellement stable ;
- $\gamma \geq \frac{1}{2}$  et  $\beta < \frac{1}{4}(\gamma + \frac{1}{2})^2$  : le schéma est stable si  $\Delta t \leq \frac{4}{\omega_{max}^2((\gamma + \frac{1}{2})^2 - 4\beta)}$  ( $\omega_{max}$  est la plus grande pulsation propre du système linéaire).

Pour des valeurs particulières de  $\gamma$  et  $\beta$ , on retrouve des schémas d'intégration plus classiques :

- $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = 0$  : schéma aux différences centrées ;
- $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{6}$  : schéma d'accélération constante ;
- $\gamma = \frac{1}{2}$  et  $\beta = \frac{1}{4}$  : schéma d'accélération moyenne.

Les méthodes vues ci-dessus sont très simples à mettre en place pour calculer l'évolution de  $\mathbf{y}$  à chaque instant  $t_i$  et ainsi trouver le régime permanent du système autonome non-linéaire. Cependant, l'inconvénient majeur de ces méthodes est le temps de calcul nécessaire pour obtenir cette

solution. Ces méthodes temporelles induisent une étape transitoire avant d'arriver au régime permanent. Selon le système simulé, ce transitoire peut être trop long pour un contexte d'étude industrielle. Ainsi, on préfère appliquer des méthodes permettant de s'affranchir du calcul du transitoire. Nous allons voir quelques-unes de ces méthodes dans les sous-sections suivantes.

## 2.2 Méthode de tir

La méthode de tir est une approche temporelle pour déterminer une solution périodique d'un système sans passer par le calcul d'un régime transitoire. On considère encore une fois le système non linéaire libre sous sa forme d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} &= \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \\ \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_{\text{init}} \end{cases} \quad (\text{III.49})$$

La méthode de tir est une méthode itérative consistant à chercher une condition initiale  $\mathbf{y}_{\text{init}}$  telle que l'intégration du problème III.49 sur une durée  $T$  fournisse la même solution.

La Figure III.7 représente le principe de la méthode de tir. A gauche se trouvent les résultats obtenus par intégration temporelle d'une simulation d'un système à 1 degré de liberté dans l'espace des phases. On observe en particulier la convergence vers un cycle limite du système. On retrouve sur la figure de droite les points d'intérêt particuliers CI1 et CI2 :

- Le point CI1 représente la situation initiale de la courbe de gauche obtenue par intégration temporelle, et les pointillés bleus l'évolution du système après intégration sur une période du cycle limite à partir de CI1 ;
- Le point CI2 représente un résultat issu de la méthode de tir, et la courbe pleine rouge l'évolution du système après intégration sur une période du cycle limite à partir du point CI2.

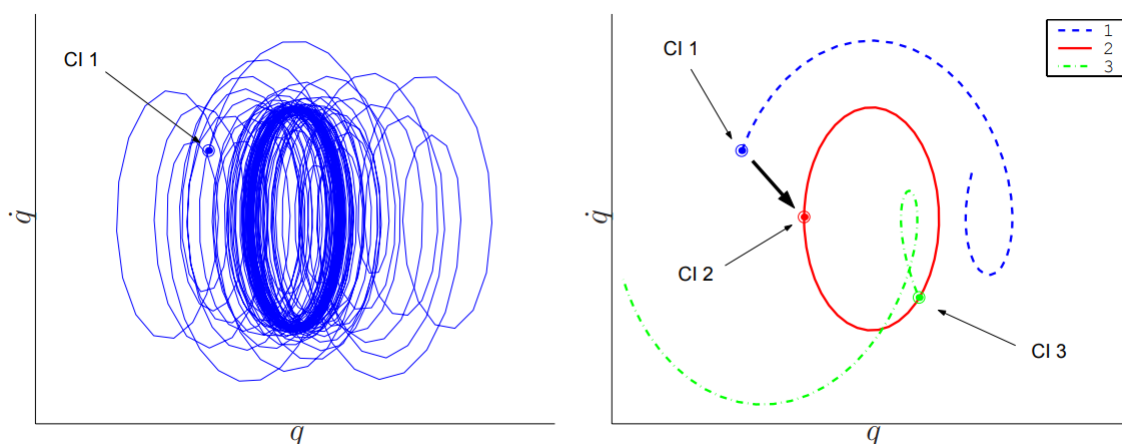


FIGURE III.7 – Comparaison entre intégration temporelle et méthode de tir (d'après Demailly [48])

Le dernier point CI3 concerne un cas de réponse forcée, où une incohérence entre la phase du déplacement et celle de la source d'excitation éloigne la solution initiale de son orbite périodique. La phase du déplacement est en effet imposée par la phase de l'excitation externe, une initialisation quelconque sur l'orbite périodique introduira une nouvelle phase transitoire à la solution.

La méthode de Newton-Fox [156] permet de déterminer la condition initiale  $\mathbf{y}_{\text{init}}$  recherchée. On cherche la condition initiale  $\mathbf{y}_{\text{init}}$  et la période  $T$  de la solution périodique :

$$\mathbf{s}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) = \mathbf{y}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) - \mathbf{y}_{\text{init}} \quad (\text{III.50})$$

On suppose que l'on connaît un premier couple de valeur  $(\mathbf{y}_{\text{init}}, T)$  proche de la solution recherchée. On cherche la correction  $(\Delta\mathbf{y}_{\text{init}}, \Delta T)$  à appliquer sur ce couple de valeur pour résoudre le problème de tir.

Le développement de Taylor au premier ordre de la fonction  $\mathbf{s}$  en  $(\mathbf{y}_{\text{init}} + \Delta\mathbf{y}_{\text{init}}, T + \Delta T)$  donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(\mathbf{y}_{\text{init}} + \Delta\mathbf{y}_{\text{init}}, T + \Delta T) &= \mathbf{s}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T)\Delta T + \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T)\Delta\mathbf{y}_{\text{init}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

On a donc :

$$\mathbf{s}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) & \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) \end{pmatrix}}_{\mathbf{J}_{\mathbf{s}}} \begin{pmatrix} \Delta T \\ \Delta\mathbf{y}_{\text{init}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{III.52})$$

avec  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$  la matrice jacobienne de  $\mathbf{s}$ .

La résolution de l'équation III.52 n'est pas directe car on ne connaît pas à priori le contenu de la jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ . Toutefois, on a les relations directes suivantes d'après III.50 :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial T}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial T}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) \\ \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}(\mathbf{y}_{\text{init}}, T) - \mathbf{I} \end{cases} \quad (\text{III.53})$$

La première équation de III.53 est connue. De plus, la différentiation de la seconde équation par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{y}} \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}} = \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(t) \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}} \quad (\text{III.54})$$

D'après cette équation et compte tenu de la relation  $\mathbf{y}(\mathbf{y}_{\text{init}}, t_0) = \mathbf{y}_{\text{init}}$ , il apparaît que  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}$  est solution du système différentiel :

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t_0) &= \mathbf{I} \\ \frac{d\mathbf{P}}{dt} &= \mathbf{J}_{\mathbf{f}}(t) \mathbf{P} \end{cases} \quad (\text{III.55})$$

La matrice  $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{y}_{\text{init}}}$  est donc égale à la matrice de monodromie. On connaît donc les termes de la jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathbf{s}}$ , et on peut résoudre l'équation III.52 à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson par exemple. Si la période  $T$  n'est pas connue, il est possible de fermer le problème en ajoutant une équation de phase.

### 2.3 Collocation orthogonale

Une dernière méthode pour déterminer des solutions périodiques sans passer par le calcul d'une phase transitoire est la méthode de collocation orthogonale.

On discrétise la période  $[0; T]$  en  $n_t$  intervalles, de la forme :

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n_t} = T, \quad (\text{III.56})$$

On réalise une approximation polynomiale de la solution  $\mathbf{y}$  du système non-linéaire, exacte en  $p$  points de chaque sous intervalle  $[t_i; t_{i+1}]$  nommés points de collocation. Les polynômes sont maximums de degré  $p$ . Pour reprendre la notation de Kuznetsov [81], ces points sont organisés de la manière suivante :

$$t_i = \zeta_{i,1} < \zeta_{i,2} < \dots < \zeta_{i,p} = t_{i+1} \quad (\text{III.57})$$

On définit par  $\mathbf{y}_i$  la solution  $\mathbf{y}$  du système non-linéaire sur l'intervalle  $[t_i; t_{i+1}]$ ,  $\forall i \in \{0; n_t - 1\}$ . On recherche donc à obtenir comme solution :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{y}_i(\zeta_{i,j}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}_i(\zeta_{i,j})) \quad (\text{III.58})$$

L'approximation polynomiale qui prend la forme :

$$\mathbf{y}_i(t) = \sum_{j=0}^p \mathbf{y}_{i,j} P_{i,j}(t) \quad (\text{III.59})$$

On impose finalement la condition de périodicité par :

$$\mathbf{y}_{n_t,p} = \mathbf{y}_{0,0} \quad (\text{III.60})$$

Le problème différentiel initial est remplacé par un problème algébrique dont les inconnues sont les  $\mathbf{y}_{i,j}$ . Ce problème s'obtient en injectant III.59 dans III.58 et en évaluant aux différents instants  $\zeta_{i,j}$ . Dans le cas d'un système en régime libre, la période de la solution n'est pas connue *a priori*, et il convient encore une fois de fixer une condition de phase pour fermer le système (d'après Govaerts et Kuznetsov [67]).

Kuznetsov [81] indique que le plus simple est de considérer une approximation selon les polynômes de Lagrange, et de choisir une répartition uniforme des points de collocation. Cependant, il précise qu'il est possible de minimiser l'erreur de l'approximation polynomiale en choisissant une approximation selon les polynômes de Legendre, et de choisir comme points de collocation les points de Gauss, qui sont les racines des polynômes de Legendre.

Nous avons vu dans cette section un ensemble de méthodes temporelles permettant de trouver des solutions périodiques à des systèmes non-linéaires. En particulier, nous avons vu que certaines permettaient de s'affranchir du calcul des régimes transitoires propres aux approches par intégration temporelle. La liste des méthodes vues dans cette section étant loin d'être exhaustive, le lecteur est invité à se référer à Demailly [48] et Sarrouy [140] pour une vision plus

étendue de ce type d'approche (différences finies, éléments finis en temps). Les méthodes temporelles ne sont toutefois pas les seules permettant de trouver des solutions périodiques. Le problème différentiel dans le domaine temporel peut en effet être remplacé par un problème algébrique en procédant par approche fréquentielle. Nous allons voir ce type d'approche dans la prochaine section.

### 3 Approches fréquentielles non-linéaires

En préambule, nous allons introduire la procédure de Galerkin qui est au cœur des méthodes fréquentielles qui seront abordées par la suite.

#### 3.1 Procédure de Galerkin

La procédure de Galerkin est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés [113]. Reprenons notre problème non-linéaire général, défini dans un espace vectoriel  $\mathcal{D}$ . Celui-ci s'écrit :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \quad (\text{III.61})$$

La première étape de la méthode des résidus pondérés est de réaliser une approximation  $\mathbf{y}^*$  de la solution exacte  $\mathbf{y}_0$  de notre problème. L'équation différentielle du système non-linéaire n'est pas exactement vérifiée pour  $\mathbf{y}^*$ , et un terme d'erreur apparaît. Ce terme d'erreur est nommé résidu, et est noté  $\mathcal{R}(\mathbf{y}^*)$ . On a donc :

$$\mathcal{R}(\mathbf{y}^*) = \dot{\mathbf{y}}^* - \mathbf{f}(\mathbf{y}^*, t) \quad (\text{III.62})$$

On suppose que l'approximation de  $\mathbf{y}_0$  est exprimée sur un sous-espace vectoriel  $\mathcal{W}$  de dimension  $w$  de  $\mathcal{D}$  (*i.e* de l'espace des solutions cinématiquement admissibles du système non-linéaire). On peut donc construire une base sur ce sous espace, dont les vecteurs de base seront rangés dans la matrice  $\mathbf{W}$ , sur laquelle on exprimera l'approximation  $\mathbf{y}^*$ . Les vecteurs de cette base sont nommés fonctions de forme. On a :

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{W}\mathbf{q} \quad (\text{III.63})$$

où  $\mathbf{q}$  est le vecteur des coordonnées de  $\mathbf{y}^*$  dans la base constituée par les colonnes de  $\mathbf{W}$ .

La deuxième étape de la méthode des résidus pondérés est de choisir, dans un autre sous espace  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{D}$ ,  $u$  fonctions quelconques appelées fonctions de pondération. Une fois ces fonctions choisies, on souhaite déterminer le vecteur des coordonnées  $\mathbf{q}$  qui annule l'erreur commise sur le résidu pondéré par les fonctions  $\mathbf{u}_i$  pour un produit scalaire  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  sur  $\mathcal{D}$  adapté :

$$\forall i, \langle \mathbf{u}_i | \mathcal{R}(\mathbf{y}^*) \rangle = 0 \quad (\text{III.64})$$

Lorsque les fonctions de pondération  $\mathbf{u}_i$  choisies sont égales aux fonctions de forme (et donc  $\mathcal{W} = \mathcal{U}$ ), on parle alors de procédure de Galerkin. Sinon, on parle de procédure de Petrov-Galerkin.



Usuellement, on considère pour  $\mathcal{D}$  l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur un intervalle  $\mathcal{I}$ , muni du produit scalaire :

$$\langle f|g \rangle = \int_{\mathcal{I}} f(x)\overline{g(x)}dx \quad (\text{III.65})$$

Maintenant que nous avons vu la procédure de Galerkin, nous allons l'appliquer directement pour expliciter la méthode de balance harmonique.

### 3.2 Méthode de la balance harmonique

La méthode de balance harmonique consiste à utiliser la procédure de Galerkin pour projeter l'équation différentielle exprimée dans le domaine temporel vers un domaine harmonique. De cette manière, une équation algébrique est obtenue et peut être résolue avec des algorithmes de type Newton-Raphson pour trouver des solutions périodiques au problème différentiel initial.

Il convient de choisir un espace d'approximation/projection, ainsi qu'un produit scalaire pour appliquer la procédure de Galerkin. Notons qu'il est intéressant de choisir un espace vectoriel d'approximation et un produit scalaire adaptés, de sorte que les vecteurs de base soient orthogonaux. On choisit comme espace la base de Fourier tronquée à  $N_h$  harmoniques, de pulsation fondamentale  $\omega$  :

$$\mathcal{F} = \{e^{-jk\omega t} \quad \dots \quad e^{-j\omega t} \quad 1 \quad e^{j\omega t} \quad \dots \quad e^{jk\omega t}\}, \forall k \in \{-N_h; \dots; N_h\} \quad (\text{III.66})$$

La décomposition en série de Fourier de l'équation III.61 s'écrit :

$$\sum_{k=-N_h}^{N_h} (jk\omega \mathbf{Y}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{Y})) e^{jk\omega t} = 0 \quad (\text{III.67})$$

où  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_{-N_h} \quad \dots \quad \mathbf{Y}_0 \quad \dots \quad \mathbf{Y}_{N_h})^T$  et  $\mathbf{F}_k$  sont les coefficients de Fourier de  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{f}$  (équation III.62) pour l'harmonique  $k$ . En utilisant le produit scalaire défini sur l'espace  $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$  des fonctions de carré intégrable à valeurs dans  $\mathbb{C}$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$  par :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \left(0; \frac{2\pi}{\omega}\right)^2, \langle f|g \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\overline{g(t)}dt \quad (\text{III.68})$$

avec les vecteurs de la base  $\mathcal{F}$ , on obtient  $\dim(\mathbf{y}) \times (2 \times N_h + 1)$  équations algébriques dont les inconnues sont les coefficients de Fourier  $\mathbf{Y}_k$  :

$$jk\omega \mathbf{Y}_k - \mathbf{F}_k(\mathbf{Y}) = 0, \forall k \in \{-N_h; \dots; N_h\} \quad (\text{III.69})$$

Cette procédure d'estimation harmonique de la solution et de projection sur la base  $\mathcal{F}$  porte le nom d'équilibrage harmonique (HBM pour Harmonic Balance Method). On réécrit l'équation III.69 sous forme matricielle :

$$\mathbf{H}\mathbf{Y} - \mathbf{F}(\mathbf{Y}) = 0 \quad (\text{III.70})$$

où :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} -jN_h\omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & -j\omega & \\ \vdots & & 0 & \vdots \\ & & & j\omega & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & jN_h\omega \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{-N_h} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{-1} \\ \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_h} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{-N_h} \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{-1} \\ \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.71})$$

L'évaluation des  $\mathbf{F}_k$  peut poser des difficultés selon les non-linéarités considérées dans le système. Nous reviendrons sur le calcul de ces termes dans la sous-section III.3.8.

La méthode de la balance harmonique est très utilisée dans le cadre de la mécanique des structure en présence de non-linéarités. Une variante de cette méthode est toutefois plus répandue dans le cadre de la mécanique des fluides. Cette variante va être abordée dans la prochaine sous-section.

### 3.3 Time Spectral Method

En mécanique des fluides numérique, il est courant que les codes soient écrits en formulation temporelle. La méthode de balance harmonique telle que développée dans la sous-section III.3.2 n'est pas applicable telle quelle dans ce cas car elle suppose une formulation harmonique des grandeurs d'intérêt et non pas temporelle.

La Time Spectral Method (TSM) propose une résolution dans le domaine temporel des équations obtenues par balance harmonique. Cette méthode consiste à utiliser la Transformée de Fourier Discrète (TFD) sur le système III.70. Il n'y a donc pas de différence fondamentale entre la HBM et la TSM. On définit la matrice de transformée de Fourier discrète complexe  $\mathbf{E}$  permettant de passer du domaine temporel au domaine fréquentiel :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t_0} \\ \mathbf{y}_{t_1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t_{2N_h}} \end{pmatrix} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{-N_h} \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{-1} \\ \mathbf{Y}_0 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.72})$$

où  $\mathbf{y}_{t_i} = \mathbf{y}(t_i)$ , et :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} e^{-jN_h\omega t_0} & e^{-j(N_h-1)\omega t_0} & \dots & 1 & \dots & e^{j(N_h-1)\omega t_0} & e^{jN_h\omega t_0} \\ e^{-jN_h\omega t_1} & e^{-j(N_h-1)\omega t_1} & \dots & 1 & \dots & e^{j(N_h-1)\omega t_1} & e^{jN_h\omega t_1} \\ & & & \vdots & & & \\ e^{-jN_h\omega t_{2N_h}} & e^{-j(N_h-1)\omega t_{2N_h}} & \dots & 1 & \dots & e^{j(N_h-1)\omega t_{2N_h}} & e^{jN_h\omega t_{2N_h}} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.73})$$

On applique la transformée discrète au système III.70, permettant d'obtenir l'équation algébrique temporelle :

$$\mathbf{H}^* \mathbf{y}^* - \mathbf{f}^*(\mathbf{y}^*) = 0 \quad (\text{III.74})$$

où :

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_{t_0} \\ \mathbf{y}_{t_1} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{t_{2N_h}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{t_0} \\ \mathbf{f}_{t_1} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{t_{2N_h}} \end{pmatrix} \quad (\text{III.75})$$

et d'après Gopinath et Jameson [65] :

$$\mathbf{H}^* = \frac{2\pi}{T} \begin{pmatrix} H_0^* & H_1^* & \cdots & H_{2N_h-1}^* & H_{2N_h}^* \\ H_{2N_h}^* & H_0^* & H_1^* & & H_{2N_h-1}^* \\ & H_{2N_h}^* & H_0^* & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ H_2^* & & & H_0^* & H_1^* \\ H_1^* & H_2^* & \cdots & H_{2N_h}^* & H_0^* \end{pmatrix} \quad (\text{III.76})$$

où :

$$H_m^* = \begin{cases} \frac{1}{2} (-1)^{m+1} \cot\left(\frac{\pi m}{2 \times N_h + 1}\right) & \text{si } m \neq 0 \\ 0 & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (\text{III.77})$$

La résolution du système algébrique temporel III.74 permet d'obtenir simultanément tous les instants de la période étudiée. Un schéma de type Dual Time Stepping permet de résoudre le système III.74, en résolvant simultanément  $2 \times N_h + 1$  calculs stationnaires.

### 3.4 Application de la balance harmonique au problème de structure

Reprenons une formulation éléments finis de la structure, en y incluant un vecteur représentatif des efforts non-linéaires de friction :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}_l \quad (\text{III.78})$$

où  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont les matrices de masse, d'amortissement structural et de raideur de la structure, tandis que  $\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}})$  est l'opposé du vecteur des efforts non-linéaires appliqués sur la structure et  $\mathbf{f}_l$  est un vecteur d'efforts linéaires extérieurs appliqués sur la structure.

On note  $\mathbf{r}$  le vecteur résidu associé à l'équation III.78 :

$$\mathbf{r} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) - \mathbf{f}_l \quad (\text{III.79})$$

Nous allons appliquer la procédure de Galerkin en utilisant la base de Fourier en représentation

réelle à  $N_h$  harmoniques, de pulsation fondamentale  $\omega$ . On écrit :

$$\mathcal{F} = \{1 \quad \cos(\omega t) \quad \sin(\omega t) \quad \dots \quad \cos(N_h \omega t) \quad \sin(N_h \omega t)\} \quad (\text{III.80})$$

On cherche une solution sous la forme :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{III.81})$$

Les fonctions de la base de Fourier sont à la fois les fonctions de forme et les fonctions de pondération de la méthode des résidus pondérés dans le cas particulier de la procédure de Galerkin.

En ce qui concerne le produit scalaire, nous choisissons cette fois-ci celui défini sur l'espace  $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}$  des fonctions de carré intégrable à valeurs dans  $\mathbb{R}$  sur l'intervalle  $\left[0; \frac{2\pi}{\omega}\right]$  :

$$\forall f, g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}} \left(0; \frac{2\pi}{\omega}\right)^2, \langle f|g \rangle = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)g(t)dt \quad (\text{III.82})$$

Les éléments de  $\mathcal{F}$  sont bien orthogonaux pour le produit scalaire choisi.

On réalise l'équilibrage harmonique en projetant le résidu sur chaque fonction de  $\mathcal{F}$ . En utilisant les mêmes notations que Joannin [75], c'est à dire  $c_0 = 1$ ,  $c_k = \cos(k\omega t)$  et  $s_k = \sin(k\omega t)$ , et en projetant le résidu  $\mathbf{r}$  sur chaque fonction  $\varphi$  de la base de Fourier  $\mathcal{F}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r}|\varphi \rangle &= \mathbf{M} \sum_{k=1}^{N_h} - (k\omega)^2 (\mathbf{a}_k \langle c_k|\varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k|\varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{C} \sum_{k=1}^{N_h} - (k\omega) (\mathbf{a}_k \langle s_k|\varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k|\varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{K} \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \langle c_k|\varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k|\varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{K}\mathbf{a}_0 \langle c_0|\varphi \rangle + \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}|\varphi \rangle - \langle \mathbf{f}_1|\varphi \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.83})$$

Les fonctions de base ayant été choisies de cette manière pour être orthogonales, on aboutit au système algébrique suivant, en prenant pour valeur de  $\varphi$  chaque vecteur de  $\mathcal{F}$  :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r}|c_0 \rangle = 2\mathbf{K} \mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}|c_0 \rangle - \langle \mathbf{f}_1|c_0 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{r}|c_k \rangle = (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{a}_k + (k\omega) \mathbf{C} \mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}|c_k \rangle - \langle \mathbf{f}_1|c_k \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{r}|s_k \rangle = (\mathbf{K} - (k\omega)^2 \mathbf{M}) \mathbf{b}_k - (k\omega) \mathbf{C} \mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f}_{\text{nl}}|s_k \rangle - \langle \mathbf{f}_1|s_k \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III.84})$$

Ce système algébrique peut être réécrit sous forme matricielle. On note  $\mathbf{X}$  le vecteur des composantes harmoniques de  $\mathbf{x}$ . On a :

$$\mathbf{X} = (\mathbf{a}_0 \quad \mathbf{a}_1 \quad \mathbf{b}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_{N_h} \quad \mathbf{b}_{N_h})^T \quad (\text{III.85})$$

Le système algébrique traduisant le comportement du problème dans le domaine fréquentiel s'écrit alors :

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega) - \mathbf{F}_1 = 0 \quad (\text{III.86})$$

où la matrice  $\mathbf{Z}$  est la matrice de rigidité multi-harmonique du système algébrique non-linéaire. Cette matrice est diagonale par blocs, et on a :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & & & & \\ & \mathbf{Z}^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{Z}^k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{Z}^{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.87})$$

où :

$$\mathbf{Z}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} & (k\omega)\mathbf{C} \\ -(k\omega)\mathbf{C} & \mathbf{K} - (k\omega)^2\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{III.88})$$

En notant  $n$  la dimension de  $\mathbf{x}$ , on a changé le problème différentiel initial de dimension  $n$  contre un problème algébrique de dimension  $n \times (2N_h + 1)$ . Dans le cas de la structure en présence de frottement non-linéaire, il est possible de réaliser des réductions exactes de la taille du problème. Nous allons voir ces réductions dans la sous-section suivante.

### 3.5 Condensation du système non-linéaire

#### Condensation sur les degrés de liberté non-linéaires

Les efforts non-linéaires de frottement ne sont exprimés que sur un nombre restreint de degrés de liberté. On les note  $n_{nl}$ , tel que  $n_{nl} < n$ . Ainsi, dans le domaine harmonique,  $\mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega)$  n'est non nul qu'en  $n_{nl} \times (2N_h + 1)$  points. À l'aide de permutations matricielles élémentaires, le problème algébrique peut être écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_{nl,nl} & \mathbf{Z}_{nl,l} \\ \mathbf{Z}_{l,nl} & \mathbf{Z}_{l,l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}_{nl} \\ \mathbf{X}_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{F}_{1nl} \\ \mathbf{F}_{1l} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{III.89})$$

où la première ligne regroupe les termes relatifs aux degrés de liberté sur lesquels s'appliquent les efforts de frottement, tandis que la deuxième regroupe tous les autres termes.

La seconde ligne de III.89 permet de réaliser une condensation exacte du problème sur les degrés de liberté non-linéaires :

$$\mathbf{X}_l = \mathbf{Z}_{l,l}^{-1} (\mathbf{F}_{1l} - \mathbf{Z}_{l,nl}\mathbf{X}_{nl}) \quad (\text{III.90})$$

On peut donc reformuler le problème uniquement sur la première ligne de III.89 sous la forme :

$$\mathbf{Z}_{red}(\omega)\mathbf{X}_{nl} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}_{nl}, \omega) - \mathbf{F}_{1red} = 0 \quad (\text{III.91})$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\text{red}}(\omega) = \mathbf{Z}_{\text{nl, nl}} - \mathbf{Z}_{\text{nl, l}} \mathbf{Z}_{\text{l, l}}^{-1} \mathbf{Z}_{\text{l, nl}} \\ \mathbf{F}_{\text{l, red}} = \mathbf{F}_{\text{l, nl}} - \mathbf{Z}_{\text{nl, l}} \mathbf{Z}_{\text{l, l}}^{-1} \mathbf{F}_{\text{l, l}} \end{cases} \quad (\text{III.92})$$

On a donc un nouveau système algébrique à résoudre, de dimension  $n_{\text{nl}} \times (2N_h + 1)$ . Il est encore possible de réduire la taille du problème de manière exacte en réalisant une condensation du problème sur les déplacements relatifs.

### Condensation sur les déplacements relatifs

On considère que le frottement se produit entre deux sous-structures distinctes. En supposant que les nœuds des interfaces de frottement sont coïncidents, il est possible de diviser par 2 la taille du problème en les appairant pour raisonner en déplacements relatifs. On considère l'équation algébrique réduite III.91 pour les sous-structures, qui sont numérotées respectivement 1 et 2. Le système algébrique peut être écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\text{red}}^1(\omega) \mathbf{X}_{\text{nl}}^1 + \mathbf{F}_{\text{nl}}^1(\mathbf{X}_{\text{nl}}^1, \omega) - \mathbf{F}_{\text{l, red}}^1 = 0 \\ \mathbf{Z}_{\text{red}}^2(\omega) \mathbf{X}_{\text{nl}}^2 + \mathbf{F}_{\text{nl}}^2(\mathbf{X}_{\text{nl}}^2, \omega) - \mathbf{F}_{\text{l, red}}^2 = 0 \end{cases} \quad (\text{III.93})$$

Sur les nœuds coïncidents, le principe d'action-réaction donne la relation :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}}^1 + \mathbf{F}_{\text{nl}}^2 = 0 \quad (\text{III.94})$$

On écrit le problème sur les déplacement relatifs, en utilisant les notations :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_{\text{r}} &= \mathbf{X}_{\text{nl}}^1 - \mathbf{X}_{\text{nl}}^2 \\ \mathbf{F}_{\text{nl, r}} &= \mathbf{F}_{\text{nl}}^1 \end{cases} \quad (\text{III.95})$$

On aboutit alors au système algébrique final :

$$\mathbf{Z}_{\text{r}}(\omega) \mathbf{X}_{\text{r}} + \mathbf{F}_{\text{nl, r}}(\mathbf{X}_{\text{r}}, \omega) - \mathbf{F}_{\text{l, r}} = 0 \quad (\text{III.96})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_{\text{r}} &= (\mathbf{Z}_{\text{red}}^{1-1} + \mathbf{Z}_{\text{red}}^{2-1})^{-1} \\ \mathbf{F}_{\text{l, r}} &= \mathbf{Z}_{\text{r}} (\mathbf{Z}_{\text{red}}^{1-1} \mathbf{F}_{\text{l, red}}^1 - \mathbf{Z}_{\text{red}}^{2-1} \mathbf{F}_{\text{l, red}}^2) \end{cases} \quad (\text{III.97})$$

Une fois ce système résolu, on peut remonter au reste des grandeurs harmoniques en remontant ces processus de réduction.

Remarque : il peut arriver dans certains cas que la fréquence soit une inconnue supplémentaire. Le système n'étant alors plus carré, il est d'usage d'imposer une condition de phase supplémentaire pour fermer le système.

Dans la prochaine sous-section, nous allons voir comment résoudre les équations algébriques obtenues par méthode de balance harmonique.

### 3.6 Algorithmes de résolution

Nous nous intéressons ici à la résolution à proprement parler de systèmes algébriques non-linéaires mis sous forme résiduelle. On suppose en particulier que le problème est carré, c'est à dire qu'il y a autant d'équations que d'inconnues. Pour finir, on suppose que les inconnues du problème à résoudre sont contenues dans le vecteur  $\mathbf{X}$ . Le problème a donc la forme suivante :

$$\text{Trouver } \mathbf{X} \text{ tel que } \mathcal{R}(\mathbf{X}) = 0$$

#### Algorithme du point fixe

L'algorithme du point fixe est la méthode la plus simple à mettre en place. Celui-ci découle du théorème suivant [49] : soit  $E$  l'espace vectoriel sur lequel est défini une fonction  $\mathcal{H}$ . Si  $E$  est un espace métrique complet, et que  $\mathcal{H}$  est contractante, c'est-à-dire  $k$ -lipschitzienne avec  $k < 1$ , alors  $\mathcal{H}$  admet un unique point fixe  $\mathbf{X}_0 \in E$ . De plus, pour tout point initial  $\mathbf{X}_{\text{init}}$  de  $E$ , la suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathcal{H}(\mathbf{X}_n)$  converge vers le point fixe  $\mathbf{X}_0$ .

Il reste dans notre cas à définir la fonction  $\mathcal{H}$ . On pose :

$$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \mathcal{R}(\mathbf{X}) + \mathbf{X} \tag{III.98}$$

Si cette fonction est contractante et continue, alors le théorème précédemment énoncé assure que la suite  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie par  $\mathbf{X}_{n+1} = \mathcal{H}(\mathbf{X}_n)$  converge vers son point fixe, et donc que  $\mathcal{R}$  converge vers 0. Cependant, dans notre cas, rien ne nous dit que l'application  $\mathcal{H}$  est contractante. L'utilisation de méthodes de relaxation permet de contourner ce problème.

#### Algorithme de Newton-Raphson

L'algorithme de Newton-Raphson est un algorithme très utilisé pour résoudre des équations non-linéaires de type  $\mathcal{R}(\mathbf{X}) = 0$  en raison de sa simplicité de mise en place et de son efficacité. L'idée est la suivante : on part d'une certaine valeur  $\mathbf{X}_0$  que l'on suppose peu éloignée de la solution réelle du problème. On réalise alors un développement de Taylor au premier ordre de la valeur du résidu pour un faible écart  $\Delta \mathbf{X}$  de  $\mathbf{X}_0$  :

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) \approx \mathcal{R}(\mathbf{X}_0) + \mathbf{J}_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}_0)\Delta \mathbf{X} \tag{III.99}$$

où  $\mathbf{J}_{\mathcal{R}}$  est la matrice jacobienne du résidu exprimée en  $\mathbf{X}_0$ . On cherche  $\Delta \mathbf{X}$  tel que  $\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$  soit solution du problème sous forme résiduelle :

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}) = 0 \tag{III.100}$$

d'où la valeur de l'incrément :

$$\Delta \mathbf{X} \approx -\mathbf{J}_{\mathcal{R}}^{-1}(\mathbf{X}_0)\mathcal{R}(\mathbf{X}_0) \tag{III.101}$$

On peut alors poser  $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta \mathbf{X}$ . De cette manière, on obtient une procédure itérative de la forme :

$$\Delta \mathbf{X} = -\mathbf{J}_{\mathcal{R}}^{-1}(\mathbf{X}_i)\mathcal{R}(\mathbf{X}_i) \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_{i+1} = \mathbf{X}_i + \Delta \mathbf{X} \tag{III.102}$$

À la convergence, on a  $\mathcal{R}(\mathbf{X}_{\text{final}})$  et  $\Delta\mathbf{X}$  qui sont nuls.

Les critères de convergence sont souvent définis sur la norme de l'incrément, sur le rapport des normes de l'incrément et de la solution courante, et sur la norme du résidu :

$$\begin{cases} \|\Delta\mathbf{X}\| < \epsilon_1 \\ \frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}_i\|} < \epsilon_2 \\ \|\mathcal{R}(\mathbf{X}_i)\| < \epsilon_3 \end{cases} \quad (\text{III.103})$$

Si la fonction sur laquelle on souhaite utiliser l'algorithme de Newton-Raphson est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et qu'elle est bien définie sur le voisinage d'un point annulant cette fonction et pour lequel la dérivée est non nulle, alors il existe un voisinage de ce point sur lequel une convergence quadratique est assurée.

Le bon fonctionnement de cet algorithme est fortement conditionné par l'hypothèse initiale qui suppose que l'initialisation est suffisamment proche de la solution réelle. En effet, en cas d'initialisation ne vérifiant pas cette hypothèse, l'algorithme aura beaucoup de difficultés à converger. Dans le cadre des résidus non-linéaires, une manière de procéder pour contourner ce problème est de partir d'un point où les non-linéarités sont suffisamment faibles pour considérer le problème comme linéaire et ainsi partir d'une solution connue.

Par ailleurs, l'obtention de la matrice jacobienne, ainsi que son inversion, n'est pas toujours évidente. Ceci est particulièrement vrai lorsque l'on ne dispose pas de formulation analytique simple des non-linéarités. Certaines méthodes permettent de s'affranchir du calcul et du stockage de la matrice jacobienne en fournissant une estimation de celle-ci, comme les méthodes Newton-Krylov [79]. Les méthodes de type quasi-Newton proposent quant à elles d'obtenir une estimation de son inverse [50, 141]. Les méthodes de Broyden [26] et Fletcher-Powell [60] sont des références parmi les méthodes de type quasi-Newton.

Dans la suite de ce chapitre, nous considérerons que l'algorithme utilisé est l'algorithme de Newton-Raphson. Si cet algorithme permet de calculer une dynamique non-linéaire pour une paramétrisation donnée du système, il est souvent souhaité de suivre l'évolution de cette dynamique en fonction de l'évolution d'un paramètre de contrôle. Ce paramètre peut par exemple être une amplitude, une fréquence d'excitation ou une fréquence de rotation. Nous allons aborder dans la prochaine section comment réaliser la continuation de la solution en fonction d'un paramètre de contrôle.

### 3.7 Méthodes de continuation

Dans la première section de ce chapitre, nous nous sommes intéressés à la stabilité des cycles limites de systèmes non-linéaires, et à la notion de bifurcation des solutions pour une évolution des paramètres du système. En particulier, nous avons vu que pour un système non-linéaire, des solutions périodiques stables et instables pouvaient coexister pour une paramétrisation donnée.

La méthode de balance harmonique couplée à un algorithme de résolution adapté à la particularité de pouvoir fournir à la fois les solutions stables et instables, contrairement à une méthode classique d'intégration temporelle. Cette dernière ne fournit qu'une solution périodique stable si



celle-ci existe pour le jeu de paramètres de contrôle choisi.

Pour obtenir le comportement dynamique complet du système non-linéaire via une méthode fréquentielle telle que la balance harmonique, on réalise classiquement plusieurs calculs en faisant évoluer les variables de contrôle. Les méthodes de continuation permettent de passer d'un point de calcul à l'autre et de capturer dans certains cas les branches stables et instables de solution. Gruin [69] indique que l'on peut ranger les techniques de continuation en deux catégories : la Méthode Asymptotique Numérique (MAN) et les méthodes de prédiction-correction.

Le principe de la MAN est détaillé dans Guillot *et al.* [70]. On peut trouver un premier exemple d'application de cette méthode avec la balance harmonique, couplée à une méthode de Hill pour déterminer simultanément la solution périodique et sa stabilité dans l'article de Lazarus et Thomas [89]. Un second cas d'application pour une non-linéarité régularisée de type frotteur sec se trouve dans Vigué *et al.* [166].

Cette méthode, qui suppose un développement en série entière de la solution ainsi qu'une forme quadratique des non-linéarités, n'est toutefois pas particulièrement adaptée pour les non-linéarités discontinues de type frottement sec. Elle n'a donc pas été utilisée dans le cadre de ces travaux de thèse. Les méthodes de continuation basées sur le principe de prédiction/correction ont l'avantage de ne faire aucune supposition sur la forme des non-linéarités, et ont ainsi été choisies pour la suite. Nous allons aborder à présent les différents prédicteurs classiquement utilisés, puis nous verrons quelques méthodes de continuation basées sur le principe de prédiction-correction. Le lecteur est invité à se référer à Allgower et Georg [9] pour plus d'informations sur les méthodes de continuation. Dans cette sous-section, nous considérons un système algébrique général de  $n \times (2 \times N_h + 1)$  équations, obtenu via la méthode d'équilibrage harmonique. Ce système dépend d'un paramètre de contrôle  $\lambda$ .

Le vecteur résiduel est de la forme :

$$\mathcal{R}(\mathbf{X}, \omega, \lambda) = \mathbf{Z}(\omega, \lambda)\mathbf{X}(\lambda) + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega, \lambda) - \mathbf{F}_1(\lambda) = 0 \quad (\text{III.104})$$

### Prédiction de la solution

Les méthodes de prédiction permettent d'obtenir une estimation de l'emplacement d'une solution sur la branche des solutions périodiques, compte tenu d'une ou de plusieurs solutions déjà connues. L'objectif est d'initialiser le calcul du point suivant proche de la solution réelle, afin de faciliter la convergence de l'algorithme de résolution.

On distingue ici quatre prédicteurs :

- l'extrapolation d'ordre 0 : on initialise le calcul du prochain point de la branche en utilisant le résultat du précédent calcul comme condition initiale. Cela suppose que la dynamique du système non-linéaire n'évolue pas trop brusquement par rapport au décalage selon la variable de contrôle  $\lambda$  ;
- le prédicteur sécant : une interpolation linéaire est réalisée entre les deux dernières solutions calculées pour prédire le prochain point. L'écart entre ces deux dernières solutions  $(\Delta\mathbf{X}, \Delta\omega)$  donne un coefficient directeur, que l'on multiplie par un facteur d'éloignement et que l'on ajoute à la dernière solution calculée ;

- le prédicteur tangent : on initialise le calcul du prochain point de la branche en prenant un point sur la tangente de la branche de solutions au niveau de la dernière solution calculée. Cela suppose donc une linéarisation de la dynamique du système non-linéaire sur le dernier point calculé et donc un calcul de matrice jacobienne ;
- le prédicteur par interpolation d'ordre supérieur : on utilise  $p + 1$  points déjà obtenus sur la branche de solutions pour mettre en place une interpolation polynomiale de Lagrange d'ordre  $p$  entre ces points.

Maintenant que les méthodes de prédiction ont été abordées, nous allons voir quelques unes des principales méthodes de continuation de type prédiction-correction.

### Continuation séquentielle

La continuation séquentielle consiste à fixer la valeur du paramètre de contrôle et de résoudre le système non-linéaire pour cette valeur du paramètre. Une fois convergé, on passe au calcul du point suivant en imposant directement une nouvelle valeur du paramètre de contrôle. La Figure III.8a illustre cette continuation.

Cette continuation est simple à mettre en place car elle ne nécessite aucun traitement supplémentaire : la valeur du paramètre est simplement fixée. Toutefois, certaines bifurcations de type point de retournement ne sont pas capturées avec cette continuation. Il est alors nécessaire de choisir une autre méthode de continuation, telle que la continuation par longueur d'arc ou encore pseudo longueur d'arc.

### Continuation par longueur d'arc

La méthode par longueur d'arc consiste à ajouter une équation de contrainte au système algébrique non-linéaire afin d'obliger le solveur à évoluer dans un sous-espace de l'espace initial. Cette équation impose la recherche d'une solution sur une sphère de rayon choisi et centrée sur la dernière solution calculée. Le paramètre de contrôle devient une nouvelle inconnue du problème. On parle également de méthode arc-length. La Figure III.8b illustre cette continuation.

La contrainte à ajouter au problème peut être formulée ainsi : à partir d'une solution calculée  $(\mathbf{X}_0, \omega_0, \lambda_0)$ , on choisit un rayon  $\Delta s$  pour la sphère centrée sur  $(\mathbf{X}_0, \omega_0, \lambda_0)$ . L'équation de contrainte, que l'on note  $\mathcal{R}_{arc}$ , prend alors la forme :

$$\mathcal{R}_{arc}(\mathbf{X}, \omega, \lambda) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 + \|\omega - \omega_0\|^2 + \|\lambda - \lambda_0\|^2 - \Delta s^2 = 0 \quad (\text{III.105})$$

Il y a toujours au moins deux intersections entre la sphère et la branche des solutions du système non-linéaire. Les bifurcations de type point de retournement ne posent donc pas de problème. Cependant, si la prédiction est de mauvaise qualité, il est possible de repartir en sens inverse sur la branche des solutions. La méthode par pseudo longueur d'arc apporte une solution à cette problématique.

### Continuation *pseudo arc-length*

Cette dernière méthode de continuation propose de chercher les solutions sur un hyperplan perpendiculaire à la tangente de la branche des solutions en une solution  $(\mathbf{X}_0, \omega_0, \lambda_0)$ , à une distance  $\Delta s$  de ce point. L'équation de contrainte à ajouter diffère de  $\mathcal{R}_{\text{arc}}$  et peut être trouvée dans Kuznetsov [81].

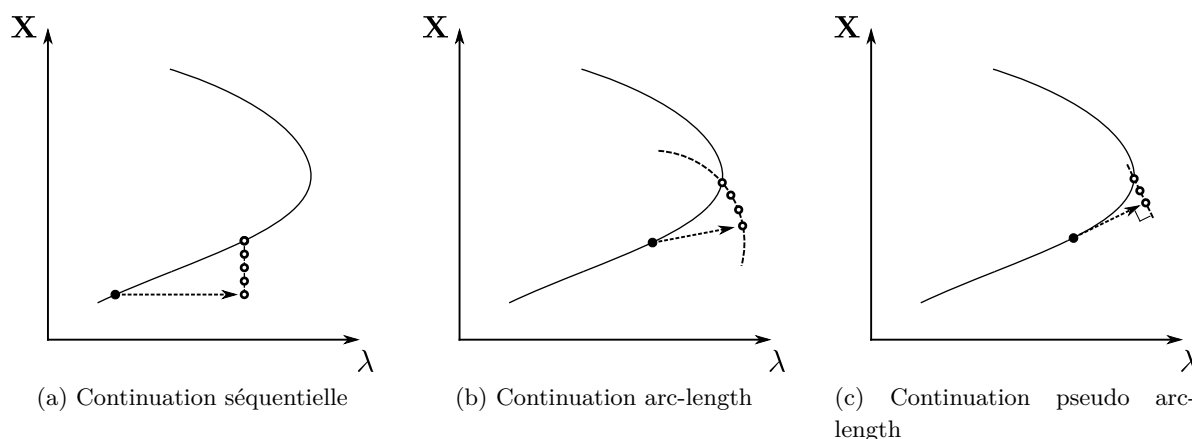


FIGURE III.8 – Illustrations des méthodes de continuation. ( $\rightarrow$  : prédiction du prochain point de la branche, - - - : lieu de la correction,  $\circ$  : itération du solveur jusqu'à la nouvelle solution)

Pour mener à bien la résolution des calculs algébriques avec une méthode de Newton-Raphson, il reste à déterminer la valeur des efforts non-linéaires dans le domaine fréquentiel, ainsi que celle de la jacobienne  $\mathbf{J}_{\mathcal{R}}$  du résidu. Nous allons aborder ces points dans les prochaines sous-sections.

### 3.8 Calcul des composantes fréquentielles des termes non-linéaires

Le calcul des composantes harmoniques des forces non-linéaires au cours d'une période est loin d'être évident. Dans le cas de non-linéarités "simples" (quadratiques, voire cubiques), il est possible de calculer à la main l'expression de ces termes lors de la procédure de Galerkin menant à la formulation harmonique du problème. Cependant, dans le cas de non-linéarités non-régulières, on ne connaît que l'expression de ces termes dans le domaine temporel.

Ainsi, Cameron et Griffin [29] ont proposé une méthode pour calculer ces termes. Le principe est de réaliser des aller-retours entre les domaines fréquentiels et temporels à la fin de chaque itération du solveur de Newton (*i.e* à chaque fois que l'on a une nouvelle solution périodique). On peut de cette façon évaluer l'évolution temporelle des efforts non-linéaires sur une période puis les rebasculer dans le domaine fréquentiel. Cette méthode porte le nom de procédure Alternate Frequency-Time (AFT).

Compte tenu de la procédure de Galerkin ayant mené à la formulation harmonique du problème, on va chercher à décomposer les forces non-linéaires en série de Fourier tronquée à  $N_h$  harmoniques. Cela s'écrit en formulation réelle :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}(t) = \mathbf{c}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{c}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{d}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{III.106})$$

Ainsi, le vecteur des composantes harmoniques des termes non-linéaires s'écrit :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}} = (\mathbf{c}_0 \quad \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{d}_1 \quad \dots \quad \mathbf{c}_{N_h} \quad \mathbf{d}_{N_h})^T \quad (\text{III.107})$$

En appliquant la transformée de Fourier discrète sur les efforts non-linéaires, en formulation réelle cette fois-ci, on a :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_{2N_h}) \end{pmatrix} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_0 \\ \mathbf{c}_1 \\ \mathbf{d}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{N_h} \\ \mathbf{d}_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.108})$$

avec :

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & \cos(\omega t_0) & \sin(\omega t_0) & \dots & \cos(N_h \omega t_0) & \sin(N_h \omega t_0) \\ 1 & \cos(\omega t_1) & \sin(\omega t_1) & \dots & \cos(N_h \omega t_1) & \sin(N_h \omega t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos(\omega t_{2N_h}) & \sin(\omega t_{2N_h}) & \dots & \cos(N_h \omega t_{2N_h}) & \sin(N_h \omega t_{2N_h}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.109})$$

La matrice  $\mathbf{E}$  est la matrice de passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

L'inverse de la matrice  $\mathbf{E}$  est la matrice de passage du domaine fréquentiel au domaine temporel.

Elle est donnée par :

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{n_t} \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ 2\cos(\omega t_0) & & & & 2\cos(\omega t_{2N_h}) \\ 2\sin(\omega t_0) & & & & 2\sin(\omega t_{2N_h}) \\ \vdots & \dots & & & \vdots \\ 2\cos(N_h \omega t_0) & & & & 2\cos(N_h \omega t_{2N_h}) \\ 2\sin(N_h \omega t_0) & & & & 2\sin(N_h \omega t_{2N_h}) \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.110})$$

Il est important de noter que les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  ne dépendent pas de  $\omega$  car  $\omega t_i = \frac{2i\pi}{2 \times N_h + 1}$  pour  $i \in \{0; 2N_h\}$ . On applique de même la transformée de Fourier discrète sur le déplacement  $\mathbf{x}$  de la structure.

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{t_0} \\ \mathbf{x}_{t_1} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{t_{2N_h}} \end{pmatrix} = \mathbf{E} \mathbf{X} \quad (\text{III.111})$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} (-k\omega \mathbf{a}_k \sin(k\omega t) + k\omega \mathbf{b}_k \cos(k\omega t)) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} \left( -(k\omega)^2 \mathbf{a}_k \cos(k\omega t) - (k\omega)^2 \mathbf{b}_k \sin(k\omega t) \right) \end{cases} \quad (\text{III.112})$$

Ainsi, on peut écrire de la même manière que pour  $\mathbf{x}_t$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{E} \nabla \mathbf{X} \\ \ddot{\mathbf{x}}_t &= \mathbf{E} \nabla^2 \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{III.113})$$

en définissant l'opérateur différentiel  $\nabla$  comme :

$$\nabla = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & & & \\ & \nabla_1 & & & \\ & & \nabla_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \nabla_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.114})$$

où les blocs intermédiaires  $\nabla_k$  sont définis par :

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} 0 & k\omega \\ -k\omega & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.115})$$

La procédure AFT est ainsi réalisée selon la formule suivante :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}} = \overline{\mathbf{E}} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_i) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl}}(t_{2N_h}) \end{pmatrix} = \overline{\mathbf{E}} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t) = \overline{\mathbf{E}} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{E}\mathbf{X}, \mathbf{E}\nabla\mathbf{X}) \quad (\text{III.116})$$

Il reste maintenant à déterminer l'expression de la matrice jacobienne du système algébrique sous forme résiduelle.

### 3.9 Calcul de la matrice jacobienne

Reprenons l'équation algébrique qui caractérise notre système en formulation harmonique. On suppose que l'on n'impose pas la pulsation d'excitation  $\omega$  (qui devient donc une inconnue), et que l'on impose une équation de contrainte par longueur d'arc. On a le système :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\mathbf{X}, \omega) &= \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{X}, \omega) - \mathbf{F}_1 &= 0 \\ \mathcal{R}_{\text{arc}}(\mathbf{X}, \omega) &= \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 + \|\omega - \omega_0\|^2 - \Delta s^2 &= 0 \end{cases} \quad (\text{III.117})$$

Dans le cadre de la méthode de Newton-Raphson, on écrit alors la jacobienne analytique :

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{J}_{\mathcal{R}_{\text{arc}}}(\mathbf{X}, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.118})$$

où on a :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} &= \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{X}} \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} &= \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \mathbf{X}} &= 2(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \omega} &= 2(\omega - \omega_0) \end{cases} \quad (\text{III.119})$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial \omega} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \omega} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^{N_h}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.120})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} -2k^2\omega \mathbf{M} & k\mathbf{C} \\ -k\mathbf{C} & -2k^2\omega \mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{III.121})$$

L'un des points les plus problématiques dans l'expression de la matrice jacobienne est le calcul des dérivées des termes non linéaires. C'est ce que nous allons maintenant aborder.

