



**HAL**  
open science

# Réductions de modèles thermomécaniques non-linéaires pour l'évaluation des déformations d'un cœur de réacteur nucléaire

Bertrand Leturcq

► **To cite this version:**

Bertrand Leturcq. Réductions de modèles thermomécaniques non-linéaires pour l'évaluation des déformations d'un cœur de réacteur nucléaire. Mécanique des structures [physics.class-ph]. Institut Polytechnique de Paris, 2022. Français. NNT : 2022IPPAX029 . tel-03990361v2

**HAL Id: tel-03990361**

**<https://theses.hal.science/tel-03990361v2>**

Submitted on 12 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Réduction de modèles thermomécaniques non linéaires d'assemblages combustibles en vue d'un calcul de cœur REP

Thèse de doctorat de l'Institut Polytechnique de Paris  
préparée à École Polytechnique

École doctorale n°626 : Ecole Doctorale de l'Institut Polytechnique de  
Paris (ED IP Paris)

Spécialité de doctorat : Mécanique des fluides et des solides, acoustique

Thèse présentée et soutenue à Saclay, le 24/05/2022, par

**Bertrand LETURCQ**

Composition du Jury :

Andrei CONSTANTINESCU Directeur de recherche, Ecole Polytechnique (– LMS)	Président
Jean-Claude MICHEL Directeur de recherche, Université Aix-Marseille (– LMA)	Rapporteur
Marcus SEIDL Expert senior, PreussenElektra GmbH (– Hannover)	Rapporteur
Virginie EHRLACHER Maître de conférence, Ecole des Ponts ParisTech (– CERMICS)	Examinatrice
Pierre MOUSSOU Ingénieur de recherche, EDF (– IMSIA)	Examineur
Gilles PERRIN Professeur, FRAMATOME (– DS)	Examineur
Patrick LE TALLEC Professeur, Ecole Polytechnique (– LMS)	Directeur de thèse
Olivier FANDEUR Expert senior, CEA-Saclay (– ISAS/DM2S/SEMT)	Invité
Serge PASCAL Expert senior, CEA-Saclay (– ISAS/DM2S/SEMT)	Invité

# Thèse de doctorat



ECOLE  
DOCTORALE

## Remerciements

Je remercie chaleureusement toutes les personnes qui m'ont aidé pendant l'élaboration de ma thèse et notamment mon directeur, le professeur Patrick Le Tallec, pour son intérêt, ses conseils avisés, sa grande disponibilité et surtout sa patience à toute épreuve durant toute ma thèse. Je suis également reconnaissant à toute ma ligne hiérarchique au CEA qui a accepté l'idée de transformer une action au sein d'un projet en une thèse réalisée par un ingénieur en poste, ce qui revient à financer une action de formation continue très significative et, je le pense, bénéfique pour mon employeur. Dans l'ordre chronologique et ascendant ce sont donc Serge Pascal, Valérie Vandenberghe et Catherine Santucci qui m'ont permis de me lancer dans cette aventure. En lui forçant un peu la main, Serge Pascal a accepté l'encadrement local au CEA. Il a été rejoint à mi thèse par Olivier Fandeur, intéressé par la problématique et fin chirurgien pour opérer dans les entrailles de Castem. Mentionnons également le soutien financier de Framatome, représenté par Gilles Perrin, Hubert Salaün, Nicolas Lamorte, Julien Pacull dont les connaissances techniques et le regard m'ont été utiles. De manière plus générales je souhaite mentionner d'autres collègues qui ont œuvré avant et pendant la thèse : Jean-Luc Fayard, qui a également fait sa thèse au LMS et qui m'a embauché il y a quelques années, Jean-Charles Le Pallec, mon actuel chef de laboratoire, qui s'est assuré que je puisse travailler dans de bonnes conditions, Nicolas Hourdequin pour m'avoir appris avec enthousiasme les rudiments de Castem, Gauthier Folzan, encore un ancien du LMS, pour m'avoir écrit la source choe.eso, fort utile. J'ai également profité de la bonne ambiance du LM2S (hors période de confinement COVID) et des nombreux séminaires de niveau international du LMS. Au terme de ce parcours, je remercie enfin et surtout mon épouse et mes enfants qui ont accepté de laisser un peu de leur place à cette thèse envahissante. Leurs attentions et encouragements m'ont accompagné tout au long de ces années et l'on peut dire que nous sommes quatre à l'avoir enfin terminée.

Je dédie cette thèse à mon père, concepteur à l'ancienne de machines plus que durables, qui m'a transmis le goût du bricolage et de la création mécanique.

## Table des matières

Acronymes et notations .....	5
Introduction.....	6
1. Problématique industrielle .....	9
1.1 L'assemblage combustible .....	9
1.2 Grandissement des assemblages .....	9
1.2.1 Observation industrielle .....	10
1.2.2 Risques associés au grandissement.....	10
1.2.3 Causes du grandissement .....	10
1.2.4 Solutions techniques adoptées.....	10
1.3 Déformations latérales .....	10
1.3.1 Observations industrielles .....	11
1.3.2 Risques associés.....	12
1.3.3 Causes des déformations latérales.....	13
1.3.4 Solutions techniques adoptées.....	15
1.4 Modélisations thermomécaniques des assemblages .....	16
1.4.1 Besoins opérationnels distincts .....	16
1.4.2 Modèles simplifiés d'assemblage pour le calcul collectif des déformations du cœur .....	16
1.4.3 Modèle détaillé d'assemblage .....	19
1.4.4 Modèles réduits d'assemblage.....	19
1.4.5 Ambition pour la modélisation collective des AC.....	19
2. Comportement des alliages de zirconium sous irradiation.....	20
2.1 Les alliages de zirconium.....	20
2.2 Dilatation thermique.....	21
2.3 Durcissement par l'irradiation .....	21
2.4 Croissance sous flux de neutrons rapides.....	22
2.5 Fluage d'irradiation.....	25
2.6 Fluage thermique.....	27
2.7 Synthèse des comportements des matériaux à modéliser dans l'assemblage .....	28
3. Présentation du modèle détaillé de référence .....	29
3.1 Un modèle 3D comprenant tous les composants et liaisons de l'assemblage .....	29
3.2 Validations en laboratoire.....	31

3.3	Extension du domaine d'utilisation aux chargements en réacteur .....	32
3.4	Campagne de calculs de référence pour la réduction du modèle de fluage .....	33
3.4.1	Modèle, conditions aux limites et chargements .....	33
3.4.2	Définition du plan d'expérience .....	34
4.	Eléments de bibliographie sur les techniques de réduction de modèles et la méthode NTFA .....	36
4.1	POD .....	36
4.1.1	Origine .....	36
4.1.2	Principe de la Snapshot POD .....	36
4.1.3	POD classique .....	38
4.1.4	Galerkin POD.....	38
4.2	PGD .....	39
4.2.1	Généralités.....	39
4.2.2	Etape 1, exemple d'enrichissement avec une approche Galerkin.....	42
4.2.3	Etape 2 : mise à jour des modes temporels.....	43
4.2.4	Etape 3 : contrôle de convergence .....	43
4.2.5	Application au problème de fluage et limitation.....	44
4.3	Hyper réduction .....	44
4.3.1	Principe général .....	44
4.3.2	Enrichissement et adaptation de la base.....	44
4.3.3	Réduction du problème global (prévision HPOD).....	44
4.3.4	Hyper-réduction.....	45
4.3.5	Contrôle d'erreur .....	46
4.3.6	Application pratique à des problèmes non-linéaires et réduction de coût obtenue .....	46
4.4	NTFA.....	47
4.4.1	Principe .....	47
4.4.2	Base de modes inélastiques.....	47
4.4.3	Contraintes .....	48
4.4.4	Loi réduite .....	48
4.5	Bilan et stratégie pour la réduction du modèle d'assemblage combustible .....	49
5.	Réduction du modèle : traitement du fluage .....	51
5.1	Adaptation de la méthode NTFA à un VER de structure élancée .....	51
5.1.1	Modes macroscopiques.....	51
5.1.2	Champs associés aux différents modes .....	52
5.1.3	Forces thermodynamiques .....	54
5.1.4	Loi d'évolution réduite.....	54
5.1.5	Cas des caractéristiques locales hétérogènes .....	55
5.1.6	Problème réduit et algorithme de résolution.....	57

5.2	Validation avec un cas-test simple en fluage non-linéaire .....	57
5.2.1	Description du modèle de référence .....	57
5.2.2	Identification du modèle réduit.....	58
5.2.3	Comparaison des solutions du modèle de référence et du modèle réduit.....	60
5.3	Fluage d'un AC en conditions hétérogènes .....	62
5.3.1	Adaptation du produit scalaire pour les élément finis généralisés de type poutre et tuyau....	62
5.3.2	POD adaptée aux modes de déplacement macroscopiques .....	63
5.3.3	Modes inélastiques.....	64
5.3.4	Vérification du modèle réduit sur les points du plan d'expérience .....	64
5.3.5	Validation hors des points du plan d'expérience .....	67
5.4	Conclusions pour le modèle réduit de fluage .....	68
5.5	Perspectives : vers un potentiel réduit qui s'adapte à l'hétérogénéité.....	69
5.5.1	Produit scalaire évolutif.....	69
5.5.2	Projection de la loi d'écoulement.....	69
5.5.3	Moyenne des contrainte.....	70
5.5.4	Loi d'évolution finale .....	70
5.5.5	Caractéristique équivalente.....	71
6.	Réduction du modèle : traitement du contact.....	72
6.1	éléments de bibliographie sur la réduction d'un modèle de contact.....	72
6.1.1	Conditions locales de contact .....	72
6.1.2	Causes et variabilité des ouvertures et réactions de contact.....	72
6.1.3	Approche TFA.....	73
6.1.4	Approche par projection de Galerkin et base de modes positifs pour les forces de contact ...	73
6.2	Base des multiplicateurs de Lagrange et conditions réduite de contact.....	75
6.3	Approche nodale primale par transformation.....	75
6.3.1	Description des déplacements .....	75
6.3.2	Construction des modes d'ouverture .....	76
6.3.3	Lagrangien du problème de contact.....	78
6.3.4	Résolution par la méthode des statuts.....	79
6.3.5	Résolution par pénalisation .....	79
6.3.6	Validation de l'approche nodale primale sur un cas test de contact en 2D.....	80
6.3.7	Exploration autour de la base des modes d'ouverture.....	83
6.3.8	Bilan de la méthode primale.....	85
6.4	Approche nodale mixte pour la réduction du modèle de contact.....	85
6.4.1	Principe général et forme de la solution .....	85
6.4.2	Conditions de contact.....	86
6.4.3	Système à résoudre .....	86

6.4.4	Mise en œuvre et validation .....	87
6.4.5	Bilan de la méthode mixte .....	88
6.5	Réduction d'un modèle de contact à joints pénalisés .....	89
6.5.1	Transformation du modèle à variables internes d'ouverture en modèle mixte .....	89
6.5.2	Conditions de contact .....	89
6.5.3	Mise en œuvre et validation .....	90
6.5.4	Bilan de la méthode mixte pour un modèle de référence à joints pénalisés .....	91
6.6	Bilan des réductions de modèle de contact mises en place .....	92
7.	Réduction du modèle : traitement du frottement .....	93
7.1	Condition locale de frottement .....	93
7.2	Réduction de la cinématique de glissement .....	93
7.3	Régularisation .....	94
7.4	Loi de frottement modale .....	94
7.5	Résolution du modèle réduit de contact-frottement .....	96
7.6	Application à un cas simple de contact-frottement en 3D .....	98
7.6.1	Modèle éléments finis de référence et base de réalisations .....	98
7.6.2	Base des modes frontières élastiques .....	99
7.6.3	Base des modes de multiplicateurs de Lagrange .....	99
7.6.4	Base des modes d'ouverture .....	100
7.6.5	Base des modes de glissement .....	101
7.6.6	Simulation et corrélation de quelques cas de chargement .....	102
7.7	Bilan de la réduction du modèle de frottement .....	104
8.	Conclusions et perspectives .....	105
ANNEXE	.....	107
	Annexe 1 : Algorithme NMF des moindres carrés alternés redressés (ALS) .....	107

## Acronymes et notations

AC	Assemblage Combustible
APHR	A Priori Hyper Reduction
NMF ou NNMF	Non Negative Matrix Factorisation
PGD	Progressive Generalised Decomposition
POD	Proper Orthogonal Decomposition
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
ROM	Reduced Order Model
VER	Volume Élémentaire Représentatif $\Omega$
EF	Élément(s) Fini(s)
IFS	Interaction Fluide Structure
NTFA	Nonlinear Transformation Field Analysis
$x \approx y$	$x$ est approché par $y$
<b>AB</b>	produit scalaire canonique de grandeurs discrétisées
<b>(a, b)</b>	produit scalaire/tensoriel des grandeurs vectorielles/tensorielles <b>a</b> et <b>b</b> sur le corps $\Omega$ , soit $\iiint \mathbf{a}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dV$ ou $\iiint \mathbf{a}(x) : \mathbf{b}(x) dV$
<b>[U]</b>	matrice rectangulaire composée de champs de déplacement discrétisé <b>U</b> ou de modes, rangés en colonne
<b>[U]<sup>t</sup></b>	transposée de la matrice <b>[U]</b>
<b> F(x) </b>	module du vecteur <b>F</b> en $x$
<b>K</b>	matrice de rigidité dans la base EF complète
$\hat{U}_j^{ext\_fr}$	$j^{\text{ème}}$ mode spatial de déplacement défini uniquement sur les frontières supportant les chargements
$\hat{U}_j^{ext}$	$j^{\text{ème}}$ mode spatial de déplacement défini sur tout le corps $\Omega$ . Il découle élastiquement de $\hat{U}_j^{ext\_fr}$
$\hat{\varepsilon}_j^{ext}$	mode spatial du tenseur de déformation qui dérive du mode de déplacement $\hat{U}_j^{ext}$
$\hat{\sigma}_j^{ext}$	mode spatial du tenseur des contraintes associées au mode $\hat{U}_j^{ext}$
$\alpha_j^{ext}$	amplitude des modes $\hat{U}_j^{ext}$ et $\hat{U}_j^{ext\_fr}$
<b>[<math>\hat{\varepsilon}^{vp}</math>]</b>	Base orthonormée des modes $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$ , rangés en colonne
$\hat{\varepsilon}_i^{vp}$	$i^{\text{ème}}$ mode spatial de tenseur de déformation viscoplastique de la base <b>[<math>\hat{\varepsilon}^{vp}</math>]</b>
$\hat{U}_i^{vp}$	$i^{\text{ème}}$ mode spatial de déplacement défini sur tout le corps $\Omega$ , associé au mode de transformation $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$
$\hat{\sigma}_i^{vp}$	$i^{\text{ème}}$ mode spatial du tenseur des contraintes associées au mode $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$ .
$\alpha_i^{vp}$	amplitude du mode viscoplastique $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$
$\dot{\alpha}_i^{vp}$	taux de variation de l'amplitude du mode viscoplastique $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$
$\beta_i^{vp}$	force réduite du mode viscoplastique $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$ , obtenue par projection du champ de contraintes sur le mode $\hat{\varepsilon}_i^{vp}$
$\hat{U}_m^{ouv\_interface}$	$m^{\text{ème}}$ mode spatial scalaire de jeu normal défini sur l'interface de contact $\Gamma$ .
$\hat{U}_m^{ouv}$	mode spatial de déplacement défini sur tout le corps $\Omega$ , associé au mode $\hat{U}_m^{ouv\_interface}$
$\hat{\sigma}_m^{ouv}$	mode spatial du tenseur des contraintes associées au mode $\hat{U}_m^{ouv}$ .
$\alpha_m^{ouv}$	amplitude des modes $\hat{U}_m^{ouv}$ et $\hat{U}_m^{ouv\_interface}$
$\hat{U}_l^g$	$l^{\text{ème}}$ mode spatial de glissement tangent (champ de vecteurs) défini sur l'interface contact $\Gamma$
$\hat{U}_l^g$	mode de déplacement sur tout la structure $\Omega$ et associé au mode $\hat{U}_l^g$ .
$\alpha_j^g$	amplitude des modes $\hat{U}_j^g$ et $\hat{U}_j^g$ .
$S_n^g$	$n^{\text{ème}}$ composante du vecteur des forces modales de frottement $S^g$ dans la base <b>[<math>\hat{U}^g</math>]</b>
$\psi$	potentiel des forces pour la loi de fluage
$\emptyset$	fluence des neutrons rapides (> 1MeV) sur la structure $\Omega$ (flux par unité de surface et de temps)

## Introduction

Le retour d'exploitation des cœurs REP a fait apparaître que les assemblages combustibles fléchissent de quelques millimètres sous l'effet conjugué des efforts mécaniques et hydrauliques et sous l'effet du flux de neutrons inhérent à la fission nucléaire. Ils entrent en contact les uns avec les autres, ce qui peut retarder les opérations d'insertion/retrait des assemblages combustibles (AC) à la fin de chaque cycle, voire, dans les cas extrêmes, retarder, de par leur déformations, l'insertion de barres de contrôle. **Les enjeux de la maîtrise de ces déformations sont donc à la fois des enjeux de sûreté et des enjeux économiques.** Des actions correctives touchant au design des assemblages ont déjà permis dans les années 1990-2000 de réduire significativement l'intensité de ces déformations. Pour aller plus loin dans la compréhension de ces déformations et, éventuellement, proposer à terme des solutions technique, un modèle éléments finis (EF) détaillé d'un assemblage combustible a été mis au point au CEA. Celui-ci de quantifier précisément l'influence des trois principaux phénomènes non linéaires qui affectent la déformation latérale des AC, à savoir le fluage sous irradiation des gaines du combustible et du squelette de l'assemblage, l'ouverture d'une partie des contacts ressorts-bossettes à l'intérieur des grilles et le glissement des crayons au travers des grilles, aussi mentionnés lors des études de (Billerey, 2004; Gabrielsson et al., 2018; Wanninger, 2018). L'étape suivante de l'analyse est **l'étude collective des assemblages interagissant au sein du cœur et soumis à son environnement**, c'est-à-dire aux forces hydrauliques verticales et latérales générées par le caloporteur, au champ de température de l'ordre de 300°C et au flux de neutrons rapides. Afin de pouvoir mener de nombreuses études configurationnelles à l'échelle du cœur sur une durée de l'ordre de la journée, **il est nécessaire d'établir un modèle mécanique d'assemblage qui soit représentatif des phénomènes de fluage, de contact et de frottement en son sein, tout en présentant une taille mémoire et une durée de résolution unitaire sensiblement plus faible, de l'ordre de la minute.** En effet, un modèle détaillé de l'assemblage combustible serait représentatif pour le calcul des déformations mais trop lourd pour être utilisé comme brique de base du modèle de cœur. De fait, il conduirait à des calculs trop exigeants en terme de mémoire et de temps calcul puisque le modèle de cœur atteindrait alors plus de 200 millions de degrés de liberté avec des non-linéarités moyennes à fortes dans presque toutes les éléments. Un tel modèle ne peut être résolu rapidement avec les méthodes et logiciels standards. A l'inverse divers modèles simplifiés ont été mis au point en lien avec les industriels (Horváth and Dressel, 2013; Lamorte et al., 2021; Levasseur et al., 2009; Wanninger et al., 2016), qui permettent un calcul de cœur en un temps raisonnable. Néanmoins, ils sont bâtis sur des hypothèses simplificatrices qui ne permettent de capter que le premier ordre du comportement des assemblages en cœur. Ainsi, presque tous font l'hypothèse que la grille est indéformable, que tous les tubes-guides se déforment de la même manière. En conséquence, étant donné le nombre et la complexité des phénomènes en jeu, les hypothèses opérées au sein de ces modèles industriels ne permettent pas d'avoir une confiance absolue dans les prévisions à long terme apportées par ces modèles simplifiés. De plus, une partie des études de couplage en neutronique/mécanique leur sont interdites du fait du fait de la perte d'information locale lors de l'homogénéisation des champs qu'ils opèrent. Nous avons donc besoin de modèles d'assemblage combustibles spatialement plus représentatifs et néanmoins de taille compatible avec un calcul global de cœur. La modélisation classique par éléments finis est ici prise en défaut. **Il existe des techniques de réduction de modèle qui, bien que non encore employées sur cette question des déformations des assemblages en cœur, pourraient permettre de mettre en place un meilleur compromis taille/représentativité** du modèle d'assemblage, à utiliser ensuite dans la simulation à l'échelle du cœur.

Une des méthodes les plus utilisées dans le domaine de la réduction d'ordre est la **POD** (Proper Orthogonal Decomposition) initialement développée par Karhunen et Loeve (Karhunen K., 1946). Elle permet, à partir d'une collection de résultats connus appelés snapshots, d'extraire une base orthonormée de modes spatiaux et/ou temporels, unique, permettant de reconstruire de manière optimale la collection des snapshots par combinaison linéaire avec un critère d'erreur choisi arbitrairement. Le nombre de modes nécessaire est alors dépendant de l'erreur de recombinaison que l'on s'autorise. Sur un problème linéaire, on peut alors réaliser une opération de projection (Galerkin POD) sur cette base de modes obtenue et ainsi réduire directement le modèle linéaire avec des pertes d'information aussi faibles que l'on veut, sous la forte réserve que le domaine d'utilisation soit couvert par celui des snapshots. Malheureusement, cette technique dite *a posteriori* (qui utilise l'information contenue dans des réalisations préalables), s'avère insuffisante dès lors que le modèle à réduire obéit à un comportement non-linéaire. Ensuite vient la **PGD** (Ladevèze, 1985) qui permet de

réduire de nombreux modèles non-linéaires et dont l'idée générale est d'opérer une décomposition espace-temps progressive de la solution. Il s'agit d'une méthode *a priori*, c'est-à-dire qui ne nécessite pas de disposer de snapshots au préalable. Ceci est certes un atout mais aussi un inconvénient car lorsque le contrôle d'erreur indique que la double base ne suffit plus il devient alors nécessaire de rechercher une nouvelle paire de modes espace et temps pour l'enrichir. Or cette opération peut se révéler très coûteuse puisqu'elle demande un certain nombre de résolutions du modèle complet non-linéaire. Enfin, il faut citer une méthode plus récente promue par (Ryckelynck, 2009), appelée *A Priori* Hyper-Réduction (**APHR**), qui fait intervenir deux niveaux de réduction : le premier concerne la formulation de l'équilibre et le second permet d'intégrer le comportement sur un nombre réduit de points. L'application de cette méthode à des problèmes de contact a été récemment réalisée (Fauque et al., 2018) mais appelle encore des progrès vis-à-vis du gain sur le temps de résolution. Concernant spécifiquement la réduction d'un modèle de contact sans frottement, (Balajewicz et al., 2016) a apporté une contribution importante en utilisant une décomposition en **modes positifs** des forces de contact afin de projeter les inégalités de contact sans perte de signe. Le nombre de conditions à respecter s'en trouve alors réduit. Enfin, si l'on regarde du côté de l'homogénéisation, qui est aussi une forme de réduction de modèle, on trouve, pour les matériaux à comportement non-linéaire, les travaux de (Michel and Suquet, 2016, 2004, 2003) sur la **NTFA**. Là aussi, il s'agit d'une réduction à deux niveaux, le second consistant à construire une loi d'évolution approchée formulée uniquement avec les variables réduites du volume élémentaire représentatif (VER), une loi exacte ne pouvant être obtenue, sauf cas particulier. Cette technique *a posteriori* apporte des gains de temps de résolution importants, de l'ordre de 100 à 1000. Elle s'est montrée représentative sur des études variées de composites à matrice élastoplastique, sur du fluage et de la plasticité cristalline, etc. Néanmoins, elle semble n'avoir jamais été appliquée à des VER présentant du contact et du frottement entre les phases qui le constituent. De plus, elle est, par définition, actuellement cantonnée au domaine de l'homogénéisation. Le calcul homogénéisé suppose la séparation entre une échelle macroscopique, qui est celle de la structure, et une échelle microscopique, qui nécessite la définition d'un VER multiphasé. Enfin, ce calcul homogénéisé doit tout de même résoudre l'équilibre et le comportement homogénéisé sur un assez grand nombre de cellules périodiques, qui remplissent la forme de la structure.

En résumé, La POD permet de réduire simplement la dimension des modèles linéaires. La PGD, puis l'hyper-réduction permettent de réaliser de nombreuses réductions de modèles non-linéaires. Dans le cadre particulier d'une démarche d'homogénéisation non-linéaire, la NTFA permet de réduire la durée d'un calcul de fluage. Enfin, la projection des inégalités de contact sur des modes positifs bien choisis, permet de réduire un modèle de contact. Toutefois, la PGD reste assez lourde, du fait de son principe de méthode *a priori*, qui nécessite d'utiliser le modèle détaillé à chaque enrichissement de la base modale. Quant à l'hyper-réduction, elle est actuellement au stade de l'évaluation pour les problèmes de contact. La NTFA a l'avantage d'être très efficace en terme de temps calcul. Néanmoins, elle nécessite d'une part, de pouvoir définir un VER périodique au sein de la structure et, d'autre part, aucun exemple de traitement du contact et du frottement n'a encore été donné dans ce cadre. Enfin, pour la réduction d'un modèle de frottement, aucune voie générale ne semble avoir été définie. In fine, aucune de ces techniques, prises isolément, ne semble en mesure de réduire au niveau attendu le problème de structure qui présente simultanément les trois non linéarités de fluage, de contact et de frottement, qui contribuent aux déformations irréversibles des assemblages combustibles.

**En conséquence, cette étude consistera à développer une méthode de réduction de modèle tenant compte simultanément des phénomènes non-linéaires de fluage, de contact et de frottement afin de calculer en quelques minutes les déformations d'un assemblage combustible au long d'un cycle de puissance en réacteur.**

Après une revue des phénomènes qui contribuent à la déformation des assemblages au chapitre 1 et, au chapitre 2, celle du comportement des alliages de zirconium sous irradiation, nous présenterons au chapitre 3 le modèle thermomécanique détaillé d'assemblage combustible sur lequel doit s'appuyer la réduction de modèle. Les trois techniques de réduction de modèles les plus courantes seront ensuite détaillées au chapitre 4. La stratégie de réduction de modèle à mettre en œuvre est ensuite abordée au travers de trois axes définis par le type de non-linéarité à traiter. Ainsi, l'objectif du chapitre 5 est de construire une méthode de réduction de modèle de fluage d'une structure élancée, en profitant de la capacité avérée de la NTFA dans le domaine du fluage. **La condition pour garantir une grande vitesse de calcul dans le cadre NTFA est de considérer directement la totalité de l'assemblage comme un pseudo VER de structure.** Cette idée nécessite de redéfinir et d'étendre la base des modes de déformations moyennes du VER car les quelques

degrés de liberté qu'offre le tenseur de déformation effectif ne sont pas adaptés pour décrire la déformée de la structure élancée qu'est l'assemblage combustible. Nous chercherons donc à définir cette base de déformations moyennes, de dimension aussi faible que possible, en identifiant les informations minimales qui seront, d'une part, nécessaires pour capturer les causes des déformations de l'assemblage dans l'environnement du cœur et, d'autre part, des informations attendues pour les analyses de risque industrielles. A partir de là, nous reformulerons l'équilibre et la loi de fluage, approchée en base réduite, et validerons d'abord la méthode sur un cas simple, avant de **l'appliquer sur la structure cible**, à savoir un modèle détaillé d'assemblage combustible. Celui-ci étant déjà optimisé, il fait appel à des **éléments finis structuraux, qui nécessitent une adaptation du produit scalaire** pour construire la base des modes de fluage et les opérateurs. On montrera les grandes étapes de construction du modèle réduit de fluage puis on le **validera par rapport aux réalisations du modèle détaillé**. L'objet du chapitre 6 est ensuite **la mise en place d'une modélisation réduite des contacts, compatible avec le cadre de la NTFA**, utilisé pour la réduction du modèle de fluage. Pour cela, premièrement, on introduit une nouvelle transformation non-linéaire définie par l'ensemble de tous les jeux normaux entre les crayons et les grilles et, deuxièmement, on reprend l'idée de Balajewicks de projeter les inégalités contact sur des modes positifs de multiplicateurs de Lagrange, construits *a posteriori* à l'aide d'un algorithme NMF. On propose enfin une méthode permettant de construire une base suffisante et de taille maîtrisée afin de réduire la dimension des jeux. Le chapitre 7 aborde, quant à lui, la **réduction du problème de frottement**, dont la formulation doit s'accorder avec l'approche en transformation et la représentation des efforts de contact, définies aux chapitres précédents. La transformation cinématique de glissement tangentiel sera introduite et les conditions de frottement seront régularisées. Une base POD permettra alors de représenter les glissements à l'aide d'une base de faible dimension. On montrera ensuite comment exprimer les conditions de frottement à l'aide de termes précalculés faisant intervenir les modes positifs de force normale de contact et les modes POD de glissements afin de mettre à jour la surface de charge en fonction de l'état en base réduite. Un test de validation est finalement mis en œuvre pour le contact et le frottement en considérant le cas de deux structures élancées voisines, dont l'une est soumise à des forces externes.

# 1. Problématique industrielle

## 1.1 L'ASSEMBLAGE COMBUSTIBLE

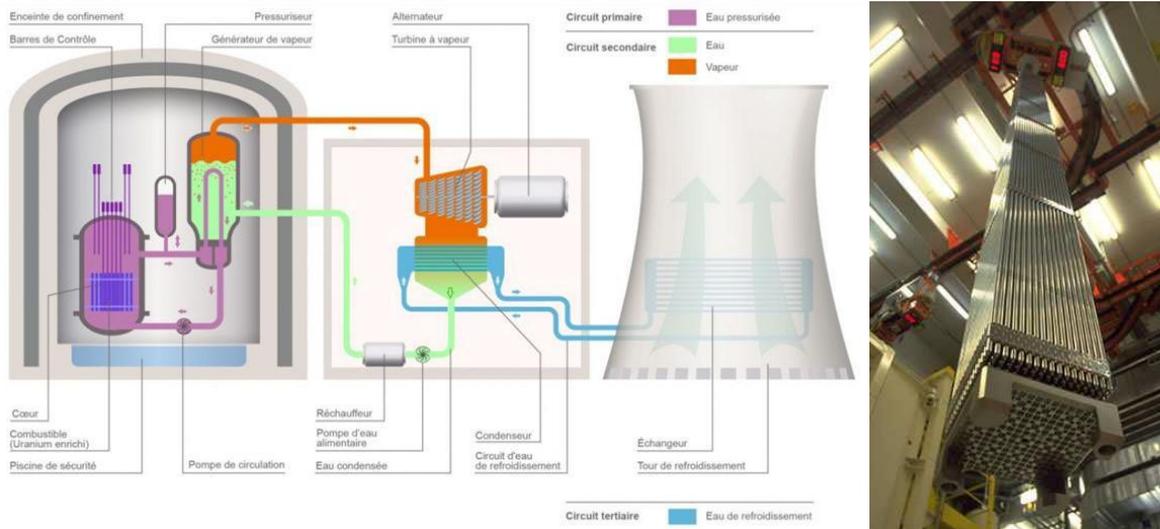


Figure 1 : schéma de fonctionnement d'un réacteur à eau pressurisé (Connaissance des énergies, 2011) et photographie d'un assemblage combustible (IRSN, 2019).

Le cœur d'un REP contient de 157 (REP 900 MWe) à 241 assemblages combustibles (EPR), répartis sur un réseau à pas carré, dont nous pouvons voir un exemple à la Figure 1 (photo de droite). Il s'agit de structures élancées puisque leur hauteur est proche de 5 m pour une largeur de seulement 22 cm. Leur masse d'environ 700 kg se situe surtout dans les quelques 265 crayons combustibles qui contiennent les pastilles d'oxyde d'uranium. La Figure 2 montre que ces crayons sont simplement maintenus en place par pincement au moyen de deux petits ressorts à lame en inconel, logés dans chaque cellule des grilles du squelette, lequel étant la structure porteuse de l'ensemble. Ce squelette est formé des embouts inférieurs et supérieurs, en acier, et d'une dizaine de grilles horizontales. Ces éléments sont reliés entre eux par l'intermédiaire de 24 tubes-guides également en alliage de zirconium (illustration en Figure 2). Ces tubes-guides reçoivent les barres de contrôle et/ou d'arrêt du cœur (contrôle de la réactivité et de la nappe de puissance). L'assemblage combustible est donc une structure élancée mais lourde et de faible raideur latérale. Si l'on tente de la faire fléchir de quelques millimètres, elle exhibera une réponse non-linéaire et présentera une déformée résiduelle due au glissement des crayons dans les grilles. En réacteur, du fait de l'irradiation, de la température et des efforts mécaniques, d'autres déformations apparaissent, tels le grandissement axial de l'assemblage et les déformations latérales, en partie dues au fluage.

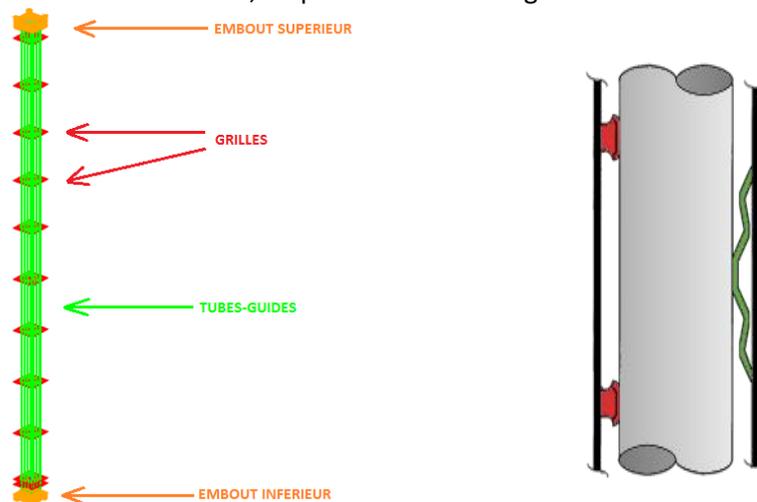


Figure 2 : maillage du squelette (à gauche) et schéma de principe d'une liaison crayon-grille (à droite), le crayon est pincé entre les bossettes (rouges) et le ressort à lame (vert).

## 1.2 GRANDISSEMENT DES ASSEMBLAGES

### 1.2.1 Observation industrielle

Au cours de l'irradiation en cœur, on constate généralement un allongement irréversible des assemblages de l'ordre du centimètre. Cet allongement est directement lié à celui des tubes-guides. Il apparaît que les valeurs d'allongement mesurées après irradiation, cf. Figure 3, sont dispersées et dépendent beaucoup de la conception de l'assemblage, notamment des matériaux utilisés, ainsi que des pré-charges axiales exercées par le ressort de maintien situé en tête d'assemblage (Gabrielsson et al., 2018). Les crayons combustibles s'allongent généralement plus que les tubes-guides et coulisent alors dans les grilles.

### 1.2.2 Risques associés au grandissement

Le principal risque associé à un grandissement extrême est de dépasser la capacité d'absorption en déplacement des ressorts du système de maintien. L'assemblage arriverait alors en butée et pourrait flamber, interdisant le mouvement vertical des barres de contrôle à l'intérieur de ses tubes-guides. Un grandissement important, même sans atteindre la butée, amène également une augmentation de la compression verticale de l'assemblage et favorise, par conséquent, ses déflexions latérales.

### 1.2.3 Causes du grandissement

Il est communément admis que cet allongement irréversible est la résultante de deux phénomènes antagonistes, à savoir : d'une part, la croissance sous flux de neutrons rapides d'énergie supérieure à 1 MeV (Fidleris, 1988), qui tend à allonger les tubes-guides et, d'autre part, le phénomène de fluage, qui tend à les raccourcir puisque l'assemblage est soumis en permanence à une forte compression du système de maintien. La croissance sous flux neutronique et le fluage des alliages de zirconium seront détaillés au §2.

### 1.2.4 Solutions techniques adoptées

Au niveau de la conception des assemblages combustibles, les améliorations réalisées pour limiter leur grandissement ont principalement porté sur la mise au point de nouveaux matériaux pour les tubes-guides, caractérisés par une croissance sous flux moins importante. Pour ne citer que le cas des assemblages Framatome, le Zircaloy-4 (Zy-4) détendu a fait place au Zircaloy-4 recristallisé, puis au M5™. La Figure 3 illustre l'impact de l'utilisation de ce dernier alliage sur l'allongement des assemblages sous irradiation.

**Fuel Assembly Growth, %**

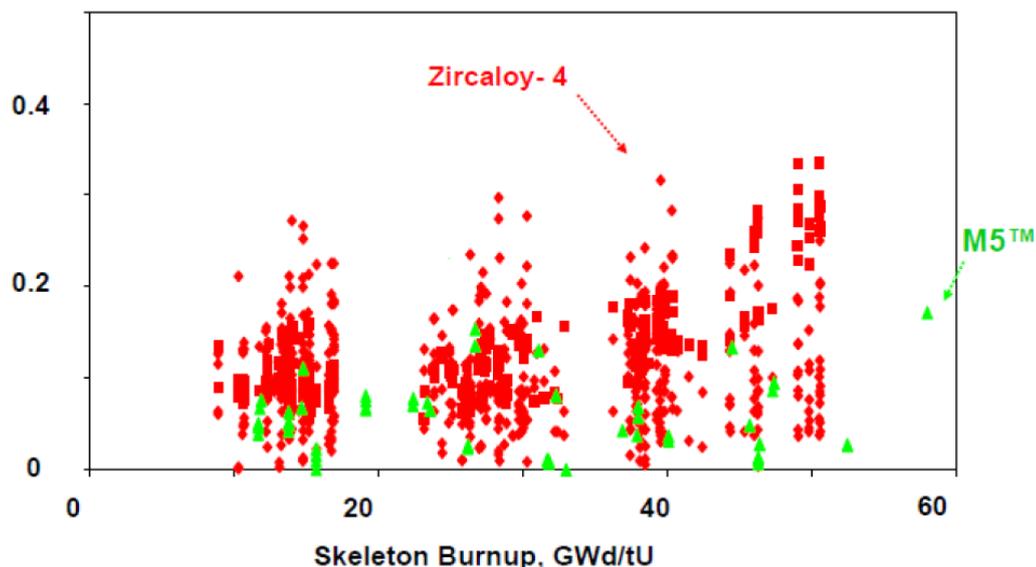


Figure 3 : grandissement d'assemblages combustible en Zircaloy-4 et M5™ en fonction de l'épuisement (Mardon, Hoffmann, & Garner, 2005).

D'autre part, en exploitation, des procédures de contrôle périodique existent afin de vérifier régulièrement que les barres absorbantes coulisent de manière satisfaisante à l'intérieur des tubes-guides, c'est-à-dire avec des valeurs de force axiale inférieures à une limite maximale autorisée.

## 1.3 DÉFORMATIONS LATÉRALES

### 1.3.1 Observations industrielles

Les assemblages neufs que l'on insère dans un cœur de réacteur à eau pressurisée sont initialement droits. A l'issue d'une irradiation de 12 à 18 mois au sein du réacteur, ils présentent des déformations latérales irréversibles, qui prennent généralement 3 formes : mode 1 (forme en C présentant un seul ventre), mode 2 (forme en S) et mode 3 (forme à 3 ventres). Les 2 premiers modes sont illustrés sur la Figure 4. Les déformées sont présentes dans les 2 plans verticaux de manière indépendante.

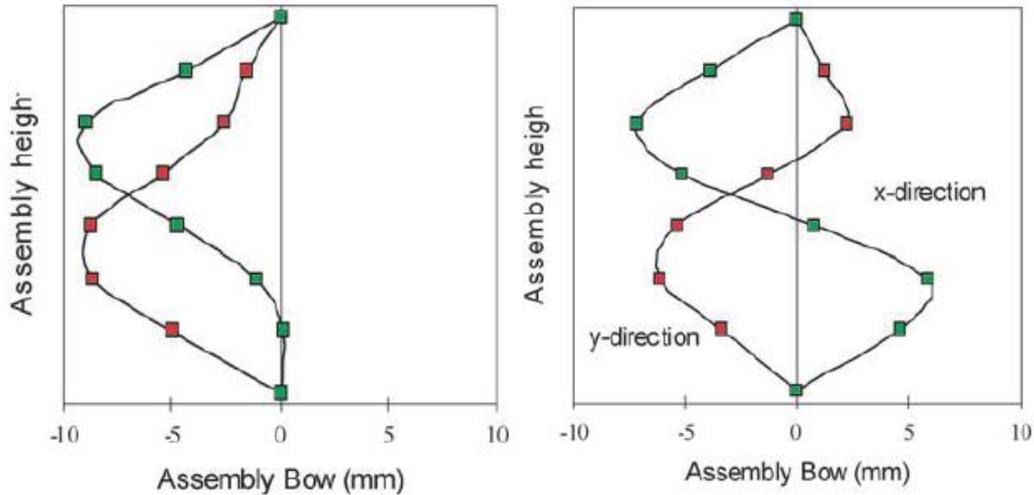


Figure 4 : réacteur Ringhals3 – observation de déformations latérales d'assemblages combustibles en forme de C et en forme de S dans les plans orthogonaux x et y (International Atomic Energy Agency, 2010).

La Figure 5 illustre les déformations résiduelles des assemblages d'un REP selon un plan horizontal correspondant à l'altitude de la 8<sup>ème</sup> grille de l'AC en partant du bas.

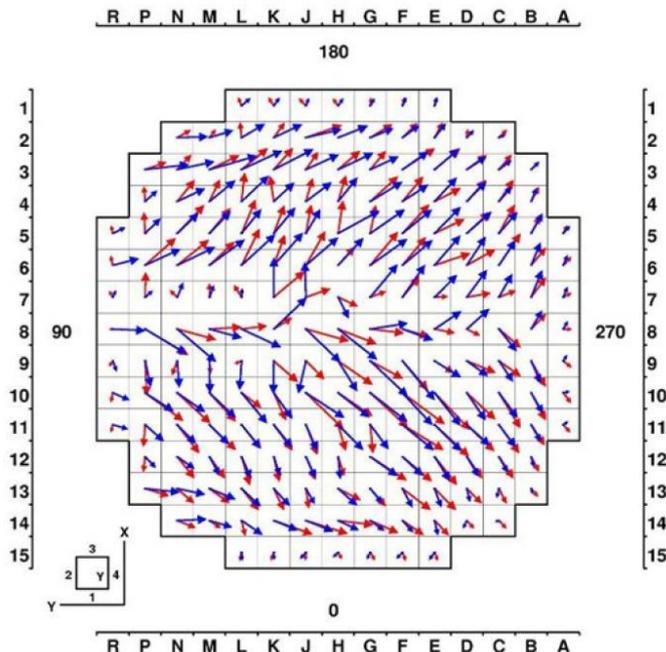


Figure 5 : illustration des déformations latérales des assemblages en fin de cycle au niveau de la 8<sup>ème</sup> grille. Mesures en bleu et calculs en rouge. (Lascar C., 2015).

Les déplacements latéraux mesurés ne dépassent jamais 20 mm car le cumul des jeux initialement disponibles entre assemblages depuis les grilles du centre du cœur jusqu'à la périphérie du cœur correspond à cette valeur. Ce maximum de déflexion est donc observé sur un assemblage du centre du cœur qui appuie sur tous les autres assemblages jusqu'à les mettre en butée contre l'enveloppe du cœur, qui est la boîte métallique englobant les assemblages.

Notons qu'EDF a mis en place le système DAMAC de mesure des déformations latérales des assemblages dans les piscines d'une partie de ces réacteurs. Celui-ci mesure la position horizontale des grilles à différentes hauteurs après avoir retiré l'assemblage du cœur.

### 1.3.2 Risques associés

Une courbure forte des tubes-guides peut conduire à un frottement important lorsque les barres d'arrêt chutent. De ce fait, leur temps de chute peut être augmenté et ne plus être acceptable du point de vue de la sûreté. Le premier exemple recensé est celui du réacteur suédois de Ringhals 4 en 1994 (Grard, 2014; International Atomic Energy Agency, 2010; Kerkar and Paulin, 2008).

Plus couramment, le problème est économique puisqu'il peut conduire à détériorer des assemblages lors des opérations de manutention entre 2 cycles d'irradiation. En effet, quand des assemblages voisins très déformés s'appuient les uns sur les autres et, lorsqu'on soulève l'un de ces assemblage pour le sortir du cœur, il arrive qu'une de ses grilles s'accroche à un des assemblages voisins et se détériore, malgré la forme des ailettes de guidage prévues pour pallier ce risque (illustration en Figure 6). On comprend l'intérêt de maîtriser les déformations latérales des assemblages lorsqu'on sait qu'il faut compter de l'ordre du million d'euros par assemblage combustible neuf ou un million d'euros de manque à gagner par jour de retard d'exploitation du réacteur.

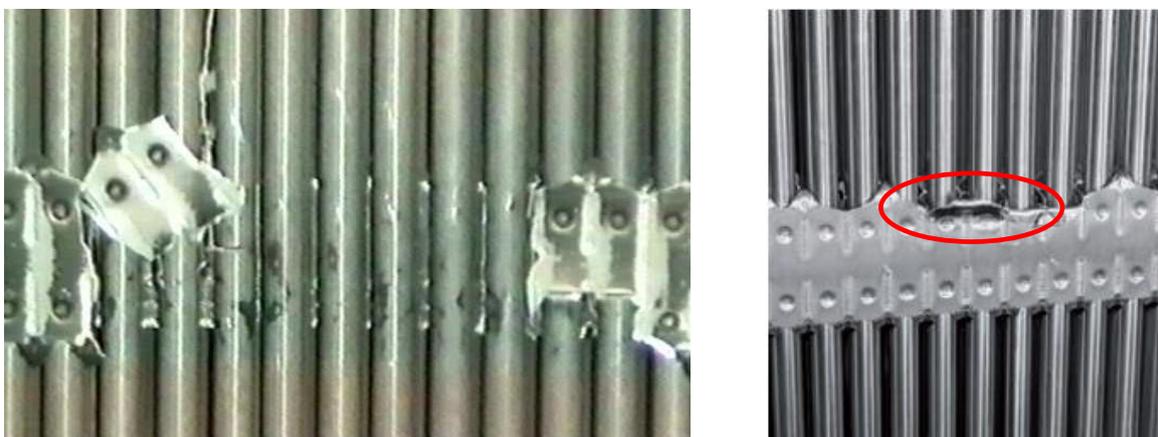


Figure 6 : endommagements de grilles lors d'opérations de manutention (International Atomic Energy Agency, 2010).

Un troisième risque, bien que de moindre importance jusqu'à présent, est le phénomène de tilt (Saeed et al., 2016). Il s'agit d'un déséquilibre azimuthal temporaire de la répartition de puissance dans le cœur pendant la montée en puissance, qui tend généralement à disparaître avant que la pleine puissance ne soit atteinte. Ce phénomène est étudié sur différents axes, en particulier l'influence de la flèche des assemblages sur la neutronique à l'intérieur de l'AC et sur un ensemble d'AC (De Lambert et al., 2019). Une hypothèse récente de (Gabrielsson et al., 2018) porte sur l'influence de la séquence de démarrage du refroidissement. Au début de la séquence, une seule pompe fonctionne. Elle entraînerait alors un flux de réfrigérant temporairement hétérogène qui induirait une compaction latérale du cœur (les assemblages seraient poussés d'un côté du cœur lorsqu'une seule pompe primaire est active). Cette hypothèse d'interaction fluide-structure explique alors assez simplement la dissymétrie latérale de puissance observée et sa disparition une fois que toutes les pompes de refroidissement fonctionnent de manière égale, rétablissant une meilleure symétrie d'écoulement dans le cœur.

### 1.3.3 Causes des déformations latérales

Tout d'abord, avant même de citer les causes, on a abordé au 1.3.1 le fait que la géométrie du cœur conditionne les flèches maximales atteignables. En effet, un paramètre technologique important est la valeur des jeux entre grilles voisines de même altitude lorsque le réacteur est en fonctionnement. Ainsi le jeu total disponible sur une ligne d'assemblages dépend du nombre d'assemblages dans la ligne, du jeu initial au plan entre grilles, et des coefficients de dilatation des grilles en zirconium et des plaques en acier qui supportent et guident les pieds et têtes des assemblages. Ce jeu est également légèrement réduit par la croissance irréversible des grilles sous irradiation. En ce qui concerne la dilatation, notons que les premiers assemblages des réacteurs à eau pressurisée avaient des grilles en inconel, à fort coefficient de dilatation. Pour des raisons d'opacité aux neutrons thermiques et des raisons de retraitement, celles-ci furent remplacées par des grilles en alliage de zirconium. Leur coefficient de dilatation est environ trois fois plus faible que celui des plaques de cœur en acier. Cette dilatation différentielle favorise donc une augmentation des jeux à chaud entre grilles. Ce jeu complémentaire d'un peu moins d'un millimètre représente une augmentation de 30%. Dans un plan horizontal de cœur, ces jeux se cumulent sur une rangée d'AC et autorisent alors jusqu'à 20mm de flèche pour les assemblages placés au centre du cœur. Les AC périphériques sont, quant à eux, rapidement bloqués par le contact avec l'enveloppe de cœur.

La déformation quasi-statique de l'AC progresse pendant les quelques cycles d'irradiation de son séjour dans le cœur du réacteur. Elle s'avère être le résultat complexe d'un certain nombre de phénomènes et de forces.

Tout d'abord, en ce qui concerne les forces externes, chaque AC est soumis à une force de compression verticale par l'intermédiaire des ressorts de maintien, à des forces de contact potentielles avec ses quatre voisins, en fonction de leur déformation, et, dans une large mesure, à des forces hydrauliques. Ces forces sont à la fois verticales et latérales. La composante verticale est assez constante et si importante qu'elle serait capable de soulever l'AC s'il n'était pas maintenu axialement. En revanche, les forces latérales sont de moindre intensité mais fluctuent beaucoup avec la position dans le cœur et dans le temps. Comme il semble que ces forces hydrauliques latérales soient la principale cause de la déformation des AC, de nombreuses études sont menées sur l'interaction fluide-structure. Il a été démontré que déformations et écoulement influent fortement l'un sur l'autre (Horváth and Dressel, 2013; Wanninger et al., 2018). En effet, les déformations des AC modifient les espaces d'eau entre assemblages, modifiant la carte des débits dans le cœur, qui à son tour influence la carte des pressions et donc les forces latérales sur les assemblages de combustible (De Lambert et al., 2021). La Figure 7 ci-dessous considère la zone d'écoulement entre 2 grilles pour le cas d'un jeu assez faible de 1mm. Elle illustre, à gauche, la surpression en amont de la zone convergente formée par les bords inclinés des grilles et, à droite, la redistribution locale de débit qui apparaît lorsque le jeu entre deux grilles est faible ou nul. Suivant la déformée des assemblages voisins, les jeux sont plus ou moins ouverts. Ils constituent alors un chemin plus ou moins perméable qui influence le champ de pression et de débit au sein du cœur.

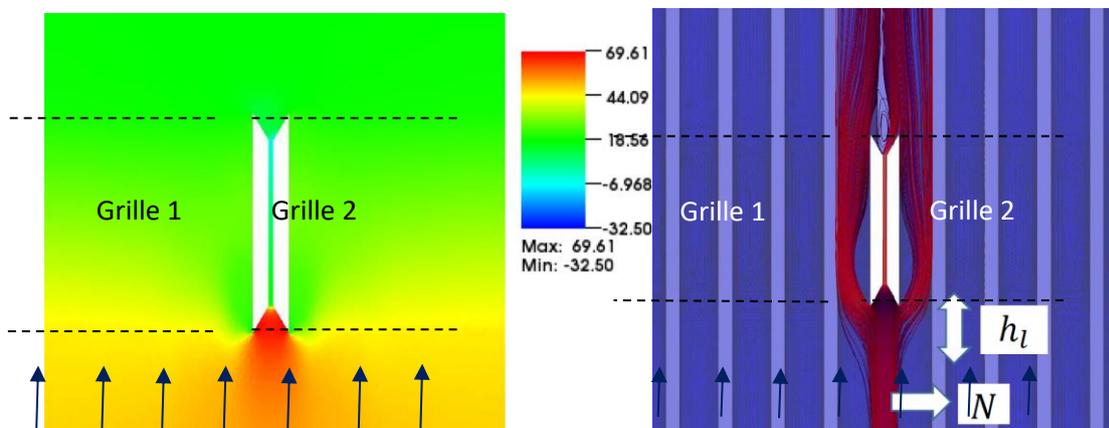


Figure 7 : cas d'un jeu entre grilles de 1 mm selon une coupe 2D verticale. Calcul CFD de la pression en amont, au milieu et en aval des bords de grilles (zones blanches) et, à droite, redistribution des lignes de flux, de la lame d'eau inter-assemblages vers l'intérieur des faisceaux de crayons (De Lambert, 2021).

La répartition des débits dépend également des conditions aux limites en amont, c'est-à-dire principalement au niveau du plenum inférieur, juste en-dessous des assemblages (Fournier et al., 2007), et en aval.

La forme des plenums et le nombre de tuyaux primaires qui y sont connectés sont des paramètres d'importance (Sheng and Seidl, 2015). De manière générale, le plenum inférieur présente une surpression du caloporteur en son centre qui génère en bas des AC des flux radiaux de caloporteur orientés vers la périphérie du cœur, comme le montre le schéma de principe de la Figure 8. Inversement, vers le haut des assemblages on peut observer des flux partiellement centripètes dont la disposition dépend de la position des 3 ou 4 tuyaux de sortie du cœur.

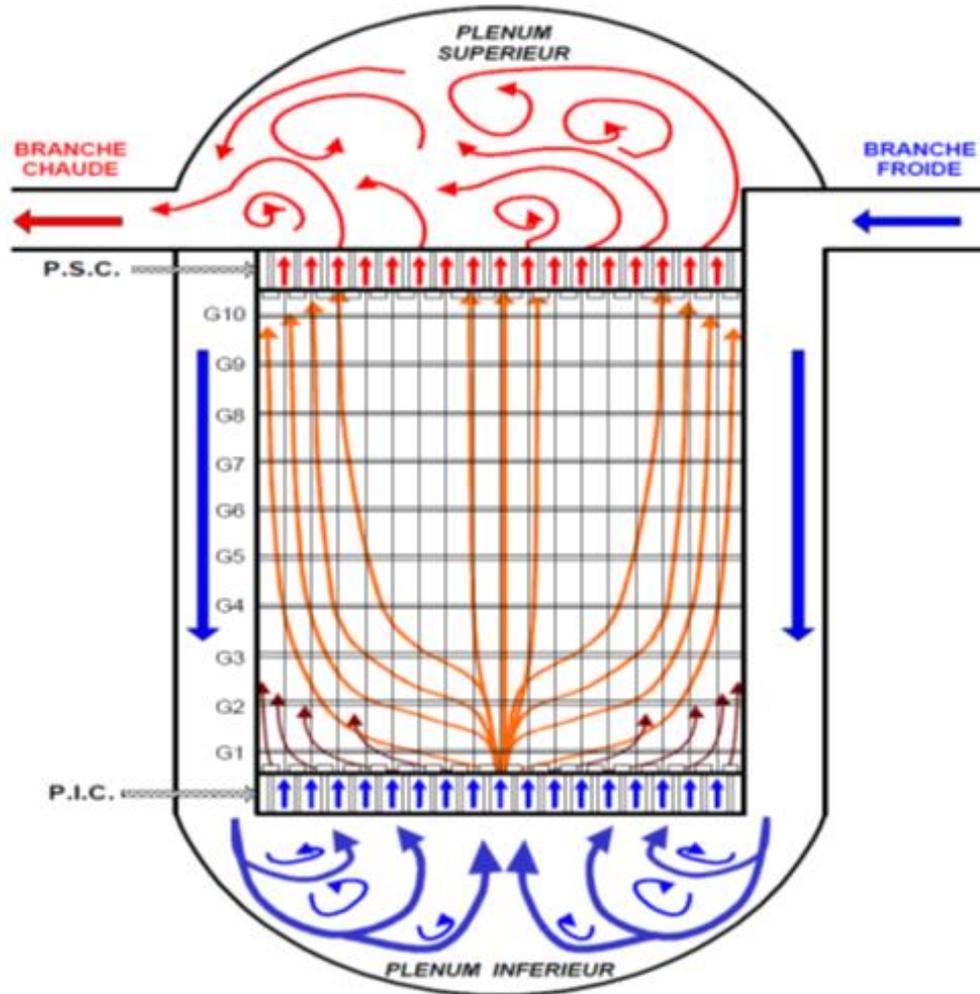


Figure 8 : illustration de la redistribution des écoulements du caloporteur à grande échelle au sein du cœur (Fernandes, 2010).

Deuxièmement, en ce qui concerne les mécanismes internes conduisant aux déformations des AC, l'un des plus importants est le fluage sous irradiation des alliages de zirconium (Fidleris, 1988; Gharbi, 2015; Gilbon et al., 2000). Sa vitesse est presque linéaire, à la fois avec la contrainte et le flux de neutrons rapides, et dépend modérément de la température (Kecek and Van Uffelen, 2016). Un autre phénomène important est le glissement axial et rotatif entre les crayons combustibles et les grilles. Les efforts de frottement contribuent à la déformation macroscopique irréversible de l'assemblage, toutefois de manière décroissante du fait de la relaxation progressive des ressorts de la grille sous flux de neutrons (Scholz and Matera, 2000). D'autres phénomènes ont également une influence potentielle sur la flèche de l'AC. Par exemple, la croissance axiale des tubes-guides (Mardon et al., 2005a), due à l'irradiation, bien que ralentie par le fluage sous compression, tend à augmenter la précharge axiale, favorable à la flèche. Par ailleurs, en périphérie du noyau, le flux de neutrons présente d'importants gradients latéraux. Or, le flux neutronique et la croissance axiale sont directement liés. La conséquence est un gradient latéral dans la croissance axiale des crayons et des tubes-guides de l'AC qui, à son tour, tend à fléchir vers l'intérieur du cœur, comme le fait la dilatation thermique.

