



**HAL**  
open science

# Hypothèse de champ diffus pour l'analyse statistique de l'énergie : Cas des billards non ergodiques couplés

Victor Tyrode

► **To cite this version:**

Victor Tyrode. Hypothèse de champ diffus pour l'analyse statistique de l'énergie : Cas des billards non ergodiques couplés. Autre. Ecole Centrale de Lyon, 2022. Français. NNT : 2022ECDL0020 . tel-03987884

**HAL Id: tel-03987884**

**<https://theses.hal.science/tel-03987884v1>**

Submitted on 14 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Numéro d'ordre NNT : 2022ECDL0020

**THÈSE DE DOCTORAT**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

**DOCTEUR**

DE

**L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON**

SPÉCIALITÉ **ACOUSTIQUE**

ÉCOLE DOCTORALE MEGA

MÉCANIQUE - ÉNERGÉTIQUE - GÉNIE CIVIL - ACOUSTIQUE

PRÉSENTÉE PAR

**VICTOR TYRODE**

---

**HYPOTHÈSE DE CHAMP DIFFUS POUR L'ANALYSE  
STATISTIQUE DE L'ÉNERGIE : CAS DES BILLARDS NON  
ERGODIQUES COUPLÉS**

---

Soutenue publiquement le 1<sup>er</sup> Décembre 2022 devant la commission d'examen  
composée de :

E. SADOULET-REBOUL	Maître de conférences	Rapporteur
A. BATOU	Professeur des universités	Rapporteur
N. DAUCHEZ	Professeur des universités	Président
L. MAXIT	Maître de conférences	Co-encadrant
N. TOTARO	Professeur des universités	Co-encadrant
A. LE BOT	Directeur de recherche CNRS	Directeur de thèse

*"Un chercheur qui est payé tous les mois  
Il a intérêt à ne pas trouver trop vite, non plus,  
s'il veut se garder du boulot"*

---

LE CHAT DE PHILIPPE GELUCK

## Résumé

---

Dans ce travail, on montre que le champ vibratoire dans un système mécanique est diffus lorsque l'amortissement est faible et que l'excitation est aléatoire et à haute fréquence. De plus, la propagation des ondes vibratoires doit être homogène et isotrope, ce qui est le cas avec les géométries ergodiques. Il est néanmoins possible d'obtenir un champ vibratoire diffus même pour un système non ergodique si l'excitation force l'homogénéité et/ou l'isotropie avec un champ de forces uniformément réparties sur la surface et/ou une source omnidirective. Cependant, même lorsque le champ vibratoire est diffus, il existe des singularités qui présentent des surintensités d'énergie. Ces surintensités d'énergie sont causées par les symétries géométriques et temporelles des systèmes qui conduisent à des interférences constructives des rayons vibratoires.

Dans un second temps, on montre que pour deux sous-systèmes couplés ponctuellement, la puissance échangée entre ces deux sous-systèmes est proportionnelle à la différence des énergies locales aux points de couplage. Ce résultat permet de généraliser les résultats des précédents travaux qui montrent que la puissance échangée est proportionnelle à la différence des énergies globales. Il est donc désormais possible de calculer la puissance échangée même lorsque le champ vibratoire n'est pas diffus ou présente des singularités.

**MOTS CLÉS :** Vibration aléatoire - Analyse statistique de l'énergie - Billard ergodique - Champ diffus



## Abstract

---

In this work, we show that the vibrational field in a mechanical system is diffused when the damping is weak and the excitation is random at high frequency. Moreover, the propagation of vibrational waves must be homogeneous and isotropic, which is the case with ergodic geometries. It is nevertheless possible to obtain a diffuse vibrational field even for a non-ergodic system if the excitation forces homogeneity and/or isotropy with a uniformly distributed force field on the surface and/or an omnidirectional force. However, even when the vibrational field is diffuse, there are singularities with energy enhancement. These energy enhancement are caused by the geometrical and temporal symmetries of the systems which lead to constructive interference of the vibrational rays.

In a second step, we show that for two point-coupled subsystems, the power exchanged between these two subsystems is proportional to the difference of the local energies at the coupling points. This result allows to generalize the results of previous works which show that the power exchanged is proportional to the difference of the global energies. It is therefore now possible to calculate the exchanged power even when the vibrational field is not diffuse or presents singularities.



## Remerciements

---

Le goût pour l'étude des vibrations et la volonté d'aller plus loin dans ce domaine m'ont été inspirés par Yves ST-AMANT, professeur à l'université Laval. Je tiens à le remercier ainsi que toute l'équipe du laboratoire de machines hydrauliques, Benoit DUSSAULT, Anthony MUNOZ et Maxime COULAUD qui m'a sans doute donné le goût de poursuivre mes études en thèse.

Je souhaite remercier mes encadrants et directeur de thèse. Merci donc à Nicolas TOTARO et Laurent MAXIT pour leurs conseils, commentaires, critiques et pour l'aide précieuse qui m'a permis de réaliser mes expérimentations rapidement et efficacement. Merci également à Alain LE BOT pour m'avoir engagé sur la voie de la thèse et fait partager une partie de sa culture scientifique. Merci à tous les trois pour vos conseils et pour votre exigence qui m'ont permis de mettre les idées en ordre quand le temps de rédiger est arrivé et tout au long de la thèse pour les présentations orales.

Je suis très reconnaissant à Monsieur Nicolas DAUCHEZ pour avoir accepté de présider cette commission d'examen. Je tiens également à remercier sincèrement Emeline SADOULET-REBOUL et Anas BATOU d'avoir rapporté ce travail. Merci pour votre bienveillance à l'égard de celui-ci et vos encouragements pour la suite.

Je tiens aussi à remercier ceux avec qui j'ai partagé mon quotidien tout au long de ces trois années. Merci à Adrien, Samuel, Youness, les deux Antoine, Gabrielle, Cristobal, Marianna et j'en oublie sûrement. Le Kelly's et les 3B vont sans doute pleurer notre départ.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à toute l'équipe du LTDS. Merci à Samuel PALAMA (encore une fois) et Serge ZARA sans qui la partie expérimentale de cette thèse n'existerait probablement pas. Merci enfin au personnel administratif, Hélène SCHOCH et Elodie COURSAE, efficaces et disponibles.

Je remercie ma famille et notamment mes parents qui m'ont encouragé et soutenu pour la réalisation de cette thèse et j'encourage la dernière étudiante de la famille à continuer jusqu'au doctorat.

Enfin merci Laura, de m'avoir suivie depuis le Québec pour réaliser ce projet. Nos futurs projets commencent déjà à prendre forme...





# Table des matières

---

<b>Résumé</b>	<b>III</b>
<b>Abstract</b>	<b>V</b>
<b>Table des matières</b>	<b>XIII</b>
<b>Table des figures</b>	<b>XXIV</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 État de l’art des méthodes énergétiques</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	8
1.2 Les méthodes déterministes pour les systèmes peu complexes . . . . .	8
1.3 Théories énergétiques pour les moyennes et hautes fréquences . . . . .	10
1.3.1 Coefficients d’influence énergétiques (CIE) . . . . .	11
1.3.2 Mobilités énergétiques EMMA ( <i>Energetic Mean Mobility Approach</i> )	11
1.3.3 La théorie <i>Statistical modal Energy distribution Analysis</i> . . . . .	12
1.3.4 La théorie <i>Wave Intensity Analysis</i> . . . . .	13
1.3.5 Diffusion de l’énergie . . . . .	13
1.3.6 Théorie du transfert radiatif . . . . .	14
1.3.7 Dynamical Energy Analysis (DEA) . . . . .	16
1.4 Conclusion . . . . .	17
<b>2 L’analyse statistique de l’énergie</b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	20
2.2 Échange d’énergie entre deux oscillateurs . . . . .	20
2.3 Échange d’énergie entre sous-systèmes . . . . .	22
2.4 Mise en œuvre de la SEA . . . . .	24
2.4.1 La SEA prédictive . . . . .	24
2.4.2 La SEA inverse . . . . .	25
2.4.2.1 Mesure de l’énergie des sous-systèmes . . . . .	26

2.4.2.2	Mesure de la puissance injectée . . . . .	27
2.5	Les hypothèses de la CPP . . . . .	27
2.5.1	Approche modale . . . . .	28
2.5.2	Approche ondulatoire . . . . .	29
2.5.2.1	Densité d'énergie . . . . .	29
2.5.2.2	Flux d'intensité . . . . .	30
2.5.2.3	Échange d'énergie entre deux sous-systèmes . . . . .	33
2.5.3	Sous-structuration et couplage faible . . . . .	35
2.5.3.1	Sous-structuration . . . . .	35
2.5.3.2	Condition de couplage faible . . . . .	36
2.6	Conclusion . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Critère de champ diffus</b> . . . . .	<b>39</b>
3.1	Définition du champ diffus . . . . .	40
3.1.1	Approche modale . . . . .	40
3.1.2	Approche ondulatoire . . . . .	41
3.1.3	Approche géométrique . . . . .	41
3.2	Densité modale . . . . .	43
3.2.1	Système 1D . . . . .	43
3.2.2	Système 2D . . . . .	44
3.2.3	Système 3D . . . . .	45
3.3	Conditions d'apparition du champ diffus . . . . .	45
3.3.1	Nombre de modes . . . . .	46
3.3.2	Recouvrement modal . . . . .	46
3.3.3	Facteur d'atténuation par unité de longueur . . . . .	47
3.4	Répartition de l'énergie vibratoire dans une plaque rectangulaire . . . . .	48
3.4.1	Calcul de l'énergie locale . . . . .	49
3.4.2	Critère de champ diffus . . . . .	51
3.4.3	Répartition de l'énergie vibratoire . . . . .	53
3.5	Stade de Bunimovich et plaque circulaire . . . . .	57
3.5.1	Répartition de l'énergie vibratoire dans le stade de Bunimovich . . . . .	57
3.5.2	Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque circulaire . . . . .	58
3.6	Excitation avec une force de type <i>rain-on-the-roof</i> . . . . .	60
3.6.1	Plaque rectangulaire fortement amorti . . . . .	61
3.6.2	Plaque circulaire . . . . .	62
3.7	Conclusion . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Mise en évidence des surintensités</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction	66
4.2	Limitations à l'apparition du champ diffus	66
4.2.1	Surintensités causées par les interférences	66
4.2.2	Dynamique des rayons et billard mathématique	76
4.2.3	Propagation des rayons	82
4.2.4	Influence du type d'excitation	85
4.3	Méthodes d'acoustique géométrique	87
4.3.1	Méthode des sources-images	88
4.3.2	Méthode de tir de rayons	89
4.4	Mise en évidence des surintensités par la méthode des sources-images	90
4.4.1	Principe général du calcul des surintensités	90
4.4.2	Plaque rectangulaire	92
4.4.3	Plaque circulaire	95
4.4.4	Stade de Bunimovich	96
4.4.5	Conclusion	98
4.5	Validation numérique des facteurs de surintensité	99
4.5.1	Plaque rectangulaire	99
4.5.2	Plaque en forme de stade	99
4.5.3	Plaque circulaire	99
4.6	Influence des conditions aux limites	101
4.6.1	Réflexion d'une onde plane	101
4.6.2	Configurations possibles pour les conditions aux limites	106
4.6.3	Influence sur les zones de surintensité	106
4.7	Modélisation par tir de rayons	108
4.7.1	Principe de la simulation	109
4.7.2	Plaque rectangulaire	110
4.7.3	Plaque circulaire	112
4.7.4	Plaque en forme de stade de Bunimovich	113
4.8	Conclusions du chapitre	114
<b>5</b>	<b>Mesure des surintensités</b>	<b>115</b>
5.1	Objectifs de la campagne expérimentale	116
5.2	Description du montage expérimental	116
5.2.1	Principe de l'expérience	116
5.2.2	Plaques en flexion	118
5.2.3	Chaîne d'excitation	118
5.2.4	Chaîne de mesure	119

5.2.5	Validation du dispositif expérimental . . . . .	119
5.3	Mesure du facteur d'amortissement des plaques . . . . .	120
5.4	Protocole de mesure . . . . .	121
5.4.1	Réglage du vibromètre laser . . . . .	121
5.4.2	Maillage des plaques . . . . .	123
5.5	Résultats et analyses . . . . .	123
5.5.1	Mesure des facteurs de surintensité . . . . .	125
5.5.2	Mesure de critère de champ diffus . . . . .	126
5.6	Conclusion . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Calcul du coefficient de couplage pour un champ vibratoire non-diffus</b>	<b>129</b>
6.1	Introduction . . . . .	130
6.2	Détermination numérique du coefficient de couplage pour deux plaques couplées . . . . .	130
6.2.1	Fonctions de transfert des plaques couplées . . . . .	130
6.2.2	Énergies locales . . . . .	132
6.2.3	Puissance échangée . . . . .	133
6.2.4	Coefficient de couplage . . . . .	133
6.3	Présentation des systèmes et méthodologie . . . . .	133
6.3.1	Paramètres des simulations numériques . . . . .	133
6.3.2	Validation de l'hypothèse de couplage faible . . . . .	134
6.4	Validation du coefficient de couplage en champ non-diffus . . . . .	136
6.4.1	Plaques rectangulaires avec un faible amortissement . . . . .	136
6.4.2	Plaques en forme de stade . . . . .	140
6.4.3	Plaques circulaires . . . . .	140
6.4.4	Plaques rectangulaires avec un fort amortissement . . . . .	141
6.5	Interprétation physique . . . . .	143
6.6	Conclusion . . . . .	145
<b>7</b>	<b>Mesure du coefficient de couplage pour un champ vibratoire non-diffus</b>	<b>147</b>
7.1	Introduction . . . . .	148
7.2	Principe de l'expérience . . . . .	148
7.3	Description du banc d'essai . . . . .	149
7.3.1	Chaîne d'excitation . . . . .	152
7.3.2	Chaîne de mesure . . . . .	152
7.3.3	Validation du banc d'essais . . . . .	153
7.4	Protocole de mesure . . . . .	153
7.4.1	Mesure des énergies et de la puissance échangée . . . . .	153

7.4.2	Incertitude de mesure . . . . .	154
7.5	Résultats et commentaires . . . . .	157
7.5.1	Analyse des signaux . . . . .	157
7.6	Conclusion . . . . .	162
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>163</b>
<b>9</b>	<b>Annexes</b>	<b>167</b>
9.1	Calcul numérique de l'intersection de deux segments . . . . .	167
9.2	Convergence du pas d'intégration fréquentiel . . . . .	169
9.3	Calcul des intégrales . . . . .	170
	<b>Bibliographie</b>	<b>173</b>
	<b>Liste des publications de l'auteur</b>	<b>183</b>



## Table des figures

---

1	Exemple de découpage d'un système en trois sous-systèmes avec le tablier, le pare-brise et l'habitacle. . . . .	2
1.1	Limite supérieur en fréquence pour la méthode des éléments finis pour des systèmes industriels usuels [1]. . . . .	9
1.2	Fonctions de réponse en fréquence mesurées pour 100 véhicules automobiles identiques. Figure tirée de [2] . . . . .	10
1.3	Illustration de l'interaction entre les modes du sous-système 1 et les modes du sous-système 2. . . . .	12
1.4	Le champ au point $\mathbf{r}$ est obtenu en superposant le champ issu des sources principales émanant du point $\mathbf{s}$ et des sources secondaires émanant du point $\mathbf{p}$ . . . . .	16
2.1	Deux oscillateurs de masse $m_i$ , de raideur $k_i$ et d'amortissement $\lambda_i$ excités par des force aléatoires décorrélées $F_i(t)$ et couplés par une raideur $K$ . . . . .	20
2.2	Deux sous-systèmes composés de trois oscillateurs non-couplés entre eux et excités avec des bruits blancs décorrélés. . . . .	22
2.3	Les sous-systèmes composants le système étudié sont assimilables à des puits d'énergie qui peuvent échanger de l'énergie entre eux, recevoir de l'énergie d'une source extérieure ou dissiper de l'énergie. . . . .	23
2.4	Illustration des modes résonants contenus dans la bande de fréquences $\Delta\omega$ et des modes non-résonants situés en dehors de cette bande de fréquences. . . . .	29
2.5	Le champ au point $\mathbf{r}$ est obtenu en superposant le champ issu des sources volumiques $\rho_i$ au point $\mathbf{s}$ et des sources surfaciques $\sigma_i$ au point $\mathbf{p}$ émettant avec un angle $\theta$ vers le point $\mathbf{r}$ . . . . .	30
2.6	Flux d'intensité . . . . .	30



2.7	Bilan de puissance au point $\mathbf{p}$ sur la frontière $\Gamma$ du domaine $\Omega$ : l'intensité incidente provient des sources volumiques $\rho(\mathbf{s})$ situées dans le triangle d'incidence $dv$ et des sources de frontière $\sigma(\mathbf{q})$ situées sur l'élément de frontière $d\Gamma_{\mathbf{q}}$ . . . . .	31
3.1	Décroissance linéaire du niveau acoustique . . . . .	42
3.2	Nombre de modes propres avec une pulsation inférieure à $\omega$ . . . . .	44
3.3	Fonctions de réponse en fréquence pour : (a), faible densité modale; (b), forte densité modale . . . . .	46
3.4	Fonction de réponse en fréquence pour un recouvrement modal élevé et une densité modale faible . . . . .	47
3.5	Fonction de réponse en fréquence pour un recouvrement modal élevé et une densité modale élevée . . . . .	48
3.6	Plaque rectangulaire en appuis simples excitée par une force ponctuelle $f(x, y, t)$ . . . . .	49
3.7	Amplitude de la densité spectrale de puissance en fonction de $\omega$ . . . . .	50
3.8	Comparaison des fréquences propres pour la plaque rectangulaire calculées de manière numérique (bleue) et analytique (rouge). . . . .	52
3.9	Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour une plaque rectangulaire à bords appuyées excitée avec une source ponctuelle. Le recouvrement modal $M = 1$ , le facteur d'atténuation $\bar{m} = 0.5$ et le nombre de modes $N = 10$ sont représentés par les lignes en pointillées. . . . .	55
3.10	Répartition de l'énergie vibratoire (en dB) calculée avec les modes propres de la plaque rectangulaire avec les bords libres. (a) : Champ modal ( $\Delta f = [20-63]$ Hz, $\eta = 0.002$ ), (b) : Champ direct ( $\Delta f = [20-4000]$ Hz, $\eta = 0.2$ ), et (c) : Champ diffus ( $\Delta f = [20-4000]$ Hz, $\eta = 0.002$ ). Le point source est représenté avec la croix blanche. . . . .	56
3.11	Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour la plaque en forme de stade. Les bords sont encastés et l'excitation est une source ponctuelle. . . . .	57
3.12	Répartition de l'énergie vibratoire (dB) calculée avec les modes propres pour le stade de Bunimovich excité avec une source ponctuelle ( $\Delta f = [20-4000]$ Hz et $\eta = 0.002$ ). La croix blanche représente la position du point d'excitation. . . . .	58
3.13	Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour la plaque circulaire. Les bords sont encastés et l'excitation est une source ponctuelle. . . . .	59

3.14 (a) Répartition de l'énergie vibratoire (dB) calculée avec les modes propres pour la plaque circulaire excitée avec une source ponctuelle ( $\Delta f = [20-4000]$ Hz et $\eta = 0.002$ ). La croix représente la position du point d'excitation. (b) Répartition de l'énergie vibratoire le long de la ligne $d_1$ . . . . .	60
3.15 Plaque circulaire excitée avec excitation de type <i>rain-on-the-roof</i> . . . . .	61
3.16 Évolution du critère de champ diffus $\sigma$ pour une plaque rectangulaire fortement amortie ( $\eta = 0.2$ ) en fonction du nombre d'excitations. . . . .	61
3.17 Évolution du critère de champ diffus $\sigma$ pour une plaque circulaire en fonction du nombre d'excitations. $\sigma$ diminue rapidement et tend vers 0. . . . .	62
4.1 Présentation de la méthode des sources-images pour le cas simple d'une poutre encastree. (a) Propagation d'un rayon après une réflexion et (b) propagation d'un rayon après deux réflexions. . . . .	68
4.2 Répartition de l'énergie vibratoire dans une plaque circulaire obtenue de manière expérimentale. La plaque est excitée de manière ponctuelle avec un bruit blanc aléatoire avec un mini haut-parleur. On distingue clairement une surintensité sur le diamètre et le cercle passant par le point d'excitation. Figure tirée de [3] . . . . .	69
4.3 Cylindre excité par un bruit blanc aléatoire noté $f(t)$ avec une répartition uniforme représentée par les flèches noires. Les deux zones en pointillés présentent une énergie vibratoire trois fois supérieure au reste du cylindre comme le montre Elishakoff [4]. . . . .	70
4.4 Résultat expérimentale d'une plaque triangulaire équilatérale excitée par une force aléatoire à large bande localisée au centre de la plaque. Image tirée de [5]. . . . .	70
4.5 Positions et valeurs des surintensités pour la plaque rectangulaire en fonction de la position du point d'excitation. . . . .	71
4.6 Positions et valeurs des surintensités pour la plaque carrée en fonction de la position du point d'excitation. . . . .	71
4.7 Poutre uniforme avec une liaison pivot à l'extrémité $x = 0$ et une liaison glissière à la seconde extrémité $x = L$ . La force est un bruit blanc aléatoire $f(t)$ appliquée à l'abscisse $x = a$ . . . . .	72
4.8 Corde infinie composée de la corde initiale de longueur $L$ avec la force ponctuelle au point $A_1$ et des différentes sources fictives ( $A_2$ jusqu'à $E_1$ ) déterminées par symétrie par rapport aux extrémités de la corde. Figure extraite de [5]. . . . .	72
4.9 Répartition de l'énergie vibratoire le long de la corde avec $a = 0,3L$ . Figure extraite de [5]. . . . .	74

4.10	Poutre uniforme avec une liaison pivot à l'extrémité $x = 0$ et une liaison glissière à la seconde extrémité $x = L$ . Deux forces aléatoires opposées $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont appliquées. . . . .	75
4.11	Distribution de l'énergie vibratoire dans une cavité rectangulaire. Le facteur de surintensité sur la source $S$ et les points $S^*$ est égale à $9/4$ et $3/2$ sur les lignes. Figure extraite de [6]. . . . .	75
4.12	Illustration de l'effet <i>Coherent Backscattering Enhancement</i> . La trajectoire d'un rayon et le rayon opposé sont représentés respectivement par des lignes pleines et des lignes en pointillés. Les points de réflexion sont désignés par les lettres A, B, C, et D. La source est située au point s et l'énergie est détectée au niveau du récepteur r. Les configurations 1 et 2 correspondent à deux réalisations d'un ensemble de milieux aléatoires. Lorsque la source et le récepteur sont coïncidents, les phases des deux ondes sont égales et donc il en résulte une interférence constructive. . .	76
4.13	(a) Evolution d'une particule dans le billard et (b) dans l'espace des phases associé. La particule rebondit au point de coordonnées $s_1$ et $s_2$ sur l'abscisse curviligne avec, respectivement, un angle $\alpha_1$ et $\alpha_2$ . . . . .	77
4.14	(a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans un triangle quelconque . . . . .	79
4.15	(a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans un triangle équilatéral . . . . .	80
4.16	Réflexions spéculaires d'un rayon sur la plaque circulaire pour une excitation placée à $a = 0$ m ; à $a = 0.05$ m et $a = 0.35$ m du centre du cercle. Figure tirée de [7]. . . . .	81
4.17	Propagation d'un rayon dans un billard circulaire avec un segment légèrement coupée de longueur $10^{-2}R$ . Figure tirée de [8]. . . . .	81
4.18	Dimensions des billards en mm. (a) ; Disque, (b) ; Stade de Bunimovich, et (c) ; Rectangle. . . . .	82
4.19	(a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans le billard circulaire . . . . .	83
4.20	(a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associés dans le stade de Bunimovich . . . . .	84
4.21	(a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associés dans le billard rectangulaire . . . . .	85

4.22 (a) Excitation de type couple qui crée une excitation dans une seule direction. (b) Excitation de type ponctuel qui crée une excitation isotrope. (c) Excitation de type <i>rain-on-the-roof</i> caractérisée par une infinité de forces ponctuelles décorréélées les unes des autres en temps et en espace. . . . .	86
4.23 Calcul du champ d'énergie vibratoire au point $r$ par la méthode des sources-images. La source fictive $S'$ est le symétrique de la source $S$ par rapport à la surface. . . . .	88
4.24 Calcul du champ d'énergie vibratoire au point $r$ par la méthode de tir de rayons. La source $S$ envoie des rayons de manière isotrope qui rebondissent sur la surface et passent au travers de la cellule réceptrice. . . . .	90
4.25 Exemples de sources-images sur une plaque rectangulaire avec la source réelle au point $S_0$ (a) à l'ordre 1 et (b) à l'ordre 1 et 2. . . . .	91
4.26 Plaque rectangulaire en trait épais avec la source au point $S_0$ . Les 15 sources-images sont obtenues ( $A, B, \dots, D_3, C_3$ ) en déterminant les symétries successives du point $S_0$ par rapport aux arêtes de la plaque rectangulaire. Les lignes en pointillés ( $d_0, d_1, d_2$ , et $d_3$ ) et les points ( $S_0, S_1, S_2$ , et $S_3$ ) de surintensité sont représentés. Les rayons provenant des sources-images interférant constructivement sur la ligne $d_2$ sont représentées . . . . .	93
4.27 Plaque rectangulaire en trait épais avec la source au point $S_0$ . Les rayons provenant des doublets de sources-images interférant constructivement sur le point $S_3$ sont représentés en traits pleins et les quadruplets en traits tirets. . . . .	94
4.28 Plaque circulaire avec le contour discrétisé. La source est située au point $S_0$ . Les sources-images sont obtenues par symétrie avec les arêtes de la plaque. Elles interfèrent constructivement sur la ligne $d_0$ . . . . .	96
4.29 Plaque en forme de stade avec le contour discrétisé. La source est située au point $S_0$ . Les sources-images sont obtenues par symétrie avec les arêtes de la plaque. Elles interfèrent constructivement sur les quatre points $S_0, \dots, S_3$ . . . . .	98
4.30 Champ vibratoire pour la plaque rectangulaire avec les bords appuyés obtenu avec la simulation par éléments finis. L'excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au point $S_0$ . On observe quatre lignes ( $d_i$ ) en pointillés et quatre points ( $S_i$ ) à l'intersection des lignes et situés de manière symétrique par rapport à la source. . . . .	100

4.31	Champ vibratoire pour la plaque en forme de stade avec les bords fixes obtenue avec la simulation par éléments finis. L'excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au point $S_0$ . On observe quatre points de surintensité notés ( $S_i$ ) situés de manière symétrique par rapport à la source. . . . .	101
4.32	Champ vibratoire pour la plaque circulaire avec les bords fixes obtenue avec la simulation par éléments finis. L'excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée sur la croix. Il existe une surintensité sur la ligne de diamètre $d_0$ et sur le cercle passant par le point d'excitation. . . . .	102
4.33	Onde incidente $A$ avec un angle $\theta$ et onde réfléchi $B$ à la frontière d'une plaque semi-infinie . . . . .	102
4.34	Évolution du déphasage entre le rayon incident et le rayon réfléchi en fonction de l'angle d'incidence pour les conditions aux limites encastree et libre . . . . .	105
4.35	Configurations possibles pour une plaque rectangulaire avec deux conditions aux limites différentes $E$ (encastree ou libre) et $A$ (appuyée). . . . .	107
4.36	Répartition de l'énergie vibratoire pour la plaque rectangulaire obtenu avec la méthode des éléments finis en fonction des conditions limites. L'excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au niveau de la croix noire. . . . .	108
4.37	Principe de fonctionnement de l'algorithme de tir de rayons. La source $S$ émet des rayons de manière isotrope qui rebondissent sur les frontières. Lorsqu'un rayon traverse une cellule de rayon $r_c$ , le champ porté par le rayon est ajouté au champ total de la cellule. . . . .	110
4.38	Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque rectangulaire en fonction des conditions limites obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope. . . . .	111
4.39	Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque circulaire obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope. . . . .	113
4.40	Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque en forme de stade obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope. . . . .	114

5.1	Montage expérimental. La plaque est suspendue avec des élastiques au cadre rigide. Le pot vibrant excite la plaque de manière ponctuelle à travers la tige qui est collée sur la plaque. L'excitation est un bruit blanc aléatoire. La plaque est maillée et la réponse est mesurée à l'aide du vibromètre laser. . . . .	117
5.2	Photographie du montage expérimental. La plaque (1) avec les bords libres est suspendue au cadre rigide et est excitée par le pot vibrant (2) et le champ vibratoire est mesuré avec le vibromètre laser (3). . . . .	117
5.3	Dimensions des plaques en mm. (a); Disque, (b); Stade de Bunimovich, et (c); Rectangle. . . . .	118
5.4	Fonction de réponse en fréquence de la plaque rectangulaire. Les quatre bords de la plaque sont libres et l'excitation ponctuelle est un balayage sinus réalisé entre 0 et 6 kHz durant 60 s. La FRF est déterminé avec l'estimateur $H_1$ . . . . .	121
5.5	Évolution du taux d'amortissement en fonction de la fréquence pour la plaque rectangulaire. Le taux d'amortissement est mesuré avec la méthode de la bande passante à -3 dB. Les quatre bords de la plaque sont libres. Au-delà de 600 Hz, le taux d'amortissement se stabilise autour de 0,001. . . . .	122
5.6	Localisation de la plaque rectangulaire dans le plan fréquence/amortissement. La plaque rectangulaire se situe au point C dans la zone de champ diffus. . . . .	122
5.7	Maillage de la plaque circulaire, de la plaque rectangulaire et de la plaque en forme de stade réalisée avec le logiciel Polytec. . . . .	124
5.8	Densité spectrale de puissance de la vitesse ( $S_{\ddot{u}\ddot{u}}$ ) mesurée avec le vibromètre laser pour la plaque rectangulaire avec les bords libres et excitée avec un bruit blanc aléatoire. . . . .	125
5.9	Résultats expérimentaux de la répartition de l'énergie vibratoire (dB) pour les trois plaques. L'excitation est une force ponctuelle de type bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquences [20-4000] Hz localisée au niveau de la croix et $\eta = 0.002$ . Les conditions aux limites pour les trois plaques sont libres. . . . .	128
6.1	Deux plaques couplées avec un ressort de raideur $K$ au point $\mathbf{r}_{12}$ sur la plaque 1 et au point $\mathbf{r}_{21}$ sur la plaque 2. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire $F$ au point $\mathbf{s}$ . . . . .	132
6.2	Deux plaques rectangulaires couplées entre elles avec un ressort de raideur $K$ au point $\mathbf{r}_{12}$ sur la plaque 1 et au point $\mathbf{r}_{21}$ sur la plaque 2. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire $F$ au point $\mathbf{s}$ . . . . .	134

6.3	Évolution du coefficient de couplage $\beta_{12}^{\text{th}}$ et $\beta_{12}^{\text{num}}$ en fonction de la raideur du coefficient de couplage $K$ . . . . .	136
6.4	Évolution du ratio $E_1/E_2$ en fonction de la raideur du coefficient de couplage $K$ . . . . .	137
6.5	Deux plaques rectangulaires couplées et excitées avec un bruit blanc aléatoire $F$ au point $\mathbf{s}_1$ sur la plaque 1. Les lignes avec un facteur de surintensité de $3/2$ sont représentées avec des traits en pointillés et les points à l'intersection de ces lignes avec un facteur de surintensité de $9/4$ sont notés $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ , et $\mathbf{s}_4$ . Le ressort de couplage est attaché au centre de la plaque 2 ( $\mathbf{r}_{21}$ ). (a) Le couplage est fixé en dehors des zones de surintensité, (b) le couplage est fixé sur les lignes de surintensité et (c) le couplage est fixé sur les points de surintensité $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ , et $\mathbf{s}_4$ . . . . .	138
6.6	(a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales pour la plaque rectangulaire excitée de manière ponctuelle avec les bord appuyés. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ). . . . .	139
6.7	Deux plaques en forme de stade avec les bords encastés, couplées et excitées avec un bruit blanc aléatoire $F$ au point $\mathbf{s}_1$ sur la plaque 1. Les points avec un facteur de surintensité de 2 sont notés $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$ , et $\mathbf{s}_4$ . Le ressort de couplage est attaché au centre de la plaque 2 ( $\mathbf{r}_{21}$ ). (a) Le ressort est fixé sur des points typiques situés en dehors des points de surintensité et (b) le ressort est fixé sur les points de surintensité. . . . .	141
6.8	(a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ) pour deux plaques en forme de stade avec les bords encastés couplées entre elles et excitées avec une force ponctuelle sur la plaque 1. . . . .	142
6.9	Deux plaques circulaires avec les bords encastés couplées entre elles et excitées avec un bruit blanc aléatoire $F$ au point $\mathbf{s}_1$ sur la plaque 1. Le cercle avec une surintensité d'énergie sur la plaque 1 est notée $C_1$ . Sur la plaque 2, le ressort de couplage est attaché au centre sur le point $\mathbf{r}_{21}$ . Sur la plaque 1, le ressort est successivement attaché sur les 108 points le long de la ligne en pointillés $d_1$ . . . . .	143
6.10	(a) Comparaison entre les puissances échangées et la différence des énergies locales pour la plaque circulaire avec les bords encastés. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le coefficient de couplage déterminé numériquement ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ). . . . .	144

6.10 a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales pour la plaque rectangulaire fortement amortie et excitée de manière ponctuelle avec les bord appuyés. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{th}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{num}$ ). . . . .	146
7.1 Principe du banc d'essai. Deux plaques rectangulaires sont suspendues à un cadre rigide. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire à l'aide d'un pot vibrant. Les deux plaques sont reliées entre elles par un ressort de couplage. Les énergies sont mesurées avec deux accéléromètres situés au niveau des points de couplage sur les plaques 1 et 2. . .	149
7.2 Photographie du montage expérimental. Le signal est généré avec le générateur de signal (1) puis passe à travers le filtre (2) avant d'être amplifié avec l'amplificateur (3). Les deux plaques (5) sont alors excitées avec le pot vibrant (4) et l'accélération des deux plaques est mesurée avec les accéléromètres (6). La force injectée par le pot vibrant est mesurée avec un capteur de force et amplifiée avec l'amplificateur de charge (8). Les signaux mesurés (accéléromètres et capteur de force) sont conditionnés avec la carte d'acquisition (6) et transférés vers l'ordinateur (9). . . . .	150
7.3 Photographie du couplage entre les deux plaques. Le pot vibrant (1) excite la plaque 1. La force injectée est mesurée à l'aide d'un capteur force (2). Le couplage entre les deux plaques (5) est réalisé avec un ressort (3) fixé sur les plaques avec des aimants à oeillet (4). . . . .	151
7.4 Réglage de l'alignement orthogonal entre le pot vibrant et la plaque 1. . .	152
7.5 Photographie de la plaque 1 avec les différents points de mesure et de couplage ainsi que le point d'excitation ( $s_0$ ) et les lignes de surintensité. . . . .	154
7.6 Distribution de l'énergie vibratoire mesurée à 100 reprises sur la plaque 1. La distribution suit une loi de type log-normale. . . . .	155
7.7 Distribution de l'énergie vibratoire mesurée à 100 reprises sur la plaque 1 (a), sur la plaque 2 (b) en dB. (c) Distribution de la puissance échangée en dB entre les deux plaques mesurées à 100 reprises. . . . .	156
7.8 (a) Évolution temporelle de la mesure l'accéléromètre 1 et (b) évolution temporelle de la force injectée par le pot vibrant. . . . .	157
7.9 (a) Densité inter-spectrale de puissance entre la mesure de l'accéléromètre et la force ( $S_{fa}$ ) et (b) densité spectrale de puissance de la force injectée dans le système ( $S_{ff}$ ). . . . .	158
7.10 (a) Fonction de réponse en fréquence typique pour la plaque 1 et (b) fonction de réponse en fréquence typique pour la plaque 2. . . . .	159



7.11 (a) Comparaison entre les puissances échangées et la différence des énergies locales obtenues expérimentalement. b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le coefficient de couplage déterminé expérimentalement ( $\beta_{12}^{\text{exp}}$ ). . . . .	161
9.1 Deux segments [AB] et [CD], $\vec{I}$ le vecteur $\vec{AB}$ , $\vec{J}$ le vecteur [CD] et $P$ le point d'intersection. . . . .	167
9.2 Détermination du pas fréquentiel pour calculer les énergies. . . . .	169
9.3 Évolution du critère de champ diffus en fonction du pas d'intégration fréquentiel . . . . .	170
9.4 Représentation géométrique pour le changement de variable de l'équation (9.6) . . . . .	171
9.5 Représentation géométrique pour le changement de variable de l'équation (9.8) . . . . .	171





## Contexte sociétal et industriel

Les exigences des particuliers et des collectivités publiques en ce qui concerne la réduction du bruit sont de plus en plus élevées. En France, le Conseil national du bruit (CNB) et l'Agence de la transition écologique (ADEME) [9] ont évalué le coût social du bruit à 147 milliards d'euros par an en France. C'est le bruit des transports qui représente la majeure partie de ce coût avec 68,4 %. Dans le secteur aéronautique, depuis les années 60, les progrès en motorisation se sont traduits par une division par quatre du bruit perçu en une cinquantaine d'années. En Europe, le conseil consultatif pour la recherche aéronautique ACARE a fixé l'objectif de réduire le bruit émis par les avions en vol de 65 %. Pour le secteur automobile, la réglementation impose une diminution d'environ 3 dB tous les dix ans [10]. Pour atteindre ces objectifs, il est nécessaire d'étudier la production du bruit, mais également sa propagation afin de les réduire ou d'en modifier la perception.

Afin d'anticiper au maximum les interactions sonores et vibratoires des systèmes dynamiques complexes, l'ingénierie vibroacoustique fait appel aux tests expérimentaux et aux simulations numériques. Depuis les années 80, les industriels s'intéressent de plus en plus aux méthodes de modélisation des phénomènes physiques car elles peuvent remplacer des essais réels sur des prototypes par des simulations numériques durant la phase de conception et de certification et donc réduire les coûts et les durées de développement de ces produits. Pour ce faire, plusieurs théories et méthodes sont disponibles, mais pour déterminer le comportement vibroacoustique de systèmes complexes, la théorie de l'analyse statistique de l'énergie est généralement privilégiée.

## Théorie de l'Analyse statistique de l'énergie

La théorie de l'analyse statistique de l'énergie ou SEA (*Statistical Energy Analysis*) [11, 1] est une théorie statistique qui permet de déterminer les réponses vibratoires ou acoustiques de structures divisées en sous-parties appelées sous-systèmes. La SEA

est la plus répandue des théories énergétiques en vibroacoustique utilisées dans le contexte industriel. Elle fait toujours l'objet de nombreuses études théoriques bien que ses fondements aient été posés dans les années 60. Les travaux de cette thèse portant sur cette théorie, ses fondements seront présentés en détails dans le chapitre 2.

Un modèle SEA permet d'obtenir une description énergétique d'un système complexe divisé en sous-systèmes. La figure 1 présente l'exemple d'une voiture décomposée en plusieurs sous-systèmes avec le tablier, le pare-brise et l'habitacle.

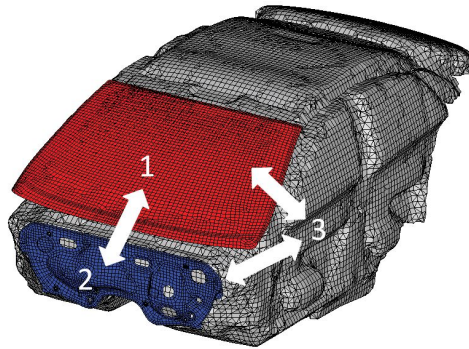


FIGURE 1 – Exemple de découpage d'un système en trois sous-systèmes avec le tablier, le pare-brise et l'habitacle.

En régime stationnaire, le bilan d'énergie du sous-système  $i$  s'écrit :

$$P_{i,\text{inj}} = \sum_{j \neq i} P_{ij} + P_{i,\text{diss}} \quad (0.1)$$

avec  $P_{i,\text{inj}}$  la puissance injectée dans le sous-système  $i$ ,  $P_{i,\text{diss}}$  la puissance dissipée et  $P_{ij}$  les puissances échangées avec les différents sous-systèmes adjacents  $j$ .

L'équation fondamentale de la SEA est appelée *coupling power proportionality* (CPP). Elle stipule que la puissance vibratoire échangée entre deux sous-systèmes  $i$  et  $j$  est proportionnelle à la différence des énergies modales de ces deux sous-systèmes :

$$P_{ij} = \beta \left( \frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j} \right) \quad (0.2)$$

avec  $E_i$  l'énergie globale et  $N_i$  le nombre de modes du sous-système  $i$ . Le coefficient de couplage est noté  $\beta$ .

La SEA est adaptée à l'analyse des systèmes vibratoires complexes mais doit vérifier de nombreuses hypothèses pour être appliquée :

- le couplage entre les sous-systèmes doit être faible et conservatif,
- l'excitation est aléatoire, stationnaire, large bande,

- l'énergie est répartie de manière uniforme sur l'ensemble des modes (équipartition modale de l'énergie),
- le champ vibratoire dans chaque sous-système est homogène et isotrope, c'est-à-dire diffus.

L'hypothèse de champ diffus est la plus contraignante à vérifier [7]. Pour un système excité ponctuellement avec une excitation large bande Le Bot et Cotoni [12] ont proposé un estimateur afin de savoir *a priori* si le champ vibratoire est diffus ou non. Ils ont montré que le champ vibratoire devient diffus si l'amortissement du système est faible et si l'excitation est située dans une large bande à haute fréquence. Par la suite Hao *et al.* [13] ont montré que le champ vibratoire est diffus lorsque la propagation des ondes vibratoires est homogène (les ondes passent par tous les points du système) et isotrope (les ondes se propagent dans toutes les directions). La géométrie des systèmes peut imposer l'homogénéité, l'isotropie ou les deux en même temps dans le cas de système ergodique. Mais les sources excitatrices peuvent aussi imposer l'homogénéité et l'isotropie du champ vibratoire selon qu'elles sont réparties sur toute la surface ou qu'elles rayonnent de façon omnidirective.

Cependant, même lorsque les conditions de champ diffus sont réunies c'est à dire avec un amortissement faible et une source aléatoire large bande, Crandall [14] et Elishakoff [15] ont montré que le champ vibratoire peut présenter des zones de surintensité. Celles-ci sont des points ou des lignes (donc une zone de surface nulle) où l'énergie vibratoire est plus forte ou plus faible qu'ailleurs. Il est alors possible de penser que ces zones de surintensité mettent en défaut l'hypothèse de champ diffus et constituent une limite pour l'application de la SEA.

## Objectifs et principaux apports de la thèse

Dans ce contexte, l'objectif principal de la thèse est de montrer que l'équation principale de l'analyse statistique de l'énergie, la *coupling power proportionality* (CPP) reste valide même lorsque le champ vibratoire est diffus avec des singularités ou lorsqu'il n'est pas diffus.

Dans un premier temps, on cherche à déterminer les conditions sur l'amortissement du système et la bande de fréquences d'excitation propices à l'apparition d'un champ vibratoire diffus pour un système excité de manière ponctuelle. Même lorsque ces conditions sont respectées, le champ vibratoire est diffus uniquement si la propagation des ondes se fait de manière homogène et isotrope. Lorsque ces trois conditions sont réunies, on considère que le champ vibratoire est globalement diffus. Toutefois, il existe des zones composées de lignes ou de points présentant des surintensités. La

première phase de l'étude consiste donc à identifier les facteurs de surintensité ainsi que la position de ces singularités pour trois différentes formes de plaques. Les surintensités sont calculées de manière analytique avec la méthode des sources-images puis numériquement avec des simulations par éléments finis. Une campagne expérimentale est réalisée afin de valider les résultats obtenus.

Comme nous l'avons vu précédemment (section 2.5), la SEA et donc la *coupling power proportionality* sont valides lorsque le champ vibratoire est parfaitement diffus. La question est désormais de savoir si la *coupling power proportionality* reste valide lorsque le champ vibratoire n'est pas diffus, ou s'il est diffus, mais présente des singularités. Dans ce travail, on propose une reformulation de la *coupling power proportionality* par la prise en compte des énergies locales et non plus des énergies globales. Cette reformulation permet de prendre en compte l'énergie locale au niveau des points de couplage. On s'intéresse au cas général de deux plaques couplées entre elles de manière ponctuelle par un ressort. Le coefficient de couplage est alors calculé numériquement en faisant varier le point d'attache du ressort et il est comparé à sa valeur théorique. Finalement, une seconde campagne expérimentale est menée pour valider les résultats numériques du coefficient de couplage entre deux plaques.

## Organisation du manuscrit

Le mémoire s'articule autour de deux grandes parties.

- Dans un premier temps les conditions d'apparition du champ diffus et les phénomènes qui contrarient son apparition sont présentés.
- Dans un second temps, on détermine le coefficient de couplage entre deux plaques couplées de manière numérique lorsque le champ vibratoire n'est pas diffus ou présente des singularités. Une comparaison est réalisée avec le coefficient de couplage théorique.

L'ensemble du document est composé de sept chapitres :

- Le premier chapitre présente un état de l'art des méthodes énergétiques.
- Le second chapitre présente une revue bibliographique de la SEA, ses hypothèses ainsi que ses limitations.
- Le troisième chapitre concerne l'émergence du champ diffus. Les conditions d'apparition du champ diffus sont explicitées et un critère de champ diffus est établi. Le champ diffus est étudié pour trois formes de plaques (rectangulaire, circulaire et stade de Bunimovich) et un parallèle est fait avec la théorie des billards.

- Dans le quatrième chapitre, les zones de surintensité sont déterminées de manière analytique avec la méthode des sources-images et avec un algorithme de tir de rayons. L'influence des conditions aux limites sur les zones de surintensité est également déterminée.
- Dans le cinquième chapitre, une campagne expérimentale est réalisée pour déterminer la répartition du champ vibratoire dans les trois plaques de formes différentes.
- Dans le sixième chapitre, la SEA est appliquée pour un système composé de deux plaques couplées. Il est montré que le coefficient de couplage reste valide même si le champ vibratoire n'est pas diffus et présente des zones de surintensité.
- Dans le septième chapitre, une campagne expérimentale est réalisée pour valider les résultats numériques du couplage entre deux plaques.





# 1

## État de l'art des méthodes énergétiques

---

### Sommaire

---

1.1	Introduction . . . . .	8
1.2	Les méthodes déterministes pour les systèmes peu complexes . . .	8
1.3	Théories énergétiques pour les moyennes et hautes fréquences . . .	10
1.4	Conclusion . . . . .	17

---

## 1.1 Introduction

Le choix entre méthodes numériques et théories statistiques pour étudier le comportement vibroacoustique d'un système déformable réside dans la complexité de mise en œuvre, la fiabilité et la précision des résultats, mais également dans le coût de calcul nécessaire pour effectuer la simulation.

Cette partie bibliographique présente dans un premier temps les limitations des méthodes déterministes telle que la méthode par éléments finis pour les calculs à haute fréquence. Par la suite, plusieurs théories ou méthodes énergétiques utilisées pour modéliser le comportement vibratoire de systèmes dans le domaine des hautes fréquences sont décrites. Les avantages et les limitations de chaque méthode sont présentés.

## 1.2 Les méthodes déterministes pour les systèmes peu complexes

Les méthodes déterministes comme les éléments finis ou les éléments de frontière sont basées sur un comportement global de la structure. Ces méthodes sont précises et permettent de calculer en tout point la réponse en fréquence du système. Bien que la théorie physique sur laquelle repose les méthodes déterministes soit valable quelle que soit la complexité du système vibrant, en pratique ces méthodes sont limitées aux systèmes ayant des comportements vibratoires peu complexes car c'est dans ce domaine que l'on rencontre le plus souvent un comportement modal de la structure. Les points limitants des méthodes déterministes sont les suivants :

- A haute fréquence, les méthodes déterministes sont limitées par la puissance de calcul des ordinateurs. Pour les éléments finis, la taille caractéristique d'un élément du maillage de la structure est déterminée par la longueur d'onde des phénomènes étudiés. Plus la fréquence est élevée, plus la longueur d'onde est courte, et plus le nombre de degrés de liberté à considérer est important. Les calculs deviennent rapidement trop coûteux en temps. Le nombre de degrés de liberté augmente également avec la taille du système étudié. Pour une taille d'élément identique, le nombre de degrés de liberté d'un immeuble sera plus important que le nombre de degrés de liberté d'une voiture. La figure 1.1 présente un ordre de grandeur de la fréquence maximale accessible avec la méthode des éléments finis pour différents systèmes de tailles différentes.
- Lorsqu'un système est décrit avec des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites, les solutions sont exprimées dans une base modale. A

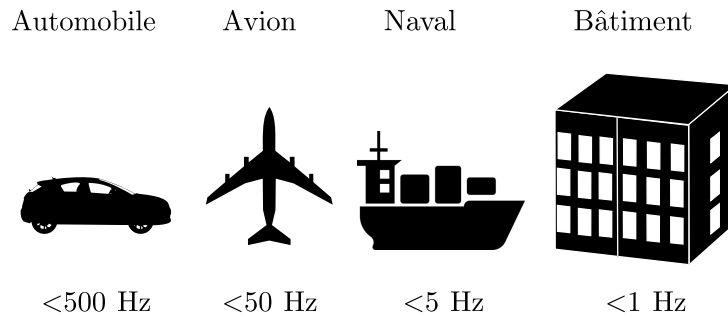


FIGURE 1.1 – Limite supérieur en fréquence pour la méthode des éléments finis pour des systèmes industriels usuels [1].

basse fréquence, les modes d'une structure sont suffisamment espacés en fréquence et faciles à mesurer séparément. Au fur et à mesure que la fréquence augmente, le nombre de modes augmente et ils finissent par se superposer les uns aux autres. C'est le recouvrement modal. Les modes ne sont donc plus discernables les uns des autres et leur utilisation à haute fréquence n'est plus pertinente.

- Plus la fréquence d'étude augmente, plus la structure a un comportement aléatoire. Ce comportement aléatoire est lié à la méconnaissance des valeurs exactes des paramètres du système due aux tolérances de fabrication, la localisation des sources et les caractéristiques des matériaux. Les méthodes déterministes s'appliquent parfaitement pour un système connu dans ses moindres détails mais sont très sensibles aux légères modifications que possède une population de structures. Une dispersion des réponses vibratoires pour des structures apparemment identiques a été observée [2]. L'auteur mesure des fonctions de réponse en fréquence en des points identiques sur un lot d'une centaine de véhicules automobiles en principe identiques. Les résultats de ces mesures présentent de fortes disparités qui sont de plus en plus importantes au fur et à mesure que la fréquence augmente tel que présenté à la figure 1.2.

Ces disparités sont dues à des variations non identifiées des caractéristiques des structures considérées. Pour un réseau de plaques couplées, il est montré qu'il existe des zones hypersensibles à certains paramètres [16]. La méthode mise en place consiste à évaluer la valeur d'un résidu énergétique perturbé par les défauts et de les comparer avec la solution nominale. Récemment, il a été montré que l'incertitude sur les données géométriques d'une structure donne lieu à des variations plus importantes des fréquences naturelles comparées aux incertitudes sur les caractéristiques des matériaux [17]. La variation des fréquences propres peut être égale à 4 % ce qui rend les méthodes déterministes inopérantes à hautes fréquences.

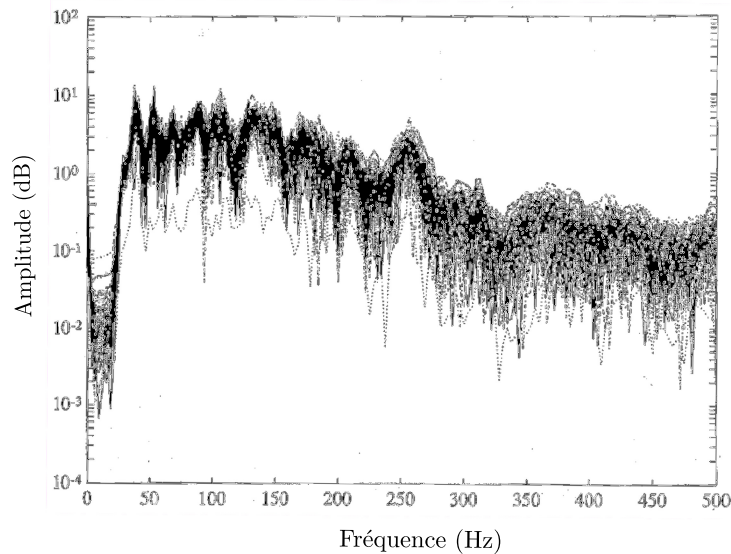


FIGURE 1.2 – Fonctions de réponse en fréquence mesurées pour 100 véhicules automobiles identiques. Figure tirée de [2]

Finalement, on comprend que les modes sont utiles en basses fréquences mais sont moins pertinents à haute fréquence. Ainsi, pour pouvoir déterminer les niveaux vibratoires et acoustiques de structures présentant des comportements vibratoires complexes, d'autres méthodes et théories ont été développées en s'appuyant sur des grandeurs énergétiques moyennées spatialement, en fréquence ou sur une population de structures nominale-ment identiques. La rapidité des calculs est nettement améliorée au détriment de l'information perdue sur les modes vibratoires.

### 1.3 Théories énergétiques pour les moyennes et hautes fréquences

Les théories énergétiques comme l'analyse statistique de l'énergie sont majoritairement non déterministes et permettent de prédire le comportement vibroacoustique d'un système. Ces théories s'appuient sur l'évaluation de quantités énergétiques moyennées aussi bien en espace, en fréquence, sur des ensembles de systèmes identiques ou sur les paramètres du système. Les quantités énergétiques présentent différents avantages : ce sont des scalaires positifs facilement sommables et leur utilisation permet de relier linéairement les énergies aux puissances vibratoires injectées dans les sous-systèmes. Par la suite, plusieurs théories énergétiques sont présentées. L'hypothèse de base commune à toutes ces théories est l'utilisation d'une source aléatoire.

### 1.3.1 Coefficients d'influence énergétiques (CIE)

La méthode des coefficients d'influence énergétiques développée par Guyader et al. [18] est une méthode énergétique statistique basée sur une analyse modale du système étudié. L'hypothèse fondamentale de cette théorie est que les excitations extérieures doivent être stationnaires et décorrélées les unes des autres. On considère plusieurs systèmes mécaniques ou acoustiques linéaires couplés entre eux. Contrairement à la SEA, aucune hypothèse n'est nécessaire sur la nature du couplage. Le couplage entre deux structures peut donc être fort. La méthode CIE permet d'obtenir l'énergie des sous-systèmes par la multiplication d'une matrice de coefficients d'influence et d'un vecteur représentant les densités spectrales de puissance des excitations des sous-systèmes. Pour un sous-système  $j$  soumis à une excitation aléatoire avec une densité spectrale de puissance constante dans la bande de fréquences  $\Delta\omega$  et égale à  $S_j$ , l'énergie du sous-système  $j$  dans la bande de fréquence  $\Delta\omega$  est égale à

$$\langle E_i \rangle = \sum_j C_{ij} S_j \quad (1.1)$$

avec  $C_{ij}$  le coefficient d'influence calculé à partir des modes globaux de la structure. Cette méthode requiert la connaissance des fonctions de réponse en fréquence. Elle a été appliquée à deux plaques couplées en L et les résultats ont été vérifiés expérimentalement [19].

### 1.3.2 Mobilités énergétiques EMMA (*Energetic Mean Mobility Approach*)

Orefice et al. [20] introduit la méthode des mobilités énergétiques pour quantifier les échanges d'énergie vibratoire par bande de fréquences dans un sous-système. Les mobilités énergétiques sont définies comme le rapport entre la vitesse quadratique moyennée en fréquence d'un point de la structure et la puissance active injectée également moyennée en fréquence en un autre point de la structure. Ces mobilités énergétiques sont calculées à partir des mobilités classiques des sous-systèmes isolés. Orefice introduit un 'facteur de connexion' dépendant des mobilités classiques des deux systèmes afin de déterminer la relation de connectivité entre deux systèmes même en cas de couplage fort. La méthode a été appliquée aux couplages ponctuels entre les sous-systèmes. L'avantage de cette méthode est que l'hypothèse de couplage faible n'est plus nécessaire. Récemment, les travaux de Ryu ont permis d'étendre les applications à des cas de couplage fluide-structure [21].

### 1.3.3 La théorie *Statistical modal Energy distribution Analysis*

La théorie *statistical modal energy distribution analysis* (SmEdA) développée par Maxit et al. [22, 23, 24] a pour objectif d'étendre le domaine d'application de la théorie SEA pour les moyennes fréquences lorsque le recouvrement modal est faible. Contrairement à la théorie SEA, l'hypothèse d'équipartition modale n'est plus nécessaire. La théorie SmEdA découle de la reformulation de la SEA avec la double formulation modale déplacement-contrainte au niveau du couplage. On peut alors décrire l'interaction entre les modes de deux sous-systèmes comme des oscillateurs avec un couplage gyroscopique. Un mode d'un sous-système est couplé avec tous les modes du second sous-système ce qui correspond à la définition du couplage entre les modes tel que présenté à la figure 1.3.

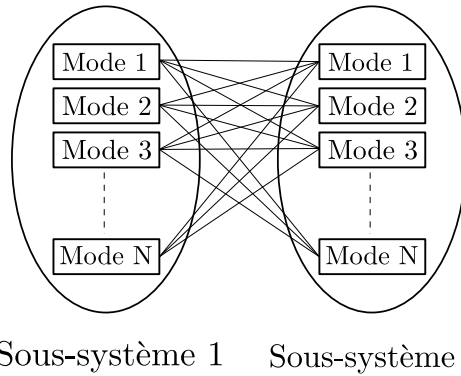


FIGURE 1.3 – Illustration de l'interaction entre les modes du sous-système 1 et les modes du sous-système 2.

Le principe repose sur un compromis entre la méthode des éléments finis et la SEA. La théorie SmEdA consiste à décomposer le système principal en plusieurs sous-systèmes et de calculer les modes propres de chaque sous-système à l'aide d'un logiciel d'éléments finis dans une bande de fréquences donnée. Les coefficients de couplage entre les différents modes sont ensuite déterminés. Ceci permet d'obtenir les puissances échangées par chaque couple de modes des sous-systèmes et de déterminer le coefficient de perte par couplage au sens de la théorie SEA.

On considère le mode  $p$  du sous-système 1. Le principe de la conservation de l'énergie appliqué à ce mode donne

$$P_{\text{inj}}^p = P_{\text{diss}}^p + \sum_{q=1}^{N_2} P_{pq} \quad (1.2)$$

avec  $P_{\text{inj}}^p$  la puissance injectée dans le mode  $p$ ,  $P_{\text{diss}}^p$  la puissance dissipée par l'amortissement modal du mode  $p$ , et  $\sum_{q=1}^{N_2} P_{pq}$  la puissance échangée entre le mode  $p$  du

sous-système 1 et les modes du sous-système 2. Il est important de remarquer qu'un mode d'un sous-système est couplé à tous les modes d'un autre sous-système mais n'est pas couplé aux autres modes du sous-système auquel il appartient en vertu de l'orthogonalité de la base modale. La théorie SmEdA présente un avantage par rapport à la SEA pour trois cas typiques : 1) les sous-systèmes présentent un recouvrement modal faible, 2) les sous-systèmes ont une structure hétérogène, et 3) les sous-systèmes sont excités avec une excitation ponctuelle [25]. Excepté l'hypothèse concernant les densités modales, les autres hypothèses nécessaires en SEA s'appliquent également à la théorie SmEdA. Les sous-systèmes doivent être faiblement couplés et les amplitudes modales entre deux sous-systèmes doivent être décorréliées.

### 1.3.4 La théorie *Wave Intensity Analysis*

En analyse statistique de l'énergie, les grandeurs énergétiques ne sont représentatives des phénomènes réels que si elles satisfont les hypothèses de champ diffus et d'équipartition de l'énergie entre les modes d'un même groupe. En réalité, il est possible qu'une frontière d'un système privilégie la transmission de certaines incidences des ondes. Langley et al. [26, 27] a développé une méthode appelée '*Wave Intensity Analysis*' (WIA) basée sur une approche ondulatoire. C'est une reformulation de la SEA qui permet de s'affranchir de l'hypothèse d'isotropie du champ vibratoire et suppose que le champ vibratoire présente éventuellement des directions privilégiées. Cependant le champ vibratoire est toujours homogène. Cette méthode a été utilisée sur un assemblage de 15 plaques couplées en L [27]. Il montre que l'écart entre la SEA et un calcul exact atteint 30 dB alors que l'approche proposée obtient de meilleurs résultats à partir de 3 degrés de liberté par sous-systèmes. Avec cette approche ondulatoire, Langley montre que les interfaces entre les sous-systèmes jouent un rôle de filtre suivant la direction des ondes et cela peut conduire à des champs hautement non diffus. Toutefois cette méthode est limitée car elle ne permet pas de donner la répartition de l'énergie à l'échelle de la sous-structure.

### 1.3.5 Diffusion de l'énergie

D'autres théories, inspirées de l'équation de la chaleur ont été développées. La théorie de diffusion de l'énergie développée par Nefske [28], Bouthier [29, 30], Wohlever [31] et Zhao [32] vise à évaluer la distribution spatiale de l'énergie d'un système, contrairement à la théorie SEA qui ne permet que le calcul des quantités moyennes globales. Il en résulte la possibilité d'évaluer la répartition locale de l'énergie à l'intérieur d'un sous-système. La méthode repose sur le bilan local de puissance en régime stationnaire



tel que

$$\operatorname{div}\mathbf{I} + P_{\text{diss}} = P_{\text{inj}} \quad (1.3)$$

avec  $P_{\text{diss}}$  la densité de puissance dissipée et  $P_{\text{inj}}$  la densité de puissance injectée. La densité de puissance dissipée  $P_{\text{diss}}$  est reliée à la densité d'énergie locale  $W$  au sein du système par la relation

$$P_{\text{diss}} = \eta \omega W \quad (1.4)$$

avec  $\eta$  le facteur d'amortissement et  $\omega$  la pulsation. L'intensité locale  $\mathbf{I}$  est reliée au gradient de densité d'énergie par une loi analogue à la loi de Fourier tel que

$$\mathbf{I} = -D \operatorname{grad} W \quad (1.5)$$

avec  $D = \eta\omega/c_g$  un coefficient de diffusion des ondes avec  $c_g$  la vitesse de groupe qui dépend des caractéristiques du milieu de propagation. Cette relation est similaire à la loi de Fourier en thermique qui décrit un transfert d'énergie spontané des zones de forte densité d'énergie vers les zones à plus faible densité d'énergie. Les équations (1.5) et (1.4) sont injectées dans le bilan local de puissance (1.3). On obtient l'équation de diffusion de l'énergie ayant pour inconnue la densité locale d'énergie  $W$  soit

$$-D\Delta W + \eta\omega W = P_{\text{inj}} \quad (1.6)$$

L'analogie avec les équations de la chaleur permet l'utilisation des codes éléments finis de transfert de chaleur.