### Expression analytique de la jacobienne

Compte tenu du lien qui existe entre les composantes fréquentielles des efforts non-linéaires et les valeurs de ces efforts au cours d'une période, on peut écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{X}} &= \frac{\partial \bar{\mathbf{E}} \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{E}\mathbf{X}, \mathbf{E}\nabla\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{E}\mathbf{X}, \mathbf{E}\nabla\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \\ &= \bar{\mathbf{E}} \left( \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{E}\mathbf{X}, \mathbf{E}\nabla\mathbf{X})}{\partial (\mathbf{E}\mathbf{X})} \frac{\partial (\mathbf{E}\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} + \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}(\mathbf{E}\mathbf{X}, \mathbf{E}\nabla\mathbf{X})}{\partial (\mathbf{E}\nabla\mathbf{X})} \frac{\partial (\mathbf{E}\nabla\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.122})$$

d'où :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{X}} = \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}_t} \mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_t} \mathbf{E}\nabla \quad (\text{III.123})$$

D'une façon similaire, puisque  $\mathbf{E}$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  ne dépendent pas de  $\omega$ , on a :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \omega} = \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_t} \mathbf{E} \frac{\partial \nabla}{\partial \omega} \mathbf{X} \quad (\text{III.124})$$

où :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & & & & \\ & \frac{\partial \nabla_1}{\partial \omega} & & & \\ & & \frac{\partial \nabla_2}{\partial \omega} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\partial \nabla_{N_h}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.125})$$

avec les blocs intermédiaires  $\frac{\partial \nabla_k}{\partial \omega}$  définis par :

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.126})$$

Il n'est pas toujours possible d'avoir une expression analytique pour les termes non-linéaires  $\frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \mathbf{X}}$  et  $\frac{\partial \mathbf{F}_{nl}}{\partial \omega}$  de la jacobienne. Dans ce genre de situation, d'autres méthodes, comme celle des différences finies, permet d'obtenir une évaluation de la jacobienne.

### Calcul de la jacobienne par différences finies

L'idée de cette méthode est de calculer chaque terme de la jacobienne par différences finies, puis de reconstituer la matrice jacobienne complète. Reprenons l'expression de la matrice jacobienne :

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}, \omega) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}, \omega) \\ \mathbf{J}_{\mathcal{R}_{arc}}(\mathbf{X}, \omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.127})$$

On évalue chaque terme selon le schéma aux différences finies suivant (d'après Kiusalaas [78]) :

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{ij} \approx \frac{\mathcal{R}_i(\mathbf{X} + \mathbf{e}_j h, \omega) - \mathcal{R}_i(\mathbf{X}, \omega)}{h} \\ \left( \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} \right)_i \approx \frac{\mathcal{R}_i(\mathbf{X}, \omega + h) - \mathcal{R}_i(\mathbf{X}, \omega)}{h} \\ \left( \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \mathbf{X}} \right)_{ij} \approx \frac{\mathcal{R}_{arc,i}(\mathbf{X} + \mathbf{e}_j h, \omega) - \mathcal{R}_{arc,i}(\mathbf{X}, \omega)}{h} \\ \left( \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \omega} \right)_i \approx \frac{\mathcal{R}_{arc,i}(\mathbf{X}, \omega + h) - \mathcal{R}_{arc,i}(\mathbf{X}, \omega)}{h} \end{cases} \quad (\text{III.128})$$

Les valeurs de  $\mathbf{X}$  et  $\omega$  sont les valeurs à l'itération courante. Les vecteurs  $\mathbf{e}_j$  sont des vecteurs unitaire dans la direction du  $j$ -ième vecteur de base sur laquelle les problème algébrique est formulé.

On voit ici que dans le cadre de la méthode de Newton-Raphson, la jacobienne est réévaluée à chaque itération de l'algorithme. On doit donc, à chaque itération, évaluer autant de fois le résidu complet qu'il y a de variables dans le système algébrique. Kiusalaas [78] indique qu'il est possible de s'affranchir de recalculer la jacobienne à chaque itération du solveur, en supposant que la jacobienne ne bouge pas beaucoup au cours des itérations. Cela revient à supposer que l'on est déjà proche de la solution réelle. On a alors qu'une seule évaluation de la jacobienne à réaliser en début d'algorithme.

Il peut être difficile de calculer directement une solution périodique sans une bonne condition

initiale avec la méthode de Newton-Raphson. Dans un contexte de flottement de soufflante avec frottement en pied d'aube, il n'y a pas de terme de forçage externe et on ne sait à priori pas si un cycle limite existe. Les méthodes harmoniques abordées sont donc difficilement applicables telles quelles. Les notions de modes non-linéaires, qui décrivent la dynamique de la structure en régime libre sont appropriées dans cette situation, comme nous allons le voir dans la prochaine section.

## 4 Synthèse modale non-linéaire

Dans la littérature, la notion de mode non-linéaire témoigne de la volonté de la communauté scientifique d'étendre la notion de mode linéaire à un cadre non-linéaire. Les modes linéaires sont obtenus par la résolution d'un problème aux valeurs propres d'un système linéaire, permettant de décrire sa dynamique selon une décomposition unique de contributions modales. Les modes linéaires traduisent la dynamique libre du système considéré.

Ce problème aux valeurs propres n'étant pas défini dans un cadre non-linéaire, il n'existe pas de notion arrêtée des modes non-linéaires. Les travaux autour de la notion de modes non-linéaires ont donc consisté à mettre en place des outils pour décrire la dynamique libre d'un système non-linéaire.

Nous allons ici voir quelques exemples de notions de mode non-linéaire, et verrons qu'il est possible de prédire l'apparition de cycle limites de systèmes non-linéaires libres dissipatifs.

### 4.1 Notion de mode normal non-linéaire

#### Approche de Rosenberg

La notion de mode normal non-linéaire a été abordée pour la première fois en ces termes par Rosenberg [137, 138]. Il se base sur l'observation de certaines propriétés des modes normaux linéaires (ou modes propres linéaires) pour mettre au point une notion d'équivalent non-linéaire. On considère dans cette première approche du mode normal non-linéaire des systèmes non-linéaires conservatifs à  $n$  degrés de liberté. Rosenberg donne la définition suivante :

*Un mode normal non-linéaire d'un système conservatif non-linéaire caractérise un mouvement du système où toutes les masses ont un mouvement périodique de même période, passent par leur position d'équilibre au même instant, et où à chaque instant, la connaissance de la position d'une seule masse suffit à connaître les positions de toutes les autres.*

Défini ainsi, un mode normal non-linéaire voit ses degrés de liberté atteindre leurs extremums aux mêmes instants, où ils ont une vitesse nulle. En considérant que la vitesse initiale du système est nulle (le système est donc relâché à son amplitude maximale) et puisque celui-ci est conservatif, il est caractérisé par un niveau d'énergie potentielle  $U_0$ . Il existe une infinité de conditions initiales à vitesse nulle pour lesquels l'énergie potentielle du système est  $U_0$ . Ces conditions initiales forment une surface ovoïde d'iso-énergie potentielle dans l'espace d'état. Ainsi, la courbe représentant un mode normal non-linéaire intersecte cette surface perpendiculairement, d'où la dénomination de mode *normal* non-linéaire. Si les variables d'état évoluent sur une droite, on parle de mode similaire. Si c'est une courbe, on parle de mode non-similaire.



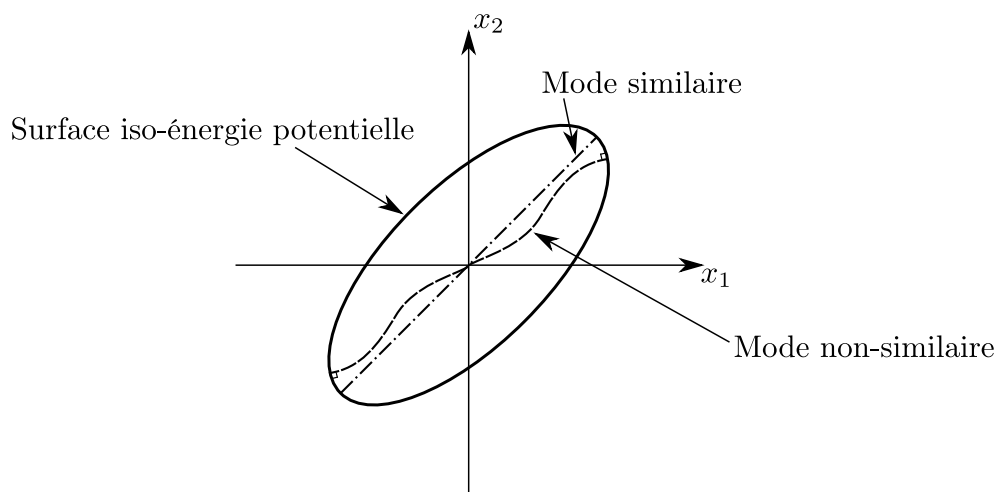


FIGURE III.9 – Représentation de deux modes normaux non-linéaires dans un espace de configuration bidimensionnel selon la définition de Rosenberg (adaptée de Laxalde [86])

Le calcul des modes normaux non-linéaires selon l'approche de Rosenberg s'effectue en choisissant arbitrairement une variable maître parmi toutes les variables d'état, qui sert à paramétrer l'évolution de tous les autres paramètres de cet espace.

### Approche de Shaw et Pierre

Shaw et Pierre [143] proposent une formulation étendue des modes normaux non-linéaires applicable sur des systèmes non-linéaires de dimension finie conservatifs et non conservatifs. Cette approche utilise la notion de variété invariante, dont on peut trouver une définition dans Carr [30]. Reprenons cette définition. On considère une équation différentielle non-linéaire sous forme d'état :

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y})$$

avec  $\mathbf{y}$  le vecteur d'état.

On dit que  $S \subset \mathbb{R}^{2n}$  est une variété localement invariante du système différentiel si pour  $\mathbf{y}^* \in S$ , la solution  $\mathbf{y}$  du système différentiel telle que  $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}^*$  reste dans  $S$  pour  $t < t_{max}$  avec  $t_{max} > t_0$ . Si de plus,  $t_{max} = +\infty$ , alors on dit que  $S$  est une variété invariante.

Les variétés invariantes ainsi définies, Shaw et Pierre définissent les modes normaux non-linéaires de systèmes autonomes comme étant des variétés invariantes bidimensionnelles de l'espace des phases du système : deux variables de l'espace des phases permettent de paramétrer la variété invariante.

Une dynamique du système existant à un instant donné sur la variété  $y$  restera. La variété passe de plus par un point d'équilibre stable du système, où elle est tangente au plan défini par l'espace vectoriel engendré par les vecteurs propres du système linéarisé autour de cette position d'équilibre (voir Figure III.10).

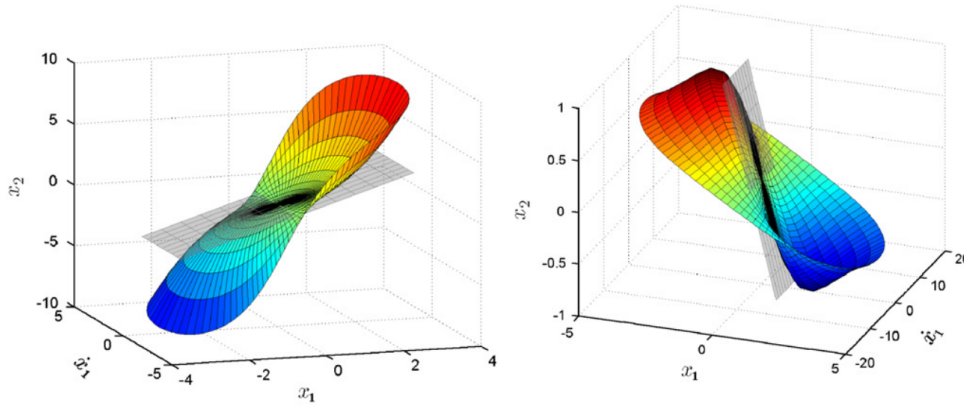


FIGURE III.10 – Représentation de deux modes normaux non linéaires dans un espace de configuration bidimensionnel selon la définition de Shaw et Pierre (issue de Kerschen et al. [76])

Cette représentation suppose que l'on peut paramétrer l'ensemble des variables de l'espace des phases comme des fonctions de deux paramètres de cet espace :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ y_n \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ G_2(u, v) \\ H_2(u, v) \\ \vdots \\ G_n(u, v) \\ H_n(u, v) \end{pmatrix} \quad (\text{III.129})$$

On peut alors calculer le mode non linéaire en injectant cette représentation des paramètres de l'espace des phases dans l'équation différentielle du système. Cela permet de faire disparaître les termes de dérivée temporelle et on obtient ainsi un système de  $2n - 2$  équations à résoudre, les inconnues étant les  $G_i, H_i$  en fonction de  $u$  et  $v$ . Le problème étant aussi compliqué que lorsque l'on avait des dérivées temporelles, les  $G_i$  et  $H_i$  sont alors développées en séries entières de  $u$  et  $v$ , dont on cherchera à déterminer les coefficients. Une fois ces coefficients trouvés, on aura complètement accès à la variété invariante définissant le mode non-linéaire en remontant au  $y_i, \dot{y}_i$ .

Ces approches des modes normaux non-linéaires ont beaucoup été étudiées dans la littérature, pour des non linéarités géométriques, avec éventuellement des termes visqueux dissipatifs linéaires dans le cas des modes de Shaw et Pierre. En revanche, il semble être difficile d'utiliser de telles formulations pour traiter des systèmes avec non-linéarités de type force de frottement de Coulomb. Les forts développements analytiques qu'impliquent ces approches du mode non-linéaire semble être prohibitifs dans le cadre de systèmes de taille importante.

Ainsi, une autre approche des modes non-linéaires va maintenant être abordée. Celle-ci a la particularité d'être bien adaptée à notre situation, dans le sens où elle permet de caractériser des systèmes non-linéaires en régime libre, avec des non-linéarités dissipatives de type frottement.

## 4.2 Notion de mode complexe non-linéaire

La notion de Mode Complexe Non-Linéaire (MCNL) a été développée par Laxalde [86, 87] pour étudier les branches de solutions de systèmes autonomes dissipatifs. Il emploie une formulation alternative de la procédure de Galerkin, basée sur une analogie avec les modes linéaires de systèmes amortis.

Reprenons l'équation différentielle non-linéaire de la structure en régime libre :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} + \mathbf{f}_{nl}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\text{III.130})$$

Nous allons chercher un vecteur solution sous la forme de MCNL suivante :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} e^{-k\beta t} (\mathbf{a}_k \cos(k\omega t) + \mathbf{b}_k \sin(k\omega t)) \quad (\text{III.131})$$

où le terme  $\beta$  est l'atténuation du MCNL. On observe donc ici deux échelles de temps : une échelle de temps rapide, associée à  $\omega$ , et une échelle de temps lente, associée à l'atténuation  $\beta$  qui est la même pour toutes les harmoniques. On suppose que l'échelle de temps rapide est beaucoup plus rapide que l'échelle de temps lente :  $\omega \gg \beta$ . On peut alors réécrire les vitesses et accélérations sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} e^{-k\beta t} ((k\omega \mathbf{b}_k - k\beta \mathbf{a}_k) \cos(k\omega t) - (k\beta \mathbf{b}_k + k\omega \mathbf{a}_k) \sin(k\omega t)) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{k=1}^{N_h} e^{-k\beta t} (-k\beta(k\omega \mathbf{b}_k - j\beta \mathbf{a}_k) - k\omega(k\beta \mathbf{b}_k + k\omega \mathbf{a}_k) \cos(k\omega t) + \dots \\ \dots + (k\beta(k\beta \mathbf{b}_k + k\omega \mathbf{a}_k) - k\omega(k\omega \mathbf{b}_k - k\beta \mathbf{a}_k)) \sin(k\omega t)) \end{cases} \quad (\text{III.132})$$

On remarque que cette nouvelle base d'approximation n'est pas orthogonale pour le produit scalaire usuel. L'hypothèse  $\omega \gg \beta$  nous permet de supposer que sur l'intervalle  $[t; t + \frac{2\pi}{\omega}]$ , la décroissance exponentielle du terme  $e^{-k\beta t}$  est négligeable. On suppose donc que  $\mathbf{x}$  est périodique sur l'intervalle  $[t; t + \frac{2\pi}{\omega}]$ ,  $\forall t$ . On peut de cette manière continuer à travailler sur une base  $\mathcal{F}$  orthogonale pour le produit scalaire usuel.

La procédure d'équilibrage harmonique est de nouveau appliquée, en supposant une orthogonalité des fonctions de base, mais en prenant toutefois en compte le terme  $\beta$  apparaissant lors des dérivations de  $\mathbf{x}$ . On projette le résidu  $\mathbf{r}$  sur chaque fonction  $\varphi$  de la base de fonctions orthogonales.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \varphi \rangle &= \mathbf{M} \sum_{k=1}^{N_h} \left( (k\beta)^2 - (k\omega)^2 \right) (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) + (2k^2 \beta \omega) (\mathbf{a}_k \langle s_k | \varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k | \varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{C} \sum_{k=1}^{N_h} -k\beta (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) - k\omega (\mathbf{a}_k \langle s_k | \varphi \rangle - \mathbf{b}_k \langle c_k | \varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{K} \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_k \langle c_k | \varphi \rangle + \mathbf{b}_k \langle s_k | \varphi \rangle) \\ &+ \mathbf{K} \mathbf{a}_0 \langle c_0 | \varphi \rangle + \langle \mathbf{f}_{nl} | \varphi \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.133})$$

On ré-utilise les fonctions  $c_0$ ,  $c_k$  et  $s_k$  introduits précédemment pour remplacer  $\varphi$  ci-dessus :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{r}|c_0 \rangle = 2\mathbf{K} \mathbf{a}_0 + \langle \mathbf{f}_{nl}|c_0 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{r}|c_k \rangle = \left( \mathbf{K} + \left( (k\beta)^2 - (k\omega)^2 \right) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} \right) \mathbf{a}_k + \left( k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M} \right) \mathbf{b}_k + \langle \mathbf{f}_{nl}|c_k \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{r}|s_k \rangle = \left( \mathbf{K} + \left( (k\beta)^2 - (k\omega)^2 \right) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} \right) \mathbf{b}_k - \left( k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M} \right) \mathbf{a}_k + \langle \mathbf{f}_{nl}|s_k \rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{III.134})$$

On aboutit à un nouveau système algébrique non linéaire en régime libre, représentant le problème de synthèse modale complexe non-linéaire :

$$\mathbf{Z}(\omega, \beta)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = 0 \quad (\text{III.135})$$

où la nouvelle matrice de rigidité multi-harmonique  $\mathbf{Z}$  s'écrit :

$$\mathbf{Z} = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & & & & \\ & \mathbf{Z}^1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \mathbf{Z}^k & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{Z}^{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.136})$$

où :

$$\mathbf{Z}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} + \left( (k\beta)^2 - (k\omega)^2 \right) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} & k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M} \\ - \left( k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M} \right) & \mathbf{K} + \left( (k\beta)^2 - (k\omega)^2 \right) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (\text{III.137})$$

On remarque la similarité entre l'équation algébrique III.86 obtenue par la méthode de balance harmonique et l'équation algébrique III.135 obtenue par la démarche du mode complexe non-linéaire. Ainsi, on va traiter le calcul du mode complexe non-linéaire comme nous l'avons fait pour la balance harmonique. Les paragraphes suivants reprennent la mise en forme de la section III.3, basée sur Joannin [75].

### Méthode de continuation

Puisque nous sommes en régime libre,  $\omega$  et  $\beta$  sont des inconnues. Nous avons donc  $n \times (2 \times N_h + 1) + 2$  inconnues, que l'on peut mettre dans le vecteur  $(\mathbf{X} \ \omega \ \beta)^T$ , alors qu'il n'y a que  $n \times (2 \times N_h + 1)$  équations. Le problème étant rectangulaire, on peut choisir d'ajouter au système des équations de contrainte afin de rendre le système carré. Typiquement, la première équation de contrainte peut être une équation de type continuation par longueur d'arc. Cette contrainte ne modifie en rien le système modélisé, il s'agit juste d'une équation traduisant la manière d'atteindre la branche des solutions. La seconde équation est quant à elle une condition de phase : on choisit une phase à l'origine nulle pour une harmonique arbitraire d'un degré de liberté arbitraire.

Mathématiquement, choisir une continuation par longueur d'arc et une phase à l'origine nulle

pour le  $q$ -ième degré de liberté de la  $k$ -ième harmonique revient à ajouter au système algébrique les équations suivantes :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{arc}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 + \|\omega - \omega_0\|^2 + \|\beta - \beta_0\|^2 - \Delta s^2 = 0 \\ \mathcal{R}_{phase}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = \mathbf{b}_{k,q} = 0 \end{cases} \quad (\text{III.138})$$

### Calcul des composantes fréquentielles des termes non-linéaires

Nous nous plaçons dans le cadre d'une méthode de résolution de Newton-Raphson. Compte tenu de l'hypothèse initiale  $\omega \gg \beta$ , on suppose que les efforts non-linéaires sont à l'image du mouvement périodiques sur un intervalle  $[t; t + \frac{2\pi}{\omega}]$ ,  $\forall t$ . On peut donc ré-utiliser la procédure AFT déjà développée, avec une légère modification sur l'opérateur différentiel  $\nabla$  pour tenir compte de l'atténuation  $\beta$ .

$$\nabla = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & & & & \\ & \nabla_1 & & & \\ & & \nabla_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \nabla_{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{III.139})$$

où les blocs intermédiaires  $\nabla_k$  sont définis par :

$$\nabla_k = \begin{pmatrix} -k\beta & k\omega \\ -k\omega & -k\beta \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.140})$$

### Calcul de la matrice jacobienne analytique

Comme dans la partie développée plus haut où l'on a cherché des solutions périodiques de systèmes non-linéaires via balance harmonique, nous allons écrire le résidu complet à annuler dans le cadre d'un calcul de MCNL, en considérant une continuation par longueur d'arc et une phase à l'origine nulle pour le  $q$ -ième degré de liberté de la  $k$ -ième harmonique :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(\mathbf{X}, \omega) & = \mathbf{Z}(\omega)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega) & = 0 \\ \mathcal{R}_{arc}(\mathbf{X}, \omega, \beta) & = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0\|^2 + \|\omega - \omega_0\|^2 + \|\beta - \beta_0\|^2 - \Delta s^2 & = 0 \\ \mathcal{R}_{phase}(\mathbf{X}, \omega, \beta) & = \mathbf{b}_{k,q} & = 0 \end{cases} \quad (\text{III.141})$$

La matrice jacobienne analytique nécessaire au déroulement de la méthode de Newton-Raphson prend alors la forme :

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_{\mathcal{R}}(\mathbf{X}, \omega, \beta) \\ \mathbf{J}_{\mathcal{R}_{arc}}(\mathbf{X}, \omega, \beta) \\ \mathbf{J}_{\mathcal{R}_{phase}}(\mathbf{X}, \omega, \beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} & \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \omega} & \frac{\partial \mathcal{R}_{arc}}{\partial \beta} \\ \frac{\partial \mathcal{R}_{phase}}{\partial \mathbf{X}} & \frac{\partial \mathcal{R}_{phase}}{\partial \omega} & \frac{\partial \mathcal{R}_{phase}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (\text{III.142})$$

Nous allons maintenant détailler le calcul de chaque terme de la jacobienne, en procédant ligne par ligne. La première ligne concerne la jacobienne du système algébrique à proprement parler.

Les différents termes s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{Z} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{III.143})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \omega} \quad (\text{III.144})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta} \mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \beta} \quad (\text{III.145})$$

Il convient ici d'expliciter les différentes matrices. Commençons par  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega}$  et  $\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta}$ . Celles-ci s'expriment sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial \omega} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \omega} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^{N_h}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.146})$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{Z}^1}{\partial \beta} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \beta} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{Z}^{N_h}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (\text{III.147})$$

avec :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} -2k^2\omega\mathbf{M} & k\mathbf{C} - 2k^2\beta\mathbf{M} \\ -k\mathbf{C} + 2k^2\beta\mathbf{M} & -2k^2\omega\mathbf{M} \end{pmatrix} \quad (\text{III.148})$$

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^k}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} 2k^2\beta\mathbf{M} - k\mathbf{C} & -2k^2\omega\mathbf{M} \\ 2k^2\omega\mathbf{M} & 2k^2\beta\mathbf{M} - k\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (\text{III.149})$$

En ce qui concerne les dérivées partielles des termes de forces non-linéaires harmoniques, celle-ci s'écrivent comme précédemment sous la forme :

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{X}} = \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \mathbf{x}_t} \mathbf{E} + \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_t} \mathbf{E} \nabla \quad (\text{III.150})$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \omega} = \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_t} \mathbf{E} \frac{\partial \nabla}{\partial \omega} \mathbf{X} \quad (\text{III.151})$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{\text{nl}}}{\partial \beta} = \bar{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{f}_{\text{nl}}}{\partial \dot{\mathbf{x}}_t} \mathbf{E} \frac{\partial \nabla}{\partial \beta} \mathbf{X} \quad (\text{III.152})$$

Ici, les termes de dérivée partielle de l'opérateur différentiel  $\nabla$  s'écrivent sous la forme :

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & & & & \\ & \frac{\partial \nabla_1}{\partial \omega} & & & \\ & & \frac{\partial \nabla_2}{\partial \omega} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\partial \nabla_{N_h}}{\partial \omega} \end{pmatrix} \quad (\text{III.153})$$

$$\frac{\partial \nabla}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_n & & & & \\ & \frac{\partial \nabla_1}{\partial \beta} & & & \\ & & \frac{\partial \nabla_2}{\partial \beta} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\partial \nabla_{N_h}}{\partial \beta} \end{pmatrix} \quad (\text{III.154})$$

avec les blocs intermédiaires  $\frac{\partial \nabla_k}{\partial \omega}$  et  $\frac{\partial \nabla_k}{\partial \beta}$  définis par :

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} 0 & k \\ -k & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.155})$$

$$\frac{\partial \nabla_k}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \otimes \mathbf{I} \quad (\text{III.156})$$

La deuxième ligne de la jacobienne, qui représente la jacobienne de la contrainte de continuation par longueur d'arc, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \mathbf{X}} = 2(\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)^T \quad (\text{III.157})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \omega} = 2(\omega - \omega_0) \quad (\text{III.158})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{arc}}}{\partial \beta} = 2(\beta - \beta_0) \quad (\text{III.159})$$

Pour finir, la dernière ligne de la jacobienne, représentant la jacobienne de la contrainte de phase, s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{phase}}}{\partial \mathbf{X}} = (0 \dots 0 \quad \begin{matrix} \text{Indice } 2kn+q \\ \downarrow \\ 1 \end{matrix} \quad 0 \dots 0) \quad (\text{III.160})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{phase}}}{\partial \omega} = 0 \quad (\text{III.161})$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_{\text{phase}}}{\partial \beta} = 0 \quad (\text{III.162})$$

La méthode de calcul de MCNL ayant été exposée, celle-ci a été programmée et validée à partir d'un cas académique issu des mémoires de thèse de Laxalde [86] et Joannin [75]. Les résultats obtenus sur ce cas vont être décrits dans le prochain paragraphe.

### Calcul de cycle limite par MCNL sur un cas académique

Le modèle utilisé est un système masse-ressort unidimensionnel à deux degrés de liberté avec un frotteur non-linéaire sur une des deux masses. Celui est représenté par la figure III.11.

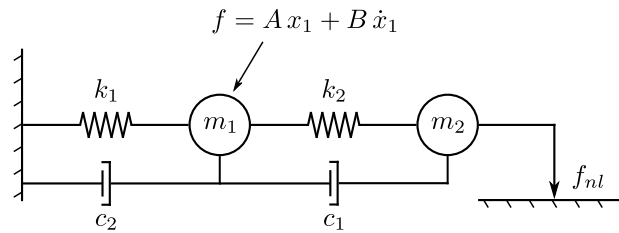


FIGURE III.11 – Modèle académique masse-ressort avec frotteur

La dynamique de ce modèle est régie par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = A x_1 + B \dot{x}_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) - f_{nl}(x_2, \dot{x}_2) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.163})$$

Pour modéliser la loi de frottement, une loi régulière en vitesse a été choisie afin de pouvoir écrire la jacobienne analytique. Cela permet de représenter efficacement la phénoménologie étudiée tout en conservant la simplicité de la formulation analytique : on s'affranchit du calcul de la jacobienne par différences finies ou d'autres méthodes coûteuses.

Un nombre fini de paramètres ainsi qu'une loi en tangente hyperbolique permettent d'approcher asymptotiquement ce modèle de force de frottement d'une loi discontinue de Coulomb :

$$-f_{nl}(x_2, \dot{x}_2) = \mu N \tanh\left(\frac{p \dot{x}_2}{\mu N}\right) \quad (\text{III.164})$$

On a ainsi une loi se comportant selon la Figure III.12.

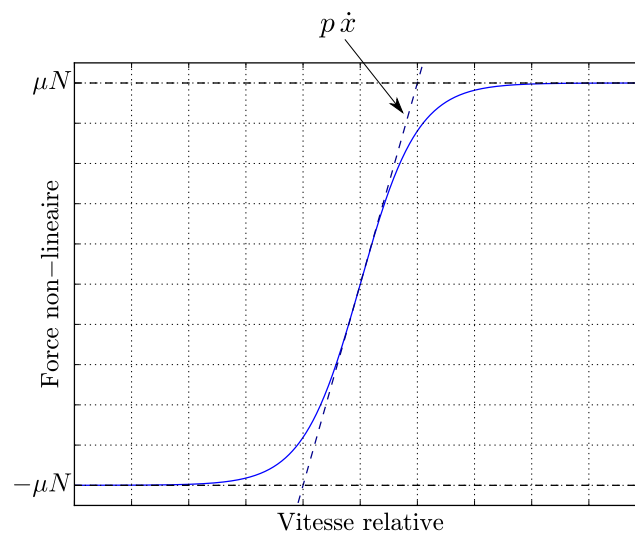


FIGURE III.12 – Loi de frottement régularisée en tangente hyperbolique



$m_1$	$m_2$	$c_1$	$c_2$	$k_1$	$k_2$	$\mu N$	$p$	$A$	$B$
1.	0.02	0.1	0.1	600.	40.	5.	100.	0.	1.

TABLEAU III.1 – Paramètres du modèle académique masse-ressort

Les paramètres utilisés pour les calculs sont indiqués dans le Tableau III.1. Pour montrer que ce modèle présente au moins un cycle limite, une intégration temporelle du système a été réalisée avec un schéma de Newmark pour différentes conditions initiales, en plus du calcul du MCNL. Les conditions initiales choisies pour l'intégration temporelle sont :

$$\begin{cases} x_1(t_0) = 0 \\ x_2(t_0) = 0 \\ \dot{x}_1(t_0) = v \\ \dot{x}_2(t_0) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.165})$$

où  $v$  est une vitesse initiale imposée. Comme le montrent les Figures III.13a et III.13b, un cycle limite est atteint pour des conditions initiales en vitesse de suffisamment faible amplitude. Au-delà d'une certaine valeur de vitesse initiale, le cycle limite n'est plus atteint et le système est instable, comme le montre la Figure III.13c.

D'après la Figure III.13a, un nombre important de pseudo-périodes a été réalisé avant d'atteindre le cycle limite. Sur un système industriel tel qu'une soufflante, un nombre aussi important de périodes de calcul serait prohibitif dans un contexte de bureau d'étude. Il est donc intéressant d'employer des méthodes telles que les MCNL qui s'affranchissent du calcul du régime transitoire.

Un calcul de MCNL a été réalisé sur le même système en conservant 20 harmoniques du mouvement. Pour initialiser le calcul, on part d'une dynamique à faible niveau d'énergie (*i.e* à faible niveau d'amplitude). De cette manière, les oscillations du système sont suffisamment faibles pour ne pas déclencher des non-linéarités de frottement, si bien que l'on se place dans le cas asymptotique avec frotteur collé. La dynamique de départ est donc celle du système linéaire équivalent à 1 degré de liberté.

Une méthode de continuation par longueur d'arc a été choisie pour le calcul de la branche non-linéaire. Les résultats sont illustrés en Figure III.14.

Plusieurs commentaires peuvent être fait. Premièrement, les résultats obtenus sont très similaires à ceux présentés dans les travaux de thèse de Laxalde page 64 [86], malgré un paramétrage légèrement différent du modèle mécanique entre les deux cas. Analysons plus en détails le contenu des courbes en Figure III.14a et III.14b.

L'abscisse des courbes en Figure III.14a est le module de la première harmonique de  $x_1$ . D'après la courbe supérieure de la Figure III.14a, un glissement fréquentiel est observé vers des valeurs inférieures pour un accroissement de l'amplitude de vibration. À faibles niveaux d'énergie, la fréquence libre du système est celle du système linéaire obtenu en bloquant le frotteur sur la masse  $m_2$ . Au-delà d'une certaine amplitude, les efforts de liaison sont suffisamment importants pour déclencher le frottement. La libération de ce degré de liberté assouplit le système, d'où une diminution de la fréquence libre. Pour de grandes amplitudes, la fréquence tend vers un nouvel état asymptotique correspondant au cas limite où il n'y a pas de frotteur  $f_{nl}(x_2, \dot{x}_2) = 0$ . En

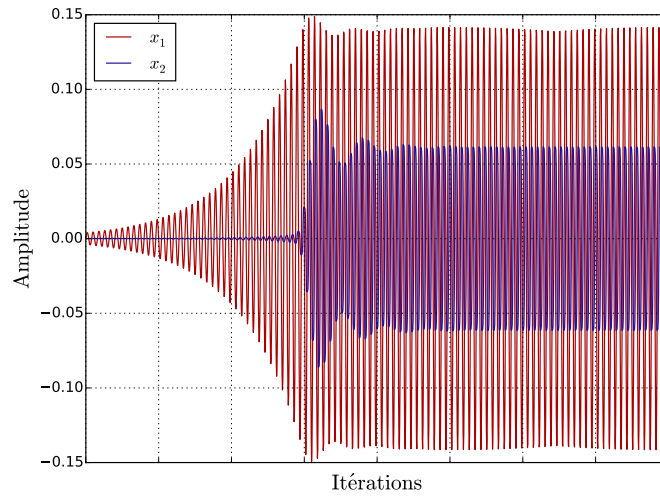
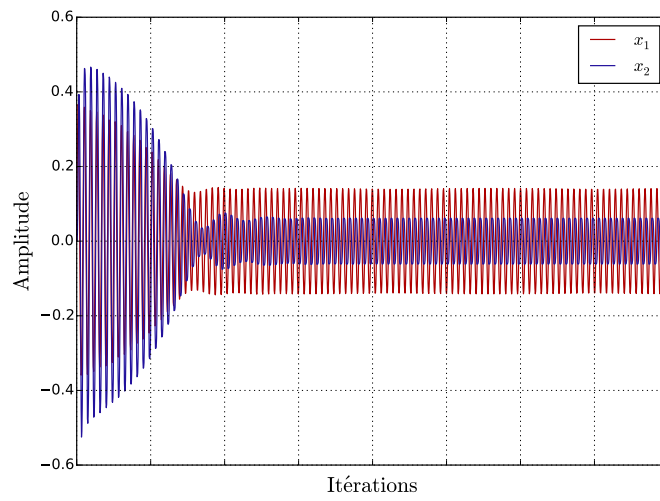
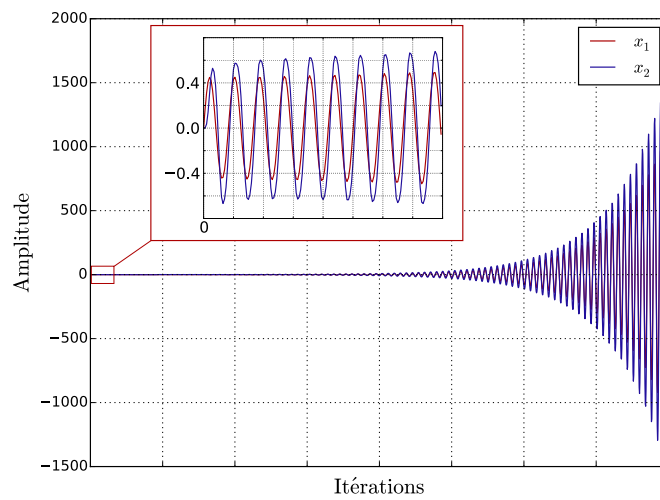
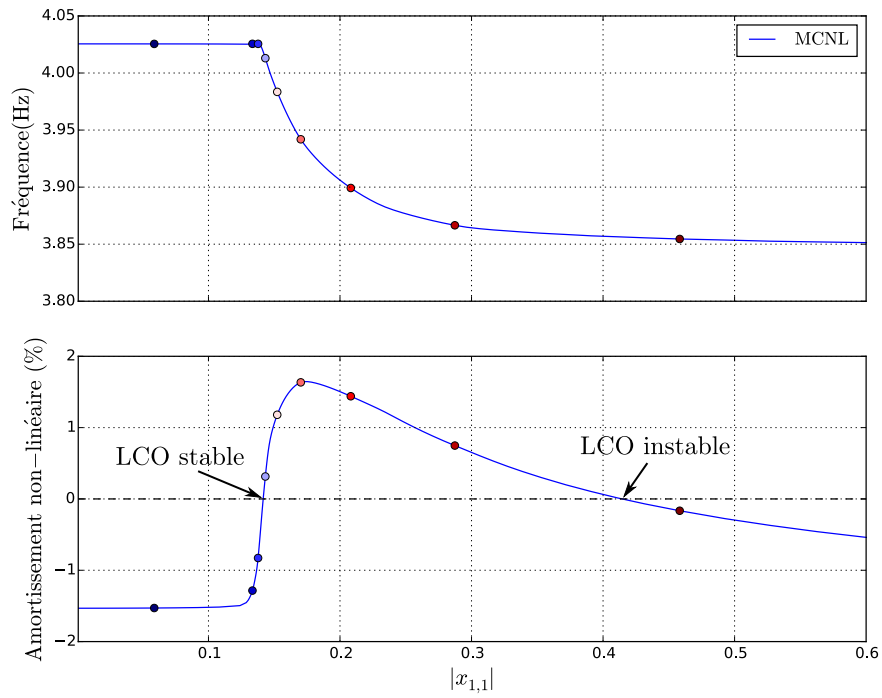
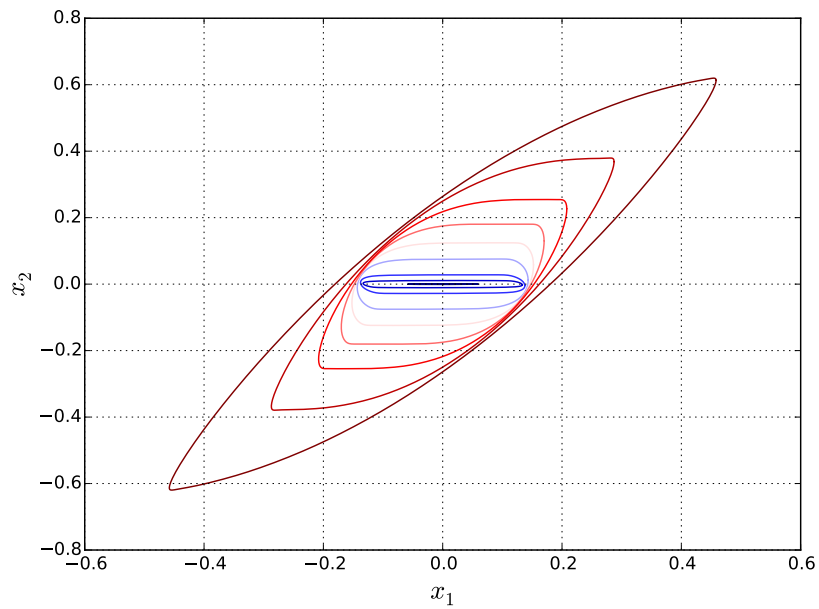
(a)  $v = 0.1$ (b)  $v = 9$ (c)  $v = 11$ 

FIGURE III.13 – Intégration temporelle du modèle académique masse-ressort



(a) Visualisation du MCNL



(b) Dynamique du système sur les points de la Figure III.14a

FIGURE III.14 – Calcul du MCNL sur modèle académique masse-ressort

effet, les efforts de liaison sont prépondérants à grande amplitude devant l'effort non-linéaire saturé, qui devient négligeable.

La courbe inférieure de la Figure III.14a représente l'évolution de l'amortissement non-linéaire. À faible amplitude, l'amortissement non-linéaire est égal à l'amortissement du système asymptotique avec frotteur bloqué. L'augmentation de l'amplitude de mouvement produit le glissement du frotteur, d'où un accroissement rapide de l'amortissement. Ce dernier décroît à grande amplitude vers l'état où l'amortissement amené par le frotteur sur l'amortissement global devient de plus en plus faible.

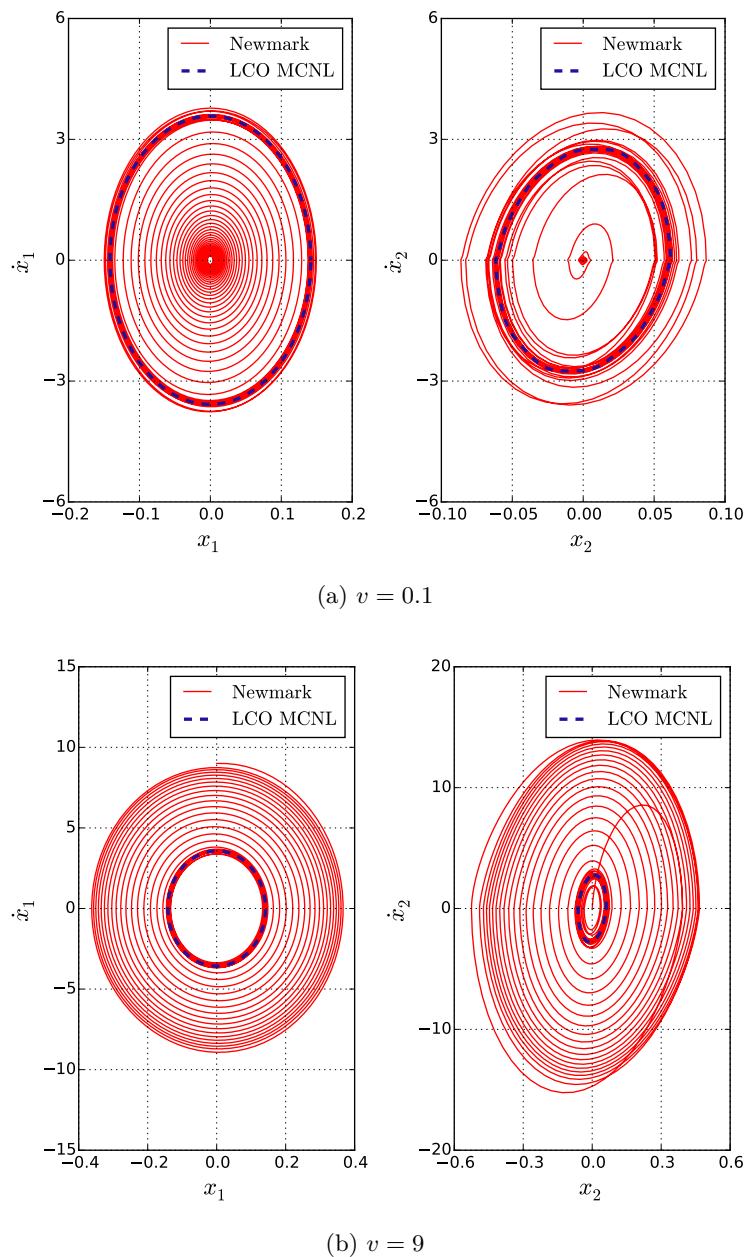


FIGURE III.15 – Superposition du LCO obtenu par MCNL avec l'intégration temporelle de Newmark

Il est important de bien différencier la notion d'amortissement non-linéaire et de dissipation énergétique. En effet, le point du MCNL d'amortissement maximal n'est pas celui où le plus d'énergie est dissipée : la dissipation énergétique pour une loi de Coulomb est en effet proportionnelle à l'amplitude de vibration. À grande amplitude de mouvement du frotteur, l'énergie dissipée continue donc à augmenter alors que l'amortissement non-linéaire diminue.

Avec l'apparition du frottement non-linéaire apparaît une boucle d'hystérésis dans l'espace d'état. On visualise cette boucle grâce aux enveloppes des pseudo-périodes du MCNL tracées en Figure III.14b. Les différentes enveloppes sont associées aux points de même couleur sur le MCNL en Figure III.14a. On retrouve bien qu'à faible amplitude, la masse  $m_2$  est immobile et le mouvement de la masse  $m_1$  est linéaire. À mesure que l'amplitude augmente, le frotteur est libéré et la boucle d'hystérésis apparaît. L'ouverture de ces courbes est typique des phénomènes avec non-linéarités de frottement.

Pour les paramètres choisis, deux cycles limites visibles en Figure III.14a ont été trouvés grâce au MCNL sur les points où l'amortissement non-linéaire est nul. Le premier cycle limite à faible amplitude est un cycle stable tandis que celui à grande amplitude est instable. Une dynamique à une amplitude plus faible que celle du LCO instable converge toujours vers le LCO stable. Dans le cas contraire, la dynamique diverge. Ce constat est retrouvé sur les résultats d'intégration temporelle en Figure III.13. La Figure III.13a part d'une amplitude plus faible que le LCO stable, la Figure III.13b part d'une amplitude à la limite inférieure du LCO instable et la Figure III.13c part d'une amplitude à la limite supérieure du LCO instable : les deux premiers cas convergent vers le LCO stable tandis que le dernier diverge.

Pour finir, le cycle limite stable obtenu par MCNL a été superposé à l'évolution de l'état du système dans l'espace des phases, ce qui est illustré en Figure III.15. On voit que le MCNL a prédit correctement le cycle limite sur lequel le système évolue naturellement en régime libre, prouvant l'efficacité de cet outil pour déterminer la présence de solutions périodiques sur des systèmes potentiellement instables.

## 5 Bilan

Nous venons de voir dans ce chapitre un ensemble de propriétés pour décrire la dynamique des systèmes non-linéaires autonomes. Des méthodes ont été proposées afin de déterminer des solutions périodiques à ces systèmes, en s'appuyant sur des approches temporelles et fréquentielles. Il a été vu que les approches temporelles sont particulièrement simples mais peuvent conduire à des processus de calcul très longs, ce qui peut être rédhibitoire dans un contexte industriel. Les approches qui permettent de déterminer directement les solutions périodiques sont en ce sens une bonne alternative. Notamment, les approches fréquentielles sont intéressantes car elles permettent de s'affranchir du calcul d'un régime transitoire. Dans le cas particulier des systèmes avec non-linéarités de type frottement, les modes complexes non-linéaires sont un outil particulièrement adapté pour trouver des solutions périodiques sur des systèmes non-linéaires tels les systèmes aube disque. Dans le prochain chapitre, nous allons nous intéresser à des méthodes de prédiction de cycles limites à l'aide des modes complexes non-linéaires en tenant compte de l'interaction fluide structure.

## Chapitre IV

# Méthodologie et modélisation des non-linéarités dans l'analyse de stabilité aéroélastique

Ce chapitre s'intéresse à la prise en compte des non-linéarités de frottement dans l'analyse de stabilité aéroélastique. Des méthodes vont être proposées pour intégrer le frottement aube disque à cette analyse et permettre la prédiction de solutions périodiques sur des systèmes aéroélastiques classiquement instables dans un cadre de mécanique linéaire. À ce titre, les notions vues aux chapitres précédents vont être mises à profit, en particulier celle concernant les MCNL. Dans un premier temps, les objectifs du couplage du fluide avec la structure non-linéaire vont être rappelés. Par la suite, deux stratégies de couplage entre le fluide et la structure non-linéaire seront présentées. Une de ces deux stratégies sera pour finir appliquée sur un modèle phénoménologique.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Objectifs du couplage avec la structure non-linéaire . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>2</b>	<b>Stratégie de couplage faible du fluide avec la structure non-linéaire . . .</b>	<b>160</b>
2.1	Présentation de la stratégie . . . . .	160
2.2	Prise en compte du décalage fréquentiel sur l'évaluation des composantes aérodynamiques . . . . .	163
<b>3</b>	<b>Stratégie de couplage fort du fluide avec la structure non-linéaire . . . .</b>	<b>164</b>
3.1	Présentation de la stratégie . . . . .	164
3.2	Réduction de Craig-Bampton . . . . .	166
3.3	Transfert des efforts aérodynamiques du modèle complet vers le modèle réduit . . . . .	167
3.3.1	Identification des nœuds du modèle par plus proches voisins . . .	168
3.3.2	Réduction des efforts aérodynamiques dans la base de Craig-Bampton . . . . .	169
3.4	Transfert des déplacements du modèle réduit vers le modèle complet . . .	171
3.5	Conservation de la condition de phase fluide structure . . . . .	171
<b>4</b>	<b>Application du couplage faible sur modèle phénoménologique . . . . .</b>	<b>172</b>
4.1	Présentation du modèle . . . . .	172
4.2	Mise en équation du modèle . . . . .	173
4.3	Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec . . . . .	175

4.4	Implémentation du couplage faible sur le modèle phénoménologique . . . .	179
4.5	Résultats numériques . . . . .	180
<b>5</b>	<b>Bilan</b> . . . . .	<b>184</b>

---

## 1 Objectifs du couplage avec la structure non-linéaire

En raison de sa capacité à prédire des cycles limites, nous souhaitons exploiter la notion de MCNL vue au chapitre précédent dans un cadre de couplage fluide structure. Il convient donc de pouvoir prendre en compte les effets du fluide sur la dynamique non-linéaire du système aube disque, et donc d'intégrer un terme d'origine aérodynamique à l'équation algébrique des MCNL :

$$\mathbf{Z}(\omega, \beta)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{\text{nl}}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = \mathbf{F}_{\text{ag}}(\mathbf{X}, \omega, \beta) \quad (\text{IV.1})$$

L'équation IV.1 diffère de l'équation III.135 par l'ajout d'un terme aérodynamique  $\mathbf{F}_{\text{ag}}$  à droite de l'équation. Ce terme n'est pas un terme de forçage de type réponse forcée, comme dans le cas d'une interaction de sillage ou encore d'une ingestion de vortex. Il s'agit d'un terme de couplage aéroélastique traduisant les effets du fluide sur la dynamique de la structure. Il est donc fonction de la déformée non-linéaire  $\mathbf{X}$  de la structure, de sa pulsation libre  $\omega$  et potentiellement de l'atténuation  $\beta$  du MCNL.

Pour résoudre l'équation IV.1, une approche partitionnée a été employée entre *elsA* et *Harmonie*, un code développé et optimisé par le LTDS permettant le calcul de la dynamique de structures en frottement. *Harmonie* permet en outre le calcul de MCNL sur des configurations complexes telles que celles utilisées en industrie. L'approche partitionnée permet d'exploiter au mieux les fonctionnalités propres à chacun de ces solveurs et éviter de concevoir un code monolithique multiphysique pour mener la résolution complète fluide structure. *elsA* est utilisé pour avoir une évaluation des efforts aérodynamiques appliqués à la structure, tandis qu'*Harmonie* permet le calcul des MCNL.

La question qui demeure est le transfert des informations d'un solveur à un autre. Ce transfert n'est pas direct car une formulation temporelle des équations de Navier-Stokes est employée dans *elsA*, tandis que les MCNL supposent une formulation harmonique de la dynamique de la structure. Afin de réaliser le couplage, on souhaite :

- transférer l'information de la dynamique non-linéaire des aubes calculées par *Harmonie* vers *elsA* d'une part ;
- transférer d'autre part les efforts aérodynamiques générés par l'écoulement résolu avec *elsA* vers *Harmonie*.

Bien que l'on se place dans notre étude dans un cadre où des interactions acoustiques sont attendues entre la soufflante et l'entrée d'air, aucune hypothèse n'est toutefois faite sur le phénomène physique à l'origine de la déstabilisation. Nous souhaitons ainsi proposer une méthode générale permettant l'étude des effets du frottement sec sur toute forme de flottement.

La Figure IV.1 illustre le couplage et l'échange d'informations entre les deux solveurs. Afin de réaliser ce couplage, deux approches ont été explorées. La première est une approche par couplage faible, où un unique transfert d'information d'*elsA* vers la structure est effectué. La deuxième est une approche de couplage fort, où un processus itératif est mis en place entre les deux solveurs afin de faire converger simultanément la structure non-linéaire et l'écoulement fluide. Nous allons maintenant détailler ces deux approches et les moyens mis en œuvre pour les réaliser.