(Wanninger, 2018) dresse une liste de toutes les causes suspectées de s'ajouter et d'influencer la déformation des AC. Il reporte les principales dans la Figure 9.

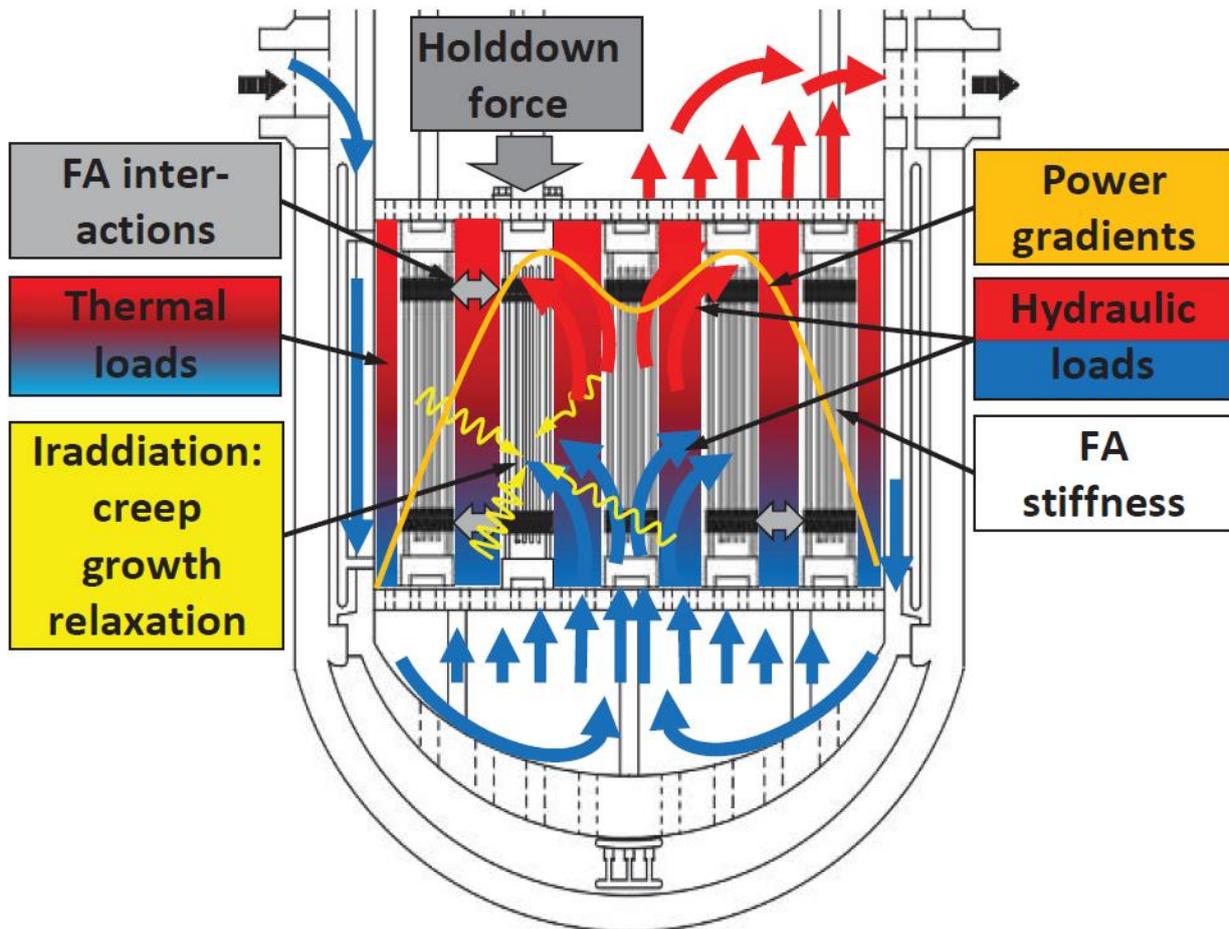


Figure 9 : principaux phénomènes gouvernant la flèche des assemblages combustibles selon (Wanninger, 2018).

#### 1.3.4 Solutions techniques adoptées

Afin de réduire la déflexion latérale des AC, diverses améliorations ont été apportées à la conception, telles que la réduction de la force de compression du système de maintien, l'augmentation de l'épaisseur des tubes-guides, le raidissement des connexions entre les tubes-guides et les grilles (Andersson et al., 2005). Plus tard, (Gabrielsson et al., 2018) ont montré dans leur analyse expérimentale, que ces améliorations sont tout à fait efficaces concernant l'insertion des barres de contrôle. Par ailleurs, on note également une réduction du nombre d'endommagement de grilles. Mais les auteurs ont également observé que ces modifications du design apportent un changement dans la déformée de l'assemblage, d'une forme principalement en S au départ à une forme en C, avec des conséquences sur la distribution radiale du flux neutronique. Ils proposent une analyse des déformées observées dans le cœur qui est tout à fait en accord avec l'analyse précédente de (Stabel et al., 2011). Ils supposent également que l'interaction fluide-structure (IFS) a une forte influence, comparable à celle de la conception d'assemblage et, enfin, ils proposent quelques améliorations potentielles dans la conception mécanique et les stratégies de gestion du combustible pour réduire l'amplitude de la flèche. Plus récemment, de nouveaux alliages de zirconium ont été mis au point avec pour objectif de rendre les tubes-guides moins sensibles au fluage. Ils sont en cours de validation.

## 1.4 MODELISATIONS THERMOMECHANIQUES DES ASSEMBLAGES

### 1.4.1 Besoins opérationnels distincts

Deux besoins opérationnels différents font appel à une modélisation multi-physique du comportement mécanique des AC en cœur. Le premier besoin concerne la compréhension et la maîtrise des phénomènes fins qui interviennent à l'intérieur d'un AC. Le second concerne le comportement collectif des AC au sein du cœur en situation d'IFS.

Disposer d'un modèle numérique détaillé d'assemblage combustible est absolument nécessaire afin d'analyser, comprendre et hiérarchiser les phénomènes responsables de la déformation des assemblages en cœur. Parmi ces phénomènes, on peut citer le fluage, la relaxation progressive du serrage, les glissements axiaux et les rotations des crayons par rapport aux grilles, la déformation locale et la flexion des grilles, etc. Ce type de modélisation détaillée nécessite beaucoup de mémoire et de puissance de calcul car il comprend la modélisation de tous les composants et liaisons de l'assemblage avec la prise en compte de phénomènes non linéaires (contact, frottement, fluage, grands déplacements).

A l'opposé, les études d'interaction fluide-structure à l'échelle du cœur complet, lequel rassemble 150 à 250 assemblages, nécessitent des modèles individuels d'assemblages beaucoup moins détaillés. De ce fait, il est nécessaire de mettre au point des modèles simplifiés ou mieux encore des modèles réduits d'assemblage. Idéalement, le modèle détaillé doit représenter fidèlement les différents mécanismes susceptibles d'être impliqués dans la déformation de l'AC. Il devrait être développé le premier, pour permettre d'orienter ensuite la mise au point, puis la validation de modèles simplifiés ou réduits d'AC. Ceux-ci sont ensuite dupliqués et juxtaposés pour former le modèle thermomécanique de cœur. Ce dernier peut être alors couplé aux simulation neutronique et thermohydraulique.

### 1.4.2 Modèles simplifiés d'assemblage pour le calcul collectif des déformations du cœur

Des organismes de recherche, fournisseurs et exploitants ont mis au point plusieurs modèles mécaniques simplifiés d'assemblage en vue d'étudier leur comportement collectif au sein d'une modélisation du cœur. La majorité d'entre eux a commencé par une représentation 2D dans un plan vertical (une rangée d'assemblage) avant d'évoluer plus récemment vers une représentation 3D de l'AC et du cœur. Tous utilisent des éléments finis généralisés de type poutre, chaque poutre représentant un ensemble de crayons ou un ensemble de tubes-guides. Presque tous ces modèles simplifiés utilisent des éléments discrets de différentes sortes, aussi appelés joints, pour gérer tout ou partie du problème de contact-frottement qui intervient entre crayons et grilles.

Parmi les plus aboutis, nous pouvons citer les 2 modèles suivants :

- Le modèle développé par EDF depuis une vingtaine d'années dans *Code\_Aster* et chaîné à une simulation de l'écoulement hydraulique du cœur. Chaque assemblage est représenté par
  - o un crayon équivalent, maillé en EF poutre,
  - o une poutre équivalente qui représente l'ensemble des tubes-guides,
  - o quatre joints rotatifs par grille à comportement élastoplastique,
  - o des blocages en rotation pour toutes les grilles (cf. Figure 10).

Ce modèle 3D (Levasseur et al., 2009), complété par un patin élastoplastique axial pour les liaisons crayon-grille, représente les principaux phénomènes qui régissent le comportement d'un assemblage combustible et a certainement l'avantage d'une convergence aisée. Néanmoins, sa représentation simplifiée de la liaison crayon-grille qui découple les mouvements axiaux et de rotations limite son caractère prédictif en cas de chargements couplés. Le blocage artificiel en rotation au niveau des grilles, quant à lui, permet de retrouver le bon mode de déformation macroscopique pour les tubes-guides mais il amène aussi une légère surestimation de la raideur du système. De même la déformation des grilles est négligée et un seul crayon équivalent est considéré comme représentatif de tous les crayons. Ce modèle ne peut donc pas rendre compte de la distribution des glissements, qui n'est pas tout à fait homogène au sein d'une grille.

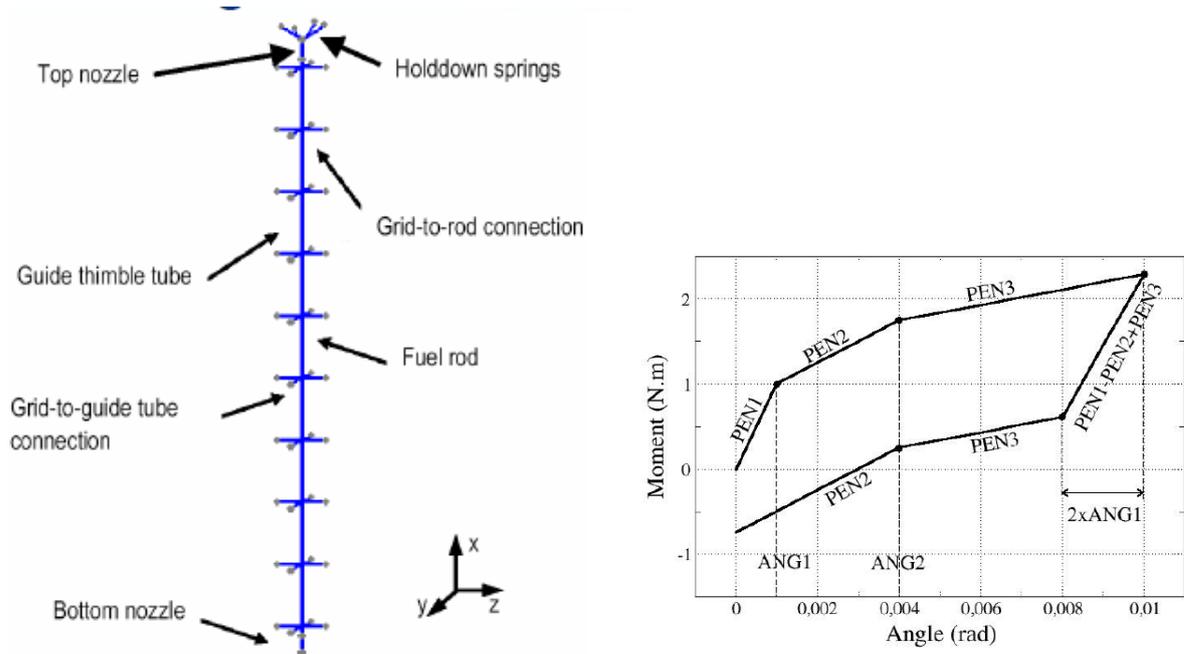


Figure 10 : modèle mécanique d'assemblage d'EDF développé dans Code\_Aster et, à droite, la courbe moment-angle caractéristique de la liaison crayon-grille obtenue avec ce modèle (Fléjou, J.-L., 2018).

- Le modèle de (Wanninger et al., 2016) : il s'agit d'un modèle simplifié 3D particulièrement riche puisqu'il définit une poutre par tube-guide et adopte 36 poutres équiréparties dans le plan de la grille pour représenter l'ensemble des crayons, comme le montre la Figure 11.

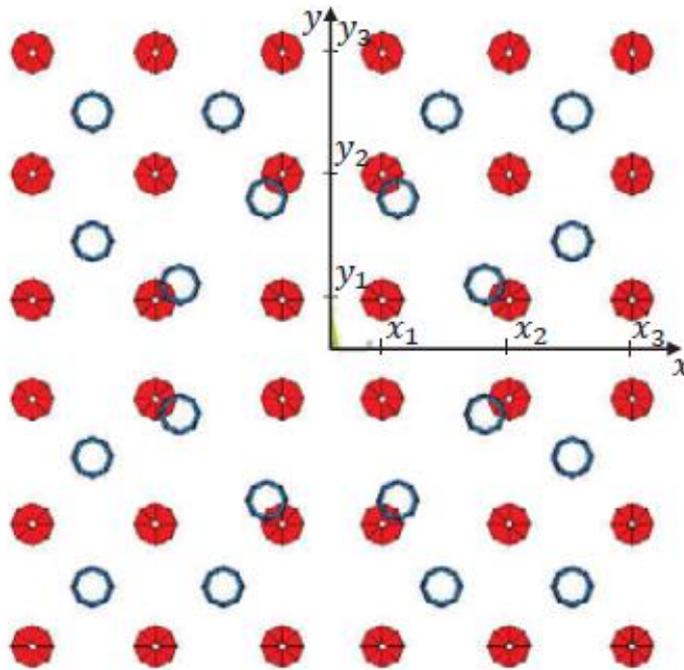


Figure 11 : positionnement dans le plan horizontal des 36 crayons équivalents, en rouge, et des 20 tubes-guides, en bleu, dans le modèle simplifié d'assemblage combustible de (Wanninger et al., 2018).

Les grilles sont considérées comme des plaques indéformables et portent les liaisons avec les tubes-guides et les liaisons non linéaires avec les crayons homogénéisés (cf. Figure 12).

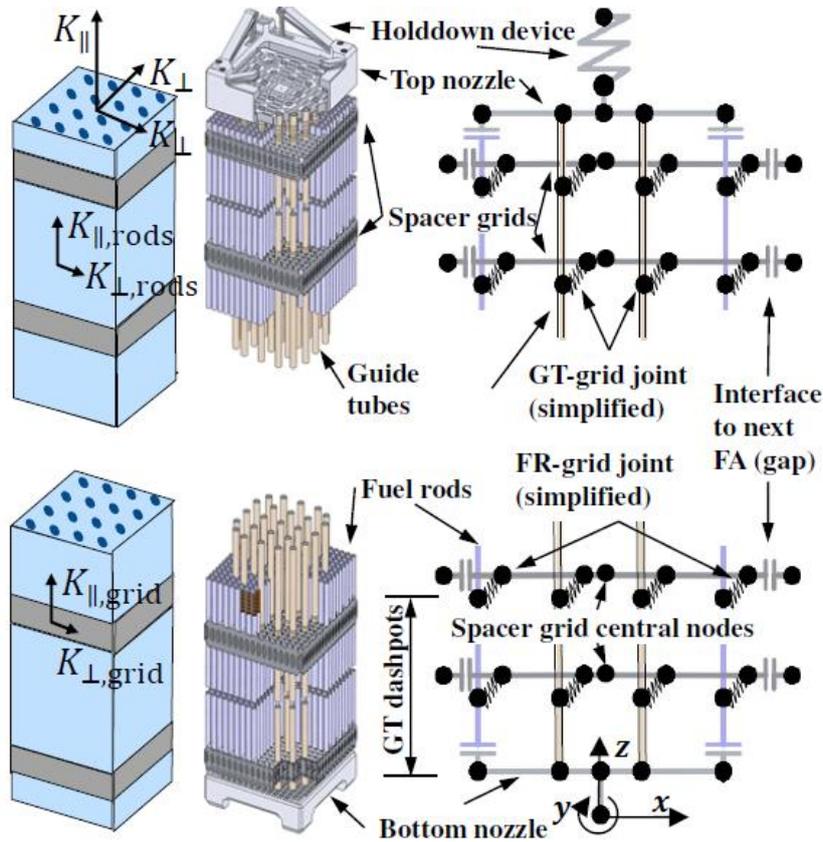


Figure 12 : aperçu de la géométrie du modèle d'assemblage de (Wanninger et al., 2018).

La liaison crayon-grille, illustrée sur la Figure 13, traite au sein des 6 éléments discrets, le problème de contact et de frottement en considérant les raideurs locales normales et tangentielles des bossettes et ressorts. Bien que l'auteur ne le mentionne pas, ce modèle, qui traite localement les 6 problèmes de frottement dans chaque plan de contact, est naturellement apte à représenter correctement l'effet des chargements couplés sur les différents degrés de liberté de la liaison. Les cellules de grille sont considérées comme mécaniquement découplées de leurs voisines immédiates. Ceci explique probablement en partie le besoin de calibration des paramètres mentionné par Wanninger.

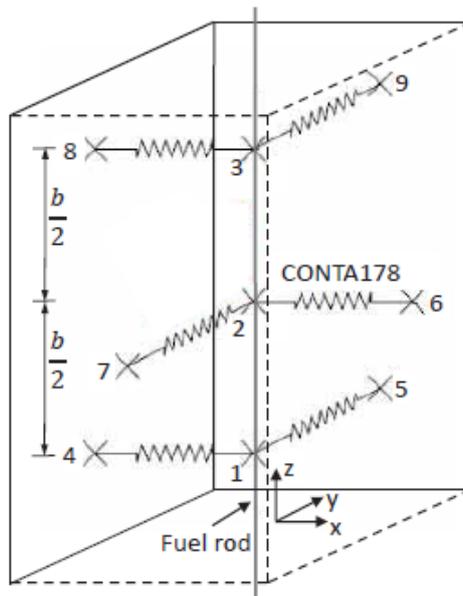


Figure 13 : liaison crayon-grille adoptée par (Wanninger, 2018) utilisant 6 éléments discrets pour le contact et le frottement au niveau des bossettes et des ressorts.

### 1.4.3 Modèle détaillé d'assemblage

La littérature actuelle ne recense aucun modèle thermomécanique vraiment détaillé d'AC, c'est-à-dire qui prenne en compte la totalité des composant individuels (crayons, tubes, grilles, ressorts, embouts, liaisons). Nous présenterons la modélisation détaillée du CEA au chapitre 3. Elle servira de référence au modèle réduit à développer.

### 1.4.4 Modèles réduits d'assemblage

Il semblerait que les méthodes MOR (Model Order Reduction) de réduction d'ordre n'aient pas encore été appliquées à des modélisations thermomécaniques quasi statiques de l'AC. Elles ne semblent appliquées qu'à des problèmes dynamiques, telles que les études de séisme ou d'usure des gaines de crayons et utilisent classiquement une base modale dynamique pour décrire la cinématique d'un ou plusieurs composants de l'assemblage.

### 1.4.5 Ambition pour la modélisation collective des AC

Les modèles thermomécaniques simplifiés décrit au 1.4.2 permettent déjà de simuler une rangée d'assemblages ou un cœur complet. Ils s'appuient sur des hypothèses simplificatrices qui sont tout à fait valables pour décrire la cinématique de l'assemblage au premier ordre :

- Tous les crayons d'un même AC ont la même déformée ;
- Tous les tubes-guides d'un même AC ont la même déformée ;
- Les grilles sont indéformables et toujours horizontales ;
- Par conséquent, tous les angles crayons-grilles sont identiques dans une grille ;
- Le glissement axial du crayon n'a pas d'effet sur la caractéristique de rotation du crayon dans la grille.

Si l'on veut aller plus loin dans la représentativité des modèles de cœur sans pour autant pénaliser la taille et la durée du calcul, il devient nécessaire d'explorer la voie de la réduction de modèles. Nous espérons ainsi faire moins d'hypothèses simplificatrices dans la modélisation et pouvoir accéder à des résultats en n'importe quel point (ou presque) de l'assemblage.

Pour notre problématique, nous visons une réduction d'ordre du problème spatial plus qu'une réduction du problème temporel car le nombre de degrés de liberté du problème dépasse de plusieurs ordres de grandeur sa discrétisation temporelle. Afin de réaliser cette réduction du nombre de degrés de liberté en espace, nous envisageons une décomposition du mouvement de l'assemblage sur une base réduite de modes spatiaux. Celle-ci permet également de gagner en représentativité sur la cinématique complète de l'assemblage par rapport aux modèles simplifiés traditionnels. Enfin, par recombinaison des déplacements, nous aurons accès aux informations locales.

Avec ce type de méthode, la difficulté principale réside dans la prise en compte des nombreuses non linéarités qui interviennent dans le comportement de l'assemblage, à savoir les phénomènes de contact, de frottement et les lois de comportement mécanique non-linéaires des matériaux sous irradiation. Nous ne voulons pas les évaluer de manière locale, en chaque point du modèle complet (le modèle détaillé) sous-jacent au modèle réduit (plusieurs millions de points d'intégration), car cela prendrait trop de temps. Nous souhaitons donc ajouter une seconde réduction de modèle au niveau de l'intégration du comportement.

Dans cette optique, nous présentons, tout d'abord, les trois principales techniques de réduction de modèles existantes au chapitre 0, puis nous posons les bases d'une méthode adaptée à notre problématique au chapitre 5.

## 2. Comportement des alliages de zirconium sous irradiation

### 2.1 LES ALLIAGES DE ZIRCONIUM

Les alliages de zirconium sont utilisés pour les gaines, les tubes-guides et les grilles des AC des réacteurs à eau pressurisée, en premier lieu en raison de leur bonne transparence aux neutrons thermiques à 300 °C. On utilise souvent l'alliage M5™, contenant du zirconium, à la fois pour les gaines des crayons, les tubes-guides et les grilles des assemblages combustibles. Précédemment, le zircaloy-4 détendu était utilisé pour les gaines des crayons combustibles (noté couramment Zy-4-d ou Zy-4 SRA) et le zircaloy-4 recristallisé pour les tubes-guides (noté Zy4-r ou Zy4 RXA). Ce dernier étant obtenu par un recuit à 650 °C pendant 2 heures (Figure 14).

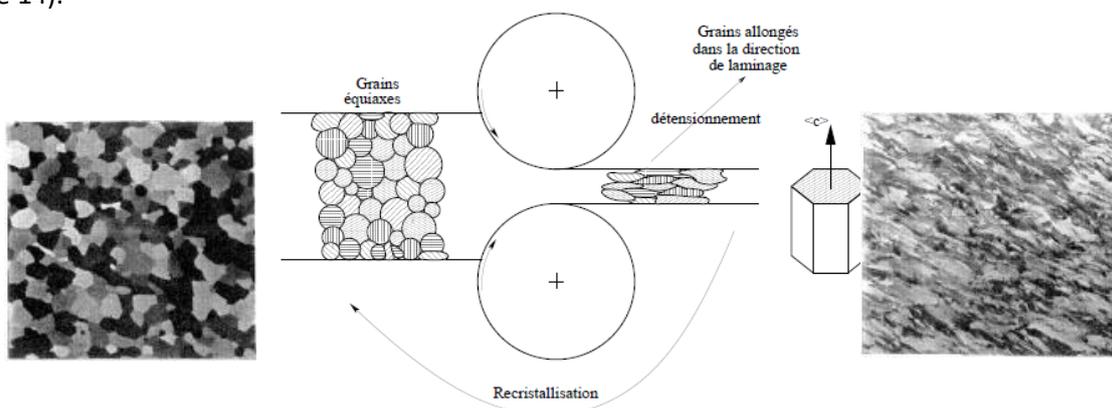


Figure 14 : illustration de la microstructure avant et après le processus de fabrication du zircaloy-4-d qui fait intervenir du laminage, du détensionnement, puis de la recristallisation à 650 °C (Priser, 2011).

Ce choix d'utiliser 2 matériaux distincts était lié à des fonctions différentes des composants et à des états de contraintes également différents. En effet, les gaines des crayons combustibles sont sollicitées de manière bi-axiale car ce sont des tuyaux fermés sous pression devant par ailleurs accommoder l'interaction mécanique et chimique entre pastille et gaine, alors que le tube-guide n'est soumis qu'à un chargement mécanique axial.

Aux températures qui nous intéressent, le zirconium adopte une maille hexagonale compacte, illustrée sur la Figure 15. Celle-ci, associée à la texture cristallographique issue du procédé de fabrication, lui confère des caractéristiques orthotropes dans le repère cylindrique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  de même axe que la gaine.

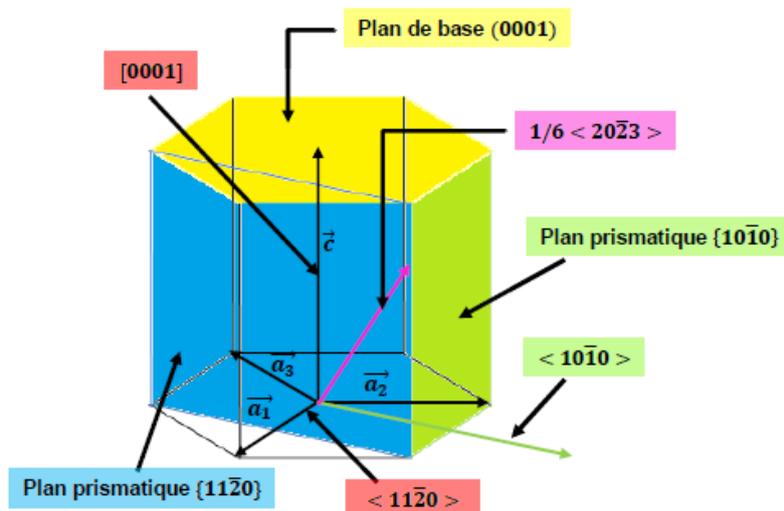


Figure 15 : plans et directions cristallographiques de la maille hexagonale compacte du Zr- $\alpha$  (Gharbi, 2015).

Le Tableau 1 rassemble les compositions chimiques des différents alliages de Zirconium. Le Zy4 détendu contient de l'étain (1,2 – 1,7 %), avec un peu de fer (0,2 %), de chrome (0,1 %), et d'oxygène (0,1 %). Ces éléments d'alliage ont pour objectif d'améliorer la résistance mécanique, ainsi que la résistance à la corrosion aqueuse. Le M5™, quant à lui, incorpore du niobium, qui lui procure en particulier une bien meilleure

résistante à la corrosion aqueuse et à l'hydruration, repoussant de ce fait le risque de fissuration de la gaine par corrosion sous contrainte (Serres, 2008) lors de l'interaction pastille gaine (Hourdequin, 1995). Enfin, l'épaisseur de la couche de zircon, qui se forme en surface du crayon, est fortement réduite dans le cas du M5™. Elle permet ainsi de lever l'une des limitations de la durée d'utilisation des crayons combustibles.

Tableau 1 : composition des alliages de zirconium utilisés dans les réacteurs à eau légère (Guillet et al., 2008).

Nom de l'alliage			
Composant de l'alliage	Zircaloy-2	Zircaloy-4	Zr 1-Nb, ou M5®
Sn	1.2-1.7	1.2-1.7	
Fe	0.07-0.2	0.18-0.24	
Cr	0.05-0.15	0.07-0.13	
Ni	0.03-0.08		
Nb			1
O	1 100 à 1 400 ppm		

## 2.2 DILATATION THERMIQUE

Le coefficient de dilatation thermique des alliages de zirconium, autour de  $6.10^{-6} \text{ K}^{-1}$ , est environ 2 fois plus faible que celui des aciers qui composent l'environnement du cœur. Lors de la montée en température du cœur, la dilatation différentielle entre l'acier constituant les structures périphériques du cœur et le zirconium des AC conduit à une baisse de la précharge axiale des assemblages. Le rôle des ressorts du système de maintien est d'absorber cette dilatation différentielle en maintenant une précharge quasiment constante. De même, dans le plan horizontal, cette dilatation différentielle entre grilles et les plaques support des AC conduit à une ouverture réversible du jeu entre 2 assemblages de l'ordre de 0,4 mm, qui s'ajoute au jeu initial, qui est de l'ordre de 2 mm.

## 2.3 DURCISSEMENT PAR L'IRRADIATION

L'irradiation par les neutrons rapides conduit à déplacer chaque atome jusqu'à 20 fois en moyenne au cours du séjour en réacteur (20 dpa). Ces déplacements atomiques induisent l'apparition de défauts de type interstitiels et lacunes. Les boucles de dislocations se relocalisent dans les plans prismatiques {1010} et {1120} du réseau hexagonal du matériau (cf. Figure 15). Il en résulte un durcissement progressif jusqu'à une fluence de saturation de l'ordre de  $10^{25} \text{ n/m}^2$ . L'accumulation de défauts finit par constituer des obstacles au mouvement des dislocations et réduit alors fortement la ductilité du matériau, comme l'illustre la Figure 16.

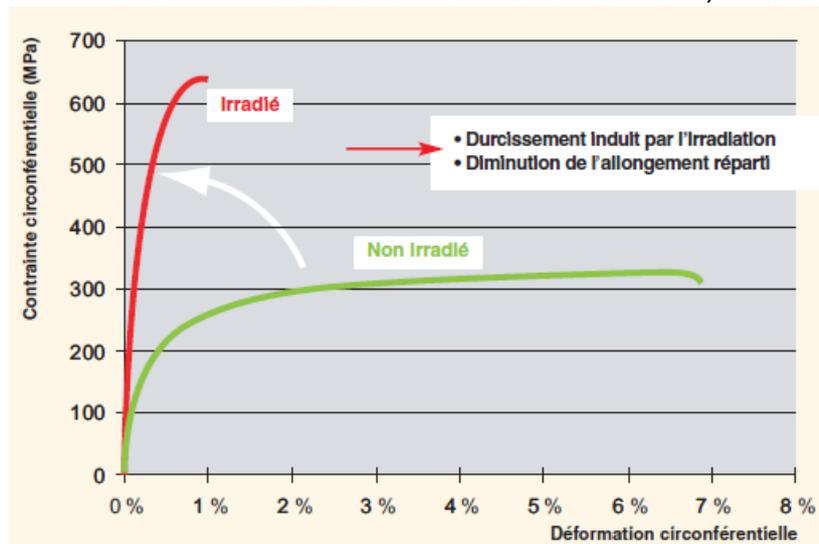


Figure 16 : essai de mise en pression interne jusqu'à éclatement d'un tube avant et après irradiation jusqu'à une fluence de  $10^{25} \text{ n/m}^2$  (Guillet et al., 2008).

## 2.4 CROISSANCE SOUS FLUX DE NEUTRONS RAPIDES

Il s'agit d'un changement de forme irréversible à volume constant causé par le choc des neutrons avec la matière, formée de cristaux hexagonaux orientés selon une direction qui dépend du procédé de fabrication. Ainsi, dans le cas d'un produit plat laminé, il apparaît un allongement irréversible dans le plan de base du cristal et une diminution de l'épaisseur de la tôle (axe c du cristal – cf. Figure 15) lors de l'irradiation d'un échantillon libre de contrainte.

L'article de (Fidleris, 1988) présente une synthèse intéressante de différentes études de la croissance libre des alliages de zirconium sous flux de neutrons rapides. Bien que largement étudiée, les premières données expérimentales étaient difficiles à interpréter car les expériences garantissaient rarement l'absence de contraintes. D'autre part, les compositions chimiques étaient très variées. Néanmoins, 3 phases de croissance furent mises en évidence, comme illustré sur la Figure 17 :

- La phase I de croissance rapide, jusqu'à  $10^{25}$  n/m<sup>2</sup>. Ce sont surtout les joints de grains qui absorbent les nombreux atomes interstitiels et lacunes formés et contribuent à une croissance rapide ;
- La phase II, qui marque la saturation du phénomène ;
- La phase III, qui apparaît vers  $4 \cdot 10^{25}$  n/m<sup>2</sup> est appelée accélération de croissance. Elle est imputée aux boucles de dislocations d'axe  $\langle c \rangle$  qui apparaissent du fait de l'instabilité des composés intermétalliques et de l'augmentation de la teneur en fer de la matrice. Ces boucles de dislocations d'axe  $\langle c \rangle$  absorbent les lacunes et génèrent alors une croissance rapide dans le plan de base.

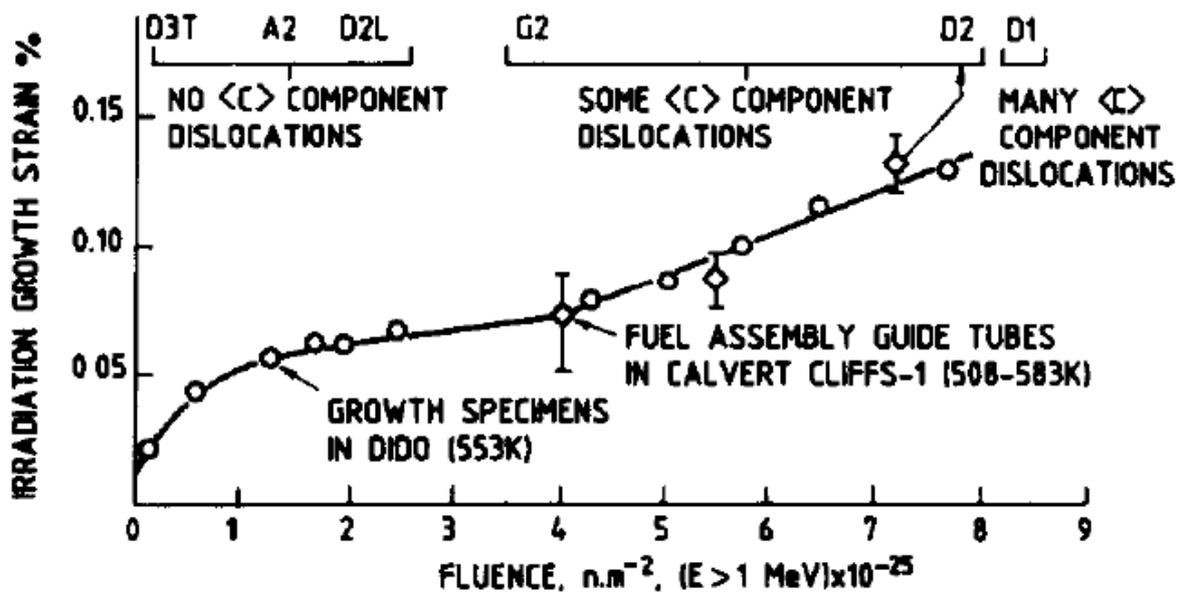


Figure 17 : mesures de croissance libre réalisées entre 550 K et 580 K sur du Zy4 recristallisé (Fidleris, 1988).

La Figure 18, établie par (Gharbi, 2015) et confirmée par plusieurs études montre que le zircaloy-4 détendu, présente quant à elle une cinétique de croissance qui est rapide tout au long de l'irradiation. Elle est attribuée à la présence de boucles de dislocations d'axe  $\langle c \rangle$  en grand nombre dès le début de la mesure du fait que l'alliage n'est pas recristallisé. Nous pouvons donc dire que la croissance démarre directement en phase III. La Figure 18 illustre bien que le remplacement de cet alliage par le M5™ a fortement réduit la croissance sous flux du matériau sur la durée d'exploitation d'un AC, soit une fluence d'environ  $10^{26}$  n/m<sup>2</sup>.

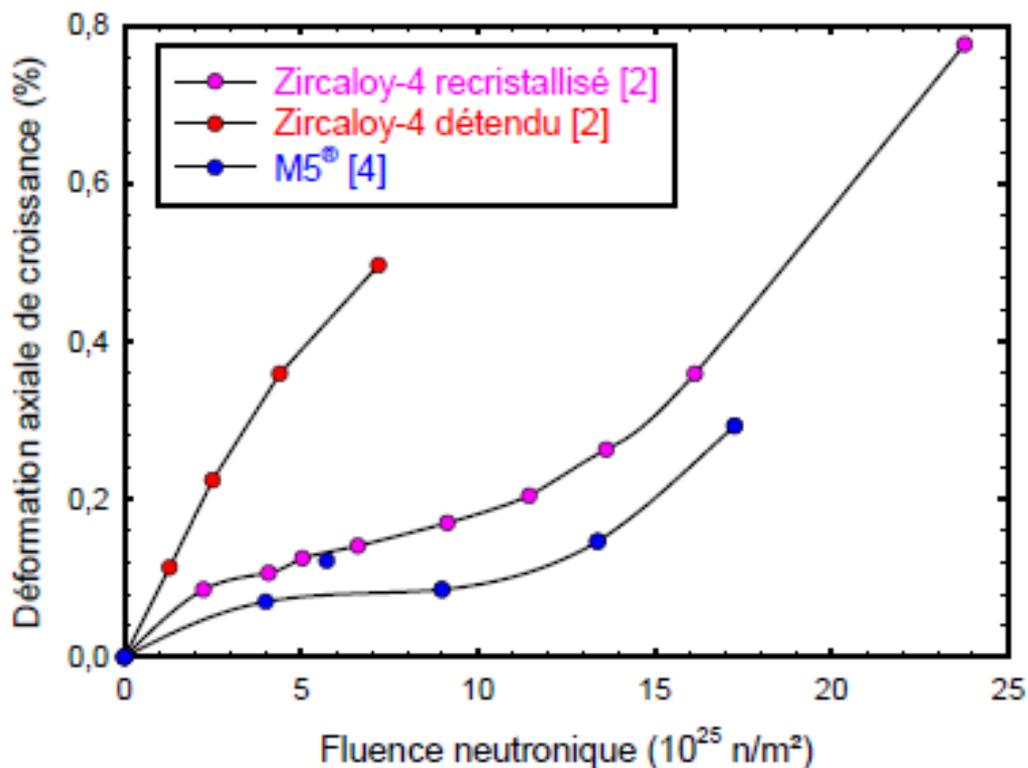


Figure 18 : comparaison de la croissance libre de 3 alliages en soustrayant l'effet d'hydruration (Gharbi, 2015).

Le même auteur recense la sensibilité, souvent très importante, de la croissance sous flux du Zy4 recrystallisé à différents paramètres de fabrication, tels que la texturation, la taille des grains, le taux d'érouissage, la densité initiale de dislocations, la composition chimique et, également, à des paramètres liés à l'utilisation en réacteur, comme l'hydruration, qui génère une très forte dilatation irréversible. Le M5™ est, quant à lui, peu sensible à l'hydruration, ce qui constitue un gain significatif en utilisation REP par rapport à la précédente génération d'alliages de Zr, comme le confirme la Figure 19.

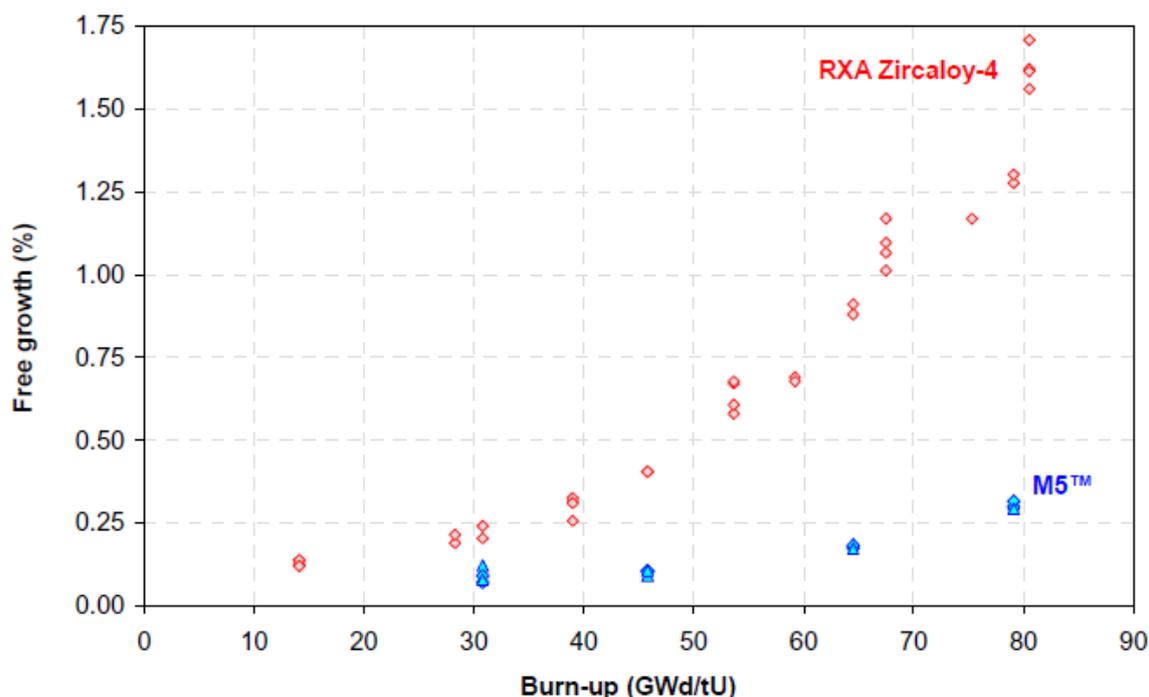


Figure 19 : Croissance libre de tubes irradiés en REP jusqu'à des épaissements élevés, comparaison M5™ et Zy4-RXA (G. L. Garner, I. Q. Mensah, & J. P. Mardon, 2006).

En ce qui concerne la gamme des températures usuelles en REP, aux environs de 300 °C (température du fluide caloporteur dans le circuit primaire), la dépendance en température des deux premières phases de croissance est assez faible. La phase III devient sensible à la température à partir de 280 °C (Griffiths et al., 1989). Ainsi, une augmentation de température amène, d'une part, une croissance plus forte et, d'autre part, diminue la dose critique d'apparition du régime d'accélération de croissance. Celle-ci serait réduite d'environ un quart en augmentant la température de 280 °C à 330 °C. En pratique, la plupart des courbes indiquent que la croissance à 330 °C est environ 20 % supérieure à celle à 280 °C.

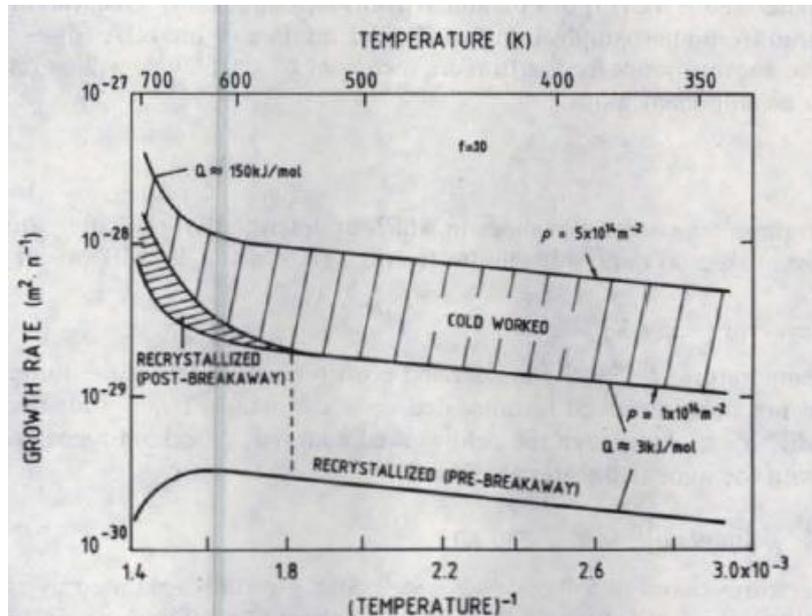


Figure 20 : sensibilité à la température de la croissance des alliages de zirconium (Griffiths et al., 1989).

Les AC issus de l'exploitation commerciale en réacteur électrogène fournissent de précieuses mesures en conditions réelles. La Figure 21 et la Figure 22 mettent en évidence la dispersion des augmentations de longueur mesurées en conditions REP pour des crayons gainés de M5™. De plus, en se reportant également à ces 2 figures, pour une fluence de  $10^{26}$  n/m<sup>2</sup>, qui correspond à une valeur d'épuisement d'environ 50 GWj/tML, nous constatons un allongement moyen des crayons de 0,5 %, à comparer à une croissance libre axiale d'environ 0,15 % mesurée sur des échantillons libres de contraintes. Ceci est imputable au fait que la gaine du crayon subit en REP des contraintes élevées de plusieurs origines :

- Différence radiale de pression entre l'extérieur de la gaine (155 bar) et l'intérieur (environ 60 bar à chaud) ;
- Effet de fond dû à cette même différence de pression, qui génère une forte contrainte axiale ;
- Efforts transférés par les grilles et la circulation du fluide caloporteur, nettement plus modestes en intensité ;
- Efforts radiaux et axiaux importants liés à l'interaction Pastille-Gaine (IPG). A partir du moment où celle-ci intervient, l'accrochage et le gonflement des pastilles conduisent à un allongement accéléré de la gaine.

Ainsi, l'allongement des crayons est à distinguer de la seule croissance libre de la gaine puisqu'interviennent aussi le fluage circonferentiel et le fluage axial, suivant une loi de comportement anisotrope et avec une intensité qui évolue lors du développement de l'interaction pastille-gaine. Notons que la plupart des modèles d'assemblage prennent souvent en compte directement l'allongement des crayons comme donnée d'entrée pour ne pas avoir à évaluer l'équilibre entre croissance, fluage et IPG au sein du crayon. Cette problématique n'est étudiée complètement que dans les études d'IPG, c'est-à-dire sur un périmètre géométrique réduit (sur une longueur de quelques centimètres).

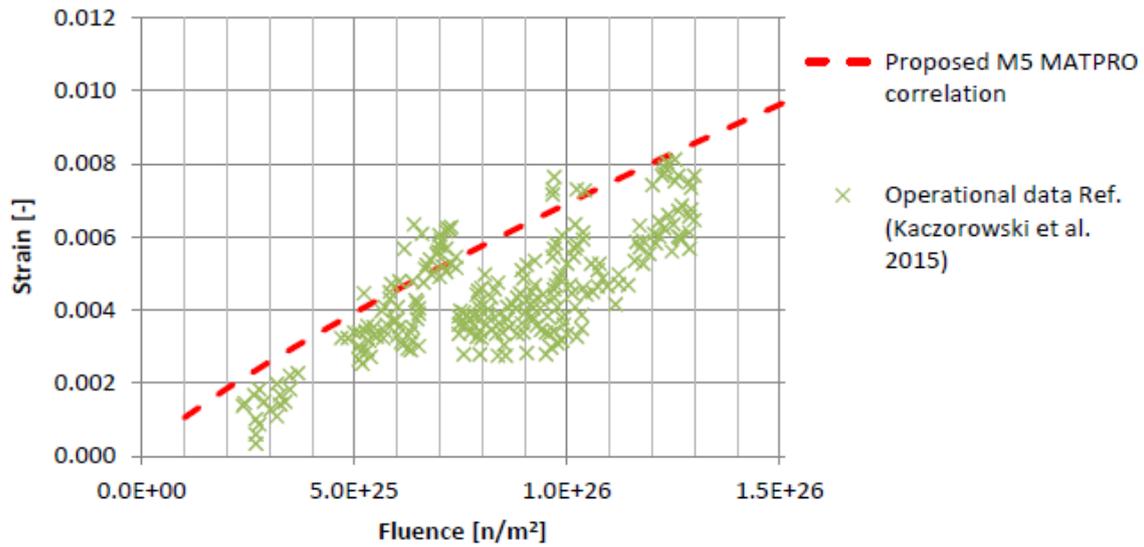


Figure 21 : allongement en exploitation de crayons gainés de M5™, modèle 2011 de Lusher en pointillés, mesures de Kaczorowski et al. (Kecek and Van Uffelen, 2016).

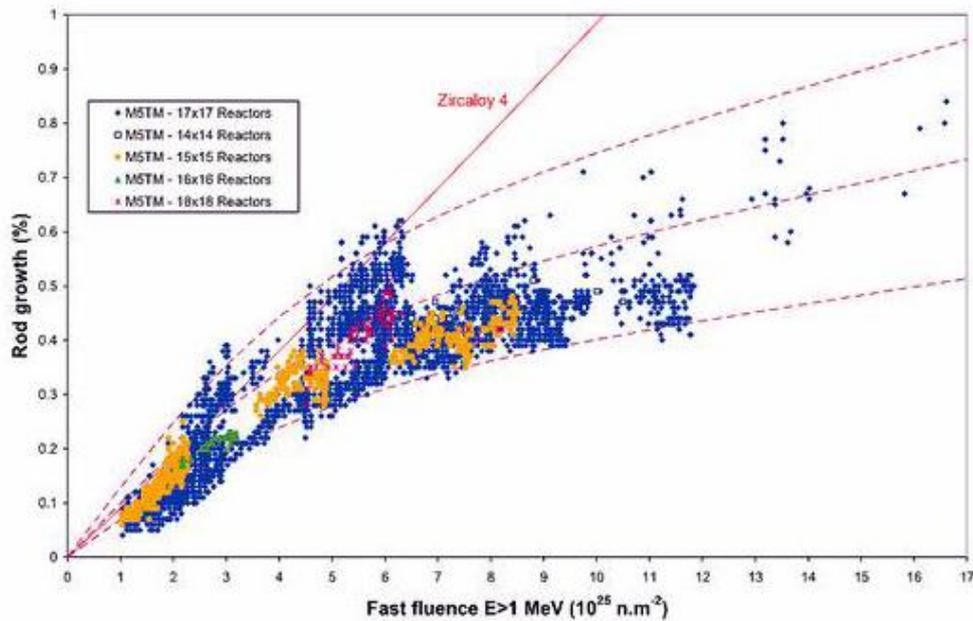


Figure 22 : allongement des crayons gainés de M5™, constaté dans différents réacteurs de par le monde (Mardon et al., 2005b).

## 2.5 FLUAGE D'IRRADIATION

Il convient de différencier le phénomène de fluage d'irradiation du phénomène de fluage sous irradiation au sens large, qui intègre à la fois la composante thermiquement activée du fluage (fluage thermique) et celle uniquement activée par l'irradiation (fluage d'irradiation).

Expérimentalement, il est difficile de séparer ces deux composantes. Néanmoins, les deux mécanismes de déformation peuvent être définis suivant un domaine de température et de contrainte : le fluage thermique est prépondérant à une température élevée et pour des niveaux de contrainte élevés, alors que le fluage d'irradiation prédomine à faible température (les températures d'exploitation REP) et pour de faibles niveaux de contrainte. Le fluage d'irradiation des alliages de zirconium dépend de plusieurs facteurs, principalement la contrainte ( $\sigma$ ), le flux de neutrons rapide ( $\varphi$ ) et la température d'irradiation ( $T$ ). La vitesse de déformation du fluage d'irradiation ( $\dot{\epsilon}$ ) est souvent écrite sous la forme :

$$\dot{\epsilon} = k \sigma_{eq}^n \varphi^p \exp \frac{T}{Tact} \quad (1)$$

On retiendra que le fluage d'irradiation est jugé majoritaire dans les conditions normales d'utilisation des REP, à savoir les faibles contraintes et les fortes fluences de neutrons rapides, et qu'il est proportionnel au flux de neutrons rapides ( $p=1$ ). L'exposant  $n$  de la contrainte est souvent identifié avec une valeur comprise entre 1 et 1,4. Elle traduit une sensibilité à la contrainte bien plus faible que dans le cas du fluage thermique où la valeur de l'exposant est souvent identifiée entre 4 et 8.

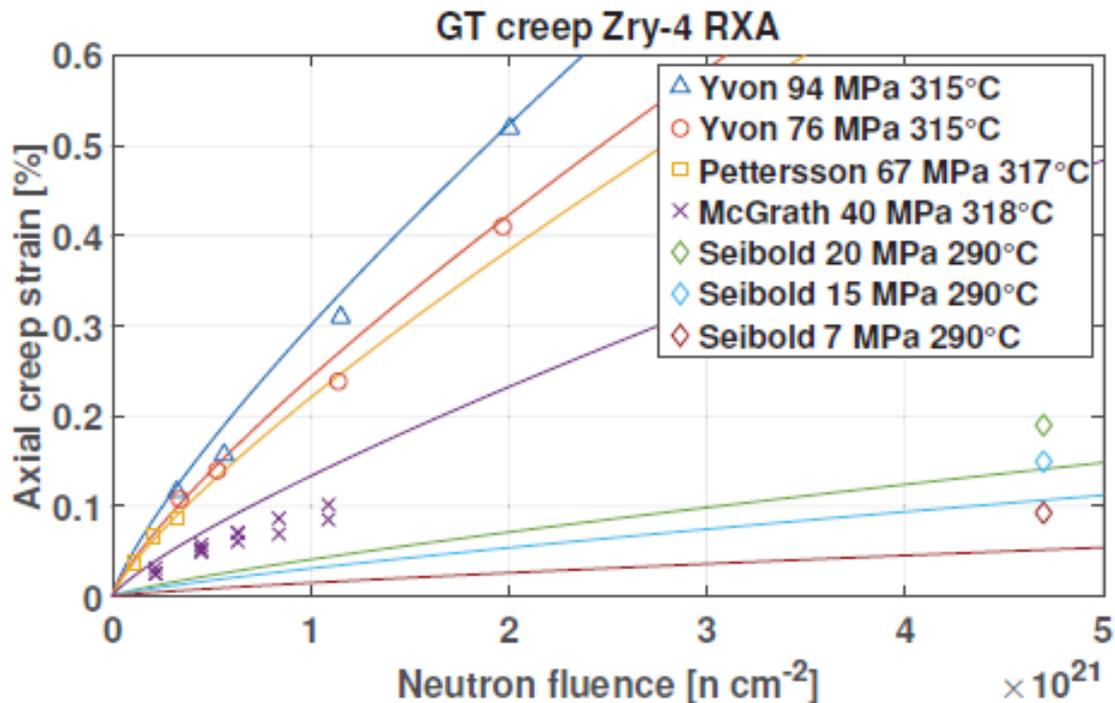


Figure 23 : synthèse de 4 publications effectuée par (Andreas Wanninger, Seidl, & Macián-Juan, 2018) pour des tubes-guides en Zy4-R sur une large gamme de contraintes.

Les retours d'expérience des réacteurs de puissance et les expériences réalisées dans des réacteurs expérimentaux ont permis d'apprécier l'effet de certains paramètres du matériau sur le fluage d'irradiation. Comme pour le phénomène de croissance sous flux, plusieurs études ont révélé un effet de la texture, de la forme des grains, de l'état métallurgique et de la composition chimique du matériau sur sa vitesse de fluage d'irradiation. En particulier, on a constaté que des éléments chimiques comme l'étain, l'oxygène (Kelly and Smith, 1973) et le soufre (Charquet et al., 1998) améliorent considérablement la résistance de l'alliage au fluage thermique et au fluage d'irradiation.

En ce qui concerne les mécanismes du fluage d'irradiation, plusieurs explications successives ont été proposées. Finalement les deux théories jugées les plus pertinentes dans (Gharbi, 2015) sont :

- Les modèles de type SIPA (Stress Induced Preferential Absorption) décrit par (Matthews & Finnis, 1988) et SIPN (Stress Induced Preferential Nucleation), qui attribuent la déformation de fluage d'irradiation à l'élimination différentielle des défauts ponctuels sur des puits de la microstructure ;
- Les modèles SICG (Stress Induced Climb and Glide), qui se basent sur le glissement des dislocations, favorisé par la montée assistée par l'absorption des défauts ponctuels.

Le M5™ et le Zy4-R ont des vitesses de fluage d'irradiation voisines. Le Zy4 détendu, quant à lui, flue environ 4 fois plus vite.

Rautenberg et al., puis Gilbon et al. ont montré que le M5™ et le Zy4 recristallisé présentent une anisotropie en fluage plus marquée que le Zy4 détendu (cf. Figure 24). En pratique cela signifie qu'un tube en M5™ a donc tendance à fluer axialement sous une sollicitation de pression de fluide externe contrairement à un tube en Zy4d.

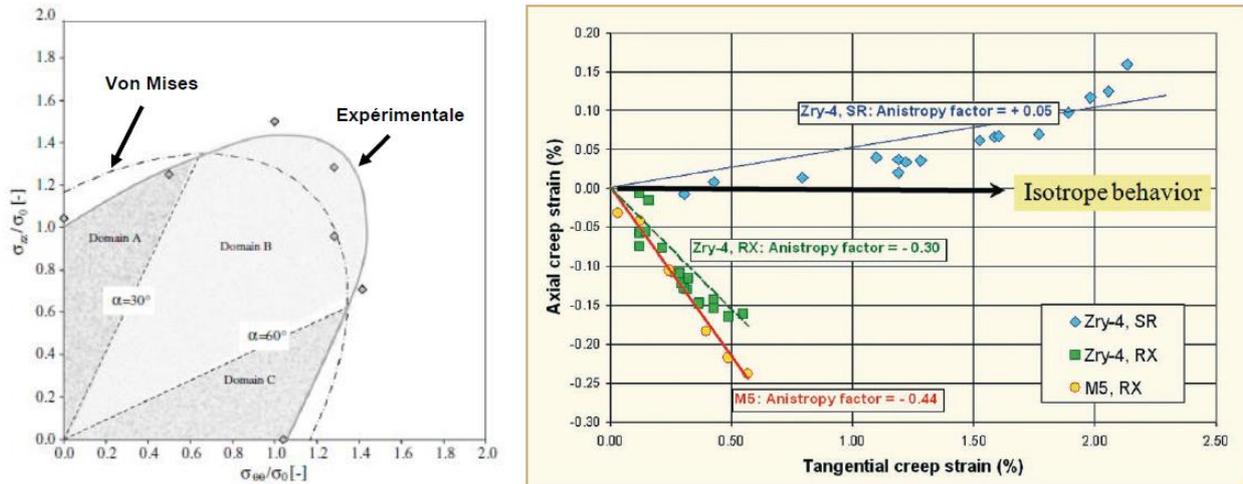


Figure 24 : anisotropie de fluage du M5™ à 400 °C sous une vitesse de déformation de  $3,3 \cdot 10^{-8} \text{s}^{-1}$  à gauche et essais de fluage sous pression de tubes fermés en réacteur à droite (Gilbon et al., 2000).