Toutefois, cette méthode n'est pas valide pour les domaines d'application qui nous concernent. En effet, l'équation de diffusion (1.6) n'est valable que sous l'hypothèse d'ondes planes et pour le champ lointain. Or, cette hypothèse n'est pas vérifiable lorsque le champ direct n'est pas négligeable devant le champ réverbéré. Dans des milieux bi-dimensionnels, le champ direct pour une excitation ponctuelle est décrit par des ondes cylindriques ou sphériques. Dans le cas d'une plaque infinie excitée ponctuellement, la densité d'énergie devrait décroître en  $1/r$  comme le prédit la solution analytique alors que l'équation de diffusion prédit une évolution de la densité d'énergie en  $1/\sqrt{r}$  comme le démontre Le Bot [33].

### 1.3.6 Théorie du transfert radiatif

La théorie du transfert radiatif est née de l'étude de la méthode de diffusion de l'énergie vibratoire. C'est une sous-théorie de l'acoustique géométrique. Tout comme la méthode de diffusion, la méthode du transfert radiatif développée par Le Bot [34, 35] est une méthode de prédiction du comportement vibratoire et acoustique à moyennes

et hautes fréquences. Elle repose sur des quantités énergétiques telles que la densité d'énergie  $e$  et le flux d'intensité  $I$  considérées de manière locale. Ces champs se présentent comme des variables qui s'expriment à partir de moyennes quadratiques de grandeurs cinématiques. La méthode du transfert radiatif repose sur une représentation intégrale des champs. Les hypothèses nécessaires pour obtenir les équations du modèle sont les suivantes :

- Les systèmes sont linéaires, isotropes et homogènes et excités dans une large bande de fréquences.
- Les ondes évanescentes et les champs proches sont négligés
- Les ondes sont toutes décorrélées les unes des autres et les interférences entre les ondes sont négligées
- Les sources secondaires émettent l'énergie suivant la loi de Lambert [36] ou de manière spéculaire [37].

La relation permettant de relier les quantités mises en oeuvre est

$$\mathbf{I} = c_g e \mathbf{u} \quad (1.7)$$

avec  $c_g$  la vitesse de groupe et  $\mathbf{u}$  le vecteur unitaire de la direction de propagation. Avec l'hypothèse de décorrélation des ondes, la méthode du transfert radiatif permet de déterminer les champs  $e$  et  $I$  en réalisant une superposition linéaire des composantes du champ direct provenant des sources volumiques de densité de puissance  $\rho$  et du champ réfléchi par les frontières du domaine issu des sources de surface de densité de puissance  $\sigma$ . Le champ direct est porté par une onde cylindrique ou sphérique de la source au point récepteur tandis que le champ réfléchi résulte de diverses réflexions de l'onde contre la paroi. Ce dernier est représenté par un ensemble de sources secondaires placées sur les frontières de la structure. Les inconnues de ce problème sont donc les amplitudes des champs rayonnés par ces sources secondaires  $\sigma$ .

Dans un domaine à deux dimensions dans lequel un point source  $\mathbf{s}$  émet des rayons de manière isotrope avec une puissance  $\rho$ , la densité d'énergie à une distance  $R$  de la source est  $e^{-mR}/2\pi c_g R$ . Le facteur d'atténuation  $m = \eta\omega/c_g$  avec  $\eta$  le facteur d'amortissement,  $\omega$  la fréquence et  $c_g$  la vitesse de groupe. On définit un domaine noté  $\Omega$  et la frontière de ce domaine  $\Gamma$ . Les rayons se propagent depuis la source et se réfléchissent sur les parois. Les sources secondaires sont donc des sources fictives de densité de puissance  $\sigma$  situées sur les parois. Ces sources secondaires n'émettent pas d'énergie de manière isotrope, mais en suivant la loi de Lambert :

$$\sigma(\mathbf{p}, u) = \sigma(\mathbf{p}) \cos\theta_p. \quad (1.8)$$

Les champs complets d'énergie  $W$  et  $I$  au point  $\mathbf{r}$  sont alors obtenus par superposition linéaire des composantes de champ direct provenant des sources de densité de puissance situées à l'intérieur du domaine, et des composantes réverbérées issues des sources de surface situées à la frontière tel que présenté à la figure 1.4

$$W(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Gamma \quad (1.9)$$

$$I(\mathbf{r}) = \int_{\Omega} \rho c_g(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma(\mathbf{p}) c_g \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Gamma \quad (1.10)$$

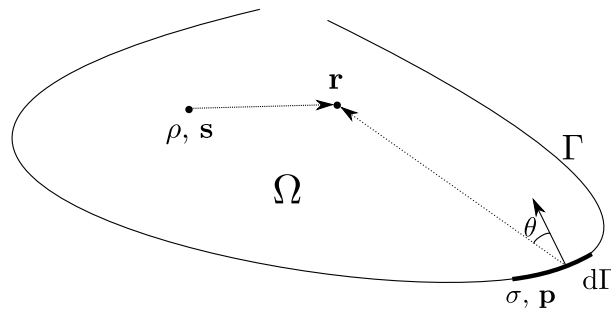


FIGURE 1.4 – Le champ au point  $\mathbf{r}$  est obtenu en superposant le champ issu des sources principales émanant du point  $\mathbf{s}$  et des sources secondaires émanant du point  $\mathbf{p}$ .

Pour affiner les résultats obtenus sur le calcul de champ acoustique, le phénomène de diffraction acoustique a été introduit [36]. La méthode proposée montre de bons résultats par rapport à ceux obtenus par la méthode des éléments de frontière notamment lorsque la fréquence augmente étant donné que l'effet des interférences diminue. Récemment, cette méthode a été utilisée pour prédire la répartition d'énergie dans des plaques anisotropes [38].

### 1.3.7 Dynamical Energy Analysis (DEA)

La Dynamical Energy Analysis (DEA) introduite par Tanner et al. [39, 40] est une méthode géométrique qui consiste à suivre la propagation et les réflexions des ondes émises par la source. Toutefois, le suivi de l'ensemble des rayons de manière individuelle à travers toutes les réflexions est très coûteux en temps de calcul en raison de l'augmentation très rapide du nombre de trajectoires. L'approche proposée consiste à déterminer les densités de rayons propagés à l'aide d'un opérateur de transfert. La DEA est une technique basée sur un maillage et un opérateur de transfert est utilisé pour décrire le flux d'énergie à travers les différents éléments du maillage de la structure. Le flux d'énergie est représenté en termes de densité de rayons, c'est-à-dire que

le flux d'énergie à travers une certaine surface est donné par la densité de rayons traversant la surface. La DEA a été utilisée avec succès pour l'étude vibratoire d'un sol de voiture [41] et pour l'étude vibroacoustique d'une cabine de tracteur [42].

Contrairement à l'analyse statistique de l'énergie, la méthode DEA permet d'obtenir une description de la répartition d'énergie dans les systèmes. Néanmoins, les géométries complexes sont difficiles à étudier en raison de leurs comportements hautement diffusif.

## 1.4 Conclusion

Malgré les capacités de calcul croissantes des ordinateurs, les méthodes déterministes montrent leurs limites pour des structures complexes. Les méthodes énergétiques restent un domaine ouvert de la recherche et plusieurs méthodes ou théories ont été développées ces dernières décennies pour simuler le comportement vibratoire et acoustique des structures en haute fréquence. Ces méthodes présentent chacune des avantages mais présentent des limitations fortes. Par la suite, nous nous focalisons sur la méthode de l'analyse statistique de l'énergie qui est sans doute la plus utilisée dans le contexte industriel.



# 2

## L'analyse statistique de l'énergie

---

### Sommaire

---

2.1	Introduction . . . . .	20
2.2	Échange d'énergie entre deux oscillateurs . . . . .	20
2.3	Échange d'énergie entre sous-systèmes . . . . .	22
2.4	Mise en œuvre de la SEA . . . . .	24
2.5	Les hypothèses de la CPP . . . . .	27
2.6	Conclusion . . . . .	36

---

## 2.1 Introduction

Ce chapitre présente les fondements de la théorie de l'analyse statistique de l'énergie (SEA). La théorie SEA est introduite dans les années 60 par Lyon et Maidanik [11]. Lyon utilise le terme de température vibratoire pour parler des énergies modales moyennes. Il explique que lorsque deux corps de températures différentes sont mis en contact, ils échangent de l'énergie jusqu'à atteindre l'équilibre. Les ouvrages de référence sont publiés par Lyon 1975 [43], Lyon et De Jong 1995 [44], Craik 1996 [45] et Le Bot 2015 [1].

Dans un premier temps, on s'intéressera à la relation fondamentale de la SEA, la *coupling power proportionality* (CPP) reliant la puissance échangée entre deux oscillateurs et leur différence d'énergie. Par la suite, la CPP est présentée pour des sous-systèmes constitués de plusieurs oscillateurs regroupés par paquets.

## 2.2 Échange d'énergie entre deux oscillateurs

Lyon et Sharton [46] étudient les transferts d'énergie entre deux oscillateurs couplés tel que présenté à la figure 2.1.

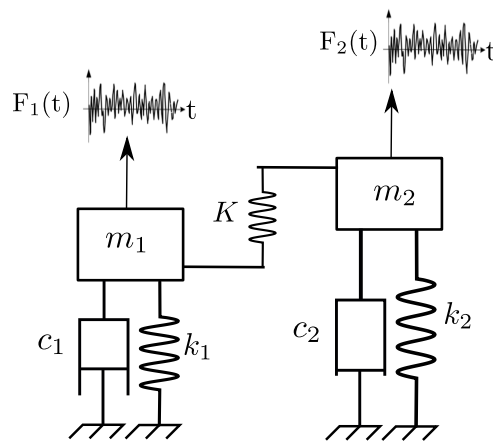


FIGURE 2.1 – Deux oscillateurs de masse  $m_i$ , de raideur  $k_i$  et d'amortissement  $\lambda_i$  excités par des force aléatoires décorréées  $F_i(t)$  et couplés par une raideur  $K$ .

Les hypothèses utilisées sont les suivantes :

- Le couplage entre les oscillateurs est conservatif,
- les oscillateurs sont excités par des bruits blancs décorréés les uns des autres.

Lyon montre que la puissance échangée est proportionnelle à la différence des énergies totales des oscillateurs. Une analogie avec les circuits électriques est également présentée. Ils parviennent à une écriture du coefficient de couplage entre les deux oscillateurs

(*coupling power proportionality* ou CPP) tel que

$$\langle P_{12} \rangle = \beta(\langle E_1 \rangle - \langle E_2 \rangle) \quad (2.1)$$

avec  $P_{12}$ , la puissance échangée entre l'oscillateur 1 et 2,  $E_i$  l'énergie vibratoire moyenne de l'oscillateur  $i$ , et  $\beta$  un coefficient de couplage.

Pour deux oscillateurs de masse  $m_i$ , de raideur  $k_i$ , et d'amortissement  $\lambda_i$  couplés par un terme de raideur  $K$ , de masse  $M$  et gyroscopique  $G$ , le coefficient de proportionnalité  $\beta$  vaut

$$\beta = \frac{\mu^2(\Delta_1\Omega_2^4 + \Delta_2\Omega_1^4 + \Delta_1\Delta_2(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)) + (\gamma^2 + 2\mu\kappa)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2) + \kappa^2(\Delta_1 + \Delta_2)}{(1 - \mu^2)[(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2 + (\Delta_1 + \Delta_2)(\Delta_1\Omega_2^2 + \Delta_2\Omega_1^2)]} \quad (2.2)$$

avec  $\Omega_i$  les fréquences propres bloquées et  $\Delta_i$  l'amortissement

$$\Omega_i^2 = \frac{(k_i + K)}{(m_i + M)} \quad (2.3)$$

$$\Delta_i = \frac{\lambda_i}{(m_i + M)} \quad (2.4)$$

et

$$\mu = \frac{M}{\sqrt{(m_1 + M)(m_2 + M)}}, \quad (2.5)$$

$$\gamma = \frac{G}{\sqrt{(m_1 + M)(m_2 + M)}}, \quad (2.6)$$

$$\kappa = \frac{K}{\sqrt{(m_1 + M)(m_2 + M)}}. \quad (2.7)$$

En parallèle, Smith [47] calcule la réponse d'un mode résonnant à une excitation par un champ acoustique diffus large bande. Il montre que la réponse à un champ acoustique diffus atteint une limite lorsque le couplage dû au rayonnement acoustique est dominant par rapport à la dissipation interne. L'approche modale de Lyon et l'approche ondulatoire de Smith conduisent toutes deux aux mêmes résultats. Ceci permet de montrer la double approche de la SEA, modale ou ondulatoire.

Newland [48] généralise le calcul du coefficient de couplage entre deux oscillateurs à des ensembles de résonateurs couplés entre eux par un terme élastique de raideur  $K_{ij}$ . Pour ce faire, il introduit l'hypothèse de **couplage faible et conservatif**. Il utilise la méthode des perturbations qui consiste à écrire le mouvement d'un oscillateur sous la forme d'une série de Taylor. Newland fait l'hypothèse que les excitations sont des bruits blancs stationnaires et aléatoires décorrélés. Il parvient alors à l'écriture du



coefficient de couplage

$$\beta = \frac{2K_{ij}^2(\omega_i\zeta_i + \omega_j\zeta_j)}{m_i m_j \left[ \left( \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} + \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right)^2 \right] + (\omega_i \zeta_i + \omega_j \zeta_j)^2 \left[ \left( \omega_i \sqrt{1 - \zeta_i^2} - \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j^2} \right)^2 \right] + (\omega_i \zeta_i + \omega_j \zeta_j)^2} \quad (2.8)$$

avec  $\zeta_i = \Delta_i/2\Omega_i$ . Le coefficient  $\beta$  est limité à des valeurs de  $\zeta_i$  et  $\zeta_j$  très inférieures à 1. Dans cette équation,  $\omega_i$  représente les fréquences naturelles des oscillateurs découplés  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$  à l'inverse des  $\Omega_i$  qui sont les fréquences naturelles bloquées  $\Omega_i = \sqrt{(k_i + K)/(m_i + M)}$ . Le Bot [1] montre que les deux expressions du coefficient de couplage (2.8) et (2.2) sont similaires.

Par la suite, ce résultat est étendu pour des couplages élastiques et inertiels [49]. Finalement Fahy [50] redémontre la CPP en introduisant un couplage gyroscopique entre les oscillateurs.

## 2.3 Échange d'énergie entre sous-systèmes

Dans le cas de systèmes multimodaux plus complexes, le **système** principal est décomposé en plusieurs **sous-systèmes**. Chaque sous-système peut être modélisé par un ensemble d'oscillateurs couplés entre eux tel que présenté à la figure 2.2.

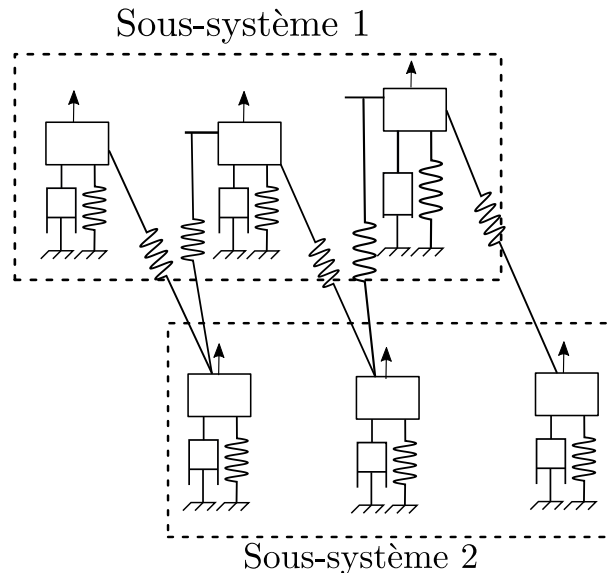


FIGURE 2.2 – Deux sous-systèmes composés de trois oscillateurs non-couplés entre eux et excités avec des bruits blancs décorrélés.

Les sous-systèmes peuvent être assimilés à des réservoirs d'énergie comme présenté à la figure 2.3. Tout sous-système peut recevoir de l'énergie par des forces excitatrices extérieures, dissiper de l'énergie ou encore en échanger avec les sous-systèmes voisins.

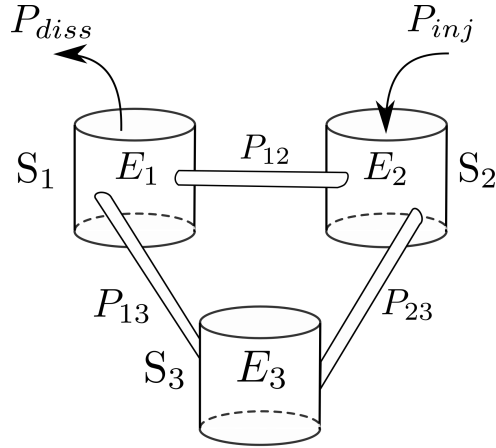


FIGURE 2.3 – Les sous-systèmes composants le système étudié sont assimilables à des puits d'énergie qui peuvent échanger de l'énergie entre eux, recevoir de l'énergie d'une source extérieure ou dissiper de l'énergie.

Le but de la SEA est de prédire l'énergie vibratoire moyenne de chaque sous-système. Pour ce faire, les couplages entre les sous-systèmes doivent être caractérisés et les puissances injectées doivent être connues.

On considère un système décomposé en  $N$  sous-systèmes couplés entre eux. En régime permanent, un bilan de puissance peut être écrit pour un sous-système  $i$  sous la forme

$$P_{i,inj} = \sum_{j \neq i} P_{ij} + P_{i,diss} \quad (2.9)$$

avec  $P_{i,inj}$  la puissance injectée au sous-système  $i$ ,  $P_{i,diss}$  la puissance dissipée et  $P_{ij}$  les puissances échangées avec les différents sous-systèmes adjacents appelés  $j$ . Cette égalité reste valable tant que le couplage entre les sous-systèmes est conservatif.

Le facteur de perte interne (appelé communément DLF pour *damping loss factor*)  $\eta_i$  représente la dissipation de l'énergie au sein d'un sous-système causée par l'amortissement.

$$P_{i,diss} = \omega_c \eta_i E_i \quad (2.10)$$

avec  $\omega_c$  la pulsation centrale de la bande de fréquences étudiée. Les autres échanges d'énergie s'écrivent de la même manière. L'énergie transmise du sous-système  $i$  vers le sous-système  $j$  s'exprime par l'équation

$$P_{i \rightarrow j} = \omega_c \eta_{ij} E_i \quad (2.11)$$

avec  $\eta_{ij}$  le facteur de perte par couplage couramment appelé *coupling loss factor* (CLF). Les facteurs de perte par couplage décrivent les puissances échangées entre les diffé-

rents sous-systèmes :

$$P_{ij} = \omega_c(\eta_{ij}E_i - \eta_{ji}E_j) \quad (2.12)$$

avec  $\eta_{ij}$  et  $\eta_{ji}$  les facteurs de perte par couplage entre les deux sous-systèmes  $i$  et  $j$  liés par la relation

$$n_i\eta_{ij} = n_j\eta_{ji} \quad (2.13)$$

où  $n_i = N_i\Delta\omega$  est la densité modale du sous-système  $i$  et  $N_i$  le nombre de modes dans la bande de fréquences  $\Delta\omega$ . Finalement la puissance échangée entre  $i$  et  $j$  peut s'écrire en fonction des énergies modales  $E_i/N_i$ ,

$$P_{ij} = \omega_c\eta_{ij}N_i\left(\frac{E_i}{N_i} - \frac{E_j}{N_j}\right). \quad (2.14)$$

Ce résultat est l'équation fondamentale de la SEA et est appelé *coupling power proportionality* (CPP). Ainsi, la SEA stipule que la puissance vibratoire échangée entre deux sous-systèmes est proportionnelle à la différence des énergies modales de ces deux sous-systèmes.

En substituant les équations (2.10) et (2.14) dans le bilan d'énergie (2.9), on obtient un système d'équations linéaires dont les inconnues sont les énergies modales  $E_i/N_i$

$$\omega_c \begin{bmatrix} \eta_1 + \eta_{12} & -\eta_{21} \\ -\eta_{12} & \eta_2 + \eta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1/N_1 \\ E_2/N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1,\text{inj}} \\ P_{2,\text{inj}} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Cette expression peut être étendue pour un système comprenant plus de deux sous-systèmes. Avec cette formulation de *coupling power proportionality*, la SEA permet de calculer facilement les énergies internes à chaque sous-système. La SEA permet de gagner en temps et en complexité de calcul. Toutefois, cela sous-entend que les informations plus complexes telles que le comportement modal ne peuvent pas être obtenues.

## 2.4 Mise en œuvre de la SEA

Il existe deux types de mise en œuvre de la SEA [51] : la SEA prédictive et la SEA inverse.

### 2.4.1 La SEA prédictive

La SEA prédictive consiste à déterminer de manière théorique les *coupling loss factor* (CLF) et *damping loss factor* (DLF) pour calculer les énergies moyennes des sous-systèmes. Cela peut par exemple permettre de déterminer le niveau vibratoire ou acoustique dans l'habitacle d'une voiture dès la phase de conception. Cependant, les

paramètres ne sont pas simples à calculer car les expressions analytiques des CLF entre deux sous-systèmes ne sont connues que pour des sous-systèmes académiques simples (poutres, plaques rectangulaires, cavités d'air parallélépipédiques)[52]. Il existe une littérature assez riche sur l'application de la SEA prédictive à des systèmes industriels telle que l'automobile avec notamment l'application à des boîtes de vitesses [53], des camions [54], et également des bâtiments [55, 56].

Crandall [57] montre que les *coupling loss factor* peuvent être estimés soit en utilisant la SEA ondulatoire, soit en utilisant la SEA modale, les deux procédures permettant d'obtenir les mêmes résultats. Toutefois, l'approche modale est très calculatoire et donc l'approche ondulatoire est souvent privilégiée. Lyon [58] introduit l'hypothèse d'un champ diffus et applique l'approche ondulatoire aux problèmes de transmission dans certains cas de couplages poutre-plaque.

Les *coupling loss factor* peuvent également être déterminés de manière expérimentale à l'aide la méthode Power Injection Method (PIM) [59]. Pour ce faire, il est nécessaire de connaître *a priori* les puissances injectées dans les sous-systèmes ainsi que l'énergie de chaque sous-système. Il est alors possible de construire la matrice SEA puis de déterminer les *coupling loss factor* en inversant cette matrice. Toutefois, il est difficile d'obtenir de bons résultats avec cette méthode. En effet, l'inversion de la matrice peut être une source importante d'erreurs étant donné les incertitudes liées à la précision des mesures expérimentales. L'autre inconvénient de cette méthode est lié à l'excitation. Chaque sous-système doit être excité avec une force de type *rain-on-the-roof* ce qui est complexe en pratique. Maxit et Guyader [25] ont proposé une méthode numérique basée sur la double formulation modale déplacement-contrainte au niveau du couplage. Cette méthode donne une expression analytique des CLF modaux à partir de la connaissance des modes découplés.

## 2.4.2 La SEA inverse

La SEA inverse permet de déterminer expérimentalement et simultanément [43] les paramètres de la matrice des facteurs de perte internes et des facteurs de perte par couplage. Les énergies moyennes de chaque sous-système et les puissances injectées sont mesurées expérimentalement. Les CLF ( $\eta_{ij}$ ) et DLF ( $\eta_i$ ) sont estimés via la méthode des puissances injectées (PIM) [59] sans découpler les sous-systèmes. La méthode consiste à exciter par des forces aléatoires un sous-système et à mesurer les énergies de tous les autres sous-systèmes. L'opération est ensuite répétée afin d'exciter l'ensemble des sous-systèmes. La matrice SEA est alors construite puis inversée pour obtenir les coefficients de perte internes des sous-systèmes et les coefficients de couplage. Dans le cas d'un système composé de deux sous-systèmes, on obtient le système d'équations

suivant :

$$\frac{1}{\omega_c} \begin{bmatrix} P_{\text{inj}}^1 \\ 0 \\ 0 \\ P_{\text{inj}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1^1 & E_1^1 & -E_2^1 & 0 \\ 0 & -E_1^1 & E_2^1 & E_2^1 \\ E_1^2 & E_1^2 & -E_2^2 & 0 \\ 0 & -E_1^2 & E_2^2 & E_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_{12} \\ \eta_{21} \\ \eta_2 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

avec  $E_i^j$  les énergies du sous-système  $i$  lorsque le sous-système  $j$  est excité seul et  $P_{\text{inj}}^i$  la puissance injectée dans le sous-système  $i$  lorsque le sous-système  $i$  est excité seul. Dans ce cas, les facteurs de perte internes ou par couplage sont les inconnues et peuvent être déterminés en inversant la matrice des énergies. Une application pratique sur un moteur diesel est donnée par Wu [60]. Cette technique est très utile dans un contexte industriel, cependant elle n'est pas prédictive car il est nécessaire de posséder la structure pour effectuer les mesures. En pratique, cette méthode peut rapidement devenir lourde à mettre en place ce qui limite son domaine d'application. De plus, une petite erreur sur la détermination des énergies et des puissances injectées peut entraîner des erreurs importantes sur la détermination des facteurs de perte. Les méthodes expérimentales pour mesurer les énergies des sous-systèmes et les puissances injectées sont développées par la suite.

#### 2.4.2.1 Mesure de l'énergie des sous-systèmes

L'énergie cinétique d'un sous-système peut être mesurée avec un capteur de vitesse comme un vibromètre laser ou avec un capteur d'accélération comme un accéléromètre. L'énergie globale du sous-système est reliée à la densité d'énergie (énergie par unité de surface) en un point  $\mathbf{r}$  du sous-système par la relation suivante :

$$E = \int_S e(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2.17)$$

où  $S$  est la surface du sous-système et  $e$  la densité d'énergie au point  $\mathbf{r}$ . L'énergie locale est déterminée grâce à la mesure de la vitesse vibratoire du sous-système au point  $\mathbf{r}$

$$e(\mathbf{r}) = \rho h v^2(\mathbf{r}) \quad (2.18)$$

avec  $\rho$  la masse volumique et  $h$  l'épaisseur du sous-système au point  $\mathbf{r}$ . Dans le cas d'un maillage constitué de  $N$  points régulièrement espacés sur la surface du sous-système, l'énergie cinétique globale devient

$$E \approx S \bar{e} \quad (2.19)$$

avec  $\bar{e}$  la densité d'énergie moyenne tel que

$$\bar{e} = \frac{1}{N} \sum_i e_i. \quad (2.20)$$

L'estimation de l'énergie cinétique globale du sous-système nécessite un nombre de points de mesure important, répartis sur toute la surface de la plaque. Naturellement, la qualité de l'estimation de l'énergie globale du sous-système dépend du nombre de points de mesure. Plus le maillage de points utilisés est fin, meilleure sera l'estimation de l'énergie globale.

#### 2.4.2.2 Mesure de la puissance injectée

En SEA, les puissances injectées dans chaque sous-système sont calculées à partir des forces extérieures appliquées aux différents sous-systèmes. La puissance injectée dans la bande de fréquences de largeur  $\Delta\omega$  centrée sur  $\omega_c$  est calculée avec la relation suivante [61] :

$$P_{inj} \approx \frac{\langle F^2(\omega) \rangle_{\omega_c}}{\pi} \int_{\Delta\omega} \text{Re}(H(\omega, \mathbf{s})) d\omega \quad (2.21)$$

avec  $\langle F^2(\omega) \rangle_{\omega_c}$  le carré de la valeur efficace du processus stochastique d'excitation dans la bande de fréquences  $\Delta\omega$  avec  $\langle . \rangle$  l'espérance,  $H(\omega, \mathbf{s})$  la fonction de transfert entre la vitesse et la force au point d'excitation. La mesure de la puissance injectée doit être réalisée de manière rigoureuse car il faut que les mesures d'effort soient faites exactement au même point que les mesures de vitesses. A haute fréquence, on peut observer un déphasage entre ces deux mesures causé les capteurs d'impédance ce qui fausse la mesure.

## 2.5 Les hypothèses de la CPP

Pour obtenir les équations de la SEA, un certain nombre d'hypothèses ont été effectuées.

Keane et Price [62] donnent une liste de ces hypothèses. Fahy [63] propose une analyse critique de la SEA dans lequel il rappelle les hypothèses de la SEA et propose des perspectives d'investigations. Culla et Sestieri [64] discutent de la validité des hypothèses en étudiant un système plaque/cavité et un système composé de trois plaques. Plus récemment, Lafont [7] propose une revue de l'ensemble des hypothèses de la SEA et détermine les hypothèses nécessaires et celles qui sont de second ordre. Les hypothèses sont présentées avec l'approche modale et avec l'approche ondulatoire.

### 2.5.1 Approche modale

Avec l'approche modale, les modes des sous-systèmes peuvent être assimilés à des systèmes masse-ressort. On distingue dans un premier temps le cas de deux oscillateurs harmoniques couplés par un ressort car c'est un cas particulier de la SEA. Les trois hypothèses suffisantes pour établir la relation de la CPP sont :

1. Le couplage entre les sous-systèmes est conservatif,
2. les forces extérieures sont aléatoires, stationnaires et décorréelées,
3. les forces extérieures sont des bruits blancs.

Dans le cas d'un système composé de plus de deux oscillateurs, il faut rajouter une hypothèse sur la nature du couplage :

4. le couplage entre les sous-systèmes est faible.

Elle se traduit par une raideur de couplage petite devant les raideurs internes.

Dans le cas où les oscillateurs seraient nombreux, ils peuvent être regroupés par paquets pour former des sous-systèmes et les modes échangent de l'énergie uniquement avec les modes des autres sous-systèmes. Les hypothèses supplémentaires nécessaires sont :

5. Le nombre de modes est important dans chaque sous-système
6. L'amortissement des sous-systèmes est faible devant le coefficient de perte par couplage
7. Une fonction de densité de probabilité uniforme sur la bande de fréquences d'excitation  $\Delta\omega$ .

Dans le cas d'un système continu composé d'une infinité de modes, on divise la structure en sous-systèmes et on considère toutes les hypothèses précédentes. L'hypothèse 3 est modifiée en excitant la structure avec des excitations stationnaires, aléatoires, décorréelées et se situant dans une bande de fréquences donnée. On suppose donc désormais que les excitations ont une densité spectrale de puissance constante sur une bande de fréquences donnée et nulle ailleurs. Ainsi seuls les modes qui sont situés dans la bande de fréquences excitée sont conservés tel que présenté à la figure 2.4.

Ces modes sont donc qualifiés de résonants. A l'inverse, les modes situés en dehors de cette bande de fréquences sont qualifiés de non-résonants et ne sont pas pris en compte et ainsi ne participent pas à l'échange d'énergie. Le système continu est donc réduit à un système de paquets d'oscillateurs. Ainsi, la seule hypothèse supplémentaire nécessaire est :

8. Les modes non-résonants n'influent pas sur les modes considérés.

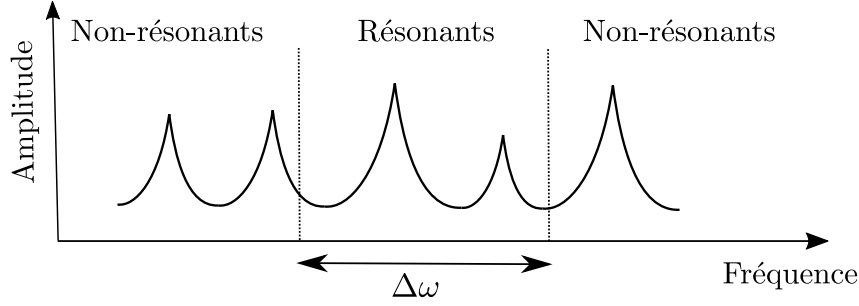


FIGURE 2.4 – Illustration des modes résonants contenus dans la bande de fréquences  $\Delta\omega$  et des modes non-résonants situés en dehors de cette bande de fréquences.

## 2.5.2 Approche ondulatoire

Dans cette section, la CPP est déterminée à partir d'une approche ondulatoire avec les hypothèses spécifiques à cette méthode. Avec l'approche ondulatoire, on considère que le champ vibratoire est décomposé en une superposition d'ondes propagatives suffisamment désordonnées pour aborder le problème d'une manière statistique [26]. Dans un premier temps, la relation de proportionnalité entre le flux d'intensité et la densité d'énergie locale est déterminée puis l'échange d'énergie entre deux sous-systèmes couplés est calculé.

### 2.5.2.1 Densité d'énergie

On reprend dans ce paragraphe le formalisme du transfert radiatif (section 1.3.6). Les calculs présentés dans cette section sont issus de l'ouvrage de référence de Le Bot [1]. Considérons un domaine  $\Omega_i$  délimité par une frontière notée  $\Gamma_i$ . On introduit une source dans ce domaine avec une densité de puissance  $\rho_i$ . Les rayons émergents de la source se propagent dans le domaine  $\Omega_i$  et rebondissent sur la frontière  $\Gamma_i$ . Afin de prendre en compte la réflexion de l'énergie, une densité de source fictive  $\sigma_i$  est introduite sur  $\Gamma_i$ . Ces sources ne rayonnent pas de manière isotrope mais proportionnellement à  $\cos\theta$  suivant la loi de Lambert. Lorsque la source ponctuelle de densité de puissance  $\rho_i$  émet des rayons de manière isotrope, la densité d'énergie à une distance  $R$  de la source est

$$\rho_i \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} \quad (2.22)$$

avec  $m = \eta\omega/c_g$  le facteur d'atténuation,  $\eta$  le facteur d'amortissement,  $\omega$  la pulsation et  $c_g$  la vitesse de groupe. La densité d'énergie  $e_i(\mathbf{r})$  à un point quelconque  $\mathbf{r}$  à l'intérieur du domaine  $\Omega_i$  s'obtient en sommant les contributions du champ direct (les rayons provenant directement de la source) données par  $\rho_i(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R}$  et les contributions du champ réfléchi  $\sigma_i(\mathbf{p}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R}$  (les rayons provenant des sources fictives localisées sur



la frontière) tel que présenté à la figure 2.5. Ainsi, en négligeant les interférences,

$$e_i(\mathbf{r}) = \int_{\Omega_i} \rho_i(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Omega_s + \int_{\Gamma_i} \sigma_i(\mathbf{p}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi c_g R} d\Gamma_p \quad (2.23)$$

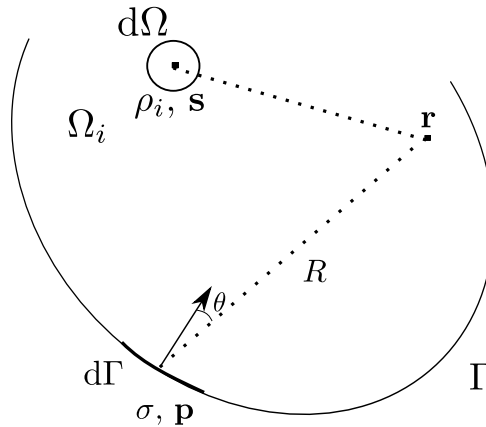


FIGURE 2.5 – Le champ au point  $\mathbf{r}$  est obtenu en superposant le champ issu des sources volumiques  $\rho_i$  au point  $\mathbf{s}$  et des sources surfaciques  $\sigma_i$  au point  $\mathbf{p}$  émettant avec un angle  $\theta$  vers le point  $\mathbf{r}$ .

### 2.5.2.2 Flux d'intensité

Le flux d'intensité  $I_i(\mathbf{r}, \alpha)$  est le flux d'énergie par unité d'angle et par unité de surface normale aux rayons. Considérons un point  $\mathbf{r}$  dans le domaine  $\Omega_i$ ,  $\alpha$  une direction et  $d\phi$  un angle infinitésimal autour de  $\alpha$  tel que présenté à la figure 2.6.

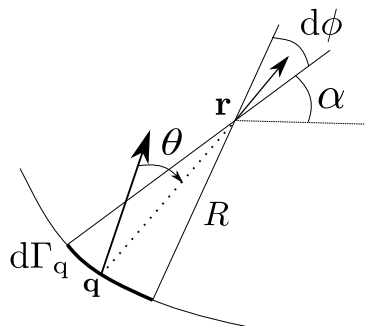


FIGURE 2.6 – Flux d'intensité

L'intersection entre  $\Gamma$  et ce triangle forme une surface infinitésimale notée  $d\Gamma_q$  centrée sur le point  $\mathbf{q}$ . La puissance par unité de longueur passant par le point  $\mathbf{r}$  est la somme de la contribution de toutes les sources  $\rho_i$  localisées dans le triangle défini par l'angle  $d\phi$  et le sommet  $\mathbf{r}$  auquel s'ajoute la contribution des sources fictives  $\sigma_i$  localisées sur

la frontière délimitée par le cône

$$dP(\mathbf{r}, \alpha) = \int_{d\omega} \rho_i(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi R} d\Omega_s + \sigma_i(\mathbf{q}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi R} d\Gamma_q. \quad (2.24)$$

En coordonnées polaires,  $d\Omega = R d\phi dR$  et  $d\Gamma = R d\phi \cos\theta$  avec  $R$  la distance entre le point  $\mathbf{r}$  et le point  $\mathbf{q}$ , il vient

$$dP(\mathbf{r}, \alpha) = \int_{d\omega} \rho_i(\mathbf{s}) \frac{e^{-mR}}{2\pi R} R d\omega dR + \sigma_i(\mathbf{q}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi R} \frac{R d\omega}{\cos\theta} \quad (2.25)$$

Le flux d'intensité  $I = dP/d\phi$  est,

$$I(\mathbf{r}, \alpha) = \int_0^R \rho_i(\mathbf{s}) \frac{e^{-ms}}{2\pi} ds + \sigma_i(\mathbf{q}) \frac{e^{-mR}}{2\pi} \quad (2.26)$$

L'intégrale est calculée le long de l'abscisse curviligne  $\mathbf{s}$  allant du point  $\mathbf{q}$  au point  $\mathbf{r}$ .

On cherche désormais à déterminer les sources fictives  $\sigma_i$ . L'équation sur l'inconnue  $\sigma_i$  est obtenue en appliquant le bilan de puissance en tout point  $\mathbf{p}$  de la frontière  $\Gamma$ . On s'intéresse donc au flux d'énergie émis et reçu dans un angle solide élémentaire par un élément de surface  $d\Gamma_p$  entourant le point  $\mathbf{p}$  tel que présenté à la figure 2.7.

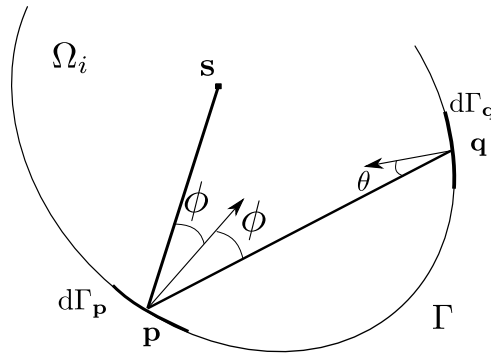


FIGURE 2.7 – Bilan de puissance au point  $\mathbf{p}$  sur la frontière  $\Gamma$  du domaine  $\Omega$  : l'intensité incidente provient des sources volumiques  $\rho(\mathbf{s})$  situées dans le triangle d'incidence  $dv$  et des sources de frontière  $\sigma(\mathbf{q})$  situées sur l'élément de frontière  $d\Gamma_q$ .

Pour ce faire, considérons un demi-cercle de rayon  $\epsilon$  centré sur le point  $\mathbf{p}$  sur la surface  $\Gamma$ . Le flux d'énergie émit par cette surface est  $\sigma_i \cos\theta e^{-m\epsilon} / 2\pi\epsilon$ . En intégrant ce flux d'énergie sur une surface infinitésimale du cercle  $\epsilon d\theta$ , il vient

$$\frac{\sigma_i}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta e^{-m\epsilon}}{\epsilon} \epsilon d\theta \quad (2.27)$$

en simplifiant par  $\epsilon$  et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0,

$$\frac{\sigma_i}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta d\theta = \frac{\sigma_i}{\pi}. \quad (2.28)$$

En réalisant un bilan d'énergie sur l'élément de frontière considéré, le flux d'énergie calculé à l'équation (2.28) est égale à l'énergie incidente sur cet élément de frontière qui est  $\int dP(\mathbf{p}, \phi) \cos\phi d\omega$  avec  $\phi$  l'angle d'incidence au point  $\mathbf{p}$ . Il vient

$$\frac{\sigma_i(\mathbf{p})}{\pi} = \int_{\Omega_i} \rho_i(s) \frac{e^{-mR}}{2\pi R} \cos\phi d\Omega_s + \int_{\Gamma_i} \sigma_i(\mathbf{q}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi R} \cos\phi d\Gamma_{\mathbf{q}}. \quad (2.29)$$

Dans la première intégrale  $R$  est la distance entre le point  $\mathbf{s}$  et le point  $\mathbf{p}$  et dans la seconde intégrale,  $R$  est la distance entre le point  $\mathbf{q}$  et le point  $\mathbf{p}$ . Dans le cas d'un système très peu amorti et très réverbérant, les rayons se propagent et sont réfléchis de nombreuses fois. Tous les points de réflexion sur la frontière deviennent équivalents et les sources  $\sigma_i$  sont indépendantes de la position du point  $\mathbf{p}$ . En intégrant par rapport à  $\Gamma_i$  les deux côtés de l'équation (2.29), on obtient

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\sigma_i(\mathbf{p})}{\pi} d\Gamma_{\mathbf{p}} = \int_{\Gamma_i} \int_{\Omega_i} \rho_i(s) \frac{e^{-mR}}{2\pi R} \cos\phi d\Omega_s d\Gamma_{\mathbf{p}} + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \sigma_i(\mathbf{q}) \cos\theta \frac{e^{-mR}}{2\pi R} \cos\phi d\Gamma_{\mathbf{q}} d\Gamma_{\mathbf{p}}. \quad (2.30)$$

Avec l'hypothèse d'amortissement faible, on peut supposer que  $mR \ll 1$ . Il est donc possible de remplacer le terme  $e^{-mR}$  par sa valeur moyenne  $e^{-ml}$  avec  $l = \pi S/P$  le libre parcours moyen,  $S$  étant la surface de la plaque et  $P$  le périmètre. En considérant que les valeurs de  $\rho_i$  et  $\sigma_i$  sont constantes, il vient

$$\frac{\sigma_i}{\pi} P = e^{-ml} \left( \rho_i(s) \int_{\Gamma_i} \int_{\Omega_i} \frac{\cos\phi d\Omega d\Gamma}{2\pi R} + \sigma_i \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \frac{\cos\theta \cos\phi d\Gamma_{\mathbf{p}} d\Gamma_{\mathbf{q}}}{2\pi R} \right). \quad (2.31)$$

Le calcul de ces deux intégrales est présenté en détail en annexe 9.3. Après résolution des intégrales

$$\frac{\sigma_i}{\pi} P = e^{-ml} (\rho_i S + \frac{\sigma_i}{\pi} P) \quad (2.32)$$

et en utilisant la relation  $P = \pi S/l$ , il vient

$$\sigma_i(\mathbf{p}) = \frac{e^{-ml}}{1 - e^{-ml}} \rho_i l. \quad (2.33)$$

Étant donné que le terme  $ml \ll 1$ , on obtient

$$\rho_i l \ll \sigma_i \quad (2.34)$$

ce qui prouve que le champ direct est négligeable devant le champ généré par les sources fictives. En considérant que l'amortissement est faible et donc  $e^{-ml} \approx 1$  et en supposant que les densités d'énergie  $\rho_i$  et  $\sigma_i$  sont constantes, l'équation (2.23) devient

$$e_i(\mathbf{r}) = \rho_i \int_{\Omega_i} \frac{1}{2\pi c_g R} d\Omega_s + \sigma_i \int_{\Gamma_i} \frac{\cos\theta}{2\pi c_g R} d\Gamma_p. \quad (2.35)$$

De la même manière que précédemment, le calcul de ces deux intégrales est présenté en détails en annexe 9.3 et on obtient

$$e_i(\mathbf{r}) = \frac{\rho_i l}{2c_g} + \frac{\sigma_i}{c_g}. \quad (2.36)$$

Or, on a déjà montré à l'équation (2.34) que le champ direct est négligeable par rapport au champ réverbéré et donc

$$e_i(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_i}{c_g}. \quad (2.37)$$

Cette dernière équation montre que le champ vibratoire est uniforme.

Dans le cas où les densités d'énergie  $\rho_i$  et  $\sigma_i$  sont constantes, le flux d'intensité présenté à l'équation (2.26) devient

$$I(\mathbf{r}, \alpha) = \rho_i \int_0^R \frac{dR}{2\pi} + \frac{\sigma_i}{2\pi} \approx \frac{\rho_i l}{2\pi} + \frac{\sigma_i}{2\pi}. \quad (2.38)$$

Encore une fois, le terme  $\frac{\rho_i l}{2\pi}$  est négligeable devant  $\frac{\sigma_i}{2\pi}$  et donc

$$I_i = \frac{\sigma_i}{2\pi} = \frac{c_g e}{2\pi}. \quad (2.39)$$

A partir de cette dernière équation, on comprend que le flux d'intensité ne dépend ni de la position de la source ni de la direction. Un champ vibratoire diffus est donc un champ **homogène** et **isotrope**.

### 2.5.2.3 Échange d'énergie entre deux sous-systèmes

On considère deux sous-systèmes  $i$  et  $j$  ayant une frontière commune. Ces deux sous-systèmes peuvent échanger de l'énergie entre eux via cette frontière. On fait l'hypothèse que la fréquence est élevée pour se placer dans l'approximation de la vibroacoustique géométrique afin de pouvoir utiliser la méthode des rayons.

1. La fréquence est élevée.

On considère que les rayons se déplacent et passent au voisinage de tous les points du système (homogène) et dans toutes les directions (isotrope). On fait donc l'hypothèse

que

2. Le champ vibratoire est diffus.

L'hypothèse de champ vibratoire diffus est la plus compliquée à vérifier en pratique. Il est couramment admis que le champ vibratoire devient diffus lorsque le nombre de modes excités est grand et que l'amortissement est faible. Toutefois, nous verrons par la suite qu'il existe des systèmes pour lesquels le champ vibratoire n'est pas diffus même lorsque le nombre de modes excités est grand et l'amortissement faible.

Finalement, la frontière commune entre les deux sous-systèmes est petite comparée à la taille des frontières des sous-systèmes et donc

3. Le couplage est faible.

Le flux d'énergie échangé entre les sous-systèmes est caractérisé par l'efficacité de transmission. Cette efficacité de transmission notée  $T_{ij}$  est le ratio entre la puissance transmise par unité de longueur de frontière et la puissance incidente. La puissance transmise du sous-système  $i$  vers le sous-système  $j$  est la superposition linéaire des contributions de tous les rayons arrivants sur la frontière  $\Gamma$  avec un angle  $\theta$ , telle que

$$P_{i \rightarrow j} = \int_L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ij}(\theta) I(\mathbf{p}, \theta) \cos\theta d\theta d\Gamma \quad (2.40)$$

avec  $L$  la longueur de la frontière commune aux deux sous-systèmes. Toujours par superposition linéaire, la puissance échangée  $P_{ij}$  est la différence entre  $P_{i \rightarrow j}$  et  $P_{j \rightarrow i}$  tel que

$$P_{ij} = P_{i \rightarrow j} - P_{j \rightarrow i}. \quad (2.41)$$

Grâce à l'hypothèse de champ vibratoire diffus, il est possible d'introduire une efficacité de transmission moyenne indépendante de l'angle d'incidence  $\theta$  définie par

$$\overline{T}_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} T_{ij}(\theta) \cos\theta d\theta. \quad (2.42)$$

En combinant les trois équations (2.39), (2.41), et (2.42), il vient

$$P_{i \rightarrow j} = \frac{L \overline{T}_{ij} c_{g_i} e_i}{2\pi}. \quad (2.43)$$

Finalement, en injectant l'équation (2.43) dans (2.41), on obtient

$$P_{ij} = \frac{L \overline{T}_{ij} c_{g_i} e_i}{2\pi} - \frac{L \overline{T}_{ji} c_{g_j} e_j}{2\pi}. \quad (2.44)$$

Pour retrouver la CPP, on considère la densité d'énergie  $e_i = E_i/S$  avec  $S$  la surface du

sous-système. Cette relation est rendue possible grâce à l’hypothèse de champ vibratoire diffus. En introduisant le *coupling loss factor*

$$\eta_{ij} = \frac{Lc_{g_i} \overline{T_{ij}}}{\pi\omega S_i} \quad (2.45)$$

il vient

$$P_{ij} = \omega\eta_{ij}E_i - \omega\eta_{ji}E_j. \quad (2.46)$$

En résumé, deux sous-systèmes avec un champ vibratoire diffus connectés l’un à l’autre par un couplage faible échangent de l’énergie proportionnellement à la différence des énergies vibratoires des sous-systèmes. On retrouve donc bien la CPP avec la méthode ondulatoire. En comparaison à la méthode modale, les hypothèses sont différentes mais présentent des équivalences entre elles [7]. Le résultat obtenu est identique.

### 2.5.3 Sous-structuration et couplage faible

Pour pouvoir utiliser la théorie SEA, le système doit être décomposé en sous-systèmes. Nous avons montré dans les sections précédentes avec l’approche modale et avec l’approche ondulatoire que cette sous-structuration doit être faite de manière à ce que le couplage entre les sous-systèmes soit suffisamment faible.

#### 2.5.3.1 Sous-structuration

La sous-structuration du système principal est la première étape lors d’un calcul SEA. Le découpage du domaine est parfois effectué à la main, principalement sur la base de l’expérience et de l’intuition. Pourtant, les sous-systèmes composant le système principal doivent respecter l’ensemble des hypothèses de la SEA. D’un point de vue modale, les sous-systèmes doivent remplir deux critères principaux explicités par Lyon [65]

- *Similarity* : Tous les modes doivent avoir une réponse énergétique similaire face à toute excitation possible.
- *Significance* : Ils doivent jouer un rôle important dans la transmission, la dissipation ou le stockage de l’énergie du système. Autrement dit, le nombre de modes doit être important dans chaque sous-système.

Dans de nombreuses applications classiques, l’identification des sous-systèmes est relativement simple. Les éléments mécaniques courants, telles que les poutres ou les plaques minces répondent aux exigences évoquées précédemment. Les logiciels commerciaux SEA tel que AutoSEA2 [66] utilisent une base de données constituée de sous-systèmes classiques (poutre, plaque plate ou courbe, cavité acoustique, ...) et de

coefficients de couplage associés [67]. Le fait que les sous-systèmes doivent contenir un grand nombre de modes peut être problématique pour des structures composées d'éléments très raides et/ou de petites dimensions. Fahy [68] étudie l'effet de la subdivision de la cavité à l'intérieur d'une voiture en différents sous-systèmes. Il conclut que cela peut être fait en particulier dans la région située sous les sièges. Toutefois, il recommande l'utilisation des données expérimentales pour vérifier la robustesse de l'approche. Totaro et al. [69, 70] et Diaz-Cereceda et al. [71] proposent un outil d'aide à la décision basé sur un indice de séparation d'ensembles pour déterminer les sous-systèmes tout en respectant les hypothèses de la SEA.

### 2.5.3.2 Condition de couplage faible

Après avoir déterminé les sous-systèmes ainsi que les coefficients de couplage entre ces sous-systèmes, il est nécessaire de s'assurer que ceux-ci sont suffisamment faibles pour que le comportement modal des sous-systèmes découplés ne soit pas affecté quand ils sont couplés. Pour qu'un couplage soit considéré comme faible, il faut que les grandeurs caractéristiques des propriétés mécaniques du couplage telles que la raideur d'un ressort soit petite devant les propriétés internes des sous-systèmes. Une revue de nombreux critères de couplage faible est présentée par Finnveden [72]. Smith [73] propose un critère de couplage faible relativement simple. Il montre que le facteur de perte par couplage entre deux sous-systèmes doit être faible devant le facteur de perte interne des sous-systèmes. Langley [74] propose une définition du couplage faible basée sur la fonction de Green. Le couplage est considéré comme faible si la fonction de Green d'un sous-système est approximativement égale à celle du sous-système découplé. Avec une approche ondulatoire, Mace [75] propose deux paramètres qui permettent de différencier les couplages forts et les couplages faibles. Dans le cas d'un couplage faible la CPP reste valide pour un assemblage de plusieurs plaques [76]. Lafont [77] étudie l'influence du facteur de perte par couplage sur la CPP. En étudiant le couplage entre deux plaques rectangulaires, il montre que pour un couplage faible, le coefficient de couplage est conforme à la théorie SEA. Lorsque le couplage est trop fort, la valeur du coefficient de couplage s'éloigne de la valeur prédite par la SEA. L'énergie se propage alors des sous-systèmes avec une faible densité d'énergie vers les sous-systèmes avec une forte densité d'énergie.

## 2.6 Conclusion

L'analyse statistique de l'énergie repose sur plusieurs hypothèses qui peuvent être différentes entre l'approche modale et l'approche ondulatoire (à part l'hypothèse de cou-

plage faible). Néanmoins il existe des équivalences entre ces hypothèses [7].

Les deux hypothèses principales pour pouvoir appliquer la CPP sont :

- couplage faible entre les sous-systèmes et
- champ vibratoire diffus dans chaque sous-système.

Dans ce travail, on se focalisera uniquement sur l'hypothèse de champ diffus et on se place toujours dans l'hypothèse de couplage faible.





# 3

## Critère de champ diffus

---

### Sommaire

---

3.1	Définition du champ diffus . . . . .	40
3.2	Densité modale . . . . .	43
3.3	Conditions d'apparition du champ diffus . . . . .	45
3.4	Répartition de l'énergie vibratoire dans une plaque rectangulaire . . . . .	48
3.5	Stade de Bunimovich et plaque circulaire . . . . .	57
3.6	Excitation avec une force de type <i>rain-on-the-roof</i> . . . . .	60
3.7	Conclusion . . . . .	63

---

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de champ diffus. C'est une des plus importantes caractéristiques des théories statistiques de la propagation des ondes. L'objectif est de déterminer les conditions nécessaires à l'établissement du champ diffus. Après avoir défini le champ diffus, ce chapitre s'intéresse aux conditions propices à l'apparition du champ diffus et un critère de champ diffus est proposé. Il est montré que l'apparition du champ diffus est également limitée par l'homogénéité et l'isotropie des sous-systèmes. Pour le montrer, l'ergodicité des sous-systèmes est étudiée à l'aide de la théorie des billards. Trois formes académiques différentes sont étudiées : un rectangle, un stade de Bunimovich et un disque. Finalement, des simulations numériques sont proposées pour ces trois formes.

### 3.1 Définition du champ diffus

En 1974, Lyon [78] propose une définition du champ vibratoire diffus. En mécanique statistique, l'état aléatoire maximal pour un groupe de particules (masses ponctuelles) est obtenu lorsque :

1. Toutes les directions de propagation sont équiprobables
2. Les positions dans l'espace et les moments cinétiques des particules sont statistiquement indépendants

Par la suite, de nombreux auteurs ont proposé de nouvelles définitions. On distingue trois approches différentes pour définir un champ vibratoire en vibroacoustique [79] :

- L'approche modale
- L'approche ondulatoire
- L'approche géométrique

#### 3.1.1 Approche modale

Avec l'approche modale, les modes des systèmes mécaniques sont modélisés par des oscillateurs harmoniques. Lyon [78] et Weaver [80] proposent alors une définition du champ diffus pour des paquets d'oscillateurs dans une bande de fréquences donnée :

1. L'espérance de l'énergie vibratoire est la même pour tous les modes (équipartition modale)
2. Les déplacements et les moments d'un mode sont statistiquement indépendants les uns des autres

Si l'équipartition ou l'indépendance modale n'est pas respectée, ou si la largeur de bande d'excitation est trop étroite, le champ vibratoire n'est plus diffus [65]. Dans le

régime des basses fréquences, la réponse vibratoire d'un système est dépendante du point d'observation et du point d'excitation [61]. Dans le régime des hautes fréquences, le nombre de modes propres du système augmente ce qui rend le niveau vibratoire quasiment indépendant des points d'observation et d'excitation.

### 3.1.2 Approche ondulatoire

Dans l'approche modale, les modes propres sont des ondes stationnaires tandis que dans l'approche ondulatoire, les ondes considérées ne sont plus stationnaires mais progressives. Le champ vibratoire est modélisé par la superposition d'un grand nombre d'ondes progressives très désordonnées. En 1981, Egle [81], étudie la propagation des ondes dans une structure. Pour obtenir un champ *a priori* diffus, les ondes transversales et longitudinales se propagent de manière isotrope avec des phases aléatoires uniformément distribuées. Après un temps relativement court noté  $t^*$ , le champ vibratoire devient diffus. Il montre que l'énergie vibratoire contenue dans les ondes longitudinales est transférée vers les ondes transversales qui deviennent alors dominantes. Pour Weaver [80], un champ vibratoire est diffus lorsqu'après un temps suffisamment long, la propagation des ondes sur une échelle de temps suffisamment longue est essentiellement aléatoire. En chaque point du système étudié, la perturbation est composée d'une superposition d'ondes planes aléatoires et isotropes [82]. Pour les systèmes acoustiques, Rossi [83] (p.195) définit le champ diffus en régime permanent par *un niveau de pression acoustique spatialement uniforme et, en régime libre (extinction de la source sonore), par une décroissance linéaire et spatialement uniforme de ce niveau quel que soit l'emplacement de la source*. Il précise également que le champ diffus ne peut être obtenu que de manière approximative. Fahy [84], explique que le champ diffus peut être vu comme une somme infinie d'ondes planes provenant de manière équiprobable de toutes les directions et d'amplitudes et phases aléatoires. On comprend donc que d'un point de vue ondulatoire, le très grand nombre d'ondes qui se propagent dans le système dans toutes les directions entraîne une uniformité des amplitudes vibratoires ce qui correspond à un champ vibratoire diffus.

### 3.1.3 Approche géométrique

L'acoustique géométrique était déjà utilisée par les grecs et les romains pour la conception des théâtres de manière à ce que les rayons sonores se répartissent de manière uniforme le long des gradins [85]. Aujourd'hui encore, l'acoustique géométrique est largement utilisée en acoustique des salles [86]. L'approche géométrique repose sur le concept de rayon vibratoire ou acoustique. A une fréquence suffisamment élevée,

l'énergie vibratoire ou acoustique provenant d'une source se déplace le long de ces rayons. De la même manière qu'en optique géométrique, les rayons rebondissent sur les parois du système en suivant la loi de réflexion de Snell-Descartes. Ainsi, pour un point récepteur quelconque, les rayons atteignent ce récepteur avec des amplitudes similaires (homogénéité) et dans toutes les directions (isotropie) [87, 88]. Avec une approche par les rayons, un champ acoustique est diffus lorsqu'il est *homogène* et *isotrope*. En acoustique, l'hypothèse de champ diffus implique également que l'énergie décroît de la même manière partout dans le système. Lorsqu'un bruit est émis dans une cavité avec un niveau sonore élevé puis qu'on coupe la source brusquement, il subsiste dans la cavité une traînée sonore qui dure jusqu'à ce que son niveau soit très faible tel que présentée à la figure 3.1.

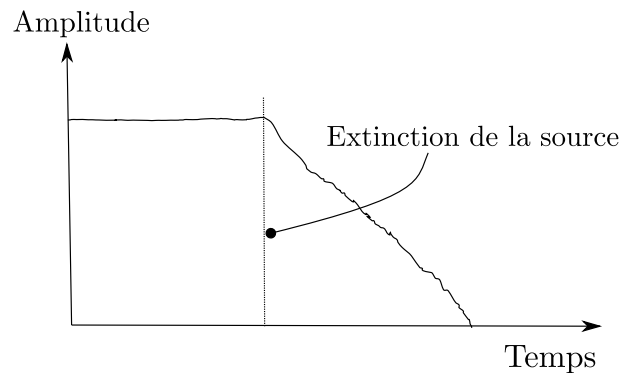


FIGURE 3.1 – Décroissance linéaire du niveau acoustique

Cette traînée est due aux réflexions de l'énergie acoustique sur les parois de la cavité. A chaque impact sur une paroi, une part de l'énergie est consommée par absorption et progressivement le niveau d'énergie acoustique diminue. La durée de réverbération  $T_s$  est définie comme étant le temps nécessaire pour observer une décroissance de 60 dB après l'extinction de la source. La loi de Sabine permet de calculer cette durée de réverbération

$$T_s = \frac{0,16V}{\alpha S} \quad (3.1)$$

avec  $\alpha$  le coefficient d'absorption moyen,  $V$  le volume de la cavité en  $\text{m}^3$ , et  $S$  la surface des parois en  $\text{m}^2$ . Ainsi, en acoustique l'hypothèse de champ diffus implique que la décroissance de l'énergie acoustique est exponentielle dans le temps et de plus cette décroissance est la même quelle que soit la répartition des absorbants sur les parois.

Pour un champ vibratoire, l'homogénéité signifie que la densité moyenne d'énergie est la même en tout point du système. L'isotropie, qui caractérise l'invariance par rotation des propriétés physiques de la structure, permet d'écrire de plus que l'intensité ne dépend pas de la direction d'observation.

## 3.2 Densité modale

Afin de pouvoir proposer un critère de champ diffus, il est nécessaire de déterminer le nombre de modes dans une bande de fréquences donnée.