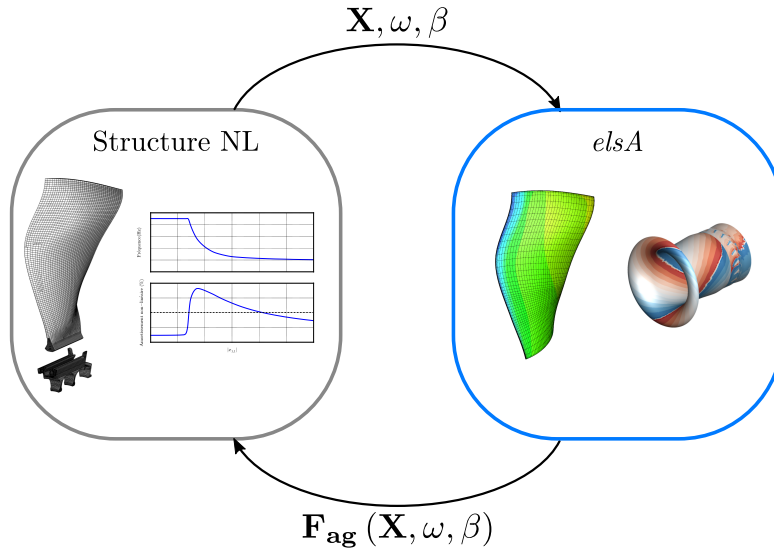


FIGURE IV.1 – Échange d'informations entre la structure non-linéaire et *elsA* dans la procédure de couplage

## 2 Stratégie de couplage faible du fluide avec la structure non-linéaire

### 2.1 Présentation de la stratégie

La première stratégie de couplage est adaptée des travaux de Berthelon [17]. Elle suppose que la base modale du modèle éléments finis complet utilisé pour récupérer classiquement les modes linéaires de la structure est équivalente à celle obtenue après assemblage des deux sous-structures formant le modèle non-linéaire sur leur interface de contact. Une nuance existe entre ces deux modèles dans la mesure où les sous-structures formant le modèle non-linéaire peuvent être issues d'une méthode de réduction comme celle de Craig-Bampton. Dans la suite, nous nommerons  $\Phi_C$  les modes linéaires obtenus à partir du modèle complet de la structure en base physique, et  $\Phi_S$  les modes obtenus après assemblage des sous-structures sur leur interface de contact. Les modes  $\Phi_S$  peuvent être exprimés en base réduite assemblée si une méthode de réduction a été employée pour décrire les deux sous-structures.

Supposons que les modèles employés pour résoudre la dynamique non-linéaire des sous-structures en frottement soient issus d'une méthode de réduction. Afin de calculer un MCNL à partir de ces sous-structures en tenant compte d'un terme de couplage aéroélastique (équation IV.1), il est nécessaire de pouvoir représenter l'aérodynamique dans la base réduite des sous-structures en frottement. Dans une hypothèse de linéarité des efforts aéroélastiques par rapport au mouvement de l'aube, il serait nécessaire de réaliser un calcul aéroélastique par vecteur de la base réduite afin d'obtenir une représentation complète des ces efforts dans la base réduite. L'hypothèse d'équivalence des bases modales permet de réduire le nombre de calculs à réaliser en privilégiant un calcul aéroélastique sur une base de mouvement plus adaptée. En particulier, elle nous permet d'exploiter directement la base  $\Phi_C$  des modes propres de la structure complète dans le vide dans une hypothèse de couplage faible.

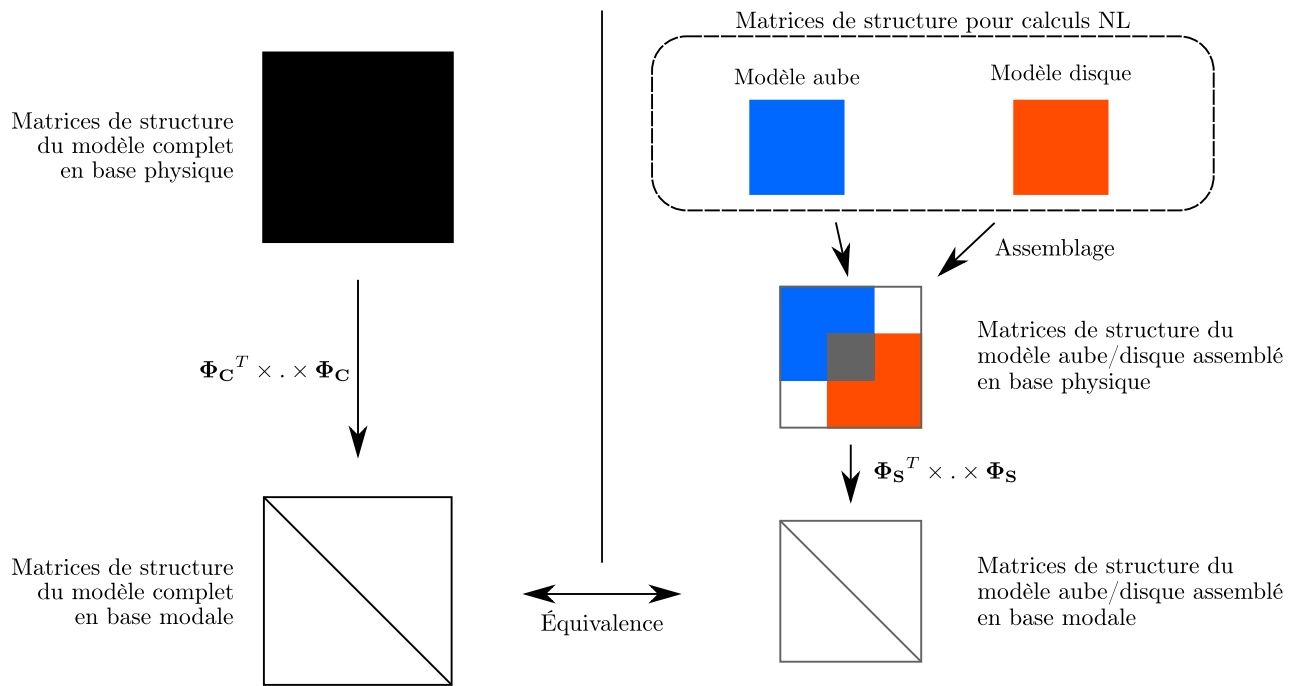


FIGURE IV.2 – Équivalence des bases modales entre le modèle éléments finis complet (gauche) et les modèles pour calculs non-linéaires assemblés (droite)

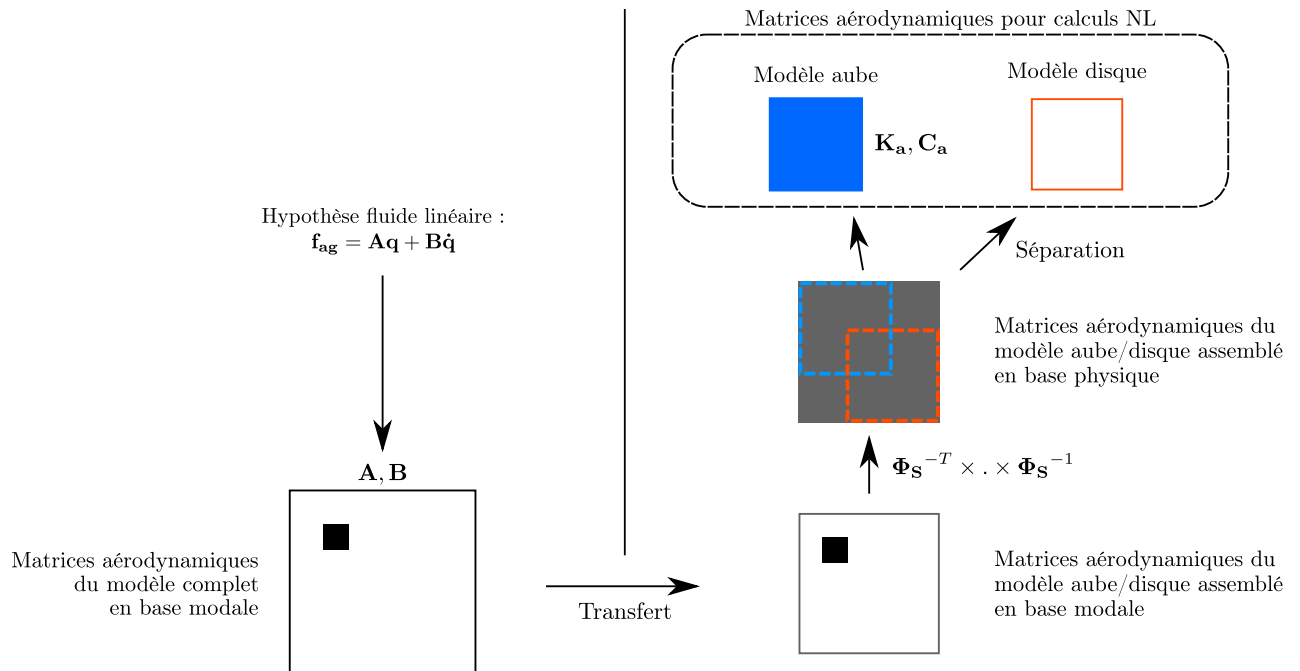


FIGURE IV.3 – Transfert des matrices d’efforts aérodynamiques dans la procédure de couplage faible

Supposons que l'on effectue un calcul aéroélastique en mouvement harmonique imposé selon un mode linéaire de la base  $\Phi_C$  obtenue sur le modèle éléments finis complet. Nous avons vu au cours du Chapitre II que la projection des efforts aérodynamiques générés par ce mode sur la base  $\Phi_C$  dont il est issu pouvait s'écrire, dans une hypothèse de linéarité des efforts fluides par rapport au mouvement de la structure :

$$\mathbf{g}_{aero} = \mathbf{A}\mathbf{q} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{IV.2})$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  sont respectivement les matrices de raideur et d'amortissement aéroélastique associées aux modes  $\Phi_C$ . En exploitant l'hypothèse d'équivalence des bases modales  $\Phi_C$  et  $\Phi_S$ , on suppose que les efforts aérodynamiques généralisés associés aux modes  $\Phi_S$  sont identiques à ceux obtenus pour les modes  $\Phi_C$ .

De cette manière, les matrices de raideur et d'amortissement aéroélastiques  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  obtenues s'appliquent directement sur le système modal réduit assemblé aube disque. Par exemple, la raideur et l'amortissement aéroélastiques obtenus pour l'étude d'un mode de flexion à deux diamètres du modèle éléments finis complet peuvent directement être transférés au modèle aube disque assemblé. On peut alors passer dans la base physique du système assemblé aube disque à l'aide de la matrice des vecteurs propres  $\Phi_S$ .

Exprimées dans la base physique assemblée, les matrices aéroélastiques peuvent être à priori pleines. Le passage de la base modale assemblée à la base physique assemblée génère en effet des termes non nuls sur l'ensemble des matrices aéroélastiques à cause de la réduction. Une dernière hypothèse consiste alors à ne conserver que les termes s'appliquant sur l'aube. Cette hypothèse trouve une justification dans le fait que seule l'aube est en interaction avec le fluide sur un système réel. On peut de cette manière conserver uniquement les termes aéroélastiques appliqués sur l'aube, et ainsi séparer sur chaque élément les matrices aéroélastiques du système aube disque assemblé. En particulier, les matrices aéroélastiques du disque sont nulles, contrairement à celles de l'aube que nous avons gardées. Le modèle d'aube seule voit ainsi ses matrices de raideur  $\mathbf{K}$  et d'amortissement  $\mathbf{C}$  initiales être modifiées par des termes de raideur  $\mathbf{K}_a$  et d'amortissement  $\mathbf{C}_a$  d'origine aéroélastique. La Figure IV.3 illustre tel qu'il vient d'être décrit le transfert des efforts aérodynamiques du modèle complet vers les modèles d'aube et de disque utilisés pour les calculs de dynamique non-linéaire.

Une fois le transfert des termes aéroélastiques effectué, on peut réaliser un calcul de MCNL en présence des composantes aéroélastiques associées aux modes linéaires du système. L'équation IV.1 est remplacée par :

$$\mathbf{Z}_a(\omega, \beta)\mathbf{X} + \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{X}, \omega, \beta) = \mathbf{0} \quad (\text{IV.3})$$

où  $\mathbf{Z}_a$  est la nouvelle matrice de rigidité multi-harmonique tenant compte des efforts aéroélastiques liés au mouvement de la structure. En pratique, la déformée non-linéaire de la structure en présence des frottements est très proche de la déformée linéaire comme nous le verrons au cours du Chapitre V. L'estimation des matrices  $\mathbf{K}_a$  et  $\mathbf{C}_a$  ayant été faite en supposant un mouvement basé sur l'harmonique fondamental, seul le bloc  $\mathbf{Z}_a^1$  qui correspond à cet harmonique sera modifié par la présence du fluide.

La matrice  $\mathbf{Z}_a$  s'écrit ainsi :

$$\mathbf{Z}_a = \begin{pmatrix} 2\mathbf{K} & & & & & \\ & \mathbf{Z}_a^1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{Z}^k & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{Z}^{N_h} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.4})$$

où :

$$\mathbf{Z}_a^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{K}_a + (\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - \beta (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) & \omega (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) - 2\beta\omega\mathbf{M} \\ -(\omega (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) - 2\beta\omega\mathbf{M}) & \mathbf{K} - \mathbf{K}_a + (\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - \beta (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.5})$$

et :

$$\mathbf{Z}_a^k = \mathbf{Z}^k = \begin{pmatrix} \mathbf{K} + ((k\beta)^2 - (k\omega)^2) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} & k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M} \\ -(k\omega\mathbf{C} - 2k^2\beta\omega\mathbf{M}) & \mathbf{K} + ((k\beta)^2 - (k\omega)^2) \mathbf{M} - k\beta\mathbf{C} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.6})$$

En l'état, l'évaluation des efforts aérodynamiques (en particulier l'évaluation des termes des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$ ) se fait à l'aide d'une analyse harmonique des efforts aérodynamiques générés par un mode propre linéaire issu de la base  $\Phi_{\mathbf{C}}$  et projetés sur lui même. Ce mode ne tient toutefois pas compte des effets de raideur aérodynamique ajoutée et des décalages fréquentiels qui en résultent. Or, nous avons vu dans la section II.6.4 que le décalage en fréquence avait un impact au premier ordre sur la stabilité aéroélastique en cas de propagation d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air. Il convient donc d'inclure dans le couplage les effets de ce décalage en cas de propagation acoustique.

## 2.2 Prise en compte du décalage fréquentiel sur l'évaluation des composantes aérodynamiques

Il a été vu au cours du chapitre II que la fréquence de mouvement est un paramètre clé en ce qui concerne la propagation des ondes acoustiques dans une conduite cylindrique, ainsi que sur la réflexion de ces ondes sur une ouverture vers un environnement infini. Dans un contexte de stabilité aéroélastique, si l'amortissement aérodynamique est conditionné par les ondes acoustiques, il est dès lors naturel que la fréquence du mouvement étudié ait un impact important sur la stabilité. On a pu vérifier ce dernier point au cours de la section II.6.4.

Plus généralement, les efforts aérodynamiques générés par le mouvement des aubes dépendent de leur fréquence de vibration. Dans la mesure où des décalages fréquentiels sont attendus compte tenu de la raideur aérodynamique et des non-linéarités de la structure, il paraît judicieux de pouvoir intégrer cette dépendance dans la stratégie de couplage avec la structure non-linéaire exposée dans cette section. Nous souhaitons en ce sens intégrer une influence des matrices aérodynamiques  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  à la fréquence du mouvement. Cette dépendance à la fréquence permettra notamment de prendre en compte dans notre cas les effets de la propagation acoustique en entrée d'air sur la présence d'un cycle limite. Au cours de la résolution, on souhaite donc que la matrice

$\mathbf{Z}_a^1$  prene la forme :

$$\mathbf{Z}_a^1 = \begin{pmatrix} \mathbf{K} - \mathbf{K}_a(\omega) + (\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - \beta (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) & \omega (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) - 2\beta\omega\mathbf{M} \\ -(\omega (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) - 2\beta\omega\mathbf{M}) & \mathbf{K} - \mathbf{K}_a(\omega) + (\beta^2 - \omega^2) \mathbf{M} - \beta (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.7})$$

où les matrices  $\mathbf{K}_a$  et  $\mathbf{C}_a$  dépendent uniquement de la pulsation  $\omega$  du MCNL.

Pour le calcul du MCNL, la dérivée partielle de  $\mathbf{Z}_a^1$  par rapport à  $\omega$ , que l'on trouve dans l'évaluation de la jacobienne, se réécrit :

$$\frac{\partial \mathbf{Z}_a^1}{\partial \omega} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial \omega}(\omega) - 2\omega\mathbf{M} + \beta \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \omega}(\omega) & (\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) - \omega \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \omega}(\omega) - 2\beta\mathbf{M} \\ -(\mathbf{C} - \mathbf{C}_a(\omega)) + \omega \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \omega}(\omega) + 2\beta\mathbf{M} & -\frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial \omega}(\omega) - 2\omega\mathbf{M} + \beta \frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \omega}(\omega) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.8})$$

où  $\frac{\partial \mathbf{K}_a}{\partial \omega}$  et  $\frac{\partial \mathbf{C}_a}{\partial \omega}$  dépendent de l'évolution des matrices de raideur et d'amortissement aérodynamique en fonction de la fréquence de mouvement.

En pratique, la sensibilité de ces matrices à la fréquence de mouvement a été prise en compte en les tabulant pour plusieurs valeurs de fréquence de vibration. Pour cela, un calcul en mouvement harmonique imposé a été réalisé pour plusieurs valeurs de fréquence comprises dans un intervalle fini. Une interpolation (linéaire ou spline) des matrices a ensuite été réalisée entre chaque fréquence.

Cette section a permis de présenter le principe du couplage faible utilisé dans le cadre de ces travaux de thèse. On parle de couplage faible car l'aérodynamique ne tient pas compte de la dynamique non-linéaire de la structure. Seule la fréquence du mouvement libre est éventuellement prise en compte dans l'évaluation des efforts aérodynamiques si une sensibilité à ce paramètre est souhaitée pour représenter les ondes acoustiques. Ainsi, un unique transfert d'informations entre solveurs est réalisé : les matrices aérodynamiques sont calculées une seule fois puis données au solveur calculant les MCNL. On ne revient pas sur ces calculs par la suite.

Toutefois, dans le cas où des harmoniques supérieures du mouvement sont attendues en raison des non-linéarités, celles-ci peuvent avoir un impact sur l'évaluation des efforts aérodynamiques. Il est donc intéressant d'avoir une approche permettant de prendre en compte ce contenu spectral dans l'évaluation des efforts aérodynamiques. Dans la prochaine section, nous allons présenter la stratégie de couplage fort, qui permet d'atteindre cet objectif.

### 3 Stratégie de couplage fort du fluide avec la structure non-linéaire

#### 3.1 Présentation de la stratégie

La stratégie de couplage fort proposée dans ce mémoire est une procédure itérative d'échange d'informations entre les solveurs de MCNL et de CFD. Le comportement du fluide est évalué en tenant compte de la dynamique non-linéaire fournie par le MCNL, tandis ce dernier est mis à jour à partir des efforts aérodynamiques générés par le mouvement de l'aube. La question du transfert des informations d'un solveur à l'autre est traitée dans les prochaines sous-sections.

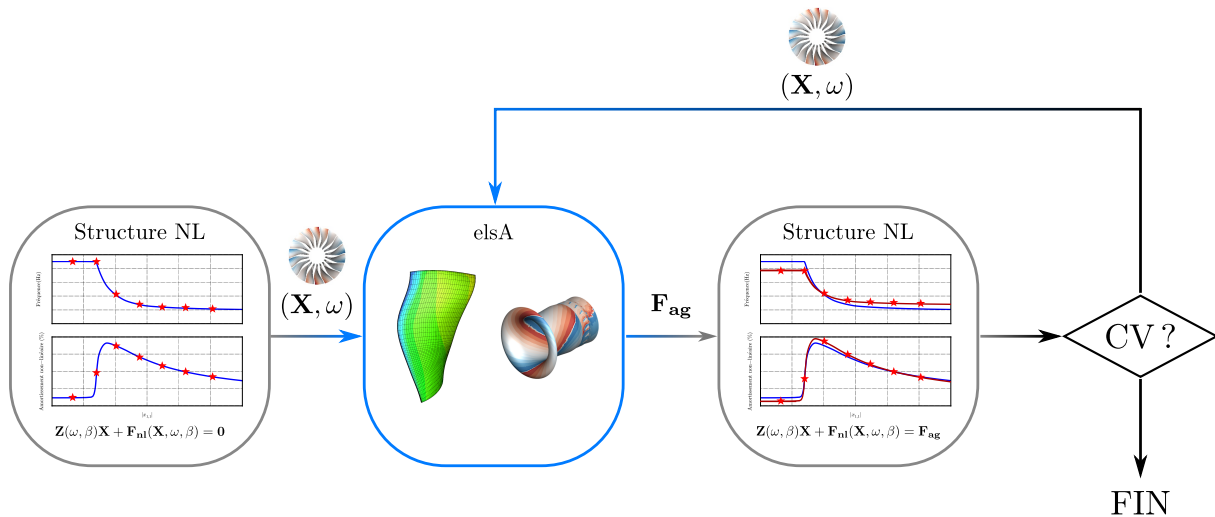


FIGURE IV.4 – Illustration de la procédure de point fixe de couplage fort entre les solveurs

L'initialisation de la procédure de couplage fort est un calcul de MCNL classique sans prise en compte d'aérodynamique. Il doit être compris ici que l'aérodynamique stationnaire a bien été prise en compte dans la mise en fonctionnement de la structure, mais qu'il n'y a pas de termes aérodynamiques  $\mathbf{g}_{aero}$  d'interaction libre entre le fluide et la structure pour cette étape d'initialisation. On ne considère que la structure préchargée au cours de cette première étape. Une fois le MCNL calculé, on dispose de la dynamique non-linéaire libre du système aube disque en absence de fluide. En particulier, on dispose du vecteur  $\mathbf{X}$  et des scalaires  $\omega$  et  $\beta$  pour différents niveaux d'amplitude de mouvement du système.

On poursuit la procédure en réalisant un échantillonnage de la dynamique non-linéaire du système aube disque, ce qui conduit à l'obtention d'une suite finie  $(\mathbf{X}_i, \omega_i, \beta_i)_{1 \leq i \leq i_{max}}$  de points du MCNL calculé sans aérodynamique. Ici,  $i_{max}$  est un entier ne pouvant dépasser le nombre de points total calculé en résolvant le MCNL en absence de fluide. On ne garde de cette manière qu'un sous-ensemble des solutions qui ont été calculées par le solveur de dynamique non-linéaire.

Pour chacune des solutions de cet échantillonnage, un calcul aéroélastique est réalisé en déformant la structure selon la forme multi-harmonique  $\mathbf{X}_i$  à la pulsation fondamentale  $\omega_i$ . Cette déformée s'écrit temporellement :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \sum_{k=1}^{N_h} (\mathbf{a}_{k_i} \cos(k\omega_i t) + \mathbf{b}_{k_i} \sin(k\omega_i t)) \quad (\text{IV.9})$$

On souhaite alors connaître la réponse du fluide à ce mouvement périodique multi-harmonique : on réalise une TFD des efforts aérodynamiques appliqués à l'aube à la pulsation  $\omega_i$  afin de construire le vecteur des efforts aérodynamiques généralisés  $\mathbf{F}_{ag_i}(\mathbf{X}_i, \omega_i)$ . Un nouveau MCNL est alors calculé selon IV.1 en interpolant les différents  $\mathbf{F}_{ag_i}$  sur les amplitudes correspondantes.

On notera que les efforts aérodynamiques calculés pour le MCNL ont été obtenus à partir d'un mouvement périodique multi-harmonique. On ne tient pas compte du terme d'atténuation

$\beta$  dans l'évaluation de ces efforts. Cela se justifie de la même manière que pour l'évaluation des efforts non-linéaires de frottement : on suppose que sur une pseudo-période  $T$  de mouvement, la décroissance due à l'atténuation  $\beta$  est négligeable du fait de l'hypothèse  $\beta \ll \omega$ .

On obtient un nouveau MCNL, caractérisant la dynamique libre du système non-linéaire fluide structure aube disque. On peut alors réitérer les différentes étapes déjà détaillées précédemment jusqu'à la convergence globale du système fluide structure, à savoir :

- l'échantillonnage du dernier MCNL calculé sur différents niveaux d'amplitude ;
- l'évaluation des efforts aérodynamiques correspondants ;
- le calcul du MCNL avec ces nouveaux efforts aérodynamiques.

La Figure IV.4 résume la stratégie de couplage qui vient d'être détaillée. Sur les courbes de MCNL représentées dans la première boîte décrivant la structure non-linéaire, les étoiles rouges représentent les points d'échantillonnage sur lesquelles la dynamique non-linéaire de l'aube a été récupérée. Un calcul aéroélastique est effectué pour chacun de ces points. Une fois les efforts aérodynamiques calculés à partir de la boîte décrivant les calculs aéroélastiques avec *elsA*, un nouveau MCNL est calculé et est représenté en rouge dans la boîte suivante. Ce MCNL est utilisé pour le prochain échantillonnage, jusqu'à la convergence de l'algorithme.

Cette sous-section vient de décrire le principe de la stratégie de couplage fort employée dans le cadre de ces travaux de thèse. Cette méthode est à ce stade encore très générale : on ne fait pas d'hypothèse sur la forme du fluide ou de la structure. Seule l'hypothèse des deux échelles de temps  $\beta$  et  $\omega$  a été utilisée pour l'évaluation des efforts aérodynamiques. Dans les sous-sections qui suivent, nous allons décrire comment cette stratégie a été appliquée en pratique et les contraintes qui découlent de cette application.

### 3.2 Réduction de Craig-Bampton

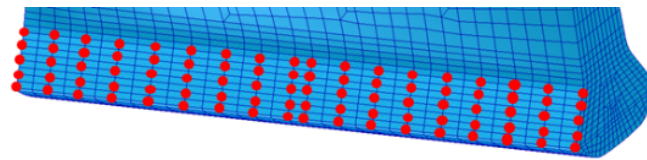
Dans le cadre des travaux effectués sur la stratégie de couplage fort, une modélisation réduite de la structure a été choisie afin de réaliser les calculs plus rapidement. Compte tenu de la phénoménologie que nous souhaitons observer, à savoir les non-linéarités de frottement, il est intéressant de choisir une méthode de réduction de Craig-Bampton (voir sous-section II.3.6).

Cette méthode présente plusieurs avantages : le premier est la qualité de la réduction. En ne conservant que quelques dizaines de modes normaux à interface fixe, on obtient une bonne approximation de la dynamique de la structure sur les premiers modes linéaires par rapport au modèle complet qui peut contenir plusieurs dizaines de milliers de degré de liberté. La taille du problème est fortement réduite, tout en étant prédictif sur la dynamique des premiers modes d'étude qui nous intéressent.

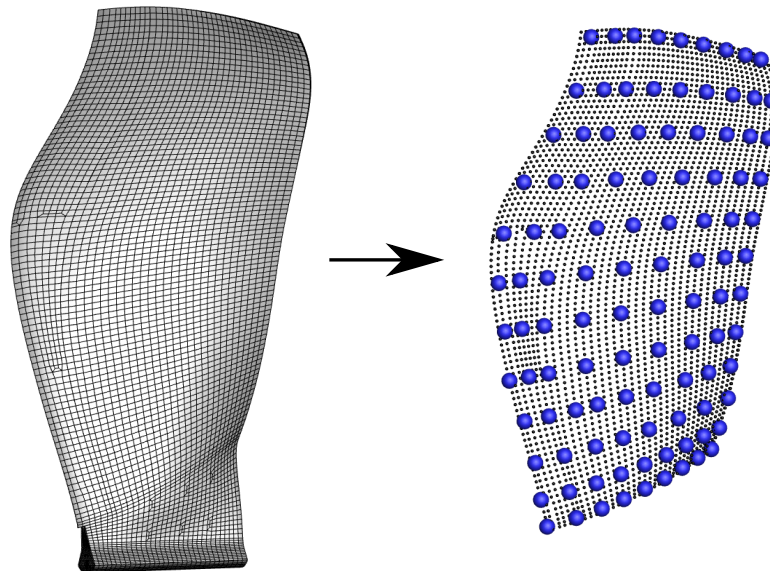
Le deuxième intérêt réside dans la conservation des nœuds physiques. Ces nœuds ont l'avantage de pouvoir fournir une dimension physique au modèle réduit : les déplacements obtenus sur ces nœuds ou les efforts que l'on applique dessus sont directement en base physique, contrairement aux modes internes qui nécessitent de repasser par la base de réduction. Dans notre cas, nous conservons des nœuds au niveau de la zone de contact en pied d'aube entre l'aube et le disque qui

serviront pour l'application des efforts non-linéaires de frottement sur le système aube disque. De plus, nous conservons des nœuds physiques sur l'extrados de l'aube afin d'obtenir une représentation du déplacement non-linéaire de l'aube. Cette représentation du déplacement sera par la suite utilisée avec les RBF pour recréer le mouvement à imposer à la structure dans le cadre des calculs aéroélastiques. Le profil de l'aube considérée étant très mince, le déplacement de l'extrados est topologiquement identique à celui de l'intrados avec des niveaux d'amplitude équivalents, si bien que le choix de conserver uniquement des nœuds d'intrados, d'extrados, ou un combinaison des deux est arbitraire. Une illustration de ces nœuds physiques retenus peut être trouvée en Figure IV.5.

L'emploi d'une réduction de Craig-Bampton impose certaines contraintes dans le cadre de la procédure de couplage fort décrite en sous-section IV.3.1. En particulier, il faut transférer l'information du fluide du modèle aérodynamique complet vers le modèle de structure réduit, et le déplacement calculé sur ce modèle réduit vers le modèle aérodynamique complet. Nous allons aborder ces deux aspects dans les deux prochaines sous-sections.



(a) Nœuds retenus en pied d'aube en rouge



(b) Nœuds retenus sur l'aube en bleu

FIGURE IV.5 – Illustration des nœuds physiques retenus dans le modèle réduit de Craig-Bampton pour la procédure de couplage fort

### 3.3 Transfert des efforts aérodynamiques du modèle complet vers le modèle réduit

Les calculs aéroélastiques sont menés sur un maillage aérodynamique contenant l'intégralité de la peau de l'aube. Le modèle réduit quant à lui ne contient qu'un sous-ensemble des nœuds



du modèle mécanique qui lui même ne coïncide pas avec le modèle aérodynamique. L'enjeu est donc ici de pouvoir transférer les efforts aérodynamiques exprimés sur la peau de l'aube de la grille aérodynamique vers le modèle réduit.

Une première approche envisageable repose sur l'hypothèse de linéarité du fluide par rapport au mouvement. Sous cette hypothèse, on peut construire la réponse du fluide à chacun des modes de la base de Craig-Bampton jusqu'à obtenir la matrice des coefficients d'influence [2, 18, 118]. On réalise pour cela un calcul aéroélastique en mouvement harmonique imposé selon chacun des modes de la base de réduction de Craig-Bampton, et on projette les efforts aérodynamiques obtenus sur cette même base.

Un nombre important de modes peut être nécessaire pour obtenir une bonne représentation du fluide dans le cas où des harmoniques supérieures du mouvement sont attendues. Bien que cette matrice n'ait à être construite qu'une seule fois en pré-traitement à partir de la base de réduction de Craig-Bampton, un nombre important de calculs aéroélastiques peut être nécessaire selon le nombre de modes retenus.

L'approche qui a été privilégiée consiste plutôt à tirer profit de la forme du modèle réduit d'aube employé. Sans faire d'hypothèse sur la linéarité du fluide, on cherche à exprimer les efforts aérodynamiques directement sur les nœuds d'aube retenus pour la base de Craig-Bampton (voir Figure IV.5b) et uniquement sur ces nœuds. On réalise ce transfert en deux étapes : une étape d'identification des nœuds d'aube et une étape de réduction des efforts aérodynamiques.

### 3.3.1 Identification des nœuds du modèle par plus proches voisins

L'identification des nœuds consiste à déterminer quel nœud du modèle réduit est le plus proche d'une cellule de la grille aérodynamique. On réalise de cette manière une identification par plus proches voisins. Pour chaque cellule de la grille aérodynamique de coordonnées  $(x_i, y_i, z_i)$ , on cherche les coordonnées  $(x, y, z)$  du nœud physique retenu dans le modèle réduit d'aube qui minimise la distance  $d$  :

$$\min_{\forall x,y,z \in G_{CB}} d = \min_{\forall x,y,z \in G_{CB}} \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2} \quad (\text{IV.10})$$

où on note  $G_{CB}$  l'ensemble des nœuds physiques retenus sur la peau de l'aube.

Cette identification est illustrée en Figure IV.6. On y voit sur la gauche les cellules de la grille aérodynamique en noir sur lesquels sont superposés les nœuds retenus du modèle réduit en bleu. Les résultats de l'identification par plus proches voisins sont illustrés à droite : les nœuds du modèle réduit (en noir) sont entourés par des groupements de nœuds de la grille aérodynamique. Chaque groupe de couleur est associé par plus proche voisin à un nœud du modèle réduit. Cette association n'est à effectuer qu'une seule fois et peut donc être faite en étape de pré-traitement à la procédure de couplage fort. Cette identification nous permet par la suite de réaliser la réduction des efforts du modèle complet vers le modèle réduit.

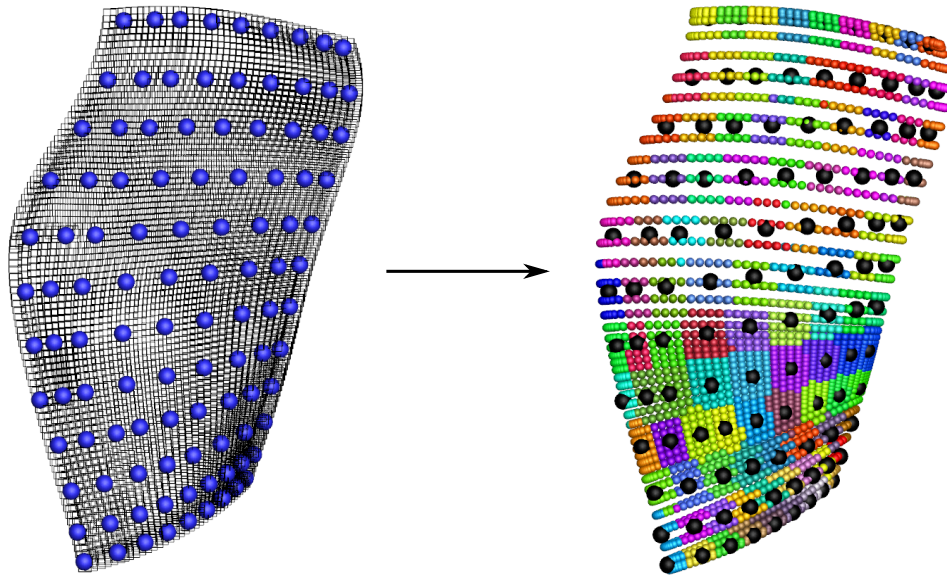


FIGURE IV.6 – Illustration de l'identification de chaque cellule de la grille aérodynamique à son nœud plus proche voisin du modèle réduit

### 3.3.2 Réduction des efforts aérodynamiques dans la base de Craig-Bampton

Il a été évoqué précédemment que les physiques résolues par les deux solveurs ne sont pas dans le même domaine. Les simulations menées avec *elsA* sont en effet dans le domaine temporel, tandis que le MCNL suppose une formulation fréquentielle du problème mécanique. Une certaine incohérence se trouve donc à l'interface des solveurs, dans le sens où on a :

- d'une part, l'évolution temporelle des efforts aérodynamiques appliqués sur chaque cellule de peau de l'aube ;
- d'autre part, un effort harmonique à fournir à une structure réduite.

Le transfert des efforts aérodynamiques suppose donc le passage du domaine temporel au domaine fréquentiel, et le passage de la grille aérodynamique à la grille du modèle réduit.

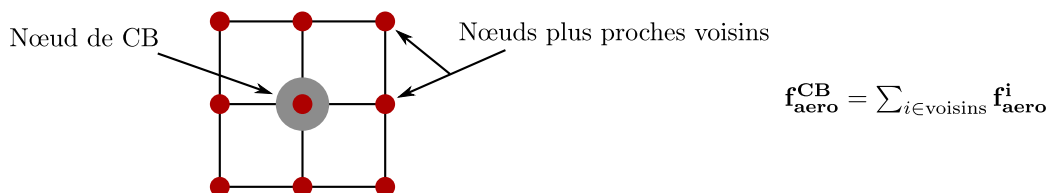


FIGURE IV.7 – Condensation des efforts aérodynamiques de la grille aérodynamique (rouge) vers le modèle réduit (gris)

La TFD permet de passer les efforts du domaine temporel au domaine fréquentiel : en imposant un mouvement multi-harmonique à la structure selon la dynamique du MCNL, le fluide atteint un régime périodique permanent dont la dernière période peut être utilisée pour calculer la TFD

des efforts aérodynamiques.

La condensation des efforts de la grille aérodynamique vers le modèle réduit exploite quant à elle l'identification par plus proches voisins effectuée précédemment : l'effort aérodynamique appliqué sur chaque nœud du modèle réduit est la somme des efforts aérodynamiques appliqués sur le groupe de nœuds plus proches voisins du modèle complet. La Figure IV.7 illustre cette condensation.

Réaliser ces étapes de TFD et de condensation permet de passer de l'expression des efforts aérodynamiques sur grille aérodynamique du domaine temporel à une formulation harmonique de ces efforts sur le modèle réduit. Les efforts  $\mathbf{F}_{ag}(\mathbf{X}, \omega)$  ainsi obtenus peuvent être transférés au solveur non-linéaire pour le calcul du MCNL. Par ailleurs, pour chacune de ces opérations, les opérateurs utilisés sont linéaires, ce qui signifie que l'ordre des opérations n'importe pas. En d'autres termes, on peut réaliser la TFD puis la condensation, ou bien la condensation puis la TFD : le résultat obtenu est le même. Toutefois, il peut être plus intéressant pour des raisons de gain de temps de faire d'abord la TFD avant de réaliser la condensation en cas de sur-échantillonnage de la période d'étude.

Le principe de cette procédure de transfert des efforts aérodynamiques est illustré en Figure IV.8, dans le cas où la TFD est réalisée avant la condensation des efforts aérodynamiques.

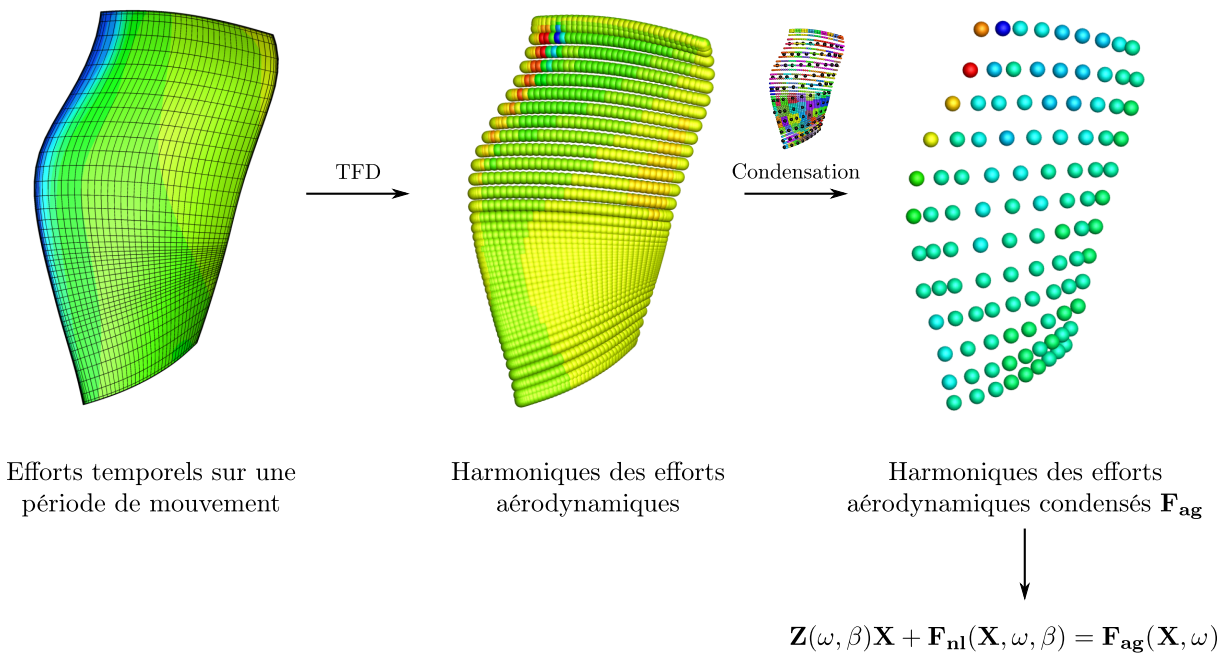


FIGURE IV.8 – Illustration de la procédure de transfert des efforts aérodynamiques d'elsA vers le solveur non-linéaire

L'intérêt de cette procédure de transfert des efforts aérodynamiques est qu'elle ne fait pas d'hypothèse sur la linéarité du fluide. De plus, l'impact de la déformée non-linéaire ainsi que d'un décalage fréquentiel de la réponse libre du mouvement sont pris en compte par construction de la réponse du fluide au mouvement. Les effets de la dynamique non-linéaire sur la propagation

d'ondes acoustiques dans l'entrée d'air sont donc de la même manière naturellement intégrés à la procédure de couplage.

Une hypothèse est toutefois faite sur le fait que les efforts aérodynamiques ne se projettent pas sur les modes normaux à interface fixe du modèle réduit d'aube. Cela se justifie dans le sens où pour un grand nombre de nœuds physiques retenus sur l'aube, les modes normaux à interface fixe du modèle de Craig-Bampton auront des formes très irrégulières, éloignées des déformées qui nous intéressent. La projection des efforts aérodynamiques sur ces modes est ainsi supposée négligeable devant l'application des efforts physiques sur les composantes statiques du modèle réduit. Nous allons à présent voir comment transférer les informations issues d'un calcul mécanique vers le solveur fluide.

### 3.4 Transfert des déplacements du modèle réduit vers le modèle complet

Les harmoniques du mouvement obtenues à partir du MCNL sont exprimées sur les nœuds physiques retenus dans le modèle d'aube de Craig-Bampton. Comme dans le paragraphe 5.1.2 sur le transfert des déplacement entre maillages incompatibles, des RBF de type Thin Plate Spline ont été utilisées pour transférer l'information de la grille réduite vers la grille complète.

### 3.5 Conservation de la condition de phase fluide structure

Pour mener à bien la procédure de couplage fort, il est nécessaire de conserver une cohérence temporelle entre les efforts aérodynamiques et le mouvement qui les génère : tous deux sont déphasés temporellement. Si ce déphasage n'est pas conservé au moment d'ajouter les efforts aérodynamiques au système de résolution du MCNL, un impact est à prévoir sur la raideur et l'amortissement aérodynamique, d'où un calcul erroné de MCNL en présence de fluide.

En pratique, la conservation de phase a été assurée à l'aide d'une continuation séquentielle. Sur une aube prédéfinie que l'on nomme dorénavant aube de référence, l'amplitude et la phase à l'origine d'un nœud physique retenu sur l'aube ont été imposées pendant la résolution du MCNL. Lorsque la dynamique non-linéaire est extraite pour réaliser les calculs aéroélastiques, cette aube de référence contient toujours cette origine de phase : l'analyse des efforts aérodynamiques est réalisée uniquement sur l'aube de référence pour mettre à jour le MCNL à la prochaine itération de couplage fort. À la convergence de l'algorithme de couplage, on est ainsi assuré d'avoir une cohérence de phase entre la structure et le fluide.

Les deux sections que nous venons de voir ont présenté les principes de fonctionnement des méthodes de couplage entre le fluide et la structure non-linéaire. Dans la prochaine section, la méthode de couplage faible sera appliquée sur un modèle phénoménologique pour démontrer sa capacité à prédire des LCO. La méthode de couplage fort sera quant à elle appliquée au cours du chapitre V sur une configuration industrielle typique de l'état de l'art.

## 4 Application du couplage faible sur modèle phénoménologique

### 4.1 Présentation du modèle

Un modèle phénoménologique a été créé pour représenter le système frottant libre aube disque. Celui-ci est illustré en Figure IV.9. Ce modèle est constitué de trois éléments distincts : l'aube, son pied et le disque. Les non-linéarités de frottement interviennent seulement entre le pied de l'aube et le disque. Les mouvements autorisés pour chaque corps sont des mouvements relatifs de rotation.

Remarque : le pied a une forme à base carrée pour des considérations visuelles seulement.

On considère que l'on se place dans le repère relatif. Nous définissons les vecteurs  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  de ce repère selon l'illustration IV.9. On suppose qu'il n'y a aucun mouvement relatif entre les éléments du modèle selon l'axe  $Y$ . Ainsi, nous définissons les angles suivants :

- $\theta_{1,x}$  est l'angle de rotation du disque autour de  $X$  ;
- $\theta_{1,z}$  est l'angle de rotation du disque autour de  $Z$  ;
- $\theta_{2,x}$  est l'angle entre  $Z_{root}$  (axe attaché au repère local du pied) et  $Z$  ;
- $\theta_{2,z}$  est l'angle de rotation du pied d'aube autour de  $Z_{root}$  ;
- $\theta_{3,x}$  est l'angle de flexion entre  $Z_{root}$  et  $Z_{blade}$  (axe attaché au repère local de l'aube) ;
- $\theta_{3,z}$  est l'angle de torsion de l'aube autour de  $Z_{blade}$ .

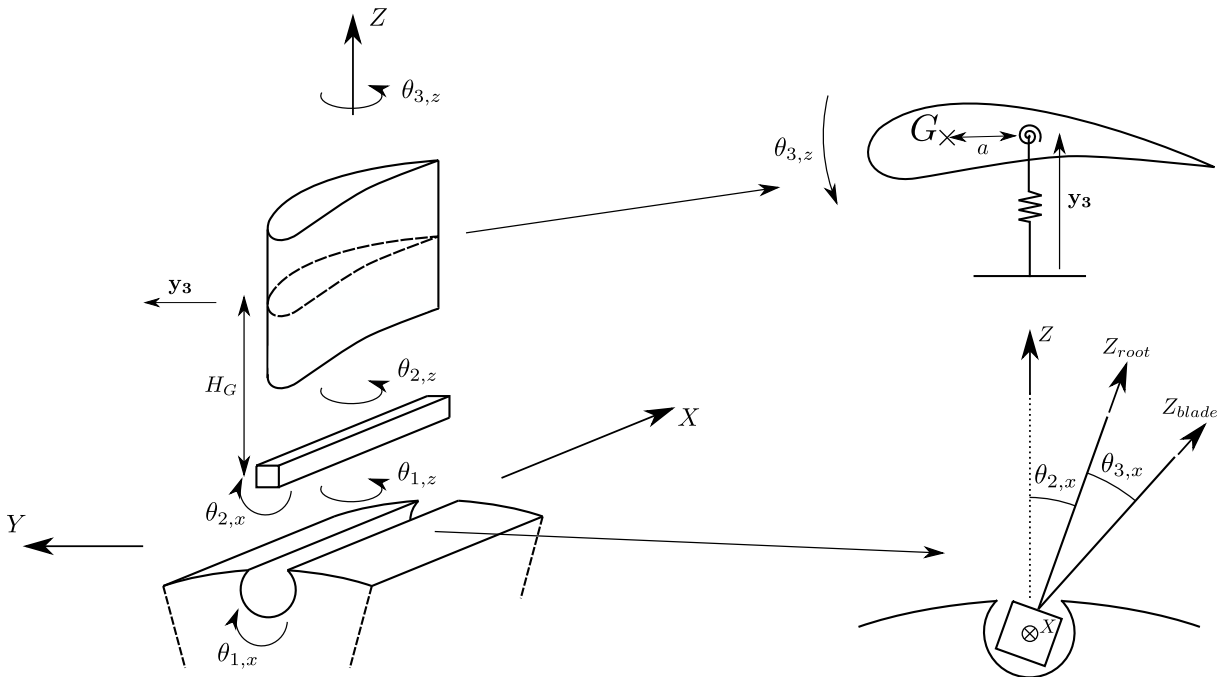


FIGURE IV.9 – Illustration du modèle phénoménologique d'aube en flexion/torsion avec du frottement entre le pied et le disque

Par ailleurs, on note  $H_G$  la hauteur de la section d'aube contenant son centre de gravité à partir du pied. On considère que la dimension caractéristique  $e$  d'épaisseur du pied est négligeable

devant la hauteur du centre de gravité :  $H_G \gg e$ . Les mouvements de l'aube dans le repère relatif sont des mouvements de flexion et de torsion. On suppose que deux raideurs distinctes (représentées par le ressort et la spirale) caractérisent chacun de ces deux mouvements. Enfin, nous considérons que le centre de gravité de l'aube n'est pas aligné avec son axe de torsion, mais qu'il est à une distance  $a$  de celui-ci. Ainsi, lorsque nous parlerons des modes linéaires de la structure en considérant une interface collée entre l'aube et le disque, nous n'aurons pas des modes purs de flexion et de torsion, mais des modes composés de ces deux mouvements purs de flexion et de torsion. Nous allons maintenant écrire les équations du mouvement caractérisant le modèle phénoménologique en utilisant le formalisme de Lagrange.

## 4.2 Mise en équation du modèle

Quelques hypothèses sur le mouvement du système doivent être effectuées avant d'en écrire les équations. Pour commencer, on considère que le disque est immobile dans le repère relatif. Cela revient à considérer que le disque est indéformable, ce que l'on peut supposer en raison de sa raideur plus importante que celles du pied et de l'aube. De plus, on considère que le pied ne peut bouger que selon un mouvement de rotation autour de l'axe  $X$  (liaison pivot avec le disque). Avec ces hypothèses, on a alors :  $\theta_{1,x} = \theta_{1,z} = \theta_{2,z} = 0$ . Le système est ainsi décrit par les trois variables restantes :  $\theta_{2,x}$ ,  $\theta_{3,x}$  et  $\theta_{3,z}$ . Par la suite, on note  $\mathbf{q}$  le vecteur des coordonnées généralisées du système  $\mathbf{q} = (\theta_{3,x}, \theta_{3,z}, \theta_{2,x})^T$ . Enfin, nous nous plaçons dans le cadre de l'hypothèse de petite perturbations (*i.e*  $\theta \ll 1$ ). En absence de fluide, les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathcal{Q} \quad (\text{IV.11})$$

où  $\mathcal{Q}$  est un moment généralisé non-conservatif dû au frottement en pied d'aube, et :

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} \quad (\text{IV.12})$$

Dans l'équation IV.12,  $\mathcal{T}$  est l'énergie cinétique du système et  $\mathcal{V}$  son énergie potentielle. On utilisera dorénavant les notations (1), (2) et (3) pour désigner respectivement le disque, le pied et l'aube. Ainsi, nous avons :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{2} J_{2x} \dot{\theta}_{2,x}^2 \\ \mathcal{T}_3 &= \frac{1}{2} \left( m_3 v_G^2 + \mathbf{\Omega}_3 \cdot \left( \bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{G},3} \cdot \mathbf{\Omega}_3 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

$J_{2x}$ ,  $m_3$ ,  $v_G$ ,  $\mathbf{\Omega}_3$  et  $\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{G},3}$  sont respectivement le moment d'inertie du pied d'aube autour de l'axe  $X$ , la masse de l'aube, la vitesse du centre de gravité  $G$  de l'aube dans le repère galiléen du laboratoire, le vecteur de vitesse angulaire et le tenseur de moment d'inertie de l'aube exprimé en son centre de gravité  $G$ .