## 2.6 FLUAGE THERMIQUE

Le fluage thermique est conventionnel en ce sens qu'il ne fait théoriquement intervenir que la température et la contrainte. En réalité, l'irradiation amène progressivement un durcissement qui limite la vitesse de fluage et explique la transition entre fluage primaire et fluage secondaire. Pour le Zy4, nous constatons également une influence significative de l'hydruration sur la vitesse de fluage axial, comme indiqué sur la Figure 25.

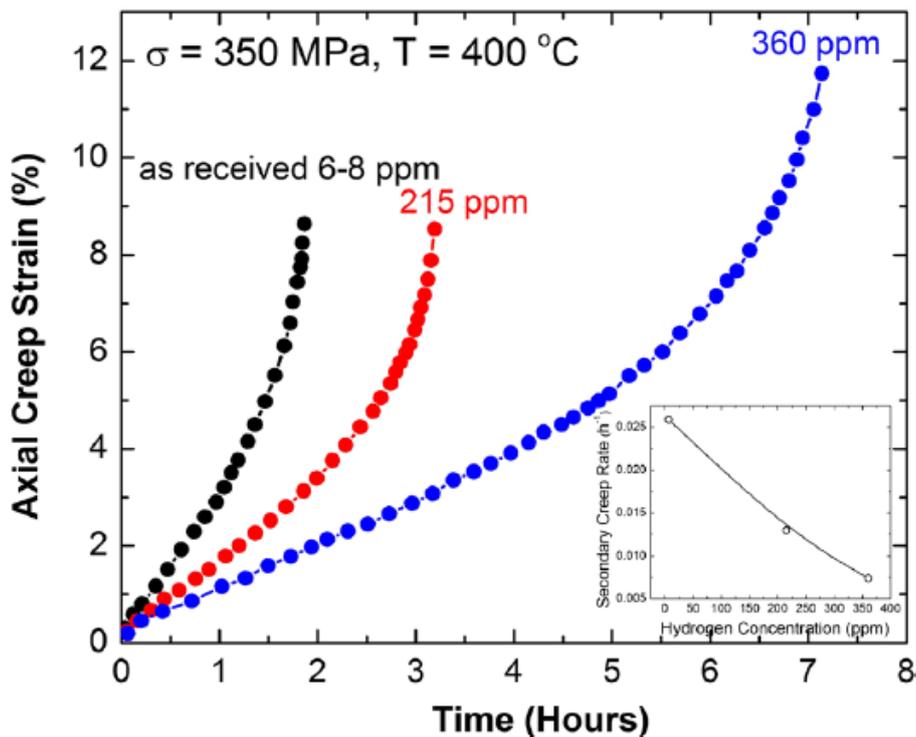


Figure 25 : exemple d'élongation par fluage thermique du Zy4 sous forte contrainte pour 3 niveaux d'hydruration (Bouffieux and Rupa, 2000).

Le fluage thermique ne devient prépondérant qu'aux très fortes contraintes, rencontrées en phases incidentelles ou accidentelles.

## 2.7 SYNTHÈSE DES COMPORTEMENTS DES MATERIAUX À MODÉLISER DANS L'ASSEMBLAGE

L'élasticité et la dilatation thermique sont bien sûr pris en compte, contrairement au durcissement et à l'hydruration, qui n'ont pas besoin d'être explicitement évalués. Comme le domaine d'étude se limite au fonctionnement normal des REP, nous choisissons dans la suite de ce document de négliger le fluage thermique car il reste minoritaire. Nous nous limitons donc au fluage d'irradiation avec une loi de type puissance (1) et un exposant pour la contrainte compris entre 1, pour la loi FRAPCON 3.4 (Geelhood et al., 2011), et 1,4 pour l'étude de principe du §5.2. En ce qui concerne l'allongement des crayons et tubes, nous faisons deux choix distincts : le phénomène de croissance est pris en compte pour les tubes-guides (Gharbi, 2015), alors que pour les crayons, nous retenons une loi de grandissement intégrale issue du retour d'expérience de l'exploitation, à savoir la courbe moyenne de la Figure 22, issue de (Mardon et al., 2005b). Cette stratégie permet de ne pas rentrer dans le détail des phénomènes qui interviennent à petite échelle dans l'allongement des crayons (pression du caloporteur, orthotropie de fluage, interaction pastille-gaine et comportement des pastilles combustibles). Cette opération est laissée à des codes spécialisés et ce choix permet de limiter la propagation d'incertitudes. Les embouts en acier recevront quant à eux une loi élastique car ils sont massifs et hors flux, c'est-à-dire qu'ils reçoivent une fluence de neutrons rapides bien plus faible que les autres composants et ne se déforment pas de manière irréversible.

### 3. Présentation du modèle détaillé de référence

#### 3.1 UN MODÈLE 3D COMPRENANT TOUS LES COMPOSANTS ET LIAISONS DE L'ASSEMBLAGE

Le modèle détaillé d'AC est utilisé dans un outil métier qui utilise le logiciel aux éléments finis Cast3M (CEA, 2020). Il a été enrichi pendant la thèse. Il permet de mener des études en mécanique quasi-statique, sur tout ou partie d'un AC de type REP. Tous les composants métalliques et les liaisons sont représentés : les deux embouts en acier, les 24 tubes-guides, les 11 grilles et leurs liaisons soudées avec les tubes-guides, les 265 crayons, les presque 12 000 bossètes embouties dans les grilles et les 6 000 ressorts en inconel qui viennent pincer les crayons. La Figure 26 montre quelques maillages afin d'illustrer le périmètre des études que cet outil permet de mener.

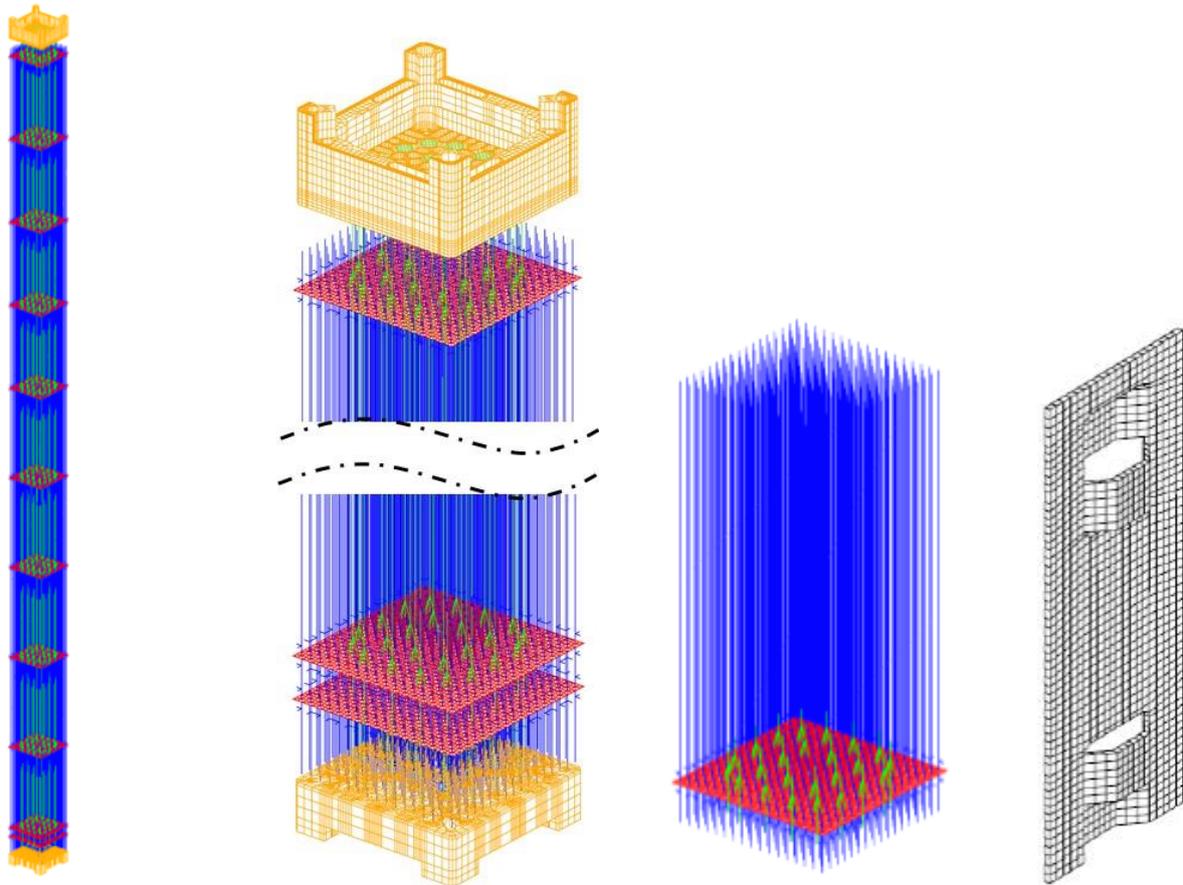


Figure 26 : exemples de maillages utilisés avec le modèle détaillé : assemblage complet, sous-ensemble, et maillage fin d'une cloison de grille pour les caractérisations de raideur de bossète.

Afin de limiter le nombre de degrés de liberté à environ un million, la modélisation fait principalement appel à des éléments finis structuraux.

- Chaque crayon est modélisé par une centaine d'éléments tuyaux, qui sont des éléments poutre d'ordre 1 à section annulaire et 6 degrés de liberté par nœud.
- Les tubes-guides utilisent ces mêmes éléments à raison d'une cinquantaine par tube.
- Les grilles, dont la forme réelle est un treillis complexe, ajouré, doté de soudures par cordons et par points, sont quant à elles représentées de manière plane et homogénéisée à l'aide de 2312 éléments coques de type DST (Batoz and Dhatt, 1994). Ceux-ci sont des triangles à 3 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud, à comportement orthotrope, permettant de dissocier la raideur de courbure hors plan de la raideur de cisaillement de la grille. En effet, cette dernière est très faible à cause de la géométrie de la grille à réseau carré, donc déformable.
- Les embouts sont maillés précisément en éléments de type hexaèdres massifs linéaires à 8 nœuds (3 degrés de liberté par nœud) ou plus sommairement en éléments de coques mince linéaires standards (6 degrés de liberté par nœud, pas de cisaillement transverse).

- Les 17 000 zones de contact et de frottement entre crayons et grilles sont modélisées à l'aide d'éléments discrets à 2 nœuds dénommés JOI1. La gestion du contact normal est réalisée au travers d'une loi pénalisée par la raideur  $k_N$  et à l'aide d'une variable interne  $\delta^{ouv}$  pour représenter le jeu, cf. Figure 27.

$$\begin{cases} F^N(J) = k_N(\delta U^N(J) - \delta^{ouv}(J) - jeu^{ini}(J)) \\ F^N(J) \leq 0 \\ \delta^{ouv}(J) \geq 0 \\ F^N(J)\delta^{ouv}(J) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

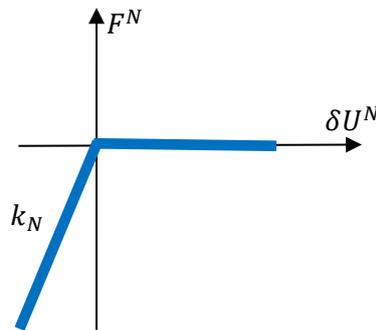


Figure 27 : loi de contact pénalisée appliquée dans les éléments JOI1 reliant l'effort normal à la pénétration.

La loi de frottement de Coulomb est également pénalisée dans les deux directions de glissement par des raideurs  $KS1$  et  $KS2$ . Les glissements mobilisent deux variables internes qui sont mises à jour à l'aide d'un algorithme élastoplastique à retour radial (Koiter, 1953; Ortiz and Simo, 1986). Les trois raideurs de pénalisation  $k_N$ ,  $KS1$  et  $KS2$  ont une signification physique. Ce sont les raideurs de déformation dans les directions normale et tangentielles des zones de grille au contact-du crayon, c'est-à-dire les raideurs normales et tangentielles des bossettes et des ressorts. Elles sont cruciales pour décrire le comportement non-linéaire de l'AC. Leurs valeurs peuvent être identifiées par un calcul détaillé local ou par essais.

La Figure 28 représente un modèle de liaison crayon-grille qui fait intervenir six éléments JOI1 pour représenter les 6 zones de contact-frottement entre chaque grille et chaque crayon.

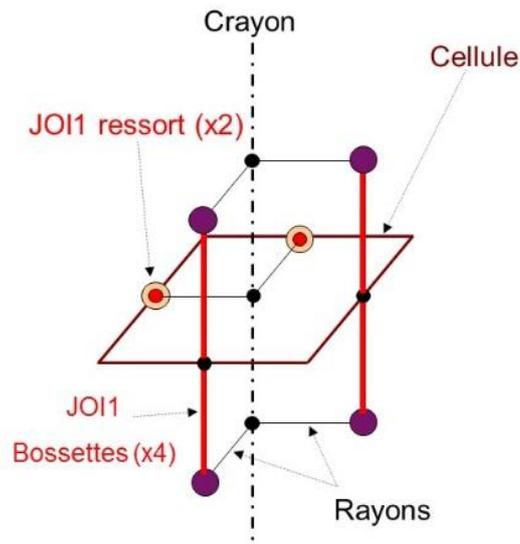


Figure 28 : modèle de liaison crayon-grille représentant une cellule de grille homogénéisée en éléments coques (rectangle marron), la fibre neutre du crayon (en pointillés), 6 liaisons discrètes de contact-frottement (segments et points rouge) positionnées aux extrémités des 6 rayons rigides (segments noirs) les reliant à la fibre neutre du crayon. Les raideurs locales de grille des zones de contact sont prises en compte au sein des 6 éléments de liaison.

Suivant le besoin de l'étude, le comportement des matériaux peut être choisi élastique ou élastoviscoplastique, notamment pour représenter le fluage d'irradiation. On peut appliquer des chargements thermiques, neutroniques et mécaniques variés. Les principaux chargements utiles sont la mise en tension des ressorts dans les grilles, la gravité, la poussée d'Archimède, la compression axiale de l'assemblage, correspondant à la mise en place de la plaque supérieure de cœur, les forces hydrauliques verticales et latérales, et le déplacement imposé sur une grille lors d'un essai de laboratoire.

### 3.2 VALIDATIONS EN LABORATOIRE

Des essais en air à 20 °C sur une portion d'assemblage permettent de valider les modélisations mécaniques mises au point pour la liaison crayon-grille. Un montage permet d'imposer une vitesse verticale constante au faisceau de tubes, tandis qu'un mouvement horizontal alterné, d'amplitude variable, est imposé à la grille (cf. Figure 29). Des capteurs de force permettent de relever les efforts de réaction horizontaux et verticaux. La masse mobile du système est équilibrée par un contrepois pour annuler l'effet de la gravité.

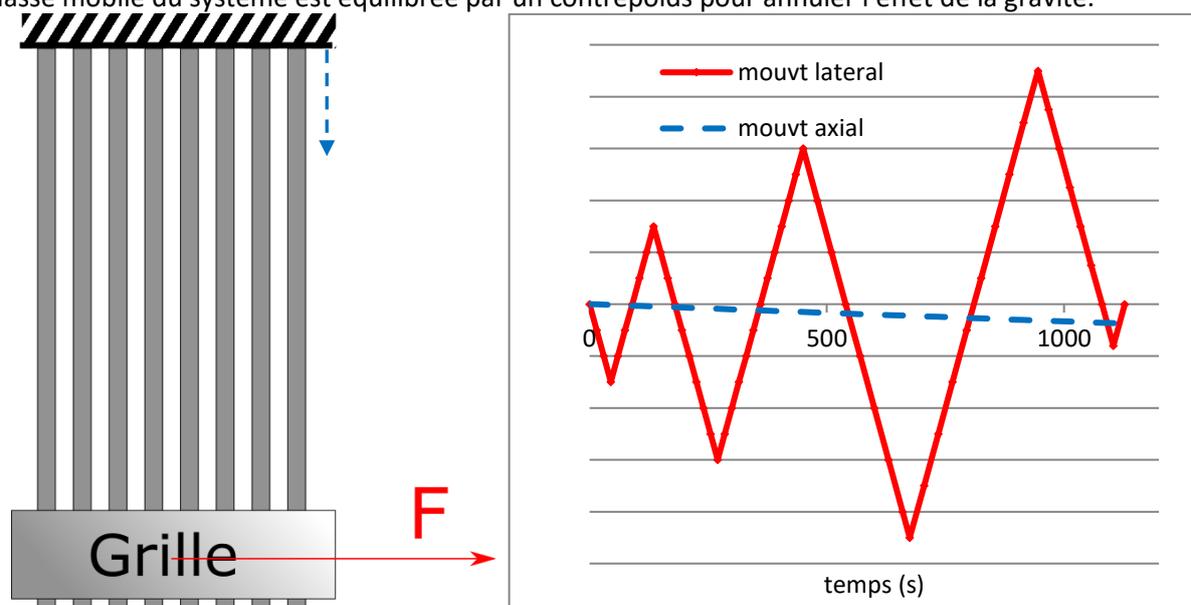


Figure 29 : schéma de principe de l'essai sur sous-ensemble réalisé par Framatome. Déplacements imposés simultanément dans le sens axial en tête de faisceau et latéralement sur la grille.

La Figure 30 illustre la complexité des réponses expérimentales observées sur ce système, pourtant structurellement plus simple qu'un assemblage combustible complet. Le cycle force-déplacement représenté ci-dessous met en évidence la dissipation par frottement. Celle-ci peut ensuite être analysée localement grâce au modèle détaillé, lequel rend compte précisément des frottements ou décollements aux 6 points de contact d'un crayon dans la grille, ainsi que des flèches des ressort et bossettes. En particulier, la décroissance de la force de frottement axiale en fonction du temps (à droite) est peu intuitive mais bien retrouvée par le calcul.

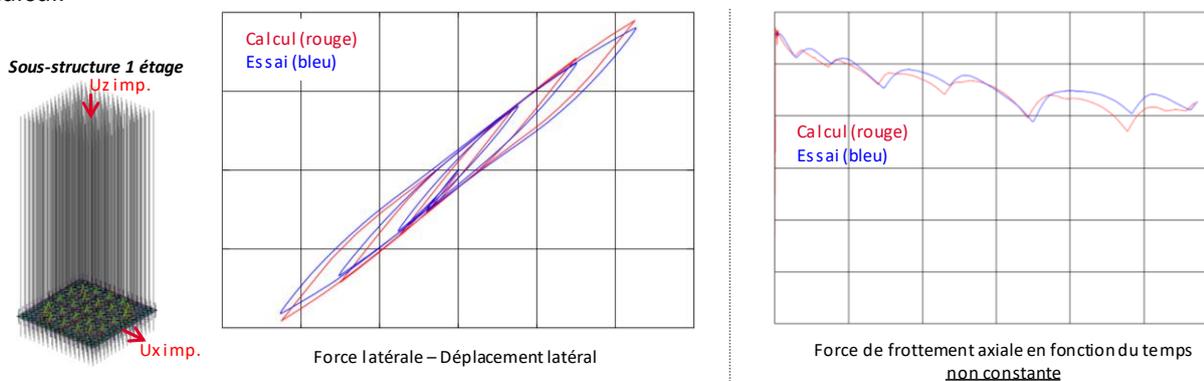


Figure 30 : comparaison entre les résultats obtenus avec le modèle éléments finis (courbes rouge) et les essais (courbes bleues) pour les forces horizontale et verticale.

D'autres essais en laboratoire, menés à l'échelle de l'assemblage complet (Lamorte et al., 2021; Lascar C., 2015), permettent de valider la modélisation mécanique de l'assemblage complet, hors phénomènes liés à l'irradiation. L'AC est soumis à des déplacements cycliques imposés sur une grille ou sur l'embout supérieur, afin de le déformer suivant divers modes de traction, compression, torsion et flexion (cf. Figure 31).

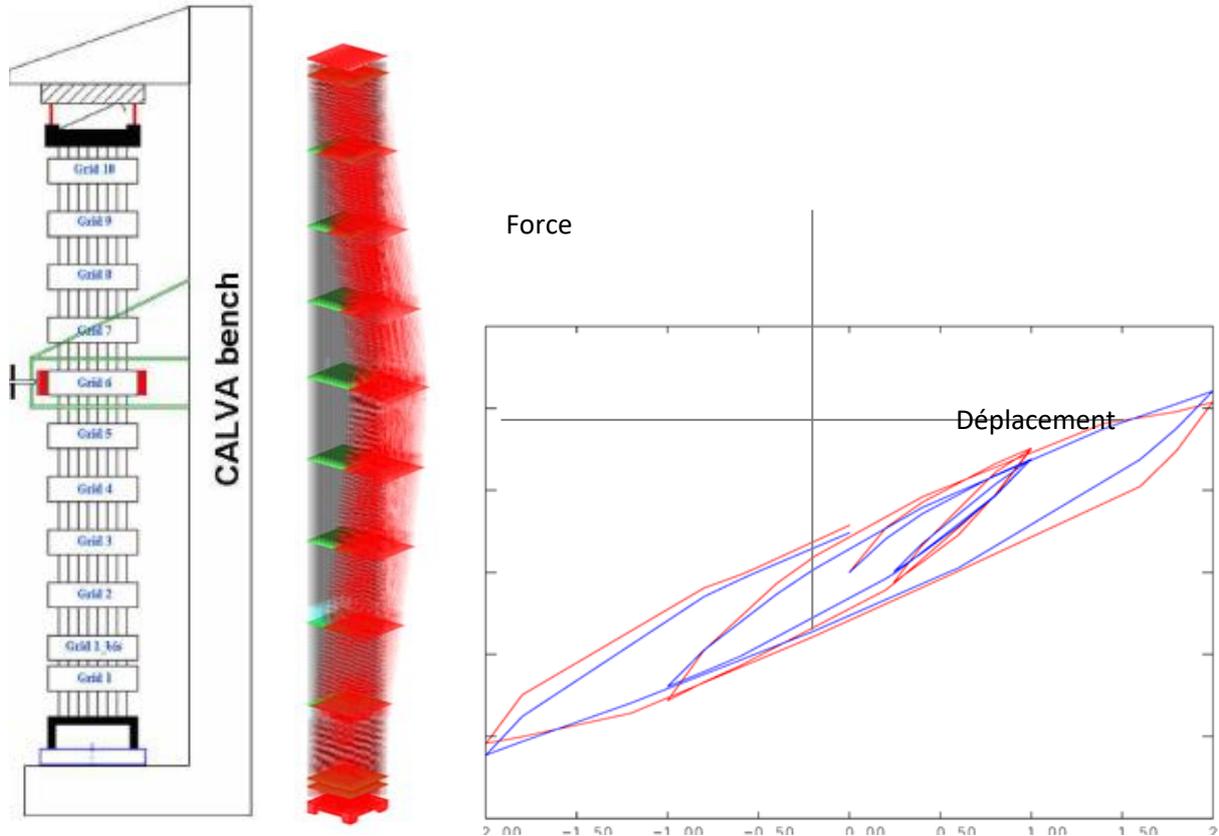


Figure 31 : banc d'essai en air (Lamorte, 2021) permettant d'imposer un déplacement latéral, déformée lors du calcul de flexion ( $\times 10$ ), corrélation calcul (rouge) - essai (bleu) portant sur la force de réaction horizontale de la grille 6 lors de son déplacement imposé (en abscisse).

La simulation permet d'analyser des grandeurs très locales, inaccessibles à la mesure, comme les efforts qui transitent en chaque point de contact crayon-grille. Elle permet aussi d'analyser la flexion des grilles suivant l'historique de chargement, la distribution spatiale des glissements des crayons au travers des grilles, l'effet de la précharge axiale du système de maintien ou celui de la relaxation des ressorts de grille par fluage d'irradiation. Ces observations se révèlent très utiles afin d'orienter les choix de modélisation lorsqu'il s'agit de construire des modèles simplifiés d'assemblage ou de choisir une méthode de réduction de modèles.

### 3.3 EXTENSION DU DOMAINE D'UTILISATION AUX CHARGEMENTS EN RÉACTEUR

En partant de la modélisation détaillée d'un assemblage en air, on a ajouté des fonctionnalités qui permettent de simuler un assemblage dans l'environnement du réacteur :

- La prise en compte des chargements de température, de flux et de fluence au cours du temps, donnés par des codes spécialisés.
- La croissance sous flux pour les tubes-guides au moyen d'un chargement de déformation libre imposé en extension, cf. Figure 18.
- L'allongement axial des crayons, cf. Figure 22, au moyen d'une loi de grandissement, fonction de la fluence locale, et appliquée elle aussi au moyen d'un chargement de déformation libre en extension.
- La prise en compte de la pression du circuit primaire sur les crayons (différence entre la pression intérieure de quelques bars et la pression extérieure de 155 bars).
- Le fluage d'irradiation pour les crayons, tubes-guides, bossettes, ressorts et languettes, cf. §2.5.
- La gestion d'options de calcul dans la procédure de résolution de l'outil.

Il n'existe pas à notre connaissance de campagne d'essais physiques concernant un AC complet sous irradiation. La validation expérimentale du modèle détaillé d'AC est donc incomplète. Néanmoins, les éléments de validation du modèle hors irradiation sont probants. Ce modèle d'AC est le plus détaillé dont on dispose et nous l'utiliserons comme modèle de référence (aussi appelé modèle complet ou modèle haute-fidélité) pour construire ensuite un modèle de faible dimension par réduction de modèle.

### 3.4 CAMPAGNE DE CALCULS DE RÉFÉRENCE POUR LA RÉDUCTION DU MODÈLE DE FLUAGE

#### 3.4.1 Modèle, conditions aux limites et chargements

On considère un AC dont les dimensions et les caractéristiques sont proches, bien que différentes, de celles d'un AC de cœur REP 1300MW. Sa hauteur totale est d'environ 5 m et sa largeur de 21 cm. Son squelette comprend 10 grilles carrées de 17x17 cellules, 24 tubes-guides et les 2 embouts en acier qui sont reliés aux tubes-guides par des liaisons rigides.

Le but est d'étudier les déformations de fluage de l'AC en conditions réalistes d'irradiation au sein du cœur REP, puis de construire et valider la partie fluage du ROM. Les autres phénomènes, comme le contact-frottement dans les liaisons, ne sont pas pris en compte dans cette campagne de calculs qui se concentre uniquement sur le fluage des crayons et des tubes-guides. C'est pourquoi les contacts entre crayons et grille sont maintenus fermés en toutes circonstances et le glissement est interdit. De même la relaxation des ressorts de grille n'est pas prise en compte dans cette première étape.

La loi de comportement retenue pour les crayons et les tubes-guides est la loi de fluage sous irradiation utilisée dans FRAPCON 3.4 (Geelhood et al., 2011) et rappelée dans le Tableau 2.

Tableau 2 : Paramètres de la loi de fluage d'irradiation.

Loi de fluage d'irradiation	$C_0 ((n/m^2s^{-1})^{-0.85} MPa^{-1})$	$C_1$	$C_2$	$f(T)$ avec T en K
$\dot{\epsilon}^{creep} = C_0 \sigma^{C_1} \sigma_{eq}^{C_2} f(T)$	1.874E-24	0.85	1	-3.18562+0.00699T

L'AC est supposé initialement droit et vertical, sans déformations résiduelles. Les conditions aux limites consistent à bloquer la base de l'embout inférieur et à imposer un guidage axial de l'embout supérieur.

Les chargements mécaniques sont constitués d'une force de compression axiale constante de 5000N appliquée par le système de maintien sur l'embout supérieur, ainsi que des forces axiales ou transversales réparties sur les différentes grilles (forces hydrauliques et force de contact éventuelle avec un assemblage voisin).

Pour le chargement d'irradiation, on retient un flux de neutrons rapides d'une intensité maximale de  $0.8 \cdot 10^{18} nm^{-2} s^{-1}$  au milieu de l'AC, avec une décroissance jusqu'à zéro au niveau des embouts, cf. Figure 32. Un gradient latéral de flux neutronique est également appliqué pour les cas d'étude où l'on considère un AC situé en périphérie du cœur puisque la face externe d'un tel AC subit un flux environ deux fois plus faible que sa face située vers l'intérieur du cœur.

Le champ thermique sur les composants est ensuite déduit des températures d'entrée et de sortie du caloporteur et de la cartographie de puissance au sein de l'assemblage.

Les différents chargements sont appliqués et maintenus pendant  $10^8$  s de manière constante. Le fluage est évalué sur une dizaine de pas de temps réguliers de  $10^7$  s. Chacun de ces calculs de fluage ne prend qu'une dizaine de minutes sur un PC de bureau, contre plusieurs heures pour un calcul incluant le contact-frottement des crayons au travers des grilles. La Figure 32 présente, à droite, le flux de neutrons rapide appliqué et, à gauche, la déformée finale d'un AC soumis pendant  $10^8$  s au chargement mécanique LAT2, défini dans le Tableau 3.

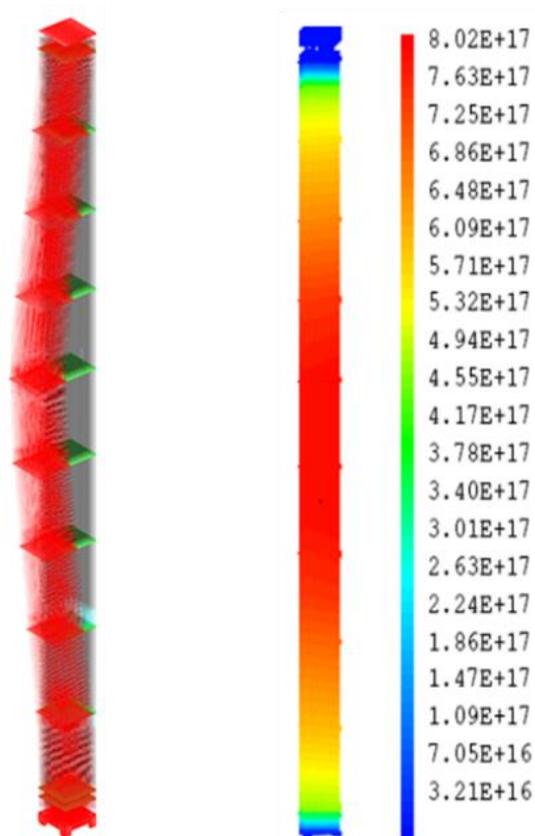


Figure 32 : A gauche, maillage initial (vert et gris) et déformé (rouge) d'un assemblage combustible ; à droite, cartographie du flux de neutrons rapides appliqué ( $>1\text{MeV}$ ) ( $\text{n}/\text{m}^2.\text{s}$ ).

### 3.4.2 Définition du plan d'expérience

Afin d'identifier les modes macroscopiques et inélastiques à partir de réalisations du modèle de référence, il est d'abord nécessaire de définir l'espace des paramètres décrivant les différents chargements, puis construire un plan d'expérience de taille raisonnable. Les principaux paramètres qui influencent la déformation sont les efforts latéraux qui s'appliquent sur les grilles et leur voisinage, ainsi que la position de l'assemblage dans le cœur.

En ce qui concerne les efforts hydrauliques appliqués à l'AC, la géométrie est divisée en 10 zones comprenant chacune une grille et les segments de crayons et de tubes-guides de part et d'autre de la grille. La somme de toutes les forces hydrauliques et de contact dans une de ces zones constitue un chargement mécanique ramené sur le maillage de la grille. Le Tableau 3 donne les différents profils LAT1 à LAT9 définis pour étudier la réponse de l'AC sous chargement de force latérale. LAT1, LAT2, LAT3 et LAT5 sont des profils de forces réalistes issus de simulations hydrauliques (De Lambert et al., 2021). LAT4 représente une force de contact à mi-hauteur sans forces latérales hydrauliques. LAT6 à LAT9 sont des ensembles purement hypothétiques de forces latérales ajoutées pour compléter la représentation des forces et également pour représenter des contacts possibles avec un AC voisin à différentes hauteurs. Les forces à « haute fréquence spatiale » sont considérées comme peu probables et ne sont pas observées lors de mesures sur des assemblages déformés (Andersson et al., 2005 ; Gabrielsson et al., 2018).

Tableau 3 : 9 champs de force latérale (N) à appliquer sur les 10 grilles d'un modèle de référence d'AC.

Grid	LAT1	LAT2	LAT3	LAT4	LAT5	LAT6	LAT7	LAT8	LAT9
1	-30	0	90	0	0	0	0	-100	-100
2	-72	-5	60	0	-20	0	-100	0	0
3	-150	20	30	0	-40	-100	0	100	100
4	-30	70	0	0	-100	0	0	0	0
5	36	100	0	0	-30	0	100	0	-100

6	18	45	0	150	0	0	0	-100	0
7	9	25	0	0	20	100	0	0	100
8	0	10	0	0	80	0	-100	0	0
9	0	3	30	0	20	0	0	100	-100
10	0	0	60	0	0	0	0	0	0

Le plan d'expérience d'identification des modes de fluage est construit en 3 parties.

La première partie du plan d'expérience est la plus conséquente. Elle considère un AC en position centrale (la majorité des AC sont définis comme tels), c'est-à-dire que le flux neutronique est homogène dans toute section horizontale. En utilisant les profils de force du Tableau 3, 68 combinaisons de forces latérales pour les directions  $X$  et  $Y$  sont calculées avec le modèle détaillé.

La deuxième partie du plan d'expérience considère un AC positionnée en périphérie du cœur, côté ouest. Cela signifie qu'il est soumis à un gradient de flux de neutrons dans la direction  $X$ . Les efforts latéraux ne sont appliqués que dans cette même direction car le retour d'expérience montre que les déformations sont plus prononcées dans la direction radiale du noyau. De plus, la première partie du plan d'expérience informe déjà de l'effet des couplages entre forces latérales dans différentes directions, bien qu'avec un flux neutronique symétrique.

La dernière partie du plan d'expérience reprend le principe de la seconde, en considérant cette fois un AC en position périphérique nord, c'est-à-dire avec une rotation de 90 degrés des chargements mécaniques et neutroniques.

Au total, 88 calculs détaillés sont donc réalisés pour caractériser la réponse en fluage de l'AC en conditions REP. Les résultats utiles pour la réduction de modèle d'AC sont les déplacements des grilles et les champs de déformation inélastique.

## 4. Éléments de bibliographie sur les techniques de réduction de modèles et la méthode NTFA

Avant de proposer notre réduction de modèle, nous commençons par une étude bibliographique sur les techniques de réduction de modèles en mécanique des solides et des structures. On présente d'abord les trois principales techniques de réduction de modèles utilisées dans les problèmes quasi-statiques, à savoir la POD, la PGD, et l'Hyper-Réduction de modèles. On décrit ensuite la NTFA qui, en tant que méthode d'homogénéisation, peut également être qualifiée de réduction de modèle.

### 4.1 POD

#### 4.1.1 Origine

La décomposition en modes propres (Proper Orthogonal Decomposition - POD) est maintenant utilisée dans de très nombreux domaines : thermique, mécanique des fluides, dynamique, compression d'images et, de manière générale, quand on dispose de beaucoup d'information à traiter. Elle a été développée séparément par divers auteurs pour leurs besoins propres et se retrouve donc dans la littérature sous différentes appellations telles que POD, KLD (décomposition de Karhunen Loeve), ACP ou PCA (analyse en composantes principales). Elle est également proche de la SVD (Singular Value Decomposition).

Le principe de cette méthode de décomposition est représenté sur la Figure 33. Le concept remonterait à (Pearson, K, 1901), qui l'appliquait à des problèmes géométriques mais semble avoir été peu utilisé jusqu'à (Karhunen K., 1946) et enfin (Lumley, J.L., 1967), qui l'a redéveloppée pour analyser des écoulements turbulents. Plus récemment, (Sirovich, 1987) a défini la snapshot POD, mieux adaptée aux problèmes de grande taille spatiale et, de fait, a généré un essor important de son utilisation. *In fine*, (Liang et al., 2002) comparent ces trois méthodes et montrent qu'elles aboutissent à la même formulation, c'est-à-dire à la recherche des vecteurs propres d'un opérateur de corrélation spatiale.

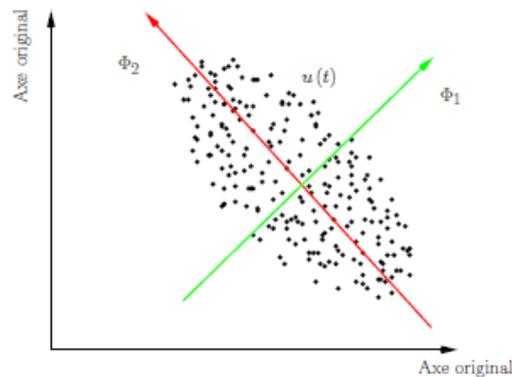


Figure 33 : analyse en composantes principales d'un amas de données  $u(t)$ .

#### 4.1.2 Principe de la Snapshot POD

La POD est une méthode qui permet de déterminer un nombre minimal de fonctions de base permettant une approximation satisfaisante d'un ensemble de données théoriques, numériques ou expérimentales à travers un sous espace de plus faible dimension. Les modes étant classés par ordre d'importance dans l'approximation, nous pouvons facilement tronquer la base pour un critère de représentativité donné. En mécanique, si on travaille en norme de l'énergie, la base réduite obtenue par POD est dite optimale au sens énergétique. Elle est calculée à partir d'une sélection de valeurs propres d'une matrice de corrélation qui définit le nombre de réalisations des paramètres d'entrées.

Soit  $[U]$  l'ensemble des solutions connues d'un problème spatio-temporel défini sur  $\Omega \times I$ . Le but de la POD est de trouver une approximation  $[U_m]$  à variables séparées de la solution  $U$ , qui soit optimale à l'ordre  $m$ .

$$[U] \approx [U_m] = \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \psi_i(t) \quad (3)$$

Avec  $x \in \Omega$  et  $t \in I$ . Les  $m$  fonctions  $\phi_i(x)$  constituent la base spatiale réduite des solutions tandis que les  $m$  amplitudes  $\psi_i(t)$  sont appelées modes temporels et constituent une base réduite temporelle.

L'intérêt de la méthode POD est de garantir une distance minimale sur  $\Omega \times I$  entre la solution et son approximation à l'ordre  $m$ .

$$\| [U] - [U_m] \|^2 = \min \left\| [U] - \sum_{i=1}^m \phi_i(x) \psi_i(t) \right\|^2 \quad (4)$$

Cette norme est définie par un produit scalaire entre 2 champs spatiaux  $U1$  et  $U2$  sur  $\Omega$ , par exemple.

$$(U1, U2) = \iiint U1(x) U2(x) dV \quad (5)$$

D'autres normes peuvent aussi être définies pour tenir compte de la nature discrète de l'information, de sa répartition spatiale (maillage non régulier), de l'enjeu de l'analyse. La norme énergétique qui fait intervenir la matrice de raideur  $K$  du système mécanique est souvent retenue. Elle s'exprime de la manière suivante :

$$(U1, U2) = U2^t \cdot K \cdot U1 \quad (6)$$

La minimisation de l'erreur revient à chercher la base orthonormée  $[\phi]$  formée des  $m$  vecteurs  $\phi_i(x)$  sur  $\Omega$  qui maximise la projection de l'ensemble des données  $[U]$  de  $\Omega \times I$  sur  $[\phi]$  au sens des moindres carrés. Nous cherchons la base  $[\phi]$  telle que :

$$[\phi] = \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} \frac{([U], [\phi])^2}{([\phi], [\phi])} \quad (7)$$

L'ajout d'une contrainte de normalité des modes permet d'éliminer le dénominateur.

$$[\phi] = \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} (([U], [\phi]) \cdot ([U], [\phi])) \quad (8)$$

En utilisant une notation matricielle où  $[U]$  est la matrice rectangulaire contenant les vecteurs colonnes des données à un instant  $t$ , aussi appelée matrice des snapshots, nous traduisons alors cette maximisation par :

$$[\phi] = \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} [\phi]^t \cdot [U] \cdot [U]^t \cdot [\phi] \quad (9)$$

On note  $[S]$  la matrice des corrélations spatiales, qui est symétrique, au moins semi définie positive et coercive. Son expression est la suivante :

$$[S] = [U] \cdot [U]^t = ([U] \cdot [U]^t)^t = [S]^t \quad (10)$$

Ces éléments sont définis par le produit scalaire en temps :

$$(U_{x1}(t), U_{x2}(t)) = \frac{1}{T} \int U_{x1}(t) U_{x2}(t) dt \quad (11)$$

ou, plus souvent, exprimé en temps discret sous la forme suivante :

$$S^*(x1, x2) = (U_{x1}(t), U_{x2}(t)) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^q U_{x1}(t_j) U_{x2}(t_j) \quad (12)$$

et le problème d'approximation prend la forme d'un problème de minimisation sous contrainte :

$$[\phi] = \underset{\phi}{\operatorname{argmax}} [\phi]^t \cdot [S] \cdot [\phi] \quad (13)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres. La base  $[\phi]$  satisfait ( 12 ) si  $[\lambda]$  est la matrice diagonale des valeurs propres de  $[S]$ .

$$[S] \cdot [\phi] = [\lambda] \cdot [\phi] \quad (14)$$

La solution est unique. Trouver et ordonner les valeurs propres  $\lambda_i$  dans l'ordre décroissant permet d'effectuer une troncature à l'ordre  $m$  en ne retenant que les  $m$  premiers vecteurs propres de  $[S]$  pour constituer la base  $[\phi]_m$ .

Les modes  $\phi_i$  de la base  $[\phi]_m$  sont des combinaisons linéaires des données spatiales (des snapshots). De ce fait, ils respectent naturellement les conditions aux limites du problème. Les  $m$  amplitudes  $\psi_i(t)$  des modes  $\phi_i$  pour chaque snapshot sont obtenues par projection de  $[U]$  sur  $[\phi]_m$ .

$$\psi_i(t_p) = (U_p, \phi_i) \quad (15)$$

Ceci s'écrit également sous la forme ( 16 ).

$$[\psi] = [U]^t \cdot [\phi]_m \quad (16)$$

Du fait de la troncature, nous commettons une erreur de projection  $Err(m)$ . Notons que celle-ci serait nulle si nous avions pris une base de même dimension  $N$  que  $\Omega$ .

$$Err^2(m) = \| ([U], [\phi]_N) - ([U], [\phi]_m) \|^2 \quad (17)$$

En utilisant les propriétés des bases orthonormées  $[\phi]_m$  et  $[\phi]_N$  et sachant que :

$$\text{trace} [S] = \sum_1^N \|U_i\|^2 \quad (18)$$

Il vient :

$$\text{Err}^2(m) = \frac{\sum_{k=m+1}^N \lambda_k}{\sum_{k=1}^N \lambda_k} \sum_1^N \|U_i\|^2 \quad (19)$$

L'erreur est donc pilotée par la décroissance du spectre des valeurs propres  $\lambda_k$ , ce qui permet de choisir la troncature en fonction d'un objectif de tolérance assigné.

En définitive, la snapshot POD permet de construire une base orthonormée, optimale au sens des moindres carrés, permettant de réduire le modèle de représentation des données tout en maîtrisant l'erreur commise sur celles-ci.

#### 4.1.3 POD classique

La POD classique, décrite par (Lumley, J.L., 1967) dans le but d'identifier les structures cohérentes d'un écoulement turbulent, est souvent utilisée dans le domaine expérimental et en dynamique où le nombre d'observations relevées au cours du temps est parfois nettement plus grand que la dimension spatiale de chaque observation. Il devient alors intéressant d'inverser le rôle de l'espace et du temps dans l'approche présentée au §4.1.2, et l'on va chercher une base de modes temporels dans laquelle projeter les données spatiotemporelles acquises et stockées dans la matrice  $[U]$ , si elles sont discrètes.

Nous disposons des solutions ou mesures de  $U$  sur le domaine  $\Omega \times I$ . Rangeons-les dans la matrice  $[U] = [U(t_0) \dots U(t_q)]$  qui est alors rectangulaire de dimension  $N \times q$  avec  $q \gg N$ .

Nous choisissons de calculer la matrice de corrélation temporelle  $[S^*] = [U]^t \cdot [U]$ ,  $[S^*]$  étant, comme  $[S]$  précédemment, symétrique et au moins semi définie positive. L'obtention de ses  $m$  premières valeurs propres  $\lambda_i$  permet de construire la base temporelle orthonormée  $[\psi]_m$ , tronquée à un ordre  $m$  afin qu'elle soit suffisante vis-à-vis de la tolérance que l'on s'est fixée. Le « contenu énergétique » de ces modes  $\psi_i(t)$  obéit à la même règle de dépendance aux valeurs propres que dans la snapshot POD. Les amplitudes spatiales  $\phi_i(x)$  des modes temporels  $\psi_i(t)$  sont obtenues par projection de  $[U]$  dans la base  $[\psi]_m$ .

$$[\phi] = [U]^t [\psi]_m \quad (20)$$

$$\phi_i(x_p) = (U(x_p)(t), \psi_i(t)) \quad (21)$$

Ceci permet d'écrire la solution sous une forme séparant variables temporelles et spatiales.

#### 4.1.4 Galerkin POD

Considérons un système linéaire paramétré de grande taille spatiale décrit par la matrice carrée  $A(\mu)$ , qui peut constituer la linéarisation d'un système non-linéaire. Nous cherchons le vecteur  $U$  sur  $\Omega$  solution de l'équation suivante pour le paramètre  $\mu$  appartenant à un domaine  $M$  :

$$A(\mu) \cdot U = L(\mu) \quad (22)$$

Le paramètre  $\mu$  peut caractériser les chargements, les caractéristiques des matériaux ou d'autres grandeurs influentes du problème à traiter.

Supposons connaître  $m$  solutions  $U_i$  de ce problème, chacune associées à une valeur  $\mu_i$  de  $\mu$ . Il est alors possible de les considérer comme des snapshots et d'en déduire une base spatiale de projection orthonormée optimale par la méthode POD. Nous obtenons alors une base réduite  $[\phi]_m$  constituée de  $m$  modes  $\phi_i$  définis sur  $\Omega$  et respectant naturellement les conditions aux limites du problème utilisées lors des réalisations.

Si les  $m$  valeurs  $\mu_i$  pour lesquelles nous disposons d'une solution ont été bien choisies, alors nous pouvons raisonnablement espérer obtenir une bonne représentation de la solution cherchée par une combinaison linéaire des solutions  $U_i$  et donc également une combinaison linéaire des modes  $\phi_i$ .

$$U(\mu) \approx \sum_{i=1}^m a_i(\mu) \phi_i = [\phi]_m \cdot a \quad (23)$$

Ce faisant, la solution s'exprime en dimension  $m \ll N$  à l'aide des amplitudes  $a_i(\mu)$ . Pour déterminer ces coefficients pour un paramétrage  $\mu$  quelconque, nous allons multiplier à gauche le système ( 22 ) par  $[\phi]_m^t$  et remplacer  $U(\mu)$  par sa projection dans la base réduite.

$$[\emptyset]_m^t \cdot A(\mu) \cdot [\emptyset]_m \cdot a = [\emptyset]_m^t \cdot L(\mu) \quad (24)$$

On fait ainsi apparaître un système linéaire appelé modèle réduit exprimé dans la base réduite  $[\emptyset]_m$  obtenue par POD. Etant donné qu'il est de dimension  $m$  plus faible, il est résolu plus facilement que le problème en base complète. Il s'écrit :

$$\begin{cases} A^*(\mu) \cdot a = L^*(\mu) \\ A^*(\mu) = [\emptyset]_m^t \cdot A(\mu) \cdot [\emptyset]_m \\ L^*(\mu) = [\emptyset]_m^t \cdot L(\mu) \end{cases} \quad (25)$$

Une fois le vecteur  $a$  obtenu, il est possible de recombinaison la solution dans l'espace complet (23), pour visualiser le résultat par exemple.

La méthode de Galerkin POD est bien adaptée aux problèmes linéaires et s'y révèle très efficace. L'extension au cadre non-linéaire est plus délicate. Pour un problème de fluage, commencer par linéariser le problème de manière itérative puis effectuer une POD sur chaque problème linéarisé serait beaucoup trop cher en temps de calcul.

## 4.2 PGD

### 4.2.1 Généralités

PGD signifie Proper Generalised Decomposition (décomposition générale en modes propres). C'est une méthode de construction « a priori » d'une base, orthonormée ou non, pour la décomposition d'une solution sous forme séparée en espace-temps ou en espace-temps-paramètres. La PGD (Ladevèze, 1985) est une méthode encore récente, qui a été utilisée dans de nombreuses disciplines : pour des problèmes d'homogénéisation (Metoui et al., 2014), pour les calculs de structure à comportement viscoélastique (Hammoud et al., 2011), en mécanique des fluides (Dumon et al., 2011) et même pour la résolution de l'équation de Schrödinger (Ammar and Chinesta, 2008).

Le qualificatif *a priori* signifie que cette base réduite est construite progressivement au cours du calcul et non pas *a posteriori*, comme dans la méthode POD, où l'on a préalablement accès aux résultats (snapshots). Le nombre de modes utilisés est fonction d'une tolérance de projection choisie. Cette construction progressive de la base réduite signifie que l'on va se servir du modèle initial de grande dimension à chaque fois qu'il sera nécessaire d'enrichir la base, ce qui est un gage de qualité de la solution autant qu'un prix à payer pour l'obtenir. Enfin il s'agit d'une méthode non incrémentale puisqu'on cherche directement une solution qui couvre tout le domaine espace-temps ou espace-temps-paramètres. Elle est souvent associée à la méthode de résolution dite LATIN, développée par le même auteur (Ladevèze, 1985). L'idée était de développer un solveur non-incrémental avec une décomposition spatio-temporelle. La méthode LATIN consiste à résoudre un problème en deux étapes alternatives, jusqu'à ce que la norme espace-temps du résidu soit plus faible qu'un critère arbitraire. La première étape consiste à résoudre sur tout le domaine espace-temps le système linéaire de grande taille qui contient toutes les relations linéaires spatialement couplées. La deuxième étape consiste à appliquer les relations locales, éventuellement non linéaires. Le couplage de la méthode PGD avec la méthode LATIN a été introduit essentiellement pour pouvoir alléger la résolution du problème linéaire, coûteuses en temps CPU et en espace mémoire. La représentation séparée espace-temps de la PGD a été l'une des principales idées constituant la méthode LATIN et elle a été appliquée avec succès dans plusieurs applications avec une variété d'algorithmes selon le contexte utilisé. La PGD s'insère très bien dans la LATIN et les deux sont souvent utilisées ensemble pour les problèmes d'évolution non-linéaires, y compris pour des sollicitations cycliques ou de la fissuration (Alameddine et al., 2017).

Pour la mise en œuvre de la PGD, il nous faut avant tout choisir le type de séparation de variables que l'on souhaite obtenir. Par exemple, une solution  $U(x,y,t)$  sur  $\Omega \times I$  peut s'approximer à l'ordre  $n$  de la manière suivante avec des fonctions de l'espace ou du temps  $U^i$  ( $i = 1$  à  $n$ ) et  $\alpha_i$  des coefficients réels de pondération si tous les modes sont normés :

$$U(x, y, t) \approx U_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (U_{xy}^i \otimes U_t^i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_{xy}^i(x, y) U_t^i(t) \quad (26)$$

Ou bien :

$$U(x, y, t) \approx U_n(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (U_x^i \otimes U_y^i \otimes U_t^i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_x^i(x) U_y^i(y) U_t^i(t) \quad (27)$$

La première est plus rapide à obtenir, alors que la seconde offre une meilleure compression des données. Il y a donc un choix à faire pour adapter la forme de la décomposition aux besoins de la problématique à traiter. Si le problème est exprimé avec des paramètres supplémentaires, autres que l'espace et le temps, il est alors d'usage d'écrire la solution sous forme séparée en introduisant des modes  $U_\mu^i$  dédiés aux paramètres  $\mu$ . Comme pour la POD, nous souhaitons trouver l'approximation  $U_n$  qui minimise l'erreur  $Err(U_n)$ , évaluée comme une norme du résidu  $R(U_n)$  défini sur  $\Omega \times I$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} U_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i U_x^i(x) U_y^i(y) U_t^i(t) \\ Err(U_n) = \|R(U_n)\| \approx \|U(x, y, t) - U_n(x, y, t)\|_{\Omega \times I} \\ U_n = \text{Argmin } Err(U_n) \end{array} \right. \quad (28)$$

La PGD consiste à réaliser itérativement les 3 étapes de la Figure 34 ci-après, que nous allons expliquer succinctement :

- Enrichissement modal : l'ordre  $n$  est calculé si nécessaire à partir de la connaissance de l'ordre  $n-1$  ;
- Projection  $\Pi R$  : les coefficients de pondération d'un ensemble de modes spatiaux ou temporels sont calculés par des projections successives sur ces modes ;
- Evaluation de la convergence : l'erreur de l'approximation est évaluée, puis comparée à une tolérance.

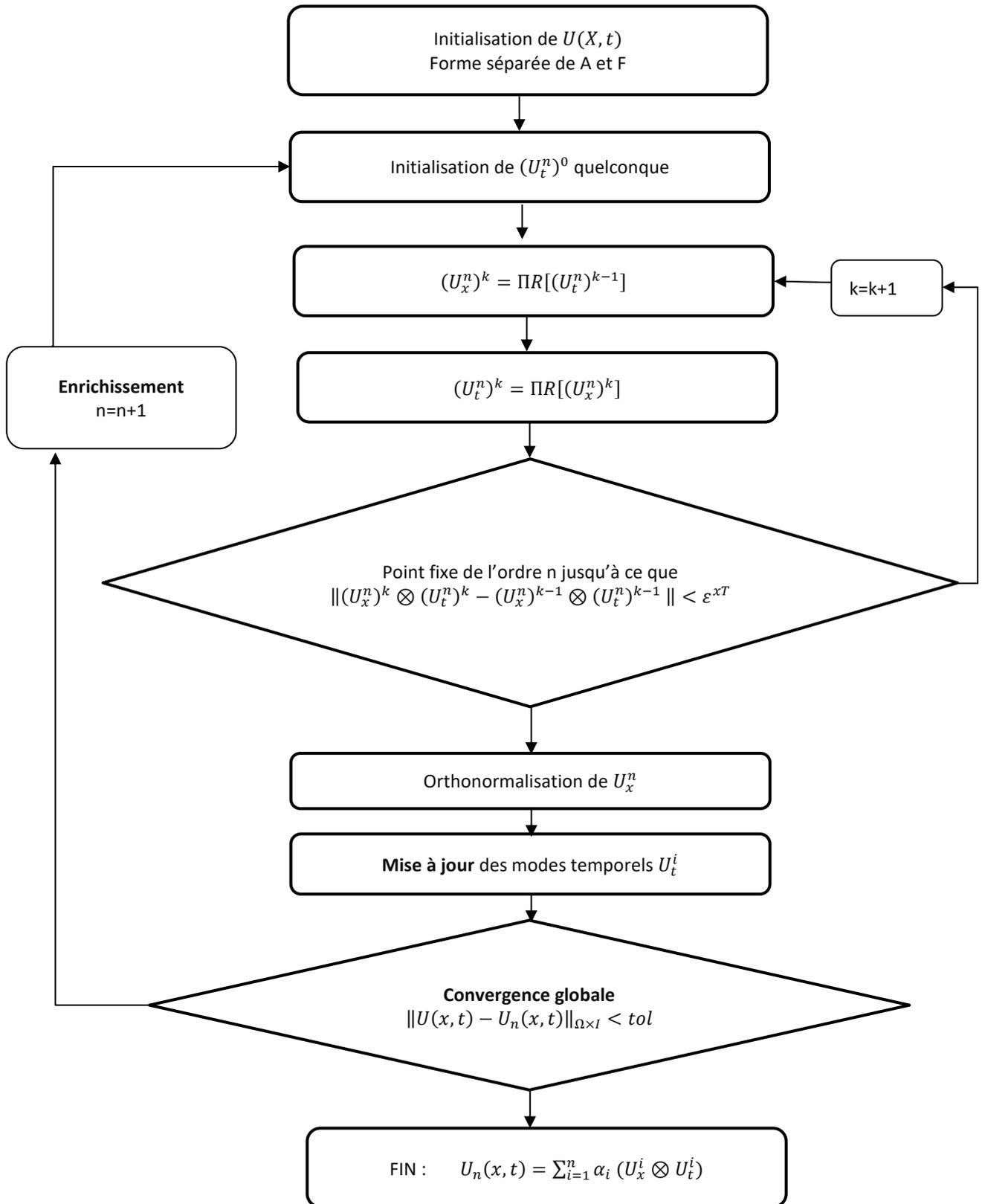


Figure 34 : exemple d'algorithme PGD.

