



HAL
open science

Contribution à la modélisation électromagnétique des matériaux composites par le couplage de méthodes de réduction d'ordre et de décomposition de domaine

Suyang Lou

► **To cite this version:**

Suyang Lou. Contribution à la modélisation électromagnétique des matériaux composites par le couplage de méthodes de réduction d'ordre et de décomposition de domaine. Autre. Nantes Université, 2022. Français. NNT : 2022NANU4047 . tel-03983581

HAL Id: tel-03983581

<https://theses.hal.science/tel-03983581v1>

Submitted on 11 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE

NANTES UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 601
*Mathématiques et Sciences et Technologies
de l'Information et de la Communication*
Spécialité : *Génie Électrique*

Par

Suyang LOU

«Contribution à la modélisation électromagnétique des matériaux composites par le couplage de méthodes de réduction d'ordre et de décomposition de domaine»

Thèse présentée et soutenue à Saint-Nazaire, le 13/12/2022

Unité de recherche : Institut de Recherche en Énergie Électrique de Nantes Atlantique (IREENA)

Rapporteurs avant soutenance :

Olivier CHADEBEC Directeur de Recherche CNRS, Grenoble Alpes, G2ELab
Anouar BELAHCEN Professeur des Universités, Aalto University, Espoo, Finlande

Composition du Jury :

Attention, en cas d'absence d'un des membres du Jury le jour de la soutenance, la composition du jury doit être revue pour s'assurer qu'elle est conforme et devra être répercutée sur la couverture de thèse

Président :	Claude MARCHAND	Professeur des Universités, Université Paris-Saclay, GEEPS
Examineurs :	Olivier CHADEBEC	Directeur de Recherche CNRS, Grenoble Alpes, G2ELab
	Anouar BELAHCEN	Professeur des Universités, Aalto University, Espoo, Finlande
	Mathilde CHEVREUIL	Maitre de conférence, Nantes Université, GeM
	Yves LE GUENNEC	Docteur-Ingénieur R&D, IRT Jules Verne, Nantes
Dir. de thèse :	Didier TRICHET	Professeur des Universités, Nantes Université, IREENA
Encadrement de thèse :	Guillaume WASELYNCK	Maitre de conférence, Nantes Université, IREENA
	Antoine PIERQUIN	Maitre de conférence, Nantes Université, IREENA

Invité :

Nicolas BRACIKOWSKI Maitre de conférence, Nantes Université, IREENA

REMERCIEMENTS

Je voudrais tout d'abord remercier grandement **mes encadrements de thèse**, Didier, Guillaume et Antoine, pour toute leur aide. Je suis ravie de travailler avec eux, en plus du soutien scientifique, ils m'ont soutenu tout au long de l'élaboration de cette thèse. En outre, je tiens à remercier Nicolas (Nicolas BRACIKOWSKI) pour ses conseils pendant mon doctorat.

Je tiens à remercier **les membres du jury**, Olivier CHADEBEC, Anouar BELAHCEN, Claude MARCHAND, Mathilde CHEVREUIL, Yves LE GUENNEC pour leur présence, pour leur lecture attentive de ma thèse ainsi que pour les remarques qu'ils m'adresseront lors de ma soutenance afin d'améliorer mon travail dans le futur.

Ma thèse est financée par **le projet WISE** et je tiens à remercier WISE et Mohamed (Mohamed MACHMOUM) qui a rendu ce projet possible.

De plus, je tiens à remercier tous les autres membres du **laboratoire IREENA** : les personnels du laboratoire (Christine, Franck, Laurette), avec leur aide, cela m'a permis de passer toutes ces années dans une ambiance conviviale. Je tiens à remercier tous les doctorants ou docteurs (Mansor, Yassine, Ming, Hakim, Sid, Ousmane, Christophe, Zhuo, Jeremy, Banda, ...) et les enseignants.

Je tiens également à remercier **ma famille et mes amis**. Bien que ma famille n'ait pas pu présenter à mes côtés pendant cette période difficile (en raison du COVID-19), ils m'ont souvent demandé des nouvelles par rapport mon étude. Mes amis m'ont également apporté de l'aide de l'encouragement pendant cette période.

Comme indiqué pendant ma soutenance, essayer de résumer mes remerciements en quelques mots est aussi compliqué que de trouver ses mots clés limités pour un article scientifique, et cette liste de remerciements ne sera peut-être pas exhaustive, je voudrais remercier à toutes les personnes que je connais et tous ceux qui m'ont aidé.

Merci à toutes et à tous.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1 État de l'art	5
1.1 Introduction	5
1.2 Matériaux Composites	5
1.2.1 Définition d'un matériau composite	5
1.2.2 Défauts	10
1.3 Le contrôle non destructif	11
1.3.1 Les techniques des courants de Foucault	11
1.3.2 Les techniques de la thermographie infrarouge	12
1.3.3 Le CND par thermo-induction	13
1.4 Les verrous scientifiques de l'étude	17
1.4.1 Les phénomènes 3D	18
1.4.2 Le grand facteur entre les différentes échelles	18
1.4.3 L'anisotropie de matériau	19
1.4.4 Le saut de propriétés au niveau du défaut	19
1.4.5 L'alimentation de l'inducteur	19
1.4.6 La position aléatoire des fibres	20
1.4.7 Les phénomènes de percolation électrique	21
1.4.8 Le changement de propriété en fonction de la température	21
1.5 Les approches de modélisation actuelle	21
1.5.1 La méthode d'homogénéisation	21
1.5.2 Les études réalisées par l'IREENA	22
1.5.3 Les limitations des approches	24
1.6 L'objectif de la thèse	25
1.6.1 Les méthodes de réduction d'ordre de modèle (ROM)	25
1.6.2 La méthode de décomposition de domaine (DD)	29
1.7 Idée générale de la thèse	30
1.8 Conclusion	34

2	Construction du modèle de référence	35
2.1	Génération de la géométrie	36
2.1.1	Génération de la géométrie en cellules	37
2.1.2	Concaténation des cellules	42
2.1.3	Recherche des contacts entre fibres	42
2.2	Modèle physique global	49
2.3	L'imposition en tension	52
2.3.1	Validation pour des fibres "ordonnées"	55
2.4	L'imposition inductive	56
2.5	Conclusion	61
3	Les méthodes de réduction d'ordre de modèle et de décomposition de domaine	63
3.1	Proper orthogonal decomposition	64
3.1.1	Stratégies de proper orthogonal decomposition	64
3.1.2	Conclusion sur la POD	81
3.2	Décomposition de domaine	82
3.2.1	Stratégie de décomposition de domaine	82
3.2.2	Analyse d'erreur	85
3.2.3	Conclusion sur la décomposition de domaine	91
3.3	Conclusion	92
4	La méthode de décomposition de domaine avec proper orthogonal decomposition	93
4.1	Stratégies de décomposition de domaine avec proper orthogonal decomposition	94
4.2	Résultats	96
4.2.1	La comparaison entre la DD et la DD-POD	97
4.2.2	L'effet de la condition de convergence sur les résultats	100
4.2.3	Vérification de convergence	107
4.2.4	Vérification pour une source plus complexe	109
4.2.5	Conclusion	112
4.3	Application sur le matériau [0/90]	113
4.4	Relation entre temps et nombre de cellules	115

4.4.1	La fonction entre le temps et le nombre de cellules dans la direction de la fibre	115
4.4.2	La fonction entre le temps et le nombre de cellules dans la section transversale de la fibre	118
4.5	Intérêt du calcul parallèle	120
4.6	Conclusion	124
Conclusion et Perspectives		125
A Proper generalized decomposition		127
B Analyse éléments finis préliminaires		136
Bibliographie		141

TABLE DES FIGURES

1	Pourcentage d'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique [Fen15]	1
1.1	Renforts [Bui14]	7
1.2	Structures tissées [Ben06]	7
1.3	Différents matériaux de renfort : (a) verre, (b) carbone, (c) aramide [Gen11]	7
1.4	Sandwich	8
1.5	Stratifié [Was11]	9
1.6	Stratifié empilé par plis	9
1.7	Défauts du matériau [DO04; Led09; Eye15; Cha00; GS99]	11
1.8	Techniques des courants de Foucault [Ngu14]	12
1.9	Thermographie infrarouge [Bui14]	13
1.10	Limitations des techniques de CND [Bui14]	14
1.11	CND par thermo-induction [Bui14]	15
1.12	Détection de défaut par thermo-induction[Bui14]	16
1.13	Exemple des matériaux	17
1.14	Les différentes échelles de matériau à étudier	18
1.15	Densité de courant imposé dans l'inducteur [Bui14]	20
1.16	Alimentation en tension [Bui14]	20
1.17	Travaux réalisés par l'IREENA [Kan19]	24
1.18	Exemples de sous-domaines qui se recouvrent	29
1.19	Illustration de procédure de méthode de réduction d'ordre de modèle . . .	31
1.20	Un circuit électrique équivalent	32
1.21	Évolution de la partie réelle de l'impédance en fonction de la fréquence [Was11]	33
1.22	Évolution du rapport entre la partie imaginaire et réelle de l'impédance en fonction de la fréquence [Was11]	33
2.1	Coupe micrographique du matériau réel [Was11]	36
2.2	Découpage du composite	38

2.3	Algorithme dit « Bubble Mesh »	39
2.4	Relation entre la force et la distance entre fibres [Sen17]	40
2.5	Déplacement des fibres [Kan19]	40
2.6	Un exemple de matériau virtuel	41
2.7	Un exemple de concaténation dans le sens de fibres	43
2.8	Un exemple de concaténation de cellules dans le sens transverse	43
2.9	Réseau de résistance équivalent	44
2.10	Un exemple de concaténation de cellules du matériau [0/90]	46
2.11	Détection du contact entre plis du matériau [0/90]	48
2.12	Calcul de la distance dans la section $x - y$ [0/90]	48
2.13	Construction du matériau de $2 \times 2 \times 2$ cellules	51
2.14	Réseaux de résistance	53
2.15	Essai volt-ampèremétrique	54
2.16	Potentiel pour les conditions aux limites imposées en x , y et z direction	55
2.17	Potentiel pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	58
2.18	Courant pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	59
2.19	Courant pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	61
3.1	Construction du matériau virtuel	64
3.2	Relation entre l'erreur relative et nombre des termes d'enrichissement	73
3.3	Potentiel de référence en x , y et z direction	73
3.4	Potentiel obtenu par la POD en x , y et z direction	74
3.5	Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la POD pour le modèle avec l'imposition en tension	74
3.6	Relation entre l'erreur relative et nombre des termes d'enrichissement	77
3.7	Potentiel de référence pour les sources \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	77
3.8	Potentiel obtenu par la POD pour les sources \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	77
3.9	Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la POD pour le modèle avec l'imposition inductive	78
3.10	Erreur du courant pour les sources \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	81
3.11	Algorithme de la DD	83
3.12	Illustration de la DD pour le cas transverse	84
3.13	Relation entre l'erreur relative et nombre d'itération	86
3.14	Potentiel de référence en x , y et z direction	87
3.15	Potentiel obtenu par DD en x , y et z direction	87

TABLE DES FIGURES

3.16	Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la DD pour le modèle avec l'imposition en tension	88
3.17	Relation entre l'erreur relative et nombre d'itération	90
3.18	Potentiel de référence pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	90
3.19	Potentiel obtenu par la DD pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z	90
3.20	Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la DD pour le modèle avec l'imposition inductive	91
4.1	Algorithme de la DD-POD	95
4.2	Application de la DD-POD pour le cas de traverse	96
4.3	Erreurs relatives pour la DD et la DD-POD avec le potentiel imposé	98
4.4	Erreurs relatives pour la DD et la DD-POD avec la source \mathbf{B} imposée	99
4.5	Erreur relative entre deux itérations avec $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z$ imposé	102
4.6	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_x	103
4.7	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_x	104
4.8	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_y	105
4.9	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_y	105
4.10	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_z	106
4.11	Relation entre l'erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_z	107
4.12	Comparaison entre les courants triés pour un matériau UD avec 3 sources magnétiques uniformes	108
4.13	Comparaison entre les potentiels pour un matériau UD avec la source \mathbf{B}_1	110
4.14	Comparaison entre les potentiels pour un matériau UD avec la source \mathbf{B}_2	110
4.15	Comparaison entre le courant trié, la puissance triée	111
4.16	Comparaison entre le courant trié, la puissance triée	112
4.17	Exemple de matériau $[0/90]$	113
4.18	Comparaison entre les potentiels avec \mathbf{B}_1 imposée	114
4.19	Comparaison entre le courant trié, la puissance triée	114

4.20	Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la DD-POD pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres	116
4.21	Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la résolution directe pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres	117
4.22	Comparaison des temps de simulation entre la résolution directe et la DD-POD pour nombre de cellules dans la direction des fibres	117
4.23	Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la DD-POD pour un nombre donné de cellules sur un côté de la direction des fibres	118
4.24	Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la résolution directe pour un nombre donné de cellules sur un côté de la direction des fibres	119
4.25	Comparaison des temps de simulation entre la résolution directe et la DD-POD pour nombre de cellules sur un côté de la direction des fibres	120
4.26	Relation entre la simulation du temps de résolution et le nombre de cellule dans la section	121
4.27	Relation entre la simulation du temps de résolution et la taille de la section	121
4.28	Algorithme de la DD-POD en parallèle	122
4.29	Comparaison entre la simulation du temps de calcul parallèle et la résolution directe pour matériau UD	123
4.30	Comparaison entre la simulation du temps de calcul parallèle et la résolution directe pour matériau [0/90]	124
A.1	Fibres en 2D	127
A.2	Maillage	128
A.3	Domaine du problème	128
A.4	Algorithme de PGD	131
A.5	Potentiel par EF 2D	134
A.6	Potentiel par PGD	134
A.7	Densités de courant par EF 2D	135
A.8	Densités de courant par PGD	135
B.1	Pertes obtenues par formulation $\mathbf{A} - \varphi$ avec \mathbf{B}_x imposée, vues de différentes directions	137
B.2	Pertes obtenues par formulation φ avec \mathbf{B}_x imposée, vues de différentes directions	138

TABLE DES FIGURES

B.3 Différence entre des pertes obtenues par deux formulations, vues de différentes directions 139

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Comparaison de temps de génération	42
2.2	Relation entre le contact de nœuds et s, t	49
3.1	Erreur relative du potentiel de POD avec 450 termes d'enrichissement pour cinq matériaux régénérés	79
3.2	Erreur relative du courant de POD avec 450 termes d'enrichissement pour cinq matériaux régénérés	79
3.3	Caractères statistiques des erreurs du potentiel sur 5 matériaux	79
3.4	Caractères statistiques des erreurs du courant sur 5 matériaux	79
4.1	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_x imposé	102
4.2	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_x imposé	103
4.3	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_y imposé	104
4.4	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_y imposé	104
4.5	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_z imposé	106
4.6	Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_y imposé	106
4.7	Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $2 \times 2 \times 2$ avec 3 sources magnétiques uniformes	108
4.8	Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $4 \times 4 \times 4$ avec 3 sources magnétiques uniformes	108
4.9	Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $3 \times 3 \times 3$ avec 3 sources magnétiques uniformes	109

4.10	Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD avec 2 sources magnétiques	109
4.11	Erreur relative de la DD-POD pour différentes sources magnétiques pour un matériau [0/90]	113
4.12	Temps moyen de résolution par la DD-POD pour différents nombres de cellules dans la direction de la fibre	115
4.13	Temps moyen de résolution directe pour différents nombres de cellules dans la direction de la fibre	116
4.14	Temps moyen de résolution par la DD-POD pour différents nombres de cellules sur un côté de la section de fibre	118
4.15	Temps moyen de résolution directe pour différents nombres de cellules sur un côté de la section des fibres	119
A.1	Comparaison entre EF 2D et PGD	134

INTRODUCTION

Les matériaux composites se sont développés rapidement ces dernières années et sont largement utilisés dans les domaines aéronautique et automobile en raison de leurs excellentes propriétés mécaniques. Comme le montre la figure 1, la proportion de matériaux composites sur les avions a augmenté rapidement au cours des cinquante dernières années, l'A350XWB et le B787 utilisant désormais plus de 50% de matériaux composites.

Les matériaux composites sont en effet plus légers que leurs équivalents métalliques tout

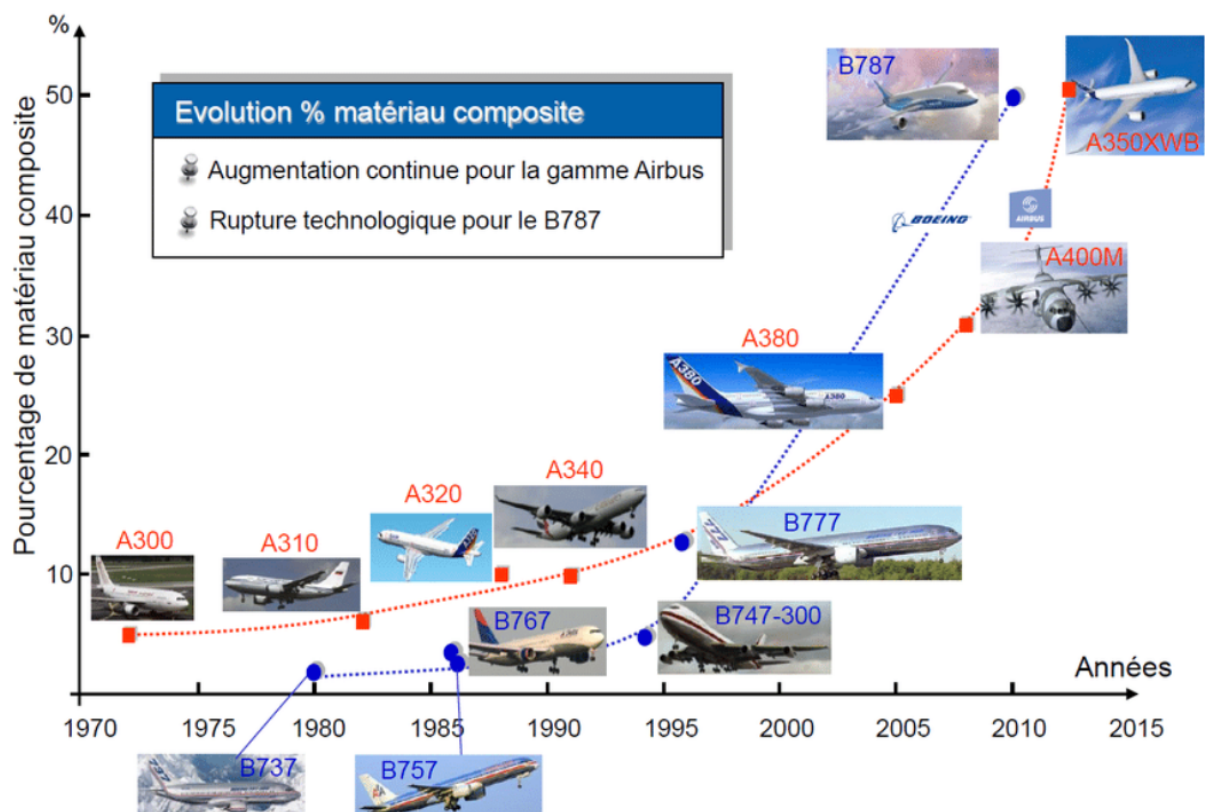


FIGURE 1 – Pourcentage d'utilisation des matériaux composites dans l'industrie aéronautique [Fen15]

en gardant une excellente résistance mécanique. Les matériaux composites sont formés de particules ou fibres enrobées dans une résine, et c'est cette association qui leur confère

les propriétés citées. Néanmoins cela conduit à des matériaux hétérogènes, d'autant plus que les procédés de fabrication peuvent être moins maîtrisés, là encore, que des procédés de fabrication métallique. Les défauts à l'intérieur de ces matériaux avec des structures complexes sont plus difficiles à détecter. Afin d'effectuer l'inspection sur les matériaux et garantir leur intégrité, des méthodes de Contrôle Non Destructifs (CND) peuvent être utilisées, à l'instar des méthodes par ultrasons ou par thermo-induction.

L'IREENA a réalisé de nombreux travaux sur les phénomènes d'induction dans les matériaux composites à fibres longues de carbone : simulation du CND par thermo-induction [Tri00 ; Ben06 ; Ram09 ; Ba21], étude du défaut à l'échelle macroscopique et mésoscopique [Bui14], conception de système de soudage par induction [Was11 ; Kan19 ; Ndi22] ... Une difficulté majeure dans ces études est le grand facteur d'échelle entre la taille des fibres et la taille des matériaux composites, ce qui rend difficile la simulation directe sur les matériaux composites. Pour résoudre ce problème, les approches existantes traitent les matériaux composites grâce à des approches d'homogénéisation multi-échelle.

Un des désavantages des méthodes d'homogénéisation est la perte de l'information locale à l'échelle des fibres. Donc dans cette thèse, nous cherchons à utiliser et développer des méthodes permettant de traiter le facteur d'échelle en limitant la perte d'information à l'échelle la plus fine. Notre travail de thèse consiste à trouver de nouvelles méthodes numériques capables de simuler le processus de CND, tout en garantissant la précision d'information à l'échelle de la fibre.

Le manuscrit sera structuré de la façon suivante :

Dans le chapitre 1, nous présentons les matériaux composites et leurs défauts courants, dont la présence réduit les propriétés mécaniques du matériau, raison pour laquelle le CND doit être appliqué. Cependant, les méthodes existantes sont incapables de traiter les défauts avec précision à l'échelle de la fibre, et de nouvelles méthodes numériques doivent donc être développées pour résoudre ce problème. Dans cette thèse, les méthodes de réduction d'ordre de modèle et la méthode de décomposition de domaine seront mises en œuvre.

Le chapitre 2 montre comment simuler numériquement des matériaux que nous étudions. Cela comprend la génération de matériaux virtuels en fonction des propriétés de matériau, l'étude des circulations du courant dans le matériau et la simulation électrique basée sur un réseau équivalent.

Le chapitre 3 présente la méthode proper orthogonal decomposition (POD), la méthode

de décomposition de domaine (DD), et leurs avantages et défauts.

Enfin, dans le chapitre 4, les deux méthodes, POD et DD, sont combinées et leur faisabilité est vérifiée : les temps de calcul et les précisions seront comparés.

ÉTAT DE L'ART

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, les caractéristiques principales des matériaux composites et leurs Contrôles Non Destructifs (CND) associés sont d'abord introduits. Ensuite, la méthodologie de modélisation sera présentée ainsi que ses limites. Ce chapitre se terminera avec la présentation des principaux objectifs de la thèse.

1.2 Matériaux Composites

1.2.1 Définition d'un matériau composite

Un matériau composite est composé de deux ou plusieurs matériaux non miscibles aux propriétés différentes. Contrairement aux alliages métalliques, le matériau composite conserve les propriétés physiques, chimiques et mécaniques de chaque composant [Ber99] et les avantages des caractéristiques de chaque composant, par exemple légèreté, haute résistance, excellente élasticité.

Les matériaux composites sont généralement constitués d'une ou plusieurs phases discontinues réparties dans une phase continue. La phase continue s'appelle la matrice et la phase discontinue s'appelle le renfort. Les renforts augmentent la résistance mécanique, et la matrice assure la cohésion de l'assemblage et la transmission des efforts aux renforts.

Les renforts

Il y a deux groupes de renforts (figure 1.1) :

- les renforts sous forme de particules ou de fibres courtes : les renforts sont placés de manière aléatoire dans la matrice. Les particules peuvent avoir n'importe quelle forme, taille ou configuration. Des exemples de composites à particules sont le

béton et les panneaux de particules. Les composites à particules ont tendance à être moins rigides que les composites à fibres longues.

- les renforts sous forme de fibres longues : le renfort est constitué d'un groupe de fibres longues d'un diamètre compris entre 3 et 15 μm .

Pour les renforts sous forme de fibres longue, les structures sont « orientées » et se répartissent en deux catégories :

- Les structures unidirectionnelles : toutes les fibres sont orientées dans la même direction, et les propriétés de ces matériaux sont anisotropes. Dans ces structures unidirectionnelles, bien que les fibres soient orientées dans le même sens, leurs positions en coupe sont aléatoires.
- Les structures tissées : les fibres sont tissées dans deux ou trois directions comme présenté sur la figure 1.2. L'utilisation de matériaux avec de telles structures est très limité en raison de leur coût de production élevés.

Les renforts utilisés sont souvent la fibre de verre, la fibre de carbone, la fibre d'aramide ou la fibre végétale.

- La fibre de verre est la moins chère et la plus utilisée : elle est utilisée dans environ 95% des renforts.
- La fibre de carbone est plus chère mais très performante mécaniquement, elle est couramment utilisée dans l'aéronautique, la construction, les sports et loisirs.
- La fibre d'aramide ou de polypropylène est plus résistante que la fibre de carbone, elle peut être utilisée pour les gilets pare-balles et autres protections balistiques.
- La fibre végétale, comme le chanvre ou le lin, est renouvelable, elle commence à apparaître dans certaines parties peu sollicitées mécaniquement et en génie civil.

La figure 1.3 présente un exemple de différents matériaux de renfort.

La matrice

Dans les matériaux composites, la matrice est un matériau qui agit comme un liant, elle transmet les contraintes aux renforts, les entoure et les protège. Les matériaux composites courants comprennent : les composites à matrice organique (CMO), les composites à matrice céramique (CMC), les composites à matrice métallique (CMM), etc[Gen11]. Les CMO sont les matériaux les plus courants, comprenant les thermoplastiques (PPS, PEEK, PEKK) et les thermodurcissables. Le CMO peut être divisé en deux catégories : les composites à grande diffusion avec faible performance et prix abordables, les compo-

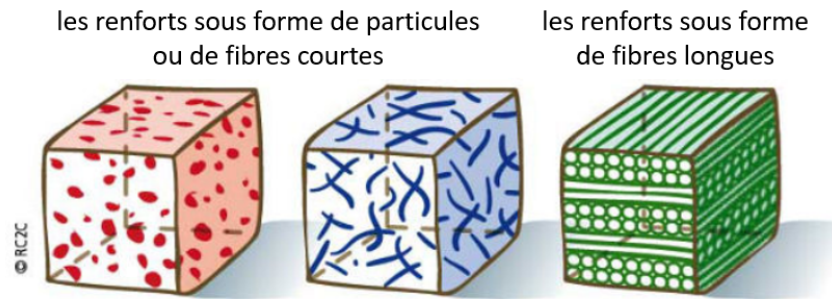


FIGURE 1.1 – Renforts [Bui14]

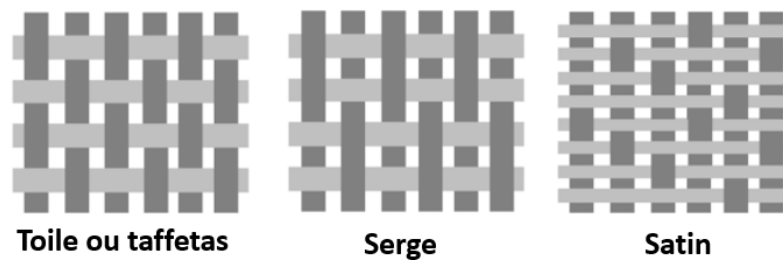


FIGURE 1.2 – Structures tissées [Ben06]

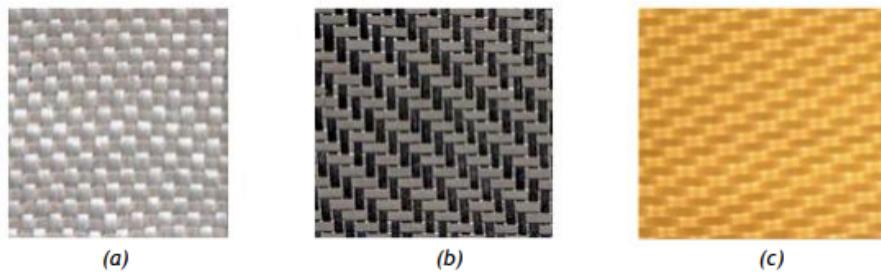


FIGURE 1.3 – Différents matériaux de renfort : (a) verre, (b) carbone, (c) aramide [Gen11]

sites à haute performance. Les matrices de CMM couramment utilisées sont l'aluminium, le titane ou le magnésium. Les matrices de CMC couramment utilisées sont en carbone ou carbure de silicium.

Architecture d'un composite

Les matériaux composites sont structurés en sandwich (figure 1.4) ou stratifié (figure 1.5).

- Le sandwich est la première structure composite légère de haute performance. Le principe de construction d'un sandwich est de coller ou souder une âme légère et épaisse à deux peaux pour avoir des bonnes propriétés sous tension. Ce processus peut produire des structures légères et rigides en flexion, mais elles sont souvent incapables de réduire le son et ont une faible résistance au feu.



FIGURE 1.4 – Sandwich

- Le stratifié est constitué de couches élémentaires de fibres appelés « plis ». La structure interne du pli peut être un pli unidirectionnel dans lequel le renfort a une orientation unidirectionnelle.

Comme le montre la figure 1.6, plusieurs plis unidirectionnels peuvent être empilés verticalement dans différentes orientations spécifiées pour obtenir des stratifiés avec les propriétés mécaniques souhaitées. Mais les différentes orientations de plis affectent également les propriétés magnétiques, électriques et thermiques des stratifiés.

L'identité d'un stratifié peut être définie d'après un code d'orientation [BL99 ; Gor08] :

1. Chaque pli est représenté par un numéro qui représente l'angle en degrés entre l'orientation des fibres et l'axe de référence ;
2. Les plis successifs sont séparés par "/" si leurs angles d'orientation sont différents ;
3. Les plis successifs avec la même orientation sont indiqués par des indices ;
4. Les plis sont spécifiés d'un côté à l'autre entre crochets (ou parenthèses) indiquant le début et la fin du stratifié.

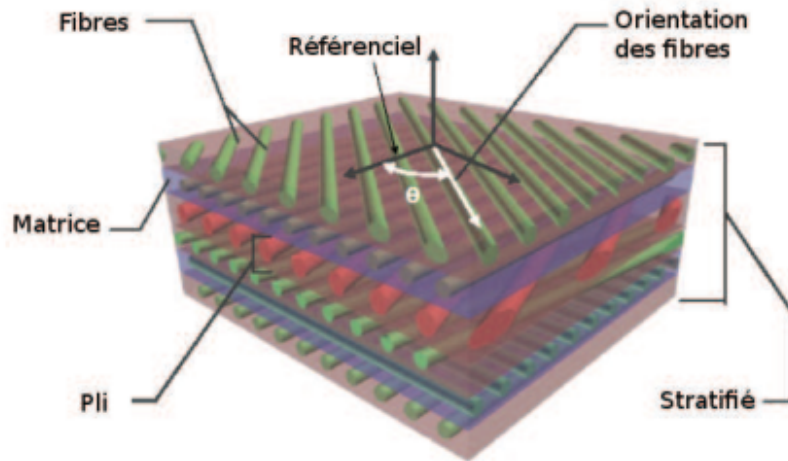


FIGURE 1.5 – Stratifié [Was11]

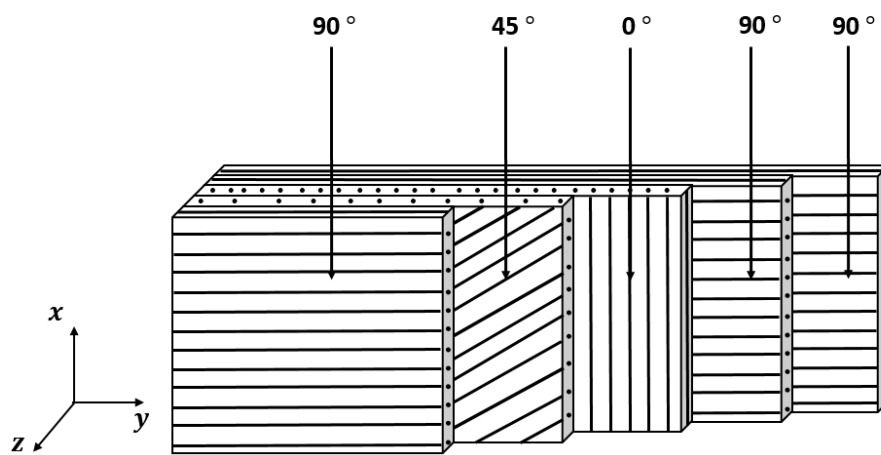


FIGURE 1.6 – Stratifié empilé par plis

La figure 1.6 présente le stratifié $[90_2/0/45/90]$.

Nous avons trois types de stratifié spécifiés [Ben06] :

- L'équilibré : le stratifié comporte autant de plis dans la direction $+\theta$ que dans la direction $-\theta$, avec θ un angle donné ;
- Le symétrique miroir : les plis du stratifié sont placés symétriquement par rapport au plan moyen ;
- L'orthogonal : le stratifié comporte autant de plis d'angle à 0° que d'angle à 90° .

1.2.2 Défauts

Malgré les propriétés intéressantes des matériaux composites, les défauts ne sont pas absents. Des défauts (figure 1.7) peuvent se former pendant le processus de fabrication et lors de l'utilisation. Ils comprennent sans s'y limiter :

1. Les défauts à l'échelle mésoscopique (l'échelle du pli) :
 - le délaminage, dû aux ruptures de la matrice qui atteignent l'interface entre deux plis ;
 - les ruptures de fibres, qui peuvent se produire en tension ou en compression, si la rupture est à l'échelle mésoscopique, ce défaut est à l'échelle mésoscopique ;
 - l'ondulation des fibres, qui peut avoir un impact significatif sur le développement de la rupture des fibres ;
2. Les défauts à l'échelle microscopique (l'échelle de la fibre) :
 - la porosité, due au fait que les composants volatils de la matrice ou de l'air ne sont pas correctement contrôlés pendant le traitement ;
 - la décohésion des fibres et de la matrice, causée par des concentrations de contraintes dans la matrice autour des fibres. Ils entraînent une perte d'adhérence entre les fibres et la matrice.
 - les ruptures de fibres : si la rupture est à l'échelle microscopique, ce défaut est à l'échelle microscopique ;

Ces matériaux composites occupent souvent une place importante dans les systèmes intégrés, et il est essentiel d'effectuer des contrôles non destructifs (CND) sur eux avant de les utiliser pour détecter des défauts éventuels [MFB12].

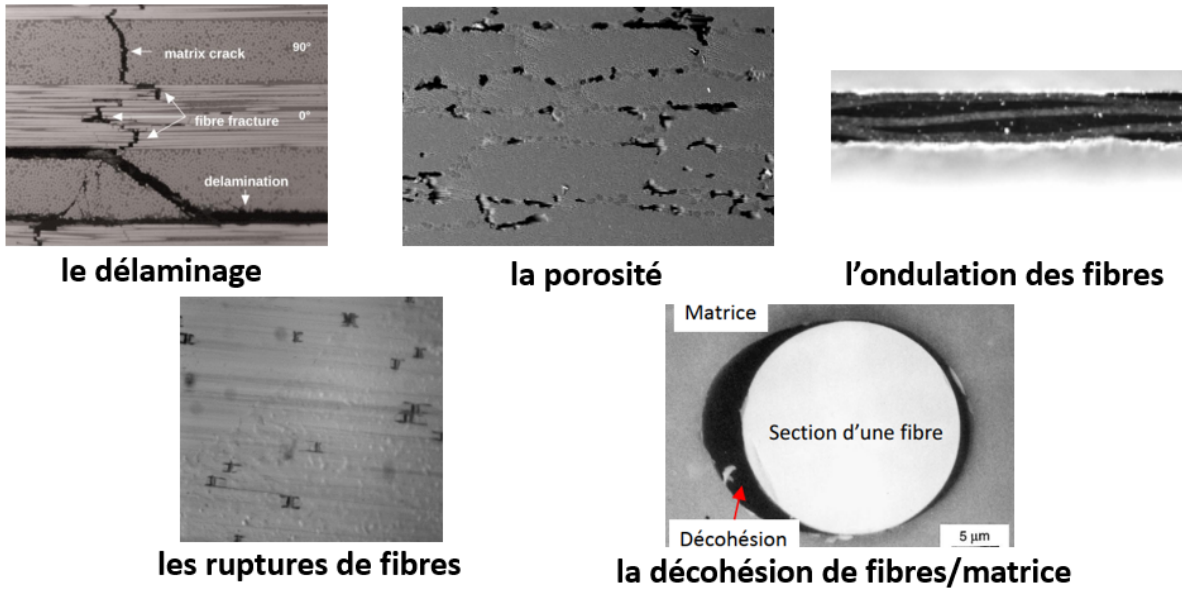


FIGURE 1.7 – Défauts du matériau [DO04 ; Led09 ; Eye15 ; Cha00 ; GS99]

1.3 Le contrôle non destructif

Certaines techniques de CND sont applicables aux matériaux composites, comme les ultrasons, la radiographie, les courants de Foucault ou la thermographie infrarouge. Cependant, l'inspection des matériaux composites reste un défi car ces matériaux ont des propriétés nonhomogènes et anisotropes. Aucune technique de contrôle non destructif n'est satisfaisante à elle seule et chaque méthode présente certaines limites en termes de précision, de sensibilité, de fidélité de mesure, de reproductibilité du signal et parfois de difficulté de calibration lors du contrôle des matériaux composites. De plus, ces techniques peuvent être chères et difficiles à mettre en place.

Le CND par thermo-induction est la combinaison des techniques des courants de Foucault et de la thermographie infrarouge. Cette méthode a une haute capacité de détection de défaut [Bui14] et a un rapport qualité/prix intéressant.

1.3.1 Les techniques des courants de Foucault

La méthode de détection par courant de Foucault consiste à générer des courants induits dans la pièce à contrôler à l'aide d'une bobine, et de mesurer la variation d'impédance due à ces courants induits. Un défaut entraîne une perturbation des courants de

Foucault et ainsi une variation d'impédance. Le contrôle est illustré sur la figure 1.8.

Les techniques des courants de Foucault ont été utilisées avec succès pour localiser et

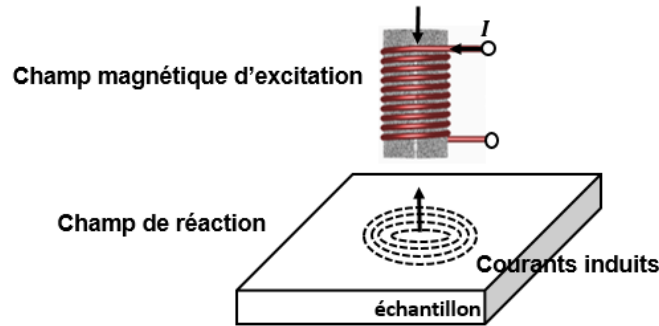


FIGURE 1.8 – Techniques des courants de Foucault

caractériser les défauts dans les composites conducteurs, en particulier les composites à fibres de carbone. Cette méthode est adaptée à la détection des défauts sur la surface ou proches de la surface. Cependant, pour les défauts profonds, la porosité et le délaminage, cette méthode n'est pas suffisamment sensible [MFB12; Bui14; CA89].

1.3.2 Les techniques de la thermographie infrarouge

La thermographie est basée sur l'analyse du rayonnement infrarouge émis par un objet. Une caméra infrarouge est utilisée pour obtenir une image de la répartition de la chaleur sur la surface de l'échantillon [Bui14]. Le rayonnement infrarouge est émis par toute matière et son intensité est proportionnelle à la puissance quatre de la température. Par conséquent, la température de surface d'un objet peut être visualisée en photographiant l'objet avec une caméra thermique sensible au rayonnement infrarouge et en analysant l'intensité du rayonnement infrarouge.

Comme présenté sur la figure 1.9, la thermographie infrarouge consiste à chauffer légèrement le matériau. Le flux de chaleur peut être généré par méthode optique, acoustique, électrique ou par déformation mécanique, etc [Mai+12]. Le défaut ayant une dissipation de la chaleur différente de la pièce, le champ thermique s'en trouve perturbé, perturbation détectable sur l'image thermique obtenue par la caméra, permettant de détecter le défaut.

Cette technologie est largement utilisée pour le contrôle des composites dans le secteur aérospatial. Elle permet de tester le matériel en profondeur. Toutefois, sa précision dépend des performances de la caméra infrarouge, la caméra infrarouge peut ne pas être

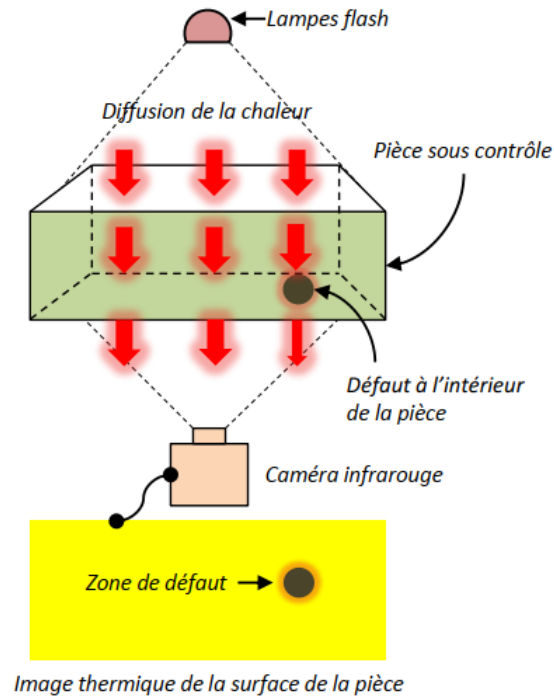


FIGURE 1.9 – Thermographie infrarouge [Bui14]

assez sensible. Par ailleurs, la thermographie classique est peu efficace pour détecter les ruptures de fibres [LF11].

1.3.3 Le CND par thermo-induction

La figure 1.10 présente les limitations des techniques de CND. Comme chaque technique présente certains inconvénients, des techniques sont combinées pour améliorer les performances.

La combinaison des méthodes peut améliorer les performances et la sensibilité des techniques de CND. Certaines techniques sont utilisées sur le polymère renforcé de fibres de carbone (CFRP) : le laser-ultrasons [SH06], la thermographie ultrasonique [Zöc09], et la thermographie inductive [SO94 ; Tri00 ; Ben06 ; Ram09 ; Was11 ; Bui14 ; Sen17 ; Azz19 ; Kan19 ; Ba21 ; Ndi22]. La thermographie inductive est une combinaison de la méthode des courants de Foucault et de la thermographie infrarouge.

Le CND par thermo-induction, qui sera l'objet de nos travaux, chauffe le matériau à contrôler par induction. Le chauffage consiste à soumettre un matériau conducteur à un

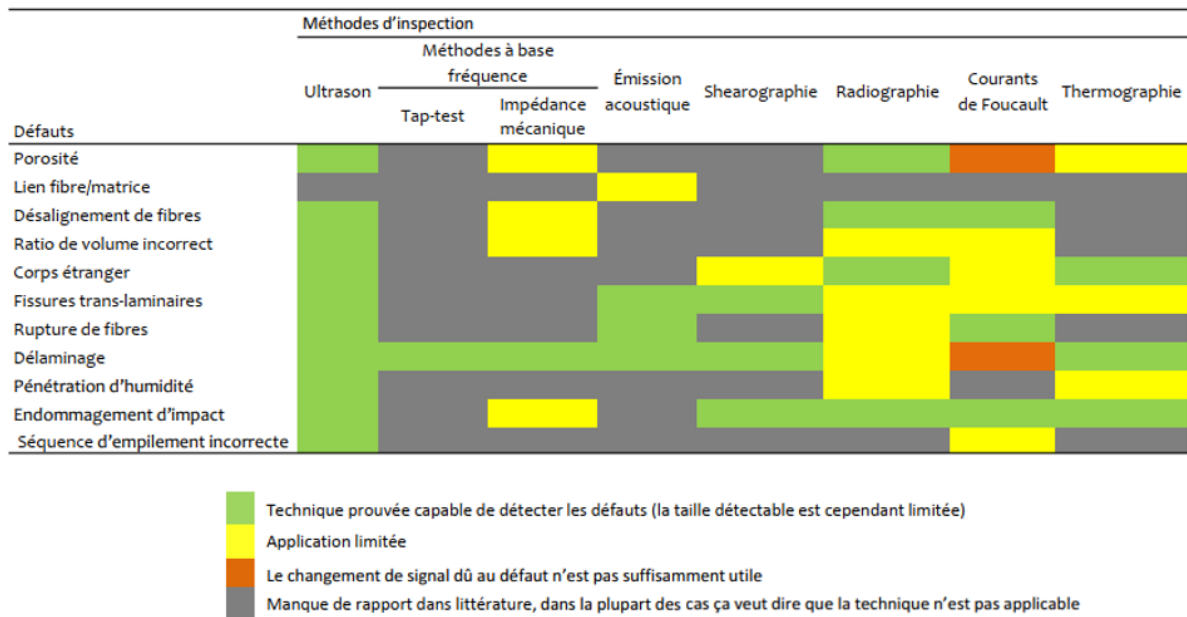


FIGURE 1.10 – Limitations des techniques de CND [Bui14]

champ magnétique alternatif pour générer des courants de Foucault dans le matériau produisant de la chaleur par effet Joule. Ce procédé est ainsi contrôlé par des lois électromagnétiques et thermiques. S'il y a un défaut à l'intérieur du matériau, l'anomalie de la densité de courant de Foucault crée une concentration de la densité de puissance autour du défaut, entraînant une surchauffe. La température sera transmise à la surface du matériau et détectée par une caméra infrarouge. La figure 1.11 montre un dispositif de CND par thermo-induction.