La densité modale d'un système mécanique est une propriété statistique qui représente le nombre de modes par unité de fréquence. Si on considère une bande de fréquences  $\Delta\omega = [\omega_{\min}; \omega_{\max}]$  qui contient  $N$  modes, alors la densité modale est définie par

$$n(\omega) = \frac{N}{\Delta\omega}. \quad (3.2)$$

La densité modale est une donnée importante pour la prédiction du comportement vibratoire d'un système à haute fréquence [52]. Déterminer le nombre exact de modes d'un système dans une bande de fréquences est un problème complexe. Toutefois, lorsque le nombre de modes devient très élevé, il est possible de déterminer la densité modale des structures de manière asymptotique. On montre par la suite, pour des systèmes à une et deux dimensions, que la densité modale dépend uniquement de la géométrie du système et des vitesses de groupe ( $c_g$ ) et de phase ( $c_p$ ) quelle que soit la complexité du système.

### 3.2.1 Système 1D

On considère un système en une dimension de longueur  $L$ . Une résonance apparaît lorsque la longueur du système est un multiple de la demi-longueur d'onde  $\lambda$

$$2L = N\lambda$$

En remplaçant la longueur d'onde par  $2\pi/k$ , il vient :

$$L = N \frac{\pi}{k}$$

avec  $k$  le nombre d'onde. La densité modale s'obtient en dérivant cette équation par rapport à  $\omega$  afin de connaître le nombre moyen de résonances dans la bande de fréquences

$$n(\omega) = \frac{dN}{d\omega} = \frac{L}{\pi} \frac{dk}{d\omega}. \quad (3.3)$$

Mais la vitesse de groupe  $c_g$  est égale à  $d\omega/dk$  d'où

$$n(\omega) = \frac{L}{\pi c_g} \quad (3.4)$$

La densité modale d'un système 1D dépend donc de la longueur du système.

### 3.2.2 Système 2D

On considère une plaque rectangulaire de longueur  $L_x$  et de largeur  $L_y$ . Le nombre d'onde se décompose désormais en deux composantes notées  $k_x$  et  $k_y$ . Les deux conditions nécessaires pour obtenir un mode propre s'écrivent désormais

$$k_x L_x = \pi p$$

$$k_y L_y = \pi q$$

avec  $p$  et  $q$  deux nombres entiers. L'amplitude du vecteur nombre d'onde est donnée par

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi p}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{L_y}\right)^2} \quad (3.5)$$

Étant donné que  $c_p = \omega/k$ , il vient :

$$\omega = c_p \sqrt{\left(\frac{\pi p}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi q}{L_y}\right)^2} \quad (3.6)$$

soit

$$\left(\frac{c_p \pi}{L_x \omega}\right)^2 p^2 + \left(\frac{c_p \pi}{L_y \omega}\right)^2 q^2 = 1 \quad (3.7)$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse qui est représentée à la figure 3.2. L'ensemble des modes propres avec une pulsation inférieure à  $\omega$  sont représentés par les croix.

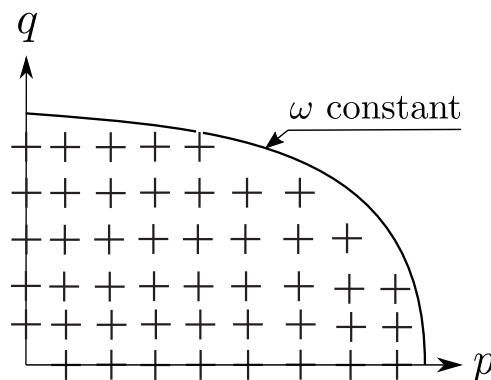


FIGURE 3.2 – Nombre de modes propres avec une pulsation inférieure à  $\omega$ .

Le nombre de modes avec une pulsation inférieure à  $\omega$  est le nombre de couples d'entiers  $(p, q)$  tel

$$N(\omega) = \text{Card} \left\{ (p, q) \in \mathbb{N}^2, \left( \frac{c_p \pi}{L_y} \right)^2 p^2 + \left( \frac{c_p \pi}{L_x} \right)^2 q^2 \leq \omega^2 \right\} \quad (3.8)$$

Le nombre de modes dans la bande de fréquences  $[0, \omega]$  est approché par le quart de l'aire de l'ellipse [89].

$$N = \frac{\pi L_x \omega L_y \omega}{4 c_p \pi c_p \pi} = \frac{S k^2}{4\pi} \quad (3.9)$$

avec  $S = L_x L_y$  la surface du système rectangulaire. La densité modale est

$$n = \frac{dN}{d\omega} = \frac{S}{2\pi} k \frac{dk}{d\omega} \quad (3.10)$$

Finalement, en introduisant la vitesse de groupe ( $c_g$ ) et la vitesse de phase ( $c_p$ ), il vient

$$n(\omega) = \frac{S\omega}{2\pi c_p c_g} \quad (3.11)$$

La densité modale dépend donc de la surface du système étudié.

### 3.2.3 Système 3D

Le calcul de la densité modale pour des systèmes à trois dimensions peut être réalisé de manière similaire tel que présenté par Le Bot [1]. La densité modale pour des systèmes anisotropiques a été étudiée par Langley [90]. Contrairement à un système isotrope, la vitesse de groupe et de phase sont dépendantes de la direction de propagation de l'onde. Dans le cas, d'un système anisotrope, la densité modale est [90]

$$n(\omega) = \frac{S\omega}{2\pi^2} \int_0^\pi \frac{d\theta}{c_p(\theta)c_g(\theta)} \quad (3.12)$$

avec  $c_p(\theta)$  et  $c_g(\theta)$  les vitesses de phase et de groupe dans la direction  $\theta$ .

## 3.3 Conditions d'apparition du champ diffus

Dans cette section, nous présentons les conditions qui sont favorables à l'apparition d'un champ vibratoire diffus. Les différents critères présentés ci-dessous ont été introduits par Le Bot et Cotoni [12] qui présentent une nouvelle méthodologie pour déterminer le domaine de validité du critère de champ diffus nécessaire pour l'analyse statistique de l'énergie. Les critères étudiés sont le nombre de modes  $N$ , le recouvrement modal  $M$  et le facteur d'atténuation par unité de longueur  $\bar{m}$ .



### 3.3.1 Nombre de modes

Pour obtenir un champ vibratoire diffus, le nombre de modes doit être élevé. Dans la bande de fréquences  $[0; \omega]$ , le nombre de modes  $N$  avec une pulsation inférieure à  $\omega$  est lié à la densité modale  $n(\omega)$  par la relation

$$N = \int_0^{\omega} n(\omega) d\omega \quad (3.13)$$

Ainsi une des conditions nécessaires pour obtenir un champ diffus est que  $N$  doit être grand. Pour déterminer les fréquences de résonance d'un système, on détermine la fonction de réponse en fréquence (FRF) du système. La FRF fait apparaître des pics aux fréquences propres du système. La FRF de la figure 3.3a présente un cas de densité modale faible et la FRF de la figure 3.3b présente un cas de densité modale élevée.

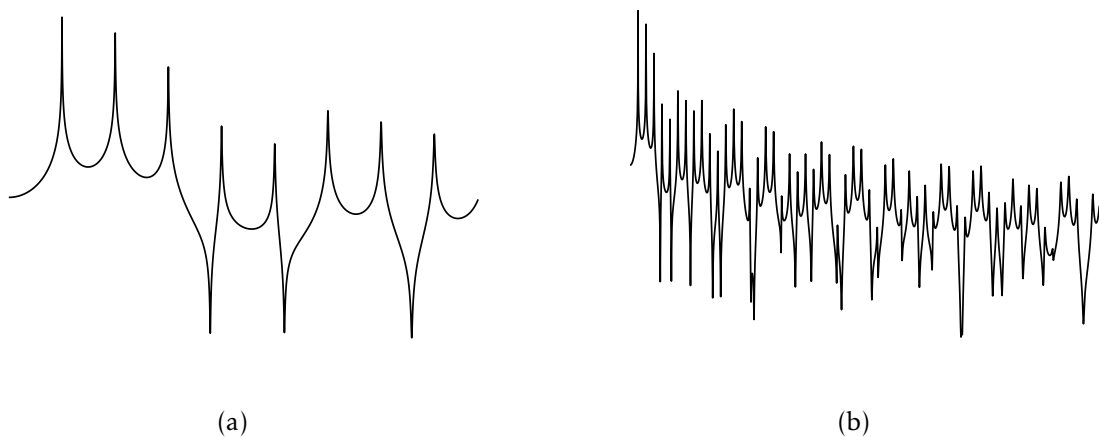


FIGURE 3.3 – Fonctions de réponse en fréquence pour : (a), faible densité modale; (b), forte densité modale

### 3.3.2 Recouvrement modal

Dans le régime de basse fréquence, les fréquences propres sont espacées et les pics de la FRF sont donc clairement distincts les uns des autres. Pour des systèmes complexes, lorsque la fréquence augmente, les fréquences propres sont de plus en plus proches les unes des autres. Sur la FRF, les pics se chevauchent et ils sont de moins en moins discernables. La FRF présentée à la figure 3.4 présente un cas de recouvrement modal élevé.

Le recouvrement modal est alors trop important et les modes perdent leur individua-

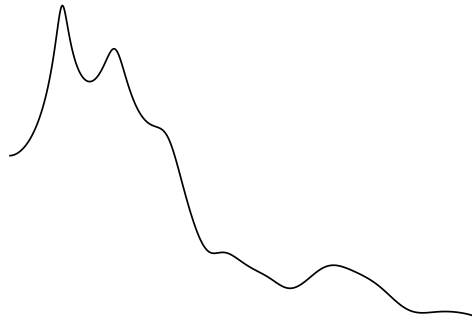


FIGURE 3.4 – Fonction de réponse en fréquence pour un recouvrement modal élevé et une densité modale faible

lité. Le domaine modal d'une structure prend fin lorsqu'un mode ne peut être distingué de ses voisins. Afin de quantifier le recouvrement modal  $M$ , il faut comparer la largeur d'un pic (la bande passante d'un pic à -3 dB)  $\eta\omega$  et la distance moyenne entre deux résonances  $1/n$  [44].

$$M = n(\omega)\eta\omega \quad (3.14)$$

avec  $n(\omega)$  la densité modale,  $\eta$  le facteur d'amortissement, et  $\omega$  la fréquence centrale de la bande de fréquences. Il est admis que lorsque  $M > 0.3$ , il est difficile de distinguer deux résonances. Lorsque  $M > 0.5$ , la distinction devient impossible [91]. Dans notre cas, un champ vibratoire peut devenir diffus lorsque le recouvrement modal  $\eta\omega \gg 1/n(\omega)$  est important soit

$$M \gg 1. \quad (3.15)$$

Finalement, la figure 3.5 présente un cas avec une forte densité modale et un fort recouvrement modal. Les modes ne sont plus discernables et on ne distingue plus qu'une moyenne d'ensemble.

### 3.3.3 Facteur d'atténuation par unité de longueur

On a montré qu'il est possible de définir un champ vibratoire en utilisant une approche purement géométrique similaire à l'optique géométrique. Pour que le champ soit diffus, il est nécessaire que les rayons s'entrecroisent un grand nombre de fois avant d'être fortement atténués. Le facteur d'atténuation linéaire de l'onde est  $m = \eta\omega/c_g$ . Pour obtenir un facteur d'atténuation normalisé, il est nécessaire de le multiplier par le libre

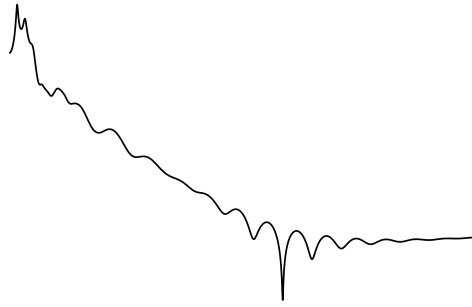


FIGURE 3.5 – Fonction de réponse en fréquence pour un recouvrement modal élevé et une densité modale élevée

parcours moyen  $l$  [92]

$$\bar{m} = \frac{\eta\omega}{c_g} l. \quad (3.16)$$

Le facteur d'atténuation par unité de longueur doit être faible pour permettre aux rayons de s'entrecroiser et d'être réfléchis un grand nombre de fois avant de s'estomper ce qui implique

$$\bar{m} \ll 1. \quad (3.17)$$

En conclusion, pour obtenir un champ vibratoire diffus,

- Le nombre de modes dans la bande de fréquences doit être important,
- le facteur d'atténuation doit être faible,
- le recouvrement modal doit être important.

### 3.4 Répartition de l'énergie vibratoire dans une plaque rectangulaire

Dans cette section, l'influence de l'amortissement et de la fréquence d'excitation sur la diffusivité du champ vibratoire d'une plaque rectangulaire est évaluée à l'aide de l'écart type normalisé défini dans l'équation (3.27). La plaque a une épaisseur  $h$  et est excitée avec une force notée  $f(x, y, t)$  tel que présenté à la figure 3.6.

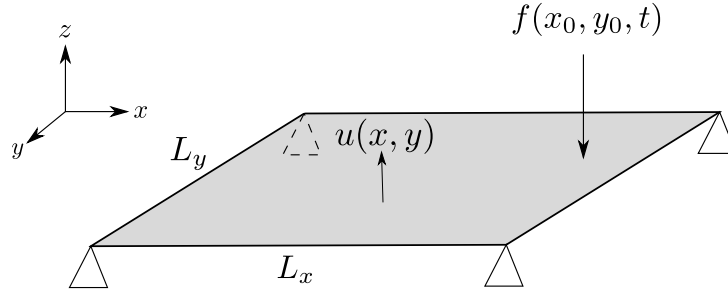


FIGURE 3.6 – Plaque rectangulaire en appuis simples excitée par une force ponctuelle  $f(x, y, t)$ .

Les quatre bords de la plaque sont en appui simple. L'équation du mouvement qui régit le déplacement transverse  $u(x, y, t)$  de la plaque est

$$D\nabla^4 u(x, y, t) + \lambda \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = f(x, y, t) \quad (3.18)$$

avec  $\nabla^4 : \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  la raideur de flexion,  $E$  le module d'Young,  $\nu$  le coefficient de Poisson,  $\lambda$  l'amortissement,  $m = \rho h$  la masse surfacique et  $h$  l'épaisseur. La force  $f(x, y, t)$  est une force ponctuelle telle que  $f(x, y, t) = F(t)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$  localisée au point de coordonnées  $x_0, y_0$  où  $F(t)$  est un processus aléatoire stationnaire de densité spectrale de puissance constante  $S(\omega) = S_0$  dans la bande de fréquences angulaire  $\Delta\omega$  centrée sur  $\omega_c$  et nulle ailleurs.

### 3.4.1 Calcul de l'énergie locale

On introduit tout d'abord l'énergie vibratoire locale. En tout point  $(x, y)$  de la plaque, l'espérance de la densité d'énergie vibratoire est considérée comme le double de la densité d'énergie cinétique  $m\dot{u}^2(x, y, t)$ ,

$$\langle e(x, y, t) \rangle = m \langle \dot{u}^2(x, y, t) \rangle. \quad (3.19)$$

On ne fait plus intervenir les expressions instantanées des déplacements et de l'énergie mais leurs espérances de probabilité notée  $\langle . \rangle$ . Le terme  $\langle \dot{u}^2 \rangle$  est la fonction d'autocorrélation  $R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau)$  de la vitesse vibratoire prise à  $\tau = 0$ . Avec le théorème de Wiener-Khinchin, il vient [93]

$$\langle \dot{u}^2(x, y, t) \rangle = R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) d\omega \quad (3.20)$$

avec  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  la densité spectrale de puissance de  $\dot{u}$ . Étant donné que les forces extérieures sont décorrélatées, la densité spectrale de puissance de la vitesse  $\dot{u}$  est liée à la

densité spectrale de puissance des forces  $S_{FF}(\omega)$  par la relation

$$S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) = \omega^2 |H(x, y; x_0, y_0; \omega)|^2 S_{FF}(\omega) \quad (3.21)$$

avec  $H$  la fonction de réponse en fréquence. La densité spectrale de puissance des forces est représentée à la figure 3.7 en fonction de  $\omega$ . La densité est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et donc  $S_{FF}(-\omega) = S_{FF}(\omega)$ .

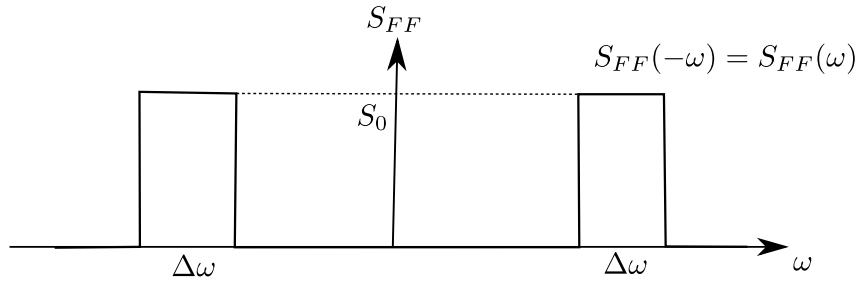


FIGURE 3.7 – Amplitude de la densité spectrale de puissance en fonction de  $\omega$ .

Étant donné que la densité spectrale de puissance est constante et égale à  $S_0$  dans la bande de fréquences  $\Delta\omega$  et nulle ailleurs, la densité d'énergie vibratoire au point  $(x, y)$  s'écrit

$$\langle e \rangle (x, y, \omega_c) = \frac{mS_0}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 |H(x, y; x_0, y_0; \omega)|^2 d\omega. \quad (3.22)$$

Le terme 2 au dénominateur de l'équation (3.20) disparaît du fait de la parité de la densité spectrale de puissance.

Étant donné que la force extérieure est stationnaire, la vitesse vibratoire  $\dot{u}$  est également stationnaire et n'est donc plus dépendante du temps. Cependant, la vitesse vibratoire est désormais dépendante de la fréquence centrale  $\omega_c$ . Au vu de l'équation (3.22), on comprend que pour calculer la densité d'énergie, il suffit de calculer la fonction de réponse en fréquence entre la force localisée en  $(x_0, y_0)$  et le déplacement du point récepteur localisé en  $(x, y)$ . La fonction de réponse en fréquence  $H$  est obtenue par décomposition modale entre la vitesse de déplacement au point récepteur  $\dot{u}(x, y, t)$  et la force d'excitation  $f(x_0, y_0, t)$ , soit

$$H(x, y, x_0, y_0, \omega) = \sum_{n>0} \frac{\Psi_n(x_0, y_0)\Psi_n(x, y)}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta_n\omega_n\omega)} \quad (3.23)$$

avec  $\Psi_n$  et  $\omega_n$  sont respectivement la  $n$ ième déformée propre et fréquence propre de la plaque rectangulaire et  $\eta_n = \lambda_n/(2m_n\omega_n)$  le facteur d'amortissement. Dans le cas de la plaque rectangulaire simplement appuyée, il existe deux méthodes différentes pour déterminer les déformées propres et les fréquences propres du système.

1. Analytiquement, pour un mode  $n = (a, b)$  les expressions des fréquences propres et des déformées propres sont [94]

$$\omega_n = \sqrt{\frac{D}{m}} \left( \left( \frac{a\pi}{L_x} \right)^2 + \left( \frac{b\pi}{L_y} \right)^2 \right) \quad (3.24)$$

$$\Psi_n(x, y) = \frac{2}{\sqrt{L_x L_y}} \sin\left(\frac{\pi a x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi b y}{L_y}\right) \quad (3.25)$$

2. Numériquement, les modes propres peuvent être déterminés avec un calcul par éléments finis

C'est cette deuxième solution qui est retenue pour la suite du mémoire. Avec le logiciel de calcul par éléments finis MSC/Nastran 2021.1, la plaque rectangulaire est maillée avec des éléments carrés de côté 6 mm. Les caractéristiques de la plaque sont présentées dans le tableau 3.1. Les 465 modes propres contenus dans la bande de fréquences [0-12000] Hz sont alors obtenus. Afin de valider les résultats obtenus avec le calcul par éléments finis, les fréquences propres estimées numériquement sont comparées aux fréquences propres calculées analytiquement avec l'équation (3.24). La figure 3.8 présente l'évolution des fréquences propres pour la plaque rectangulaire calculées de manière numérique et analytique. La différence entre les deux méthodes reste très faible même pour les plus hautes fréquences. Au 475ème mode, à 12000 Hz, la différence est seulement de 1.9 %.

### 3.4.2 Critère de champ diffus

Le champ diffus est caractérisé par une répartition de l'énergie homogène dans l'ensemble du système. Afin de quantifier l'homogénéité du champ, il faut calculer et comparer l'énergie vibratoire pour tous les points récepteurs du système. La distribution spatiale de l'énergie peut être caractérisée par la moyenne spatiale

$$\bar{e}(\omega) = \frac{1}{S} \int_S e(x, y, \omega) dS. \quad (3.26)$$

Le Bot et Cotoni [12] proposent de calculer l'écart type normalisé pour quantifier la diffusivité du champ vibratoire. Pour ce faire, ils calculent le ratio de l'écart-type de l'espérance de l'énergie locale normalisée par la moyenne

$$\sigma(\omega_c) = \frac{1}{\bar{e}(\omega_c)} \sqrt{\frac{1}{S} \int_S (e(x, y, \omega_c) - \bar{e}(\omega_c))^2 dS}. \quad (3.27)$$

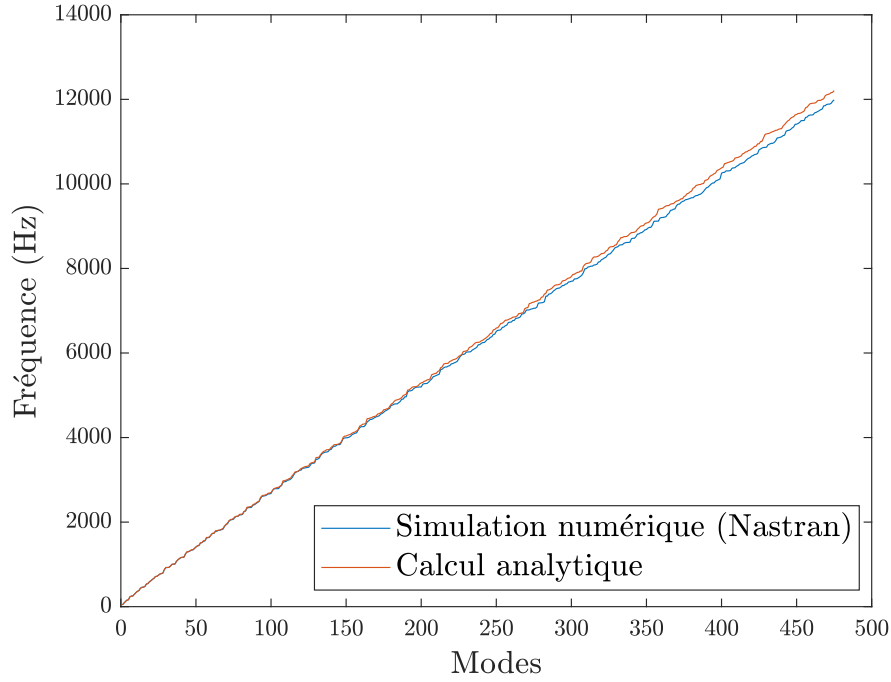


FIGURE 3.8 – Comparaison des fréquences propres pour la plaque rectangulaire calculées de manière numérique (bleue) et analytique (rouge).

Ainsi, lorsque  $\sigma$  tend vers zéro, tous les points du système possèdent à peu près la même énergie et donc le champ vibratoire est considéré comme diffus. En pratique, tous les points du système ne peuvent pas posséder exactement la même énergie. Afin de rester en cohérence avec la littérature [95, 7], lorsque  $\sigma < 0,7$ , le champ vibratoire est considéré comme diffus. Un autre critère pour quantifier la répartition d'énergie vibratoire dans un système est l'*Inverse Participation Ratio* (IPR). L'IPR est une mesure de localisation et est défini de la manière suivante [96]

$$I_p = \frac{\frac{1}{S} \int \langle \dot{u}^4(x, y, t) \rangle dS}{\left(\frac{1}{S} \int \langle \dot{u}^2(x, y, t) \rangle dS\right)^2} = \frac{\frac{1}{S} \int e(x, y, \omega_c)^2 dS}{\bar{e}(\omega_c)^2}. \quad (3.28)$$

En comparant avec l'équation (3.27), il vient immédiatement  $I_p = \sigma^2 + 1$ . Ainsi, l'écart type normalisé  $\sigma$  et l'IPR  $I_p$  donnent la même information.

Le critère de diffusivité  $\sigma$  est tracé dans le plan fréquence/amortissement. Les énergies locales doivent donc être calculées pour plusieurs valeurs de fréquence et d'amortissement.

### 3.4.3 Répartition de l'énergie vibratoire

Dans cette section, le caractère diffus du champ vibratoire d'une plaque rectangulaire est évalué en utilisant l'écart type normalisé défini dans l'équation (3.27). La méthodologie numérique décrite dans la section 3.4.1 est appliquée pour évaluer les énergies locales. L'espérance des énergies locales est estimée avec l'équation (3.22) pour 7000 points récepteurs choisis de manière aléatoire sur l'ensemble de la plaque. Le critère de champ diffus est calculé pour 16 bandes de fréquences  $\Delta f$  de [20-63] Hz, [20-125] Hz, jusqu'à [20-8000] Hz. Les limites inférieures  $f_{\min}$  de toutes les bandes de fréquences sont fixées à 20 Hz tandis que les limites supérieures  $f_{\max}$  sont espacées de manière logarithmique entre 63 et 8000 Hz. De plus, 30 valeurs du facteur d'amortissement sont considérées, espacées de manière logarithmique entre  $1.10^{-3}$  et 1. L'intégrale de l'équation (3.22) est estimée grâce à la méthode des rectangles avec un pas fréquentiel  $\delta\omega = \eta f_{\max}$ . Le choix de ce pas fréquentiel permet d'avoir une estimation de l'intégrale plus précise lorsque l'amortissement diminue. L'annexe 9.2 présente une étude de convergence réalisée pour déterminer le pas fréquentiel optimal.

Les dimensions de la plaque rectangulaire ainsi que les paramètres mécaniques du matériau de la plaque étudiée sont présentés dans le tableau 3.1. La plaque est excitée au point de coordonnées  $x_0 = 0.22$  m et  $y_0 = 0.12$  m avec une force de densité spectrale de puissance  $S_0 = 1$ .

TABLE 3.1 – Dimensions et paramètres mécaniques du matériau de la plaque étudiée

	Symbole	Valeur	Unité
Dimensions	$L_x \times L_y \times h$	$600 \times 440 \times 2$	mm
Densité	$\rho$	$7,8.10^3$	kg/m <sup>3</sup>
Module d'Young	$E$	$2,1 \times 10^{11}$	N/m <sup>2</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
Rigidité de flexion	$D$	153.8	Pa.m <sup>3</sup>
Facteur d'amortissement	$\eta$	[ $1.10^{-3}$ -1]	
Pulsation centrale	$\omega_c$	$2\pi \times [16-8000]$	Hz

La figure 3.9 présente l'évolution de l'écart type normalisé de la distribution d'énergie vibratoire pour la plaque rectangulaire dans le plan fréquence-amortissement. Le recouvrement modal  $M = 1$ , le facteur d'atténuation  $\bar{m} = 0.5$  et le nombre de modes  $N = 10$  sont représentés par les lignes en pointillées. L'axe des abscisses, représente la borne supérieure pour chaque bande de fréquences étudiées. Les isolignes représentent les valeurs de  $\sigma$  espacées entre 0,6 et 4. Les trois points A, B et C ont été placés sur la carte afin de mettre en avant trois zones particulières. Ils seront utiles pour la



suite du mémoire. La carte de la figure 3.9 met en évidence l'existence de trois zones différentes.

- Une zone claire située autour du point B qui se situe pour des fréquences supérieures à 500 Hz et un facteur d'amortissement  $\eta < 0.02$ . Cette zone est bien délimitée par le nombre de modes  $N = 10$  et le facteur d'atténuation  $\bar{m} = 0.5$ . Ce sont donc deux paramètres importants pour obtenir un champ vibratoire diffus. La ligne représentant le recouvrement modal  $M = 1$  est moins importante pour délimiter la zone de champ diffus car le nombre de modes est très important dans la bande de fréquences étudiée. La valeur de  $M$  est ici laissée égale à 1 pour rester en cohérence avec la littérature [12].
- Une zone plus foncée située autour du point A avec des fréquences comprises en 63 Hz et 500 Hz. Cette zone est bordée à droite par la droite verticale  $N = 10$ .
- Une zone très foncée qui se situe autour du point C avec des fréquences supérieures à 500 Hz et un facteur d'amortissement supérieur à 0.02. Cette zone est encadrée par la ligne verticale  $N = 10$  et la droite  $\bar{m} = 0.5$ .

La figure 4 présente le champ vibratoire de la plaque rectangulaire obtenue numériquement pour les trois configurations correspondant aux points A, B, et C. Les états vibratoires en ces points peuvent être caractérisés par :

- Le point A est caractéristique d'un comportement **modal**. La bande de fréquences d'intégration est [20-63] Hz. La valeur de  $\sigma$  est supérieure à 0.7. Le facteur d'amortissement est égal à  $2 \cdot 10^{-3}$ . La figure 3.10a présente le comportement vibratoire de la plaque. Dans cette bande d'excitation, la réponse vibratoire de la plaque n'est composée que de quatre modes, de sorte que la distribution de l'énergie vibratoire est très fluctuante. Le nombre de modes étant faible, on voit clairement apparaître les noeuds des modes (là où l'énergie est la plus faible) ainsi que les ventres (là où l'énergie est plus importante).
- Le point C est caractéristique d'un champ vibratoire **direct**. La valeur de  $\sigma$  est supérieure à 1. La bande de fréquences d'intégration est très large et est égale à [20-4000] Hz. Le facteur d'amortissement est élevé et égal à 0.2. La figure 3.10b présente le comportement vibratoire de la plaque. Dans cette configuration, l'énergie se cantonne au voisinage du point d'excitation et décroît de manière exponentielle lorsqu'on s'éloigne du point source. En utilisant une approche géométrique, on comprend que la propagation des rayons se limite à quelques réflexions car le coefficient de réflexion est très faible. L'influence des rayons réfléchis est très faible et seul le champ direct contribue au comportement vibratoire de la plaque.
- Le point B est caractéristique d'un champ vibratoire **diffus**. La valeur de  $\sigma$  est

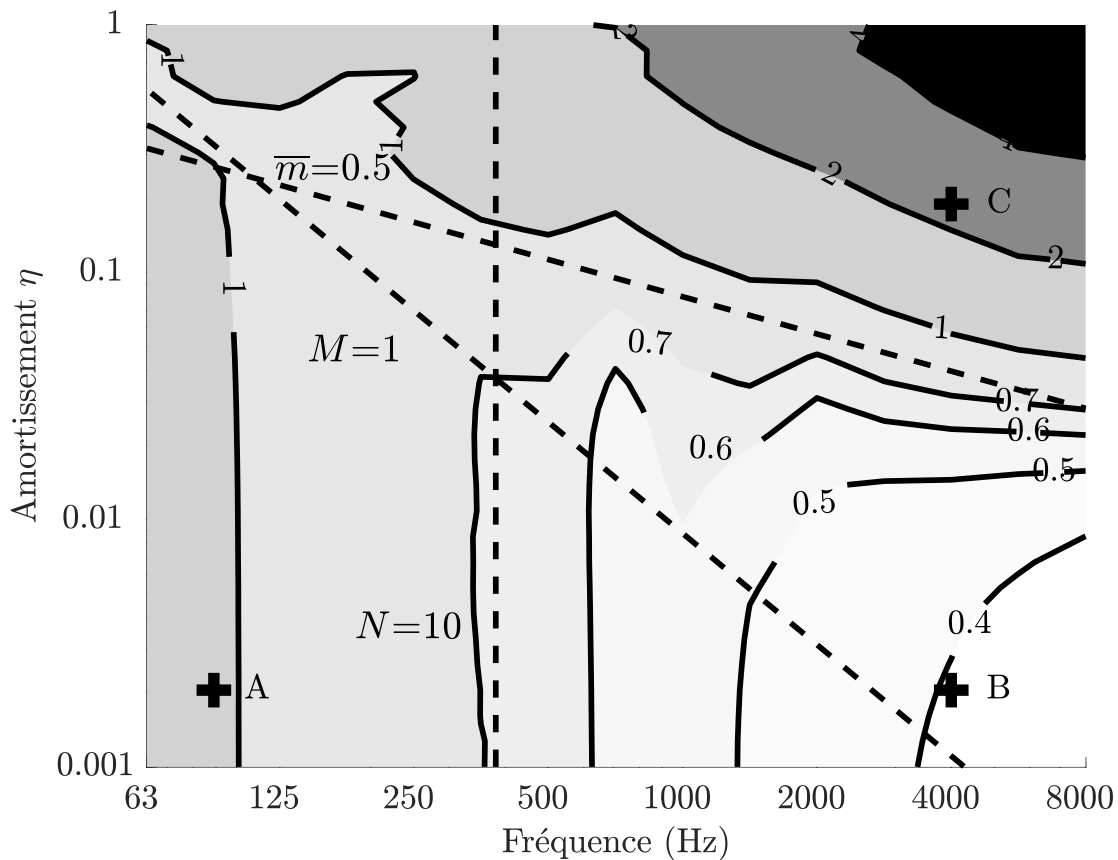
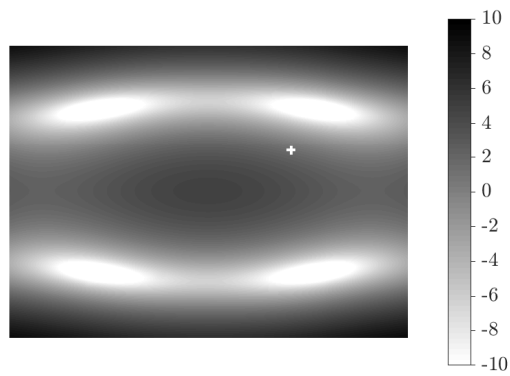


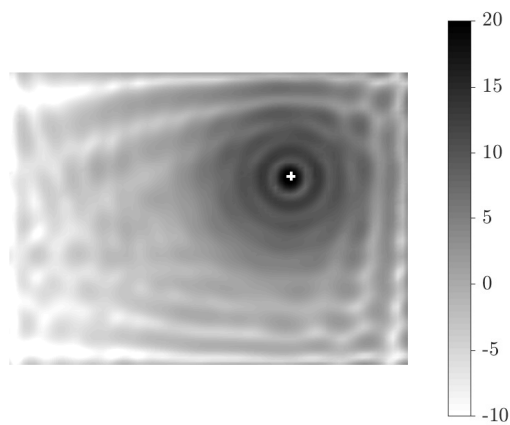
FIGURE 3.9 – Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour une plaque rectangulaire à bords appuyées excitée avec une source ponctuelle. Le recouvrement modal  $M = 1$ , le facteur d'atténuation  $\bar{m} = 0.5$  et le nombre de modes  $N = 10$  sont représentés par les lignes en pointillées.

égale à 0.39 et donc inférieure à 0.7 ce qui signifie que les écarts des espérances des énergies locales sont très faibles. Tous les récepteurs de la plaque ont une énergie vibratoire quasi-similaire et donc le champ vibratoire est diffus. La bande de fréquences d'intégration est [20-4000] Hz et le facteur d'amortissement est égal à  $2 \cdot 10^{-3}$ . La figure 3.10b présente le comportement vibratoire de la plaque. Chacun des points de la plaque possède approximativement la même énergie vibratoire. On distingue cependant quatre lignes et quatre points avec un niveau d'énergie supérieure. Les surintensités de ces lignes seront étudiées plus en détail dans le chapitre 4.

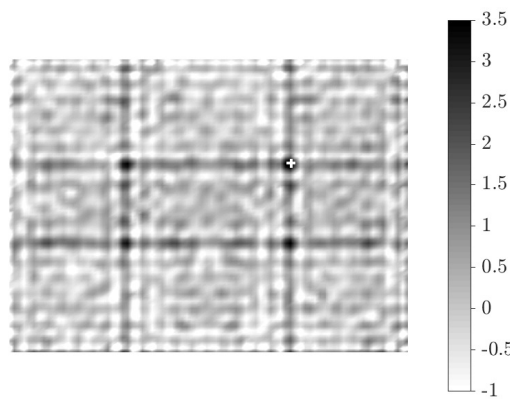
En conclusion, on a vu que les conditions favorables à l'apparition d'un champ diffus sont (1) un nombre de modes important et (2) un faible amortissement.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 3.10 – Répartition de l'énergie vibratoire (en dB) calculée avec les modes propres de la plaque rectangulaire avec les bords libres. (a) : Champ modal ( $\Delta f=[20-63]$  Hz,  $\eta=0.002$ ), (b) : Champ direct ( $\Delta f=[20-4000]$  Hz,  $\eta=0.2$ ), et (c) : Champ diffus ( $\Delta f=[20-4000]$  Hz,  $\eta=0.002$ ). Le point source est représenté avec la croix blanche.

## 3.5 Stade de Bunimovich et plaque circulaire

De la même manière que pour la plaque rectangulaire, la répartition de l'énergie vibratoire est désormais calculée pour le stade de Bunimovitch et pour la plaque circulaire.

### 3.5.1 Répartition de l'énergie vibratoire dans le stade de Bunimovitch

Comme pour la plaque rectangulaire, le critère de champ diffus est calculé pour la plaque en forme de stade de Bunimovich avec les bords encastrés. L'espérance des énergies locales est estimée avec l'équation (3.22) pour 10000 points récepteurs choisis de manière aléatoire sur l'ensemble de la plaque. La figure 3.11 présente l'évolution de l'écart type normalisé de la distribution d'énergie vibratoire pour la plaque en forme de stade dans le plan fréquence-amortissement. On observe de nouveau les trois zones à savoir : champ modal à basse fréquence, champ direct à haute fréquence et fort amortissement et champ diffus à haute fréquence et faible amortissement.

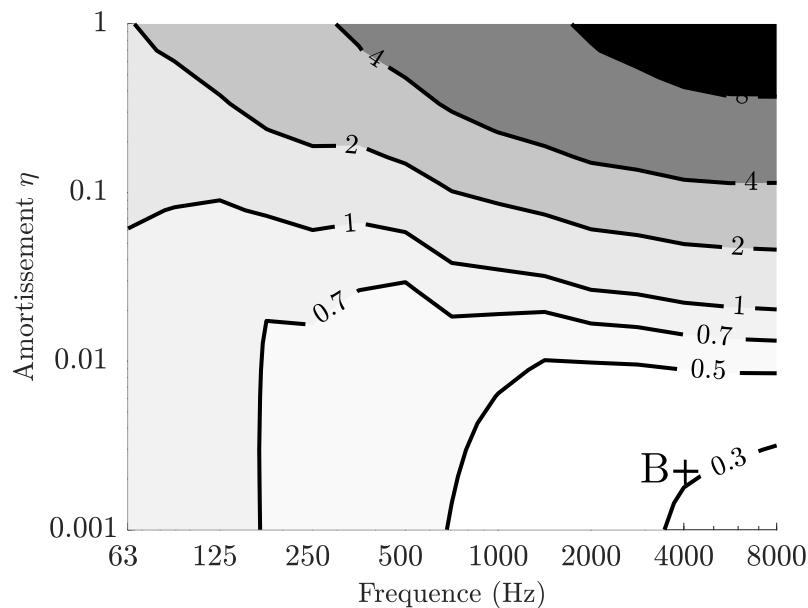
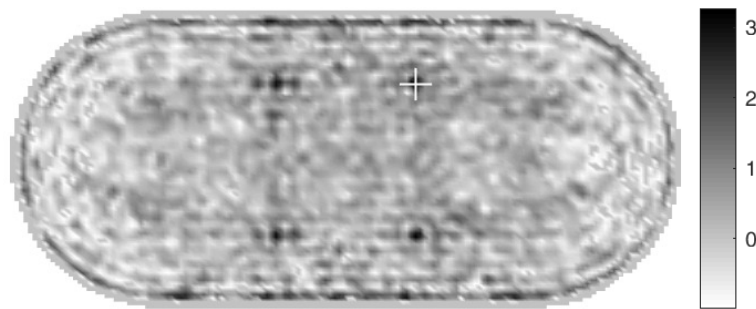


FIGURE 3.11 – Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour la plaque en forme de stade. Les bords sont encastrés et l'excitation est une source ponctuelle.

La figure 3.12a présente le champ vibratoire dans le stade de Bunimovitch. L'excitation est un bruit blanc aléatoire dans une bande de fréquences  $\Delta f = [20-4000]$  Hz et est localisée au point  $(x_0 = 0.16 \text{ m}, y_0 = 0.17 \text{ m})$  repéré par la croix blanche sur la figure, l'origine du repère étant fixé au centre de la plaque. Les caractéristiques du matériau

sont les mêmes que celles de la plaque rectangulaire présentées dans le tableau 3.1. Le calcul de l'énergie locale pour chaque point récepteur se base sur l'équation (3.22) avec  $S_0 = 1$ . La fonction de réponse en fréquence est calculée avec l'équation (3.23) et le pas fréquentiel pour l'intégration est  $\delta\omega = \eta f_{\max}$ . Les modes propres sont obtenus avec une simulation par éléments finis à l'aide du logiciel Nastran. L'amortissement  $\eta$  est égal à 0.002 ce qui correspond au point B sur la figure 3.11. A ce point, le critère de champ diffus est égal à 0.31. Le champ vibratoire dans la plaque est donc diffus. C'est une conséquence directe du caractère ergodique du stade de Bunimovitch. On remarque cependant la présence de quatre points avec une surintensité d'énergie qui sont localisés de manière symétrique par rapport à la source d'excitation. Un calcul précis de ces surintensités est réalisé au chapitre 4.



(a)

FIGURE 3.12 – Répartition de l'énergie vibratoire (dB) calculée avec les modes propres pour le stade de Bunimovitch excité avec une source ponctuelle ( $\Delta f=[20-4000]$  Hz et  $\eta = 0.002$ ). La croix blanche représente la position du point d'excitation.

### 3.5.2 Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque circulaire

Le critère de champ diffus est calculé pour la plaque circulaire. Les modes propres de la plaque circulaire sont obtenus avec une simulation par éléments finis. Les bords de la plaque sont également encastés et le point d'excitation est situé au point ( $x_0 =$

0.1419 m,  $y_0 = 0.1592$  m). Les conditions de la simulation sont les mêmes que pour le stade et la plaque rectangulaire. L'espérance des énergies locales est estimée avec l'équation (3.22) pour 10000 points récepteurs choisis de manière aléatoire sur l'ensemble de la plaque. Le critère de champ diffus est calculé pour 16 bandes de fréquences  $\Delta f$  de [20-63] Hz, [20-125] Hz, ..., jusqu'à [20-8000] Hz. 30 valeurs du facteur d'amortissement sont considérées, espacées de manière logarithmique entre  $1 \cdot 10^{-3}$  et 1. La figure 3.13 présente l'évolution de l'écart type normalisé de la distribution d'énergie vibratoire pour la plaque en forme de cercle dans le plan fréquence-amortissement. Le résultat est différent des deux cas précédents. Quel que soit l'amortissement et la bande de fréquences d'excitation, le critère de champ diffus n'est jamais inférieur à 1 et donc le champ vibratoire ne peut pas être considéré comme diffus.

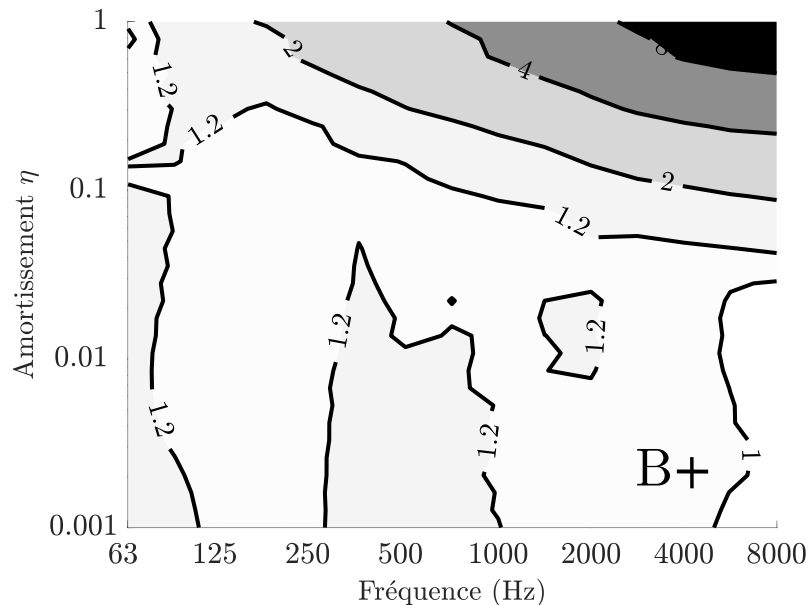


FIGURE 3.13 – Représentation de l'écart-type de la distribution spatiale de l'énergie dans le plan amortissement-fréquence pour la plaque circulaire. Les bords sont encastés et l'excitation est une source ponctuelle.

De la même manière que pour le stade, le champ vibratoire est calculé pour la plaque circulaire. L'excitation est un bruit blanc aléatoire dans une bande de fréquences  $\Delta f = [20-4000]$  Hz localisée au point  $(x_0 = 0.2 \text{ m}, y_0 = 0.2 \text{ m})$  repéré par la croix blanche. Le facteur d'amortissement  $\eta$  est égal à 0.002 ce qui correspond au point B sur la figure 3.13. A ce point, le critère de champ diffus est égal à 1.1. La figure 3.14a présente le champ vibratoire dans la plaque circulaire et la figure 3.14b présente la répartition de l'énergie vibratoire le long du rayon  $d_1$ .

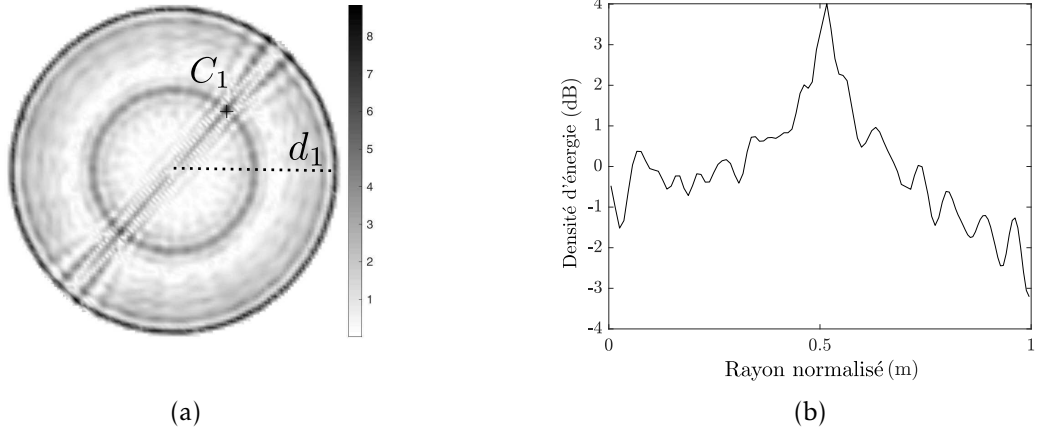


FIGURE 3.14 – (a) Répartition de l'énergie vibratoire (dB) calculée avec les modes propres pour la plaque circulaire excitée avec une source ponctuelle ( $\Delta f=[20-4000]$  Hz et  $\eta = 0.002$ ). La croix représente la position du point d'excitation. (b) Répartition de l'énergie vibratoire le long de la ligne  $d_1$ .

Le champ d'énergie vibratoire n'est pas diffus pour la plaque circulaire excitée avec une force ponctuelle. Il existe deux différentes zones de surintensité. Premièrement, on observe une surintensité d'énergie sur le cercle passant par le point d'excitation. C'est une conséquence du caractère non ergodique de la plaque circulaire. Cette surintensité s'explique avec l'acoustique géométrique. On a montré à la section 4.2.3 que les rayons se concentrent sur le cercle passant par le point de départ du rayon. La seconde zone de surintensité est située sur le diamètre passant par le point d'excitation. Cette surintensité s'explique par la cohérence des rayons et sera développée par la suite.

### 3.6 Excitation avec une force de type *rain-on-the-roof*

Jusqu'à présent l'excitation de plaque était réalisée par une force ponctuelle. Toutefois, il est possible d'exciter la plaque avec une infinité de forces décorréelées les unes des autres. Ce type d'excitation est appelé *rain-on-the-roof*. Dans le cas de  $N$  excitations ponctuelles décorréelées en espace et en temps, la distribution de force est

$$f(x, y, t) = \sum_{i=1}^N F_i(t)\delta(x - x_i)\delta(y - y_i) \quad (3.29)$$

avec  $F_i$  des fonctions aléatoires dont la densité spectrale de puissance  $S_i(\omega)$  est supposée constante dans la totalité de la bande fréquence  $\Delta\omega$  et nulle ailleurs et  $(x_i, y_i)$  le point d'application des forces. Une force de type *rain-on-the-roof* est obtenue lorsque

le nombre de points d'excitation tend vers l'infini soit  $N \rightarrow \infty$  tel que présenté à la figure 3.15 dans le cas d'une plaque circulaire.

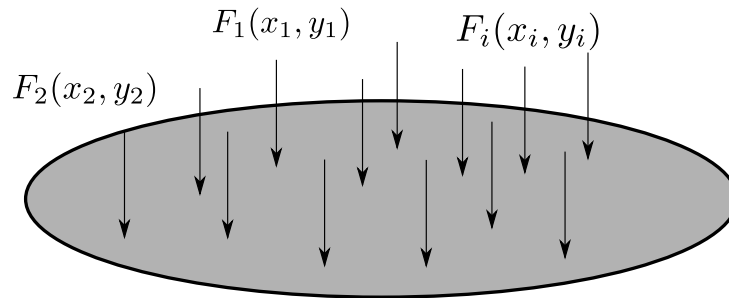


FIGURE 3.15 – Plaque circulaire excitée avec excitation de type *rain-on-the-roof*

### 3.6.1 Plaque rectangulaire fortement amorti

On se place dans le cas représenté par le point C sur la figure 3.9 où le champ vibratoire n'est pas diffus du fait de l'amortissement élevé. La bande de fréquences d'excitation est [20-4000] Hz et le facteur d'amortissement est 0.2. On observe alors l'évolution du critère de champ diffus  $\sigma$  en fonction du nombre de points d'excitations tel que présenté à la figure 3.16.

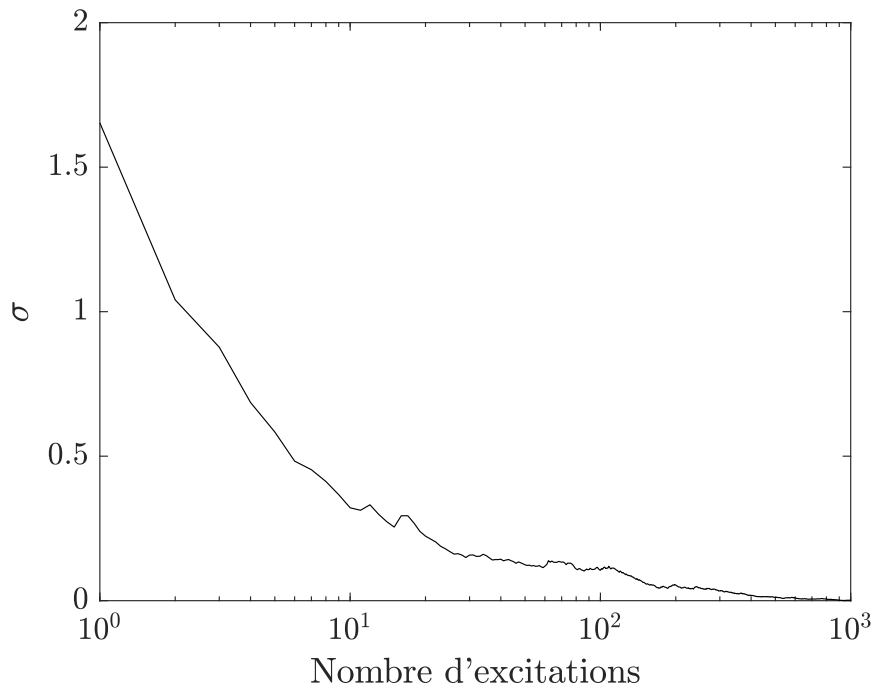


FIGURE 3.16 – Évolution du critère de champ diffus  $\sigma$  pour une plaque rectangulaire fortement amortie ( $\eta = 0.2$ ) en fonction du nombre d'excitations.

Le critère de champ diffus  $\sigma$  diminue avec le nombre d'excitations. Dans un premier



temps, la décroissance est rapide et passe en dessous du critère de champ diffus  $\sigma=0,7$  à partir de 10 excitations. Cela signifie que le champ vibratoire devient diffus. A partir de 25 excitations, le critère se stabilise et diminue de manière plus progressive.

Dans le cas d'une plaque rectangulaire, le champ vibratoire peut être naturellement diffus avec une seule excitation lorsque la fréquence d'excitation est relativement élevée et l'amortissement est très faible. En dehors de ces conditions favorables, il est possible d'obtenir un champ vibratoire diffus en excitant le système avec une excitation de type *rain-on-the-roof* avec au moins 10 excitations.

### 3.6.2 Plaque circulaire

Pour une plaque circulaire, le champ vibratoire n'est *a priori* pas diffus avec une seule excitation ponctuelle. Toutefois en excitant la plaque avec plusieurs excitations ponctuelles, il est possible d'obtenir un champ diffus. On observe alors l'évolution du critère de champ diffus  $\sigma$  en fonction du nombre de points d'excitation tel que présenté à la figure 3.17. La bande de fréquences d'excitation est [20-4000] Hz et le facteur d'amortissement est fixé à 0.002.

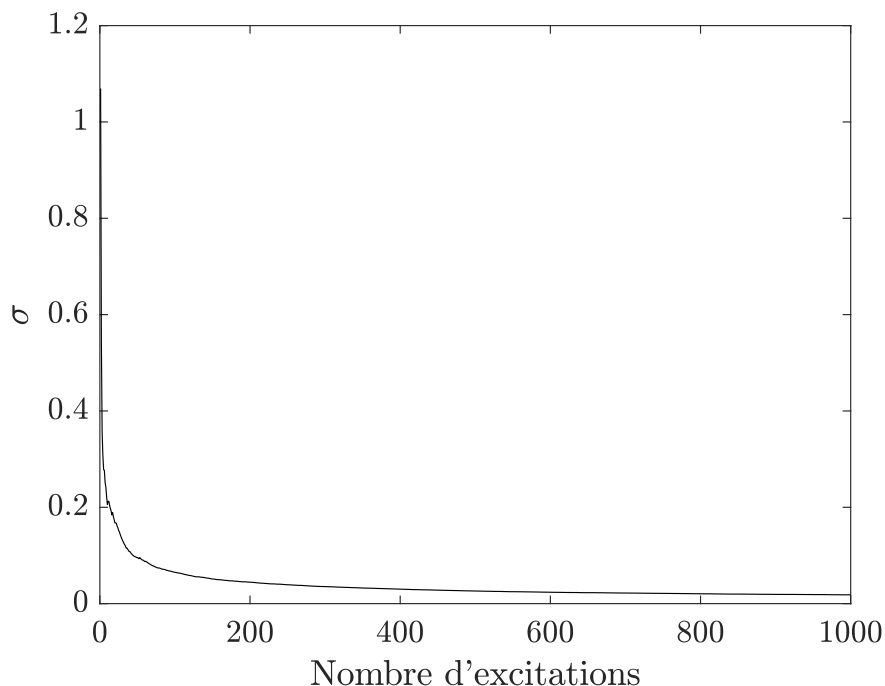


FIGURE 3.17 – Évolution du critère de champ diffus  $\sigma$  pour une plaque circulaire en fonction du nombre d'excitations.  $\sigma$  diminue rapidement et tend vers 0.

Le critère de champ diffus  $\sigma$  diminue rapidement avec le nombre d'excitations et passe rapidement en dessous de 0,7. Cela signifie que le champ vibratoire devient diffus. A

partir de 200 excitations, le critère se stabilise et diminue de manière progressive pour tendre vers 0.

Finalement, dans le cas d'une plaque circulaire, la seule solution pour obtenir un champ vibratoire diffus est d'exciter le système avec une excitation de type *rain-on-the-roof*.

### 3.7 Conclusion

Les conditions d'apparition du champ vibratoire diffus ont été étudiées pour une plaque circulaire, une plaque rectangulaire et un stade de Bunimovich excités de manière ponctuelle avec une force aléatoire. L'énergie locale est calculée sur l'ensemble de la plaque ce qui permet de calculer un critère basé sur l'écart type normalisé des espérances des énergies locales.

- A basse fréquence le champ vibratoire est dominé par un faible nombre de modes : le champ vibratoire est modal ;
- Avec un fort amortissement, l'énergie vibratoire est concentrée autour du point d'excitation et décroît très rapidement : le champ vibratoire direct domine ;
- A haute fréquence et faible amortissement, le champ vibratoire est constitué d'un grand nombre de modes ce qui est une condition favorable à l'apparition du champ diffus.

Néanmoins les conditions de hautes fréquences et de faible amortissement ne sont pas toujours suffisantes pour obtenir un champ vibratoire diffus. La propagation des rayons doit en plus être homogène et isotrope. La plaque circulaire est un bon contre-exemple.



# 4

## Mise en évidence des surintensités

---

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	66
4.2	Limitations à l'apparition du champ diffus . . . . .	66
4.3	Méthodes d'acoustique géométrique . . . . .	87
4.4	Mise en évidence des surintensités par la méthode des sources-images	90
4.5	Validation numérique des facteurs de surintensité . . . . .	99
4.6	Influence des conditions aux limites . . . . .	101
4.7	Modélisation par tir de rayons . . . . .	108
4.8	Conclusions du chapitre . . . . .	114

---

## 4.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, il a été montré que le champ vibratoire est diffus lorsque le nombre de modes est important, l'amortissement est suffisamment faible et le système est ergodique. Cependant, même lorsque ces conditions sont respectées, il existe des singularités pour lesquelles on voit apparaître plusieurs zones qui présentent une surintensité d'énergie.

La première partie de ce chapitre est une étude bibliographique décrivant ces zones de surintensité. Ces surintensités sont ensuite déterminées de manière analytique avec la méthode des sources-images. L'influence des conditions aux limites est également étudiée. Pour ce faire, des simulations numériques sont réalisées à l'aide de la méthode des éléments finis et un algorithme de tir de rayons est également proposé.

## 4.2 Limitations à l'apparition du champ diffus

Les conditions citées précédemment ne sont pas toujours suffisantes pour assurer l'apparition d'un champ vibratoire diffus. D'un point de vue géométrique, des surintensités peuvent apparaître à cause :

- d'interférences constructives ou destructives entre les rayons,
- d'une répartition non homogène et/ou non isotrope des rayons.

Ces deux points sont développés en détail par la suite.

### 4.2.1 Surintensités causées par les interférences

**Interférences constructives** Dans le cas d'un système excité de manière ponctuelle avec un bruit blanc aléatoire, les propriétés géométriques du système peuvent conduire à l'apparition de singularités qui sont des lignes ou des points de surintensité. L'emplacement de ces zones dépend de la géométrie du système et de la position du point source. Ces zones se distinguent par rapport au reste du système où la réponse est *quasi* uniforme.

Crandall [14] utilise la méthode des sources-images dans le cas d'une poutre pour calculer les facteurs de surintensité. Afin de bien comprendre le principe du raisonnement, on présente un cas simplifié de la méthode avec un système 1D. La figure 4.1 présente une poutre encastree aux deux extrémités excitée par une source ponctuelle de type bruit blanc aléatoire au point S. La partie supérieure des figures présente le trajet de deux rayons émis par la source. La partie inférieure présente la représenta-

tion équivalente avec la méthode des sources-images. Les quatre sources-images  $A_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  et  $C_1$  sont déterminées par symétrie par rapport aux extrémités de la poutre.

La figure 4.1a présente la situation après que les deux rayons aient subi un unique rebond. Le point  $A_1$  est le symétrique du point  $S$  par rapport au centre de la poutre. Au point  $A_1$ , les deux rayons ont parcouru la même distance. Ils arrivent avec la même phase et interfèrent donc de manière constructive. Dans la représentation avec les sources-images, les sources-images  $A_2$  et  $B_2$  sont situées à la même distance du point  $A_1$  et donc elles interfèrent de manière constructive.

La figure 4.1b présente le cas où le point  $A_1$  n'est pas le symétrique du point  $S$  par rapport au centre de la poutre. Après un rebond, les deux rayons émis par la source arrivent au point  $A_1$  en ayant parcouru des distances différentes. Ils n'arrivent donc pas avec la même phase et n'interfèrent donc pas de manière constructive. Dans la représentation avec les sources-images, les sources-images  $A_2$  et  $B_2$  ne sont pas situées à la même distance du point  $A_1$  et donc elles n'interfèrent pas de manière constructive.

Par la suite, la figure 4.1c présente la situation après que les deux rayons aient subi deux rebonds. Au point source  $S$ , les deux rayons ont parcourus la même distance. Ils arrivent avec la même phase et interfèrent de manière constructive. Dans la représentation avec les sources-images, les sources-images  $C_1$  et  $B_1$  sont situées à la même distance du point  $S$  et donc ils interfèrent de manière constructive.

Pour un point quelconque sur la poutre (à l'exception des deux points  $S$  et  $A_1$ ), les rayons se rencontrent sans avoir parcouru la même distance et donc il n'y a pas d'interférences constructives. Finalement, il y a une surintensité d'énergie sur les deux points  $A_1$  et  $S$ .