#### 4.2.2 Etape 1, exemple d'enrichissement avec une approche Galerkin

Afin de donner un exemple simple d'application, considérons le cas général d'un calcul éléments finis élastique linéaire soumis à un chargement qui est fonction du temps. L'objectif est de calculer  $U$  dans l'espace des solutions admissibles  $\mathbb{A}$  sur  $\Omega \times [0, T]$  tel que avec la matrice de raideur constante  $K$  :

$$\begin{cases} K \cdot U(t) = F(t) \\ U(t=0) = U_0 \end{cases} \quad (29)$$

En appliquant le principe des travaux virtuels, le problème à résoudre revient à trouver le vecteur  $U(t)$  dans  $\mathbb{A}$  pour tout  $V$  dans  $\mathbb{A}$  tel que :

$$V^t \cdot [K \cdot U(t) - F(t)] = 0 \quad (30)$$

Nous cherchons une solution à variables séparées sur  $\Omega \times [0, T]$  à l'ordre  $n$  de la forme suivante :

$$U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n U_x^i \otimes U_t^i \quad (31)$$

Afin de réaliser un algorithme glouton avec une tolérance  $\varepsilon > 0$ , nous commençons par initialiser la première paire de modes arbitrairement, puis par récurrence nous supposons connu l'ordre  $n - 1$  de l'approximation de  $U$  qui ne satisfait pas encore la tolérance retenue. Nous cherchons alors à déterminer une nouvelle paire de modes  $U_x^n$  et  $U_t^n$  tel que :

$$U_n(x, t) = U_{n-1}(x, t) + (U_x^n \otimes U_t^n) \quad (32)$$

Nous supposons que la base des  $U_x^i$  est orthonormée au sens de la norme  $K$  jusqu'à l'ordre  $n - 1$ , par le procédé de Gram-Schmidt :

$$U_x^p \cdot K \cdot U_x^q = \delta_{pq} \quad \forall p, q = 1, n - 1 \quad (33)$$

En introduisant notre approximation de la solution à l'ordre  $n$ , l'équation devient :

$$\int_0^T V^t \cdot [K \cdot U_n(t) - F(t)] dt = 0 \quad (34)$$

$$\int_0^T V^t \cdot [K \cdot (U_x^n \otimes U_t^n) - F(t) - K \cdot U_{n-1}(t)] dt = 0 \quad (35)$$

$V$  est une solution espace-temps quelconque. On se réduit maintenant aux fonctions tests qui peuvent s'exprimer à l'aide des modes  $U_x^n$  et  $U_t^n$  comme suit, avec des modes  $U_x^*$  et  $U_t^*$  arbitraires dans  $\Omega \times [0, T]$ .

$$V = (U_x^* \otimes U_t^n) + (U_x^n \otimes U_t^*) \quad (36)$$

Avec ce choix de fonctions tests dans (35), le problème se réduit à :

$$\int_0^T [(U_x^* \otimes U_t^n) + (U_x^n \otimes U_t^*)]^t \cdot [K \cdot (U_x^n \otimes U_t^n) - F(t) - K \cdot U_{n-1}(t)] dt = 0, \forall U_x^*, U_t^* \quad (37)$$

En adoptant la notation  $R_{n-1}(t)$  pour le résidu de l'ordre  $n - 1$ , nous faisons apparaître le problème déflaté suivant :

$$R_{n-1}(t) = F(t) - K \cdot U_{n-1}(t) \quad (38)$$

$$\int_0^T [(U_x^* \otimes U_t^n) + (U_x^n \otimes U_t^*)]^t \cdot [K \cdot (U_x^n \otimes U_t^n) - R_{n-1}(t)] dt = 0 \quad (39)$$

On peut donc choisir  $U_x^* = 0$  ou  $U_t^* = 0$ , ce qui amène au système de deux équations de projection suivant, quel que soit le mode spatial  $U_x^*$  dans  $\Omega$ , à résoudre par point fixe en  $U_t^n$ .

$$\begin{cases} U_t^n = (U_x^n)^t \cdot R_{n-1}(t) \\ (U_x^*)^t \cdot K \cdot U_x^n = (U_x^*)^t \cdot \frac{\int_0^T U_t^n R_{n-1}(t) dt}{\int_0^T (U_t^n)^2 dt} \end{cases} \quad (40)$$

Dans la deuxième équation, qui donne le mode  $U_x^n$ , apparaît un système linéaire complet à résoudre une fois par itération de l'algorithme local de point fixe. Il présente donc un certain coût pour identifier une nouvelle paire de mode en ligne. Dans ce cas, le gain se fait surtout sur l'aspect temporel puisqu'on ne résout pas de système linéaire à chaque pas de temps.

Le mode  $U_x^n$  obtenu n'est pas nécessairement orthogonal à la base orthonormée du rang  $n - 1$ . Ceci est corrigé par le procédé de Gram-Schmidt à l'aide du produit scalaire utilisant la matrice  $K$  pour vérifier l'équation (33) :

$$U_x^n \leftarrow U_x^n - \sum_{i=1}^{n-1} (U_x^n \cdot K \cdot U_x^i) U_x^i \quad (41)$$

Il est alors conseillé de mettre également à jour les modes temporels suite à l'orthogonalisation du dernier mode spatial  $U_x^n$ , avant de stocker la nouvelle définition des modes  $U_t^i, U_x^i$  de  $U_n$ . C'est l'étape 2 qui fait l'objet du paragraphe suivant.

#### 4.2.3 Etape 2 : mise à jour des modes temporels

L'objet de l'étape 2 est la recherche d'une solution de meilleure qualité tirant parti de l'orthogonalisation des modes spatiaux effectuée itérativement. Pour cela, il faut mettre à jour régulièrement les modes temporels  $U_t^i$  de la décomposition  $U_n$  précédemment acquise, mais pas nécessairement à chaque itération de la boucle principale.

Considérons que nous disposons d'une décomposition à variables séparées d'ordre  $n$  s'appuyant sur une base spatiale orthonormée :

$$\begin{cases} U_n(x, t) = \sum_{i=1}^n U_x^i \otimes U_t^i \\ U_x^p \cdot K \cdot U_x^q = \delta_{pq} \end{cases} \quad (42)$$

On cherche la nouvelle décomposition qui soit optimale. Cette étape est parfois appelée « update » :

$$\begin{cases} \overline{U}_n(x, t) = \sum_{i=1}^n U_x^i \otimes \overline{U}_t^i \\ U_x^p \cdot K \cdot U_x^q = \delta_{pq} \end{cases} \quad (43)$$

L'idée est de recombinaison la solution dans l'espace complet, puis de chercher la base des  $\overline{U}_t^i$ .

En remplaçant  $U_n$  par son approximation  $\overline{U}_n$  dans (34), nous obtenons l'expression suivante pour tout mode spatial  $V$  :

$$\int_0^T V^t \cdot [K \cdot \overline{U}_n(t) - F(t)] dt = 0 \quad (44)$$

On décompose alors  $V$  sur la même base spatiale que  $\overline{U}_n$  :

$$V = \sum_{j=1}^n U_x^j \otimes (V_t^j)^* \quad (45)$$

On obtient l'expression suivante pour tout  $(V_t^j)^*$  dans l'espace temporel  $I$  :

$$\int_0^T \left( \sum_{j=1}^n U_x^j \otimes (V_t^j)^* \right)^t \cdot \left[ K \cdot \sum_{i=1}^n U_x^i \otimes \overline{U}_t^i - F(t) \right] dt = 0 \quad (46)$$

ce qui se développe sous la forme suivante :

$$\int_0^T \left\{ \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n (V_t^j)^* \overline{U}_t^i [U_x^j \cdot K \cdot U_x^i] - \sum_{j=1}^n (V_t^j)^* (U_x^j)^t F \right\} dt = 0 \quad (47)$$

Grâce à l'orthonormalité des modes (33), nous faisons apparaître la simple projection du second membre de l'équation initiale sur les modes spatiaux :

$$\overline{U}_t^j = (U_x^j)^t F(t) \quad (48)$$

#### 4.2.4 Etape 3 : contrôle de convergence

On peut arrêter l'algorithme PGD une fois la tolérance atteinte sur la norme de l'erreur :

$$\|U(x, t) - U_n(x, t)\|_{\Omega \times I} < \varepsilon \quad (49)$$

Il est néanmoins plus prudent de travailler avec une tolérance relative ( $\varepsilon_{rel}$ ) :

$$\frac{\|U(x, t) - U_n(x, t)\|_{\Omega \times I}}{\|U(x, t)\|_{\Omega \times I}} < \varepsilon_{rel} \quad (50)$$

En reprenant l'exemple précédent, il est courant de définir une tolérance relative sous la forme suivante :

$$Err(U_n) = \frac{\|K \cdot U_n - F\|_{\Omega \times I}}{\|F\|_{\Omega \times I}} < \varepsilon_{rel} \quad (51)$$

Le résultat de l'algorithme PGD est d'avoir accès à une décomposition simplifiée de la solution sous la forme réduite (31).

#### 4.2.5 Application au problème de fluage et limitation

La PGD, étant une méthode *a priori*, elle ne garantit pas toujours un gain significatif du temps de résolution par rapport au calcul de référence. L'une des raisons est qu'elle nécessite l'évaluation du comportement à tous les points d'intégration. (Relun et al., 2013) montrent que la PGD sait traiter un problème élastoviscoplastique de 750 000 degrés de libertés, comparable à la taille d'un modèle détaillé d'AC, avec un gain de temps de 30% par rapport au calcul de référence effectué avec Abaqus. Ce gain, obtenu avec un algorithme LATIN amélioré pour la circonstance, reste néanmoins très insuffisant par rapport à notre besoin.

### 4.3 HYPER RÉDUCTION

#### 4.3.1 Principe général

L'hyper réduction est utilisée en mécanique des structures dans la méthode APHR (A Priori Hyper Réduction). C'est une méthode incrémentale de réduction de base adaptative à deux niveaux développée par (Ryckelynck et al., 2006). Une première réduction, dénommée APR, concerne le problème linéaire global en espace et utilise le principe de la snapshot POD plusieurs fois au cours du calcul afin d'enrichir la base au cours de l'évolution. La seconde réduction est effectuée pour l'intégration du comportement local non-linéaire au moyen de la sélection et l'utilisation d'un nombre réduit de points d'intégration du modèle initial. L'équilibre est reformulé sur un domaine tronqué comprenant un nombre limité de nœuds et de points d'intégration bien sélectionnés. Nous gardons une résolution incrémentale en temps et la méthode est supposée facile à implémenter car elle ne dépend pas du schéma d'intégration utilisé, ni du type de formulation choisie. Voici les principales étapes de la méthode.

#### 4.3.2 Enrichissement et adaptation de la base

L'adaptation du modèle d'ordre réduit permet de commencer une étude en base réduite sans avoir fait au préalable de simulation numérique sur un problème similaire au problème à traiter. C'est une approche *a priori* qui se distingue des autres méthodes de réduction de modèles pour lesquelles des calculs sur modèles complets sont nécessaires afin de construire un modèle d'ordre réduit.

Pour l'enrichissement, nous nous servons tout simplement du résidu entre la prévision du modèle réduit courant et la formulation éléments finis pour se donner une nouvelle direction d'approximation. On prend soin d'orthonormaliser ce résidu par rapport à la base réduite, avant de l'y ajouter, comme dans la PGD (cf. §4.2.2). Suite à cette enrichissement de la base réduite, les variables réduites sont mises à jour par le procédé décrit au §4.2.3.

Enfin, la notion d'adaptation s'accompagne d'une remise en cause régulière des différents modes spatiaux qui constituent cette base de fonctions orthonormée. En effet, au cours de l'évolution du calcul, le besoin en nouveaux modes augmente sa dimension or une partie des modes précédents peut avoir perdu de son intérêt. Il est alors possible, pour la séquence temporelle de calcul en cours, de mener une snapshot POD afin de contrôler leur utilité au travers des valeurs propres de la matrice de corrélation. La taille de la base à l'instant courant reste ainsi maîtrisée.

#### 4.3.3 Réduction du problème global (prévision HPOD)

En considérant que l'on a construit une base  $[\varphi]_n$  orthonormée d'ordre  $n$  sur  $\Omega$  et que la solution cherchée s'exprime comme une combinaison linéaire de ces fonctions de base, il est possible d'interpoler la solution sur cette base à partir de  $n$  points bien choisis. L'APHR reprend le principe de la DEIM (Discrete Empirical Interpolation Method) pour sélectionner les points  $x_i$  du maillage initial de  $\Omega$  permettant de réaliser cette interpolation. Ils sont obtenus suivant une méthode itérative :

- Le premier point  $x_1$  est celui qui maximise la norme du premier mode de la base ;
- Le deuxième point  $x_2$  est celui qui maximise la norme de la distance entre le deuxième mode et l'espace précédent (le premier mode) ;

- Et ainsi de suite.

Ces points  $x_i$ , auxquels on ajoute les points nécessaires à la prise en compte des chargements sur le domaine  $\Omega$ , constituent la première partie de ce que (Ryckelynck and Missoum-Benziane, 2010) appellent le « domaine d'intégration réduit » ou le « domaine tronqué ».

L'équation d'équilibre du problème  $A.U(t) = F(t)$  est alors projetée sur la base réduite tronquée  $[\phi_R]_n$ , c'est-à-dire restreinte au domaine réduit. Nous nommons  $M$ , la matrice Masque qui permet de limiter  $A$  aux degrés de liberté du domaine réduit.

Le problème linéarisé initial :

$$\begin{cases} A.U(t) = F(t) \\ U(t=0) = U_0 \end{cases} \quad (52)$$

présente une solution approchée sur  $\Omega$  :

$$U(t) \approx \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i = [\phi]_n \cdot a \quad (53)$$

Le problème est projeté sur la base réduite tronquée  $[\phi_R]_n$ . Sa résolution donne la prévision du vecteur  $\bar{a}$ , valable sur tout  $\Omega$  :

$$[\phi_R]_n^t \cdot M \cdot A \cdot [\phi_R]_n \cdot \bar{a} = [\phi_R]_n^t \cdot M \cdot F(t) \quad (54)$$

La construction du problème réduit s'appuyant sur une technique de collocation, le contrôle de son erreur est très délicat.

#### 4.3.4 Hyper-réduction

La seconde réduction concerne l'intégration du comportement non-linéaire du matériau. Classiquement, même si l'on a recours à une approximation modale à l'ordre  $n$  du champ de déplacement sur  $\Omega$ , il reste à intégrer le comportement sur tous les points d'intégration afin de calculer les forces internes et contrôler le résidu sur tout le domaine  $\Omega$ . L'idée de l'hyper-réduction est d'utiliser beaucoup moins de points d'intégration puisque l'on utilise que peu de modes pour l'équilibre. Suivant cette logique, on identifie les points d'intégration les plus pertinents, qui permettent de garder un problème hyper-réduit bien posé.

Pour ce faire, la première étape est de repartir des points  $x_i$  déjà obtenus à l'étape précédente et de sélectionner tous les points d'intégration contenus dans les éléments connectés à ces nœuds, comme le montre la Figure 35. Cela permet ainsi de faire un bilan de force sur les nœuds  $x_i$  après le calcul des contraintes.

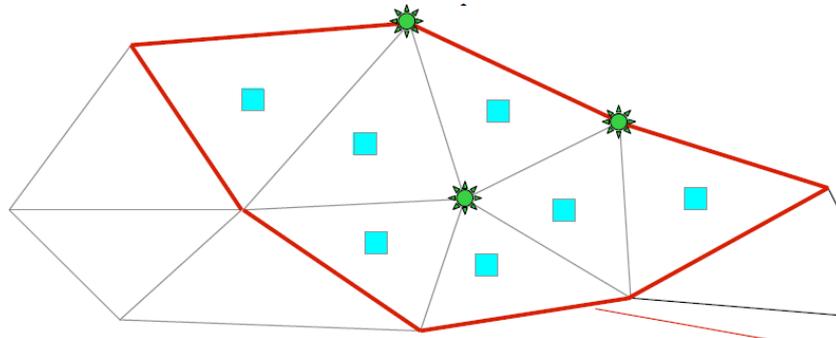


Figure 35 : sous-domaine isolé pour le calcul des variables d'état réduites.

La seconde étape est de mettre en place une base réduite de modes spatiaux pour approcher les champs de variables internes  $z$ . Ces variables internes ne sont calculées que dans les éléments du domaine réduit. Afin de pouvoir interpoler la solution du champ de variables internes sur cette base de  $n$  modes, il faut identifier au moins  $n$  points d'intégration pertinents. Ceux-ci sont sélectionnés de sorte à maximiser la distance du mode considéré par rapport à l'espace déjà construit à l'ordre  $n-1$  (DEIM).

La troisième étape consiste à ajouter au domaine d'intégration réduit les éléments où le gradient des modes de déplacement est maximum en suivant la même méthode de sélection.

La prévision HPOD des déplacements à l'incrément de temps courant permet ensuite de mettre à jour les variables internes en chacun des points d'intégration du domaine réduit d'intégration.

#### 4.3.5 Contrôle d'erreur

La méthode APHR nécessite simultanément 2 indicateurs d'erreur pour être pilotée :

- Le contrôle de l'équilibre hyper-réduit est réalisé grâce à la norme du résidu EF tronqué sur le domaine réduit ;
- Le contrôle de la qualité du champ des variables internes sur le domaine réduit est réalisé en mesurant la distance entre les variables internes effectivement calculée aux points d'intégration et leurs valeurs dans l'approximation modale.

Si l'un de ces 2 critères n'est pas vérifié, alors il faut enrichir et adapter les bases de variables internes en même temps que la base de déplacement, ce qui conduit à actualiser en conséquence le domaine réduit d'intégration :

- La base cinématique est enrichie en se servant du résidu EF sur  $\Omega$  (§4.3.2) qu'il est alors nécessaire de calculer ;
- La base des variables internes est enrichie de la même manière en se servant du résidu des variables internes sur le domaine réduit.

#### 4.3.6 Application pratique à des problèmes non-linéaires et réduction de coût obtenue

Grâce aux deux niveaux de réduction (HPOD et hyper-réduction), les gains en temps de résolution pour les problèmes non-linéaires à variables internes sont meilleurs qu'avec la PGD. (Ryckelynck and Missoum-Benziane, 2010) analysent différentes stratégies d'hyper-réduction pour un tel problème et mesurent des économies de temps CPU total, de 46% à 76% en séquentiel, puis de 85% à 97% en résolution parallèle.

Cette méthodologie permet également de traiter des problèmes de contact. (Fauque et al., 2018) en donnent un exemple appliqué au contact entre pastille et gaine d'un combustible nucléaire. Bien que les deux surfaces aient un mouvement tangentiel limité, le traitement du contact a dû être effectué de manière classique (non réduite) dans la zone de contact active, afin de garantir la précision de la simulation. Il en résulte un gain modeste sur le temps CPU, de l'ordre de 7 sur le temps d'exécution.

## 4.4 NTFA

### 4.4.1 Principe

Dans le domaine de l'homogénéisation du comportement mécanique des matériaux non linéaires, les approches par champ moyen s'avèrent généralement insuffisantes car elles ne fournissent pas de distribution des champs mécaniques. Considérant cette difficulté et afin de réduire le nombre « presque infini » de variables qui décrivent l'état d'un élément volumique représentatif, (Dvorak, 1992) a proposé de séparer chaque phase en un nombre limité de sous-volumes, chacun d'entre eux étant affecté d'une déformation plastique homogène obéissant à la relation constitutive de la phase. L'approximation uniforme des champs de variables internes dans un sous-domaine est compensée par le nombre de sous-domaines. Dvorak a également introduit les tenseurs d'influence, caractérisant la perturbation de la contrainte induite dans chaque sous-domaine par une transformation unitaire sans contrainte dans un sous-domaine donné. Il a nommé cette méthode Transformation Field Analysis (TFA). Elle permet de résoudre numériquement une relation constitutive macroscopique avec un nombre de variables internes moyennées proportionnel au nombre de sous-domaines. (Chaboche et al., 2001; Fish and Shek, 1999) ont ensuite étendu l'utilisation de la TFA à des comportements plus complexes incluant la mécanique de l'endommagement. Sa relative simplicité suscite toujours l'intérêt de nos jours. Comme récent exemple d'application, on peut citer (Addessi et al., 2021), qui ont représenté l'endommagement et le frottement dans des murs de maçonnerie soumis à des sollicitations dans le plan et hors du plan. Cette approche rend compte efficacement du comportement mécanique non linéaire du VER. Cependant, la convergence de la méthode avec le nombre de sous-domaines vers le comportement réel du milieu est parfois lente en raison de l'espace de fonctions utilisé et peut tendre vers une sur-rigidité de la réponse effective de l'élément volumique. (Michel and Suquet, 2003) ont amélioré la méthode TFA, tout d'abord en utilisant un ensemble fini de fonctions de base non uniformes d'ordre supérieur, d'où le nom de leur méthode : Non-uniform Transformation Field Analysis (NTFA). Voici les principaux éléments de cette méthode.

Considérons un milieu hétérogène constitué de  $N$  phases au comportement mécanique linéaire ou non linéaire. La première opération consiste à définir un élément de volume représentatif du milieu (VER), statistiquement représentatif des proportions et distributions des différentes phases, afin d'étudier le comportement effectif du milieu hétérogène. La seconde opération consiste à spécifier les lois constitutives des différentes phases. Les auteurs de la NTFA ont travaillé dans le cadre des matériaux standard généralisés, qui couvrent une grande variété de réponses des matériaux. Par exemple, (Roussette et al., 2009) ont exploré le fluage d'irradiation à volume constant et le fluage à volume non constant d'un matériau poreux au sein du combustible nucléaire, avant que (Largenton et al., 2013) n'ajoutent le gonflement isotrope induit par un flux intense de neutrons. Plus récemment (Michel and Suquet, 2016) ont également appliqué la NTFA à des matériaux polycristallins complexes tels que la glace. Par souci de simplicité, considérons ici un matériau dissipatif, caractérisé par un potentiel d'énergie libre  $W$ , impliquant un tenseur d'élasticité d'ordre quatre  $\mathbb{L}$ , et un potentiel de dissipation  $\psi(\boldsymbol{\sigma})$ . Le tenseur de vitesse de fluage  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}$  se déduit de  $\psi(\boldsymbol{\sigma})$  comme suit, avec  $\boldsymbol{\sigma}$  le tenseur des contraintes de Cauchy,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  le tenseur des déformations linéaires,  $\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$  la contrainte équivalente de Von Mises, avec  $\boldsymbol{\sigma}'$ , le déviateur des contraintes :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial W}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \end{cases} \quad (55)$$

### 4.4.2 Base de modes inélastiques

L'étape suivante consiste à introduire une base orthonormée de  $M$  fonctions  $\boldsymbol{\mu}_k$  ( $1 \leq k \leq M$ ), appelées modes, où chaque mode est un tenseur symétrique d'ordre 2 ayant pour support une seule phase du milieu hétérogène (nul en dehors). Une phase peut avoir plusieurs modes et l'ensemble des supports des modes constitue une partition du domaine. On définit la projection  $\varepsilon_k$  de n'importe quel tenseur  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , d'ordre deux, sur le mode  $k$  par :

$$\varepsilon_k = \frac{1}{V} \iiint \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\mu}_k dV \quad (56)$$

La base des fonctions  $\boldsymbol{\mu}_k$  est orthogonale et normalisée, de telle sorte que chaque mode soit homogène à une déformation unitaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \iiint \boldsymbol{\mu}_p : \boldsymbol{\mu}_q dV = 0 \quad \forall p \neq q \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{V} \iiint \boldsymbol{\mu}_p : \boldsymbol{\mu}_p dV = 1 \end{array} \right. \quad (57)$$

Dans le cas général, les modes seront purement déviatoriques.

$$\text{dev}(\boldsymbol{\mu}_k) = \boldsymbol{\mu}'_k = \boldsymbol{\mu}_k \quad (58)$$

La première approximation de la méthode NTFA consiste à supposer que le tenseur inélastique  $\varepsilon^{in}$  peut être développé sur cette base modale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^{in} = \sum_{p=1}^M \varepsilon_p^{in} \boldsymbol{\mu}_p \\ \varepsilon_p^{in} = \frac{1}{V} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^{in} : \boldsymbol{\mu}_p dV \end{array} \right. \quad (59)$$

#### 4.4.3 Contraintes

La solution locale du problème d'équilibre à l'intérieur d'un élément de volume représentatif avec la loi constitutive  $\mathbb{L}$  et la déformation moyenne imposée  $\bar{\boldsymbol{E}}$  est alors donnée explicitement par :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L} : \boldsymbol{A} : \bar{\boldsymbol{E}} + \sum_{p=1}^M \mathbb{L} : (\boldsymbol{D}_p - \boldsymbol{\mu}_p) \varepsilon_p^{in} \quad (60)$$

où le champ de tenseur de localisation  $\boldsymbol{A}$  et les tenseurs d'influence  $\boldsymbol{D}_p$  peuvent être calculés une fois pour toutes en déterminant l'équilibre du milieu lorsqu'on impose, respectivement, une déformation moyenne  $\bar{\boldsymbol{E}}$  ou une déformation inélastique  $\varepsilon_p^{in}$  dans chaque phase  $p$ . De manière plus précise, on a :

$$\boldsymbol{A} : \bar{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{U}}) \quad (61)$$

avec  $\bar{\boldsymbol{U}}$  solution du problème élastique

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div } \mathbb{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\bar{\boldsymbol{U}}) = 0 \text{ sur } \mathbb{V} \\ \bar{\boldsymbol{U}} - \bar{\boldsymbol{E}} \cdot \boldsymbol{x} \text{ périodique sur } \partial\mathbb{V} \end{array} \right. \quad (62)$$

et

$$\boldsymbol{D}_p = \boldsymbol{\varepsilon}(U^p) \quad (63)$$

avec  $U^p$  le champ de déplacements qui équilibre le mode de déformation imposé  $\boldsymbol{\mu}_p$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \left( \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}(U^p) - \boldsymbol{\mu}_p) \right) = 0 \text{ sur } \mathbb{V} \\ U^p = 0 \text{ sur } \partial\mathbb{V} \end{array} \right. \quad (64)$$

La projection du champ de contrainte local sur un mode donné est alors obtenue par :

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \frac{1}{V} \iiint \boldsymbol{\varepsilon}^{in} : \boldsymbol{\mu}_k dV \\ &= \left[ \frac{1}{V} \iiint \mathbb{L} : \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\mu}_k dV \right] : \bar{\boldsymbol{E}} + \sum_{p=1}^M \left[ \frac{1}{V} \iiint \boldsymbol{\mu}_k : \mathbb{L} : (\boldsymbol{D}_p - \boldsymbol{\mu}_p) dV \right] \varepsilon_p^{in} \end{aligned} \quad (65)$$

Les termes entre crochets peuvent être calculés une fois pour toutes, en effectuant un calcul élastique sur le VER pour chaque mode  $\boldsymbol{\mu}_k$ . Reste à déterminer l'évolution de  $\varepsilon_p^{in}$ .

#### 4.4.4 Loi réduite

Pour cela, il est nécessaire de relocaliser les variables globales afin de mettre à jour les variables d'état dans chaque phase et calculer la contrainte locale. Il est bien sûr possible, comme dans la méthode dite "hybride", d'effectuer une intégration exacte des relations constitutives en tout point du VER. Néanmoins, afin de réduire significativement la durée des calculs, on souhaite résoudre le problème d'évolution des

variables internes directement dans la base des modes  $\boldsymbol{\mu}_k$ . Pour cela, entre autres, (Michel and Suquet, 2004; Rice, 1970) ont montré que, lorsque les lois de comportement de toutes les phases dérivent de deux potentiels, leur structure peut être transposée dans la base réduite. Plus précisément, la loi d'écoulement exacte, une fois projetée sur la base modale, s'écrit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{in} = \frac{1}{V} \iiint \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} : \boldsymbol{\mu}_k dV = \frac{1}{V} \iiint \frac{3}{2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\mu}_k}{\sigma_{eq}} dV \quad (66)$$

Afin d'obtenir une relation entre les vitesses des variables internes  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{in}$  et les  $\sigma_k$ , il est nécessaire d'approcher  $\sigma_{eq}$  dans la phase pour simplifier cette expression.

Une approximation possible est donnée par (Michel and Suquet, 2003), qui estiment une contrainte réduite globale  $s_r$  pour la phase  $r$  par la norme euclidienne des  $M(r)$  contraintes modales correspondant aux  $M(r)$  modes supportés par la phase  $r$ . Ces contraintes réduites sont données par (65).

$$s_r = \sqrt{\sum_{p=1}^{M(r)} \sigma_p^2} \quad (67)$$

En remplaçant  $s_r$  dans (66), ils obtiennent une loi d'évolution réduite couplée approchée, qui permet de mettre à jour les variables d'état inélastiques  $\boldsymbol{\varepsilon}_k^{in}$  par l'expression suivante, qui prend la même forme que la loi locale :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_k^{in} = \frac{3}{2} \frac{\partial \psi(s_r)}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\sigma_k}{s_r} \quad (68)$$

Enfin, la contrainte effective  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$ , utilisée dans le problème de l'équilibre macroscopique, est la moyenne des contraintes locales  $\boldsymbol{\sigma}$  sur le VER.  $\bar{\boldsymbol{\Sigma}}$  se déduit donc de (65) à l'aide de  $\bar{\boldsymbol{E}}$  et des  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}$ . (Michel and Suquet, 2004) ont montré que cette méthode d'intégration donne de bons résultats dans le cas du calcul d'une poutre composite à matrice élastoplastique sollicitée en flexion quatre points, en comparant cette approche à un calcul par éléments finis représentant explicitement la structure hétérogène du milieu modélisé.

#### 4.5 BILAN ET STRATEGIE POUR LA REDUCTION DU MODELE D'ASSEMBLAGE COMBUSTIBLE

L'hyper-réduction semble à première vue le meilleur candidat, grâce à sa double réduction de l'équilibre et du nombre de points d'intégration à traiter. Néanmoins, les gains de temps annoncés de l'APHR par rapport à une résolution éléments finis classique, entre 40% et 90%, restent en-deçà de notre objectif de réduction de la durée de résolution d'un calcul d'AC. Comme pour la PGD, on peut envisager une hyper-réduction *a posteriori*, utilisant une base fixe pour éviter le coûteux enrichissement adaptatif lors de la résolution du modèle réduit. La seconde réduction limite le nombre de points d'intégration à traiter mais, malheureusement, ils restent assez nombreux. Concernant cet aspect, (Hernández, Caicedo, et Ferrer 2017) ont récemment proposé une nouvelle méthode d'intégration limitant la taille du domaine d'intégration réduit. En intégrant cette innovation dans une hyper-réduction *a posteriori*, ils obtiennent alors une bien meilleure accélération, supérieure à 100. Malheureusement, dans un futur proche, nous avons l'intention d'ajouter le contact et le frottement entre les crayons et les grilles dans le modèle réduit et, bien que (Fauque et al., 2018) aient montré la faisabilité de l'APHR pour le contact, ils ont obtenu un speed-up inférieur à 10. Dans le cadre de ce travail, l'objectif final est de pouvoir réaliser de nombreuses simulations des déformations du cœur complet en tenant compte des principaux phénomènes tels que le fluage, le contact, le frottement, le grandissement des crayons..., en un temps très court. La bibliographie réalisée montre que cet objectif de réduction du temps de calcul significatif nous oriente fortement vers des méthodes de réduction de modèles *a posteriori*, où les bases modales sont déterminées une fois pour toutes et non pas en cours de calcul.

La deuxième observation est que l'on vise une réduction d'ordre du problème spatial plutôt qu'une réduction du problème temporel, car le nombre de degrés de liberté du modèle détaillé dépasse largement sa discrétisation temporelle. La compression temporelle est donc inutile.

Le troisième point est à nouveau relatif à l'accélération. Dans l'hyper-réduction *a posteriori*, une part importante du temps de calcul est liée au nombre de points d'intégration dans le domaine d'intégration réduit. Réduire encore plus leur nombre serait bénéfique pour l'accélération. Or c'est ce que fait la NTFA puisqu'elle permet d'intégrer le comportement non-linéaire d'une phase entière en une seule fois

au sein du VER, c'est-à-dire, comme si la phase était représentée par un seul point d'intégration. De fait, les temps de résolution constatés pour des problèmes d'homogénéisation sont en ligne avec notre objectif de réduction du temps calcul.

Le dernier point à remarquer est technologique. Les AC qui constituent le cœur présentent la même définition géométrique et matérielle mais pas le même historique d'irradiation et de déformation. Cette caractéristique peut être exploitée en réalisant un modèle réduit d'AC qui sera ensuite dupliqué pour former un modèle de cœur. En réalité, on a pas d'autre choix raisonnable car les calculs détaillés multiples sur un cœur complet ne sont pas encore accessibles étant donné leur dimension spatiale de l'ordre de 200 millions de degrés de libertés et leur niveau très élevé de non-linéarité.

Compte tenu des analyses qui précèdent, la stratégie de réduction du modèle d'AC sera de se placer dans le cadre donné par la NTFA afin de profiter de ses performances en terme de temps de résolution. Le premier point à traiter concernera l'adaptation de la NTFA, au §5, afin de la faire passer d'une méthode d'homogénéisation à une méthode de réduction de modèle applicable à un problème de structure quasi-statique non-linéaire à caractéristiques hétérogènes. Le §6 est dédié à l'introduction, dans ce même cadre, d'une réduction du modèle de contact, que le §7 complétera par la réduction du modèle de frottement.

## 5. Réduction du modèle : traitement du fluage

### 5.1 ADAPTATION DE LA METHODE NTFA À UN VER DE STRUCTURE ÉLANCÉE

Suivant l'approche NTFA, l'idée principale est de considérer qu'un AC entier constitue un élément de volume représentatif (VER) du cœur du réacteur. L'idée est donc de construire des bases de modes de transformation non uniformes sur l'AC et de déterminer les lois de comportement effectives qui permettent de calculer l'évolution des quantités d'intérêt en base réduite. L'exigence de séparation d'échelles de l'homogénéisation n'a plus cours puisque ce VER particulier est en fait une structure parfaitement définie. Le VER est donc toujours représentatif. La principale difficulté vient du fait que l'enveloppe de ce VER a une forme élançée, dont la déformation moyenne ne peut être réduite à un classique tenseur symétrique de déformation effective  $\bar{\mathbf{E}}$ . En effet, l'AC est susceptible de se déformer selon un grand nombre de formes incluant des allongements, mais aussi des courbures en C, en S, en W et ce, dans différentes directions. La principale adaptation que nous avons faite de la méthode NTFA est de définir la déformée moyenne de ce VER structurel en utilisant une base de modes de déplacement macroscopiques. Évidemment, il y a un compromis à trouver entre le nombre de modes de cette base, que l'on veut minimal pour diminuer le coût de calcul du modèle, et sa qualité à représenter la déformation de l'AC.

Une fois ces modes de déplacement macroscopique déterminés, il faut alors construire la base orthogonale des déformations inélastiques au sein du VER, c'est-à-dire au sein de l'AC. En considérant chacun de ces modes de déformation inélastique ou de déplacement macroscopique comme des chargements individuels, on peut reconstruire le champ de contrainte local dans la structure en superposant ceux associés à chaque mode, qu'il soit élastique ou de fluage. Cela permet d'abord de vérifier l'équilibre statique sur les modes de déplacement, puis de dériver les forces thermodynamiques qui guident l'évolution des déformations inélastiques, à savoir l'amplitude des modes de fluage dans notre cas. Pour cela, la projection de la loi d'évolution locale conduit à une approximation modale directe dans laquelle les forces thermodynamiques apparaissent de manière couplée. Enfin, le nombre de variables internes du modèle réduit étant égal à la dimension de la base des modes inélastiques, cela garantit une excellente réduction d'ordre.

#### 5.1.1 Modes macroscopiques

Une structure élançée est souvent représentée comme une poutre, soumise à un allongement et à des courbures. On choisit souvent de limiter la description de son déplacement à celui de la fibre neutre. Pour décrire l'interaction des AC au sein du cœur, nous avons seulement besoin du déplacement moyen des grilles et des embouts. Leur rotation est par ailleurs négligeable. Notons  $\mathbf{U}^a(g, t)$  le déplacement moyen d'une grille  $g$  à l'instant  $t$ ,  $S(g)$  la surface de la grille  $g$  dans le modèle détaillé d'assemblage et  $Ng$ , le nombre de grille et embouts dans l'AC.

$$\mathbf{U}^a(g, t) = \frac{1}{S(g)} \iint_{x \in g} \mathbf{u}(x, t) dS, \forall g \in [1, Ng], \quad (69)$$

où  $\mathbf{u}(x, t)$  est le champ de déplacement fourni par le modèle détaillé d'assemblage à l'instant  $t$ .

En pratique, cela signifie que le support des modes de déplacement macroscopiques de l'AC est une ligne de  $Ng$  noeuds (2 embouts et 10 grilles pour un AC, soit  $Ng = 12$ , cf. Figure 36 page 58 pour un exemple avec 3 grilles et une base). Ainsi, en 3 dimensions, un maximum de  $3 \times 12$  modes est suffisant pour projeter toutes les déformées possibles d'une telle ligne.

Bien entendu, une base plus petite sera appréciée si elle est pertinente. Afin de construire une telle base optimale de modes de déplacement, il est alors naturel d'appliquer une transformation de Karhunen-Loeve (Karhunen, 1946), également appelée POD, cf. 4.1, sur un ensemble représentatif de résultats de déformée d'AC moyennés par grille, exprimés sur le support des modes de déplacements (la ligne à  $Ng$  noeuds). Ces informations initiales peuvent être obtenues à partir de mesures in situ, lorsque cela est possible, ou à partir de calculs détaillés sinon.

On obtient finalement une base orthonormée de  $J$  modes de déplacement  $\mathbf{U}_j^a$ , dont le support est la ligne de  $Ng$  noeuds symbolisant les grilles et embouts de l'AC. Cette base orthogonale permet de décomposer le déplacement moyen des grilles  $\mathbf{U}^a(g, t)$  à l'instant  $t$  avec une précision  $\rho$  choisie, qui influe sur le nombre de modes  $J$  de la base en fonction des valeurs singulières  $\lambda_k$  de la POD.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^a(g, t) \approx \sum_{j=1, J} \alpha_j^a(t) \mathbf{U}_j^a(g) \\ (\mathbf{U}_k^a, \mathbf{U}_l^a) = \sum_{g=1}^{Ng} \mathbf{U}_k(g) \cdot \mathbf{U}_l(g) = \delta_{kl}, \forall (k, l) \in [1, J]^2 \\ J = \underset{L}{\operatorname{argmin}}_L \left( \frac{\sum_{k=1}^L \lambda_k}{\sum_{k=1}^{k_{\max}} \lambda_k} \geq 1 - \rho \right) \end{array} \right. \quad (70)$$

Comme on le verra au §5.3.2, dans le cas où l'on s'intéresse plus aux courbures qu'à l'allongement de la structure, le produit scalaire utilisé pour la POD des déplacements peut être pondéré afin de diminuer l'influence du déplacement axial dans la base des modes.

En suivant la méthode NTFA, nous décomposons le champ des déformations inélastiques sur une base orthonormée de  $I$  fonctions spatiales  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  ( $1 \leq i \leq I$ ), appelées modes inélastiques, où chaque mode est un tenseur symétrique déviatorique d'ordre 2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}^{in}(x, t) \approx \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}(x) \\ \operatorname{trace}(\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}(x)) = 0 \quad \forall x \in \Omega \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}, \boldsymbol{\varepsilon}_q^{in}) = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}_q^{in}(x) dV = \delta_{pq} \end{array} \right. \quad (71)$$

Ci-dessus,  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  est le  $i^{\text{ème}}$  mode inélastique et  $\alpha_i^{in}(t)$  est son amplitude au temps  $t$ . Comme pour les modes de déplacement, cette base de modes inélastiques peut être déterminée en appliquant une POD à un ensemble de résultats obtenus avec le modèle détaillé.

### 5.1.2 Champs associés aux différents modes

Il s'agit maintenant de déterminer au sein de la structure les champs de déformation et de contraintes associés aux différents modes. Pour cela, nous appliquons chaque mode au modèle éléments finis détaillé en tant que chargement élémentaire unique afin de veiller à l'orthogonalité entre les transformations. Les champs résultats sont alors appelés champs associés.

En pratique, pour les modes de déplacement macroscopiques, nous prescrivons le déplacement de grille moyen  $\mathbf{U}_j^a$  aux frontières de la structure élastique (grilles), en attribuant à la structure un comportement élastique ( $\boldsymbol{\varepsilon}^{in} = 0$ ). L'objectif est de caractériser la réponse élastique de l'AC à tout chargement externe, décomposé sur la base des déplacements macroscopiques, et d'identifier les champs de contraintes et de déformations locaux associés, ainsi que les forces résultantes. Ceci est obtenu en résolvant le système d'équations (72) par rapport au déplacement  $\mathbf{u}$ , où  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$  sont respectivement les tenseurs de contrainte et de déformation,  $\mathbb{L}$  est le tenseur d'élasticité,  $S_g$  est la surface de la grille  $g$  et  $\mathbf{U}^a(g)$ , son déplacement moyen imposé par le mode frontière.

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{U}_j^a(g) = \frac{1}{S_g} \iint_{x \in g} \mathbf{u}(x) dS \quad \forall g = 1, Ng \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{in} = 0 \end{array} \right. \quad (72)$$

La solution permet d'identifier, en tout point du modèle détaillé :

- $\boldsymbol{\sigma}_j^{a\_asso}$ , le champ de contraintes associé à la réponse élastique de l'AC lors du déplacement macroscopique imposé  $j$ ,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_j^{a\_asso}$ , le champ de déformations associé,
- $\mathbf{U}_j^{a\_asso}$ , le champ de déplacements associé.

Pour les  $I$  modes de déformation inélastique, le même type d'opération est effectué. La différence est que l'on maintient un déplacement nul à la frontière de la structure élastique (déplacement moyen des grilles  $\mathbf{U}^a(g)$  bloqué) tout en imposant le champ de déformation inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$ . Le problème élémentaire local correspondant consiste à trouver le déplacement  $\mathbf{u}$  qui équilibre le mode de déformation inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  imposé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \\ \mathbf{U}^a(g) = \frac{1}{S_g} \iint_{x \in g} \mathbf{u}(x) dS = 0 \quad \forall g = 1, N_g \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{in} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} \end{array} \right. \quad (73)$$

La solution permet d'identifier, en tout point du modèle détaillé :

- $\boldsymbol{\sigma}_i^{in\_asso}$ , le champ de contraintes associé à la réponse élastique de l'AC lorsqu'on impose le mode de déformation inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$ ,
- $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in\_asso}$ , le champ de déformation associé,
- $\mathbf{U}_i^{in\_asso}$ , le champ de déplacement associé.

Ainsi, par superposition, pour tout déplacement macroscopique exprimé avec les amplitudes  $\alpha_j^a$  sur les modes de déplacement et tout état de déformation inélastique exprimé par les amplitudes  $\alpha_i^{in}$  sur les modes viscoplastiques, on peut obtenir l'état local du système par une combinaison linéaire des champs associés :

$$\boldsymbol{\sigma}(x, t) = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in}(t) \boldsymbol{\sigma}_i^{in\_asso}(x) + \sum_{j=1, J} \alpha_j^a(t) \boldsymbol{\sigma}_j^{a\_asso}(x) \quad (74)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, t) = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in}(t) \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in\_asso}(x) + \sum_{j=1, J} \alpha_j^a(t) \boldsymbol{\varepsilon}_j^{a\_asso}(x) \quad (75)$$

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in}(t) \mathbf{U}_i^{in\_asso}(x) + \sum_{j=1, J} \alpha_j^a(t) \mathbf{U}_j^{a\_asso}(x) \quad (76)$$

D'après (72) et (73),  $\boldsymbol{\sigma}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{in} = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  satisfont  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{in})$  et vérifient le principe des puissances virtuelles  $\mathbf{f}^{int}(\mathbf{U}) = \mathbf{f}^{ext}(\mathbf{U})$  pour tout déplacement virtuel  $\mathbf{U}$  nul en moyenne aux frontières, à savoir tel que  $\iint_{x \in g} \mathbf{U} dS = 0$  sur toute grille  $g$ . Ici, force intérieures et extérieures sont définies par (77) et (78).

$$\mathbf{f}^{int}(\mathbf{U}) = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{U}) dV \quad (77)$$

$$\mathbf{f}^{ext}(\mathbf{U}) = \iint_{x \in \partial \Omega} \mathbf{P}^{ext} \cdot \mathbf{U} dS + \iiint_{x \in \Omega} \mathbf{f}^{vol} \cdot \mathbf{U} dV \approx \sum_{g=1, N_g} \mathbf{F}^{ext}(g) \iint_{x \in g} \mathbf{U} dS = 0 \quad (78)$$

Ci-dessus,  $\mathbf{P}^{ext}$  est la force s'appliquant sur l'AC par contact avec les AC voisins, la pression latérale du fluide ou sa force de traînée verticale.  $\mathbf{f}^{vol}$  sont des forces volumiques telles que le poids propre. Il convient de noter que les forces externes sont souvent sommées à chaque niveau de grille ou embout. Ainsi, en pratique, on peut appliquer directement le produit scalaire entre ces forces extérieures  $\mathbf{F}^{ext}$  et le déplacement moyen des grilles et embouts  $\mathbf{U}_p^a$  pour obtenir les  $J$  forces modales extérieures  $f_p^{ext}$ .

Il reste à vérifier le principe des puissances virtuelles pour chacun des  $J$  modes de déplacement frontière.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_p^{int} = f_p^{ext}, \forall p \in [1, J] \\ f_p^{int} = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in} \iiint_{x \in \Omega} \sigma_i^{in\_asso} : \varepsilon_p^{a\_asso} dV + \sum_{j=1, J} \alpha_j^a \iiint_{x \in \Omega} \sigma_j^{a\_asso} : \varepsilon_p^{a\_asso} dV \\ f_p^{ext} = \iint_{x \in \partial \Omega} \mathbf{P}^{ext} \cdot \mathbf{U}_p^{a\_asso} dS + \iiint_{x \in \Omega} \mathbf{f}^{vol} \cdot \mathbf{U}_p^{a\_asso} dV \approx \sum_{g=1}^{Ng} \mathbf{F}^{ext}(g) \cdot \mathbf{U}_p^a(g) \end{array} \right. \quad (79)$$

Au final, l'équilibre des forces ( 79 ) donne un système linéaire de  $J$  équations avec les variables d'état réduites  $\alpha_i^{in}$  et  $\alpha_j^a$ . Ce système doit donc être complété par  $I$  équations indépendantes, que l'on va dériver des équations constitutives de la loi de comportement dans les deux paragraphes suivants.

### 5.1.3 Forces thermodynamiques

On écrit la dissipation viscoplastique sur le modèle complet et en base réduite. Pour cela, on définit les  $I$  forces thermodynamiques  $\beta_p^{in}$  comme les variables conjuguées des amplitudes inélastiques  $\varepsilon_p^{in}$ .

$$P^{dissipation} = \sum_{p=1}^I \beta_p^{in} \dot{\alpha}_p^{in} = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} dV \quad (80)$$

En prenant l'expression de  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}$  de ( 71 ) et en remplaçant  $\boldsymbol{\sigma}$  par ( 74 ), cette force thermodynamique apparaît comme une fonction linéaire explicite des variables d'état réduites  $\alpha_i^{in}$  et  $\alpha_j^a$  au temps  $t$ .

$$\beta_p^{in} = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\varepsilon}_p^{in} dV = \sum_{i=1, I} \alpha_i^{in} \iiint_{x \in \Omega} \sigma_i^{in\_asso} : \boldsymbol{\varepsilon}_p^{in} dV + \sum_{j=1, J} \alpha_j^a \iiint_{x \in \Omega} \sigma_j^{a\_asso} : \boldsymbol{\varepsilon}_p^{in} dV \quad (81)$$

Comme les modes  $\boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}$  sont orthonormés et de trace nulle, il est facile de voir que  $\beta_p^{in}$  correspond à la composante de  $\boldsymbol{\sigma}'$  dans la base réduite  $[\boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}]$ . Autrement dit,  $\boldsymbol{\sigma}'_{\perp} = \sum_{i=1, I} \beta_i^{in} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  est la projection orthogonale de  $\boldsymbol{\sigma}'$  sur l'espace engendré par les modes inélastiques et on a

$$V \langle \boldsymbol{\sigma}'_{\perp}{}^2 \rangle = \frac{3}{2} \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}'_{\perp} : \boldsymbol{\sigma}'_{\perp} dV = \frac{3}{2} \sum_{i=1, I} \beta_i^{in2} \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} dV = \frac{3}{2} \sum_{i=1, I} \beta_i^{in2} \quad (82)$$

### 5.1.4 Loi d'évolution réduite

Afin de simplifier les notations, on considère à partir de maintenant une seule phase subissant du fluage, donc  $M(r) = I$ , bien que la démarche soit généralisable à plusieurs phases. On étudie une structure avec une loi de fluage de Norton ( 83 ), qui est une loi de type puissance.

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbb{L} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \\ \psi(\boldsymbol{\sigma}) = a \sigma_{eq}^m = a \left( \sqrt{\frac{3}{2}} \|\boldsymbol{\sigma}'\| \right)^m \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{vp} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{3}{2} m a \sigma_{eq}^{m-1} \frac{\boldsymbol{\sigma}'}{\sigma_{eq}} \end{array} \right. \quad (83)$$

L'état du système réduit étant donné par les valeurs de  $\alpha_i^{in}$  et  $\alpha_j^a$ , les forces modales  $\beta_p^{in}$  qui contribuent au fluage sont également connues à partir de ces valeurs. L'objectif est de les utiliser pour exprimer directement l'évolution  $\dot{\alpha}_i^{in}$  comme l'ont fait (Michel et Suquet 2003) et (Michel et Suquet 2004) en remplaçant et en moyennant  $\sigma_{eq}$  dans ( 66 ) par la norme des contraintes réduites  $s_r$  ( 67 ).

Par analogie, sur la base de la normalisation ( 71 ), on remplace donc  $\sigma_{eq}$  par la norme  $s_r$  des forces modales  $\beta_p^{in}$  dans l'expression de la loi d'évolution des déformations inélastiques, ce qui permet d'exprimer la loi d'écoulement réduite à l'aide de  $\boldsymbol{\beta}^{in}$  en ayant remplacé au préalable  $\sigma_{eq}(x)$  par  $s_r$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\alpha}_i^{in} &= \iiint \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} dV \approx \iiint \frac{3}{2} \frac{\partial \psi(s_r)}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}}{s_r} dV = \frac{3}{2} m a s_r^{m-2} \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} dV = \frac{3}{2} m a s_r^{m-2} \beta_i^{in} \\ s_r &= \sqrt{\langle \sigma_{eq}^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3}{2V}} \|\boldsymbol{\beta}^{in}\| \\ \|\boldsymbol{\beta}^{in}\| &= \sqrt{\sum_{i=1}^I \beta_i^{in2}} \end{aligned} \right. \quad (84)$$

La forme en loi puissance de la loi locale se conserve en base réduite et s'appuie sur les forces thermodynamiques  $\boldsymbol{\beta}^{in}$  là où la loi locale utilisait les contraintes. Ceci peut facilement être vérifié en calculant la déformation inélastique engendrée par un champ de contraintes quelconque, puis celle engendrée par un multiple de ce champ de contraintes.

On retrouve pour cette loi de fluage réduite une forme variationnelle, avec une fonction dissipative  $\psi_r(\boldsymbol{\beta}^{in})$  définie par (85).

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\alpha}^{in} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \psi_r(\boldsymbol{\beta}^{in}) \\ \psi_r(\boldsymbol{\beta}^{in}) &= a \left\| \sum_{i=1}^I \beta_i^{in2} \right\|^{m/2} \end{aligned} \right. \quad (85)$$

Le potentiel réduit  $\psi_r$  n'est pas un potentiel intensif mais une fonction extensive, contrôlant la dissipation totale de la structure, ou d'une phase de la structure, si celle-ci est multiphasée. Comme dans la NTFA, l'avantage est que l'intégration du comportement se fait en une seule fois pour tout le volume de la phase, donc en une seule fois si la structure ne contient qu'une seule phase viscoplastique.

On remarque que,  $\psi$  étant une fonction scalaire convexe,  $\psi_r(\boldsymbol{\beta}^{in})$  est une borne inférieure de l'intégrale exacte du potentiel sur le volume de la phase considérée.

$$\psi_r(\boldsymbol{\beta}^{in}) = V \psi(s_r) \leq \iiint_{x \in \Omega} \psi(\sigma_{eq}(x)) dV \quad (86)$$

L'approximation faite dans (84) n'induit donc pas de surestimation de la dissipation par la loi d'évolution réduite mais peut générer une sous-estimation de la dissipation pour un état de contraintes donné. L'approximation se rapproche d'autant mieux de la solution exacte que le champ de contrainte est homogène et que la loi d'évolution est peu non-linéaire.

### 5.1.5 Cas des caractéristiques locales hétérogènes

Habituellement, lorsqu'on fait de l'homogénéisation, le VER est petit et les facteurs externes influençant ses caractéristiques matérielles, tels que la température ou l'irradiation, peuvent être considérés homogènes à son échelle. Dans le cas présent, le VER est une grande structure qui subit des variations spatiales de température  $T(x)$  et de flux neutronique  $\Phi(x)$ . Par conséquent, les caractéristiques matérielles sont hétérogènes. C'est notamment le cas pour la caractéristique de fluage  $a(x)$ , qui dépend fortement du flux local de neutrons rapides, plus intense au milieu de l'AC qu'à ses extrémités. De plus, ces caractéristiques évoluent dans le temps et nécessitent donc d'être mises à jour à une fréquence appropriée.

En considérant que la caractéristique de fluage  $a(x)$  n'est plus homogène, on propose la loi d'évolution réduite (87) pour autoriser une meilleure répartition des vitesses de fluage entre les modes, suivant qu'ils sont favorisés ou non par la répartition spatiale de  $a(x)$ .

$$\begin{cases} \dot{\alpha}_i^{in} = a_i \|\boldsymbol{\beta}^{in}\|^{m-1} \frac{\beta_i^{in}}{\|\boldsymbol{\beta}^{in}\|} \\ \|\boldsymbol{\beta}^{in}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^l \beta_i^{in2}} \end{cases} \quad (87)$$

A l'instant courant  $t$ , il faut donc déterminer les caractéristiques modales  $a_i$  en fonction du paramètre hétérogène  $a(x)$ . Une première technique consiste à évaluer  $a_i$  dans le cas particulier d'un champ de contraintes égal au mode inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$ . Ce champ génère une force thermodynamique orientée exactement dans la  $i^{\text{ème}}$  direction ( $\beta_i^{in} = 1, \beta_{j \neq i}^{in} = 0$ ). On écrit l'égalité des dissipations réduites et complètes en ( 88 ).

$$1ma_i = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \left( \frac{3}{2} am \left( \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}} \right)^{m-2} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} \right) dV \quad (88)$$

Et l'on obtient l'expression de  $a_i$ .

$$a_i = \iiint_{x \in \Omega} a \left( \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}} \right)^m dV \quad (89)$$

( 89 ) montre bien que la caractéristique locale  $a$ , variable dans l'espace et dans le temps, est pondérée par le potentiel de Norton appliqué à l'amplitude locale du mode  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$ .

Une deuxième technique pour évaluer  $a_i$  consiste à considérer  $\dot{\alpha}_i^{in} = 1$ , c'est-à-dire que le champ de vitesses de déformation inélastique est égal au mode inélastique  $\boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$  exactement :  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}$ . La dissipation dans une base réduite vaut alors le produit  $\beta_i^{in} \dot{\alpha}_i^{in}$  et  $\dot{\alpha}_i^{in}$  suit aussi la loi de fluage réduite ( 87 ). La dissipation en base réduite fait donc apparaître  $a_i$ .

$$p^{dissipation} = \beta_i^{in} \dot{\alpha}_i^{in} = \beta_i^{in} a_i m \beta_i^{in m-1} \quad (90)$$

On en déduit que :

$$ma_i = \beta_i^{1-m} = (p^{dissipation})^{1-m} \quad (91)$$

Cette équation indique qu'il faut inverser la loi d'écoulement locale ( 83 ) :

$$\sigma' = \left( \frac{1}{ma} \right)^{1/(m-1)} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{m}{m-1}} |\boldsymbol{\varepsilon}^{in}|^{\frac{1}{m-1}-1} \boldsymbol{\varepsilon}^{in} \quad (92)$$

puis calculer la dissipation  $p^{dissipation}$  :

$$\begin{aligned} p^{dissipation} &= \iiint_{x \in \Omega} \sigma' : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} dV \\ &= \left( \frac{1}{m} \right)^{1/(m-1)} \iiint_{x \in \Omega} \left( \frac{1}{a} \right)^{1/(m-1)} \left( \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}} \right)^{\frac{m}{m-1}} dV \end{aligned} \quad (93)$$

On déduit alors  $a_i$  sous la forme :

$$a_i = \left[ \iiint_{x \in \Omega} \left( \frac{1}{a} \right)^{1/(m-1)} \left( \sqrt{\frac{2}{3} \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in} : \boldsymbol{\varepsilon}_i^{in}} \right)^{\frac{m}{m-1}} dV \right]^{-(m-1)} \quad (94)$$

Les caractéristiques modales approchées ( 89 ) et ( 94 ) sont respectivement identifiées à l'aide de champs de contraintes imposés ou de taux de déformation imposés à la structure. Par analogie avec les bornes de Voigt et Reuss en homogénéisation élastique, on suppose que ces valeurs constituent des valeurs limites. On constate que ces bornes se rapprochent l'une de l'autre lorsque  $a$  devient homogène sur la structure. De plus, les deux valeurs sont exactement égales dans le cas particulier du fluage homogène linéaire

( $a = \text{constante}, m = 2$ ). On peut prendre la moyenne géométrique de ces deux bornes pour une meilleure évaluation.