Après calcul, on a :

$$v_G^2 = a^2 \dot{\theta}_{3,z}^2 - 2 a H_G \dot{\theta}_{3,z} \left( \dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x} \right) \cos(\theta_{3,z}) + H_G^2 \left( \dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x} \right)^2 + a^2 \left( \dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x} \right)^2 \sin^2(\theta_{3,z}) \quad (\text{IV.14})$$

Dans le cadre de l'hypothèse des petites perturbations ( $\theta \ll 1$ ), il paraît raisonnable de négliger le dernier terme de cette équation qui est d'ordre plus élevé :

$$v_G^2 = a^2 \dot{\theta}_{3,z}^2 - 2 a H_G \dot{\theta}_{3,z} (\dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x}) + H_G^2 (\dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x})^2 \quad (\text{IV.15})$$

Par ailleurs, en considérant que l'aube a des propriétés de symétrie autour de son centre de torsion sur la section contenant  $G$ , le tenseur de moment d'inertie de l'aube peut s'écrire :

$$\bar{\mathbf{I}}_{\mathbf{G},\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} J_{2x} & 0 & 0 \\ 0 & J_{3y} & 0 \\ 0 & 0 & J_{3z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.16})$$

La vitesse angulaire de l'aube s'écrit :

$$\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x} \\ 0 \\ \dot{\theta}_{3,z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

Finalement, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = & \frac{1}{2} J_{2x} \dot{\theta}_{2,x}^2 + \frac{1}{2} m_3 a^2 \dot{\theta}_{3,z}^2 - m_3 a H_G \dot{\theta}_{3,z} (\dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x})^2 + \frac{1}{2} m_3 H_G^2 (\dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x})^2 \\ & + \frac{1}{2} J_{3x} (\dot{\theta}_{2,x} + \dot{\theta}_{3,x})^2 + \frac{1}{2} J_{3z} \dot{\theta}_{3,z}^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

En ce qui concerne l'énergie potentielle du système, on considère des raideurs de rotation entre chaque élément. L'énergie potentielle prend alors la forme :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} C_{23z} \theta_{3,z}^2 + \frac{1}{2} C_{23x} \theta_{3,x}^2 + \frac{1}{2} C_{12x} \theta_{2,x}^2 \quad (\text{IV.19})$$

En utilisant (IV.18) et (IV.19) dans (IV.11), on aboutit à l'équation régissant la dynamique du système à trois degrés de liberté :

$$\mathbf{I} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (\text{IV.20})$$

avec  $\mathbf{I}$  la matrice d'inertie :

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} m_3 H_G^2 + J_{3x} & -a m_3 H_G & m_3 H_G^2 + J_{3x} \\ -a m_3 H_G & m_3 a^2 + J_{3z} & -a m_3 H_G \\ m_3 H_G^2 + J_{3x} & -a m_3 H_G & m_3 H_G^2 + J_{2x} + J_{3x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.21})$$

et  $\mathbf{C}$  la matrice de couple :

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{23x} & 0 & 0 \\ 0 & C_{23z} & 0 \\ 0 & 0 & C_{12x} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.22})$$

Remarque : la matrice d'inertie  $\mathbf{I}$  ne dépend que de grandeurs physiques telles que la position du



centre de gravité, la masse de l'aube ou encore les moments d'inertie selon les différents axes. Un modèle éléments finis d'aube quelconque peut être utilisé pour récupérer ces grandeurs et ainsi obtenir une représentation mécanique simplifiée à 3 degrés de liberté du système aube disque.

$\mathcal{Q}$  est un moment non-linéaire dû à la friction entre le pied d'aube et le disque. Dans la suite de ce travail sur le modèle phénoménologique, on considère qu'il peut s'écrire à l'aide d'une loi de Coulomb régularisée. Cette écriture sera pratique pour le calcul de la jacobienne qui est effectué dans la résolution du mode complexe non-linéaire à l'aide de la méthode de Newton-Raphson. La loi de Coulomb régularisée s'écrit :

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -e \mu N \tanh \left( p \frac{\dot{\theta}_{2,x}}{e \mu N} \right) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.23})$$

On retrouve une loi non-linéaire régulière comme celle utilisée en sous-section III.4.2.

### 4.3 Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec

#### Identification des paramètres du modèle

Pour calculer un MCNL sur le modèle mécanique qui vient d'être mis en équation, il convient de donner des valeurs aux différents paramètres des matrices d'inertie  $\mathbf{I}$  et de couple  $\mathbf{C}$ . On souhaite par ailleurs que la dynamique qui découle du choix de ces paramètres décrive qualitativement la dynamique d'un système réel aube disque. Les paramètres ont donc été choisis de sorte à ce qu'ils correspondent à un système aube disque réel.

Pour déterminer les paramètres de la matrice d'inertie  $\mathbf{I}$ , un modèle éléments finis d'aube typique de l'état de l'art a été utilisé de sorte à fournir des ordres de grandeurs cohérents pour l'ensemble des termes. Par ailleurs, on souhaite que les états asymptotiques du modèle phénoménologique soient cohérents de ceux du modèle éléments finis à 75% de régime nominal. S'il est difficile de juger cette cohérence sur la forme du mode, il est néanmoins possible de régler les raideurs de rotation de sorte à obtenir les mêmes fréquences de modes propres entre ces deux modèles.

Les raideurs de rotation  $C_{23x}$  et  $C_{23z}$  de la matrice  $\mathbf{C}$  ont d'abord été choisies pour que le mode de flexion à interfaces collées du modèle phénoménologique ait la même fréquence propre que le mode de flexion à 2 diamètres du modèle éléments finis à interfaces collées. La dernière raideur  $C_{12x}$  a été réglée pour que le mode de flexion du modèle phénoménologique sans frotteur non-linéaire soit cohérent avec le mode de flexion du modèle éléments finis sans force de frottement aux interfaces.

Bien que les effets centrifuges n'aient pas été pris en compte dans la mise en équation du modèle phénoménologique, le fait d'avoir calibré la matrice de couple sur un système soumis à ces effets permet de travailler sur un système précontraint équivalent.

Il ne reste plus qu'à définir les paramètres de la loi de frottement non-linéaire. La charge normale  $N$  a été choisie de manière à correspondre à l'accélération centrifuge appliquée au centre de gravité de l'aube pour un régime de rotation de 75% du régime nominal. La valeur du coefficient de frottement  $\mu$  a été imposée à 0.1, qui est une valeur classique pour un contact acier-acier.



Le Tableau IV.1 reprend les paramètres choisis pour le modèle phénoménologique.

Paramètres	Valeurs (SI)
$m_3$	4.3
$H_G$	0.27
$a/\text{corde}$	-0.15
$J_{3x}(\times 10^{-6})$	159114
$J_{3z}(\times 10^{-6})$	28120
$J_{2x}(\times 10^{-6})$	217
$C_{23x}$	119500
$C_{23z}$	40000
$C_{12x}$	110000
$e$	0.02
$\mu$	0.1
$N$	200000
$p$	123077
$N_h$	15

TABLEAU IV.1 – Valeurs numériques des paramètres du modèle phénoménologique

Cas asympt.	$f$	$\theta_{3,x}$	$\theta_{3,z}$	$\theta_{2,x}$
Collée	$f_{1F2D}$	-0.919	-0.395	0.
Glissante	$0.7 \times f_{1F2D}$	0.655	0.252	0.712

TABLEAU IV.2 – Fréquences propres adimensionnées et vecteurs propres des états asymptotiques collés et glissants du modèle phénoménologique après calibration pour le mode de flexion

Le Tableau IV.2 indique les caractéristiques des modes propres de flexion obtenus pour les cas asymptotiques collés et sans frotteur. En particulier, on observe que pour le cas où l'interface est collée, la déformée de flexion est composée d'un mouvement de flexion pure ( $\theta_{3,x}$ ) et d'un mouvement de torsion pure ( $\theta_{3,z}$ ), la torsion étant due au terme  $a$  non nul. De plus, les fréquences des modes à interfaces collées et glissantes, adimensionnées par soucis de confidentialité, correspondent exactement aux fréquences du modèle éléments finis dans les mêmes configurations.

La calibration du modèle phénoménologique est ainsi validée. Nous allons dans le prochain paragraphe utiliser ce modèle pour en déterminer la dynamique non-linéaire à l'aide des MCNL en absence de fluide.

### Résultats numériques

Un MCNL a été calculé pour le modèle phénoménologique avec les paramètres du Tableau IV.1. L'algorithme de Newton-Raphson a été employé avec une méthode de continuation par longueur d'arc en utilisant un prédicteur sécant. La phase à l'origine de  $\theta_{3,x}$  est nulle. La procédure AFT a été utilisée pour calculer les efforts non-linéaires dans le domaine harmonique. Le

calcul du MCNL a été initialisé à très faible amplitude, où il est attendu que l'interface aube disque soit complètement bloquée et où le mode est donc équivalent au cas asymptotique linéaire à interfaces collées (voir Tableau IV.2).

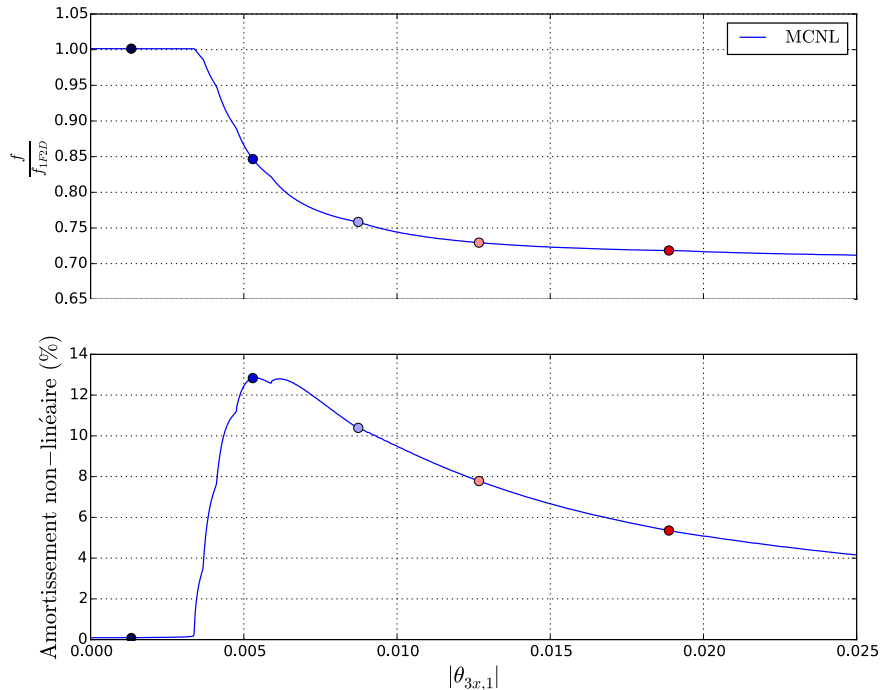


FIGURE IV.10 – Mode complexe non-linéaire du modèle phénoménologique dans le vide

Les résultats de calcul du MCNL sont présentés sur les Figures IV.10 et IV.11. Sur la première, on retrouve le comportement typique d'un système mécanique présentant des non-linéarités de frottement en ce qui concerne la fréquence libre et l'amortissement de MCNL par rapport à l'amplitude de vibration. Les tendances observées sont très similaires à celles déjà rencontrées sur le modèle académique en Figure III.14a.

On retrouve le fait que la dynamique du système non-linéaire évolue entre deux états asymptotiques, le premier correspondant au cas à faible amplitude avec frotteur bloqué, le second correspondant au cas à grande amplitude sans frotteur. En particulier, les fréquences de ses états asymptotiques (contenues dans le Tableau IV.2) sont bien visibles sur la courbe de fréquence libre.

La Figure IV.11 illustre les enveloppes des pseudo-périodes du MCNL dans l'espace d'état. Encore une fois, le comportement observé correspond à ce à quoi on s'attend : à faible amplitude, le frotteur est bloqué, d'où un état linéaire et une évolution de la dynamique du système sur une droite de l'espace d'état. En augmentant l'amplitude, la trajectoire dans l'espace d'état s'ouvre et une boucle d'hystérésis typique des non-linéarités de frottement apparaît.

Nous allons maintenant implémenter une représentation de l'aérodynamique sur le modèle phénoménologique selon la première stratégie de couplage décrite en sous-section IV.2.1.

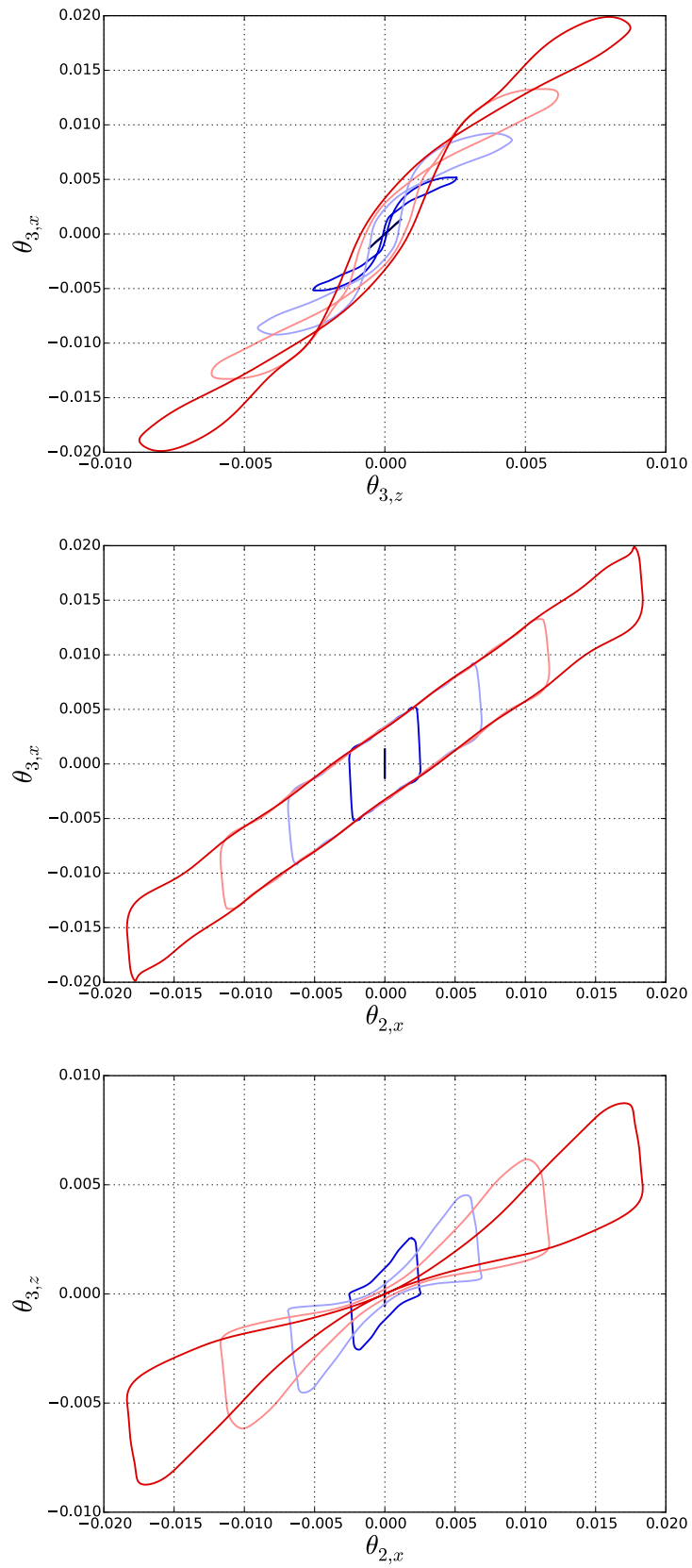


FIGURE IV.11 – Dynamique du système non-linéaire dans l'espace des configurations

#### 4.4 Implémentation du couplage faible sur le modèle phénoménologique

Dans cette sous-section, nous allons prendre le modèle phénoménologique et y implémenter une représentation de l'aérodynamique selon la stratégie de couplage faible décrite en sous-section IV.2.1.

On considère l'interface entre le pied d'aube et le disque comme collée. Cela revient à supprimer le degré de liberté propre au frottement, on a alors :

$$\mathbf{I}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{3,x} \\ \ddot{\theta}_{3,z} \end{pmatrix} + \mathbf{C}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \theta_{3,x} \\ \theta_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.24})$$

avec :

$$\mathbf{I}_{\text{collé}} = \begin{pmatrix} m_3 H_G^2 + J_{3x} & -a m_3 H_G \\ -a m_3 H_G & m_3 a^2 + J_{3z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.25})$$

et :

$$\mathbf{C}_{\text{collé}} = \begin{pmatrix} C_{23x} & 0 \\ 0 & C_{23z} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

On projette le système assemblé défini par l'équation IV.24 dans sa base modale associée  $\Phi$ , constituée d'un mode de flexion et d'un mode de torsion. On a :

$$\begin{pmatrix} \theta_{3,x} \\ \theta_{3,z} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} q_{\text{flexion}} \\ q_{\text{torsion}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{3,x} \\ \ddot{\theta}_{3,z} \end{pmatrix} + \mathbf{C}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \theta_{3,x} \\ \theta_{3,z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi^T \times} \mu \begin{pmatrix} \ddot{q}_{\text{flexion}} \\ \ddot{q}_{\text{torsion}} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} q_{\text{flexion}} \\ q_{\text{torsion}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.27})$$

où :

$$\mu = \Phi^T \mathbf{I}_{\text{collé}} \Phi = \begin{pmatrix} \mu_{\text{flexion}} & 0 \\ 0 & \mu_{\text{torsion}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

et :

$$\gamma = \Phi^T \mathbf{C}_{\text{collé}} \Phi = \begin{pmatrix} \gamma_{\text{flexion}} & 0 \\ 0 & \gamma_{\text{torsion}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

sont les matrices de masse et de raideur généralisées.

L'hypothèse des bases modales équivalentes permet de transférer directement les données modales issues d'un calcul aéroélastique sur modèle complet vers le modèle réduit. Ici, on suppose que l'on ne transfère que l'information de l'amortissement aérodynamique  $\xi_{aero}(\omega)$  pour alléger les écritures. On ne prend donc pas en compte la raideur aérodynamique pour ce cas d'application du couplage faible. Cet amortissement tient compte des effets acoustiques via sa dépendance à la pulsation  $\omega$  du mouvement de la structure. Les équations se réécrivent :

$$\mu \begin{pmatrix} \ddot{q}_{\text{flexion}} \\ \ddot{q}_{\text{torsion}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu_{\text{flexion}}\gamma_{\text{flexion}}}\xi_{aero}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_{\text{flexion}} \\ \dot{q}_{\text{torsion}} \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} q_{\text{flexion}} \\ q_{\text{torsion}} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.30})$$

On retourne alors dans la base physique du modèle réduit assemblé. On constate l'apparition du terme physique d'amortissement aérodynamique  $\mathbf{D}_{\text{collé}}$  par rapport à l'équation IV.24 :

$$\mathbf{I}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{3,x} \\ \ddot{\theta}_{3,z} \end{pmatrix} + \mathbf{D}_{\text{collé}}(\omega) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{3,x} \\ \dot{\theta}_{3,z} \end{pmatrix} + \mathbf{C}_{\text{collé}} \begin{pmatrix} \theta_{3,x} \\ \theta_{3,z} \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.31})$$

avec :

$$\mathbf{D}_{\text{collé}}(\omega) = \mathbf{\Phi}^{-T} \begin{pmatrix} 2\sqrt{\mu_{flexion}\gamma_{flexion}} \xi_{aero}(\omega) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{\Phi}^{-1} \quad (\text{IV.32})$$

Pour finir, on considère que les termes aérodynamiques n'impactent que l'aube et pas le pied. On étend ainsi le modèle aérodynamique au modèle non-linéaire complet :

$$\mathbf{I} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_{3,x} \\ \ddot{\theta}_{3,z} \\ \ddot{\theta}_{2,x} \end{pmatrix} + \mathbf{D}(\omega) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_{3,x} \\ \dot{\theta}_{3,z} \\ \dot{\theta}_{2,x} \end{pmatrix} + \mathbf{C} \begin{pmatrix} \theta_{3,x} \\ \theta_{3,z} \\ \theta_{2,x} \end{pmatrix} = \mathcal{Q} \quad (\text{IV.33})$$

avec :

$$\mathbf{D}(\omega) = \left( \begin{array}{c|c} \mathbf{D}_{\text{collé}}(\omega) & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \quad (\text{IV.34})$$

Dans la prochaine sous-section, un MCNL va être calculé sur le modèle phénoménologique représenté par l'équation IV.33. L'objectif est de pouvoir prédire un cycle limite à l'aide de cette méthode de calcul.

#### 4.5 Résultats numériques

Pour calculer le MCNL, il reste à définir une fonction permettant de décrire l'évolution de l'amortissement aérodynamique en fonction de la pulsation du mouvement. Dans notre cas d'application, les résultats obtenus dans la sous-section II.6.4 vont être exploités. En particulier, nous allons définir une loi d'évolution de l'amortissement aérodynamique en fonction de la fréquence de vibration en cohérence avec les résultats présentés en Figure II.27.

D'après la Figure II.27, on remarque toutefois que l'on n'est jamais instable car le point de fonctionnement étudié n'est pas suffisamment vanné. Dans une perspective de démonstration de la méthode, on rend le système artificiellement instable en décalant les résultats de la Figure II.27 vers des valeurs négatives pour des fréquences avoisinant celle du mode 1F2D. Les points de mesure sont interpolés en utilisant une spline dérivable. La Figure IV.9 illustre la courbe de sensibilité de l'amortissement à la fréquence libre de mouvement ainsi obtenue. En particulier, les valeurs en bleu sont celles fournies par les calculs *elsA*, tandis que la courbe rouge pleine est la spline créée à partir de ces valeurs.

Les résultats de calcul de MCNL en présence d'aérodynamique sont affichés en Figure IV.13 avec ceux de la structure seule résolue dans la sous-section IV.4.3. On y observe les courbes maintenant classiques d'évolution de la fréquence libre et de l'amortissement du MCNL. De plus, l'évolution de l'amortissement aérodynamique au cours du calcul est également tracée.

L'amortissement aérodynamique évolue selon la loi d'interpolation fournie en Figure IV.12 : en

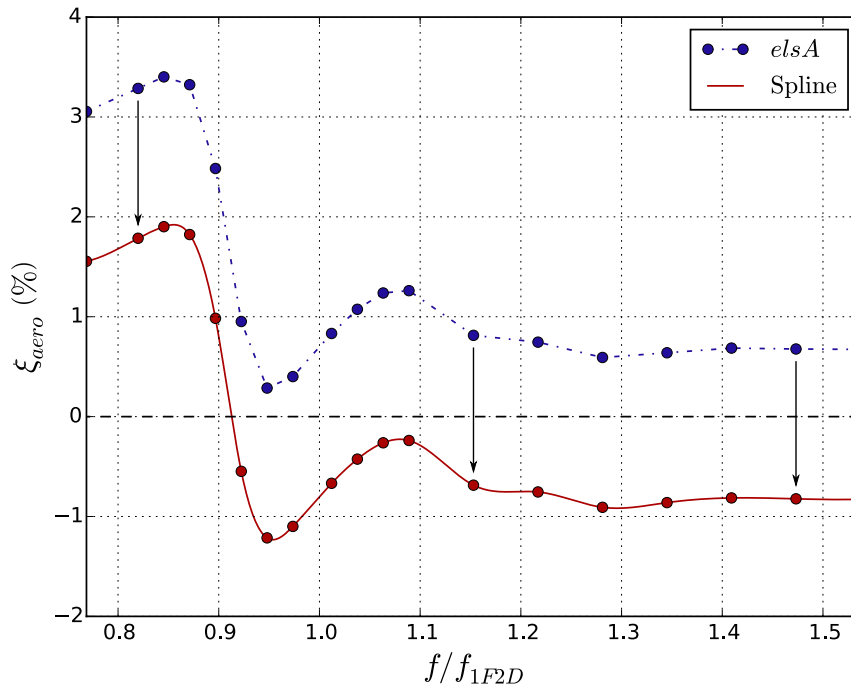


FIGURE IV.12 – Courbe de dépendance de l’amortissement aérodynamique à la fréquence pour l’application du couplage faible sur le modèle phénoménologique

raison des non-linéarités, un décalage fréquentiel s’opère vers des valeurs inférieures, d’où une évolution de  $\xi_{aero}$  dans le sens des fréquences décroissantes pour un accroissement de l’amplitude.

La fréquence de mouvement ne semble pas beaucoup perturbée par la présence du fluide. Cela s’explique par l’absence de raideur aérodynamique dans cette application de la stratégie de couplage faible. Bien que l’amortissement aérodynamique ait aussi un rôle sur la fréquence libre de mouvement, celui-ci est toutefois limité.

Les effets du fluide sur l’amortissement du MCNL sont en revanche bien plus marqués. Premièrement, on constate qu’à faible amplitude de vibration, c’est-à-dire dans des conditions d’interface aube disque collée, l’amortissement du MCNL est égal à l’amortissement aérodynamique fourni à la fréquence  $f_{1F2D}$  en Figure IV.12. On part donc d’un système instable dans le cas asymptotique avec interface collée, ce qui signifie que l’on se place dans le cas de figure où on vient tout juste de franchir les limites de la poche de flottement prédite dans un cadre de mécanique linéaire. Dès lors, l’amplitude de vibration de l’aube ne peut qu’augmenter. Cependant, avec l’augmentation de l’amplitude de vibration apparaissent les effets non-linéaires du frottement : l’énergie est dissipée par le frottement en pied d’aube, menant à une augmentation de l’amortissement du MCNL. Celui-ci devient positif, ce qui signifie que l’on passe un stade où la dissipation en pied d’aube contrebalance parfaitement l’énergie fournie par le fluide à l’aube : on aboutit à un cycle limite. Celui-ci est reconstruit en temporel à partir des données harmoniques calculées et représenté en Figure IV.14. On remarque que le degré de liberté sur lequel s’applique le frottement sec ne forme pas une ellipse parfaite, témoignant de la présence des non-linéarités dans le système.

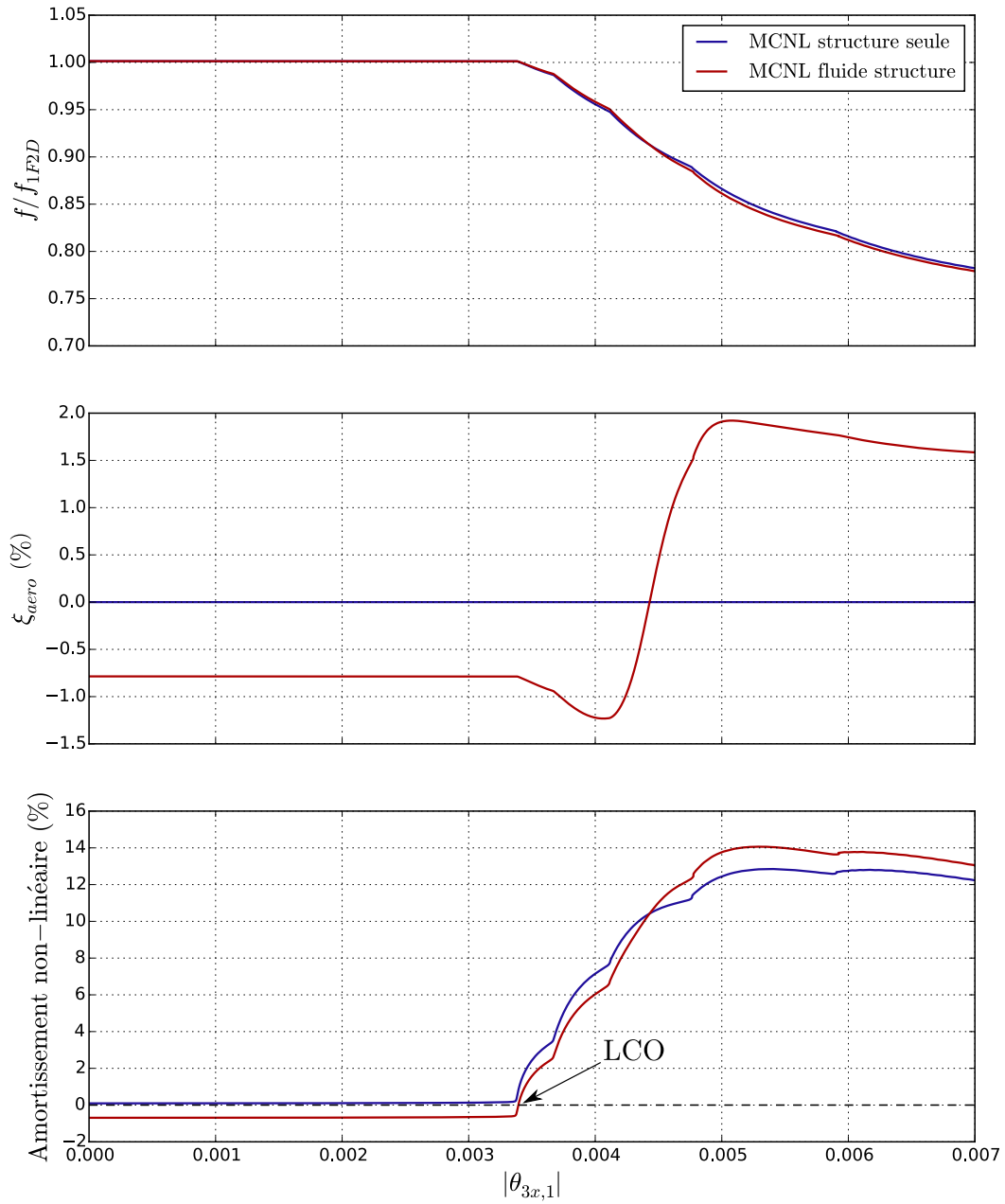


FIGURE IV.13 – Mode complexe non-linéaire calculé sur le modèle phénoménologique avec la stratégie 1

En observant la courbe d'amortissement aérodynamique en Figure IV.13, on remarque une forte évolution de cette grandeur au delà de l'amplitude de cycle limite, tandis qu'elle reste constante pour des valeurs inférieures. Cette évolution est régie par la loi de dépendance à la fréquence de mouvement mentionnée précédemment. Il semble donc que l'effet acoustique modélisé grâce à cette loi ne joue pas de rôle important sur la prédiction du cycle limite. Cela s'explique par le fait que nous venons juste de franchir les limites de stabilité dans le cas considéré, de sorte que l'amortissement aérodynamique à faible amplitude (cas asymptotique linéaire à interface collée) est proche de 0. Dès la manifestation des non-linéarités dans le système, l'énergie dissipée par frottement en fonction de l'amplitude de vibration augmente rapidement, contrebalançant l'apport d'énergie par le fluide. Le rôle de l'acoustique sur la présence du cycle limite aurait été plus marqué pour un point de fonctionnement plus instable à l'intérieur de la poche de flottement.

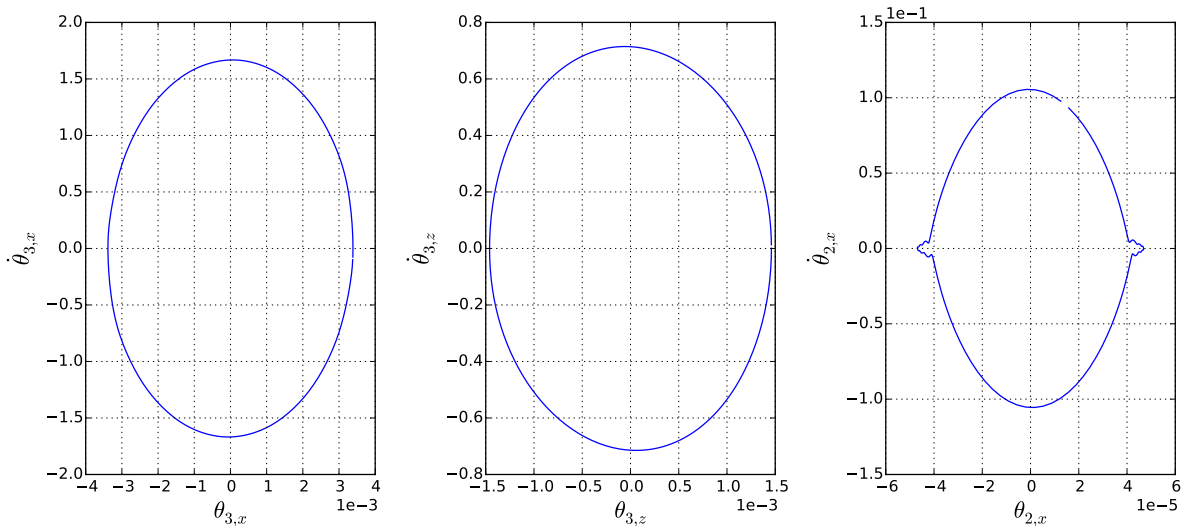


FIGURE IV.14 – Reconstruction de l'évolution temporelle du cycle limite calculé avec le modèle phénoménologique selon la stratégie de couplage faible

La stratégie de couplage faible a été appliquée avec succès sur le modèle phénoménologique et a permis de montrer la présence d'un cycle limite dans un contexte où des effets d'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air sont attendus. Bien que l'acoustique n'ait pas eu beaucoup d'effet sur la présence du cycle limite, l'approche permettant de prendre en compte la sensibilité des termes aérodynamiques à la fréquence est en place. On rappelle que cette approche est générale et que son application ne nécessite pas la présence d'ondes acoustiques. La prise en compte des termes aérodynamiques à la fréquence de vibration permet d'obtenir un niveau de couplage plus fort entre le fluide et la structure. Dans le chapitre qui suit, les stratégies de couplage vues au cours de ce chapitre seront appliquées sur un modèle industriel afin d'en prédire les cycles limites.



## 5 Bilan

Nous venons de décrire dans ce chapitre les approches qui ont été envisagées pour prendre en compte les non-linéarités de frottement dans l'analyse de stabilité aéroélastique. En particulier, une approche de modélisation de la structure par mode complexe non-linéaire a été conservée pour sa capacité à prédire des cycles limites. Par la suite, deux stratégies de couplage ont été proposées pour intégrer une représentation du fluide dans la résolution de la dynamique non-linéaire de la structure. La première approche repose sur l'idée que la dynamique non-linéaire de l'aube est proche de son état linéaire (par exemple, un MCNL de flexion ressemble à un mode linéaire de flexion). Il est alors possible de transférer les termes aérodynamiques issus d'un calcul aéroélastique en structure linéaire vers le solveur de MCNL. La deuxième approche est une approche de couplage fort où le fluide et la structure sont résolus de manière itérative. Sur le principe, le couplage est ainsi complètement non-linéaire et est plus général que dans la première stratégie. Dans le prochain chapitre, nous allons appliquer ces stratégies de couplage sur une configuration industrielle typique de l'état de l'art et comparer les résultats obtenus aux données expérimentales.

# Application industrielle du couplage fluide structure avec prise en compte des non-linéarités en pied d'aube

Ce chapitre s'intéresse à l'application des méthodes de couplage proposées au chapitre précédent sur une configuration industrielle fournie par Safran Aircraft Engines. Le modèle va tout d'abord être présenté avec un certain nombre d'hypothèses pour permettre une résolution plus rapide de la structure non-linéaire. Chacune des stratégies de couplage sera ensuite appliquée, et les résultats obtenus seront comparés aux mesures expérimentales disponibles. Pour finir, une comparaison des méthodes sera proposée avant de conclure sur les travaux de thèse.

## Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Présentation du modèle industriel pour les calculs de dynamique non-linéaire</b>	<b>187</b>
<b>2</b>	<b>Paramètres de simulation aéroélastique</b>	<b>190</b>
<b>3</b>	<b>Considérations numériques pour la résolution de la dynamique non-linéaire sur configuration industrielle</b>	<b>190</b>
3.1	Hypothèse d'onde tournante dans un cadre non-linéaire	190
3.2	Estimation des efforts non-linéaires par méthode DLFT	191
<b>4</b>	<b>Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec</b>	<b>191</b>
<b>5</b>	<b>Application du couplage faible sur le modèle industriel</b>	<b>195</b>
5.1	Influence de l'acoustique sur le calcul de MCNL dans la procédure de couplage faible	195
5.2	Influence du coefficient de frottement sur le calcul du cycle limite	202
5.3	Influence de l'amortissement modal sur le calcul du cycle limite	204
5.4	Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales	204
<b>6</b>	<b>Application du couplage fort sur le modèle industriel</b>	<b>208</b>
6.1	Considérations numériques pour l'application de la procédure de couplage fort	208
6.2	Influence de la configuration étudiée sur le calcul du cycle limite	208
6.3	Convergence de l'algorithme de couplage fort	211
6.4	Influence de la dynamique non-linéaire de la structure sur l'évaluation des efforts aérodynamiques pour le couplage fort	216

6.5	Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales	221
7	Synthèse et comparaison entre les deux approches de couplage . . . . .	222
8	Bilan . . . . .	225

---

## 1 Présentation du modèle industriel pour les calculs de dynamique non-linéaire

Le modèle mécanique utilisé pour réaliser les calculs de MCNL est identique à celui employé pour les calculs aéroélastiques présentés en sous-section II.6.1. Il s'agit d'un secteur aube disque de soufflante représentatif de ce qui est utilisé dans les turboréacteurs actuels. La géométrie de ce modèle mécanique est dite à froid, dans le sens où sa forme est celle observée en absence de chargement.

Un modèle éléments finis du secteur aube disque a été réalisé, illustré en Figure V.1. Le maillage est coïncident au niveau des interfaces de contact aube disque afin de pouvoir appliquer ultérieurement les méthodes de condensation vues en sous-section III.3.5. En considérant une hypothèse de symétrie cyclique de la roue aubagée, un calcul statique a été réalisé avec *SAMCEF* afin de récupérer les matrices de masse et de raideur du système aube disque. Ce calcul statique suppose un chargement statique du système aube disque : un chargement centrifuge correspondant à un régime de 75% du régime nominal a été appliqué, ainsi que des efforts de pression statique correspondants au fonctionnement à ce régime. Pour finir, les lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb ont été appliquées dans le calcul statique aux interfaces de contact entre l'aube et le disque.

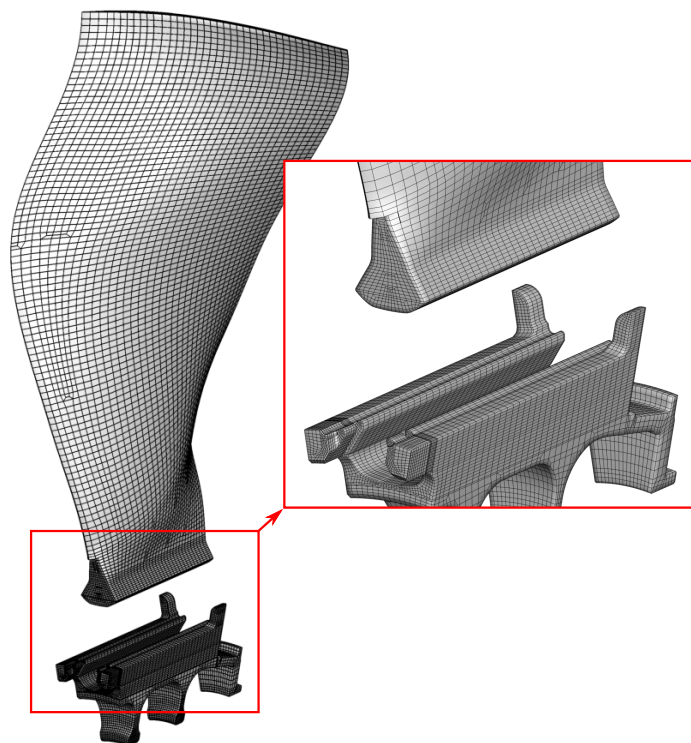


FIGURE V.1 – Modèle industriel utilisé pour les études dynamiques non-linéaires

Une fois les matrices de masse et de raideur du système préchargé obtenues, plusieurs modèles réduits de Craig-Bampton ont été générés pour le système aube disque. Ces modèles diffèrent uniquement sur le nombre et la répartition des nœuds physiques retenus sur les portées et sur l'extrados de l'aube. On souhaite de cette manière déterminer si une configuration est optimale

pour obtenir le meilleur compromis entre temps de calcul et restitution de la physique qui nous intéresse. Pour rappel, les nœuds retenus en pied d'aube vont servir à appliquer les efforts non-linéaires de frottement, tandis que ceux retenus sur l'extrados de l'aube serviront dans le cadre de la procédure de couplage fort pour récupérer les déplacements non-linéaires et appliquer les efforts aérodynamiques.

La Figure V.2 illustre les deux configurations de nœuds de portées qui ont été choisies pour la création des super-éléments de Craig-Bampton. La Figure V.3 illustre quant à elle les nœuds d'extrados retenus pour l'application de la procédure de couplage fort. Nous aborderons cette application plus en détails dans la section V.6.

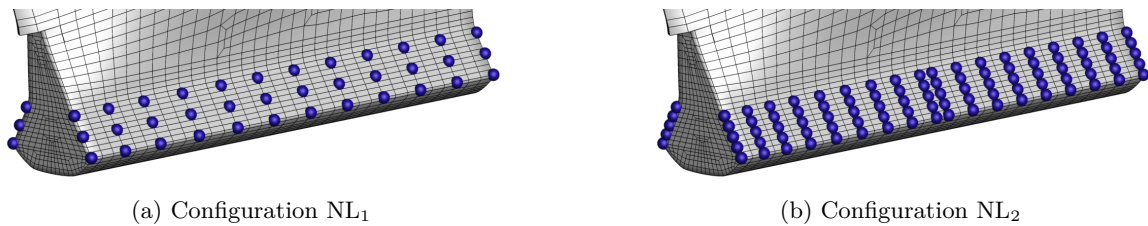


FIGURE V.2 – Nœuds physiques retenus sur les interfaces de contact pour le modèle réduit de Craig-Bampton

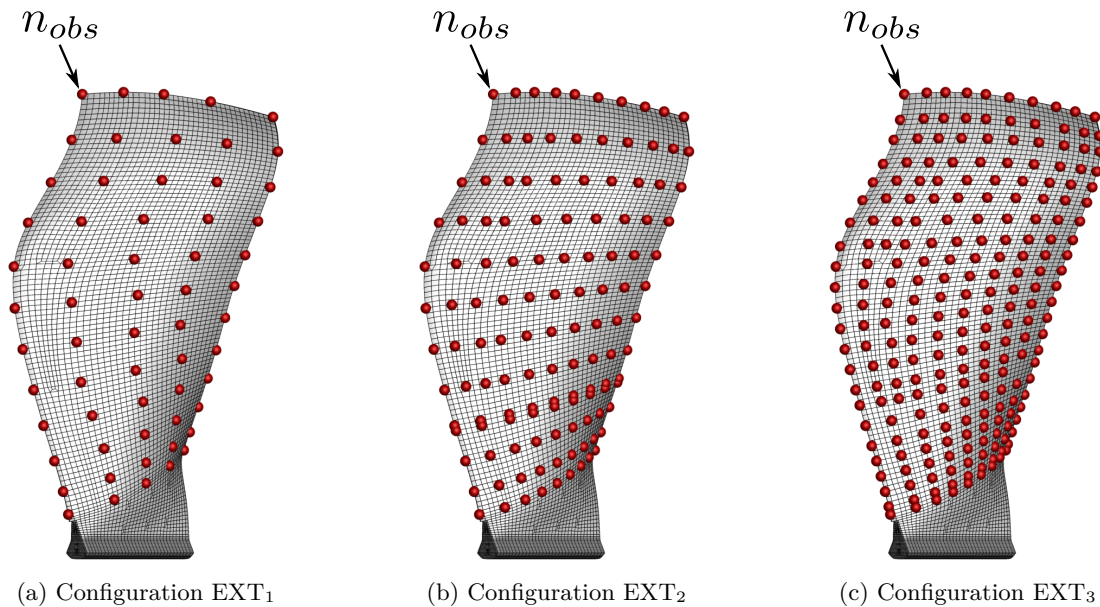


FIGURE V.3 – Nœuds physiques retenus sur l'aube pour le modèle réduit de Craig-Bampton

Le nombre de nœuds physiques conservés pour chacune des configurations présentées en Figures V.2 et V.3 est inscrit dans le Tableau V.1. Par ailleurs, quelle que soit la configuration étudiée, un nœud physique supplémentaire a été ajouté en guise de nœud de contrôle. Celui-ci est utilisé pour appliquer les conditions d'amplitude et de phase propres à la méthode de continuation séquentielle (voir sous-section IV.3.5). On considère que l'on conserve 30 modes normaux à interface fixe pour l'aube et 15 pour le disque.

	Aube	Disque
NL <sub>1</sub>	72	72
NL <sub>2</sub>	180	180
EXT <sub>1</sub>	60	0
EXT <sub>2</sub>	125	0
EXT <sub>3</sub>	223	0
Nœud de contrôle	1	0
Modes internes	30	15

TABLEAU V.1 – Nombre de nœuds retenus sur les configurations de Craig-Bampton

	Configuration	Aube	Disque
Modèle CB	NL <sub>1</sub> – EXT <sub>2</sub>	624	216
	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>1</sub>	753	555
	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>2</sub>	948	555
	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>3</sub>	1242	555
Modèle EF	Complet	90858	111960

TABLEAU V.2 – Nombre de degrés de liberté des modèles de Craig-Bampton (CB) et du modèle éléments finis (EF)

Au total, cinq modèles réduits ont été générés à partir des répartitions de nœuds physiques retenus. Le nombre de degrés de liberté de ces modèles est affiché dans le Tableau V.2, ainsi que le nombre de degrés de liberté du modèle éléments finis complet utilisé pour réaliser les réductions. Une diminution importante de ce nombre est observée, de l'ordre d'un facteur 100 pour l'aube et 1000 pour le disque.

D'un point de vue fréquentiel, la mise en place de la réduction induit une erreur sur les fréquences propres des modes par rapport à celles du modèle complet. Le Tableau V.3 indique les erreurs fréquentielles réalisées sur les 5 premiers modes de chaque configuration de modèle réduit par rapport au modèle complet. Les erreurs fréquentielles affichées sont celles après assemblage des sous-structures, c'est à dire en considérant que les nœuds appairés de chaque

Modes	NL <sub>1</sub> – EXT <sub>2</sub>	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>1</sub>	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>2</sub>	NL <sub>2</sub> – EXT <sub>3</sub>
1	-3.02%	-0.31%	-0.31%	-0.31%
2	-1.17%	1.65%	1.66%	1.65%
3	-2.93%	-0.79%	-0.79%	-0.79%
4	1.58%	5.81%	5.87%	5.84%
5	-1.23%	0.63%	0.65%	0.64%

TABLEAU V.3 – Erreurs relatives sur les fréquences propres des 5 premiers modes des modèles de Craig-Bampton par rapport au modèle complet après assemblage du système aube disque

sous-structure sont les mêmes. Le premier mode, qui est celui qui nous intéresse, affiche une erreur plus faible pour les configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  (de l'ordre de 0.3%) que pour la configuration  $NL_1 - EXT_2$  (de l'ordre de 3%). L'acoustique sera donc représentée de manière plus fidèle sur ce mode pour les configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ , compte tenu de l'importance de la fréquence sur la propagation des ondes dans l'entrée d'air.

Nous allons dans la prochaine section détailler les paramètres utilisés pour les calculs aéroélastiques dans le cadre des stratégies de couplage avec la structure non-linéaire.

## 2 Paramètres de simulation aéroélastique

La configuration employée pour les calculs aéroélastiques est la même que celle en section II.6.1, illustrée en Figures II.14 et II.15. Plus précisément, le maillage ainsi que les conditions limites sont les mêmes. On conserve le modèle de turbulence  $k - l$  de Smith et le schéma spatial de Roe avec correcteur de van Albada. L'algorithme temporel est le DTS, avec 384 itérations par période fondamentale de vibration et 40 sous-itérations duales. Le mode d'intérêt est le mode 1F2D.

Pour les calculs aéroélastiques réalisés selon la procédure de couplage faible, un mouvement harmonique est prescrit à la structure avec la déformée du mode propre linéaire étudié. Les modes propres de la structure sont obtenus avec *SAMCEF* d'après une analyse modale du système préchargé aube disque à 75% de régime nominal. La projection des efforts aérodynamiques générés par ce mode sur lui-même permet d'obtenir les termes de raideur et d'amortissement aérodynamique à transférer vers la structure non-linéaire assemblée.

On rappelle que les calculs aéroélastiques réalisés selon la procédure de couplage fort impliquent l'ensemble des harmoniques associés à la déformée de l'aube. Les mouvements imposés sont périodiques, conformément à la remarque faite en section IV.3.1. Une analyse harmonique des efforts aérodynamiques est faite sur la dernière période de calcul en vue du transfert vers la structure.

## 3 Considérations numériques pour la résolution de la dynamique non-linéaire sur configuration industrielle

### 3.1 Hypothèse d'onde tournante dans un cadre non-linéaire

Il a été montré dans Petrov [119] qu'il était possible de réaliser un calcul de réponse sur secteur seul sous l'hypothèse que les propriétés linéaires et non-linéaires de la soufflante soient à symétrie cyclique. On peut alors exprimer le mouvement non-linéaire comme une résultante de mouvements à diamètres.

Dans le cadre de l'interaction fluide structure, le comportement du fluide peut consécutivement être considéré comme fonction de la déformation de la structure et comme une source d'excitation multi-harmonique de cette dernière. Dès lors, les conditions d'excitabilité d'un motif à diamètre doivent être vérifiées. On retrouve ainsi les conditions de cohérence spatio-temporelles décrites en sous-section II.4.4.

### 3.2 Estimation des efforts non-linéaires par méthode DLFT

Pour le calcul de MCNL sur configuration industrielle, on souhaite s'affranchir d'hypothèses sur la régularité des efforts non-linéaires au niveau des interfaces de contact. Ainsi, la méthode d'évaluation des efforts non-linéaires par Dynamic Lagrangian Frequency Time (DLFT) [105, 106] a été privilégiée. Cette méthode, dont le principe est rappelé en Annexe A, permet d'évaluer les efforts de frottement selon la loi non-linéaire discontinue de Coulomb, ainsi que les éventuelles pertes de contact.

## 4 Calcul de mode complexe non-linéaire sur la structure à sec

Le modèle industriel précédemment décrit a été utilisé pour calculer des MCNL en absence de représentation du fluide dans un premier temps. Nous allons présenter dans cette section les résultats obtenus dans ce cadre. L'hypothèse d'onde tournante est exploitée, permettant une étude sur secteur seul. On considère qu'un amortissement modal  $\xi_s$  de 0.05% est présent sur tous les modes propres linéaires des sous-structures séparées. Le système non-linéaire est réduit sur les degrés de liberté relatifs non-linéaires, comme décrit en sous-section III.3.5. On considère dans cette section un coefficient de frottement  $\mu = 0.1$ . Une continuation séquentielle est appliquée sur le nœud de contrôle, tandis que le nœud  $n_{obs}$  (voir Figure V.3) est utilisé pour tracer les courbes de MCNL. La valeur du coefficient de pénalité  $\epsilon$  de la méthode DLFT (voir Annexe A) est égale au rayon spectral de la matrice de rigidité multi-harmonique afin d'obtenir le meilleur compromis précision temps de calcul du MCNL [33]. Les résultats sont présentés en termes d'amplitude adimensionnée de  $n_{obs}$ , où le facteur d'adimensionnement est égal à l'amplitude maximale de LCO mesurée expérimentalement pour l'iso-vitesse étudiée. Les valeurs de fréquence libre sont adimensionnées par la fréquence du mode propre de la structure à sec.