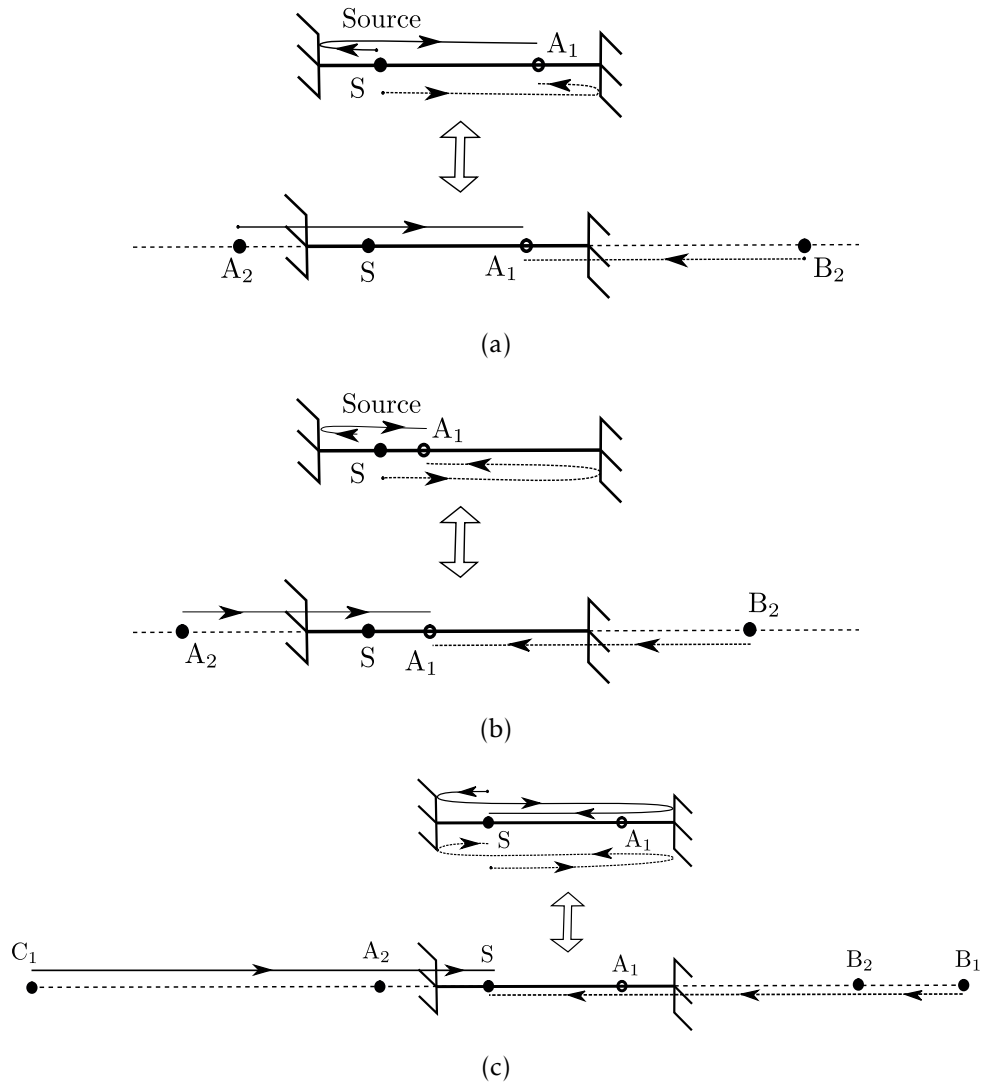


FIGURE 4.1 – Présentation de la méthode des sources-images pour le cas simple d'une poutre encadrée. (a) Propagation d'un rayon après une réflexion et (b) propagation d'un rayon après deux réflexions.

On calcule maintenant les surintensités aux deux points A<sub>1</sub> et S à partir de la figure 4.1c. On considère que l'amortissement est nul et que l'amplitude des sources-images est égale à 1.

Considérons les quatre sources-images B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, C<sub>1</sub> et A<sub>2</sub>. Pour un point quelconque sur la poutre situé en dehors points S et A<sub>1</sub>, les quatre sources-images n'interfèrent pas entre elles. L'énergie pour un point quelconque de la poutre est donc égale à la somme des énergies des sources-images B<sub>1</sub> et B<sub>2</sub> soit  $4 \times 1^2 = 4$ . Le carré est nécessaire car on somme des énergies.

Pour le point A<sub>1</sub>, les deux sources-images B<sub>2</sub> et A<sub>2</sub> interfèrent constructivement et leur contribution est donc égale à  $(1 + 1)^2$ . Les sources-images B<sub>1</sub> et C<sub>1</sub> n'interfèrent pas au

point S et donc sa contribution respective est égale à  $1^2$ . L'énergie totale au point S est donc  $(1 + 1)^2 + 2 \times 1^2 = 3$ . Le facteur de surintensité au point  $A_1$  est donc  $6/4$ .

On peut procéder de la même manière pour le point S. Il y a donc une surintensité de 50 % aux points  $A_1$  et S.

Ce phénomène de surintensité a été démontré dans le cas d'une excitation ponctuelle pour différentes géométries de plaque [14, 97]. Crandall a étudié expérimentalement l'apparition de ces zones de surintensité dans le cas d'une plaque circulaire avec les bords libres [98]. L'excitation est réalisée de manière ponctuelle avec un bruit blanc aléatoire et les bandes de fréquences étudiées sont [500-1000] Hz, [1000-3000] Hz, et [1000-5000] Hz. Il montre qu'il existe une surintensité d'énergie vibratoire le long du diamètre du cercle passant par le point d'excitation tel que présenté à la figure 4.2.



FIGURE 4.2 – Répartition de l'énergie vibratoire dans une plaque circulaire obtenue de manière expérimentale. La plaque est excitée de manière ponctuelle avec un bruit blanc aléatoire avec un mini haut-parleur. On distingue clairement une surintensité sur le diamètre et le cercle passant par le point d'excitation. Figure tirée de [3]

Elishakoff [4, 99] a étudié une membrane cylindrique excitée avec une force aléatoire annulaire et uniforme située autour du cylindre tel que présenté à la figure 4.3. Le cylindre est appuyé aux deux extrémités. Il montre qu'il existe deux zones de surintensité localisées au niveau de l'anneau où se situe la force d'excitation et sur l'anneau symétrique de l'anneau d'excitation par rapport au plan médian du cylindre et représenté en pointillées sur la figure 4.3. Le facteur de surintensité dans ces deux zones est égal à trois.

Dans le cas d'une plaque triangulaire équilatérale avec les trois bords libres, la réponse vibratoire est plus importante le long de la médiane sur laquelle se trouve le point d'excitation [5]. Lorsque le point d'excitation se trouve au centre du triangle, les lignes de surintensité se situent le long des trois médianes du triangle. La figure 4.4 présente la réponse vibratoire obtenue expérimentalement d'une plaque triangulaire excitée en



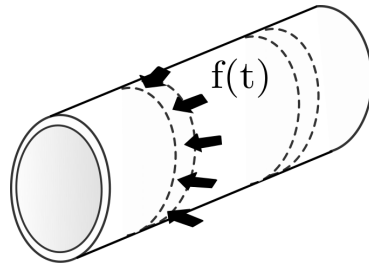


FIGURE 4.3 – Cylindre excité par un bruit blanc aléatoire noté  $f(t)$  avec une répartition uniforme représentée par les flèches noires. Les deux zones en pointillés présentent une énergie vibratoire trois fois supérieure au reste du cylindre comme le montre Elishakoff [4].

son centre avec une excitation aléatoire et large bande.

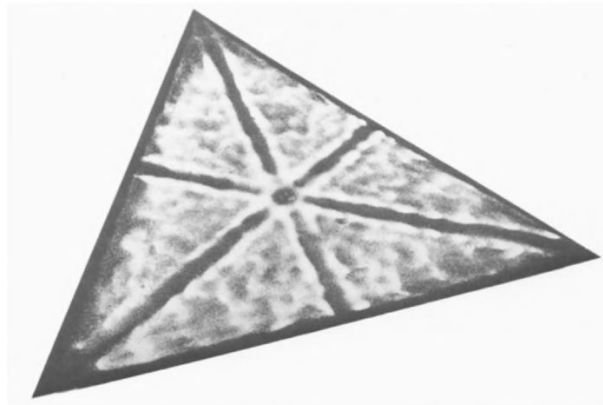


FIGURE 4.4 – Résultat expérimentale d'une plaque triangulaire équilatéral excitée par une force aléatoire à large bande localisée au centre de la plaque. Image tirée de [5].

Crandall [3] montre que dans le cas d'une plaque rectangulaire de dimensions  $L_x \times L_y$  excitée avec une force aléatoire à large bande localisée au point  $S$ , le champ vibratoire est quasiment uniforme sur l'ensemble de la plaque à l'exception de quatre lignes. Ces lignes forment un quadrillage symétrique avec la source d'excitation localisée à une intersection entre deux lignes du quadrillage tel que présenté à la figure 4.5a. Les surintensités sont de  $3/2$  sur les lignes et de  $9/4$  à l'intersection des lignes. Avec la méthode des sources-images, Langley [100] étudie l'influence de la position du point d'excitation. Il montre que le facteur de surintensité est modifié si la source est située au centre d'un des côtés (figure 4.5b) ou au centre de la plaque (figure 4.5c).

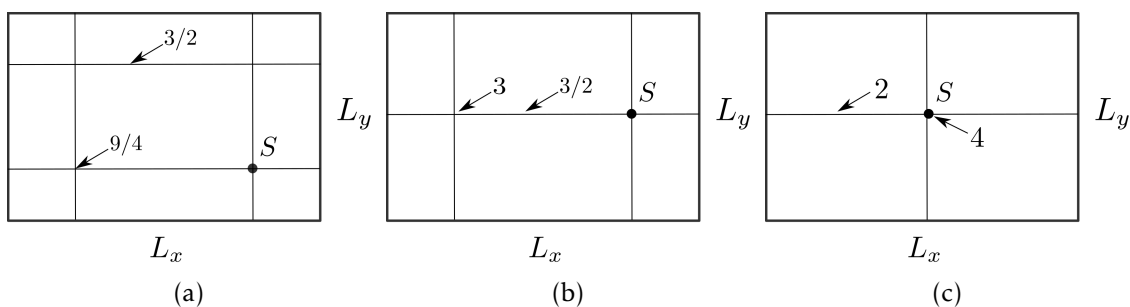


FIGURE 4.5 – Positions et valeurs des surintensités pour la plaque rectangulaire en fonction de la position du point d’excitation.

Dans le cas d’une plaque carrée, les surintensités sont différentes. La figure 4.6 présente les surintensités pour une plaque carrée en fonction de la position du point d’excitation.

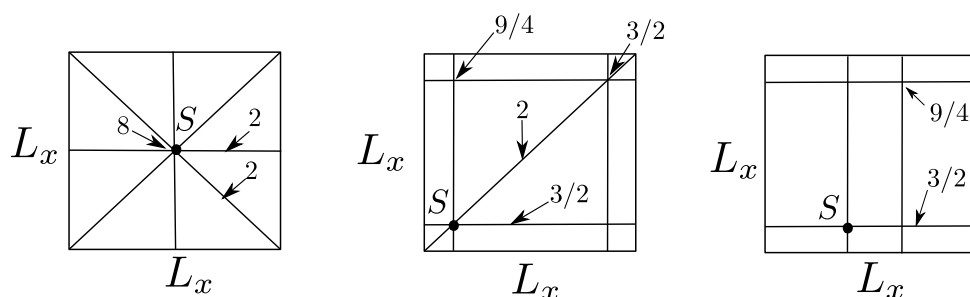


FIGURE 4.6 – Positions et valeurs des surintensités pour la plaque carrée en fonction de la position du point d’excitation.

**Interférences destructives** Crandall [101] montre qu’il est possible d’obtenir des zones où la réponse vibratoire est plus faible que dans le reste du système. Le facteur de surintensité n’est donc plus supérieur à 1 mais compris entre 0 et 1.

Il existe principalement deux raisons qui peuvent conduire à une réponse vibratoire plus faible. La première raison est la présence de conditions aux limites non symétriques. Crandall utilise l’exemple d’une corde avec une extrémité maintenue par une liaison pivot et la seconde extrémité maintenue par une glissière tel que présentée à la figure 4.7. La corde est excitée en  $x = a$  avec une excitation ponctuelle aléatoire. Les conditions aux limites s’écrivent

$$\begin{aligned}
 w &= 0 \text{ à } x = 0; \\
 \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \text{ à } x = L
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

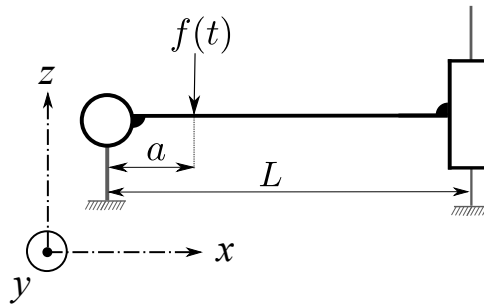


FIGURE 4.7 – Poutre uniforme avec une liaison pivot à l’extrémité  $x = 0$  et une liaison glissière à la seconde extrémité  $x = L$ . La force est un bruit blanc aléatoire  $f(t)$  appliquée à l’abscisse  $x = a$ .

La méthode des sources-images est utilisée pour déterminer les augmentation ou diminution locale de l’énergie vibratoire. La figure 4.8 présente la corde initiale de longueur  $L$  avec la source ponctuelle localisée au point  $A_1$ . Les différentes sources-images ( $A_1$  jusqu’à  $E_1$ ) sont déterminées en réalisant des symétries successives du point  $A_1$  par rapport aux extrémités de la poutre. Les lignes verticales pleines représentent les images de l’extrémité située en  $x = 0$  où la corde est simplement appuyée ( $w = 0$ ) et les lignes verticales en pointillés représentent les images de l’extrémité située en  $x = L$  où la corde est libre  $dw/dx = 0$ .

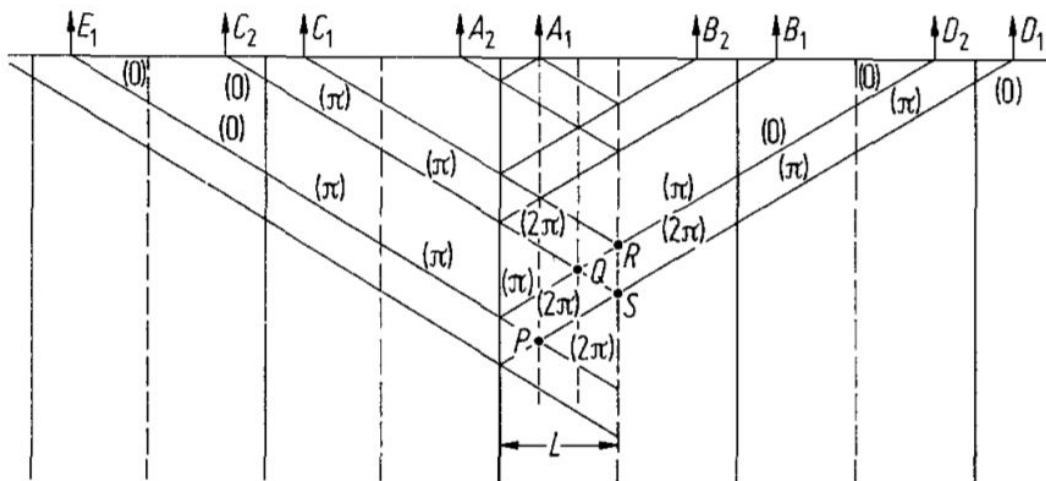


FIGURE 4.8 – Corde infinie composée de la corde initiale de longueur  $L$  avec la force ponctuelle au point  $A_1$  et des différentes sources fictives ( $A_2$  jusqu’à  $E_1$ ) déterminées par symétrie par rapport aux extrémités de la corde. Figure extraite de [5].

Chacune des sources fictives génère des ondes qui se propagent le long de la corde. Ces ondes sont représentées par les lignes inclinées vers le bas à la figure 4.8. L’amortissement est nul et l’amplitude de chacune des sources-images est arbitrairement choisie égale à 1. De plus, toutes les sources-images ont la même phase à l’origine. Chaque fois

qu'un rayon traverse une ligne représentant l'image d'une frontière, la phase du signal est modifiée de manière appropriée. La phase des rayons est augmentée de  $\pi$  lorsqu'ils croisent une ligne continue et elle reste identique lorsque le rayon croise une ligne en pointillée [5]. La valeur des phases qui s'incrémentent au fur et à mesure est indiquée sur chaque rayon. La réponse en un point quelconque de la corde est égale à la somme des signaux reçus de l'ensemble des sources. Une description quantitative de la distribution d'énergie vibratoire est obtenue en considérant une paire typique de sources. Étant donné que le motif de l'image a une période égale à  $2L$ , il suffit de considérer un seul segment de longueur  $2L$  comme par exemple les deux sources-images  $D_1$  et  $D_2$ .

Considérons un point quelconque situé sur la corde à l'abscisse  $x$ . Les distances parcourues par les rayons sont toutes différentes. Il ne peut donc pas y avoir d'interférences constructives. La contribution des sources fictives  $D_1$  et  $D_2$  sont toutes les deux égales à 1. L'amplitude du signal au point d'abscisse  $x$  est donc égale à  $2 \times 1^2 = 2$ .

Considérons le point particulier de la corde  $x = a$  où se situe la force ponctuelle. Ce point est équidistant des deux sources fictives situées aux points  $E_1$  et  $D_1$ . De plus, ces deux rayons qui se rencontrent au point  $P$  ont subi une augmentation de leurs phases de  $2\pi$  car ils ont traversé deux traits continus. Cela signifie que les rayons issus de  $E_1$  et  $D_1$  sont identiques en phase et donc parfaitement corrélés. La contribution des points  $E_1$  et  $D_1$  est donc égale à  $\frac{1}{2}(1+1)^2 = 2$ . La distance de  $P$  à  $D_2$  est différente de la distance entre  $P$  et n'importe quelle autre source fictive. La contribution du point  $D_2$  est donc égale à 1. La contribution totale de  $D_1$  et  $D_2$  au point  $P$  a donc une amplitude de 3 ce qui représente une surintensité de 50 % par rapport à un point quelconque de la corde.

Considérons désormais le point de la corde  $Q$  situé à l'abscisse  $x = L - a$ . Ce point est équidistant des deux sources fictives  $C_2$  et  $D_2$ . Les rayons issus de  $C_2$  et  $D_2$  se rencontrent au point  $Q$  en ayant parcouru la même distance. Cependant, le rayon émanant de  $C_2$  possède une phase égale à  $2\pi$  en raison du franchissement de deux traits continus, tandis que le rayon émanant de  $D_2$  possède une phase égale à  $\pi$  en raison du franchissement d'un seul trait continu. Les rayons issus de  $C_2$  et  $D_2$  sont égaux mais en opposition de phase. Ils s'annulent donc et ne contribuent pas à la réponse finale. Le rayon issu de  $D_1$  n'est corrélé à aucune autre source et sa contribution est donc égale à 1. Ainsi, la contribution totale de  $D_1$  et  $D_2$  au point  $Q$  a donc une amplitude de 1 ce qui représente une diminution de l'intensité de 50 % par rapport à un point quelconque de la corde.

De la même manière, on peut montrer qu'à l'extrémité  $x = L$ , les rayons se coupant en  $R$  et  $S$  interfèrent constructivement, de sorte que la contribution totale à la réponse a une amplitude de 4 ce qui représente une surintensité de 100 % par rapport à celle

d'un point quelconque de la corde. Enfin, à l'extrémité  $x = 0$ , les rayons provenant de  $D_1$  et  $D_2$  interfèrent destructivement avec les rayons de  $E_1$  et  $E_2$ . En effet ils sont équidistants mais en opposition de phase. Ceci implique que la réponse est nulle au point  $x = 0$ . La figure 4.9 présente la répartition de l'énergie le long de la corde avec  $a = 0,3L$ .

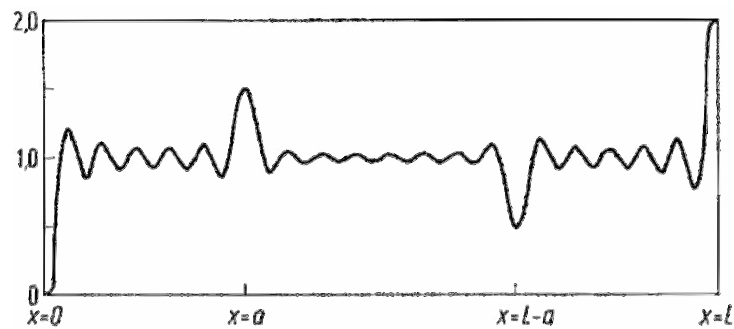


FIGURE 4.9 – Répartition de l'énergie vibratoire le long de la corde avec  $a = 0,3L$ . Figure extraite de [5].

Une autre raison permettant d'obtenir une diminution de la réponse vibratoire est la présence de deux sources d'excitation corrélées l'une à l'autre. Lorsque deux sources d'excitation aléatoires agissent simultanément, la distribution de l'énergie vibratoire qui en résulte dépend de la corrélation entre ces deux sources. Si les deux sources ne sont pas corrélées, la distribution de l'énergie vibratoire résultante est égale à la superposition des réponses de chaque source prises séparément. Au contraire, lorsque les sources sont corrélées, il existe des effets d'interférence qui entraînent des intensifications ou des réductions localisées de la réponse vibratoire. On considère la poutre de la figure 4.10 avec les mêmes conditions aux limites que précédemment. La poutre est excitée par deux forces ponctuelles  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$ . Ces deux forces sont des excitations aléatoires stationnaires avec la même densité spectrale de puissance. Afin d'obtenir une réduction localisée de la réponse vibratoire en un point, il faut que les deux forces soient en opposition de phase soit  $f_1(t) = -f_2(t)$ . De la même manière que précédemment, Crandall [101] montre que la répartition de l'énergie est uniforme sur la poutre sauf pour 8 points qui présentent soit des surintensités ou des diminutions de l'énergie vibratoire

Nagem [102] étudie l'influence du modèle d'amortissement sur les surintensités et réductions locales de l'énergie. Dans le cas d'une poutre en porte à faux, il montre que les surintensités apparaissent dans le cas d'un amortissement de type visqueux ou structural.

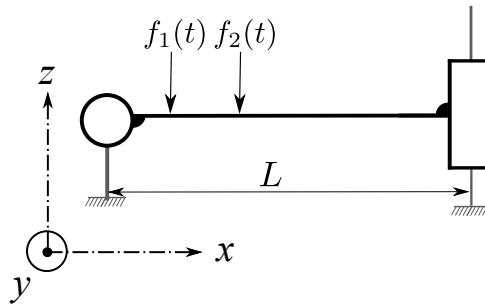


FIGURE 4.10 – Poutre uniforme avec une liaison pivot à l’extrémité  $x = 0$  et une liaison glissière à la seconde extrémité  $x = L$ . Deux forces aléatoires opposées  $f_1(t)$  et  $f_2(t)$  sont appliquées.

**Système à trois dimensions** Pour des systèmes à trois dimensions excités par une excitation aléatoire ponctuelle, il existe également des lignes de surintensité [6]. La figure 4.11 présente une cavité parallélépipédique, excitée au point  $S$ . De la même manière que pour la plaque rectangulaire, il existe une surintensité au point source égale à  $3/2$ . De plus, cette surintensité est également présente aux 7 points notée  $S^*$ . Les surintensités sur les 12 lignes reliant les points  $S^*$  est égale à  $3/2$ .

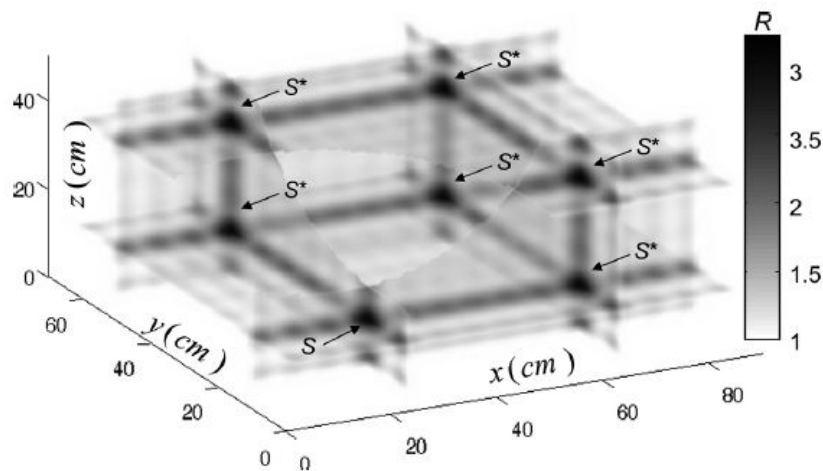


FIGURE 4.11 – Distribution de l’énergie vibratoire dans une cavité rectangulaire. Le facteur de surintensité sur la source  $S$  et les points  $S^*$  est égale à  $9/4$  et  $3/2$  sur les lignes. Figure extraite de [6].

**Interférence constructive au point source** Les interférences présentées jusqu’ici sont directement liées à la géométrie du système étudié. Toutefois, les surintensités peuvent également être causées par une inversion temporelle de la trajectoire des rayons. Le *Coherent Backscattering Enhancement* (CBE) a été observé en optique [103] et également en acoustique [104]. Quelle que soit la géométrie du système étudié, pour un rayon donné, il existe nécessairement un rayon qui suit la trajectoire inverse en vertu de la symétrie

temporelle. Ces deux rayons interfèrent constructivement au point où la source est appliquée. Cette surintensité d'énergie est donc toujours observée au point où la force est appliquée. Le principe du *Coherent Backscattering Enhancement* est illustré à la figure 4.12. Pour des raisons de simplicité, seuls quatre points de réflexion sont représentés, désignés par les lettres A, B, C et D. Un rayon (ligne continue) est émis depuis la source s et subit plusieurs réflexions avant d'être détecté au niveau du récepteur r. Le rayon équivalent et réciproque (ligne en pointillés) est réfléchi au même point et suit le même trajet en sens inverse. Lorsque la source et le récepteur sont coïncidents, les phases des deux ondes sont égales et donc il en résulte une interférence constructive. L'amplitude de la surintensité reste aujourd'hui un sujet de débat mais il est admis que le facteur de surintensité est compris entre 2 et 3 [105, 106, 107].

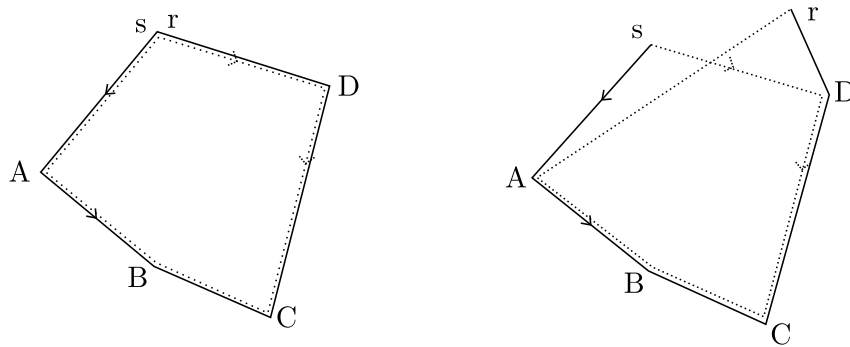


FIGURE 4.12 – Illustration de l'effet *Coherent Backscattering Enhancement*. La trajectoire d'un rayon et le rayon opposé sont représentés respectivement par des lignes pleines et des lignes en pointillés. Les points de réflexion sont désignés par les lettres A, B, C, et D. La source est située au point s et l'énergie est détectée au niveau du récepteur r. Les configurations 1 et 2 correspondent à deux réalisations d'un ensemble de milieux aléatoires. Lorsque la source et le récepteur sont coïncidents, les phases des deux ondes sont égales et donc il en résulte une interférence constructive.

## 4.2.2 Dynamique des rayons et billard mathématique

En réalisant un parallèle avec la théorie des billards en mathématique, on montre que la propagation des rayons ne s'effectue pas nécessairement de manière *homogène* et *isotrope* pour toutes les géométries, ce qui empêche l'apparition du champ diffus.

Un billard mathématique est un système dynamique dans lequel une particule se déplace de manière rectiligne uniforme. Lorsque la particule rencontre un bord, elle subit un rebond, sans perte de vitesse, de telle sorte que la composante tangentielle de la vitesse reste la même et la composante normale est changée en son opposée. L'angle de rebond est identique à l'angle d'incidence au moment de choc. En faisant varier la forme du billard, il est possible d'observer deux types de dynamiques ayant des com-

portements différents : des dynamiques régulières (intégrables) ou chaotiques.

Tel que présenté à la figure 4.13a, on définit un point  $s_i$  sur l'abscisse curviligne  $s$  du billard et un angle  $\alpha_i$  entre le rayon incident et la tangente au point de rebond. On définit le flot  $T$  qui est la transformation du billard qui agit sur le vecteur  $(s_i, \alpha_i)$ . Après l'impact au point  $s_1$ , la particule se déplace en ligne droite dans la direction définie par l'angle  $\alpha_1$  jusqu'au point d'intersection  $s_2$ . Le vecteur  $(s_2, \alpha_2)$  est donc la transformation du vecteur  $(s_1, \alpha_1)$  par le flot  $T$  tel que  $T(s_1, \alpha_1) = (s_2, \alpha_2)$ . Une propriété importante de  $T$  est l'existence d'une mesure d'aire invariante par le flot  $T$ . Ainsi on prouve mathématiquement que la mesure  $\sin(\alpha)d\alpha ds$  est invariante par le flot  $T$  [108, 109].

Afin d'étudier le mouvement d'une particule dans le billard sans calculer sa trajectoire continue sur une très longue durée, il est possible de définir un espace des phases  $X$  à deux dimensions (une section de Poincaré) qui décrit la position et la direction d'une particule en tout temps [110]. La section de Poincaré permet de capter de manière discrète toutes les propriétés du mouvement continu d'une particule dans le billard. Les variables utilisées pour l'espace des phases sont la position le long de l'abscisse curviligne et le sinus de l'angle entre le rayon réfléchi et la normale tel que présenté à la figure 4.13b. Pour un billard régulier, l'ensemble des points dans le diagramme des phases se concentrent dans une région particulière.

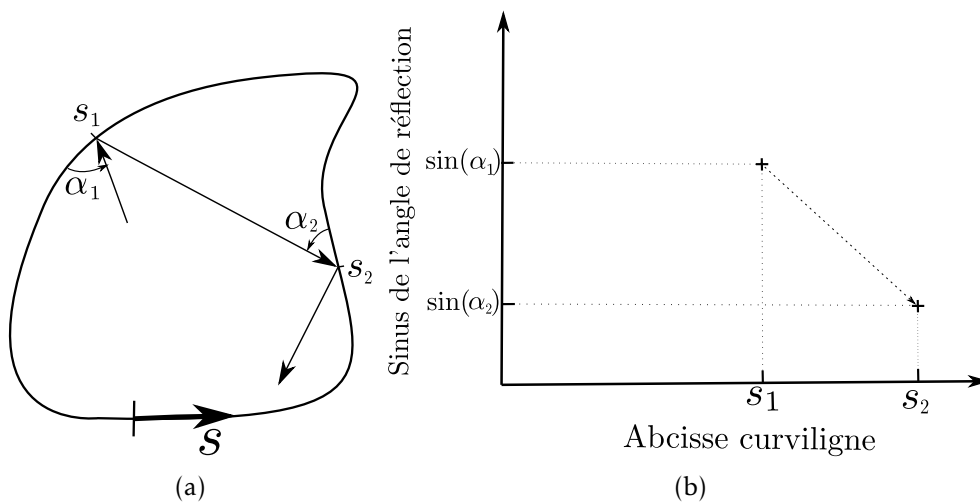


FIGURE 4.13 – (a) Evolution d'une particule dans le billard et (b) dans l'espace des phases associé. La particule rebondit au point de coordonnées  $s_1$  et  $s_2$  sur l'abscisse curviligne avec, respectivement, un angle  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

En théorie des billards, l'ergodicité est une propriété statistique importante. Un système est qualifié d'*ergodique* lorsqu'il est *homogène* et *isotrope*. Si un système dyna-



mique est ergodique, le théorème de Birkhoff permet d'établir une égalité entre les moyennes spatiales et les moyennes temporelles tel que **pour presque tout**  $x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_k f \circ T^k(x) = \int_X f d\mu \quad (4.2)$$

avec  $f$  une fonction de phase quelconque,  $T$  le flot du système dynamique,  $\mu$  la mesure invariante par le flot et  $X$  l'espace des phases. De plus, dans le cas particulier où  $f$  est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble  $A$  incluse dans l'espace des phases  $X$  tel que

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.3)$$

alors l'équation (4.2) prouve que presque toutes les particules explorent la totalité de l'espace des phases de façon uniforme. En effet

$$\int_A f d\mu = \mu(A) \quad (4.4)$$

Cela signifie qu'une particule passe au voisinage de la quasi-totalité des points du billard (*homogène*) et dans toutes les directions (*isotrope*). Sinaiï [111] fut le premier à démontrer l'ergodicité d'un système dynamique avec le billard de Sinaiï. Par la suite, Bunimovich démontra l'ergodicité du stade de Bunimovich [112]. La plupart des travaux mathématiques sur la théorie des billards ont été réalisés dans un espace en deux dimensions mais la plupart des propriétés peuvent être généralisées pour des systèmes à trois dimensions.

Un exemple de billard ergodique est le triangle quelconque [113]. La figure 4.14a présente la trajectoire d'un rayon après 100 réflexions dans un triangle quelconque. Les longueurs irrégulières des cotés assurent que le rayon passe aux voisinages de tous les points et dans toutes les directions. Dans l'espace des phases associés présenté à la figure 4.14b, chaque point donne la position d'une réflexion dans l'espace défini par l'abscisse curviligne le long de la frontière et le moment angulaire défini par le sinus de l'angle d'incidence avec la normale à la frontière. La fonction de densité de probabilité de présence est uniforme dans l'espace des phases. Le champ vibratoire dans une plaque ayant une forme de triangle quelconque et excité par une force ponctuelle sera donc diffus.

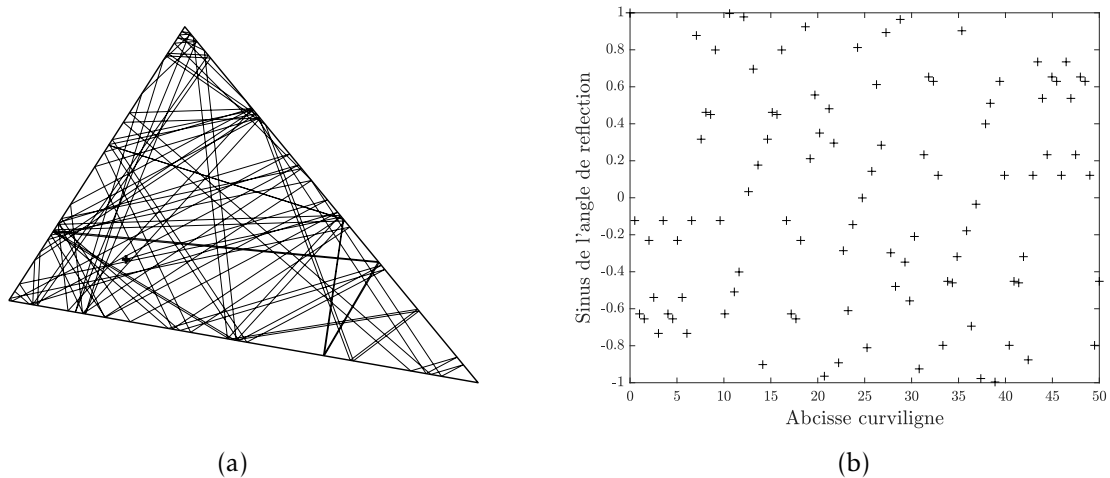


FIGURE 4.14 – (a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans un triangle quelconque

Pour un triangle isocèle, le comportement est totalement différent. La figure 4.15a présente la propagation d'un rayon dans un triangle isocèle après 100 réflexions. Même avec un grand nombre de réflexions, les trajectoires d'un rayon restent ordonnées. Le rayon se propage dans la totalité du triangle mais il y a seulement trois angles de réflexion possible ce qui est confirmé par la représentation dans l'espace des phases à la figure 4.15b. L'ensemble des points de l'abscisse curviligne est exploré mais avec seulement trois angles différents. La dynamique de ce billard est donc homogène mais non isotrope. Néanmoins, dans ce cas, il est possible d'obtenir un système ergodique si la source émet non pas un seul mais plusieurs rayons de manière isotrope. Le champ résultant devient donc homogène et isotrope et donc ergodique.

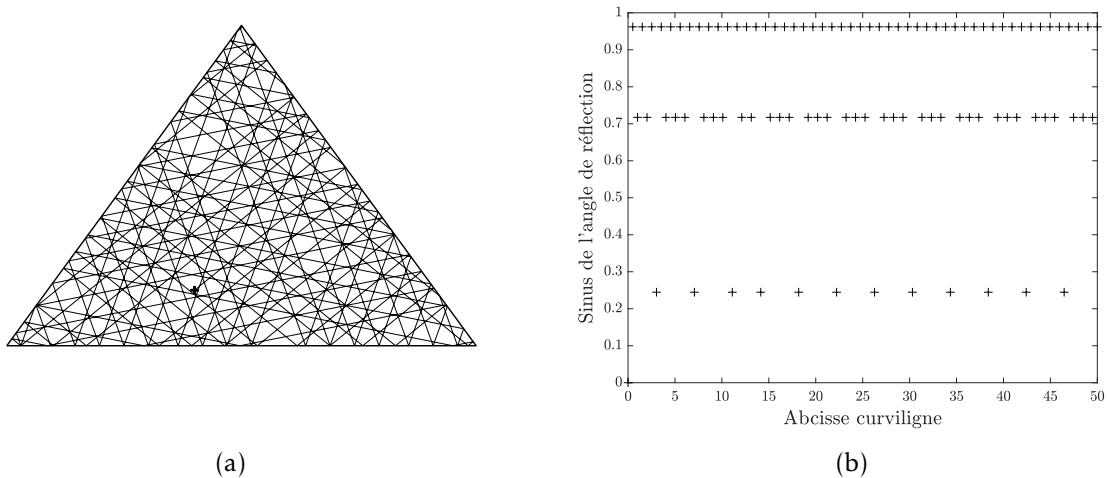


FIGURE 4.15 – (a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans un triangle équilatéral

Il existe également des structures comme le billard circulaire pour lesquelles les rayons n'explorent pas la totalité de la surface du billard [114]. La figure 4.16 présente plusieurs types de propagations d'un rayon dans un billard circulaire de rayon  $R = 0.5$  m. L'excitation est placée à différentes positions par rapport au centre du cercle soit  $a = 0$  m,  $a = 0.05$  m, et  $a = 0.35$  m. Si le point de départ est au centre de la plaque, le rayon décrit nécessairement une orbite périodique. Il rebondit toujours sur les deux mêmes points de la frontière et suit toujours la même trajectoire. A l'inverse, lorsque le point de départ du rayon est situé sur un point différent du centre, on observe clairement la présence d'une caustique. Le terme de caustique est généralement utilisé en optique pour désigner l'enveloppe des rayons subissant une réflexion sur une surface courbe. Cette caustique délimite une région de l'espace dans laquelle le rayon ne passe jamais. De plus, la densité des rayons est plus importante au fur et à mesure que l'on se rapproche de cette caustique. La répartition des rayons n'est donc ni homogène ni isotrope et donc non ergodique. Ainsi, dans une plaque circulaire excitée par une force ponctuelle, le champ vibratoire n'est pas diffus. Il y a une surintensité de l'énergie vibratoire sur le cercle passant par le point d'excitation [115]. De manière plus générale, Lazutkin a montré en 1974 que les billards strictement convexes (les arêtes plates ne sont pas strictement convexes) ont une infinité de caustiques ce qui implique la non-ergodicité de ces billards [116]. Ainsi, dans le cas d'une plaque circulaire excitée de manière ponctuelle, le champ vibratoire ne peut pas être diffus même si l'amortissement est très faible.

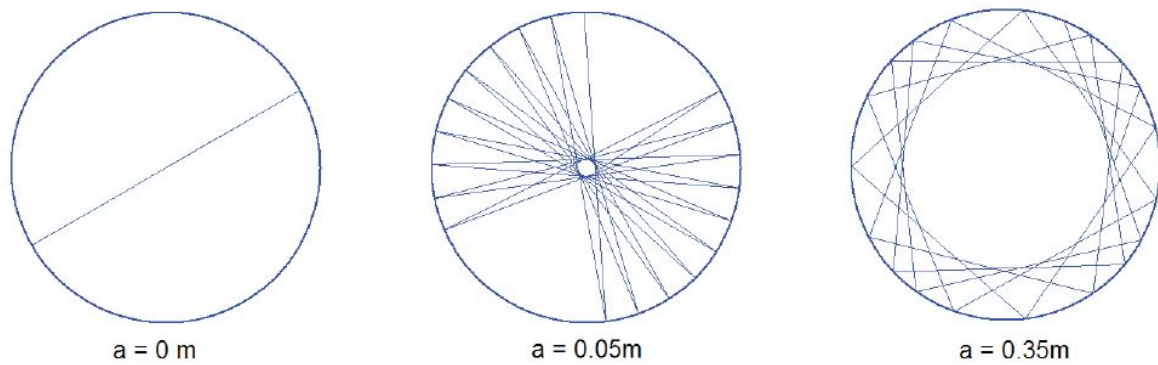


FIGURE 4.16 – Réflexions spéculaires d’un rayon sur la plaque circulaire pour une excitation placée à  $a = 0$  m ; à  $a = 0.05$  m et  $a = 0.35$  m du centre du cercle. Figure tirée de [7].

Dans le cas où une très légère modification est réalisée sur la forme du billard, le comportement du rayon est complètement modifié. Legrand [8] modifie le billard circulaire en coupant un petit segment de longueur  $10^{-2}R$  en bas du billard. Cette modification est très peu visible sur la figure 4.17 et pourtant la dynamique du rayon est totalement différente et devient fortement aléatoire. La région au centre de la plaque qui n’était alors jamais traversée par le rayon est alors visitée par le rayon après seulement quelques réflexions.

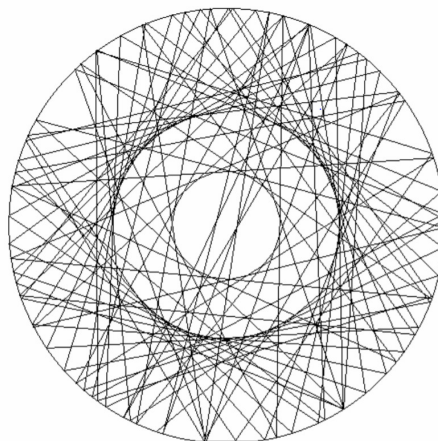


FIGURE 4.17 – Propagation d’un rayon dans un billard circulaire avec un segment légèrement coupée de longueur  $10^{-2}R$ . Figure tirée de [8].

Avec cette modification, ce billard quasi-circulaire devient ergodique puisque les rayons explorent la totalité de la surface du billard et ce dans toutes les directions.

De manière plus générale, on comprend que plus la forme du billard est complexe, plus il a de chances d’être ergodique [110].

Le lien entre le billard mathématique et les vibrations dans les structures apparaît dans le contexte de l'acoustique géométrique. A haute fréquence les ondes se propagent comme des rayons. Si l'on se limite aux phénomènes de propagation et de réflexion, les rayons de l'acoustique géométrique suivent les mêmes lois de mouvement que les particules, et les chemins suivis par les particules définissent donc les rayons de l'acoustique géométrique. On comprend de manière intuitive que l'ergodicité est une condition favorable au champ vibratoire diffus. En effet, si un seul rayon conduit à une répartition homogène et isotrope de l'énergie, il en sera de même pour un grand nombre de rayons émis dans une ou toutes les directions.

### 4.2.3 Propagation des rayons

Pour le reste ce travail, on considérera les trois formes de plaque suivantes : un billard rectangulaire, un stade de Bunimovich et un billard circulaire. Ces trois différentes géométries ont été choisies car elles présentent chacune un comportement dynamique différent en termes de propagation des rayons comme nous le verrons par la suite. De plus, ces trois géométries sont relativement simples ce qui permet de les analyser de manière analytique avec la méthode des sources-images. Les dimensions des trois différents billards sont présentées à la figure 4.18. Elles ont été choisies de manière à obtenir une surface égale pour les trois formes.

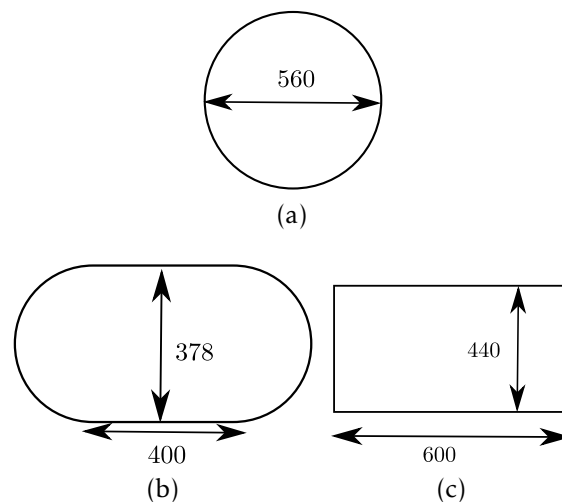


FIGURE 4.18 – Dimensions des billards en mm. (a); Disque, (b); Stade de Bunimovich, et (c); Rectangle.

On présente maintenant la propagation d'un rayon dans les trois géométries.

- **Plaque circulaire** : La figure 4.19a présente la propagation d'un unique rayon dans le billard circulaire après 100 réflexions. La figure 4.19b présente l'espace

des phases associé. Chaque point donne la position d'une réflexion dans l'espace des phases défini par l'abscisse curviligne le long de la frontière et le moment angulaire défini comme le sinus de l'angle d'incidence avec la tangente à la frontière au point d'incidence. Le rayon se propage dans le cercle et rebondit sur la frontière toujours avec le même angle. La propagation du rayon n'est donc pas isotrope. De plus, la densité des rayons augmente au fur et à mesure qu'on se rapproche du centre et ils forment une caustique. Au centre du cercle, on observe clairement une zone dans laquelle le rayon ne passe jamais. La dynamique du billard circulaire n'est donc pas homogène car le rayon ne passe par tous les points du système [117]. Dans la représentation de l'espace des phases, l'ensemble des points forme une ligne. Il est clair que dans ce cas le rayon rebondit sur toutes les positions de l'abscisse curviligne. Toutefois l'angle de réflexion reste toujours le même. Il est à noter qu'il existe des configurations pour lesquelles le rayon effectue une trajectoire cyclique et ne rebondit donc pas sur l'ensemble des positions de l'abscisse curviligne. La dynamique du billard circulaire est donc non homogène et non isotrope.

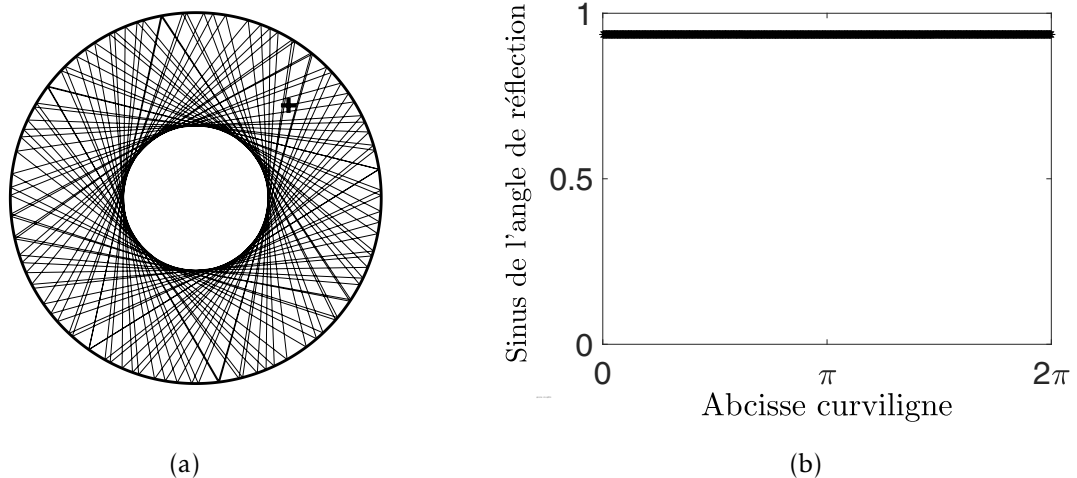


FIGURE 4.19 – (a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associé dans le billard circulaire

- **Stade de Bunimovich** La figure 4.20a présente la propagation d'un unique rayon dans le stade de Bunimovich après 100 réflexions et la figure 4.20b présente l'espace des phases associé. Le rayon rebondit sur la frontière avec un angle différent à chaque rebond. De plus, le rayon se propage dans la totalité du stade. Avec un très grand nombre de réflexions, il est clair que la totalité du stade serait recouverte de manière uniforme par le rayon ce qui indique une répartition homogène

dans le stade [118]. Dans l'espace des phases, les points occupent de manière uniforme l'ensemble du domaine. Un unique rayon permet d'obtenir une homogène et isotrope de l'énergie vibratoire. La dynamique du billard avec la forme du stade de Bunimovich est donc ergodique [119].

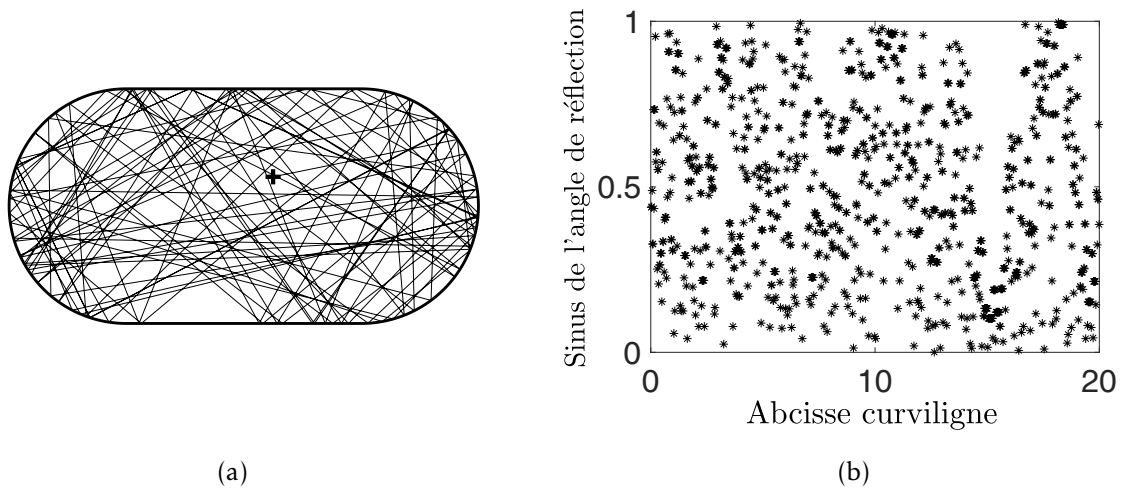


FIGURE 4.20 – (a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associés dans le stade de Bunimovich

- **Plaque rectangulaire** La figure 4.21a présente la propagation d'un unique rayon dans le billard rectangulaire après 100 réflexions et la figure 4.21b présente l'espace des phases associé. L'angle de réflexion du rayon sur les parois peut prendre uniquement deux valeurs ce qui est confirmé par la représentation dans l'espace des phases qui présente deux lignes. L'angle n'est pas le même s'il rebondit sur une arête verticale ou horizontale. Ainsi les angles droits imposent deux directions de propagation. Le billard rectangulaire n'est donc pas isotrope. A la différence de la plaque circulaire, le rayon se propage sur toute la surface du rectangle et l'ensemble des points de l'abscisse curviligne sont couverts. La dynamique du billard rectangulaire est donc homogène et non isotrope donc non ergodique.

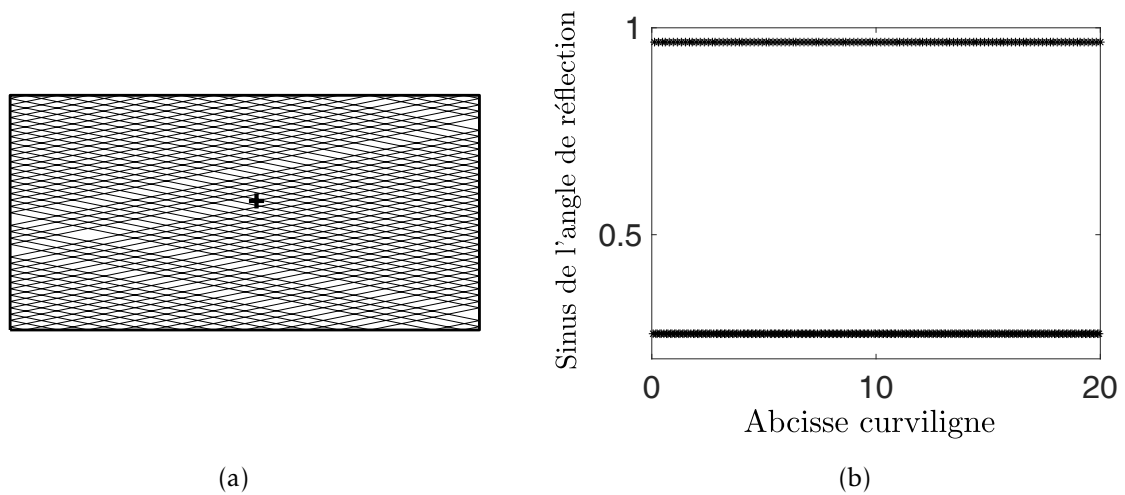


FIGURE 4.21 – (a) Propagation d'un rayon après 100 réflexions et (b) l'espace des phases associés dans le billard rectangulaire

Le tableau 4.1 résume les propriétés d'homogénéité et d'isotropie des trois systèmes étudiés.

TABLE 4.1 – Propriétés des billards étudiés

Géométrie	Homogène	Isotrope	Ergodique
Cercle	Non	Non	Non
Stade	Oui	Oui	Oui
Rectangle	Oui	Non	Non

#### 4.2.4 Influence du type d'excitation

Le type d'excitation utilisé peut influencer la propagation des rayons dans un système et il est alors possible de forcer l'homogénéité et/ou l'isotropie. En effet, le type d'excitation a une influence sur la répartition des rayons et donc l'énergie vibratoire. Dans ce travail, on distingue trois types d'excitations distinctes présentées à la figure 4.22 : (a) l'excitation de type couple, (b) l'excitation ponctuelle, et (c) l'excitation type *rain-on-the-roof*.



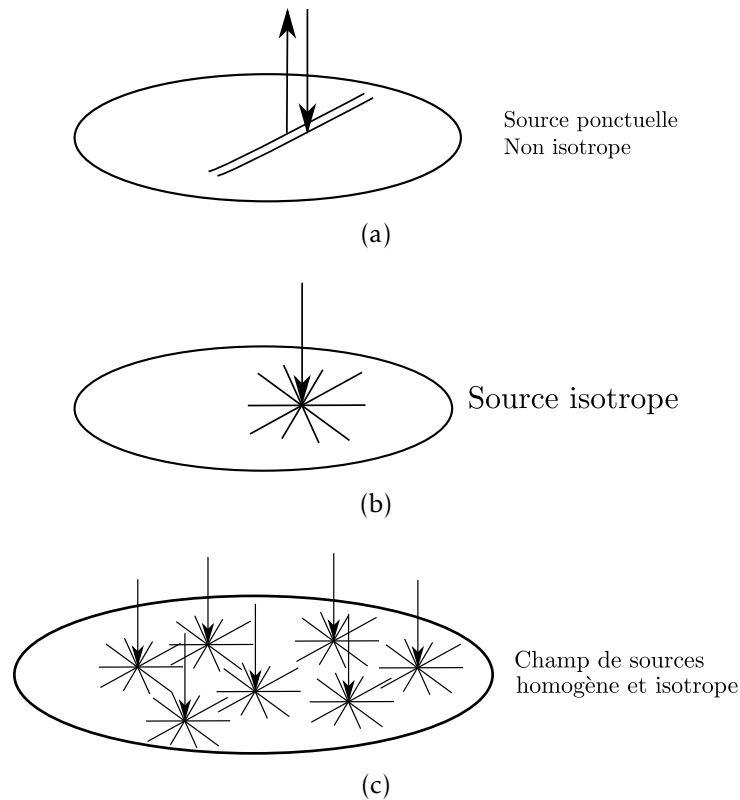


FIGURE 4.22 – (a) Excitation de type couple qui crée une excitation dans une seule direction. (b) Excitation de type ponctuel qui crée une excitation isotrope. (c) Excitation de type *rain-on-the-roof* caractérisée par une infinité de forces ponctuelles décorrélées les unes des autres en temps et en espace.

Les caractéristiques de ces trois types d'excitation sont les suivantes :

- Couple : L'excitation de type couple peut être représentée par deux excitations ponctuelles très proches et en opposition de phase l'une de l'autre ce qui crée un rayon dans une seule direction. Ce type d'excitation n'est donc ni homogène ni isotrope.
- Force ponctuelle : Excitation localisée qui crée des rayons dans l'ensemble des directions de manière uniforme. Ce type d'excitation est isotrope mais non homogène.
- *Rain-on-the-roof* : Distribution uniforme d'excitations ponctuelles décorrélées les unes des autres. Une excitation *rain-on-the-roof* est donc à la fois homogène et isotrope.

La [tableau 4.2](#) récapitule les propriétés des trois types d'excitations étudiées.

TABLE 4.2 – Propriétés d’homogénéité et d’isotropie des excitations étudiées

Excitation	Homogène	Isotrope
Couple	Non	Non
Force ponctuelle	Non	Oui
<i>Rain-on-the-roof</i>	Oui	Oui

Les propriétés d’homogénéité et d’isotropie pour les couples composés d’un système et d’un type d’excitation sont obtenues en combinant les propriétés géométriques des systèmes étudiés présentées au tableau 4.1 et les caractéristiques des excitations.

Dans le cas de la plaque rectangulaire, il est possible d’obtenir un champ vibratoire diffus en utilisant une force ponctuelle. L’homogénéité est assurée par la géométrie du billard et l’isotropie est assurée par la force ponctuelle. Pour la plaque circulaire, il est possible de forcer l’isotropie avec une force ponctuelle mais le système restera non-homogène. Il est donc nécessaire d’appliquer une force de type *rain-on-the-roof* pour obtenir un champ vibratoire diffus. Le stade de Bunimovich est plus simple car l’ergodicité est assurée par la géométrie du billard. Le tableau 4.3 récapitule les différentes solutions possibles pour obtenir un champ diffus.

TABLE 4.3 – Récapitulatif des propriétés d’homogénéité et d’isotropie en fonction de la géométrie et du type d’excitation.

Excitation \ Géométrie	Cercle	Rectangle	Stade
Couple	Non-homogène et Non-isotrope	Homogène	Homogène et isotrope
Ponctuel	Isotrope	Homogène et isotrope	Homogène et isotrope
<i>Rain-on-the-roof</i>	Homogène et isotrope	Homogène et isotrope	Homogène et isotrope

### 4.3 Méthodes d’acoustique géométrique

Les différentes méthodes d’acoustique géométrique reposent sur la théorie des rayons. Les rayons sonores ou vibratoires se comportent de la même manière que les rayons lumineux. Cette hypothèse est justifiée pour des ondes dont la fréquence est suffisamment élevée, lorsque la longueur d’onde est petite devant les longueurs caractéristiques du milieu dans lequel les ondes se propagent et grandes par rapport aux hétérogénéités du milieu dans lequel l’onde se propage. Les deux principales méthodes d’acoustique géométrique couramment utilisées sont la méthode des sources-images [120, 121] et la méthode de tir de rayons [122, 123].

### 4.3.1 Méthode des sources-images

La méthode des sources-images est généralement utilisée en acoustique des salles [124], en propagation dans un guide d'ondes [125] ou encore pour caractériser les milieux sédimentaires dans des zones d'eaux peu profondes [126]. La figure 4.23 présente la méthode des sources-images qui consiste à modéliser les ondes réfléchies sur une paroi par une onde émise par une source fictive qui est une image de la source réelle. La source-image est le symétrique de la source réelle par rapport à la paroi réfléchissante.

Les parois réfléchissantes peuvent induire un déphasage lorsque le rayon rebondit sur la paroi. Ainsi, il est possible de pondérer l'amplitude de l'onde par un coefficient de réflexion à chaque fois qu'un rayon traverse une paroi. L'amplitude de l'onde réfléchie reste égale à l'amplitude de l'onde incidente mais la phase est modifiée. Il est possible d'introduire un amortissement en pondérant l'amplitude de l'onde avec un coefficient d'absorption à chaque réflexion et/ou avec un coefficient de propagation dépendant de la longueur du rayon.

Pour utiliser cette méthode, l'ensemble des sources-images doit être préalablement déterminé. Le champ vibratoire en un point du système est exprimé comme la somme des contributions de toutes les sources-images. Si le nombre de sources-images est infini, il est nécessaire de tronquer le nombre de symétries à effectuer (et donc le nombre de sources-images) afin de pouvoir utiliser des méthodes de calcul numérique. Pour déterminer les différentes symétries, il est nécessaire que la géométrie du système étudié soit constituée de surfaces planes (ou segments en deux dimensions).

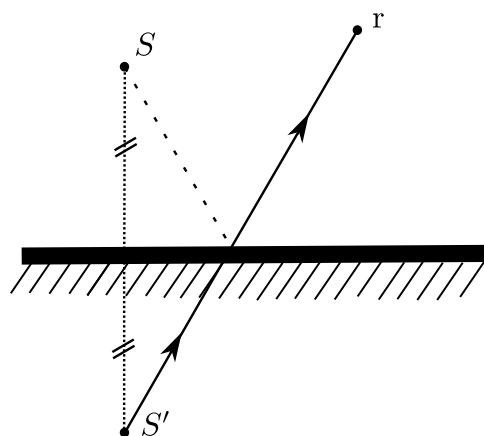


FIGURE 4.23 – Calcul du champ d'énergie vibratoire au point  $r$  par la méthode des sources-images. La source fictive  $S'$  est le symétrique de la source  $S$  par rapport à la surface.

### 4.3.2 Méthode de tir de rayons

La méthode de tir de rayons est une méthode classique utilisée pour caractériser la propagation acoustique dans un environnement donné pour les moyennes et hautes fréquences : la propagation de l'onde est représentée par des rayons au sens de l'optique géométrique. En 1979, Allen et Berkley [124] sont les premiers à utiliser cette méthode pour simuler la réponse impulsionnelle d'une salle rectangulaire.

La méthode de tir de rayons est équivalente à la méthode des sources-images. Toutefois, elle permet de calculer le champ vibratoire en un point de réception à partir des seules sources-images contribuant à ce champ ce qui permet d'éviter la construction de l'ensemble des rayons avec la méthode de tir de rayons. Il existe deux techniques en tir de rayons : le tir de rayons infiniment minces et le tir de faisceaux.