### 5.1.6 Problème réduit et algorithme de résolution

Concernant notre modèle réduit, l'équation d'équilibre des forces ( 79 ), l'expression des forces thermodynamiques  $\beta^{in}$  ( 81 ) et la loi d'évolution réduite ( 87 ) définissent le modèle réduit de fluage qui prend la forme semi matricielle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} (D_{balance} \cdot \alpha)_p = \sum_{g=1}^{Ng} F^{ext}(g) \cdot U_p^a(g), \forall p \in [1, J] \\ \beta^{in} = D_{creep} \cdot \alpha \\ \dot{\alpha}_i^{in} = a_i \|\beta^{in}\|^{m-1} \frac{\beta_i^{in}}{\|\beta^{in}\|} \text{ avec } \|\beta^{in}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^I \beta_i^{in2}} \end{array} \right. \quad (95)$$

Avec  $\alpha$  le vecteur des inconnues. Les matrices d'influence  $D_{balance}$  et  $D_{creep}$  sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = (\alpha_1^a, \dots, \alpha_j^a, \alpha_1^{in}, \dots, \alpha_l^{in})^t \\ D_{balance_{jk}} = \iiint_{x \in \Omega} \sigma_k^{asso} : \varepsilon_j^{a-asso} dV, \forall k \in [1, J+I], \forall j \in [1, J] \\ D_{creep_{ik}} = \iiint_{x \in \Omega} \sigma_k^{asso} : \varepsilon_i^{in} dV, \forall k \in [1, J+I], \forall i \in [1, I] \end{array} \right. \quad (96)$$

Le problème réduit ( 95 ) est un problème de fluage quasi-statique classique, qui peut être résolu par différentes méthodes. Nous avons choisi un algorithme de prédiction-correction simple pour résoudre l'équilibre aux différents temps de calcul. La prédiction est obtenue en résolvant le système linéaire ( 95 )-1 d'inconnues  $\alpha_1$  à  $\alpha_j$ , défini par la matrice  $D_{balance}$  avec pour second membre les forces extérieures projetées sur la base des déplacements. Deuxièmement, la phase de correction consiste à résoudre la loi d'évolution réduite ( 95 )-3 et mettre à jour les variable internes  $\alpha_i^{in}$ . Pour cela, on utilise un algorithme de Runge-Kutta afin d'intégrer le fluage sur le pas de temps. Ces deux opérations sont répétées jusqu'à convergence du résidu de force relative sous une valeur prescrite de  $10^{-4}$ . Comme la matrice n'est inversée qu'une seule fois et stockée, cette méthode est généralement rapide, sauf lorsque la déformation inélastique devient importante. Lorsque la convergence est trop lente, une méthode d'accélération disponible dans Cast3M est utilisée pour fournir une accélération du résidu. Cette méthode ramène la durée de calcul à une durée proche de celle de la méthode de Newton-Raphson. Cette méthode est similaire à la méthode de Richardson (Citro et al., 2017; Richardson and Glazebrook, 1911).

## 5.2 VALIDATION AVEC UN CAS-TEST SIMPLE EN FLUAGE NON-LINEAIRE

### 5.2.1 Description du modèle de référence

Ce paragraphe présente les résultats d'une première application de la méthode à une structure élancée simple. La structure considérée pour l'étude de cas est représentée par son maillage éléments finis sur la Figure 36. Elle figure un modèle de squelette simplifié d'AC. La structure est constituée d'un socle et de 3 grilles reliées entre elles par 4 pieds verticaux de section carrée. La hauteur est de 3 m et la largeur de 0,4 m. L'épaisseur des pieds, de la base et de la dernière grille est de 5 cm. L'épaisseur de la grille 1 et de la grille 2 est doublée pour atteindre 10 cm. Le maillage de référence contient 2136 éléments hexaédriques quadratiques et 14748 nœuds.

Le chargement s'effectue à l'aide de forces appliquées individuellement sur la grille 1, 2 ou 3, ou bien sur les 3 grilles à la fois. Elles restent constantes au cours du temps pour tous les cas de chargement, dont la durée est fixée à  $10^8$  secondes, similaire à la durée totale d'irradiation d'un AC. Les forces sont réparties de

manière homogène sur chaque grille et orientées dans les 3 directions de l'espace. Concernant les conditions aux limites, la face inférieure de la base est fixée au sol.

La loi de comportement est élastique et viscoplastique suivant une loi de Norton avec un exposant de contrainte égal à 1,4 ( $m = 2,4$ ), comme cela est fréquemment proposé pour le fluage secondaire d'irradiation des alliages de zirconium (Fidleris, 1988; Gharbi, 2015) dans des conditions REP. Le paramètre de fluage  $a$  est ajusté arbitrairement pour générer des déformations de fluage du même ordre de grandeur que celles affectant les tubes-guides de l'AC. Enfin les déformations inélastiques sont nulles à l'état initial.

Tableau 4 : Caractéristiques mécaniques du cas d'étude simplifié.

Loi de fluage de Norton ( $s^{-1}$ )	Module d'Young $E$ (Pa)	Coefficient de Poisson $\nu$	Paramètre de fluage $a$ ( $Pa^{-1,4}s^{-1}$ )	Exposant de la contrainte $N$
$\dot{\epsilon}_{eq} = a\sigma_{eq}^N$	$10^{10}$	0,3	$4.10^{-21}$	1,4

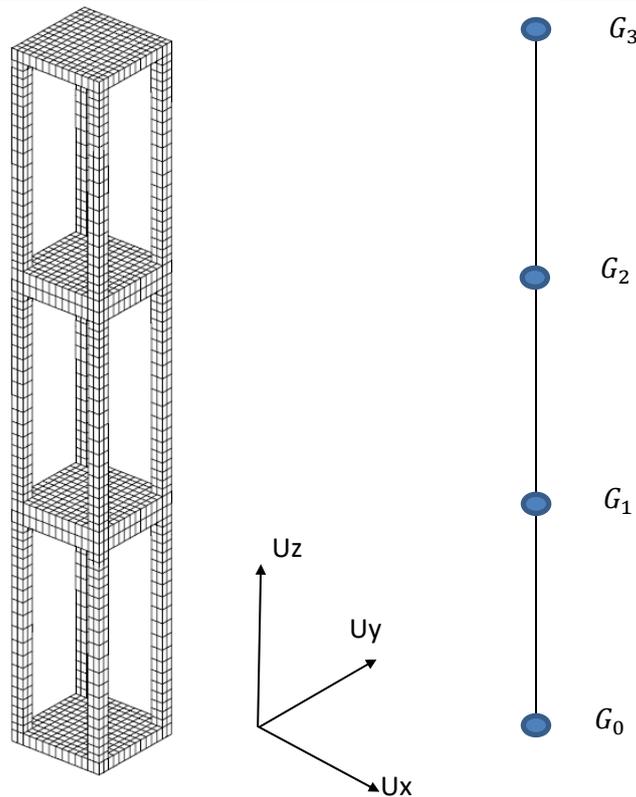


Figure 36 : Maillage de l'assemblage combustible simplifié défini pour le cas d'étude (à gauche) et ligne symbolique supportant les modes de déplacement moyens du modèle réduit (à droite).

### 5.2.2 Identification du modèle réduit

#### a) Modes de déplacement et champs associés

Afin de construire le ROM, la première opération à mener est d'identifier les modes de déplacement du cas d'étude. Comme exposé au §5.1.1, nous ne nous intéressons qu'au déplacement moyen de chaque grille. Considérant cela, nous définissons alors une ligne composée de 4 nœuds :  $G_0$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  (cf. Figure 36). Le nœud  $G_0$  représente la base et reste immobile. Les nœuds  $G_1$ ,  $G_2$  et  $G_3$  représentent les grilles.

Dans le cas présent, la caractérisation numérique des modes de déplacements est inutile puisque la base canonique de tous les modes de déplacements  $\mathbf{U}_j^a$  consiste en seulement 9 modes (3 grilles  $\times$  3 translations). Les trois premiers modes sont donc le déplacement unitaire de  $G_1$  selon  $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$ , respectivement, sans déplacement sur  $G_2$  et  $G_3$ . Les six autres modes sont obtenus en permutant les rôles de  $G_1$  avec  $G_2$  et  $G_3$ , respectivement.

Pour chaque mode de déplacement  $\mathbf{U}_j^a$ , la détermination des trois champs associés  $\sigma_j^{a\_asso}$ ,  $\epsilon_j^{a\_asso}$ ,  $\mathbf{U}_j^{a\_asso}$  nécessite la résolution d'un seul problème élastique, en bloquant la base  $G_0$ , les modes  $\mathbf{U}_j^a$  étant appliqué aux nœuds  $G_1, G_2, G_3$ . La relation ( 73 ) permet de transférer cette condition de Dirichlet sur le

maillage du modèle détaillé au moyen de multiplicateurs de Lagrange. Les neuf modes  $U_j^{a\_asso}$  associés obtenus par résolution du problème élastique détaillé avec ces modes de déplacement imposés sont représentés sur la Figure 37.

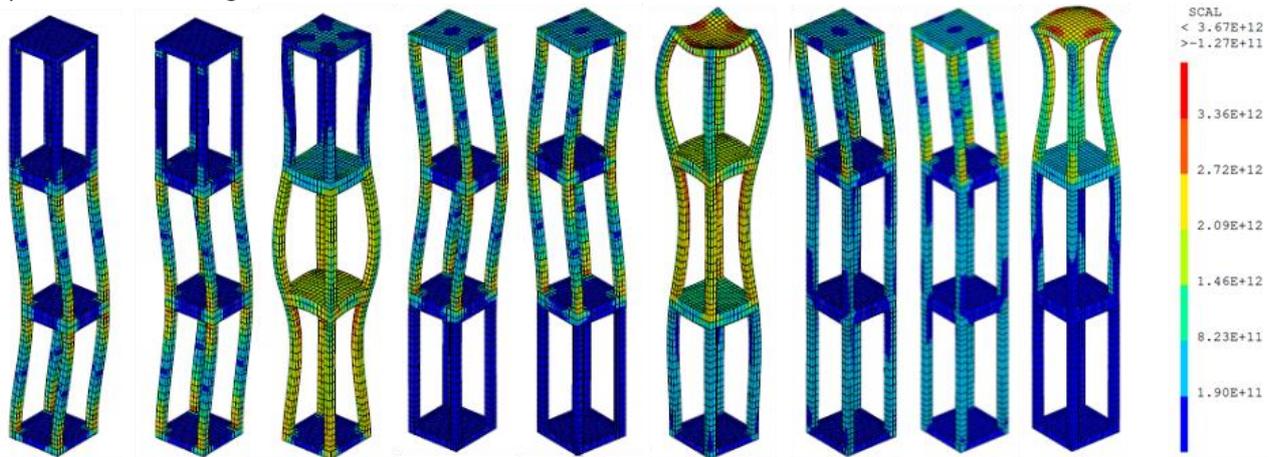


Figure 37 : Déformée (x100) et isovaleurs de contrainte équivalente de Von Mises (Pa) du modèle de référence lorsqu'il est soumis aux 9 modes de déplacement macroscopiques..

b) Modes inélastiques et champs associés

La seconde étape consiste à construire la base orthonormée des modes tensoriels de déformation inélastique de fluage. Onze calculs de fluage ont été réalisés sur le modèle détaillé avec des chargements en force variés. Ils ont été choisis de manière à solliciter tous les axes de mouvement dans les grilles. La Figure 38 montre les déformées obtenues à l'issue de ces calculs de fluage. En fin de calcul, les champs de déformation inélastique forment un ensemble de snapshots qui permettent d'opérer une décomposition orthogonale (POD).

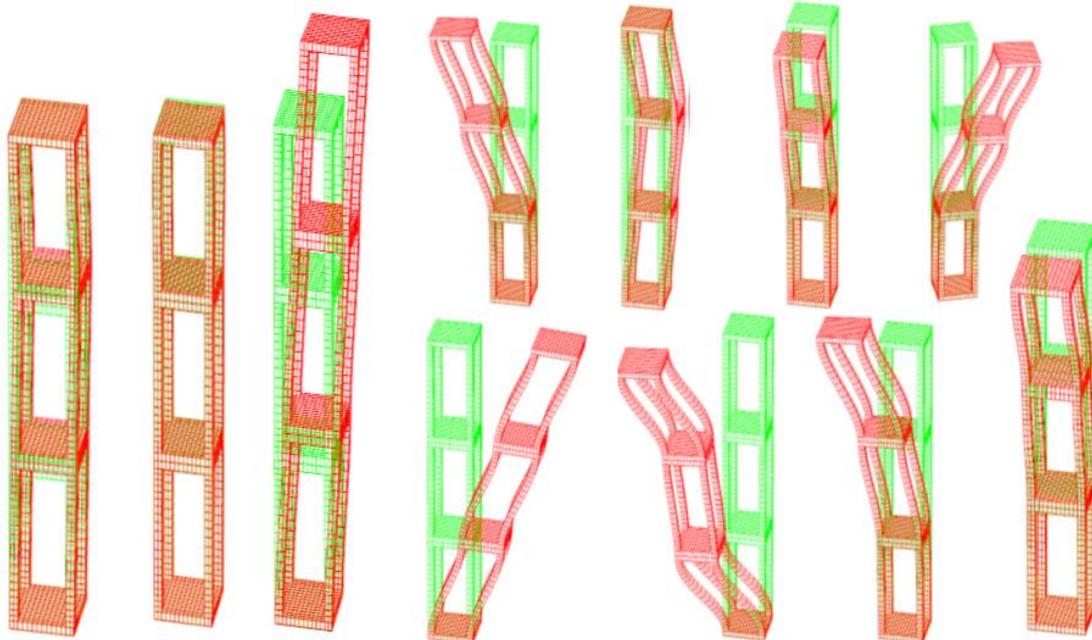


Figure 38 : Déformées (x50) issues de 11 cas de charge quelconques définis pour caractériser la réponse au fluage du modèle de référence et identifier les modes inélastiques dominants.

Le nombre de Snapshots réalisés est faible, du même ordre que le nombre de modes de déplacement  $U_j^a$ . Nous avons choisi arbitrairement de ne pas restreindre la qualité de la base POD et avons conservé 10 modes pour construire la base réduite des déformations inélastiques. Un nombre plus élevé de réalisations serait de nature à mieux caractériser le comportement de fluage de l'étude de cas.

Les 10 champs associés  $\sigma_i^{in\_asso}$ ,  $\epsilon_i^{in\_asso}$  et  $U_i^{in\_asso}$  sont obtenus en résolvant les 10 problèmes élastiques détaillés, définis par ( 79 ).

### 5.2.3 Comparaison des solutions du modèle de référence et du modèle réduit

Afin d'évaluer la qualité du modèle réduit, nous définissons un nouveau cas de charge, non inclus dans les réalisations antérieures, utilisées pour identifier la base des déformations inélastiques. Le Tableau 5 présente les valeurs des efforts appliqués pendant une période de  $10^8$  secondes sur les trois grilles pour ce cas de validation.

Tableau 5 : Valeur des forces appliquées sur les grilles pour la comparaison modèle réduit / modèle complet.

Forces (N)	$F_x$	$F_y$	$F_z$
Grille 1	543	-247	200
Grille 2	0	682	400
Grille 3	-321	-90	300

Le problème est résolu avec l'algorithme de prédiction correction décrit au §5.1.6.

Le premier pas de calcul, de pas de temps 1s, donne une réponse élastique pour laquelle le modèle réduit prévoit les déplacements avec une erreur négligeable. En fin de calcul, le fluage est significatif puisqu'il contribue à la moitié de la flèche. La Figure 39 présente l'évolution temporelle des amplitudes modales de fluage du ROM.

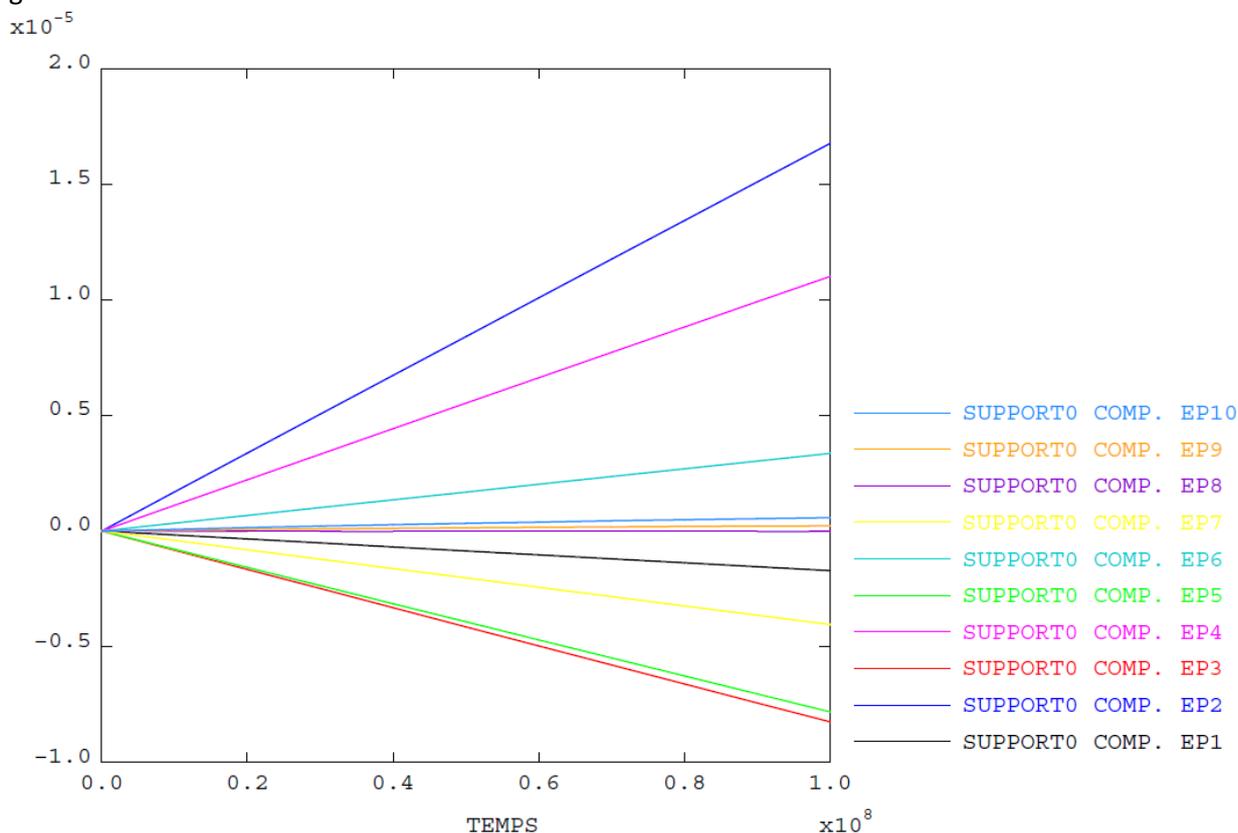


Figure 39 : Evolution temporelle des 10 amplitudes inélastiques pendant les  $10^8$  s sous chargement constant.

La Figure 40 présente les déformées finales obtenue par le modèle réduit en rouge et le modèle de référence, en noir, qui se superposent bien.

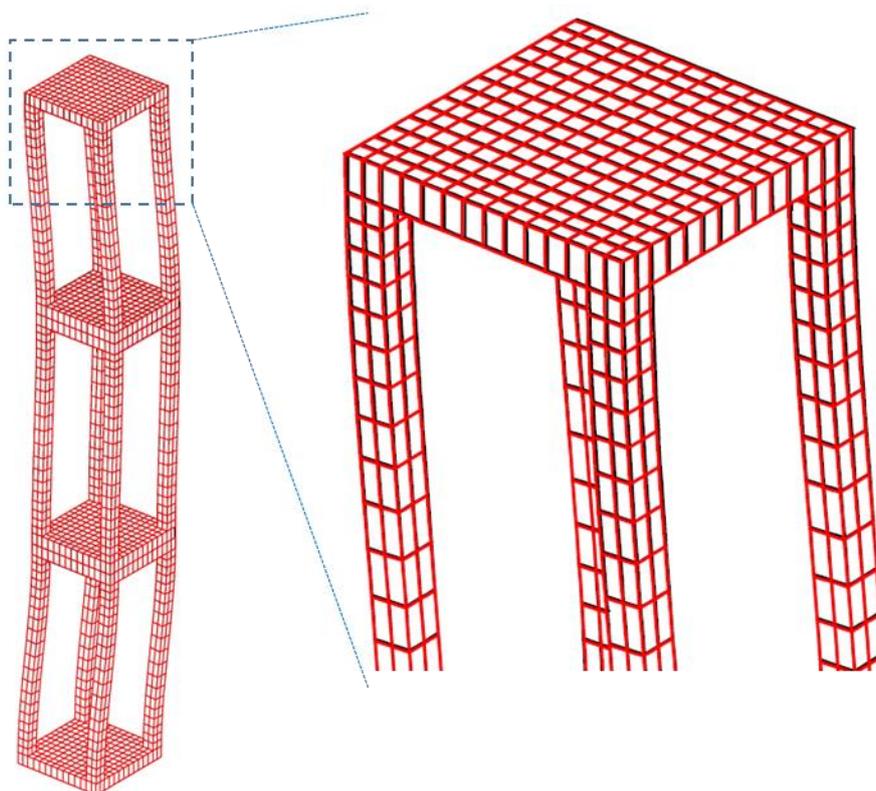


Figure 40 : Superposition des déformées du modèle de référence (lignes noires) et du ROM (lignes rouges).

Les déplacements finaux des grilles sont enregistrés et comparés dans le Tableau 6. Leur évolution temporelle sur la Figure 41 montre que la matrice élastique réduite donne une bonne prédiction et que l'erreur relative finale sur les déplacements est due à l'approximation de la loi de fluage dans le modèle réduit. Ce niveau de prédiction dans une simulation de fluage est comparable à celui obtenu initialement par les auteurs de la NTFA pour une flexion élastoplastique, cf. (Michel and Suquet, 2004).

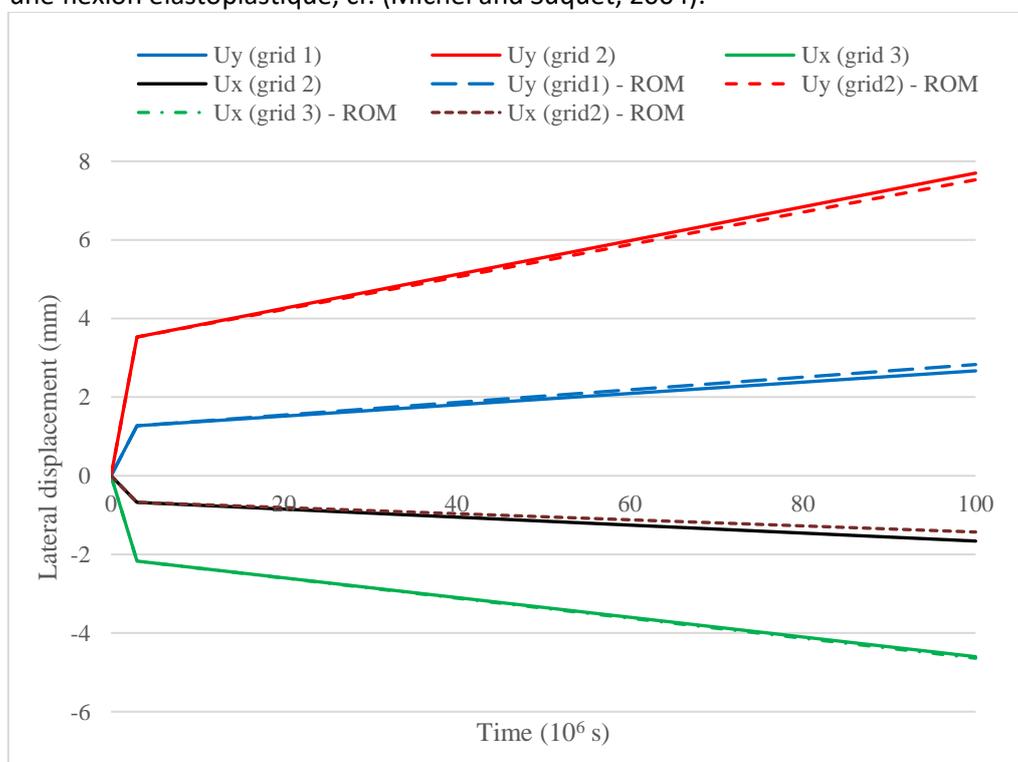


Figure 41 : Comparaison des déplacements au cours du temps entre le modèle de référence (lignes noires) et le modèle réduit (pointillés).

Tableau 6 : Comparaison des déplacements finaux entre modèle de référence et modèle réduit.

	$U_x (ref.) / U_x (ROM)$ (mm)	Erreur relative sur $U_x$	$U_y (ref.) / U_y (ROM)$ (mm)	Erreur relative sur $U_y$
Grille 1	1,40 / 1,37	-2,2 %	2,67 / 2,83	6 %
Grille 2	-1,66 / -1,43	-13,8 %	7,70 / 7,53	-2,2 %
Grille 3	-4,60 / -4,64	0,8 %	7,66 / 7,48	-2,3 %

Le Tableau 7 présente le temps de calcul pour le cas de chargement défini dans le Tableau 6. Les 2 modèles utilisent une discrétisation en temps identique, qui comprend 11 pas de temps. Les résultats montrent que le modèle réduit est plus de 100 fois plus rapide que le modèle éléments finis de référence avec la version 2020 de Cast3M (CEA, 2020). Ce gain de temps a été obtenu en considérant une simulation de référence de faible dimension et l'on prévoit de maintenir ou d'améliorer ce gain avec des simulations de dimension plus forte impliquant de nombreux AC.

Tableau 7 : Comparaison des temps CPU de résolution (1 processeur).

Modèle de référence (Cast3M)	ROM à 9 modes de déplacement et 10 modes fluage
41953 ms	359 ms

Ce premier test de validation est concluant puisqu'il permet de retrouver les résultats attendus avec une précision satisfaisante et une durée de calcul réduite de 2 ordres de grandeur. Nous allons maintenant l'appliquer au modèle détaillé de l'AC.

### 5.3 Fluage d'un AC en conditions hétérogènes

Dans la section précédente, nous avons montré sur un cas d'étude simple que notre modèle réduit, via l'approche proposée, donne des résultats satisfaisants en fluage tout en diminuant la durée de calcul d'un facteur 100 par rapport au modèle éléments finis initial. Nous l'appliquons maintenant à notre cible industrielle, qui est un modèle détaillé d'AC, de grande dimension et beaucoup plus complexe. Tout d'abord, contrairement à l'exemple précédent, utilisant uniquement des éléments finis massifs, le modèle de référence, décrit au chapitre 3, utilise des éléments finis généralisés de type tuyau (élément TUYA de Cast3M) pour les crayons et les tubes-guides, des éléments de coque pour les grilles et des éléments discrets pour les liaisons entre ces composants. Ceci impose une adaptation des opérateurs de déformations aux inconnues généralisées associées à ces éléments. Deuxièmement, contrairement à l'approche d'homogénéisation d'un VER de petite taille, la caractéristique de fluage  $a(x)$  devient dans ce cas hétérogène, puisqu'elle dépend du flux de neutrons rapides, lui-même hétérogène et légèrement variable dans le temps. Enfin, la structure est multiphasée, certaines zones de la structure ne fluant pas du tout, comme les embouts inférieur et supérieur en acier, qui sont situées en dehors du flux neutronique. Nous allons devoir tenir compte de toutes ces particularités dans la construction du ROM.

#### 5.3.1 Adaptation du produit scalaire pour les éléments finis généralisés de type poutre et tuyau

Pour construire les modes inélastiques, nous devons appliquer une POD sur les snapshots de déformation inélastique issus du plan d'expérience en utilisant le produit scalaire (97).

$$(\boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}, \boldsymbol{\varepsilon}_q^{in}) = \iiint_{x \in \Omega} \boldsymbol{\varepsilon}_p^{in}(x) : \boldsymbol{\varepsilon}_q^{in}(x) dV \quad (97)$$

Cependant, au sein d'éléments généralisés de type tuyau ou poutre d'Euler, les déformations inélastiques ne sont accessibles que sous forme de déformations généralisées, dont les composantes sont la déformation axiale  $E1$ , et les courbures  $C2$  et  $C3$ . Il est donc nécessaire d'exprimer les déformations locales en tout point  $x$  de la section de poutre ou de tuyau en fonction de ces déformations généralisées, avant de les intégrer sur le volume de l'élément. Un point  $x$  de la section d'une poutre ou d'un tuyau de longueur  $L_0$  est repéré par son rayon  $r(x)$  et sa position angulaire  $\theta(x)$ . La déformation de fluage étant considérée comme isochore,

un coefficient de Poisson  $\nu = 0,5$  est introduit et, après avoir négligé la déformation de cisaillement, nous pouvons reconstruire un tenseur de déformation 3D local  $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$  de la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{axial}(x) = E1 + r(x)\cos\theta(x)C3 + r(x)\sin\theta(x)C2 \\ \boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} -0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \varepsilon_{axial}(x) \end{array} \right. \quad (98)$$

Après intégration sur le volume de l'élément poutre, de rayon externe  $R^{ext}$ , le produit scalaire ( 97 ) devient, en coordonnées généralisées :

$$(E_i, E_j) = \frac{3}{2} \left( 2\pi R^{ext2} L_0 \right) \left[ E1_i E1_j + R^{ext2} \left( \frac{C2_i C2_j}{4} + \frac{C3_i C3_j}{4} \right) \right] \quad (99)$$

Dans le cas de l'élément de tuyau, avec  $R^{int}$  et  $R^{ext}$  ses rayons interne et externe, le produit scalaire ( 97 ) devient, en coordonnées généralisées :

$$(E_i, E_j) = \frac{3}{2} \left( R^{ext2} - R^{int2} \right) 2\pi L_0 \left[ E1_i E1_j + \frac{(R^{ext2} + R^{int2})}{2} \left( \frac{C2_i C2_j}{2} + \frac{C3_i C3_j}{2} \right) \right] \quad (100)$$

### 5.3.2 POD adaptée aux modes de déplacement macroscopiques

Pour le premier cas-test du §5.2, on avait choisi une base orthogonale arbitraire de 9 modes de déplacement macroscopiques pour décrire les déplacements des 3 grilles. Un AC possède 10 grilles et un embout supérieur mobile, conduisant à 33 modes élémentaires en 3D, si l'on considère l'embout inférieur immobile. On souhaite utiliser moins de modes et, pour ce faire, on effectue une POD sur les résultats de déplacements des grilles obtenus à l'issue du plan d'expérience. En réalisant un tel exercice, la POD met particulièrement en évidence les modes de dilatation thermique axiaux, qui sont particulièrement visibles du fait de la grande longueur de l'AC. Cependant, ceux-ci nous intéressent moins que les déplacements latéraux des grilles. On choisit donc de pondérer la POD par une matrice de rigidité  $K_{param}$  dans l'équation ( 99 ) afin de privilégier les modes impliquant la flexion de l'AC par rapport aux modes axiaux. L'équation ( 99 ) devient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^a(grid_g, t) \approx \sum_{j=1, J} \alpha_j(t) \mathbf{U}_j^a(grid_g) \\ (\mathbf{U}_k^a, \mathbf{U}_l^a) = \mathbf{U}_k^{at} \cdot K_{param} \cdot \mathbf{U}_l^a = \delta_{kl}, \forall (k, l) \in [1, J]^2 \\ J = \underset{L}{\operatorname{argmin}} \left( \frac{\sum_{k=1}^L \lambda_k}{\sum_{k=1}^{k_{max}} \lambda_k} \geq 1 - \rho \right) \end{array} \right. \quad (101)$$

En pratique, nous construisons  $K_{param}$  comme la matrice de rigidité d'une poutre rectiligne passant par les douze nœuds du maillage qui servent à représenter les déplacements macroscopiques de l'assemblage, ayant une section carrée pleine de 20x20cm<sup>2</sup> et les caractéristiques élastiques du zirconium. Cette section carrée, bien que faible au regard de la hauteur de l'AC, est beaucoup plus grande que la section d'un crayon et amène surtout un moment quadratique de flexion bien plus élevé que celui de l'ensemble des crayons, car leur diamètre extérieur unitaire est inférieur au centimètre et leur épaisseur inférieure au millimètre. Cette poutre, dont on extrait la matrice de raideur  $K_{param}$ , est alors nettement plus rigide en flexion qu'un faisceau de crayons. Elle permet de réduire la contribution des déplacements axiaux dans les 10 premiers modes de déplacement. La Figure 42 représente les 18 modes 3D obtenus avec une telle POD pondérée, avec un critère d'erreur de projection égal à 1%. Il est possible de favoriser encore plus les modes de flexion dans le résultat de la POD en augmentant au-delà de 20cm le coté de cette poutre virtuelle.

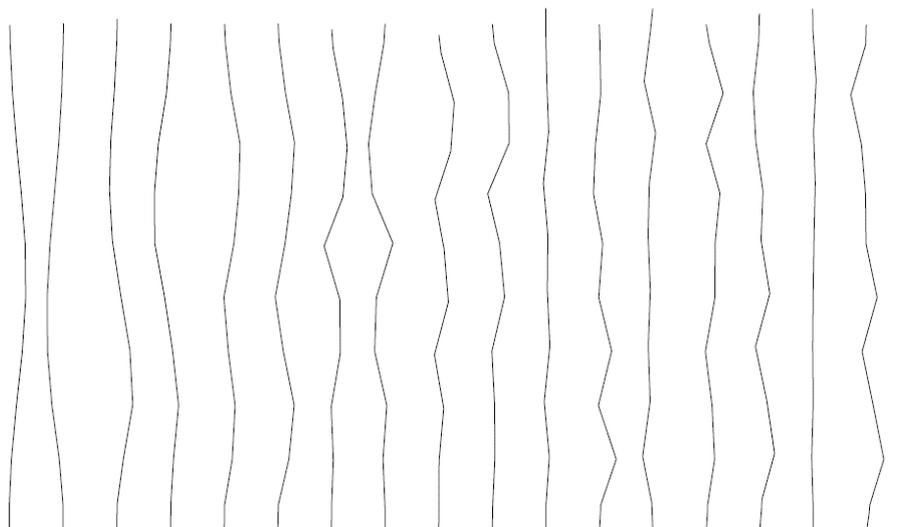


Figure 42 : Les 18 modes de déplacement macroscopiques (3D) obtenus par une POD pondérée et tronquée afin de représenter les snapshots de déplacement avec une erreur relative de 1% au sens des moindres carrés.

### 5.3.3 Modes inélastiques

A partir des 88 simulations effectuées dans le plan d'expérience, 176 instantanés de déformation inélastiques ont été collectés (à 50 % et 100 % de la durée simulée). Une POD est appliquée à l'aide de ( 100 ) pour tenir compte des déformations généralisées dans les éléments tuyaux. La Figure 43 affiche, à gauche, la composante  $CY$  de courbure inélastique pour les 5 premiers modes obtenus. La base POD est ensuite tronquée à 18 modes suivant le même critère que pour les modes macroscopiques.

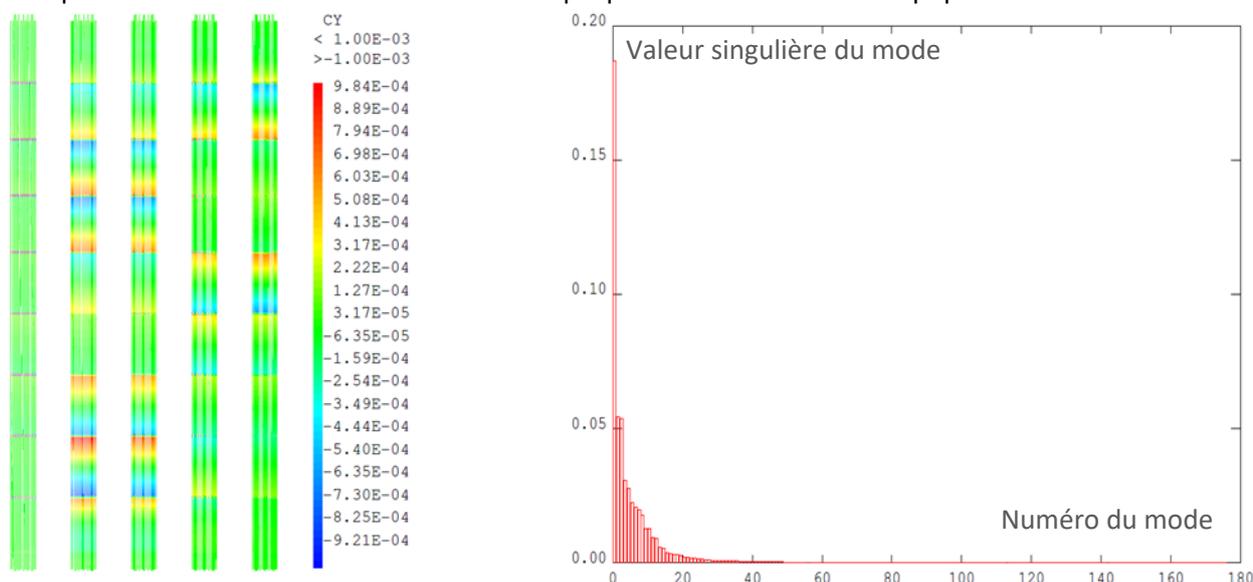


Figure 43 : Courbures inélastiques hors plan  $CY$  pour les 5 premiers modes inélastiques, valeurs singulière associées aux modes de la POD effectuée sur les 176 snapshots de fluage.

### 5.3.4 Vérification du modèle réduit sur les points du plan d'expérience

Les 88 calculs qui ont permis d'identifier les modes et les opérateurs ont été re-simulés à l'aide du ROM. Pour chaque calcul, les forces sur les grilles sont projetées sur les modes de déplacement macroscopiques ( 79 ) et les caractéristiques de fluage modal ( 89 ) ( 94 ) sont déterminées à partir de la cartographie de flux neutronique considérée (position centrale ou périphérique). Après résolution du ROM, les déplacements macroscopiques sont recombinaés (en rouge) et comparés à leur référence (en bleu) sur la Figure 44. Cette figure compare le déplacement des 7 premiers cas de charge LAT1 à LAT7, avec un flux de neutrons correspondant à une position centrale dans le cœur.



Figure 44 : Comparaison des déplacements entre les résultats du ROM et les résultats du modèle détaillé d'AC pour les 7 cas de charge LAT1 à LAT7. ROM en rouge, référence en bleu. Déformées x200.

La Figure 45 affiche le même type de comparaison pour 3 autres cas de charge mais, cette fois, avec des forces appliquées sur les grilles dans les deux directions horizontales en même temps. La précision est similaire à celle obtenue pour des chargements effectués dans un seul plan.



Figure 45 : Déplacements des grilles ROM (rouge) par rapport à la référence (bleu) pour les chargements de forces couplées dans les directions horizontales X et Y. A gauche : forces LAT1/LAT2 – milieu : LAT2/LAT3 – droite : LAT2/LAT5. Déformées x200. Point de vue choisi pour maximiser le déplacement visible.

Les champs de déformation inélastique sont également recombinaés et comparés, sur la Figure 46, aux champs de fluage du calcul de référence numéro 6. Dans ce cas, le ROM retrouve la répartition du fluage malgré un léger déficit d'intensité de fluage axial. La courbure des crayons en fluage au passage de chaque grille est marquée et est bien corrélée.

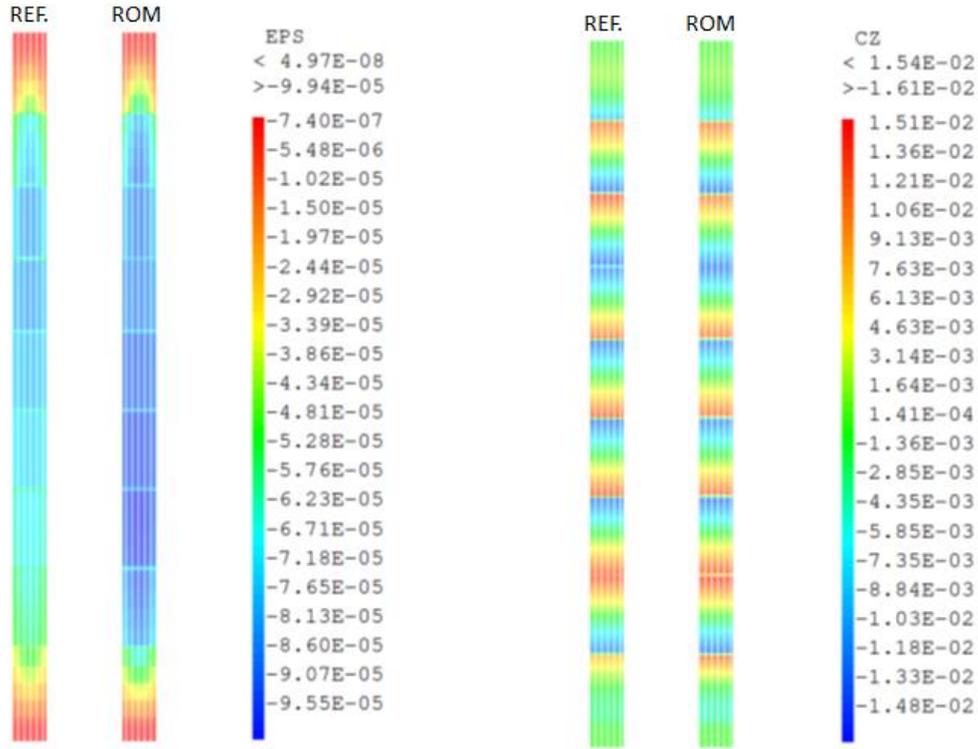


Figure 46 : Comparaison des déformations de fluage calculées pour le chargement LAT6. A gauche : déformation axiale de fluage. A droite : courbure de fluage dans les crayons (rad/m).

Afin de donner une vision plus statistique de l'erreur commise avec le ROM, on définit un indicateur d'erreur de fluage  $e_{flow}$  sur une trajectoire donnée. Cet indicateur repose sur la différence de dissipation locale entre le modèle de référence et les champs recombinaés du ROM, intégrés dans l'espace et le temps.

$$e_{flow} = \left( \int_0^T \iiint_{\Omega} \left| \sigma_{ref} : \dot{\varepsilon}_{ref}^{vp} - \left( \sum_{i=1}^I \alpha_i^{in} \sigma_i^{in-asso} + \sum_{j=1}^J \alpha_j^{in} \sigma_j^{a-asso} \right) : \left( \sum_{i=1}^I \dot{\alpha}_i^{in} \varepsilon_i^{in} \right) \right| d\Omega dt \right)^{1/2} \quad (102)$$

L'erreur relative d'écoulement global  $re_{flow}^{val}$  (103), évaluée pour l'ensemble des 88 cas du plan d'expérience, est égale à 14%.

$$re_{flow}^{val} = \frac{\sum_{s=1}^{Nt} (e_{flow}(s))^2}{\sum_{s=1}^{Nt} \left( \int_0^T \iiint_{\Omega} \sigma(s) : \dot{\varepsilon}^{vp}(s) d\Omega dt \right)} \quad (103)$$

Concernant le temps de calcul, le Tableau 8 montre un gain de l'ordre de 50 pour cette simulation de fluage d'un AC, du même ordre que le gain d'environ 100 réalisée avec le modèle d'AC prototype en éléments massifs, cf. Tableau 7.

Tableau 8 : durée de résolution typique (1 processeur) pour un calcul de fluage d'un assemblage.

Modèle de référence (Cast3M)	ROM : 18 modes de déplacement et 18 modes fluage
866 ms	16 ms

### 5.3.5 Validation hors des points du plan d'expérience

L'objectif est de vérifier que le ROM donne des résultats satisfaisants pour des cas de charge différents de ceux utilisés pour sa construction. Pour cela, nous définissons un tout nouveau cas-test, que nous simulons avec les modèles détaillé et réduit.

L'AC se trouve dans une position centrale proche de la périphérie et soumis à de nouvelles forces latérales, résumées dans le Tableau 9. Ces forces ne sont colinéaires avec aucun des chargements utilisés pour identifier le ROM. La valeur de compression axiale, qui était de 5000N dans tous les calculs précédents, est maintenant augmentée à 6000N.

Tableau 9 : Nouvelle définition de chargement latéral pour le cas d'essai d'interpolation 1, le flux de neutrons restant inchangé.

Grille	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Force Fx (N)	40	20	0	-10	-60	-70	-35	0	13	20
Force Fy (N)	0	-28	-56	-32	0	12	44	42	23	0

Concernant le flux neutronique, nous considérons des gradients latéraux, respectivement de 30% dans la direction  $X$  et de 20% dans la direction  $Y$ . Ces gradients latéraux peuvent être vus comme une interpolation des 3 cartes de flux neutroniques précédemment utilisées. De plus, une petite extrapolation de l'espace des paramètres est également opérée, afin d'appliquer un décalage de puissance axiale, cf. Figure 47, alors qu'aucune sensibilité n'a été réalisée sur cet axe lors des réalisations initiales.

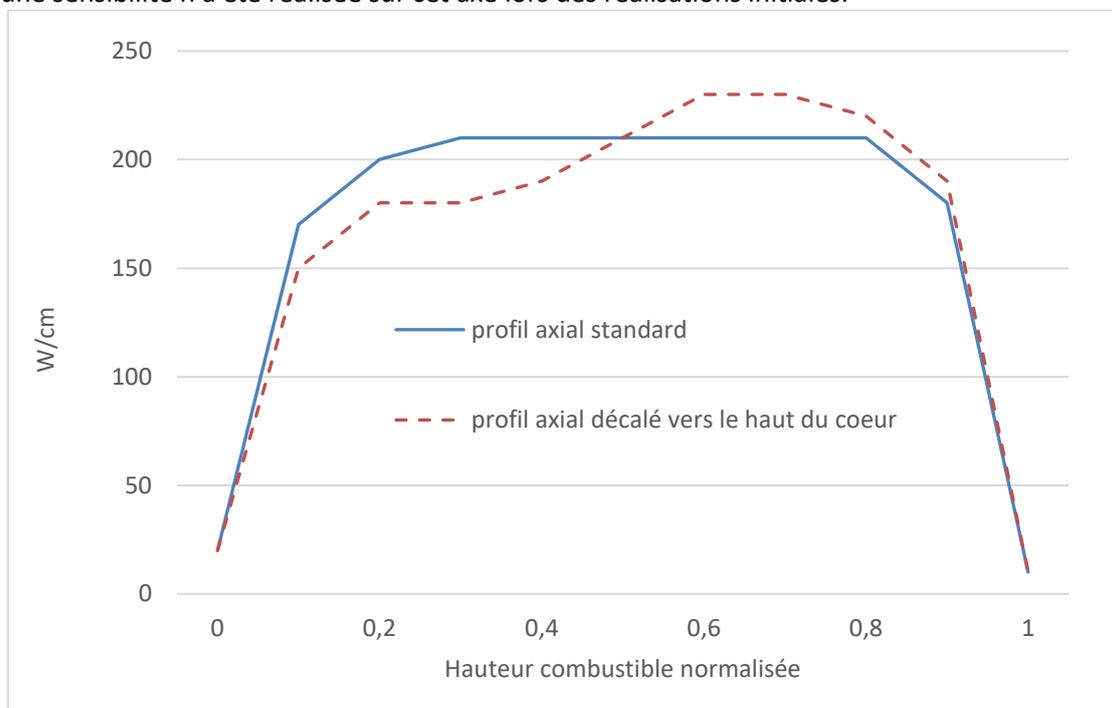


Figure 47 : Profils axiaux de puissance, cas standard en bleu, offset axial en orange tel qu'utilisé dans le cas de test 2.

Les résultats du ROM sont comparés à ceux du modèle détaillé dans la Figure 48, pour les déplacements, le fluage axial et le fluage en courbure. La déformée finale, recombinaison à partir de la solution ROM, est proche du modèle de référence, ainsi que les champs de fluage axial et de courbure.

Cependant, en regardant précisément la comparaison de la courbure de fluage à droite de la Figure 48, il convient de noter que le ROM sous-estime légèrement l'intensité au bas de l'AC et la surestime légèrement en haut. Ceci est sans doute dû à la base des modes de fluage qui a été construite sur des instantanés obtenus avec un flux axial uniquement symétrique (voir Figure 47).

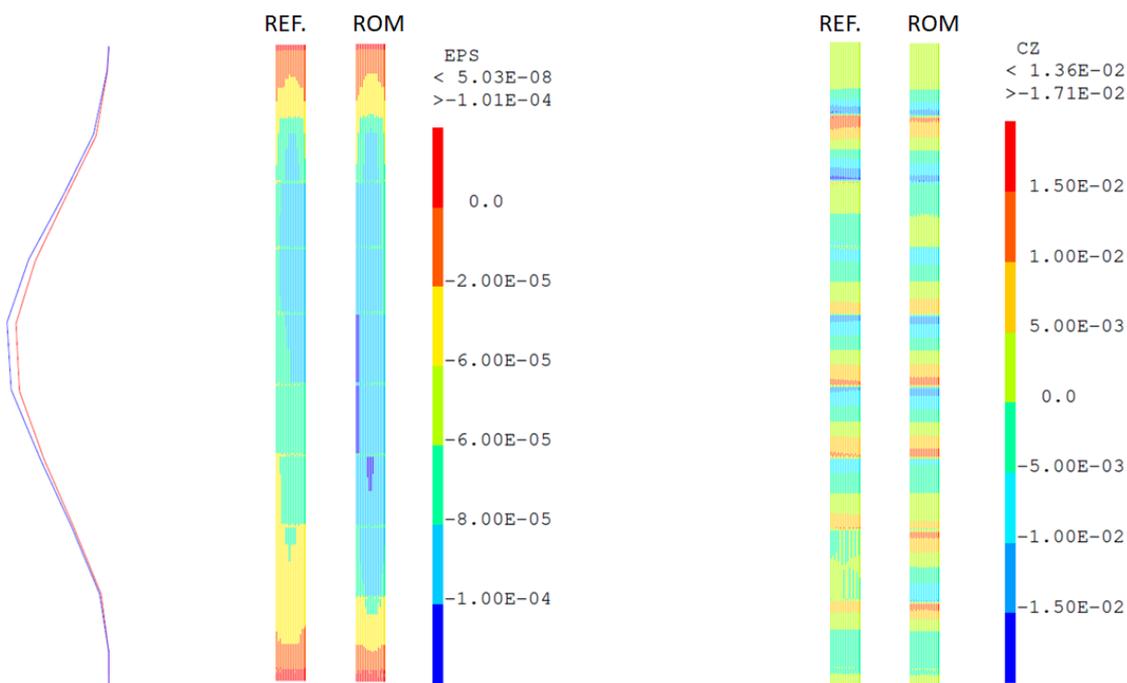


Figure 48 : Cas-test avec extrapolation légère du flux de neutrons, à gauche, comparaison de la déformée du ROM, en rouge, avec le modèle de référence, en bleu (amplification  $\times 200$ ). Au centre, comparaison des déformations axiales de fluage des crayons. A droite, comparaison de la courbure de fluage des crayons (rad/m).

Ces résultats montrent que ce ROM est capable de prendre en compte une dissymétrie axiale de flux neutronique, bien qu'un tel cas de charge ne fasse pas partie de sa base de construction. Ceci est dû au fait que les caractéristiques modales de fluage intègrent cette dissymétrie par construction du modèle, ce qui permet d'étendre son utilisation légèrement en dehors de son domaine d'identification. Bien entendu, il convient de toujours être prudent lorsque l'on opère ce genre « d'extrapolation ».

#### 5.4 CONCLUSIONS POUR LE MODELE REDUIT DE FLUAGE

Nous avons proposé une méthode originale de réduction de modèle en mécanique des structures avec des lois de comportement non linéaires. Cette méthode résulte d'une adaptation de la méthode d'homogénéisation NTFA à des structures élancées prises comme VER. Par rapport aux modèles EF simplifiés classiquement utilisées pour représenter un AC, nous avons accès à des quantités locales à n'importe quel point de la structure. Surtout, de nombreuses hypothèses simplificatrices sont ainsi évitées, notamment sur la rigidité des grilles et les gradients de flux neutroniques.

Cette méthode a été appliquée avec succès à un modèle détaillé d'AC de REP sollicité en fluage. Pour son application industrielle, le modèle a dû être adapté pour traiter les éléments généralisés de type tuyaux qui sont utilisés dans le modèle de référence. De plus, une seconde amélioration a été introduite pour tenir compte des caractéristiques de fluage hétérogène en pondérant chaque mode de la loi de fluage réduite. Ceci permet de prendre en compte automatiquement l'effet de la cartographie des flux neutroniques sur le fluage, y compris à l'échelle intra-assemblage, ce qui est particulièrement utile pour les assemblages en périphérie du cœur. Le même ROM peut donc servir à simuler aussi bien les assemblages périphériques que centraux.

La précision obtenue lors des tests de validation est satisfaisante, y compris pour les cas d'interpolation d'effort et d'extrapolation raisonnable du flux axial de neutrons.

Le gain de temps de calcul obtenu sur les cas-tests simulés est de l'ordre de 50. Il permet d'envisager des simulations rapides pour les calculs cible. Ceci est rendu possible grâce à la définition de modes globaux directement sur la structure (un seul VER par AC) et au fait qu'une seule intégration du comportement non linéaire est effectuée pour toute la structure.

Il est encore nécessaire de prendre en compte la dilatation thermique hétérogène au sein de l'AC. Pour cela, nous devons définir un cas de charge en dilatation thermique pure. Comme (Roussette et al., 2009) l'a fait pour traiter le gonflement isotrope du combustible avec l'approche NTFA, on doit faire appel à des

modes compressibles, qu'il est possible d'obtenir par POD. Les champs de contraintes associé à la dilatation ont une projection non nulle sur les modes de fluage inélastique et contribuent donc à l'évolution du fluage. Enfin, afin de représenter avec une bonne définition spatiale le glissement entre les crayons et les grilles, nous avons besoin d'ajouter une réduction du problème de contact-frottement à l'intérieur de l'assemblage. Celle-ci doit être définie en cohérence avec la méthode de réduction que nous venons de présenter pour le fluage. C'est l'objet des deux chapitres suivants.

## 5.5 PERSPECTIVES : VERS UN POTENTIEL RÉDUIT QUI S'ADAPTE À L'HÉTÉROGÉNÉITÉ

### 5.5.1 Produit scalaire évolutif

On considère un matériau obéissant à une loi de fluage de type puissance, possiblement orthotrope. Son potentiel de dissipation est noté  $\psi(\sigma)$  et la contrainte équivalente est obtenue à l'aide du tenseur  $\mathbb{A}$ , symétrique, d'ordre 4. Ainsi, dans le cas d'un matériau isotrope,  $\mathbb{A}$  donne le déviateur des contrainte  $\sigma' = \mathbb{A}\sigma$ .

$$\begin{cases} \psi(\sigma) = \frac{1}{\tau} \sigma_0(x) \left| \frac{\sigma_{eq}(x)}{\sigma_0(x)} \right|^m \\ \sigma_{eq}(x) = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbb{A}\sigma(x) \\ \mathbb{A}^t \mathbb{A} = \mathbb{A}^2 = \mathbb{A} \end{cases} \quad (104)$$

La loi de fluage locale est donc de la forme suivante.

$$\dot{\epsilon}^{in} = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{m}{\tau} \frac{3}{2} \left| \frac{\sigma_{eq}(x)}{\sigma_0(x)} \right|^{m-2} \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \quad (105)$$

On considère maintenant que les caractéristiques matérielles  $\sigma_0(x)$  sont hétérogènes et évolutives dans le temps. On souhaite exprimer les déplacements de la structure et les déformations de fluage dans une base fixe tout au long du calcul. Malheureusement cette base fixe de modes inélastiques n'est pas toujours bien adaptée à l'hétérogénéité présente à l'instant courant. L'idée poursuivie dans cette partie est donc de mettre en place un produit scalaire  $M$  qui s'adapte aux conditions hétérogènes à chaque fois qu'elles changent (par exemple, en cas nouvelle répartition du flux de neutrons rapides) et qui permet ensuite de faire le lien avec la base fixe  $[\mu]$  des modes inélastiques pour exprimer les déformations inélastiques.

$$M_{pq} = \langle \mu_p, \mu_q \rangle = \iiint_{\Omega} \sigma_0(x) \mu_p(x) : \mu_q(x) d\Omega \quad (106)$$

### 5.5.2 Projection de la loi d'écoulement

Afin de travailler en base réduite on exprime l'écoulement local dans la base des modes  $\mu_p$ .

$$\dot{\epsilon}_{proj}^{in} = \sum_p \dot{\epsilon}_p^{in} \mu_p \quad (107)$$

L'intensité de l'écoulement modal pour toute direction  $\mu_q$  est donc :

$$\dot{\epsilon}_q^{in} = \langle \dot{\epsilon}^{in}, \mu_q \rangle \approx \langle \dot{\epsilon}_{proj}^{in}, \mu_q \rangle = \sum_p \dot{\epsilon}_p^{in} \langle \mu_p, \mu_q \rangle = \sum_p \dot{\epsilon}_p^{in} M_{pq} \quad (108)$$

Avec les champs locaux :

$$\dot{\epsilon}_q^{in} = \langle \dot{\epsilon}^{in}, \mu_q \rangle = \frac{m}{\tau} \frac{3}{2} \iiint_{\Omega} \left| \frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \right|^{m-2} \mathbb{A}\sigma : \mu_q d\Omega \quad (109)$$

On utilise alors une opération de moyenne volumique similaire à celle faite par (Michel and Suquet, 2003) afin de sortir le terme non-linéaire de l'intégrale.

$$\dot{\varepsilon}_q^{in} \approx \frac{m}{\tau} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\langle \sigma_0 \rangle} \langle \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} \rangle \right)^{\frac{m-2}{2}} \iiint_{\Omega} \mathbb{A}\sigma : \boldsymbol{\mu}_q d\Omega \quad (110)$$

L'intégrale de droite correspond à la force thermodynamique  $\beta_q$  agissant sur le mode  $\boldsymbol{\mu}_q$ . Donc, si l'on note  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{in} = (\dot{\varepsilon}_1^{in}, \dots, \dot{\varepsilon}_p^{in})^t$  et  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)^t$ , on relie les vecteurs d'écoulement  $\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{in}$  et de force  $\boldsymbol{\beta}$ .