### Influence du nombre d'harmoniques retenues

La Figure V.4 illustre l'influence du nombre d'harmoniques retenues sur le calcul du MCNL en considérant 48 instants dans la période. On constate qu'à partir de 3 harmoniques retenues, la dynamique globale du MCNL est bien convergée. Une seule harmonique ne permet pas de capturer correctement l'effet de saturation des efforts de Coulomb, qui est mieux représenté à partir de 3 harmoniques. En particulier, on observe une forte déviation de la dynamique globale du MCNL calculé en ne considérant qu'une seule harmonique par rapport à ceux calculés avec des valeurs de  $N_h$  supérieures ou égales à 3. Dans notre application où l'amortissement du MCNL est la grandeur qui nous intéresse le plus, il est naturel de considérer au moins 3 harmoniques dans les prochains calculs de MCNL. Bien qu'un nombre important d'harmoniques puisse permettre de mieux représenter les efforts non-linéaires, le compromis entre précision des résultats et temps de calcul (non proportionnel au nombre d'harmoniques) nous amène à conserver dans la suite des travaux 3 harmoniques dans les calculs non-linéaires.

### Influence du nombre d'instantanés retenus dans la période

La Figure V.5 illustre l'influence du nombre d'instantanés retenus dans l'évaluation des efforts non-linéaires par DLFT en comptant à chaque fois 3 harmoniques du déplacement. L'application des lois temporelles de contact unilatérales et des efforts de Coulomb engendre l'apparition



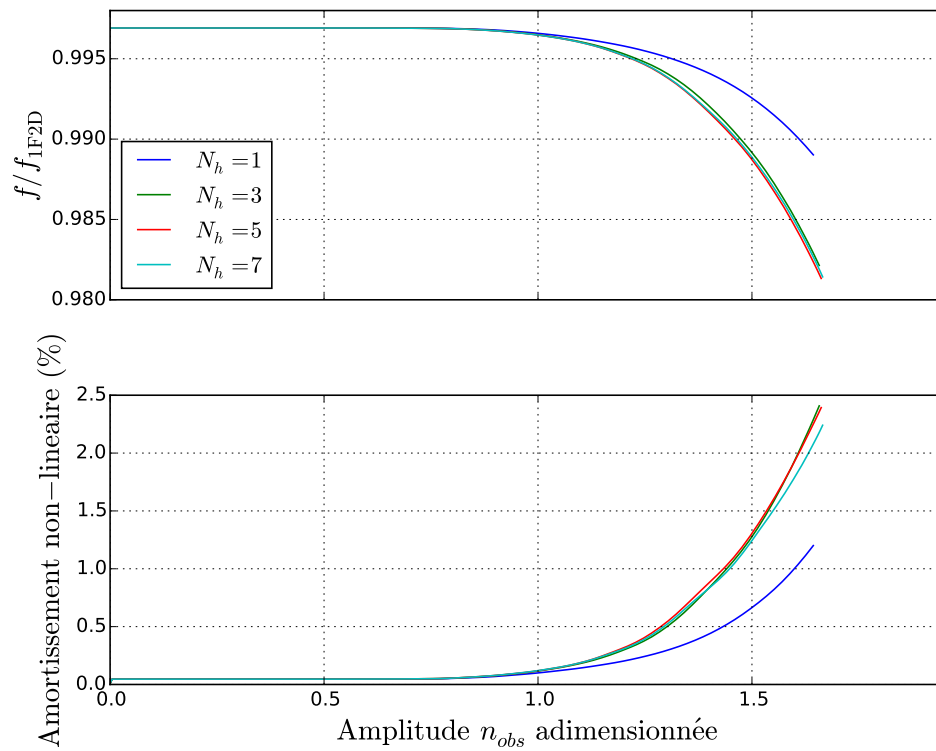


FIGURE V.4 – Influence du nombre d'harmoniques retenues dans le calcul de MCNL

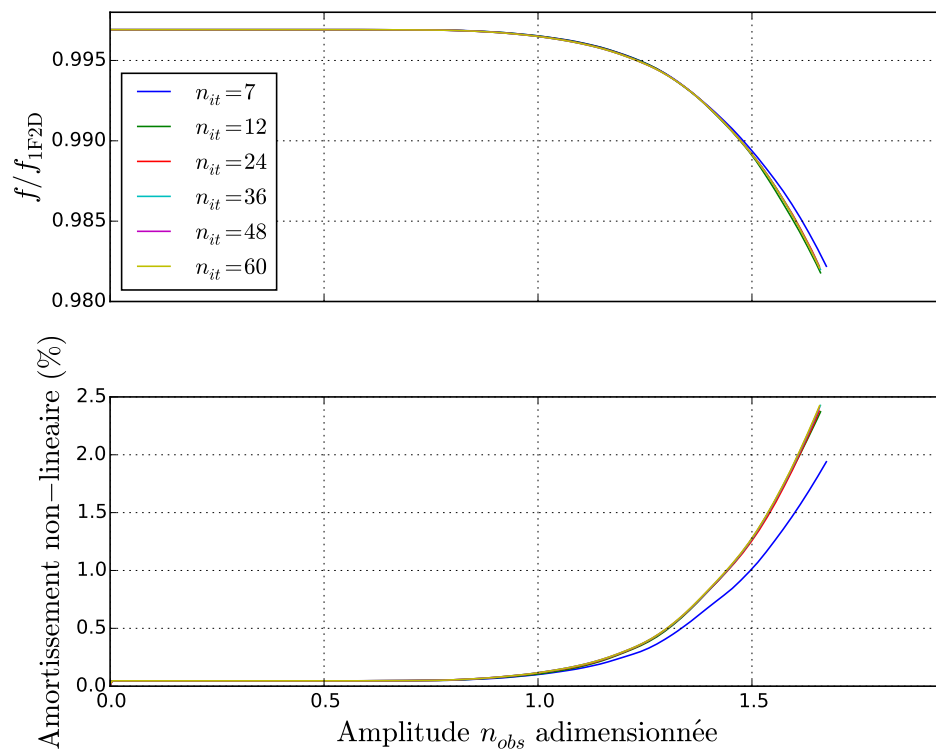


FIGURE V.5 – Influence du nombre d'instantés retenus dans la période d'évaluation des efforts non-linéaires

d'harmoniques d'ordre supérieur dans les efforts non-linéaires, si bien que l'application stricte des conditions de Nyquist-Shannon (au moins 7 instants nécessaires pour 3 harmoniques retenues) n'est plus suffisante pour avoir une bonne représentation des non-linéarités.

Ainsi, il est intéressant de retenir un nombre d'instants temporels suffisamment élevé afin de bien faire converger les harmoniques du déplacement. On remarque d'après les courbes de la Figure V.5 que 12 instants semblent suffire pour avoir une bonne représentation de l'amortissement de MCNL. Toutefois, il a été choisi de conserver 48 instants dans l'ensemble des travaux afin de pouvoir évaluer plus précisément l'énergie dissipée en pied d'aube sur les futurs cycles limites. Aucun impact notable n'a été mesuré sur les temps de calculs.

### Influence du nombre de nœuds physiques retenus

La Figure V.6 illustre les MCNL calculés sur les différentes configurations décrites en section V.1. En particulier, les configurations conservées sont celles rapportées dans le tableau V.2. L'une d'entre elles semble se distinguer des autres : il s'agit de celle où le nombre de points retenus en pied d'aube correspond à la configuration  $NL_1$ .

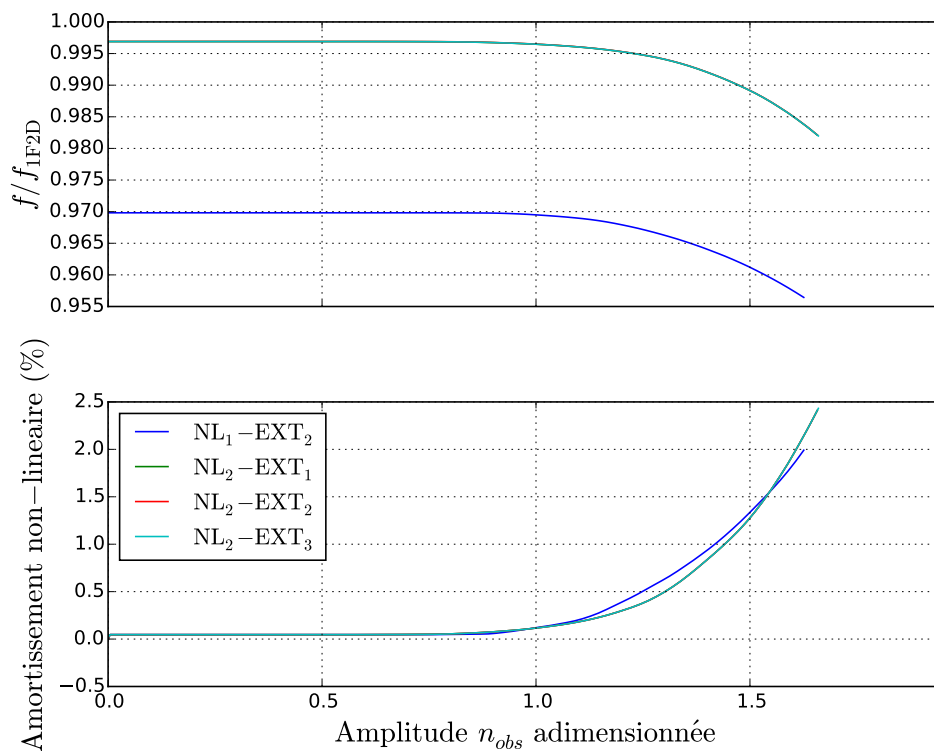


FIGURE V.6 – Influence du nombre de nœuds physiques retenus sur le calcul de MCNL

Pour cette dernière, les portées sont moins finement discrétisées, ce qui autorise une certaine flexibilité des portées entre chacun des nœuds retenus. Une conséquence directe de cet assouplissement est une diminution de la fréquence libre de la configuration  $NL_1$  pour le cas asymptotique linéaire à faible amplitude par rapport à celles des autres configurations  $NL_2$ . Cette tendance est visible sur la courbe de fréquence libre du MCNL en Figure V.6. La courbe fréquentielle de

la configuration  $NL_1$  y évolue sur des valeurs plus basses que les courbes en configuration  $NL_2$  du fait de la plus grande souplesse du système aube disque au niveau des portées.

En ce qui concerne l'amortissement de MCNL, les tendances observées sont relativement similaires entre chacune des courbes, bien que la configuration  $NL_1$  semble encore une fois se démarquer. Les nœuds de portée de cette configuration étant en nombre moins importants, ils sont plus chargés que ceux en configuration  $NL_2$ . Les efforts non-linéaires y sont condensés, ce qui a un impact immédiat sur le calcul de l'amortissement de MCNL. En particulier, des problèmes de convergence de l'algorithme de résolution peuvent être rencontrés dans la configuration  $NL_1$ , où des non-linéarités plus importantes apparaissent que dans la configuration  $NL_2$ .

Du point de vue de la dynamique globale des MCNL, il semble que toutes les configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  se superposent. Ainsi, le nombre de nœuds physiques retenus sur la peau de l'aube n'influe pas sur le calcul de MCNL pour une structure dans le vide. Ce résultat était attendu, dans la mesure où ces nœuds n'interviennent pas dans l'évaluation des effets non-linéaires qui sont appliqués uniquement en pied d'aube. On peut cependant s'attendre à un impact du nombre de nœuds physique d'aube dans le cadre de la procédure de couplage fluide structure.

D'un point de vue local, il est plus intéressant d'avoir un nombre important de nœuds non-linéaires afin d'avoir une estimation plus précise des efforts non-linéaires et des déplacements relatifs aux interfaces de contact. La Figure V.7 illustre ce constat pour une amplitude du nœud d'observation de 1.3. L'amplitude des déplacements relatifs aux portées sur une pseudo-période  $y$  est représentée sur une échelle de couleur, où les zones rouges sont les zones de glissement les plus importantes.

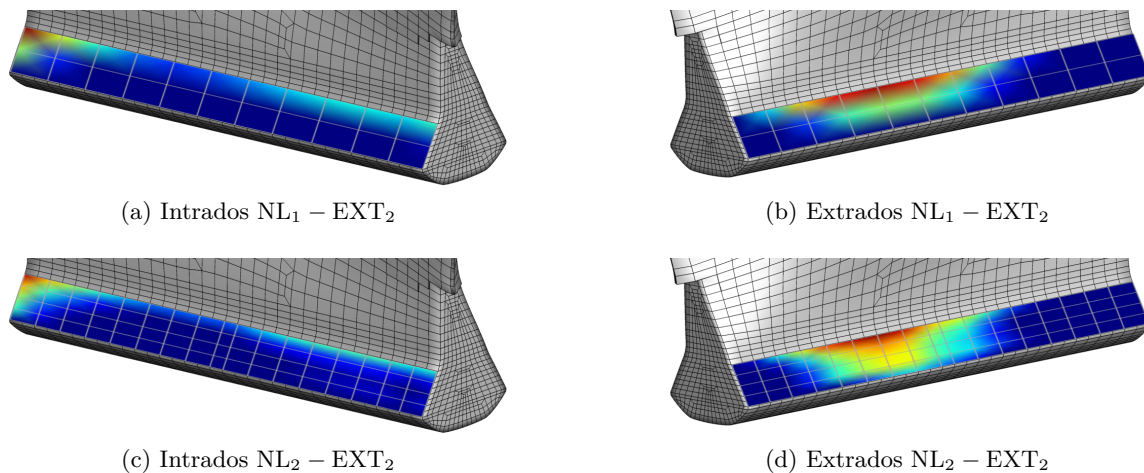


FIGURE V.7 – Amplitude de glissement aux portées aube disque dans les configurations  $NL_1$  et  $NL_2$  pour une amplitude adimensionnée de  $n_{obs}$  de 1.3

Quelle que soit la configuration étudiée, on observe que le glissement n'est pas uniforme sur les portées. Les glissements ne sont de plus pas les mêmes selon que l'on considère la portée intrados ou extrados, ce qui s'explique par la répartition massique du système qui ne présente pas de propriétés de symétrie particulière. De telles propriétés auraient en effet pu permettre d'observer des déplacements identiques sur les deux portées, comme montré sur une configuration académique

dans le mémoire de thèse de Lemoine [91]. Dans notre cas, la portée sur l'extrados de l'aube semble être celle où les effets non-linéaires sont les plus importants. Pour finir, on observe une topologie de déplacement aux portées plus précise pour la configuration  $NL_2$  que pour la configuration  $NL_1$ , d'où une représentation plus fine des non-linéarités de frottement. Afin d'avoir une meilleure représentation des non-linéarités en pied d'aube ainsi qu'une meilleure robustesse de l'algorithme de résolution, il a été choisi pour tous les futurs calculs de ne conserver que les configurations  $NL_2$ , où les portées sont plus finement discrétisées que pour les configurations  $NL_1$ .

En ce qui concerne le mouvement de l'aube, les déplacements des nœuds physiques retenus sur l'extrados ont été récupérés pour les trois configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  pour une amplitude adimensionnée du nœud d'observation  $n_{obs}$  de 1.66. L'amplitude de ces déplacements est affichée pour chaque harmonique en Figure V.8. L'échelle de couleur utilisée pour afficher les déplacements est la même par harmonique.

On constate qu'à l'instar de la dynamique globale du MCNL, la répartition des nœuds physiques retenus sur l'aube n'influe pas sur les résultats locaux : par harmonique, les nœuds communs à chaque configuration affichent la même déformée. Ce constat rejoint le commentaire fait plus haut dans ce paragraphe, où il a été mentionné que les nœuds retenus sur la peau de l'aube n'interviennent pas dans la résolution du problème non-linéaire. Dès lors, il est naturel d'observer la même topologie de déformée pour les trois configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ .

Dans les deux prochaines sections, les méthodes de couplage décrites au cours du Chapitre IV vont être appliquées sur le modèle industriel. Pour la méthode de couplage faible, seule la configuration  $NL_2 - EXT_2$  est étudiée. En effet, les efforts aérodynamiques étant transférés dans la base modale du système aube disque à interface collée, la répartition des nœuds physiques d'extrados n'a aucune influence sur le transfert. Une seule configuration suffit donc pour appliquer la méthode de couplage faible. En revanche, les trois configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  seront étudiées dans le cadre de la méthode de couplage fort, où les efforts aérodynamiques s'appliquent uniquement sur les nœuds physiques retenus sur l'aube dans le modèle de Craig-Bampton.

## 5 Application du couplage faible sur le modèle industriel

Nous étudions dans cette section la configuration  $NL_2 - EXT_2$ . Pour l'ensemble des points de fonctionnement décrits comme instables pour le mode 1F2D en section II.6, les matrices de raideur et d'amortissement aérodynamiques ont été extraites selon la méthode décrite dans la section IV.2, et intégrées au modèle réduit d'aube. Ainsi, un ensemble de MCNL a été calculé en intégrant dans les calculs une représentation de l'aérodynamique adaptée aux points de fonctionnement étudiés.

### 5.1 Influence de l'acoustique sur le calcul de MCNL dans la procédure de couplage faible

La Figure V.9 illustre les MCNL calculés sur le point de fonctionnement dp20 dans le cadre de la procédure de couplage faible. On y retrouve les résultats des calculs de MCNL en couplage faible, avec et sans prise en compte de l'acoustique, en plus des résultats du calcul de MCNL dans le vide. Dans le cas "avec acoustique", il doit être compris que la dépendance des termes

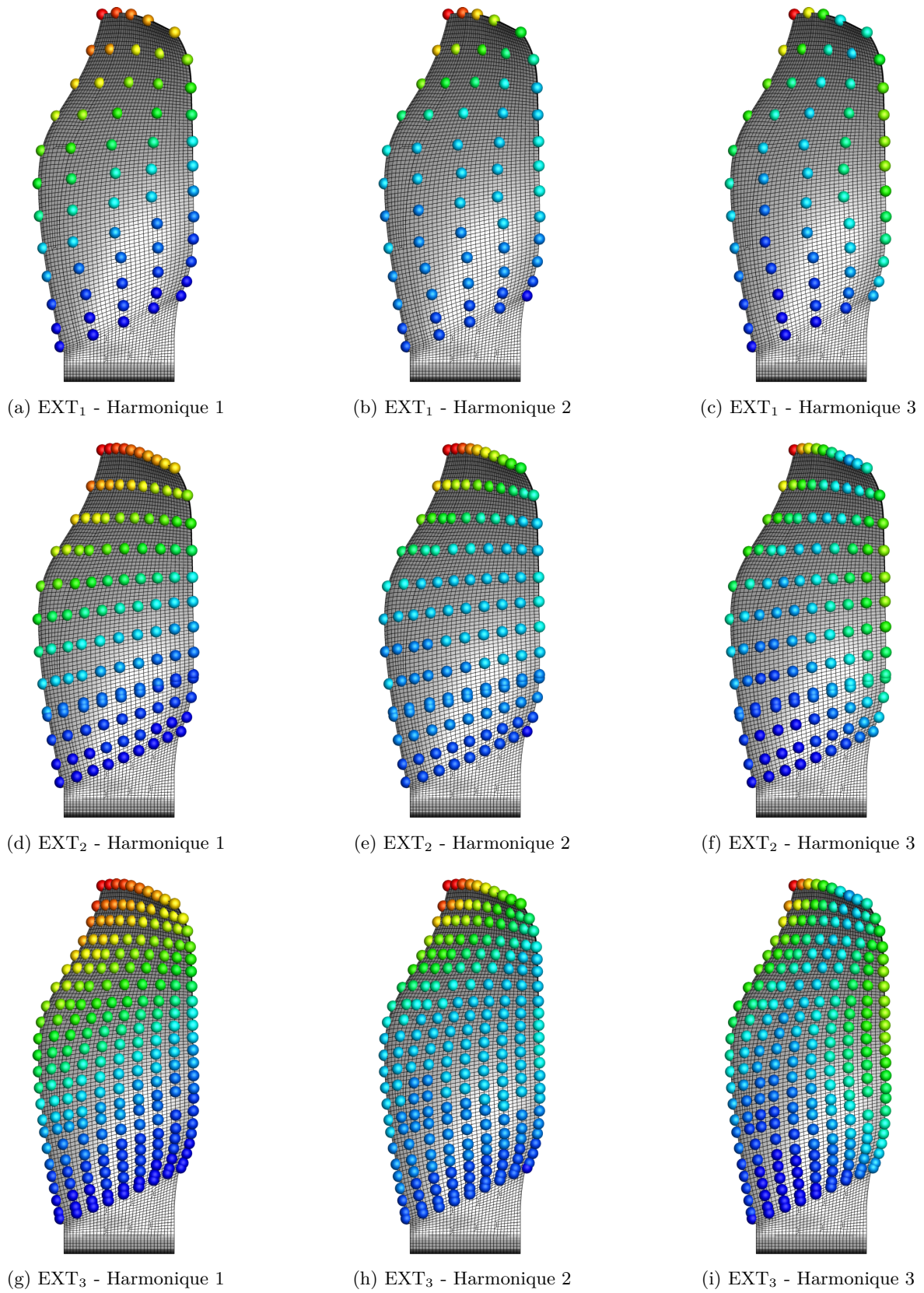


FIGURE V.8 – Amplitude de mouvement des nœuds d'aube selon la configuration  $NL_2 - EXT_i$  pour les harmoniques 1, 2 et 3 pour une amplitude adimensionnée de  $n_{obs}$  de 1.66

aérodynamiques à la fréquence de mouvement a été prise en compte en réalisant des calculs aéroélastiques pour plusieurs fréquences de vibration, puis en réalisant une interpolation de ces termes. En d'autres termes, les matrices aéroélastiques  $\mathbf{K}_a$  et  $\mathbf{C}_a$  dépendent de la pulsation libre  $\omega$  du MCNL. Dans le cas dit "sans acoustique", un unique calcul aéroélastique a été réalisé à la fréquence propre du mode étudié pour calculer les termes aéroélastiques. Pour ce cas de figure, l'effet des ondes acoustiques sur la stabilité est donc pris en compte uniquement pour la fréquence propre du mode étudié, sans prendre en compte l'impact d'un changement de fréquence sur les termes aéroélastiques. Les matrices aéroélastiques  $\mathbf{K}_a$  et  $\mathbf{C}_a$  sont ainsi constantes et ont été calculées uniquement à la fréquence du mode propre de la structure à sec.

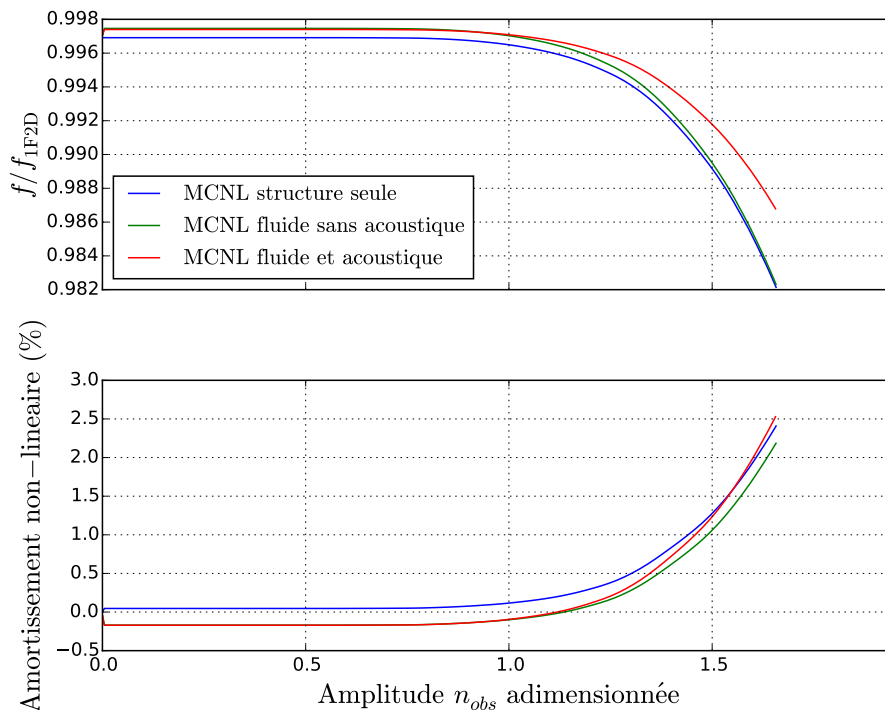


FIGURE V.9 – Résultats de l'application du couplage faible pour le point de fonctionnement dp20

On observe sur la Figure V.9 l'effet de l'implémentation de l'aérodynamique sur le calcul du MCNL par rapport au cas à vide. En particulier, les effets de la raideur aéroélastiques sont visibles sur la fréquence de mouvement libre, et ce dès de faibles amplitudes de mouvement. Le décalage en fréquence à faible amplitude entre le MCNL à vide et les MCNL avec aérodynamique correspond exactement à celui induit par la raideur aéroélastique sur le point de fonctionnement considéré. De même pour l'amortissement de mode non-linéaire, la valeur observée à faible amplitude correspond à la résultante de l'amortissement aéroélastique sur le point de fonctionnement dp20 et de l'amortissement linéaire modal de structure  $\xi_s$  décrit en début de section V.4. En d'autres termes, le cas asymptotique à faible amplitude des MCNL calculé avec représentation de l'aérodynamique est cohérent des valeurs de raideur et d'amortissement aéroélastique calculées avec *elsA*. L'implémentation de ces termes dans le calcul de MCNL est donc validée.



Le comportement global des MCNL avec aérodynamique se comporte à grande amplitude comme celui du MCNL à vide. En ce sens, on observe une diminution de la fréquence de mouvement libre à mesure que l'amplitude augmente, correspondant à l'assouplissement du système aube disque par libération de certains degrés de liberté de frottement. L'amortissement non-linéaire augmente à mesure que le frottement se met en place avec l'accroissement de l'amplitude. Pour les MCNL avec représentation de l'aérodynamique, le changement de signe de l'amortissement non-linéaire met en évidence l'existence d'un LCO aux amplitudes correspondantes.

La prise en compte de l'acoustique dans les calculs selon la méthode décrite dans la sous-section IV.2.2 a un impact sur le calcul de MCNL par rapport au calcul sans acoustique. Ces effets ne sont pas visibles pour de faibles amplitudes de vibration, où il n'y a pas suffisamment de frottement en pied d'aube pour induire un décalage en fréquence. L'acoustique ne dépendant que de la fréquence dans la stratégie de couplage faible, le MCNL à faible amplitude est donc le même pour les cas avec et sans acoustique. Lorsque l'amplitude augmente et que le frottement apparaît en pied d'aube, un décalage en fréquence apparaît en raison de la libération de degrés de liberté en pied d'aube. Dans le cas où la sensibilité acoustique à la fréquence est prise en compte, ce décalage a pour effet de changer la raideur et l'amortissement aérodynamiques selon la loi d'interpolation définie précédemment pour le point de fonctionnement étudié. Ainsi, dès que les non-linéarités de frottement se manifestent et induisent un décalage en fréquence sur la solution, les MCNL avec et sans acoustique ne suivent plus les mêmes trajectoires.

Malgré des dynamiques différentes pour les MCNL avec et sans acoustique, l'énergie dissipée en pied d'aube ne dépend de rien d'autre que de l'amplitude de mouvement de l'aube, comme le montre la Figure V.10. Ce résultat était attendu, car pour les deux cas avec et sans acoustique, la représentation du fluide a été ajoutée en base modale sous la forme de matrices généralisées, qui ne changent pas les vecteurs propres des sous-structures réduites assemblées par rapport au cas à vide. Même si les modes ont changé en termes de raideur généralisée et d'amortissement, les déformées propres de la structure restent les mêmes, et donc les déplacements restent les mêmes. Puisque la dissipation ne dépend que du déplacement, on obtient la même énergie dissipée par frottement pour l'ensemble des cas. En termes de dissipation par frottement sec donc, l'apport de l'aérodynamique n'est pas visible dans cette approche par couplage faible (voir Figure V.10,) bien que ces effets apparaissent sur la dynamique globale du système fluide structure caractérisée par le MCNL (voir Figure V.9).

Pour le MCNL sans représentation de l'acoustique, les énergies linéaire (liée à la dissipation naturelle  $\xi_s$  de la structure) et non-linéaire (liée au frottement sec) dissipées par la structure en fonction de l'amplitude du mouvement ont été comparées à l'énergie fournie par le fluide dans l'approche de couplage faible. Pour rappel, le fluide a été intégré au modèle de structure selon une représentation linéarisée par rapport au mouvement, en calculant au préalable les raideur et amortissement aérodynamiques associés au mode linéaire instable 1F2D. Cette comparaison, visible en Figure V.11, montre que la dissipation structurelle équilibre le travail des efforts aérodynamiques à la même amplitude que le LCO prédit en Figure V.9 pour les cas avec représentation du fluide. De plus, on constate que la dissipation non-linéaire augmente beaucoup plus rapidement que l'énergie apportée par le fluide une fois que le glissement se met en place : en cas de légères variations d'amortissement aérodynamique lié à un changement de point

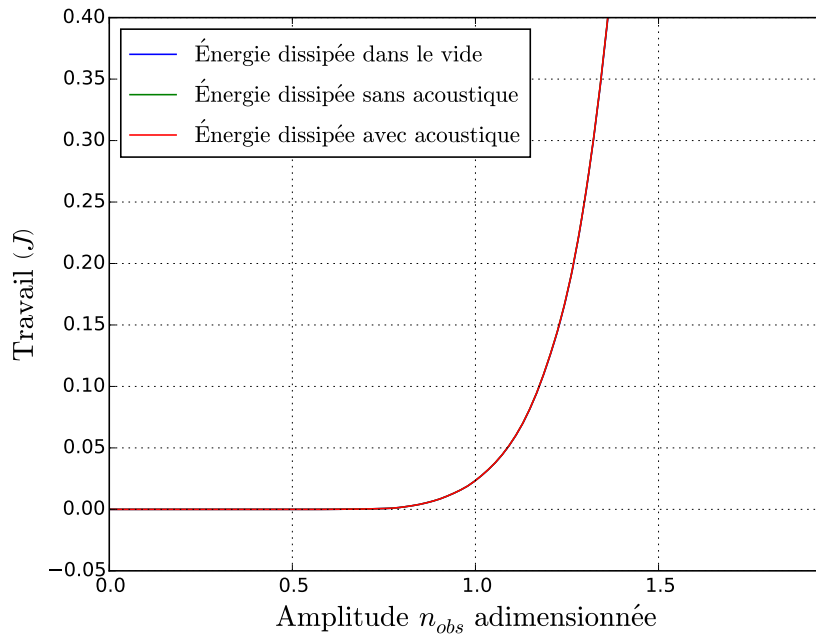


FIGURE V.10 – Comparaison des énergies dissipées par frottement sec en pied d’aube dans les cas à vide, avec et sans acoustique en fonction de l’amplitude de  $n_{obs}$  pour le point de fonctionnement dp20 dans le cadre de la procédure de couplage faible

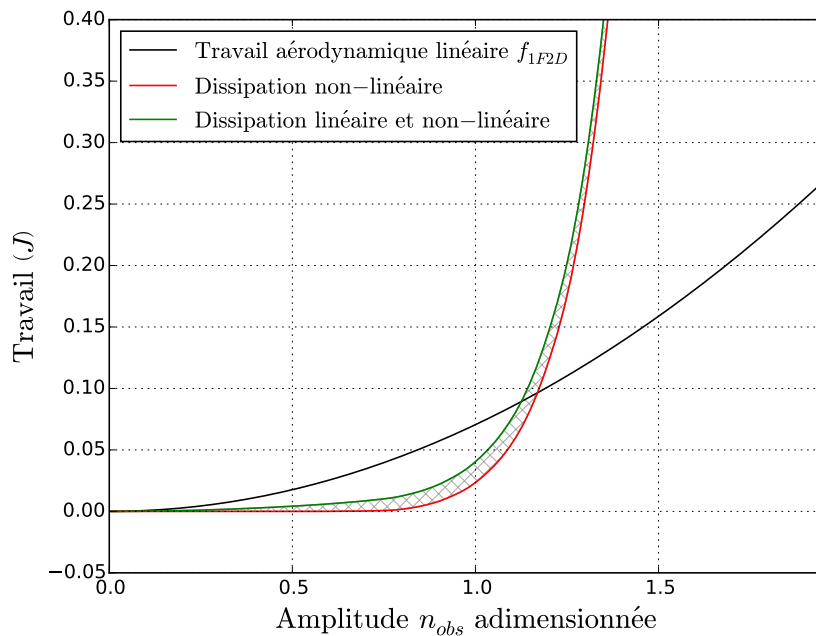


FIGURE V.11 – Comparaison des énergies dissipées par la structure avec l’énergie fournie par le fluide pour un mouvement harmonique à la fréquence  $f_{1F2D}$  dans une hypothèse de fluide linéaire par rapport au mouvement pour le point de fonctionnement dp20 dans le cadre de la procédure de couplage faible



de fonctionnement, on anticipe donc de faibles variations d'amplitude pour le cycle limite associé.

Bien que peu marqué sur la Figure V.9, l'acoustique a un effet sur la prédiction de l'amplitude du LCO. En particulier, on observe que l'amortissement non-linéaire s'annule pour une amplitude légèrement plus faible dans le cas avec acoustique que dans le cas sans acoustique. Ce constat est corrélé aux calculs de dépendance de l'amortissement aérodynamique à la fréquence de mouvement du mode 1F2D : le Tableau V.4 indique les valeurs d'amortissement aérodynamique obtenues pour ce mode avec *elsA* pour deux valeurs de fréquence de vibration sur le point dp20. On note qu'une diminution de 2% de la fréquence de vibration par rapport à la fréquence propre induit une augmentation de l'amortissement aérodynamique d'environ 0.6%, ce dernier devenant positif pour le point de fonctionnement étudié. La diminution de fréquence causée par les non-linéarités de frottement rend donc le système moins instable, ce qui implique qu'il faut dissiper moins d'énergie pour compenser celle apportée par le fluide. Il est ainsi cohérent d'observer pour ce point de fonctionnement une amplitude de LCO légèrement plus faible lorsque l'acoustique est prise en compte que dans le cas sans acoustique.

$f/f_{1F2D}$	0.98	1
$\xi_{aero}(\%)$	0.384	-0.215

TABLEAU V.4 – Valeurs d'amortissement aérodynamique en fonction de la fréquence de mouvement du mode 1F2D sur le point dp20

L'acoustique joue pour ce point de fonctionnement un rôle intéressant : en considérant tout d'abord que la structure est linéaire (*i.e* qu'il n'y a pas de frottement aube disque), le mode 1F2D est instable à 75% de régime nominal en raison de l'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air. Cette instabilité conduit en pratique à une augmentation des amplitudes de vibration sur le mode considéré, au point de déclencher des zones locales de glissement relatif entre les portées d'aube et de disque. Les non-linéarités de frottement qui en résultent, en plus de dissiper une fraction de l'énergie fournie par le fluide, induisent un changement de fréquence de vibration vers des valeurs inférieures par l'assouplissement des portées en glissement. Ce décalage fréquentiel modifie au premier ordre le rôle déstabilisant de l'acoustique sur le point dp20, si bien que pour un décalage en fréquence de 2% par rapport à sa valeur nominale, les ondes acoustiques permettent de stabiliser le mode 1F2D indépendamment de l'énergie dissipée en pied d'aube. Dans le cas présent, il se trouve que la dissipation générée par le frottement atteint rapidement des niveaux importants (voir Figure V.11) pour stabiliser le système avant que l'effet stabilisant de l'acoustique ne rentre en jeu : avec un décalage en fréquence de l'ordre de 0.1% sur le cycle limite (voir Figure V.9), l'acoustique est encore très défavorable à la stabilité aéroélastique de la soufflante.

Pour le point de fonctionnement dp20 finalement, l'acoustique qui était la cause de la déstabilisation dans un cadre de mécanique linéaire se révèle être un mécanisme stabilisant lorsque les non-linéarités de frottement sont prises en compte. Précisons que le point de fonctionnement a une grande importance dans ce rôle joué par l'acoustique qui dépend notamment du champ moyen dans lequel fonctionne la soufflante, comme indiqué par la Figure II.23. Rappelons également que la Figure II.27 montre que pour un point proche de la ligne de fonctionnement,

une diminution de la fréquence de mouvement par rapport à la fréquence propre du mode entraîne une diminution de l'amortissement aérodynamique, donc nuit à la stabilité aéroélastique de la soufflante. Ainsi, selon le point de fonctionnement considéré, l'acoustique peut à elle seule améliorer ou détériorer la stabilité aéroélastique par rapport au cas d'une structure linéaire en raison des glissements fréquentiels induits par les non-linéarités de frottement. Si le décalage fréquentiel induit par l'aérodynamique et les frottements en pied d'aube peut être estimé, il est possible de prédire le caractère stabilisant ou non de l'acoustique sur le point de fonctionnement considéré à partir uniquement d'un calcul aéroélastique en mouvement harmonique imposé.

L'impact de l'acoustique sur l'amplitude du LCO est également visible sur les interfaces de contact aube disque. Sur la Figure V.12 sont représentées les portées mises à plat, sur lesquelles sont affichés les déplacements relatifs maximaux atteints au cours de la période de vibration du LCO pour les cas avec et sans acoustique, sur le point de fonctionnement dp20. Pour les cas avec et sans acoustique, on observe des topologies similaires au niveau des déplacements relatifs sur les portées : les zones de glissement sont essentiellement observées en haut des portées, avec pour l'extrados une localisation des déplacements entre le bord d'attaque (BA) et le milieu de la portée selon l'axe moteur, et pour l'intrados un déplacement relatif maximal atteint proche du bord de fuite (BF). Les amplitudes de déplacement relatif au niveau des portées sont du même ordre de grandeur, de l'ordre de quelques microns, ce qui est cohérent avec les résultats déjà présentés dans l'état de l'art [33]. De plus, on observe des niveaux d'amplitude moins importants sur l'extrados dans le cas avec acoustique que dans le cas sans acoustique, en accord avec les commentaires effectués précédemment : il faut dissiper moins d'énergie lorsque la dépendance à l'acoustique est prise en compte que dans le cas sans acoustique, ce qui implique des amplitudes de glissement moins importantes.

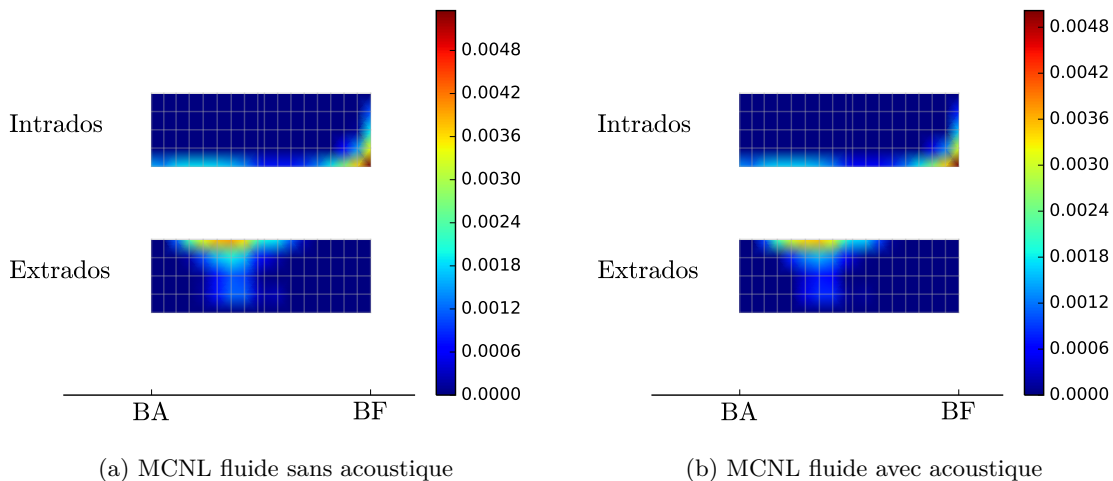


FIGURE V.12 – Amplitudes maximales de glissement relatif en millimètres des portées mises à plat pour le LCO du point dp20 (axe horizontal : axe moteur)

Pour finir, l'énergie localement dissipée par frottement aux portées a été calculée pour les cas avec et sans acoustique au cours d'une période de vibration du cycle limite. Les résultats peuvent être observés en Figure V.13. Les échelles employées sont les mêmes entre chaque Figure. Les

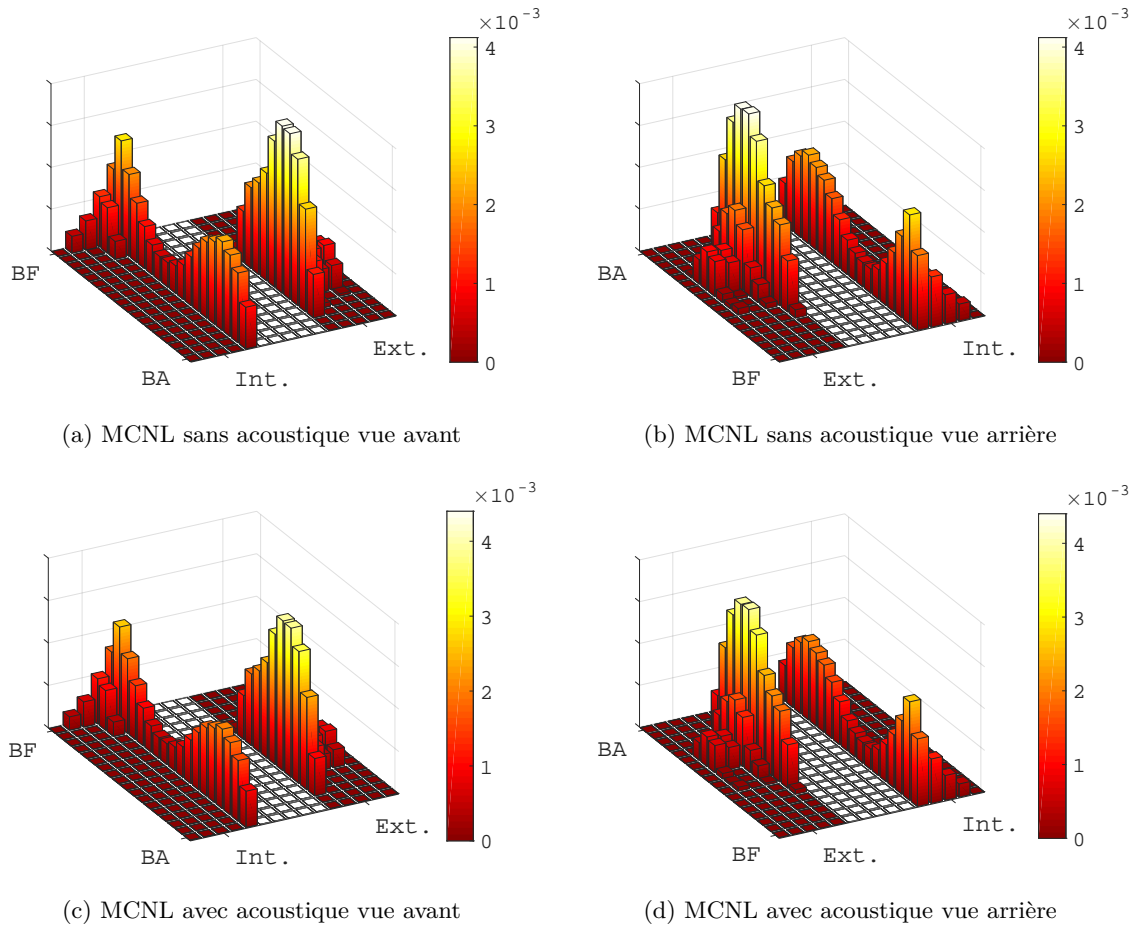


FIGURE V.13 – Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage faible pour le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.).

zones de dissipation énergétique sont cohérentes avec les déplacements relatifs affichés en Figure V.12. On note toutefois que l'extrados est plus dissipatif que l'intrados, malgré des déplacements relatifs plus important sur ce dernier proche BF : les efforts normaux sont plus importants sur les parties dissipatives de l'extrados que sur le reste des surfaces en frottement. Moins d'énergie est dissipée par frottement dans le cas avec acoustique que dans le cas sans, en accord avec les remarques faites précédemment à partir du Tableau V.4.

## 5.2 Influence du coefficient de frottement sur le calcul du cycle limite

Les résultats présentés dans la sous-section précédente supposent un coefficient de frottement de 0.1. Toutefois, la valeur du coefficient de frottement dépend en pratique aussi bien de l'état des surfaces en contact que des matériaux utilisés. Bien qu'une valeur expérimentale de coefficient de frottement ait été identifiée sur la soufflante industrielle, il existe une certaine incertitude sur cette mesure car elle peut évoluer selon l'historique d'utilisation des pièces étudiées. Par exemple, un système aube disque sortant de l'usinage n'aura pas le même coefficient de frottement qu'un système aube disque ayant plusieurs milliers d'heures de vol.

Ainsi, il est intéressant d'avoir une mesure de l'évolution des MCNL en fonction de la valeur du

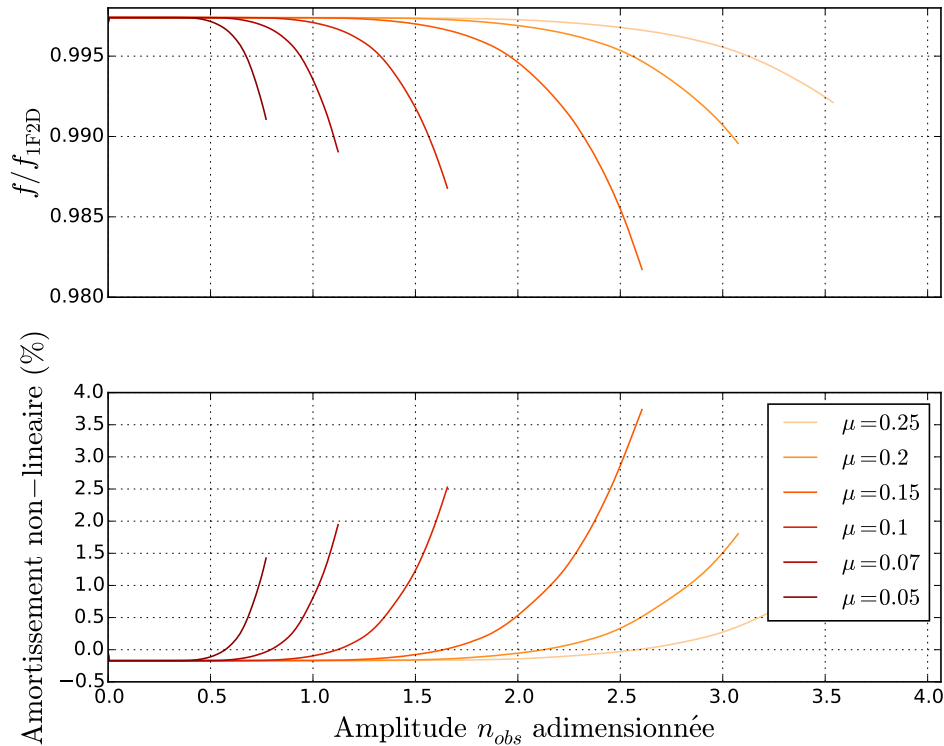


FIGURE V.14 – Influence du coefficient de frottement sur le calcul de MCNL pour le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l'acoustique.

coefficient de frottement utilisé dans le calcul. La Figure V.14 illustre l'évolution des MCNL en fonction de la valeur utilisée pour  $\mu$  en tenant compte de la sensibilité acoustique. On remarque qu'augmenter le coefficient de frottement a pour effet de repousser le seuil de déclenchement du frottement vers des valeurs plus grandes d'amplitudes de vibration du degré de liberté d'observation  $n_{obs}$ , comme cela a déjà pu être observé [86]. En particulier, cette Figure montre que l'amplitude à laquelle le cycle limite apparaît dépend au premier ordre du coefficient de frottement. Sur la Figure V.15 est tracée l'évolution de l'amplitude adimensionnée du degré de liberté d'observation à laquelle apparaît le LCO sur le point de fonctionnement dp20 pour les MCNL affichés en Figure V.14.

On observe une relation linéaire entre le coefficient de frottement et l'amplitude du nœud  $n_{obs}$  sur le LCO pour le point de fonctionnement dp20, comme en témoigne la régression linéaire fournissant un très bon modèle liant ces deux grandeurs. Sur cette Figure, le coefficient de détermination  $R^2$  est défini comme  $\left(1 - \frac{\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}\right)$ , où  $y_i$ ,  $\hat{y}_i$  et  $\bar{y}$  sont respectivement les données réelles, les données grandeurs prédites par le modèle et la moyenne des données réelles. Il caractérise la qualité de la régression obtenue. Plus cette grandeur se rapproche de 1, plus le modèle obtenu par régression linéaire représente les données à disposition. Cette relation est intéressante dans la mesure où elle peut fournir des indications sur l'amplitude du cycle limite dans l'éventualité où un nouveau traitement de surface des portées serait appliqué et conduirait à un changement du coefficient de frottement.

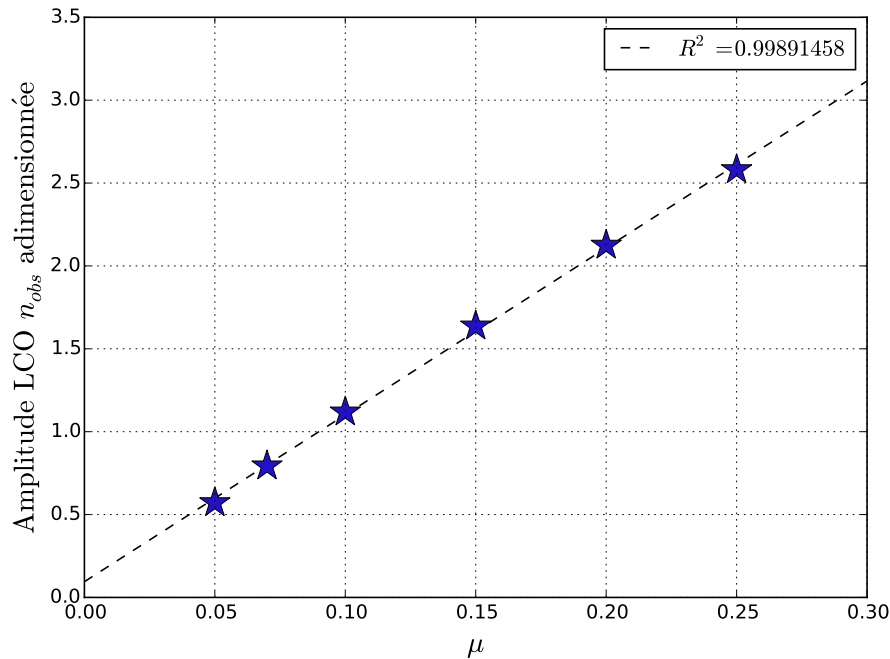


FIGURE V.15 – Influence du coefficient de frottement sur l’amplitude du LCO sur le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l’acoustique. (- - - : régression linéaire)

### 5.3 Influence de l’amortissement modal sur le calcul du cycle limite

L’amortissement modal  $\xi_s$  utilisé dans les calculs de MCNL est également une grandeur sur laquelle il existe une certaine incertitude. Il convient ainsi d’avoir une mesure de l’impact de cette grandeur sur l’amplitude du cycle limite calculé. La Figure V.16 illustre l’influence de ce paramètre sur l’amplitude du LCO pour le point dp20, en tenant compte de l’influence de la fréquence de mouvement sur la propagation des ondes acoustiques.

Une nouvelle relation linéaire est observée entre ce paramètre et l’amplitude du LCO. Sur la plage de valeur étudiée, on mesure un écart inférieur à 5% de l’amplitude de prédiction du LCO. Cette incertitude numérique est plus faible que celle induite par le coefficient de frottement étudié précédemment. Nous allons dans le prochain paragraphe comparer les résultats numériques obtenus dans le cadre de la procédure de couplage faible aux mesures expérimentales réalisées sur la soufflante.