Dans la méthode de tir de rayons infiniment minces présentée à la figure 4.24, chaque source vibratoire émet des rayons dans l'ensemble des directions de manière isotrope. Les rayons peuvent porter une phase comme c'est le cas dans cette étude. Dès lors, chaque rayon phasé porte un champ vibratoire qui dépend de la directivité de la source. Il est également possible de considérer des rayons non phasés et dans ce cas il faut considérer l'énergie portée par les rayons.

Les rayons se propagent en ligne droite et lorsque le rayon rencontre une frontière, il est réfléchi selon la loi de Snell-Descartes. L'angle d'émission est égal à l'angle incident. Le champ du rayon peut être multiplié par un coefficient de réflexion du matériau rencontré. Étant donné qu'il est très peu probable qu'un rayon rencontre un point donné du système, les récepteurs sont définis comme des cellules qui couvrent une petite surface autour du point récepteur. Lorsqu'un rayon traverse une cellule, son champ est ajouté au champ global de la cellule. Cette opération est répétée pour l'ensemble des rayons et la contribution de tous les rayons est ajoutée à la cellule. L'ensemble du système est discrétisé avec les cellules réceptrices et il est ainsi possible de déterminer le champ vibratoire dans l'ensemble du système.

Le lancer de faisceaux consiste non plus à propager un rayon mais un angle solide. Cette méthode, utilisée en synthèse d'image, devient vite très complexe lorsque l'on considère des surfaces de réflexion courbes, c'est à dire lorsque la surface propagée se déforme à chaque réflexion [127].

Ces deux méthodes d'acoustique géométrique présentent l'intérêt de pouvoir être mises en œuvre facilement. Toutefois les modèles numériques deviennent rapidement très lourds et le temps de calcul devient très important. De plus, les résultats obtenus deviennent discutables lorsque le nombre de réflexions augmente, notamment pour des systèmes très réverbérants [128].

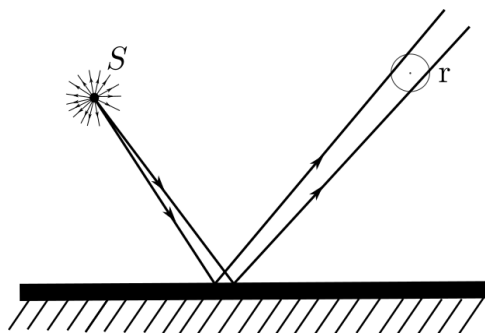


FIGURE 4.24 – Calcul du champ d'énergie vibratoire au point r par la méthode de tir de rayons. La source  $S$  envoie des rayons de manière isotrope qui rebondissent sur la surface et passent au travers de la cellule réceptrice.

## 4.4 Mise en évidence des surintensités par la méthode des sources-images

Dans cette section, la méthode des sources-images est utilisée afin de déterminer la valeur exacte des surintensités ainsi que leurs emplacements pour les trois plaques. Ces propriétés sont établies sans tenir compte ni de l'atténuation lors de la propagation des rayons ni de l'absorption lors des réflexions.

### 4.4.1 Principe général du calcul des surintensités

On considère une plaque avec une géométrie quelconque délimitée par des segments. La plaque est soumise à une excitation ponctuelle de type bruit blanc aléatoire au point source noté  $S_0$ . En réalisant des symétries de cette source avec les arêtes de la plaque, on détermine les sources-images à l'ordre 1. Les sources-images d'ordre 2 sont ensuite déterminées en réalisant des symétries des sources-images d'ordre 1 avec les arêtes de la plaque. La figure 4.25(a) présente les sources-images de première pour une plaque rectangulaire et la figure 4.25(b) présente les sources-images d'ordre 1 et d'ordre 2. On note  $N_s$  le nombre de sources (réelles ou images) pris en considération pour le calcul.

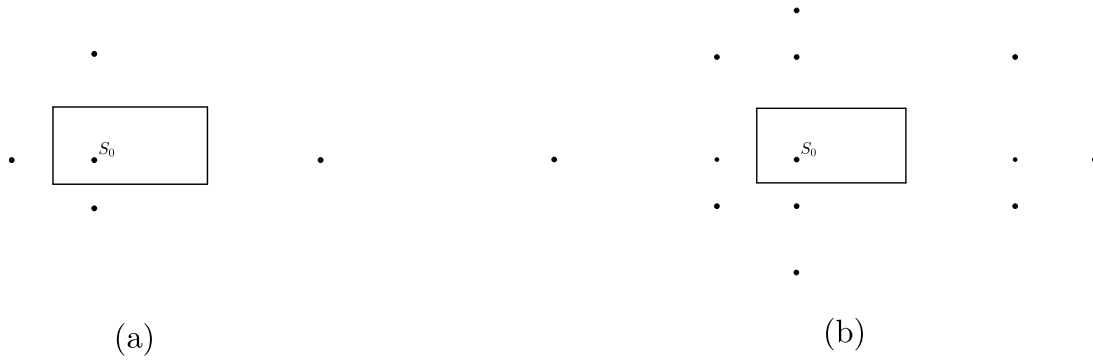


FIGURE 4.25 – Exemples de sources-images sur une plaque rectangulaire avec la source réelle au point  $S_0$  (a) à l'ordre 1 et (b) à l'ordre 1 et 2.

Pour un point P quelconque sur la plaque, les ondes provenant des sources-images peuvent être constructives si ces sources-images sont situées à égale distance du point P. Dans le cas où une source n'est pas équidistante avec une autre source par rapport au point P, sa contribution énergétique est uniquement  $s^2$ , avec  $s$  l'amplitude des sources-images. Pour deux sources-images équidistantes du point P, leur contribution à l'énergie au point P est le carré de la somme des amplitudes des deux sources-images

$$(s + s)^2 = (2s)^2. \quad (4.5)$$

Dans le cas où trois sources-images sont équidistantes du point P, leur contribution énergétique sera

$$(s + s + s)^2 = (3s)^2. \quad (4.6)$$

Dans le cas de sources décorréélées, l'amplitude résultante est la somme des carrés des amplitudes complexes tandis que pour des sources corrélées, l'amplitude résultante est le carré de la somme des amplitudes complexes.

On note :

- $N_1$  le nombre de simplets de sources-images qui ne sont équidistantes d'aucune autre source-image par rapport au point P,
- $N_2$  le nombre de doublets de sources-images équidistantes du point P,
- $N_3$  le nombre de triplets de sources-images équidistantes du point P,
- $N_4$  le nombre de quadruplets de sources-images équidistantes du point P.

L'énergie locale au point P peut être déterminée en additionnant la contribution des simplets, doublets, triplets et quadruplets

$$N_1 s^2 + N_2 (s + s)^2 + N_3 (s + s + s)^2 + N_4 (s + s + s + s)^2 \quad (4.7)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$\sum_{n=1}^4 N_n (ns)^2. \quad (4.8)$$

Pour obtenir le facteur de surintensité, il est nécessaire d'estimer la plus petite valeur du champ, situé en dehors de surintensités, là où aucune sources-images n'interfèrent constructivement. Dans ce cas, la contribution des  $N_s$  sources est

$$N_s s^2. \quad (4.9)$$

Le facteur de surintensité est donc

$$\frac{\sum_{n=1}^4 N_n n^2}{N_s}. \quad (4.10)$$

#### 4.4.2 Plaque rectangulaire

La figure 4.26 présente la plaque rectangulaire et les sources-images associées. La longueur et la largeur de la plaque rectangulaire sont respectivement notées  $L_x$  et  $L_y$ . La source est localisée au point  $S_0(x_0, y_0)$ . Dans un premier temps, on introduit les quatre points  $S_1(x_0, L_y - y_0)$ ,  $S_2(L_x - x_0, y_0)$  et  $S_3(L_x - x_0, L_y - y_0)$  ainsi que les quatre lignes  $d_0(x = x_0)$ ,  $d_1(x = L_x - x_0)$ ,  $d_2(y = L_y - y_0)$ , et  $d_3(y = y_0)$  représentées en pointillés sur la figure 4.26 là où les surintensités sont observées. Ensuite les 15 sources-images ( $A, B, \dots$ , jusqu'à  $D_3, C_3$ ) sont obtenues en utilisant des symétries successives du point  $S_0$  par rapport aux arêtes de la plaque rectangulaire. A titre d'exemple, les quatre points  $D_1, D_3, A_2$  et  $A_3$  sont les sources-images de premier ordre. Ils sont obtenus par symétrie du point source  $S_0$  par rapport aux quatre arêtes de la plaque. Bien qu'il existe un nombre infini de sources-images, un schéma typique de 15 sources-images est suffisant pour l'illustration.

Afin de calculer les facteurs de surintensité aux points  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$  et sur les quatre lignes  $d_0, d_1, d_2$  et  $d_3$ , il est nécessaire de déterminer les sources-images qui interfèrent de manière constructive. Afin de simplifier la compréhension, la contribution en amplitude des sources-images est considérée égale à 1. Pour un point quelconque de la plaque (à l'exception des points et lignes particuliers mentionnés précédemment), les rayons sont non corrélés et l'énergie totale est, d'après l'équation (4.9), la somme des énergies des 16 sources-images, c'est-à-dire

$$16 \times 1^2 = 16. \quad (4.11)$$

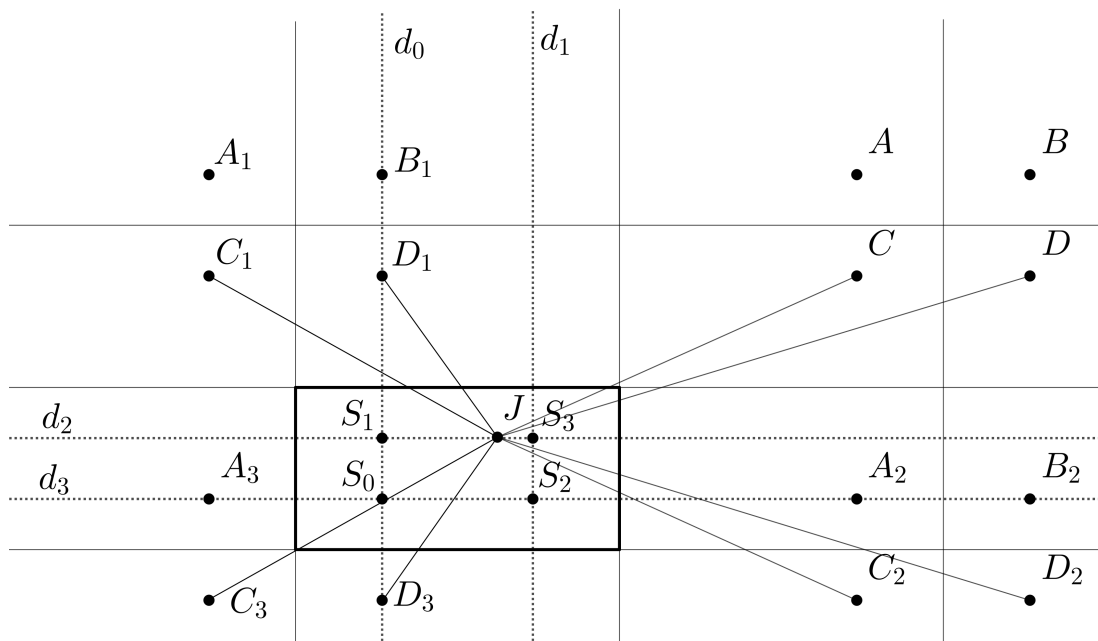


FIGURE 4.26 – Plaque rectangulaire en trait épais avec la source au point  $S_0$ . Les 15 sources-images sont obtenues ( $A, B, \dots, D_3, C_3$ ) en déterminant les symétries successives du point  $S_0$  par rapport aux arêtes de la plaque rectangulaire. Les lignes en pointillés ( $d_0, d_1, d_2$ , et  $d_3$ ) et les points ( $S_0, S_1, S_2$ , et  $S_3$ ) de surintensité sont représentés. Les rayons provenant des sources-images interférant constructivement sur la ligne  $d_2$  sont représentés

On considère désormais un point  $J$  placé sur la ligne  $d_2$  tel que présenté à la figure 4.26. La source-image  $C_2$  est symétrique du point  $C$  par rapport à la ligne  $d_2$  et donc ces deux points sont équidistants du point  $J$ . Pour un point quelconque situé sur la ligne  $d_2$ , l'onde provenant du point  $C$  est strictement identique à l'onde provenant du point  $C_2$  et donc elles interfèrent constructivement. La situation est la même pour les couples de sources-images suivants ( $D, D_2$ ), ( $D_1, D_3$ ) et ( $C_1, C_3$ ). Les huit autres sources-images n'interfèrent constructivement avec aucune autre sources-images. On a donc

- quatre doublets de sources-images équidistants du point  $J$ ,
- huit simplets qui ne sont équidistant d'aucune autre sources-images.

D'après l'équation (4.8), l'énergie totale sur la ligne  $d_2$  est donc

$$4 \times 2^2 + 8 \times 1^2 = 24. \quad (4.12)$$

Le facteur de surintensité sur la ligne  $d_2$  est donc  $24/16=3/2$ . En appliquant le même



raisonnement, on montre que le facteur de surintensité sur les lignes  $d_0$ ,  $d_1$  et  $d_3$  est de  $3/2$ .

Considérons désormais le point  $S_3$  à l'intersection des lignes  $d_1$  et  $d_2$ . Les rayons arrivant de la source-image  $C$  interfèrent constructivement avec les rayons provenant des trois sources-images  $C_1$ ,  $C_2$ , et  $C_3$  tel que présenté à la figure 4.27 avec les quatre traits en tirets.

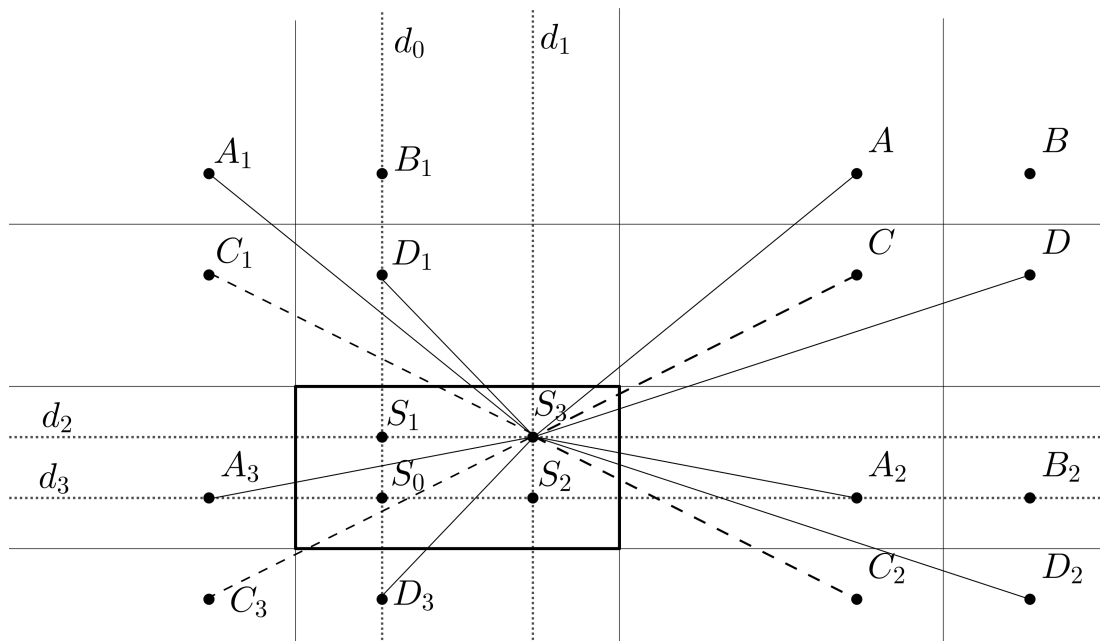


FIGURE 4.27 – Plaque rectangulaire en trait épais avec la source au point  $S_0$ . Les rayons provenant des doublets de sources-images interférant constructivement sur le point  $S_3$  sont représentés en traits pleins et les quadruplets en traits tirets.

Les sources-images  $A$  et  $A_1$  sont équidistants par rapport à  $S_3$  et donc les rayons arrivant de  $A$  et  $A_1$  interfèrent de manière constructive. Il en va de même pour les trois couples de sources-images  $(D, D_2)$ ,  $(A_2, A_3)$  et  $(D_1, D_3)$ . Les rayons provenant des quatre sources-images  $B, B_1, B_2$  et  $S_0$  ne sont corrélés avec aucune autre source-image. On a donc

- Un quadruplet de sources-images équidistant du point  $S_3$ ,
- quatre doublets de sources-images équidistants du point  $S_3$ ,
- quatre simplets qui ne sont équidistants d'aucune autre sources-images.

Le facteur de surintensité au point  $S_3$  est donc

$$1 \times 4^2 + 4 \times 2^2 + 4 \times 1^2 = 36. \quad (4.13)$$

Le facteur de surintensité au point  $S_3$  est donc  $36/16=9/4$ . De même, par raison de symétrie le facteur de surintensité aux points  $S_1$  et  $S_2$  est de  $9/4$ .

### 4.4.3 Plaque circulaire

A la différence de la plaque rectangulaire, la plaque circulaire présente un bord concave. Afin de pouvoir utiliser la méthode des sources-images avec des bords concaves, Ver-cammen [129] propose de discrétiser les bords circulaires avec un nombre fini de segments. C'est cette méthode qui est employée ici.

La figure 4.28 présente la plaque circulaire avec le contour discrétisé. La source  $S_0$  ainsi que les 12 sources-images du premier ordre  $A_1, A_2, \dots, C_4$  sont obtenues en appliquant une symétrie du point source  $S_0$  par rapport aux arêtes de la plaque. A titre d'exemple, la source-image  $A_1$  est l'image de la source réelle  $S_0$  par symétrie par rapport à l'arête  $\Delta_1$ .

Pour un point quelconque de la plaque circulaire, les rayons sont non corrélés et l'énergie totale est la somme des énergies des 12 sources-images et de la source, c'est-à-dire  $13 \times 1^2 = 13$ .

Le long de la ligne  $d_0$ , les rayons provenant des deux sources-images  $A_1$  et  $A_2$  interfèrent constructivement. Il en va de même pour les quatre couples de sources-images suivants :  $(B_1, B_2)$ ,  $(C_1, C_2)$ ,  $(C_3, C_4)$  et  $(B_3, B_4)$ . A l'inverse, les rayons provenant des deux sources-images  $D_1, D_2$  et de la source  $S_0$  ne sont pas corrélés avec aucun autre rayon. On a donc

- cinq doublets de sources-images équidistants de la ligne  $d_0$ ,
- trois simplets qui ne sont équidistants d'aucune autre sources-images.

L'énergie totale sur la ligne  $d_0$  est donc

$$5 \times 2^2 + 3 \times 1^2 = 23. \quad (4.14)$$

Le facteur de surintensité sur la ligne  $d_0$  est donc  $23/13$ .

Il est alors possible d'extrapoler et de faire tendre le nombre de segments vers l'infini afin de se rapprocher d'un cercle. Dans ce cas, on aura

- $\frac{n-3}{2}$  doublets de sources-images équidistants de la ligne  $d_0$ , avec  $n$  le nombre de sources-images
- trois simplets qui ne sont équidistants d'aucune autre sources-images.

Ainsi, la surintensité le long du diamètre  $d_0$  avec  $n$  sources-images est :

$$\frac{3 + 2(n - 3)}{n} = \frac{2n - 3}{n}. \quad (4.15)$$



circulaires sont ici discrétisés avec cinq segments notés  $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ . Le point source est localisé au point  $S_0(x_0, y_0)$  et les 12 sources-images ( $A_1, A_2, \dots, C_2, D_2$ ) sont obtenues par symétrie par rapport aux arêtes de la plaque. A titre d'exemple, la source-image  $B_1$  (resp.  $C_1$ ) est le symétrique du point source  $S_0$  par rapport à  $\Delta_1$  (resp.  $\Delta_2$ ).

Pour un point quelconque de la plaque en forme de stade, les rayons sont non corrélés et l'énergie totale est la somme des énergies des 12 sources-images et de la source, c'est-à-dire  $13 \times 1^2 = 13$ .

Sur le point  $S_1$ , les rayons provenant des deux sources-images  $A_1$  et  $A_2$  interfèrent constructivement. Il en va de même pour les quatre couples de sources-images suivants :  $(B_1, B_2)$ ,  $(C_1, C_2)$ ,  $(C_3, C_4)$  et  $(B_3, B_4)$ . A l'inverse, les rayons provenant des deux sources-images  $D_1, D_2$  et de la source  $S_0$  ne sont pas corrélés avec aucun autre rayon. On a donc

- cinq doublets de sources-images équidistants du point  $S_1$ ,
- trois simplets qui ne sont équidistants d'aucune autre sources-images.

L'énergie totale sur le point  $S_1$  est donc

$$5 \times 2^2 + 3 \times 1^2 = 23. \quad (4.18)$$

Le facteur de surintensité sur le point  $S_1$  est donc  $23/13$ .

Il est alors possible d'extrapoler et de faire tendre le nombre de segments vers l'infini afin de se rapprocher de la forme du stade. Dans ce cas, on aura

- $\frac{n-3}{2}$  doublets de sources-images équidistants de la ligne  $d_0$ , avec  $n$  le nombre de sources-images
- trois simplets qui ne sont équidistants d'aucune autre sources-images.

Ainsi, la surintensité sur le point  $S_1$  avec  $n$  sources-images est :

$$\frac{3 + 2(n-3)}{n} = \frac{2n-3}{n}. \quad (4.19)$$

Comme pour la plaque circulaire, on obtient l'expression du facteur de surintensité en fonction du nombre de segments soit

$$\frac{2N_{poly} - 1}{N_{poly} + 1}. \quad (4.20)$$

Lorsque  $N_{poly}$  tend vers l'infini, cette équation tend vers 2.

Ainsi, le facteur de surintensité au point  $S_1$  pour le stade est égale à 2. De la même manière, par raison de symétrie le facteur de surintensité aux points  $S_3$  et  $S_2$  également

égale à 2. Ici, le facteur de surintensité est obtenu avec un nombre impair de sources-images. Toutefois, ce résultat reste inchangé si on considère un nombre pair de sources-images étant donné que le terme  $1/n$  tend vers 0.

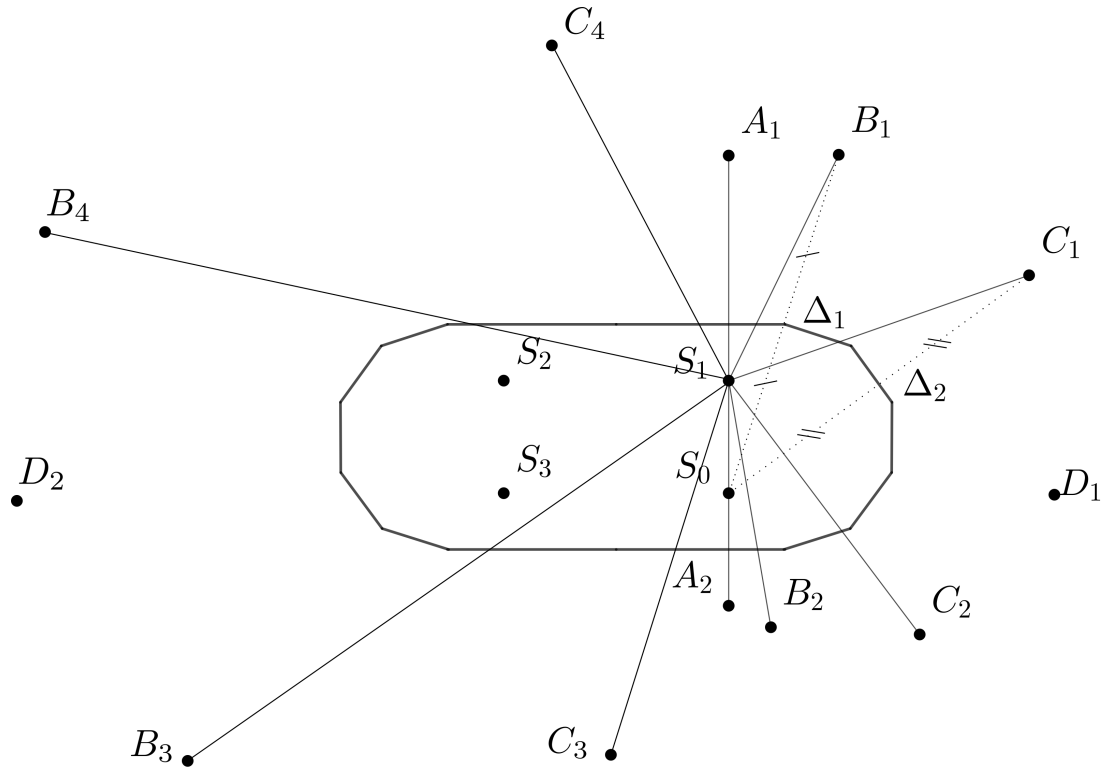


FIGURE 4.29 – Plaque en forme de stade avec le contour discrétisé. La source est située au point  $S_0$ . Les sources-images sont obtenues par symétrie avec les arêtes de la plaque. Elles interfèrent constructivement sur les quatre points  $S_0, \dots, S_3$ .

#### 4.4.5 Conclusion

Les valeurs des surintensités ainsi que leur localisation ont été déterminées avec la méthode des sources-images. Les valeurs des surintensités sont rappelées dans le tableau 4.4.

TABLE 4.4 – Facteurs de surintensité pour les trois plaques déterminés avec la méthode des sources-images.

	Théorique (linéaire)	Théorique (dB)
Rectangle ( $S_i$ )	9/4	3.52
Rectangle ( $d_i$ )	3/2	1.76
Stade	2	3.01
Cercle	2	3.01

## 4.5 Validation numérique des facteurs de surintensité

Les valeurs des surintensités sont maintenant déterminées de manière numérique avec les résultats des simulations numériques présentées au chapitre 3 et comparées avec les valeurs théoriques obtenues précédemment. Les simulations numériques sont réalisées Avec le logiciel de calcul par éléments finis MSC/Nastran 2021.1.

### 4.5.1 Plaque rectangulaire

La figure 4.30 présente le champ vibratoire pour la plaque rectangulaire excitée de manière ponctuelle au point  $S_0$  avec un bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquences [20-4000] Hz. Le facteur d'amortissement structural de la plaque est égal à 0.002 et le maillage est réalisé avec des carrés de côté 6 mm. Les lignes de surintensité forment un quadrillage avec le point d'excitation situé à l'une des quatre intersections. Le facteur de surintensité sur les quatre lignes en pointillés ( $d_i$ ) est déterminé en faisant la moyenne de l'énergie vibratoire pour tous les points situés sur ces quatre lignes (à l'exception des quatre points  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$ ) et est égal à  $1.31 \text{ dB} \pm 0.7$ . En ce qui concerne les quatre points situés aux intersections des lignes représentées par les croix blanches ( $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$ ), le facteur de surintensité est égal à 2.23 ou encore  $3.48 \text{ dB} \pm 0.2$ . Les incertitudes sont estimées avec l'écart-type.

### 4.5.2 Plaque en forme de stade

La figure 4.31 présente le champ vibratoire pour la plaque en forme de stade de Bunimovich excitée de manière ponctuelle au point  $S_0$  avec un bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquences [20-4000] Hz. Le facteur d'amortissement structural de la plaque est égal à 0.002. Quatre points de surintensité  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$  sont clairement visibles en raison de deux symétries spatiales par rapport aux lignes verticales et horizontales. Avec la même méthode que précédemment, le facteur de surintensité au niveau de ces quatre points est déterminé et est égal à  $3.07 \text{ dB} \pm 0.1$ .

### 4.5.3 Plaque circulaire

Pour la plaque circulaire, le champ vibratoire n'est pas diffus comme expliqué au chapitre 3. L'énergie est plus importante sur le cercle concentrique passant par le point d'excitation. Cette surintensité d'énergie s'explique de manière géométrique par la concentration des rayons mais n'est pas due à une interférence constructive des rayons. Cependant, la surintensité sur le diamètre passant par le point d'excitation est bien causée par l'interférence constructive des rayons due à la symétrie spatiale. A partir

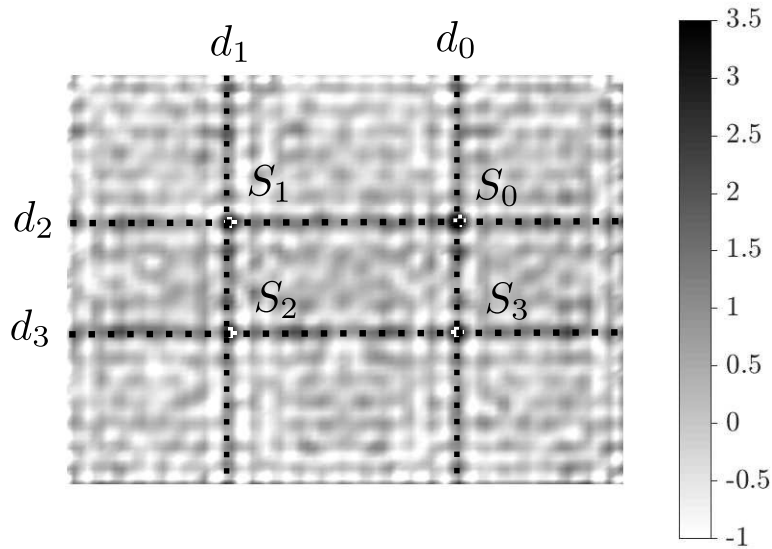


FIGURE 4.30 – Champ vibratoire pour la plaque rectangulaire avec les bords appuyés obtenu avec la simulation par éléments finis. L’excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au point  $S_0$ . On observe quatre lignes ( $d_i$ ) en pointillés et quatre points ( $S_i$ ) à l’intersection des lignes et situés de manière symétrique par rapport à la source.

de la simulation numérique présentée à la figure 4.32 la surintensité sur la ligne  $d_0$  est déterminée et est égale à  $2.70 \text{ dB} \pm 1.4$ . Étant donné que le champ vibratoire n’est pas diffus l’incertitude est plus importante dans ce cas.

Les valeurs des surintensités déterminées numériquement sont reportées dans le tableau 4.5 et l’erreur avec les valeurs théoriques est calculée.

TABLE 4.5 – Comparaison entre les facteurs de surintensité obtenus numériquement avec la méthode des éléments finis et théoriques avec la méthode des sources-images. Les bords de la plaque rectangulaire sont simplement appuyés et les bords de la plaque circulaire et du stade sont encastés.

	Théorique (dB)	Numérique (dB)	Erreur (dB)
Rectangle ( $S_i$ )	3.52	$3.48 \pm 0.2$	0.04
Rectangle ( $d_i$ )	1.76	$1.31 \pm 0.7$	0.45
Stade	3.01	$3.07 \pm 0.1$	0.06
Cercle	3.01	$2.70 \pm 1.4$	0.31

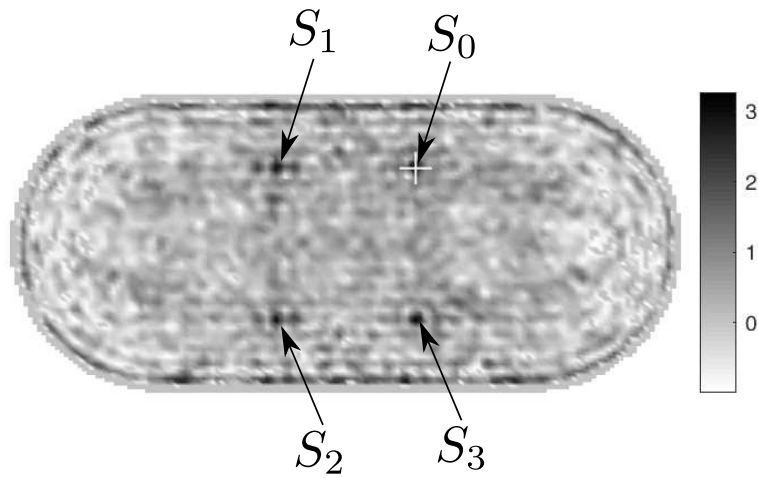


FIGURE 4.31 – Champ vibratoire pour la plaque en forme de stade avec les bords fixes obtenue avec la simulation par éléments finis. L’excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au point  $S_0$ . On observe quatre points de surintensité notés ( $S_i$ ) situés de manière symétrique par rapport à la source.

## 4.6 Influence des conditions aux limites

Jusqu’à présent, les conditions aux limites des systèmes étudiés n’ont pas été évoquées. En réalité la nature de ces conditions aux limites n’a pas d’importance à condition qu’elles soient uniformes sur l’ensemble des arêtes. Toutefois une modification des conditions aux limites peut conduire à un déphasage pour les ondes réfléchies [130] et donc une modification des facteurs de surintensité précédemment calculés.

### 4.6.1 Réflexion d’une onde plane

On étudie ici la réflexion d’une onde plane sur la frontière d’une plaque semi-infinie sur  $y > 0$  telle que présentée à la figure 4.33. Les conditions limites étudiées sont les plus classiques à savoir appuyée, libre, et encadrée. L’équation du mouvement d’une plaque rectangulaire est

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4.21)$$

avec  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  la rigidité en flexion,  $E$  le module d’Young,  $\nu$  le coefficient



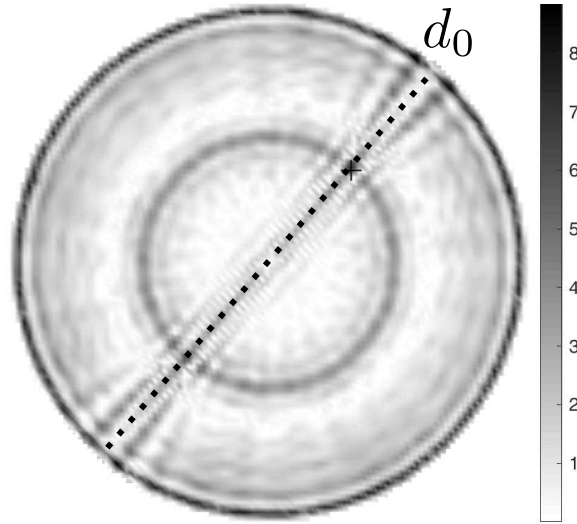


FIGURE 4.32 – Champ vibratoire pour la plaque circulaire avec les bords fixes obtenue avec la simulation par éléments finis. L’excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée sur la croix. Il existe une surintensité sur la ligne de diamètre  $d_0$  et sur le cercle passant par le point d’excitation.

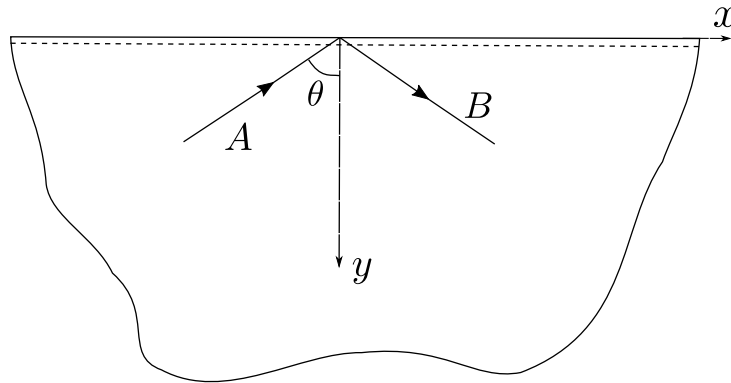


FIGURE 4.33 – Onde incidente  $A$  avec un angle  $\theta$  et onde réfléchie  $B$  à la frontière d’une plaque semi-infinie

de Poisson,  $\rho$  la masse volumique,  $h$  l’épaisseur de la plaque, et  $\nabla^4 w(x, y, t) = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}$  désigne l’opérateur bilaplacien. Considérons une solution de la forme d’une onde se déplaçant dans le sens des  $x$  positifs avec un angle  $\theta$

$$w(x, y, t) = f(y) e^{i(kx - \omega t)} \quad (4.22)$$

En substituant cette équation dans l’équation (4.21), il vient

$$k^4 f(y) - 2k_1^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} + \frac{d^4 f(y)}{dy^4} - \frac{\rho h}{D} \omega^2 f(y) = 0 \quad (4.23)$$

ou

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} - \left( \frac{\rho h}{D} \omega^2 - k^4 \right) f(y) = 0. \quad (4.24)$$

En introduisant le nombre d'onde de flexion,

$$k_f^4 = \omega^2 \frac{\rho h}{D} \text{ et } \xi^4 = k_f^4 - k^4, \quad (4.25)$$

l'équation (4.24) devient

$$\frac{d^4 f(y)}{dy^4} - 2k_1^2 \frac{d^2 f(y)}{dy^2} - \xi^4 f(y) = 0. \quad (4.26)$$

On cherche une solution de la forme  $f(y) = \exp(sy)$ . En intégrant cette solution dans l'équation (4.26), on obtient

$$s^4 \exp(sy) - 2k_1^2 s^2 \exp(sy) - \xi^4 \exp(sy) = 0 \quad (4.27)$$

ou encore

$$s^4 - 2k_1^2 s^2 - \xi^4 = 0 \quad (4.28)$$

En posant  $X = s^2$ , on obtient les racines suivantes

$$s_{1,2} = \pm (k^2 + k_f^2)^{1/2} \text{ et } s_{3,4} = \pm i (k_f^2 - k^2)^{1/2}. \quad (4.29)$$

Le résultat est donc de la forme

$$w = (A \exp \left\{ i (k_f^2 - k_1^2)^{1/2} y \right\} + B \exp \left\{ -i (k_f^2 - k^2)^{1/2} y \right\} + C \exp \left\{ - (k^2 + k_f^2)^{1/2} y \right\} + D \exp \left\{ (k^2 + k_f^2)^{1/2} y \right\}) \times \exp i(kx - \omega t). \quad (4.30)$$

Au regard de l'équation (4.30), il est clair que les termes  $A$  et  $B$  sont des ondes planes harmoniques. Le terme de facteur  $A$  est une équation d'onde se déplaçant dans le sens des  $y$  négatif en direction de la frontière tandis que le terme de facteur  $B$  est une onde se déplaçant dans le sens des  $y$  positif, vers l'intérieur de la plaque. La valeur de  $D$  doit être fixée à zéro sans quoi on obtient une onde qui croît de manière exponentielle.

**Condition aux limites simplement appuyée** Dans un premier temps, considérons la condition aux limites simplement appuyée telle que

$$w(x, 0, t) = \frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = 0. \quad (4.31)$$

En appliquant ces conditions dans l'équation (4.30) avec  $D = 0$ , il vient

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -(k_f^2 - k^2) A - (k_f^2 - k^2) B + (k^2 + k_f^2) C = 0 \end{cases} \quad (4.32)$$

En résolvant le système, on obtient les ratios

$$B/A = -1; C = 0. \quad (4.33)$$

Ainsi, lorsqu'une onde incidente arrive sur une frontière simplement appuyée, une onde réfléchie est obtenue avec la même amplitude et un déphasage d'un angle  $\pi$ .

**Conditions aux limites encastree et libre** Considérons maintenant les conditions aux limites encastree et libre. Ces deux conditions sont étudiées en parallèle car elles conduisent à des résultats similaires. La condition aux limites encastree s'écrit

$$w(x, 0, t) = \frac{\partial w(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad (4.34)$$

En appliquant ces conditions dans l'équation (4.30) avec  $D = 0$ , on obtient

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -i(k^2 - k_f^2)^{\frac{1}{2}} A + i(k^2 - k_f^2)^{\frac{1}{2}} B - (k^2 + k_f^2)^{\frac{1}{2}} C = 0 \end{cases} \quad (4.35)$$

Pour la condition aux limites libre,

$$\frac{\partial^2 w(x, 0, t)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 w(x, 0, t)}{\partial y^3} = 0 \quad (4.36)$$

et de la même manière que précédemment, en appliquant ces conditions dans l'équation (4.30) avec  $D = 0$

$$\begin{cases} -(k_f^2 - k^2) A - (k_f^2 - k^2) B + (k^2 + k_f^2) C = 0 \\ i(k^2 - k_f^2)^{\frac{3}{2}} A + i(k^2 - k_f^2)^{\frac{3}{2}} B - (k^2 + k_f^2)^{\frac{3}{2}} C = 0 \end{cases} \quad (4.37)$$

En résolvant séparément les deux systèmes (4.35) et (4.37), il vient

$$\frac{B}{A} = -\frac{(k^2 + k_f^2)^{\frac{1}{2}} - i(k_f^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}}{(k^2 + k_f^2)^{\frac{1}{2}} + i(k_f^2 - k^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (4.38)$$

or le nombre d'onde  $k_1$  est relié au nombre d'onde  $k_f$  par la relation

$$k = k_f \cos(\theta) \quad (4.39)$$

en introduisant l'équation (4.39) dans (4.38), il vient

$$\begin{aligned}
 \frac{B}{A} &= -\frac{(k_f^2 + k_f^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - i(k_f^2 - k_f^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}}{(k_f^2 \cos^2 \theta + k_f^2)^{\frac{1}{2}} + i(k_f^2 - k_f^2 \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}}} \\
 &= -\frac{(1 + \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} - i \times \sin \theta}{(1 + \cos^2 \theta)^{\frac{1}{2}} + i \times \sin \theta} \\
 &= -\cos^2 \theta + i \times \sin \theta \times (1 + \cos^2 \theta)^{1/2}
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

A partir de l'équation 4.40 on montre que le module de  $B/A$  est égal à 1. En effet,

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{B}{A} \right|^2 &= \cos^4 \theta + (\sin \theta \sqrt{1 + \cos^2 \theta})^2 \\
 &= \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta = 1
 \end{aligned}
 \tag{4.41}$$

A la différence de la condition limite appuyée, le déphasage entre le rayon incident et le rayon réfléchi dépend désormais de l'angle d'incidence et est égal à

$$\tan^{-1} \left( -\tan \theta \times \frac{(1 + \cos^2 \theta)^{1/2}}{\cos \theta} \right)
 \tag{4.42}$$

La figure 4.34 présente l'évolution du déphasage en fonction de l'angle d'incidence  $\theta$ .

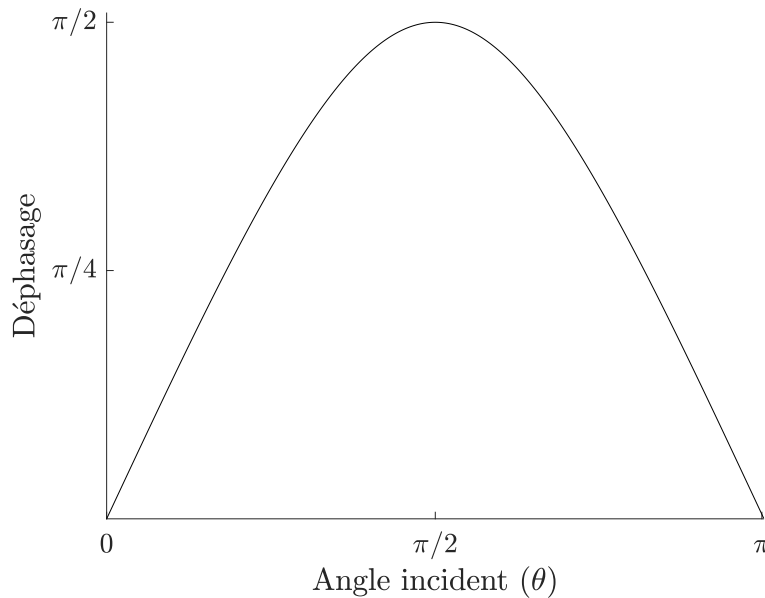


FIGURE 4.34 – Évolution du déphasage entre le rayon incident et le rayon réfléchi en fonction de l'angle d'incidence pour les conditions aux limites encastree et libre

D'après la figure 4.34 le déphasage augmente jusqu'à ce que le rayon arrive avec une incidence normale à la frontière. Le déphasage entre le rayon incident et le rayon ré-

fléchi est alors égal à  $\pi/2$ . Ce résultat est cohérent avec les résultats présents dans la littérature. En effet, dans le cas d'une poutre avec une extrémité libre ou encastree, Crandall [101] montre que le déphasage est égal à  $\pi/2$ .

Finalement, lorsque une onde est réfléchi sur une frontière de la plaque rectangulaire, le déphasage subit par le rayon réfléchi dépend de la condition limite de cette frontière.

- Lorsque la frontière est simplement appuyée, le rayon réfléchi est en opposition de phase avec le rayon incident ;
- Dans le cas où la frontière est libre ou encastree, le rayon subit un déphasage qui est fonction de l'angle d'incidence.

#### 4.6.2 Configurations possibles pour les conditions aux limites

On étudie les trois conditions aux limites suivantes : libre, simplement appuyée, et encastree. Il a été démontré que les conditions aux limites libre et encastree produisent le même effet sur la réflexion d'une onde vibratoire. Par la suite on désignera les deux conditions aux limites libre et encastree par la lettre  $E$  et la condition aux limites simplement appuyée sera désignée par la lettre  $A$ . Avec ces deux types de conditions aux limites, six configurations possibles pour la plaque rectangulaire sont déterminées et présentées à la figure 4.35. Ces six solutions représentent l'ensemble des configurations possibles.

Les configurations (a) et (d) de la figure 4.35 ont des conditions aux limites uniformes. Avec les conditions aux limites uniformes sur les quatre arêtes de la plaque, quatre lignes de surintensité apparaissent, tel que présenté à la section 4.5.1.

La configuration (e) est symétrique et les trois configurations (b), (c), et (f) sont asymétriques.

Par la suite, les résultats pour les configurations (b), (e), et (f) sont présentés.

#### 4.6.3 Influence sur les zones de surintensité

L'influence des conditions aux limites sur les lignes de surintensité est déterminée à l'aide de simulations numériques avec la méthode des éléments finis. Les modes propres de la plaque rectangulaire sont déterminés numériquement pour les trois configurations étudiées avec le logiciel Nastran. De la même manière que pour la section 3.4.1, l'énergie locale est déterminée en tout point de la plaque.

La figure 4.36 présente la répartition de l'énergie vibratoire en dB dans la plaque rectangulaire pour les trois différentes configurations de conditions aux limites (b), (e), et (f) de la figure 4.35. Le type de conditions aux limites ( $A$  ou  $E$ ) est indiqué sur les quatre arêtes de la plaque.

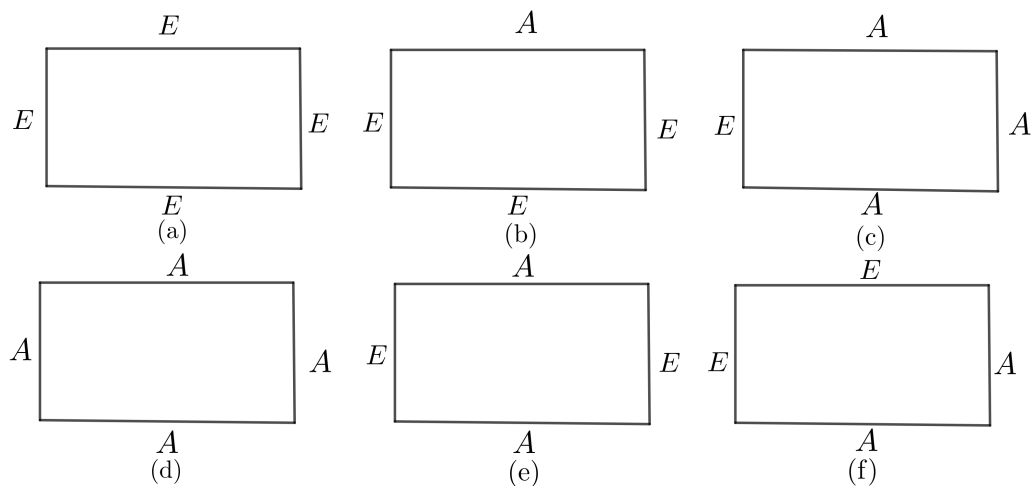


FIGURE 4.35 – Configurations possibles pour une plaque rectangulaire avec deux conditions aux limites différentes  $E$  (encastée ou libre) et  $A$  (appuyée).

Lorsque les conditions aux limites sont symétriques, comme présenté à la figure 4.36a, les surintensités sont similaires à celles rencontrées avec des conditions aux limites uniformes.

A l'inverse, lorsque les conditions aux limites ne sont pas symétriques, comme sur les figures 4.36c et 4.36b, des lignes avec un coefficient inférieur à 1 apparaissent. L'énergie sur ces lignes est donc inférieure à l'énergie moyenne de la plaque.

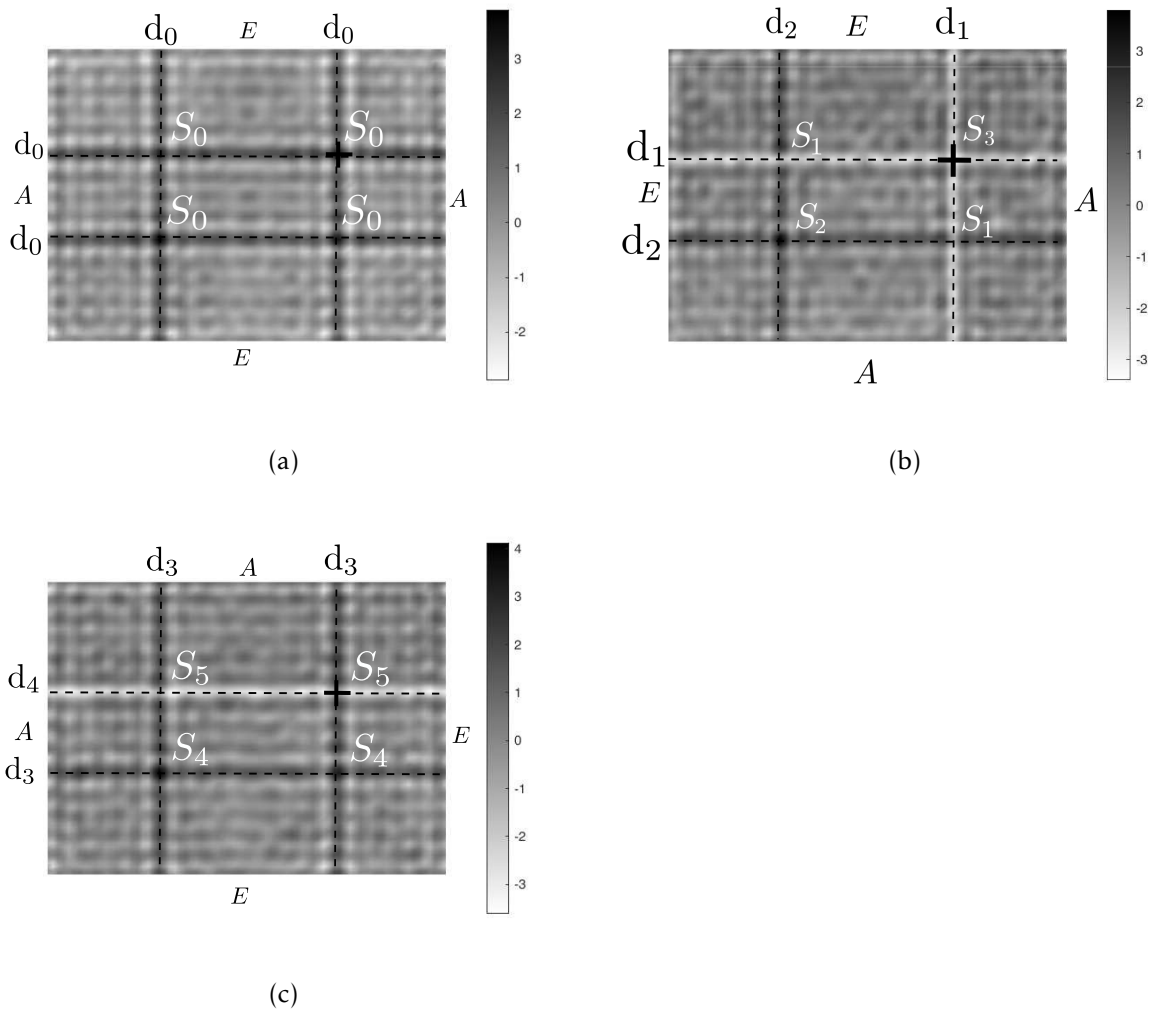


FIGURE 4.36 – Répartition de l'énergie vibratoire pour la plaque rectangulaire obtenu avec la méthode des éléments finis en fonction des conditions limites. L'excitation ponctuelle est un bruit blanc aléatoire localisée au niveau de la croix noire.

Dans le cas où les conditions limites ne sont pas symétriques et lorsque le rayon subit un déphasage qui est fonction de l'angle d'incidence, il n'est pas possible de déterminer les facteurs de surintensité avec la méthode des sources-images. Le déphasage subi par le rayon est différent pour chacune des sources-images et dépend de leurs positions. Or il existe une infinité de sources-images ce qui rend le calcul impossible.

## 4.7 Modélisation par tir de rayons

Afin de valider les valeurs des déphasages et les facteurs de surintensité induits par les conditions aux limites, la répartition du champ vibratoire dans les trois plaques est simulée avec un algorithme de tir de rayons. Les méthodes décrites dans la littérature

pour calculer la répartition d'énergie avec des méthodes de tir de rayons ne prennent pas en compte les termes de phase qui sont responsables du comportement modal d'un système. Le système étudié est maillé à l'aide de cellules et la densité d'énergie est déterminée en faisant la somme des énergies de chacun des rayons traversant ces cellules. Les rayons sont donc considérés décorrélés les uns des autres et donc les interférences sont négligées [131].

Cette hypothèse de décorrélation des rayons est tout à fait légitime dans le domaine des hautes fréquences où la longueur d'onde est petite par rapport aux dimensions caractéristiques du système. De plus, en négligeant la phase, on obtient une réponse moyenne qui ne prend pas en compte les incertitudes sur la géométrie ou les matériaux du système. Cette hypothèse est introduite notamment dans la méthode de transfert radiatif [34]. Les sources d'énergie, qu'elles soient primaires ou secondaires, sont toutes considérées décorrélées les unes des autres.

Toutefois, les surintensités présentées dans cette étude sont causées par l'interférence constructive entre les ondes. Il est donc nécessaire de prendre en compte la phase des ondes portées par les rayons.

#### 4.7.1 Principe de la simulation

Le principe de fonctionnement de l'algorithme de tir de rayons est présenté à la figure 4.37. Une source  $S$  émet  $N$  rayons de manière isotrope. Les rayons se propagent dans le système avec une trajectoire rectiligne. L'algorithme détermine les points d'intersection entre les rayons et les frontières du système. Le calcul mathématique permettant de déterminer le point d'intersection entre un rayon et une frontière est présenté en annexe 9.1. Lorsqu'un rayon rencontre une frontière, il est réfléchi de manière spéculaire. L'angle incident est égal à l'angle réfléchi. Ce processus est appliqué pour un nombre  $n$  de réflexions.

Le calcul est réalisé dans une large bande de fréquences. Pour ce faire, la fréquence des ondes portées par les rayons varie dans une bande de fréquences donnée.

L'ensemble du domaine étudié est maillé à l'aide de cellules réceptrices circulaires définies par leur rayon noté  $r_c$ . Lorsqu'un rayon passe à travers une cellule, la phase de l'onde est déterminée en calculant la distance totale parcourue par ce rayon. Le champ porté par le rayon est alors ajouté au champ global de la cellule. Un rayon peut passer à plusieurs reprises à l'intérieur d'une cellule et son champ est à chaque fois ajouté.

La simulation présentée ici ne prend pas en compte l'amortissement. Toutefois, il est possible d'introduire un coefficient d'absorption  $\tau$  associé à chaque frontière. Dans ce cas, après  $n$  réflexions, l'énergie  $E_n$  du rayon est égale à  $\tau^n E_0$  avec  $E_0$  l'énergie initiale



du rayon.

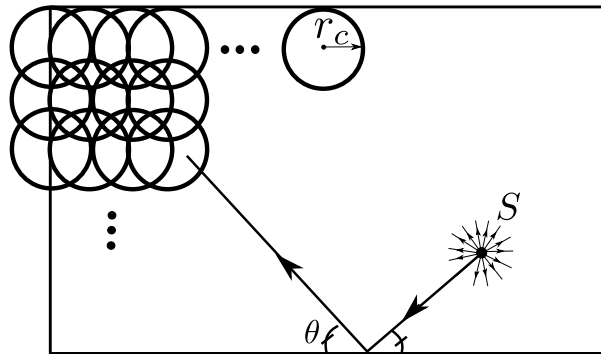


FIGURE 4.37 – Principe de fonctionnement de l’algorithme de tir de rayons. La source  $S$  émet des rayons de manière isotrope qui rebondissent sur les frontières. Lorsqu’un rayon traverse une cellule de rayon  $r_c$ , le champ porté par le rayon est ajouté au champ total de la cellule.

## 4.7.2 Plaque rectangulaire

Pour l’algorithme de tir de rayons, 1000 rayons sont émis de la source  $S_0$  de manière isotrope. L’angle entre le premier rayon et l’axe horizontal est légèrement supérieur à zéro afin d’éviter une trajectoire cyclique rectiligne de ce rayon. La simulation est réalisée pour 1000 réflexions. 1000 fréquences sont étudiées réparties de manière linéaire entre 20 et 4000 Hz. 2500 cellules circulaires avec un rayon  $r_c$  égal à 9 mm sont réparties de manière uniforme sur la plaque rectangulaire. Si le rayon des cellules est plus important, la réponse sera plus lisse à proximité des singularités.

La figure 4.38 présente les résultats des simulations numériques. Les conditions aux limites ( $E$  pour encastré ou libre et  $A$  pour appuyé) sont indiquées pour chaque frontière de la plaque. Le champ vibratoire de la plaque est diffus et les lignes de surintensité apparaissent clairement du fait de l’interférence constructive entre les rayons. De la même manière que précédemment, lorsque les conditions aux limites sont symétriques comme sur la figure 4.38a, les lignes de surintensité ont toutes le même facteur de surintensité. A l’inverse, lorsque les conditions aux limites sont asymétriques comme sur les figures 4.38b et 4.38c, certaines lignes deviennent des lignes avec une réduction de l’énergie. Les rayons n’interfèrent plus constructivement le long de ces lignes mais destructivement.

A partir des résultats de l’algorithme de tir de rayons présentés à la figure 4.38 et les résultats de la simulation FEM présentés à la figure 4.36, les facteurs des surintensités sont déterminés et comparés. Les facteurs de surintensité sont reportés dans le tableau 4.6. Dans le cas de la plaque avec les conditions aux limites symétriques, (figure 4.38a

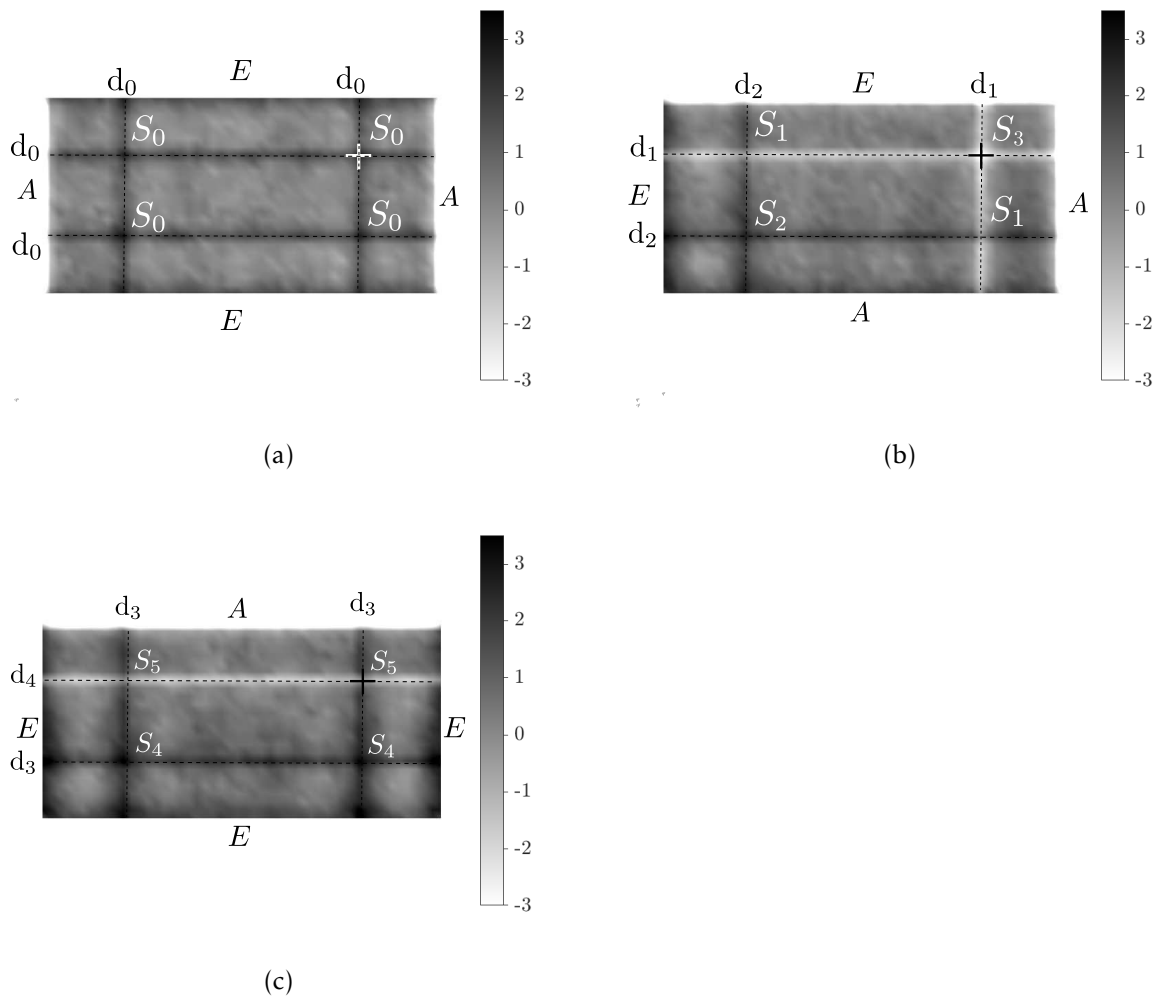


FIGURE 4.38 – Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque rectangulaire en fonction des conditions limites obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope.

et figure 4.36a) les facteurs de surintensité sont déterminés sur l'ensemble des points des quatre lignes de surintensité notées  $d_0$  puis moyenné. De même pour les quatre points de surintensité  $S_0$ , les facteurs de surintensité sont déterminés puis moyennés. Ces deux valeurs sont présentées dans les deux premières lignes du tableau 4.6.