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}^{in} \approx \frac{m}{\tau} \frac{3}{2} \left( \frac{1}{\langle \sigma_0 \rangle} \langle \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} \rangle \right)^{\frac{m-2}{2}} M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (111)$$

Il reste alors à traiter le terme entre parenthèses, encore exprimé en contraintes locales.

### 5.5.3 Moyenne des contraintes

On commence par le terme  $\langle \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} \rangle$  en utilisant les relations (104) puis (106).

$$\langle \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} \rangle = \frac{3}{2V} \iiint_{\Omega} \sigma_0(x) \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} : \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} d\Omega = \frac{3}{2V} \langle \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \rangle \quad (112)$$

On remplace le terme  $\frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}$  par sa projection  $proj \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}$ , qui est telle que :

$$proj \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} = \sum_p \tilde{S}_p \boldsymbol{\mu}_p \quad (113)$$

On a donc, quel que soit le mode  $\boldsymbol{\mu}_q$  :

$$\langle \sum_p \tilde{S}_p \boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\mu}_q \rangle = \langle \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, \boldsymbol{\mu}_q \rangle = \iiint_{\Omega} \mathbb{A}\sigma : \boldsymbol{\mu}_q d\Omega = \beta_q \quad (114)$$

Ceci fait donc apparaître la correspondance entre les contraintes  $\tilde{\mathbf{S}}$  et  $\boldsymbol{\beta}$ .

$$\tilde{S}_p = M_{pq}^{-1} \beta_q \quad (115)$$

En injectant ces termes dans (121) on va progressivement faire apparaître  $\boldsymbol{\beta}$ , ce qui est le but recherché.

$$\langle \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \rangle \approx \langle proj \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, proj \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \rangle = \sum_{p,q} \tilde{S}_p \tilde{S}_q \langle \boldsymbol{\mu}_p, \boldsymbol{\mu}_q \rangle \quad (116)$$

En substituant les terme  $\tilde{S}_p$  par (115) on obtient le résultat désiré.

$$\langle \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \rangle \approx \boldsymbol{\beta} \cdot M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (117)$$

Une fois injecté dans (121), la moyenne est approchée par les forces réduites  $\boldsymbol{\beta}$  et la matrice  $M$  de covariance des modes dans le produit scalaire dissipatif.

$$\langle \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0} \rangle = \frac{3}{2V} \langle \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)}, \frac{\mathbb{A}\sigma(x)}{\sigma_0(x)} \rangle \approx \frac{3}{2V} \boldsymbol{\beta} \cdot M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (118)$$

### 5.5.4 Loi d'évolution finale

La loi d'évolution en base réduite s'obtient en combinant les résultats (111) et (118).

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}}^{in} &\approx \frac{m}{\tau} \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{1}{V \langle \sigma_0 \rangle} \boldsymbol{\beta} \cdot M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \right)^{\frac{m-2}{2}} M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \\ &\approx \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\beta}} \left\{ \frac{1}{\tau} V \langle \sigma_0 \rangle \left( \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{2}} \left( \frac{1}{V \langle \sigma_0 \rangle} \boldsymbol{\beta} \cdot M^{-1} \cdot \boldsymbol{\beta} \right)^{\frac{m}{2}} \right\} \end{aligned} \quad (119)$$

On identifie donc un potentiel réduit approché, symétrique, de même forme que le potentiel local exact. Au travers de la matrice  $M$  ce potentiel réduit est mis à jour grâce au produit scalaire dissipatif ( 106 ) qui tient compte de l'hétérogénéité des caractéristiques.

### 5.5.5 Caractéristique équivalente

L'unique paramètre qui reste à préciser est  $\langle \sigma_0 \rangle$ , une moyenne des caractéristiques hétérogènes à l'instant courant. Plutôt que de faire une moyenne spatiale, on peut choisir d'identifier cette caractéristique équivalente de telle manière que la dissipation soit exacte pour un champ de contrainte arbitraire  $\sigma^{ref}$ . La relation ( 123 ) permet d'obtenir sa projection  $\beta^{ref}$  dans la base réduite. Egaliser les dissipations exacte et réduite pour ce champ de contraintes donne donc l'équation suivante qui permet d'identifier  $\langle \sigma_0 \rangle$ .

$$(V\langle \sigma_0 \rangle)^{1-\frac{m}{2}} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{m}{2}} (\beta^{ref} \cdot M^{-1} \cdot \beta^{ref})^{\frac{m}{2}} = \iiint_{\Omega} (\sigma_0)^{1-m} (\sigma_{eq}^{ref})^m d\Omega \quad (120)$$

Afin de tenir compte de l'hétérogénéité de  $\sigma_0(x)$  à l'instant courant, un choix possible est de définir le champ de contraintes de référence  $\beta^{ref}$  à partir des valeurs propres de la matrice de covariance  $M$ .

## 6. Réduction du modèle : traitement du contact

### 6.1 ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE SUR LA RÉDUCTION D'UN MODÈLE DE CONTACT

#### 6.1.1 Conditions locales de contact

Une zone de contact unilatéral, schématisée Figure 49, doit vérifier les conditions de Hertz-Signorini-Moreau (Signorini, 1959) :

- Condition géométrique d'impénétrabilité : l'ouverture entre surfaces de contact, mesure algébrique de la distance entre celles-ci suivant leurs normales sortantes, est toujours positive ou nulle.
- Condition mécanique, parfois dite condition d'intensité : la composante normale des réactions de contact, produit scalaire de celles-ci avec les normales sortantes aux surfaces de contact, est positive ou nulle ; elle traduit l'absence de traction normale.
- Condition énergétique de Moreau, dite condition de complémentarité : le produit de la composante normale des réactions de contact et de l'ouverture est toujours nul.

Ainsi, en s'appuyant sur les notations de la Figure 49, on note  $B$  l'opérateur qui donne le saut normal d'un champ de déplacement à l'interface et  $\vec{n}$  la normale sortante du corps 1. On peut alors écrire que pour tout point  $x$  appartenant à l'interface de contact entre le corps 1 et le corps 2, une solution localement admissible se caractérise à tout instant par :

$$\begin{cases} Ouv(x) = Ouv_0(x) + U_2^{normal}(x) - U_1^{normal}(x) = B \cdot \mathbf{U}(x) \geq 0 \\ F^{contact}(x) = F_{1 \rightarrow 2}^{normal}(x) = -F_{2 \rightarrow 1}^{normal}(x) \geq 0 \\ Ouv(x) \times F^{contact}(x) = 0 \end{cases} \quad (121)$$

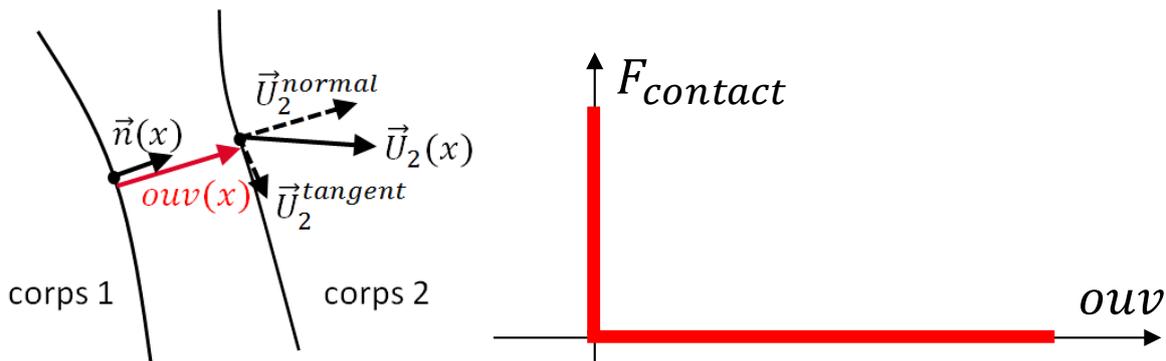


Figure 49 : condition de contact unilatéral en force - déplacement au point  $x$  de l'interface

Cette relation entre force et ouverture est dite non univoque car savoir que l'ouverture est nulle ne permet pas de connaître la valeur de l'effort de contact, et inversement. Elle est donc non différentiable dans le cas où ouverture et effort sont nuls.

En pratique, on utilise surtout les deux premières conditions de Signorini dans les algorithmes de résolution. La condition de complémentarité peut être utilisée pour contrôler la qualité de la solution d'un problème de contact.

#### 6.1.2 Causes et variabilité des ouvertures et réactions de contact

Lorsque deux corps en contact sont soumis à un chargement mécanique, ils se déforment, de même que leurs surfaces de contact, modifiant ainsi les ouvertures et réactions de contact. De plus, les réactions de contact participent à leur déformation.

Le champ des ouvertures de contact est donc contrôlé : d'une part, par les chargements autres que ceux de contact et, d'autre part, par les efforts de contact eux-mêmes, comme le montre la Figure 50. Elle illustre également l'une des principales difficultés, qui est que la non linéarité du contact génère un ensemble de réponses, ouvertures et forces de contact, de dimension supérieure à celle des chargements : on voit que le chargement en force extérieure, défini par une seule dimension, génère différentes répartitions des efforts de contact et des ouvertures

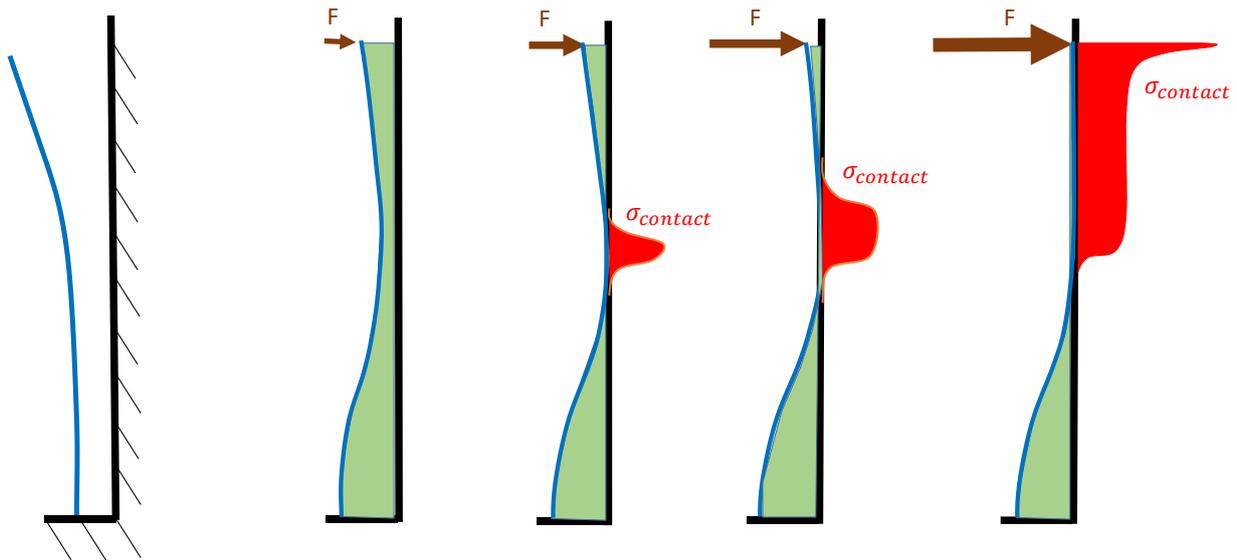


Figure 50 : Système de poutre élastique à 1 degré de liberté entrant en contact avec un mur de réaction, induisant plusieurs modes d'ouverture (en vert), d'abord sans contrainte de contact, puis avec.

### 6.1.3 Approche TFA

(Oskey and Fish, 2007) adaptent la méthode TFA pour traiter un problème d'homogénéisation avec contact entre matrice et fibres. Ils considèrent l'ouverture arbitrairement homogène d'une petite zone de contact élémentaire comme une transformation, au même titre que la plasticité dans les différentes phases d'un VER (cf. Figure 51). Cette ouverture ou fermeture d'un contact induit localement une variation élémentaire du champ de déplacements et du champ de contraintes que l'on caractérise à l'aide d'un calcul élastique préalable. Chaque zone de contact élémentaire, bien que d'épaisseur nulle, est donc considérée comme une phase indépendante, susceptible d'être le siège d'une transformation, et dotée de sa propre loi de comportement non linéaire. Le critère de contact porte sur le signe de l'ouverture, qui doit rester positif ou nul. Avec cette approche, le traitement des contacts internes suit classiquement la méthode TFA, avec une intégration du comportement par phase et par mode de déformation (homogène par phase).

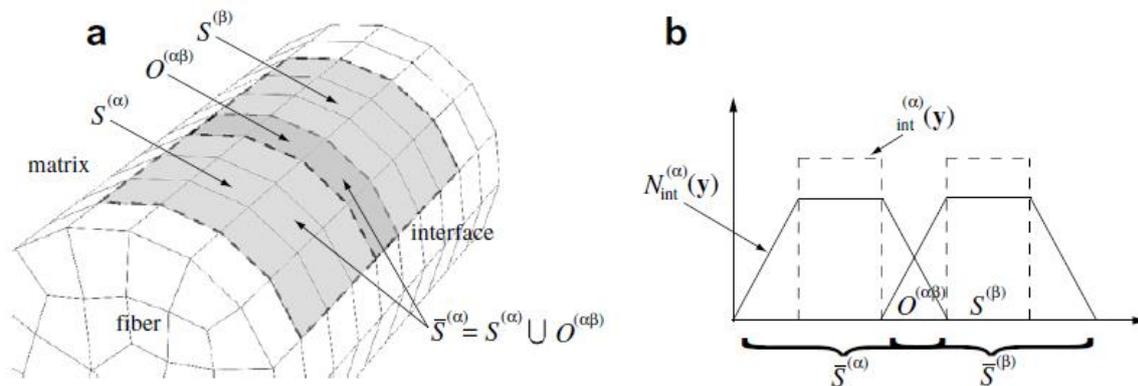


Figure 51 : méthode TFA, a - découpe des interfaces de contact et b - fonctions de forme des ouvertures.

Cette méthode s'applique mal au problème des AC qui est constitué d'un très grand nombre d'interfaces des joints de contact ( $11 \times 6 \times 265 \approx 17000$  zones de contact).

### 6.1.4 Approche par projection de Galerkin et base de modes positifs pour les forces de contact

(Balajewicz et al., 2016) proposent une méthode par projection pour réduire un modèle de contact dans le cas de problèmes quasi-statiques ou dynamiques. On considère les grandeurs suivantes :

- $\mathbf{U}$  le vecteur des déplacements nodaux dans  $R^N$ ,
- $\mathbf{F}$  le vecteur des forces extérieures,

- $\Lambda$  le vecteur des multiplicateurs de Lagrange dans  $R^p$  associé à la condition de contact sur les  $p$  nœuds d'interface,
- $B$  l'opérateur qui, appliqué au champ de déplacement, donne le vecteur des ouvertures aux  $p$  nœuds de l'interface de contact.

La solution du problème de contact quasi-statique est d'abord écrite pour le modèle complet sous la forme d'un Lagrangien à minimiser, le terme entre parenthèses étant la condition de contact à vérifier :

$$(\mathbf{U}^{sol}, \Lambda^{sol}) = \underset{\mathbf{U} \in R^n, \Lambda \in R^p}{\operatorname{argminmax}} \frac{1}{2} \mathbf{U}^t \cdot K \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^t \cdot \mathbf{F} - \Lambda^t (B \cdot \mathbf{U} - \mathbf{J} \mathbf{e}^{initial}) \quad (122)$$

Afin de réduire le modèle, deux bases de modes spatiaux sont définies à partir d'une collection de résultats nommés snapshots. La première est une base orthonormée  $[\hat{\mathbf{U}}]$  (matrice formée de  $n$  modes en vecteurs colonne) qui permet de décrire les déplacements  $\mathbf{U}$  dans tout le système. La seconde est une base  $[\hat{\Lambda}]$  de  $p$  modes scalaires définis sur l'interface de contact  $\Gamma$  uniquement, avec des valeurs positives ou nulles uniquement, dont le but est d'approcher le vecteur  $\Lambda$ . On peut identifier ce vecteur  $\Lambda$  comme étant le champ des forces normales de contact.

$$\begin{cases} \mathbf{U} \approx [\hat{\mathbf{U}}] \cdot \mathbf{u} \text{ avec } (\hat{\mathbf{U}}_i \cdot \hat{\mathbf{U}}_j)_{\Omega} = \delta_{ij} \\ \Lambda \approx [\hat{\Lambda}] \cdot \lambda \text{ avec } \hat{\Lambda}_k(x) \geq 0 \forall x \in \Gamma \end{cases} \quad (123)$$

Ainsi, il suffit que les composantes de  $\lambda$  soient positives pour garantir que le champ des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$  le soit

$$\lambda_k \geq 0 \forall k \rightarrow \Lambda(x) \geq 0 \forall x \in \Gamma \quad (124)$$

Cette base de modes positifs  $[\hat{\Lambda}]$  est construite à l'aide d'un algorithme NMF (Non negative Matrix Factorisation) appliqué aux snapshots de multiplicateurs de Lagrange. Les algorithmes NMF ou PMF (Positive Matrix Factorisation) sont assez récents et en plein essor. (Berry et al., 2006) en dresse un historique synthétique et l'on peut citer (Lee and Seung, 1999) comme autre exemple des nombreuses applications de telles méthodes pour de la classification à l'aide de réseaux de neurones, qui ont un fonctionnement uniquement additif. L'un des algorithmes les plus courants est celui des moindres carrés alternés (Paatero, 1997), reporté en [annexe 1](#).

En remplaçant (123) dans (122), on exprime la solution du problème dans l'espace réduit :

$$(\mathbf{u}^{sol}, \lambda^{sol}) = \underset{\mathbf{u} \in R^n, \lambda \in R^p}{\operatorname{argminmax}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \cdot \bar{k} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{f} - \lambda^t \cdot (\bar{b} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}^{initial}) \quad (125)$$

Avec les grandeurs suivantes, obtenues grâce aux bases de modes normés  $[\hat{\mathbf{U}}]$  et  $[\hat{\Lambda}]$  :

$$\begin{cases} \bar{k} = [\hat{\mathbf{U}}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}] \\ \bar{b} = [\hat{\Lambda}]^t \cdot B \cdot [\hat{\mathbf{U}}] \\ \mathbf{f} = [\hat{\mathbf{U}}]^t \cdot \mathbf{F} \\ \mathbf{j}^{initial} = [\hat{\Lambda}]^t \cdot \mathbf{J} \mathbf{e}^{initial} \end{cases} \quad (126)$$

Outre sa simplicité, cette méthode présente l'avantage d'utiliser des modes hétérogènes par phase contrairement à la TFA. Ainsi, pour une même précision recherchée, le nombre de modes de contact peut être plus faible grâce à l'approche NMF.

Cependant, la base NMF  $[\hat{\Lambda}]$  n'étant pas unique, l'auteur en essaie plusieurs et retient la mieux adaptée au test des ouvertures, dont la base réduite est définie par le produit  $B \cdot [\hat{\mathbf{U}}]$ .

## 6.2 BASE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE ET CONDITIONS REDUITE DE CONTACT

Nous allons utiliser l'approche développée au §6.1.4 pour réduire le modèle de contact, à l'aide d'une base de modes positifs de multiplicateurs de Lagrange. Celle-ci sera obtenue par un algorithme NMF de type ALS (cf. [annexe1](#)), appliqué aux snapshots de multiplicateurs de Lagrange, eux-mêmes issus de calculs réalisés avec le modèle détaillé. Les modes  $\widehat{\Lambda}_k$  obtenus permettent alors de réduire l'écriture du champ de multiplicateurs  $\Lambda$  grâce à l'expression ( 127 )

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda \approx \sum_{k=1}^K \lambda_k \widehat{\Lambda}_k \\ \widehat{\Lambda}_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \forall k \in [1, N_k] \end{array} \right. \quad (127)$$

Si l'on note  $[\widehat{\Lambda}]$  la base des  $N_k$  modes  $\widehat{\Lambda}_k$  rangés en colonnes, on obtient l'écriture compacte :

$$\Lambda \approx [\widehat{\Lambda}] \cdot \lambda \quad (128)$$

En suivant l'exemple de (Balajewicz et al., 2016), on propose de reformuler les conditions de contact de Signorini à l'aide des modes positifs  $\widehat{\Lambda}_k$  :

- Impénétrabilité :

$$\widehat{\Lambda}_k^t (B \cdot \mathbf{U} - \mathbf{Jeu}^{initial}) \geq 0, \quad \forall k \in [1, N_k] \quad (129)$$

- Intensilité :

$$\lambda_k \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \forall k \in [1, N_k] \quad (130)$$

- Complémentarité :

$$\lambda_k [\widehat{\Lambda}_k^t (B \cdot \mathbf{U} - \mathbf{Jeu}^{initial})] = 0, \quad \forall k \in [1, N_k] \quad (131)$$

Ces conditions font encore intervenir le champ des déplacements  $\mathbf{U}$ , de grande dimension. Dans les paragraphes suivants,  $\mathbf{U}$  sera décomposé de différentes manières en fonction de la méthode de modélisation du problème de contact choisie.

## 6.3 APPROCHE NODALE PRIMALE PAR TRANSFORMATION

### 6.3.1 Description des déplacements

Afin de faciliter le traitement du problème de contact et en vue de le réduire, nous reprenons le formalisme de la NTFA [1], qui décrit chaque transformation à l'aide d'une base de modes spatiaux. L'ouverture ou la fermeture de l'interface de contact est considérée comme une transformation et se décompose selon une base  $[\widehat{\mathbf{U}}^{ouv}]$  de  $M$  modes qui restent à préciser. On décrit de la même façon les autres transformations, notamment les transformations élastiques induites dans la structure par un chargement sur la frontière extérieure  $\Gamma^{ext}$  avec la base  $[\widehat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}]$ . On omet ici les autres transformations (fluage, glissement) afin d'alléger les notations. Ces deux bases sont construites pour être orthogonales entre elles, c'est-à-dire que les modes de  $[\widehat{\mathbf{U}}^{ouv}]$  ne travaillent pas dans le champ des forces extérieures et que les modes de  $[\widehat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}]$  ne travaillent pas dans le champ des efforts de contact  $\Gamma$  (le jeu reste nul). Par superposition, on peut donc écrire les déplacements du système à l'aide des équations ( 132 )( 133 )( 134 ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{ext\_fermé}(x) \approx \sum_{i=1}^J \alpha_i^{ext\_fermé} \widehat{\mathbf{U}}_i^{ext\_fermé}(x), \quad \forall x \in \Omega \\ B \cdot \widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma, \quad \forall j \in [1, J] \end{array} \right. \quad (132)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U}^{ouv}(x) \approx \sum_{m=1}^M \alpha_m^{ouv} \widehat{\mathbf{U}}_m^{ouv}(x), \quad \forall x \in \Omega \\ \widehat{\mathbf{U}}_m^{ouv}(x) = 0 \quad \forall x \in \Gamma^{ext}, \quad \forall m \in [1, M] \end{array} \right. \quad (133)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^{ext\_fermé} + \mathbf{U}^{ouv} \quad (134)$$

La Figure 52 illustre cette décomposition des déplacements en modes de déplacement à ouverture nulle et modes d'ouverture à déplacement moyen nul.

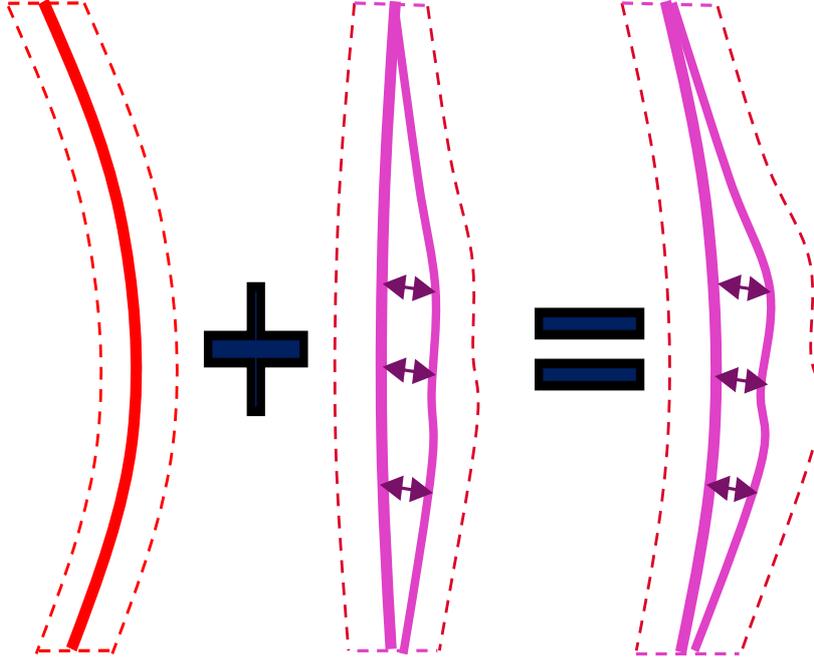


Figure 52 : décomposition du champ de déplacement en une somme d'un déplacement moyen à jeu nul (rouge) et d'un mode d'ouverture des contacts sans déplacement moyen.

### 6.3.2 Construction des modes d'ouverture

On suppose que l'on a identifié  $N_k$  modes de forces de contact  $\hat{\Lambda}_k$ . On note par  $\langle \mathbf{A}, B\mathbf{U} \rangle$  le travail développé par les efforts de contact  $\mathbf{A}$  dans le champ de déplacement  $\mathbf{U}$ . Le travail des efforts intérieurs associé au champ de déplacement  $\mathbf{U}$  dans le champ de déplacement virtuel  $\mathbf{V}$  est noté  $\langle K, \mathbf{U}, \mathbf{V} \rangle$ . Dans un premier temps, considérons le choix le plus large et précis possible qui consiste à prendre comme ensemble des modes d'ouvertures l'espace  $\mathbb{V}$  de tous les champs de déplacement admissibles  $\mathbf{V}$  nuls sur la frontière extérieure, c'est-à-dire tous les modes d'ouverture que l'on peut construire avec le modèle complet sans que les efforts extérieurs ne travaillent. L'espace  $\mathbb{V}$  est donc ici l'espace des champs de déplacements de moyenne nulle par grille. En utilisant cette caractéristique, le principe des travaux virtuels nous donne l'équation d'équilibre en mode d'ouverture pour le modèle de contact réduit, en notant  $B$  l'opérateur qui donne le saut normal d'un champ de déplacement au passage de l'interface

$$\langle K, \left( \sum_{i=1}^I \alpha_j^{ext\_fermé} \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé} + \mathbf{U}^{ouv} \right), \mathbf{V} \rangle = \langle \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\Lambda}_k, B\mathbf{V} \rangle, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{V}, \mathbf{U}^{ouv} \in \mathbb{V} \quad (135)$$

ou encore

$$\langle K, \mathbf{U}^{ouv}, \mathbf{V} \rangle = - \sum_{j=1}^J \alpha_j^{ext\_fermé} \langle K, \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}, \mathbf{V} \rangle + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \langle \hat{\Lambda}_k, B\mathbf{V} \rangle, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{V}, \mathbf{U}^{ouv} \in \mathbb{V} \quad (136)$$

Pour simplifier cette expression en fonction des coefficients  $\lambda_k$  et  $\alpha_j^{ext\_fermé}$ , on introduit, d'une part, les  $N_k$  modes d'ouverture liés aux forces de contact définis par :

$$\langle K, \mathbf{U}_k^{ouv}, \mathbf{V} \rangle = \langle \hat{\Lambda}_k, B\mathbf{V} \rangle, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{V}, \mathbf{U}_k^{ouv} \in \mathbb{V} \quad (137)$$

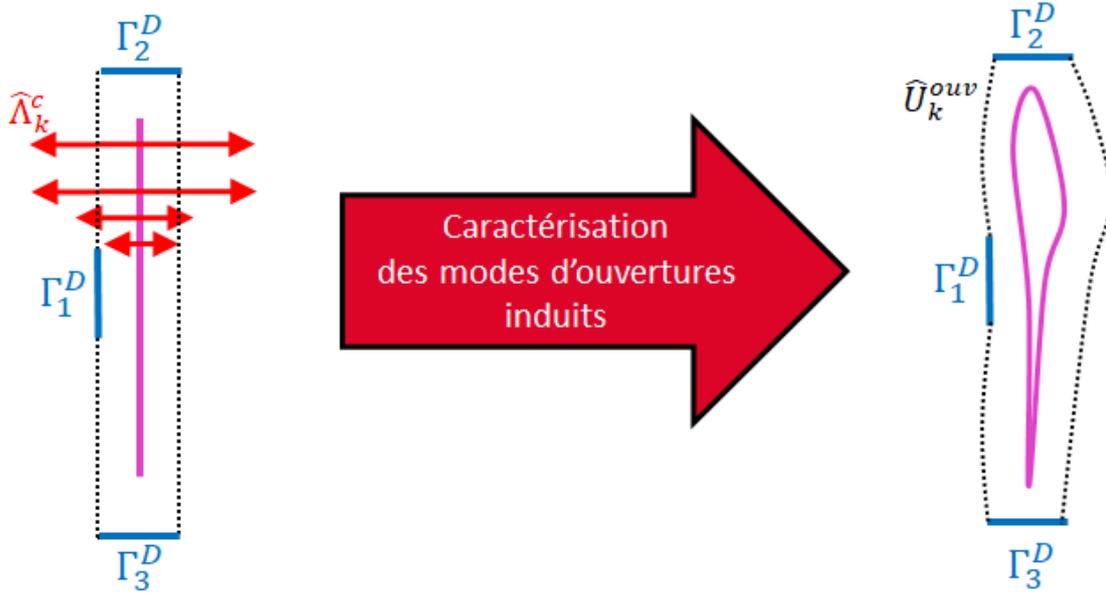


Figure 53 : construction du mode d'ouverture de l'interface  $U_k^{ouv}$  associé au mode de multiplicateurs de Lagrange  $\hat{\Lambda}_k^c$  appliqué comme condition de Neumann et sous conditions de déplacement nul aux frontières  $\Gamma_1^D, \Gamma_2^D, \Gamma_3^D$ .

Et, d'autre part, les  $J$  modes d'ouverture "globaux" définis par :

$$\langle K \cdot \mathbf{U}_j^{ouv}, \mathbf{V} \rangle = -\langle K \cdot \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}, \mathbf{V} \rangle, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{V}, \mathbf{U}_j^{ouv} \in \mathbb{V} \quad (138)$$

La particularité de ces derniers modes  $\mathbf{U}_j^{ouv}$  est qu'ils sont générés en appliquant des forces de traction ou de compression aux interfaces de contact présentes dans le calcul de caractérisation à jeu fermé des modes  $\mathbf{U}_j^{ext}$ , contrairement au cas des modes  $\mathbf{U}_k^{ouv}$  de la Figure 53. Ainsi, les modes  $\mathbf{U}_j^{ouv}$  peuvent éventuellement présenter de la pénétration, ce qui n'est pas gênant pour la suite.

Enfin, par superposition :

$$\mathbf{U}^{ouv} = \sum_{j=1}^J \alpha_j^{ext\_fermé} \mathbf{U}_j^{ouv} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \mathbf{U}_k^{ouv} \quad (139)$$

Compte tenu des bases de modes choisies, on peut se restreindre exactement à  $J + N_k$  modes d'ouverture dans l'écriture du problème réduit :

$$\mathbb{V}^{ouv} = \left\{ \mathbf{v}, \mathbf{v} = \sum_{j=1}^J \alpha_j^{ext\_fermé} \mathbf{U}_j^{ouv} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \mathbf{U}_k^{ouv} \right\}, \quad (140)$$

sans introduire aucune erreur supplémentaire car on sait, d'après ce qui précède, que le mode d'ouverture solution dans l'espace complet est nécessairement combinaison linéaire de ces modes.

En écrivant l'espace  $\mathbb{V}$  comme  $(\mathbb{V} + \mathbb{W}^j) - \mathbb{W}^j$ , où  $\mathbb{W}^j$  est l'espace des déplacements à ouverture nulle et dont seul le  $j^{\text{ème}}$  mode frontière extérieure est autorisé, c'est-à-dire l'espace dans lequel évolue  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}$ , on fait apparaître que chaque mode  $\mathbf{U}_j^{ouv}$  peut également s'écrire comme l'écart entre la solution élastique à jeu fermé  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}$  et la solution élastique à contact inactif  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$ , pour laquelle les surfaces de contact sont libres de s'interpénétrer lorsqu'on sollicite unitairement la frontière extérieure  $j$  :

$$\mathbf{U}_j^{ouv} = \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé} - \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \quad (141)$$

La Figure 54 illustre ce raisonnement. Il est ensuite possible d'essayer de simplifier cette base en supprimant tout ou partie des modes de l'espace d'ouverture  $\mathbb{V}^{ouv}$  car il peut y avoir des redondances entre les 2 familles de modes d'ouverture.

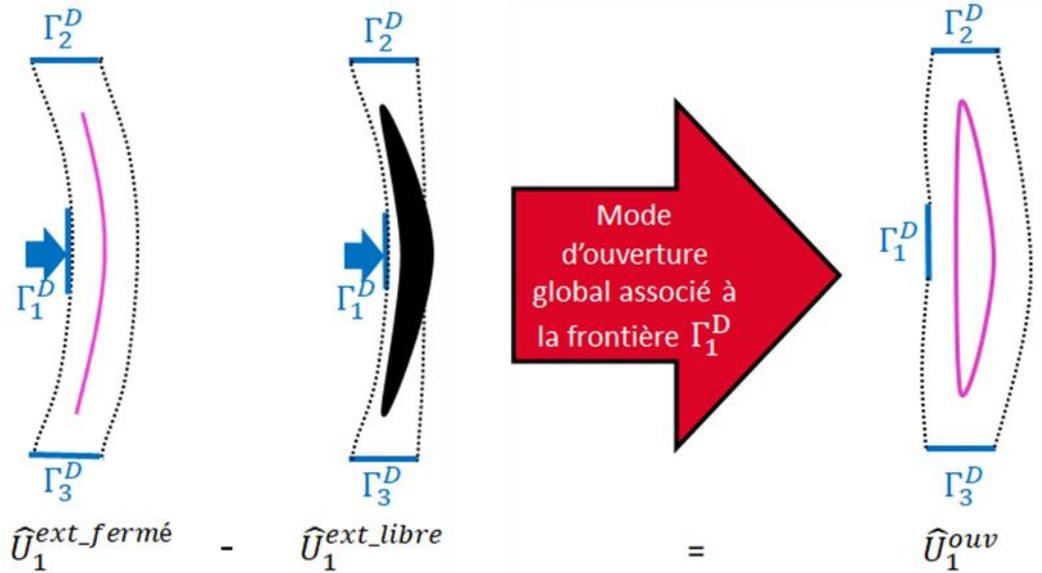


Figure 54 : mode d'ouverture associé à la transformation de la frontière  $\Gamma_1^D$ , obtenu par soustraction de deux champs de déplacements, respectivement avec condition d'ouverture nulle et sans condition de contact (interpénétration).

### 6.3.3 Lagrangien du problème de contact

Nous adoptons la méthode Balajewicz décrite au 6.1.4. Le lagrangien en base réduite s'écrit :

$$(\mathbf{u}^{sol}, \lambda^{sol}) = \underset{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^p}{\operatorname{argminmax}} \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \cdot k \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u}^t \cdot f - \lambda^t \cdot (b \cdot \mathbf{u} - \mathbf{j}^{initial}) \quad (142)$$

avec les grandeurs suivantes, obtenues avec les bases de modes normés  $[\hat{\mathbf{U}}]$  et  $[\hat{\Lambda}]$  :

$$\begin{cases} k = [\hat{\mathbf{U}}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}] \\ b = [\hat{\Lambda}]^t \cdot B \cdot [\hat{\mathbf{U}}] \\ f = [\hat{\mathbf{U}}]^t \cdot F \\ \mathbf{j}^{initial} = [\hat{\Lambda}]^t \cdot \mathbf{Jeu}^{initial} \end{cases} \quad (143)$$

Nous reformulons le lagrangien (142) en introduisant la partition du champ de déplacement de type NTFA donnée par (132) (133) (134) et les modes positifs de  $[\hat{\Lambda}]$  afin de faire apparaître la formulation de ce problème de contact en base réduite :

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\alpha}^{sol}, \lambda^{sol}) = & \min_{\boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} \in \mathbb{R}^l, \boldsymbol{\alpha}^{ouv} \in \mathbb{R}^j, \lambda \in \mathbb{R}_+^k} \max \frac{1}{2} ([\hat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} \\ & + [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv})^t \cdot K \cdot ([\hat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} + [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv}) \\ & - ([\hat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} + [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv})^t \cdot \bar{F} \\ & - ([\hat{\Lambda}] \cdot \lambda)^t \cdot (B \cdot ([\hat{\mathbf{U}}^{ext\_fermé}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} + [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv}) - \mathbf{Jeu}^{initial}) \end{aligned} \quad (144)$$

La solution de ce problème de point selle obéit aux conditions de premier ordre de Karush - Kuhn - Tucker (Kuhn and Tucker, 1951), obtenues par différentiation du Lagrangien par rapport à  $\boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé}$  et  $\boldsymbol{\alpha}^{ouv}$  :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{fermé}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{fermé}] & [\hat{\mathbf{U}}^{fermé}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & 0 \\ [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{fermé}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & -[\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot B^t \cdot [\hat{\Lambda}] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}^{ext\_fermé} \\ \boldsymbol{\alpha}^{ouv} \\ \lambda \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{fermé}]^t \cdot F^{ext} \\ [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot F^{ext} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (145)$$

et les conditions de relâchement :

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_k \cdot ([\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv} - \mathbf{Jeu}) \geq 0, \forall k = 1, N_k \\ \lambda_k \geq 0, \forall k = 1, N_k \\ \lambda_k \hat{\Lambda}_k \cdot ([\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ouv} - \mathbf{Jeu}) = 0, \forall k = 1, N_k \end{cases} \quad (146)$$

Ces dernières traduisent une pondération des conditions de contact de l'espace complet par les  $k$  modes positifs de multiplicateurs de Lagrange précédemment identifiés. La base des efforts de contact  $[\hat{\Lambda}]$  n'est pas unique. Cependant, comme nous avons défini en partie la base  $[\hat{U}^{ouv}]$  ( 140 ) à partir de la base des efforts de contact  $[\hat{\Lambda}]$ , ces deux bases sont toujours en adéquation vis-à-vis des conditions de Karush - Kuhn - Tucker, c'est-à-dire que les modes de  $[\hat{\Lambda}]$  testent bien les modes de  $[\hat{U}^{ouv}]$ . Ceci permet d'économiser le processus itératif d'optimisation de la base  $[\hat{\Lambda}]$  face à l'apparition des ouvertures au cours du calcul avec le modèle réduit, tel que pratiqué par (Balajewicz et al., 2016).

### 6.3.4 Résolution par la méthode des statuts

Une méthode pour résoudre ce problème de contact est la méthode itérative des statuts. Elle consiste à commencer par résoudre le système linéaire ( 145 ) en supposant que les  $N_k$  conditions de ( 146 ) sont inactives. Dès que l'une d'entre elles est violée, on ajoute cette condition sous forme d'égalité dans le système linéaire ( 147 ). Aux itérations suivantes, on vérifie alors le signe de chaque multiplicateur  $\lambda_k$ . Dès que l'un d'eux devient négatif, la condition sur laquelle il opère est désactivée, c'est-à-dire qu'elle est retirée du système à résoudre puisqu'elle traduit en moyenne un état de traction de l'interface au travers du mode  $\hat{\Lambda}_k$ . On relâche donc la condition pour que l'interface puisse s'ouvrir.

$$\begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] & 0 \\ [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] & -[\hat{U}^{ouv}]^t . B^t . [\hat{\Lambda}] \\ 0 & -[\hat{\Lambda}]^t . B . [\hat{U}^{ouv}] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext\_fermé} \\ \alpha^{ouv} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . F^{ext} \\ [\hat{U}^{ouv}]^t . F^{ext} \\ -[\hat{\Lambda}]^t . Jeu^{initial} \end{bmatrix} \quad (147)$$

Les termes en rouge dans le système ci-dessus traduisent donc les conditions réduites de contact qui sont actives à l'itération courante de l'algorithme et le terme bleu donne la contribution de l'effort de contact aux forces intérieures. L'algorithme prend fin une fois les inconnues  $(\alpha^{ouv}, \lambda)$  stabilisées.

### 6.3.5 Résolution par pénalisation

On peut également opter pour une approche par pénalisation, plus simple à mettre en œuvre puisque le système à résoudre est alors de taille fixe et comprend les  $N_k$  conditions de contact réduites. Le principe est d'augmenter arbitrairement la raideur d'un mode de contact lorsqu'il y a interpénétration (paramètre  $\varepsilon$ ). C'est l'objet de la notation  $\{[\hat{\Lambda}]^t . B . [\hat{U}^{ouv}]\}_-$  dans le système ci-dessous.

$$\begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] & 0 \\ [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] & -[\hat{U}^{ouv}]^t . B^t . [\hat{\Lambda}] \\ 0 & -\{[\hat{\Lambda}]^t . B . [\hat{U}^{ouv}]\}_- & -\varepsilon \mathbb{I}_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext\_fermé} \\ \alpha^{ouv} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . F^{ext} \\ [\hat{U}^{ouv}]^t . F^{ext} \\ -[\hat{\Lambda}]^t . Jeu^{initial} \end{bmatrix} \quad (148)$$

En éliminant  $\lambda$ , on aboutit au système pénalisé à résoudre.

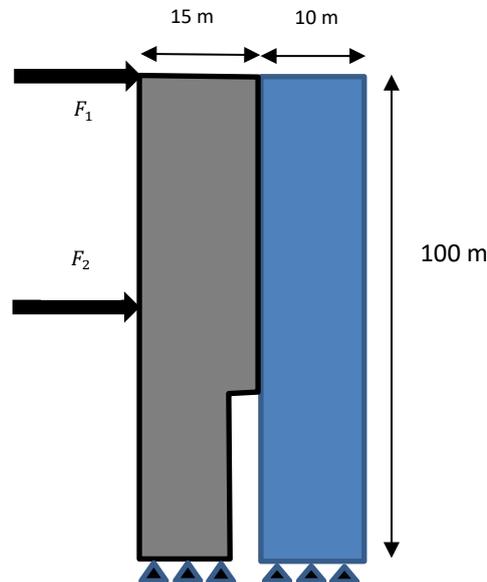
$$\begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] \\ [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ext\_fermé}] & [\hat{U}^{ouv}]^t . K . [\hat{U}^{ouv}] + \frac{1}{\varepsilon} [\hat{U}^{ouv}]^t . B^t . [\hat{\Lambda}] \{[\hat{\Lambda}]^t . B . [\hat{U}^{ouv}]\}_- \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext\_fermé} \\ \alpha^{ouv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext\_fermé}]^t . F^{ext} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (149)$$

Ce faisant, on travaille avec une matrice de taille fixe, dont une partie des termes évolue entre deux valeurs connues en fonction de l'état actif ou inactif du contact.

### 6.3.6 Validation de l'approche nodale primale sur un cas test de contact en 2D

#### a) Cas d'étude

Afin de vérifier la formulation établie ci-dessus, on considère un problème constitué par 2 structures verticales (Figure 55), initialement en contact. Leurs bases sont encastrées et la structure de gauche est soumise à deux forces horizontales,  $F_1$  et  $F_2$ , situées respectivement en haut et à mi-hauteur.



Le comportement est supposé élastique linéaire et le modèle éléments finis de référence est construit suivant l'hypothèse des contraintes planes. Un modèle de contact unilatéral est appliqué entre les deux structures.

Figure 55 : géométrie et conditions aux limites du problème de contact 2D.

Plusieurs réalisations sont effectuées avec ce modèle de référence en faisant varier les valeurs de  $F_1$  et  $F_2$  afin de constituer une base de snapshots.

#### b) Modes extérieurs à ouverture nulle

La Figure 56 permet de visualiser les 2 modes  $U_1^{ext}$  et  $U_2^{ext}$  générés par une condition unitaire de Dirichlet sur la frontière extérieure, sous condition d'ouverture nulle du contact en tout point de l'interface. Cette dernière condition est imposée à l'aide de relations cinématiques.

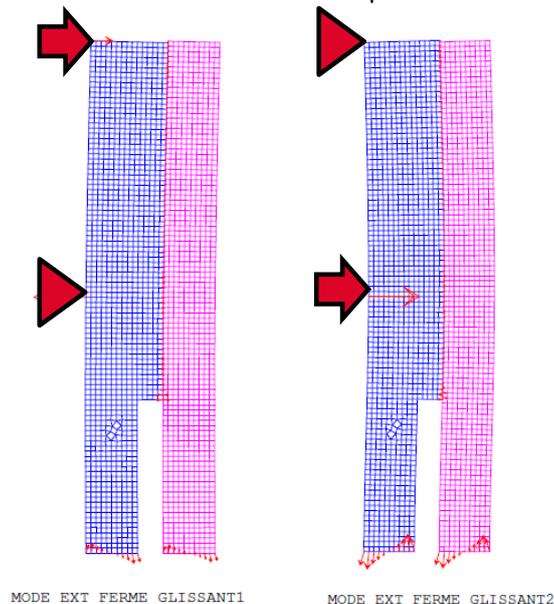


Figure 56 : les 2 modes moyens  $U_j^{ext}$  à ouverture normale nulle. Le glissement est autorisé.

## c) Modes positifs de force contact

On applique sur les snapshots de force de contact l'algorithme NMF décrit en annexe 1, en paramétrant 150 initialisations, suivies à chaque fois de 15 itérations de projection et redressement. La meilleure combinaison de 5 modes positifs que l'on obtient est reportée en Figure 57.

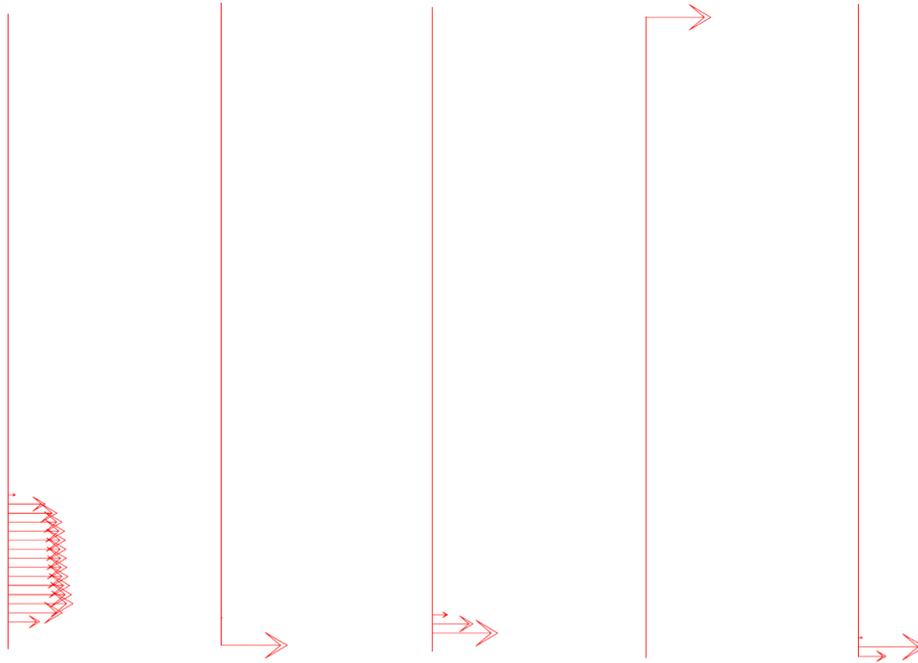


Figure 57 : les 5 modes positifs de forces de contact le long de l'interface, obtenus par un algorithme NMF.

## d) Modes d'ouverture

La Figure 58 présente les 2 modes d'ouverture  $\mathbf{U}_j^{ouv}$  très différenciés à gauche et les 5 modes  $\mathbf{U}_k^{ouv}$  à droite. Ces derniers présentent des déformées très proches les unes des autres qui permettent de compléter précisément l'effet non-linéaire du contact.

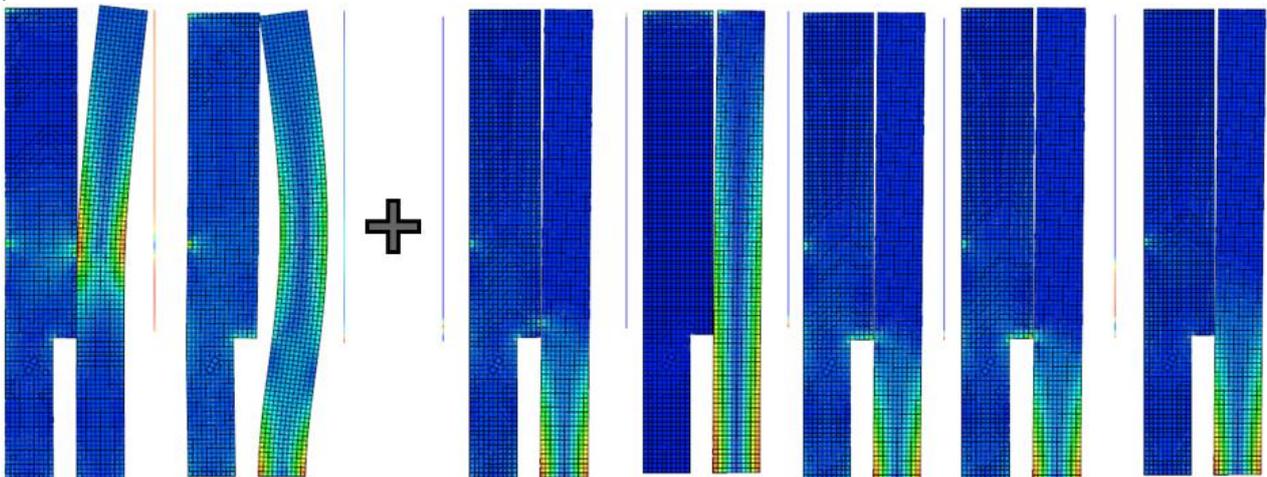


Figure 58 : illustration des deux familles  $\mathbf{U}_j^{ouv}$  et  $\mathbf{U}_k^{ouv}$  qui constituent les modes d'ouverture et les isovaleurs des contraintes associées, cf. §6.3.2. La première famille est obtenue à l'aide des efforts de liaison de l'interface adhérent lors de l'application d'une condition de Dirichlet sur la frontière extérieure et la seconde en appliquant l'un des modes de force de contact obtenu par NMF de part et d'autre de l'interface.

## e) Corrélations du ROM avec le modèle de référence

11 calculs ont été réalisés avec le ROM, puis comparés aux résultats du modèle de référence. On ne présente que les corrélations des calculs 1 et 9, tout à fait représentatifs des autres comparaisons. Les conditions aux limites et chargements du calcul 1 imposent à la structure de gauche de se courber et d'entrer en contact avec celle de droite dans la partie basse de l'interface. On superpose sur la Figure 59 les déplacements du modèle de référence, en bleu avec ceux du ROM, en rouge, ainsi que les efforts de réaction à la base de la zone de contact.

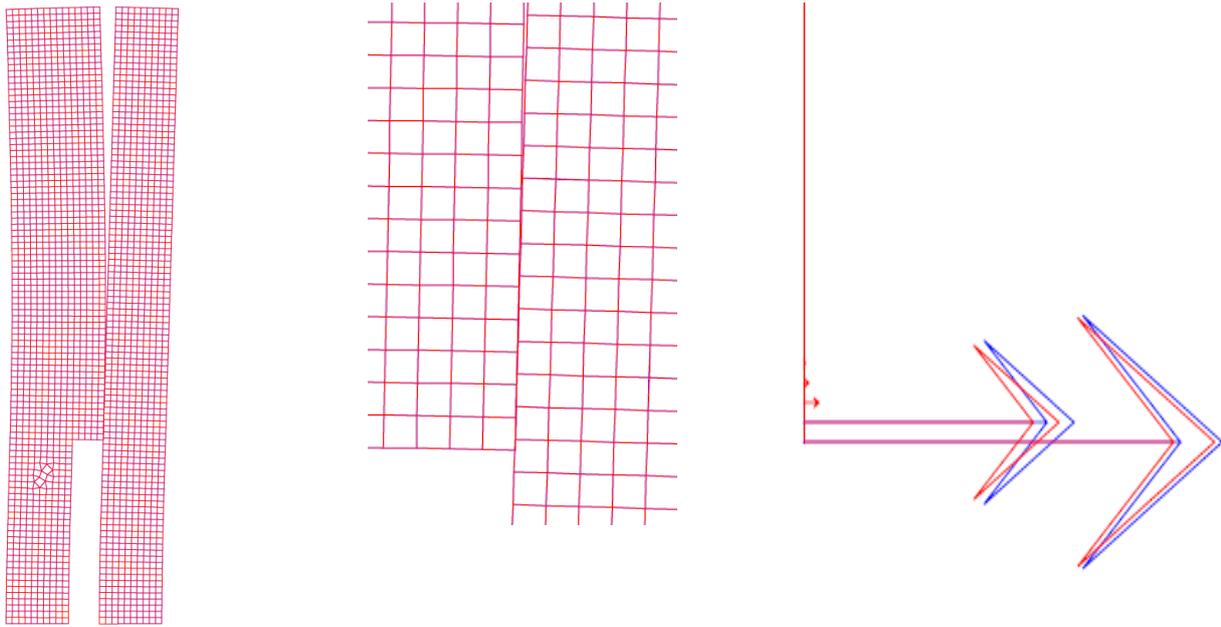


Figure 59 : calcul 1 - déformées du ROM (rouge) et du modèle de référence(bleu) : elles se superposent presque parfaitement - comparaison des vecteurs de réactions de contact en bas de l'interface (à droite).

On constate que les déplacements d'ensemble sont très bien reproduits, que l'interpénétration est négligeable et que les efforts de contact nodaux présentent une légère erreur de répartition, imputable au nombre limité de modes de forces utilisés (5 modes).

Le calcul 9, quant à lui, correspond à un cas où la force  $F1$  est prépondérante, ce qui conduit à une zone de contact très concentrée en haut de l'interface, comme le montre la Figure 60.

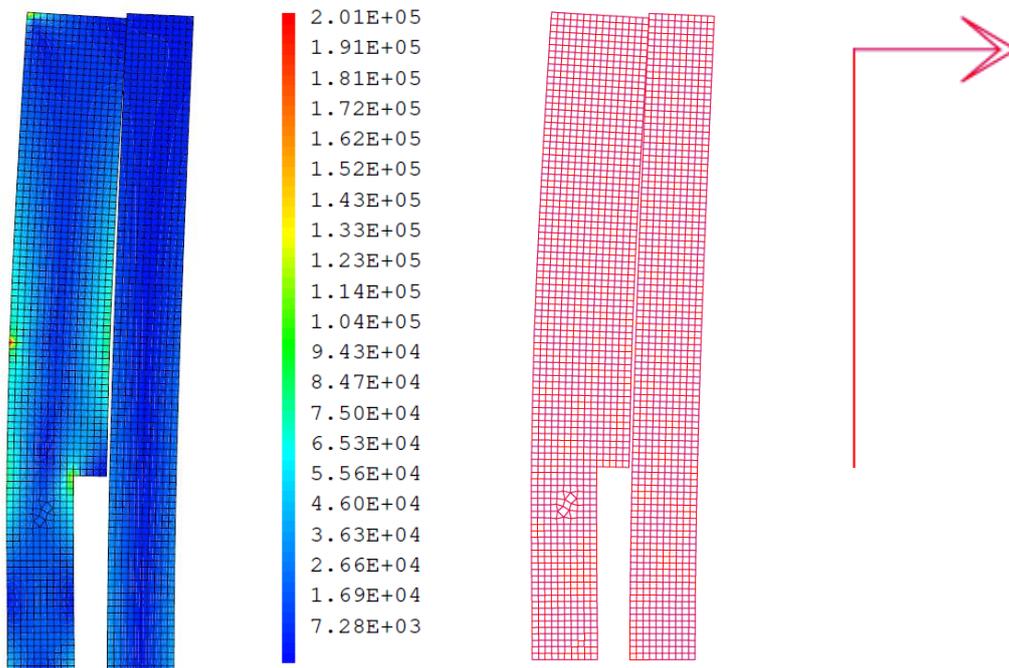


Figure 60 : calcul 9 – à gauche, recombinaison des déplacements et contraintes de Von Mises dans la structure, au milieu, superposition des déformées ROM (rouge)/référence (bleu) et, à droite, superposition exacte des efforts de réaction en haut de l'interface de contact.