### 5.4 Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales

Nous souhaitons comparer dans ce paragraphe les résultats numériques obtenus dans le cadre de la méthode de couplage faible avec les mesures expérimentales réalisées sur la soufflante. Lors des essais, une iso-vitesse est parcourue dans le sens des débits décroissants de sorte à atteindre les limites du fonctionnement nominal de la soufflante. À mesure que l’on s’approche de la ligne de pompage, l’iso-vitesse est parcourue de plus en plus lentement afin de mettre immédiatement fin aux essais dès lors qu’un phénomène critique est détecté, comme le pompage ou le flottement. Des jauges de déformation sont utilisées pour déterminer les contraintes appliquées aux

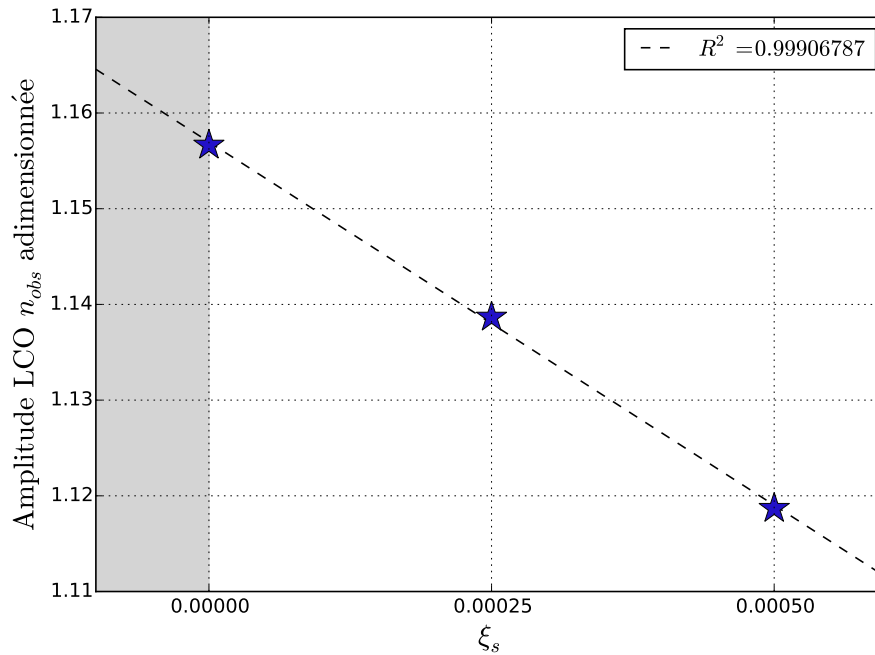


FIGURE V.16 – Influence de l’amortissement modal linéaire de structure sur l’amplitude de LCO sur le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l’acoustique. (--- : régression linéaire)

aubes sur les premiers modes de déformation, en reliant les variations de résistance électrique des jauges à la déformation élastique des aubes et aux contraintes par la loi de Hooke.

La Figure V.17 illustre le diagramme caractéristique de la soufflante sur lequel a été placé l’iso-vitesse étudiée lors des campagnes d’essai. On remarque que cette iso-vitesse est en réalité plus proche du 74% de régime nominal que celle à 75% étudiée numériquement. Ces deux iso-vitesses sont toutefois suffisamment proches pour que les mécanismes à l’origine des instabilités aéroélastiques expérimentale et numérique puissent être considérés comme les mêmes (voir Figure II.23). La courbe expérimentale des essais de flottement a donc été recalée sur l’iso-vitesse numérique à 75% de régime nominal. Nous comparerons donc les mesures expérimentales sur l’iso-vitesse recalées (en orange) avec les calculs numériques réalisés dans le cadre de la thèse (en bleu).

La Figure V.18 illustre les amplitudes adimensionnées de LCO calculés à l’aide des MCNL selon la procédure de couplage faible le long de l’iso-vitesse à 75% de régime nominal. On étudie les points de fonctionnement dp18 à dp22 (voir Tableau II.2) : on considère donc que la poche de flottement a été franchie et que nous explorons les effets des non-linéarités de frottement sur la stabilité aéroélastique de la soufflante.

Pour chacun de ces points de fonctionnement, l’amplitude de LCO a été calculée en fonction de la valeur du coefficient de frottement employée. De plus, les calculs de MCNL ont été réalisés dans les cas avec et sans prise en compte de la sensibilité de la propagation acoustique à la fréquence de mouvement. Pour finir, les amplitudes des LCO mesurées expérimentalement ont

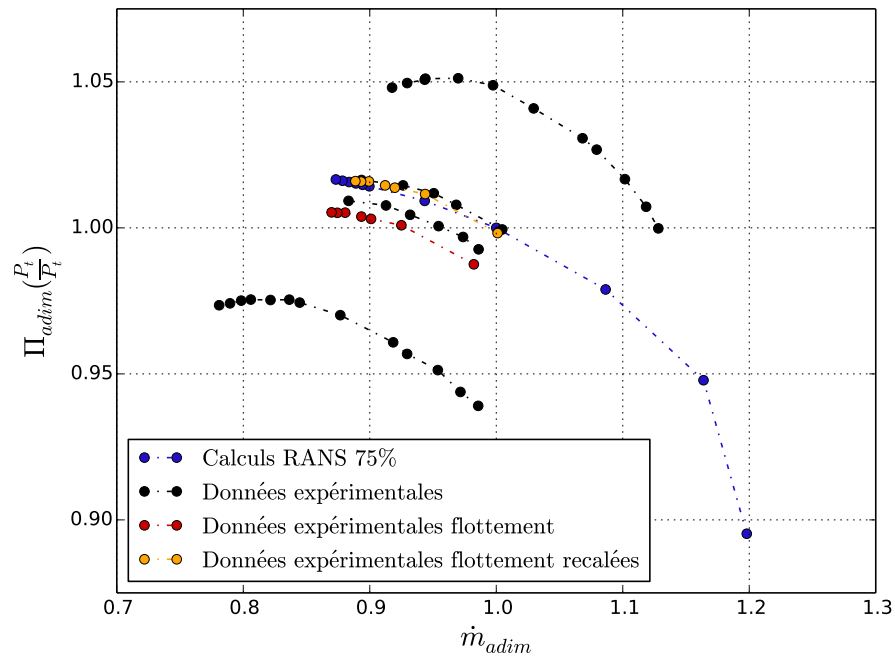


FIGURE V.17 – Iso-vitesse parcourue lors des essais et recalage par rapport aux résultats numériques

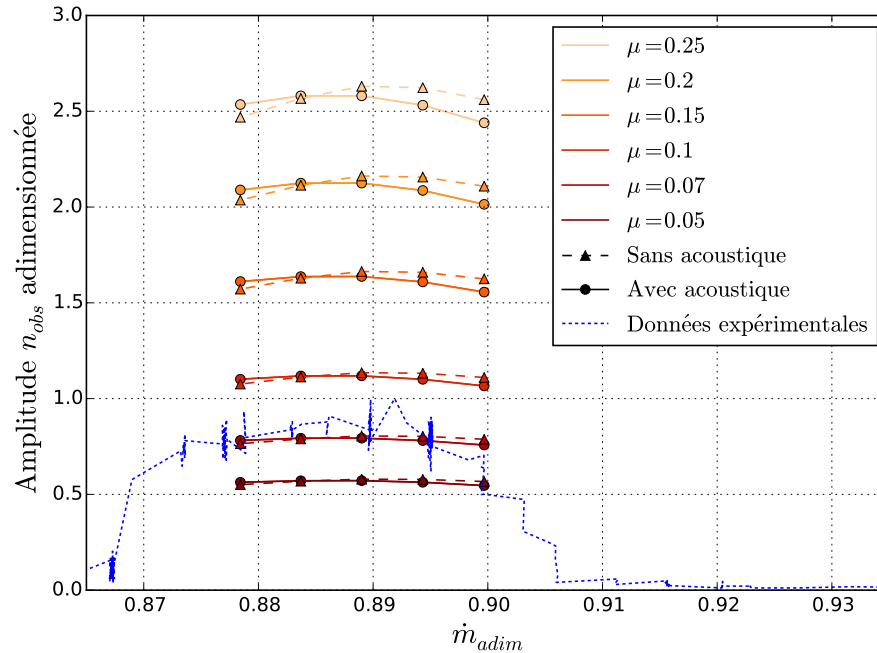


FIGURE V.18 – Amplitude du nœud d'observation  $n_{obs}$  sur les cycles limites atteints dans la poche de flottement à 75% de régime nominal

été tracées le long de l'iso-vitesse en plus des résultats numériques obtenus avec la procédure de couplage faible.

En ce qui concerne les résultats numériques tout d'abord, on constate que pour les cas avec et sans prise en compte de l'acoustique, les amplitudes de LCO changent relativement peu le long de l'iso-vitesse pour une valeur fixée de  $\mu$ . Les variations d'amplitudes les plus importantes sur l'iso-vitesse sont obtenues pour une valeur de  $\mu$  de 0.25. Dans le cas sans acoustique, on note pour cette valeur de coefficient de frottement une variation d'amplitude du LCO le long de l'iso-vitesse de 16% par rapport à celle mesurée expérimentalement. Pour un coefficient de frottement de 0.1, cet écart d'amplitude entre les valeurs extrémales est ramené à 6% de l'amplitude expérimentale du LCO. Ces tendances sont corrélées avec les résultats numériques de calcul d'amortissement aérodynamique présentés en Figure II.18 et ceux de la Figure V.11. La stabilité aéroélastique de ces points de fonctionnement changeant faiblement ( $\xi_{aero}$  varie peu), il était attendu d'observer de faibles variations d'amplitude du cycle limite à l'intérieur de la poche de flottement compte tenu du fort accroissement de la dissipation énergétique en pied d'aube.

La prise en compte de la sensibilité acoustique n'impacte qu'au second ordre la prédiction numérique du LCO pour le régime et le mode considéré. Cet impact modéré de l'acoustique sur la prédiction du cycle limite peut être relié aux Figures V.9 et V.11. Le glissement en pied d'aube pour cette amplitude du nœud d'observation provoque un fort accroissement de la dissipation énergétique, si bien qu'un équilibre est atteint alors que la fréquence n'a que faiblement évolué en raison des non-linéarités. La représentation de l'aérodynamique sur le LCO est ainsi proche de celle à faible amplitude de mouvement. Si les points de fonctionnement étudiés avaient été plus instables, il aurait été nécessaire d'avoir de plus grandes amplitudes de glissement, ce qui aurait induit de plus grands décalages fréquentiels et donc à de plus grands effets de l'acoustique sur la prédiction du cycle limite.

Pour finir, l'amplitude expérimentale du nœud d'observation le long de l'iso-vitesse recalée est tracée sur la Figure V.18 en pointillés bleus. Elle a été obtenue à partir des contraintes mesurées grâce aux jauges de déformation et à l'aide d'un calcul mécanique statique réalisé sur le système aube disque pour relier la contrainte au déplacement en tête d'aube. On constate que les mesures expérimentales sont cohérentes avec les résultats numériques obtenus pour une valeur de  $\mu$  de 0.07. De plus, on observe le même plateau en débit de l'amplitude de cycle limite entre les mesures expérimentales et les calculs de MCNL.

Les résultats numériques obtenus dans cette section et au Chapitre II, en particulier les faibles variations d'amortissement aérodynamique sur la plage de fonctionnement considérée (Figure II.18) et le fort accroissement de la dissipation énergétique en pied d'aube (V.11), expliquent la présence de ce plateau pour le mode 1F2D. La méthode de couplage faible fournit de bonnes prédictions de LCO par rapport aux essais. Toutefois, la représentation de l'aérodynamique dans cette méthode est limitée, puisque celle-ci est représentée sous forme modale uniquement pour le fondamental, et qu'elle ne tient pas compte d'un éventuel effet des harmoniques supérieures du mouvement sur le comportement du fluide. La méthode de couplage fort, que nous allons voir dans la prochaine section, permet d'atteindre un plus haut niveau de fidélité dans la représentation des efforts aérodynamiques.



## 6 Application du couplage fort sur le modèle industriel


Cette section s'intéresse à la mise en application de la procédure de couplage fort sur la configuration industrielle. Contrairement à la section précédente, nous allons ici nous intéresser aux trois configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  présentées en section V.1.

### 6.1 Considérations numériques pour l'application de la procédure de couplage fort

Sur le principe, la procédure de couplage fort telle que décrite dans la sous-section IV.3.1 ne fait aucune hypothèse sur la linéarité du fluide. Dans le cadre de l'application industrielle étudiée au cours de ces travaux de thèse, il a toutefois été nécessaire de réaliser des hypothèses supplémentaires afin de contourner certains problèmes numériques. Une difficulté majeure rencontrée dans l'application de la méthodologie de couplage fort concerne la déformation des maillages aérodynamiques pour de grandes amplitudes de vibrations. Pour rappel, une des étapes de la méthodologie consiste à extraire la dynamique non-linéaire de l'aube fournie par le MCNL pour plusieurs niveaux d'amplitude de vibration, et à évaluer pour chacune de ces amplitudes les efforts aérodynamiques générés par le mouvement non-linéaire de la structure. Cela suppose de pouvoir déformer le maillage aérodynamique selon le mouvement non-linéaire de l'aube à l'amplitude correspondante. Cependant, pour de grandes amplitudes de mouvement de la structure, l'algorithme de déformation de maillage ne permet pas d'obtenir de résultat permettant de réaliser les calculs aéroélastiques. Les espaces très restreints où de forts déplacements sont attendus, tels que le jeu en tête d'aube, sont les zones les plus critiques dans lesquels des mailles retournées apparaissent systématiquement lors de la déformation de la grille aérodynamique. Dans le cadre de la procédure de couplage fort, il n'a pas été possible de dépasser des amplitudes de déformation de l'ordre de 60% de l'amplitude expérimentale maximale du cycle limite.

L'hypothèse de linéarité des efforts fluides par rapport au mouvement a donc une nouvelle fois été invoquée, afin de réaliser les calculs avec déformation multi-harmonique à une amplitude inférieure à l'amplitude critique de déformation de maillage. Une fois les efforts aérodynamiques calculés, un facteur d'amplitude a été appliqué à chaque harmonique pour retrouver des niveaux d'efforts cohérents de l'amplitude réelle de déplacement de l'aube. L'hypothèse de linéarité des efforts fluides a uniquement été employée pour contourner les difficultés de déformation de maillage de ce cas d'étude en particulier. Comme indiqué précédemment, la procédure de couplage fort n'a en principe pas besoin de cette hypothèse pour être mise en place.

### 6.2 Influence de la configuration étudiée sur le calcul du cycle limite

Cette sous-section s'intéresse à l'influence du nombre de nœuds retenus sur l'extrados pour l'application des efforts aérodynamiques sur la dynamique non-linéaire de l'aube. La dynamique non-linéaire de l'aube a été extraite pour chacune des configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  pour cinq valeurs d'amplitudes réparties sur le MCNL de la structure dans le vide. Pour le point de fonctionnement dp20, une itération de couplage fort a été mise en œuvre pour les configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$  : les résultats des calculs de MCNL sont affichés en Figure V.19. Sur cette Figure, les points bleus  du MCNL calculé sur la structure dans le vide représentent les points d'extraction de la dynamique non-linéaire de l'aube pour l'évaluation des efforts aérodynamiques. Ainsi, pour chacun de ces points, le mouvement multi-harmonique et la fréquence

libre de l'aube ont été récupérés pour réaliser un calcul aéroélastique et obtenir une évaluation des efforts aérodynamiques engendrés par la dynamique non-linéaire de l'aubage à l'amplitude correspondante.

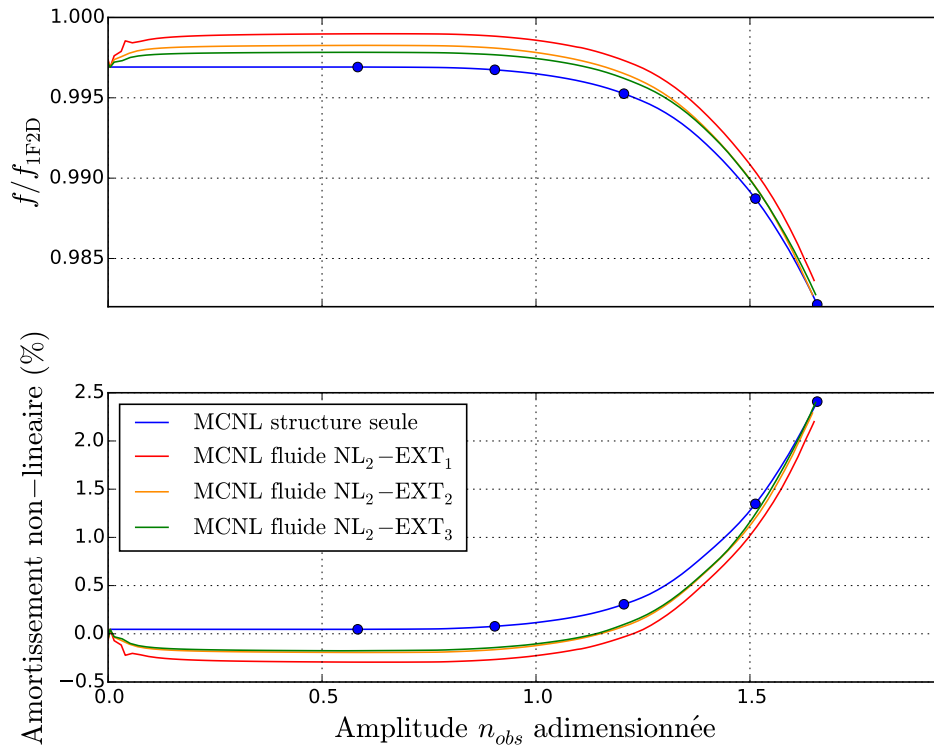


FIGURE V.19 – Impact de la configuration étudiée sur le calcul de MCNL dans le cadre de la procédure de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20. ● : points d'extraction de la dynamique non-linéaire de l'aube pour l'évaluation des efforts aérodynamiques générés par le mouvement de la structure

Pour les calculs de MCNL avec modélisation du fluide selon la procédure de couplage fort, on observe de rapides changements sur la dynamique de l'aube à mesure que l'amplitude augmente en partant d'une amplitude nulle. On explique ce phénomène numérique par construction de l'interpolation des efforts aérodynamiques : on ne dispose pas d'évaluation de ces efforts à une amplitude nulle. La première évaluation ● des efforts fluides se trouve en effet autour d'une amplitude adimensionnée de l'ordre de 0.6 d'après la Figure V.19. Ainsi, la dynamique de l'aube pour une amplitude dans un voisinage de zéro est celle de la structure à vide : on retrouve la fréquence et l'amortissement modal  $\xi_s$  de la structure à vide. En augmentant l'amplitude, on observe un établissement de la raideur et de l'amortissement aérodynamique dans le système selon l'application de la loi d'interpolation des efforts aérodynamiques. Entre l'amplitude nulle et le premier point d'évaluation des efforts fluides, l'allure des courbes n'a donc pas de réel sens physique car nous devrions observer immédiatement l'état linéarisé du système fluide structure, en particulier le décalage fréquentiel et l'amortissement de mode non-linéaire engendrés par la raideur et l'amortissement aérodynamique. Si le premier point d'évaluation avait été à une amplitude plus proche de 0, cet état linéarisé du système fluide structure aurait été observé dès cette amplitude.

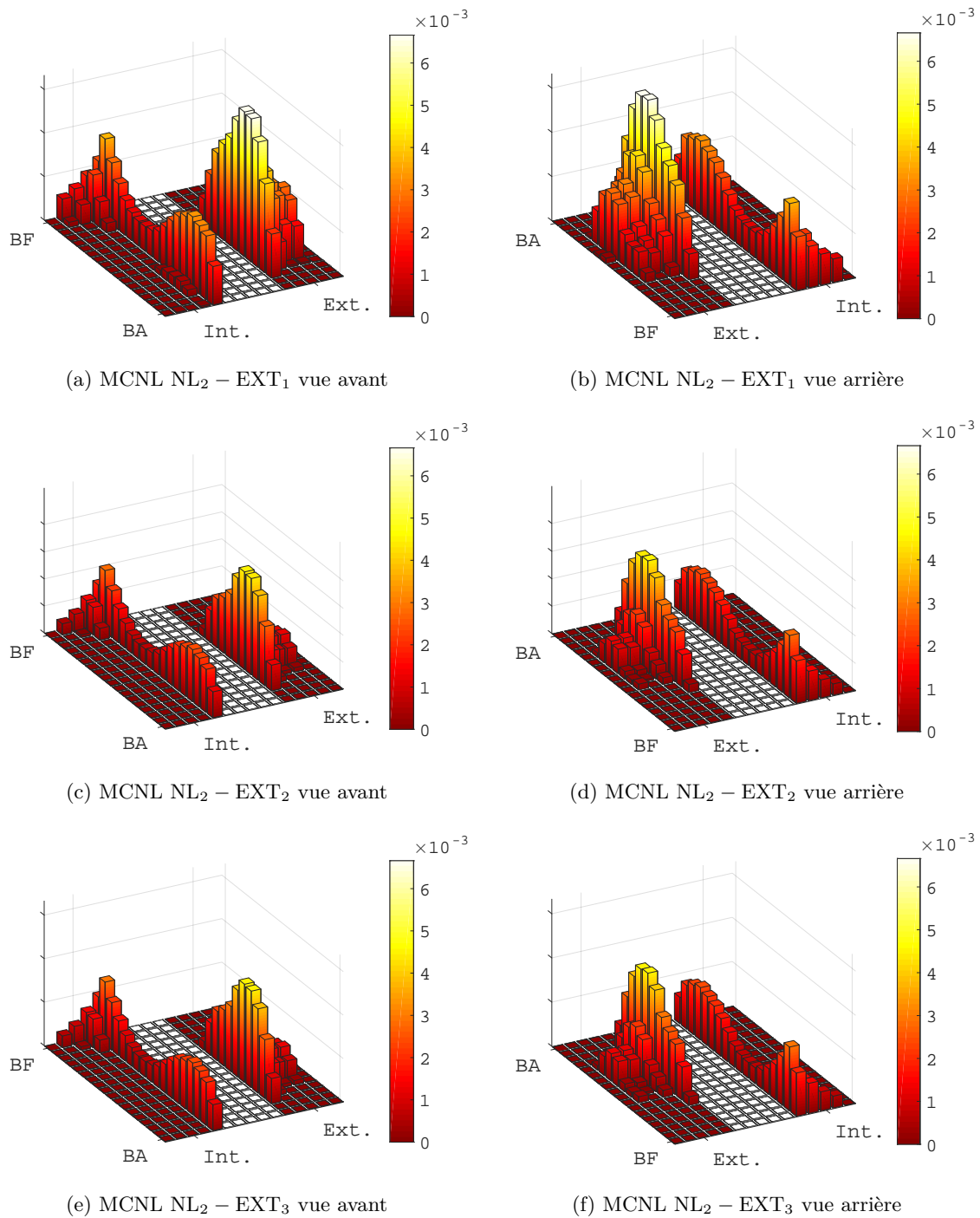


FIGURE V.20 – Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.).

On retrouve du sens physique sur les MCNL avec fluide au-delà du premier point d'interpolation. À partir de ce point, on observe en ce qui concerne la fréquence de mouvement une convergence des effets de raideur aérodynamique, l'écart fréquentiel entre les configurations  $NL_2 - EXT_2$  et  $NL_2 - EXT_3$  étant plus faible que celui entre les configurations  $NL_2 - EXT_1$  et  $NL_2 - EXT_2$ . De plus, le décalage fréquentiel observé est cohérent avec les valeurs de raideur aérodynamique calculées précédemment sur le point dp20. Un constat similaire peut être réalisé en considérant l'amortissement de MCNL, qui semble converger bien plus rapidement que la fréquence. On note en particulier dès la configuration  $NL_2 - EXT_2$  que prendre d'avantage de points sur l'extrados de l'aube n'améliore plus la prédiction de l'amortissement de MCNL, les courbes des configurations  $NL_2 - EXT_2$  et  $NL_2 - EXT_3$  étant superposées. Le LCO est donc bien prédit pour un configuration intermédiaire de nœuds retenus sur l'aube. Nous retiendrons dans les futurs cas de calcul de MCNL la configuration  $NL_2 - EXT_2$ , qui permet d'obtenir une estimation convergée de l'amplitude de cycle limite.

La Figure V.19 permet de mesurer l'impact de la réduction sur le calcul de MCNL et sur la prédiction du LCO. Retenir un nombre important de nœuds sur l'aube permet d'une part d'appliquer une charge aérodynamique moins importante sur l'ensemble des nœuds et d'éviter des problèmes de convergence de l'algorithme de résolution, et d'autre part de mieux représenter les topologies du chargement aérodynamique. Des structures telles que le choc en tête d'aube seront mieux décrites avec un grand nombre de nœuds, en termes de localisation sur la peau de l'aube mais aussi d'intensité. Les effets de raideur aérodynamique et d'amortissement sont alors mieux transférés à la structure non-linéaire.

La Figure V.20 permet d'observer les topologies de dissipation énergétique en pied d'aube pour le cycle limite atteint sur le point de fonctionnement dp20, pour chacune des configurations  $(NL_2 - EXT_i)_{i \in \{1,2,3\}}$ . Les topologies observées sont les mêmes que dans le cadre de la procédure de couplage faible pour le même point de fonctionnement, quelle que soit la configuration étudiée (voir Figure V.13). Le fait d'avoir conservé un nombre plus important de nœuds d'extrados pour la représentation des efforts aérodynamiques dans les configurations  $NL_2 - EXT_2$  et  $NL_2 - EXT_3$  a permis de mieux converger sur les niveaux de dissipation en pied d'aube. La dissipation énergétique dans la configuration  $NL_2 - EXT_1$  est la plus importante, conformément aux résultats de la Figure V.19 qui prévoient pour ce cas un LCO à une plus grande amplitude de vibration de l'aube. La dissipation en pied d'aube s'affine lorsque d'avantages de nœuds sont conservés sur l'extrados, permettant de mieux représenter les efforts aérodynamiques et ainsi le système fluide structure.

### 6.3 Convergence de l'algorithme de couplage fort

Nous nous intéressons dans cette sous-section à la convergence de l'algorithme de couplage fort dans notre cas d'application. En particulier, nous souhaitons estimer combien d'itérations de couplage fluide structure sont nécessaires pour obtenir la dynamique non-linéaire convergée de l'aube en présence de fluide. La Figure V.21 fournit de premiers éléments de réponse sur la convergence de l'algorithme.

Sur cette Figure, le numéro d'itération correspond au nombre de fois où une évaluation des efforts aérodynamiques a été effectuée dans *elsA* après extraction des dynamiques non-linéaires de l'aube (*i.e* le nombre de fois où l'on passe dans la boîte *elsA* en Figure IV.4). On constate qu'une seule itération permet d'obtenir la dynamique globale du MCNL : les trajectoires de fréquence

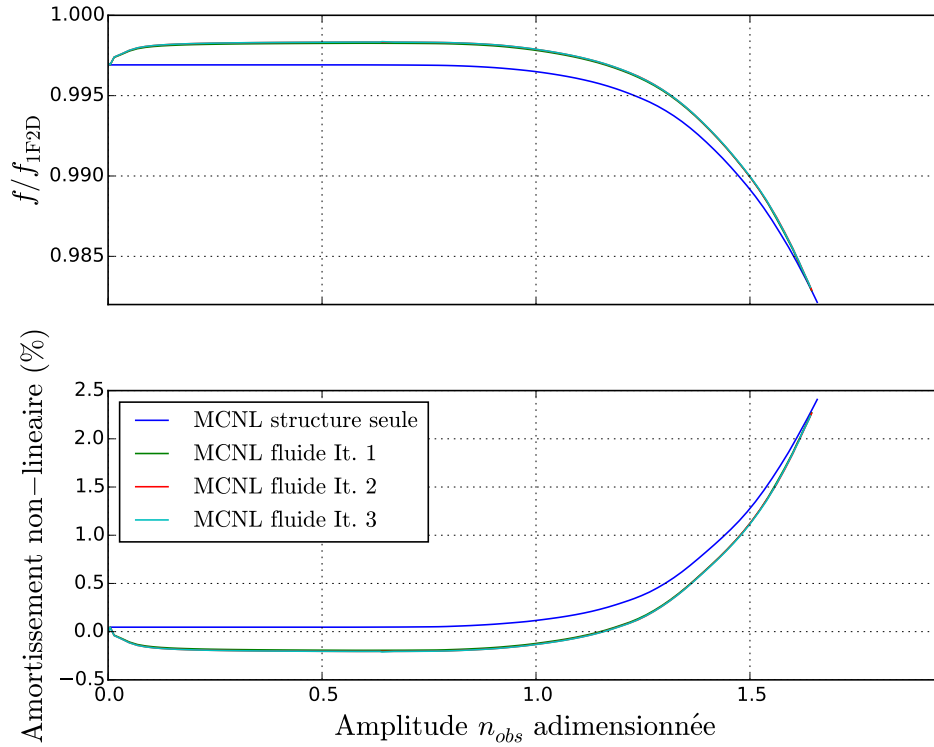


FIGURE V.21 – Évolution du MCNL en fonction de l’itération de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20

et d’amortissement non-linéaire sont identiques d’une itération de couplage à la suivante. En particulier, l’amplitude du nœud d’observation à laquelle apparaît le cycle limite est convergée dès la première itération de couplage, ainsi que sa fréquence fondamentale de vibration. Une comparaison des déplacements non-linéaires sur le LCO par critère de MAC (Modal Assurance Criterion) est proposée en Figure V.22. Il s’agit d’un critère permettant d’attester de la colinéarité de vecteurs quelconques. Appliqué sur une base de modes de déformation, il permet de vérifier si les modes ont la même topologie. Nous nous servons ici du critère de MAC pour comparer entre elles les harmoniques du déplacement des nœuds physiques du MCNL à chaque itération de couplage (voir Figures V.22a, V.22b et V.22c), et d’une itération à l’autre (voir Figures V.22d, V.22e et V.22f). Pour des modes complexes, c’est-à-dire des modes présentant des déphasages entre les degrés de liberté, le critère de MAC s’écrit :

$$MAC(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{(\Phi_1^H \Phi_2)^2}{(\Phi_1^H \Phi_1)(\Phi_2^H \Phi_2)} \quad (V.1)$$

Les Figures V.22a, V.22b et V.22c montrent que sur le LCO, l’harmonique 2 est corrélée avec les harmoniques 1 (MAC de 0.5 – 0.6) et 3 (MAC de 0.4). Les harmoniques 1 et 3 sont en revanche faiblement corrélées (MAC de l’ordre de 0.1). Les Figures V.22d, V.22e et V.22f nous permettent d’observer les écarts de topologie par harmonique d’une itération à l’autre. On note qu’elles ont très peu évolué après plusieurs itérations de couplage, puisque le critère de MAC appliqué sur une harmonique  $k$  entre deux itérations différentes affiche une corrélation à plus de 99%. La déformée de la structure n’évolue donc pas d’une itération de couplage à la suivante.

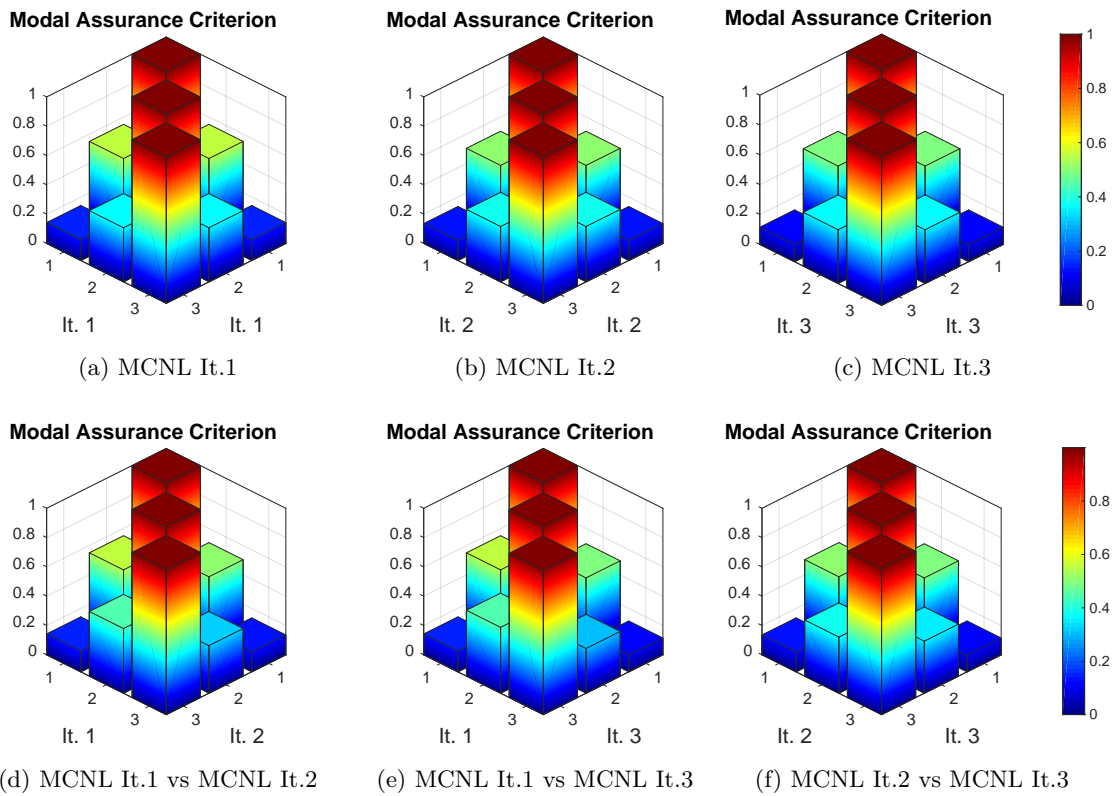


FIGURE V.22 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique du LCO selon l’itération de couplage

Ces résultats ne permettent pas à eux seuls de valider définitivement la convergence de la procédure de couplage fort selon le nombre d’itérations. Il peut être intéressant d’analyser les résultats de calcul sur les degrés de liberté de frottement ainsi que sur ceux où sont appliqués les efforts aérodynamiques, ce que nous proposons avec les Figures V.23 et V.24. La première permet de comparer l’évolution des travaux des efforts aérodynamiques générés par la dynamique du MCNL associé en Figure V.21. La deuxième Figure propose quant à elle une analyse sur l’évolution de la dissipation énergétique en pied d’aube pour chaque MCNL de la Figure V.21.

La Figure V.23 montre que malgré de faibles écarts entre les itérations, les niveaux d’énergie fournie par le fluide à la structure sont sensiblement identiques entre chaque itération de couplage (l’allure des courbes sera commentée plus en détails dans la prochaine sous-section). Ces efforts aérodynamiques sont engendrés par un déplacement multi-harmonique de l’aube, dont la topologie évolue de manière continue selon l’amplitude de  $n_{obs}$  comme illustré par le Tableau V.5. On remarque en particulier que si la topologie de l’harmonique 1 évolue peu par rapport à  $n_{obs}$ , d’importantes variations sont observées pour les harmoniques 2 et 3 à grande amplitude. L’évolution des rapports des maximums d’amplitude entre harmoniques  $\frac{d_{hi}}{d_{hj}}$  montre notamment que l’harmonique 3 apporte une contribution croissante à la dynamique de l’aube. La réalisation d’une nouvelle itération de couplage fort ne change qu’au second ordre ces topologies, qui d’après l’annexe B restent colinéaires à plus de 99% pour les harmoniques qui répondent le plus. Les déplacements de l’aube sont donc les mêmes, et vont déclencher les mêmes glissements, ce qui est en accord avec les résultats de dissipation énergétique présentés en Figure V.24.

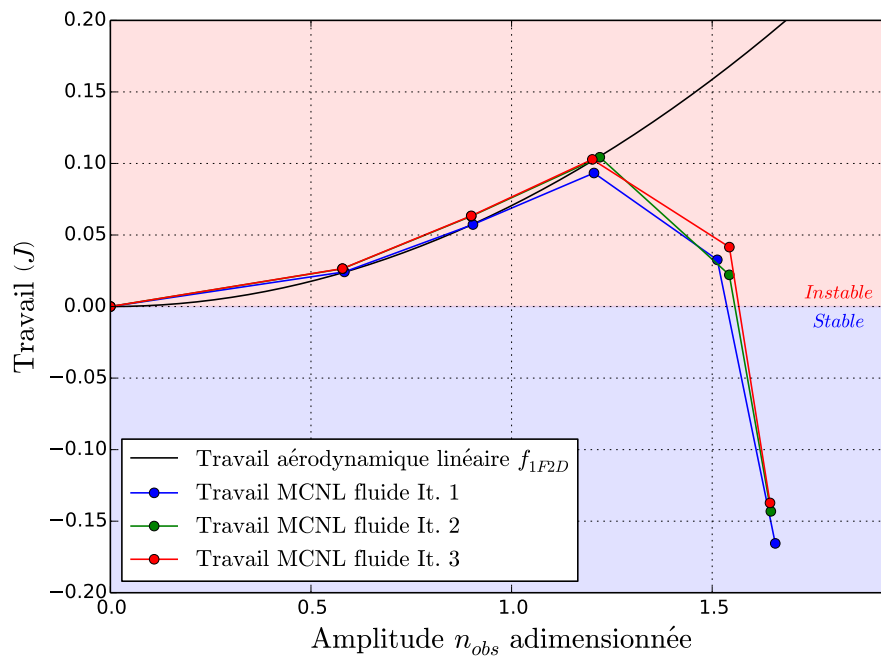


FIGURE V.23 – Travail des efforts aérodynamiques générés par la dynamique non-linéaire de l'aube en fonction de l'itération de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20

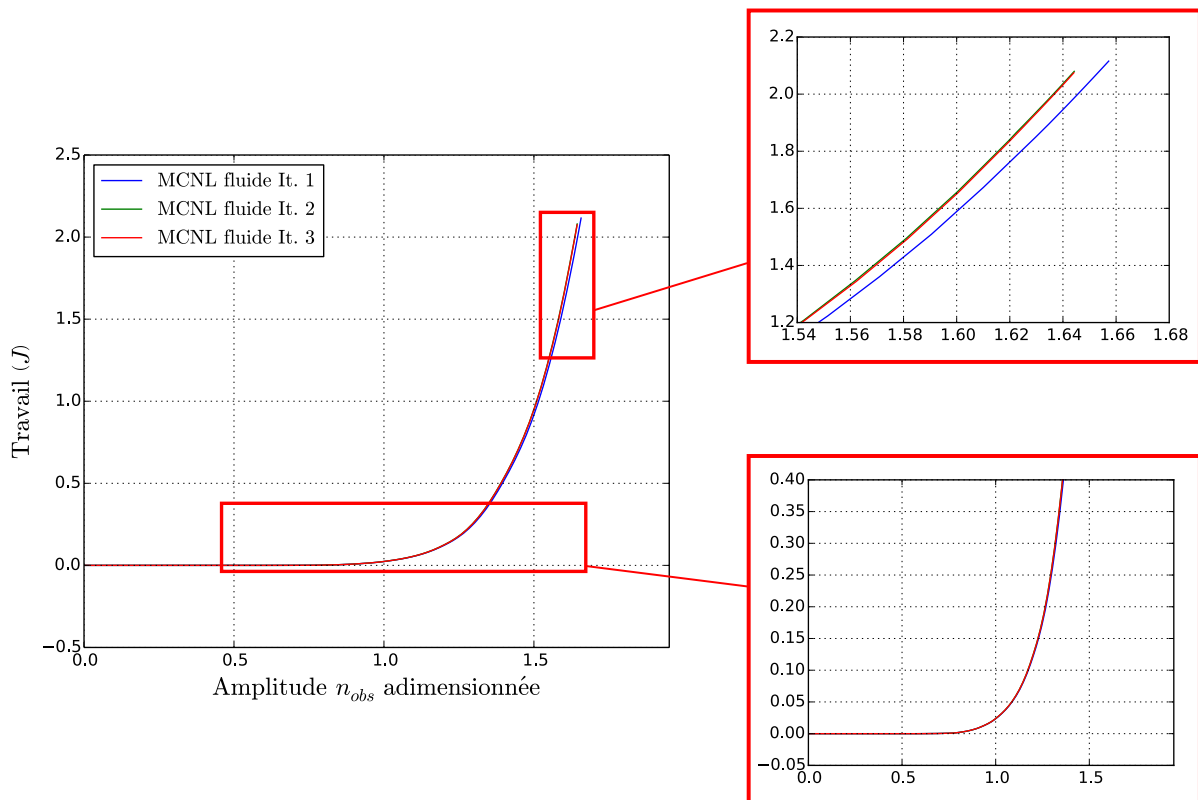


FIGURE V.24 – Énergie dissipée en pied d'aube en fonction du nombre d'itérations de couplage fort réalisées



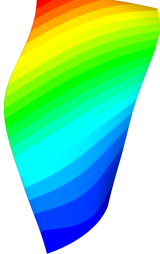
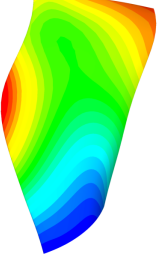
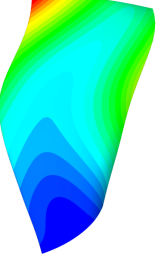
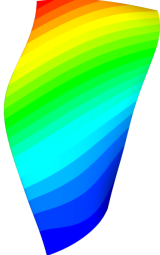
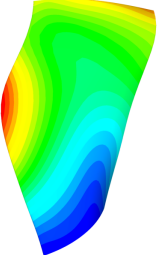
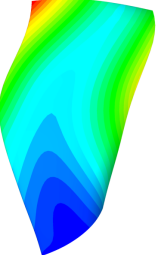
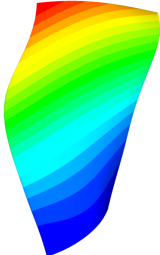
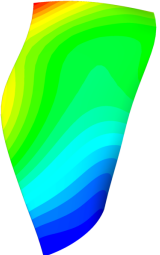
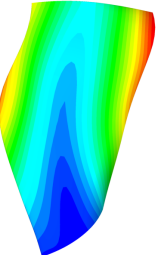
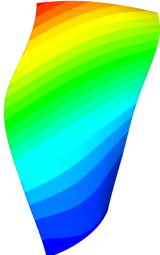
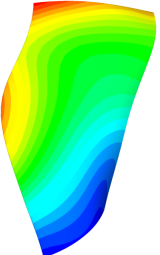
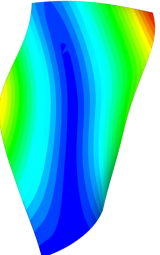
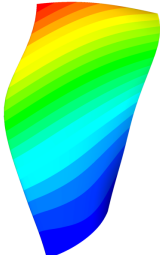
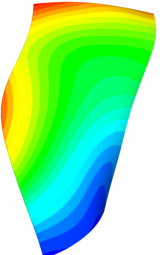
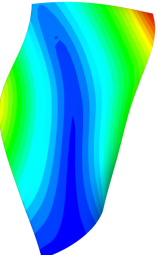
Ampl. $n_{obs}$	Harmonique 1	Harmonique 2	Harmonique 3
1.66	 $\frac{d_{h1}}{d_{h1}} = 1$	 $\frac{d_{h2}}{d_{h1}} = 6.5e^{-4}$	 $\frac{d_{h3}}{d_{h1}} = 1.7e^{-2}$
1.51	 $\frac{d_{h1}}{d_{h1}} = 1$	 $\frac{d_{h2}}{d_{h1}} = 7.2e^{-4}$	 $\frac{d_{h3}}{d_{h1}} = 1.2e^{-2}$
1.20	 $\frac{d_{h1}}{d_{h1}} = 1$	 $\frac{d_{h2}}{d_{h1}} = 8.3e^{-4}$	 $\frac{d_{h3}}{d_{h1}} = 2.8e^{-3}$
0.90	 $\frac{d_{h1}}{d_{h1}} = 1$	 $\frac{d_{h2}}{d_{h1}} = 6.4e^{-4}$	 $\frac{d_{h3}}{d_{h1}} = 1.8e^{-3}$
0.58	 $\frac{d_{h1}}{d_{h1}} = 1$	 $\frac{d_{h2}}{d_{h1}} = 6.0e^{-4}$	 $\frac{d_{h3}}{d_{h1}} = 1.5e^{-3}$




TABLEAU V.5 – Évolution des déplacements totaux par harmonique en fonction de l'amplitude de  $n_{obs}$  pour le point de fonctionnement dp20 après une itération de couplage fort et rapports d'amplitude par rapport au fondamental  $h_1$




Tous ces résultats suggèrent qu'une seule itération de couplage permet d'avoir une très bonne estimation de la dynamique non-linéaire du système fluide structure, en particulier de la dynamique sur le LCO. Compte tenu de la complexité de mise en œuvre de la procédure de couplage fort, nous supposons dans la suite de ces travaux que le système est convergé en une itération.

La convergence du MCNL ayant été étudiée selon différents critères (configuration retenue, nombre d'itérations de couplage fort réalisé), nous proposons dans la sous-section suivante d'étudier plus finement les caractéristiques du couplage fluide structure dans le cadre de la procédure de couplage fort.

#### 6.4 Influence de la dynamique non-linéaire de la structure sur l'évaluation des efforts aérodynamiques pour le couplage fort

Cette sous-section propose d'analyser de quelle manière les non-linéarités se manifestent et influent sur la stabilité aéroélastique de la soufflante. Dans notre approche par mode complexe non-linéaire, le frottement modifie la dynamique du système aube disque par rapport au cas linéaire selon deux quantités : la déformée de la structure et sa fréquence libre. La déformée non-linéaire se caractérise par un contenu harmonique plus riche que son pendant linéaire, tandis que la fréquence libre glisse vers des valeurs inférieures en raison de l'assouplissement des portées. L'approche par couplage fort proposée dans ces travaux de thèse permet d'analyser séparément les contributions de chacune de ces quantités sur l'évaluation des efforts aérodynamiques, et sur le calcul du MCNL qui suit. On peut par exemple réaliser pour chaque point d'extraction  de la Figure V.19 un calcul aéroélastique à la fréquence libre non-linéaire correspondante, mais en imposant à la structure une déformée selon son mode linéaire : on observe de cette manière l'impact de la déformée non-linéaire seule sur l'évaluation des efforts aérodynamiques. Ainsi, quatre cas de figure ont été étudiés pour chaque point point d'extraction  de la Figure V.19, selon que l'on considère les déformées  $\Phi_{\bullet}$  et fréquences libres  $f_{\bullet}$  linéaires  $\bullet_L$  ou non-linéaires  $\bullet_{NL}$ . Chaque combinaison de ces éléments a été étudiée dans le cadre de la procédure de couplage fort, en n'effectuant pour chacune d'entre elles qu'une seule série de calculs aéroélastiques afin d'évaluer les efforts aérodynamiques sur les points , conformément aux résultats de la sous-section V.6.3. Les MCNL qui en résultent sont affichés en Figure V.25.

Pour chacune des combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  ayant permis de calculer les MCNL de la Figure V.25, les dynamiques à faible amplitude sont identiques car on se place dans le cas asymptotique linéaire. Pour ce cas asymptotique, l'amplitude de mouvement est trop faible pour déclencher les non-linéarités de frottement, de sorte que les valeurs de fréquence libre et d'amortissement non-linéaire sont pilotés par la dynamique fluide structure linéarisée sur le point de fonctionnement correspondant. Il existe par la suite une amplitude propre à chacune des combinaisons au-delà de laquelle les efforts aérodynamiques évoluent selon la dynamique du mouvement employée dans les calculs aéroélastiques. Dans le cas  $\Phi_{NL} - f_L$  par exemple, les efforts aérodynamiques ont été obtenus grâce à la déformée non-linéaire multiharmonique de la structure seule , en imposant une fréquence fondamentale de mouvement égale à la fréquence du mode propre linéaire 1F2D.

Sur la Figure V.25, les combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  semblent faire apparaître deux groupes de MCNL, mieux visibles pour les plus grandes amplitudes : ces deux groupes se caractérisent respectivement par l'emploi de la fréquence linéaire et non-linéaire dans les calculs aéroélastiques. Le

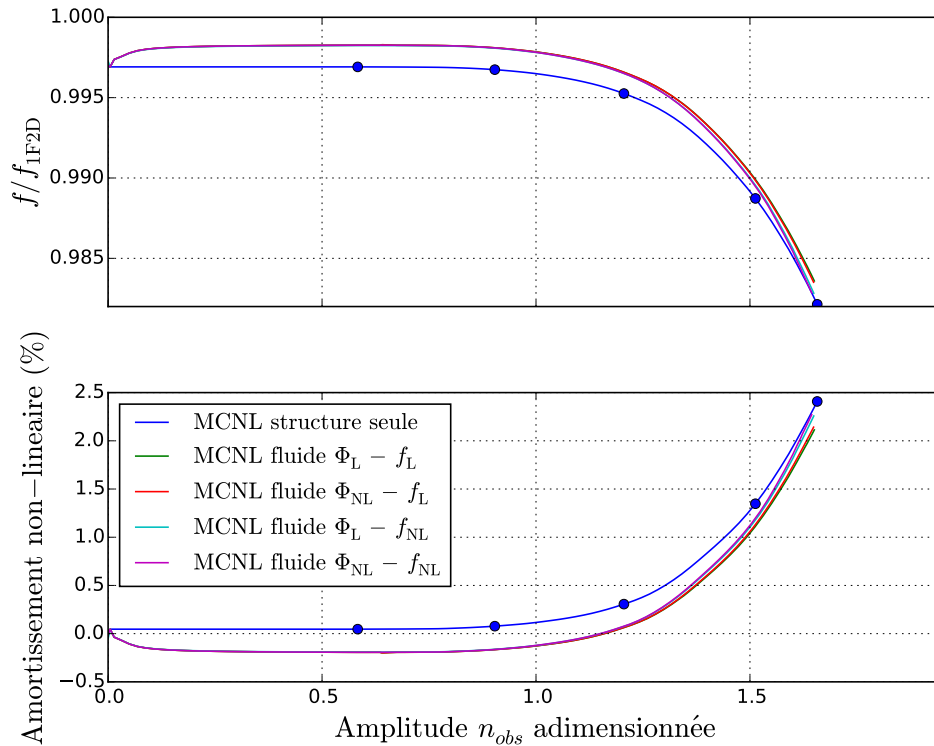


FIGURE V.25 – Comparaison des MCNL selon la dynamique de l’aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20.  $\Phi_{\bullet}$  : déformée.  $f_{\bullet}$  : fréquence libre.  $\bullet_L$  : linéaire.  $\bullet_{NL}$  : non-linéaire.

fait de prendre en compte le glissement fréquentiel à grande amplitude dans l’évaluation des efforts aérodynamiques induit un écart dans l’évaluation de la dynamique non-linéaire du système fluide structure, que nous pouvons déjà relier aux résultats de calculs en couplage faible présentés dans la section précédente. En effet, nous avons déjà vu qu’un écart en fréquence de mouvement dans un cadre d’interaction acoustique entre la soufflante et son entrée d’air avait un impact au premier ordre sur la dynamique du système fluide structure. Pour la configuration  $NL_2 - EXT_2$ , on retrouve bien cette influence de la fréquence sur la dynamique du système, que l’on attribue donc à la présence d’ondes acoustiques dans l’entrée d’air. En ce qui concerne la déformée non-linéaire, celle-ci semble avoir un impact plus limité sur le calcul du MCNL dans la gamme d’amplitude et sur le point de fonctionnement étudiés.