Pour la configuration avec les conditions aux limites présentée à la figure 4.38b et figure 4.36b, les facteurs de surintensité sont déterminés sur l'ensemble des points des deux lignes de surintensité notées  $d_1$  puis moyenné. La même procédure est réalisée pour les deux lignes  $d_2$ . Le facteur de surintensité est déterminé pour les points  $S_2$  et  $S_3$ . Pour les deux points  $S_1$ , la configuration est la même : une ligne de surintensité croise une ligne avec un surintensité négative) et donc le facteur de surintensité est similaire. La moyenne des facteurs de surintensité des deux points  $S_1$  est donc calculée.

Ces résultats sont présentés dans la seconde partie du tableau 4.6.

Pour la configuration avec les conditions aux limites présentée à la figure 4.38c et figure 4.36c les facteurs de surintensité sont déterminés sur l'ensemble des points des trois lignes de surintensité notée  $d_3$  puis moyenné. Le facteur de surintensité est également déterminé pour l'ensemble des points de la ligne  $d_4$ . Le facteur de surintensité est déterminé et moyenné pour les deux points  $S_4$  et de même pour les deux points  $S_5$ . Ces résultats sont présentés dans la troisième partie du tableau 4.6. Les écarts entre les deux méthodes sont relativement faibles.

TABLE 4.6 – Comparaison entre les facteurs de surintensité pour la plaque rectangulaire. Les facteurs de surintensité sont obtenus de manière numérique avec la simulation par éléments finis et avec la méthode de tir de rayons pour différents types de conditions aux limites. L'excitation est un bruit blanc aléatoire dans le cas de la simulation FEM et une source isotrope dans le cas du tir de rayons. Les valeurs des facteurs de surintensité sont obtenues avec les simulations numériques avec la méthode FEM présentées à la figure 4.36 et avec la méthode de tir de rayons présentées à la figure 4.38.

	Méthode FEM (dB)	Tir de rayons (dB)	Ecart (dB)
$S_0$	3.48	3.56	0.08
$d_0$	1.72	1.70	0.02
$S_1$	-0.72	-0.67	0.05
$S_2$	3.78	3.54	-0.24
$S_3$	-3.70	-3.71	0.01
$d_1$	-2.34	-2.35	0.01
$d_2$	1.57	1.64	0.07
$S_4$	3.40	3.39	0.01
$S_5$	-0.60	-0.76	0.16
$d_3$	1.68	1.72	0.04
$d_4$	-2.25	-2.30	0.05

### 4.7.3 Plaque circulaire

Pour la plaque circulaire, 2500 cellules circulaires de rayon 9 mm sont réparties de manière uniforme sur la plaque circulaire. La source est localisée au point  $S_0$  et envoie 1000 rayons de manière isotrope. La simulation est réalisée pour 1000 réflexions. 1000 fréquences sont étudiées, réparties de manière linéaire entre 20 et 4000 Hz. La figure 4.39 présente la répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque circulaire obtenue avec l'algorithme de tir de rayons. Il existe deux différentes zones de surintensité. Sur le diamètre passant par le point source, on observe une surintensité avec un coefficient

égale à 2.7 dB. Cette surintensité résulte de l'interférence constructive entre les rayons. La deuxième surintensité est sur le cercle passant par le point source. Cette surintensité d'énergie le long de ce cercle s'explique par la propagation des rayons dans la plaque circulaire sans tenir compte de la phase des ondes. Comme le montre la figure 4.39, la répartition des rayons crée une caustique le long de laquelle l'énergie est plus élevée. Ainsi, la surintensité d'énergie sur ce cercle passant par la source est due à une focalisation géométrique des rayons et non à un phénomène d'interférence entre les rayons.

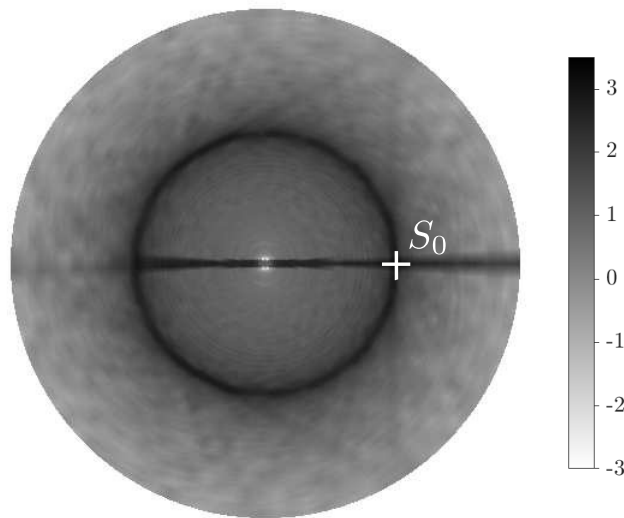


FIGURE 4.39 – Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque circulaire obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope.

#### 4.7.4 Plaque en forme de stade de Bunimovich

Pour la plaque en forme de stade de Bunimovich, 2500 cellules circulaires de rayon 9 mm sont réparties de manière uniforme sur la plaque. La source est localisée au point  $S_0$  et envoie 10000 rayons de manière isotrope. La simulation est réalisée pour 10000 réflexions. 1000 fréquences sont étudiées, réparties de manière linéaire entre 20 et 4000 Hz. La figure 4.40 présente la répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque en forme de stade obtenue avec l'algorithme de tir de rayons.

Au regard de la figure 4.40, on s'aperçoit que le champ vibratoire est parfaitement diffus et les quatre points de surintensité n'apparaissent pas malgré le grand nombre de rayons et le grand nombre de réflexions. Il est possible que les points de surintensité soient trop petits pour que les rayons se croisent parfaitement au niveau du point.

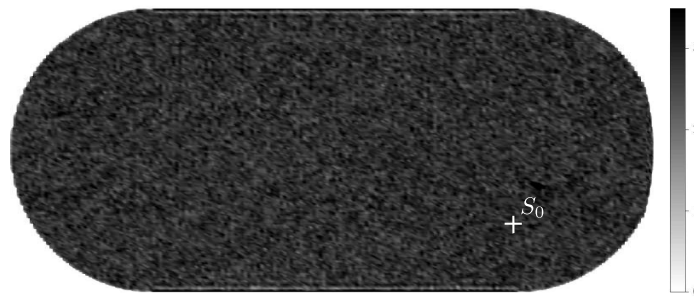


FIGURE 4.40 – Répartition de l'énergie vibratoire dans la plaque en forme de stade obtenue avec le programme de tir de rayons. L'excitation ponctuelle est localisée au niveau de la croix et émet des rayons de manière isotrope.

## 4.8 Conclusions du chapitre

Pour des systèmes symétriques excités par une force ponctuelle dans une large bande de fréquences, il existe des singularités présentant une surintensité de l'énergie vibratoire. La méthode des sources-images est utilisée pour déterminer la localisation et la valeur des facteurs de surintensité de manière analytique.

Un algorithme de tir de rayons est également mis en place. Contrairement aux algorithmes classiques de tir de rayons, celui-ci prend en compte la phase des ondes qui sont portées par les rayons. L'interférence entre les ondes n'est donc plus négligée ce qui permet de faire apparaître les lignes de surintensité.

Les conditions aux limites modifient la propagation des ondes dans les systèmes. Pour des conditions aux limites libres et encastrées, les ondes sont réfléchies avec un déphasage dépendant de l'angle d'incidence du rayon. Lorsque la frontière est simplement appuyée, le déphasage est égal à  $\pi$ . Ces déphasages peuvent conduire à des interférences destructives entre les rayons. Par exemple, pour une plaque rectangulaire avec trois bords encastrés et un bord appuyé, trois lignes de surintensité apparaissent ainsi qu'une ligne avec une réduction de l'énergie.

# 5

## Mesure des surintensités

---

### Sommaire

---

5.1	Objectifs de la campagne expérimentale . . . . .	116
5.2	Description du montage expérimental . . . . .	116
5.3	Mesure du facteur d'amortissement des plaques . . . . .	120
5.4	Protocole de mesure . . . . .	121
5.5	Résultats et analyses . . . . .	123
5.6	Conclusion . . . . .	127

---

## 5.1 Objectifs de la campagne expérimentale

Jusqu'ici, la répartition de l'énergie vibratoire dans les plaques a été déterminée de manière théorique avec la méthode des sources-images et de manière numérique avec la méthode des éléments finis et l'algorithme de tir de rayons. Les facteurs de surintensité ont été calculés numériquement et de manière analytique avec la méthode des sources-images. Dans ce chapitre, la répartition de l'énergie vibratoire est mesurée expérimentalement. Le but de ces mesures est de valider les résultats théoriques obtenus précédemment. Pour ce faire, les plaques étudiées sont excitées à l'aide d'un pot vibrant par une force de type bruit blanc aléatoire. L'énergie vibratoire est mesurée avec un vibromètre laser à balayage. La valeur et la position des surintensités ainsi que le critère de champ diffus  $\sigma$  sont mesurées.

## 5.2 Description du montage expérimental

### 5.2.1 Principe de l'expérience

Le principe de l'expérience est de mesurer la valeur RMS de l'énergie vibratoire sur l'ensemble des points répartis sur la plaque. Pour réaliser cette expérimentation un banc d'essais permettant de mesurer le champ d'énergie vibratoire d'une plaque excitée ponctuellement avec un bruit blanc aléatoire est réalisé. Le principe du banc d'essais est le suivant :

- L'excitation est un bruit blanc aléatoire localisé dans une large bande de fréquences. Le banc d'essais est équipé d'un système d'excitation permettant d'obtenir un champ vibratoire diffus.
- Le banc d'essais est instrumenté afin de pouvoir mesurer le champ d'énergie vibratoire de la plaque. La fréquence d'échantillonnage est supérieure à 20 kHz pour permettre de mesurer une fréquence maximale de 10 kHz.

La figure 5.1 présente un schéma du montage expérimental. La figure 5.2 présente une photographie du montage. La structure du banc d'essais est constituée de profilés aluminium, assurant une rigidité suffisante et un confort en termes de montage. Un pot vibrant, suspendu au cadre, excite une plaque suspendue à un cadre rigide avec des élastiques. L'excitation est ponctuelle avec un bruit blanc aléatoire. La vitesse vibratoire est mesurée sur un ensemble de points répartis sur la plaque avec le vibromètre laser. Il est ainsi possible de déterminer le champ d'énergie vibratoire sur l'ensemble de la plaque.

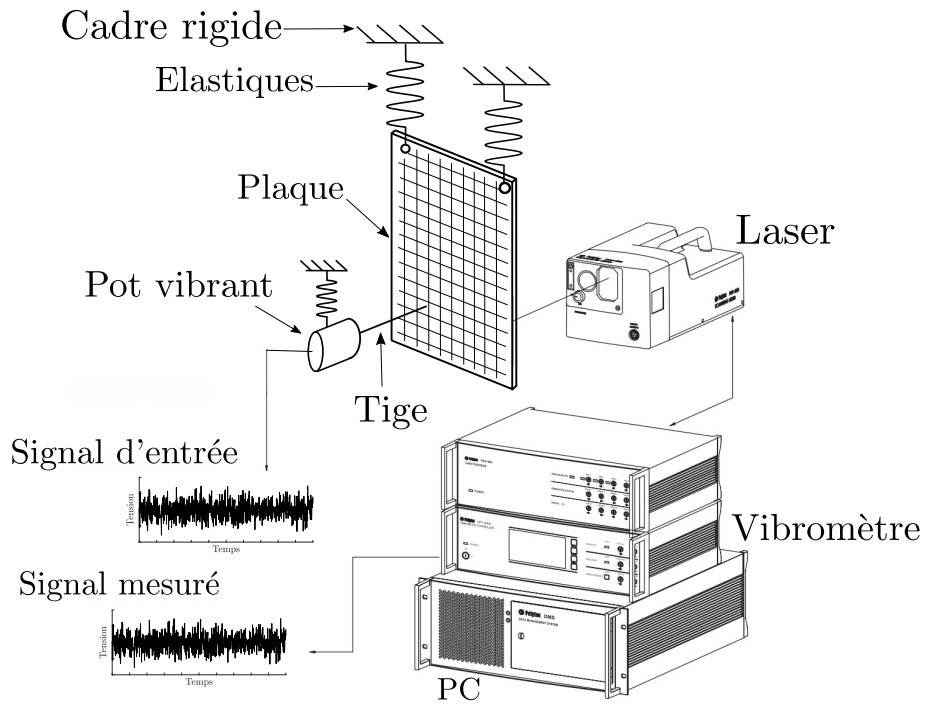


FIGURE 5.1 – Montage expérimental. La plaque est suspendue avec des élastiques au cadre rigide. Le pot vibrant excite la plaque de manière ponctuelle à travers la tige qui est collée sur la plaque. L'excitation est un bruit blanc aléatoire. La plaque est maillée et la réponse est mesurée à l'aide du vibromètre laser.

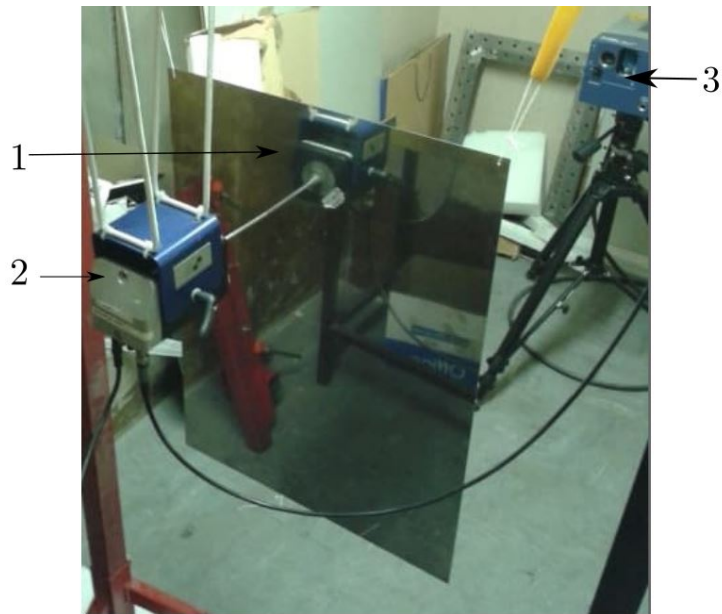


FIGURE 5.2 – Photographie du montage expérimental. La plaque (1) avec les bords libres est suspendue au cadre rigide et est excitée par le pot vibrant (2) et le champ vibratoire est mesuré avec le vibromètre laser (3).



## 5.2.2 Plaques en flexion

Les trois plaques étudiées sont une plaque rectangulaire, une plaque circulaire et une plaque en forme de stade. Les plaques sont en Inox 430 et réalisées par découpe laser. Les caractéristiques mécaniques du matériau des plaques sont présentées dans le tableau 5.1 et les dimensions des trois différentes plaques sont présentées à la figure 5.3. L'épaisseur des plaques est de 1 mm.

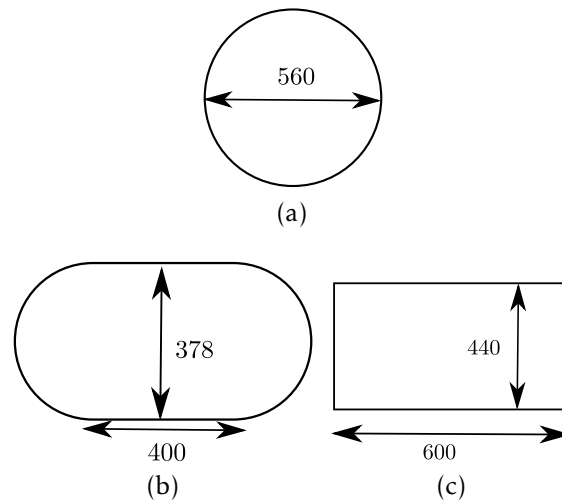


FIGURE 5.3 – Dimensions des plaques en mm. (a); Disque, (b); Stade de Bunimovich, et (c); Rectangle.

TABLE 5.1 – Caractéristiques mécaniques du matériau Inox 430

	Symbole	Valeur	Unité
Densité	$\rho$	$7,8 \cdot 10^3$	$\text{kg/m}^3$
Module d'Young	$E$	$2,1 \times 10^{11}$	$\text{N/m}^2$
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-

Deux trous d'un diamètre de 3 mm sont réalisés sur la partie supérieure de la plaque pour permettre de les suspendre avec deux élastiques sur le cadre fixe.

## 5.2.3 Chaîne d'excitation

Le pilotage de l'excitation est géré via le logiciel du vibromètre à balayage. Le signal généré est un bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquence allant de 20 à 8000 Hz avec une tension de 1 V. Un pot vibrant (PCB K2004E01) est suspendu au cadre fixe. Ce pot vibrant possède un amplificateur intégré avec un gain de 10 dB. Il peut

délivrer une force maximale de 10 N et possède une bande passante de 11 kHz ce qui est supérieur à la fréquence maximale utilisée lors de cette expérience. L'extrémité d'une tige de longueur 5 cm reliant le pot vibrant à la plaque est collée avec une colle époxy au point d'excitation. La position du pot vibrant est réglée de manière à ce qu'il applique une force parfaitement perpendiculaire à la plaque. La plaque est excitée avec bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquences allant de 10 à 8000 Hz. La tension d'entrée du pot vibrant est de 1 V.

#### **5.2.4 Chaîne de mesure**

Pour déterminer le comportement de la plaque, la réponse vibratoire est mesurée en plusieurs points avec un vibromètre laser à balayage Polytec-PSV500 ce qui permet une mesure non-intrusive. La bande passante de ce vibromètre laser est [0-50] kHz ce qui est très supérieur à la bande de fréquences utile pour cette étude. La résolution est de  $0.005 \mu\text{m/s}$ . Le principe de fonctionnement du vibromètre laser est le suivant. Le vibromètre envoie un faisceau laser qui est réfléchi par plusieurs miroirs. Le faisceau lumineux est ensuite réfléchi par le système étudié (la plaque). A cause de l'effet Doppler, la fréquence du signal réfléchi est modifiée. Le faisceau réfléchi interfère ensuite avec le signal de référence et un photodétecteur enregistre alors la valeur du déphasage entre les deux signaux. Finalement, un décodeur fournit une tension qui est proportionnelle à la vitesse vibratoire du point de mesure. L'acquisition des données est effectuée avec la carte d'acquisition Polytec et le logiciel VibSoft fournis avec le vibromètre. La vitesse vibratoire est mesurée sur l'ensemble des points précédemment définis avec le vibromètre laser à balayage. Pour chaque point, la mesure est réalisée durant 25,6 secondes avec une fréquence d'échantillonnage de 12800 Hz. 20 moyennes sont réalisées avec un taux de recouvrement de 20 %. Le fenêtrage est réalisé avec une fenêtre de Hanning. La densité spectrale de puissance de la vitesse vibratoire mesurée est réalisée avec une résolution de 6400 points. L'énergie vibratoire moyenne est calculée dans la bande de fréquences de 20 Hz à 4 kHz.

#### **5.2.5 Validation du dispositif expérimental**

Pour s'assurer que les deux trous de fixation et le collage du pot vibrant ne modifient pas le comportement dynamique de la plaque, les quatre premières fréquences propres mesurées expérimentalement avec le vibromètre laser sont comparées avec celles obtenues par simulation numérique éléments finis. Pour déterminer les fréquences propres expérimentalement, la plaque rectangulaire est excitée avec un balayage sinus d'une durée de 60 secondes entre les fréquences 10 Hz et 250 Hz. Le tableau 5.2 présente une

comparaison entre les fréquences propres expérimentales et les fréquences propres numériques. L'erreur relative entre ces deux valeurs est également calculée. L'erreur est toujours inférieure à 5 %, ce qui démontre que la présence des trous et du pot vibrant ne modifie pas de manière significative le comportement de la plaque à basse fréquence. A haute fréquence, la longueur d'onde est de 71 mm à 4 kHz, ce qui est beaucoup plus élevé que le diamètre des trous. Leur influence reste donc négligeable.

TABLE 5.2 – Comparaison entre les quatre premières fréquences propres déterminées numériquement et expérimentalement pour la plaque rectangulaire avec les bords libres.

Simulation numérique (Hz)	Expérimentale (Hz)	Erreur (%)
26.14	26.69	2.08
59.19	60.94	2.95
76.04	79.04	3.94
89.62	88.09	1.81

### 5.3 Mesure du facteur d'amortissement des plaques

Dans cette section, on souhaite vérifier que le champ vibratoire est *a priori* diffus pour les plaques étudiées. Il faut donc calculer le critère de champ diffus. Pour ce faire, on détermine le facteur d'amortissement des plaques de manière expérimentale.

Il a été montré à la section 3 que pour obtenir un champ vibratoire diffus, l'amortissement des systèmes doit être suffisamment faible. Pour prévoir la diffusivité du champ vibratoire dans la plaque, on utilise la carte fréquence-amortissement présentée à la section 3.4.3. Il est donc nécessaire de déterminer expérimentalement la valeur du facteur d'amortissement de la plaque pour la bande de fréquences étudiée. Pour ce faire, une analyse fréquentielle de la plaque rectangulaire est réalisée. La plaque est excitée avec le pot vibrant et un balayage en fréquence de 60 secondes entre les fréquences 0 et 6000 Hz est réalisé. La fonction de réponse en fréquence est déterminée avec l'estimateur  $H_1 = \frac{S_{uv}(f)}{S_{vv}(f)}$ .  $S_{uv}(f)$  est la densité inter-spectrale de puissance entre la tension d'entrée et la mesure de vitesse du vibromètre et  $S_{vv}(f)$  est la densité spectrale de puissance de la tension d'entrée. La figure 5.4 présente la fonction de réponse en fréquence de la plaque rectangulaire. Jusqu'à la fréquence de 4 kHz, les pics des résonances sont clairement discernables.

Le taux d'amortissement modal est déterminé pour 20 fréquences réparties entre 20 et 4000 Hz avec la méthode de la bande passante à -3 dB [132].

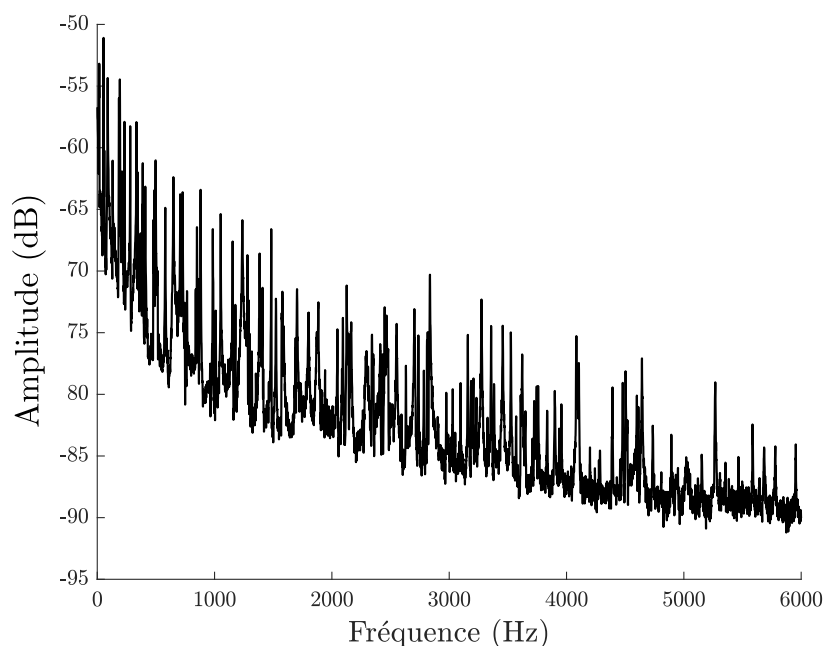


FIGURE 5.4 – Fonction de réponse en fréquence de la plaque rectangulaire. Les quatre bords de la plaque sont libres et l’excitation ponctuelle est un balayage sinus réalisé entre 0 et 6 kHz durant 60 s. La FRF est déterminé avec l’estimateur  $H_1$  .

La figure 5.5 présente l’évolution du taux d’amortissement dans la plaque rectangulaire en fonction de la fréquence. Le taux d’amortissement diminue rapidement jusqu’à 600 Hz puis il atteint une valeur stable et égale à 0.001 entre 600 et 4000 Hz. Le facteur d’amortissement est égal au double de la valeur du taux d’amortissement et donc  $\eta = 0.002$  entre 600 et 4000 Hz.

Dans la carte amortissement-fréquence, la plaque rectangulaire étudiée se situe au point C tel que présenté à la figure 5.6. Le facteur d’amortissement est égal à 0.002 et la fréquence d’excitation est comprise entre 20 et 4000 Hz. Le critère de champ diffus  $\sigma$  est inférieur à 0.6 et donc le champ vibratoire peut *a priori* être considéré comme diffus.

## 5.4 Protocole de mesure

### 5.4.1 Réglage du vibromètre laser

Les étapes à réaliser (présentées dans le manuel technique du vibromètre laser) pour mesurer le champ vibratoire d’une surface sont les suivantes :

- Premièrement, le champ de vision de la caméra du vibromètre laser doit couvrir l’intégralité de la surface mesurée et l’axe longitudinal de la tête de balayage doit

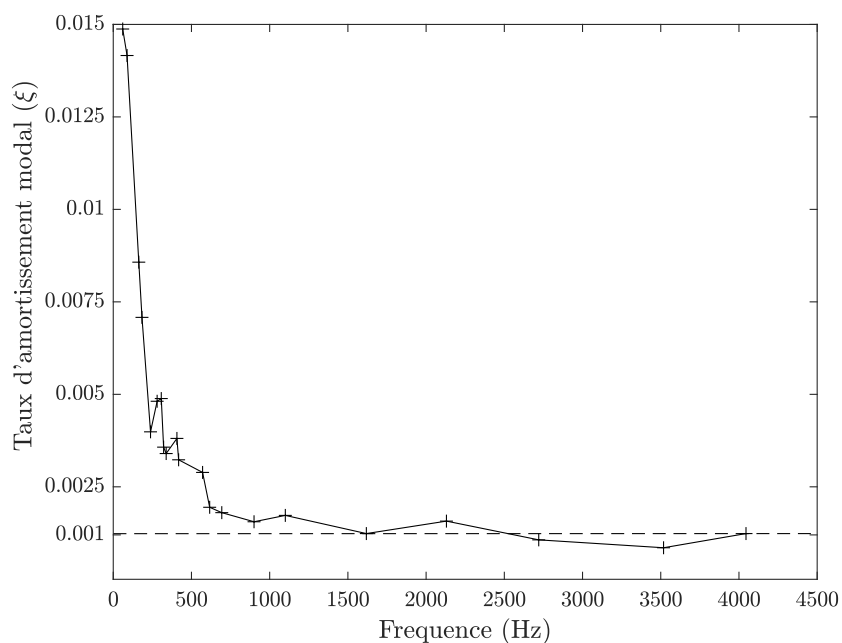


FIGURE 5.5 – Évolution du taux d’amortissement en fonction de la fréquence pour la plaque rectangulaire. Le taux d’amortissement est mesuré avec la méthode de la bande passante à -3 dB. Les quatre bords de la plaque sont libres. Au-delà de 600 Hz, le taux d’amortissement se stabilise autour de 0,001.

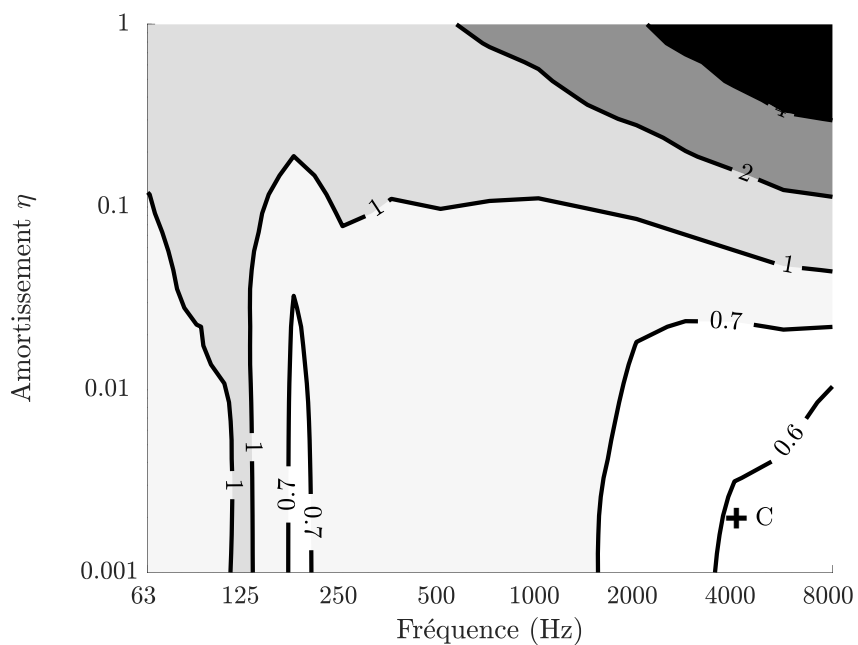


FIGURE 5.6 – Localisation de la plaque rectangulaire dans le plan fréquence/amortissement. La plaque rectangulaire se situe au point C dans la zone de champ diffus.

être positionné perpendiculairement par rapport à la surface à balayer. La sonde doit ainsi pouvoir balayer l'ensemble de la surface en fonction du maillage qui est défini sur le logiciel. Pour obtenir une mesure correcte, le retour optique, c'est à dire l'intensité du signal réfléchi doit également être suffisant. Le dernier réglage optique à effectuer concerne la focalisation du laser à la surface de l'objet. Plusieurs focalisations sont effectuées en différents points de l'objet pour optimiser le retour optique en tout point de la plaque.

- Deuxièmement, il est nécessaire de délimiter la surface à étudier et de réaliser un alignement 2D de la plaque. Pour ce faire, on définit cinq points dans le plan de la plaque. Une fois l'alignement réalisé, il faut définir le maillage. Ce maillage est similaire à un maillage éléments finis. Il est possible de réaliser un maillage avec une forme simple prédéfinie dans le logiciel, tel qu'un rectangle, un cercle ou une ellipse. Il faut ensuite définir la distance entre les points de mesure. Un plus grand nombre de points améliore la précision de la mesure mais en contrepartie le temps de mesure totale est augmenté. Le vibromètre laser à balayage effectue alors une mesure vibratoire en chaque point du maillage.
- Finalement, il faut choisir les paramètres du signal d'entrée. Il est possible de déterminer choisir le mode *fast scan* qui mesure la déformée propre de la structure à une seule fréquence ou la cartographie du champ vibratoire pour une bande de fréquences donnée.

### 5.4.2 Maillage des plaques

A partir du logiciel PSV, les plaques sont maillées pour définir les points de mesure. Tel que présenté à la figure 5.7, la plaque rectangulaire est maillée avec 425 points, la plaque circulaire avec 2400 points et la plaque en forme de stade avec 1236 points. Le vibromètre laser mesure ainsi la vitesse de chacun des points les uns après les autres.

## 5.5 Résultats et analyses

A partir des signaux temporels de la vitesse, l'espérance de la densité d'énergie est calculée en tout point  $(x, y)$  des plaques. L'espérance de la densité d'énergie vibratoire est le double de la densité d'énergie cinétique  $m\dot{u}^2(x, y, t)$ ,

$$\langle e(x, y, t) \rangle = m \langle \dot{u}^2(x, y, t) \rangle \quad (5.1)$$

Le terme  $\langle \dot{u}^2 \rangle$  est la fonction d'autocorrélation  $R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau)$  de la vitesse vibratoire prise à

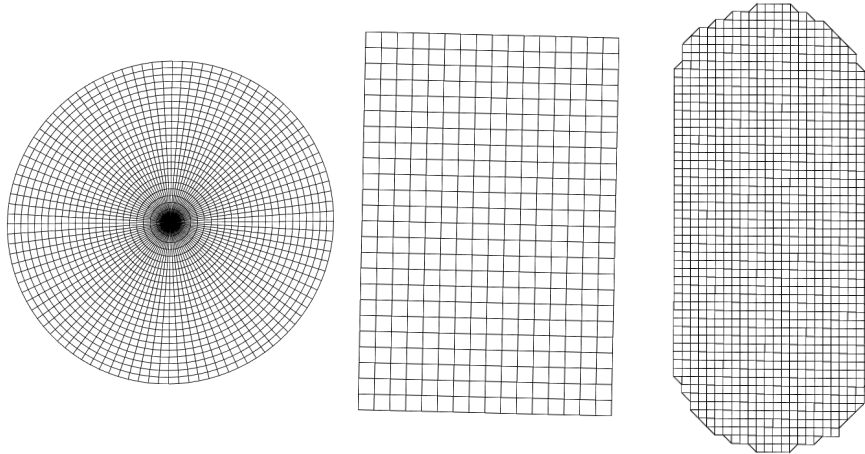


FIGURE 5.7 – Maillage de la plaque circulaire, de la plaque rectangulaire et de la plaque en forme de stade réalisée avec le logiciel Polytec.

$\tau = 0$ . Avec le théorème de Wiener-Khinchin, il vient [93]

$$\langle \dot{u}^2(x, y, t) \rangle = R_{\dot{u}\dot{u}}(\tau = 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta\omega} S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega) d\omega \quad (5.2)$$

avec  $S_{\dot{u}\dot{u}}(\omega)$  la densité spectrale de puissance de la vitesse  $\dot{u}$ .

Une des méthodes pour déterminer la valeur des énergies locales est de déterminer la valeur RMS de la vitesse vibratoire mesurée avec le vibromètre. A partir de l'équation (5.1), il est alors possible de connaître la valeur des énergies locales en tout point.

Toutefois, dans cette étude, le logiciel du vibromètre fournit les densités spectrales de puissance. La figure 5.8 présente une densité spectrale de puissance typique mesurée pour un point de la plaque rectangulaire.

L'énergie vibratoire est calculée à partir de la densité spectrale de puissance mesurée pour l'ensemble des points. La figure 5.9 présente la distribution de l'énergie vibratoire dans les trois plaques en dB. Pour chaque figure, la croix représente le point d'excitation.

Pour la plaque rectangulaire présentée à la figure 5.9a, le champ de l'énergie vibratoire est globalement diffus. Les quatre lignes et les quatre points de surintensité sont clairement identifiables. Pour la plaque en forme de stade, présentée à la figure 5.9b, le champ vibratoire est également diffus et les quatre points de surintensité apparaissent clairement de manière symétrique par rapport à l'excitation. Dans le cas de la plaque circulaire, présentée à la figure 5.9c, il existe une surintensité sur le cercle concentrique à la plaque et passant par le point d'excitation. Comme expliqué dans le chapitre 3, cette surintensité s'explique par une plus grande concentration des rayons le long de ce cercle. Il existe également une surintensité sur le diamètre passant par le point d'excitation. Cette surintensité est causée par l'interférence constructive entre

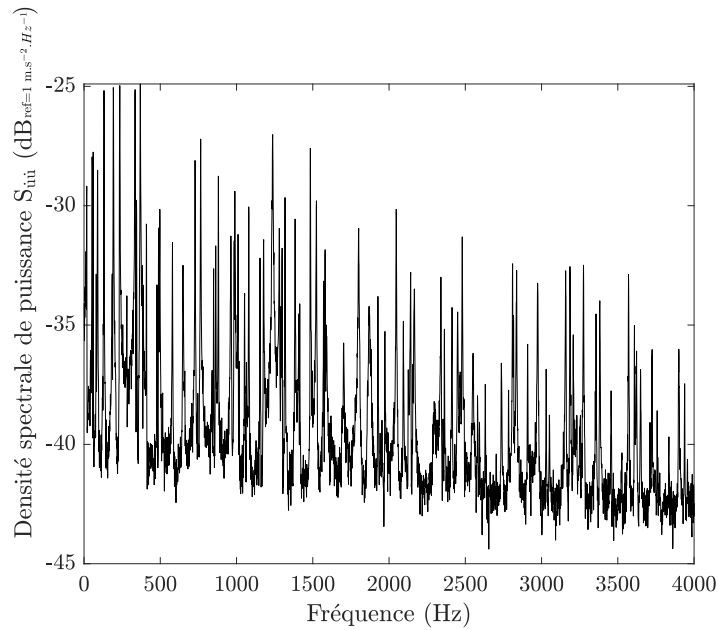


FIGURE 5.8 – Densité spectrale de puissance de la vitesse ( $S_{uu}$ ) mesurée avec le vibromètre laser pour la plaque rectangulaire avec les bords libres et excitée avec un bruit blanc aléatoire.

les rayons.

### 5.5.1 Mesure des facteurs de surintensité

À partir de ces résultats expérimentaux, il est possible de calculer les facteurs de surintensité. La méthodologie employée pour mesurer les facteurs de surintensité est détaillée pour chaque plaque. Dans un premier temps, l'énergie vibratoire moyenne du "fond" de la plaque est mesurée en moyennant la valeur de l'énergie vibratoire pour 30 points.

- Dans le cas de la plaque rectangulaire, l'énergie vibratoire sur les quatre points à l'intersection des lignes est mesurée puis la moyenne est calculée. Pour les quatre lignes, l'énergie vibratoire est mesurée sur l'ensemble des points des quatre lignes et la moyenne est calculée. Les incertitudes sont estimées avec le calcul de l'écart-type.
- Pour la plaque en forme de stade, l'énergie vibratoire est mesurée aux quatre points de surintensité et la moyenne est calculée.
- Pour la plaque circulaire, l'énergie vibratoire est mesurée pour l'ensemble des points formant le diamètre et la moyenne est calculée.

Finalement, pour obtenir les facteurs de surintensité, la valeur de l'énergie vibratoire est ensuite divisée par l'énergie vibratoire moyenne du "fond" de la plaque. Les valeurs



des incertitudes sont également calculées avec l'écart-type.

Le tableau 5.3 présente une comparaison entre les facteurs de surintensité déterminés de manière expérimentale avec les incertitudes et les valeurs théoriques pour les trois plaques. Dans le cas du rectangle, la ligne ( $S_i$ ) désigne la surintensité sur les quatre points tandis que la ligne ( $d_i$ ) désigne la surintensité sur les quatre lignes.

TABLE 5.3 – Comparaison entre les facteurs de surintensité déterminées expérimentalement et de manière théorique pour les trois plaques. Les incertitudes sont estimées avec l'écart-type.

	Théorique (dB)	Expérimentale (dB)	Erreur (dB)
Rectangle ( $S_i$ )	3.52	$3.54 \pm 0.2$	0.02
Rectangle ( $d_i$ )	1.76	$1.52 \pm 0.2$	0.24
Stade	3.01	$2.7 \pm 0.1$	0.31
Cercle	3.01	$2.9 \pm 0.6$	0.11

L'erreur maximale est de 0.31 dB pour les facteurs de surintensité. Les valeurs expérimentales sont presque toujours inférieures aux valeurs déterminées théoriquement. Ceci peut s'expliquer par l'amortissement ajouté par les supports élastiques utilisés pour suspendre les plaques. Néanmoins, les résultats expérimentaux sont assez proches des valeurs déterminées théoriquement. Ces résultats confirment donc les résultats théoriques. La méthode des sources-images et l'algorithme de tir de rayons permettent donc bien de déterminer la position et les valeurs des facteurs de surintensité.

### 5.5.2 Mesure de critère de champ diffus

Afin de valider la diffusivité du champ vibratoire dans les plaques, le critère de champ diffus  $\sigma$  est calculé. Pour rappel le critère de champ diffus  $\sigma$  est défini comme étant le ratio de l'écart-type de l'énergie locale  $e$  normalisé par la moyenne, tel que

$$\sigma = \frac{1}{S} \int_S \frac{\sqrt{(e(x, y) - \bar{e})^2}}{\bar{e}} dS. \quad (5.3)$$

Lorsque  $\sigma$  tend vers 0, l'ensemble des points de la plaque ont des énergies voisines et l'énergie locale est uniformément distribuée. Au contraire si  $\sigma$  est grand, l'énergie locale varie fortement sur l'ensemble de plaque. Le critère de champ diffus a été défini tel que  $\sigma < 0.7$ . Le tableau 5.4 présente une comparaison de la valeur du critère  $\sigma$  obtenue expérimentalement et de manière numérique avec la méthode des éléments finis pour les trois plaques ainsi que la validité du champ diffus.

TABLE 5.4 – Comparaison du critère de champ diffus  $\sigma$  mesuré expérimentalement et calculé de manière numérique pour les trois plaques.

	$\sigma_{\text{exp}}$	$\sigma_{\text{num}}$	Champ diffus
Rectangle	0.49	0.39	✓
Stade	0.38	0.31	✓
Cercle	1.51	1.1	✗

Le critère de champ diffus est donc respecté pour la plaque rectangulaire et en forme de stade mais pas pour la plaque circulaire. Ces résultats confirment les résultats obtenus numériquement.

## 5.6 Conclusion

Le dispositif expérimental mis en œuvre a permis de mesurer le champ vibratoire dans les trois plaques. Le montage expérimental a été validé en comparant les fréquences mesurées expérimentalement aux fréquences propres déterminées numériquement.

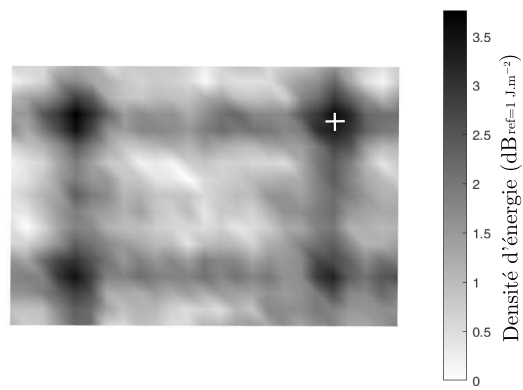
L'amortissement est déterminé avec la méthode de la bande passante à -3dB. Dans la bande de fréquences [20-4000 Hz], le critère de champ diffus est inférieur à 0.6 ce qui indique un champ vibratoire théoriquement diffus.

Expérimentalement le champ vibratoire est mesuré pour les trois plaques.

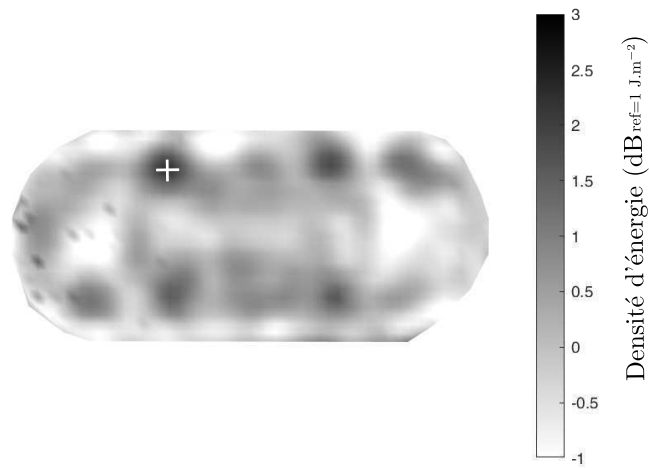
- Pour la plaque rectangulaire, les quatre lignes et les quatre points de surintensité apparaissent clairement et le facteur de surintensité est très proche des valeurs théoriques
- Pour la plaque en forme de stade, le champ vibratoire est globalement diffus excepté sur les quatre points symétriques par rapport à la source d'excitation. Sur ces quatre points, les facteurs de surintensité mesurés sont égales à 2.7 ce qui est proche de la valeur théorique.
- Pour la plaque circulaire, les surintensités sur le cercle et le diamètre passant par le point d'excitation apparaissent clairement. Le facteur de surintensité sur le diamètre est de 2.9 ce qui est proche de la valeur théorique.

Les critères de champ diffus ont également pu être calculés à partir des mesures. Ces résultats confirment que le champ vibratoire est :

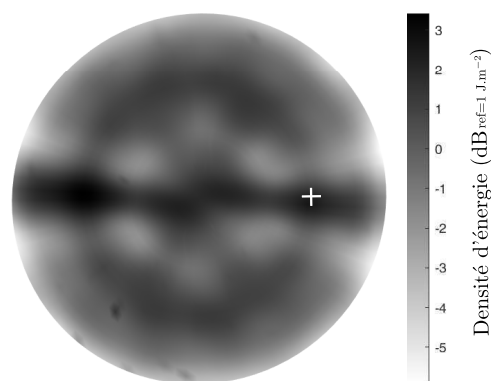
- diffus pour la plaque rectangulaire et la plaque en forme de stade,
- non diffus pour la plaque circulaire.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.9 – Résultats expérimentaux de la répartition de l'énergie vibratoire (dB) pour les trois plaques. L'excitation est une force ponctuelle de type bruit blanc aléatoire dans la bande de fréquences [20-4000] Hz localisée au niveau de la croix et  $\eta = 0.002$ . Les conditions aux limites pour les trois plaques sont libres.

# 6

## Calcul du coefficient de couplage pour un champ vibratoire non-diffus

---

### Sommaire

---

6.1	Introduction . . . . .	130
6.2	Détermination numérique du coefficient de couplage pour deux plaques couplées . . . . .	130
6.3	Présentation des systèmes et méthodologie . . . . .	133
6.4	Validation du coefficient de couplage en champ non-diffus . . . . .	136
6.5	Interprétation physique . . . . .	143
6.6	Conclusion . . . . .	145

---

## 6.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre deux que la relation de *coupling power proportionality* est valide quand le champ vibratoire est parfaitement diffus dans chaque sous-système. Or, nous avons montré au chapitre trois que lorsque l'amortissement est fort, le champ direct est prédominant et le champ n'est pas diffus (même à haute fréquence). De plus, lorsque le système n'est pas ergodique (plaque circulaire) le champ n'est pas diffus à cause de la propagation des rayons. Par ailleurs, même lorsque les conditions de champ diffus sont respectées, des surintensités peuvent apparaître localement. Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la *coupling power proportionality* dans le cas de champs non diffus localement (zones de surintensités) ou globalement (amortissement fort ou système non ergodique). Les investigations menées dans ce chapitre sont numériques. Une vérification expérimentale sera présentée au chapitre sept.

Dans la première partie, la *coupling power proportionality* est exprimée en prenant en compte l'énergie locale et non plus globale. Par la suite, le coefficient de couplage est calculé pour deux plaques (rectangulaire, circulaire ou stade) couplées entre elles. La position du point de couplage est fixée successivement sur les zones de champ diffus puis sur les zones présentant des zones de surintensité. Le coefficient de couplage déterminé numériquement est finalement comparé au coefficient de couplage théorique.

## 6.2 Détermination numérique du coefficient de couplage pour deux plaques couplées

Dans cette section, quatre simulations numériques sont présentées afin de prouver la validité du coefficient de couplage même si le champ vibratoire n'est pas diffus. La formulation du coefficient de couplage prend désormais une formulation locale en utilisant les énergies locales et non plus globales. Pour chaque simulation, deux plaques identiques sont couplées par un ressort et le coefficient de couplage est calculé de manière numérique et de manière théorique.

### 6.2.1 Fonctions de transfert des plaques couplées

On considère deux plaques notées 1 et 2 et couplées par un ressort de raideur  $K$  fixé au point  $\mathbf{r}_{12}$  sur la plaque 1 et  $\mathbf{r}_{21}$  sur la plaque 2 tel que présenté à la figure 6.1.  $w_1$  et  $w_2$  désignent le déplacement vibratoire des plaques 1 et 2 au point  $\mathbf{r}$ . La plaque est excitée

avec une somme de processus stochastiques  $f_i(x, y, t)$

$$f_i(x, y, t) = \sum_{i=1}^N F_i(t) \delta(x - x_i) \delta(y - y_i) \quad (6.1)$$

avec  $F_i$  des fonctions aléatoires dont la densité spectrale de puissance est supposée constante dans toutes la bande de fréquences  $\Delta\omega$  et nulle ailleurs. Les équations du mouvement des plaques sont

$$D\nabla^4 w_1(\mathbf{r}, t) + \lambda \frac{\partial w_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{s}, t) + K(w_2(\mathbf{r}_{21}, t) - w_1(\mathbf{r}_{12}, t)); \quad (6.2)$$

pour la plaque 1 et

$$D\nabla^4 w_1(\mathbf{r}, t) + \lambda \frac{\partial w_1}{\partial t}(\mathbf{r}, t) + m \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t) = K(w_1(\mathbf{r}_{12}, t) - w_2(\mathbf{r}_{21}, t)); \quad (6.3)$$

pour la plaque 2. On note  $G_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$  et  $G_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}, \omega)$  les fonctions de réponse en fréquence (FRF) du système couplé pour un récepteur placé en  $\mathbf{r}$  sur la plaque 1 et 2 et une force ponctuelle placée en  $\mathbf{s}$  sur la plaque 1. Pour calculer ces fonctions de transfert du système couplé, on utilise les fonctions de transfert du système découplé. Dans ce cas, pour la plaque 1, la fonction de transfert sur la plaque 1 seule est

$$H_1(\mathbf{r}; \mathbf{s}; \omega) = \sum_{n>0} \frac{\Psi_n^1(\mathbf{s}) \Psi_n^1(\mathbf{r})}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2 + j\eta_1 \omega_n \omega)} \quad (6.4)$$

$\eta_1$  désigne le facteur d'amortissement et  $\Psi_n^1$  désigne la  $n_i^{\text{ème}}$  déformée propre de la plaque 1 découplée. Dans cette fonction de transfert, le point  $\mathbf{s}$  désigne soit le point où est appliquée la sollicitation extérieure soit le point de couplage du ressort ( $\mathbf{r}_{12}$ ). On obtient alors les fonctions de transfert du système couplé

$$\begin{aligned} G_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}; \omega) &= H_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{s}; \omega) + K(w_2(\mathbf{s}) - w_1(\mathbf{s}))H_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_{12}; \omega), \\ G_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{21}; \omega) &= -K(w_2(\mathbf{s}) - w_1(\mathbf{s}))H_2(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_{21}; \omega). \end{aligned} \quad (6.5)$$

La fonction de transfert  $G_1$  est la somme de la fonction de transfert de la plaque 1 entre le point récepteur  $\mathbf{r}$  et le point d'excitation  $\mathbf{s}$  et la fonction de transfert entre le point récepteur  $\mathbf{r}$  et le point de couplage  $\mathbf{r}_{12}$  qui agit comme une source d'excitation. La fonction de transfert  $G_1$  est la fonction de transfert entre le point récepteur de la plaque 2 et le point de couplage  $\mathbf{r}_{21}$  qui est le point d'excitation de la plaque 2. Afin de calculer ces deux fonctions de transfert, il est nécessaire de déterminer les inconnues

$w_2(\mathbf{r}_{21})$  et  $w_1(\mathbf{r}_{12})$ . En choisissant  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{12}$  pour  $G_1$  et  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{21}$  pour  $G_2$  on obtient,

$$\begin{aligned} w_1(\mathbf{r}_{12}) &= G_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{s}; \omega); \\ w_2(\mathbf{r}_{21}) &= G_2(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{21}; \omega). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Les deux déplacements  $w_1$  et  $w_2$  sont obtenus en substituant  $\mathbf{r}_1$  par  $\mathbf{r}_{12}$  et  $\mathbf{r}_2$  par  $\mathbf{r}_{21}$  dans l'équation (6.5),

$$\begin{bmatrix} 1 + KH_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}; \omega) & -KH_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{r}_{12}; \omega) \\ -KH_2(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{21}; \omega) & 1 + KH_2(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{r}_{21}; \omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{s}; \omega) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Finalement les FRF  $G_1$  et  $G_2$  sont obtenues pour chaque point récepteur en appliquant l'équation (6.5) avec les termes  $w_1$  et  $w_2$  déterminés par l'équation (6.7).

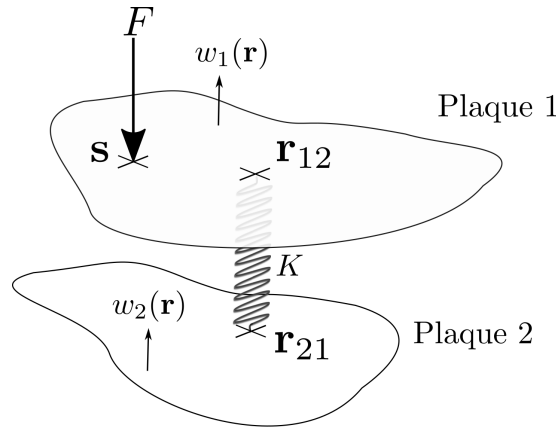


FIGURE 6.1 – Deux plaques couplées avec un ressort de raideur  $K$  au point  $\mathbf{r}_{12}$  sur la plaque 1 et au point  $\mathbf{r}_{21}$  sur la plaque 2. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $\mathbf{s}$ .

## 6.2.2 Énergies locales

Les énergies locales des plaques se calculent à partir des fonctions de transfert du système couplé et de la densité spectrale de puissance  $S_i$ . L'expression de l'énergie locale  $\langle e \rangle(\mathbf{r}, \omega_c)$  pour la plaque 1 est

$$\langle e_1 \rangle(\mathbf{r}, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{mS_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G_1(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega)|^2 d\omega \quad (6.8)$$

et

$$\langle e_2 \rangle(\mathbf{r}, \omega_c) = \sum_{i=1}^N \frac{mS_i}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 |G_2(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \omega)|^2 d\omega \quad (6.9)$$

pour la plaque 2.

### 6.2.3 Puissance échangée

L'espérance de la puissance échangée entre la plaque 1 et la plaque 2 est

$$P_{12} = \frac{1}{2}K \langle w_1(\mathbf{r}_{12})\dot{w}_2(\mathbf{r}_{21}) \rangle . \quad (6.10)$$

avec les fonctions de transfert du système couplé,

$$P_{12} = \frac{KS_0}{\pi} \int_{\Delta\omega} Re[j\omega \overline{G_1}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{s}; \omega) G_2(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{s}; \omega)] d\omega \quad (6.11)$$

avec  $Re$  la partie réelle,  $\overline{\phantom{x}}$  désigne le complexe conjugué et  $j$  l'unité imaginaire.

### 6.2.4 Coefficient de couplage

Le coefficient de couplage est calculé de manière numérique avec les expressions des énergies locales et de la puissance échangée.

$$\beta_{12}^{num} = \frac{P_{12}}{\frac{e_1(\mathbf{r}_{12})A_1}{n_1} - \frac{e_2(\mathbf{r}_{21})A_2}{n_2}} . \quad (6.12)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  les surfaces des plaques 1 et 2 et  $n_1$  et  $n_2$  les densités modales telles que

$$n_i = \frac{A_i\omega}{2\pi c_{p_i} c_{g_i}} \quad (6.13)$$

avec  $c_{g_i}$  et  $c_{p_i}$  les vitesses de phase et les vitesses de groupe.

## 6.3 Présentation des systèmes et méthodologie

Le modèle numérique est constitué de deux plaques de même géométrie couplées entre elles par un ressort de couplage. Quatre simulations sont réalisées et présentées par la suite.

### 6.3.1 Paramètres des simulations numériques

Pour les quatre simulations, la plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire  $F(t)$  avec une densité spectrale de puissance  $S_0$  constante dans la bande de fréquences  $\Delta\omega = [\omega_{min}; \omega_{max}]$  centrée sur la fréquence centrale  $\omega_c = 4$  kHz. Le ressort de couplage a une raideur de  $1.10^5$  N.m<sup>-1</sup> et est fixé au centre de la plaque 2. Sur la plaque 1, le ressort



est successivement fixé sur différents points où le champ vibratoire est diffus ou non. Les différents points d’attaches sont développés par la suite pour chaque simulation. Pour s’assurer que l’hypothèse de couplage faible est bien respectée, une validation de la raideur du ressort de couplage entre les deux plaques est présentée.

### 6.3.2 Validation de l’hypothèse de couplage faible

On commence par s’assurer que l’hypothèse de couplage faible est bien respectée. On considère deux plaques rectangulaires, tel que présenté à la figure 6.2, couplées entre elles avec un ressort de raideur  $K$  au point  $\mathbf{r}_{12}$  sur la plaque 1 et au point  $\mathbf{r}_{21}$  sur la plaque 2. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $\mathbf{s}$ . Le coefficient de couplage  $\beta_{12}^{\text{num}}$  est calculée pour différentes valeurs de raideur du ressort de couplage. La méthodologie employée pour calculer numériquement  $\beta_{12}^{\text{num}}$  est présentée à la section 6.2.4. L’énergie vibratoire est calculée pour 10000 points récepteurs sur chaque plaque. Une comparaison est ensuite réalisée avec la valeur théorique du coefficient de couplage déterminée avec la relation [75]

$$\beta_{12}^{\text{th}} = \frac{K^2}{32\pi\omega_c^2\sqrt{m_1m_2D_1D_2}}. \quad (6.14)$$

Les paramètres de la simulation numérique sont présentés dans le tableau 6.1.

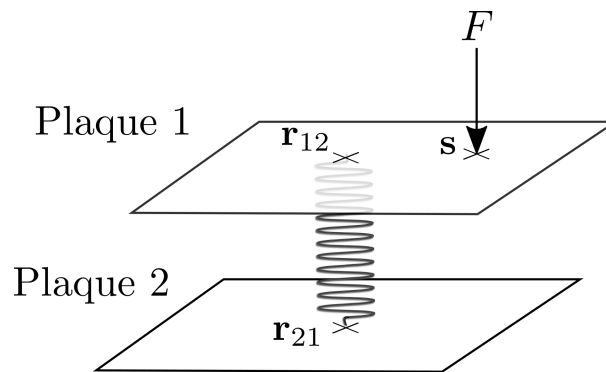


FIGURE 6.2 – Deux plaques rectangulaires couplées entre elles avec un ressort de raideur  $K$  au point  $\mathbf{r}_{12}$  sur la plaque 1 et au point  $\mathbf{r}_{21}$  sur la plaque 2. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $\mathbf{s}$ .

La plaque 1 est excitée avec une force ponctuelle constituée d’un bruit blanc aléatoire dans la bande d’octave centrée sur 4 kHz avec une densité spectrale de puissance constante. La raideur du ressort de couplage varie entre  $1.10^3$  et  $1.10^8\text{N.m}^{-1}$ . La figure 6.3 présente l’évolution du coefficient de couplage en fonction de la valeur de la raideur. Lorsque la raideur est faible (couplage faible) les coefficients de couplage

TABLE 6.1 – Paramètres des deux plaques rectangulaires couplées. Le centre du référentiel est situé au centre de la plaque.

Type	Symbole	Valeur	Unité
Dimensions	$L_x \times L_y$	$0.6 \times 0.44$	$\text{m}^2$
Épaisseur	$h$	2	mm
Amortissement	$\eta$	$1.10^{-3}$	-
Densité	$\rho$	7800	$\text{kg.m}^{-3}$
Module d'Young	$E$	2.1E11	$\text{N.m}^{-2}$
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
Point d'attache plaque 1	$\mathbf{r}_{12}$	0.2 ; 0.2	m
Point d'attache plaque 2	$\mathbf{r}_{21}$	0.3 ; 0.22	m

théorique et numérique sont très proches. Dans la zone de couplage fort, lorsque la raideur est supérieure à  $1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ , les deux courbes se séparent. La différence entre  $\beta_{12}^{\text{num}}$  et  $\beta_{12}^{\text{th}}$  atteint alors plusieurs dizaines de décibels. Ainsi lorsque la valeur de la raideur de couplage est inférieure à  $1.10^6 \text{ N.m}^{-1}$ , le coefficient de couplage est bien similaire à la valeur théorique prédite par la SEA et donc l'hypothèse de couplage faible est bien respectée. La valeur choisie lors de ce travail pour  $K$  de  $1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$  respecte donc bien l'hypothèse de couplage faible.

Étant donnée l'hypothèse de couplage faible entre les deux plaques, l'énergie vibratoire transmise de la plaque 1 vers la plaque 2 est relativement faible et donc  $e_2^{\text{num}} \ll e_1^{\text{num}}$ . Les densités modales et les surfaces étant les mêmes, il vient

$$\frac{e_1^{\text{num}}(\mathbf{r}_{12})A_1}{n_1} - \frac{e_2^{\text{num}}(\mathbf{r}_{21})A_2}{n_2} \approx \frac{e_1^{\text{num}}(\mathbf{r}_{12})A_1}{n_1}. \quad (6.15)$$

Pour vérifier cette hypothèse, le ratio entre l'énergie de la plaque 1 et l'énergie de la plaque 2 est calculé en fonction de la raideur du ressort de couplage et présenté à la figure 6.4.

On constate que lorsque le couplage est faible ( $K < 1.10^5 \text{ N.m}^{-1}$ ), ce qui est le cas pour cette étude, l'énergie de la plaque 2 est négligeable devant l'énergie de la plaque 1. Passé cette valeur de  $K$ , le rapport entre les énergies augmente rapidement et l'énergie de la plaque 2 n'est plus négligeable.