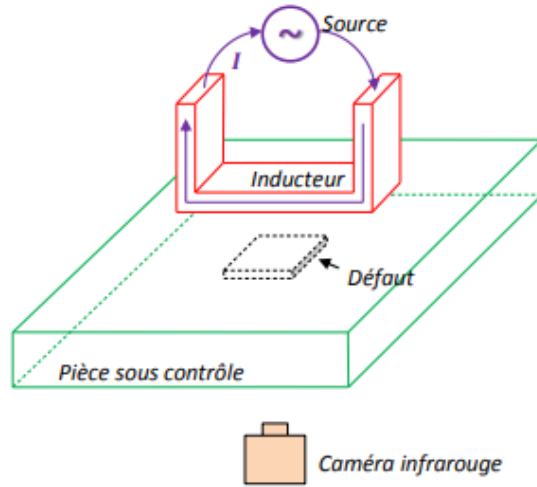


FIGURE 1.11 – CND par thermo-induction [Bui14]

En détail, la densité de courants induits \mathbf{J}_{ind} et la source \mathbf{J}_S crée un champ électromagnétique variable \mathbf{H} :

$$\mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{ind}} + \mathbf{J}_S. \quad (1.1)$$

Selon la loi de Coulomb, un champ électrique \mathbf{E} est engendré par une induction variable \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.3)$$

La loi d'Ohm locale constate la relation entre le champ électrique et la densité de courant induit :

$$\mathbf{J}_{\text{ind}} = \sigma \mathbf{E}, \quad (1.4)$$

où σ est la conductivité électrique.

Les pertes Joules W causées par les courants induits sont :

$$W = \int_v \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{ind}} dv = \int_v \mathbf{E} \cdot \sigma \mathbf{E} dv, \quad (1.5)$$

avec v le volume considéré pour le calcul des pertes.

La figure 1.12 montre le courant et la distribution de température pour le défaut présenté (figure 1.11) : le courant contourne le défaut, donc le courant autour du défaut devient dense et la température autour du défaut est plus élevée que celle du défaut.

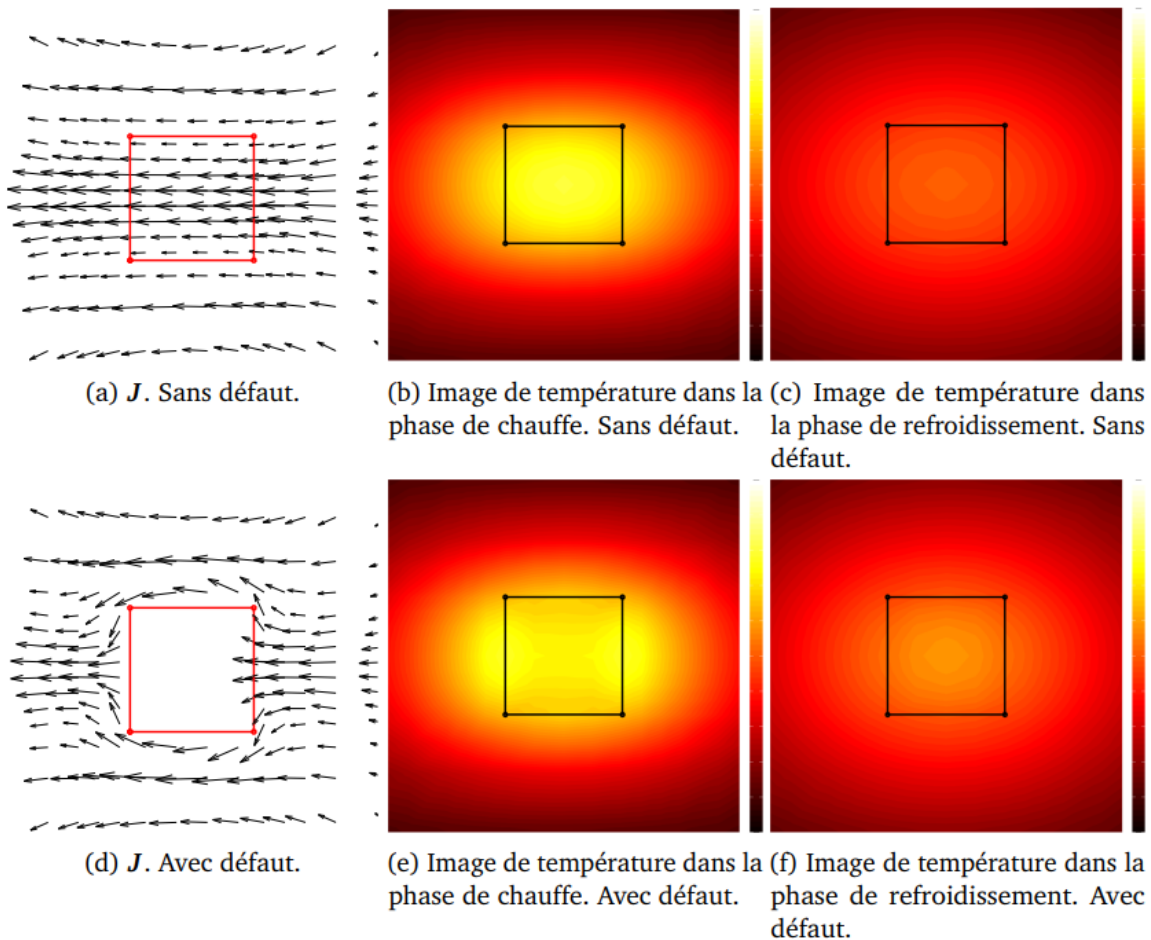


FIGURE 1.12 – Détection de défaut par thermo-induction[Bui14]

Pour des matériaux anisotropes et non homogènes, une seule technologie de CND peine à détecter tous les types des défauts. La combinaison de la méthode des courants de Foucault et de la thermographie infrarouge peut améliorer efficacement la capacité de détection, par exemple, la détection de délaminage.

Cependant, il est difficile d'obtenir une compréhension des phénomènes physiques et du comportement des matériaux uniquement par des mesures. Les courants de Foucault, par

exemple, ne peuvent être obtenus directement à partir de mesures expérimentales. La circulation des courants de Foucault dans les matériaux est difficile à comprendre et à anticiper afin d'établir des mécanismes de détection des défauts. Les outils de simulation numérique sont alors intéressants : les phénomènes physiques impliqués peuvent ainsi être clairement décrits et quantifiés. Cependant, pour les composites stratifiés, le développement de ces outils est compliqué principalement par le facteur d'échelle. L'approche actuelle et les principaux problèmes de la modélisation sont détaillés dans la section ci-dessous.

1.4 Les verrous scientifiques de l'étude

Le matériau composite dans mes travaux est un CFRP. Ces matériaux sont un empilement de plusieurs plis. Dans mes travaux, d'abord, nous considérons le matériau unidirectionnel (UD). Les fibres de carbone dans le matériau UD sont orientées dans la même direction et maintenues ensemble par une matrice thermoplastique. Ensuite, nous considérons le matériau avec les fibres du pli dans différentes directions. La figure 1.13 présente un exemple des deux matériaux considérés dans ma thèse.

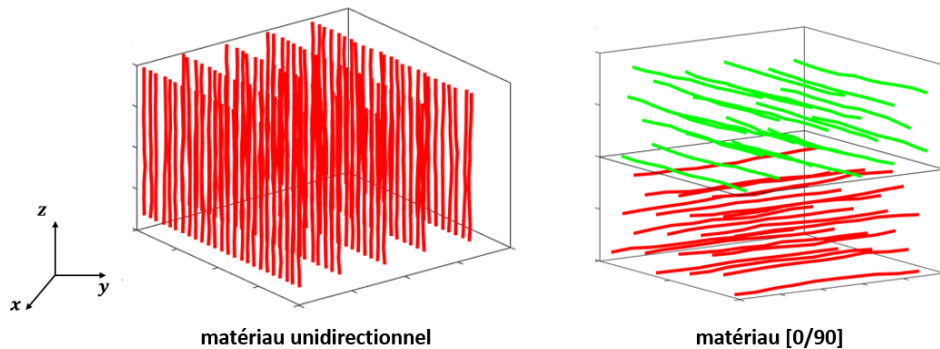


FIGURE 1.13 – Exemple des matériaux

Les verrous scientifiques dans l'étude de la simulation de CND comprennent les phénomènes 3D, le facteur entre les différentes échelles, l'anisotropie du matériau, le saut de propriétés au niveau du défaut, l'alimentation de l'inducteur, la position aléatoire des fibres, les phénomènes de percolation électrique, le changement de propriété en fonction de la température etc.

1.4.1 Les phénomènes 3D

De par les orientations différentes des fibres entre chaque pli, il n'existe pas d'axe de symétrie permettant de réduire la modélisation en 2 dimensions. De plus, le modèle doit être capable de prendre en compte le matériau multicouches. Plus simplement, le phénomène des courants de Foucault est un phénomène principalement tridimensionnel, avec des effets de bords, leur modélisation est donc elle-même tridimensionnelle.

1.4.2 Le grand facteur entre les différentes échelles

Pour traiter le CFRP, nous avons trois échelles à étudier : l'échelle microscopique, l'échelle mésoscopique et l'échelle macroscopique (figure 1.14).

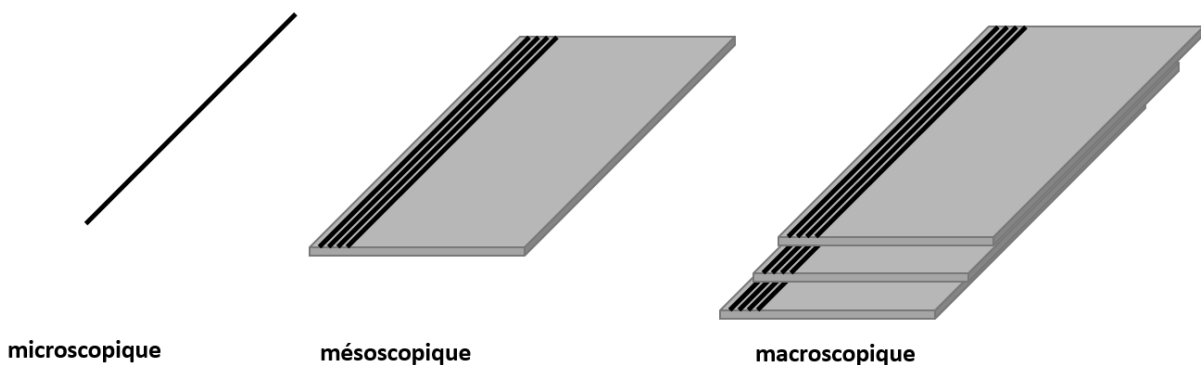


FIGURE 1.14 – Les différentes échelles de matériau à étudier

- L'échelle microscopique : l'échelle de la matrice et de la fibre ($\approx 10 \mu\text{m}$) ;
- L'échelle mésoscopique : l'échelle du pli ($\approx 0,1 \text{ mm}$), le renfort fibreux incrusté dans la matrice ;
- L'échelle macroscopique : l'échelle de la structure (plusieurs millimètres d'épaisseur et plusieurs mètres de largeur pour un fuselage d'avion).

Les matériaux composites sont souvent de très grande taille, généralement plusieurs dizaines de centimètres, tandis que l'échelle microscopique est de quelques micromètres. Il est donc impossible d'étudier le comportement de l'ensemble du matériau à l'échelle microscopique, ce qui conduirait à trop d'inconnues.

1.4.3 L'anisotropie de matériau

Les matériaux composites sont constitués d'au moins deux matériaux aux propriétés physiques différentes. En outre, les comportements du matériau sont différents dans la direction des fibres, dans la section transversale des fibres et dans l'épaisseur. Dans la simulation, la nature tensorielle de la conductivité du matériau doit être prise en compte pour rendre compte de la nature anisotrope du matériau.

1.4.4 Le saut de propriétés au niveau du défaut

Dans cette thèse, les défauts sont à l'échelle microscopique ce qui modifie très localement les propriétés, générant de nouvelles difficultés. Par exemple, pour étudier ces défauts avec une approche type éléments finis, il faut construire des maillages à l'échelle microscopique. En raison du facteur important entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique, le maillage est de mauvaise qualité avec des éléments fortement déformés, alors nous rencontrons des problèmes en termes de précision et de temps de calcul.

1.4.5 L'alimentation de l'inducteur

Des travaux précédents [Bui14] ont montré la nécessité de prendre en compte une alimentation en tension de l'inducteur. Les figures 1.15,1.16 montrent la comparaison des températures au centre de la plaque entre le modèle avec la densité de courant uniforme dans l'inducteur et le modèle avec une alimentation en tension. Le modèle d'inducteur bobiné surestime d'environ 15% la puissance transférée au matériau.

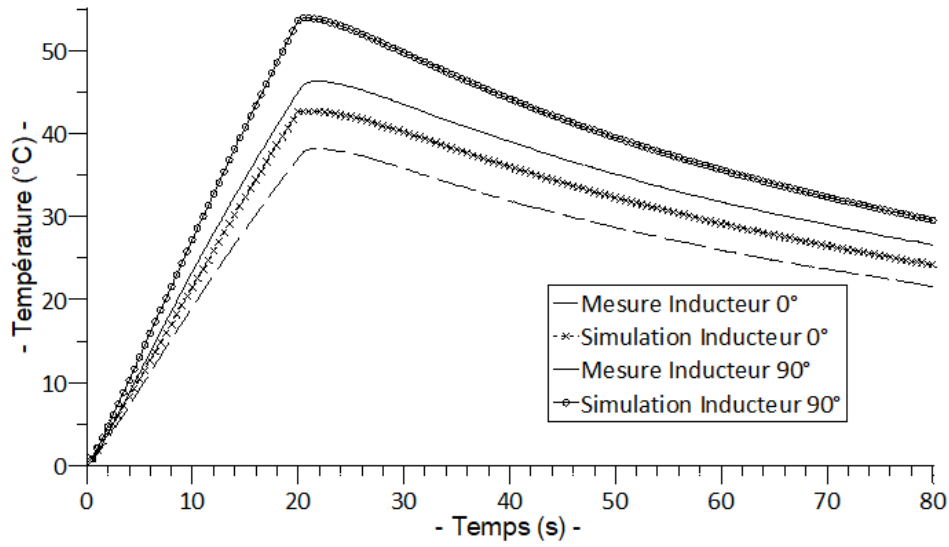


FIGURE 1.15 – Densité de courant imposé dans l'inducteur [Bui14]

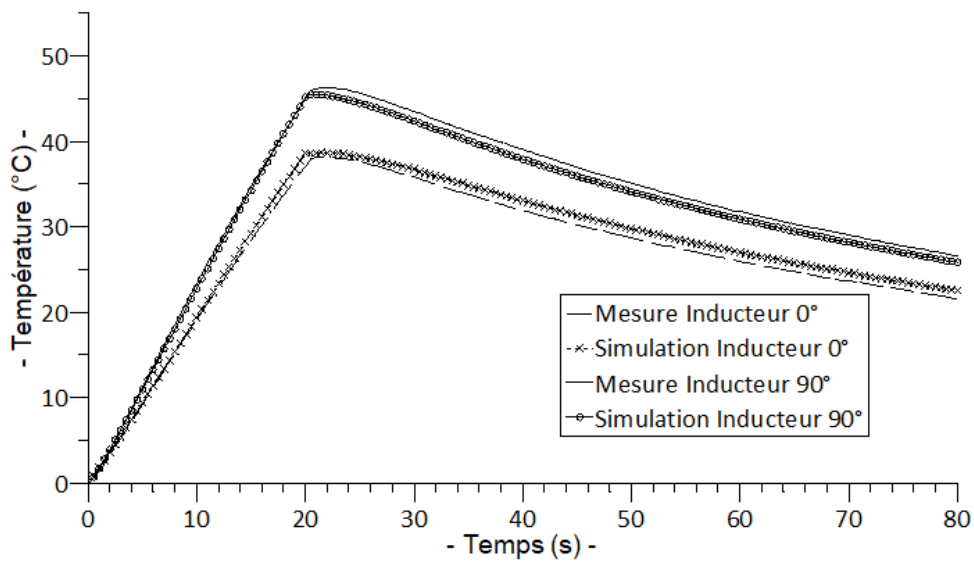


FIGURE 1.16 – Alimentation en tension [Bui14]

1.4.6 La position aléatoire des fibres

La position des fibres dans le matériau composite est aléatoire, ce qui signifie que le comportement physique peut légèrement changer en fonction de la zone d'intérêt. Il

est alors nécessaire d'effectuer plusieurs simulations avec différents tirages aléatoires pour s'assurer de la justesse et de la fidélité des résultats obtenus.

1.4.7 Les phénomènes de percolation électrique

En raison des positions aléatoires des fibres dans le matériau composite, le contact entre fibres est également possible et aléatoire. La présence des contacts a un impact primordial sur la circulation des courants induits puisqu'ils permettent aux courants de passer d'une fibre à l'autre.

Pour expliquer le comportement électriquement conducteur des matériaux composites constitués de charges conductrices et de matrices isolantes, la théorie de la percolation peut être appliquée. Lorsque la teneur des charges conductrices augmente, le composite subit une transition d'isolant à conducteur. Le seuil de percolation apparaît lorsque la conductivité électrique mesurée du matériau composite fait un bond. En dessous du seuil de percolation, les chemins électriques n'existent pas et les propriétés électriques sont dominées par la matrice du matériau. La concentration de la charge conductrice doit être supérieure au seuil de percolation afin d'obtenir des réseaux conducteurs [PNT18].

1.4.8 Le changement de propriété en fonction de la température

Les propriétés du matériau sont stables dans un intervalle de températures, mais peuvent changer lorsque la température change significativement. Les conductivités électrique et thermique évoluent notamment en fonction de la température, pouvant amener une résolution de type non linéaire du problème.

Dans cette thèse, une nouvelle approche de modélisation est proposée. L'impact de l'alimentation en tension et les changements de propriétés en fonction de la température n'ont pas été étudiés.

1.5 Les approches de modélisation actuelle

1.5.1 La méthode d'homogénéisation

Pour éviter le problème numérique dû au grand rapport entre l'échelle des fibres et l'échelle de matériau, le matériau réel est remplacé par un matériau équivalent virtuel ayant le même comportement macroscopique au travers d'une loi de comportement. Nous

parlons alors d'homogénéisation.

Il y a deux manières pour trouver les comportements homogénéisés d'un matériau :

- les méthodes expérimentales, la définition du comportement des matériaux se faisant à partir des mesures ;
- les méthodes prédictives, la définition du comportement macroscopique des matériaux se faisant à partir d'informations connues à l'échelle microscopique.

Le principe de la méthode d'homogénéisation est de déterminer les caractéristiques homogénéisées et la conductivité équivalente du matériau.

La détermination de cette loi de comportement se fait en ayant recours à un matériau, réel ou virtuel, appelé Volume Élémentaire Représentatif (VER). Les VERs doivent répondre aux conditions suivantes [Sen17] :

- ses propriétés physiques moyennes ne changent pas lorsque sa taille augmente ;
- le comportement physique moyen des différents VER diffère peu si les VERs sont de même taille ;
- les conditions aux limites n'affectent pas le comportement moyen du VER.

La méthode qui existe est d'utiliser la méthode d'homogénéisation pour passer de l'échelle des fibres à l'échelle des plis, au travers d'un tenseur de conductivité équivalent, utilisable ensuite dans une simulation type éléments finis à l'échelle de matériau.

1.5.2 Les études réalisées par l'IREENA

La modélisation de CND par thermo-induction a été développée à l'origine par Didier Trichet [Tri00] dans sa thèse comme un modèle de percolation sans considérer l'aspect multi-couche du matériau.

Dans la thèse de Samir Bensaid [Ben06], il a généré le modèle des éléments coques basé sur le modèle de Trichet selon l'étude de C. Guérin [Gué94], mais le matériau composite n'était pas maillé et les courants induits dans le sens de l'épaisseur de matériau composite n'étaient pas pris en compte.

Ensuite, Brahim Ramdane a développé dans sa thèse [Ram09] un modèle tridimensionnel par éléments finis à l'échelle macroscopique, où le matériau composite est considéré comme un matériau homogène, et il a proposé d'utiliser un tenseur de conductivité électrique homogénéisé pour l'ensemble du composite.

Guillaume Wasselynck a développé un modèle d'homogénéisation tridimensionnel permettant de passer de la simulation de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique dans

sa thèse [Was11]. Son modèle prend en compte la distribution aléatoire des fibres et le contact entre les fibres dans un pli, puis le tenseur de conductivité électrique homogénéisée est déterminé pour un pli unidirectionnel.

Sur la base du modèle macroscopique développé par Ramdane, Huu Kien Bui a développé un modèle à l'échelle mésoscopique [Bui14] : le composite est maillé au niveau des plis et l'orientation des fibres est prise en compte, ce qui a permis de calculer la circulation des courants de Foucault et la distribution de la densité de puissance dans chaque pli. Ce modèle nécessite beaucoup de mémoire et temps de calcul. Bui a développé le deuxième modèle avec des éléments dégénérés multicouches pour éviter le maillage de régions minces [Bui14], réduisant ainsi le temps de calcul.

Fiacre Djonkone Senghor et Banda Kane ont poursuivi les recherches de Wasselynck. Senghor a établi un banc de caractérisation électrique de matériaux composites par la méthode volt-ampèremétrique [Sen17], et Kane a utilisé ce dispositif pour mesurer la conductivité dans toutes les directions du matériau UD [Kan19]. Kane a observé la répartition des fibres selon des coupes micrographiques transverses. Le modèle électrocinétique tridimensionnel par éléments finis est développé pour évaluer la résistance de contact entre deux plis ayant des orientations différentes.

Brahim Azzabi Zouraq a construit un modèle éléments finis 3D dans sa thèse [Azz19] et a étudié la fiabilité de son modèle et du modèle de Bui sur le matériau isotrope en utilisant la Probabilité de Détection pour du contrôle thermo-inductif.

Dans la thèse de Abdoulaye Ba [Ba21], une méthode basée sur les éléments finis en 3D associés aux impédances de surface avec courant et tension imposés est développée pour réduire les temps de simulations.

Dans la thèse de Mansour Ndiaye [Ndi22], une nouvelle approche d'homogénéisation selon un modèle mésoscopique 2-D est développée pour trouver les propriétés longitudinales et transverse de matériau UD, les propriétés dans le sens de l'épaisseur est déduit selon un modèle 3-D avec des mesures.

La figure 1.17 présente les développements des recherches réalisées par l'IREENA.

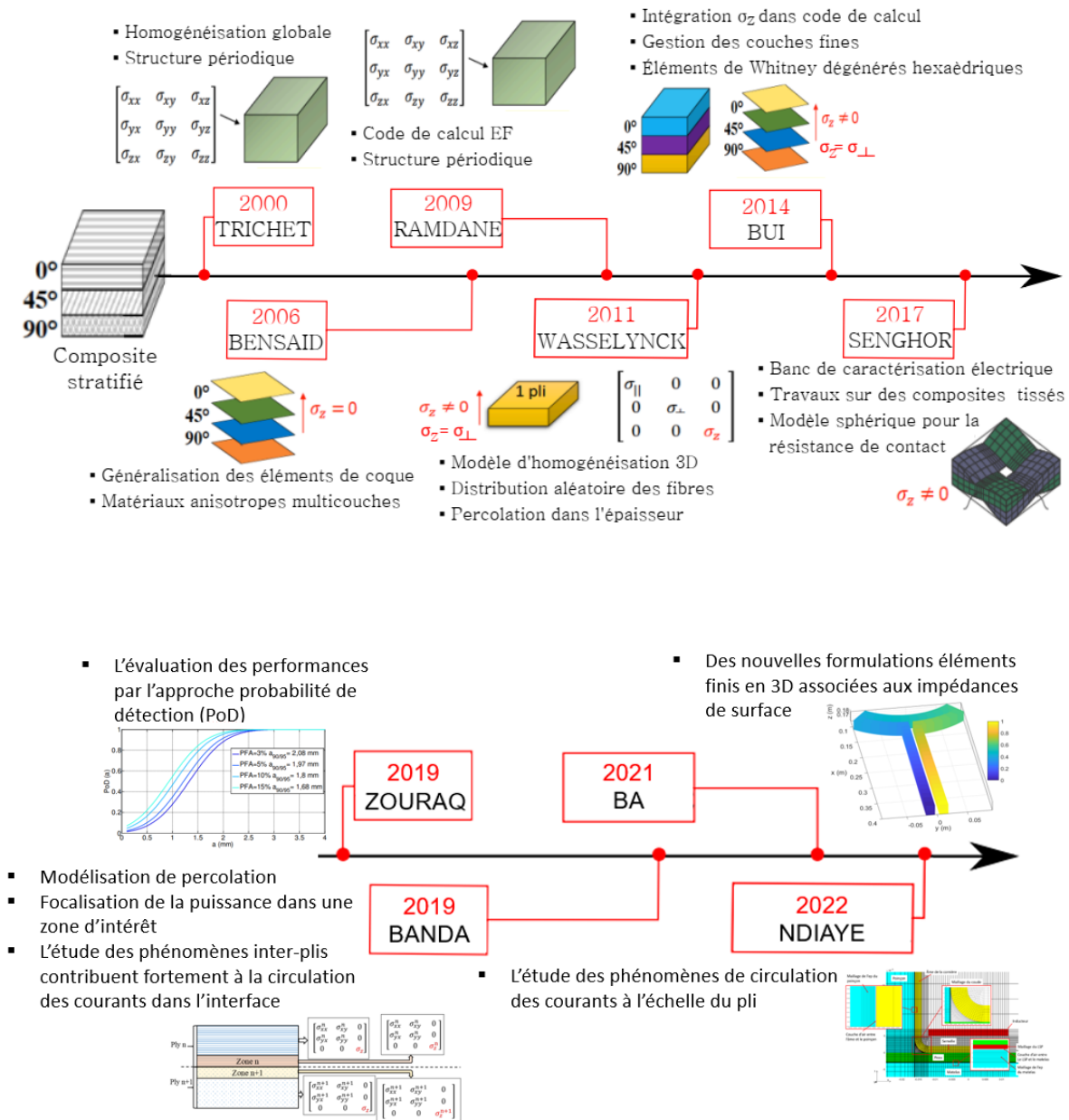


FIGURE 1.17 – Travaux réalisés par l'IREENA [Kan19]

1.5.3 Les limitations des approches

Selon les travaux précédents, dans les limites du temps de calcul et de la mémoire, les méthodes ont déjà la capacité de détecter les défauts des matériaux à l'échelle mésoscopique et macroscopique, mais elles peuvent perdre des informations locales à l'échelle

microscopique. Les méthodes existantes sont unidirectionnelles, elles ne peuvent pas être inversées et leur précision ne peut pas être assurée à l'échelle microscopique, ce qui peut être dommageable dans le cadre du CND.

1.6 L'objectif de la thèse

L'objectif de ma thèse est de proposer une méthode permettant de garder les informations à l'échelle des fibres. Ainsi, il serait possible de simuler des défauts dans les matériaux qui ne peuvent pas être simulés par les méthodes numériques existantes, ce qui pourra contribuer au développement et à l'amélioration du CND par thermo-induction. Selon les défauts des méthodes précédentes, au lieu de considérer une simulation sur un seul matériau homogène virtuel, nous envisageons de générer plusieurs cellules virtuelles et de les concaténer comme un matériau réel à l'échelle macroscopique pour la simulation numérique. Cependant, compte tenue des difficultés de l'énorme facteur entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique évoquées précédemment, l'objectif de ma thèse est de trouver une méthode qui peut garder des informations locales et peut passer directement de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique. Dans cette optique, les méthodes de réduction d'ordre de modèle (ROM) et de décomposition de domaine (DD) apparaissent comme des solutions exploitables.

1.6.1 Les méthodes de réduction d'ordre de modèle (ROM)

Les ROM se sont considérablement développées ces dernières années, y compris les méthodes proper generalized decomposition (PGD) et proper orthogonal decomposition (POD) utilisées dans ma thèse, ainsi que les méthodes de Rayleigh-Ritz, de Petrov-Galerkin, d'approximant de Padé [Da 15 ; CCH80]. Les ROM réduisent la complexité d'un modèle et semblent adaptées pour traiter le rapport énorme entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

— PGD :

L'idée de la méthode PGD est de décomposer la solution en somme de produit de fonctions aux variables indépendantes et de résoudre l'équation de chaque variable itérativement pour trouver l'inconnue. [CAC10 ; ACC11 ; HBC12 ; HC15a]

Soit $u(x_1, x_2, \dots, x_N)$ l'inconnue du problème dépendant des variables x_i , d'après PGD, nous séparons u comme la somme de produit des fonctions u_1, u_2, \dots, u_N

dépendant de x_1, x_2, \dots, x_N respectivement :

$$u(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{i=1}^{N_m} u_1^{(i)}(x_1) \cdot u_2^{(i)}(x_2) \dots u_N^{(i)}(x_N). \quad (1.6)$$

Puis, nous introduisons cette expression dans la formulation du problème et nous calculons les fonctions $u_1^{(i)}, u_2^{(i)}, \dots, u_N^{(i)}$ itérativement par une succession de problème de moindre complexité jusqu’à la convergence. Pour chaque itération, un mode de la solution est obtenu. Chaque mode consiste en un ensemble de valeurs numériques de produit de fonctions $u_1^{(i)}(x_1), u_2^{(i)}(x_2), \dots, u_N^{(i)}(x_N)$, qui enrichissent l’approximation de la solution. Le nombre de modes nécessaires pour obtenir une approximation de la solution pour atteindre un certain seuil d’erreur dépend d’un critère d’arrêt basé sur la différence entre deux itérations consécutives.

— POD :

L’idée de la méthode POD est de projeter la solution de son espace complet vers un sous-espace réduit. Nous trouvons une base réduite P qui représente l’opérateur de projection sur le sous-espace à l’aide de la décomposition en valeurs singulières (SVD, de l’anglais singular value decomposition) des termes de *snapshots*. Les *snapshots* sont un ensemble de solutions issues de précalculs. Nous pouvons alors faire la résolution dans l’espace réduit en gardant la possibilité de projeter la solution vers l’espace complet [Mas96 ; SC12 ; HC13 ; SSC13 ; HC15b].

La SVD est une méthode de factorisation des matrices. Elle est largement utilisée dans le traitement des signaux, le traitement des images et l’analyse statistique (analyse en composantes principales, ACP). Soit M une matrice de taille $m \times n$, sa factorisation d’après la SVD s’écrit comme :

$$M = U \Sigma V^t \quad (1.7)$$

avec U une matrice unitaire $m \times m$, Σ une matrice diagonale $m \times n$ contenant les valeurs singulières qui correspondent aux racines des valeurs propres de $M^t M$, et V est la matrice unitaire $n \times n$. La base réduite P est définie comme les premières colonnes de U .

Afin d’accélérer le calcul, nous tronquons souvent la diagonale de Σ en fonction de sa valeur, c’est-à-dire que nous ne gardons que la base correspondant à cer-

taines grandes valeurs. Soit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$ la diagonale de Σ , nous gardons $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_r}$ qui satisfont la condition :

$$\frac{\sum_{i=1, \dots, n_r} \sigma_i}{\sum_{i=1, \dots, N} \sigma_i} > 1 - \text{tolérance.} \quad (1.8)$$

— Rayleigh-Ritz :

La méthode de Rayleigh-Ritz permet de réduire les degrés de liberté d'un système. Il s'agit d'une méthode numérique directe d'approximation des valeurs propres et vecteurs propres [TB97].

Le problème à résoudre s'écrit comme

$$Ax = \lambda x \quad (1.9)$$

avec A une matrice unitaire $n \times n$. Nous considérons une matrice V de taille $n \times n_r$, $n_r < n$ avec colonnes orthonormées. Puis nous résolvons

$$V^t AV y_i = \mu_i y_i. \quad (1.10)$$

Les vecteurs de Ritz \tilde{x}_i sont définis comme

$$\tilde{x}_i = V y_i. \quad (1.11)$$

Les valeurs propres de Ritz $\tilde{\lambda}_i$ sont définies comme

$$\tilde{\lambda}_i = \mu_i. \quad (1.12)$$

La paire de Ritz est la combinaison du vecteur \tilde{x}_i et de la valeur propre $\tilde{\lambda}_i$. La matrice V contient k vecteurs, $k < n_r$, qui sont proches des vecteurs propres de la matrice A . La méthode de Rayleigh-Ritz trouve k vecteurs de Ritz qui s'approchent bien de ces vecteurs propres. La quantité $\|A\tilde{x}_i - \tilde{\lambda}_i\tilde{x}_i\|$ détermine la précision d'approximation pour chaque paire de Ritz.

— Petrov-Galerkin

La méthode de Petrov-Galerkin laisse les équations d'origine inchangées, mais réduit la dimensionnalité d'espaces de la solution et de la fonction test [Red19].

Soit la formulation faible du problème :

$$\text{trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, w) = f(w) \text{ pour tout } w \in W. \quad (1.13)$$

Nous résolvons le problème projeté dans le sous-domaine :

$$\text{trouver } v_n \in V_n \text{ tel que } a(v_n, w_m) = f(w_m) \text{ pour tout } w_m \in W_m, \quad (1.14)$$

avec $V_n \subset V$, $W_m \subset W$.

L'erreur $\varepsilon_n = v - v_n$ tel que $a(\varepsilon_n, w_m) = 0$ pour tout $w_m \in W_m$.

— approximant de Padé :

L'approximant de Padé approche une fonction par une fonction rationnelle [Tre19].

Soit la fonction $f(x)$, son approximant de Padé d'ordre $[m, n]$ est

$$R(x) = \frac{\sum_{j=0}^m a_j x^j}{1 + \sum_{k=1}^n b_k x^k} \quad (1.15)$$

avec

$$\begin{aligned} f(0) &= R(0) \\ f'(0) &= R'(0) \\ f''(0) &= R''(0) \\ &\vdots \\ f^{(m+n)}(0) &= R^{(m+n)}(0) \end{aligned} \quad (1.16)$$

Une solution analytique approximative est obtenue en utilisant la méthode des séries de puissance pour obtenir une solution en série, puis l'approximant de Padé est appliqué pour augmenter le rayon de convergence de cette solution en série.

La méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Petrov-Galerkin sont considérées comme des variantes de la méthode POD, qui modifient la méthode de projection pour obtenir des bases réduites utilisées par la POD. Dans cette thèse, nous allons utiliser la méthode POD plutôt que ses variantes. De plus, la méthode des séries de puissance n'est pas applicable à notre modèle parce que nous ne pouvons pas faire la dérivation multiple sur notre modèle (le modèle sera présenté dans le chapitre 2), donc nous ne considérons pas l'approximant de Padé dans ma thèse. Pour la méthode PGD, après avoir décomposé les inconnues en fonctions de variables indépendantes, il faut résoudre itérativement des

problèmes de taille réduite jusqu'à la convergence. Elle est particulièrement adaptée pour une application sur une formulation type éléments finis mais en revanche beaucoup moins pour une formulation de type circuit avec un domaine discontinu.

Dans cette thèse, la PGD a été appliquée à un cas 2D avec une formulation éléments finis mais présentait la limite importante : le temps de calcul long en raison du grand nombre d'itérations nécessaires jusqu'à la convergence en raison de la distribution aléatoire des fibres. De plus, la PGD présente la difficulté de devoir séparer la loi de comportement selon les différentes directions de l'espace. Compte-tenu de ces limitations, la PGD a été rapidement abandonnée et son développement reporté en annexe A.

1.6.2 La méthode de décomposition de domaine (DD)

La méthode DD remplace le processus de résolution globale par la résolution itérative du même problème dans des sous-domaines (figure 1.18). La figure 1.18 donne deux exemples de recouvrements, l'exemple de droite montre un recouvrement plus grand. Cette méthode peut diminuer les besoins numériques, donc elle requiert moins de mémoire et accélère le calcul. De plus la décomposition de domaine est adaptée à une résolution par calcul parallèle.

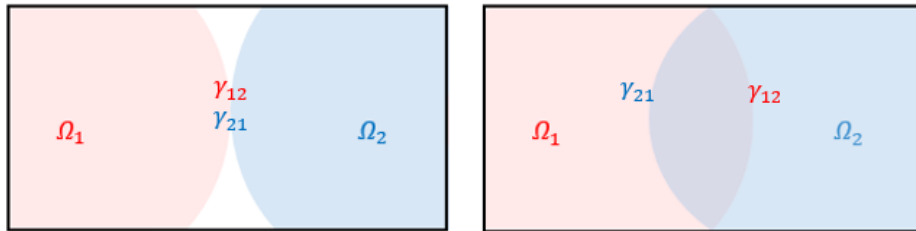


FIGURE 1.18 – Exemples de sous-domaines qui se recouvrent

Soit le problème

$$\begin{cases} a(u) = f, & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.17)$$

avec Ω le domaine et $\partial\Omega$ la frontière. Ici, l'exemple du problème est avec l'imposition de conditions de Dirichlet, mais nous pourrions imposer des conditions de Neumann.

Soit les sous domaines Ω_1 et Ω_2 avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, l'algorithme de DD est :

- Initialisation de u_0^1 et u_0^2 les solutions dans Ω_1 et Ω_2 ;
- Résolution dans chaque sous-domaine itérativement. Nous notons les recouvrements : la partie de $\partial\Omega_1$ dans Ω_2 est notée comme γ_{12} , la partie de $\partial\Omega_2$ dans Ω_1 est notée comme γ_{21} . Soient n itérations déjà faites, pour la $n + 1$ itération, nous résolvons :

$$\begin{cases} a(u_{n+1}^1) = f, \text{ dans } \Omega_1, \\ u_{n+1}^1 = g, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_1, \\ u_{n+1}^1 = u_n^2, \text{ sur } \gamma_{12}; \end{cases} \quad (1.18)$$

$$\begin{cases} a(u_{n+1}^2) = f, \text{ dans } \Omega_2, \\ u_{n+1}^2 = g, \text{ sur } \partial\Omega \cap \partial\Omega_2, \\ u_{n+1}^2 = u_n^1, \text{ sur } \gamma_{21}. \end{cases} \quad (1.19)$$

- Arrêt de la deuxième étape lorsqu'elle converge.

Selon les travaux de Schwarz et de P.L. Lions, l'augmentation de recouvrement accélère la convergence [BH14].

Dans cette thèse, le matériau est décomposé en sous-domaines et le recouvrement est défini comme les fibres dont les contacts existent entre les sous-domaines.

1.7 Idée générale de la thèse

À cause du facteur d'échelle important, il n'est pas possible de simuler directement l'ensemble du matériau composite à l'échelle des fibres car le nombre d'inconnues serait trop grand. Afin de réduire le problème à une complexité numérique acceptable, le matériau est subdivisé en plusieurs cellules.

Pour ne pas perdre d'information dans une cellule ou sur l'ensemble du matériau, il est proposé dans cette thèse d'appliquer une méthode de réduction d'ordre de modèle. Les bases réduites seront extraites pour chaque cellule à partir de stimulations électromagnétiques (essai volt-ampèremétrique et/ou inductif). La concaténation de ces bases réduites permettra d'obtenir le modèle réduit de l'ensemble du matériau. La figure 1.19 montre la procédure proposée.

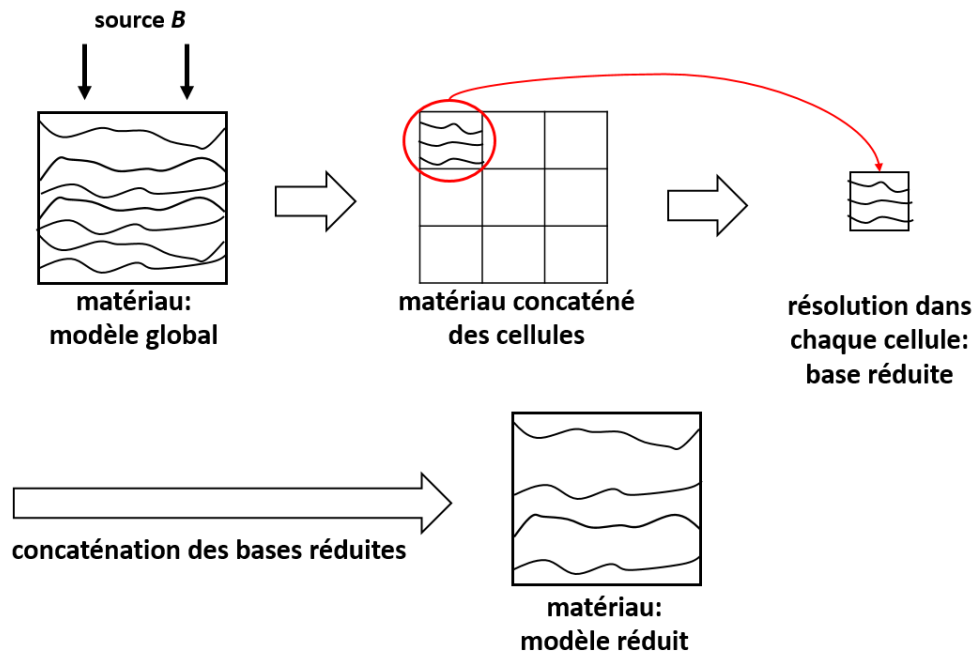


FIGURE 1.19 – Illustration de procédure de méthode de réduction d'ordre de modèle

Par ailleurs, cette approche cellulaire permet également d'envisager une approche de résolution par décomposition de domaine. Cette piste sera également investiguée dans cette thèse.

La mise en œuvre de ces méthodes nécessite la mise en place d'outils de génération de la géométrie de ces cellules ainsi que la définition d'un protocole de concaténation de ces dernières pour obtenir un composite ayant le même comportement qu'un matériau réel (position aléatoire des fibres dans la section, contacts éventuels entre fibres adjacentes, taux de remplissage, ondulation des fibres, ...).

L'obtention des bases réduites nécessite la modélisation de l'interaction des constituants de la cellule avec une excitation électromagnétique. La figure 1.20 symbolise un circuit électrique équivalent résumant les différents phénomènes physiques pouvant apparaître entre deux fibres.

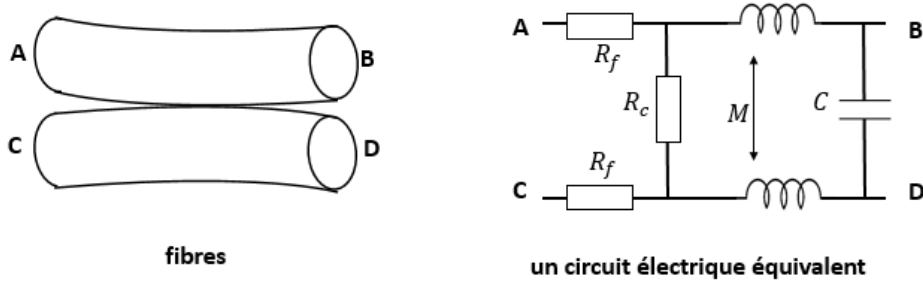


FIGURE 1.20 – Un circuit électrique équivalent

Avec

- R_f et L_f : représentent la résistance et l'inductance de la fibre pouvant être influencée par les effets de peau et de proximité ;
- R_c : représente un contact électrique potentiel entre deux fibres ;
- C : représente la capacité partielle entre les deux fibres ;
- M : représente les mutuelles inductances entre les différentes fibres.

Des travaux précédents [Was11] ont montré que dans les gammes de fréquences classiquement utilisé dans le CND thermo-inductif (< 500 kHz), pour des fibres de carbone de conductivité faible (σ environ 58×10^3 S/m) et d'un diamètre d'environ $10 \mu\text{m}$, les effets inductifs et capacitifs peuvent être négligés dans une cellule, comme le montre les figures 1.21,1.22.

La figure 1.21 représente la variation en fonction de la fréquence de la partie réelle de l'impédance équivalente d'une cellule contenant 12000 fibres. Sur la plage de fréquences utiles, la variation quasi-nulle montre que les effets de peau et de proximité sont négligeables.

La figure 1.22 montre le rapport entre la partie imaginaire et réelle de l'impédance de cette cellule. Là encore, pour les gammes de fréquences utilisés les effets de self et mutuelle inductance sont négligeables.