Là encore, la comparaison des déplacements et des forces de contact se révèlent très satisfaisantes.

Afin de mieux mesurer l'erreur commise, on se donne deux indicateurs qui peuvent être évalués après recombinaison des solutions : la mesure de la pénétration maximale et l'erreur de complémentarité sur l'interface de contact  $\Gamma$ , définie par :

$$e^c = \iint_{\Gamma} |\Lambda(x)ouv(x)| dS \quad (150)$$

Le Tableau 10 synthétise les erreurs de pénétration et de complémentarité du modèle réduit pour deux des 11 calculs effectués, ainsi que la durée nécessaire pour effectuer la totalité des 11 calculs à la suite.

Tableau 10 : évaluation du modèle réduit de contact basé sur une approche primale et construit à l'aide d'une base de 7 modes d'ouverture (2 modes  $U_j^{ouv}$  et 5 modes  $U_k^{ouv}$ ).

Type	Nombre de fonctions test $\Lambda$	Nombre de modes ouverture	Pénétration maximale (m)	Erreur de complémentarité (J)	Durée des 11 calculs (s)	Corrélation des déplacements
Référence : avec modèle de contact	71	71	0	0	19,2	Réf.
ROM primal	5	7	0,00025	17.2	0,187	OK

L'erreur de pénétration est très faible puisqu'elle reste millimétrique alors que la taille de la structure est de 100 m et à la taille de maille est d'un mètre.

L'erreur de complémentarité est également très faible puisqu'elle est à mettre en relation avec l'énergie élastique stockée par la structure. Ainsi l'erreur de 17,2 J est à comparer à une énergie élastique de 215 000 J, soit un rapport meilleur que  $10^{-4}$ .

### 6.3.7 Exploration autour de la base des modes d'ouverture

Avec cette méthode, on a construit au §6.3.2 une base de modes d'ouverture de manière systématique, en cohérence avec les autres modes utilisés. Elle est donc apte à couvrir l'ensemble des champs d'ouverture associés aux sollicitations par les forces extérieures et par les forces de contact. Comme on l'a vu également Figure 58, les 5 modes  $U_k^{ouv}$  se ressemblent beaucoup et l'on peut vouloir comprimer la dimension de la base des modes d'ouverture afin de gagner en temps de résolution. Il semble alors naturel de s'orienter vers une base POD des jeux constatés à l'interface sur les réalisations initiales. On présente ci-dessous les valeurs singulières de cette POD. On constate que les deux premiers modes sont très majoritaires et que le troisième mode présente un poids de quelques pourcents. Ensuite, tous les autres modes ont un poids relatif inférieur au pourcent.

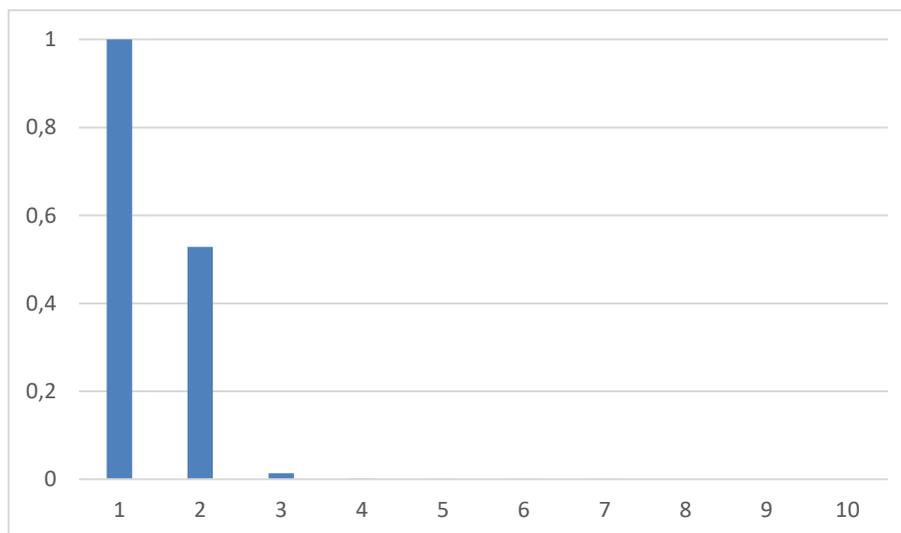


Figure 61 : POD des jeux, valeurs singulières des 10 premiers modes

Le Tableau 11 présente les résultats des corrélations des ROM obtenus pour quatre tentatives d'abaisser le nombre de modes d'ouverture et les compare à la méthode « standard » définie précédemment. Dans tous les cas, on conserve 5 modes positifs dans la base  $[\Lambda]$ , donc 5 inéquations de contact.

La première comparaison est faite pour un ROM dont la base des modes d'ouverture utilise 6 modes issus d'une POD effectuée sur les jeux de contact des snapshots. Elle présente d'aussi bons résultats que la méthode standard à 7 modes d'ouverture. En passant à 3 modes POD, les corrélations restent excellentes bien que l'erreur de complémentarité commence à augmenter. Enfin, avec 2 modes POD, les erreurs de pénétration et de complémentarité doublent. Cette méthode de compression optimale peut donc permettre d'obtenir une meilleure compression des données d'ouverture disponibles que la base standard (Figure 58). Elle permet alors de réduire le nombre de modes en conservant le contrôle de la précision (cf. Figure 61). Une POD tronquée appliquée aux ouvertures constitue alors une alternative intéressante.

La dernière ligne du Tableau 11 rend compte de l'erreur commise si l'on néglige l'apport des non-linéarités de contact (les modes  $U_k^{ouv}$  sont retirés de la base). Les modes d'ouverture sont alors en nombre insuffisants pour bien représenter la variété des ouvertures possibles. De plus, à nombre de modes fixé, cette base n'est pas la meilleure vis-à-vis de la projection des snapshots de jeu puisqu'elle n'est pas obtenue par POD. Il en résulte des erreurs importantes en terme de pénétration, de complémentarité et de déformée générale. Deux exemples de corrélations des déplacements sont donnés sur la Figure 62 pour les calculs 1 et 10 avec cette base incomplète.

Tableau 11 : évaluation du modèle réduit de contact avec différentes bases d'ouverture en conservant 5 modes positifs pour les forces de contact.

Type	Fonctions test $\Lambda$	Modes ouverture	Pénétration maximale (m)	Erreur de complémentarité (J)	Durée de 11 calculs (ms)	Corrélation déplacement
<b>Référence :</b> avec modèle de contact	71	71	0	0	19187	Réf.
ROM primal (standard)	5	<b>7</b> (5 $U_k^{ouv}$ & 2 $U_j^{ouv}$ )	0,00025	17,2	187	OK
ROM primal à base POD	5	<b>6</b> POD(jeu)	0,00024	16,4	171	OK
ROM primal à base POD	5	<b>3</b> POD(jeu)	0,00025	25,7	140	OK
ROM primal à base POD	5	<b>2</b> POD(jeu)	0,00049	51	93	OK
ROM primal à base incomplète	5	<b>2</b> ( $U_j^{ouv}$ )	<b>0,33</b>	<b>8955</b>	78	<b>NOK</b>

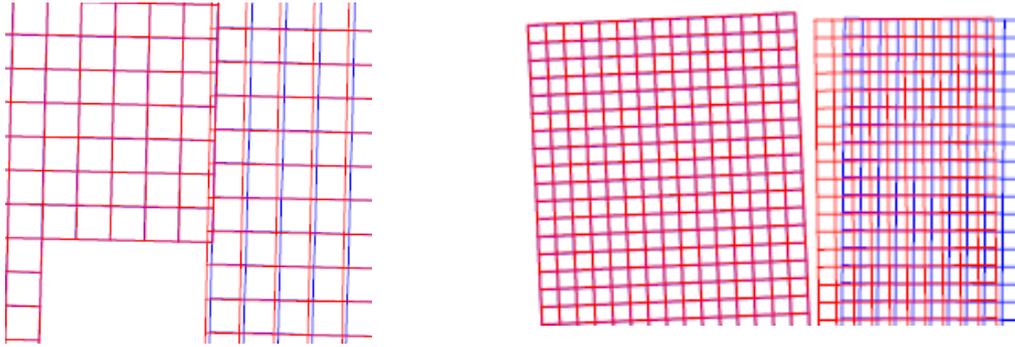


Figure 62 : corrélation des déplacements des calculs 1 et 10 effectués avec une base de modes d'ouverture insuffisante (uniquement 2 modes  $U_j^{uvw}$  testés par 5 modes positifs  $\Lambda_k$ ).

Enfin, en ce qui concerne les durées de calcul pour ce cas-test, le ROM permet de les réduire d'un facteur 100 environ par rapport au modèle de référence.

### 6.3.8 Bilan de la méthode primale

On a défini une approche *a posteriori* de réduction du modèle de contact qui emprunte à (Balajewicz et al., 2016) l'idée d'utiliser des modes positifs, obtenus par une décomposition NMF appliquée aux multiplicateurs de Lagrange du contact, afin de tester de manière pondérée le champ des jeux à l'interface. On a également défini de manière systématique une base de modes d'ouverture basée, d'une part, sur la base orthogonale des déplacements moyennés aux frontières (base des déplacements moyens des grilles pour l'AC) et, d'autre part, sur la base de modes positifs des forces de contact. Cette construction est complètement compatible avec l'approche NTFA utilisée dans la réduction du modèle de fluage. Les résultats obtenus sur un cas test 2D sont excellents en terme de pénétrations, complémentarité et déplacements. Le gain en temps de résolution atteint dans ce cas deux ordre de grandeur et la méthode se généralise sans difficulté au 3D.

Enfin on a montré qu'il est possible de gagner encore un peu sur le temps de résolution, en opérant une compression de la base des modes d'ouverture à l'aide d'une POD. La troncature de cette base POD va néanmoins influencer directement sur la qualité de la solution du ROM. Il convient donc de fixer la précision de cette POD, tout comme la précision des deux autres bases, en accord avec la précision finale attendue.

## 6.4 APPROCHE NODALE MIXTE POUR LA RÉDUCTION DU MODÈLE DE CONTACT

### 6.4.1 Principe général et forme de la solution

La méthode de réduction du modèle de contact primal présentée au §6.3 présente une certaine complexité dans la construction des modes d'ouverture. On souhaite simplifier encore la construction du modèle réduit de contact en s'écartant un peu de la logique NTFA initiale, tout en restant compatible avec le ROM de fluage établi au §5.3. Pour cela, on vise à mettre en place une approche mixte, c'est à dire dans laquelle le ROM utiliserait simultanément des degrés de libertés de déplacements et de forces, ces derniers permettant de décrire les forces de répulsion à l'interface de contact. Dans cette méthode, on utilise une base de modes d'ouverture uniquement générée par les modes de forces de contact, donc plus compacte. D'autre part, avec cette méthode, les modes moyens sont, cette fois, déterminés sous sollicitation externe, en considérant l'interface de contact initialement libre d'effort et non pas fermée. La mise en œuvre s'en trouve simplifiée et la dimension du modèle réduite.

Pour le montrer, on applique d'abord le Principe des Puissances Virtuelles dans l'espace de tous déplacements nodaux admissibles en supposant que les forces extérieures  $\mathbf{F}^{ext}$  sur la frontière  $\Gamma^{ext}$  et les forces nodales de contact  $\mathbf{\Lambda}$  à l'interface de contact sont toutes connues. Pour rappel,  $B$  est l'opérateur qui donne le saut de déplacement normal à l'interface  $\Gamma^C$ .

$$\langle K. \mathbf{U}, \mathbf{U}' \rangle = \langle \mathbf{F}^{ext}, \mathbf{U}' \rangle + \langle \mathbf{\Lambda}, B. \mathbf{U}' \rangle \forall \mathbf{U}' \in CA \quad (151)$$

L'espace des solutions  $\mathbb{U}^{sol}$  de (151) s'exprime donc comme la somme de deux espaces  $\mathbb{U}^{int}$  et  $\mathbb{U}^{ext}$ , orthogonaux par rapport à la raideur  $K$ .

$$\begin{cases} \mathbb{U}^{sol} = \mathbb{U}^{int} + \mathbb{U}^{ext} \\ \mathbb{U}^{int} = \{ \mathbf{U} \text{ CA tq } \mathbf{U}(x) = 0 \forall x \in \Gamma^{ext} \} \\ \mathbb{U}^{ext} = \{ \mathbf{U} \text{ CA tq } \langle \mathbf{K}\mathbf{U}, \mathbf{U}' \rangle = 0 \forall \mathbf{U}' \in \mathbb{U}^{int} \} \end{cases} \quad (152)$$

Afin de réduire ce problème de contact, on construit une base de  $N_k$  modes positifs  $\widehat{\Lambda}_k$  permettant de projeter les forces de contact  $\Lambda$ .

$$\begin{cases} \Lambda \approx \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \widehat{\Lambda}_k \\ \Lambda_k(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Gamma^c, \quad \forall k \in [1, N_k] \end{cases} \quad (153)$$

On suppose également avoir construit une base orthogonale  $[\widehat{\mathbf{U}}^{fr}]$  de déplacements des nœuds frontière sur laquelle décomposer les efforts extérieurs  $\mathbf{F}^{ext}$  (cf. §5.1.1 par exemple).

$$\begin{cases} \mathbf{F}^{ext} \approx \sum_{j=1}^J f_j \widehat{\mathbf{U}}_j^{fr} \\ (\widehat{\mathbf{U}}_j^{fr}, \widehat{\mathbf{U}}_i^{fr}) = \delta_{ji} \end{cases} \quad (154)$$

En reportant ces deux décompositions dans (151), on définit l'espace des solutions réduites sous la forme suivante :

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_k \widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \alpha_j \widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \quad (155)$$

Avec :

- $\widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$ , la solution dans  $\mathbb{U}^{int}$  du problème élastique sous l'unique chargement de force répulsive  $B^t \widehat{\Lambda}_k$  sur l'interface de contact  $\Gamma^c$  et  $\mathbf{U}=0$  sur  $\Gamma^{ext}$ ,
- $\widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$ , la solution dans  $\mathbb{U}^{ext}$  du problème élastique à condition de Dirichlet imposée  $\widehat{\mathbf{U}}_j^{fr}$  et interface de contact libre de tout effort.

Ces modes  $\widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  peuvent présenter un saut de déplacement normal à l'interface de contact et se différencient donc des modes  $\widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_fermé}$ , utilisés dans l'approche primale, qui étaient à ouvertures nulles.

#### 6.4.2 Conditions de contact

Comme les modes  $\widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  peuvent présenter des ouvertures ou des pénétrations au niveau de l'interface  $\Gamma^c$ , il devient nécessaire de les faire apparaître au même titre que les autres modes dans les conditions de contact réduites définies à l'aide des  $N_k$  modes positifs  $\widehat{\Lambda}_k$ .

$$\begin{cases} \widehat{\Lambda}_k^t \cdot \left( \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_k B \widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \alpha_j B \widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \right) \geq 0, \forall k = 1, N_k \\ \lambda_k \geq 0, \forall k = 1, N_k \\ \lambda_k^t \widehat{\Lambda}_k^t \cdot \left( \sum_{k=1}^{N_k} \alpha_k B \widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \alpha_j B \widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \right) = 0, \forall k = 1, N_k \end{cases} \quad (156)$$

#### 6.4.3 Système à résoudre

En posant successivement  $\mathbf{U}' = \widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv} \forall k = 1, N_k$  dans le PPV (151) et en exploitant l'orthogonalité des solutions élémentaires  $\widehat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$  et  $\widehat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  sur la frontière  $\Gamma^{ext}$ , on identifie que  $\alpha_k = \lambda_k \forall k = 1, N_k$ . L'équilibre fait donc apparaître les forces répulsives  $\lambda_k$  au premier et au second membre.

$$\mathbf{K} \cdot \left( \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \alpha_j \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \right) = \mathbf{F}^{ext} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \mathbf{B}^t \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_k \quad (157)$$

On teste ensuite successivement les  $J$  modes  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  dans le PPV ( 151 ), ce qui revient à projeter  $J$  fois la relation ( 157 ) sur  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t$ .

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \\ = \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t \cdot \mathbf{F}^{ext} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t \cdot \mathbf{B}^t \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_k \end{aligned} \quad (158)$$

Or le terme  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}{}^t \cdot \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$  est nul par construction des espaces  $\mathbb{U}^{int}$  et  $\mathbb{U}^{ext}$ . L'équilibre avec les forces extérieures se résume alors sous forme matricielle à :

$$[\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}]^t \cdot \mathbf{K} \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}] \cdot \boldsymbol{\alpha}^{ext} - [\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}]^t \cdot \mathbf{B}^t \cdot [\hat{\mathbf{\Lambda}}] \cdot \boldsymbol{\lambda} = [\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}]^t \cdot \mathbf{F}^{ext} \quad (159)$$

L'équilibre ( 159 ) et les deux premières conditions de contact ( 156 ), où l'on remplace  $\alpha_k$  par  $\lambda_k$ , peuvent être résolus par la méthode des statuts. Dans cette méthode, le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  est d'abord absent du système et la première itération ne fait intervenir que la matrice de raideur  $[\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}]^t \cdot \mathbf{K} \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext\_libre}]$ . Dès que l'une des inégalités d'ouverture est violée, le multiplicateur  $\lambda_k$  correspondant est ajouté aux degrés de liberté. Inversement, dès que le signe de  $\lambda_k$  devient négatif, signifiant une traction de l'interface, ce degré de liberté est retiré du système.

#### 6.4.4 Mise en œuvre et validation

On reprend le même cas test 2D que précédemment et l'on dispose des mêmes réalisations initiales du modèle complet. Après détermination des solutions élémentaires et des opérateurs conformément au §6.4.1 et au §6.4.2, on applique le modèle réduit aux mêmes 11 chargements que lors du test de la méthode primale effectué au §6.3.6.

Les Figure 63 et Figure 64 rendent compte des résultats obtenus pour 2 calculs qui sollicitent l'interface de contact à différents endroits. Dans les deux cas, les corrélations sont excellentes en déplacements et forces de réaction.

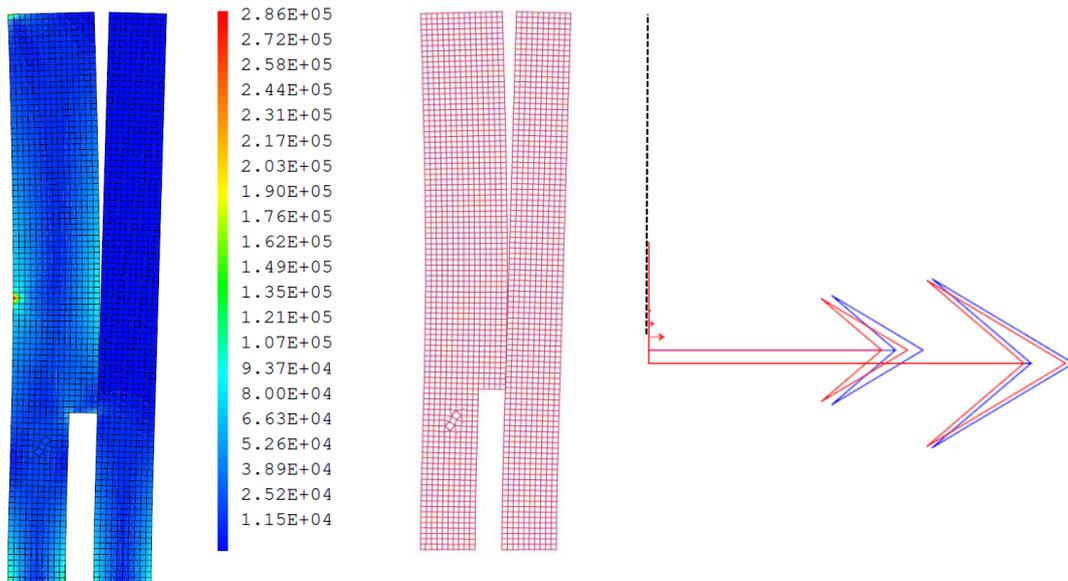


Figure 63 : calcul 1 en approche mixte - recombinaison des déplacements et des contraintes de Von Mises (Pa), superposition des déformées ROM(rouge)/référence(bleu), et superposition des vecteurs forces de contact.

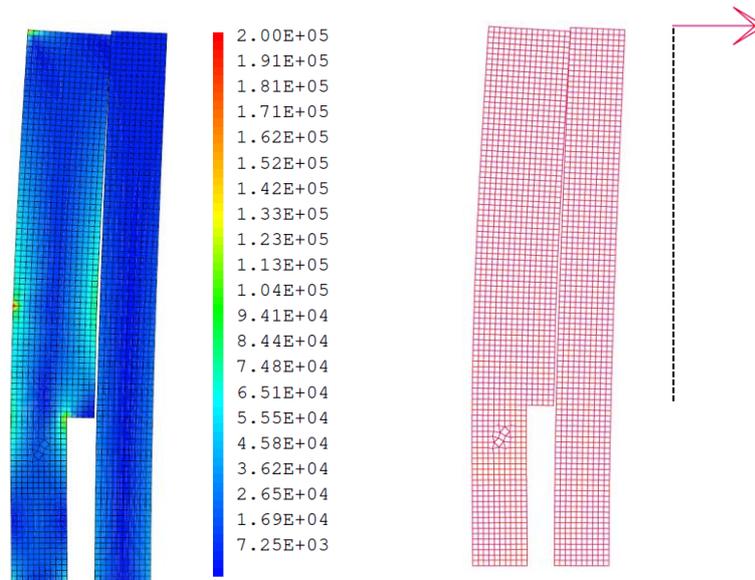


Figure 64 : calcul 9 en approche mixte - recombinaison des déplacements et des contraintes de Von Mises (Pa), superposition des déformées ROM(rouge)/référence(bleu), et superposition des vecteurs forces de contact.

Le report dans le (10 contre 12).

Tableau 12 des erreurs de pénétration et de complémentarité permet de constater que la précision de la méthode mixte atteint exactement le même niveau que celle du ROM primal lorsque les modes de force de contact sont les mêmes pour les deux méthodes. Par ailleurs le temps de résolution du ROM mixte est moitié moindre. Ceci est dû au plus faible nombre de degrés de liberté total à traiter (10 contre 12).

Tableau 12: évaluation du modèle réduit de contact en formulation mixte, comparaison avec le modèle de référence et avec le modèle réduit primal

Type	Modes moyens	Modes ouverture	Pénétration max calcul 1 (m)	Erreur de complémentarité é calcul 1 (J)	Durée de 11 calculs (ms)	Corréla. des dépl.
Référence EF	/	71	0	0	19187	Réf.
ROM mixte	$5 \hat{U}_j^{ext\_libre}$	$5 \hat{U}_k^{ouv}$	0.00025	17.2	93	OK
ROM primal pour comparaison	$5 \hat{U}_j^{ext\_fermé}$	$5 \hat{U}_k^{ouv}$ & $2 \hat{U}_j^{ouv}$	0.00025	17.2	187	OK

#### 6.4.5 Bilan de la méthode mixte

Bien qu'elle utilise les mêmes conditions de contact réduites, la méthode mixte diffère beaucoup de la méthode primale en terme de construction des modes associés car elle utilise des modes extérieurs qui sont libres de contact et une base de modes d'ouverture qui ne contient que les modes  $U_k^{ouv}$  (modes associés aux efforts de contact). Il en découle qu'elle utilise systématiquement moins de modes d'ouverture que la méthode primale. Le nombre de mode de chaque méthode est déterminé par le choix du niveau de précision des projections des efforts extérieurs et des efforts de contact. Une fois ce choix effectué, les deux méthodes garantissent le même niveau de précision. Cette économie de la méthode mixte en terme de nombre de modes induit une résolution environ deux fois plus rapide que dans le cas de la méthode primale.

## 6.5 REDUCTION D'UN MODELE DE CONTACT A JOINTS PENALISES

### 6.5.1 Transformation du modèle à variables internes d'ouverture en modèle mixte

Le modèle détaillé de l'AC traite le contact au travers d'éléments discrets de type joints, cf. Figure 27 en page 29. La méthode la plus simple pour réduire un modèle de contact utilisant des joints pénalisés est de le transformer en modèle mixte. Ensuite, on reprend exactement la logique présentée au §6.4 avec une seule différence significative : la condition de contact du modèle de référence ne fait plus seulement intervenir le déplacement des nœuds d'interface mais aussi la variable interne  $\delta^{ouv}$  du joint.

Pour transformer le problème initial en un problème mixte, partons de l'équation d'équilibre du modèle détaillé à variables internes. Pour cela, on sépare la matrice de raideur du modèle complet  $K^{tot}$  en la matrice des raideurs normales des joints  $K^{JN}$  et celle du reste de la structure  $K^S$ .

$$\begin{cases} K^{tot} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} + B^t \cdot K^J \cdot (\delta^{ouv} + jeu) \\ K^{tot} = K^{JN} + K^S \end{cases} \quad (160)$$

Le terme en  $\delta^{ouv}$  est passé au premier membre. En exploitant la décomposition de  $K^{tot}$ , on fait apparaître le vecteur des efforts normaux dans les joints  $K^{JN} \cdot U - B^t \cdot K^J \cdot (\delta^{ouv} + jeu)$ .

$$K^S \cdot \mathbf{U} + K^{JN} \cdot U - B^t \cdot K^J \cdot (\delta^{ouv} + jeu) = \mathbf{F}^{ext} \quad (161)$$

En nommant  $\mathbf{\Lambda}$  le vecteur positif des efforts répulsifs de contact (c'est-à-dire l'opposé des efforts internes dans les joints), on obtient l'équation d'équilibre du système détaillé sous une forme mixte, similaire à (151).

$$\begin{cases} K^S \cdot \mathbf{U} - B^t \cdot \mathbf{\Lambda} = \mathbf{F}^{ext} \\ B^t \cdot \mathbf{\Lambda} = -K^{JN} U + B^t \cdot K^J \cdot (\delta^{ouv} + jeu). \end{cases} \quad (162)$$

On peut alors choisir, comme au 6.4.1, une décomposition des efforts répulsifs sur une base de modes positifs et une décomposition du déplacement en modes frontières libres de contact  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  et en modes  $\hat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$  d'efforts répulsifs. Les déplacements  $\mathbf{U}$  s'écrivent alors :

$$\mathbf{U} = \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_k^{ouv} + \sum_{j=1}^J \alpha_j \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \quad (163)$$

Avec :

- $\hat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$ , la solution dans  $\mathbb{U}^{int}$  (152) du problème élastique (162) sous l'unique chargement de force répulsive  $\mathbf{F}^N = -B^t \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_k$  dans les joints ( $B^t \cdot K^J \cdot (\delta^{ouv} + jeu) = B^t \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_k$ ) et  $U=0$  sur  $\Gamma^{ext}$ ,
- $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$ , la solution dans  $\mathbb{U}^{ext}$  du problème élastique à condition de Dirichlet imposée  $\hat{\mathbf{U}}_j^{fr}$  et interface de contact libre de tout effort.

La différence avec le chapitre précédent est que les forces répulsives font travailler les raideurs des joints. L'énergie associée aux modes  $\hat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$  contient donc l'énergie stockée dans la raideur normale des joints, contrairement aux modes  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  pour lesquels les raideurs normales des joints ne travaillent pas.

En introduisant la décomposition (163) dans (162), puis en projetant à gauche sur le mode  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre}$  et, enfin, en éliminant le terme  $\hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \cdot K^S \cdot \hat{\mathbf{U}}_k^{ouv}$ , qui est nul par construction orthogonale des modes, l'équation d'équilibre prend la forme mixte réduite (164).

$$\sum_{j=1}^J \alpha_j \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \cdot K^S \cdot \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} - \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \cdot B^t \cdot \hat{\mathbf{\Lambda}}_k = \hat{\mathbf{U}}_j^{ext\_libre} \cdot \mathbf{F}^{ext} \quad (164)$$

### 6.5.2 Conditions de contact

Dans le modèle de référence pénalisé, les conditions de contact portent, au sein de chaque joint  $J$ , sur les variables internes  $\delta^{ouv}(J)$  et l'effort  $F^N(J)$ .

$$\begin{cases} F^N(J) \leq 0 \\ \delta^{ouv}(J) \geq 0 \\ F^N(J)\delta^{ouv}(J) = 0 \end{cases} \quad (165)$$

Or, dans le modèle pénalisé, l'ouverture ne dépend pas que du déplacement des nœuds du joint mais aussi de l'effort  $\Lambda(J)$  positif qui comprime sa raideur  $K^N$ .

$$\delta^{ouv}(J) = B.U(J) - jeu(J) + \Lambda(J)/K^N(J) \geq 0 \quad (166)$$

Ce terme supplémentaire de compression n'est présent que dans les modes  $\hat{U}_k^{ouv}$  de la décomposition des déplacements (163), puisque les modes  $\hat{U}_j^{ext\_libre}$  sont, par définition, sans efforts de liaison. Par commodité, on note  $\delta^{ouv}(\hat{U}_k^{ouv})$  le champ des ouvertures effectives des modes  $\hat{U}_k^{ouv}$ , calculés à l'aide de (166).

Afin de réduire leur nombre, on moyenne les inégalités à l'aide des modes positifs  $\hat{\Lambda}_k$ .

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_l^t \cdot \left( \sum_{j=1}^J \alpha_j B. \hat{U}_j^{ext\_libre} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \delta^{ouv}(\hat{U}_k^{ouv}) \right) \geq 0, \forall l = 1, N_k \\ \lambda_l \geq 0, \forall l = 1, N_k \\ \lambda_l^t \hat{\Lambda}_l^t \cdot \left( \sum_{j=1}^J \alpha_j B. \hat{U}_j^{ext\_libre} + \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \delta^{ouv}(\hat{U}_k^{ouv}) \right) = 0, \forall l = 1, N_k \end{cases} \quad (167)$$

Ces conditions réduites de contact ont donc presque la même forme que les conditions (156) du modèle mixte nodal. Elles diffèrent simplement par la prise en compte de la compression des raideurs des joints lorsque le contact est actif. Le modèle réduit est alors constitué de (164) pour l'équilibre et des conditions de contact (167). Sa forme mixte est particulièrement adaptée à une résolution par la méthode des statuts.

### 6.5.3 Mise en œuvre et validation

Le test de validation est réalisé en 3D sur un modèle obtenu par extrusion sur une épaisseur de 5 mètres du modèle 2D de la Figure 55. Le contact est assuré par l'ajout de 87 joints pénalisés dans la direction normale. Le frottement n'est pas pris en compte. Les caractéristiques principales du modèle sont récapitulées dans le Tableau 13. Comme précédemment, des chargements en déplacement ou force sont imposés sur les points 1 et 2, sur la partie gauche de la structure.

Tableau 13 : caractéristiques du modèle de contact 3D à joints pénalisés.

Dimensions principales	Module d'Young	Coefficient de Poisson	Raideur normale des joints	Coefficient de frottement
100x25x5 m <sup>3</sup>	10 <sup>7</sup> MPa	0,3	10 <sup>4</sup> N/m	0

Une série de 85 calculs détaillés a d'abord été réalisée avec des chargements en déplacements imposés, tirés aléatoirement suivant une répartition gaussienne donnée dans le Tableau 14.

Tableau 14 : paramètres des chargements aléatoires des réalisations.

Chargement	$Ux_1$	$Ux_2$	$Uy_1$	$Uy_2$	$Uz_1$	$Uz_2$
Moyenne (m)	0,8	0,8	0	0	0	0
Ecart type (m)	1,5	1,5	0,3	0,3	0,3	0,3

Les vecteurs unitaires de la base  $(Ux_1, Uy_1, Uz_1, Ux_2, Uy_2, Uz_2)$  des chargements en déplacements imposés sont utilisés pour construire 6 modes arbitraires et orthogonaux  $\hat{U}_j^{ext\_libre}$  par résolution élastique de conditions de Dirichlet sur les points 1 et 2, à contact inactif. 10 modes  $\hat{\Lambda}_k$  sont également extraits des 85 réalisations par NMF et servent à construire les 10 modes  $\hat{U}_k^{ouv}$ . Les matrices des relations (164) pour l'équilibre et (167) pour les conditions de contact peuvent alors être calculées et mises en œuvre dans la résolution du modèle réduit de contact sous forme mixte. Le solveur utilisé est le même que pour le modèle mixte du chapitre précédent.

On présente ci-après les résultats obtenus avec ce modèle réduit pour le calcul 21, dont le chargement est donné dans le .

Tableau 15.

Tableau 15 : conditions de Dirichlet du calcul 21.

$U_{x_1}$	$U_{x_2}$	$U_{y_1}$	$U_{y_2}$	$U_{z_1}$	$U_{z_2}$
1,2831	3,9874	0,14493	-0,0173	-0,4581	0,0241

La Figure 65 montre que les déplacements obtenus par recombinaison du ROM (en rouge) se superposent aux déplacements du modèle de référence (en bleu) et que les efforts normaux dans les joints sont également bien prédits. Le Tableau 16 indique que la pénétration nodale est très proche pour les deux modèles (0,725 m au lieu de 0,730 m). De même, l'erreur de complémentarité s'établit à 572 J, ce qui reste négligeable devant l'énergie élastique de la structure, qui est de  $2,5 \cdot 10^6$  J.

Tableau 16: cas du contact pénalisé, évaluation du modèle réduit en formulation mixte.

Type	Modes moyens	Modes ouverture	Pénétration nodale maximale (m)	Erreur de complémentarité (J)	Durée de 25 calculs (ms)	Corrélat. des dépl.
Référence EF à joints pénalisés	/	87 joints	0,73	0	20007	Réf.
ROM mixte	$6 \hat{U}_j^{ext\_libre}$	$10 \hat{U}_k^{ouv}$	0,725	572	562	OK

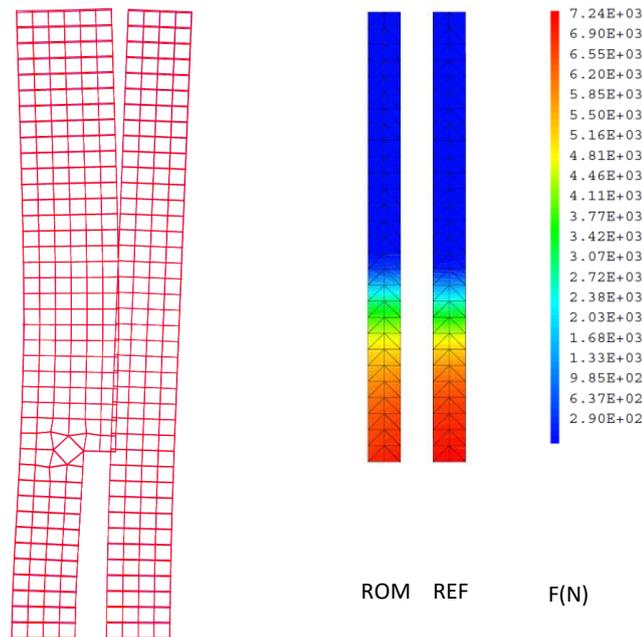


Figure 65 : corrélations du calcul de contact à joints pénalisés n°21, superposition des déplacements du modèle de référence et du modèle réduit, comparaison des efforts de contact dans les joints.

#### 6.5.4 Bilan de la méthode mixte pour un modèle de référence à joints pénalisés

Il est finalement aisé de réduire un modèle de contact utilisant des joints pénalisés en le transformant en modèle mixte. Les corrélations en pénétration, effort et complémentarité se révèlent tout aussi bonnes que lors de la réduction des précédents modèles à contact nodal (cf. §6.3 et §6.4). Le gain de temps CPU mesuré sur le cas test 3D est proche de 40 pour le ROM à 10 modes  $\hat{U}_k^{ouv}$ . Ce gain peut varier en fonction de la discrétisation du modèle de référence et en fonction du nombre de modes total utilisé dans le ROM, c'est-à-dire en fonction de la précision recherchée.

## 6.6 BILAN DES RÉDUCTIONS DE MODÈLE DE CONTACT MISES EN PLACE

Le point commun des réductions de modèles de contact que l'on a proposées provient des travaux de (Balajewicz et al., 2016). Leur point saillant est l'utilisation d'une base de modes positifs pour représenter les snapshots de multiplicateurs de Lagrange du contact. Le procédé de construction de cette base est la méthode NMF-ALS des moindres carrés alternés redressés. On utilise cet outil d'abord dans le cadre d'une approche NTFA primale *a posteriori*. Le principe des travaux virtuels nous permet de définir une base suffisante de modes d'ouverture des contacts à partir, d'une part, des modes de forces de contact et, d'autre part, à partir des autres modes de transformation (élastiques, viscoplastiques, glissements...). Cette base de modes d'ouverture peut éventuellement être encore réduite par POD, à la précision souhaitée, sans incidence sur les résultats. Le lagrangien du système fait apparaître dans l'espace réduit un nombre limité d'inéquations s'appliquant aux amplitudes des modes d'ouverture et la méthode des statuts permet de le résoudre sans difficulté. Avec le même critère de contact, il est également possible d'adopter une approche mixte qui combine, d'une part, les transformations primales libres de contact et, d'autre part, les transformations uniquement liées aux efforts répulsifs sur l'interface de contact (modes obtenus à efforts de contact imposés). Le système réduit à résoudre présente alors le même nombre d'égalités et d'inégalités que pour la précédente méthode mais fait intervenir moins de modes. Il est donc un peu plus simple à mettre en œuvre, tout aussi précis, et jusqu'à deux fois plus rapide, le speed-up passant de 100 à 200 sur le cas-test 2D. Néanmoins, le modèle détaillé de l'AC présente la particularité importante de représenter le contact entre crayons et grilles à l'aide d'éléments discrets à comportement pénalisé. Afin de tirer parti des résultats précédents, on a choisi de reformuler le problème sous forme mixte, en gardant le même critère de contact en base réduite. Les résultats obtenus sur un cas-test 3D sont alors excellents. Finalement, Ces trois méthodes ont été testées et corrélées aux modèles de référence. Elles donnent d'excellents résultats en terme de déplacements, d'interpénétration, d'efforts de contact et de durée de calcul, avec, en particulier un gain de l'ordre de 200 pour la méthode mixte nodale.

## 7. Réduction du modèle : traitement du frottement

### 7.1 CONDITION LOCALE DE FROTTEMENT

Un des modèles les plus simples de frottement est le modèle de type Tresca, qui postule qu'il y a adhérence (non glissement) tant que la norme de la contrainte tangente  $\tau$  au plan de l'interface est inférieure à une valeur seuil  $\tau_s$  donnée, représentée par le rayon du cercle de la Figure 66. Une fois ce seuil d'effort tangentiel atteint, le glissement devient possible et s'effectue suivant la normale à ce cercle.

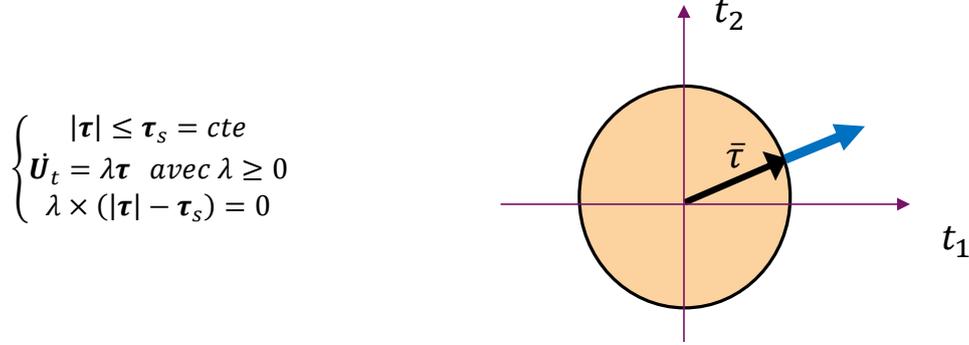


Figure 66 : conditions de frottement de Tresca : composantes du vecteur contrainte dans le plan tangent au point de contact. Le bord du disque représente la limite d'adhérence, fixée à une valeur donnée.

Le modèle de frottement de Coulomb (Coulomb, 1821), qui est utilisé dans la modélisation des assemblages combustibles, est un modèle de frottement dont le seuil d'écoulement est proportionnel à l'effort normal de contact  $\sigma_{nn}$  et au coefficient de frottement  $\mu$ . Aux conditions de contact (121), il faut ajouter les conditions de frottement suivantes, où le vecteur  $\tau$  est la contrainte de cisaillement dans le plan de l'interface et  $\mu$  le coefficient de frottement :

$$\begin{cases} |\tau| - \mu\sigma_{nn} \leq 0 \\ \dot{\mathbf{U}}_t = \lambda\tau \text{ avec } \lambda \geq 0 \\ \lambda \times (|\tau| - \mu\sigma_{nn}) = 0 \end{cases} \quad (168)$$

Comme pour le contact, la modélisation du frottement conduit à devoir satisfaire trois conditions : une condition sur la norme de l'effort tangent, une condition cinématique sur la direction de glissement et une condition de complémentarité.

### 7.2 RÉDUCTION DE LA CINÉMATIQUE DE GLISSEMENT

On note  $\mathbf{U}^{g\_interface}$  le champ des vecteurs de glissement, défini à un instant  $t$ , sur tous les points de l'interface de contact  $\Gamma$  du modèle complet. A partir de réalisations préalables du modèle complet, une analyse POD des champs de glissement sur cette interface permet de construire une base orthonormée de modes  $\hat{\mathbf{U}}_k^{g\_interface}$ , optimale vis-à-vis de la représentation de ces snapshots de glissement.

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{g\_interface} \approx \sum_{l=1}^G \alpha_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^{g\_interface} \\ \iint_{\Gamma} \hat{\mathbf{U}}_m^{g\_interface} \cdot \hat{\mathbf{U}}_l^{g\_interface} dS = \delta_{ml} \end{cases} \quad (169)$$

Toujours selon la méthode NTFA, appliquée ici à une formulation primale du contact réduit, un calcul de caractérisation élastique nous donne les déplacements  $\hat{\mathbf{U}}_l^g$  et les contraintes  $\hat{\sigma}_l^g$  associées au mode de glissement sur l'interface  $\hat{\mathbf{U}}_l^{g\_interface}$  partout dans la structure. Pour ceci, nous considérons des conditions aux limites de déplacements nuls en moyenne à la frontières extérieure  $S^{ext}$  et des ouvertures de contact nulles sur  $\Gamma$ . Les autres transformations sont également nulles si elles sont définies (fluage).

$$\begin{cases} \langle K \cdot \hat{\mathbf{U}}_l^g, \mathbf{V} \rangle = \langle K \cdot \hat{\mathbf{U}}_l^{g\_interface}, \mathbf{V} \rangle, \forall \mathbf{V} \in \mathbb{V}^g \\ \langle \mathbf{V}^g, \mathbf{V}(x) \rangle = 0, \forall x \in S^{ext} \text{ et } \bar{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{V} = 0, \forall x \in \Gamma \end{cases} \quad (170)$$

En introduisant ces modes de glissement globaux dans la représentation des solutions locales, la solution dans le VER est de la forme suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{U} = \sum_{i,j,k,l} (\alpha_i \hat{\mathbf{U}}_i^{in} + \alpha_j \hat{\mathbf{U}}_j^{ext} + \alpha_l \hat{\mathbf{U}}_l^g + \alpha_m \hat{\mathbf{U}}_m^{ouv}) \\ \boldsymbol{\sigma} = \sum_{i,j,k,l} (\alpha_i \hat{\boldsymbol{\sigma}}_i^{vp} + \alpha_j \hat{\boldsymbol{\sigma}}_j^{ext} + \alpha_l \hat{\boldsymbol{\sigma}}_l^g + \alpha_m \hat{\boldsymbol{\sigma}}_m^{ouv}) \end{cases} \quad (171)$$

### 7.3 RÉGULARISATION

La loi de comportement locale du glissement (168) s'écrit aussi en chaque élément de contact :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} = \mu \sigma_{nn} \frac{\dot{\mathbf{U}}_t}{|\dot{\mathbf{U}}_t|} \text{ si } |\dot{\mathbf{U}}_t| \neq 0 \\ \boldsymbol{\tau} \in \{\mathbf{f}, |\mathbf{f}| \leq \mu \sigma_{nn}\} \text{ si } |\dot{\mathbf{U}}_t| = 0 \end{cases} \quad (172)$$

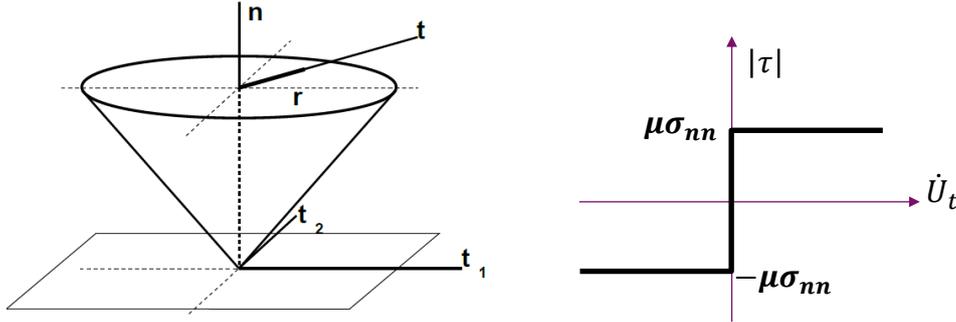


Figure 67 : conditions de frottement de Coulomb : surface de charge et loi d'écoulement.

Une régularisation simple de la loi consiste à introduire une raideur de régularisation tangente  $k_t$  et à poser, pour l'incrément de temps  $dt$  :

$$\boldsymbol{\tau} = \min(k_t dt, \frac{\mu \sigma_{nn}}{|\dot{\mathbf{U}}_t|}) \dot{\mathbf{U}}_t \quad (173)$$

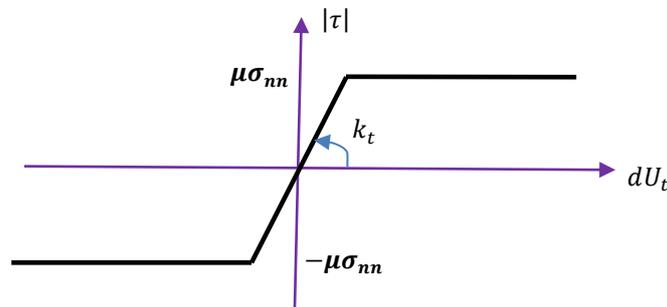


Figure 68 : frottement de Coulomb régularisé

### 7.4 LOI DE FROTTEMENT MODALE

En modal, il faut exprimer la projection  $S_n^g$  des forces tangentes  $\boldsymbol{\tau}$  sur le mode de glissement  $\hat{\mathbf{U}}_n^g$ , quel que soit  $n$  compris entre 1 et  $G$ . Il nous faut donc trouver la loi de frottement projetée.

$$\mathbf{S}_n^g = \iint_{e \in \Gamma} \min\left(k_t dt, \frac{\mu \sigma_{nn}}{|\dot{\mathbf{U}}_t|}\right) \dot{\mathbf{U}}_t \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g dS \quad (174)$$

Avec la décomposition modale :

$$\dot{\mathbf{U}}_t(e) \approx \sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g(e) \quad (175)$$

On obtient alors la  $n^{\text{ième}}$  composante du frottement dans la base  $[\hat{\mathbf{U}}^g]$  :

$$\mathbf{S}_n^g = \iint_{\Gamma} \min\left(k_t dt, \frac{\mu \sigma_{nn}}{|\sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g|}\right) \sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g dS \quad (176)$$

Pour des raisons de coût de calcul, on ne veut pas systématiquement faire le calcul local. L'idée est d'abord de faire sortir le calcul du minimum de la somme spatiale, ce qui donne, au signe près.

$$\mathbf{S}_n^g = \min \left( \iint_{\Gamma} k_t dt \sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g dS, \iint_{\Gamma} \mu \sigma_{nn} \frac{\sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g}{|\sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \hat{\mathbf{U}}_l^g|} dS \right) \quad (177)$$

La formule ( 177 ) indique que la régularisation de la transition adhérence/glisement est faite au niveau modal et non plus au niveau des points.

En cas d'adhérence, l'effort de frottement est donné par le terme de gauche. Comme la base des modes de glissement est orthonormée, on obtient une force de rappel exercée par un ressort de raideur  $k_t$  pour l'incrément de glissement  $\Delta \alpha^g$  sur le pas de temps  $dt$ .

$$\mathbf{S}_n^g = k_t dt \sum_{l=1}^G \dot{\alpha}_l^g \iint_{\Gamma} \hat{\mathbf{U}}_l^g \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g dS = k_t \Delta \alpha_n^g \quad (178)$$

En cas de glissement, le terme de droite de ( 177 ) doit être simplifié pour être facilement évaluable. Pour cela on étudie d'abord successivement chacun des  $G$  vecteurs d'effort  $\mathbf{S}_l^g$  associés à un glissement actif uniquement porté par le mode  $\hat{\mathbf{U}}_l^g$ , c'est-à-dire en imposant  $\hat{\mathbf{U}}_t = \hat{\mathbf{U}}_l^g$ . Les composantes  $(\mathbf{S}_l^g)_n$  de ce vecteur  $\mathbf{S}_l^g$  sont données par l'expression ( 179 ) qui exploite la décomposition des efforts normaux sur la base des modes positifs  $[\Lambda]$ .

$$(\mathbf{S}_l^g)_n = \iint_{\Gamma} \mu \sigma_{nn} \frac{\hat{\mathbf{U}}_l^g}{|\hat{\mathbf{U}}_l^g|} \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g dS = \mu \sum_{k=1}^{N_k} \lambda_k \left[ \iint_{\Gamma} \hat{\Lambda}_k \frac{\hat{\mathbf{U}}_l^g \cdot \hat{\mathbf{U}}_n^g}{|\hat{\mathbf{U}}_l^g|} dS \right] \quad (179)$$

Les  $N_k \times G^2$  termes entre crochets qui peuvent intervenir dans le calcul des  $G$  efforts  $\mathbf{S}_l^g$  sont calculés et stockés. La Figure 69 illustre deux de ces vecteurs, notés  $\mathbf{S}^p$  et  $\mathbf{S}^q$ .

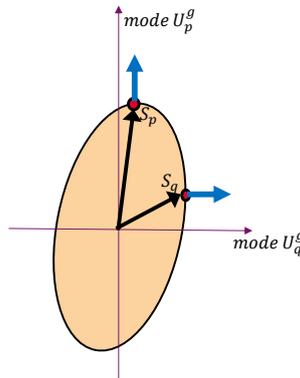


Figure 69 : calcul exact et stockage des vecteurs force de frottement (vecteurs noirs) associés au régime de glissement forcé suivant chacun des modes de la base de glissement (flèches bleues). Cette opération est répétée pour tous les modes de contrainte normale.

Ensuite, pour une direction de glissement actif quelconque  $\dot{\alpha}^g$ , on choisit d'approcher le terme de droite de ( 177 ) par une interpolation sur la boule unité dans l'espace des  $\dot{\alpha}^g$  entre ces  $G$  vecteurs frottement  $\mathbf{S}_l^g$  déjà identifiés :

$$\mathbf{S}^g(\lambda, \dot{\alpha}^g) = \sum_{l=1}^G \frac{\dot{\alpha}_l^g}{|\dot{\alpha}^g|} \mathbf{S}_l^g(\lambda) \quad (180)$$

Le critère de frottement approché en base réduite prend alors la forme d'un ellipsoïde qui s'éloigne d'autant plus de la sphère que les efforts normaux sont hétérogènes, cf. Figure 69.

A chaque itération de calcul on doit donc retenir le moins intense des efforts donnés par ( 178 ) et ( 180 ).

$$\mathbf{S}^g(\dot{\alpha}^g) = \min \left( k_t \dot{\alpha}^g dt, \sum_{l=1}^G \frac{\dot{\alpha}_l^g}{|\dot{\alpha}^g|} \mathbf{S}_l^g \right) \quad (181)$$

Il y a adhérence si le minimum est atteint au premier membre et glissement sinon.

Ce critère de frottement régularisé dépend donc des  $N_k \times G^2$  combinaisons possibles de modes de forces normales  $\hat{\Lambda}_k$  et de glissements  $\hat{U}_l^g$  et  $\hat{U}_n^g$ . Ainsi, la connaissance à l'instant  $t$  du vecteur  $\lambda$  des forces réduites de contact, permet de mettre à jour la surface de charge du frottement en base réduite bien plus rapidement qu'un calcul exact.

### 7.5 RÉOLUTION DU MODÈLE RÉDUIT DE CONTACT-FROTTEMENT

On repart du paragraphe 6.3.3, équation ( 143 ), qui donne l'équilibre du problème de contact avec des multiplicateurs de Lagrange  $\lambda$ . Comme les modes de glissement interviennent maintenant de manière explicite dans l'expression du champ de déplacement  $U$  ( 171 ), il convient d'ajouter au premier membre les degrés de liberté  $\alpha^g$  et, au second membre, les forces de frottement  $S^g$  qui s'opposent au glissement. On obtient le système linéaire ( 182 ), à satisfaire à tout instant  $t$ .

$$\begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^g] & 0 \\ [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^g] & -[\hat{U}^{ouv,int}]^t.[\hat{\Lambda}] \\ [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^g] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^g \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.F^{ext} \\ 0 \\ -S^g \end{bmatrix} \quad (182)$$

Sans oublier les conditions de relâchement du problème de contact primal, qui restent inchangées.

$$\begin{cases} \hat{\Lambda}_k^t \cdot ([\hat{U}^{ouv}].\alpha^{ouv}) \geq 0, \forall k \\ \lambda_k \geq 0, \forall k \\ \lambda_k \hat{\Lambda}_k^t \cdot ([\hat{U}^{ouv}].\alpha^{ouv}) = 0, \forall k \end{cases} \quad (183)$$

Ainsi que l'équation ( 181 ) qui permet de relier les efforts de glissement  $s^g$  aux vitesses de glissement  $\dot{\alpha}^g$ . On définit le résidu courant des forces  $R$  comme l'écart entre le premier et le second membre.

$$R = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.F^{ext} \\ 0 \\ -S^g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^g] & 0 \\ [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^g] & -[\hat{U}^{ouv,int}]^t.[\hat{\Lambda}] \\ [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^g] & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^g \\ \lambda \end{bmatrix} \quad (184)$$

Le système ( 182 ) est exact mais son second membre dépend de la solution en  $\dot{\alpha}^g$ . Il appelle donc une discrétisation en temps ( 185 ) et une résolution itérative.

$$\dot{\alpha}^g = (\alpha^g(t) - \alpha^g(t - dt))/dt \quad (185)$$

En partant de ( 182 ) on fait apparaître dans ( 186 ) le paramètre  $k_t$ , qui intervient dans la pénalisation du frottement, à la fois au premier et au second membre ( 182 ). Sans cette raideur, la première itération du schéma de Newton pourrait activer un mode de corps rigide et faire diverger la solution. Le problème s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ext}]^t.K.[\hat{U}^g] & 0 \\ [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^{ouv}]^t.K.[\hat{U}^g] & -[\hat{U}^{ouv,int}]^t.[\hat{\Lambda}] \\ [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ext}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^{ouv}] & [\hat{U}^g]^t.K.[\hat{U}^g] + kt & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^g \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{U}^{ext}]^t.F^{ext} \\ 0 \\ -S^g + kt\alpha^g \end{bmatrix} \quad (186)$$

Le système ( 182 ) sous les contraintes ( 183 ) est résolu par la méthode des statuts. Une fois qu'elle a convergé, les multiplicateurs  $\lambda_k$  sont connus ainsi que la direction de glissement  $\dot{\alpha}^g$ . La loi de frottement modale ( 181 ) est alors appliquée et donne l'estimation des forces réduites de frottement  $S^g$ . Le résidu des forces ( 184 ) est ensuite évalué et le processus itéré jusqu'à ce que le résidu des forces devienne inférieur à la valeur  $\varepsilon$  du critère choisi. La convergence de cet algorithme pouvant être lente suivant la valeur du paramètre de régularisation  $k_t$ , on met en place l'accélération de convergence de (Richardson and Glazebrook, 1911) dont l'avantage est de ne pas violer les conditions aux limites, contrairement à d'autres méthodes qui accélèrent directement la solution. En effet, cette méthode se base uniquement sur les résidus obtenus au cours des quelques dernières itérations de l'algorithme quasi-Newton et propose un nouveau vecteur pour le résidu des forces. Celui-ci permet de se rapprocher plus vite de la solution recherchée. L'algorithme 1, ci-dessous, présente une méthode de quasi-Newton pour résoudre un tel modèle de contact à frottement pénalisé sur un pas de temps  $dt$ .

---

**Algorithme 1 : résolution d'un problème de contact en formulation primale avec frottement pénalisé**


---

- Boucle sur les instants du chargement : passage de de  $t$  à  $t + dt$ .
  - Initialisations des inconnues à partir du dernier pas de temps convergé, initialisation du compteur d'itérations  $it$  et du résidu itéré des forces  $\mathbf{R}_{it}$  :

$$it = 0; \begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^{glis} \end{bmatrix}_{it=0} = \begin{bmatrix} \alpha^{ext}(t) \\ \alpha^{ouv}(t) \\ \alpha^{glis}(t) \end{bmatrix}; \mathbf{R}_0 = \begin{bmatrix} R^{ext} \\ R^{ouv} \\ R^{glis} \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot (\mathbf{F}^{ext}(t + dt) - \mathbf{F}^{ext}(t)) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$


---

- Boucle de convergence de type quasi-Newton sur le résidu  $\mathbf{R}_{it}$  :
  - Incrémentation du compteur d'itérations :  $it = it + 1$
  - Calcul de l'incrément de la solution à  $t + dt$  pour le système ( 186 ) sous les conditions de contact ( 183 ), avec pour second membre le résidu  $\mathbf{R}_{it}$ , par la méthode des statuts.