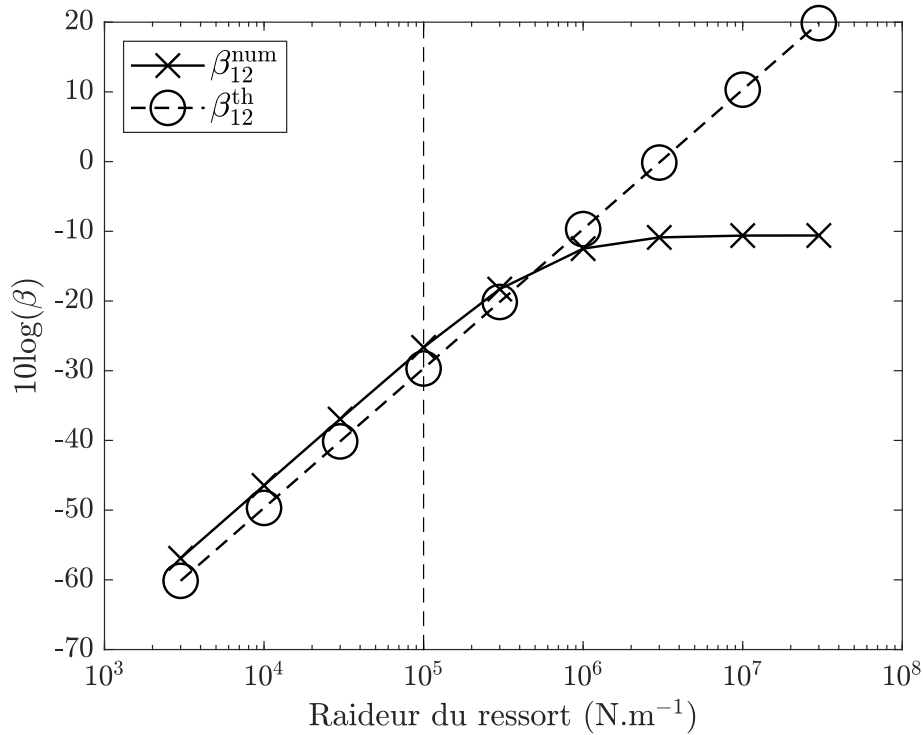


FIGURE 6.3 – Évolution du coefficient de couplage  $\beta_{12}^{th}$  et  $\beta_{12}^{num}$  en fonction de la raideur du coefficient de couplage  $K$

## 6.4 Validation du coefficient de couplage en champ non-diffus

### 6.4.1 Plaques rectangulaires avec un faible amortissement

La simulation numérique avec les deux plaques rectangulaires couplées est présentée dans les trois figures 6.5a, 6.5b, et 6.5c. Les quatre lignes avec un facteur de surintensité égale à 3/2 ( $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$ , et  $\mathbf{d}_4$ ) sont représentées avec les lignes en pointillés et les quatre points avec un facteur de surintensité de 9/4 ( $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{s}_3$ , et  $\mathbf{s}_4$ ) sont représentés avec une croix. Les paramètres de la simulation sont présentés dans le tableau 6.2.

La puissance échangée, les énergies locales, et le coefficient de couplage sont calculés pour les trois cas présentés ci-dessous. Chaque cas représente une position d'attache du ressort sur la plaque 1 différente. La figure 6.6a présente l'évolution de la différence des énergies locales et de la puissance échangée en fonction du point de couplage du ressort.

- Dans un premier temps, le ressort est successivement attaché sur les cinq points où le champ vibratoire est diffus, soit en dehors des lignes de surintensité tel que

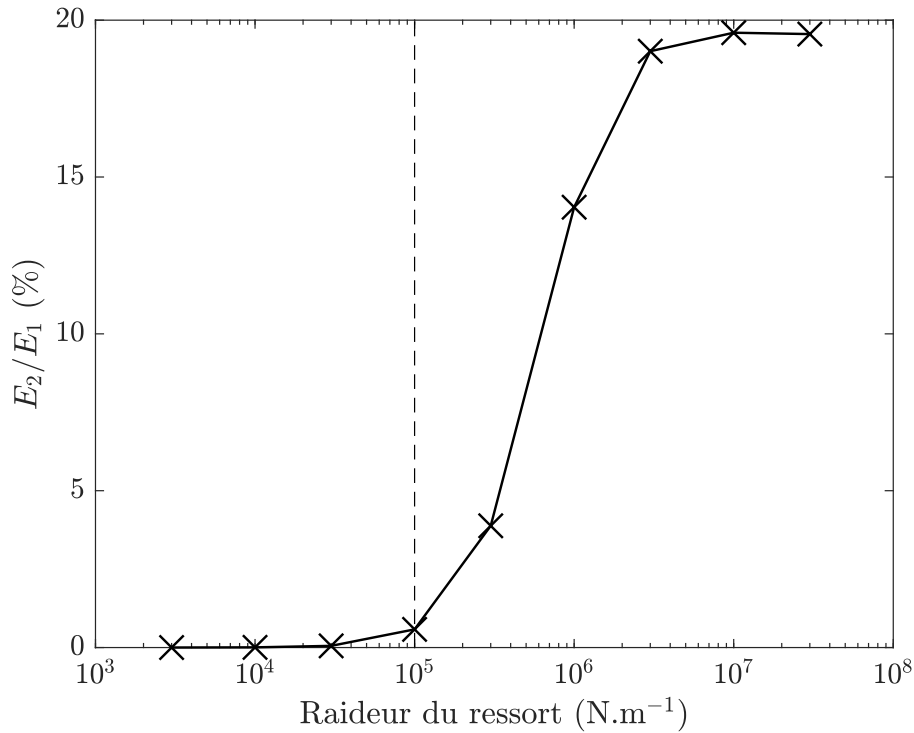


FIGURE 6.4 – Évolution du ratio  $E_1/E_2$  en fonction de la raideur du coefficient de couplage  $K$ .

TABLE 6.2 – Paramètres des deux plaques rectangulaires.

Type	Symbole	Valeur	Unité
Dimensions	$L_x \times L_y$	$0.6 \times 0.44$	m <sup>2</sup>
Épaisseur	$h$	2	mm
Amortissement	$\eta$	$1.10^{-3}$	-
Densité	$\rho$	7800	kg.m <sup>-3</sup>
Module d'Young	$E$	2.1E11	N.m <sup>-2</sup>
Coefficient de Poisson	$\nu$	0.3	-
Point d'attache plaque 2	$\mathbf{r}_{21}$	0.3; 0.22	m

présenté sur la figure 6.5c. Cela correspond aux positions 1 à 5 sur la figure 6.6a.

- Dans un second temps, le ressort est successivement fixé sur un point localisé sur une ligne avec une surintensité d'énergie égale à  $3/2$  ( $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$ , et  $\mathbf{d}_4$ ) tel que présenté à la figure 6.5b. Cela correspond aux points  $\mathbf{d}_1$ ,  $\mathbf{d}_2$ ,  $\mathbf{d}_3$ , et  $\mathbf{d}_4$  sur la figure 6.6a.
- Finalement, le ressort est successivement fixé sur un point à l'intersection des quatre lignes avec une surintensité d'énergie égale à  $9/4$  ( $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{s}_3$ , et  $\mathbf{s}_4$ ). Cela correspond aux points  $\mathbf{s}_1$ ,  $\mathbf{s}_2$ ,  $\mathbf{s}_3$ , et  $\mathbf{s}_4$  sur la figure 6.6a.

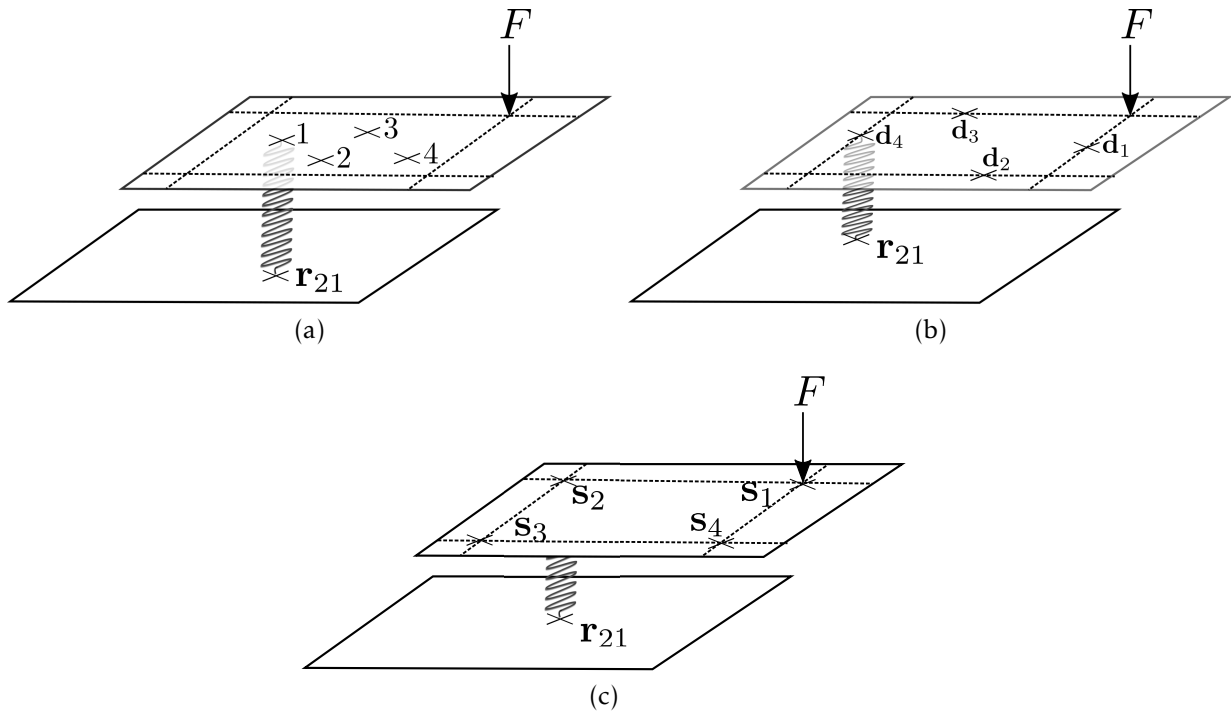
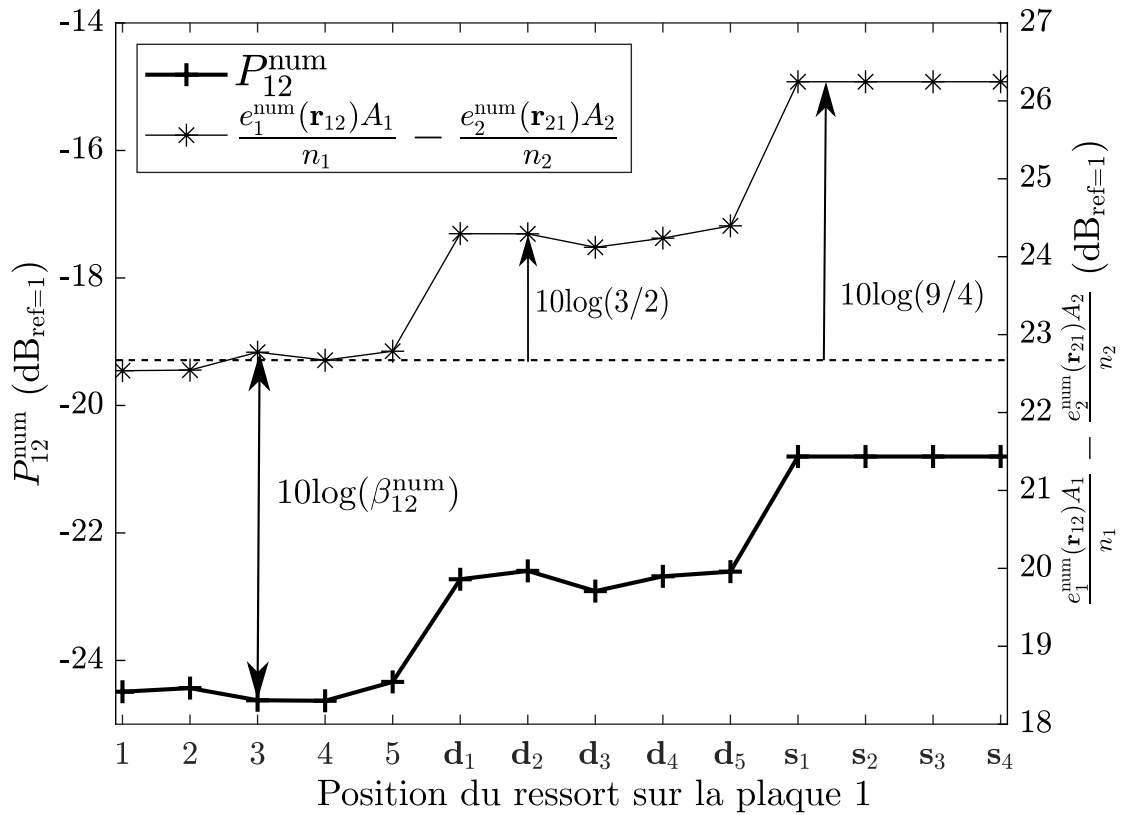


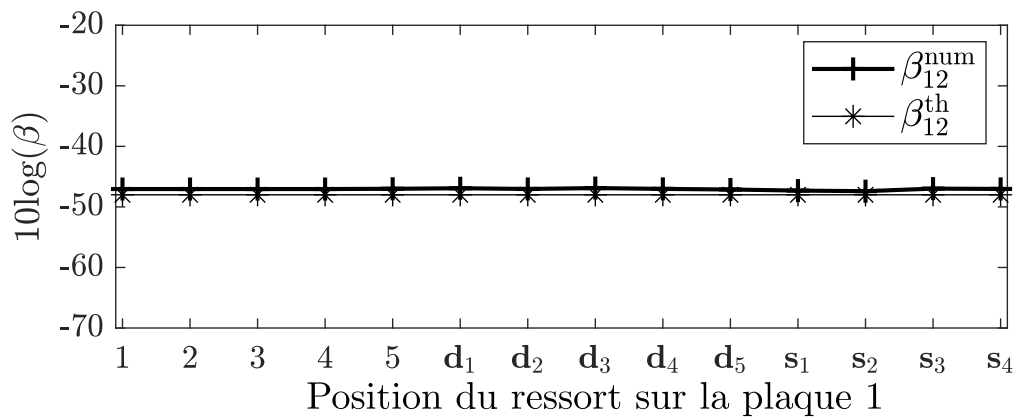
FIGURE 6.5 – Deux plaques rectangulaires couplées et excitées avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $s_1$  sur la plaque 1. Les lignes avec un facteur de surintensité de  $3/2$  sont représentées avec des traits en pointillés et les points à l'intersection de ces lignes avec un facteur de surintensité de  $9/4$  sont notés  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ . Le ressort de couplage est attaché au centre de la plaque 2 ( $r_{21}$ ). (a) Le couplage est fixé en dehors des zones de surintensité, (b) le couplage est fixé sur les lignes de surintensité et (c) le couplage est fixé sur les points de surintensité  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ .

Au regard de la figure 6.6a, on constate que la différence des énergies locales augmente d'un coefficient  $3/2$  lorsque le ressort est fixé sur une ligne ( $d_1$ ,  $d_2$ ,  $d_3$ , et  $d_4$ ) et cette augmentation est de  $9/4$  lorsque le ressort est fixé sur un point ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ ). Ceci confirme bien les valeurs des facteurs de surintensité déterminés dans le chapitre 4. De plus, la puissance transmise ( $P_{12}^{\text{num}}$ ) évolue de manière proportionnelle à la différence des énergies locales.

Le résultat majeur concerne le coefficient de couplage entre les deux plaques. A partir de la figure 6.6a, il est possible de déterminer le coefficient de couplage noté  $10\log(\beta_{12}^{\text{num}})$  en calculant la différence entre la puissance transmise et la différence des énergies locales pour toutes les positions du point d'attache du ressort. La figure 6.6b présente une comparaison entre le coefficient de couplage calculé numériquement et le coefficient de couplage théorique. Les deux valeurs sont très proches et l'erreur moyenne est égale à 0.64 dB. La valeur du coefficient de couplage reste donc valide en prenant en compte les énergies locales aux points de couplage. Le coefficient de couplage théorique reste donc valide même si le couplage est fixé sur les zones de surintensité.



(a)



(b)

FIGURE 6.6 – (a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales pour la plaque rectangulaire excitée de manière ponctuelle avec les bord appuyés. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ).

## 6.4.2 Plaques en forme de stade

La simulation numérique avec les deux plaques en forme de stade couplées entre elles est présentée dans les deux figures 6.7a, et 6.7b. Les quatre points avec un facteur de surintensité égal à 2 ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ ) sont représentés avec une croix. Les caractéristiques mécaniques des plaques sont les mêmes que pour la plaque rectangulaire.

La puissance échangée, les énergies locales, et le coefficient de couplage sont calculés pour les deux cas présentés ci-dessous. Chaque cas représente une position d'attache du ressort sur la plaque 1 différente. La figure 6.8a présente l'évolution de la différence des énergies locales et de la puissance échangée en fonction du point de couplage du ressort.

- Dans un premier temps, le ressort est successivement attaché sur les quatre points ou le champ vibratoire est diffus, soit en dehors des points de surintensité tel que présenté sur la figure 6.7a. Cela correspond aux positions 1 à 4 sur la figure 6.8a.
- Dans un second temps, le ressort est successivement fixé sur un point avec une surintensité d'énergie égale à 2 ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ ). Cela correspond aux points  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$  sur la figure 6.8a.

Au regard de la figure 6.8a on constate qu'il existe un coefficient égal à 2 entre l'énergie sur les quatre points ( $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ ) et l'énergie en dehors de ces quatre points. Cette surintensité d'énergie correspond bien à celle déterminée dans le chapitre 4.

De la même manière que pour les plaques rectangulaires, il est possible de déterminer le coefficient de couplage  $10\log(\beta_{12}^{\text{num}})$  en calculant la différence entre la puissance transmise et la différence des énergies locales pour toutes les positions du point d'attache du ressort. La figure 6.8b présente une comparaison entre le coefficient de couplage calculé numériquement et le coefficient de couplage théorique. Les deux valeurs sont très proches et l'erreur moyenne est égale à 1,46 dB.

## 6.4.3 Plaques circulaires

Pour les plaques circulaires de rayon 0.56 m, le champ vibratoire n'est pas diffus avec une excitation ponctuelle. On a montré qu'il existe une surintensité de l'énergie sur le cercle passant par le pont d'excitation. Cette surintensité est causée par la focalisation des rayons. Le niveau d'énergie est plus élevé sur le cercle passant par le point d'excitation et décroît à l'intérieur et à l'extérieur de ce cercle. La figure 6.9a présente la simulation numérique. Le cercle avec une surintensité d'énergie est représenté en pointillés et est noté  $C_1$ .

Sur la plaque 1, le ressort est successivement fixé sur 108 points le long du rayon  $d_1$ . La puissance échangée, les énergies locales, et le coefficient de couplage sont calculés

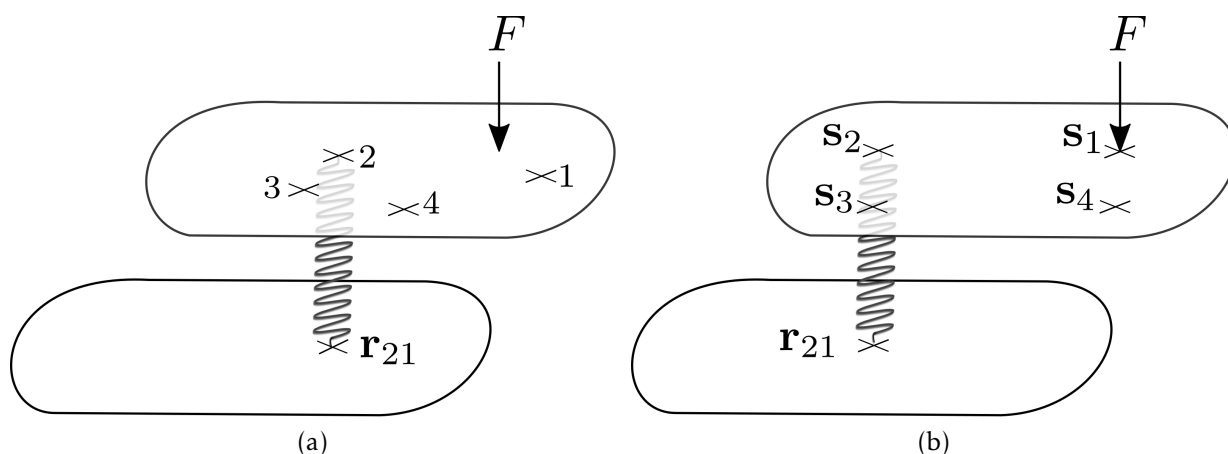


FIGURE 6.7 – Deux plaques en forme de stade avec les bords encastres, couplées et excitées avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $s_1$  sur la plaque 1. Les points avec un facteur de surintensité de 2 sont notés  $s_1$ ,  $s_2$ ,  $s_3$ , et  $s_4$ . Le ressort de couplage est attaché au centre de la plaque 2 ( $r_{21}$ ). (a) Le ressort est fixé sur des points typiques situés en dehors des points de surintensité et (b) le ressort est fixé sur les points de surintensité.

pour ces 108 points. La figure 6.8a présente l'évolution de la différence des énergies locales et de la puissance échangée en fonction de la position du point d'attache du ressort sur la plaque 1. La puissance échangée évolue toujours proportionnellement à la différence des énergies locales.

La figure 6.10b présente une comparaison entre le coefficient de couplage calculé numériquement et le coefficient de couplage théorique. Les deux valeurs sont proches et l'erreur moyenne est égale à 1.42 dB.

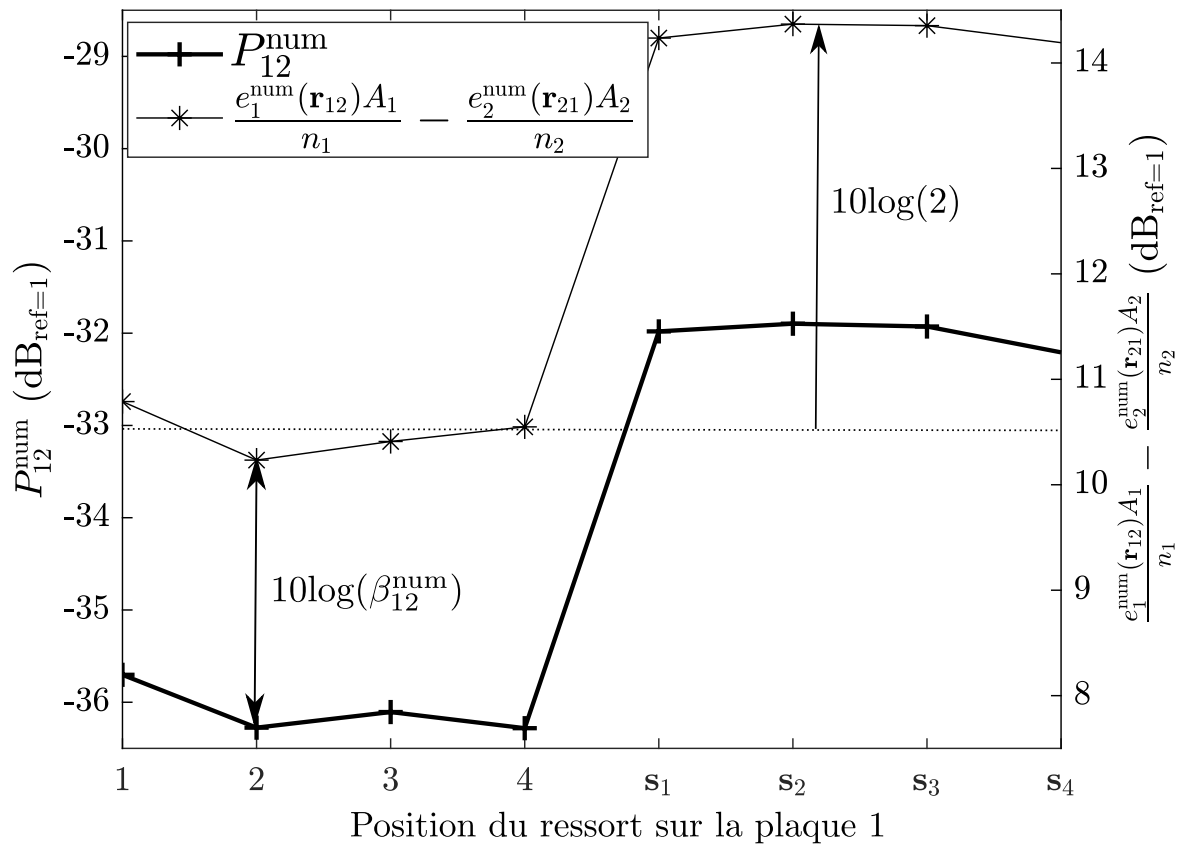
#### 6.4.4 Plaques rectangulaires avec un fort amortissement

Pour les plaques rectangulaires avec un fort amortissement, le champ vibratoire n'est pas diffus avec une excitation ponctuelle. Le niveau d'énergie est très élevé autour du point d'excitation et décroît rapidement. La figure 6.11a présente la simulation numérique.

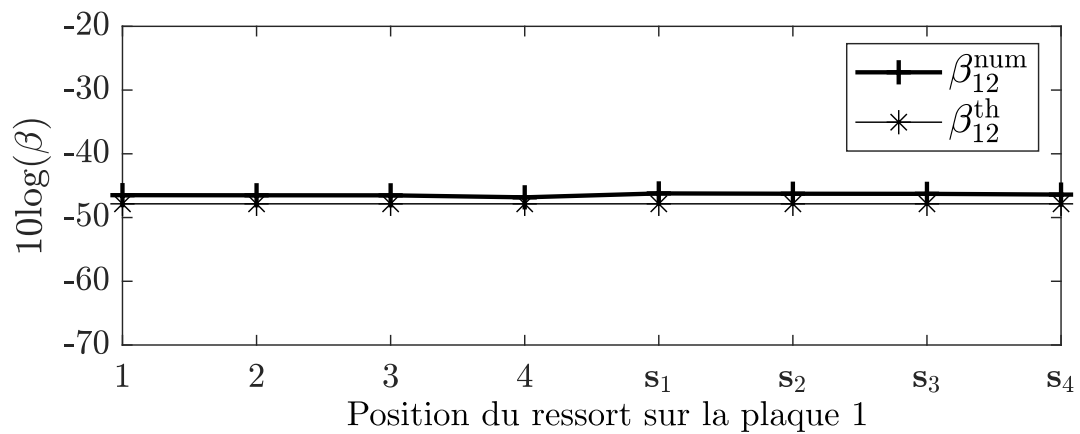
Sur la plaque 1, le ressort est successivement fixé sur 101 points de la ligne  $d_1$ . La puissance échangée, les énergies locales, et le coefficient de couplage sont calculés pour ces 101 points. La figure 6.8a présente l'évolution de la différence des énergies locales et de la puissance échangée en fonction de la position du point d'attache du ressort sur la plaque 1. La puissance échangée évolue toujours proportionnellement à la différence des énergies locales.

La figure 6.10b présente une comparaison entre le coefficient de couplage calculé numériquement et le coefficient de couplage théorique. Les deux valeurs sont très proches





(a)



(b)

FIGURE 6.8 – (a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ) pour deux plaques en forme de stade avec les bords encastres couplées entre elles et excitées avec une force ponctuelle sur la plaque 1.

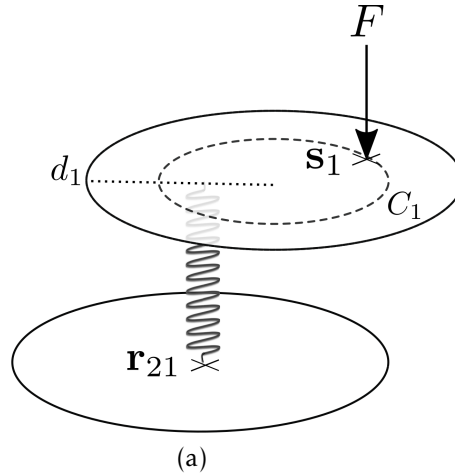


FIGURE 6.9 – Deux plaques circulaires avec les bords encastrés couplées entre elles et excitées avec un bruit blanc aléatoire  $F$  au point  $\mathbf{s}_1$  sur la plaque 1. Le cercle avec une surintensité d'énergie sur la plaque 1 est notée  $C_1$ . Sur la plaque 2, le ressort de couplage est attaché au centre sur le point  $\mathbf{r}_{21}$ . Sur la plaque 1, le ressort est successivement attaché sur les 108 points le long de la ligne en pointillés  $d_1$ .

et l'erreur moyenne est égale à 0.37 dB. Ceci prouve que le coefficient de couplage reste valide même si le champ vibratoire n'est pas diffus à cause d'un fort amortissement.

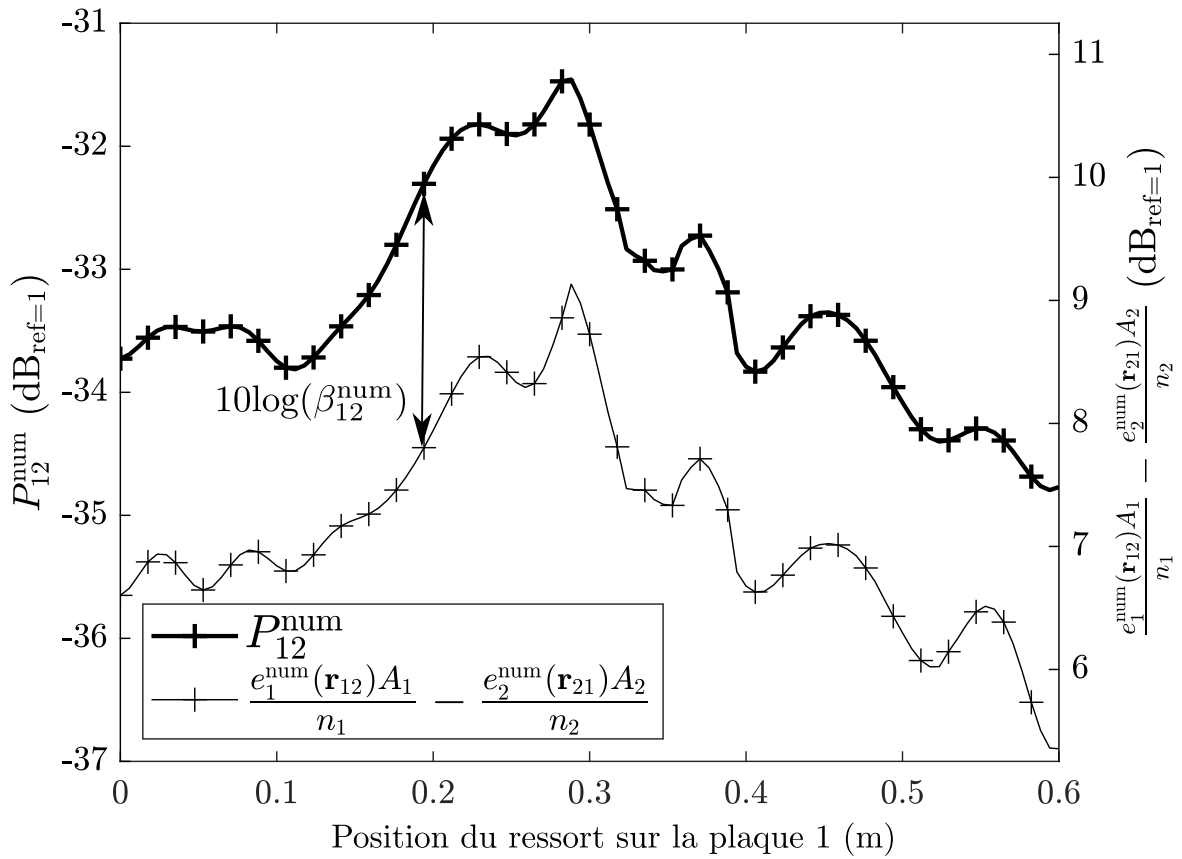
## 6.5 Interprétation physique

En SEA, l'énergie modale  $E/N$  d'un système à l'équilibre est l'énergie globale du système  $E$  répartie sur le nombre de modes  $N$ . En thermodynamique, la température est définie pour un système à l'équilibre (tous les points du système possèdent la même énergie) comme l'énergie globale du système est répartie sur l'ensemble des molécules du système. La température  $T$  est liée à l'énergie modale par la relation [1]

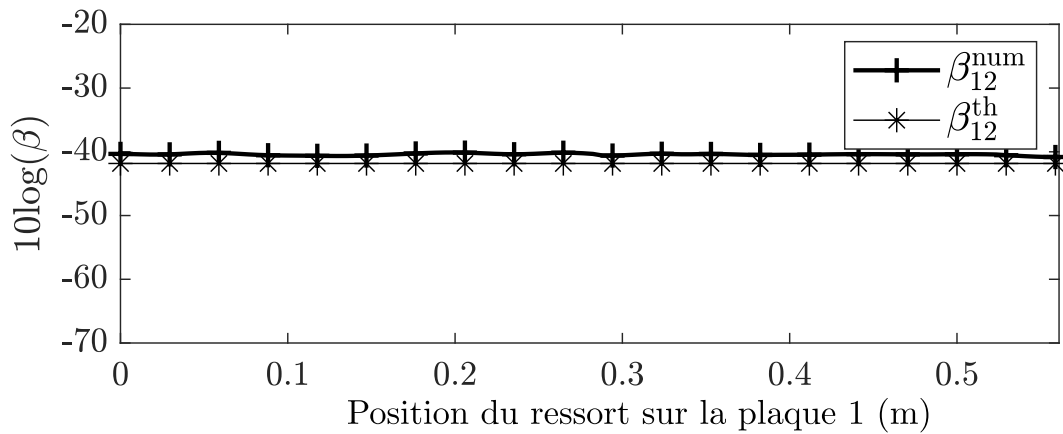
$$k_B T = \frac{E}{N}. \quad (6.16)$$

avec  $k_B$  la constante de Boltzmann. Dans l'équation (6.16),  $E$  et  $N$  sont des grandeurs globales. Or,  $E = eA$  et  $N = A\omega/2\pi c_p c_g$  avec  $e$  la densité d'énergie,  $c_p$  et  $c_g$  la vitesse de groupe et la vitesse de phase qui sont des grandeurs locales et  $A$  la surface du système. L'énergie globale et la densité modale sont donc deux grandeurs dépendantes de la surface du système et donc la température vibratoire s'exprime de manière locale :

$$T = \frac{e2\pi c_p c_g}{k_B \omega}. \quad (6.17)$$

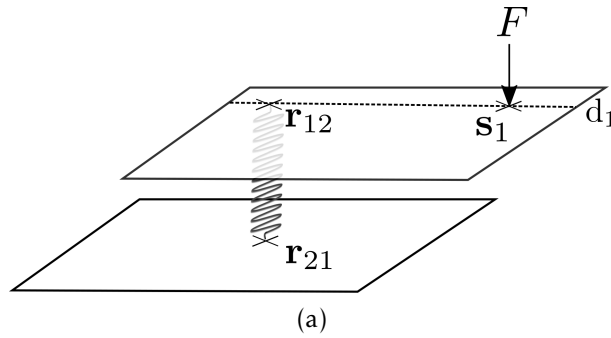


(a)



(b)

FIGURE 6.10 – (a) Comparaison entre les puissances échangées et la différence des énergies locales pour la plaque circulaire avec les bords encastres. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le coefficient de couplage déterminé numériquement ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ).



L'équation (6.17) définit donc une température vibratoire qui est une grandeur locale. La version locale de la *coupling power proportionality* de l'équation (6.12) décrit, de la même manière qu'en thermodynamique, le transfert d'énergie entre deux systèmes **hors-équilibre** des zones les plus "chaudes" vers les zones les plus "froides".

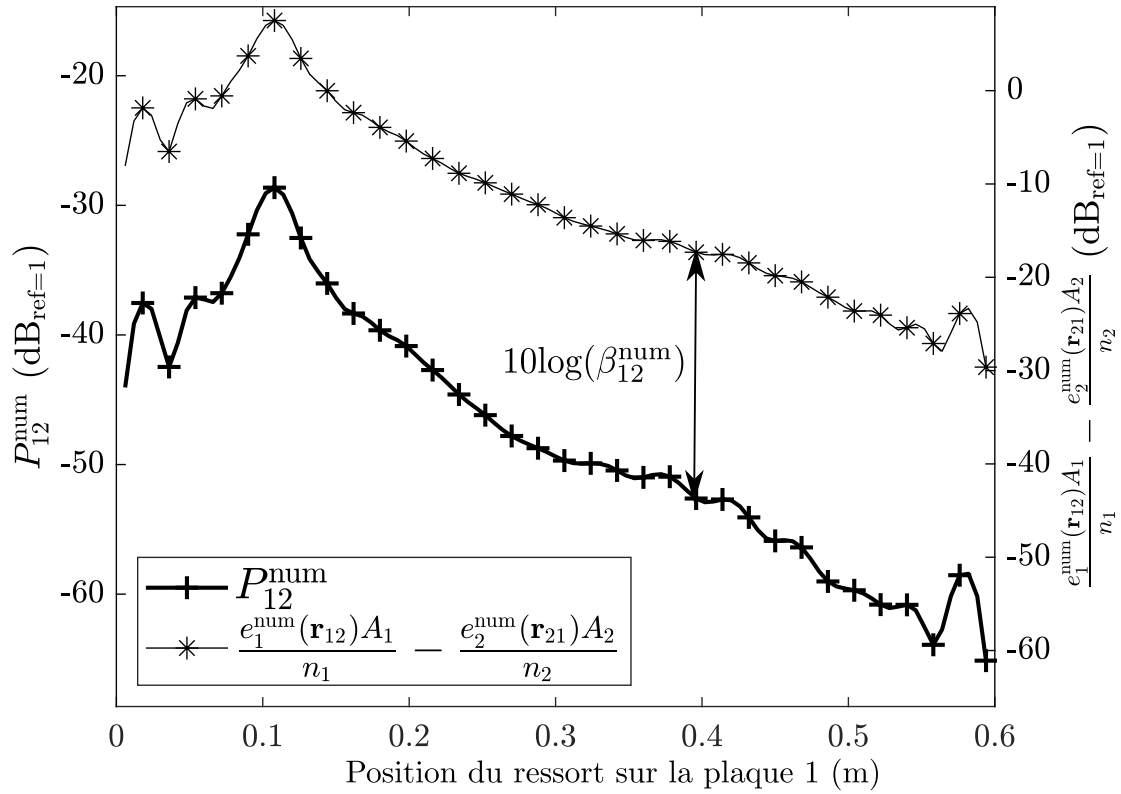
## 6.6 Conclusion

Le coefficient de couplage de deux plaques couplées entre elles de manière ponctuelle par un ressort a été calculé de manière numérique.

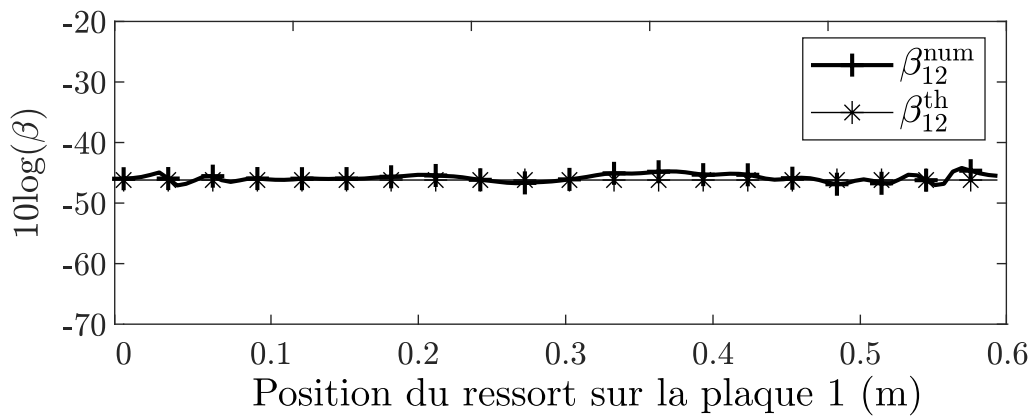
Dans le cas de la plaque rectangulaire faiblement amortie et du stade, l'emplacement du point de couplage est positionné successivement sur des zones où le champ vibratoire est diffus puis sur des zones présentant des surintensités d'énergie. Le coefficient de couplage est calculé dans chacun des cas et cette valeur numérique du coefficient de couplage correspond bien à la valeur théorique.

Dans le cas de la plaque circulaire et de la plaque rectangulaire fortement amortie, le champ vibratoire n'est pas diffus. Le point de couplage du ressort est déplacé le long d'une ligne passant par le point source. Encore une fois, le coefficient de couplage est calculé dans chacun des cas et cette valeur numérique du coefficient de couplage correspond à la valeur théorique.

Ces résultats impliquent que la valeur théorique du CPP reste valide avec un couplage ponctuel même lorsque le champ vibratoire n'est pas diffus ou présente des singularités. Toutefois, pour calculer la valeur du coefficient de couplage, il est nécessaire de prendre en compte l'énergie locale au point de couplage et non pas l'énergie globale de la plaque.



(b)



(c)

FIGURE 6.10 – a) Comparaison entre la puissance échangée et la différence des énergies locales pour la plaque rectangulaire fortement amortie et excitée de manière ponctuelle avec les bord appuyés. (b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le calcul numérique ( $\beta_{12}^{\text{num}}$ ).

# 7

## Mesure du coefficient de couplage pour un champ vibratoire non-diffus

---

### Sommaire

---

7.1	Introduction . . . . .	148
7.2	Principe de l'expérience . . . . .	148
7.3	Description du banc d'essai . . . . .	149
7.4	Protocole de mesure . . . . .	153
7.5	Résultats et commentaires . . . . .	157
7.6	Conclusion . . . . .	162

---

## 7.1 Introduction

Il a été montré au chapitre 5 que les lignes de surintensité peuvent être observées de manière expérimentale. A partir des résultats numériques précédents, on observe que le coefficient de couplage théorique reste valide en prenant en compte la différence des énergies locales. Dans ce chapitre, on propose de valider les résultats numériques obtenus précédemment en mesurant le coefficient de couplage entre deux plaques rectangulaires couplées entre elles par un ressort. On montre ainsi que même lorsque le champ vibratoire n'est pas diffus ou présente des surintensités locales, le coefficient de couplage théorique reste valide.

Ce chapitre décrit dans une première partie le principe de l'expérience. La seconde partie présente le banc d'essais développé pour cette étude ainsi que la chaîne d'excitation et d'acquisition. La troisième partie décrit la méthodologie expérimentale mise en œuvre afin de mesurer les coefficients de couplage et finalement les résultats sont présentés.

## 7.2 Principe de l'expérience

Pour mettre en place cette expérimentation, un banc d'essai permettant de mesurer le coefficient de couplage entre deux plaques est conçu. Le principe du banc d'essais est le suivant :

- L'excitation est un bruit blanc aléatoire localisé dans une large bande de fréquences. Le banc d'essais est équipé d'un système d'excitation permettant d'obtenir un champ vibratoire diffus.
- Le banc d'essai permet le couplage entre deux plaques avec un ressort. Le point de fixation du ressort sur les deux plaques peut être modifié facilement. De plus, la raideur du ressort est suffisamment faible pour satisfaire l'hypothèse de couplage faible.
- Le banc d'essai est instrumenté afin d'obtenir des informations sur l'énergie locale des deux plaques aux points de couplage. La position de ces capteurs est facilement et rapidement modifiable pour pouvoir suivre le point de fixation du ressort. De plus l'instrumentation du banc d'essais permet de mesurer la force injectée. La fréquence d'échantillonnage est supérieure à 20 kHz pour permettre de mesurer une fréquence maximale de 10 kHz.

Un schéma de principe du dispositif expérimental est présenté à la figure 7.1. Deux plaques rectangulaires sont couplées entre elles par un ressort dont la raideur est

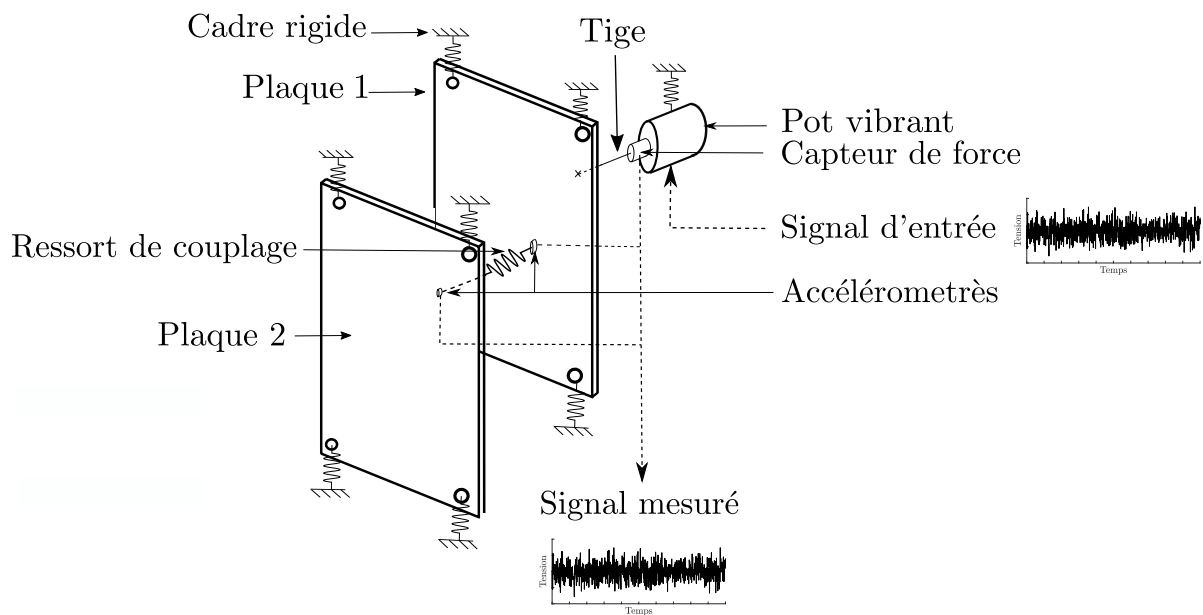


FIGURE 7.1 – Principe du banc d’essai. Deux plaques rectangulaires sont suspendues à un cadre rigide. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire à l’aide d’un pot vibrant. Les deux plaques sont reliées entre elles par un ressort de couplage. Les énergies sont mesurées avec deux accéléromètres situés au niveau des points de couplage sur les plaques 1 et 2.

connue. La plaque 1 est excitée avec un bruit blanc aléatoire à l’aide d’un pot vibrant. L’accélération aux deux points de couplage est mesurée à l’aide d’accéléromètres. Il est ainsi possible de déterminer l’énergie locale aux points de couplage ainsi que la puissance transmise. Avec ces grandeurs, le coefficient de couplage peut finalement être déterminé.

### 7.3 Description du banc d’essai

Le banc d’essais est constitué de deux plaques couplées entre elles par un ressort, d’un système d’excitation et d’un système de mesure de vibration des plaques. La photographie présentée à la figure 7.2 présente une vision globale du banc d’essais et la figure 7.3 présente le couplage entre les deux plaques.

La structure du banc d’essais est constituée de profilés aluminium, assurant à la fois une rigidité suffisante et un confort en termes de montage, d’utilisation et de modularité.

Les deux plaques rectangulaires utilisées sont les mêmes que celles utilisées dans le



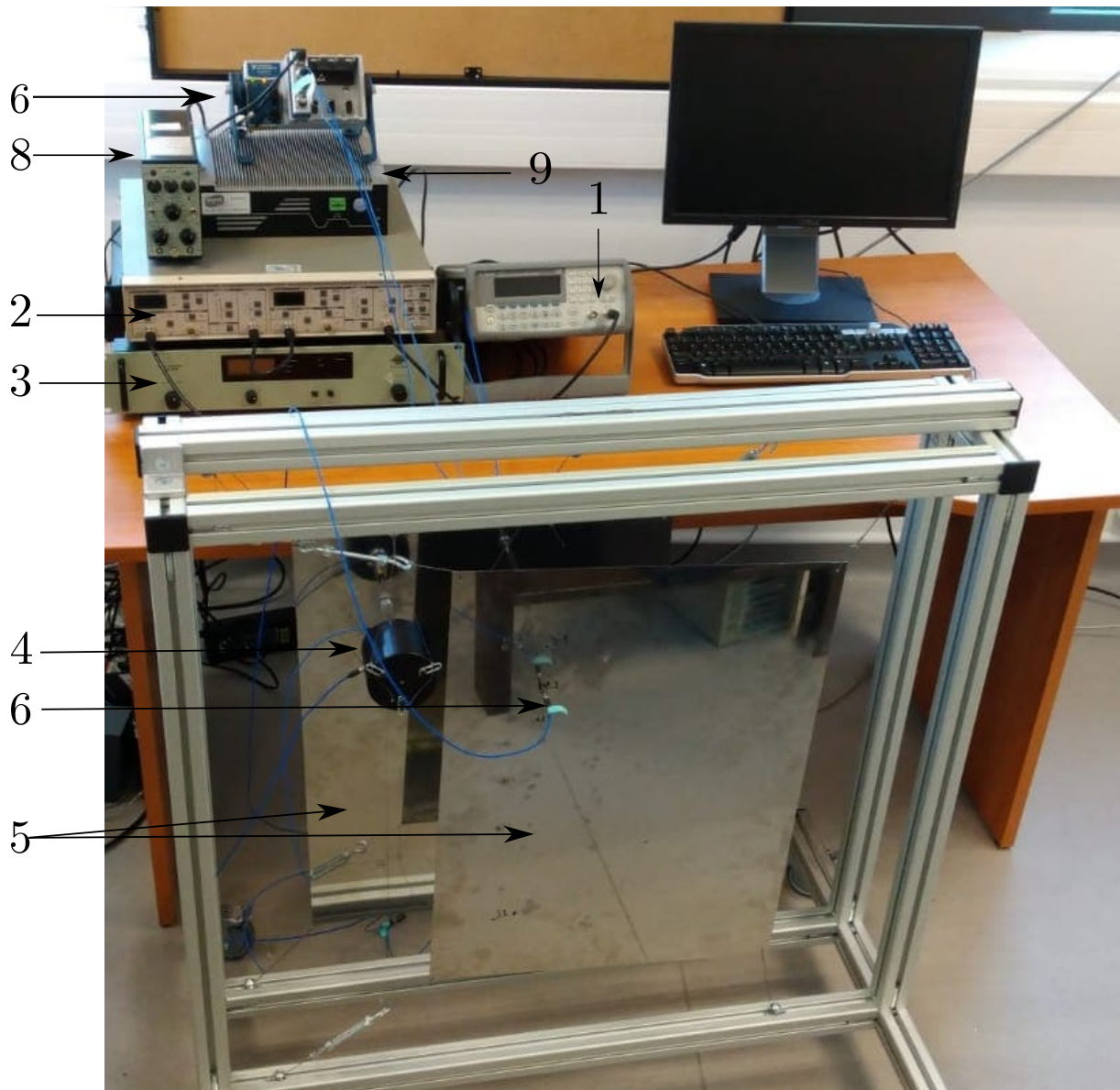


FIGURE 7.2 – Photographie du montage expérimental. Le signal est généré avec le générateur de signal (1) puis passe à travers le filtre (2) avant d'être amplifié avec l'amplificateur (3). Les deux plaques (5) sont alors excitées avec le pot vibrant (4) et l'accélération des deux plaques est mesurée avec les accéléromètres (6). La force injectée par le pot vibrant est mesurée avec un capteur de force et amplifiée avec l'amplificateur de charge (8). Les signaux mesurés (accéléromètres et capteur de force) sont conditionnés avec la carte d'acquisition (6) et transférés vers l'ordinateur (9).

chapitre 5. Pour rappel, elles sont constituées d'acier Inox 430 et mesurent  $0,6 \times 0,44$  m avec une épaisseur de 1 mm. Quatre trous d'un diamètre de 3 mm sont réalisés aux quatre coins de la plaque pour suspendre les plaques avec deux élastiques sur le cadre fixe.

Deux fixations sur le bas de la plaque sont ajoutées par rapport à l'expérience présentée

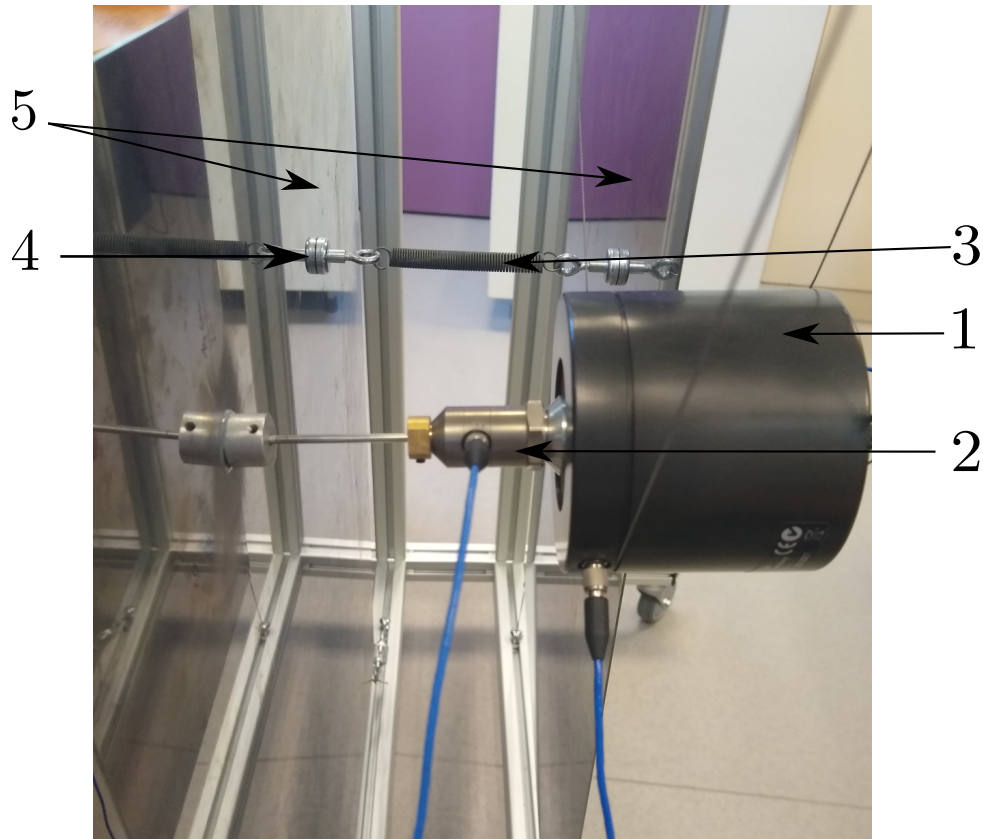


FIGURE 7.3 – Photographie du couplage entre les deux plaques. Le pot vibrant (1) excite la plaque 1. La force injectée est mesurée à l'aide d'un capteur force (2). Le couplage entre les deux plaques (5) est réalisé avec un ressort (3) fixé sur les plaques avec des aimants à oeillet (4).

au chapitre 5 afin de maintenir les plaques parallèles et d'appliquer une mise en tension du ressort de couplage. En effet le ressort de couplage a pour effet de rapprocher les plaques et il est donc nécessaire de les maintenir à distance moyenne constante. Des tendeurs à vis permettent de facilement régler la position de la plaque et la tension des élastiques.

Le ressort de couplage est fixé sur les plaques avec des aimants à œillets. Cette solution présente l'avantage de permettre une modification rapide de la position des points d'attache du ressort. Il est nécessaire de s'assurer que le ressort est bien fixé perpendiculairement aux deux plaques.

La raideur du ressort est mesurée de manière statique. Le ressort est mis en tension en attachant des masses à son extrémité et l'allongement est alors mesuré. Avec cette méthode, on trouve une raideur égale à  $431 \text{ N.m}^{-1}$ . On a montré au chapitre 6 que la raideur doit être inférieure à  $10^5 \text{ N.m}^{-1}$ . Cette raideur est donc suffisamment faible pour satisfaire l'hypothèse de couplage faible.

### 7.3.1 Chaîne d'excitation

Le pilotage de l'excitation est géré via un générateur de signal Agilent 33210A. Le générateur crée un bruit blanc dans une large bande de fréquences comprise entre 0 et 7 MHz. Le signal est ensuite filtré avec un filtre passe bande SR650 entre 10 Hz et 8 kHz puis amplifié par un amplificateur de puissance Brüel & Kjaer de type 2718. Les fréquences de coupure du filtre sont les mêmes que celles utilisées au chapitre 5.

La plaque 1 est excitée avec un pot vibrant Brüel & Kjaer de type 4810, qui applique sur la plaque une force orthogonale. La force maximale délivrable par le pot vibrant est de 10 N et la force appliquée durant l'expérience est de l'ordre de 2 N. L'extrémité de la tige du pot vibrant est collée avec de l'époxy sur la plaque 1. La position du pot vibrant est soigneusement réglée de manière à ce qu'il soit parfaitement perpendiculaire à la plaque tel que présenté à la figure 7.4.

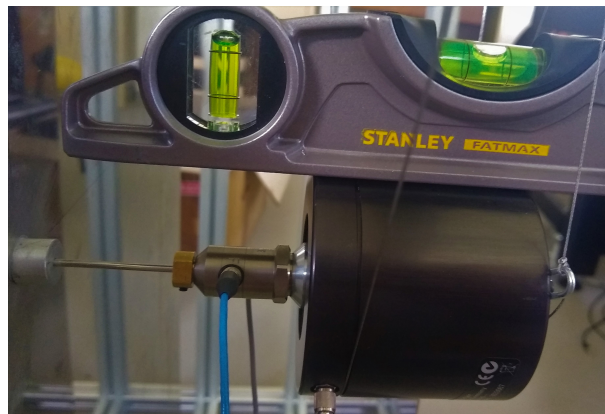


FIGURE 7.4 – Réglage de l'alignement orthogonal entre le pot vibrant et la plaque 1.

### 7.3.2 Chaîne de mesure

Deux accéléromètres piézoélectrique ICP PCB 352C67 sont fixés sur les deux plaques à la même position que les points de fixation du ressort mais sur la face opposée. Ils permettent de mesurer l'accélération au point de couplage de manière normale au plan de la plaque. Ces accéléromètres ont une sensibilité de 100 mV/g et permettent une mesure allant de 0,5 Hz à 10 kHz. Les accéléromètres sont fixés sur les plaques avec de la cire. Avec cette méthode de fixation, la fréquence de résonance de l'accéléromètre est de 29 kHz d'après la documentation PCB ce qui est très supérieur à la bande de fréquences utile pour cette étude. La masse des accéléromètres est de 2 g ce qui est négligeable par rapport à la masse de la plaque qui pèse 2 kg.

Pour mesurer la force injectée dans le système, une tête d'impédance piézoélectrique Brüel & Kjaer de type 8001 est vissée sur le pot vibrant. Cette tête d'impédance permet

une mesure allant de 0,001 Hz à 10 kHz et une force allant de 300 N en tension et 2000 N en compression. La tête d'impédance est reliée à un amplificateur de charge Brüel & Kjaer de type 2635.

L'acquisition des données est effectuée avec une carte National Instruments NI 9234 à une fréquence d'échantillonnage de 25,6 kHz par voie avec filtre anti-repliement. Cette haute fréquence d'échantillonnage est nécessaire pour obtenir une bande passante utile allant jusqu'à 8000 Hz. Le moyennage est réalisée avec 30 mesures. Le signal temporel est ensuite traité avec logiciel M+P Analyzer qui permet d'obtenir les fonctions de réponses en fréquence.

### 7.3.3 Validation du banc d'essais

Il peut être utile de s'assurer que la puissance échangée entre les deux plaques transite uniquement par le ressort de couplage et non pas par le cadre ou de manière acoustique. L'énergie de la plaque 2 est mesurée lorsque le système est couplé et lorsque le système est découplé (le ressort est détaché). La différence d'énergie de la plaque 2 entre les deux situations est de 35 dB ce qui permet de négliger la puissance transférée par le cadre ou par voie aérienne.

## 7.4 Protocole de mesure

### 7.4.1 Mesure des énergies et de la puissance échangée

Les différentes étapes mises en place pour réaliser la mesure de l'énergie des plaques et la puissance échangée sont maintenant présentées.

La figure 7.5 présente une photographie de la plaque 1 avec les différents points de mesure et de couplage ainsi que le point d'excitation et les lignes de surintensité.

La tige du pot vibrant est fixée de l'autre côté de la plaque au niveau du point  $s_0$  (0,34 m; 0,5 m). L'origine du repère est située en bas à gauche de la plaque. Les coordonnées des différents points de mesure et de couplage sont présentées au tableau 7.1.

TABLE 7.1 – Coordonnées des huit points de mesure et de couplage en mètre.

$s_1$	$s_2$	$d_1$	$d_2$
(0,1; 0,5)	(0,1; 0,1)	(0,1; 0,35)	(0,22; 0,5)
$d_3$	1	2	3
(0,1; 0,25)	(0,25; 0,35)	(0,2; 0,25)	(0,25; 0,2)



FIGURE 7.5 – Photographie de la plaque 1 avec les différents points de mesure et de couplage ainsi que le point d'excitation ( $s_0$ ) et les lignes de surintensité.

Dans un premier temps, le ressort de couplage est fixé entre la plaque 1 et la plaque 2 au niveau du point  $s_1$  sur la plaque 1. Les accéléromètres sont fixés au même niveau que les points de couplage sur les faces opposées. Les mesures sont réalisées cinq fois et entre chaque mesure les deux accéléromètres sont décollés puis recollés. Une fois les cinq mesures réalisées, le générateur est stoppé, le ressort ainsi que les accéléromètres sont déplacés puis le même protocole de mesure est appliqué pour les huit points de mesure.

#### 7.4.2 Incertitude de mesure

Une légère variation de mesure est constatée lorsque les accéléromètres sont décollés puis recollés au même point. Cette variation de la mesure peut avoir deux causes principales.

- Premièrement, l'épaisseur de cire qui assure la liaison entre les plaques et les capteurs peut varier légèrement entre les mesures ;
- Deuxièmement, il est impossible de recoller le capteur exactement au même endroit entre deux mesures et donc la position du capteur peut très légèrement

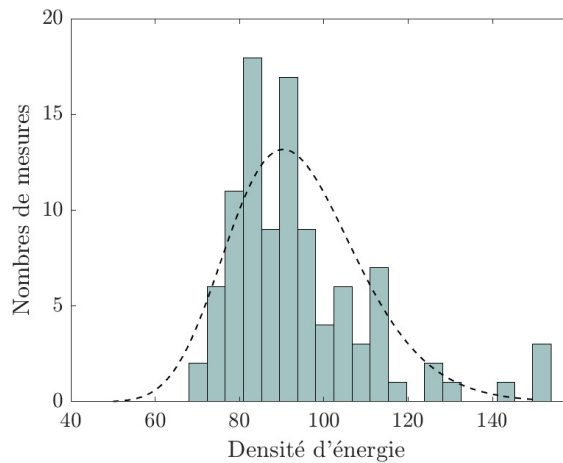


FIGURE 7.6 – Distribution de l'énergie vibratoire mesurée à 100 reprises sur la plaque 1. La distribution suit une loi de type log-normale.

varier entre deux mesures.

Afin de quantifier cette variation de mesure, 100 mesures sont réalisées pour le point de mesure 1. Entre chaque mesure, les deux accéléromètres sont décollés puis recollés. L'histogramme présenté à la figure 7.6 présente la distribution de la densité d'énergie de la plaque 1.