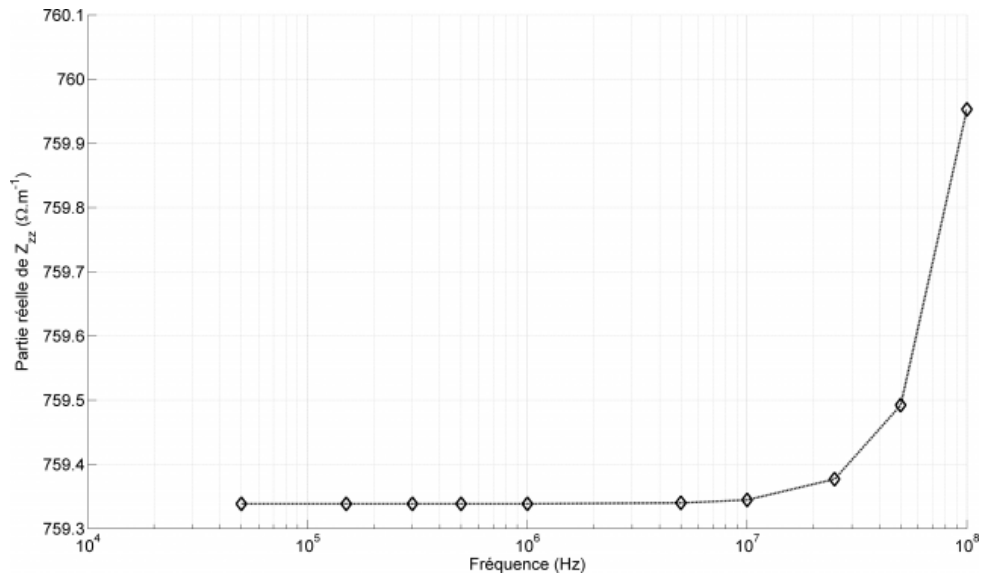


FIGURE 1.21 – Évolution de la partie réelle de l'impédance en fonction de la fréquence [Was11]

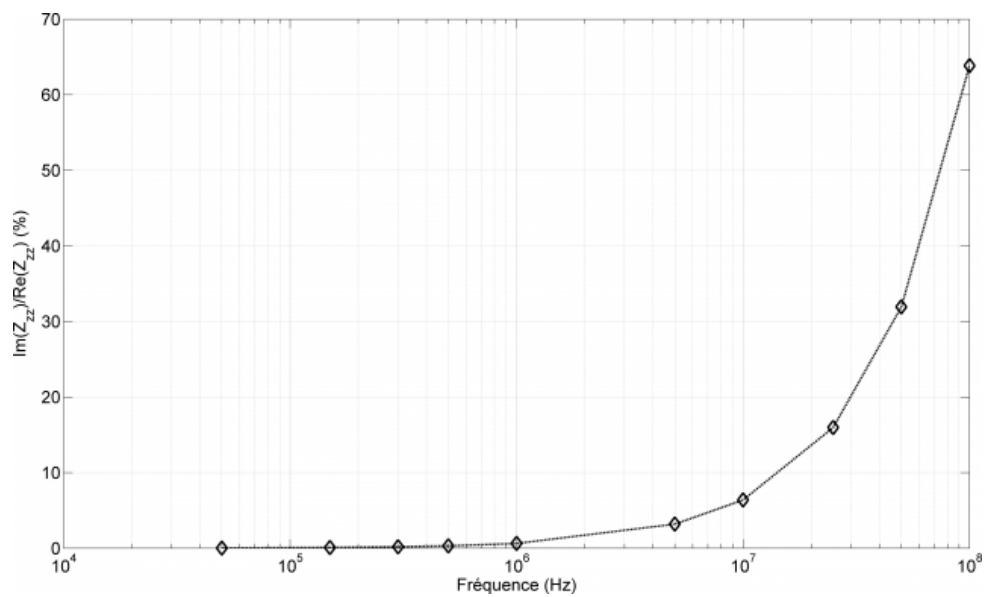


FIGURE 1.22 – Évolution du rapport entre la partie imaginaire et réelle de l'impédance en fonction de la fréquence [Was11]

Les phénomènes mis en jeu autorisent alors une approche électrocinétique du problème. La résolution de ce problème électrocinétique peut être alors ramené à une résolution de

type circuit électrique résistif bien adaptée à la structure filiforme des fibres de carbone.

1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une introduction aux matériaux composites et au CND a d'abord été présentée. L'intérêt de la simulation pour mieux comprendre et maîtriser les techniques de CND sur les matériaux composites a ensuite été rappelé. En raison de l'anisotropie et du rapport important entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique, les méthodes numériques utilisées jusqu'alors ne peuvent pas simuler parfaitement ce procédé. L'objectif de cette thèse est de trouver une nouvelle approche numérique permettant d'avoir une meilleure précision à l'échelle microscopique.

Les précédents travaux du laboratoire ont utilisé des approches par éléments finis [Ndi22] ou par circuit équivalent [Was11; Sen17; Kan19] pour simuler le comportement électrique des matériaux à fibres longues de carbone à l'échelle microscopique. L'avantage d'une approche par circuit équivalent est d'éviter un maillage tridimensionnel des fibres en considérant notamment des résistances électriques pour représenter des portions de fibres et les contacts entre fibres, et ainsi conserver le positionnement spatial et les interactions entre les fibres à l'échelle microscopique. Compte-tenu de ces avantages, ce type d'approche est celle retenue et qui sera décrite dans le chapitre suivant. Ce premier choix orientera considérablement le choix de la méthode de réduction d'ordre puisque nous verrons que la PGD se révélera inadaptée pour traiter un tel cas, tandis que la POD pourra être appliquée facilement notamment couplée avec la décomposition de domaine. Pour autant, la simulation d'un composite par une approche circuit génère toujours un nombre élevé de degrés de liberté pour atteindre une taille réaliste du matériau. En conséquence les méthodes de réduction d'ordre et de décomposition de domaine restent utiles et pertinentes pour atteindre le but proposé. Ainsi, les méthodes POD et DD utilisées dans ma thèse, brièvement décrites dans ce chapitre, seront détaillées et leur utilisation illustrée dans les chapitres suivants. Elles permettront de traiter la simulation de plis unidirectionnels de matériaux composites à fibres longues de carbone, puis des cas avec des plis orthogonaux. Ces simulations représentent en effet les étapes préliminaires indispensable à la simulation de CND thermo-inductif d'un matériau stratifié, bien que cette simulation soit restreinte à la résolution électromagnétique dans cette thèse.

CONSTRUCTION DU MODÈLE DE RÉFÉRENCE

La simulation d'un dispositif macroscopique avec un modèle microscopique a jusqu'à maintenant été impossible à notre connaissance, à cause du facteur d'échelle mentionné précédemment entre les fibres et les matériaux. Le système numérique à construire serait en effet beaucoup trop complexe. C'est pourquoi l'homogénéisation est notamment utilisée pour transférer une partie des informations de l'échelle microscopique vers l'échelle mésoscopique ou macroscopique. Or nous proposons d'essayer de prendre en compte un modèle microscopique à une échelle supérieure, il est donc nécessaire de pouvoir générer un matériau virtuel le plus proche possible du matériau réel. Les matériaux virtuels sont d'ailleurs déjà utilisés pour réaliser l'homogénéisation. Ils consistent en un réseau tridimensionnel de fibres agencées dans l'espace selon certaines hypothèses conformes aux propriétés du matériau réel (les paramètres à prendre en compte sont le taux de remplissage, les rayons des fibres, la conductivité des fibres, etc.) [Kan19]. De ce réseau de fibres, les contacts entre fibres peuvent être déduits pour permettre de créer un circuit électrique représentant les interactions entre les fibres et leur comportement interne qui permettra la simulation de la circulation des courants dans les fibres en fonction de différentes sources. Il est donc nécessaire d'explicitier comment générer le matériau virtuel, puis comment trouver les interactions entre fibres et enfin comment en déduire le circuit équivalent à partir du modèle choisi.

La génération d'un matériau virtuel de grande taille à une échelle microscopique est complexe notamment du fait de la répartition aléatoire des fibres, du taux de remplissage et des contraintes pour éviter des chevauchements des fibres qui ne seraient pas physique, etc., ce qui entraîne des temps de calcul importants. En conséquence un découpage du matériau en cellules plus petites permet de réduire la complexité de génération de chaque cellule, éventuellement la parallélisation des générations, pour ensuite obtenir le matériau complet par concaténation. Cet avantage dans la construction du matériau s'avère exploitable

pour notre objectif puisqu'il donne les constituants élémentaires pour appliquer la réduction d'ordre et la décomposition de domaine.

Dans ce chapitre, l'étude des matériaux composites à l'échelle microscopique est faite, puis la géométrie est construite et le circuit équivalent est trouvé à partir de la géométrie. Finalement, le modèle de résolution est construit selon l'approche circuit. Dans les chapitres suivants, nous traiterons ce modèle à l'aide de méthodes de réduction d'ordre de modèle et décomposition de domaine pour réduire l'ordre du calcul et atteindre notre objectif de thèse.

2.1 Génération de la géométrie

Le matériau composite considéré dans cette thèse est constitué de renforts en fibres de carbone séparées par une matrice d'électrique des isolants électriques. Nous pouvons voir sur une coupe micrographique du matériau réel (figure 2.1) que :

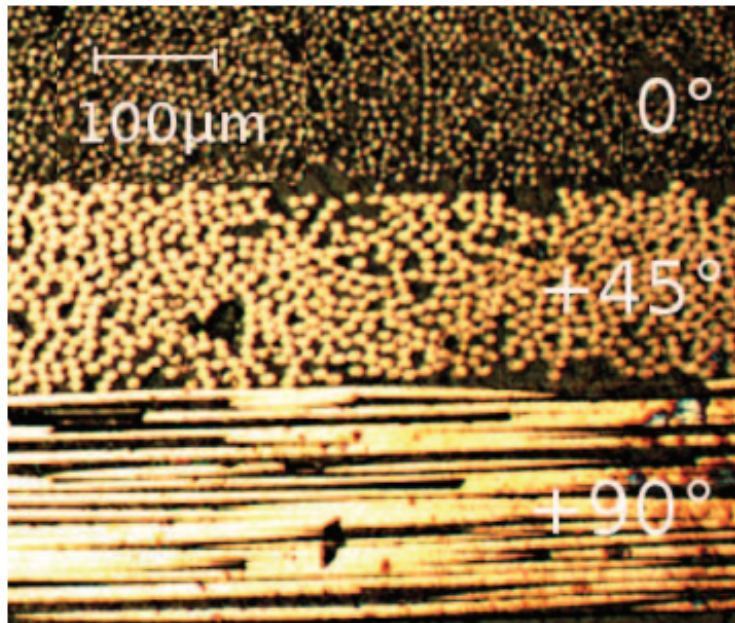


FIGURE 2.1 – Coupe micrographique du matériau réel [Was11]

- Les fibres sont disposées de façon aléatoire dans la section transversale ;
- Les fibres sont séparées par une matrice diélectrique ;
- Les fibres ne sont pas droites, elles ondulent selon la direction principale du pli ;

- Les fibres ne sont pas parallèles, et des contacts électriques aléatoires peuvent se produire entre elles.

La génération de la géométrie peut être basée sur des coupes micrographiques des images de tomographie ou sur les propriétés statistiques de matériau. Dans cette thèse, la génération se fera selon cette dernière méthode, et les images sont utiles pour avoir des règles statistiques de matériau. En effet, la génération de la géométrie pour le matériau macroscopique nécessiterait un grand nombre d'images si nous utilisions la première méthode.

2.1.1 Génération de la géométrie en cellules

De nombreuses méthodes peuvent être utilisées pour la génération de la géométrie basée sur les propriétés statistiques : la méthode basée sur le modèle RSA (Random Sequential Adsorption) [YHA15], la méthode NNA (Nearest Neighbour Algorithm) [VM10 ; Wan+16], la méthode « Bubble Mesh » [Was11 ; Sen17], etc. Dans cette thèse, la méthode « Bubble Mesh » est appliquée.

La cellule est décomposée en plusieurs couches dans le sens des fibres comme le montre la figure 2.2, puis nous pouvons obtenir les positions des fibres sur chaque couche en s'inspirant de la méthode « Bubble Mesh ». L'ondulation des fibres est prise en compte par la discrétisation en couches dans la longueur des fibres.

L'algorithme de « Bubble Mesh » est présenté sur la figure 2.3 :

- les centres des fibres de la $(n + 1)$ -ième couche sont tirés aléatoirement en fonction de leur position dans la n -ième couche, en perturbant la position des centres sur cette couche n , sans prendre garde à un éventuel chevauchement des fibres ;
- chaque fibre qui chevauche d'autres fibres est soumise à une force répulsive pour éliminer le chevauchement, c'est-à-dire que chaque fibre subit et exerce une force sur les autres fibres qu'elle recouvre ;
- ces forces amènent les fibres à se déplacer vers une place d'équilibre où les fibres ne se chevauchent plus mais peuvent toujours présenter un contact ;
- un taux de chevauchement pour garantir l'existence du contact entre cellules.

Bien que pour le matériau réel décomposé en cellules, les fibres puissent passer d'une cellule à l'autre dans le plan transverse, dans cette thèse, les fibres sont limitées à une seule cellule.

Pour deux fibres, la force dépend de la distance entre les centres des fibres comme sur la figure 2.4 : si les centres sont proches, le chevauchement est important, la force appliquée

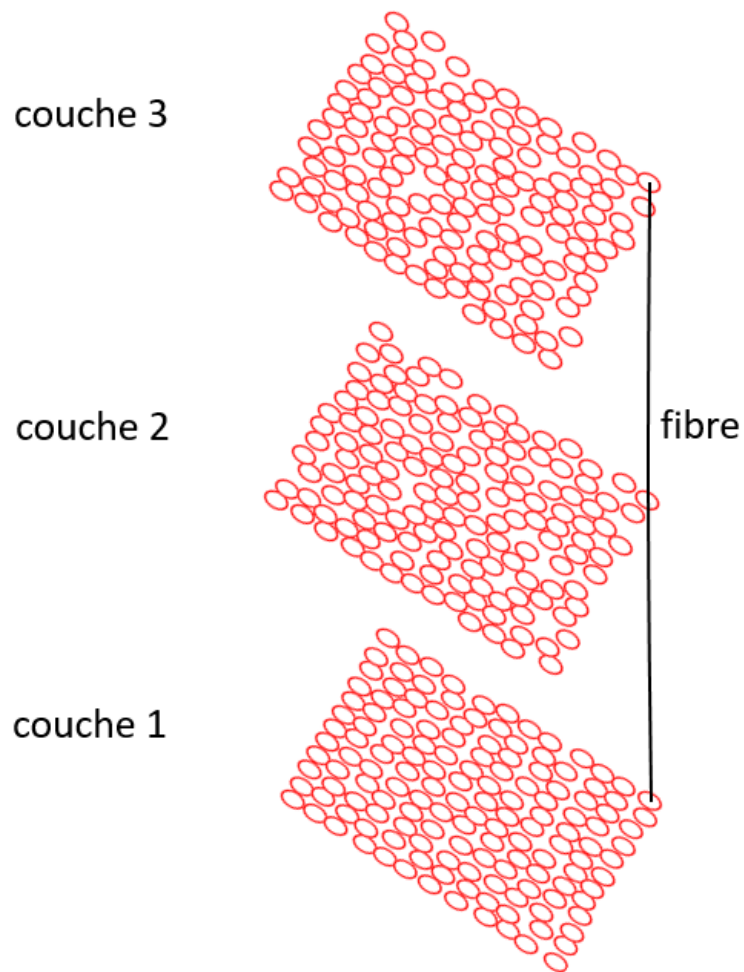


FIGURE 2.2 – Découpage du composite

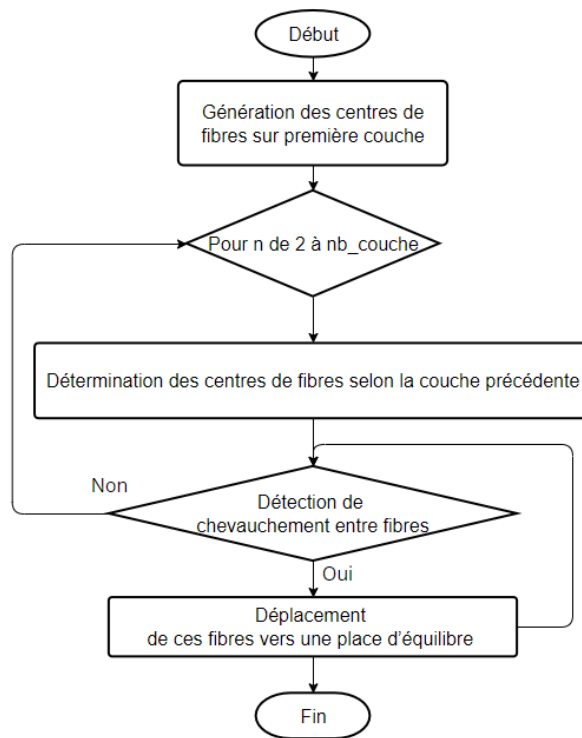


FIGURE 2.3 – Algorithme dit « Bubble Mesh »

est grande; et la force diminue à mesure que la distance entre les centres des fibres augmente, jusqu'à ce qu'elle devienne nulle et que les deux fibres restent à une distance supérieure à un chevauchement autorisé.

Le déplacement de fibres est illustré sur la figure 2.5. Ce déplacement s'effectue selon

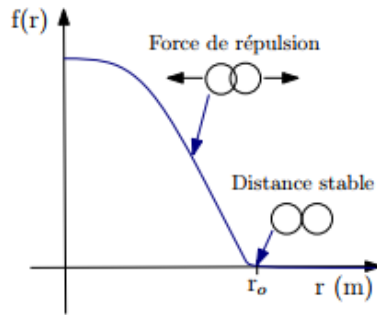


FIGURE 2.4 – Relation entre la force et la distance entre fibres [Sen17]

l'équation :

$$\frac{dx}{dt} = v(x), \quad (2.1)$$

avec x la position des fibres, v la vitesse de déplacement induite par la force, t le temps. Cette équation sera résolue par itération.

La figure 2.6 donne un exemple de matériau virtuel : les fibres sont découpées en 40

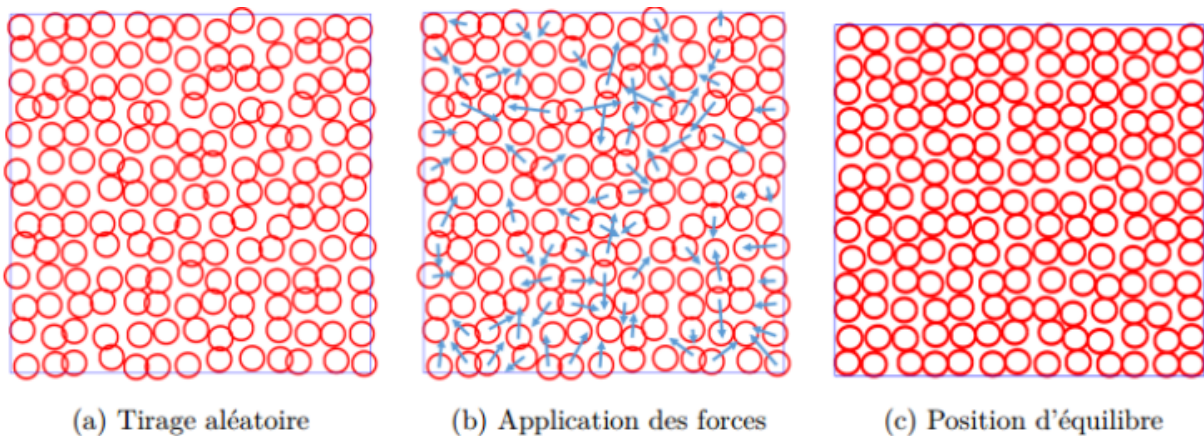


FIGURE 2.5 – Déplacement des fibres [Kan19]

couches, le rayon de fibre est $3,5\mu\text{m}$, la longueur de fibre est $200\mu\text{m}$. Une fois la position de la fibre sur chaque couche déterminée, la forme de la fibre 3D peut être obtenue. De

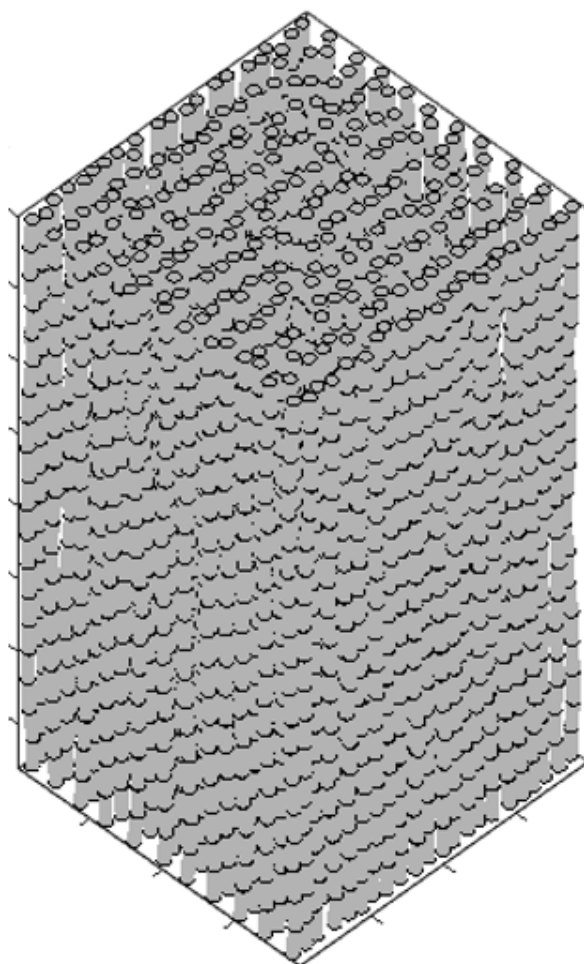


FIGURE 2.6 – Un exemple de matériau virtuel

plus, comme les cellules peuvent être générées simultanément par calcul parallèle pour les cellules situées sur la même section de fibre, cela accélère le temps de génération. Pour la génération d'un matériau de taille $800\mu\text{m} \times 800\mu\text{m} \times 800\mu\text{m}$, nous comparons le temps de génération monolithique et celui de la génération cellulaire avec le matériau divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules. Le tableau 2.1 montre qu'il faut beaucoup moins de temps pour générer le matériau par cellule simultanément que pour générer directement l'ensemble du matériau. Donc, pour la génération de géométrie du matériau, la génération cellulaire en

parallèle est choisie dans la suite.

	Le temps de génération
Monolithique	2860 s
Cellulaire	308 s

TABLE 2.1 – Comparaison de temps de génération

2.1.2 Concaténation des cellules

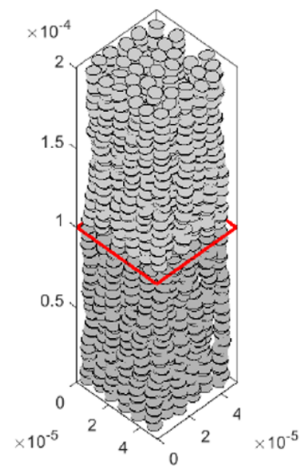
Pour reconstruire le matériau, il faut concaténer les cellules dans le sens des fibres et travers. Lors de la concaténation des cellules, la position des fibres de la première couche de la cellule suivante dépend de la position des fibres de la dernière couche de la cellule dans le sens des fibres, et ces positions de fibres se conforment à la relation de position des fibres entre deux couches adjacentes définie par l’algorithme « Bubble Mesh ». La figure 2.7 donne un exemple de concaténation dans le sens des fibres : deux cellules, en gris foncé et gris clair, se concatènent dans le sens de la fibre ; la position des fibres dans la première couche de la cellule en gris clair dépend de la position des fibres dans la dernière couche de la cellule en gris foncé.

Pour les autres directions, la concaténation des cellules ne nécessite qu’un collage des surfaces de deux cellules adjacentes. La figure 2.8 donne un exemple de concaténation dans la direction transverse aux fibres : deux cellules en gris foncé et gris clair se concatènent et leurs surfaces sont collées.

2.1.3 Recherche des contacts entre fibres

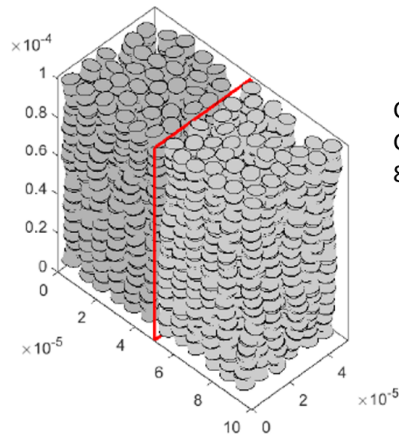
Dans cette thèse, une modélisation par une approche circuit est utilisée. Il est alors nécessaire de déterminer le réseau de résistance équivalent à partir de la géométrie 3D générée précédente. Pour ce faire, il est nécessaire de trouver les contacts entre fibres.

Les centres des fibres sur les différentes couches forment les nœuds du réseau. Les branches du réseau se trouvent : entre deux couches pour une même fibre ; entre deux nœuds d’une même couche en cas de contact. Dans la direction des fibres, chaque branche est représentée par la résistance de fibre R_f . S’il y a un contact entre deux fibres, c’est-à-dire que la distance entre les centres de deux fibres est inférieure à deux fois le rayon de la



Chaque cellule contient 36 fibres.
Chaque fibre est divisée en 20 couches.

FIGURE 2.7 – Un exemple de concaténation dans le sens de fibres



Chaque cellule contient 36 fibres.
Chaque fibre est divisée en 20 couches.
8 contacts entre cellules.

FIGURE 2.8 – Un exemple de concaténation de cellules dans le sens transverse

fibre, les nœuds du réseau équivalent de ces deux fibres sont reliés par la résistance de contact R_c . La valeur des résistances R_f et R_c sont définies de la même façon qu'à partir des travaux précédent de laboratoire [Kan+20].

$$R_f = \frac{dz}{\sigma \pi r^2}, \quad R_c = 11 \Omega, \quad (2.2)$$

avec dz la distance entre deux couches, $\sigma = 58 \times 10^3$ S/m la conductivité de carbone, $r = 3,5 \times 10^{-6}$ m le rayon des fibres.

En pratique, pour détecter le contact entre fibres, nous ne considérons que les nœuds situés sur une même couche parce que la distance entre les deux couches étant déjà supérieure au diamètre des fibres, il n'y a pas de contact entre les différentes couches si les nœuds ne sont pas de la même fibre. Ainsi, il suffit de calculer les distances des nœuds sur la même couche. La figure 2.9 donne un exemple du réseau de résistance obtenu d'après la distribution de 3 fibres sur 6 couches.

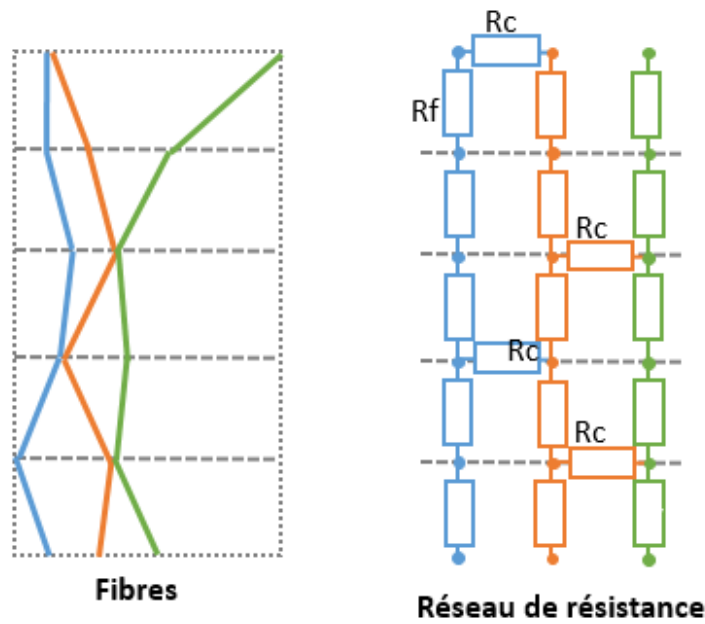


FIGURE 2.9 – Réseau de résistance équivalent

Pour un nœud du réseau, les courants des branches connectées à ce nœud sont :

$$I = \frac{V_n - V}{R}, \quad (2.3)$$

où V_n est le potentiel du nœud que nous considérons, V est le potentiel de l'autre côté de la branche, R est la résistance de la branche. Pour chaque nœud, la somme des courants traversant ce nœud via toutes les branches qui lui sont connectées est nulle.

Pour la détection des contacts entre fibres dans le matériau, nous avons deux façons de procéder :

- la détection des contacts dans le matériau concaténé;
- la détection des contacts intra-cellulaire et inter-cellulaires.

La deuxième méthode permet de gagner du temps de calcul grâce à une réduction significative de la quantité de calcul. Par exemple, si un matériau est divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules avec n_f fibres divisées en n_c couches dans chaque cellule, ce matériau est composé de $4n_f$ fibres divisées en $2n_c$ couches. La recherche des contacts entre fibres en considérant le matériau complet nécessite un calcul de la quantité $2n_c \frac{(4n_f)(4n_f-1)}{2}$. La quantité de calcul par cellule est $n_c \frac{n_f(n_f-1)}{2}$ fois le nombre de cellules; pour les contacts entre cellules, nous pouvons d'abord trouver rapidement les nœuds qui sont proches des bords, le nombre de ces nœuds peut être estimé inférieur à $\sqrt{n_f}$, donc la quantité de calcul requise pour les contacts entre cellules est de $n_c(\sqrt{n_f})^2$ multiplié par le nombre de faces communes entre les cellules, qui pour la division que nous considérons actuellement est de 12. Donc, la quantité totale de calcul requise pour trouver les contacts dans les cellules et entre les cellules est de $4n_c(n_f^2 + 2n_f)$. Puisque le calcul de détection sur l'ensemble du matériau est de $4n_c(4n_f^2 - n_f)$, la différence entre celui-ci et la détection intra-cellulaires et inter-cellulaires est $3n_f^2 - 3n_f$, $n_f > 0$, cette dernière méthode de détection est donc efficace. Ainsi, dans la suite, pour détecter les contacts, la deuxième méthode est toujours choisie. Pour un matériau UD, la détection de contact entre les cellules est facile : comme pour la détection de contact dans la cellule, la résistance de fibre R_f est ajoutée entre les nœuds dans la direction des fibres, et la résistance de contact R_c est ajoutée s'il y a contact entre les fibres, dans les deux cas pour les nœuds à l'interface entre deux cellules. Puisque les fibres d'une cellule dépendent des fibres de la cellule précédente lors de la génération des fibres, seules les cellules adjacentes sont en contact dans la direction des fibres.

Pour un matériau $[0/90]$, la détection est plus difficile : la détection du contact entre cellules dans un même pli est la même que la détection dans un matériau UD; cependant, la détection du contact des fibres entre plis est compliquée. En effet, les nœuds en contact d'une cellule à l'autre n'appartiennent plus nécessairement aux mêmes couches.

La figure 2.10 montre un exemple de deux cellules d'un matériau $[0/90]$. Le matériau est la concaténation des cellules en gris foncé et gris clair. Les fibres en gris foncé sont orientées

dans la direction x et les fibres en gris clair sont orientées dans la direction y . Près de leur surface commune, des fibres peuvent se croiser entre les deux couches. En pratique, afin de trouver l'intersection des fibres entre plis, nous faisons les étapes suivantes sur les segments des fibres entre les couches :

- trouver d'abord des segments qui ont la possibilité d'intersection en fonction de la distance entre les sommets des segments et diviser ces segments en plusieurs sous-segments ;
- détecter des sous-segments qui se croisent, puis ajouter la résistance de contact R_c entre les sommets de segment qui sont les plus proches ces sous-segments.

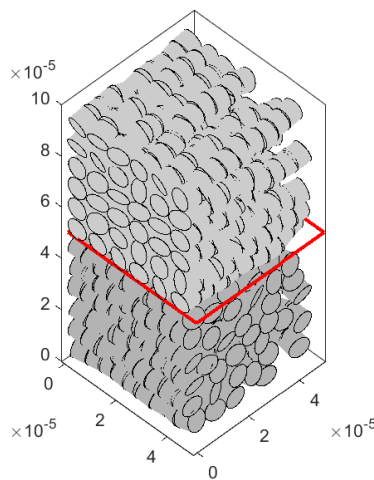


FIGURE 2.10 – Un exemple de concaténation de cellules du matériau [0/90]

Les détails de ces étapes sont présentés ci-dessous.

Lors de la recherche des segments avec la possibilité d'intersections, il serait très coûteux de calculer des distances entre tous les sommets à partir des coordonnées en trois dimensions.

Donc nous faisons les étapes suivantes :

- Nous trouvons d'abord les sommets proches de la surface entre deux plis.
 Nous nous restreignons donc aux arêtes les plus proches de la surface, à savoir les arêtes dont au moins une extrémité est à une distance inférieure à r par rapport à cette surface. La figure 2.11.a montre cette étape.
- Nous calculons les distances verticales dans la direction z des sommets de ces

segments, et nous trouvons des groupes de segments qui satisfont au moins une distance entre leurs sommets inférieure à $2r$. La figure 2.11.b montre cette étape. Puisque nous supposons que tous les segments sont droits, si la distance entre deux sommets de deux segments de ligne est supérieure à $2r$ dans la direction z , leurs distances en trois dimensions ne peuvent être inférieures à $2r$.

- Ensuite, nous calculons les distances des sommets de ces segments dans la section $x - y$, c'est-à-dire que nous ne considérons que les coordonnées x et y de ces sommets pour calculer les distances. Comme présenté dans la figure 2.12, deux fibres sont projetées verticalement sur la surface commune de deux plis. Ensuite, les distances entre les sommets de ces segments projetés sont calculées. Si la valeur maximale de la distance entre leurs sommets est inférieure à $\sqrt{2}dz$ avec dz la distance entre couches, ces segments sont considérés comme des segments avec la possibilité d'intersection. La figure 2.11.c montre cette étape.

En effet, lorsque nous cherchons des segments susceptibles de se croiser, nous ne tenons compte que des distances dans la direction z , mais en réalité, les segments peuvent être très éloignés dans la section $x - y$, par exemple un à l'extrémité gauche de la cellule basse et un à l'extrémité droite de la cellule haute, de sorte qu'ils ne peuvent pas se croiser. Nous devons donc tenir compte de la distance entre les sommets des segments dans la section $x - y$ pour assurer que la projection des deux segments sur la surface commune entre plis peut être dans un carré de longueur de côté dz . La figure 2.12 montre que la projection des fibres des deux plis sur la surface commune doit être encadrée par un carré de côté dz . Sachant que la distance la plus longue dans ce carré est de $\sqrt{2}dz$, nous limitons la distance la plus longue des sommets à $\sqrt{2}dz$ pour filtrer des segments.

Soit le premier segment $[(a_x, a_y, a_z), (b_x, b_y, b_z)]$, le deuxième segment $[(c_x, c_y, c_z), (d_x, d_y, d_z)]$, pour trouver l'intersection des sous-segments, l'algorithme suivant est appliqué :

- diviser chacun des deux segments en dix sous-segments, les nœuds des ces sous-segments s'écrivent comme

$$p_i = [(1 - t_i) \times (a_x, a_y, a_z) + t_i \times (b_x, b_y, b_z)] \quad (2.4)$$

$$q_j = [(1 - s_j) \times (c_x, c_y, c_z) + s_j \times (d_x, d_y, d_z)] \quad (2.5)$$

avec $t_i = \frac{i}{10}$, $i = 0, 1, 2, \dots, 10$, $s_j = \frac{j}{10}$, $j = 0, 1, 2, \dots, 10$;

- Calculer la distance minimale entre ces nœuds p_i, q_j , si la distance est inférieure à

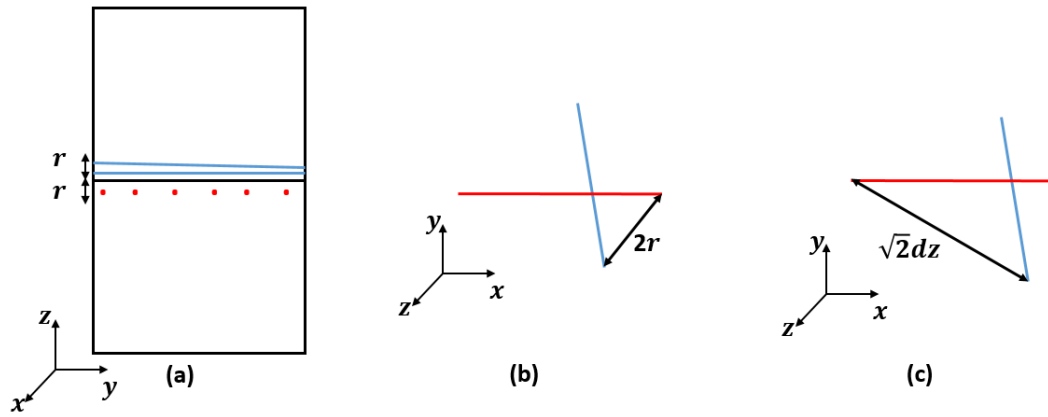


FIGURE 2.11 – Détection du contact entre plis du matériau [0/90]

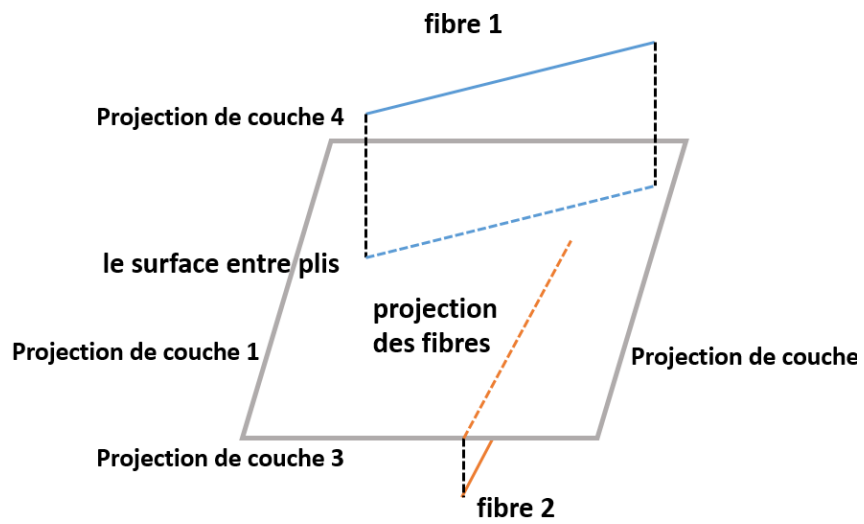


FIGURE 2.12 – Calcul de la distance dans la section $x - y$ [0/90]

$2r$, noter les valeurs de t_i et s_j .

- Selon le tableau 2.2, nous ajoutons la résistance de contact R_c entre des nœuds.

$s_i \backslash t_j$	$[0, 1/2]$	$]1/2, 1]$
$[0, 1/2]$	contact : $(a_x, a_y, a_z), (c_x, c_y, c_z)$	contact : $(b_x, b_y, b_z), (c_x, c_y, c_z)$
$]1/2, 1]$	contact : $(a_x, a_y, a_z), (d_x, d_y, d_z)$	contact : $(b_x, b_y, b_z), (d_x, d_y, d_z)$

TABLE 2.2 – Relation entre le contact de nœuds et s, t

2.2 Modèle physique global

Il n’y a qu’un seul modèle mais deux impositions de sources possibles, l’une en tension, l’autre en champ magnétique avec une source inductive : l’imposition en tension permet la simulation de l’essai volt-ampèremétrique ; l’imposition inductive permet la simulation approchée d’un contexte de CND.

Afin de présenter la méthode plus simplement et plus clairement, l’hypothèse selon laquelle la réaction d’induit est négligée est appliquée. La preuve de la faisabilité de l’hypothèse est présentée dans l’annexe B. De plus, comme présenté dans la section 1.7, selon les travaux de Guillaume Wasselynck [Was11], les effets de peau et de proximité entre les différentes fibres sont négligeables pour nos fréquences de travail.

Dans ma thèse, nous considérons d’abord l’imposition en tension qui est plus facile en pratique pour garantir la validation des méthodes numériques. Puis, l’imposition en champ magnétique est considérée pour la simulation d’un chauffage par induction.

Selon l’équation de Maxwell Faraday

$$\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

avec

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \quad (2.7)$$

le champ électrique peut s’écrire sous forme :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \nabla V, \quad (2.8)$$

où \mathbf{E} est le champ électrique, \mathbf{A} est le vecteur potentiel magnétique utilisé pour imposer une \mathbf{B} source, t est le temps, V est le potentiel électrique.

Comme $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, dans le cas harmonique nous obtenons :

$$\mathbf{J} = -\sigma \nabla V - \sigma j\omega \mathbf{A}, \quad (2.9)$$

où \mathbf{J} est la densité de courant, σ est la conductivité du matériau, $\omega = 2\pi f$ avec f la fréquence.

A partir de l'équation (2.9), nous avons

$$\frac{\mathbf{J}}{\sigma} = -\nabla V - j\omega \mathbf{A}, \quad (2.10)$$

A partir de l'intégrale de volume sur un volume $\ell \times S$ conducteur de l'équation (2.10), nous avons

$$\int_{\ell} \oiint_S \frac{\mathbf{J}}{\sigma} dS d\ell = -j\omega \int_{\ell} \oiint_S \mathbf{A} dS d\ell - \int_{\ell} \oiint_S \nabla V dS d\ell, \quad (2.11)$$

où S est l'aire de la section transversale.

Puis, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{I\ell}{\sigma} &= -j\omega S \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\ell + S\Delta V, \\ \frac{I\ell}{S\sigma} &= -j\omega \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\ell + \Delta V, \\ IR &= -j\omega \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\ell + \Delta V, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où R est la résistance.

Alors, le courant sur chaque branche s'écrit comme

$$I = -\frac{j\omega}{R} \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\ell + \frac{\Delta V}{R}, \quad (2.13)$$

D'un point de vue matriciel et pour traiter l'ensemble des courants et potentiels, nous définissons \mathbf{G} pour représenter l'opérateur de gradient sur le potentiel et c_A pour présenter la circulation de $j\omega \mathbf{A}$, puis nous introduisons la matrice diagonale de conductance \mathbf{C} , nous

avons

$$\mathbf{CGV} \triangleq \frac{\Delta V}{R}, \quad \mathbf{C}_{c_A} \triangleq -\frac{j\omega}{R} \int_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\ell. \quad (2.14)$$

La matrice \mathbf{D} est définie pour présenter l'opérateur de divergence. En appliquant la divergence \mathbf{D} sur l'équation 2.13 pour imposer $\text{div}\mathbf{J} = 0$, nous avons

$$\mathbf{DCGV} = -\mathbf{DC}_{c_A} \quad (2.15)$$

Nous définissons $K = \mathbf{DCG}$, $f = -\mathbf{DC}_{c_A}$.

Le système linéaire global obtenu s'écrit :

$$KV = f. \quad (2.16)$$

Les pertes locales sur chaque branche se calculent comme

$$W = RI^2. \quad (2.17)$$

Les pertes globales se calculent comme le somme des pertes locales.

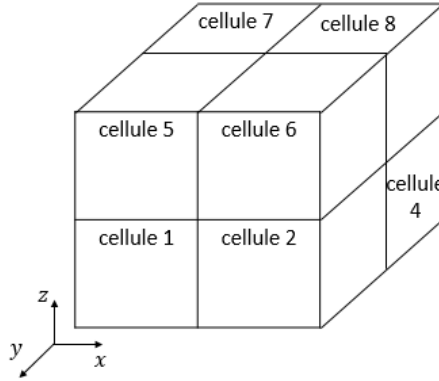


FIGURE 2.13 – Construction du matériau de $2 \times 2 \times 2$ cellules

Le matériau réel est plus grand et devrait concaténer plus de cellules, mais en pratique, nous commençons avec le matériau concaténé de 8 cellules pour vérifier la faisabilité de nos méthodes numériques. Pour un matériau divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules, sans tenir compte

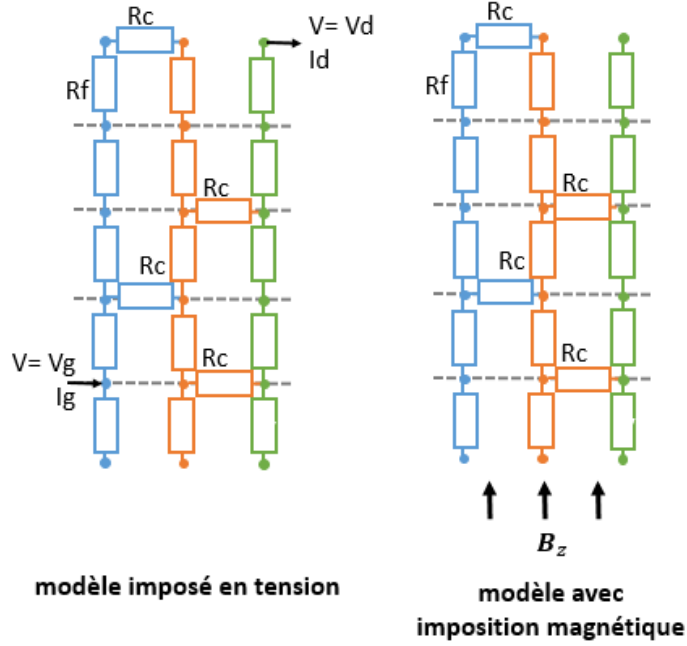


FIGURE 2.14 – Réseaux de résistance

Le système global $KV = 0$ avec les conditions aux limites imposées peut se réécrire comme :

$$K_{\text{inc}} V_{\text{inc}} = -K_{\text{in}} \mathbf{1}_{\text{in}} V_{\text{in}} - K_{\text{out}} \mathbf{1}_{\text{out}} V_{\text{out}}, \quad (2.19)$$

où

$$K_{\text{inc}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{inc}}), \quad K_{\text{in}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{in}}), \quad K_{\text{out}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{out}}), \quad (2.20)$$

avec V_{in} et V_{out} les potentiels en entrée et en sortie respectivement, i_{inc} les indices des inconnues, i_{in} et i_{out} les indices des nœuds où imposer les conditions de Dirichlet en entrée et en sortie respectivement.