Pour compléter les analyses de la Figure V.25, nous proposons ici d’étudier les échanges énergétiques qui se produisent sur le système fluide structure pour chacune des combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$ . Nous allons nous intéresser d’une part à la dissipation énergétique en pied d’aube et d’autre part aux échanges énergétiques entre le fluide et la structure. La Figure V.26 illustre la dissipation par frottement pour chacune des combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$ , superposée à la dissipation énergétique obtenue dans le cadre de la procédure de couplage faible pour le point de fonctionnement dp20. La Figure V.27 propose quant à elle de comparer les travaux des efforts aérodynamiques calculés avec *elsA* et générés par les dynamiques  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  à chacune des amplitudes d’extraction  $\bullet_L$  de la dynamique de la structure seule. Ces travaux sont comparés au travail des efforts aérodyna-

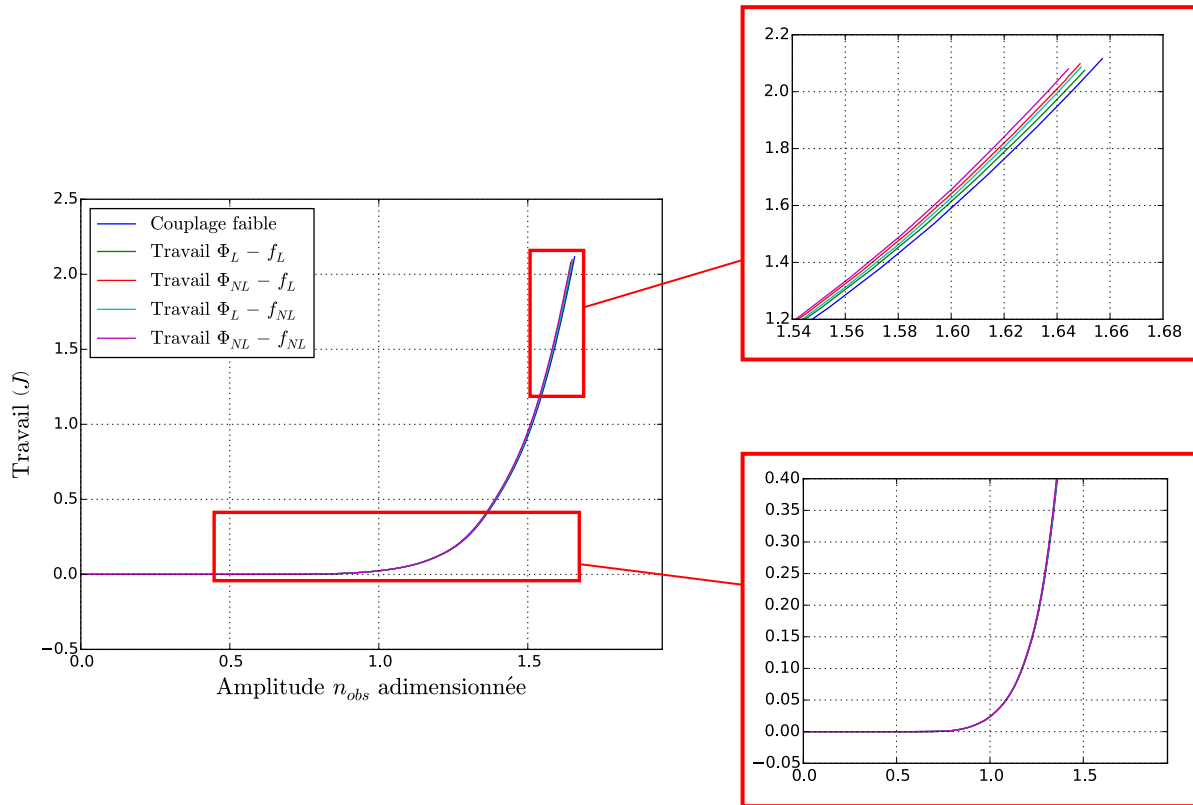


FIGURE V.26 – Énergie dissipée en pied d'aube selon la dynamique de l'aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20.  $\Phi_{\bullet}$  : déformée.  $f_{\bullet}$  : fréquence libre fondamentale.  $\bullet_L$  : contenu linéaire.  $\bullet_{NL}$  : contenu non-linéaire.

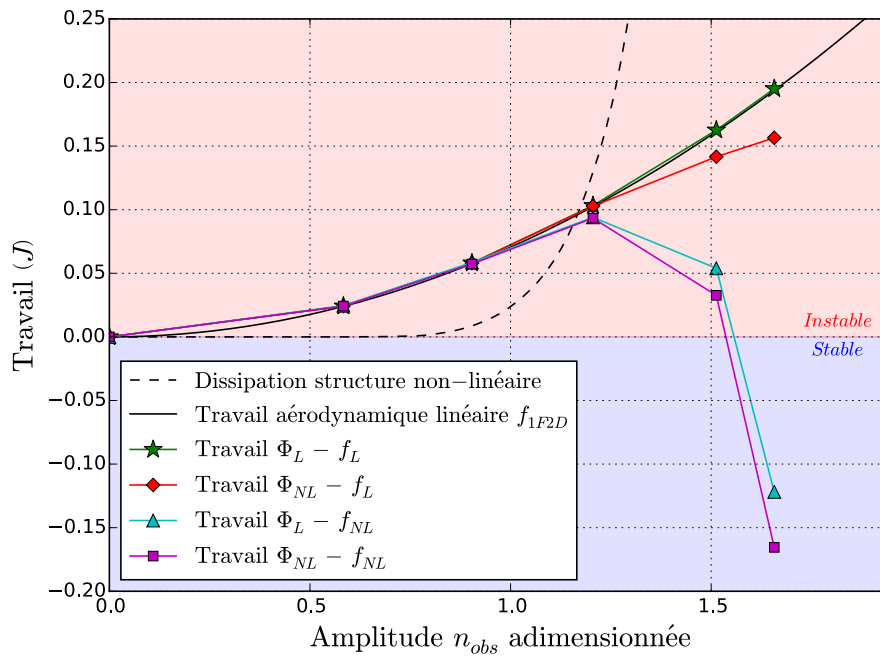


FIGURE V.27 – Travail des efforts aérodynamiques selon la dynamique de l'aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20.  $\Phi_{\bullet}$  : déformée.  $f_{\bullet}$  : fréquence libre fondamentale.  $\bullet_L$  : contenu linéaire.  $\bullet_{NL}$  : contenu non-linéaire.

miques obtenus pour le mode linéaire 1F2D dans une hypothèse de linéarité des efforts fluides (voir sous-section II.6.3) et à l'énergie dissipée en pied d'aube par frottement sec. Ces deux Figures doivent être analysées simultanément pour mieux comprendre l'influence de la dynamique non-linéaire de l'aube sur la procédure de couplage fort.

À faible amplitude, les courbes d'énergie dissipée en pied d'aube et de travail des efforts aérodynamiques sont superposées : comme pour la Figure V.25, on se retrouve sur l'état linéarisé fluide structure du point de fonctionnement correspondant. L'apparition des non-linéarités de frottement à une amplitude de l'ordre de 0.75 pour chaque combinaison se traduit par de la dissipation énergétique en pied d'aube (voir Figure V.26) ainsi que par un décalage fréquentiel et une déformée plus riche en harmoniques (voir Figure V.25). L'évolution de la fréquence et de la déformée non-linéaire est toutefois négligeable sur la plage d'amplitude comprise entre 0.75 et 1.2 d'après la Figure V.25, de sorte que le comportement du fluide pour chacune des combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  reste le même d'un point de vue énergétique. La Figure V.27 indique en ce sens que le travail des efforts aérodynamiques de chaque combinaison est identique jusqu'à une amplitude de l'ordre de 1.2. Au-delà de cette amplitude de vibration de l'aube, les non-linéarités de frottement induisent des décalages en fréquence de plus en plus importants ainsi qu'une déformée plus riche en harmoniques, qui impactent les efforts aérodynamiques selon les combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  retenues.

Pour des amplitudes supérieures à 1.2, la Figure V.27 montre que dès lors qu'une composante non-linéaire  $\bullet_{NL}$  est prise en compte, le travail des efforts aérodynamiques générés par les combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  ne suit plus la trajectoire quadratique du travail des efforts aérodynamiques linéarisés — par rapport au mouvement du mode 1F2D. Les grandes amplitudes mettent une nouvelle fois en évidence deux groupes de MCNL qui se distinguent par l'emploi de la fréquence linéaire  $\Phi_{\bullet} - f_L$  (— —) ou non-linéaire  $\Phi_{\bullet} - f_{NL}$  (— —) dans les calculs aéroélastiques. Si dans le cas où la fréquence linéaire est employée, on observe des niveaux de travail fluide proches du travail théorique des efforts aérodynamiques linéarisés par rapport au mouvement —, l'emploi de la fréquence non-linéaire change totalement la stabilité aéroélastique du système fluide structure, indépendamment de la dissipation en pied d'aube. On observe en particulier que le travail des efforts aérodynamiques change de signe pour des amplitudes légèrement supérieures à 1.5. L'augmentation de l'amplitude de mouvement permet de sortir de la poche de flottement grâce au glissement fréquentiel généré par les non-linéarités, par comparaison des combinaisons  $\Phi_L - f_L$  — et  $\Phi_L - f_{NL}$  —.

Cet effet de la fréquence est le même que celui observé dans le cadre du couplage faible pour le même point de fonctionnement, mis en évidence par le Tableau V.4. Le glissement fréquentiel généré par les non-linéarités de frottement a changé les conditions de propagation acoustique dans l'entrée d'air, si bien qu'indépendamment de la dissipation en pied d'aube, l'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air qui rendait initialement le système instable à faible amplitude le stabilise à très grande amplitude. En pratique toutefois, le LCO est atteint à de plus faibles amplitudes par l'effet conjoint de la dissipation en pied d'aube et du changement des conditions de propagation acoustique dans l'entrée d'air.

En ce qui concerne l'effet des harmoniques supérieures du mouvement, la comparaison des travaux des forces aérodynamiques obtenus par l'emploi des déformées linéaires  $\Phi_L - f_{\bullet}$  (— —) et

non-linéaires  $\Phi_{NL} - f_{\bullet}$  (— —) montre que celles-ci ont un impact plus modéré que la fréquence sur la stabilité aéroélastique du système fluide structure, mais toutefois bien visibles pour des amplitudes supérieures à 1.2. Les tendances fournies par ces résultats sont opposées à celles présentées par Berthold *et al.* [18], qui ont montré un impact important de la déformée non-linéaire et relativement faible de la fréquence de mouvement sur la stabilité aéroélastique d'une turbine avec frottements sur les talons des aubes. Quelques pistes peuvent permettre d'expliquer ces écarts de résultats, comme le type de roue aubagée considérée ainsi que les non-linéarités qui y sont associées. Par exemple, pour les turbines où des non-linéarités de frottement apparaissent sur les talons en tête d'aube, le changement de déformée de la structure aura un impact direct sur l'état de contact des talons et ainsi sur la dynamique de la turbine. Un impact plus fort de la déformée sur le travail des forces aérodynamiques est donc attendu pour une turbine en raison de l'emplacement des interfaces de contact. Par ailleurs, la propagation acoustique est dans notre cas le facteur déterminant quant à la stabilité aéroélastique de notre roue aubagée au travers de l'évolution de la fréquence libre de la structure.

Pour finir, la Figure V.26 montre que pour de grandes amplitudes, l'énergie dissipée en pied d'aube n'est pas exactement la même entre les combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$ , ce qui signifie que l'aérodynamique a une influence sur la dissipation énergétique en fonction de l'amplitude de mouvement. Ce constat implique que le chargement aérodynamique n'a pas seulement modifié la fréquence libre du système à cause des termes de raideur aérodynamique, mais a également eu un impact sur la déformée de la structure et donc sur la dissipation par frottement. Ce constat est différent de celui observé dans le cadre du couplage faible, pour lequel la Figure V.10 suggérait que la dissipation énergétique ne dépendait de rien d'autre que de l'amplitude de mouvement. Nous reviendrons sur ce point au cours de la section V.7.

L'état de dissipation aux portées sur les cycles limites atteints pour chacune des combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  est affiché en Figure V.28. Les topologies observées sont les mêmes et les écarts négligeables, de sorte que pour l'amplitude de LCO, les paramètres non-linéaires de la structure (fréquence et forme) ne changent pas l'état de frottement aux portées. Cette observation est cohérente avec la Figure V.25, qui montrent que les cycles limites sont atteints pour la même amplitude du nœud d'observation à laquelle l'aérodynamique n'est pas beaucoup impactée par les différentes combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$ .

L'ensemble des résultats présentés dans cette sous-section permettent d'analyser les contributions de la dynamique non-linéaire de l'aube à la stabilité aéroélastique du système fluide structure. Ils ont notamment mis en évidence le fort impact des décalages fréquentiels générés par le frottement aube disque sur l'analyse de stabilité. Les résultats présentés en Figure V.27 ont permis de renforcer l'idée selon laquelle la propagation acoustique joue un rôle majeur dans la stabilité aéroélastique du système fluide structure, même en présence de non-linéarités de type frottement. Les glissements fréquentiels s'opérant sur le système modifient au premier ordre les caractéristiques acoustiques de la conduite, de sorte que le système peut atteindre un état de stabilité grâce à l'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air indépendamment de la dissipation générée en pied d'aube. Les harmoniques supérieures du mouvement semblent quant à elles avoir un impact plus modéré sur l'ensemble de la procédure de couplage fort.

Dans la prochaine sous-section, nous allons comparer les résultats obtenus à l'aide de la mé-

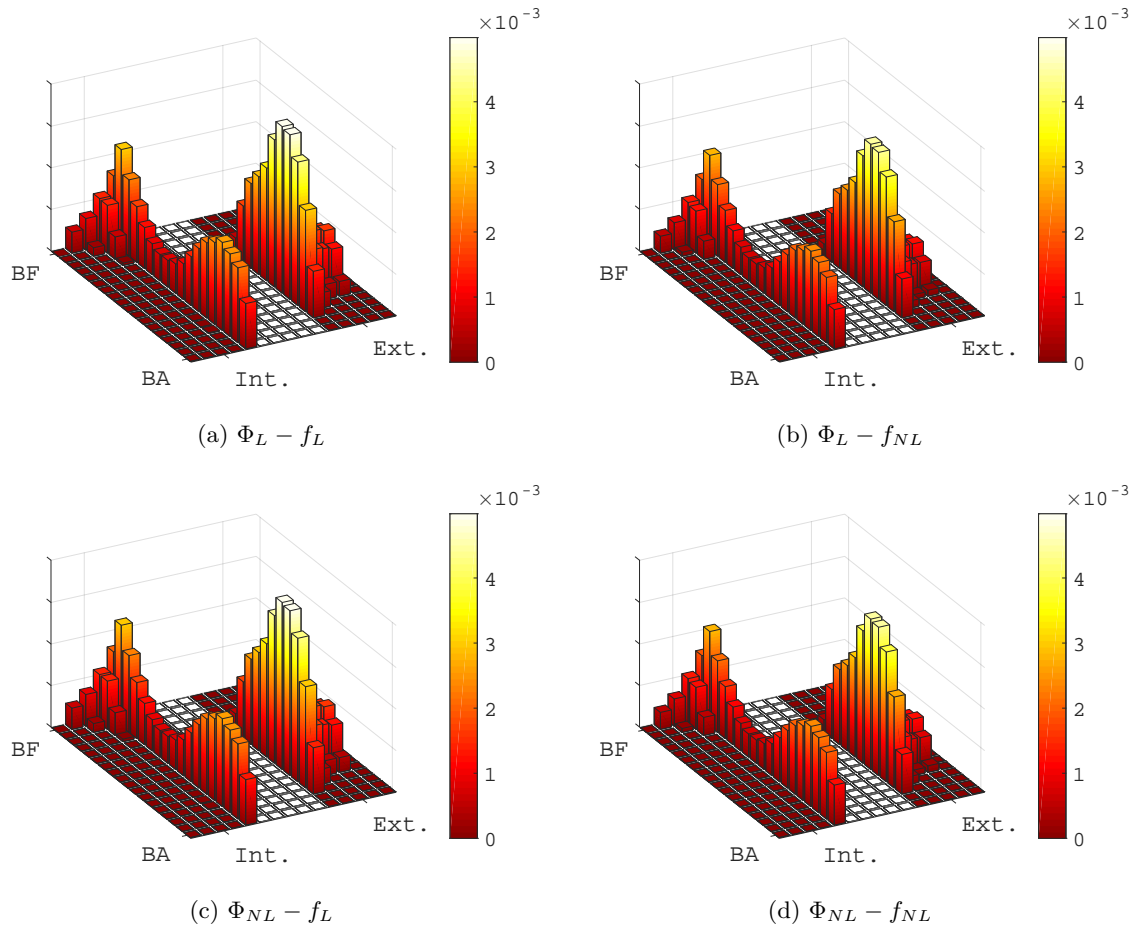


FIGURE V.28 – Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage fort pour les combinaisons  $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$  sur le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.).

thode de couplage fort aux mesures expérimentales réalisées sur la soufflante.

## 6.5 Comparaison entre les résultats numériques et les mesures expérimentales

La procédure de couplage fort a été appliquée sur les points de fonctionnement dp19, dp20 et dp21, en employant un coefficient de frottement  $\mu$  de 0.1. Les LCO obtenus ont été superposés à ceux déjà présentés dans la procédure de couplage faible, et sont visibles en Figure V.29. La procédure de couplage fort proposée dans le cadre de ces travaux fournit des résultats cohérents avec la méthode de couplage faible et des mesures expérimentales. On retrouve en particulier le plateau de saturation en amplitude aux mêmes niveaux pour les débits correspondants.

Nous proposons dans la prochaine section de comparer les résultats fournis par les deux méthodes de couplage appliquées à la configuration industrielle au cours de ce Chapitre.

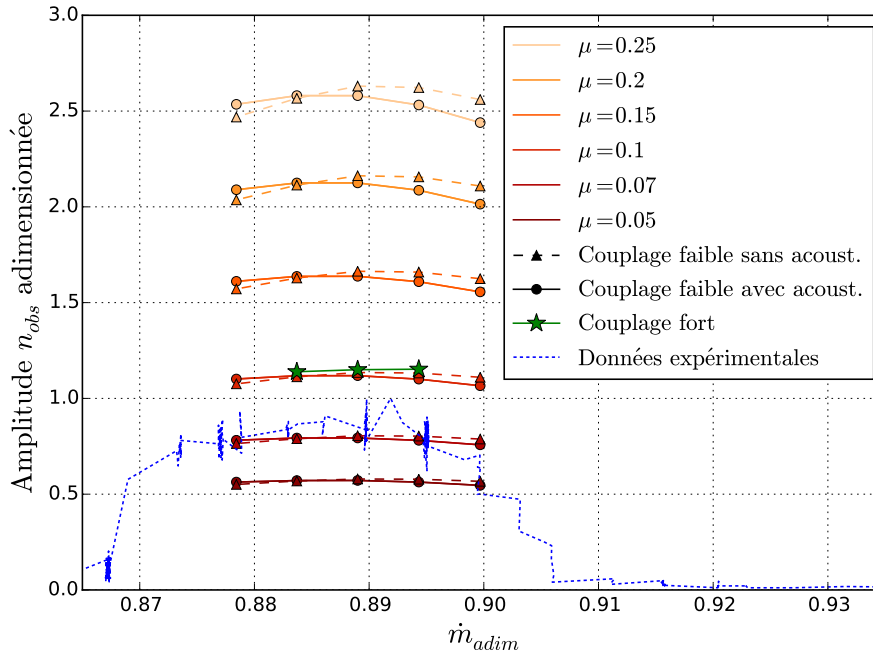


FIGURE V.29 – Amplitude de  $n_{obs}$  sur les cycles limites atteints dans la poche de flottement à 75% de régime nominal

## 7 Synthèse et comparaison entre les deux approches de couplage

Nous allons commencer par analyser la capacité des méthodes à prédire des LCO : les résultats présentés en Figure V.29 montrent que celles-ci permettent de déterminer la présence d'un cycle limite dans une poche de flottement. De plus, l'amplitude de ce cycle limite est sensiblement la même pour les deux méthodes de couplage, et est cohérente avec les mesures expérimentales à disposition pour la soufflante considérée. Par ailleurs, les Figures V.13 et V.28 nous montrent que la dissipation générée en pied d'aube sur le LCO pour les deux méthodes de couplage est équivalente, à la fois en termes de topologie mais aussi en niveaux d'énergie dissipée. Les déplacements obtenus sur l'ensemble des degrés de liberté physiques présentent également des formes similaires, comme en atteste la Figure V.30 qui compare la colinéarité des harmoniques du LCO par méthode de couplage. Pour les harmoniques 1 et 3, les méthodes de couplage sont colinéaires à plus de 99%. On observe en revanche une moins bonne colinéarité entre les méthodes pour l'harmonique 2, qui affiche un critère de MAC de l'ordre de 0,35. En termes de topologie donc, les déplacements générés par l'harmonique 2 ne sont pas les mêmes d'une méthode à l'autre. L'impact sur le déplacement temporel de la structure est toutefois minime, car l'harmonique 2 n'y contribue que très peu. Les harmoniques impaires représentent en effet bien mieux la saturation des efforts non-linéaires tangentiels de part la nature même de la loi de Coulomb qui également impaire. Cette propriété se retrouve donc dans les déplacements associés de la structure.

Analysons maintenant le comportement des MCNL sur la plage d'amplitude parcourue par le nœud  $n_{obs}$ . La Figure V.26 montre que l'énergie dissipée en pied d'aube en fonction de l'amplitude de  $n_{obs}$  ne dépend qu'au second ordre de la méthode de couplage employée, ce qui signifie



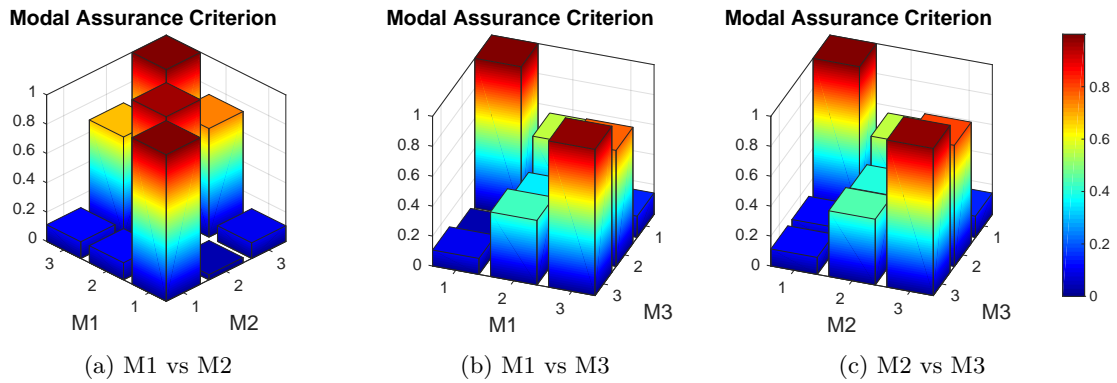


FIGURE V.30 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique du LCO selon la méthode de couplage employée pour la configuration  $NL_2 - EXT_2$ . M1 : couplage faible sans acoustique ; M2 : couplage faible avec acoustique ; M3 : couplage fort.

que la représentation de l'aérodynamique n'a également un impact qu'au second ordre sur la dissipation. Cette observation était attendue, car le glissement en pied d'aube dépend surtout de l'amplitude de déplacement de la structure. La Figure V.31 permet quant à elle de comparer les niveaux d'énergie échangée entre le fluide et la structure en fonction de l'amplitude de  $n_{obs}$  pour les différentes méthodes de couplage. Dans le cas des méthodes de couplage faible, le travail des efforts aérodynamiques a été calculé à partir des calculs d'amortissement aérodynamique réalisés dans ce cadre. Pour rappel, on obtient le travail des efforts aérodynamiques à partir de l'équation II.151 :

$$W = -2\pi \mu \omega^2 \xi_{aero}(\omega) q^2 \quad (V.2)$$

où  $\xi_{aero}$  peut évoluer en fonction de la pulsation libre  $\omega$  selon l'interpolation des termes aérodynamiques dans le cadre de la méthode de couplage faible avec prise en compte de l'acoustique.

On observe sur la Figure V.31 que du point de vue de l'aérodynamique, les méthodes de couplage faible sans et avec acoustique s'apparentent respectivement à la méthode de couplage fort en employant les combinaisons  $\Phi_L - f_L$  et  $\Phi_L - f_{NL}$ . Dans l'hypothèse de fluide linéaire qui a été faite pour ce cas d'application, choisir entre les méthodes de couplage revient donc à choisir le niveau de physique que l'on cherche à atteindre dans la représentation des efforts aérodynamiques :

- la méthode de couplage faible sans prise en compte de l'acoustique permet d'obtenir une représentation des efforts aérodynamiques équivalentes à la méthode de couplage fort avec la combinaison  $\Phi_L - f_L$ . La représentation de l'aérodynamique est linéarisée par rapport au mouvement de la structure selon le mode propre linéaire (déformée et fréquence) étudié sur le point de fonctionnement correspondant ;
- la méthode de couplage faible avec prise en compte de l'acoustique permet d'obtenir une représentation des efforts aérodynamiques équivalentes à la méthode de couplage fort avec la combinaison  $\Phi_L - f_{NL}$ . Elle permet ainsi de prendre en compte l'impact de la fréquence de mouvement de la déformée du mode linéaire sur la propagation acoustique dans l'entrée d'air, et donc sur la stabilité aéroélastique ;



- la méthode de couplage fort permet d'obtenir une représentation des efforts aérodynamiques tenant compte des changements de fréquence de mouvement ainsi que des déformées compte tenu des non-linéarités de frottement. Il s'agit du plus haut niveau de fidélité proposé entre les trois méthodes. De plus, il est possible avec cette méthode de s'affranchir de l'hypothèse de fluide linéaire si l'algorithme de déformation de maillage le permet, la rendant plus générale que les précédentes.

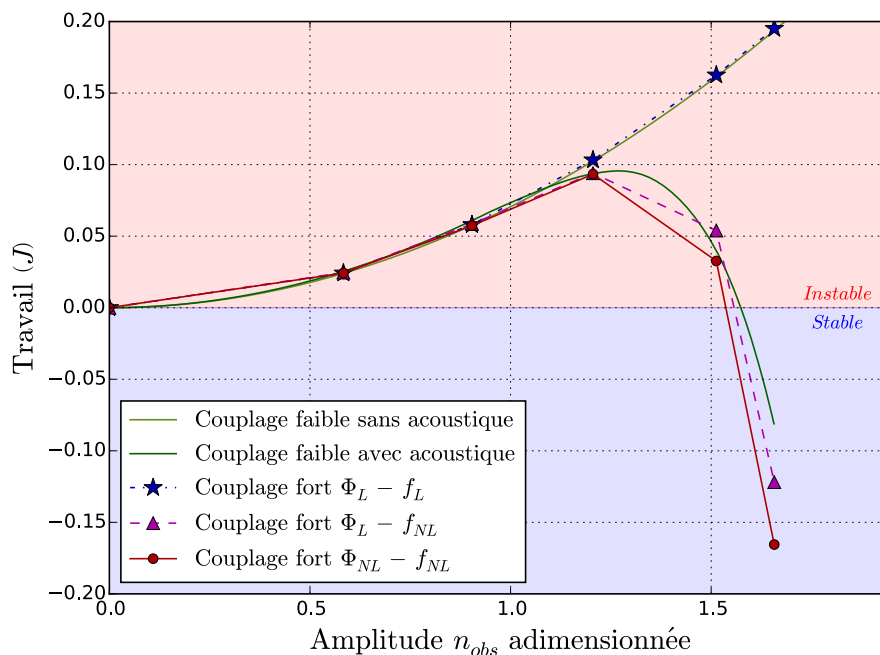


FIGURE V.31 – Travail des efforts aérodynamiques selon la méthode de couplage employée pour le point de fonctionnement dp20.

D'un point de vue plus pratique, l'application de la méthode de couplage faible sans prise en compte de l'acoustique est la plus rapide à mettre en œuvre. Elle ne nécessite qu'un seul calcul aéroélastique utilisant le mode propre linéaire de la structure pour ensuite alimenter un calcul de MCNL. La prise en compte de l'acoustique demande de réaliser au moins deux calculs aéroélastiques pour réaliser une interpolation des termes aérodynamiques en fonction de la fréquence de vibration. Dans le cadre de ces travaux de thèse, une interpolation entre trois valeurs de fréquence a été utilisée pour tenir compte de la forte sensibilité des termes aérodynamiques à la fréquence. Enfin, la méthode de couplage fort nécessite autant de calculs aéroélastiques que d'échantillons retenus selon l'amplitude de mouvement de la structure, et éventuellement plusieurs itérations de processus de couplage fort. Le choix final de la méthode à appliquer dépendra donc du rapport fidélité physique/temps de calcul exigé par l'application demandée.

## 8 Bilan

Au cours de ce dernier Chapitre, une application des méthodes de couplage fluide structure proposées au Chapitre IV a été réalisée sur une configuration industrielle. Une soufflante représentative de l'état de l'art a été modélisée pour tenir compte des non-linéarités de frottement entre l'aube et le disque. Les résultats obtenus avec les méthodes proposées sont cohérents entre eux. Ils sont de plus bien corrélés aux mesures expérimentales à disposition, des cycles limites ayant pu être prédits numériquement aux amplitudes observées expérimentalement. Les deux méthodes de couplage ont mis en évidence le rôle majeur de l'acoustique sur la stabilité aéroélastique en présence d'une structure avec non-linéarités de frottement. En particulier, il a été montré que l'acoustique à l'origine d'une instabilité de flottement pouvait théoriquement stabiliser le système fluide structure à cause des décalages fréquentiels générés par le frottement aube disque, indépendamment de la dissipation par frottement sec en pied d'aube. Si les stratégies de couplage proposées fournissent des résultats similaires, la méthode de couplage fort est plus complexe à mettre en œuvre que les méthodes de couplage faible sans et avec prise en compte de l'acoustique. Toutefois, la méthode de couplage fort est en théorie plus générale, ne faisant pas d'hypothèses sur la linéarité du fluide par rapport au mouvement de la structure. Elle propose donc une meilleure représentation des physiques en jeu et une plus grande adaptabilité aux différents cas d'étude envisagés.



# Conclusion et perspectives

## Conclusion

Ces travaux de thèse ont eu pour objectif de mettre en place une méthodologie permettant de prendre en compte des non-linéarités de frottement en pied d'aube dans l'analyse de stabilité aéroélastique des soufflantes. En outre, cette méthodologie doit tenir compte des interactions acoustiques entre la soufflante et l'entrée d'air, et de leur impact sur la stabilité du système fluide structure.

Dans un premier temps, la stabilité aéroélastique d'un modèle industriel de soufflante a été étudiée en supposant la structure parfaitement linéaire. Un ensemble de calculs aéroélastiques a été réalisé selon deux méthodes de couplage sur une iso-vitesse de fonctionnement où une instabilité de flottement a été détectée expérimentalement. Ces calculs aéroélastiques s'appuient notamment sur les équations URANS pour représenter le fluide, et sur une représentation modale de la structure qui est réduite à ses modes d'intérêt. Les premiers résultats obtenus ont montré que les méthodes numériques mises en place permettaient de prédire les limites de stabilité du modèle de soufflante employé dans un cadre de mécanique linéaire, tout en tenant compte des ondes acoustiques se propageant dans l'entrée d'air et impactant la stabilité du système fluide structure. Toutefois, des écarts de résultats importants ont été obtenus entre les deux méthodes de couplage dans un contexte avéré d'interactions acoustiques entre la soufflante et l'entrée d'air. Une analyse des effets de raideur aérodynamique a mis en lumière l'influence majeure des décalages fréquentiels sur la stabilité aéroélastique de la soufflante par modification de l'interaction acoustique entre la soufflante et l'entrée d'air. Ainsi, une procédure de correction des caractéristiques modales des modes linéaires de la structure à sec a été proposée pour tenir compte du couplage existant entre la réponse libre de la structure et le fluide. Il a été montré que cette procédure permettait d'obtenir une meilleure cohérence entre les résultats fournis par les deux méthodes en cas de propagation acoustique dans l'entrée d'air.

Nous nous sommes ensuite intéressés aux méthodes permettant de décrire la dynamique libre d'un système mécanique présentant des non-linéarités de frottement. Une approche fréquentielle par mode complexe non-linéaire a été retenue, pour sa représentation simple basée sur une analogie avec la dynamique libre des structures linéaires. Cet outil permet de déterminer la dynamique non-linéaire des structures sujettes à des non-linéarités de type frottement sans passer par le calcul d'un régime transitoire typique des méthodes de simulation par intégration temporelle. Il a été montré sur un modèle académique que les modes complexes non-linéaires permettaient en outre de calculer des solutions périodiques stables sur des systèmes à priori instables en absence de non-linéarités.

L'outil pour décrire la dynamique de la structure avec frottements ayant été choisi, la mise en place d'une méthode de couplage aéroélastique partitionnée exploitant les modes complexes non-linéaires a été étudiée. Dans la mesure où ces derniers permettent de suivre l'apparition des cycles limites, un apport de ces travaux de thèse a consisté à étendre leur définition en y incluant un terme d'interaction libre d'origine aérodynamique afin de représenter le couplage. Dès lors, différents niveaux de fidélité ont été proposés pour représenter les efforts aérodynamiques au sein du mode complexe non-linéaire. La première approche, désignée dans ce mémoire comme approche par couplage faible, repose sur une hypothèse de linéarité des efforts aérodynamiques. Après avoir réalisé un calcul aéroélastique en imposant un mouvement harmonique à la structure selon le mode linéaire dont on souhaite étudier la stabilité, les matrices de raideur et d'amortissement aérodynamique associées à ce mode sont récupérées et soustraites aux matrices de raideur et d'amortissement de la structure. On intègre ainsi dans le mode complexe non-linéaire une représentation linéarisée de l'aérodynamique par rapport au mouvement de la structure basée sur des calculs aéroélastiques haute fidélité pour le mode étudié. Cette méthode est dite sans prise en compte de la sensibilité acoustique, car la représentation matricielle des efforts aérodynamiques a été obtenue pour un mode sur sa fréquence propre à sec. Compte tenu des résultats déjà obtenus relatifs aux effets de la raideur aérodynamique sur la stabilité aéroélastique de la soufflante dans un contexte de propagation acoustique, un second apport de ces travaux de thèse a été la proposition d'une variante de la méthode de couplage faible pour tenir compte de la sensibilité acoustique aux variations de fréquence de mouvement. Les matrices de raideur et d'amortissement aérodynamique sont calculées en amont pour plusieurs fréquences de vibration, puis interpolées selon la valeur prise par la fréquence au cours de la résolution du mode complexe non-linéaire.

La seconde approche, désignée comme approche par couplage fort, ne fait quant à elle pas d'hypothèse sur la linéarité du fluide et est par conséquent plus générale. Apport majeur de ces travaux de thèse, elle consiste en une procédure itérative où, à partir d'une première estimation de la dynamique de la structure par mode complexe non-linéaire à sec, les caractéristiques du mouvement (déformée multi-harmonique et fréquence libre) sont extraites pour différents niveaux d'amplitude de vibration et utilisées pour réaliser des calculs aéroélastiques. Les efforts aérodynamiques générés par ces mouvements sont par la suite récupérés et ajoutés à l'équation de mode complexe non-linéaire aux amplitudes correspondantes, en les interpolant entre celles-ci. En réitérant cette procédure, on atteint la convergence du mode complexe non-linéaire décrivant la dynamique libre du système fluide structure avec prise en compte des frottements en pied d'aube. En particulier, la représentation de l'aérodynamique tient compte des changements de déformée et de fréquence induits par les non-linéarités, ainsi que des effets qu'ils provoquent sur la propagation acoustique dans l'entrée d'air.

Ces méthodes de couplage ont finalement été appliquées sur une configuration industrielle pour laquelle des données d'essais sont à disposition. Il a été montré que les résultats fournis par chacune de ces méthodes sont tous cohérents entre eux, et très bien corrélés aux mesures expérimentales. Les méthodes proposées sont en mesure de prédire l'apparition des cycles limites induits par les non-linéarités de frottement en pied d'aube, tout en tenant compte des effets de la propagation acoustique dans l'entrée d'air sur la stabilité aéroélastique du système fluide structure. Ces méthodes ont en outre révélé que si l'acoustique pouvait être à l'origine du flottement pour le système considéré, les changements de fréquence induits par les non-linéarités de frottement sont potentiellement en mesure de rendre le système stable par le seul changement

du comportement acoustique dans l'entrée d'air.

## Discussion et perspectives

Les méthodes développées dans ces travaux de thèse pour intégrer les non-linéarités de frottement dans l'analyse de stabilité aéroélastique proposent des perspectives intéressantes. En terme d'utilisation directe tout d'abord, ces méthodologies peuvent être employées pour l'étude de la réponse libre de n'importe quel système présentant des non-linéarités de frottement : l'étude de la stabilité aéroélastique des aubes de turbine présentant des zones de frottement sur les talons peut par exemple être traitée. De plus, il est tout à fait envisageable de générer plusieurs géométries des zones de contact selon certains paramètres de conception et d'en observer les effets sur la stabilité aéroélastique du système. Dans le cas du contact en pied d'aube, on peut par exemple penser à la dimension des portées (longueur, largeur), l'angle formé entre celles-ci, ainsi que le type d'accroche employé pour jouer sur le nombre d'interfaces de contact (accroche en queue d'arronde, accroche sapon). À terme, un méta-modèle pourrait être créé sur l'espace des paramètres étudié permettant de privilégier certaines pratiques de conception favorisant l'apparition de cycles limites pour des niveaux d'amplitude plus faibles.

Également, il serait possible d'ajouter au modèle aérodynamique un étage d'OGV derrière la soufflante plutôt que de passer par l'utilisation de la zone dérafinée telle que présentée en Figure II.15. Ainsi, on pourrait capter les éventuelles interactions acoustiques entre la soufflante et l'entrée d'air, et les effets induits sur la stabilité aéroélastique de la soufflante.

Une autre application envisageable des méthodes proposées au cours de ces travaux de thèse se base sur les résultats présentés par Sinha et Griffin [146]. Cette étude présentant des situations où un terme de forçage externe pourrait déstabiliser le système fluide structure, il serait par exemple très intéressant d'étudier la stabilité aéroélastique d'une soufflante sujette à une ingestion de vortex sur une coïncidence entre un mode linéaire et un ordre moteur à l'aide des stratégies de couplage proposées au cours du Chapitre IV.

Des pistes d'amélioration des méthodes proposées sont également envisageables, selon que l'on cherche à prendre en compte des phénomènes supplémentaires ou bien à mettre en œuvre les stratégies différemment. À ce titre, il serait intéressant de réaliser une analyse plus fine sur le cycle limite prédit par l'une des stratégies de couplage en y intégrant une notion d'usure. Ce type d'analyse, déjà effectué dans un cadre de réponse forcée [91], n'a jamais été réalisé pour une analyse de cycle limite généré par une instabilité de flottement. Pourtant, les déformations géométriques des portées induites par leur usure est amené à faire évoluer l'état de contact et de frottement entre les aubes et le disque, ce qui est susceptible d'impacter l'existence même du cycle limite à l'intérieur de la poche de flottement. Il est alors envisageable de perdre la stabilité fournie par le frottement en pied d'aube à cause de l'usure des portées. Dans la même idée, il serait également intéressant d'employer dans les stratégies proposées d'autres modèles de frottement, ou bien de changer le coefficient de frottement de la loi de Coulomb selon l'état de surface des portées (et donc de leur usure).

Dans le cadre de la stratégie de couplage fort, différentes améliorations ou variantes pourraient être apportées. Dans notre cas d'application, l'algorithme de déformation de maillage a été le facteur ayant conduit à l'emploi de l'hypothèse de linéarité du fluide, qui n'est pourtant en principe pas nécessaire dans ce cadre. La mise au point de méthodes de déformation de maillage plus robustes permettant d'atteindre de plus grandes amplitudes de déformation est capitale pour

s'affranchir d'hypothèses sur la linéarité du fluide et permettre d'atteindre un couplage total entre physiques non-linéaires.

Également, il est possible d'envisager une nouvelle méthode de couplage fort, où l'aérodynamique ne serait plus traitée par intégration temporelle comme dans ces travaux de thèse, mais par une approche fréquentielle. La méthode de couplage qui en résulterait serait ainsi totalement fréquentielle et convergerait a priori plus rapidement que celle décrite au Chapitre IV selon le nombre d'harmoniques retenues pour les calculs aéroélastiques.

La méthode de couplage fort présentée dans le cadre de ces travaux de thèse a été développée pour décrire la dynamique libre du système fluide structure par mode complexe non-linéaire. Il est toutefois possible de transposer cette méthode au calcul de la réponse forcée d'une soufflante à une excitation de type ingestion de vortex ou vent de travers. Les efforts aérodynamiques générés par ce type d'excitation dépendants de la fréquence de rotation de la soufflante, on peut envisager d'itérer entre un calcul de réponse forcée non-linéaire en balance harmonique et différents calculs aéroélastiques sur une plage de vitesse de rotation proche d'une coïncidence en employant la dynamique non-linéaire de l'aube.

La convergence des calculs aéroélastiques réalisés dans le cadre de ces travaux de thèse a été longue à atteindre, notamment à cause de la taille du modèle utilisé. En particulier, le domaine externe à l'entrée d'air, qui n'est pas exploité pour analyser les résultats mais qui est nécessaire pour permettre la représentation des ondes acoustiques sans réflexion d'ordre numérique, pourrait être supprimé s'il était remplacé par une condition limite adaptée. Une telle condition limite supposerait un contrôle des ondes acoustiques entrantes et sortantes, de sorte à ne renvoyer vers la soufflante que les ondes acoustiques représentatives de la réflexion sur l'entrée d'air. Elle permettrait ainsi de réduire la taille du modèle utilisé et de réaliser les calculs plus rapidement.

# Références

- [1] *IPCC, 2014 : Summary for Policymakers. In : Climate Change 2014 : Mitigation of Climate Change. Contribution of Working Group III to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Edenhofer, O., R. Pichs-Madruga, Y. Sokona, E. Farahani, S. Kadner, K. Seyboth, A. Adler, I. Baum, S. Brunner, P. Eickemeier, B. Kriemann, J. Savolainen, S. Schlömer, C. von Stechow, T. Zwickel and J.C. Minx (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA. 2014.*
- [2] *On the Impact of Simulation Approaches on the Predicted Aerodynamic Damping of a Low Pressure Steam Turbine Rotor*, volume Volume 8 : Microturbines, Turbochargers and Small Turbomachines ; Steam Turbines of *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, 06 2017.
- [3] *Manuel théorique d'elsA*. 2018.
- [4] *GIEC, 2018 : Résumé à l'intention des décideurs, Réchauffement planétaire de 1,5 °C, Rapport spécial du GIEC sur les conséquences d'un réchauffement planétaire de 1,5 °C par rapport aux niveaux préindustriels et les trajectoires associées d'émissions mondiales de gaz à effet de serre, dans le contexte du renforcement de la parade mondiale au changement climatique, du développement durable et de la lutte contre la pauvreté [Publié sous la direction de V. Masson-Delmotte, P. Zhai, H. O. Pörtner, D. Roberts, J. Skea, P.R. Shukla, A. Pirani, W. Moufouma-Okia, C. Péan, R. Pidcock, S. Connors, J. B. R. Matthews, Y. Chen, X. Zhou, M. I. Gomis, E. Lonnoy, T. Maycock, M. Tignor et T. Waterfield]. Organisation météorologique mondiale, Genève, Suisse, 32 p. 2018.*
- [5] *GIEC, 2019 : Résumé à l'intention des décideurs, Changement climatique et terres émergées : rapport spécial du GIEC sur le changement climatique, la désertification, la dégradation des sols, la gestion durable des terres, la sécurité alimentaire et les flux de gaz à effet de serre dans les écosystèmes terrestres. [P.R. Shukla, J. Skea, E. Calvo Buendia, V. Masson-Delmotte, H.- O. Pörtner, D. C. Roberts, P. Zhai, R. Slade, S. Connors, R. van Diemen, M. Ferrat, E. Haughey, S. Luz, S. Neogi, M. Pathak, J. Petzold, J. Portugal Pereira, P. Vyas, E. Huntley, K. Kissick, M. Belkacemi, J. Malley, (dir. publ.)]. Sous presse. 2019.*
- [6] *ICAO Environmental Report*. 2019.
- [7] JJ Adamczyk, W Stevans, and R Jutras. Supersonic stall flutter of high-speed fans. 1982.
- [8] RJ Alfredson and POAL Davies. The radiation of sound from an engine exhaust. *Journal of Sound and Vibration*, 13(4) :389–408, 1970.



- [9] EL Allgower and K Georg. *Numerical continuation methods : an introduction*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012.
- [10] M Aotsuka and T Murooka. Numerical analysis of fan transonic stall flutter. volume Volume 7B : Structures and Dynamics of *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, 06 2014.
- [11] M Aotsuka, N Tsuchiya, Y Horiguchi, O Nozaki, and K Yamamoto. Numerical simulation of transonic fan flutter with 3d n-s cfd code. volume Volume 5 : Structures and Dynamics, Parts A and B of *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, pages 723–734, 06 2008.
- [12] A Arnone, MS Liou, and LA Povinelli. Integration of navier-stokes equations using dual time stepping and a multigrid method. *AIAA journal*, 33(6) :985–990, 1995.
- [13] JE Baker. Vibration damping turbomachinery blade, dec 1967. US Patent 3,357,850.
- [14] B Baldwin and H Lomax. Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulentflows. *16th aerospace sciences meeting*, page 257, 1978.
- [15] A Beckert and H Wendland. Multivariate interpolation for fluid-structure-interaction problems using radial basis functions. *Aerospace Science and Technology*, 5(2) :125–134, 2001.
- [16] O Bendiksen and P Friedmann. Coupled bending-torsion flutter in cascades. *AIAA Journal*, 18(2) :194–201, 1980.
- [17] T Berthelon. *Réponse forcée du FAN sous ingestion de Vortex*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, September 2020.
- [18] C Berthold, J Gross, C Frey, and M Krack. Analysis of friction-saturated flutter vibrations with a fully coupled frequency domain method. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 142(11) :111007, 2020.
- [19] C Berthold, J Gross, C Frey, and M Krack. Development of a fully-coupled harmonic balance method and a refined energy method for the computation of flutter-induced limit cycle oscillations of bladed disks with nonlinear friction contacts. *Journal of Fluids and Structures*, 102 :103233, 2021.
- [20] A Blanchard, J Bosc Bierne, A Bovo, F Camirelli, G Carpentier, O Coeurdray, M de Pommerol, O Del Bucchia, X Devars, S Esnault, L Fievet, Y Girardeau, B Ha Duong, N Hubert, C Jarrossay, A Joudiou, A Laget, J Marcinkowski, F Nguyen, F Nobelen, M Rebiere, J Richard, F Robert, and E Woeldgen. *Pouvoir voler en 2050 : quelle aviation dans un monde contraint ? Rapport du Shift Project*. 2021.
- [21] T Bontemps. *Flottement fan et couplage acoustique : analyse et modélisation*. Theses, Université de Lyon, November 2020.
- [22] S Bornassi, HM Navazi, and H Haddadpour. Aeroelastic instability analysis of a turbomachinery cascade with magnetorheological elastomer based adaptive blades. *Thin-Walled Structures*, 130 :71–84, 2018.
- [23] S Bouley. *Modélisations analytiques du bruit tonal d’interaction rotor/stator par la technique de raccordement modal*. PhD thesis, Lyon, 2017.

- [24] B Brangeon. Simulation des grandes échelles (sge) d'écoulements de fluides incompressibles large-eddy simulation (les) of incompressible fluid flows. Master's thesis, Université de Pau, 2008.
- [25] JR Bristow. Kinetic boundary friction. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 189(1016) :88–102, 1947.
- [26] CG Broyden. A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations. *Mathematics of computation*, 19(92) :577–593, 1965.
- [27] L Cambier and JP Veuillot. Status of the elsa software for flow simulation and multi-disciplinary applications. *46th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 664, 2008.
- [28] L Cambier, S Heib, and S Plot. The onera elsa cfd software : input from research and feedback from industry. *Mechanics & Industry*, 14(3) :159–174, 2013.
- [29] TM Cameron and Jerry H Griffin. An alternating frequency/time domain method for calculating the steady-state response of nonlinear dynamic systems. 1989.
- [30] J Carr. *Applications of centre manifold theory*, volume 35. Springer Science & Business Media, 2012.
- [31] GF Carrier. Sound transmission from a tube with flow. *Quarterly of Applied Mathematics*, 13(4) :457–461, 1956.
- [32] FO Carta. Coupled blade-disk-shroud flutter instabilities in turbojet engine rotors. 1967.
- [33] D Charleux. *Etude des effets de la friction en pied d'aube sur la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2006.
- [34] D Charleux, C Gibert, F Thouverez, and J Dupeux. Numerical and experimental study of friction damping blade attachments of rotating bladed disks. *International Journal of Rotating Machinery*, 2006, 2006.
- [35] J Chen, Y Wang, Y Zhao, and Y Feng. Experimental research on design parameters of basin tuned and particle damper for wind turbine tower on shaker. *Structural Control and Health Monitoring*, 26(11) :e2440, 2019.
- [36] JJ Chen, BD Yang, and CH Menq. Periodic forced response of structures having three-dimensional frictional constraints. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4) :775–792, 2000.
- [37] Benjamin Choi, Carlos Morrison, and Kirsten Duffy. An active damping at blade resonances using piezoelectric transducers. *Propulsion-Safety and Affordable Readiness (PSAR) Conference cosponsored by the US Army, Navy, and Air Force*, 2008.
- [38] ST Clark, RE Kielb, and KC Hall. Developing a reduced-order model to understand non-synchronous vibration (nsv) in turbomachinery. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 44731, pages 1373–1382. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [39] ST Clark, FM Besem, RE Kielb, and JP Thomas. Developing a reduced-order model of nonsynchronous vibration in turbomachinery using proper-orthogonal decomposition methods. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 137(5), 2015.

- [40] Y Colin, B Aupoix, JF Boussuge, and P Chanez. Numerical simulation of the distortion generated by crosswind inlet flows. *International Symposium on Air Breathing Engines*, 2007.
- [41] AR Collar. The expanding domain of aeroelasticity. *The Aeronautical Journal*, 50(428) : 613–636, 1946.
- [42] R Corral and JM Gallardo. Verification of the vibration amplitude prediction of self-excited lpt rotor blades using a fully coupled time-domain non-linear method and experimental data. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 43154, pages 835–847, 2008.
- [43] JS Courtney-Pratt and E Eisner. The effect of a tangential force on the contact of metallic bodies. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 238(1215) :529–550, 1957.
- [44] Roy R Craig Jr and Mervyn CC Bampton. Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA journal*, 6(7) :1313–1319, 1968.
- [45] PR Dahl. A solid friction model. Aerospace Corp El Segundo Ca, 1968.
- [46] PR Dahl. Solid friction damping of mechanical vibrations. *AIAA journal*, 14(12) :1675–1682, 1976.
- [47] A De Boer, MS Van der Schoot, and H Bijl. Mesh deformation based on radial basis function interpolation. *Computers & structures*, 85(11-14) :784–795, 2007.
- [48] D Demailly. *Etude du comportement non-linéaire dans le domaine fréquentiel—Application à la dynamique rotor*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2003.
- [49] JP Demailly. *Analyse numérique et équations différentielles-4ème Ed*. EDP sciences, 2016.
- [50] JE Dennis, Jr and JJ Moré. Quasi-newton methods, motivation and theory. *SIAM review*, 19(1) :46–89, 1977.
- [51] G Dimitriadis. *Introduction to nonlinear aeroelasticity*. John Wiley & Sons, 2017.
- [52] JA dit Sandretto. Runge-kutta theory and constraint programming. *Reliable Computing*, 25 :178–201, 2017.
- [53] J Donea, S Giuliani, and JP Halleux. An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3) :689–723, 1982.
- [54] Xu Dong, Yanfeng Zhang, Yingjie Zhang, Ziqing Zhang, and Xingen Lu. Numerical simulations of flutter mechanism for high-speed wide-chord transonic fan. *Aerospace Science and Technology*, 105 :106009, 2020.
- [55] JR Dormand and PJ Prince. A family of embedded runge-kutta formulae. *Journal of computational and applied mathematics*, 6(1) :19–26, 1980.
- [56] Y Druon. *Etude de la propagation guidée et du rayonnement acoustiques par les conduits d'éjection de turboréacteur : Modélisations analytiques et numériques*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2006.