Cette distribution est en accord avec la loi log-normale d'équation

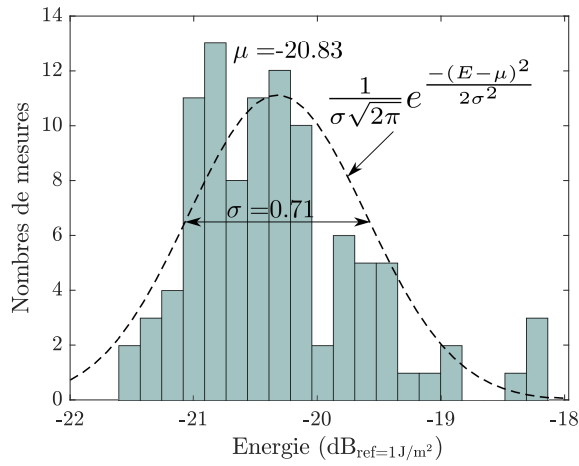
$$\frac{1}{E\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(E)-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (7.1)$$

Or, lorsqu'une variable suit une loi de type log-normale, le logarithme de cette variable suit une loi normale. Par la suite, les écarts-types sont donc calculés avec la distribution de l'énergie de la plaque 1 et 2 ainsi que la distribution de la puissance échangée entre les deux plaques en dB. Les trois histogrammes présentés à la figure 7.7 présentent la distribution de l'énergie de la plaque 1 et 2 ainsi que la distribution de la puissance échangée entre les deux plaques en dB. Ces distributions sont bien en accord avec une loi normale d'équation

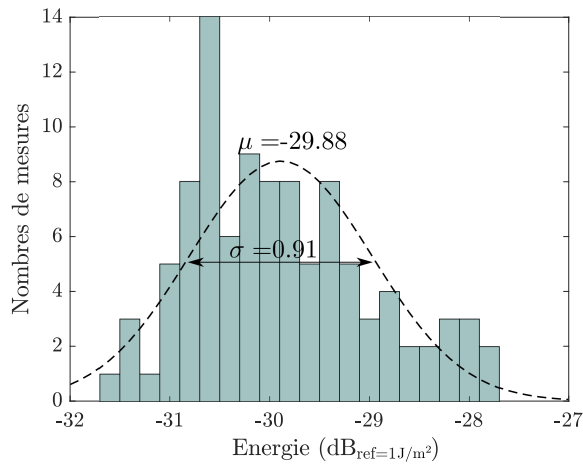
$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(E-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (7.2)$$

avec  $\sigma$  l'écart-type,  $\mu$  la moyenne des mesures d'énergie notées  $E$ .

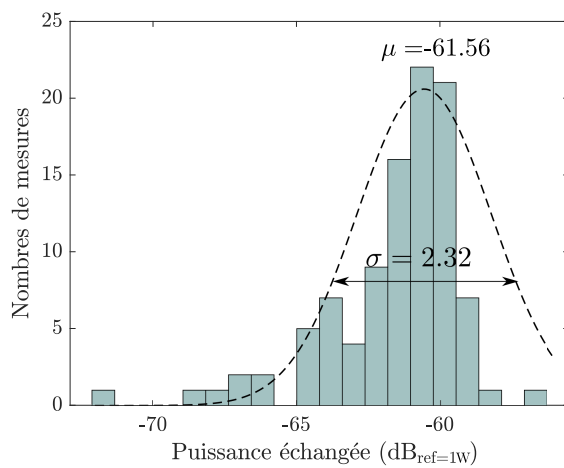
A partir de ce grand nombre de mesures, l'incertitude des mesures est déterminée en calculant l'écart-type. L'écart-type ainsi que la moyenne des mesures sont présentés au tableau 7.2. On peut alors faire l'hypothèse que cette incertitude s'applique pour l'ensemble des points de mesure.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 7.7 – Distribution de l'énergie vibratoire mesurée à 100 reprises sur la plaque 1 (a), sur la plaque 2 (b) en dB. (c) Distribution de la puissance échangée en dB entre les deux plaques mesurées à 100 reprises.

TABLE 7.2 – Écart-type et moyenne mesurés pour l'énergie de la plaque 1 et 2 et pour la puissance échangée.

	Énergie plaque 1 ( $\text{dB}_{\text{ref}=1\text{J}/\text{m}^2}$ )	Énergie plaque 2	Puissance échangée ( $\text{dB}_{\text{ref}=1\text{W}}$ )
Écart-type	0,71	0,91	2,32
Valeur moyenne	-20,83	-29,88	-61,56

## 7.5 Résultats et commentaires

### 7.5.1 Analyse des signaux

Les figures 7.8a et 7.8b présentent respectivement un signal temporel typique de mesure de l'accéléromètre 1 et la force injectée par le pot vibrant.

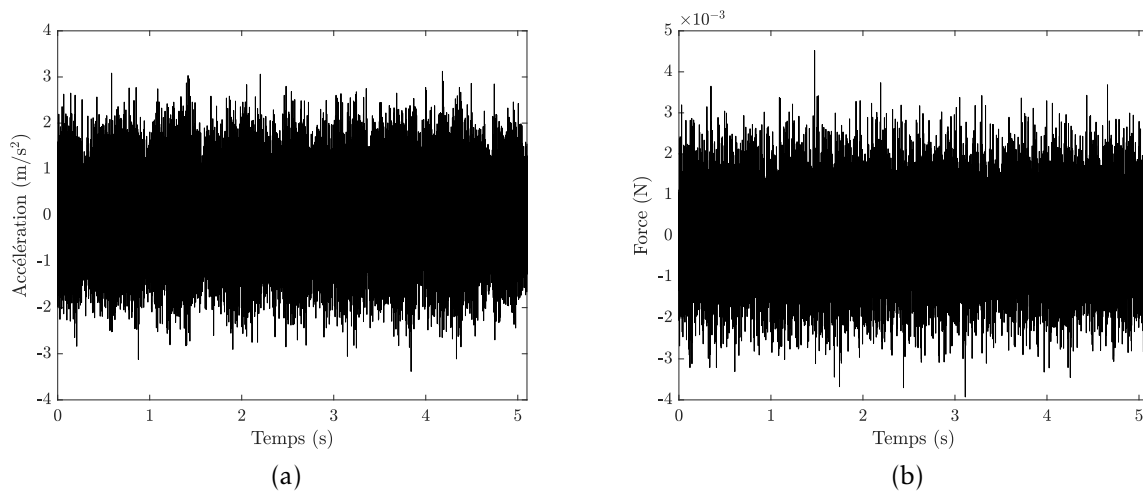


FIGURE 7.8 – (a) Évolution temporelle de la mesure de l'accéléromètre 1 et (b) évolution temporelle de la force injectée par le pot vibrant.

A partir des mesures des deux accéléromètres et du capteur de force, la densité spectrale de puissance de la force injectée  $S_{ff}(\omega)$  et la densité inter-spectrale de puissance entre la force et la mesure de l'accéléromètre  $S_{fa}(\omega)$  sont calculées. La figure 7.9a présente la densité spectrale de puissance  $S_{ff}$  de la force injectée dans le système et la figure 7.9b présente la densité inter-spectrale de puissance  $S_{fa}$ .

A partir des densités spectrales, les fonctions de réponse en fréquence sont calculées avec l'estimateur  $H_2(f)$  ainsi que la cohérence  $\gamma$



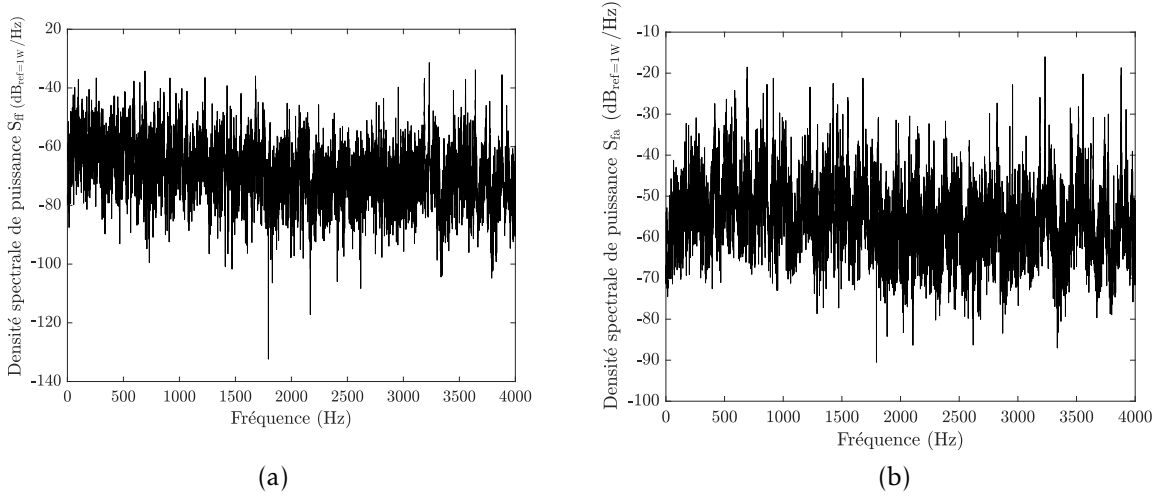


FIGURE 7.9 – (a) Densité inter-spectrale de puissance entre la mesure de l'accéléromètre et la force ( $S_{fa}$ ) et (b) densité spectrale de puissance de la force injectée dans le système ( $S_{ff}$ ).

$$H_2(f) = \frac{S_{fa}(f)}{S_{ff}(f)} \quad (7.3)$$

$$\gamma^2(f) = \frac{|S_{fa}(f)|^2}{S_{ff}(f)S_{aa}(f)}. \quad (7.4)$$

A titre d'exemple, les figures 7.10a et 7.10b présentent respectivement une fonction de réponse en fréquence ainsi que la cohérence avec le capteur de force pour la plaque 1 et pour la plaque 2.

Pour la plaque 2, la cohérence est légèrement moins bonne que pour la plaque 1. Cette différence est causée par le frottement au niveau des œillets de fixation du ressort de couplage. Ce frottement est la source de non-linéarités qui diminue la cohérence entre la source d'excitation et la mesure.

A partir de ces résultats, l'énergie locale aux points de couplage de la plaque  $i$  est calculée dans la bande de fréquences [20-4000] Hz à partir de l'équation

$$e_i(\mathbf{r}, \omega_c) = \frac{mS_0}{\pi} \int_{\Delta\omega} \omega^2 |H_{1i}(\mathbf{r}; \mathbf{s}; \omega)|^2 d\omega. \quad (7.5)$$

avec  $m$  la masse surfacique,  $S_0$  la densité spectrale de puissance de la force injectée et  $H_{1i}(\mathbf{r}; \mathbf{s}; \omega)$  la réceptance entre le point source  $\mathbf{s}$  et le point de mesure  $\mathbf{r}$  de la plaque  $i$ . La puissance échangée est également calculée

$$P_{12} = \frac{KS_0}{\pi} \int_{\Delta\omega} \text{Re}[j\omega \overline{H_{11}}(\mathbf{r}_{12}, \mathbf{s}; \omega) H_{12}(\mathbf{r}_{21}, \mathbf{s}; \omega)] d\omega \quad (7.6)$$

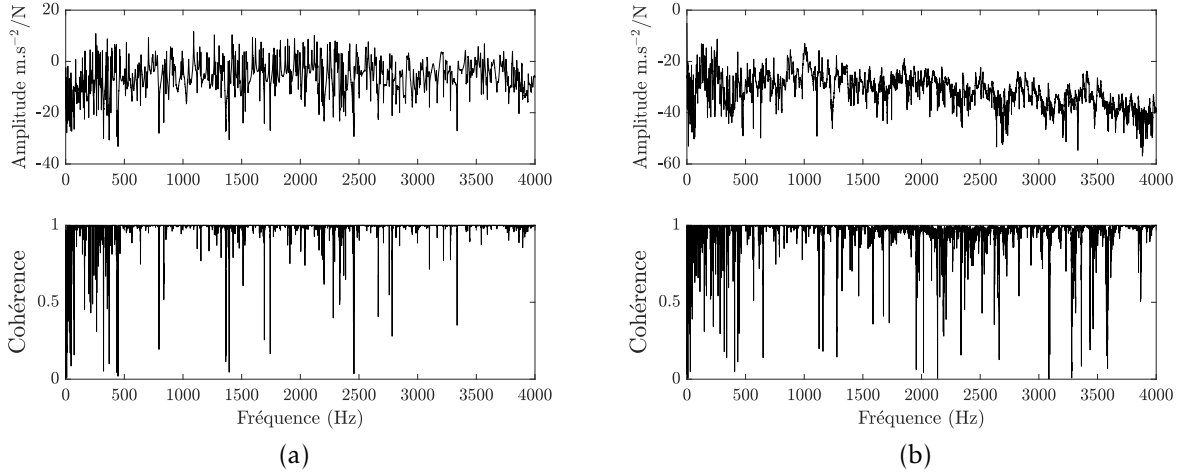


FIGURE 7.10 – (a) Fonction de réponse en fréquence typique pour la plaque 1 et (b) fonction de réponse en fréquence typique pour la plaque 2.

avec  $K$  la raideur du ressort,  $H_{12}$  la réceptance du système couplé et  $\mathbf{r}_{12}$  et  $\mathbf{r}_{21}$  les points de couplages.

Finalement, le coefficient de couplage est calculé avec les expressions des énergies locales et de la puissance échangée

$$\beta_{12}^{exp} = \frac{P_{12}}{\frac{e_1(\mathbf{r}_{12})A_1}{n_1} - \frac{e_2(\mathbf{r}_{21})A_2}{n_2}}. \quad (7.7)$$

avec  $A_1$  et  $A_2$  les surfaces des plaques 1 et 2 et  $n_1$  et  $n_2$  les densités modales.

La figure 7.11a présente la différence des énergies locales au point de couplage ainsi que la puissance échangée. L'incertitude des mesures est obtenue en calculant l'écart type pour un grand nombre de mesures tel que présenté à la section 7.4.2 et est représenté avec les barres d'erreur. L'écart type est calculé pour un seul point (le point 3 avec la barre d'erreur en trait plein) et on fait l'hypothèse que l'incertitude est la même pour les autres points (barre d'erreur en trait pointillé).

Les lignes horizontales en pointillé sont obtenues en moyennant respectivement les points 1,2,3 pour la première,  $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3$  pour la deuxième et  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3$  pour la troisième.

Au regard de la figure 7.11a, on constate que les lignes et les points de surintensité apparaissent bien. En effet l'énergie sur les lignes et sur les points de surintensité est supérieure à l'énergie sur le reste de la plaque. Le tableau 7.3 présente une comparaison entre les facteurs de surintensité déterminés de manière expérimentale et leurs valeurs théoriques. L'erreur obtenue est plus importante dans le cas de deux plaques couplées que dans le cas d'une plaque seule présentée au chapitre 5. Cette erreur peut s'expliquer :

- par l'aimant fixé sur la plaque 1 qui peut augmenter l'inertie à cause de la masse ajoutée,
- la fixation du ressort agit comme une seconde excitation qui crée également des lignes de surintensité.

TABLE 7.3 – Comparaison entre les facteurs de surintensité déterminés expérimentalement et de manière théorique pour les plaques couplées.

	Théorique (dB)	Expérimentale (dB)	Erreur (dB)
Rectangle ( $\mathbf{s}_i$ )	3.52	3.08	0.44
Rectangle ( $\mathbf{d}_i$ )	1.73	1.35	0.38

La puissance échangée évolue de manière proportionnelle à la différence des énergies locales.

La figure 7.11b présente une comparaison entre le coefficient de couplage mesuré expérimentalement et le coefficient de couplage théorique. Malgré les surintensités, les deux valeurs des coefficients de couplage concordent bien pour tous les points de couplage et l'erreur moyenne est égale à 0,41 dB.

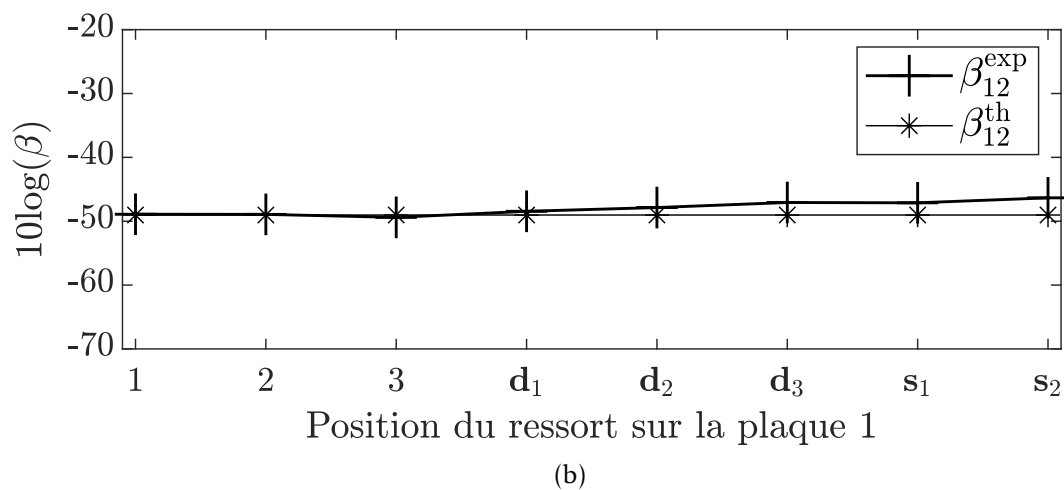
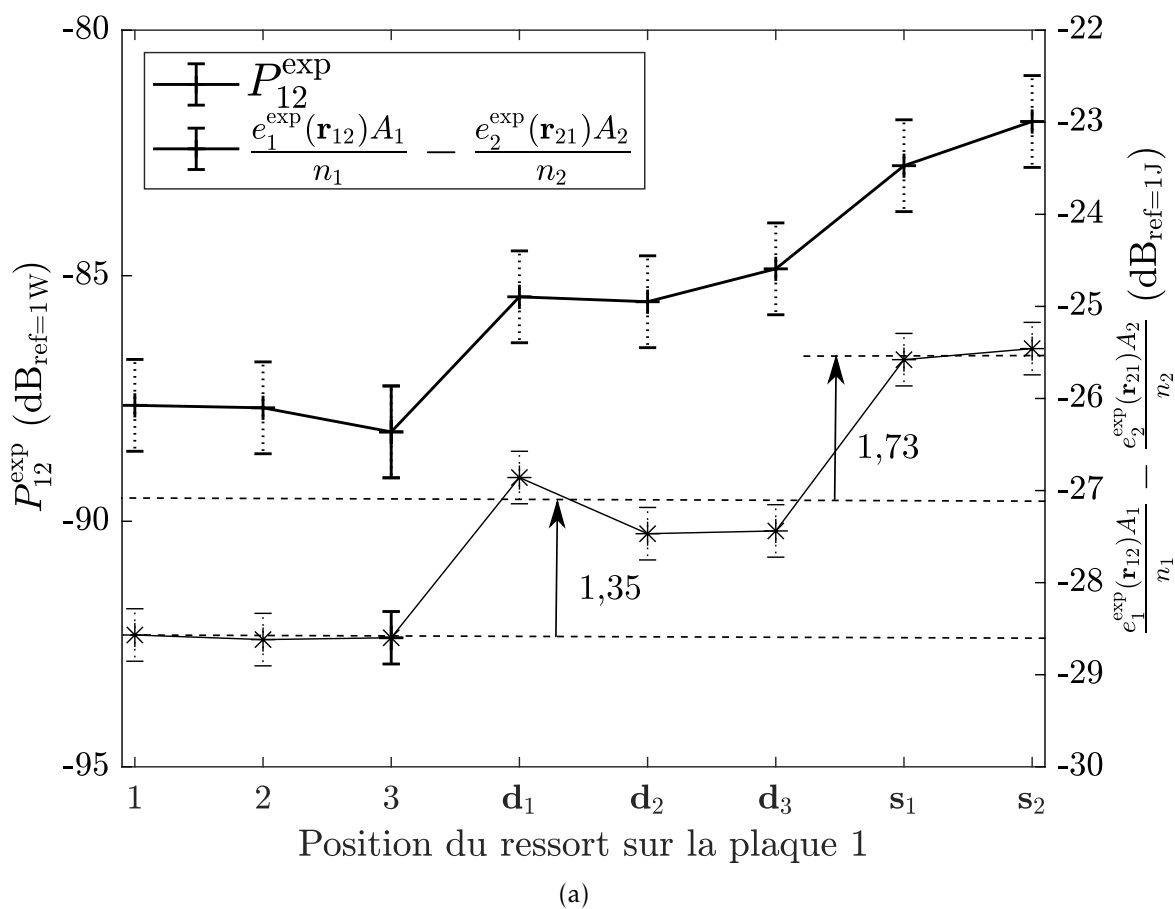


FIGURE 7.11 – (a) Comparaison entre les puissances échangées et la différence des énergies locales obtenues expérimentalement. b) Comparaison entre le coefficient de couplage calculé de manière théorique ( $\beta_{12}^{\text{th}}$ ) et le coefficient de couplage déterminé expérimentalement ( $\beta_{12}^{\text{exp}}$ ).

## 7.6 Conclusion

Le montage expérimental présenté dans ce chapitre permet de mesurer le coefficient de couplage de deux plaques rectangulaires couplées entre elles par un ressort et excitées avec un bruit blanc aléatoire.

Dans un premier temps, il a été vérifié que le couplage se fait uniquement à travers le ressort et non pas par le cadre ou par l'air. Afin de quantifier le niveau d'erreur obtenu lors de la mesure, une importante campagne avec 100 mesures a été réalisée. Les niveaux d'erreur mesurés sur les énergies sont relativement faibles. Toutefois, en vue d'améliorer ce banc d'essais, il serait intéressant de fixer les accéléromètres à l'aide de pastille magnétique plutôt qu'avec de la cire.

Le ressort est fixé sur des points situés dans la zone de champ diffus puis sur les lignes et points de surintensité. Les énergies locales au point de couplage et la puissance transmise sont mesurées puis le coefficient de couplage est calculé.

Tout d'abord, il a été vérifié que les lignes et les points de surintensité apparaissent bien sur la plaque excitée par le pot vibrant malgré le couplage. Finalement, on montre que les coefficients de couplage expérimentaux sont en accord avec les coefficients de couplage théoriques.

Ces résultats expérimentaux confirment donc les résultats numériques du précédent chapitre. Ils prouvent que le coefficient de couplage reste valide même si le champ vibratoire présente des surintensités à condition de prendre en compte l'énergie au point de couplage.

# 8

## Conclusion et perspectives

---

L'analyse statistique de l'énergie (SEA) est une théorie statistique de la vibroacoustique qui permet de décrire les échanges d'énergie vibratoire et acoustique entre différents sous-systèmes. Cette théorie est une alternative aux méthodes déterministes notamment pour les systèmes complexes en haute fréquence. La relation fondamentale de la SEA est la *coupling power proportionality* (CPP) : la puissance vibratoire échangée entre deux sous-systèmes est proportionnelle à la différence de leurs énergies modales. Le coefficient de proportionnalité est le coefficient de couplage. Néanmoins, la SEA nécessite la vérification de plusieurs hypothèses dont la plus restrictive est l'hypothèse de champ vibratoire diffus.

Dans ce mémoire, les conditions nécessaires à l'apparition du champ vibratoire diffus ont été présentées.

Pour obtenir un champ vibratoire diffus dans un système, des critères ont clairement été établis. Dans le cas d'une excitation de type *rain-on-the-roof*, le champ vibratoire est forcément diffus. Dans le cas d'une excitation ponctuelle :

- l'amortissement du système doit être faible,
- l'excitation doit être aléatoire et située dans une large bande de fréquences.

Ces deux conditions ont permis d'établir une carte dans le plan fréquence/amortissement qui permet de savoir si le champ est *a priori* diffus ou non. Néanmoins, même si ces deux conditions sont respectées, il a été montré, en réalisant un parallèle avec la théorie mathématique des billards, que la propagation des rayons doit être homogène et isotrope pour obtenir un champ vibratoire diffus. Pour ce faire, trois cas ont été présentés

- soit le système est ergodique (stade de Bunimovich) et dans ce cas presque tous les rayons ont une propagation homogène et isotrope,
- soit la propagation des rayons dans le système est homogène mais non isotrope

(plaque rectangulaire) et l'isotropie du champ vibratoire est forcée par le caractère omnidirectionnel de la source (force ponctuelle),

- soit la propagation des rayons dans le système n'est ni homogène ni isotrope (plaque circulaire) et dans ce cas le champ vibratoire n'est diffus que si l'excitation est de type *rain-on-the-roof*.

Néanmoins, il a été montré que dans le cas d'un système ergodique présentant des symétries, il existe des zones (points ou lignes) de mesure nulle sur lesquelles les ondes interfèrent de manière constructive. Dans le cas de la plaque rectangulaire, ces facteurs de surintensité ont été déterminés dans le passé avec la méthode des sources-images [100] mais ce travail a permis de les déterminer pour la plaque circulaire et la plaque en forme de stade. Ce travail apporte également des résultats nouveaux sur l'influence des conditions aux limites. Crandall [14] avait réalisé plusieurs expérimentations permettant de visualiser de manière qualitative ces singularités mais l'expérience présentée dans ce travail a en plus permis de les mesurer.

Lorsque le champ vibratoire est parfaitement diffus, Hao [13] a montré que le coefficient de couplage théorique est valide. Dans la seconde partie de ce travail il a été montré que le coefficient de couplage théorique reste valide même si le point de couplage est situé sur une zone de surintensité ou lorsque le champ vibratoire est non diffus. Des simulations numériques et des expérimentations ont été menées avec des plaques couplées. Il a été montré que la valeur du coefficient de couplage coïncide bien avec la valeur théorique à condition de prendre en compte la valeur locale de l'énergie au point de couplage et non l'énergie globale du sous-système.

Ces résultats permettent de montrer que la *coupling power proportionality* reste valide même pour des systèmes présentant des champs vibratoires avec des surintensités locales ou non-diffus. Tout au long de ce travail, l'influence du champ vibratoire non-diffus sur les résultats de la SEA a été présentée pour des exemples simples. Cette simplification est nécessaire pour pouvoir comparer les résultats numériques et expérimentaux avec des valeurs théoriques.

Plusieurs perspectives s'ouvrent alors pour compléter les résultats obtenus. Au niveau du champ vibratoire diffus, il serait intéressant de trouver une formule plus générale permettant de connaître la position et la valeur des surintensités en fonction du nombre de symétries du système. En observant les facteurs de surintensité pour une plaque carrée et rectangulaire, il semble que les facteurs de surintensité augmentent avec le nombre de symétries du système. Pour valider cette hypothèse et trouver une formule générale, d'autres géométries peuvent être étudiées comme des plaques triangulaires. Les surintensités pourraient alors être déterminées pour des systèmes symétriques avec des géométries plus complexes, voire des systèmes industriels. Pour

des systèmes avec des géométries complexes qui ne présentent pas de symétries, les points et les lignes de surintensité doivent sûrement disparaître (excepté au point source) du fait de la propagation désordonnée des rayons. Cette hypothèse mériterait d'être vérifiée en répétant les mêmes procédures numériques et expérimentales sur des plaques avec des géométries aléatoires. Néanmoins, en mathématiques des systèmes dynamiques, l'ergodicité des billards reste un problème ouvert [133]. Il existe très peu de formes de billard pour lesquelles il existe une preuve mathématique de l'ergodicité. En ce qui concerne le couplage entre deux plaques, nous nous sommes restreints à un couplage ponctuel mais il serait pertinent d'étudier des couplages linéiques ou surfaciques. Dans le cas d'un champ non diffus, il serait alors nécessaire d'intégrer la densité d'énergie sur toute la ligne ou la surface de couplage pour déterminer les puissances échangées. Il est également possible d'envisager des couplages non-linéaires entre les sous-systèmes.

Les équations de la SEA pourront ensuite être reformulées pour obtenir une SEA locale qui intègre l'équation locale de la *coupling power proportionality*. Dans le cas d'un système présentant des symétries, les positions et les facteurs de surintensité peuvent être connus *a priori*. La puissance échangée entre deux sous-systèmes lorsque le point de couplage est situé sur une zone de surintensité est obtenue de manière analytique en multipliant la puissance échangée obtenue avec l'énergie globale par le facteur de surintensité. Dans le cas où le champ vibratoire est non diffus à cause d'un fort amortissement ou à cause d'une géométrie non ergodique, comme le cercle par exemple, il est nécessaire de déterminer l'énergie locale à l'aide d'une autre méthode. Le domaine de validité de la théorie utilisée pour déterminer les énergies locales doit être situé à haute fréquence afin d'englober le domaine de validité de la SEA. Dans ce travail, on montre qu'il est possible de déterminer la répartition de l'énergie vibratoire avec la méthode de tir de rayons. On peut également déterminer la répartition de l'énergie vibratoire avec la théorie du transfert radiatif qui permet de prendre en compte la puissance de fuite due au couplage. La théorie du transfert radiatif permet de déterminer la répartition du champ vibratoire à haute fréquence quel que soit le taux d'amortissement. Ces résultats ouvrent la porte à de nouvelles méthodes comme un couplage entre l'approche locale de la SEA et la théorie de transfert radiatif qui semble tout à fait crédible et adaptée dans le cas d'un champ vibratoire non diffus.





## 9.1 Calcul numérique de l'intersection de deux segments

Cette annexe présente la méthode utilisée dans l'algorithme de tir de rayons pour déterminer le point d'intersection entre deux segments. On considère deux segments  $[AB]$  et  $[CD]$ ,  $\vec{I}$  le vecteur  $\vec{AB}$ , et  $\vec{J}$  le vecteur  $\vec{CD}$  tel que présenté à la figure 9.1.

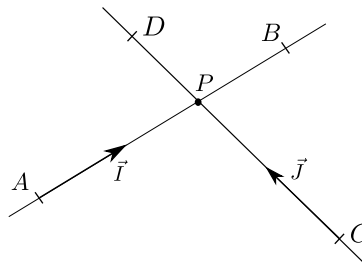


FIGURE 9.1 – Deux segments  $[AB]$  et  $[CD]$ ,  $\vec{I}$  le vecteur  $\vec{AB}$ ,  $\vec{J}$  le vecteur  $\vec{CD}$  et  $P$  le point d'intersection.

Soit  $k$  le paramètre du point d'intersection du segment  $[CD]$  sur la droite  $AB$  et  $m$  le paramètre du point d'intersection du segment  $[AB]$  sur la droite  $CD$ .

Soit  $P$  le point d'intersection des segments  $[AB]$  et  $[CD]$ . Il vient

$$\begin{aligned} P &= A + k\vec{I} \\ P &= C + m\vec{J} \end{aligned} \tag{9.1}$$

d'où

$$A + k\vec{I} = C + m\vec{J} \tag{9.2}$$

En projetant selon  $x$  et  $y$ , il vient

$$\begin{aligned}A_x + kI_x &= C_x + mJ_x \\A_y + kI_y &= C_y + mJ_y.\end{aligned}\tag{9.3}$$

En résolvant ces deux équations, il est possible de déterminer  $m$  et  $k$

$$\begin{aligned}m &= -\frac{1}{\Delta}(-I_x \times A_y + I_x \times C_y + I_y \times A_x - I_y \times C_x) \\k &= -\frac{1}{\Delta}(A_x \times J_y - C_x \times J_y + J_x \times A_y + J_x \times C_y)\end{aligned}\tag{9.4}$$

avec  $\Delta = I_x \times J_y - I_y \times J_x$ . Il existe un cas particulier pour lequel  $\Delta = 0$ . Dans ce cas, les deux segments sont parallèles. Lorsque  $0 < m, k < 1$ , le point d'intersection des deux droites est à l'intérieur de segments  $[AB]$  et  $[CD]$ . Pour déterminer les coordonnées du point  $P$ , on injecte les valeurs de  $m$  et  $k$  dans l'équation (9.1)

## 9.2 Convergence du pas d'intégration fréquentiel

Cette annexe présente l'étude de convergence réalisée pour déterminer le pas fréquentiel optimum. L'échantillonnage fréquentiel (présenté à la figure 9.2) doit être suffisamment fin pour correctement discrétiser les pics isolés dans le cas d'un recouvrement modal faible et suffisamment grossier pour ne pas devoir utiliser trop de points en fréquence dans le cas d'un recouvrement modal fort.

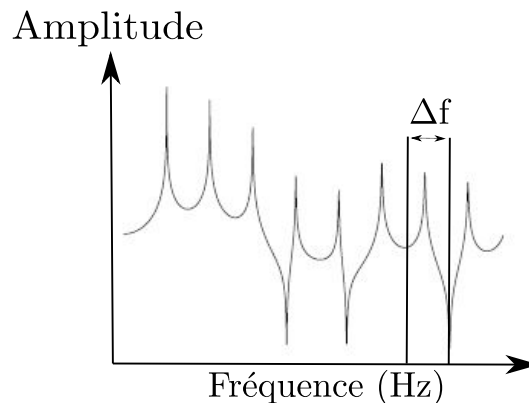


FIGURE 9.2 – Détermination du pas fréquentiel pour calculer les énergies.

Pour les calculs d'énergie, le pas fréquentiel choisi est  $\delta\omega = \eta f_{max}/p$ . Le choix de ce pas fréquentiel permet d'avoir une estimation de l'intégrale plus précise lorsque l'amortissement diminue. Pour déterminer la valeur optimale du pas fréquentiel, on calcule le critère de champ diffus  $\sigma$  pour différentes valeurs du coefficient  $p$ . La figure 9.3 présente l'évolution de  $\sigma$  en fonction du coefficient  $p$ .

Le critère de champ diffus  $\sigma$  diminue très rapidement puis se stabilise à partir de  $p \approx 1$ . Pour l'étude on retient donc une valeur de  $p = 1$ .

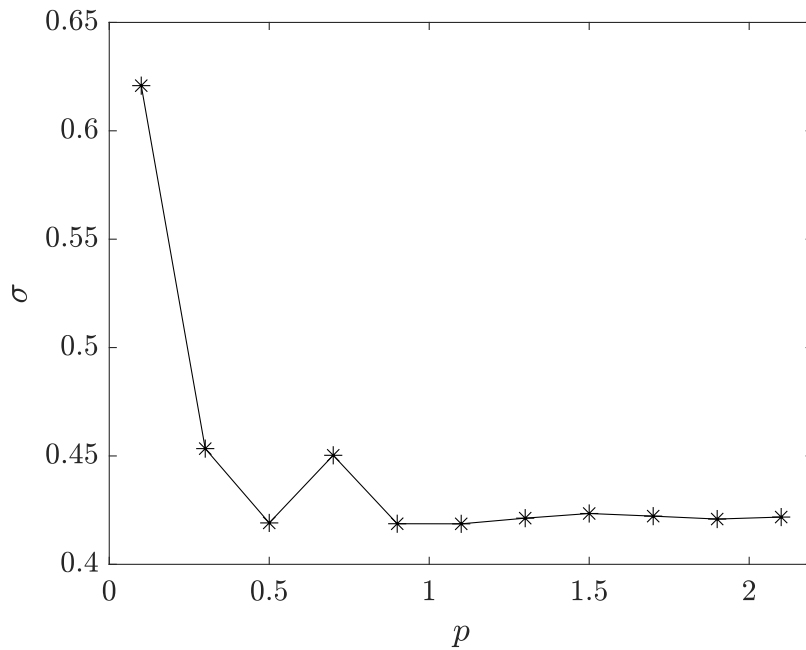


FIGURE 9.3 – Évolution du critère de champ diffus en fonction du pas d'intégration fréquentiel

### 9.3 Calcul des intégrales

Pour ne pas alourdir le texte, les deux intégrales des équations (2.28) et (2.35) sont présentées dans cette annexe.

Pour la première intégrale de l'équation (2.28)

$$\int_{\Gamma_i} \int_{\Omega_i} \frac{\cos\phi d\Gamma}{2\pi R}, \quad (9.5)$$

il est possible de permuter les deux intégrales et de calculer l'intégrale à l'intérieur. A partir de la figure 9.4, on constate que

$$Rd\alpha = d\Gamma \cos\phi. \quad (9.6)$$

En réalisant ce changement de variable dans l'équation (9.5), il vient

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\cos\phi d\Gamma}{2\pi R} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} d\alpha = 1 \quad (9.7)$$

Pour calculer la seconde intégrale de l'équation (2.28), on réalise le changement de variable

$$Rd\theta = d\Gamma \cos\phi \quad (9.8)$$

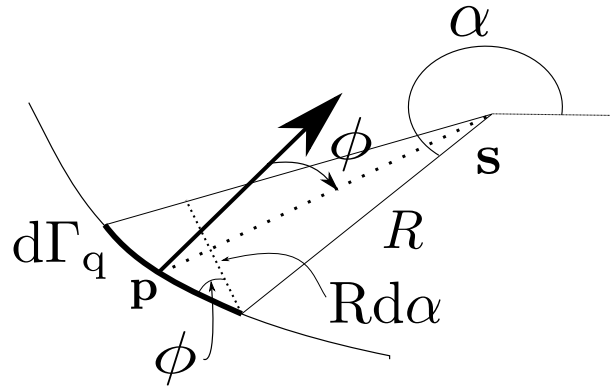


FIGURE 9.4 – Représentation géométrique pour le changement de variable de l'équation (9.6)

comme illustré à la figure 9.5.

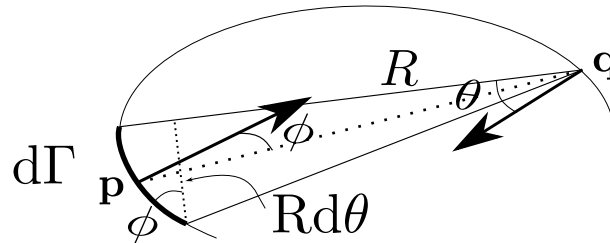


FIGURE 9.5 – Représentation géométrique pour le changement de variable de l'équation (9.8)

Ainsi,

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\cos\theta \cos\phi}{2\pi R} d\Gamma = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{2\pi} d\theta = \frac{1}{\pi} \quad (9.9)$$

On procède maintenant au calcul des deux intégrales de l'équation (2.35).

Pour la première intégrale de l'équation (2.35), on se place en coordonnées polaires et on procède au changement de variable

$$d\Omega = R dR d\alpha \quad (9.10)$$

L'intégrale devient

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2\pi c_g R} d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{l(\mathbf{r}, \alpha)} \frac{R dR d\alpha}{2\pi c_g R} = \frac{1}{2c_g \pi} \int_0^{2\pi} l(\mathbf{r}, \alpha) d\alpha \quad (9.11)$$

avec  $l(\mathbf{r}, \alpha)$  la distance entre le point  $\mathbf{r}$  et la frontière  $\Gamma$  dans la direction  $\alpha$ . On remarque que  $l(\mathbf{r}, \alpha) + l(\mathbf{r}, -\alpha)$  est la distance entre deux points distincts de la frontière passant par  $\mathbf{r}$  dans la direction  $\alpha$  ce qui est de l'ordre du libre parcours moyen  $\bar{l}$ . La distance

$l(\mathbf{r}, \alpha)$  est donc égale à  $\bar{l}/2$ . Finalement,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{2\pi c_g R} d\Omega \approx \frac{\bar{l}}{2c_g} \quad (9.12)$$

Pour la seconde intégrale de l'équation (2.35), il suffit de reprendre le même raisonnement que pour l'équation (9.7) mais en remplaçant  $\phi$  par  $\theta$

$$\int_{\Gamma_i} \frac{\cos\theta d\Gamma}{2\pi R} = 1 \quad (9.13)$$

## Bibliographie

---

- [1] A. Le Bot. *Foundation of statistical energy analysis in vibroacoustics*. OUP Oxford, 2015.
- [2] M.S. Kompella and R.J. Bernhard. Measurement of the statistical variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles. Technical report, SAE Technical Paper, 1993.
- [3] S.H. Crandall. Random vibration of one-and two-dimensional structures. In *Developments in Statistics*, volume 2, pages 1–82. Elsevier, 1979.
- [4] I. Elishakoff, A. Th. van Zanten, and S. H. Crandall. Wide-Band Random Axisymmetric Vibration of Cylindrical Shells. *Journal of Applied Mechanics*, 46(2) :417–422, 1979.
- [5] S.H. Crandall and W.Q. Zhu. Wide band random vibration of an equilateral triangular plate. *Probabilistic engineering mechanics*, 1(1) :5–12, 1986.
- [6] T. Gallot, S. Catheline, and P. Roux. Coherent backscattering enhancement in cavities. highlights of the role of symmetry. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 129(4) :1963–1971, 2011.
- [7] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Review of statistical energy analysis hypotheses in vibroacoustics. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 470(2162) :20130515, 2014.
- [8] O. Legrand and F. Mortessagne. Wave chaos for the helmholtz equation. *New Directions in Linear Acoustics and Vibration : Quantum Chaos, Random Matrix Theory, and Complexity*, 2010.
- [9] 147 milliards d’euros : c’est le coût social du bruit en France, par an!  
<https://presse.ademe.fr/2021/07/147-milliards-deuros-cest-le-cout-social-du-bruit-en-france-par-an.html>.
- [10] P.Y. Bocquet. La chasse au bruit s’ intensifie dans l’automobile. *L’Usine nouvelle*, pages 64–66, Septembre 2002.
- [11] R.H. Lyon and G. Maidanik. Power flow between linearly coupled oscillators. *The journal of the Acoustical Society of America*, 34(5) :623–639, 1962.



- [12] A. Le Bot and V. Cotoni. Validity diagrams of statistical energy analysis. *Journal of sound and vibration*, 329(2) :221–235, 2010.
- [13] H Li, N Totaro, L Maxit, and A Le Bot. Ergodic billiard and statistical energy analysis. *Wave Motion*, 87 :166–178, 2019.
- [14] S.H. Crandall and L.E. Wittig. Chladni’s patterns for random vibration of a plate. In *Dynamic response of structures; Symposium*, 1972.
- [15] I. Elishakoff. *Dramatic effect of cross-correlations in random vibrations of discrete systems, beams, plates, and shells*. Springer Nature, 2020.
- [16] M. Ouisse and J.L. Guyader. An energy residual method for detection of the causes of vibration hypersensitivity. *Journal of Sound and Vibration*, 260(1) :83–100, 2003.
- [17] P. Langer, K. Sepahvand, C. Guist, J. Bär, A. Peplow, and S. Marburg. Matching experimental and three dimensional numerical models for structural vibration problems with uncertainties. *Journal of Sound and Vibration*, 417 :294–305, 2018.
- [18] J.L. Guyader, C. Boisson, and C. Lesueur. Energy transmission in finite coupled plates, part I : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1) :81–92, 1982.
- [19] C. Boisson, J.L. Guyader, P. Millot, and C. Lesueur. Energy transmission in finite coupled plates, part II : Application to an l shaped structure. *Journal of Sound and Vibration*, 81(1) :93–105, 1982.
- [20] G. Orefice, J.L. Guyader, and C. Cacciolati. The energetic mean mobility approach (emma). In *IUTAM Symposium on Statistical Energy Analysis*, pages 47–58. Springer, 1999.
- [21] M.S. Ryu. *Application des mobilités énergétiques au couplage fluide-structure*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2002.
- [22] L. Maxit and J.L. Guyader. Estimation of SEA coupling loss factors using a dual formulation and fem modal information, part i : theory. *Journal of sound and vibration*, 239(5) :907–930, 2001.
- [23] L. Maxit. *Extension et reformulation du modèle SEA par la prise en compte de la répartition des énergies modales*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2000.
- [24] Nicolas Totaro, Cyrille Dodard, and Jean-Louis Guyader. Sea coupling loss factors of complex vibro-acoustic systems. *Journal of Vibration and Acoustics*, 131(4), 2009.
- [25] L Maxit and J.L. Guyader. Extension of SEA model to subsystems with non-uniform modal energy distribution. *Journal of sound and vibration*, 265(2) :337–358, 2003.

- [26] R.S. Langley. A wave intensity technique for the analysis of high frequency vibrations. *Journal of Sound and vibration*, 159(3) :483–502, 1992.
- [27] R.S. Langley and A.N. Bercin. Wave intensity analysis of high frequency vibrations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences*, 346(1681) :489–499, 1994.
- [28] D. J. Nefske and S. H. Sung. Power Flow Finite Element Analysis of Dynamic Systems : Basic Theory and Application to Beams. *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, 111(1) :94–100, 01 1989.
- [29] O.M. Bouthier and R.J. Bernhard. Simple models of the energetics of transversely vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 182(1) :149–164, 1995.
- [30] P.E. Cho and R.J. Bernhard. Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration*, 211(4) :593–605, 1998.
- [31] J.C. Wohlever and R.J. Bernhard. Mechanical energy flow models of rods and beams. *Journal of sound and vibration*, 153(1) :1–19, 1992.
- [32] X. Zhao and N. Vlahopoulos. A basic hybrid finite element formulation for mid-frequency analysis of beams connected at an arbitrary angle. *Journal of Sound and Vibration*, 269(1-2) :135–164, 2004.
- [33] Alain Le Bot. Comparison of vibrational conductivity and radiative energy transfer methods. *Journal of sound and vibration*, 283(1-2) :135–151, 2005.
- [34] A. Le Bot. A vibroacoustic model for high frequency analysis. *Journal of sound and vibration*, 211(4) :537–554, 1998.
- [35] A. Le Bot. Energy transfer for high frequencies in built-up structures. *Journal of Sound and Vibration*, 250(2) :247–275, 2002.
- [36] E. Reboul, A. Le Bot, and J. Perret-Liaudet. Radiative transfer equation for multiple diffraction. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 118(3) :1326–1334, 2005.
- [37] Alain Le Bot and Emeline Sadoulet-Reboul. High frequency vibroacoustics : A radiative transfer equation and radiosity based approach. *Wave Motion*, 51(4) :598–605, 2014.
- [38] Q. Zhong, H. Chen, and A. Le Bot. Radiative energy transfer model for finite anisotropic plates. *Journal of Sound and Vibration*, 497 :115947, 2021.
- [39] G. Tanner. Dynamical energy analysis—determining wave energy distributions in vibro-acoustical structures in the high-frequency regime. *Journal of Sound and Vibration*, 320(4-5) :1023–1038, 2009.

- [40] D.J. Chappell, S. Giani, and G. Tanner. Dynamical energy analysis for built-up acoustic systems at high frequencies. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 130(3) :1420–1429, 2011.
- [41] T. Hartmann, G. Tanner, Gang Xie, D.J. Chappell, and J. Bajars. Modelling of high-frequency structure-borne sound transmission on fem grids using the discrete flow mapping technique. In *Journal of Physics : Conference Series*, volume 744, page 012237. IOP Publishing, 2016.
- [42] T. Hartmann, S. Morita, G. Tanner, and D.J. Chappell. High-frequency structure- and air-borne sound transmission for a tractor model using dynamical energy analysis. *Wave Motion*, 87 :132–150, 2019.
- [43] R.H. Lyon. *Statistical energy analysis of dynamical systems : theory and applications / Richard H. Lyon*. MIT Press, Cambridge, Mass, 1975.
- [44] R.H. Lyon, R.G DeJong, and M. Heckl. Theory and application of statistical energy analysis, 1995.
- [45] B. Craik. Statistical energy analysis. *Gower, England*, 1996.
- [46] T.D. Scharton and R.H. Lyon. Power flow and energy sharing in random vibration. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(6) :1332–1343, 1968.
- [47] P.W. Smith Jr. Response and radiation of structural modes excited by sound. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 34(5) :640–647, 1962.
- [48] D.E. Newland. Calculation of power flow between coupled oscillators. *Journal of sound and vibration*, 3(3) :262–276, 1966.
- [49] D.E. Newland. Power flow between a class of coupled oscillators. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 43(3) :553–559, 1968.
- [50] F.J. Fahy. Energy flow between oscillators : special case of point excitation. *Journal of Sound Vibration*, 11(4) :481–483, 1970.
- [51] K. De Langhe. *High-frequency vibrations : Contributions to experimental and computational SEA parameter identification techniques*. PhD thesis, KU Leuven, 1997.
- [52] L. Cremer and M. Heckl. *Structure-borne sound : structural vibrations and sound radiation at audio frequencies*. Springer Science & Business Media, 2013.
- [53] T.C. Lim and R. Singh. Statistical energy analysis of a gearbox with emphasis on the bearing path. *Noise control engineering journal*, 37(2) :63–69, 1991.
- [54] G. Borello. Predicting noise transmission in a truck cabin using the statistical energy analysis approach. In *IUTAM symposium on statistical energy analysis*, pages 281–287. Springer, 1999.

- [55] T. Koizumi, N. Tsujiuchi, H. Tanaka, M. Okubo, and M. Shinomiya. Prediction of the vibration in buildings using statistical energy analysis. In *Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC)*, pages 7–13, 2002.
- [56] R.J.M. Craik. The prediction of sound transmission through buildings using statistical energy analysis. *Journal of sound and Vibration*, 82(4) :505–516, 1982.
- [57] S.H. Crandall and R. Lotz. On the coupling loss factor in statistical energy analysis. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49(1B) :352–356, 1971.
- [58] R.H. Lyon and T.D. Scharton. Vibrational-energy transmission in a three-element structure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 38(2) :253–261, 1965.
- [59] D.A. Bies and S. Hamid. In situ determination of loss and coupling loss factors by the power injection method. *Journal of Sound and Vibration*, 70(2) :187–204, 1980.
- [60] L. Wu, A. Ågren, and U. Sundbäck. Determination of loss factors for statistical energy analysis of a diesel engine with geometric average approach. *Acta Acustica*, 2 :127–142, 1994.
- [61] G. Borello. Analyse statistique énergétique (SEA) de l’environnement vibroacoustique-SEA (statistical energy analysis). 2012.
- [62] A.J. Keane and W.G. Price. Statistical energy analysis of strongly coupled systems. *Journal of Sound and Vibration*, 117(2) :363–386, 1987.
- [63] F.J. Fahy. Statistical energy analysis : a critical overview. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences*, 346(1681) :431–447, 1994.
- [64] A. Culla and A. Sestieri. Is it possible to treat confidentially SEA the wolf in sheep’s clothing? *Mechanical systems and signal processing*, 20(6) :1372–1399, 2006.
- [65] R.H. Lyon. Statistical energy analysis of dynamical systems. *Theory and Applications*, 1975.
- [66] P.G. Bremner, T.E. Burton, and A. Cunningham. AutoSEA2 : A new design evaluation tool for noise and vibration engineering. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 19777, pages 571–578. American Society of Mechanical Engineers, 1999.
- [67] J. Forssén, S. Tober, A. Corakci, A. Frid, and W. Kropp. Modelling the interior sound field of a railway vehicle using statistical energy analysis. *Applied Acoustics*, 73(4) :307–311, 2012.

- [68] F.J. Fahy. A note on the subdivision of a volume of air in a vehicle enclosure into SEA subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 271(3-5) :1170–1174, 2004.
- [69] N. Totaro. *Caractérisation de sources aérodynamiques et sous-structuration pour la méthode SEA*. PhD thesis, INSA de Lyon, 2004.
- [70] N. Totaro and J.L. Guyader. SEA substructuring using cluster analysis : The MIR index. *Journal of Sound and Vibration*, 290(1-2) :264–289, 2006.
- [71] C. Díaz-Cereceda, J. Poblet-Puig, and A. Rodríguez-Ferran. Automatic subsystem identification in statistical energy analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 54 :182–194, 2015.
- [72] S. Finnveden. A quantitative criterion validating coupling power proportionality in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 330(1) :87–109, 2011.
- [73] P.W. Smith Jr. Statistical models of coupled dynamical systems and the transition from weak to strong coupling. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(3) :695–698, 1979.
- [74] R.S. Langley. A derivation of the coupling loss factors used in statistical energy analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 141(2) :207–219, 1990.
- [75] B. Mace. The statistical energy analysis of two continuous one-dimensional subsystems. *Journal of Sound and Vibration*, 166(3) :429–461, 1993.
- [76] S. Finnveden. Ensemble averaged vibration energy flows in a three-element structure. *Journal of Sound and Vibration*, 187(3) :495–529, 1995.
- [77] T. Lafont, N. Totaro, and A. Le Bot. Coupling strength assumption in statistical energy analysis. *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 473(2200) :20160927, 2017.
- [78] R.H. Lyon. Needed : a new definition of diffusion. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 56(4) :1300–1302, 1974.
- [79] R.S. Langley and P.J. Shorter. Diffuse wavefields in cylindrical coordinates. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(4) :1465–1470, 2002.
- [80] R. Weaver. On diffuse waves in solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 71(6) :1608–1609, 1982.
- [81] D.M. Egle. Diffuse wave fields in solid media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 70(2) :476–480, 1981.
- [82] R. Weaver. Diffuse waves in finite plates. *Journal of Sound and Vibration*, 94(3) :319–335, 1984.

- [83] M. Rossi. *Audio*. EPFL Press, 2007.
- [84] F.J. Fahy and P. Gardonio. *Sound and structural vibration : radiation, transmission and response*. Elsevier, 2007.
- [85] K. Chourmouziadou and J. Kang. Acoustic evolution of ancient greek and roman theatres. *Applied Acoustics*, 69(6) :514–529, 2008.
- [86] L. Savioja and U.P. Svensson. Overview of geometrical room acoustic modeling techniques. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2) :708–730, 2015.
- [87] C. Faller. Signal processing for audio and acoustics. *Lausanne, Switzerland : EPFL*, 2010.
- [88] H Kuttruff. Sound in enclosures. *Encyclopedia of acoustics*, 1997.
- [89] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*. Interscience, 1953.
- [90] R.S. Langley. The modal density of anisotropic structural components. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 99(6) :3481–3487, 1996.
- [91] J. Berthaut, M.N. Ichchou, and L. Jezequel. Piano soundboard : structural behavior, numerical and experimental study in the modal range. *Applied Acoustics*, 64(11) :1113–1136, 2003.
- [92] A. Le Bot. Derivation of statistical energy analysis from radiative exchanges. *Journal of Sound and Vibration*, 300(3-5) :763–779, 2007.
- [93] A. Le Bot. *Introduction aux vibrations aléatoires : Cours et exercices corrigés*. Dunod, 2019.
- [94] J.L. Guyader. *Vibration in continuous media*. John Wiley & Sons, 2013.
- [95] A. Le Bot, Z. Bazari, P. Klein, and J. Lelong. Statistical analysis of vibration in tyres. *Journal of Sound and Vibration*, 392 :187–199, 2017.
- [96] G. Tanner and N. Søndergaard. Wave chaos in acoustics and elasticity. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 40(50) :R443, 2007.
- [97] S. Catheline, T. Gallot, Ph. Roux, G. Ribay, and J. De Rosny. Coherent backscattering enhancement in cavities : The simple-shape cavity revisited. *Wave motion*, 48(3) :214–222, 2011.
- [98] K. Itao and S. H. Crandall. Wide-Band Random Vibration of Circular Plates. *Journal of Mechanical Design*, 100(4) :690–695, 10 1978.
- [99] I. Elishakoff. On the role of cross-correlations in the random vibrations of spherical shells. In *Dramatic Effect of Cross-Correlations in Random Vibrations of Discrete Systems, Beams, Plates, and Shells*, pages 181–200. Springer, 2020.

- [100] A.J. Langley and P.H. Taylor. Chladni patterns in random vibration. *International Journal of Engineering Science*, 17(9) :1039–1047, 1979.
- [101] S.H. Crandall. Localized response reductions in wide-band random vibration of uniform structures. *Ing. arch*, 49(5-6) :347–359, August 1980.
- [102] R. Nagem. Random vibration of point-driven beams. *Journal of Sound Vibration*, 151(1) :168–174, 1991.
- [103] P.E. Wolf and G. Maret. Weak localization and coherent backscattering of photons in disordered media. *Physical review letters*, 55(24) :2696, 1985.
- [104] A. Tourin, A. Derode, P. Roux, B. A Van Tiggelen, and M. Fink. Time-dependent coherent backscattering of acoustic waves. *Physical review letters*, 79(19) :3637, 1997.
- [105] R. Weaver and O. Lobkis. Enhanced backscattering and modal echo of reverberant elastic waves. *Phys. Rev. Lett.*, 84 :4942–4945, May 2000.
- [106] R. Weaver and J. Yoritomo. Diffuse elastic waves in a nearly axisymmetric body : Distribution, transport, and dynamical localization. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141 :3746–3746, 05 2017.
- [107] A. Mookerjee and D.R. Dowling. Simulating acoustic coherent backscattering enhancement from random aggregations of omnidirectional scatterers. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 138(2) :758–768, 2015.
- [108] A. Kikolski and F. Guéritaud. Systèmes dynamiques et billards polygonaux. 2001.
- [109] Alba Marina Malaga Sabogal. *Etude d’une famille de transformations preservant la mesure de  $ZxT$* . PhD thesis, Universite Paris Sud-Paris XI, 2014.
- [110] J.D. Polack. Playing billiards in the concert hall : The mathematical foundations of geometrical room acoustics. *Applied Acoustics*, 38(2-4) :235–244, 1993.
- [111] I.A. Sinai. *Introduction to ergodic theory*, volume 18. Princeton University Press, 1976.
- [112] Leonid A Bunimovich. On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards. *Communications in Mathematical Physics*, 65(3) :295–312, 1979.
- [113] R. Artuso, G. Casati, and I. Guarneri. Numerical study on ergodic properties of triangular billiards. *Physical Review E*, 55(6) :6384, 1997.
- [114] O. Legrand and F. Mortessagne. Wave chaos for the Helmholtz equation. *New Directions in Linear Acoustics and Vibration : Quantum Chaos, Random Matrix Theory, and Complexity*, 2010.

- [115] V. Tyrode, N. Totaro, L. Maxit, and A. Le Bot. Coherent wave reflection in integrable or chaotic symmetrical acoustical billiards. *Proceedings of the Royal Society A*, 477(2255) :20210488, 2021.
- [116] V.F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 7(1) :185, 1973.
- [117] N. Sondergaard and G. Tanner. Wave chaos in the elastic disk. *Physical Review E*, 66(6) :066211, 2002.
- [118] M.V. Berry. Regularity and chaos mechanics, illustrated. *Eur. J. Phys*, 2 :91–102, 1981.
- [119] G. Tanner. How chaotic is the stadium billiard? a semiclassical analysis. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 30(8) :2863, 1997.
- [120] A. Krokstad, S. Strom, and S. Sørsdal. Calculating the acoustical room response by the use of a ray tracing technique. *Journal of Sound and Vibration*, 8(1) :118–125, 1968.
- [121] G. Benedetto and R. Spagnolo. Evaluation of sound absorbing coefficients in a reverberant room by computer-ray simulation. *Applied Acoustics*, 17(5) :365–378, 1984.
- [122] B. M Gibbs and D.K. Jones. A simple image method for calculating the distribution of sound pressure levels within an enclosure. *Acta Acustica united with Acustica*, 26(1) :24–32, 1972.
- [123] M. Gensane and F. Santon. Prediction of sound fields in rooms of arbitrary shape : validity of the image sources method. *Journal of sound and Vibration*, 63(1) :97–108, 1979.
- [124] J.B. Allen and D.A. Berkley. Image method for efficiently simulating small-room acoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 65(4) :943–950, 1979.
- [125] J.A. Fawcett. A method of images for a penetrable acoustic waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 113(1) :194–204, 2003.
- [126] S. Pinson. *Caractérisation des fonds marins par la méthode des sources images*. PhD thesis, Université de Bretagne occidentale-Brest, 2011.
- [127] P. Jean, J.-F. Rondeau, and F. Gaudaire. Emploi d’une méthode mixte pour le calcul du rayonnement acoustique des pneumatiques. *Proceedings of Confort automobile et ferroviaire, Le Mans*, 2002.
- [128] E. Reboul. *Vibroacoustique des mécanismes à hautes fréquences : Application aux transmissions par engrenages*. PhD thesis, Ecully, Ecole centrale de Lyon, 2005.



- [129] M. Vercammen. Sound reflections from concave spherical surfaces. part II : Geometrical acoustics and engineering approach. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(1) :92–101, 2010.
- [130] K.F. Graff. *Wave Motion in Elastic Solids*. Dover Books on Physics Series. Dover Publications, 1991.
- [131] A. Le Bot. Energy exchange in uncorrelated ray fields of vibroacoustics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 120(3) :1194–1208, 2006.
- [132] G.A. Papagiannopoulos and G.D. Hatzigeorgiou. On the use of the half-power bandwidth method to estimate damping in building structures. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 31(7) :1075–1079, 2011.
- [133] P Hubert and S Troubetzkoy. Polygonal billiards : Some open problems.

## Liste des publications de l'auteur

---

1. V. Tyrode, N. Totaro, L. Maxit, A. Le Bot. Coherent wave reflection in integrable or chaotic symmetrical acoustical billiards. *Proceedings of the Royal Society A*, 477(2255), 20210488, 2021.
2. V. Tyrode, N. Totaro, L. Maxit, A. Le Bot 2021. Vibrational energy distribution in plate excited with random white noise. In *INTER-NOISE and NOISE-CON Congress and Conference Proceedings* (Vol. 263, No. 6, pp. 965-969). Institute of Noise Control Engineering, 2021.
3. V. Tyrode, N. Totaro, L. Maxit, A. Le Bot. Influence of Crandall lines on ergodic billiard in SEA. In *Forum Acusticum* (pp. 247-250), 2020.

## **AUTORISATION DE SOUTENANCE**

Vu les dispositions de l'arrêté du 25 mai 2016 modifié par l'arrêté du 26 août 2022,

Vu la demande du directeur de thèse

Monsieur A. LE BOT

et les rapports de

Mme E. SADOULET-REBOUL  
Maître de Conférences HDR - FEMTO-ST - Université de Franche-Comté  
15B avenue des Montboucons - 25000 Besançon

et de

M. A. BATOU  
Professeur - Université Gustave Eiffel - Bâtiment Lavoisier - 5 bd Descartes  
Champs sur Marne - 77454 Marne-la-Vallée cedex 2

**Monsieur TYRODE Victor**

est autorisé à soutenir une thèse pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

**Ecole doctorale Mécanique, Energétique, Génie civil, Acoustique**

Fait à Ecully, le 28 novembre 2022

Pour le directeur de l'Ecole centrale de Lyon  
Le directeur des Formations

Grégory VIAL