Ici, un point en contact avec les bords est défini comme un point situé à une distance inférieure à r du bord, c'est-à-dire une fibre qui peut toucher le bord. En ces points, des potentiels (des conditions aux limites) sont imposés pour l'essai volt-ampèremétrique (figure 2.15).

La figure 2.16 montre le potentiel pour le matériau de taille $800 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m} \times 800 \mu\text{m}$ avec les potentiels imposés en x , y et z direction respectivement.

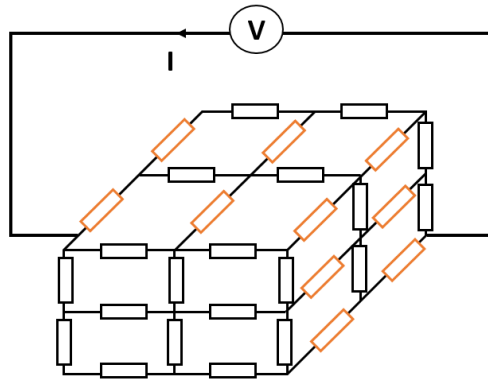
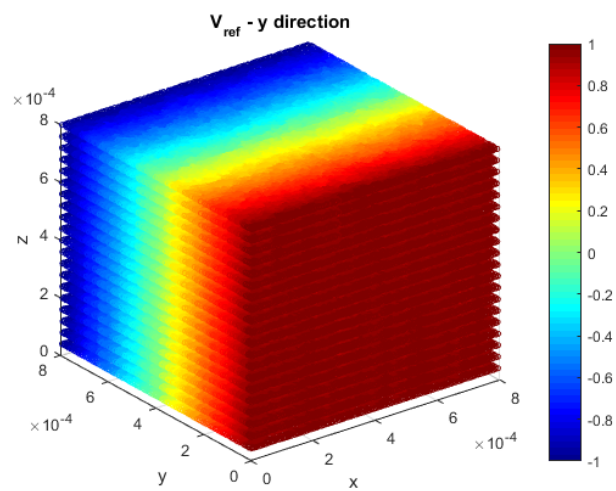
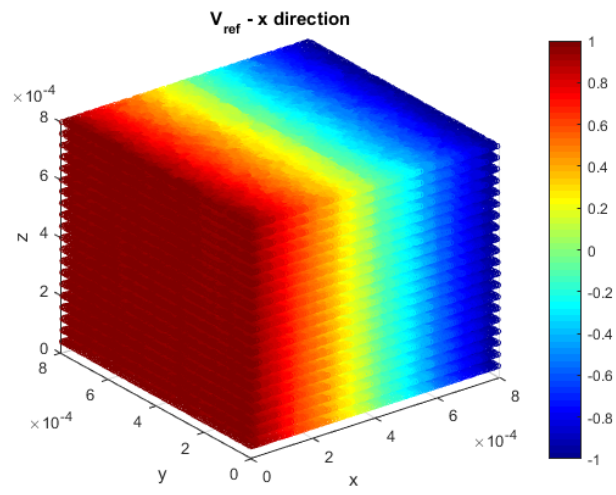
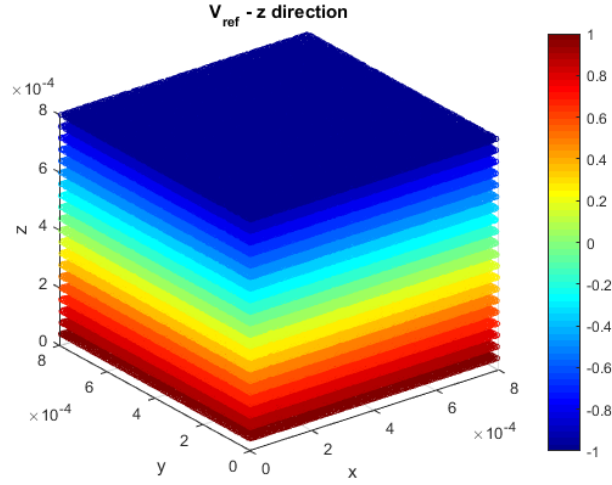


FIGURE 2.15 – Essai volt-ampèremétrique



FIGURE 2.16 – Potentiel pour les conditions aux limites imposées en x , y et z direction

2.3.1 Validation pour des fibres "ordonnées"

Après la résolution, le potentiel de chaque point est obtenu pour calculer ainsi les courants d'entrée et de sortie et déterminer la résistance équivalente R_e de l'ensemble du réseau.

$$R_e = \frac{V_g - V_d}{I_e}, \quad (2.21)$$

$$(2.22)$$

où I_e est le courant d'entrée, l est la longueur d'échantillon dans la direction d'imposition de potentiel, S est la section de l'échantillon.

Nous comparons la résistance équivalente résolue par le modèle sur le matériau régulier avec la résistance calculée analytiquement. Nous avons considéré le matériau régulier de taille $133\mu m \times 133\mu m \times 133\mu m$ décomposé en $n_c = 10$ couches. Le matériau régulier est un matériau où il est considéré qu'un nœud est en contact que ses 4 voisins dans la section. Ce matériau a $n_n = 421$ nœuds dans chaque couche avec la résistance de contact $R_c = 11\Omega$ et la résistance de fibre $R_f = 17,9203\Omega$. Nous avons imposé la tension d'entrée et de sortie en x , y et z direction respectivement pour résoudre notre modèle.

— Selon l'analyse physique, la résistance équivalente dans la direction des fibres R_{fP}

est

$$R_{fP} = \frac{(n_c - 1)R_f}{n_n} = 0,3657\Omega; \quad (2.23)$$

la résistance équivalente des contacts entre fibre R_{cP} est

$$R_{cP} = \frac{(\sqrt{n_n} - 1)R_c}{\sqrt{n_n}}/n_c = 1,0476\Omega. \quad (2.24)$$

- Selon notre modèle, la résistance équivalente dans la direction des fibres est $0,3657\Omega$, la résistance équivalente des contacts entre fibre est $1,0476\Omega$.

Cela illustre la cohérence de notre modèle.

2.4 L'imposition inductive

Pour le modèle avec l'imposition inductive, la source n'est plus une tension imposée uniquement aux nœuds du bord, la source magnétique est imposée sur les branches comme présenté dans la figure 2.14. Par conséquent, il n'y a plus de condition aux limites de Dirichlet. Cependant, il faut choisir un nœud comme référence pour permettre la résolution du système. Dans mes travaux, le dernier nœud est choisi et le potentiel sur ce nœud est imposé comme 0.

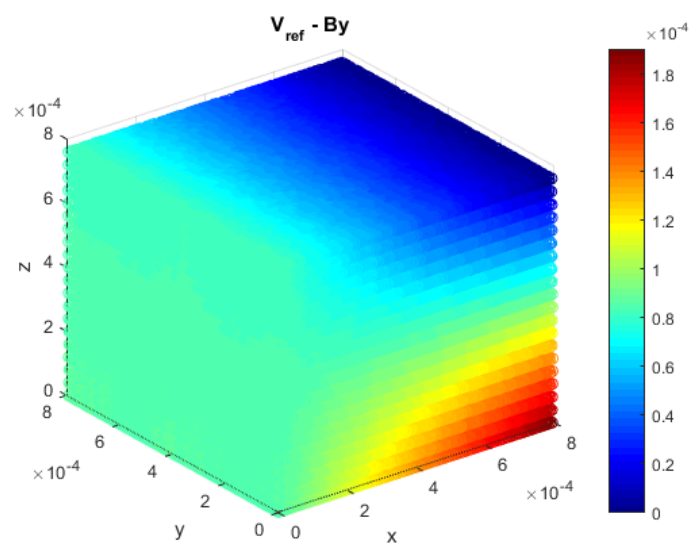
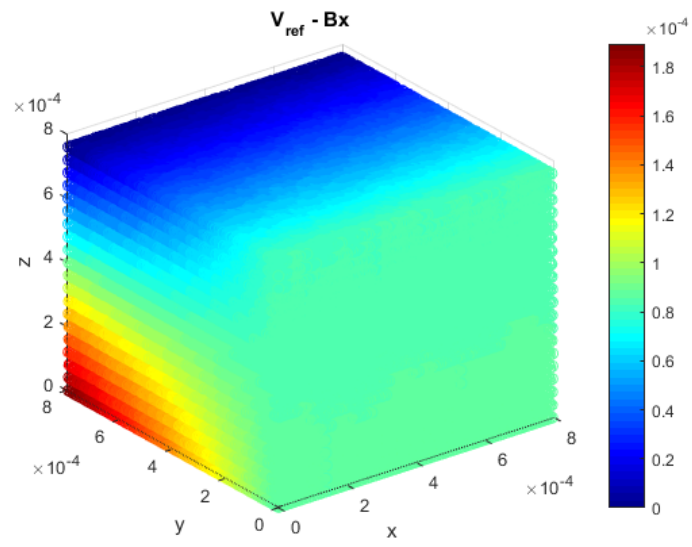
Le système global devient :

$$K_{\text{ind}}V_{\text{ind}} = f_{\text{ind}}, \quad (2.25)$$

où $K_{\text{ind}} = K(i_{\text{ind}}, i_{\text{ind}})$, $V_{\text{ind}} = V(i_{\text{ind}})$, $f_{\text{ind}} = f(i_{\text{ind}})$, et i_{ind} l'index de tous les nœuds sauf le dernier nœud.

Pour imposer les sources magnétiques uniformes \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z , les vecteurs potentiels magnétiques $\mathbf{A}_x = (0, 0, y)$, $\mathbf{A}_y = (0, 0, x)$, $\mathbf{A}_z = (0, x, 0)$ sont imposés respectivement sur chaque branche.

La figure 2.17 montre le potentiel pour le matériau avec une source \mathbf{B} imposée selon x , y et z respectivement.



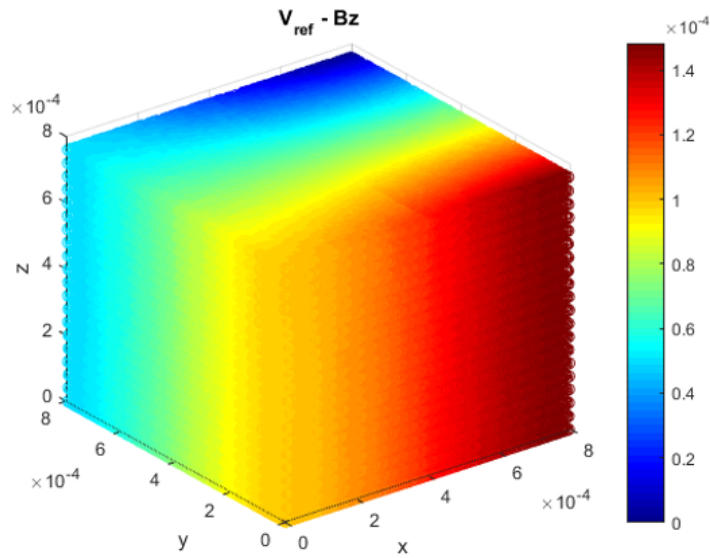
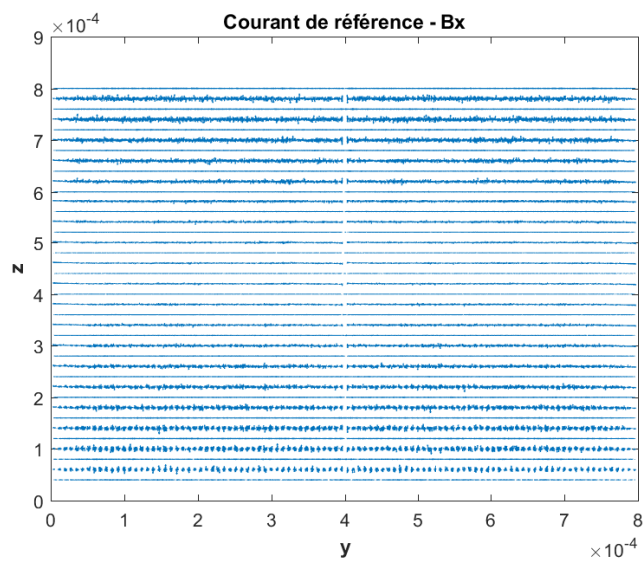
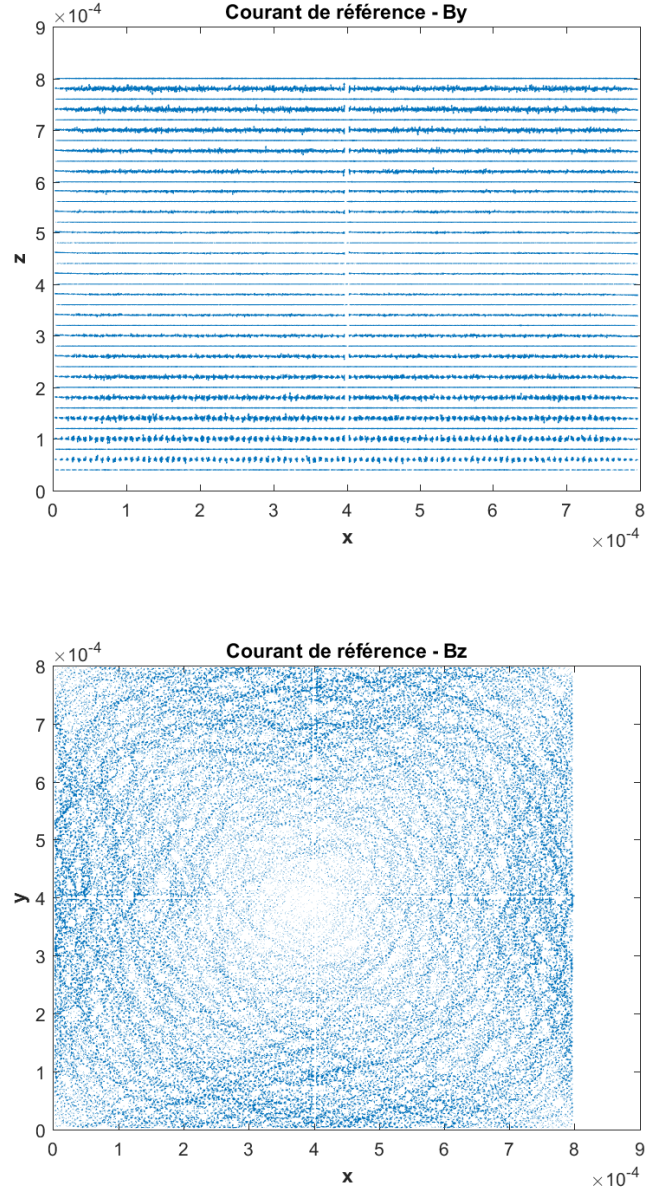


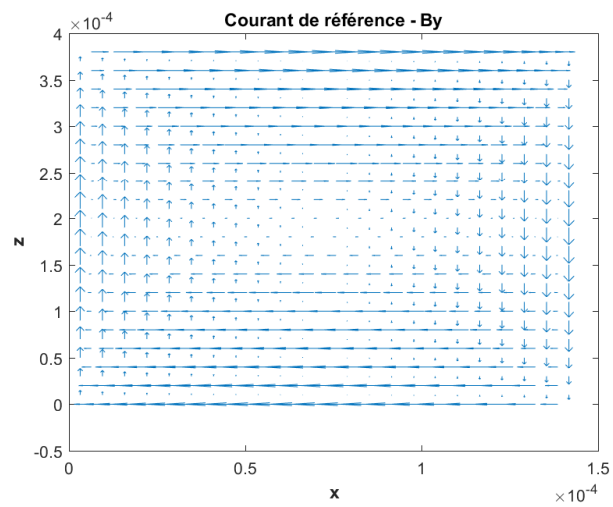
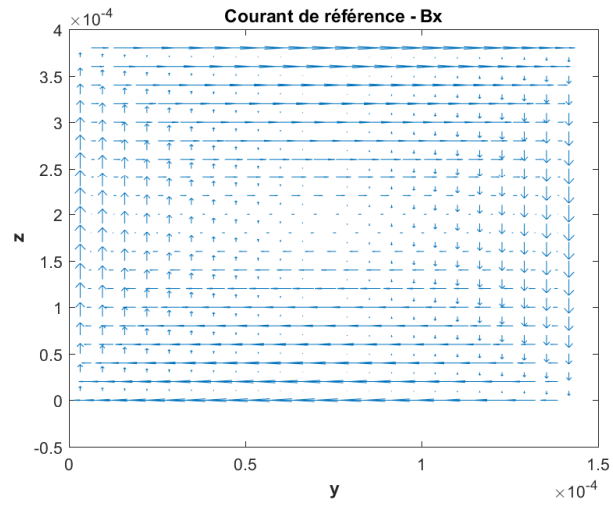
FIGURE 2.17 – Potentiel pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z

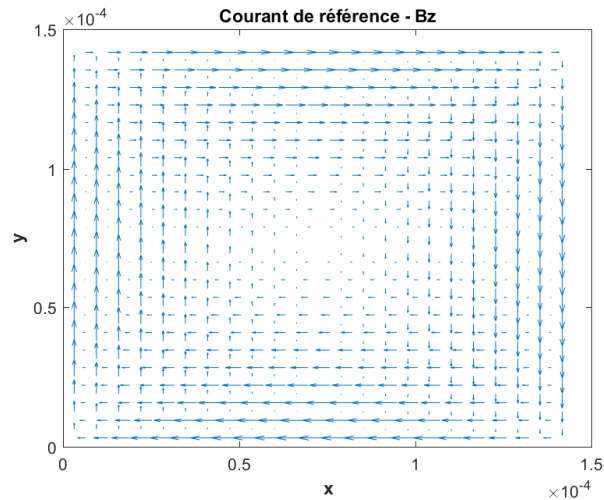
Puisque pour le modèle avec l'imposition inductive, la résistance n'est plus déductible comme pour le modèle avec l'imposition en tension, la distribution du courant sur le matériau est considérée pour valider le modèle. La figure 2.18 montre la distribution du courant pour le matériau dans les sections $y-z$, $x-z$ et $x-y$ avec une source \mathbf{B} imposée selon x , y et z respectivement.



FIGURE 2.18 – Courant pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z

Cependant, pour le cas où \mathbf{B}_x et \mathbf{B}_y sont source, la figure de la distribution du courant n'est pas lisible, pour \mathbf{B}_z , la distribution du courant tourne comme le sens physique mais la direction n'est pas lisible. Donc, nous utilisons le modèle sur le matériau régulier pour obtenir une vue plus claire de la distribution du courant. La figure 2.19 montre la distribution du courant pour le matériau régulier dans les sections $y-z$, $x-z$ et $x-y$ avec une source \mathbf{B} imposée selon x , y et z respectivement. Comme le montre la figure, le courant résolu correspond parfaitement au courant attendu pour de telles sources magnétiques.



FIGURE 2.19 – Courant pour la source \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, la génération de la géométrie à l'échelle microscopique a été présentée. Ensuite, une approche de modélisation circuit a été montrée avec la possibilité d'une excitation électrique et magnétique. Les effets de réactions d'induit ont été négligé à partir des éléments présentés en annexe B.

L'approche utilisée pour la génération ou la résolution s'appuie sur l'utilisation de cellules. Dans le cadre de la décomposition de domaine, une cellule peut être utilisée comme sous-domaine. Pour la POD, la résolution au niveau d'une cellule permet l'obtention de la matrice de *snapshots* et ainsi l'obtention de base réduite pour chaque cellule. La concaténation de ces bases réduites pourrait permettre de trouver le système réduit pour faire la résolution d'un problème macroscopique.

LES MÉTHODES DE RÉDUCTION D'ORDRE DE MODÈLE ET DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE

Ces dernières années, les méthodes de réduction d'ordre de modèle ont connu un développement considérable, que ce soit proper generalized decomposition (PGD), proper orthogonal decomposition (POD), Rayleigh-Ritz, Petrov-Galerkin, l'approximant de Padé etc. [Da 15; CCH80]. La méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Petrov-Galerkin sont des variantes de la méthode POD, et l'approximant de Padé requiert une résolution par la méthode des séries de puissance qui n'est pas applicable à notre problème parce que nous ne pouvons pas faire la dérivation multiple sur notre modèle. Donc, dans ma thèse, nous avons considéré deux méthodes de réduction d'ordre de modèles : la POD permettant d'approximer la solution d'un problème en projetant la solution sur un espace réduit ; la PGD décomposant la solution en un produit de fonctions avec des variables indépendantes. Elles sont les méthodes les plus utilisées dans la littérature et ont montré leur efficacité sur de nombreux problèmes [Mis10]. Elles peuvent réduire le nombre de degrés de liberté du système complexe.

Pour la méthode PGD, à cause des limites mentionnées dans la section 1.6.1, son développement est reporté en annexe A.

De plus, la méthode de décomposition de domaine (DD) peut décomposer la résolution du système global en chaque sous-domaine pour réduire l'ordre de résolution, réduisant ainsi le temps de calcul.

Ce chapitre présente les méthodes POD (avec les innovations de la POD sur notre modèle qui sont différentes de travaux précédents), DD et leurs applications.

3.1 Proper orthogonal decomposition

La méthode POD consiste à effectuer une projection du domaine global vers un domaine réduit à l'aide de la base réduite du domaine. La matrice de *snapshot* est utilisée pour déterminer l'opérateur de projection dans le domaine réduit [HC13 ; SC12]. Lors de l'utilisation de la méthode POD, les bases réduites seront extraites pour chaque cellule dans lesquelles le matériau est décomposé selon la section 2.2 et la concaténation de ces bases réduites permettra d'obtenir le modèle réduit de l'ensemble du matériau.

3.1.1 Stratégies de proper orthogonal decomposition

Étant donné que la génération directe de l'ensemble du matériau prend beaucoup de temps, la génération du matériau est remplacée par la génération et la concaténation des cellules. Nous considérons d'abord le matériau avec les fibres unidirectionnelles. Nous considérons le cas d'un matériau divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules pour taille de cellule $400\mu m \times 400\mu m \times 400\mu m$ comme montré dans la figure 3.1. Une base réduite sera générée sur chaque cellule en vue d'obtenir un système global réduit.

Comme défini dans la section 2.2, le système global est $KV = f$, et ce système peut être

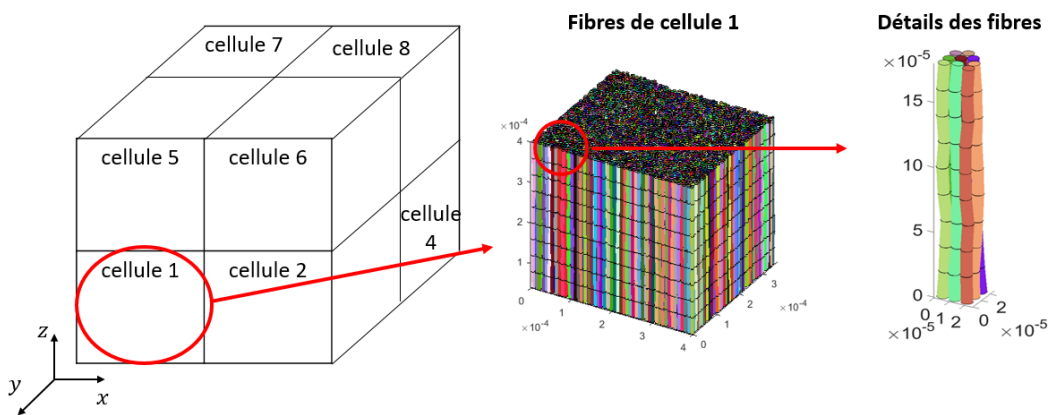


FIGURE 3.1 – Construction du matériau virtuel

tions aux limites imposées est

$$K_{\text{inc}}V_{\text{inc}} = -K_{\text{in}}\mathbf{1}_{\text{in}}V_{\text{in}} - K_{\text{out}}\mathbf{1}_{\text{out}}V_{\text{out}}, \quad (3.3)$$

où

$$K_{\text{inc}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{inc}}), \quad K_{\text{in}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{in}}), \quad K_{\text{out}} = K(i_{\text{inc}}, i_{\text{out}}), \quad (3.4)$$

$$V_{\text{inc}} \simeq P_{\text{inc}}v, \quad P_{\text{inc}} = P(i_{\text{inc}}, :). \quad (3.5)$$

avec i_{inc} des indices des inconnues, i_{in} et i_{out} des indices des nœuds où imposer les conditions de Dirichlet en entrée et en sortie respectivement.

Le système réduit est donc

$$P_{\text{inc}}^t K_{\text{inc}} P_{\text{inc}} v = -P_{\text{inc}}^t K_{\text{in}} \mathbf{1}_{\text{in}} V_{\text{in}} - P_{\text{inc}}^t K_{\text{out}} \mathbf{1}_{\text{out}} V_{\text{out}}, \quad (3.6)$$

Pour retrouver la solution V_{POD} dans le domaine global,

$$V_{\text{POD}}(i_{\text{inc}}) = P_{\text{inc}}v, \quad V_{\text{POD}}(i_{\text{in}}) = V_{\text{in}}, \quad V_{\text{POD}}(i_{\text{out}}) = V_{\text{out}}. \quad (3.7)$$

Le courant s'écrit sous la forme

$$I = \mathbf{C}\mathbf{G}V_{\text{POD}}. \quad (3.8)$$

— Avec l'imposition inductive :

Pour rappel, comme présenté dans la section 2.2, le système global avec les conditions aux limites imposées est

$$K_{\text{ind}}V_{\text{ind}} = f_{\text{ind}}, \quad (3.9)$$

où $K_{\text{ind}} = K(i_{\text{ind}}, i_{\text{ind}})$, $V_{\text{ind}} = V(i_{\text{ind}})$, $f_{\text{ind}} = f(i_{\text{ind}})$, et i_{ind} l'indice de tous les nœuds sauf le dernier nœud, le potentiel sur le dernier nœud étant ainsi fixé à 0.

Le système réduit est donc

$$P_{\text{ind}}^t K_{\text{ind}} P_{\text{ind}} v = P_{\text{ind}}^t f_{\text{ind}}. \quad (3.10)$$

La solution V_{POD} dans le domaine global s'écrit comme :

$$V_{\text{POD}}(i_{\text{ind}}) = P_{\text{ind}}v, \quad V_{\text{POD}}(i_{\text{der}}) = 0. \quad (3.11)$$

avec i_{der} l'indice du dernier nœud.

Le courant s'écrit sous la forme

$$I = \mathbf{C}c_A + \mathbf{C}G V_{\text{POD}}. \quad (3.12)$$

Choix de matrice de *snapshots*

La matrice de *snapshots* est définie comme un ensemble de solutions précalculées dans un sous-domaine. Tout d'abord, nous avons choisi des *snapshots* basés sur des essais volt-ampèremétriques dans les 3 directions de l'espace.

— Le modèle avec l'imposition en tension :

Lorsque la source est une tension, ce premier choix s'explique par la volonté de permettre au courant de se déplacer dans les 3 directions, nous définissons la matrice de *snapshots* comme

$$S_n = \left[V_n^x, V_n^y, V_n^z \right], \quad (3.13)$$

où V_n^x, V_n^y, V_n^z sont les solutions d'essais volt-ampèremétriques respectivement dans les direction x, y et z dans la cellule n .

— Le modèle avec l'imposition inductive :

Lorsque la source est un champ magnétique, nous devons également considérer la solution du modèle avec l'imposition inductive. Nous définissons la matrice de *snapshots* comme

$$S_n = \left[V_n^x, V_n^y, V_n^z, V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz} \right], \quad (3.14)$$

où V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz} sont les solutions du modèle d'induction dans la cellule n avec les champs magnétiques uniformes $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y$ et \mathbf{B}_z imposés.

Calcul de la base réduite

Pour trouver la base réduite de chaque cellule, la méthode la plus directe est d'appliquer la SVD directement sur la matrice de *snapshots* décrites en section 1.6.1 : soit $S_n = U\Sigma W^t$ avec les propriétés de chaque matrice, $P_n = U_{1:n_r}, n_r$ premières colonnes

de U . En pratique, nous préférons passer par la matrice de corrélation, la décomposition s'effectue sur $S_n^t S_n = W \Sigma^t \Sigma W^t = W \Lambda W^t$, P_n étant obtenue en normalisant les colonnes de $S_n W$. Mais nous voulons réduire le temps de calcul en réduisant convenablement la dimension de la base réduite.

La matrice Σ contient dans sa diagonale les valeurs singulières de la matrice S_n , elles correspondent aux racines des valeurs propres de $S_n^t S_n$. Donc, pour conserver une partie de la base réduite, il suffit de conserver les plus grandes valeurs propres, c'est-à-dire, garder les coefficients avec les plus grandes valeurs sur la diagonale de la matrice Σ [Ast+08].

Soit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_N$ la diagonale de Σ , nous gardons $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n_r}$ qui satisfont la condition :

$$\frac{\sum_{i=1, n_r} \sigma_i}{\sum_{i=1, N} \sigma_i} > 1 - \text{tolérance.} \quad (3.15)$$

Plus la tolérance diminue, plus le nombre de vecteurs de bases réduites augmente. Le temps de calcul augmente, la précision aussi, sous réserve des perturbations numériques qui peuvent survenir avec des valeurs singulières trop petites. Par conséquent, tout en garantissant l'exactitude des résultats, la tolérance peut être réduite de manière appropriée. Ensuite, pour limiter l'influence de l'amplitude des snapshots sur les valeurs singulières, nous pouvons normaliser les colonnes de S_n [CB06]. Soit la matrice de *snapshots* $S_n = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_N]$, nous traitons la matrice comme

$$\tilde{\Phi}_i = \frac{\Phi_i}{\|\Phi_i\|}, \quad (3.16)$$

et la nouvelle matrice de *snapshots* s'écrit comme $S_n = [\tilde{\Phi}_1, \tilde{\Phi}_2, \dots, \tilde{\Phi}_N]$. Enfin, nous trouvons la base réduite en utilisant la même opération que précédemment.

Analyse des résultats

Pour le matériau considéré, le système de référence comporte 200000 inconnues. Pour analyser les résultats, l'erreur relative sur une grandeur (potentiel, courant ou pertes) S est définie en

$$\text{err}_S = \frac{\|S_{\text{POD}} - S\|}{\|S\|} \quad (3.17)$$

où S_{POD} est la solution issue de la POD, parmi le potentiel, le courant et la puissance, S est la référence obtenue directement de la résolution du système global.

L'erreur relative des pertes globales est définie comme

$$\text{err}_{\text{pertes globales}} = \frac{|W_{\text{global}} - W_{\text{POD}_{\text{global}}}|}{|W_{\text{global}}|}, \quad (3.18)$$

où W_{global} sont les pertes globales dans le matériau obtenue directement de la résolution du système global, $W_{\text{POD}_{\text{global}}}$ sont les pertes globales dans le matériau obtenue par la POD.

1. Pour le modèle avec l'imposition en tension avec les termes de *snapshots* définis en (3.13) :
 - l'erreur relative du potentiel dans la direction x est 88,32%, l'erreur relative dans la direction y est 88,61%, l'erreur relative dans la direction z est 80,81%,
 - l'erreur relative du courant dans la direction x est 1009,53%, l'erreur relative dans la direction y est 988,92%, l'erreur relative dans la direction z est 256,34%,
 - l'erreur relative des pertes dans la direction x est 91886,82%, l'erreur relative dans la direction y est 92424,19%, l'erreur relative dans la direction z est 1912,38%,
 - l'erreur relative des pertes globales dans la direction x est 9041,67%, l'erreur relative dans la direction y est 8715,53%, l'erreur relative dans la direction z est 657,03%.

En régénérant le matériau plusieurs fois, nous constatons que les erreurs relatives sont toujours importantes.

2. Pour le modèle avec l'imposition inductive avec les termes de *snapshots* définis en (3.20) :
 - pour la source \mathbf{B}_x , l'erreur relative du potentiel est 79,60%, l'erreur relative du courant est 1187,14%, l'erreur relative des pertes est 60255,89%, l'erreur relative des pertes globales est 171,1626% ;
 - pour la source \mathbf{B}_y , l'erreur relative du potentiel est 80,52%, l'erreur relative du courant est 1161,87%, l'erreur relative des pertes est 57712,78%, l'erreur relative des pertes globales est 16371,63% ;
 - pour la source \mathbf{B}_z , l'erreur relative du potentiel est 82,19%, l'erreur relative du courant est 322,85%, l'erreur relative des pertes est 10674,21%, l'erreur relative des pertes globales est 998,39%.

Nous regénérons le matériau plusieurs fois et nous constatons que les erreurs relatives du courant sont toujours importantes.

En raison des erreurs relatives très importantes, la sélection des termes de *snapshots* doit être optimisée. Nous pensons que ces erreurs importantes sont dues aux grandes différences des tensions résolues dans les cellules et à l'absence de valeur de référence entre les cellules lors de la concaténation en base réduite.

Amélioration des termes de *snapshots*

Une première source d'erreurs peut venir de la nécessité de décaler la solution dans une cellule en fonction de sa position dans le matériau global. Pour ce faire, le vecteur constant $\mathbf{1}$ est ajouté dans la matrice de *snapshots*. Le vecteur constant $\mathbf{1}$ permet une translation de la solution pour permettre un décalage du potentiel de référence parce que la solution sera sous la forme : $\alpha_1\mathbf{1} + \alpha_2V_n^x + \alpha_3V_n^y + \alpha_4V_n^z$, avec α_i des coefficients. Le vecteur $\mathbf{1}$ est donc ajouté aux termes de *snapshots*.

Pour le modèle avec l'imposition en tension, la matrice de *snapshots* s'écrit comme

$$S_n = \left[\mathbf{1}, V_n^x, V_n^y, V_n^z \right], \quad \text{avec} \quad \mathbf{1} = \left[1, 1, \dots, 1, 1 \right]^t. \quad (3.19)$$

Les erreurs relatives sont présentes ci-dessous :

- l'erreur relative du potentiel dans la direction x est 5,83%, l'erreur relative dans la direction y est 3,65%, l'erreur relative dans la direction z est $5,34 \times 10^{-7}\%$,
- l'erreur relative du courant dans la direction x est 74,73%, l'erreur relative dans la direction y est 76,12%, l'erreur relative dans la direction z est $2,52 \times 10^{-6}\%$,
- l'erreur relative des pertes dans la direction x est 505,21%, l'erreur relative dans la direction y est 573,83%, l'erreur relative dans la direction z est $2,19 \times 10^{-3}\%$,
- l'erreur relative des pertes globales dans la direction x est 77,28%, l'erreur relative dans la direction y est 76,84%, l'erreur relative dans la direction z est $1,20 \times 10^{-8}\%$.

Le vecteur $\mathbf{1}$ dans la matrice de *snapshots* a amélioré les résultats. L'erreur dans la direction z est proche de zéro car le potentiel d'entrée et de sortie est imposé dans la direction z , et la direction z est définie comme la direction des fibres, c'est-à-dire que les contacts entre fibres n'impactent pas la circulation du courant dans la direction z . La différence des erreurs relative dans les directions x et y est causée par la disposition aléatoire des fibres et le contact différent entre les fibres.

Mais ces termes de *snapshots* ne sont pas suffisants : en régénérant le matériau plusieurs

fois, nous constatons que les erreurs relatives du courant sont toujours importantes. Pour le modèle avec l'imposition inductive, la matrice de *snapshots* s'écrit comme

$$S_n = \left[\mathbf{1}, V_n^x, V_n^y, V_n^z, V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz} \right], \quad (3.20)$$

Les erreurs relatives sont présentes ci-dessous :

- pour la source \mathbf{B}_x , l'erreur relative du potentiel est 9,57%, l'erreur relative du courant est 126,21%, l'erreur relative des pertes est 9934,41%, l'erreur relative des pertes globales est 199,59% ;
- pour la source \mathbf{B}_y , l'erreur relative du potentiel est 9,55%, l'erreur relative du courant est 127,53%, l'erreur relative des pertes est 18737,80%, l'erreur relative des pertes globales est 205,56% ;
- pour la source \mathbf{B}_z , l'erreur relative du potentiel est 18,10%, l'erreur relative du courant est 155,52%, l'erreur relative des pertes est 12150,89%, l'erreur relative des pertes globales est 285,23%.

Nous régénérons le matériau plusieurs fois et nous constatons que les erreurs relatives du courant sont toujours importantes. En raison des erreurs relatives du courant très importantes, la sélection des termes de *snapshots* doit encore s'améliorer.

Pour conserver plus d'informations locales et réduire l'erreur, la matrice de *snapshots* est augmentée en termes d'enrichissement. Nous considérons les termes d'enrichissement qui sont les solutions dans la cellule avec un point choisi aléatoirement sur les différentes faces pour imposer les tensions d'entrée et de sortie, c'est-à-dire des termes de type $V_{xx}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yx}, V_{yy}, V_{yz}, V_{zx}, V_{zy}, V_{zz}$. Nous choisissons les termes d'enrichissement les plus appropriés en comparant l'effet de chaque terme d'enrichissement sur l'erreur, et l'ajoutons à la matrice de *snapshots*.

1. Le modèle avec l'imposition en tension :

En observant l'effet sur l'erreur relative de l'ajout de chaque terme d'enrichissement aux termes de *snapshots* (3.19) selon les 3 directions, et en tenant compte de la nature aléatoire du choix des points, nous avons répété chaque option trois fois et finalement choisi quatre termes d'enrichissement $V_{xy}, V_{yz}, V_{zy}, V_{zx}$ qui assurent une réduction de l'erreur.

La matrice de *snapshots* avec des termes d'enrichissement est

$$S_n = \left[\mathbf{1}, V_n^x, V_n^y, V_n^z, V_{xy}, V_{yz}, V_{zy}, V_{zx} \right]. \quad (3.21)$$

Soit N le nombre d'essai volt-ampéremétriques, $V_{xy}, V_{yz}, V_{zy}, V_{zx}$ représentent les solutions obtenues en choisissant un point aléatoirement N fois sur les surfaces correspondantes.

Pour les termes de snapshots avec 160 termes d'enrichissement :

- l'erreur relative du potentiel dans la direction x est 3,93%, l'erreur relative dans la direction y est 2,92%, l'erreur relative dans la direction z est $5,24 \times 10^{-7}\%$,
- l'erreur relative du courant dans la direction x est 56,06%, l'erreur relative dans la direction y est 59,65%, l'erreur relative dans la direction z est $2,51 \times 10^{-6}\%$,
- l'erreur relative des pertes dans la direction x est 219,19%, l'erreur relative dans la direction y est 219,50%, l'erreur relative dans la direction z est $2,19 \times 10^{-3}\%$,
- l'erreur relative des pertes globales dans la direction x est 39,54%, l'erreur relative dans la direction y est 42,20%, l'erreur relative dans la direction z est $1,19 \times 10^{-8}\%$.

La figure 3.2 montre la relation entre l'erreur relative et le nombre des termes d'enrichissement. L'erreur relative diminue lorsque le nombre des termes d'enrichissement augmente. Les figures 3.3, 3.4 montrent la comparaison entre le potentiel de référence et le potentiel résolu par la POD. La figure 3.5 montre la comparaison entre le courant trié pour différentes sources imposées calculé par la POD avec 160 termes d'enrichissement et le courant trié de référence. Cette figure montre que le courant résolu par la POD a beaucoup de bruit et la précision est faible.

Pour comparer les temps de résolution, tous les temps discutés sont les temps CPU de MATLAB®. La résolution directe est effectuée par la méthode des gradients conjugués préconditionnés avec une tolérance de 10^{-12} . Comme nous avons mentionné en section 2.1, la génération de la géométrie en cellules et la recherche de contact intra-cellulaires et inter-cellulaires permettent de gagner du temps. Par conséquent, pour la génération de la géométrie et la détection des contacts entre fibres, nous utilisons toujours la division du matériau en cellules. Donc, nous ne comparons que les temps nécessaires pour résoudre le système global directement et pour le résoudre par notre nouvelle méthode qu'après l'obtention des connectivités.

Le temps de résolution directe de (2.18) est de 10,33 s et la résolution par la POD sans termes d'enrichissement coûte 6,89 s, la résolution par la POD avec termes d'enrichissement est 11,57 s pour 160 termes d'enrichissement. L'augmentation du temps de calcul de la POD avec des termes d'enrichissement est causée

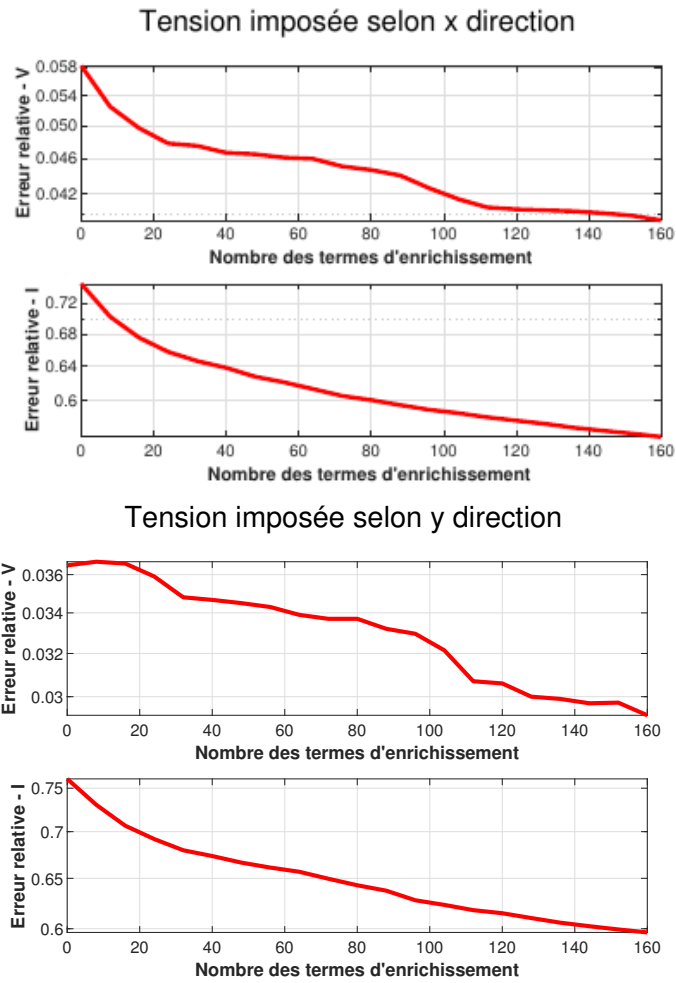


FIGURE 3.2 – Relation entre l’erreur relative et nombre des termes d’enrichissement

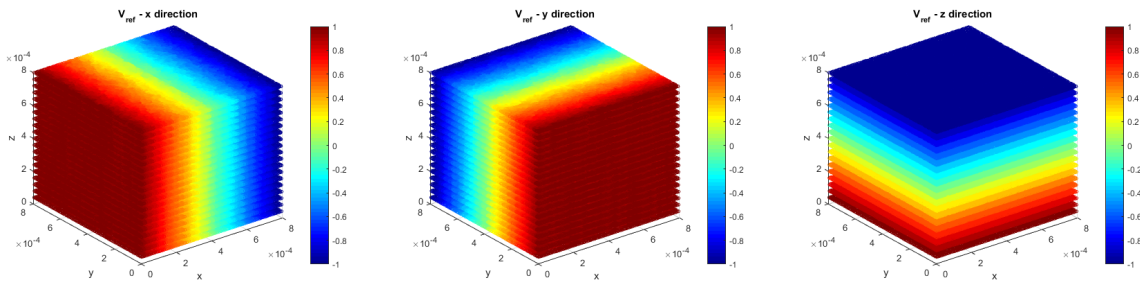


FIGURE 3.3 – Potentiel de référence en x , y et z direction

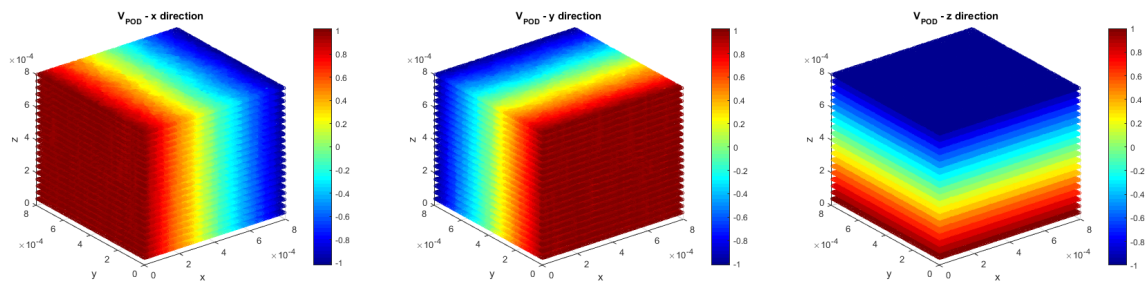


FIGURE 3.4 – Potentiel obtenu par la POD en x , y et z direction

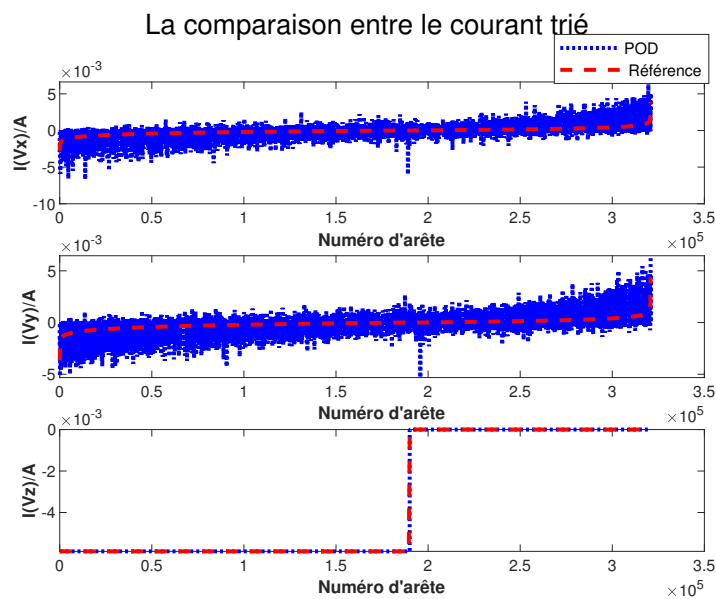


FIGURE 3.5 – Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la POD pour le modèle avec l'imposition en tension

par l'augmentation de la taille de la matrice de *snapshots*. Bien que l'ajout de termes d'enrichissement réduise l'erreur, cela entraîne une augmentation du temps de résolution.