- [57] K Duffy, R Bagley, and O Mehmed. On a self-tuning impact vibration damper for rotating turbomachinery. volume 36th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, page 3100, 2000.
- [58] A Dugeai, Y Mauffrey, A Placzek, and S Verley. Overview of the aeroelastic capabilities of the elsa solver within the context of aeronautical engines. *Aeros. J.*, 14, 2018.
- [59] AL Fiquet. *Analyse et modélisation de phénomènes aéroélastiques non-synchrones dans un compresseur axial multi-étages*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2021.
- [60] R Fletcher and MJD Powell. A rapidly convergent descent method for minimization. *The computer journal*, 6(2) :163–168, 1963.
- [61] J Garrigues. Algèbre et analyse tensorielle pour l'étude des milieux continus. page 95, March 2012. Lecture.
- [62] T Gmür. *Dynamique des structures : analyse modale numérique*. PPUR presses polytechniques, 1997.
- [63] ME Goldstein, W Braun, and JJ Adamczyk. Unsteady flow in a supersonic cascade with strong in-passage shocks. *Journal of Fluid Mechanics*, 83(3) :569–604, 1977.
- [64] E Goncalvès Da Silva and JP Thibault. *Cycles thermodynamiques des machines thermiques*. Institut polytechnique de Grenoble, October 2008. Lecture, cel-00556977.
- [65] A Gopinath and A Jameson. Time spectral method for periodic unsteady computations over two-and three-dimensional bodies. *43rd AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 1220, 2005.
- [66] N Gourdain. *Simulation numérique des phénomènes de décollement tournant dans les compresseurs axiaux*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2005.
- [67] W Govaerts, YA Kuznetsov, and A Dhooge. Numerical continuation of bifurcations of limit cycles in matlab. *SIAM journal on scientific computing*, 27(1) :231–252, 2005.
- [68] JA Greenwood and JBP Williamson. Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the royal society of London. Series A. Mathematical and physical sciences*, 295(1442) : 300–319, 1966.
- [69] M Gruin. *Dynamique non-linéaire d'une roue de turbine Basse Pression soumise à des excitations structurales d'un turboréacteur*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2012.
- [70] L Guillot, P Vigué, C Vergez, and B Cochelin. Continuation of quasi-periodic solutions with two-frequency harmonic balance method. *Journal of Sound and Vibration*, 394 : 434–450, 2017.
- [71] RD Hager, GW Lewis, and JM Wagner. Use of wire lacing to reduce blade vibration in an axial-flow compressor rotor. *NASA Technical Memorandum*, 1968.
- [72] SM Hasheminejad, M Nezami, and MEA Panah. Supersonic flutter suppression of electro-rheological fluid-based adaptive panels resting on elastic foundations using sliding mode control. *Smart Materials and Structures*, 21(4) :045005, 2012.

- [73] K. Isomura and M. B. Giles. A Numerical Study of Flutter in a Transonic Fan. *Journal of Turbomachinery*, 120(3) :500–507, 07 1998.
- [74] G Jacquet-Richardet, G Ferraris, and P Rieutord. Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies : A global cyclic symmetry approach. *Journal of Sound and Vibration*, 191(5) :901–915, 1996.
- [75] C Joannin. *Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires-Application à la dynamique des roues aubagées*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2017.
- [76] G Kerschen, M Peeters, JC Golinval, and AF Vakakis. Nonlinear normal modes, part i : A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical systems and signal processing*, 23(1) :170–194, 2009.
- [77] R Kielb, F Macri, D Oeth, A Nashif, P Macioce, H Panossian, and F Lieghley. Advanced damping systems for fan and compressor blisks. volume 34th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference and Exhibit, page 3863, 1998.
- [78] J Kiusalaas. *Numerical methods in engineering with Python 3*. Cambridge university press, 2013.
- [79] DA Knoll and DE Keyes. Jacobian-free newton–krylov methods : a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193(2) :357–397, 2004.
- [80] M Krack, L Salles, and F Thouverez. Vibration prediction of bladed disks coupled by friction joints. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 24(3) :589–636, 2017.
- [81] YA Kuznetsov. *Elements of applied bifurcation theory*, volume 112. Springer Science & Business Media, 2013.
- [82] C Lalanne. *Mechanical vibration and shock analysis, fatigue damage*, volume 4. John Wiley & Sons, 2014.
- [83] M Lassalle. *Self-excited vibrations controlled by damping at blade root joints of turbine disks*. PhD thesis, Tesi di Dottorato. Politecnico di Torino, 2018.
- [84] M Lassalle and CM Firrone. A parametric study of limit cycle oscillation of a bladed disk caused by flutter and friction at the blade root joints. *Journal of Fluids and Structures*, 76 :349–366, 2018.
- [85] BE Launder and BI Sharma. Application of the energy-dissipation model of turbulence to the calculation of flow near a spinning disc. *Letters in heat and mass transfer*, 1(2) : 131–137, 1974.
- [86] D Laxalde. *Étude d’amortisseurs non-linéaires appliqués aux roues aubagées et aux systèmes multi-étages*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2007.
- [87] D Laxalde and F Thouverez. Complex non-linear modal analysis for mechanical systems : Application to turbomachinery bladings with friction interfaces. *Journal of sound and vibration*, 322(4-5) :1009–1025, 2009.

- [88] Denis Laxalde, Fabrice Thouverez, J-J Sinou, and J-P Lombard. Qualitative analysis of forced response of blisks with friction ring dampers. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(4) :676–687, 2007.
- [89] A Lazarus and O Thomas. A harmonic-based method for computing the stability of periodic solutions of dynamical systems. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(9) :510–517, 2010.
- [90] D.S. Lee, D.W. Fahey, A. Skowron, M.R. Allen, U. Burkhardt, Q. Chen, S.J. Doherty, S. Freeman, P.M. Forster, J. Fuglestedt, A. Gettelman, R.R. De León, L.L. Lim, M.T. Lund, R.J. Millar, B. Owen, J.E. Penner, G. Pitari, M.J. Prather, R. Sausen, and L.J. Wilcox. The contribution of global aviation to anthropogenic climate forcing for 2000 to 2018. *Atmospheric Environment*, 244 :117834, 2021. ISSN 1352-2310. doi:<https://doi.org/10.1016/j.atmosenv.2020.117834>.
- [91] E Lemoine. *Approche couplée pour l'étude du contact sous chargement dynamique vibratoire : application à l'usure par fretting du contact aube-disque*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2021.
- [92] H Levine and J Schwinger. On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. *Physical review*, 73(4) :383, 1948.
- [93] MS Liou and BJ Lee. Characterization of aerodynamic performance of boundary-layer-ingesting inlet under crosswind. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 44748, pages 1977–1989. American Society of Mechanical Engineers, 2012.
- [94] JF Lubomski. Status of nasa full-scale engine aeroelasticity research. *NASA Technical Memorandum*, 81500, 1980.
- [95] V Manet. Méthode des éléments finis. *Vulgarisation des aspects mathématiques, Illustration des capacités de la méthode, ViM2, Lyon*, page 355, 2013.
- [96] JG Marshall and M Imregun. A review of aeroelasticity methods with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of fluids and structures*, 10(3) :237–267, 1996.
- [97] RM Mathison, MG Dunn, MM Weaver, and A Dushko. Measurement of air film damping effectiveness. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 41715, pages 227–236, 2004.
- [98] C-H Menq, JH Griffin, and J Bielak. The influence of microslip on vibratory response, part ii : A comparison with experimental results. *Journal of Sound and Vibration*, 107(2) :295–307, 1986.
- [99] FR Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA journal*, 32(8) :1598–1605, 1994.
- [100] JM Mérigoux. Ventilateurs. compresseurs. notions fondamentales. dimensionnement. *Techniques de l'ingénieur. Génie mécanique*, (BM4500) :BM4500–1, 1999.
- [101] RM Munt. The interaction of sound with a subsonic jet issuing from a semi-infinite cylindrical pipe. *Journal of Fluid Mechanics*, 83(4) :609–640, 1977.

- [102] RM Munt. Acoustic transmission properties of a jet pipe with subsonic jet flow : I. the cold jet reflection coefficient. *Journal of Sound and Vibration*, 142(3) :413–436, 1990.
- [103] GC Murphy, JD Jones, and CT Salemme. Method of fabricating hollow composite airfoils, jun 1986. US Patent 4,594,761.
- [104] JP Murphy and DG MacManus. Ground vortex aerodynamics under crosswind conditions. *Experiments in Fluids*, 50(1) :109–124, 2011.
- [105] S Nacivet. *Modélisation du frottement en pied d'aube par une approche fréquentielle*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2002.
- [106] S Nacivet, C Pierre, F Thouverez, and L Jézéquel. A dynamic lagrangian frequency–time method for the vibration of dry-friction-damped systems. *Journal of Sound and Vibration*, 265(1) :201–219, 2003.
- [107] M Naudin and JM Pugnet. Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines. *Techniques de l'ingénieur. Environnement - Sécurité / Bruit et vibrations*, 1999.
- [108] AH Nayfeh and B Balachandran. *Applied nonlinear dynamics : analytical, computational, and experimental methods*. John Wiley & Sons, 2008.
- [109] N Nguyen. Blading system and method for controlling structural vibrations, aug 2000. US Patent 6,102,664.
- [110] Guy Norris and Felix Torres. *CFM, The Power of Flight*. 2018.
- [111] U Olofsson. Cyclic micro-slip under unlubricated conditions. *Tribology International*, 28 (4) :207–217, 1995.
- [112] H Olsson, KJ Åström, CC De Wit, M Gäfvert, and P Lischinsky. Friction models and friction compensation. *Eur. J. Control*, 4(3) :176–195, 1998.
- [113] H Oudin. Méthode des éléments finis. Lecture, 2008.
- [114] RC Parker and D Hatch. The static coefficient of friction and the area of contact. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 63(3) :185, 1950.
- [115] V Penin. *Interactions rotor-stator en turbine : étude de l'effet potentiel remontant*. Theses, Ecole Centrale de Lyon, December 2011.
- [116] E Pennestrì, V Rossi, P Salvini, and PP Valentini. Review and comparison of dry friction force models. *Nonlinear dynamics*, 83(4) :1785–1801, 2016.
- [117] MCAM Peters, A Hirschberg, AJ Reijnen, and APJ Wijnands. Damping and reflection coefficient measurements for an open pipe at low mach and low helmholtz numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, 256 :499–534, 1993.
- [118] E. P. Petrov. Analysis of Flutter-Induced Limit Cycle Oscillations in Gas-Turbine Structures With Friction, Gap, and Other Nonlinear Contact Interfaces. *Journal of Turbomachinery*, 134(6), 09 2012.
- [119] EP Petrov. A method for use of cyclic symmetry properties in analysis of nonlinear multiharmonic vibrations of bladed disks. *J. Turbomach.*, 126(1) :175–183, 2004.

- [120] EP Petrov and DJ Ewins. Analytical formulation of friction interface elements for analysis of nonlinear multi-harmonic vibrations of bladed disks. *J. Turbomach.*, 125(2) :364–371, 2003.
- [121] EP Petrov and DJ Ewins. Analysis of essentially non-linear vibration of large-scale models for bladed discs with variable contact and friction at root joints. *Vibrations in Rotating Machinery*, (623) :163, 2004.
- [122] U Piomelli. Large-eddy simulation : achievements and challenges. *Progress in aerospace sciences*, 35(4) :335–362, 1999.
- [123] S Piperno and C Farhat. Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems—part ii : energy transfer analysis and three-dimensional applications. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(24-25) :3147–3170, 2001.
- [124] A Plas, D Crichton, M Sargeant, T Hynes, E Greitzer, C Hall, and V Madani. Performance of a boundary layer ingesting (bli) propulsion system. *45th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*, page 450, 2007.
- [125] AJ Provenza, KP Duffy, and MA Bakhle. Aeromechanical response of a distortion-tolerant boundary layer ingesting fan. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 141(1), 2019.
- [126] JM Pugnet. Equilibrage des rotors rigides et flexibles. *Techniques de l'ingénieur. Mécanique / Fonctions et composants mécaniques*, 1997.
- [127] Quentin R, Stéphane A, and Pascal F. Numerical identification of mechanisms triggering 2d choke flutter in transonic fan. *Journal of Fluids and Structures*, 97 :102879, 2020. ISSN 0889-9746.
- [128] E Rabinowicz. The nature of the static and kinetic coefficients of friction. *Journal of applied physics*, 22(11) :1373–1379, 1951.
- [129] A Ramazzotti. *Contribution au développement de méthodes numériques destinées à résoudre des problèmes couplés raides rencontrés en mécanique des matériaux*. PhD thesis, Chasseneuil-du-Poitou, Ecole nationale supérieure de mécanique et d'aérotechnique, 2016.
- [130] DE Raveh. Numerical study of an oscillating airfoil in transonic buffeting flows. *AIAA journal*, 47(3) :505–515, 2009.
- [131] RSH Richardson and H Nolle. Surface friction under time-dependent loads. *Wear*, 37(1) : 87–101, 1976.
- [132] SW Rienstra. Acoustic radiation from a semi-infinite annular duct in a uniform subsonic mean flow. *Journal of Sound and Vibration*, 94(2) :267–288, 1984.
- [133] SW Rienstra. Sound transmission in slowly varying circular and annular lined ducts with flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 380 :279–296, 1999.
- [134] SW Rienstra. Fundamentals of duct acoustics. *Von Karman Institute Lecture Notes*, 2015.
- [135] SW Rienstra and A Hirschberg. An introduction to acoustics. *Eindhoven University of Technology*, 18 :19, 2004.



- [136] PL Roe. Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of computational physics*, 43(2) :357–372, 1981.
- [137] RM Rosenberg. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. 1960.
- [138] RM Rosenberg. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. 1962.
- [139] Rolls Royce. *The jet engine*. 2015.
- [140] E Sarrouy. *Analyse globale de systèmes mécaniques non-linéaires-Application à la dynamique des rotors*. PhD thesis, École Centrale de Lyon, 2008.
- [141] LK Schubert. Modification of a quasi-newton method for nonlinear equations with a sparse jacobian. *Mathematics of Computation*, 24(109) :27–30, 1970.
- [142] R Seydel. *Practical bifurcation and stability analysis*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2009.
- [143] SW Shaw and C Pierre. Normal modes for non-linear vibratory systems. *Journal of sound and vibration*, 164(1) :85–124, 1993.
- [144] F Sicot. *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. PhD thesis, École centrale de Lyon, 2009.
- [145] RA Sievers and JL Mullings. Wind turbine blade with viscoelastic damping, jan 2017. US Patent 9,541,061 B2.
- [146] A Sinha and JH Griffin. Friction damping of flutter in gas turbine engine airfoils. *Journal of Aircraft*, 20(4) :372–376, 1983.
- [147] A Sinha and JH Griffin. Effects of friction dampers on aerodynamically unstable rotor stages. *AIAA journal*, 23(2) :262–270, 1985.
- [148] B Smith. A near wall model for the k-l two equation turbulence model. *Fluid Dynamics Conference*, page 2386, 1994.
- [149] LE Snyder and GL Commerford. Supersonic unstalled flutter in fan rotors ; analytical and experimental results. 1974.
- [150] C Soize. *Dynamique des structures-Éléments de base et concepts fondamentaux*. Ellipse, Paris, 2001.
- [151] P Spalart and S Allmaras. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *30th aerospace sciences meeting and exhibit*, page 439, 1992.
- [152] MA Spiker. *Development of an efficient design method for non-synchronous vibrations*. PhD thesis, Duke University, 2008.
- [153] A. V. Srinivasan. Flutter and resonant vibration characteristics of engine blades. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 119(4) :742–775, 10 1997.
- [154] H Stargardter. Subsonic/transonic stall flutter study. *NASA CR-165256*, June, 1979.

- [155] Y Sun, J Yuan, E Denimal, and L Salles. Nonlinear modal analysis of frictional ring damper for compressor blisk. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 143(3) :031008, 2021.
- [156] P Sundararajan and ST Noah. Dynamics of forced nonlinear systems using shooting/arc-length continuation method—application to rotor systems. 1997.
- [157] G Sutter, S Philippon, and F Garcin. Dynamic analysis of the interaction between an abradable material and a titanium alloy. *Wear*, 261(5-6) :686–692, 2006.
- [158] J Szwedowicz. Bladed disks : non linear dynamics. *Structural design of aircraft engines : key objectives and techniques*, 2008.
- [159] IG Tokar, AP Zinkovskii, and VV Matveev. On the problem of improvement of the damping ability of rotor blades of contemporary gas-turbine engines. *Strength of materials*, 35(4) :368–375, 2003.
- [160] DM Tran. Component mode synthesis methods using partial interface modes : Application to tuned and mistuned structures with cyclic symmetry. *Computers & Structures*, 87(17-18) :1141–1153, 2009.
- [161] D.M. Tran. *Réduction de modèle en dynamique des structures et des systèmes couplés aéroélastiques*. Habilitation à diriger des recherches, INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON (INSA); UNIVERSITE CLAUDE BERNARD LYON 1, November 2015.
- [162] M Vahdati, AI Sayma, C Breard, and M Imregun. Computational study of intake duct effects on fan flutter stability. *AIAA journal*, 40(3) :408–418, 2002.
- [163] M Vahdati, G Simpson, and M Imregun. Mechanisms for wide-chord fan blade flutter. *Journal of Turbomachinery*, 133(4), 2011.
- [164] M Vahdati, N Smith, and F Zhao. Influence of intake on fan blade flutter. *Journal of Turbomachinery*, 137(8), 2015.
- [165] GD Van Albada, BV Leer, and WWjun Roberts. A comparative study of computational methods in cosmic gas dynamics. *Upwind and high-resolution schemes*, pages 95–103. Springer, 1997.
- [166] P Vigué, C Vergez, S Karkar, and B Cochelin. Regularized friction and continuation : Comparison with coulomb’s law. *Journal of Sound and Vibration*, 389 :350–363, 2017.
- [167] G Von Groll and DJ Ewins. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems. *Journal of sound and vibration*, 241(2) :223–233, 2001.
- [168] K Vunnam and R Hoover. Modeling of inlet distortion using a combined turbofan and nacelle inlet model during crosswind and low speed forward operation. *Turbo Expo : Power for Land, Sea, and Air*, volume 54617, pages 371–380, 2011.
- [169] D Wang and Y Rui. Simulation of the stick-slip friction between steering shafts using adams/pre. *Citeseer*. Citeseer, 2000.
- [170] L Weinstein. *The Theory of Diffraction and the Factorization Method*. Golem Press, 1969.

- [171] JF Wendt. *Computational fluid dynamics : an introduction*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [172] DS Whitehead. Bending flutter of unstalled cascade blades at finite deflection. 1962.
- [173] DS Whitehead. Torsional flutter of unstalled cascade blades at zero deflection. 1964.
- [174] NE Wierschem, BF Spencer Jr, LA Bergman, and AF Vakakis. Numerical study of non-linear energy sinks for seismic response reduction. *Proceedings of the 6 th International Workshop on Advanced Smart Materials and Smart Structures Technology (ANCRiSST 2011)*, pages 25–26, 2011.
- [175] DC Wilcox. Reassessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA journal*, 26(11) :1299–1310, 1988.
- [176] DC Wilcox. *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1993.
- [177] JR Wright and JE Cooper. *Introduction to aircraft aeroelasticity and loads*, volume 20. John Wiley & Sons, 2008.
- [178] BD Yang and CH Menq. Characterization of contact kinematics and application to the design of wedge dampers in turbomachinery blading : Part 1-stick-slip contact kinematics. 1998.
- [179] Z Zhang, SRK Nielsen, B Basu, and J Li. Nonlinear modeling of tuned liquid dampers (tlds) in rotating wind turbine blades for damping edgewise vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 59 :252–269, 2015.
- [180] F Zhao, N Smith, and M Vahdati. A simple model for identifying the flutter bite of fan blades. *Journal of Turbomachinery*, 139(7), 2017.
- [181] S Zucca, CM Firrone, and MM Gola. Numerical assessment of friction damping at turbine blade root joints by simultaneous calculation of the static and dynamic contact loads. *Nonlinear Dynamics*, 67(3) :1943–1955, 2012.

# Table des figures

1	Répartition des émissions d'origine humaine en équivalent CO <sub>2</sub> selon les secteurs économiques en 2010 (adaptée de [1]) . . . . .	1
2	Contribution de l'aviation aux émissions mondiales de CO <sub>2</sub> d'origine humaine (d'après [90]) . . . . .	2
3	Évolution des émissions en CO <sub>2</sub> produits par l'aviation, du trafic aérien ramené en passager-kilomètre (RPK) et de l'efficacité de transport des passagers (d'après [90]) . . . . .	4
I.1	Vue d'un turboréacteur LEAP-1A . . . . .	10
I.2	Cycle thermodynamique de Brayton (en noir : cycle fermé idéal; en bleu : cycle ouvert réel) . . . . .	11
I.3	Vue éclatée d'un turboréacteur LEAP-1A . . . . .	11
I.4	Exemple de diagramme caractéristique de compresseur . . . . .	13
I.5	Triangle de Collar (adaptée de [41]) . . . . .	15
I.6	Illustration du sillage généré par une roue aubagée (d'après [144]) . . . . .	15
I.7	Ingestion de vortex sur le moteur Rolls-Royce RB211-524G (©Peter Thomas Octobre 2005) . . . . .	16
I.8	Illustration de la BLI (d'après [93]) . . . . .	17
I.9	Cellules d'un décollement tournant issu d'une simulation URANS (d'après [66]) . . . . .	18
I.10	Poches de flottement pour un compresseur (adaptée de [96]) . . . . .	19
I.11	Courbe de Wöhler (adaptée de [82]) . . . . .	21
I.12	Diagramme de Haigh (adaptée de [82]) . . . . .	22
I.13	Diagramme de Campbell . . . . .	23
I.14	Interprétation de la fréquence réduite (adaptée de [153]) . . . . .	23
I.15	Illustration de la poche d'instabilité de <i>flutter bite</i> . . . . .	26
I.16	Zones de dissipation dans les assemblages mécaniques de roues aubagées : (a) contact aube disque, (b) contact entre les talons, (c) amortisseurs sous plateforme, (d) câbles amortisseurs, (e) tiges rigides amortissantes (illustration d'après [80]) . . . . .	27
I.17	Illustration d'une aube avec frotteur en configuration <i>blade-to-ground</i> (d'après [146]) . . . . .	30
I.18	Illustration de la courbe de cycles limites pour le modèle phénoménologique (d'après [146]) . . . . .	30
I.19	Représentation énergétique des cycles limites. En trait plein : énergie dissipé par frottement sec en fonction de l'amplitude d'oscillation périodique d'un frotteur ; en pointillés : travail des efforts aérodynamiques en fonction de l'amplitude d'oscillation périodique d'une aube (d'après [42]) . . . . .	32
I.20	Technologies d'accroches classiques aube disque pour les compresseurs : accroche queue d'arronde à gauche, accroche marteau à droite (d'après [139]) . . . . .	32
I.21	Technologies d'accroches classiques aube disque pour les turbines (d'après [139]) . . . . .	32

I.22	Évolution de la réponse non-linéaire normée par l'amplitude de forçage d'un système frottant aube disque pour différentes amplitudes de forçage (d'après [34]) . . . . .	33
I.23	Comparaison des résultats numériques de calcul de LCO aux mesures expérimentales (d'après [84]) . . . . .	34
I.24	Illustration de lois de contact macroscopiques . . . . .	35
I.25	Modèle de Coulomb . . . . .	37
II.1	Répartitions radiales et azimuthales de deux modes acoustiques sur une section : $(m, \mu) = (2, 0)$ à gauche, $(m, \mu) = (4, 2)$ à droite (d'après Bontemps [21]) . . . . .	51
II.2	Illustration de la relation de dispersion pour un nombre de Mach non nul . . . . .	52
II.3	Illustration de la réflexion acoustique en entrée d'air . . . . .	53
II.4	Cinématique d'une structure continue déformable . . . . .	56
II.5	Illustration de la base de projection dans la réduction de Craig-Bampton (adapté de Tran [160]) . . . . .	65
II.6	Structure à symétrie cyclique construite à partir du secteur de référence (rouge) . . . . .	66
II.7	Représentation des frontières entre secteurs consécutifs . . . . .	66
II.8	Illustration des amplitudes de déformation de deux modes réels de flexion . . . . .	71
II.9	Illustration du diagramme Zig-Zag . . . . .	73
II.10	Illustration des interfaces aéroélastiques incompatibles . . . . .	75
II.11	Élément hexaédrique du maillage aérodynamique structuré . . . . .	77
II.12	Illustration de la Conventional Serial Staggered Procedure . . . . .	79
II.13	Illustration du couplage par point fixe . . . . .	80
II.14	Modèle utilisé pour les calculs CFD . . . . .	81
II.15	Vue en coupe du domaine maillé pour les calculs CFD (adapté de Bontemps [21]) . . . . .	82
II.16	Diagramme caractéristique de la soufflante considérée . . . . .	84
II.17	Topologie de l'écoulement à 90% de hauteur de veine. Courbes noires épaisses : nombres de Mach ou Mach isentropique sur aubage égaux à 1. Courbes noires fines : lignes de courant. . . . .	86
II.18	Résultats des calculs de stabilité en mouvement harmonique imposé à 75% de régime nominal . . . . .	88
II.19	Amplitude et phase du fondamental de pression statique dans l'entrée d'air à 90% de hauteur de veine sur le point de fonctionnement dp20 . . . . .	89
	; $m = 3$ en	
II.21	Travail surfacique adimensionné pour trois points de fonctionnement sur l'iso-vitesse à 75% de régime nominal . . . . .	92
II.22	Répartition des travaux des forces aérodynamiques pour une période de vibration des modes 1F2D et 1F3D sur les points de fonctionnement dp00, dp10 et dp20, le long de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal . . . . .	93
II.23	Cartographie du flutter index dans le diagramme caractéristique de la soufflante . . . . .	96
II.24	Évolution des coordonnées généralisées en couplage dynamique sur le point dp20 à 75% de régime nominal . . . . .	97
II.25	Stabilité de modes 1F2D et 1F3D en couplage dynamique sur l'iso-vitesse à 75% de régime nominal . . . . .	98

II.26	Caractérisation de la réflexion acoustique sur le point de fonctionnement dp20 avec les modèles analytiques de propagation et de réflexion de Rienstra en fonction de la fréquence de la source acoustique. Zone hachurée : intervalle fréquentiel pour lequel il existe une réflexion acoustique en conduite. . . . .	100
II.27	Évolution de l'amortissement aérodynamique en fonction de la fréquence de vibration du mode 1F2D . . . . .	101
II.28	Procédure de correction du mode propre aéroélastique . . . . .	102
II.29	Décalage fréquentiel dans le repère fixe causé par l'aérodynamique par rapport à la fréquence propre du mode propre associé . . . . .	103
II.30	Amortissement aérodynamique après application de la procédure de correction du mode à sec . . . . .	104
II.31	Application de la procédure de correction des caractéristiques modales pour le mode 1F2D . . . . .	106
II.32	Application de la procédure de correction des caractéristiques modales pour le mode 1F3D . . . . .	107
III.1	Représentation géométrique de la stabilité au sens de Lyapunov (adapté de Nayfeh et Balachandran [108]) . . . . .	111
III.2	Représentation d'une section de Poincaré . . . . .	116
III.3	Représentation des trois manières pour un multiplicateur de Floquet de sortir du cercle unité . . . . .	120
III.4	Bifurcation de type point de retournement : oscillateur de Duffing (solution instable en pointillés) . . . . .	120
III.5	Bifurcation de type dédoublement de période . . . . .	120
III.6	Bifurcation de Hopf de type 2 . . . . .	120
III.7	Comparaison entre intégration temporelle et méthode de tir (d'après Demailly [48])	124
III.8	Illustrations des méthodes de continuation. ( $\rightarrow$ : prédiction du prochain point de la branche, - - - : lieu de la correction, $\circ$ : itération du solveur jusqu'à la nouvelle solution) . . . . .	138
III.9	Représentation de deux modes normaux non-linéaires dans un espace de configuration bidimensionnel selon la définition de Rosenberg (adaptée de Laxalde [86]) . . .	144
III.10	Représentation de deux modes normaux non linéaires dans un espace de configuration bidimensionnel selon la définition de Shaw et Pierre (issue de Kerschen et al. [76]) . . . . .	145
III.11	Modèle académique masse-ressort avec frotteur . . . . .	151
III.12	Loi de frottement régularisée en tangente hyperbolique . . . . .	151
III.13	Intégration temporelle du modèle académique masse-ressort . . . . .	153
III.14	Calcul du MCNL sur modèle académique masse-ressort . . . . .	154
III.15	Superposition du LCO obtenu par MCNL avec l'intégration temporelle de Newmark	155
IV.1	Échange d'informations entre la structure non-linéaire et <i>elsA</i> dans la procédure de couplage . . . . .	160
IV.2	Équivalence des bases modales entre le modèle éléments finis complet (gauche) et les modèles pour calculs non-linéaires assemblés (droite) . . . . .	161
IV.3	Transfert des matrices d'efforts aérodynamiques dans la procédure de couplage faible	161
IV.4	Illustration de la procédure de point fixe de couplage fort entre les solveurs . . . .	165

IV.5	Illustration des nœuds physiques retenus dans le modèle réduit de Craig-Bampton pour la procédure de couplage fort . . . . .	167
IV.6	Illustration de l'identification de chaque cellule de la grille aérodynamique à son nœud plus proche voisin du modèle réduit . . . . .	169
IV.7	Condensation des efforts aérodynamiques de la grille aérodynamique (rouge) vers le modèle réduit (gris) . . . . .	169
IV.8	Illustration de la procédure de transfert des efforts aérodynamiques d' <i>elsA</i> vers le solveur non-linéaire . . . . .	170
IV.9	Illustration du modèle phénoménologique d'aube en flexion/torsion avec du frottement entre le pied et le disque . . . . .	172
IV.10	Mode complexe non-linéaire du modèle phénoménologique dans le vide . . . . .	177
IV.11	Dynamique du système non-linéaire dans l'espace des configurations . . . . .	178
IV.12	Courbe de dépendance de l'amortissement aérodynamique à la fréquence pour l'application du couplage faible sur le modèle phénoménologique . . . . .	181
IV.13	Mode complexe non-linéaire calculé sur le modèle phénoménologique avec la stratégie 1 . . . . .	182
IV.14	Reconstruction de l'évolution temporelle du cycle limite calculé avec le modèle phénoménologique selon la stratégie de couplage faible . . . . .	183
V.1	Modèle industriel utilisé pour les études dynamiques non-linéaires . . . . .	187
V.2	Nœuds physiques retenus sur les interfaces de contact pour le modèle réduit de Craig-Bampton . . . . .	188
V.3	Nœuds physiques retenus sur l'aube pour le modèle réduit de Craig-Bampton . . . . .	188
V.4	Influence du nombre d'harmoniques retenues dans le calcul de MCNL . . . . .	192
V.5	Influence du nombre d'instantanés retenus dans la période d'évaluation des efforts non-linéaires . . . . .	192
V.6	Influence du nombre de nœuds physiques retenus sur le calcul de MCNL . . . . .	193
V.7	Amplitude de glissement aux portées aube disque dans les configurations $NL_1$ et $NL_2$ pour une amplitude adimensionnée de $n_{obs}$ de 1.3 . . . . .	194
V.8	Amplitude de mouvement des nœuds d'aube selon la configuration $NL_2 - EXT_i$ pour les harmoniques 1, 2 et 3 pour une amplitude adimensionnée de $n_{obs}$ de 1.66 . . . . .	196
V.9	Résultats de l'application du couplage faible pour le point de fonctionnement dp20 . . . . .	197
V.10	Comparaison des énergies dissipées par frottement sec en pied d'aube dans les cas à vide, avec et sans acoustique en fonction de l'amplitude de $n_{obs}$ pour le point de fonctionnement dp20 dans le cadre de la procédure de couplage faible . . . . .	199
V.11	Comparaison des énergies dissipées par la structure avec l'énergie fournie par le fluide pour un mouvement harmonique à la fréquence $f_{1F2D}$ dans une hypothèse de fluide linéaire par rapport au mouvement pour le point de fonctionnement dp20 dans le cadre de la procédure de couplage faible . . . . .	199
V.12	Amplitudes maximales de glissement relatif en millimètres des portées mises à plat pour le LCO du point dp20 (axe horizontal : axe moteur) . . . . .	201
V.13	Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage faible pour le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.). . . . .	202
V.14	Influence du coefficient de frottement sur le calcul de MCNL pour le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l'acoustique. . . . .	203

V.15	Influence du coefficient de frottement sur l'amplitude du LCO sur le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l'acoustique. (- - - : régression linéaire) .	204
V.16	Influence de l'amortissement modal linéaire de structure sur l'amplitude du LCO sur le point de fonctionnement dp20 avec prise en compte de l'acoustique. (- - - : régression linéaire) . . . . .	205
V.17	Iso-vitesse parcourue lors des essais et recalage par rapport aux résultats numériques	206
V.18	Amplitude du nœud d'observation $n_{obs}$ sur les cycles limites atteints dans la poche de flottement à 75% de régime nominal . . . . .	206
V.19	Impact de la configuration étudiée sur le calcul de MCNL dans le cadre de la procédure de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20. . . . .	209
V.20	Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.). . . . .	210
V.21	Évolution du MCNL en fonction de l'itération de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20 . . . . .	212
V.22	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique du LCO selon l'itération de couplage . . . . .	213
V.23	Travail des efforts aérodynamiques générés par la dynamique non-linéaire de l'aube en fonction de l'itération de couplage fort pour le point de fonctionnement dp20 . .	214
V.24	Énergie dissipée en pied d'aube en fonction du nombre d'itérations de couplage fort réalisées . . . . .	214
V.25	Comparaison des MCNL selon la dynamique de l'aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20. $\Phi_{\bullet}$ : déformée. $f_{\bullet}$ : fréquence libre. $\bullet_L$ : linéaire. $\bullet_{NL}$ : non-linéaire. . . . .	217
V.26	Énergie dissipée en pied d'aube selon la dynamique de l'aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20. $\Phi_{\bullet}$ : déformée. $f_{\bullet}$ : fréquence libre fondamentale. $\bullet_L$ : contenu linéaire. $\bullet_{NL}$ : contenu non-linéaire. . .	218
V.27	Travail des efforts aérodynamiques selon la dynamique de l'aube employée dans les calculs aéroélastiques pour le point de fonctionnement dp20. $\Phi_{\bullet}$ : déformée. $f_{\bullet}$ : fréquence libre fondamentale. $\bullet_L$ : contenu linéaire. $\bullet_{NL}$ : contenu non-linéaire. . .	218
V.28	Énergie dissipée (J) aux portées par frottement sec sur une période du LCO calculé par procédure de couplage fort pour les combinaisons $\Phi_{\bullet} - f_{\bullet}$ sur le point de fonctionnement dp20. Portées mises à plat avec représentation de l'intrados (Int.) et de l'extrados (Ext.). . . . .	221
V.29	Amplitude de $n_{obs}$ sur les cycles limites atteints dans la poche de flottement à 75% de régime nominal . . . . .	222
V.30	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique du LCO selon la méthode de couplage employée pour la configuration $NL_2 - EXT_2$ . M1 : couplage faible sans acoustique; M2 : couplage faible avec acoustique; M3 : couplage fort. . . . .	223
V.31	Travail des efforts aérodynamiques selon la méthode de couplage employée pour le point de fonctionnement dp20. . . . .	224



---

B.1	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour $n_{obs} = 0.58$ . . . . .	255
B.2	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour $n_{obs} = 0.90$ . . . . .	255
B.3	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour $n_{obs} = 1.20$ . . . . .	256
B.4	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour $n_{obs} = 1.51$ . . . . .	256
B.5	Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour $n_{obs} = 1.66$ . . . . .	256

# Liste des tableaux

II.1	Paramètres empiriques du modèle $k - l$ de Smith (d'après [3, 148]) . . . . .	46
II.2	Points de fonctionnement de l'iso-vitesse à 75% de régime nominal étudiés pour les analyses de stabilité aéroélastique . . . . .	85
II.3	Fréquences de coupure des modes acoustiques d'ordre azimutaux 2 et 3 et d'ordre radial 0 par rapport à la fréquence de la source acoustique dans le repère de la nacelle	91
III.1	Paramètres du modèle académique masse-ressort . . . . .	152
IV.1	Valeurs numériques des paramètres du modèle phénoménologique . . . . .	176
IV.2	Fréquences propres adimensionnées et vecteurs propres des états asymptotiques collés et glissants du modèle phénoménologique après calibration pour le mode de flexion . . . . .	176
V.1	Nombre de nœuds retenus sur les configurations de Craig-Bampton . . . . .	189
V.2	Nombre de degrés de liberté des modèles de Craig-Bampton (CB) et du modèle éléments finis (EF) . . . . .	189
V.3	Erreurs relatives sur les fréquences propres des 5 premiers modes des modèles de Craig-Bampton par rapport au modèle complet après assemblage du système aube disque . . . . .	189
V.4	Valeurs d'amortissement aérodynamique en fonction de la fréquence de mouvement du mode 1F2D sur le point dp20 . . . . .	200
V.5	Évolution des déplacements totaux par harmonique en fonction de l'amplitude de $n_{obs}$ pour le point de fonctionnement dp20 après une itération de couplage fort et rapports d'amplitude par rapport au fondamental $h_1$ . . . . .	215



## Annexe A

# Estimation des efforts non-linéaires de contact et de frottement par méthode DLFT

Reprenons l'équation de MCNL avec éventuellement un second membre d'interaction libre avec le fluide :

$$\mathbf{Z}\mathbf{X} + \mathbf{F}_{\text{nl}} = \mathbf{F}_{\text{ag}} \quad (\text{A.1})$$

La méthode DLFT propose de reformuler l'expression de  $\mathbf{F}_{\text{nl}}$  comme :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}} = \mathbf{F}_{\text{ag}} - \mathbf{Z}\mathbf{X} + \epsilon(\mathbf{X} - \mathbf{Y}) \quad (\text{A.2})$$

où  $\epsilon$  est un coefficient de pénalité. Dans l'équation A.2, le vecteur  $\mathbf{Y}$  est une nouvelle inconnue homogène à un déplacement relatif introduite spécialement dans le cadre de la méthode DLFT. On souhaite en particulier qu'à la convergence de l'algorithme de résolution, on obtienne :

$$\mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad (\text{A.3})$$

Le vecteur  $\mathbf{Y}$  a une signification différente de celle du vecteur  $\mathbf{X}$ . Le vecteur  $\mathbf{X}$  est en effet le résultat direct d'une itération de la méthode de résolution de l'équation A.1. Le vecteur  $\mathbf{Y}$  contient quant à lui les composantes fréquentielles d'un mouvement qui vérifie exactement les lois de contact unilatérale et les efforts de frottement de Coulomb dans le domaine temporel. Il est construit en pratique à partir de l'évaluation courante de  $\mathbf{X}$ .

On souhaite que les équations A.2 et A.3 soient vérifiées à la convergence, assurant ainsi que l'équation A.1 est également vérifiée. Pour cela, un processus de prédiction correction est mis en place.

### Prédiction des efforts non-linéaires

On note respectivement  $\mathbf{F}_{\text{nl}}^{\mathbf{X}}$  et  $\mathbf{F}_{\text{nl}}^{\mathbf{Y}}$  les efforts non-linéaires d'optimisation et de correction tels que :

$$\mathbf{F}_{\text{nl}} = \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\mathbf{X}} - \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\mathbf{Y}} \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{X}} &= \mathbf{F}_{\text{ag}} - \mathbf{Z}\mathbf{X} + \epsilon\mathbf{X} \\ \mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{Y}} &= \epsilon\mathbf{Y} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Le solveur fournit une évaluation de  $\mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{X}}$ . L'utilisation de la matrice  $\mathbf{E}$  (voir équation III.109) permet de passer les efforts non-linéaires du domaine fréquentiel  $\mathbf{F}_{\text{nl}}^{\text{X}}$  au domaine temporel  $\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{X}}$  où, en notant chaque instant de la période  $t_k$  :

$$\mathbf{f}_{\text{nl}}^{\text{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{\text{nl},t_0}^{\text{X}} \\ \mathbf{f}_{\text{nl},t_1}^{\text{X}} \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{\text{nl},t_{2N_h}}^{\text{X}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

La prédiction consiste alors à supposer que le système est adhérent. Cela signifie que les interfaces sont en contact, et que le déplacement relatif ne change pas au cours du temps. En notant  $\bullet^T$  et  $\bullet^N$  les composantes tangentielles et normales, la prédiction prend la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{y}_{t_k}^{\text{T}} &= \mathbf{y}_{t_{k-1}}^{\text{T}} \\ \mathbf{y}_{t_k}^{\text{N}} &= \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Les efforts non-linéaires prédits s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,T}} &= \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{X,T}} - \mathbf{f}_{\text{nl},t_{k-1}}^{\text{Y,T}} \\ \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,N}} &= \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{X,N}} \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

### Correction des efforts non-linéaires

La procédure de correction consiste à corriger à chaque instant  $t_k$  les efforts prédits en équation A.8 en tenant compte des lois de contact unilatérale et de frottement de Coulomb. Ainsi, on distingue trois cas de figure :

- Cas de décollement :  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,N}} < \mathbf{0}$

On se place dans le cas où l'effort normal prédit est une force de traction. Cela signifie qu'un décollement des interfaces est observé en cet instant, ce qui implique qu'il n'y a plus d'effort :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y}} = \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{X}} \quad (\text{A.9})$$

- Cas de contact adhérent :  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,N}} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,T}} < \mu \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred,N}}$

On se place dans le cas où les interfaces sont en contact (présence d'un effort normal de réaction) mais où les forces de contact restent à l'intérieur du cône de Coulomb. Les interfaces observées sont donc adhérentes. On a :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{T}} = \mathbf{f}_{\text{nl},t_{k-1}}^{\text{Y},\text{T}} \\ \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{N}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

- Cas de contact glissant :  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}} \geq \mathbf{0}$  et  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}} \geq \mu \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}$

On se place dans le cas où les interfaces sont en contact (présence d'un effort normal de réaction) et où les forces de contact sont sur le cône de Coulomb. L'effort normal  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{N}}$  est égal à l'effort prédit  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}$  et le glissement est possible entre les interfaces en contact. La valeur de l'effort tangentiel est :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{T}} = \mu \|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}\| \frac{\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}}}{\|\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}}\|} \quad (\text{A.11})$$

où  $\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}}$  est la vitesse relative de glissement définie par :

$$\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}} = \frac{\mathbf{x}_{t_k}^{\text{T}} - \mathbf{x}_{t_{k-1}}^{\text{T}}}{t_k - t_{k-1}} \quad (\text{A.12})$$

À la convergence, on a, d'après l'équation A.3 :

$$\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}} = \frac{\mathbf{y}_{t_k}^{\text{T}} - \mathbf{y}_{t_{k-1}}^{\text{T}}}{t_k - t_{k-1}} \quad (\text{A.13})$$

Compte tenu des équations A.4 et A.8, on a :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}} - \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{T}} = \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{T}} - \mathbf{f}_{\text{nl},t_{k-1}}^{\text{Y},\text{T}} = \epsilon (t_k - t_{k-1}) \mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}} \quad (\text{A.14})$$

D'après les équations A.11 et A.14, les vecteurs  $\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}}$  et  $\mathbf{v}_{t_k}^{\text{T}}$  sont colinéaires. On peut donc écrire :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{T}} = \mu \|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}\| \frac{\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}}}{\|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}}\|} \quad (\text{A.15})$$

En reportant l'équation A.15 dans A.14, on trouve :

$$\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{T}} = \mathbf{f}_{\text{nl},t_{k-1}}^{\text{Y},\text{T}} + \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}} \left( 1 - \mu \frac{\|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}\|}{\|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}}\|} \right) \quad (\text{A.16})$$

Finalement, on a :

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{T}} = \mathbf{f}_{\text{nl},t_{k-1}}^{\text{Y},\text{T}} + \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}} \left( 1 - \mu \frac{\|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{N}}\|}{\|\mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{pred},\text{T}}\|} \right) \\ \mathbf{f}_{\text{nl},t_k}^{\text{Y},\text{N}} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (\text{A.17})$$



## Annexe B

# Critères de MAC entre harmoniques par amplitude du nœud $n_{obs}$ selon l'itération de couplage fort

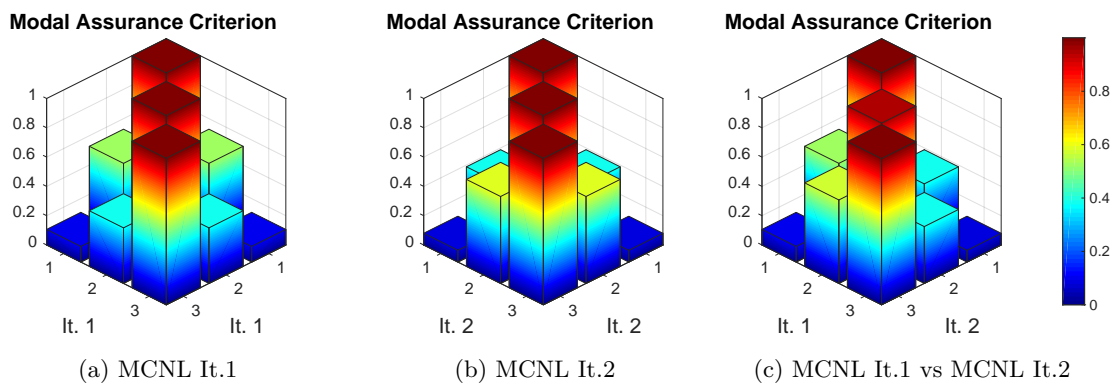


FIGURE B.1 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour  $n_{obs} = 0.58$

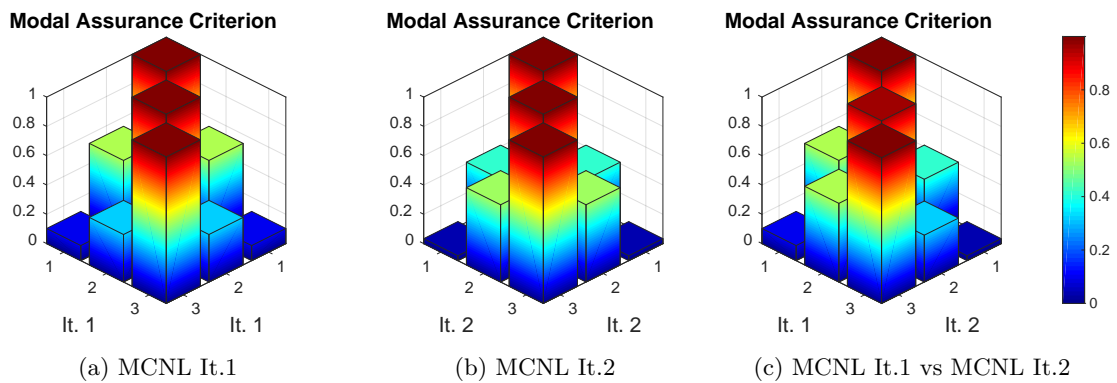


FIGURE B.2 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour  $n_{obs} = 0.90$



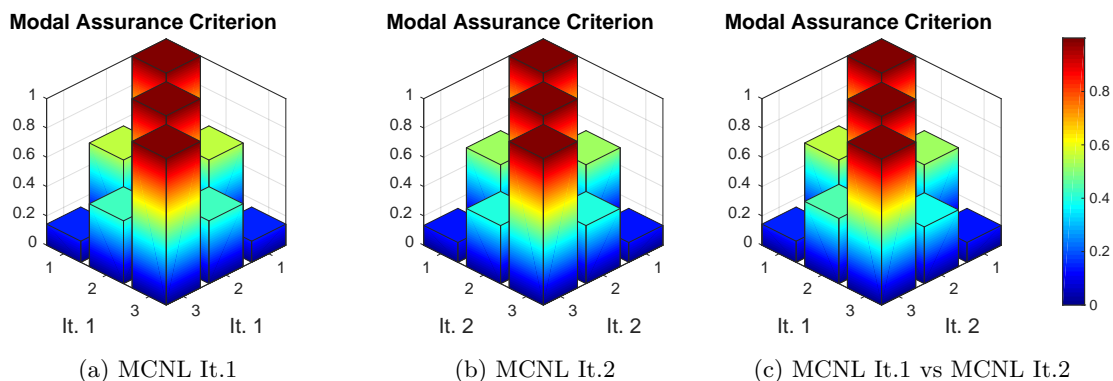


FIGURE B.3 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour  $n_{obs} = 1.20$

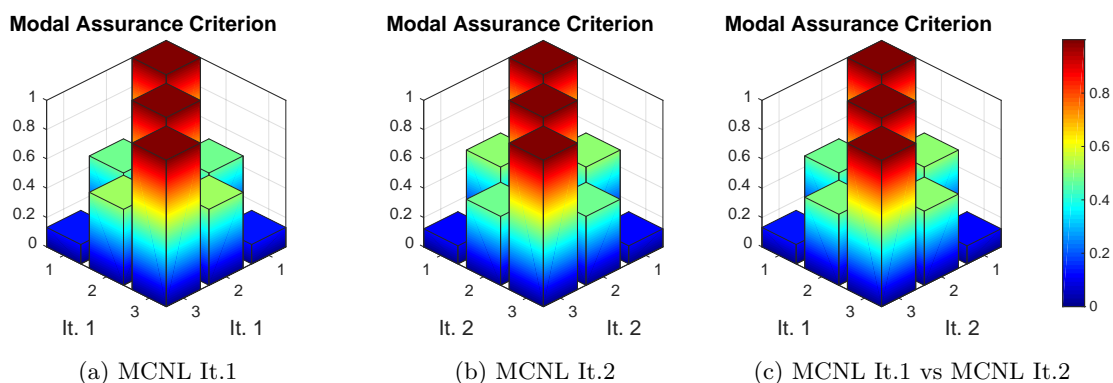


FIGURE B.4 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour  $n_{obs} = 1.51$

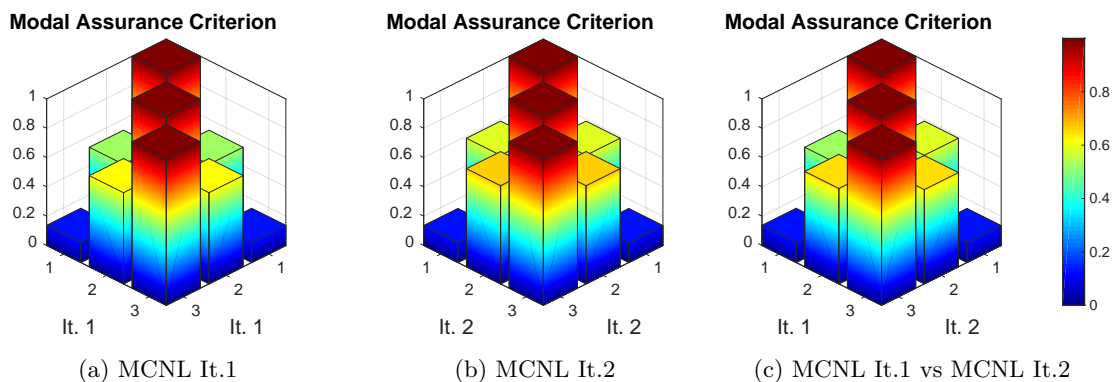


FIGURE B.5 – Application du critère de MAC sur les harmoniques de déplacement des degrés de liberté physique selon l'itération de couplage fort pour  $n_{obs} = 1.66$

## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur F. THOUVEREZ

et les rapports de

M. J-F. DEU  
Professeur - CNAM Paris - LMSSC - Mécanique - case courrier 2D6R10 - 292 rue Saint-Martin  
75141 Paris cedex 03

et de

M. J-C. CHASSAING  
Professeur - Sorbonne Université - Institut Jean le Rond d'Alembert (Case 162)  
4 place Jussieu - 75252 Paris Cedex 05

**Monsieur OMBRET Nicolas**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale** Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique

Fait à Ecully, le 7 novembre 2022

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon  
Le directeur des Formations

Grégory VIAL