2. Le modèle avec l'imposition inductive :

De la même manière que pour le modèle avec l'imposition en tension, nous avons examiné l'effet de chaque terme d'enrichissement sur l'erreur relative, et a finalement choisi de conserver tous les termes d'enrichissement. La matrice de *snapshots* avec des termes d'enrichissement est

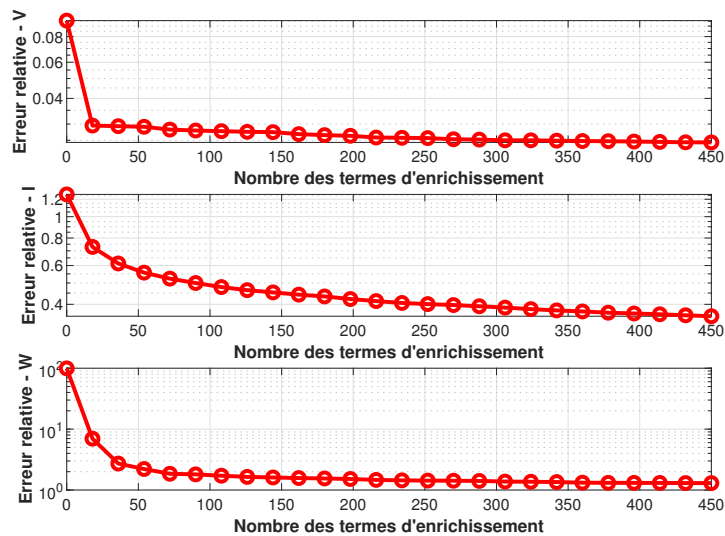
$$S_n = \left[\mathbf{1}, V_n^x, V_n^y, V_n^z, V_{Bx}, V_{By}, V_{Bz}, V_{xx}, V_{xy}, V_{xz}, V_{yx}, V_{yy}, V_{yz}, V_{zx}, V_{zy}, V_{zz} \right], \quad (3.22)$$

Pour les termes de snapshots avec 450 termes d'enrichissement :

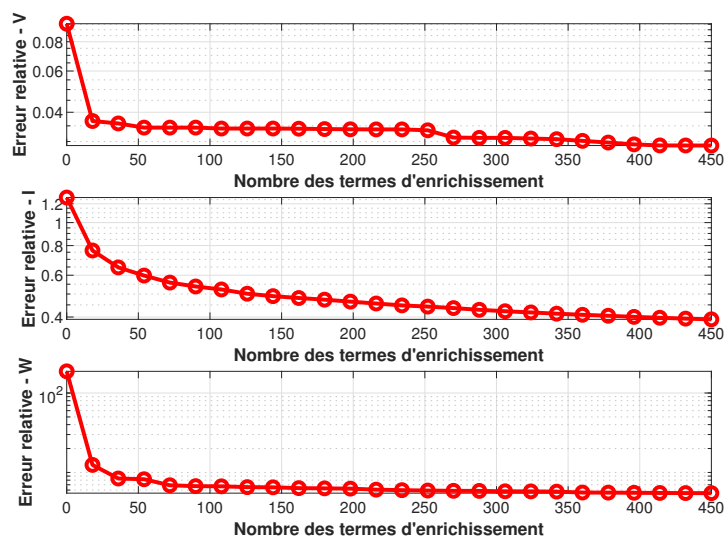
- pour la source \mathbf{B}_x , l'erreur relative du potentiel est 2,44%, l'erreur relative du courant est 35,32%, l'erreur relative des pertes est 129,94%, l'erreur relative des pertes globales est 14,24% ;
- pour la source \mathbf{B}_y , l'erreur relative du potentiel est 2,88%, l'erreur relative du courant est 39,11%, l'erreur relative des pertes est 549,06%, l'erreur relative des pertes globales est 18,69% ;
- pour la source \mathbf{B}_z , l'erreur relative du potentiel est 5,80%, l'erreur relative du courant est 62,42%, l'erreur relative des pertes est 1540,25%, l'erreur relative des pertes globales est 46,15%.

L'erreur relative diminue lorsque le nombre des termes d'enrichissement augmente. La figure 3.6 montre la relation entre l'erreur relative et le nombre des termes d'enrichissement. Les figures 3.7, 3.8 montrent la comparaison entre le potentiel de référence et le potentiel résolu par la POD.

Source B selon x direction



Source B selon y direction



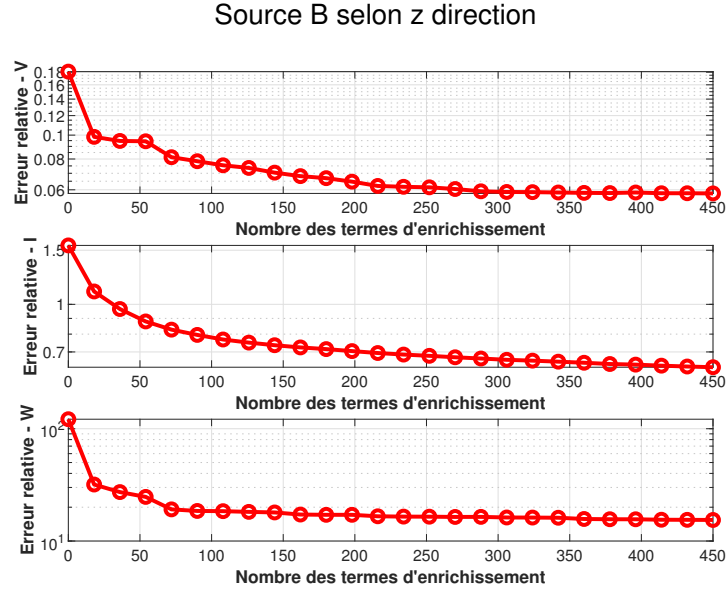


FIGURE 3.6 – Relation entre l'erreur relative et nombre des termes d'enrichissement

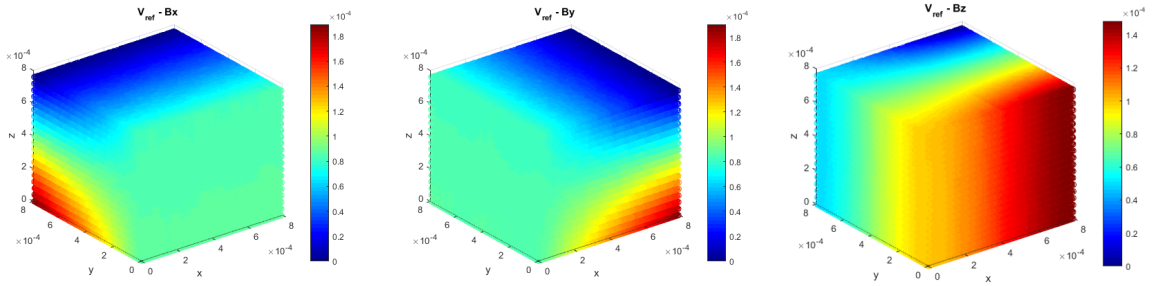


FIGURE 3.7 – Potentiel de référence pour les sources B_x , B_y et B_z

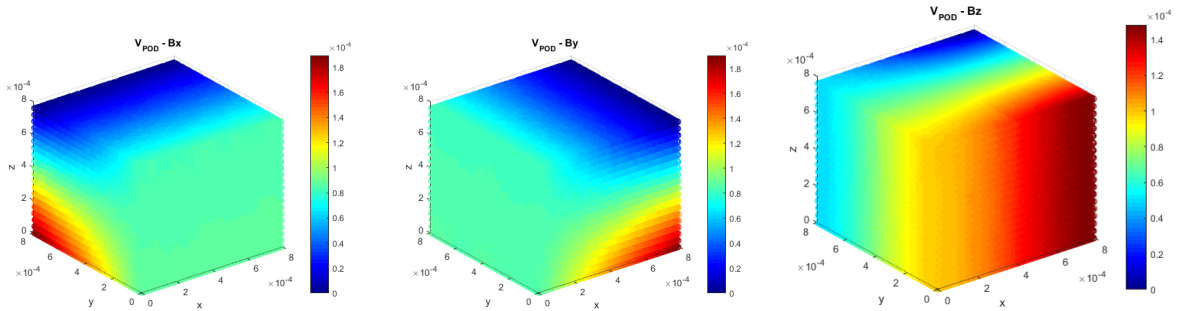


FIGURE 3.8 – Potentiel obtenu par la POD pour les sources B_x , B_y et B_z

La figure 3.9 montre la comparaison entre le courant trié pour différentes sources

imposées calculé par la POD avec 450 termes d'enrichissement et le courant trié de référence. Cette figure montre que le courant résolu par la POD est bruité et la précision est faible.

Le temps de résolution directe est de 12,70 s et le temps de résolution par la POD

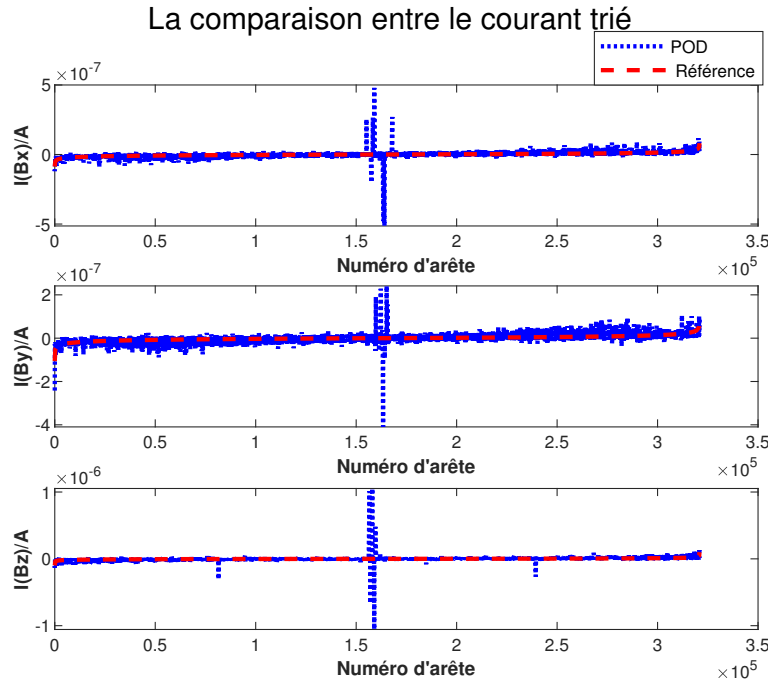


FIGURE 3.9 – Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la POD pour le modèle avec l'imposition inductive

sans termes d'enrichissement coûte 10,38 s, le temps de résolution par la POD avec termes d'enrichissement est 30,27 s pour 450 termes d'enrichissement. L'augmentation du temps de calcul de la POD avec des termes d'enrichissement est dû au fait que la taille de la matrice P est trop grande car la taille de la matrice de *snapshots* augmente. Bien que l'ajout de termes d'enrichissement réduise l'erreur, cela entraîne une augmentation du temps. La POD prend déjà beaucoup plus de temps que la résolution directe, ce qui fait que l'ajout de termes d'enrichissement n'est pas une bonne solution pour diminuer l'erreur.

Dans les calculs d'erreur ci-dessus, le même matériau est utilisé pour faire la comparaison, et pour éviter d'analyser des erreurs pour un matériau particulier, la POD avec 450 termes d'enrichissement est effectuée sur les cinq matériaux différents. Les tableaux 3.1,3.2 présentent l'erreur relative du potentiel et du courant sur 5

matériaux différents par la POD avec 450 termes d'enrichissement. Sur la base de ces données, le tableau 3.3 donne les valeurs maximale, minimale et moyenne de l'erreur relative du potentiel et le tableau 3.4 donne les valeurs maximale, minimale et moyenne de l'erreur relative du courant.

Source \ Matériau	1	2	3	4	5
\mathbf{B}_x	2, 30%	2, 28%	1, 37%	2, 44%	2, 29%
\mathbf{B}_y	3, 11%	3, 10%	2, 04%	2, 88%	3, 10%
\mathbf{B}_z	6, 41%	6, 03%	9, 70%	5, 80%	6, 03%

TABLE 3.1 – Erreur relative du potentiel de POD avec 450 termes d'enrichissement pour cinq matériaux régénérés

Source \ Matériau	1	2	3	4	5
\mathbf{B}_x	35, 74%	35, 69%	36, 88%	35, 32%	35, 74%
\mathbf{B}_y	39, 43%	39, 42%	37, 55%	39, 11%	39, 43%
\mathbf{B}_z	62, 81%	61, 89%	62, 90%	62, 42%	61, 88%

TABLE 3.2 – Erreur relative du courant de POD avec 450 termes d'enrichissement pour cinq matériaux régénérés

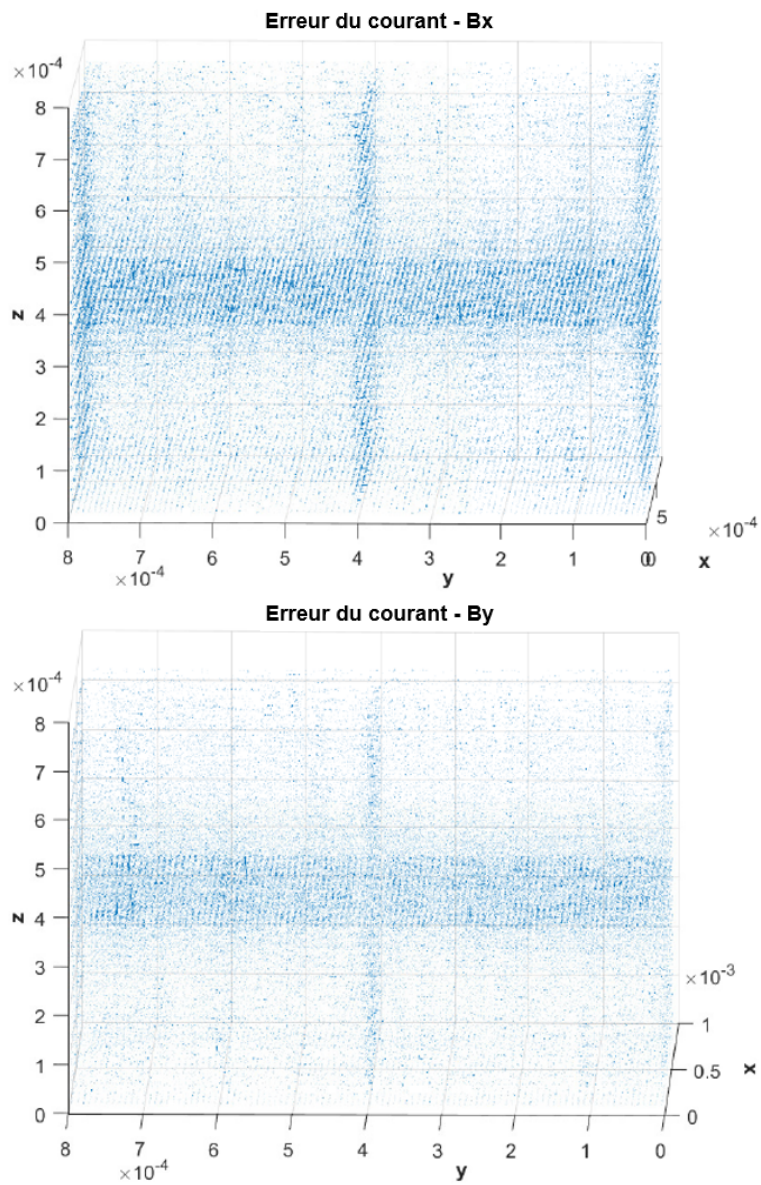
Source \ Le caractère statistique	moyenne	maximum	minimum
\mathbf{B}_x	2, 14%	2, 44%	1, 37%
\mathbf{B}_y	2, 85%	3, 11%	2, 04%
\mathbf{B}_z	6, 79%	9, 70%	6, 03%

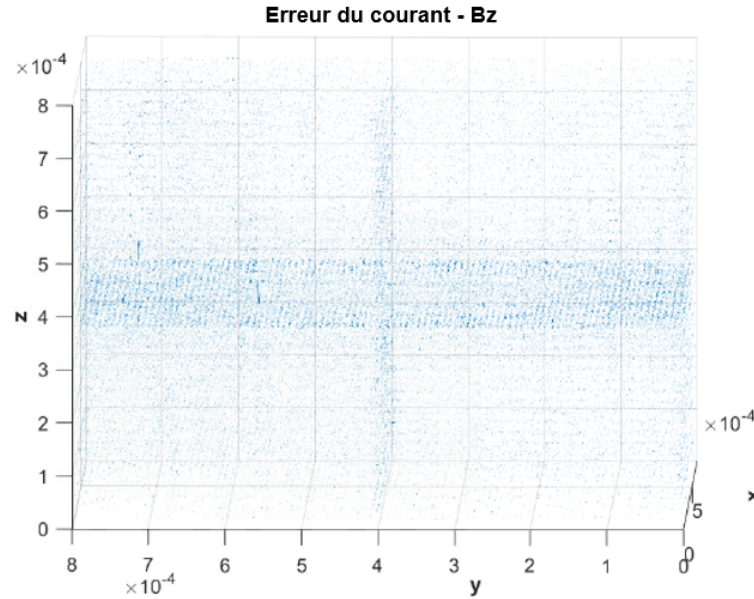
TABLE 3.3 – Caractères statistiques des erreurs du potentiel sur 5 matériaux

Source \ Le caractère statistique	moyenne	maximum	minimum
\mathbf{B}_x	35, 87%	36, 88%	35, 32%
\mathbf{B}_y	38, 99%	39, 43%	37, 55%
\mathbf{B}_z	62, 38%	62, 90%	61, 88%

TABLE 3.4 – Caractères statistiques des erreurs du courant sur 5 matériaux

L'erreur importante du courant et des pertes peut être due au fait que la POD ne tient pas compte des courants entre cellules. La figure 3.10 valide cette idée, en effet l'erreur du courant est plus grande sur les surfaces communes des cellules.



FIGURE 3.10 – Erreur du courant pour les sources \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z

3.1.2 Conclusion sur la POD

D'après les résultats, l'erreur relative du potentiel calculé par la POD est acceptable. Et si le temps nécessaire pour trouver les matrices du système global n'est pas pris en compte, la POD est plus rapide que la résolution globale. Pour la simulation du potentiel à l'échelle microscopique, la POD est une méthode qui peut conserver les informations locales et gagner de temps.

Cependant, pour le courant, l'erreur relative calculée par la POD n'est pas acceptable. Le but de la simulation est de simuler un CND par thermo-induction, donc la précision sur le courant est importante. Cette erreur peut être causée par le fait que les bases de la POD ne prennent pas correctement en compte les interactions entre les cellules et la continuité du courant à cette interface.

L'échange d'informations entre les cellules semble donc nécessaire, ce qui laisse présager que la création d'un modèle réduit construit a priori ne sera pas possible. Dans ces conditions, la technique de décomposition de domaine est testée.

Soit K_j la matrice **DCG** sans les contributions des nœuds en contact des cellules voisines ajoutées sur les diagonales de la matrice de conductance **C** dans la cellule j . Nous résolvons le modèle dans chaque cellule :

$$K_j V_j = f_j; \quad (3.24)$$

2. Boucle de résolution

Résoudre dans chaque cellule le système avec comme source les potentiels du recouvrement de la cellule voisine à l'itération précédente. (figure 3.12).

3. Répéter la deuxième étape jusqu'à la convergence.

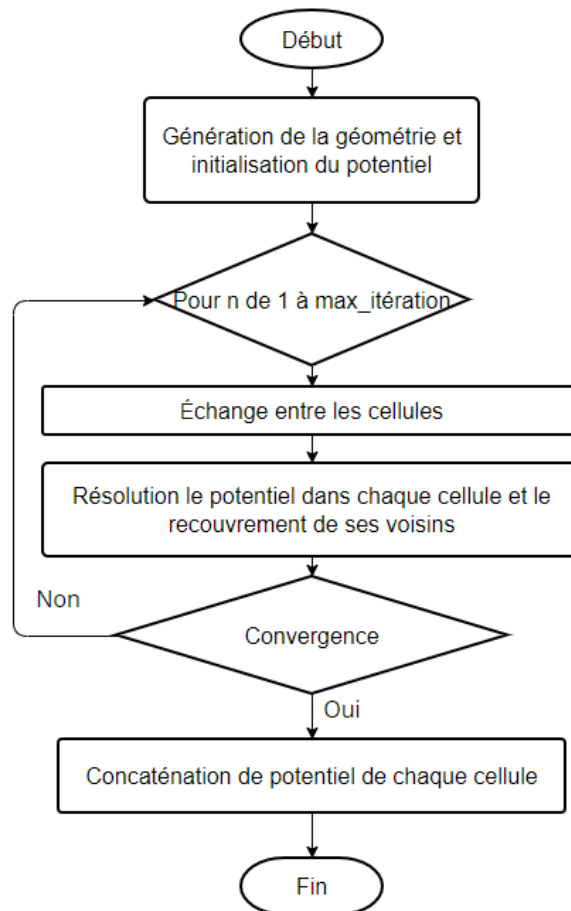


FIGURE 3.11 – Algorithme de la DD

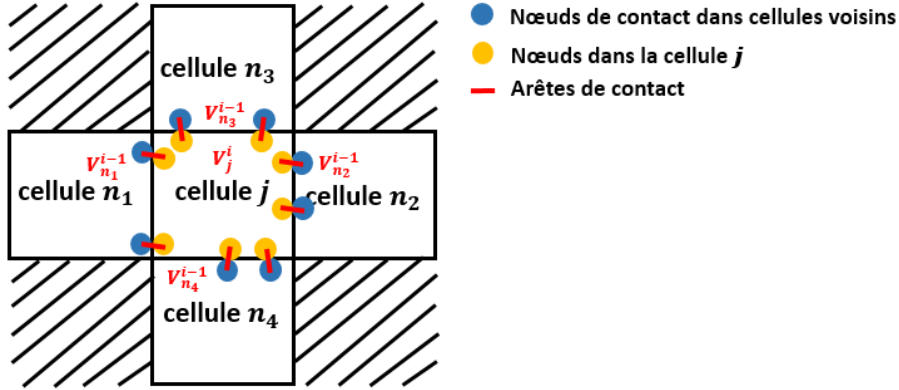


FIGURE 3.12 – Illustration de la DD pour le cas transverse

Comme présenté sur la figure 3.12, dans le cas transverse, pour la cellule j , les cellules voisines sont notées cellule n_1 , cellule n_2 , cellule n_3 , cellule n_4 , et les indices de nœuds dans ces cellules voisines qui sont en contact avec la cellule j sont notés i_{n_1} , i_{n_2} , i_{n_3} , i_{n_4} respectivement. Pour trouver la solution dans la cellule j à l'itération i , nous imposons les potentiels obtenus à l'itération $i - 1$ sur les nœuds de contact des cellules voisines et nous résolvons :

$$\begin{aligned} K_{jj}V_j^i + K_{jn_1}(:, i_{n_1})V_{n_1}^{i-1}(i_{n_1}) + K_{jn_2}(:, i_{n_2})V_{n_2}^{i-1}(i_{n_2}) + \\ K_{jn_3}(:, i_{n_3})V_{n_3}^{i-1}(i_{n_3}) + K_{jn_4}(:, i_{n_4})V_{n_4}^{i-1}(i_{n_4}) = f_j. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Pour la condition de convergence, nous avons divers choix :

- Selon l'erreur relative entre la tension obtenue à chaque itération V^i et l'itération précédente V^{i-1} :

$$\varepsilon = \frac{\|V^i - V^{i-1}\|}{\|V^{i-1}\|} < \text{tolérance}; \quad (3.26)$$

- Selon l'erreur relative entre le courant obtenu à chaque itération I^i et l'itération précédente I^{i-1} :

$$\varepsilon = \frac{\|I^i - I^{i-1}\|}{\|I^{i-1}\|} < \text{tolérance}; \quad (3.27)$$

- Selon l'erreur relative entre la puissance obtenue à chaque itération W^i et l'itération

précédente W^{i-1} :

$$\varepsilon = \frac{\|W^i - W^{i-1}\|}{\|W^{i-1}\|} < \text{tolérance}; \quad (3.28)$$

Nous discuterons de l'impact de ces trois choix sur les résultats, ainsi que de l'impact des différentes tolérances sur les résultats dans le chapitre suivant. Dans ce chapitre, un grand nombre d'itérations sera choisi afin de vérifier la faisabilité de la méthode.

3.2.2 Analyse d'erreur

Nous utilisons la formule (3.17) pour analyser l'erreur. De même, pour le temps, nous ne considérons que le temps nécessaire pour la DD et la résolution directe une fois que la connectivité globale est obtenue. Comme la condition de convergence n'a pas encore été discutée, le nombre d'itérations de convergence dans ce chapitre est déterminé fixé suffisamment grand pour assurer la convergence.

Modèle avec l'imposition en tension

Les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance après 500 itérations convergent vers :

- l'erreur relative du potentiel dans la direction x est 1,08%, l'erreur relative dans la direction y est 1,12%, l'erreur relative dans la direction z est $1,24 \times 10^{-9}\%$;
- l'erreur relative du courant dans la direction x est 16,88%, l'erreur relative dans la direction y est 17,39%, l'erreur relative dans la direction z est $4,29 \times 10^{-9}\%$;
- l'erreur relative de la puissance dans la direction x est 15,54%, l'erreur relative dans la direction y est 17,12%, l'erreur relative dans la direction z est $8,38 \times 10^{-9}\%$;
- l'erreur relative de la puissance globale dans la direction x est 3,14%, l'erreur relative dans la direction y est 3,08%, l'erreur relative dans la direction z est $2,28 \times 10^{-11}\%$.

La figure 3.13 montre la relation entre l'erreur relative et le nombre d'itération. L'erreur relative avec l'imposition de potentiel en z direction est toujours proche de 0. L'erreur relative diminue lorsque le nombre d'itération augmente. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, la tendance à la diminution de l'erreur relative ralentit à mesure que le nombre d'itération augmente.

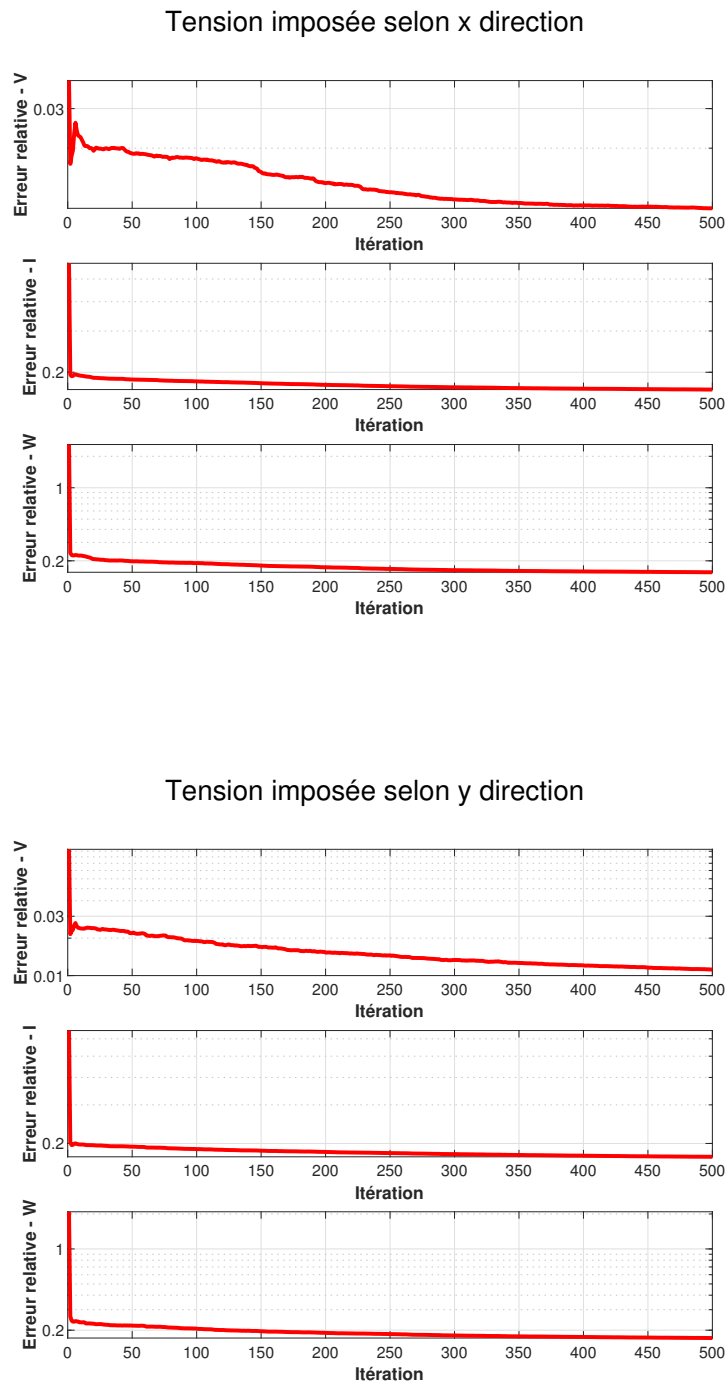
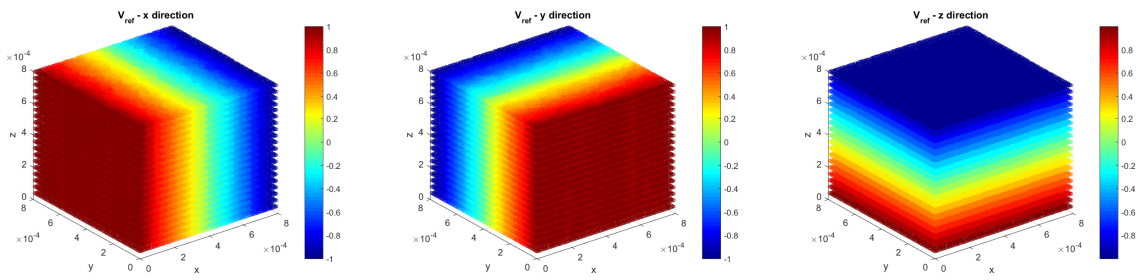
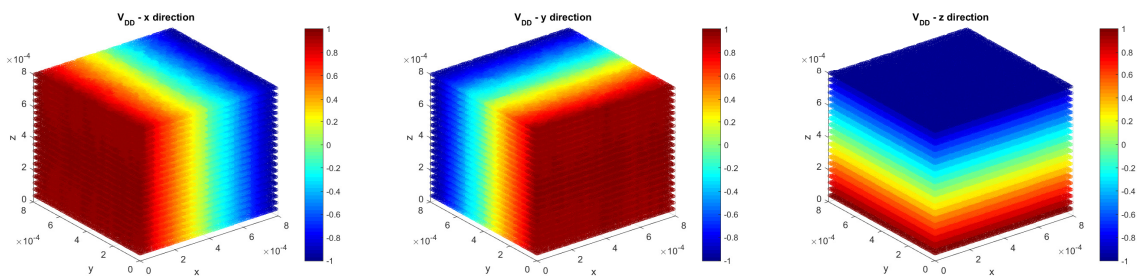


FIGURE 3.13 – Relation entre l'erreur relative et nombre d'itération

Les figure 3.14, 3.15 montrent la comparaison entre le potentiel de référence et le potentiel résolu par DD. Pour le potentiel, la précision de DD est vérifiée.

FIGURE 3.14 – Potentiel de référence en x , y et z directionFIGURE 3.15 – Potentiel obtenu par DD en x , y et z direction

La figure 3.16 montre la comparaison entre le courant trié pour différentes sources imposées calculé par la DD avec 500 itérations et le courant trié de référence. Selon cette figure, le courant calculé par la DD a encore de bruit. Pour réduire le bruit, il faut augmenter le nombre d'itérations.

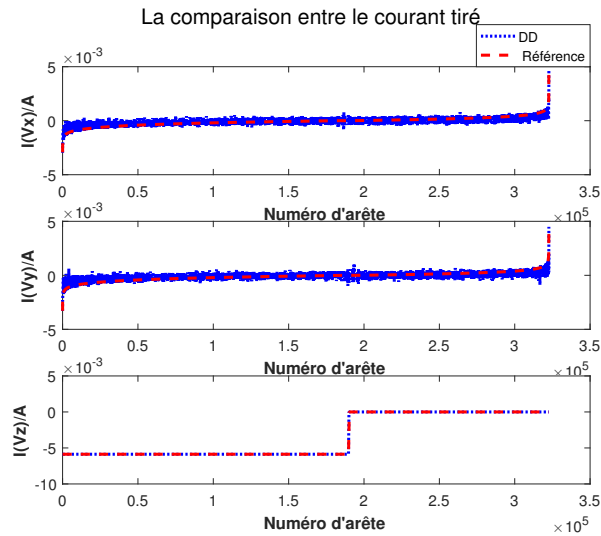


FIGURE 3.16 – Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la DD pour le modèle avec l'imposition en tension

Le temps de résolution directe est de 10,33 s et la résolution par la DD coûte 200,41 s. L'augmentation d'itérations conduit inévitablement à une augmentation du temps, cependant, la tendance à la diminution de l'erreur ralentit et la DD prend déjà beaucoup plus de temps que la résolution directe, donc l'augmentation d'itérations n'est pas le meilleur choix. Comme la DD permet aux résolutions de chaque cellule simultanément, nous utilisons le temps le plus long de résolution dans une cellule pour simuler le temps de calcul parallèle, mais cela prend toujours 30,11 s, qui est beaucoup plus élevé que la résolution directe.

Modèle avec l'imposition inductive

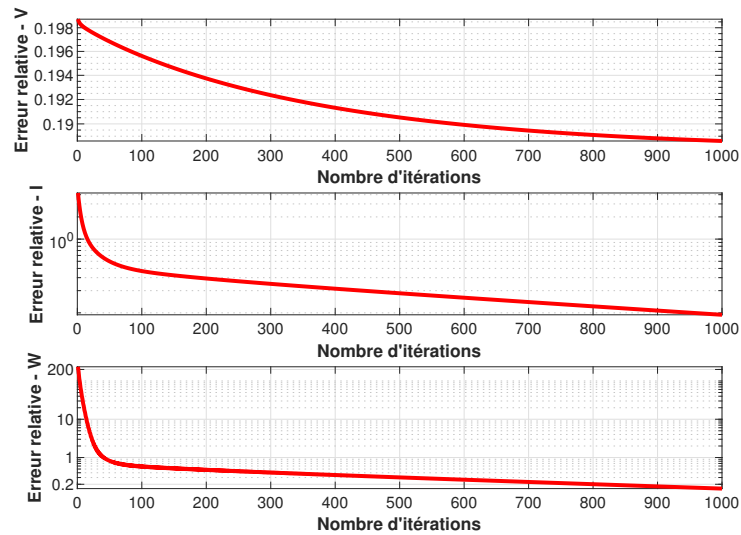
Pour le modèle avec l'imposition inductive, la DD converge plus lentement. Les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance après 1000 itérations convergent vers :

- pour la source \mathbf{B}_x , l'erreur relative du potentiel est 18,86%, l'erreur relative du courant est 9,41%, l'erreur relative de la puissance est 15,42%, l'erreur relative de la puissance globale est 0,87% ;
- pour la source \mathbf{B}_y , l'erreur relative du potentiel est 19,38%, l'erreur relative du courant est 8,29%, l'erreur relative de la puissance est 13,06%, l'erreur relative de la puissance globale est 0,68% ;
- pour la source \mathbf{B}_z , l'erreur relative du potentiel est 60,92%, l'erreur relative du

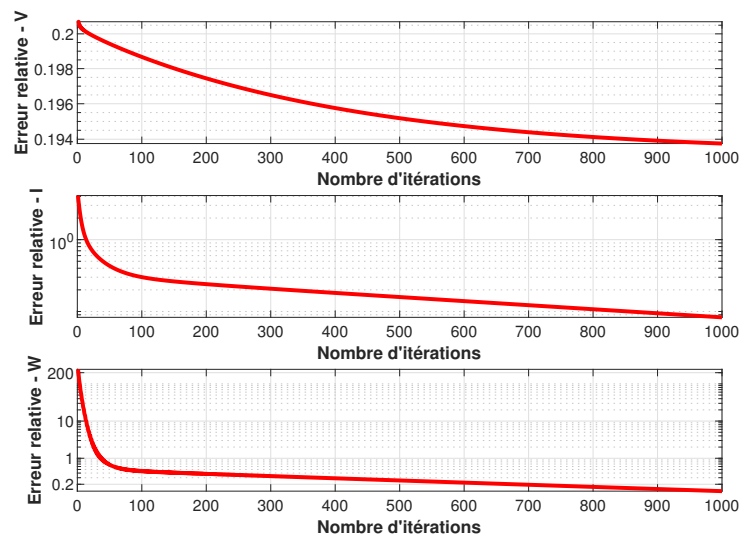
courant est 31,05%, l'erreur relative de la puissance est 50,92%, l'erreur relative de la puissance globale est 9,64%.

L'erreur relative diminue lorsque le nombre d'itérations augmente. La figure 3.17 montre la relation entre l'erreur relative et le nombre d'itérations. Lorsque l'itération est suffisamment grande, la tendance à la réduction des erreurs tend à être lente.

Source B selon x direction



Source B selon y direction



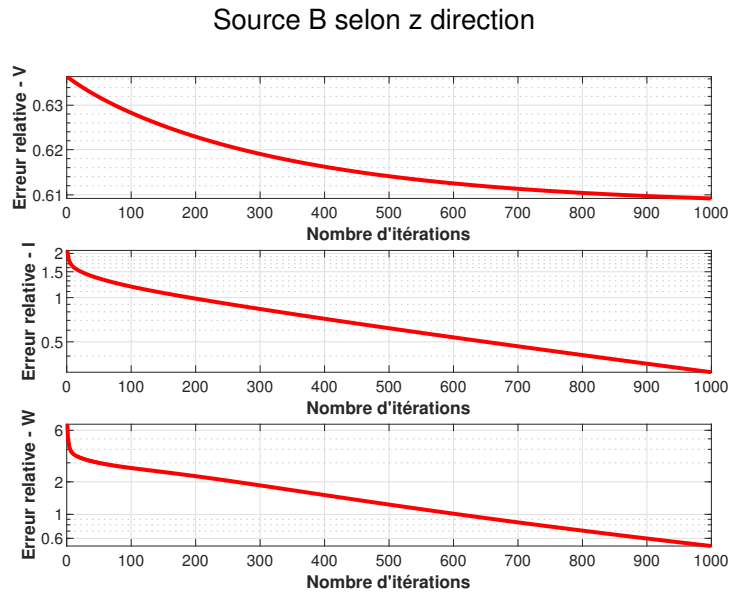


FIGURE 3.17 – Relation entre l'erreur relative et nombre d'itération

Les figures 3.18, 3.19 montrent la comparaison entre le potentiel de référence et le potentiel résolu par la DD. En termes de tension, la DD est précis.

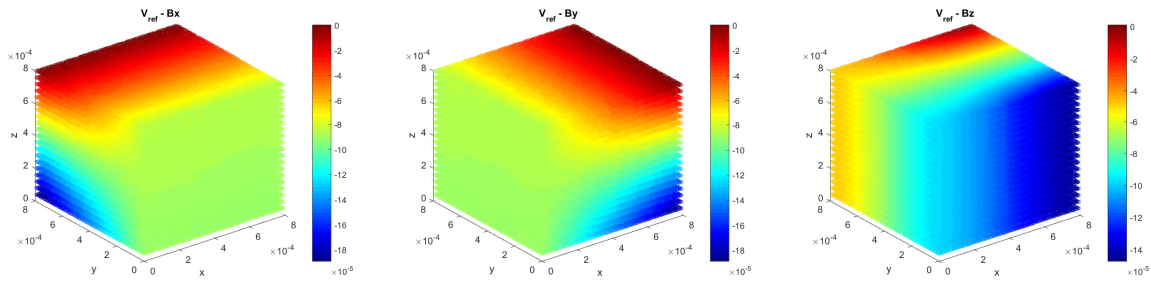


FIGURE 3.18 – Potentiel de référence pour la source B_x , B_y et B_z

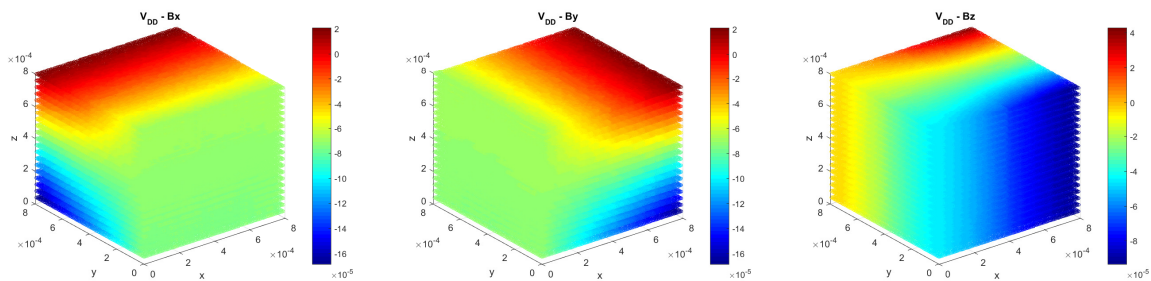


FIGURE 3.19 – Potentiel obtenu par la DD pour la source B_x , B_y et B_z

La figure 3.20 montre la comparaison entre le courant trié pour différentes sources imposées calculé par la DD avec 1000 itérations et le courant trié de référence. Comme présenté sur la figure, le courant calculé par la DD est plus proche de valeur de référence que celui résolu par la POD, bien qu'il y a encore un peu de bruit, ce qui montre que l'idée d'augmenter l'échange entre les cellules est correcte.

Le temps de résolution directe est de 13,66 s et la résolution par la DD avec 1000 itérations

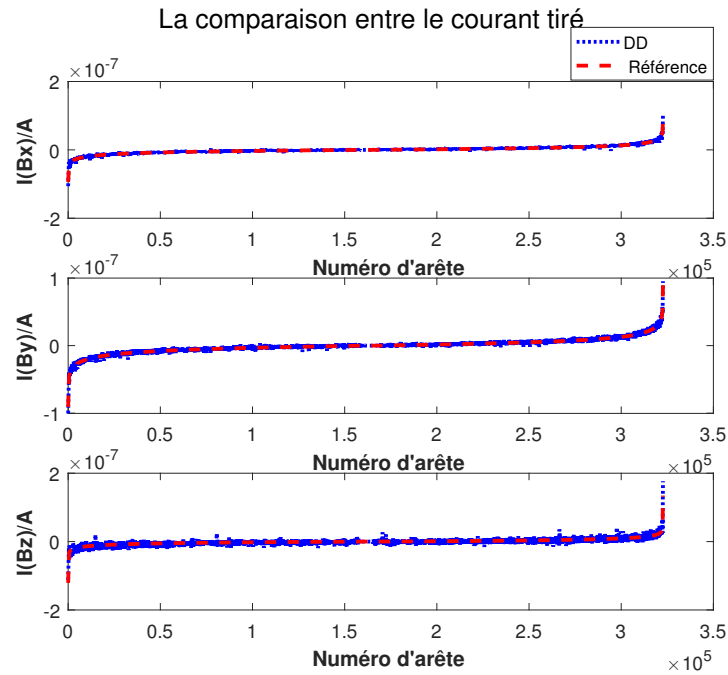


FIGURE 3.20 – Comparaison entre les courants triés obtenus par la résolution directe et la DD pour le modèle avec l'imposition inductive

coûte 469,78 s. Comme la DD permet la résolution de chaque cellule simultanément, nous utilisons le temps le plus long de résolution dans une cellule pour simuler le temps de calcul parallèle, mais cela prend 60,21 s, qui est beaucoup plus élevé que la résolution directe. Puisque la DD prend déjà beaucoup de temps, ajout des itérations n'est pas le bon choix. Il faut considérer l'augmentation d'échanges entre cellules pour accélérer la convergence.

3.2.3 Conclusion sur la décomposition de domaine

D'après les résultats, la DD permet de bien prendre en compte des interactions entre cellules mais elle nécessite un grand nombre d'itérations. L'augmentation de recouvrement entre les cellules est une méthode utile pour accélérer la convergence [Hub14]. Cependant,

pour notre matériau, il est difficile de définir un recouvrement plus large que les nœuds de contact des cellules voisines en raison de la position aléatoire des fibres dans la section transversale.

3.3 Conclusion

Dans ce chapitre, l'application de la POD sur matériau n'a pas démontré un bon passage d'information entre cellules. Malgré les tentatives d'amélioration de base via l'enrichissement des termes de *snapshots*, les erreurs obtenues sur les courant et puissance ne sont pas compatibles avec une simulation de CND thermo-inductif.

La DD permet le passage d'information entre cellules mais aux prix d'un nombre d'itérations prohibitif. La position aléatoire des fibres rends difficile l'augmentation du recouvrement entre cellules, ce qui empêche l'amélioration de la convergence.

Dans le chapitre suivant, la DD sera utilisée en combinaison avec la POD pour projeter l'impact de l'ensemble du matériau sur des nœuds en contact dans les cellules voisines, ce qui permet d'augmenter le recouvrement donc d'accélérer la convergence.

LA MÉTHODE DE DÉCOMPOSITION DE DOMAINE AVEC PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION

Il est connu que si le recouvrement entre sous-domaines augmente, la DD converge plus vite [Hub14], cependant l'élargissement du recouvrement augmente le nombre d'inconnues par sous-domaine et donc le temps de calcul. De plus, de part la nature de notre matériau, il est difficile d'identifier pour le recouvrement plus que les nœuds de contact des cellules voisines. La situation est compliquée par le fait que l'ajout du recouvrement conduit à une situation où les cellules diagonales doivent également être prise en compte. Pour notre matériau, en simulation, un sous-domaine est formé des nœuds d'une cellule ainsi que des nœuds en contact des cellules voisines. Nous avons vu que la POD permet une résolution réduite rapide du matériau complet. L'utilisation de la POD permettrait donc de pouvoir approcher un recouvrement total pour un coût numérique réduit.

Dans des travaux antérieurs, la DD et la POD ont également été utilisées en combinaison, par exemple dans [CDM15 ; RR14], où la DD est utilisée pour décomposer le domaine à résoudre et pour considérer les connexions entre les sous-domaines, et la POD est utilisée pour accélérer la résolution dans chaque sous-domaine. Ceci est différent de notre approche combinée, où notre POD est faite sur le domaine global et est utilisée pour augmenter les connexions entre sous-domaines et projeter la relation globale dans le sous-domaine. Pour notre cas, si la POD est utilisée uniquement dans les sous-domaines, elle n'augmente pas le recouvrement des sous-domaines et donc n'accélère pas la convergence de la DD, et cela nécessiterait de décomposer les sous-domaines pour trouver la base réduite de la POD. Dans ce chapitre, nous allons combiner les méthodes DD et POD en une méthode notée DD-POD et présenter ses démarches et résultats.

4.1 Stratégies de décomposition de domaine avec proper orthogonal decomposition

L'idée de la DD-POD est similaire à celle de la DD, la différence est que lors de la résolution de chaque cellule, les potentiels appliquées depuis les cellules voisines ne sont plus le résultat de la solution dans ces cellules à l'itération précédente, mais les potentiels obtenus par POD sur le matériau complet à l'itération précédente. Partant d'une matrice initiale, la matrice de *snapshots* sera enrichie au fil des itérations.

L'algorithme de la DD-POD est résumé sur la figure 4.1, et détaillé ci-après :

1. Initialisation

Faire l'essai volt-ampèremétrique classique dans chaque cellule pour initialiser la matrice de *snapshots*. Nous résolvons dans la cellule j

$$K_j V_j = 0 \quad (4.1)$$

avec l'imposition de la tension d'entrée et de sortie en x , y et z direction, et nous initialisons la matrice de *snapshots* comme

$$S_j^0 = [\mathbf{1}, V_j^x, V_j^y, V_j^z]. \quad (4.2)$$

Puis, nous avons la base réduite de chaque cellule et nous la concaténons pour avoir la base réduite P du matériau comme nous l'avons fait pour la réduction par la POD seule.

2. Boucle de résolution

— Résoudre le système réduit

$$P^t K P v_r = P^t f, \quad (4.3)$$

et la solution V_{POD} projetée dans le matériau est calculée comme

$$V_{\text{POD}} = P v_r. \quad (4.4)$$

Décomposer la solution V_{POD} dans chaque cellule.

— Résoudre dans chaque sous-domaine le problème avec pour sources les potentiels

des cellules voisines résolus par POD à l'itération précédente (figure 4.2).

- La matrice de *snapshots* est mise à jour avec la solution obtenue dans chaque cellule :

$$S_j^i = [S_j^{i-1}, V_j^i], \quad (4.5)$$

puis la base réduite P_j est calculée.

3. Répéter la deuxième étape jusqu'à la convergence.

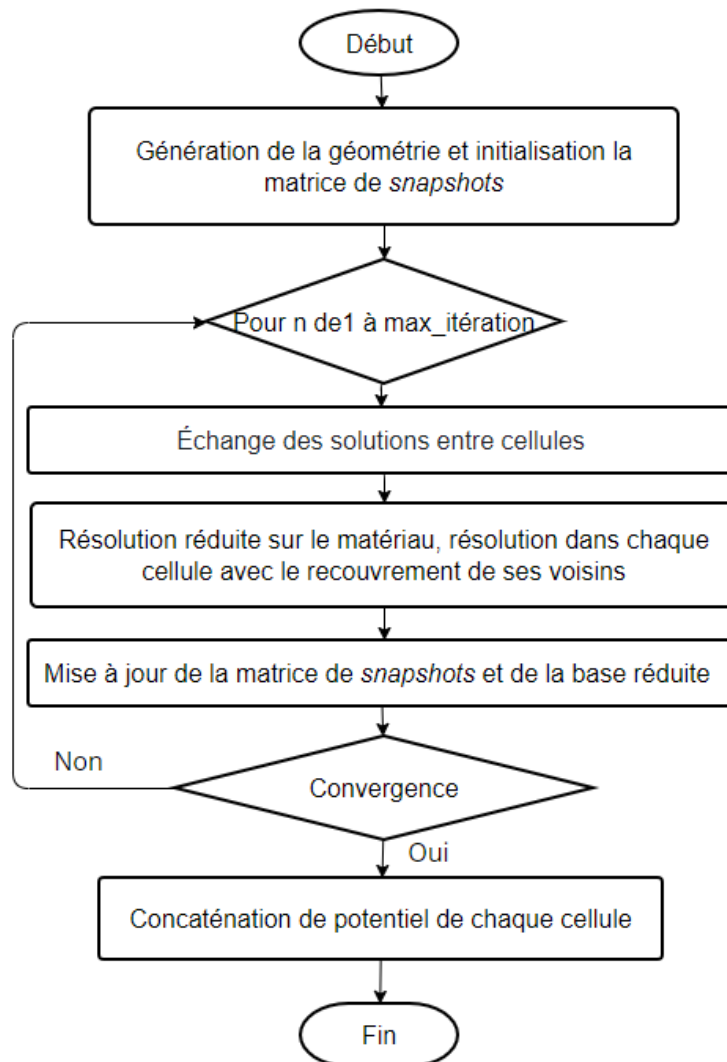


FIGURE 4.1 – Algorithme de la DD-POD

Il faut noter que la mise à jour de la matrice de *snapshots* n'est pas obligatoire, mais comme la matrice de *snapshots* initiale n'est pas le meilleur choix, cela permet d'optimiser la résolution, et à chaque fois cela ne prend que moins de 0,1 s.

Concernant l'étape 2 de résolution dans chaque cellule avec les recouvrements des cellules voisines (figure 4.2) : dans le cas transverse, nous notons des cellules voisines de la cellule j comme cellule n_1 , cellule n_2 , cellule n_3 , cellule n_4 , et les indices de nœuds dans ces cellules voisines qui sont en contact avec la cellule j comme i_{n_1} , i_{n_2} , i_{n_3} et i_{n_4} respectivement, nous résolvons

$$\begin{aligned} K_{jj}V_j^i + K_{jn_1}(t, i_{n_1})V_{\text{POD}}^{i-1}(i_{n_1}) + K_{jn_2}(t, i_{n_2})V_{\text{POD}}^{i-1}(i_{n_2}) + \\ K_{jn_3}(t, i_{n_3})V_{\text{POD}}^{i-1}(i_{n_3}) + K_{jn_4}(t, i_{n_4})V_{\text{POD}}^{i-1}(i_{n_4}) = f_j, \end{aligned} \quad (4.6)$$

avec t appartient à toutes les lignes de la matrice.

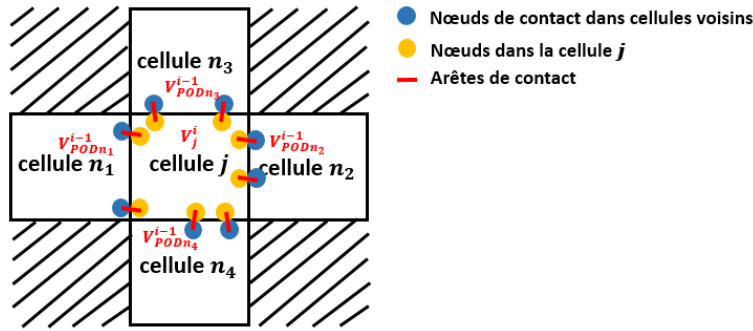


FIGURE 4.2 – Application de la DD-POD pour le cas de traverse

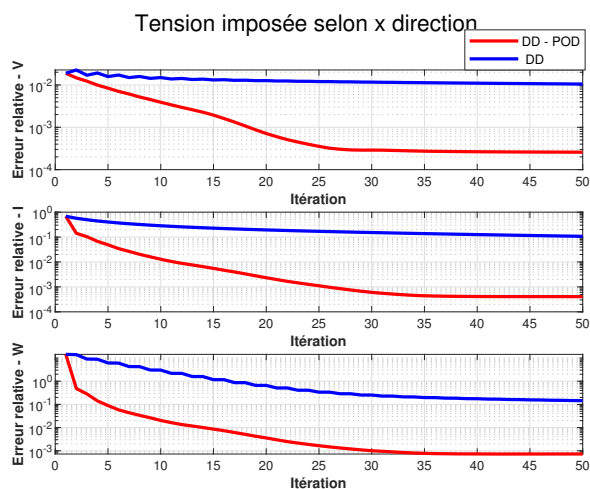
4.2 Résultats

Nous considérons le cas d'un matériau UD divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules avec la taille de cellule $400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m}$. Nous définissons l'erreur relative comme l'équation (3.17). Dans cette section, nous expliquons en détail la comparaison de la vitesse de convergence de la DD et la DD-POD, l'effet des différentes tolérances de la DD-POD. De plus, nous comparerons les résultats de la DD-POD à la résolution directe et nous montrerons l'erreur et le temps de calcul de ces deux méthodes.

4.2.1 La comparaison entre la DD et la DD-POD

Dans cette section, la vitesse de convergence dont nous discutons est définie comme la vitesse de convergence de la DD ou DD-POD par rapport à l'erreur de la solution directe. Nous imaginons que la DD-POD converge plus vite que la DD. Nous validons cette conclusion en comparant les erreurs relatives par rapport à la solution de référence de la DD et la DD-POD pour la même géométrie et le même nombre fixe des boucles. Afin de comparer la convergence sans pénalisation de la DD par une mauvaise initialisation, nous utilisons l'initialisation de la DD-POD de l'équation (4.4) pour la DD également.

D'abord, pour le modèle avec l'imposition en tension, la figure 4.3 montre la comparaison des erreurs relatives pour la DD et la DD-POD pour l'imposition de potentiels d'entrée et de sortie en x et en y direction. Dans la direction z , l'erreur relative est toujours proche de 0, par conséquent, ce cas n'est pas étudié.



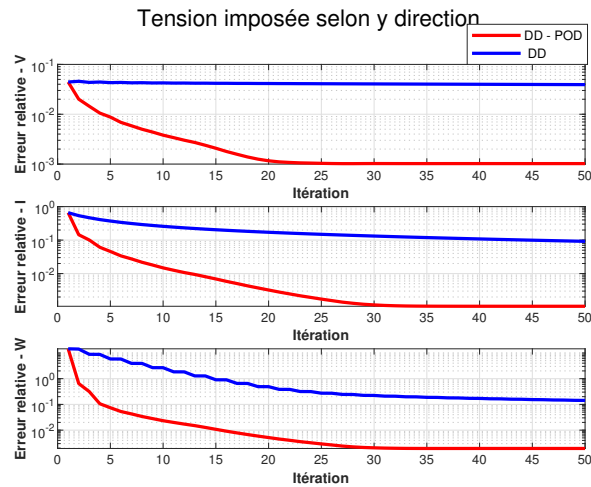
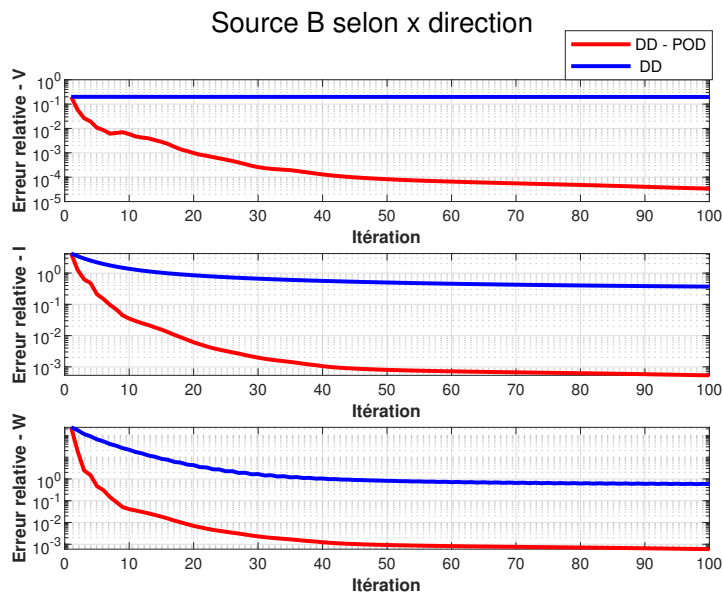


FIGURE 4.3 – Erreurs relatives pour la DD et la DD-POD avec le potentiel imposé

De même, pour le modèle avec l'imposition inductive, la figure 4.4 montre la comparaison des erreurs pour la DD et la DD-POD pour l'imposition de sources magnétiques \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z uniformes orientées selon les directions x , y et z respectivement.



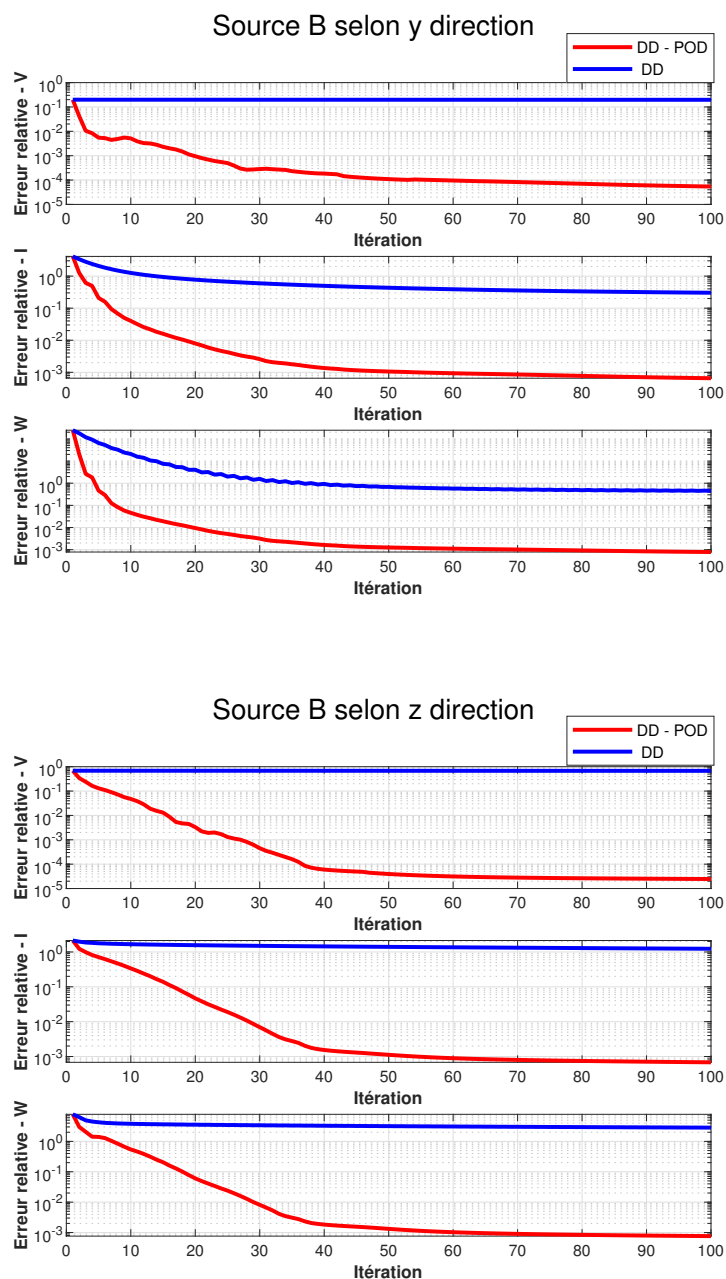


FIGURE 4.4 – Erreurs relatives pour la DD et la DD-POD avec la source **B** imposée

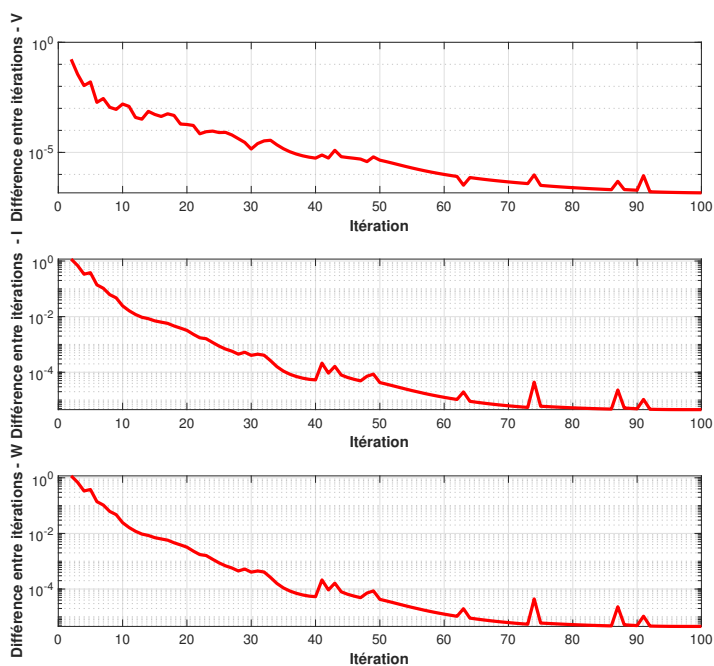
Ces figures montrent que la DD-POD converge plus rapidement que la DD vers la solution. De plus, ces figures illustrent que l'erreur relative de la DD-POD converge vers une petite valeur ($< 1\%$) pour les deux sources que nous considérons. La supériorité de la DD-POD ayant été vérifiée, nous ne discuterons ensuite que des résultats numériques de la DD-POD sur le modèle avec l'imposition inductive.

4.2.2 L'effet de la condition de convergence sur les résultats

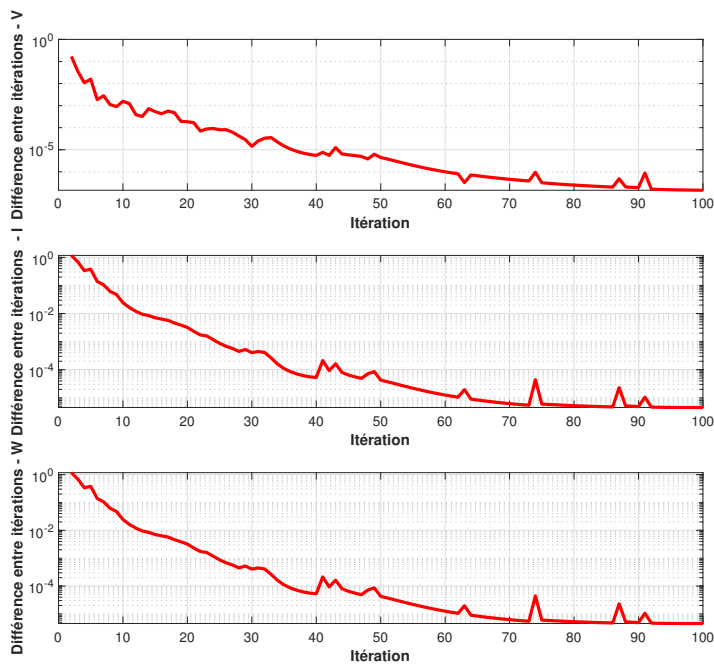
Comme nous l'avons mentionné précédemment, nous avons trois critères sur les conditions de convergence basés sur le potentiel, le courant et la puissance. Étant donné que la tolérance de puissance et la tolérance de courant ont presque la même tendance, mais que le calcul de la tolérance de puissance nécessite un calcul de plus que le calcul de la tolérance de courant qui augmente le temps de calcul, en pratique, seules les tolérances du potentiel et du courant sont prises en compte.

Nous discuterons de l'impact de ces deux critères sur les résultats. Tout d'abord, nous calculons les différences entre le potentiel et le courant obtenus à chaque itération et ceux obtenus à l'itération précédente. En théorie, elle devrait progressivement diminuer.

Source B selon x direction



Source B selon y direction



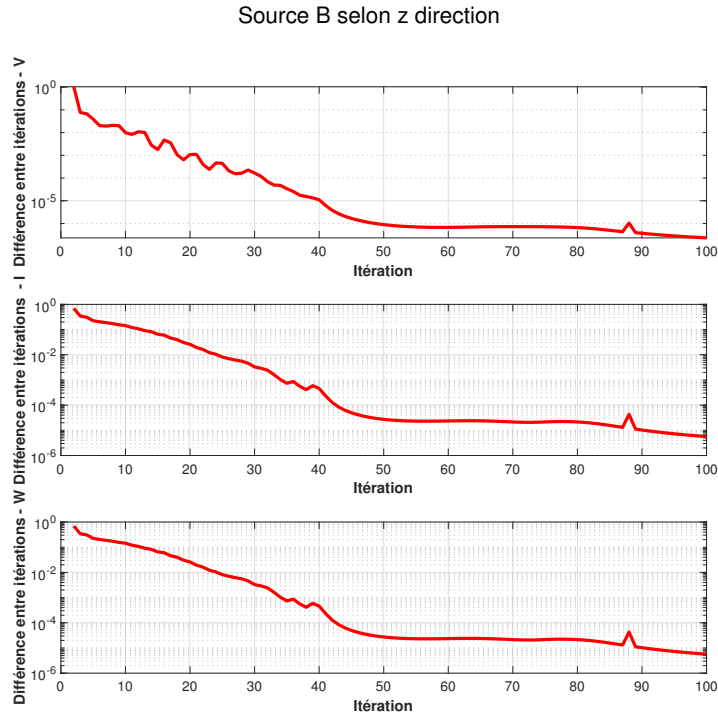


FIGURE 4.5 – Erreur relative entre deux itérations avec $\mathbf{B}_x, \mathbf{B}_y, \mathbf{B}_z$ imposé

La figure 4.5 montre que lorsque le nombre d’itérations augmente, les différences entre les tensions et courants obtenus entre deux itérations successives diminuent.

Si nous considérons la différence du courant entre deux itérations, puisque la solution obtenue à chaque itération est la tension, il faut utiliser la tension pour calculer le courant à chaque itération, et le temps de calcul va augmenter.

La figure 4.6 et le tableau 4.1 présentent l’erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_x imposé :

Erreur relative \ Tolérance	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	(ligne verte)	(ligne bleu)	(ligne jaune)
Potentiel	0,08%	0,01%	0,004%
Courant	0,45%	0,12%	0,06%
Puissance	0,52%	0,14%	0,07%

TABLE 4.1 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_x imposé

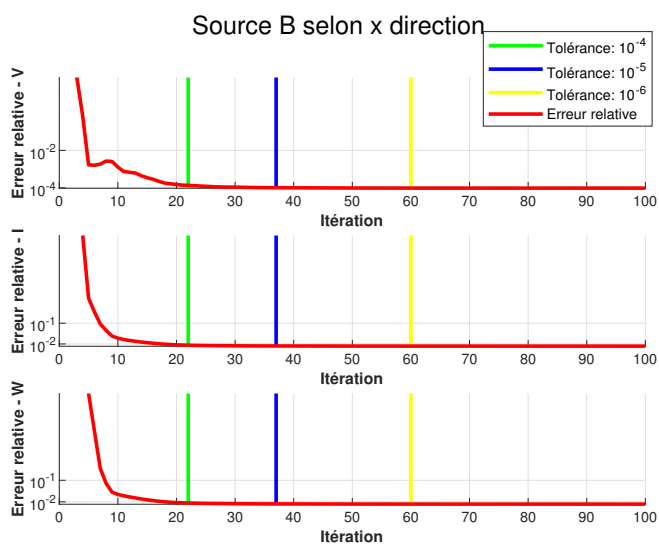


FIGURE 4.6 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_x

La figure 4.7 et le tableau 4.2 présentent l’erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_x imposé :

Erreur relative	Tolérance	10^{-4}	10^{-5}
		(ligne verte)	(ligne bleu)
Potentiel		0,01%	0,004%
Courant		0,13%	0,06%
Puissance		0,14%	0,07%

TABLE 4.2 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_x imposé

La figure 4.8 et le tableau 4.3 présentent l’erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_y imposé :

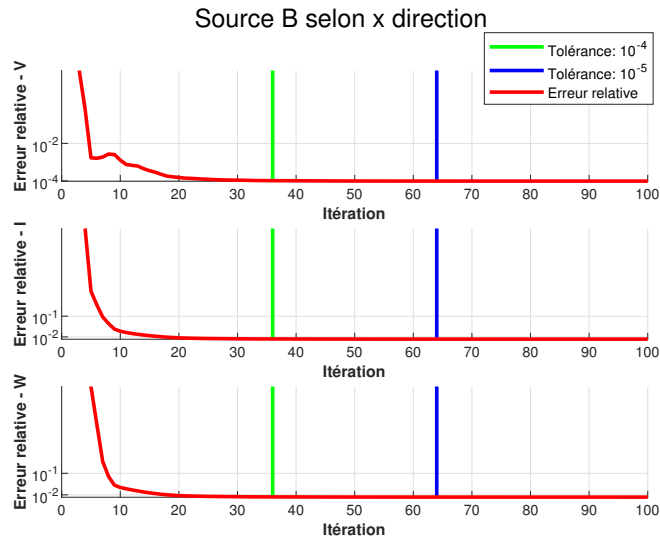


FIGURE 4.7 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_x

Tolérance		10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
Erreur relative		(ligne verte)	(ligne bleu)	(ligne jaune)
Potentiel		0,05%	0,02%	0,006%
Courant		0,52%	0,19%	0,07%
Puissance		0,63%	0,23%	0,09%

TABLE 4.3 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_y imposé

La figure 4.9 et le tableau 4.4 présentent l’erreur relative pour une tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_y imposé :

Tolérance		10^{-4}	10^{-5}
Erreur relative		(ligne verte)	(ligne bleu)
Potentiel		0,02%	0,006%
Courant		0,13%	0,07%
Puissance		0,15%	0,08%

TABLE 4.4 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_y imposé

La figure 4.10 et le tableau 4.5 présentent l’erreur relative pour la tolérance donnée

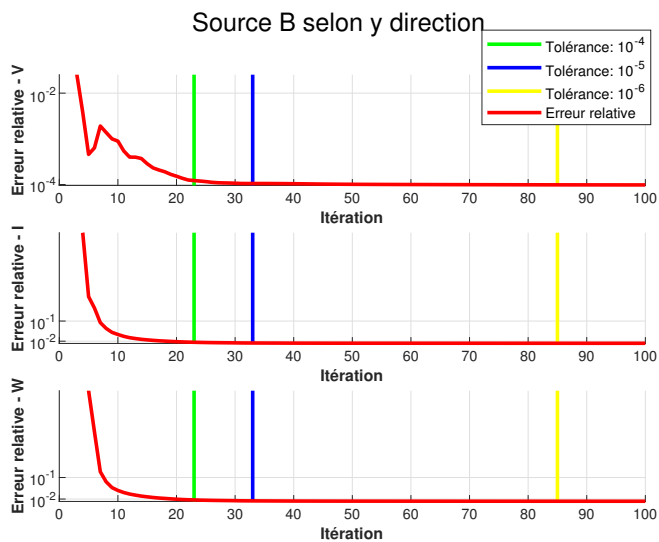


FIGURE 4.8 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_y

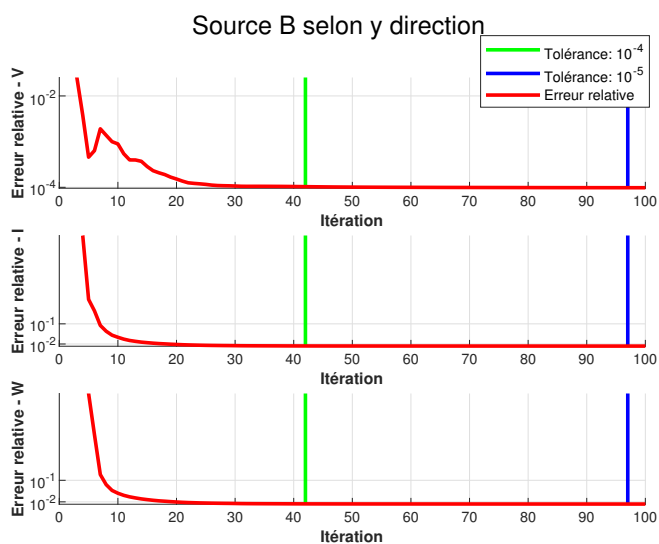


FIGURE 4.9 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_y

du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_z imposé :

Erreur relative \ Tolérance	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
	(ligne verte)	(ligne bleu)	(ligne jaune)
Potentiel	0,03%	0,006%	0,005%
Courant	0,44%	0,14%	0,11%
Puissance	0,50%	0,16%	0,13%

TABLE 4.5 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le potentiel avec \mathbf{B}_z imposé

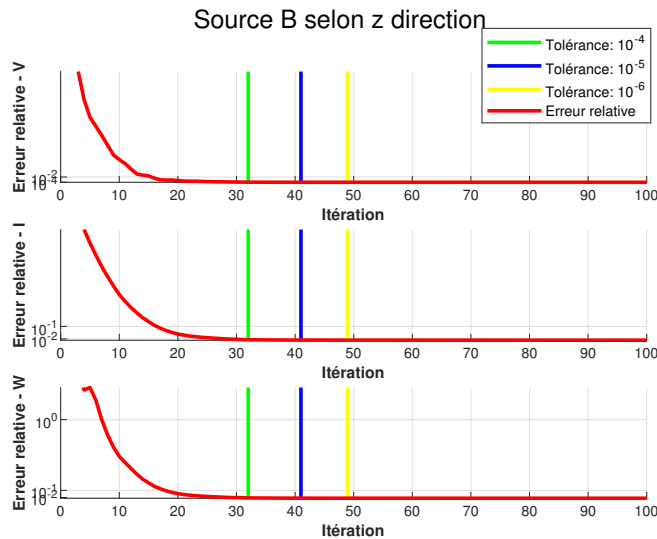


FIGURE 4.10 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le potentiel avec une source \mathbf{B}_z

La figure 4.11 et le tableau 4.6 présentent l’erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_z imposé :

Erreur relative \ Tolérance	10^{-4}	10^{-5}
	(ligne verte)	(ligne bleu)
Potentiel	0,006%	0,003%
Courant	0,13%	0,07%
Puissance	0,14%	0,08%

TABLE 4.6 – Erreur relative pour la tolérance donnée du critère basé sur le courant avec \mathbf{B}_y imposé

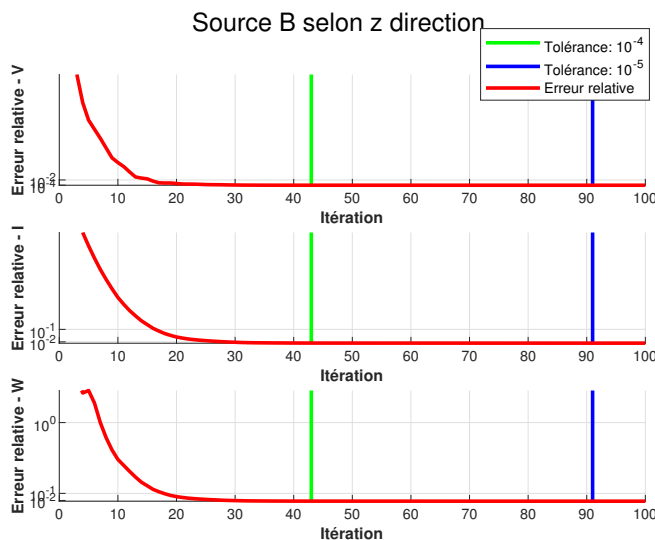


FIGURE 4.11 – Relation entre l’erreur relative et la tolérance du critère basé sur le courant avec une source \mathbf{B}_z

A partir de ces résultats, l’utilisation de la tolérance du potentiel à 10^{-4} permet de contrôler l’erreur relative entre la solution itérative et la valeur de référence inférieure à 1%, et de maintenir le nombre d’itérations bas, réduisant ainsi le temps de calcul. Si la boucle est arrêtée lorsque la tolérance de la tension est égale à 10^{-4} , la comparaison des courants entre la DD-POD et la référence sur chaque arête est représentée sur la figure 4.12. Cette figure montre que le courant résolu par la DD-POD est presque identique à la référence.

En réponse à la question de savoir si la DD ou DD-POD atteint le même critère de convergence pour le modèle avec l’imposition inductive, DD-POD converge en quelques dizaines de pas, alors que la DD nécessite des centaines pas.

Ainsi, nous vérifierons que cette tolérance est valable quand nous changeons le couplage du matériau et les paramètres de modélisation parce que de multiples paramètres vont influencer les erreurs et la convergence.

4.2.3 Vérification de convergence

Afin de s’assurer que la convergence de la DD-POD avec la tolérance du critère en potentiel à 10^{-4} ne se limite pas à une certaine division du matériau ou à une certaine position des fibres dans le matériau, nous avons essayé de régénérer des matériaux avec des fibres aléatoires, de changer le nombre de cellules ou la taille des cellules.

Pour le matériau régénéré de même taille, les erreurs relatives du potentiel, du courant et

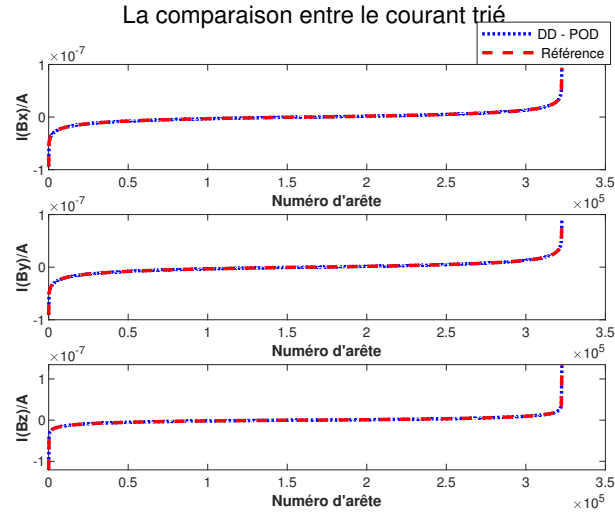


FIGURE 4.12 – Comparaison entre les courants triés pour un matériau UD avec 3 sources magnétiques uniformes

de la puissance sont indiquées dans le tableau 4.7.

	\mathbf{B}_x imposé	\mathbf{B}_y imposé	\mathbf{B}_z imposé
Potentiel	0,04%	0,05%	0,04%
Courant	0,79%	0,84%	0,64%
Puissance	0,95%	1,03%	0,72%

TABLE 4.7 – Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $2 \times 2 \times 2$ avec 3 sources magnétiques uniformes

Pour un matériau divisé en $4 \times 4 \times 4$ cellules avec la taille des cellules comme $200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$, les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance sont indiquées dans le tableau 4.8.

	\mathbf{B}_x imposé	\mathbf{B}_y imposé	\mathbf{B}_z imposé
Potentiel	0.03%	0,03%	0,05%
Courant	1,28%	0,85%	0,93%
Puissance	1,55%	1,01%	1,01%

TABLE 4.8 – Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $4 \times 4 \times 4$ avec 3 sources magnétiques uniformes

Pour un matériau de taille $1200\mu\text{m} \times 1200\mu\text{m} \times 1200\mu\text{m}$ divisé en $3 \times 3 \times 3$ cellules, les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance sont indiquées dans le tableau 4.9.

	\mathbf{B}_x imposé	\mathbf{B}_y imposé	\mathbf{B}_z imposé
Potential	0,05%	0,04%	0,04%
Courant	0,80%	1,05%	1,36%
Puissance	0,98%	1,25%	1,45%

TABLE 4.9 – Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD décomposé en $3 \times 3 \times 3$ avec 3 sources magnétiques uniformes

La convergence de la DD-POD est vérifiée puisque l'erreur relative ne change pas significativement selon le changement de couplage matériau et des paramètres de modélisation.

4.2.4 Vérification pour une source plus complexe

Nous avons déjà vérifié la précision de la DD-POD pour les sources magnétiques uniformes \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y et \mathbf{B}_z . À présent nous souhaitons vérifier la précision de la DD-POD pour une source plus complexe.

Pour un matériau divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules avec la taille des cellules comme $400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m}$, si nous définissons $\mathbf{A}_1 = (2y + z, -x + 2z, 3y)$, $\mathbf{A}_2 = (-3y, -2z, -x)$ qui satisfont $\text{div}(\mathbf{A}_1) = 0$, $\text{div}(\mathbf{A}_2) = 0$ donc la source magnétique $\mathbf{B}_1 = \mathbf{rot}(\mathbf{A}_1) = (1, 1, -3)$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{rot}(\mathbf{A}_2) = (2, 1, 3)$, les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance sont indiquées dans le tableau 4.10. La DD-POD est validée comme l'erreur relative ne change pas significativement selon le changement de la source.

	\mathbf{B}_1 imposé	\mathbf{B}_2 imposé
Potential	0,05%	0,03%
Courant	0,69%	0,36%
Puissance	0,82%	0,42%

TABLE 4.10 – Erreur relative de la DD-POD pour un matériau UD avec 2 sources magnétiques

La figure 4.13 montre la comparaison entre le potentiel pour \mathbf{B}_1 imposée calculé par la DD-POD et le potentiel de référence. La figure 4.14 montre la comparaison entre le

potentiel pour \mathbf{B}_2 imposée calculé par la DD-POD et le potentiel de référence. Ces figures montrent la précision de la DD-POD dans la résolution du potentiel au niveau local.

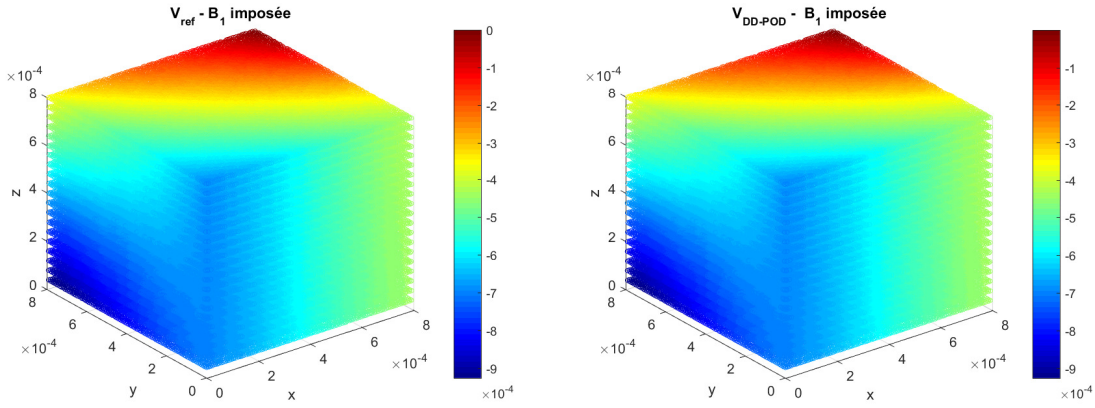


FIGURE 4.13 – Comparaison entre les potentiels pour un matériau UD avec la source \mathbf{B}_1

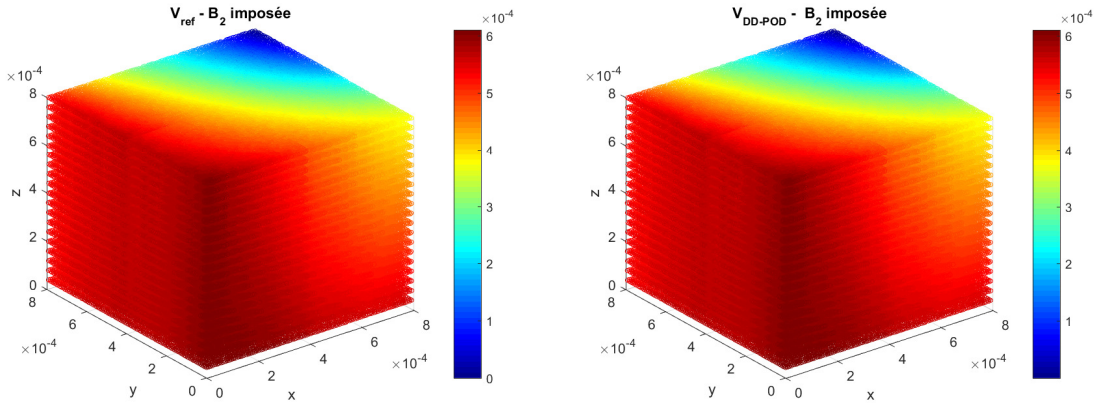


FIGURE 4.14 – Comparaison entre les potentiels pour un matériau UD avec la source \mathbf{B}_2

La figure 4.15 montre la comparaison entre le courant, la puissance triés pour \mathbf{B}_1 imposée calculé pour la DD-POD et la référence. La figure 4.16 montre la comparaison entre le courant, la puissance triés pour \mathbf{B}_2 imposée calculé pour la DD-POD et de référence. Ces figures montrent la précision de la DD-POD dans la résolution du courant et de la puissance localement. La précision de la DD-POD dans la résolution du potentiel, du courant et de la puissance est validée.

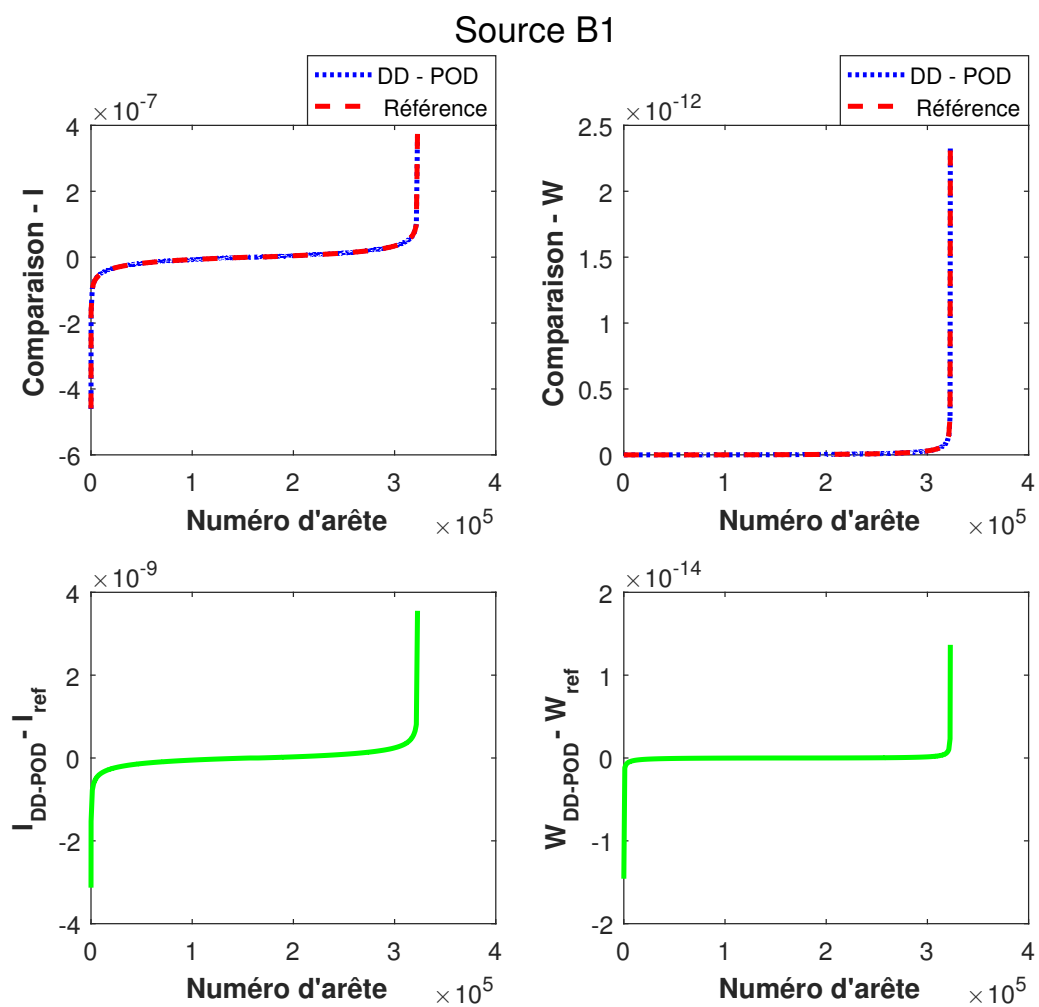


FIGURE 4.15 – Comparaison entre le courant trié, la puissance triée

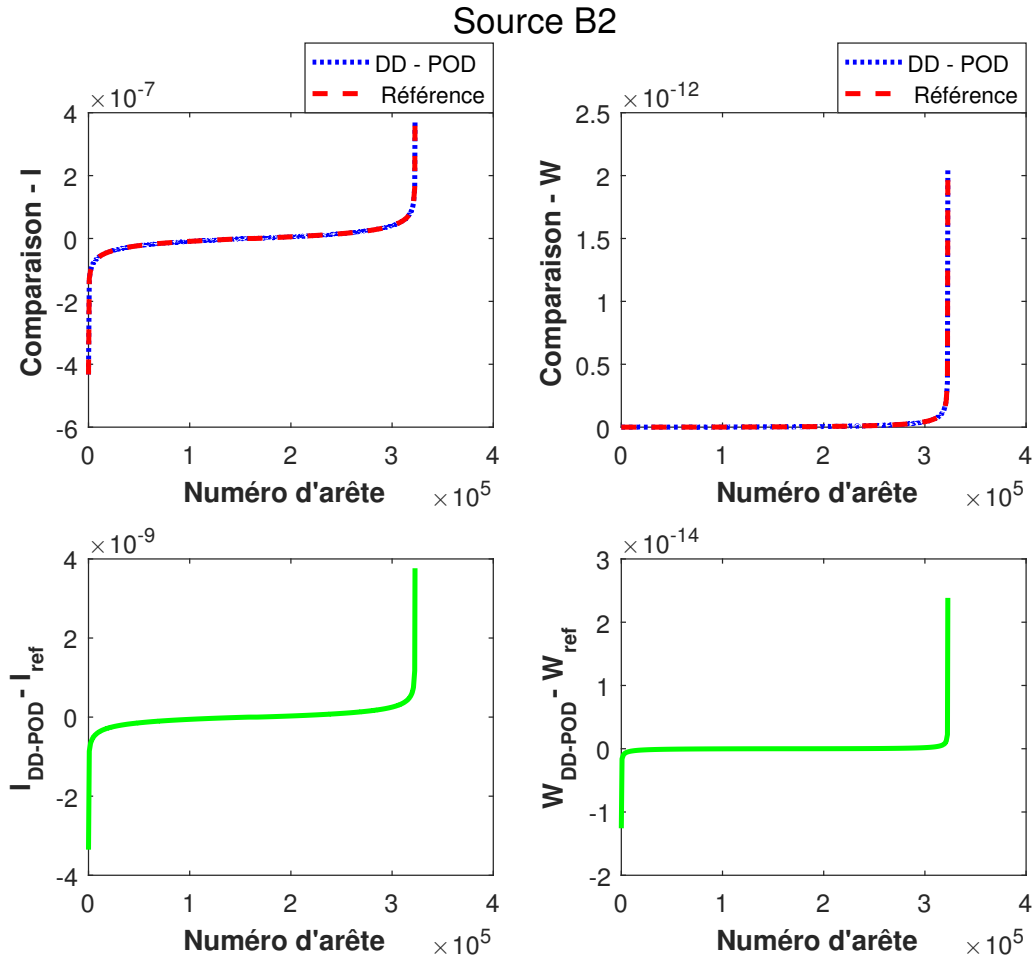


FIGURE 4.16 – Comparaison entre le courant trié, la puissance triée

Le temps de résolution directe est 10,07 s, et le temps de résolution par la DD-POD avec \mathbf{B}_1 imposée est 32,62 s, le temps de résolution par la DD-POD avec \mathbf{B}_2 imposée est 30,90 s.

4.2.5 Conclusion

Selon les résultats, la faisabilité de la DD-POD est vérifiée. En termes de temps de calcul, les avantages de la DD-POD sont vérifiés par la simulation. Nous pouvons augmenter l'avantage temporel de DD-POD par la combinaison de la DD-POD avec le calcul parallèle, ce qui sera envisagé dans la suite.

D'abord, nous explorerons les matériaux avec des orientations de fibres dans différentes

directions dans chaque pli.

4.3 Application sur le matériau [0/90]

Nous générons le matériau avec deux plis : premier pli avec des fibres orientées selon x , deuxième pli avec des fibres orientées selon y et empilé verticalement sur le premier pli. La figure 4.17 présente un exemple de matériau avec deux plis et les fibres dans ces deux plis sont orientées dans les directions x , y . Pour appliquer la DD-POD, chaque pli est divisé en 2×2 cellules avec pour taille des cellules $400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m} \times 400\mu\text{m}$.

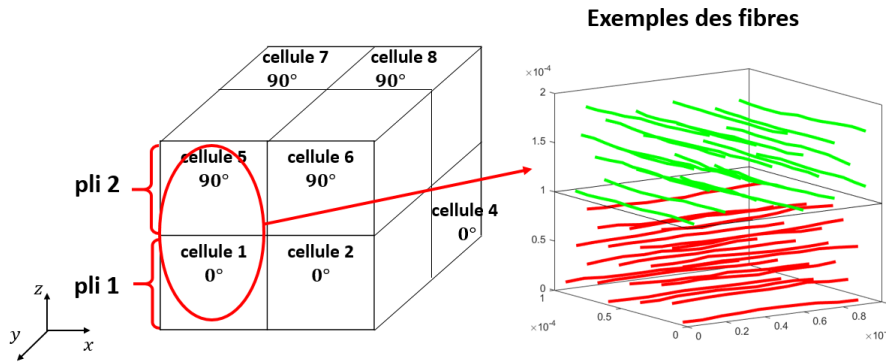


FIGURE 4.17 – Exemple de matériau [0/90]

Quand nous imposons les sources \mathbf{B}_x , \mathbf{B}_y , \mathbf{B}_z , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 respectivement, les erreurs relatives du potentiel, du courant et de la puissance sont indiquées dans le tableau 4.11. D'après ces erreurs, la viabilité de la DD-POD pour le matériau [0/90] est vérifiée.

	\mathbf{B}_x	\mathbf{B}_y	\mathbf{B}_z	\mathbf{B}_1	\mathbf{B}_2
Potentiel	0,03%	0,03%	0,02%	0,02%	0,05%
Courant	0,38%	0,40%	0,36%	0,54%	0,51%
Puissance	0,17%	0,19%	0,13%	0,19%	0,19%

TABLE 4.11 – Erreur relative de la DD-POD pour différentes sources magnétiques pour un matériau [0/90]

La figure 4.18 montre la comparaison entre le potentiel pour \mathbf{B}_1 imposée calculé par la DD-POD et le potentiel de référence. La figure 4.19 montre la comparaison entre le courant, la puissance triés pour \mathbf{B}_1 imposée calculé par la DD-POD et de référence.

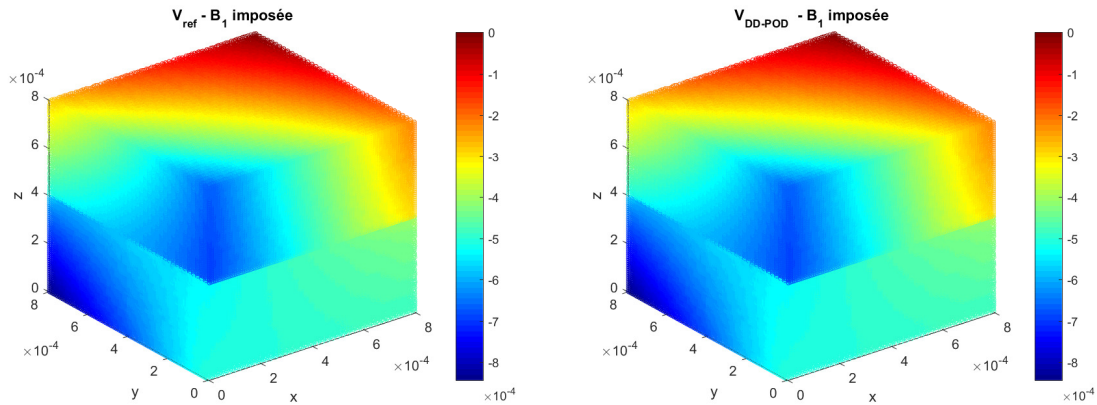


FIGURE 4.18 – Comparaison entre les potentiels avec B_1 imposée

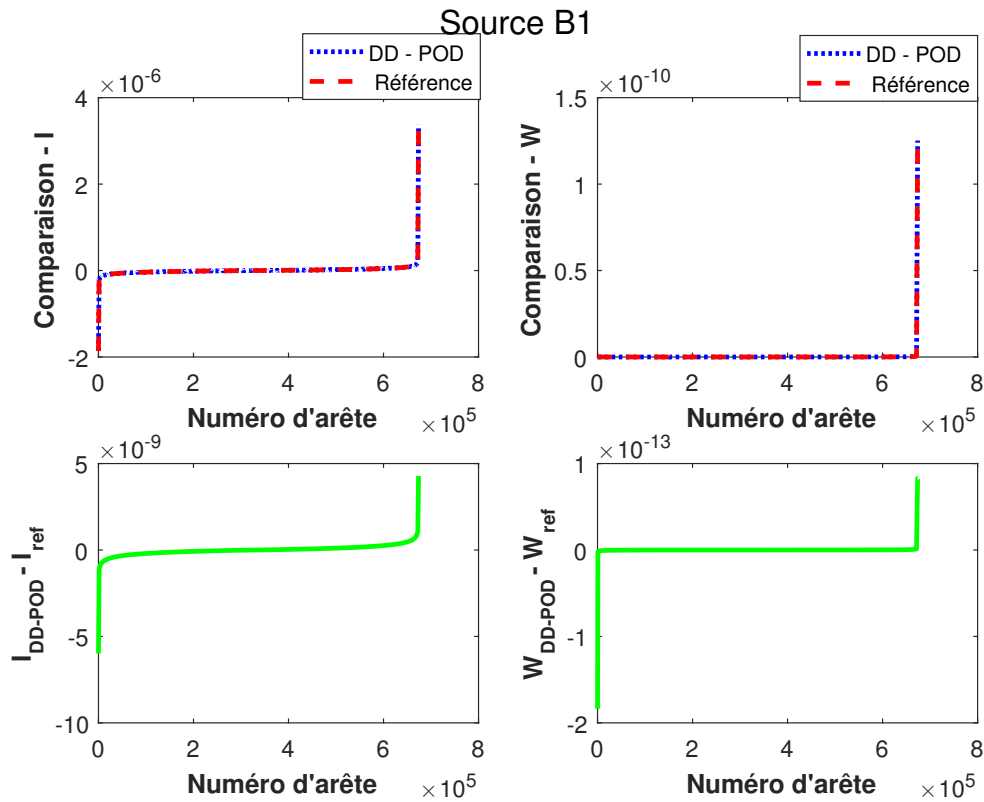


FIGURE 4.19 – Comparaison entre le courant trié, la puissance triée

Toutes sources confondues, la moyenne de temps de résolution directe du système global est 20,12 s, et le temps moyen de résolution par la DD-POD est 53,32 s. Les résultats confirment la viabilité de la DD-POD pour le matériau [0/90]. Cela permet

également d'extrapoler la faisabilité de la DD-POD pour les matériaux multi-plis.

4.4 Relation entre temps et nombre de cellules

Selon les résultats obtenus, les avantages de la DD-POD en gain de temps ne sont pas démontrés. Le nombre de cellules considérées est limité, mais pour un grand nombre de cellules, une résolution directe n'est pas envisageable. Dans cette section, nous voulons trouver une fonction entre le temps et le nombre de cellules afin de prédire le temps nécessaire et l'échelle du matériau lorsque les avantages de la DD-POD seront démontrés. Ici, nous considérons le matériau UD avec une taille de cellules de $200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m} \times 200\mu\text{m}$. En raison de la différence de nature du matériau dans la direction de la fibre et dans la section transversale de la fibre, nous examinerons l'effet sur le temps de l'augmentation du nombre de cellules dans la direction de la fibre et de l'augmentation du nombre de cellules dans la section transversale de la fibre respectivement.

4.4.1 La fonction entre le temps et le nombre de cellules dans la direction de la fibre

Tout d'abord, la relation entre le temps de résolution et le nombre de cellules dans la direction de la fibre est considérée. En effet, des dispositions différentes des fibres peuvent entraîner une différence dans le nombre d'itérations de convergence et donc dans le temps de résolution. Ainsi, pour chaque nombre fixe de cellules, le matériau a été régénéré cinq fois et finalement la moyenne du temps requis pour ces cinq fois est enregistrée. Le tableau 4.12 montre le temps moyen de résolution par la DD-POD pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres. En outre, il faut noter que selon ces essais, le nombre d'itérations de convergence est de 25 au maximum avec faible fluctuation. Donc, pour un grand nombre de cellules, nous appliquons l'hypothèse que le nombre d'itérations de convergence n'augmente pas significativement.

Nombre de cellules	2	3	4	5	6	10	15	20
Temps moyen (s)	5,364	8,241	9,532	11,386	13,747	26,365	46,221	57,926

TABLE 4.12 – Temps moyen de résolution par la DD-POD pour différents nombres de cellules dans la direction de la fibre

En supposant que la relation entre le temps et le nombre de cellules est conforme à

une fonction puissance, la fonction du temps et du nombre de cellules est trouvée selon un R carré ajusté :

$$\text{temps} = 2,032 \times \text{nombre de cellules}^{1,127}. \quad (4.7)$$

La figure 4.20 montre la comparaison des valeurs expérimentales et ajustées.

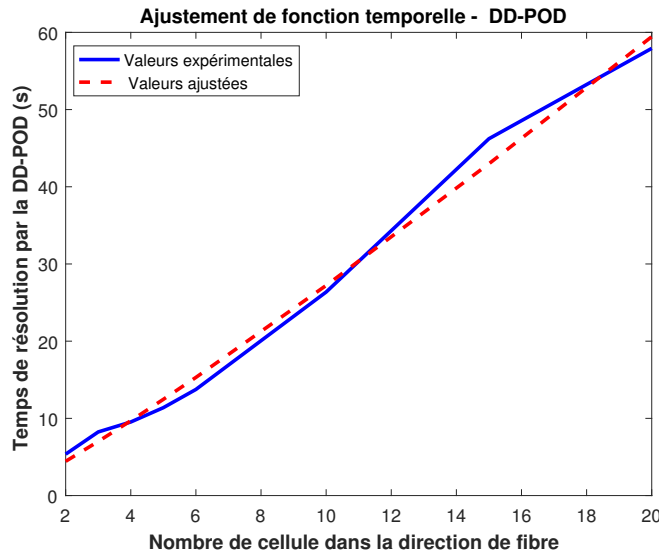


FIGURE 4.20 – Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la DD-POD pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres

De la même façon pour la résolution directe, le tableau 4.13 montre le temps moyen de résolution directe pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres.

Nombre de cellules	2	3	4	5	6	10	15	20
Temps moyen (s)	1,172	1,728	2,361	3,026	5,487	10,808	17,751	26,496

TABLE 4.13 – Temps moyen de résolution directe pour différents nombres de cellules dans la direction de la fibre

Selon un R carré ajusté, la fonction du temps et du nombre de cellules est trouvée :

$$\text{temps} = 0,414 \times \text{nombre de cellules}^{1,390}. \quad (4.8)$$

La figure 4.21 montre la comparaison des valeurs expérimentales et ajustées.

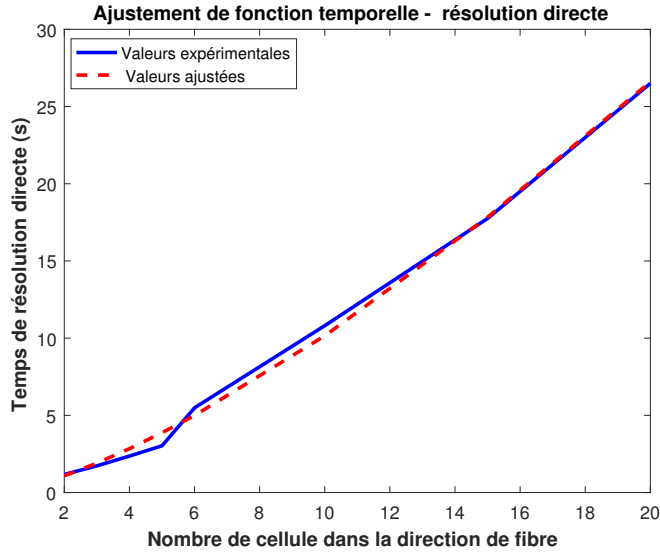


FIGURE 4.21 – Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la résolution directe pour un nombre donné de cellules dans la direction des fibres

Selon les fonctions 4.7, 4.8, la figure 4.22 montre la comparaison entre les temps de simulation par résolution directe et par la DD-POD. Lorsque le nombre de cellules dans la direction de la fibre est suffisamment grand, l'avantage temporel de DD-POD est présenté. D'après la figure, la DD-POD permet de gagner du temps par rapport à la résolution directe lorsqu'il y'a plus que 427 cellules dans la direction de fibre, soit un longueur plus que 8,54 cm.

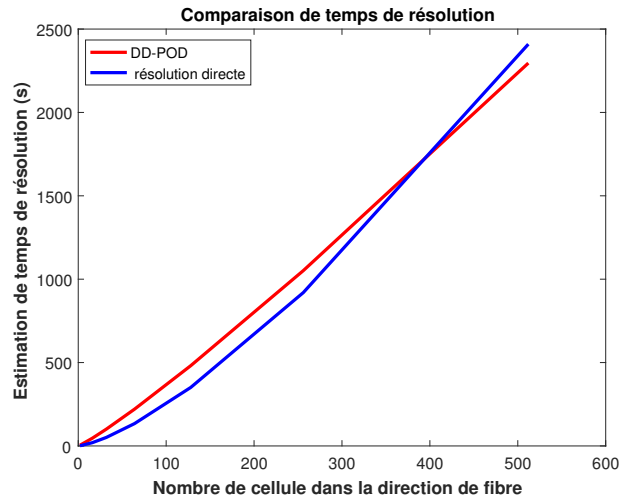


FIGURE 4.22 – Comparaison des temps de simulation entre la résolution directe et la DD-POD pour nombre de cellules dans la direction des fibres

4.4.2 La fonction entre le temps et le nombre de cellules dans la section transversale de la fibre

Pour le cas des sections transversales sur les fibres, nous fixons le nombre de cellules d'un côté de la section à 2 et augmente le nombre de cellules de l'autre côté de la section. Le tableau 4.14 montre le temps moyen de résolution par la DD-POD pour un nombre donné de cellules sur un côté de la section. Le nombre d'itération de convergence est toujours à 25 au maximum avec faible fluctuation selon les essais.

Nombre de cellule	2	3	4	5	6	10	15	20
Temps moyen (s)	5,364	8,206	10,372	12,676	16,719	30,664	56,320	73,454

TABLE 4.14 – Temps moyen de résolution par la DD-POD pour différents nombres de cellules sur un côté de la section de fibre

La fonction du temps et du nombre de cellules est trouvée selon un R carré ajusté :

$$\text{temps} = 1,949 \times \text{nombre de cellules}^{1,218}. \quad (4.9)$$

La figure 4.23 montre la comparaison des valeurs expérimentales et ajustées. Pour la

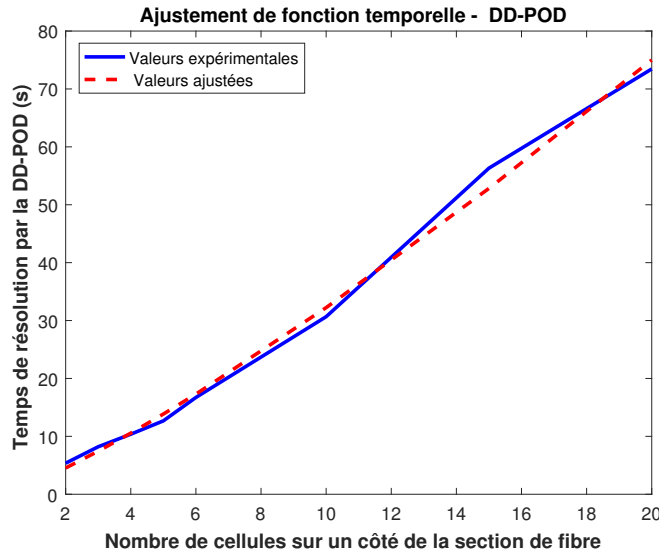


FIGURE 4.23 – Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la DD-POD pour un nombre donné de cellules sur un côté de la direction des fibres

résolution directe, le tableau 4.15 montre le temps moyen de résolution directe pour un nombre donné de cellules sur un côté de la direction des fibres.

Nombre de cellules	2	3	4	5	6	10	15	20
Temps moyen (s)	1,172	4,063	6,802	9,341	15,427	34,919	57,107	73,665

TABLE 4.15 – Temps moyen de résolution directe pour différents nombres de cellules sur un côté de la section des fibres

Selon un R carré ajusté, la fonction du temps et du nombre de cellules est trouvée :

$$\text{temps} = 1,508 \times \text{nombre de cellules}^{1,313}. \quad (4.10)$$

La figure 4.21 montre la comparaison des valeurs expérimentales et ajustées. Selon les

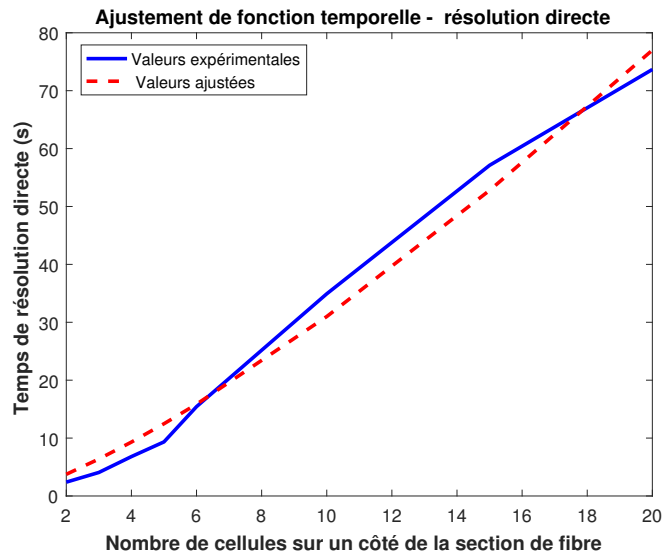


FIGURE 4.24 – Comparaison des temps expérimentaux et ajustés de la résolution directe pour un nombre donné de cellules sur un côté de la direction des fibres

fonctions 4.9, 4.10, la figure 4.25 montre la comparaison entre les temps de simulation par résolution directe et par la DD-POD. Lorsque le nombre de cellules sur un côté de la section des fibres est plus que 15, l'avantage temporel de DD-POD est présenté. Alors qu'un matériau réel à l'échelle macroscopique mesure au moins quelques centimètres, le nombre des cellules à découper sont supérieures à 15, donc, pour les matériaux à l'échelle macroscopique, l'avantage temporel du DD-POD est démontré.

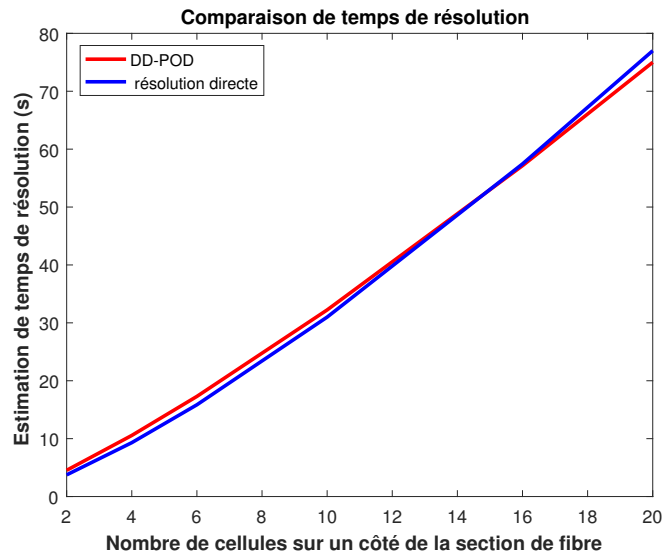


FIGURE 4.25 – Comparaison des temps de simulation entre la résolution directe et la DD-POD pour nombre de cellules sur un côté de la direction des fibres

Comme la relation entre le temps et les cellules considérée précédemment était pour une seule direction, si le nombre de cellules dans la section des fibres et le nombre de cellules dans la direction des fibres sont également considérés, les figures 4.26,4.27 présentent la relation entre la simulation du temps et le nombre de cellules sur chaque côté de la section, la taille de la section. Cette figure montre que l’avantage en temps de la DD-POD est démontré lorsque le nombre de cellules augmente. Pour la résolution à l’échelle macroscopique, la DD-POD a un avantage temporel.

4.5 Intérêt du calcul parallèle

Bien que la DD-POD ait démontré un avantage temporel pour les simulations à grande échelle, nous souhaitons optimiser la DD-POD afin d’augmenter l’avantage temporel, puis l’introduction du calcul parallèle.

La figure 4.28 montre l’algorithme de la DD-POD en parallèle, comme le matériau est divisé en plusieurs cellules indépendantes, le calcul parallèle peut être utilisé pour les étapes de génération de géométrie de cellule et de résolution dans les cellules.

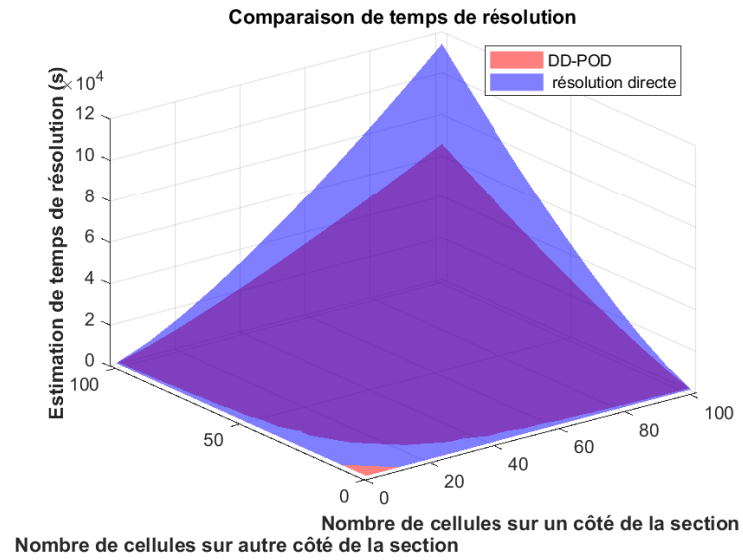


FIGURE 4.26 – Relation entre la simulation du temps de résolution et le nombre de cellule dans la section

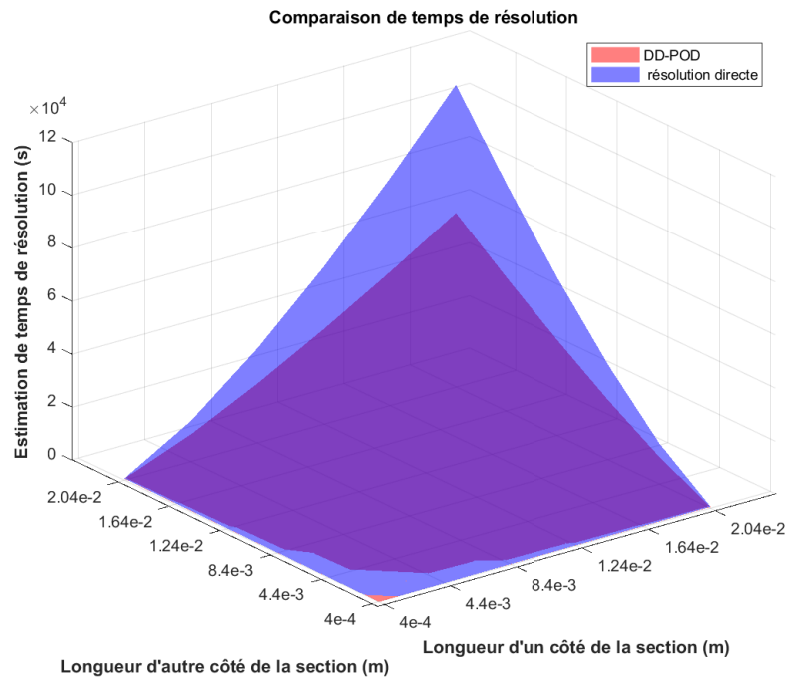


FIGURE 4.27 – Relation entre la simulation du temps de résolution et la taille de la section

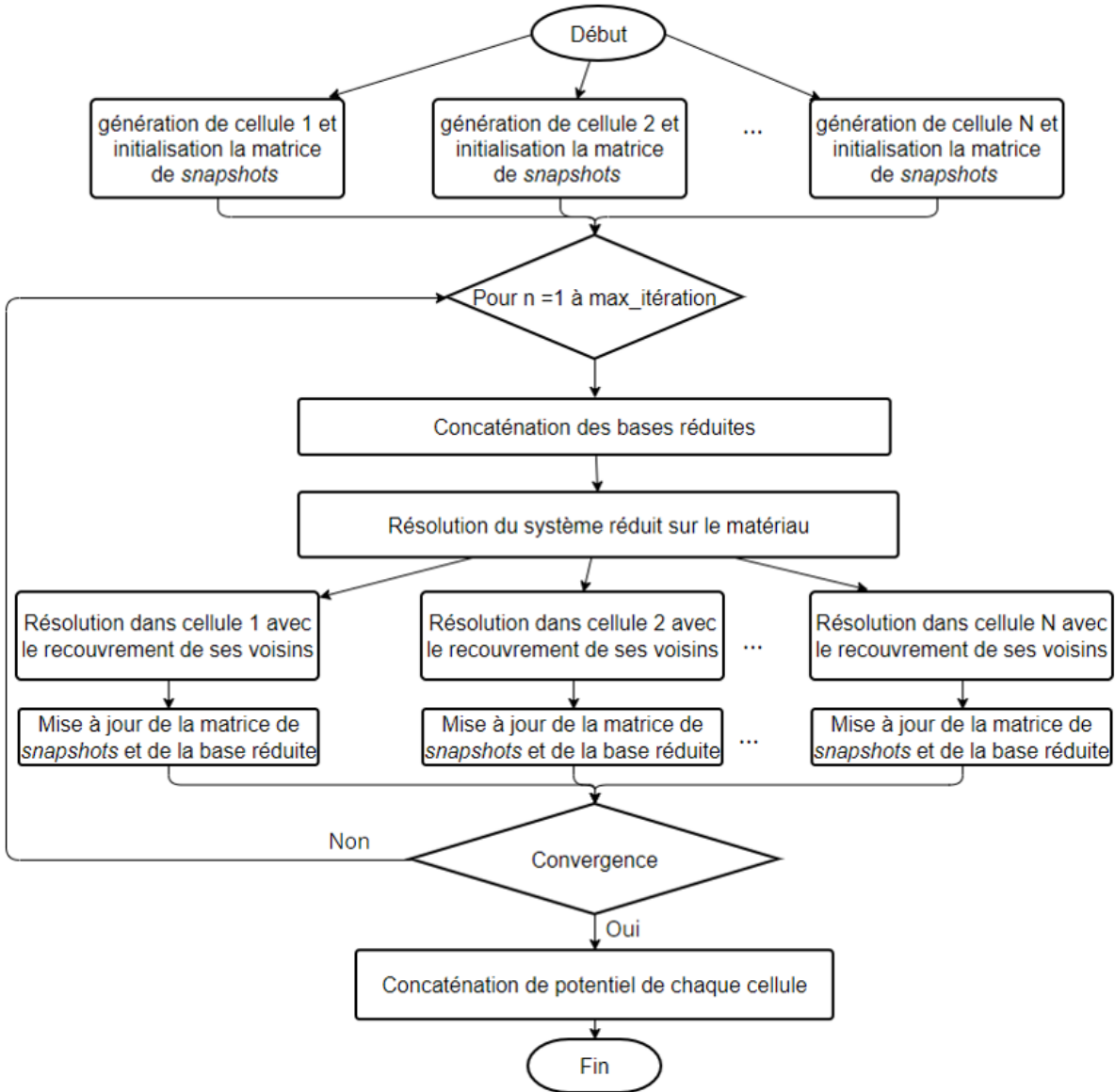


FIGURE 4.28 – Algorithme de la DD-POD en parallèle

Actuellement, nous n’avons pas fait la partie du code de calcul parallèle, mais nous pouvons simuler le temps de calcul parallèle en enregistrant plusieurs fois le temps de résolution dans chaque cellule et en prenant la moyenne.

Comme le temps de calcul parallèle est obtenu à partir de la simulation séquentielle, il est impossible de prévoir le temps de communication nécessaire pour le calcul parallèle. Comme il y a 2500 nœuds dans chaque cellule et seulement quelques dizaines de nœuds en contact avec les cellules voisines, l’échange d’informations entre les cellules est négligé dans la simulation. Par conséquent, nous introduisons l’hypothèse que le temps de com-

munication peut être ignoré.

Nous multiplions donc le temps moyen obtenu sur les 5 résolutions dans une cellule par le nombre d'itérations de convergence nécessaires pour la résolution par la DD-POD dans le même matériau que nous avons utilisé pour obtenir le temps de résolution directe.

L'estimation du temps de simulation du calcul parallèle pour le matériau UD divisé en $2 \times 2 \times 2$ cellules avec la taille de cellules comme $400\mu m \times 400\mu m \times 400\mu m$ est 6,35 s, qui est environ 1,6 fois plus rapide qu'une résolution directe.

Lors de l'augmentation du nombre de cellules, le principe du calcul parallèle étant de distribuer chaque tâche à un processeur différent, le temps du calcul parallèle ne change pas significativement lorsque le nombre total de cellules est inférieur au nombre de processeurs, à condition de ne pas tenir compte du temps nécessaire à l'échange d'informations entre processeurs. Lorsque le nombre total de cellules dépasse le nombre de processeurs, chaque processeur effectue plusieurs calculs. Le temps requis pour le calcul parallèle est également proportionnel au nombre de tâches traitées par chaque processeur. La figure 4.29 constate l'avantage de calcul parallèle, dans cette simulation nous considérons un ordinateur avec 8 processeurs.

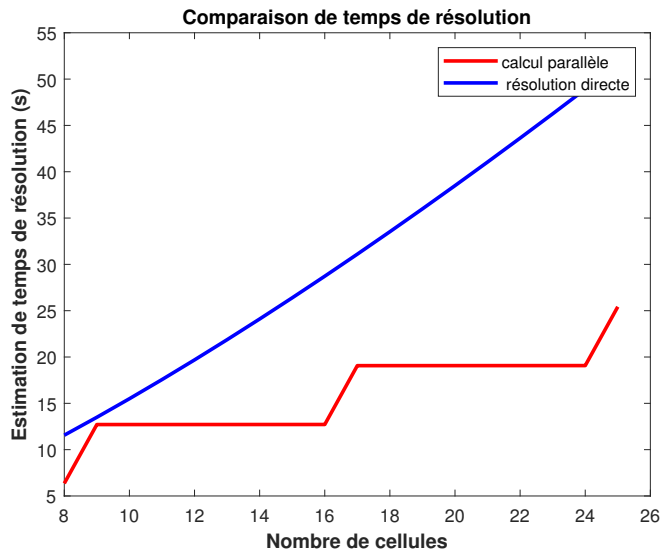


FIGURE 4.29 – Comparaison entre la simulation du temps de calcul parallèle et la résolution directe pour matériau UD

Pour le matériau [0/90], en raison de la complexité du contact entre les deux plis, nous considérons ici de calculer le temps de résolution dans les deux cellules des deux plis pour estimer le temps de calcul parallèle. Le temps de simulation de calcul parallèle est 32,78 s,

la résolution directe coûte 20,12 s. La figure 4.29 constate l’avantage de calcul parallèle. Bien que pour 8 cellules, le calcul parallèle ne présente pas d’avantages, la figure 4.29 constate l’avantage de calcul parallèle quand le nombre de cellules augmente, dans cette simulation nous considérons un ordinateur avec 8 processeurs.

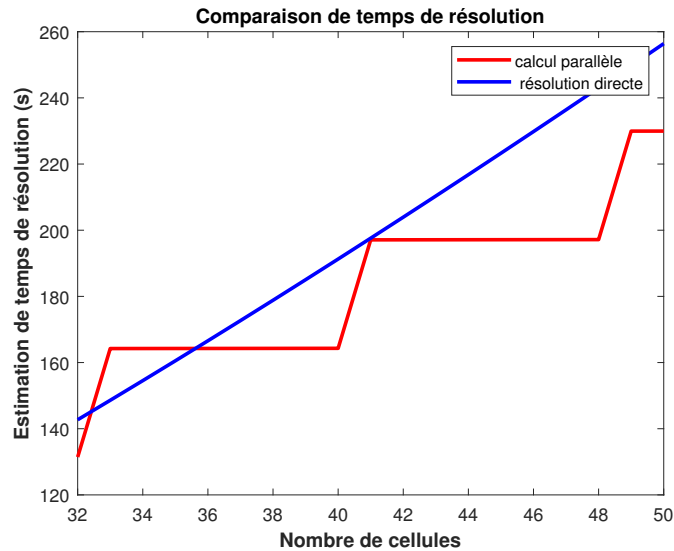


FIGURE 4.30 – Comparaison entre la simulation du temps de calcul parallèle et la résolution directe pour matériau [0/90]

Donc, les avantages du calcul parallèle sont identifiés et le travail futur consiste à compléter cette partie du code.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, la méthode DD-POD est présentée : la DD est appliquée pour résoudre le problème dans chaque cellule, la POD est appliquée sur le matériau global pour accélérer la convergence de la DD. La précision de la DD-POD est vérifiée sur des résultats de simulation pour un matériau UD et un matériau [0/90]. La faisabilité et la robustesse de la DD-POD sont validées par les simulations sur des matériaux régénérés et avec l'imposition des différentes sources. Le gain en temps de la DD-POD pour un matériau de taille réelle est démontré.

Pour gagner plus de temps, la DD-POD peut-être mise en œuvre avec le calcul parallèle dont la possibilité a été montré et l'algorithme est présenté dans ce chapitre.

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Conclusion

En raison de leurs nombreux avantages, les matériaux composites se sont développés rapidement ces dernières années et sont utilisés dans de nombreuses industries comme l'aéronautique, l'automobile, etc. Cependant, ces matériaux peuvent être le siège de défauts pendant la phase de production ou leur utilisation. Les méthodes de CND sont souvent utilisées pour détecter ces défauts. Afin d'assurer que les méthodes de CND puissent être appliquées pour détecter des défauts spécifiques, il est important de réaliser des simulations numériques du processus de détection. En conséquence, la modélisation et la simulation des processus de CND sur les matériaux composites se sont développées à un rythme élevé ces dernières années. Cependant, pour les défauts à l'échelle des fibres, les méthodes existantes sont difficiles à mettre en œuvre à cause de la complexité numérique induite.

Les travaux de ma thèse sont consacrés à l'étude des méthodes numériques pour effectuer les simulations de CND sur des matériaux composites à l'échelle macroscopique (échelle de la structure) tout en conservant les informations à l'échelle microscopique (échelle des fibres). Cette approche permet alors une meilleure prise en compte des défauts à l'échelle microscopique.

La POD et la DD apparaissent comme des méthodes intéressantes pour la simulation d'un matériau composite de grande taille en gardant des informations à l'échelle microscopiques : la POD peut réduire l'ordre du système global ; la DD peut remplacer la résolution globale par des résolutions dans chaque sous-domaine. Mais pour notre modèle, elles sont limitées prises séparément : la POD ne permet pas des interactions entre cellules ; la DD demande beaucoup d'itérations pour converger. Pour la DD, l'augmentation du recouvrement peut accélérer la convergence, mais cela n'est pas pratique en raison de la distribution aléatoire des fibres dans notre matériau composite.

La POD et la DD s'avèrent par contre efficaces lorsqu'elles sont combinées : l'application de la POD sur le matériau peut projeter la relation globale dans les cellules ce qui accélère la convergence de la résolution par DD. De plus, les résultats obtenus par la combinaison

de la POD avec la DD ont montré une stabilité en fonction de la taille, du nombre de cellule et de la distribution du champ source et de l'orientation des fibres.

L'estimation du temps de résolution et l'apport de la parallélisation peuvent laisser présager de la capacité de la DD-POD à résoudre des simulations sur des tailles de matériau représentatives.

Perspectives

Les travaux dans cette thèse sont une première contribution au contrôle thermo-inductif des matériaux composites en tenant compte des phénomènes microscopiques, ils doivent encore être approfondis à l'avenir.

Dans cette thèse, seule la simulation électromagnétique a été considérée. La première des perspectives est de pouvoir étendre la simulation à la partie thermique pour pouvoir simuler un vrai processus thermo-inductif. Ensuite, l'intégration des défauts à l'échelle microscopique constitue une perspective naturelle.

Même si la DD-POD séquentielle peut gagner du temps sur un matériau à l'échelle macroscopique, il est indispensable de pouvoir appliquer une exécution parallèle des calculs pour pouvoir l'exploiter pleinement et simuler des matériaux de plus grande taille.

Pour pouvoir simuler encore plus exactement un dispositif de CND, il faudra être en mesure de ne pas négliger les effets magnétiques dans les matériaux. Pour ce faire, l'application de la méthode PEEC semble une piste prometteuse pour laquelle la méthodologie proposée apparaît particulièrement adaptée pour traiter notamment la problématique de la matrice pleine inhérente à la PEEC lors de la résolution.

Enfin les méthodes de réduction offrent encore des perspectives pour un usage sans décomposition de domaine, en formulant le problème différemment pour effectuer une réduction sur les grandeurs d'intérêt, ou encore en adaptant des approches de type Galerkin discontinue à notre modèle.

PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION

La méthode proper generalized decomposition est une méthode numérique itérative pour résoudre des équations différentielles partielles contraintes par un ensemble de conditions aux limites. La PGD calcule une approximation de la solution par enrichissements successifs. A chaque itération, un nouveau mode est calculé.

Nous générons les fibres aléatoirement par la méthode "Bubble Mesh" en 2D avec le taux de remplissage à 60% comme présenté sur la figure (A.1). Le maillage est obtenu à partir de la distribution des fibres par des éléments carrés comme montré sur la figure (A.2).

Nous résolvons le problème sur le domaine 2D comme montré en figure (A.3) avec la

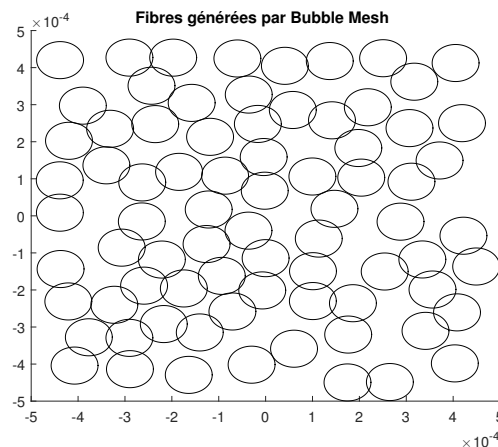


FIGURE A.1 – Fibres en 2D

condition aux limites de Neumann :

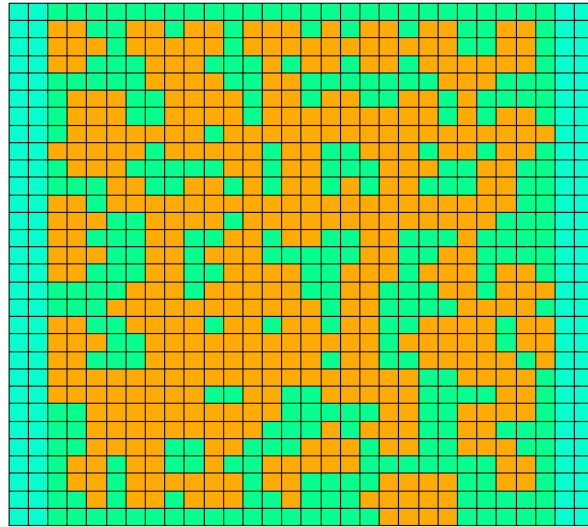


FIGURE A.2 – Maillage

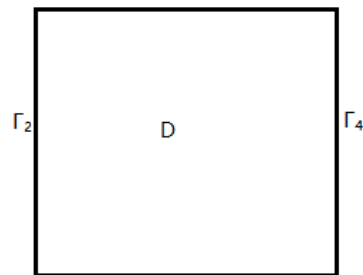


FIGURE A.3 – Domaine du problème

$$\operatorname{div}(\sigma \mathbf{grad} \mathbf{V}) = 0 \quad \text{dans } D, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{J}_s \quad \text{sur } \Gamma_2, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = -\mathbf{J}_s \quad \text{sur } \Gamma_4, \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{sur } \partial D / (\Gamma_2 \cup \Gamma_4). \quad (\text{A.4})$$

La fonction test est \mathbf{V}' , la formulation variationnelle est

$$\int_D \sigma \mathbf{grad} \mathbf{V} \mathbf{grad} \mathbf{V}' dD = \int_{\Gamma_2} \mathbf{V}' \mathbf{J}_s d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_4} \mathbf{V}' (-\mathbf{J}_s) d\Gamma_4. \quad (\text{A.5})$$

En vue de séparer la solution selon les deux directions de l'espace, il convient de faire de même pour la matrice de conductivité :

$$M = U D V^t. \quad (\text{A.6})$$

Nous avons

$$\sigma = \sum_{j=1}^N D_{jj} u_j v_j, \quad (\text{A.7})$$

avec

$$v_j(x) = \sum_{i=1}^{n_x} w_i^x(x) V_{ij} \quad \text{et} \quad u_j(y) = \sum_{i=1}^{n_y} w_i^y(y) U_{ij}, \quad (\text{A.8})$$

où w_i^x est égal à 1 si x appartient à la position des noeuds et à 0 sinon, w_i^y est le même. [HBC12]

Algorithme

Soit la solution peut être définie comme une représentation séparée de la forme

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i(x) \cdot \mathbf{S}_i(y) \quad (\text{A.9})$$

Ensuite, nous utilisons la méthode itérative pour résoudre \mathbf{R}_i et \mathbf{S}_i étape par étape :

- Nous supposons que nous connaissons déjà les n premiers modes (produits de fonctions), et nous cherchons le mode $(n + 1)$.

-
- Nous initialisons $\mathbf{S}_{n+1}(y) = \mathbf{S}_n(y)$, La solution $(\mathbf{R}_{n+1}(x), \mathbf{S}_{n+1}(y))$ est obtenue par une procédure itérative :
 - Nous cherchons $\mathbf{R}_{n+1}(x)$ avec $\mathbf{S}_{n+1}(y)$ connu et sauvegarde $r_1 = \mathbf{R}_{n+1}$.
 - Nous cherchons $\mathbf{S}_{n+1}(y)$ avec $\mathbf{R}_{n+1}(x)$ connu et sauvegarde $s_1 = \mathbf{S}_{n+1}$.
 - Nous répétons jusqu'à atteindre la convergence avec le critère d'arrêt :

$$\varepsilon(n) = \|\mathbf{r}_{n+1} \cdot \mathbf{s}_{n+1} - \mathbf{r}_n \cdot \mathbf{s}_n\| < 1e - 7, \quad (\text{A.10})$$

où r_i, s_i sont les solution de i-ième itération.

- Nous continuons à chercher le mode suivant jusqu'à atteindre la convergence avec le critère d'arrêt :

$$\varepsilon(n) = \|\mathbf{R}_{n+1} \cdot \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{R}_n \cdot \mathbf{S}_n\| < 1e - 12, \quad (\text{A.11})$$

où $\mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i$ sont les solution de i-ième mode.

L'algorithme de PGD par itération est présenté en figure (A.4).

Forme séparée

Forme séparée simple

La solution s'exprime comme $\mathbf{V} = \mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{S}(y)$.

Soit $\mathbf{S}(y)$ connue, la fonction test $\mathbf{V}' = \mathbf{R}'(x) \cdot \mathbf{S}(y)$ d'après la formulation variationnelle (A.5) du problème, la formulation variationnelle de forme séparée est

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N D_{jj} \left(\int_{D_x} u_j \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}'}{\partial x} dD_x \int_{D_y} v_j \mathbf{S} \cdot \mathbf{S} dD_y + \int_{D_x} u_j \mathbf{R} \cdot \mathbf{R}' dD_x \int_{D_y} v_j \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial y} dD_y \right) \\ & = \int_{\Gamma_2} \mathbf{J}_s \cdot (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{S}) d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_4} -\mathbf{J}_s \cdot (\mathbf{R}' \cdot \mathbf{S}) d\Gamma_4. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Les fonctions d'interpolation de $\mathbf{R}(x)$, $\mathbf{R}'(x)$, $\mathbf{S}(y)$ et $\mathbf{S}'(y)$ sont

$$\mathbf{R}(x) = \sum_{i=1}^{nx} r_i w_i^x(x), \quad \mathbf{R}'(x) = \sum_{i=1}^{nx} r'_i w_i^x(x) \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{S}(y) = \sum_{i=1}^{ny} s_i w_i^y(y), \quad \mathbf{S}'(y) = \sum_{i=1}^{ny} s'_i w_i^y(y) \quad (\text{A.14})$$

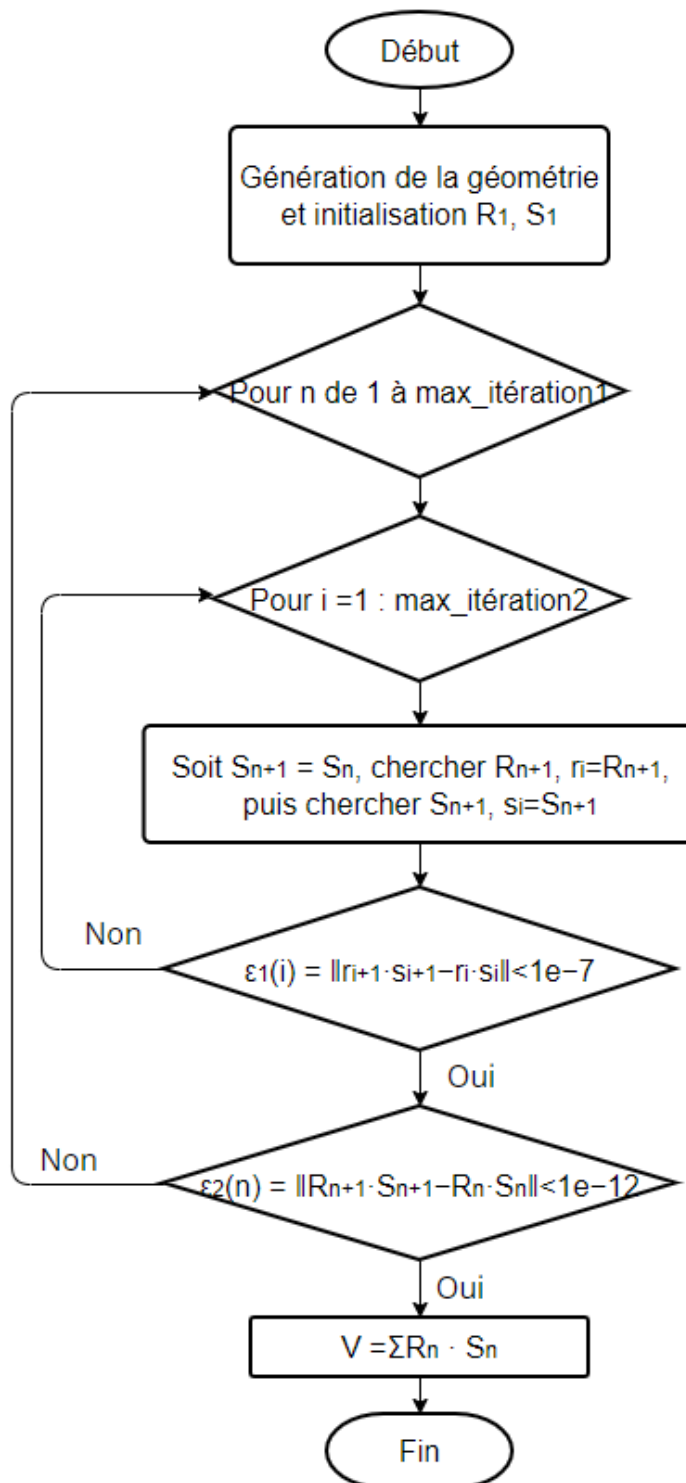


FIGURE A.4 – Algorithme de PGD

Donc, nous avons

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N D_{jj} \left(\left(r^t \left[\int_{D_x} v_j \frac{\partial w_m^x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_n^x}{\partial x} dD_x \right]_{mn} r' \right) \left(s^t \left[\int_{D_y} u_j w_m^y \cdot w_n^y dD_y \right]_{mn} s \right) \right) \\
& + \sum_{j=1}^N D_{jj} \left(\left(r^t \left[\int_{D_x} v_j w_m^x \cdot w_n^x dD_x \right]_{mn} r' \right) \left(s^t \left[\int_{D_y} u_j \frac{\partial w_m^y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_n^y}{\partial y} dD_y \right]_{mn} s \right) \right) \quad (\text{A.15}) \\
& = \left(s^t \left[\int_{\Gamma_2} (\mathbf{J}_s \cdot w_m^y) d\Gamma_2 \right]_m \right) r'_1 + \left(s^t \left[\int_{\Gamma_4} (-\mathbf{J}_s \cdot w_m^y) d\Gamma_4 \right]_m \right) r'_{nx}
\end{aligned}$$

Ce qui se réduit à

$$\sum_{j=1}^N D_{jj} \left((r^t \mathbb{K}_x r') (s^t \mathbb{M}_y s) + (r^t \mathbb{M}_x r') (s^t \mathbb{K}_y s) \right) = (s^t f_2) r'_1 + (s^t f_4) r'_{nx} \quad (\text{A.16})$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}_x &= \left[\int_{D_x} v_j w_m^x \cdot w_n^x dD_x \right]_{mn}, & \mathbb{K}_x &= \left[\int_{D_x} v_j \frac{\partial w_m^x}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_n^x}{\partial x} dD_x \right]_{mn}, \\
\mathbb{M}_y &= \left[\int_{D_y} u_j w_m^y \cdot w_n^y dD_y \right]_{mn}, & \mathbb{K}_y &= \left[\int_{D_y} u_j \frac{\partial w_m^y}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_n^y}{\partial y} dD_y \right]_{mn}, \\
f_2 &= \left[\int_{\Gamma_2} (\mathbf{J}_s \cdot w_m^y) d\Gamma_2 \right]_m, & f_4 &= \left[\int_{\Gamma_4} (-\mathbf{J}_s \cdot w_m^y) d\Gamma_4 \right]_m.
\end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Puis soit $\mathbf{R}(x)$ connue, la fonction test est $\mathbf{R}(x) \cdot \mathbf{S}'(y)$, nous avons

$$\sum_{j=1}^N D_{jj} \left((s^t \mathbb{K}_y s') (r^t \mathbb{M}_x r) + (s^t \mathbb{M}_y s') (r^t \mathbb{K}_x r) \right) = (r_1 f_2) s' + (r_{nx} f_4) s' \quad (\text{A.18})$$

Sommes de formes séparées

La solution \mathbf{V} se décompose en

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \mathbf{R}_i(x) \cdot \mathbf{S}_i(y) \quad (\text{A.19})$$

Les coefficients associés aux fonctions d'interpolation des fonctions $\mathbf{R}_i(x)$, $\mathbf{R}'_i(x)$, $\mathbf{S}_i(y)$ et $\mathbf{S}'_i(y)$ avec $i \in [1, n]$ sont X_i , X'_i , Y_i , Y'_i .

Supposons que nous connaissons le couple $(\mathbf{R}_i, \mathbf{S}_i)$ avec $i \in [1, n-1]$, et nous voulons résoudre $(\mathbf{R}_n, \mathbf{S}_n)$.

D'abord, soit $\mathbf{S}_n = \mathbf{S}_{n-1}$, nous cherchons \mathbf{R}_n . Avec la fonction test $\mathbf{R}'_n \cdot \mathbf{S}_n$, la formulation

variationnelle devient

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N D_{jj} \left((X_n^t \mathbb{K}_x X_n') (Y_n^t \mathbb{M}_y Y_n) + (X_n^t \mathbb{M}_x X_n') (Y_n^t \mathbb{K}_y Y_n) \right) \\
& = (s^t f_2) r_1' + (s^t f_4) r_{nx}' - \sum_{j=1}^N D_{jj} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left((X_k^t \mathbb{K}_x X_k') (Y_k^t \mathbb{M}_y Y_k) + (X_k^t \mathbb{M}_x X_k') (Y_k^t \mathbb{K}_y Y_k) \right) \right)
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Ensuite, \mathbf{R}_n est connue, nous cherchons \mathbf{S}_n . Avec la fonction test $\mathbf{R}_n \cdot \mathbf{S}_n'$, la formulation variationnelle devient

$$\sum_{j=1}^N D_{jj} \left((Y_n^t \mathbb{K}_y Y_n') (X_n^t \mathbb{M}_x X_n) + (Y_n^t \mathbb{M}_y Y_n') (X_n^t \mathbb{K}_x X_n) \right) \tag{A.21}$$

$$= (r_1 f_2) s' + (r_{nx} f_4) s' - \sum_{j=1}^N D_{jj} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left((Y_k^t \mathbb{K}_y Y_k') (X_k^t \mathbb{M}_x X_k) + (Y_k^t \mathbb{M}_y Y_k') (X_k^t \mathbb{K}_x X_k) \right) \right) \tag{A.22}$$

La méthode proper generalized decomposition avec recyclage

Pour représenter des fibres dans chaque pli, nous devons faire « Bubble Mesh » plusieurs fois pour générer des géométries de fibres différents. Si nous utilisons la PGD classique pour résoudre le problème sur chaque géométrie, cela prendra beaucoup de temps. Nous envisageons donc d'utiliser une PGD avec recyclage. L'idée est de réutiliser les bases \mathbf{R} et \mathbf{S} précédemment calculées. Des coefficients de pondération sur les anciennes bases sont calculés pour adapter le résultat à la nouvelle géométrie. De plus, quelques bases spécifiques au nouveau matériau sont calculées et ajoutées.

Nous supposons que la solution peut s'écrire comme

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{R}_i(x) \mathbf{S}_i(y). \tag{A.23}$$

Nous ne cherchons pas à calculer \mathbf{R}_i , \mathbf{S}_i car déjà obtenues d'un précédent calcul, mais à obtenir les α_i . En théorie, cela peut gagner du temps sur la résolution de ces modes. Ensuite, nous calculons \mathbf{R} et \mathbf{S} sans α .

Résultats

Nous avons fait les applications numériques de la PGD sur la géométrie générée par « Bubble Mesh » et comparé les résultats avec ceux de la méthode des éléments finis 2D (EF 2D). La solution obtenue par la PGD est proche de celle des EF 2D quand le nombre de modes est suffisamment grand, mais le temps de calcul est alors très important.

Les figures (A.5), (A.6) montrent les potentiels calculés par PGD et la méthode des éléments finis.

Les figures (A.7), (A.8) montrent les densités de courant calculées par PGD et la méthode

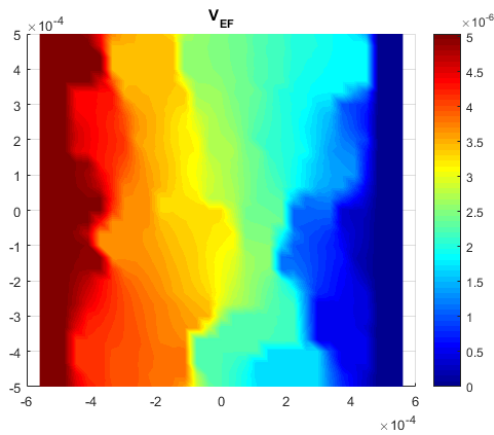


FIGURE A.5 – Potentiel par EF 2D

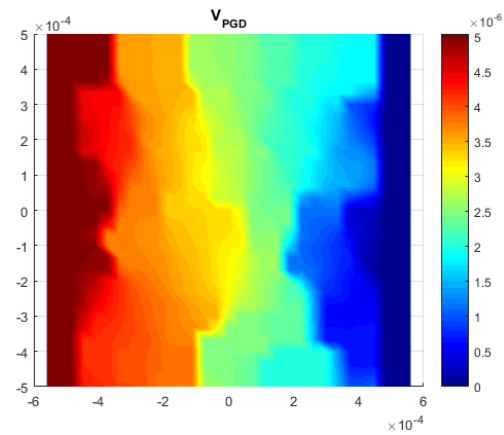


FIGURE A.6 – Potentiel par PGD

des éléments finis.

Le tableau (A.1) montre une comparaison des résultats.

Nous avons essayé la méthode de PGD avec recyclage, mais ses résultats ne sont pas

	temps	conductivité
EF 2D	1,33 s	$1,83 \times 10^4$
PGD classique(100 modes)	374,36 s	$1,87 \times 10^4$
PGD avec recyclage (150 modes)	457,80 s	$2,22 \times 10^4$

TABLE A.1 – Comparaison entre EF 2D et PGD

aussi bons que pour la PGD classique, c'est-à-dire que le temps de calcul augmente et les résultats sont plus inexacts.

D'après ces résultats, la PGD classique et la PGD avec recyclage ne font pas gagner du temps. De plus, le cas que nous souhaitons étudier est tridimensionnel, mais pour le tridimensionnel, l'application de la PGD est plus complexe étant donné que les fibres sont

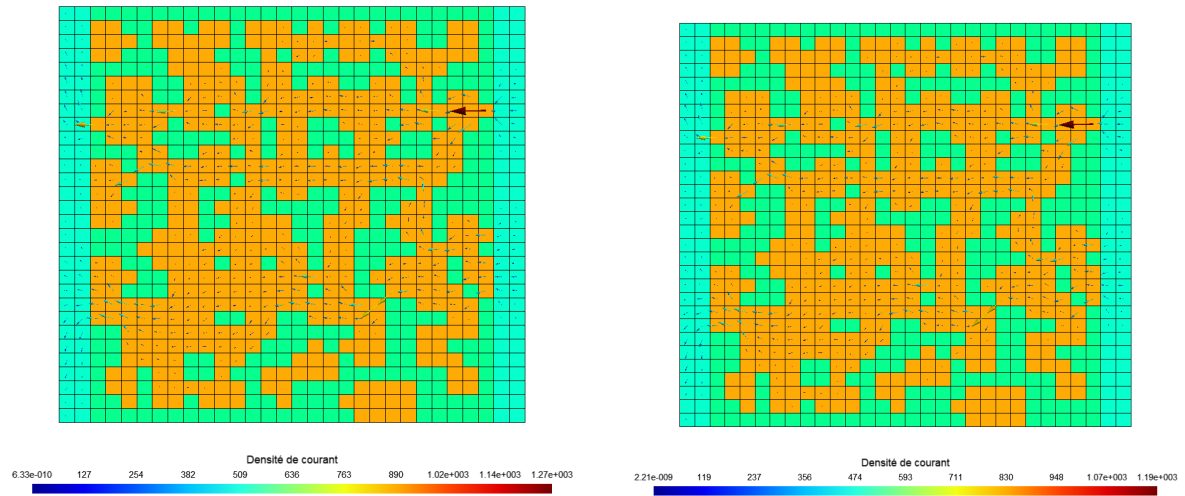


FIGURE A.7 – Densités de courant par EF FIGURE A.8 – Densités de courant par PGD 2D

difficiles à séparer dans les trois directions de l'espace. Donc, il semble que la PGD ne soit pas adaptée au notre cas.

ANALYSE ÉLÉMENTS FINIS PRÉLIMINAIRES

Selon des travaux préliminaires, les effets inductifs dans des cellules homogènes ont peu d'effet sur les résultats. Nous avons fait la simulation pour comparer des pertes obtenues par deux formulations :

- Formulation $\mathbf{A} - \varphi$ avec conditions de Dirichlet sur \mathbf{A} pour imposer \mathbf{B} sur les frontières en magnétodynamique :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A}, \quad (\text{B.1})$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0, \quad (\text{B.2})$$

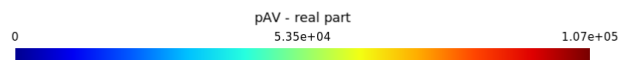
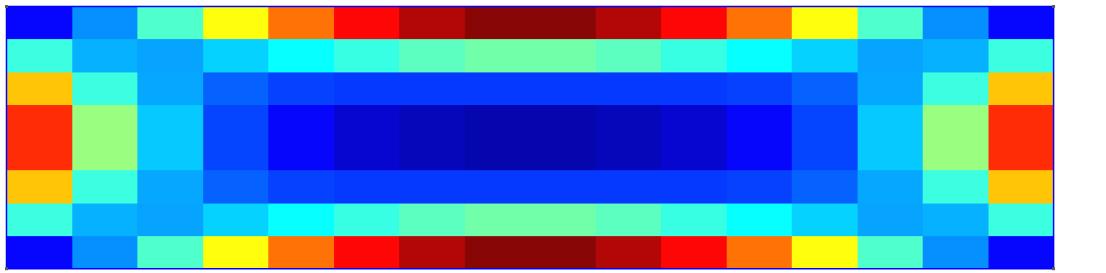
$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\varphi; \quad (\text{B.3})$$

- Formulation φ avec un \mathbf{A} source dans le domaine conducteur.

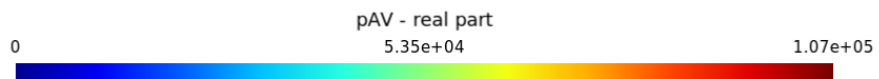
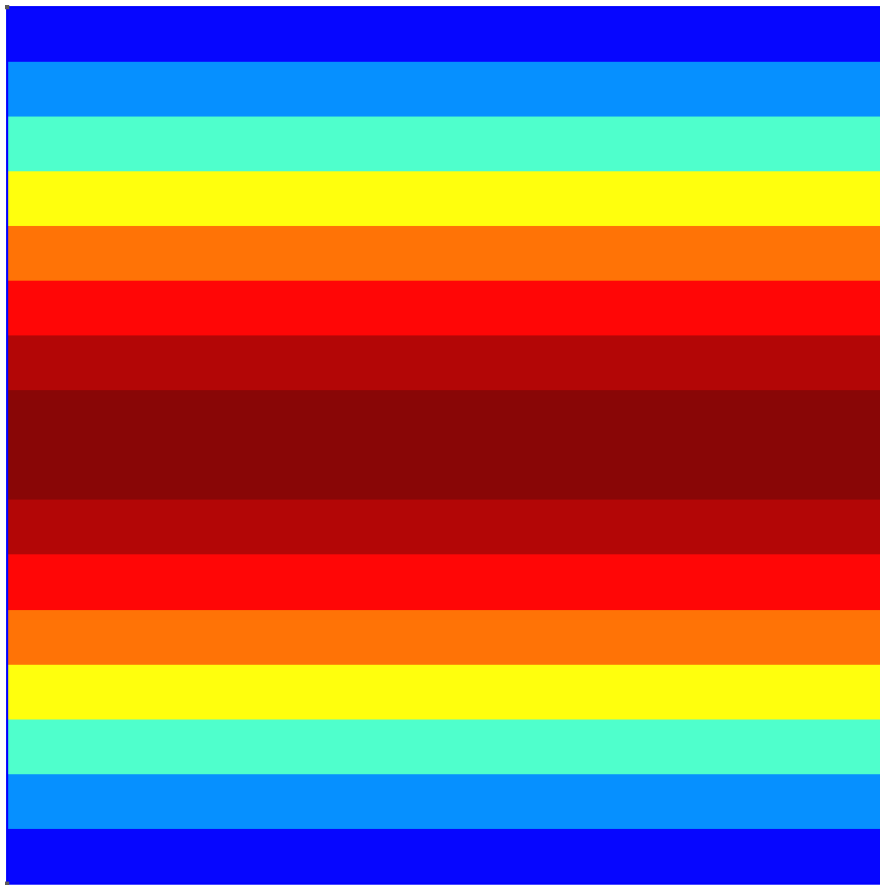
avec \mathbf{B} l'induction magnétique, \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique, \mathbf{E} le champ électrique, j l'unité imaginaire, $\omega = 2\pi f$ avec f la fréquence, φ le potentiel scalaire électrique.

Les figures B.1,B.2,B.3 présentent la comparaison des pertes obtenues par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$ et la formulation φ avec \mathbf{B}_x imposée. D'après ces résultats, les pertes résolues par la formulation φ sont proches de celles résolues par la formulation $\mathbf{A} - \varphi$.

Donc, des effets inductifs sont ignorés dans ma thèse.



Z
X_Y



Y
Z_X

FIGURE B.1 – Pertes obtenues par formulation $\mathbf{A}-\varphi$ avec \mathbf{B}_x imposée, vues de différentes directions

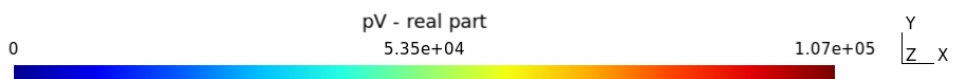
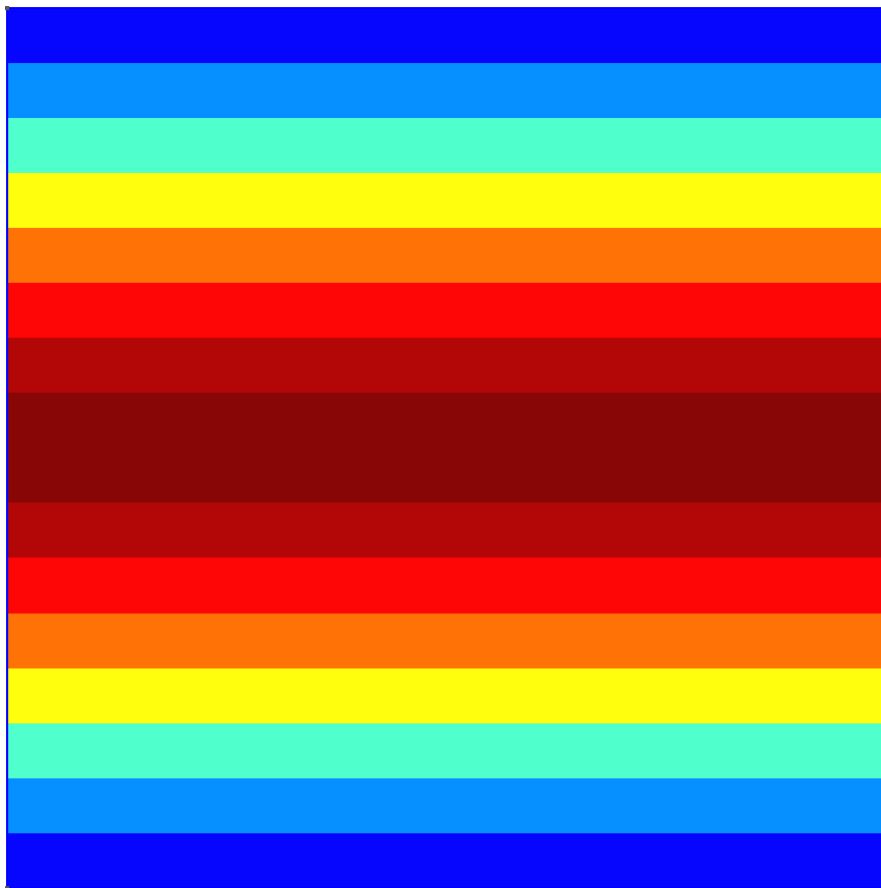
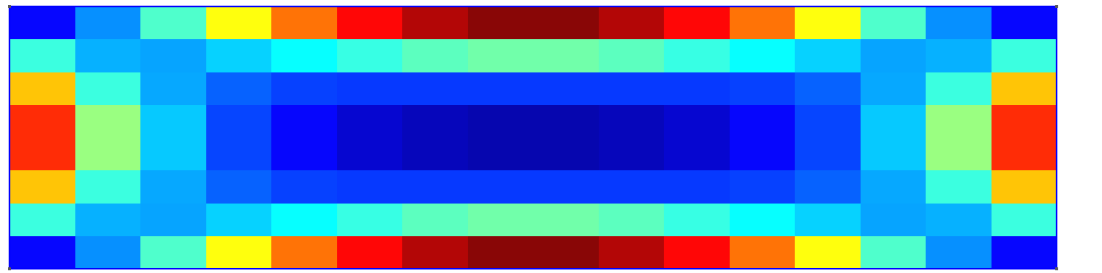
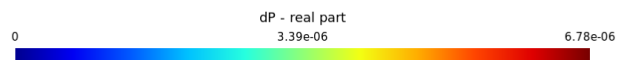
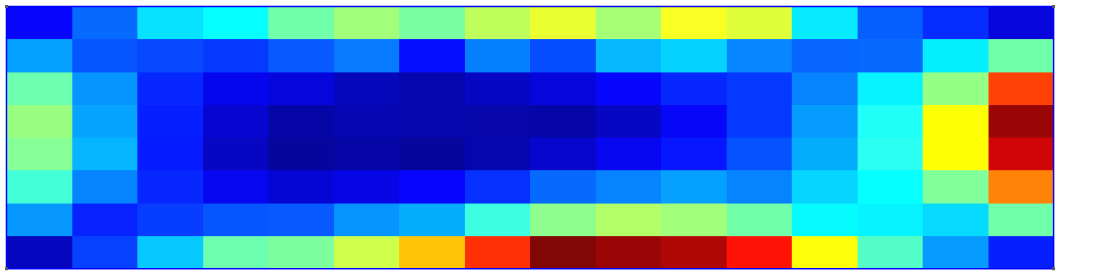
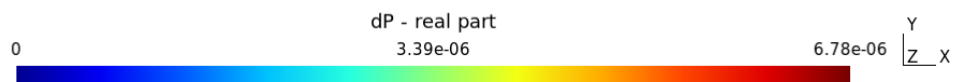
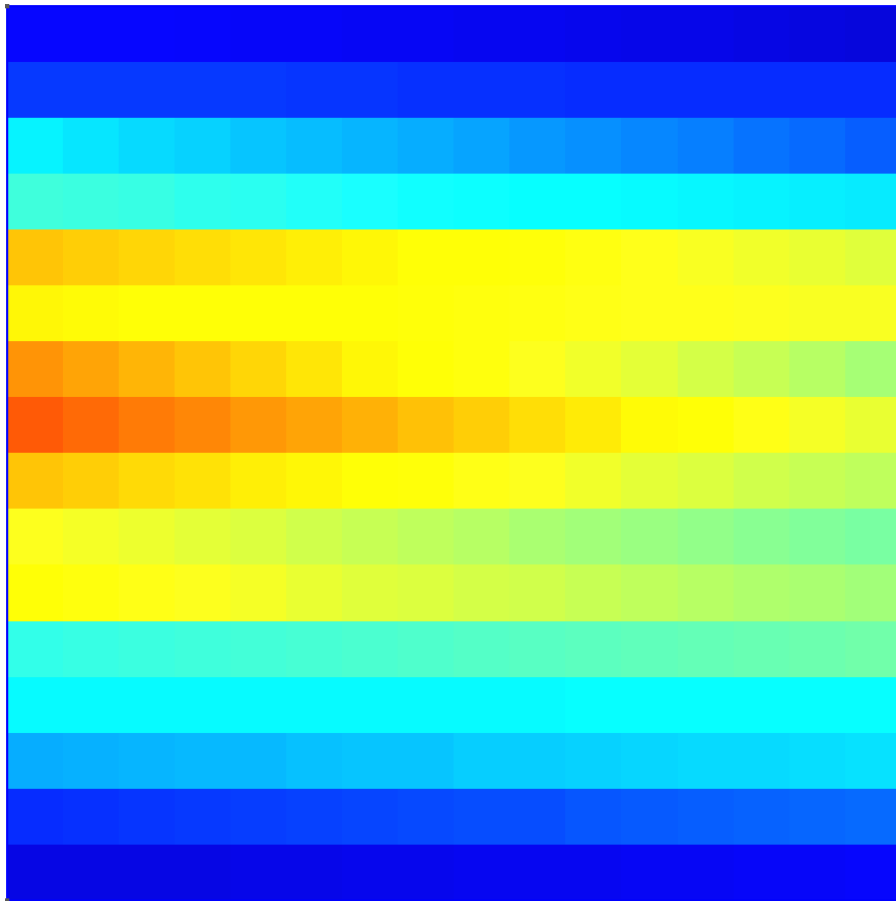


FIGURE B.2 – Pertes obtenues par formulation φ avec \mathbf{B}_x imposée, vues de différentes directions



Z
X_Y



Y
Z_X

FIGURE B.3 – Différence entre des pertes obtenues par deux formulations, vues de différentes directions

BIBLIOGRAPHIE

- [ACC11] Amine AMMAR, Francisco CHINESTA et Elías CUETO, « Coupling finite elements and proper generalized decompositions », in : *International Journal for Multiscale Computational Engineering* 9.1 (2011).
- [Ast+08] Patricia ASTRID et al., « Missing point estimation in models described by proper orthogonal decomposition », in : *IEEE Transactions on Automatic Control* 53.10 (2008), p. 2237-2251.
- [Azz19] Brahim AZZABI ZOURAQ, « Optimisation du procédé de contrôle non destructif par thermographie inductive pour des applications du domaine nucléaire », thèse de doct., Nantes, 2019.
- [Ba21] Abdoulaye BA, « Développement d'une plateforme de modélisation multiphysique et multi-échelle des techniques de CND des matériaux composites stratifiés par les techniques des courants de Foucault et de thermographie inductive », thèse de doct., Nantes, 2021.
- [Ben06] Samir BENSALD, « Contribution à la caractérisation et à la modélisation électromagnétique et thermique des matériaux composites anisotropes », thèse de doct., Université de Nantes, 2006.
- [Ber99] Jean-Marie BERTHELOT, « Matériaux composites », in : *Comportement mécanique et analyse des structures* 4 (1999).
- [BH14] F BOYER et F HUBERT, « Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz », in : *Aix-Marseille université* (2014).
- [BL99] Jean-Marie BERTHELOT et Frederick F LING, *Composite materials : mechanical behavior and structural analysis*, t. 435, Springer, 1999.
- [BP89] Oszkar BIRO et Kurt PREIS, « On the use of the magnetic vector potential in the finite-element analysis of three-dimensional eddy currents », in : *IEEE Transactions on magnetics* 25.4 (1989), p. 3145-3159.

-
- [Bui14] Huu Kien BUI, « Contribution à la modélisation multiphysique des matériaux composites stratifié : application au CND thermo-inductifs », thèse de doct., Nantes, 2014.
- [CA89] P CAWLEY et RD ADAMS, « Defect types and non-destructive testing techniques for composites and bonded joints », in : *Materials science and technology* 5.5 (1989), p. 413-425.
- [CAC10] Francisco CHINESTA, Amine AMMAR et Elías CUETO, « Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models », in : *Archives of Computational methods in Engineering* 17.4 (2010), p. 327-350.
- [CB06] L CORDIER et M BERGMANN, « Réduction de dynamique par décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD) », in : *Ecole de printemps OCET* 7563 (2006).
- [CCH80] TC CHEN, CY CHANG et KW HAN, « Model reduction using the stability-equation method and the Padé approximation method », in : *Journal of the Franklin Institute* 309.6 (1980), p. 473-490.
- [CDM15] Alberto CORIGLIANO, Martino DOSSI et Stefano MARIANI, « Model order reduction and domain decomposition strategies for the solution of the dynamic elastic-plastic structural problem », in : *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 290 (2015), p. 127-155.
- [Cha00] Antoine CHATEAUMINOIS, « Processus de rupture dans les composites unidirectionnels », in : (2000).
- [Da 15] Frédéric DA SILVA, « Méthodologies de réduction de modèles multiphysiques pour la conception et la commande d'une chaîne de traction électrique », thèse de doct., Université Paris Saclay (COmUE), 2015.
- [DJN15] Victorita DOLEAN, Pierre JOLIVET et Frédéric NATAF, *An introduction to domain decomposition methods : algorithms, theory, and parallel implementation*, SIAM, 2015.
- [DO04] G.A.O. DAVIES et R OLSSON, « Impact on composite structures », in : *The Aeronautical Journal* 108.1089 (2004), p. 541-563.

-
- [Eye15] Gabriel EYER, « Rupture des matériaux composites en compression sens fibre : analyse de l'effet de l'endommagement », thèse de doct., Aix-Marseille, 2015.
- [Fen15] Claude FENDZI, « Structural health monitoring of composite structures : application to the monitoring of aeronautical nacelles », in : *These de doctorat, ENSAM* (2015).
- [Gen11] Lionel GENDRE, « Les grandes familles de matériaux composites », in : *Document de cours, Ecole Nationale Supérieure de Cachan, France* (2011).
- [Gor08] Laurent GORNET, « Généralités sur les matériaux composites », in : (2008).
- [GS99] EK GAMSTEDT et BA SJÖGREN, « Micromechanisms in tension-compression fatigue of composite laminates containing transverse plies », in : *Composites Science and Technology* 59.2 (1999), p. 167-178.
- [Gué94] Christophe GUÉRIN, « Détermination des pertes par courants de Foucault dans les cuves de transformateurs. Modélisation de régions minces et prise en compte de la saturation des matériaux magnétiques en régime harmonique », thèse de doct., Institut National Polytechnique de Grenoble-INPG, 1994.
- [HBC12] Thomas HENNERON, Abdelkader BENABOU et Stéphane CLENET, « Nonlinear proper generalized decomposition method applied to the magnetic simulation of a SMC microstructure », in : *IEEE transactions on Magnetics* 48.11 (2012), p. 3242-3245.
- [HC13] Thomas HENNERON et Stéphane CLÉNET, « Model order reduction of quasi-static problems based on POD and PGD approaches », in : *The European Physical Journal Applied Physics* 64.2 (2013), p. 24514.
- [HC15a] Thomas HENNERON et Stéphane CLENET, « Application of the PGD and DEIM to solve a 3-D non-linear magnetostatic problem coupled with the circuit equations », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 52.3 (2015), p. 1-4.
- [HC15b] Thomas HENNERON et Stéphane CLENET, « Model-order reduction of multiple-input non-linear systems based on POD and DEI methods », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 51.3 (2015), p. 1-4.
- [Hub14] Franck Boyer-Florence HUBERT, « Méthodes de décomposition de domaine de type Schwarz », in : (2014).

-
- [Kan+20] Banda KANE et al., « Coupled Numerical and Experimental Identification of Geometrical Parameters for Predicting the Electrical Conductivity of CFRP Layers », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 56.2 (2020), p. 1-4.
- [Kan19] Banda KANE, « Contribution à la modélisation des phénomènes de percolation électrique dans les matériaux à structures complexes : application au soudage par induction des matériaux composites pour l'industrie aéronautique », thèse de doct., Nantes, 2019.
- [Led09] Yohann LEDRU, « Etude de la porosité dans les matériaux composites stratifiés aéronautiques », thèse de doct., 2009.
- [LF11] Fabien LEPILLER et Gaëlle FRAMEZELLE, « Les matériaux composites carbonés : fabrication, défautologie et contrôle non destructif », in : *Soudage et techniques connexes* 65.3-4 (2011), p. 31-37.
- [Mai+12] S MAILLARD et al., « La thermographie infrarouge active et ses nouvelles applications aux matériaux métalliques », in : *Traitements et Matériaux* 417 (2012), p. 41.
- [Mas96] Nikos E MASTORAKIS, « Singular value decomposition in multidimensional arrays », in : *International journal of systems science* 27.7 (1996), p. 647-650.
- [MFB12] Hocine MENANA, Mouloud FELIACHI et Gerard BERTHIAU, « Modélisation des courants de Foucault dans un matériau composite en vue de la caractérisation de défauts », in : *Revue Sciences & Maintenance* (2012).
- [Mis10] Alexia MISSOFFE, « Réduction d'ordre de modèle d'un phénomène d'amortissement non-linéaire dans le cadre des microsystèmes. », thèse de doct., Ecole Centrale Paris, 2010.
- [Ndi22] Mansor NDIAYE, « Outils de modélisation et règles de conception globale de procédés d'assemblage de composites thermoplastiques par induction électromagnétique », thèse de doct., Nantes, 2022.
- [Ngu14] Thanh Trung NGUYEN, « Méthode PEEC inductive par élément de facette pour la modélisation des régions conductrices volumiques et minces », thèse de doct., oct. 2014, DOI : 10.13140/RG.2.2.19850.47048.
- [PNT18] Deepalekshmi PONNAMMA, Neethu NINAN et Sabu THOMAS, « Carbon nanotube tube filled polymer nanocomposites and their applications in tissue engineering », in : *Applications of Nanomaterials*, Elsevier, 2018, p. 391-414.

-
- [Ram09] Brahim RAMDANE, « Contribution à la modélisation tridimensionnelle de la technique thermo-inductive de contrôle non destructif : développement d'un outil de conception, d'analyse et d'aide à la décision », thèse de doct., Nantes, 2009.
- [Red19] Junuthula Narasimha REDDY, *Introduction to the finite element method*, McGraw-Hill Education, 2019.
- [Ren02] Z REN, « T- Ω formulation for eddy-current problems in multiply connected regions », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 38.2 (2002), p. 557-560.
- [RR14] Annika RADERMACHER et Stefanie REESE, « Model reduction in elasto-plasticity : proper orthogonal decomposition combined with adaptive substructuring », in : *Computational Mechanics* 54.3 (2014), p. 677-687.
- [SC12] Daniel SCHMIDTHAUSLER et Markus CLEMENS, « Low-order electroquasistatic field simulations based on proper orthogonal decomposition », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 48.2 (2012), p. 567-570.
- [Sen17] Fiacre Djonkone SENGHOR, « Identification des propriétés anisotropes des matériaux complexes : application aux matériaux composites stratifiés », thèse de doct., Nantes, 2017.
- [SH06] Ulf SCHNARS et Rudolf HENRICH, « Applications of NDT methods on composite structures in aerospace industry », in : *Proceedings of the Conference on Damage in Composite Materials, Stuttgart, Germany, 2006*, p. 18-19.
- [SO94] Takahide SAKAGAMI et Keiji OGURA, « New flaw inspection technique based on infrared thermal images under Joule effect heating », in : *JSME international journal. Ser. A, Mechanics and material engineering* 37.4 (1994), p. 380-388.
- [SSC13] Daniel SCHMIDTHÄUSLER, Sebastian SCHÖPS et Markus CLEMENS, « Reduction of linear subdomains for non-linear electro-quasistatic field simulations », in : *IEEE Transactions on Magnetics* 49.5 (2013), p. 1669-1672.
- [TB97] Lloyd N TREFETHEN et David BAU III, *Numerical linear algebra*, t. 50, Siam, 1997.
- [Tre19] Lloyd N TREFETHEN, *Approximation Theory and Approximation Practice, Extended Edition*, SIAM, 2019.

-
- [Tri00] Didier TRICHET, « Contribution à la modélisation, à la conception et au développement du chauffage par induction des matériaux composites conducteurs », thèse de doct., Nantes, 2000.
- [VM10] TJ VAUGHAN et CT MCCARTHY, « A combined experimental–numerical approach for generating statistically equivalent fibre distributions for high strength laminated composite materials », in : *Composites Science and Technology* 70.2 (2010), p. 291-297.
- [Wan+16] Wenzhi WANG et al., « Micromechanical modeling of fiber-reinforced composites with statistically equivalent random fiber distribution », in : *Materials* 9.8 (2016), p. 624.
- [Was11] Guillaume WASSELYNCK, « Etude des interactions entre les ondes électromagnétiques de fréquences moyennes et les matériaux composites : application à l’assemblage par induction de ces matériaux », thèse de doct., Nantes, 2011.
- [YHA15] Hong YU, Dirk HEIDER et Suresh ADVANI, « A 3D microstructure based resistor network model for the electrical resistivity of unidirectional carbon composites », in : *Composite Structures* 134 (2015), p. 740-749.
- [Zöc09] CM ZÖCKE, « Quantitative analysis of defects in composite material by means of optical lockin thermography, Dr. Ing », thèse de doct., Université Paul-Verlaine, 2009.

Titre : Contribution à la modélisation électromagnétique des matériaux composites par le couplage de méthodes de réduction d'ordre et de décomposition de domaine

Mot clés : matériau composite stratifié, décomposition de domaine, méthode de réduction d'ordre de modèle, thermo-induction, simulation multi-échelle

Résumé : L'objet de cette thèse est la recherche de nouvelles méthodes numériques pour améliorer la simulation des procédés thermo-inductifs en tenant compte des phénomènes allant de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique.

Le matériau étudié dans cette thèse est un composite stratifié à fibres longues de carbone utilisé dans l'industrie aéronautique.

En raison du grand facteur d'échelle entre la taille des fibres de quelques micromètres et de la structure de plusieurs mètres, la simu-

lation directe sur ces matériaux est impossible. De nombreux travaux ont été réalisés pour résoudre ce problème, notamment les méthodes d'homogénéisation, mais ces dernières génèrent une perte d'informations à l'échelle microscopique.

Dans cette thèse, il est proposé d'utiliser des méthodes de réduction d'ordre de modèle et de décomposition de domaine pour garder ces informations tout en préservant un temps de calcul acceptable.

Title: Contribution to the electromagnetic modelling of composite materials by coupling of order reduction and domain decomposition methods

Keywords: stratified composite, domain decomposition, model order reduction method, induction thermography, multi scale simulation

Abstract: The object of this thesis is to find new numerical methods to improve the simulation of thermo-inductive processes by taking into account phenomena from the microscopic to the macroscopic scale.

The material studied in this thesis is stratified composite which is used in the aerospace industry.

Due to the large factor between the fibre size of a few micrometres and the structure of sev-

eral metres, direct simulation on these materials is impossible. Much work has been done to solve this problem, especially homogenisation methods, but these methods generate a loss of information at the microscopic scale.

In this thesis, it is proposed to use model order reduction and domain decomposition methods to keep this information while preserving an acceptable computation time.