- 1<sup>ère</sup> résolution sans conditions :

$$\begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] \\ [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] \\ [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] + kt \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha^{ext} \\ d\alpha^{ouv} \\ d\alpha^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{ext} \\ R^{ouv} \\ R^{glis} \end{bmatrix}_{it}$$


---

- Boucle de convergence des statuts du contact

- Contrôle des pénétrations  $\hat{\Lambda}_k^t \cdot ([\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] \cdot d\alpha^{ouv}) \geq -R_{it}^{jeu}$ .
- Introduction des multiplicateurs  $\lambda_{actifs}$  pour les conditions cinématiques non vérifiées, puis nouvelle résolution :

$$\begin{bmatrix} [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ext}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] & 0 \\ [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] & -[\hat{\mathbf{U}}^{ouv\_int}]^t \cdot [\hat{\Lambda}]_{actifs} \\ [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ext}] & [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv}] & [\hat{\mathbf{U}}^g]^t \cdot K \cdot [\hat{\mathbf{U}}^g] + kt & 0 \\ 0 & -[\hat{\Lambda}]_{actifs}^t \cdot [\hat{\mathbf{U}}^{ouv\_int}] & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d\alpha^{ext} \\ d\alpha^{ouv} \\ d\alpha^g \\ \lambda_{actifs} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R^{ext} \\ R^{ouv} \\ R^{glis} \\ 0 \end{bmatrix}_{it}$$

- Désactivation des multiplicateurs devenus négatifs, puis nouvelle résolution.

- Arrêt de la boucle sur convergence de l'état de la solution
- 

- Actualisation de la solution quasi-Newton :  $\begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^g \\ \lambda \end{bmatrix}_{it+1} = \begin{bmatrix} \alpha^{ext} \\ \alpha^{ouv} \\ \alpha^g \end{bmatrix}_{it} + \begin{bmatrix} d\alpha^{ext} \\ d\alpha^{ouv} \\ d\alpha^g \\ \lambda_{actifs} \end{bmatrix}$

- $\dot{\alpha}^g = (\alpha^g_{it+1} - \alpha^g_0)/dt$  est évalué depuis le dernier temps convergé

- Calcul des frottements  $\mathbf{S}^g_{it+1}$  ( 181 ) à l'aide des multiplicateurs  $\lambda$  et de  $\dot{\alpha}^g$ ,

- Mise à jour du résidu des forces  $\mathbf{R}_{it+1}$  avec  $\mathbf{S}^g_{it+1}$  à l'aide de ( 184 )

- Critère d'arrêt de la boucle en norme relative du résidu des forces :  $\frac{\|\mathbf{R}_{it+1}\|_\infty}{\|\mathbf{R}_0\|_\infty} \leq \varepsilon$

- Accélération du résidu (éventuellement) :  $\mathbf{R}_{it+1} = g(\mathbf{R}_{it+1}, \mathbf{R}_{it}, \mathbf{R}_{it-1}, \mathbf{R}_{it-2})$

- Fin boucle de convergence et stockage de la solution à  $t + dt$
- 

- Fin boucle temporelle
-

## 7.6 APPLICATION À UN CAS SIMPLE DE CONTACT-FROTTEMENT EN 3D

### 7.6.1 Modèle éléments finis de référence et base de réalisations

Afin de tester la réduction d'ordre du modèle de frottement présentée au §7, on considère une modélisation 3D simple de deux structures élastiques élancées encastées à leur base, décrites par la Figure 70. Leur hauteur est de 100 m et leur épaisseur est de 5 m. Elles sont initialement en contact sur leur frontière verticale commune, sans effort. On applique un modèle de contact et une loi de frottement de Coulomb avec un coefficient de frottement de 0,5. La structure de gauche est soumise localement, en son sommet (point 1) et à mi-hauteur (point 2), à des déplacements imposés ou des forces imposées, au choix. On choisit de limiter les valeurs de chargement de manière à rester dans le cadre des petites perturbations et les chargements sont appliqués aussi bien dans le plan (X,Y) que hors plan (direction Z).

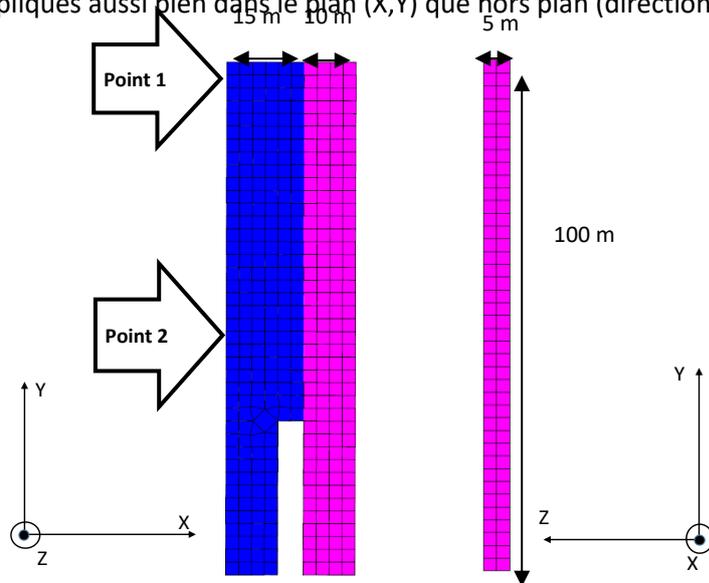


Figure 70 : 2 vues du maillage 3D des 2 structures élastiques en contact avec frottement. Les pieds sont encastés et les chargements sont appliqués en deux points sur le côté gauche.

On tire 200 sextuplés aléatoires  $(Ux_1, Uy_1, Uz_1, Ux_2, Uy_2, Uz_2)$  qui définissent, à chaque fois, un chargement en déplacements imposés aux points 1 et 2. Ces tirages sont réalisés au sein de distributions gaussiennes de moyennes et d'écart-types valant environ 0,5 m. Chaque calcul est effectué en un seul pas de chargement. La Figure illustre une sélection de trois résultats de calcul du modèle de référence obtenus pour les tirages A, B, C du Tableau 17 ci-dessous.

Tableau 17 : sélection de trois cas de chargements aléatoires parmi 200 appliqués au modèle détaillé de contact.

Chargements	$Ux_1(m)$	$Uy_1(m)$	$Uz_1(m)$	$Ux_2(m)$	$Uy_2(m)$	$Uz_2(m)$
A	0,71	-0,37	-0,39	-0,72	0,04	-1,14
B	-0,41	0,49	-0,72	0,12	0,32	0,99
C	0,54	-0,94	-0,36	-0,04	0,71	-1,28

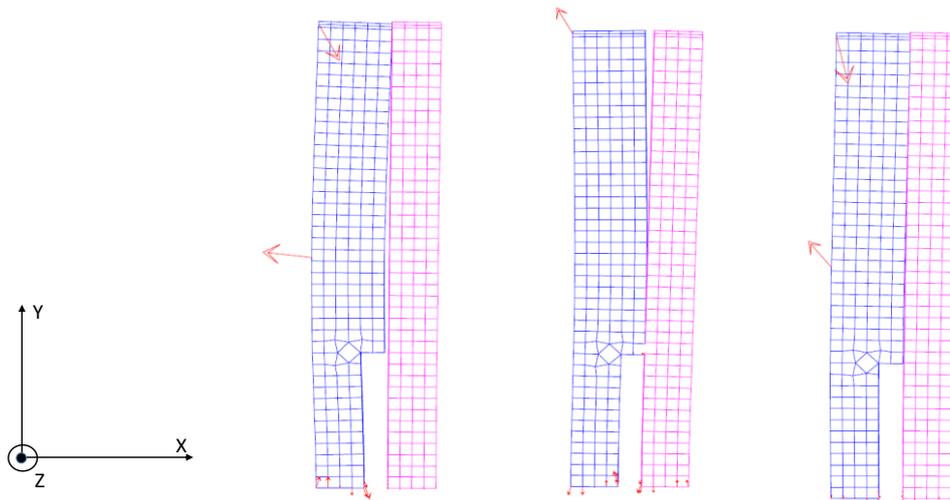


Figure 71 : exemple de 3 réalisations A, B, C avec le modèle détaillé. En rouge les forces de réaction.

### 7.6.2 Base des modes frontières élastiques

On choisit de mettre en place une approche primale du contact. Comme les chargements extérieurs portent sur un total de 6 degrés de liberté (3 ddl par point d'application des chargements), on définit arbitrairement 6 modes frontières, chacun étant solution du problème élastique avec un chargement unitaire sur un seul de ces 6 degrés de liberté, les 5 autres étant bloqués. Lors de ces 6 calculs, les 2 structures sont considérées collées (du fait de l'approche primale), c'est-à-dire que l'on interdit toute ouverture et tout glissement à l'interface, comme on le voit sur la Figure .

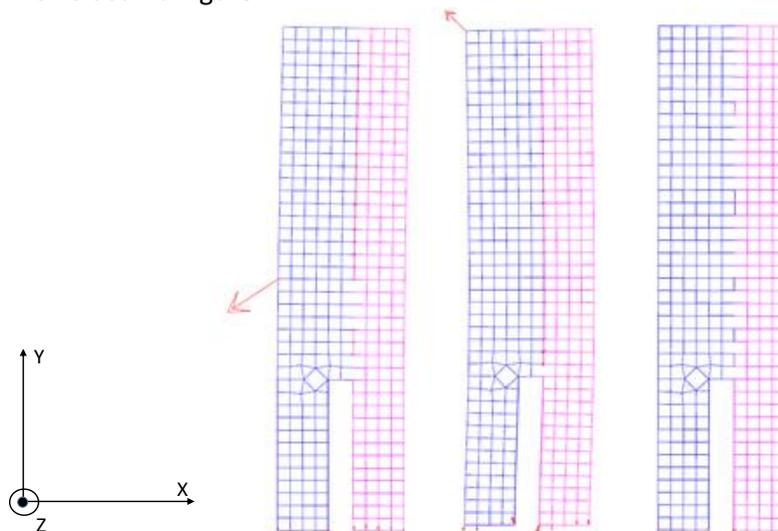


Figure 72 : 3 des 6 modes frontières sont fermés et sans glissement. Le troisième se déforme hors plan, en Z.

### 7.6.3 Base des modes de multiplicateurs de Lagrange

À partir des champs de multiplicateurs des 200 réalisations du modèle détaillé, on construit une base de modes positifs à l'aide d'un algorithme NMF-ALS (cf. annexe 1) codé dans une procédure Cast3M.

A titre d'exemple, la Figure correspond à l'application de l'algorithme ALS pour lequel on demande 8 modes en autorisant arbitrairement 15 itérations de l'algorithme après chaque initialisation, avec 15 initialisations aléatoires des modes, soit 225 tentatives. Elle montre la progression de l'erreur quadratique de recombinaison des snapshots de multiplicateurs, qui s'établit dans ce cas à 4,2 %. Avec la NMF, on ne dispose pas d'indicateur de précision, similaire aux valeurs singulières de la POD, pour connaître a priori le nombre de modes qui serait nécessaire pour une précision donnée. En augmentant progressivement la dimension de la base de modes positifs, on constate qu'il faut atteindre 15 modes, en réalisant 25 initialisations et 30 itérations par initialisation, pour réduire l'erreur de recombinaison à 2,9 %.

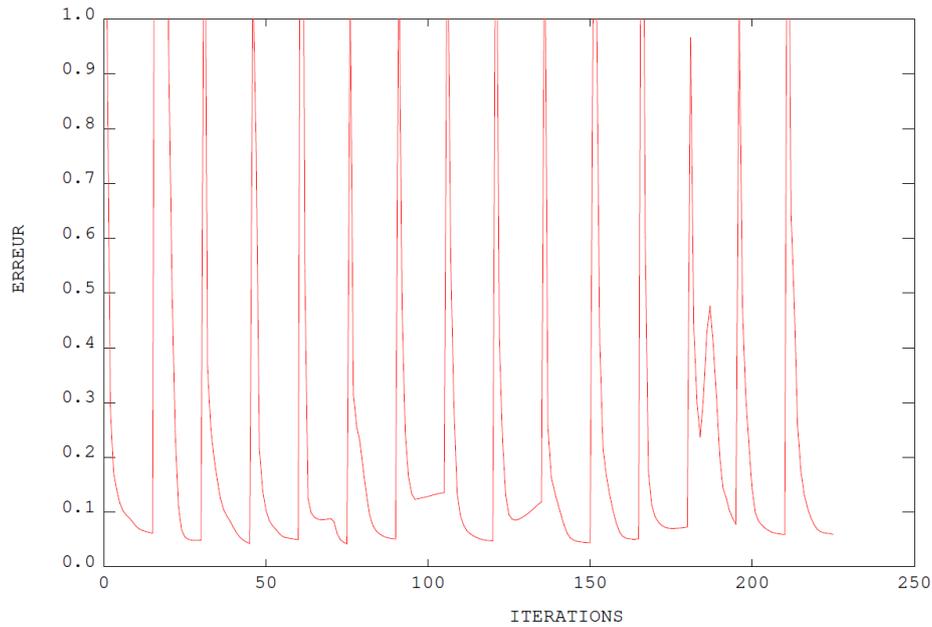


Figure 73 : exemple de progression de l'erreur quadratique de recombinaison lors des 15 initialisations de l'algorithme NMF, avec une limitation à 15 itérations par initialisation. La meilleure base est obtenue suite à la 10<sup>e</sup> initialisation et présente une erreur de projection des snapshots de 4,2 % au sens des moindres carrés.

#### 7.6.4 Base des modes d'ouverture

Les modes d'ouverture normale sont constitués de deux sous-familles, comme expliqué au §6.3.2. La première partie des modes d'ouverture est associée aux 8 modes de force de contact de la Figure 74, où les isovaleurs représentent l'intensité locale du mode, qui varie de 0 à 1 du bleu au rouge.

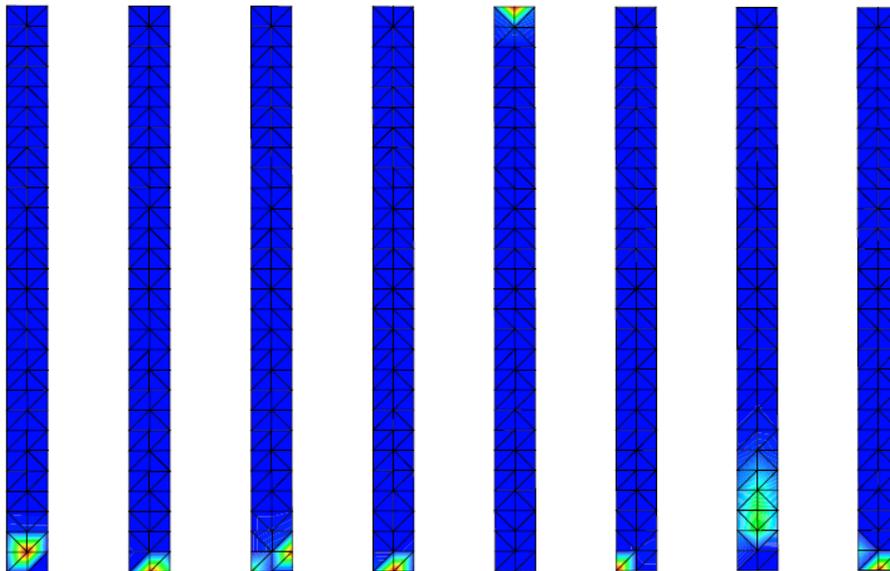


Figure 74 : base normalisée de 8 modes de multiplicateurs de contact à l'issue d'une NMF sur 200 réalisations.

La seconde famille de modes d'ouverture, toujours à glissement nul, est associée aux transformations élastiques générées par un déplacement des points de contrôle 1 et 2 (cf. Figure 70). Néanmoins, sur les 6 modes, on en a arbitrairement retiré 4, jugés peu susceptibles de solliciter la normale de l'interface de contact puisque les déplacements des points de contrôle qui leur sont associés sont parallèles au plan de contact. La Figure 75 montre les deux modes d'ouverture associés aux déplacement des points de contrôle et un des 8 modes d'ouverture associé aux efforts de contact.

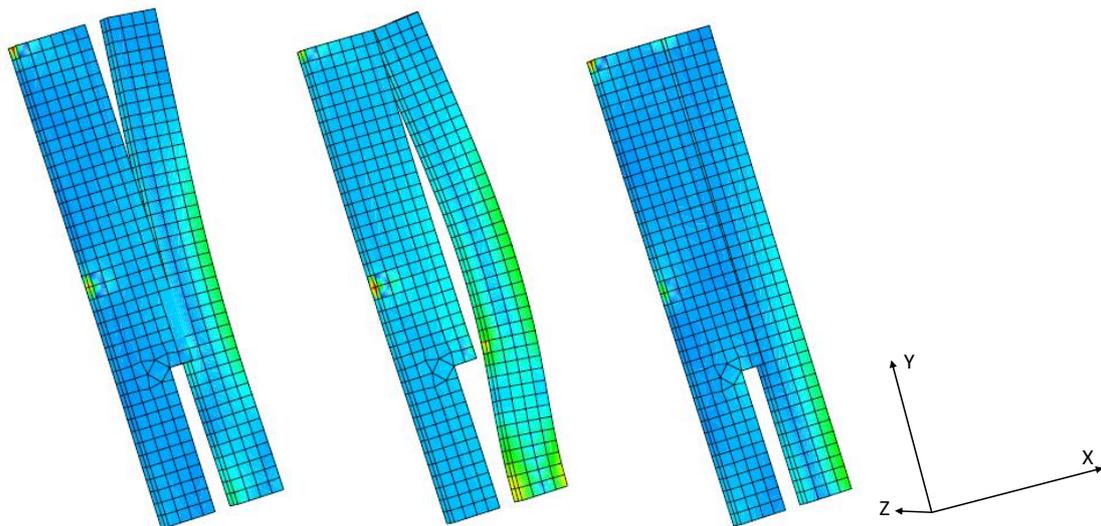


Figure 75 : exemples de modes d'ouverture associés aux transformations élastiques (à gauche et au centre) et l'un des huit modes associés aux force de contact (à droite). Les isovaleurs représentent les contraintes de Von Mises associées.

### 7.6.5 Base des modes de glissement

Les modes de glissement sont construits en réalisant une POD sur les 200 snapshots des champs de glissement. Les valeurs propres de la matrice de corrélation des snapshots renseignent sur l'importance de chaque mode pour la projection des snapshots. Les 10 premières valeurs propres prennent les valeurs suivantes : 0,307 - 0,163 - 0,150 - 0,072 - 0,017 - 0,011 - 0,009 - 0,004 - 0,003 - 0,001. On choisit de tronquer la base après les 6 premiers modes de glissement, illustrés sur la Figure 76. La Figure 77 montre, quant à elle, les déplacements induits dans la structure par deux de ces modes.

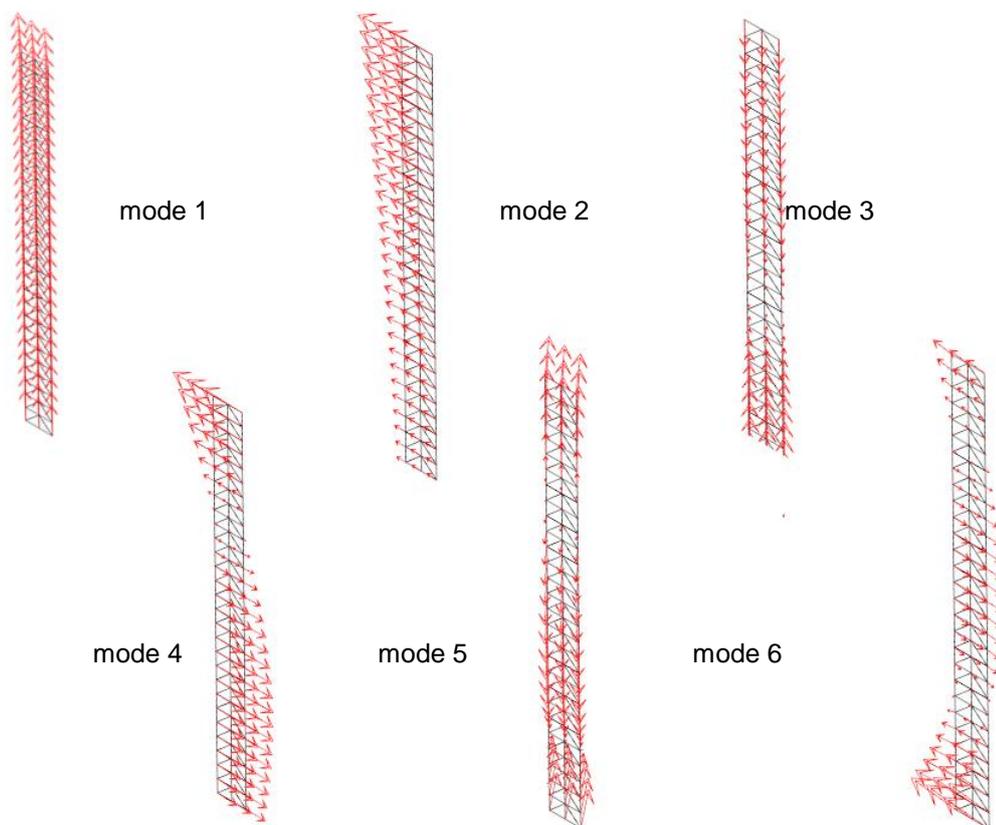


Figure 76 : les 6 modes de glissement de l'interface les plus significatifs obtenus par POD.

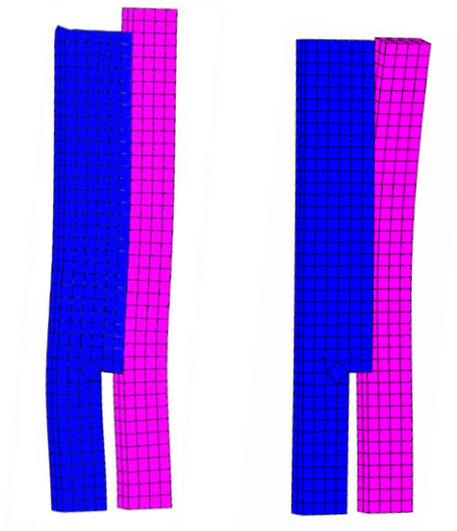


Figure 77 : déplacements de la structure associés aux modes de glissement 1 et 4, toutes les autres transformations étant nulles.

### 7.6.6 Simulation et corrélation de quelques cas de chargement

Le modèle réduit de contact-frottement est mis en place à partir des différentes bases de modes présentées précédemment. Afin de vérifier sa prédictivité, on a simulé, avec le modèle détaillé et avec le modèle réduit, 25 chargements en déplacements imposés, récapitulés dans le Tableau 18.

Tableau 18 : définition des 25 cas de chargement pour la validation du modèle de frottement.

Calcul	$Ux_1(m)$	$Uy_1(m)$	$Uz_1(m)$	$Ux_2(m)$	$Uy_2(m)$	$Uz_2(m)$
1	0	0	0	1	0	0
2	1	0	0	0	0	0
3	1	0	0	1	0	0
4	2	0	0	0	0	0
5	0,5	0	0	-1	0	0
6	0,5	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0,5	0	0
8	1	0	0	0,5	0	0
9	3	0	0	0,3	0	0
10	-2	0	0	0	0	0
11	0,5	0	0	-1,5	0	0
12	1	0	0	0,5	0	0
13	1	1	0	0,5	0	0
14	1	1	0	0,5	1	0
15	1	1	1	0,5	1	0
16	1	1	1	0,5	1	1
17	2,05	0,068	-0,624	-0,729	-0,333	-0,521
18	0,78	-1,313	1,479	-0,413	1,123	0,546
19	0,007	1,168	0,286	0,322	0,603	0,353
20	0,452	0,270	-0,563	0,573	1,697	1,493
21	0,661	0,47	0,825	-0,237	-0,975	1,393
22	0,054	0,026	0,448	0,354	-1,32	1,559
23	1,384	-1,082	-0,279	0,233	0,173	-2,160
24	-0,133	-0,972	0,153	0,722	1,536	-1,453
25	-0,263	0,513	0,745	0,832	-0,180	1,899

Les résultats des 12 premiers calculs, limités à des chargements suivant les directions  $Ux_1$  et  $Ux_2$  sont quasiment superposables avec ceux du modèle de référence. Ceci est valable pour les

déplacements, les forces de contact et les glissements, comme on le voit sur la Figure , qui correspond aux résultats du calcul 1 ( $U_{x_1}=0, U_{x_2} = 1$ ).

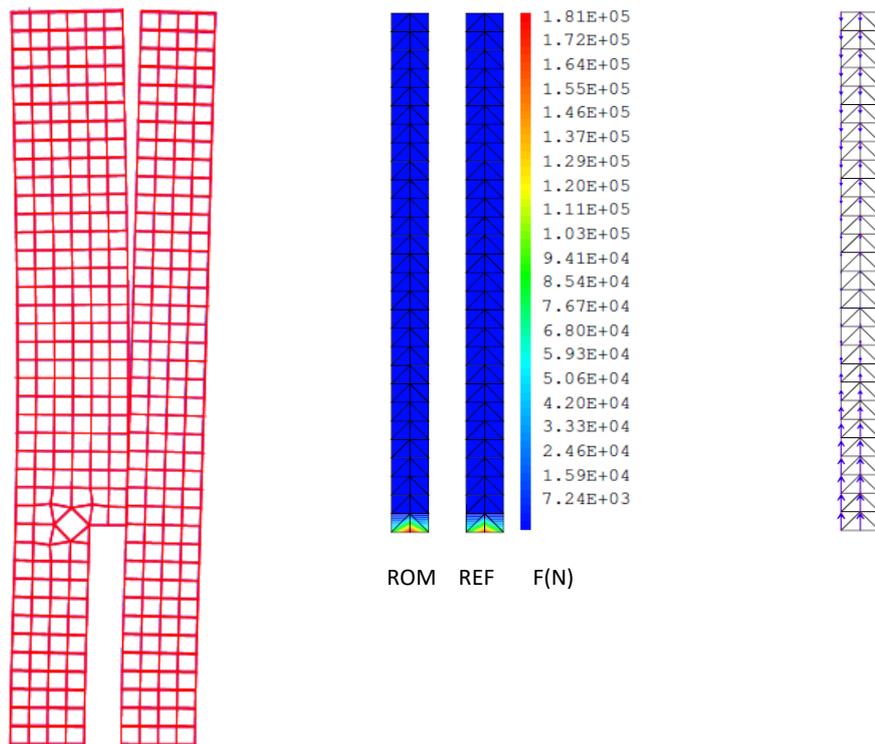


Figure 78 : calcul 1 ( $U_{x_1}=0, U_{x_2} = 1$ ) : superposition des résultats du ROM (rouge) et de référence (bleu) pour les déplacements, les forces de contact nodales (au centre) et les vecteurs de glissement (à droite).

La plupart des autres calculs donnent également de bons résultats comme le calcul 21 représenté sur la Figure 79.

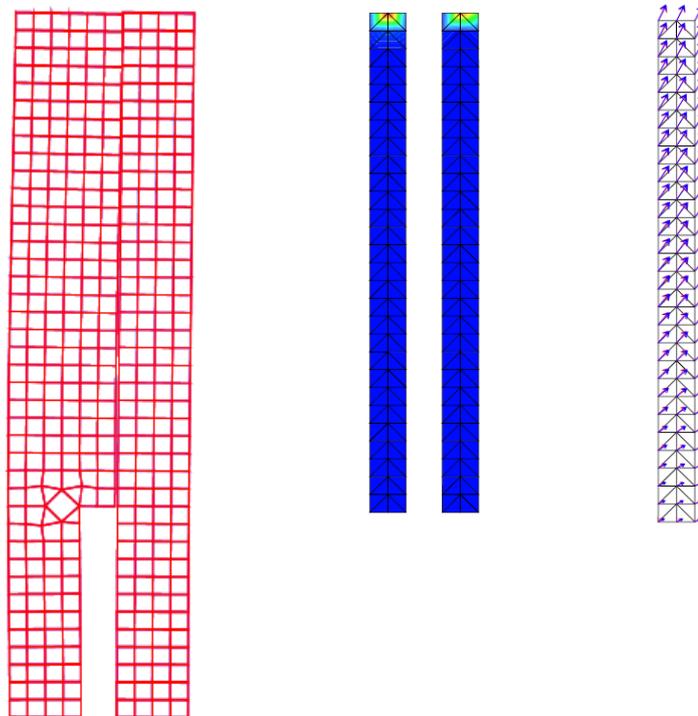


Figure 79 : calcul 21 multiaxial : excellentes corrélations pour les déplacements du ROM (rouge) par rapport à la référence (bleu), les forces normales et les glissements.

Cependant 3 calculs sur 25, à savoir les calculs 14, 18 et 20, définis dans le Tableau 18, présentent un défaut d'évaluation des glissements, comme l'illustre la Figure 80 correspondant au calcul 18.

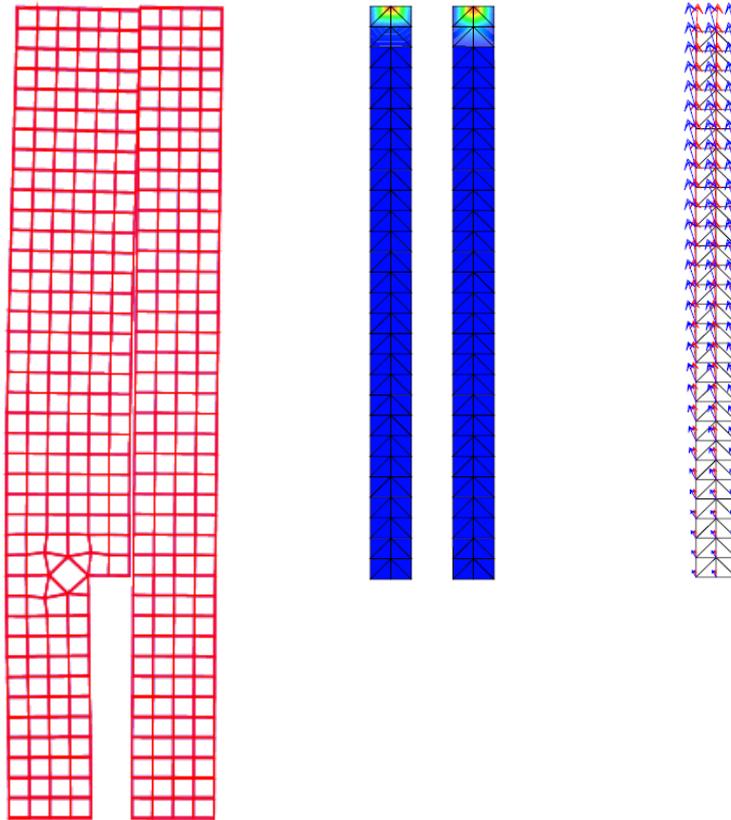


Figure 80 : calcul 18, bonne évaluation des efforts normaux mais mauvaise corrélation des glissements.

La cause de cet écart n'est pas encore bien identifiée. Une première étude portant sur la richesse de la base des modes de multiplicateurs de contact n'apporte pas d'amélioration. Deux autres voies relatives à la mise en œuvre du modèle restent à étudier : d'une part, le fait d'avoir négligé 4 des 6 modes d'ouverture associés aux transformations élastiques (cf. §7.6.4) et, d'autre part, le nombre de modes de glissement.

### 7.7 BILAN DE LA REDUCTION DU MODELE DE FROTTEMENT

En exploitant la base des  $N_k$  modes positifs de forces de contact, issus de la réduction du modèle de contact, et en y ajoutant une base POD de  $G$  modes de glissements, on a formulé un critère de frottement régularisé dans la base des modes de glissement. Celui-ci est évalué uniquement à l'aide des variables réduites et  $N_k \times G^2$  intégrales précalculées. Le vecteur seuil des forces de frottement est approché à chaque instant par superposition des efforts normaux et par interpolation sphérique de la direction de glissement par rapport aux directions modales. Le critère de frottement en base réduite étant défini, une régularisation élastique en facilite la mise en œuvre.

Ce critère de frottement et son algorithme de résolution ont ensuite été utilisés dans le cadre d'un cas test de validation en 3D qui fait intervenir deux structures élancées positionnées côte à côte. Sur 25 cas de calcul, la majorité des comparaisons faites entre le modèle réduit de contact-frottement et son modèle éléments finis de référence donnent de bons résultats, tant en déplacement qu'en forces de contact. Les interpénétrations sont négligeables dans tous les cas et la condition de complémentarité bien vérifiée. Par ailleurs, le gain sur la durée d'exécution est proche de 1000. Le principe général adopté pour cette réduction de modèle semble donc efficace pour traiter ces deux non-linéarités mécanique, à savoir le contact et le frottement. Néanmoins, quelques écarts sur les glissements ont été observés et nécessitent un travail d'analyse complémentaire afin d'en comprendre l'origine et de mieux les maîtriser.

## 8. Conclusions et perspectives

Ce document présente les principaux développements réalisés pour la réduction de modèles thermomécaniques d'assemblages combustibles en vue d'un calcul de cœur REP. Dans ce cadre, le principal intérêt de la réduction de modèle est de faire moins d'hypothèses que les modèles thermomécaniques simplifiés actuellement utilisés à l'échelle cœur et d'obtenir, notamment, une solution spatialement plus riche.

Une première bibliographie portant sur le comportement des assemblages en cœur et sur le comportement des alliages de zirconium sous flux de neutrons rapides a permis d'éclairer les phénomènes influant sur la déformation irréversible des assemblages combustibles. Il en ressort que trois transformations non-linéaires doivent être prioritairement prises en compte dans le modèle détaillé comme dans le modèle réduit, à savoir, le fluage dans la structure, le contact et le frottement entre crayons et grilles. Une seconde bibliographie, portant sur les techniques de réduction de modèle applicables à un problème non-linéaire quasi-statique, nous a amené à faire le choix d'une méthode de réduction de modèle *a posteriori* afin de gagner en temps d'exécution en ligne. Elle permet également d'identifier des outils de réduction de dimension utiles au niveau des données initiales (POD et NMF) afin de construire les bases modales du modèle réduit. On retient également la méthode de projection des inégalités de contact à l'aide de fonctions tests positives bien choisies (Balajewicz et al., 2016).

Toujours dans le but d'obtenir une réduction d'ordre la plus forte possible, nous nous sommes orientés vers la NTFA, technique d'homogénéisation non-linéaire (Michel and Suquet, 2003), dont une particularité est de mettre en œuvre une loi de comportement réduite intégrée pour chaque phase à l'échelle macroscopique. Il a été nécessaire d'adapter cette méthode à la réduction d'un modèle de structure élancée en choisissant de considérer l'intégralité d'une structure multi composantes (l'assemblage combustible) comme un volume élémentaire représentatif. Le tenseur des déformations effectives, habituellement utilisé en homogénéisation pour rendre compte des déformation moyennes du VER, est ici remplacé par une décomposition sur une base orthonormée de modes de déplacements. L'objet de cette base est de décrire, avec le moins de modes possibles, le déplacement des frontières de la structure. Cette base peut être simplement déterminée en réalisant une POD sur les déplacements des frontières (le déplacement des grilles dans le cas de l'assemblage combustible).

Ensuite, pour réduire le modèle de fluage, on construit une base orthonormée de modes de déformation viscoplastique à l'aide d'une POD. Les forces thermodynamiques duales sont alors déduites et s'expriment comme une combinaison linéaire des variables d'état du système. La loi de fluage est projetée dans la base des modes viscoplastiques, puis simplifiée de manière à faire apparaître les forces thermodynamiques, couplées entre elles par leur norme euclidienne. Cette adaptation de la méthode NTFA à la réduction d'un modèle de structure subissant du fluage a d'abord été évaluée sur un assemblage simplifié, puis mise en œuvre et validée avec de bons résultats sur le modèle de référence de l'assemblage combustible.

En ce qui concerne la réduction du modèle de contact, on s'inspire des travaux de (Balajewicz et al., 2016), qui utilisent une base de modes positifs pour représenter les snapshots de multiplicateurs de Lagrange du contact. Le procédé de construction de cette base est la méthode NMF-ALS des moindres carrés alternés redressés. Dans le cadre d'une approche NTFA primale *a posteriori*, le principe des travaux virtuels nous permet de définir une base suffisante de modes d'ouverture des contacts à partir, d'une part, des modes de forces de contact et, d'autre part, à partir des autres modes de transformation (élastiques, viscoplastiques, glissements...). Cette base de modes d'ouverture peut éventuellement être encore réduite par POD, à la précision souhaitée, sans incidence sur les résultats. Le lagrangien du système fait apparaître dans l'espace réduit un nombre limité d'inéquations s'appliquant aux amplitudes des modes d'ouverture. La méthode des statuts permet de le résoudre sans difficulté. Avec le même critère de contact, il est également possible d'adopter une approche mixte qui combine, d'une part, les transformations primales libres de contact et, d'autre part, les transformations uniquement liées aux efforts répulsifs sur l'interface de contact (modes obtenus à efforts de contact imposés). Le système réduit à résoudre présente alors le même nombre d'égalités et d'inégalités que pour la méthode primale mais fait intervenir moins de modes. Cette méthode est donc un peu plus simple à mettre en œuvre, tout aussi précise, et jusqu'à deux fois plus rapide que la précédente, avec un speed-up passant de 100 à 200 sur le cas-test 2D. Néanmoins, le modèle détaillé de l'AC présente la particularité importante de représenter le contact entre crayons et grilles à l'aide

d'éléments discrets à comportement pénalisé. De ce fait, nous avons également reformulé le problème sous forme mixte en gardant le même critère de contact en base réduite afin de tirer parti des résultats précédents. Les corrélations obtenues sur un cas-test 3D sont alors excellentes. En définitive, ces trois méthodes ont été testées et corrélées aux modèles de référence. Elles donnent d'excellents résultats en terme de déplacements, d'interpénétration, d'efforts de contact et de durée de calcul, avec, en particulier un gain de l'ordre de 200 pour la méthode mixte nodale.

Enfin, la dernière réduction de modèle opérée est celle du frottement de Coulomb. En premier lieu, on génère une base orthonormée de modes de glissement à l'aide d'une POD, afin de définir une transformation primale qui s'insère dans le cadre de la NTFA. On connaît les efforts de contact exprimés sur la base des modes d'efforts nodaux de contact positifs déjà utilisés pour le contact, à tout instant, en fonction des variables d'état. Les seuils de frottement modaux associés à chaque mode d'effort normal de contact et à chaque mode de glissement unitaire sont calculés hors ligne et stockés. Le vecteur seuil des forces de frottement est approché à chaque instant par superposition des efforts normaux et par interpolation sphérique de la direction de glissement par rapport aux directions modales. Le critère de frottement en base réduite étant défini, une régularisation élastique en facilite la mise en œuvre. Un cas test 3D est défini avec du contact et du frottement de Coulomb entre deux structures élancées voisines. Celui-ci confirme l'adéquation de la réduction de modèle du contact avec celle du frottement. De nouveau, les conditions de Signorini sont correctement vérifiées et les cartographies des glissements sont très bien corrélées sur la grande majorité des cas tests effectués. Néanmoins, un petit nombre de cas présente des écarts qui nécessiteraient une analyse plus poussée. Enfin, en ce qui concerne la durée d'exécution, le modèle réduit de contact-frottement est environ 1000 fois plus rapide.

En définitive, ces travaux de thèse nous ont permis de définir, tester et valider des méthodes de réduction de modèle appliquées à des problèmes quasi-statiques de fluage, de contact et de frottement. Elles s'appuient toutes sur une adaptation du modèle d'homogénéisation NTFA, que nous avons donc appliquée à la réduction *a posteriori* de modèles de structure, l'idée initiale étant de considérer l'ensemble de la structure comme un VER. Concernant la cible applicative, à savoir le modèle détaillé d'assemblage combustible, cette nouvelle méthode a été mise en œuvre avec succès pour la partie réduction du fluage et confirme le speed-up obtenu sur le cas test initial. En revanche, la mise en œuvre des réductions de contact et frottement sur le modèle de référence reste à faire.

Au chapitre des perspectives, on peut citer au moins quatre axes de travail. Le premier concerne le fluage à caractéristiques hétérogènes et évolutives, où la méthode du potentiel réduit doit encore être validée et comparée en terme de performances à la méthode issue de la NTFA, laquelle donne déjà de bons résultats. Le second axe consistera à mieux comprendre et maîtriser les causes des erreurs parfois constatées avec le modèle réduit de frottement. Le troisième axe des perspectives concerne la finalité de ces travaux, c'est à dire la substitution des modèles simplifiés d'AC par les modèles réduits d'AC au sein du modèle thermomécanique de cœur afin de gagner en représentativité et précision. Ce modèle de cœur multi-assemblages est chaîné avec une simulation neutronique et surtout couplé avec la simulation thermohydraulique du cœur déformé (De Lambert, 2021). Il donne alors accès à la prévision des déformations progressives de tous les AC au cours de leur séjour en cœur, laquelle renseigne notamment sur le risque d'accrochage entre grilles lors des opérations de permutation/rechargement des assemblages. Enfin, le dernier point relève de la capitalisation et la mise à disposition de ces développements méthodologiques au sein des codes par éléments finis du CEA. En effet, en cohérence avec la philosophie de Cast3M, sans aller jusqu'à une application complètement intégrée de réduction de modèle, il est tout à fait envisageable de mettre à disposition des utilisateurs des briques élémentaires (opérateurs et procédures) afin de faciliter la construction et la résolution de leur propre modèle réduit avec les méthodes que nous avons discutées et, pourquoi pas, de nouvelles variantes.

## ANNEXE

### ANNEXE 1 : ALGORITHME NMF DES MOINDRES CARRÉS ALTERNÉS REDRESSÉS (ALS)

Soit  $X$  une matrice ( $n \times p$ ) ne contenant que des valeurs non négatives et sans ligne ou colonne complètement nulle;  $r$  un entier petit devant  $n$  et  $p$ . En pratique la matrice  $X$  contient l'ensemble des champs de force de contact (valeurs positives ou nulles) issues des snapshots et rangés par colonne.

La factorisation non-négative de la matrice  $X$  (NMF) est la recherche de deux matrices  $W_{n \times r}$  et  $H_{r \times p}$  ne contenant que des valeurs positives ou nulles et dont le produit approche  $X$  :

$$X \approx WH$$

$H$  est la matrice contenant les modes et  $W$  est la matrice contenant les pondérations. Le choix du rang de factorisation  $r \ll \min(n, p)$  assure une réduction drastique de dimension et donc des représentations parcimonieuses. La factorisation est résolue par la recherche d'un optimum local du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{W, H \geq 0} (E(X, WH) + P(W, H))$$

$E$  est une fonction d'erreur mesurant la qualité d'approximation, nous retenons le critère des moindres carrés.

$$E(A, B) = \text{tr}((A - B)(A - B)^t) = \sum_{i,j} (A_{ij} - B_{ij})^2$$

$P$  est une fonction de pénalisation optionnelle de régularisation utilisée pour forcer les propriétés recherchées des matrices  $W$  et  $H$  comme, par exemple, la parcimonie des matrices ou la régularité des solutions.

Non seulement la solution est locale car la fonction objectif n'est pas convexe en  $W$  et  $H$  à la fois et, de plus, la solution obtenue n'est pas unique. Toute matrice  $D_{r \times r}$  non négative et inversible fournit des solutions équivalentes en terme d'ajustement :

$$X \approx WDD^{-1}H$$

La méthode des moindres carrés alternés (ALS) exploite le fait que, si le problème n'est pas convexe à la fois en  $W$  et  $H$ , il l'est soit en  $W$  soit en  $H$ . Cet algorithme suit le principe ci-dessous. Il utilise deux projections et deux troncatures et est réputé posséder de bonnes propriétés de convergence et de complexité.

Algorithme ALS :

$W$  = initialiser une matrice ( $n, r$ ) à coefficients positifs

pour  $i = 1$  à Maxiter faire

    Résoudre en  $H$  :  $W^tWH = W^tX$

    Mettre à 0 les termes négatifs de  $H$

    Résoudre en  $W$  :  $HH^tW^t = HX^t$  (matrice  $r, p$ )

    Mettre à 0 les termes négatifs de  $W$  (matrice  $n, r$ )

fin pour

Ici  $n$  est le nombre de degrés de liberté du modèle complet,  $p$  le nombre de snapshots et  $r \ll (n, p)$  le nombre de modes cherchés. La Figure 81 présente une progression de l'erreur de projection de l'algorithme ALS. On constate que la meilleure base de modes positifs n'a été obtenue qu'après 40 initialisations des modes, suivies de 20 itérations de l'algorithme à chaque fois.

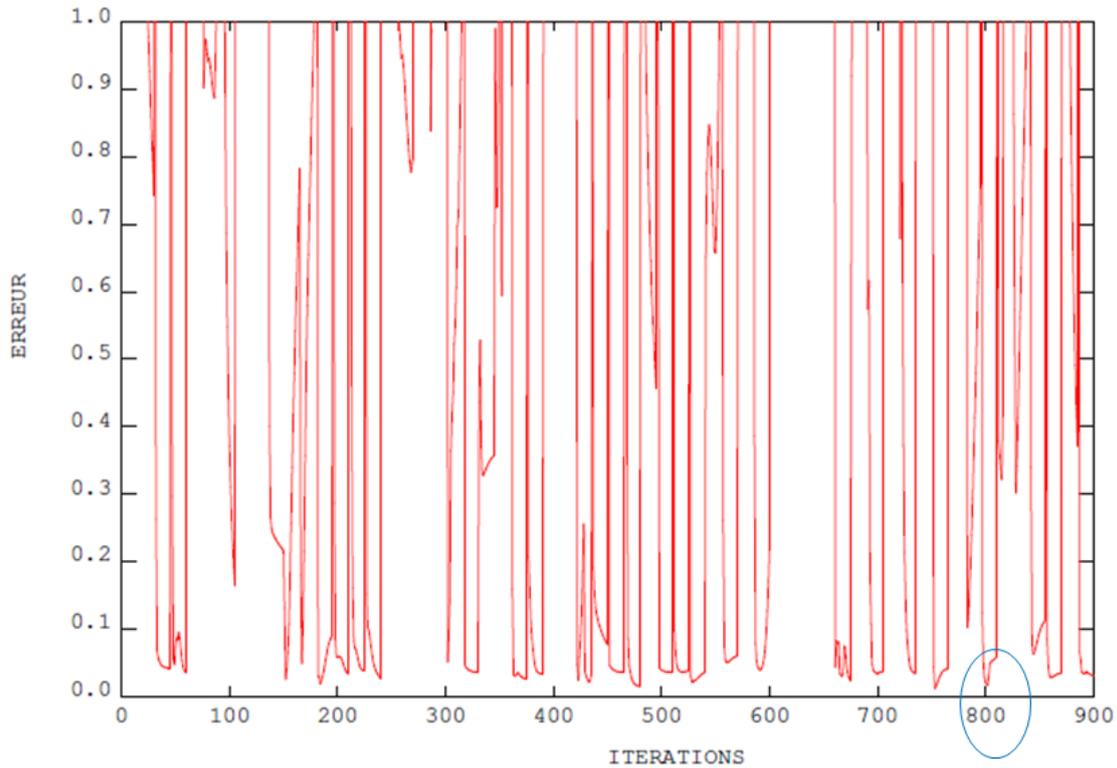


Figure 81 : exemple de progression de l'erreur de projection au cours de l'algorithme ALS, programmé avec 20 itérations après chaque initialisation d'une base de 6 modes.

Ce processus itératif est nettement plus long que la POD qui, elle, ne subit la contrainte de signe. En particulier, on ne sait pas choisir *a priori* la dimension  $r$  de la base en fonction de l'erreur de projection que l'on souhaite atteindre. Il est nécessaire d'augmenter progressivement la valeur de  $r$  jusqu'à atteindre ce critère.

## Références bibliographiques

- Addressi, D., Di Re, P., Gatta, C., Sacco, E., 2021. Multiscale analysis of out-of-plane masonry elements using different structural models at macro and microscale. *Comput. Struct.* 247, 106477. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2020.106477>
- Alameddin, S., Bhattacharyya, M., Fau, A., Nackenhorst, U., Néron, D., Ladevèze, P., 2017. Large time increment approach for fatigue damage computations. *PAMM* 17, 231–232. <https://doi.org/10.1002/pamm.201710085>
- Ammar, A., Chinesta, F., 2008. Circumventing Curse of Dimensionality in the Solution of Highly Multidimensional Models Encountered in Quantum Mechanics Using Meshfree Finite Sums Decomposition, in: *Lecture Notes on Computational Science and Engineering, Meshfree Methods for Partial Differential Equations IV*. Springer, pp. 1–17.
- Andersson, T., AlMBERGER, J., Bjoernkvist, L., 2005. A decade of assembly bow management at Ringhals (No. 1011–4289). International Atomic Energy Agency (IAEA).
- Ba Anh LE, 2014. Contributions en homogénéisation numérique pour les composites non linéaires élastiques et élastoplastiques. Université Paris Est.
- Balajewicz, M., Amsallem, D., Farhat, C., 2016. Projection-based model reduction for contact problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 106, 644–663. <https://doi.org/10.1002/nme.5135>
- Batoz, J.L., Dhatt, G., 1994. Modélisation des Structures par Éléments Finis, par J. L. Batoz et G. Dhatt Volume 1: Solides élastiques; Volume 2: Poutres et plaques; Volume 3: Coques, Editions Hermes, Paris. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 37, 4141. <https://doi.org/10.1002/nme.1620372312>
- Berry, M.W., Browne, M., Langville, A.N., Pauca, V.P., Plemmons, R.J., 2006. Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization, in: *Computational Statistics and Data Analysis*. pp. 155–173.
- Billerey, A., 2004. Evolution of fuel rod support under irradiation — Impact on the mechanical behaviour of fuel assemblies, in: *Fuel Assembly Bow and Control Rod Drop Kinetics — Measurements, Modeling, Remedies, TECDOC-1454*. Presented at the Structural behaviour of fuel assemblies for water cooled reactors, IAEA, Cadarache, pp. 101–112.
- Bouffieux, P., Rupa, N., 2000. Impact of Hydrogen on Plasticity and Creep of Unirradiated Zircaloy-4 Cladding Tubes, in: *ASTM Spec. Tech. Publ. ASTM*, p. 399–422. <https://doi.org/https://doi.org/10.1520/stp14310s>
- CEA, 2020. Cast3m finite element software [WWW Document]. Cast3M Code Aux Éléments Finis CEA. URL <http://www-cast3m.cea.fr/>
- Chaboche, J.L., Kruch, S., Maire, J.F., Pottier, T., 2001. Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *Int. J. Plast.* 17, 411–439. [https://doi.org/10.1016/S0749-6419\(00\)00056-5](https://doi.org/10.1016/S0749-6419(00)00056-5)
- Charquet, D., Senevat, J., Marcon, J.P., 1998. Influence of sulfur content on the thermal creep of zirconium alloy tubes at 400°C. *J. Nucl. Mater.* 255, 78–82. [https://doi.org/10.1016/S0022-3115\(98\)00008-7](https://doi.org/10.1016/S0022-3115(98)00008-7)
- Citro, V., Luchini, P., Giannetti, F., Auteri, F., 2017. Efficient stabilization and acceleration of numerical simulation of fluid flows by residual recombination. *J. Comput. Phys.* 344. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2017.04.081>
- Connaissance des énergies, 2011. Principes de fonctionnement d'un réacteur nucléaire [WWW Document]. *Connaiss. Énerg.* URL <https://www.connaissancedesenergies.org/fiche-pedagogique/principes-de-fonctionnement-d-un-reacteur-nucleaire> (accessed 7.23.19).
- Coulomb, C.A., 1821. Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages.
- De Lambert, S., 2021. Contribution à l'analyse multiphysique de la déformation d'assemblage (PhD Thesis). Université Paris-Saclay.
- De Lambert, S., Campioni, G., Faucher, V., Leturcq, B., Cardolaccia, J., 2019. Modeling the consequences of fuel assembly bowing on PWR core neutronics using a Monte-Carlo code. *Ann. Nucl. Energy* 134, 330–341. <https://doi.org/10.1016/j.anucene.2019.06.017>

- De Lambert, S., Cardolaccia, J., Faucher, V., Thomine, O., Leturcq, B., Campioni, G., 2021. Semi-analytical modeling of the flow redistribution upstream from the mixing grids in a context of nuclear fuel assembly bow. *Nucl. Eng. Des.* 371, 110940. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2020.110940>
- Dumon, A., Allery, C., Ammar, A., 2011. Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.* 230, 1387–1407. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2010.11.010>
- Dvorak, G.J., 1992. Transformation field analysis of inelastic composite materials. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci.* 437, 311–327. <https://doi.org/10.1098/rspa.1992.0063>
- Fauque, J., Ramière, I., Ryckelynck, D., 2018. Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 115, 117–139. <https://doi.org/10.1002/nme.5798>
- Fernandes, R., 2010. Modélisation de la déformation d'assemblages combustibles d'une centrale REP.
- Fidleris, V., 1988. The irradiation creep and growth phenomena. *J. Nucl. Mater.* 159, 22–42. [https://doi.org/10.1016/0022-3115\(88\)90083-9](https://doi.org/10.1016/0022-3115(88)90083-9)
- Fish, J., Shek, K., 1999. Finite deformation plasticity for composite structures: Computational models and adaptive strategies. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 172, 145–174. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00228-X](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00228-X)
- Fléjou, J.-L., 2018. Relations de comportement des éléments discrets [WWW Document]. Code Aster. URL [https://www.code-aster.org/doc/default/fr/man\\_r/r5/r5.03.17.pdf](https://www.code-aster.org/doc/default/fr/man_r/r5/r5.03.17.pdf) (accessed 9.14.18).
- Fournier, Y., Vurpillot, C., Béchaud, C., 2007. Evaluation of fluid flow in the lower core of a PWR with Code\_Saturne. *Nucl. Eng. Des.* 237, 1729–1744. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2007.02.025>
- Gabrielsson, P., Schrire, D., Suvantseg, E., Malmerg, M., 2018. Investigation of the development of fuel assembly bow Ringhals 3 and 4. Presented at the TOPFUEL2018 reactor fuel performance, European Nuclear Society, Prague, Czech Republic.
- Gharbi, N., 2015. Contribution à la compréhension de la déformation sous irradiation des alliages de zirconium à forte dose (PhD Thesis). Université de La Rochelle.
- Gilbon, D., Soniak, A., Doriot, S., Mardon, J.-P., 2000. Irradiation creep and growth behavior, and microstructural evolution of advanced Zr-base alloys. *ASTM Spec. Tech. Publ.* 51–73.
- Grard, H., 2014. Physique, fonctionnement et sûreté des REP, Génie Atomique. EDP Science, Les Ulis.
- Griffiths, M., Gilbert, R.W., Fidleris, V., 1989. Accelerated irradiation growth of zirconium alloys, in: *Zirconium in the Nuclear Industry: Eighth International Symposium*. ASTM International.
- Guillet, J.-L., Guerin, Y., Bonin, B., 2008. Combustibles nucléaires. CEA Saclay; Groupe Moniteur.
- Hammoud, M., Beringhier, M., Grandidier, J.-C., 2011. Application de la PGD à un problème viscoélastique avec un grand nombre de variables internes et un large spectre de temps de relaxation, in: *10e Colloque National En Calcul Des Structures*. Giens, France, p. Clé USB.
- Horváth, Á., Dressel, B., 2013. On numerical simulation of fuel assembly bow in pressurized water reactors. *Nucl. Eng. Des.* 265, 814–825. <https://doi.org/10.1016/j.nucengdes.2013.09.031>
- Hourdequin, N., 1995. Contribution à la modélisation du comportement mécanique des combustibles REP sous irradiation, avec en particulier le traitement de l'interaction pastille-gaine dans un crayon combustible (thesis). Châtenay-Malabry, Ecole centrale de Paris.
- International Atomic Energy Agency, 2010. Review of fuel failures in water cooled reactors. International Atomic Energy Agency, Vienna.
- IRSN, 2019. assemblage-combustible.jpg (411x629) [WWW Document]. URL <https://www.irsn.fr/dechets/dechets-radioactifs/PublishingImages/assemblage-combustible.jpg> (accessed 7.23.19).
- Karhunen K., 1946. Uber lineare methoden für wahrscheinigkeitsrechnung. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. Phys.* 3–79.
- Kecek, A., Van Uffelen, P., 2016. Development of M5 cladding material correlations in the TRANSURANUS code: revision 1.
- Kelly, P.M., Smith, P.D., 1973. Strain-ageing in zirconium-oxygen alloys. *J. Nucl. Mater.* 46, 23–34. [https://doi.org/10.1016/0022-3115\(73\)90118-9](https://doi.org/10.1016/0022-3115(73)90118-9)
- Kerkar, N., Paulin, P., 2008. Exploitation des coeurs REP, EDP Sciences. ed, Génie Atomique.

- Koiter, W.T., 1953. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic plastic materials with a singular yield surface. *Q. Appl. Math.* Vol 11 350–354.
- Kuhn, H.W., Tucker, A.W., 1951. Nonlinear Programming. Presented at the Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, The Regents of the University of California.
- Ladevèze, P., 1985. Sur une famille d'algorithmes en mécanique des structures. *CR Acad Sc* 300, 41–44.
- Lamorte, N., Méry de Montigny, E., Goreaud, N., Chazot, B., Marx, V., 2021. Advanced predictive tool for fuel assembly bow design performance evaluations. Presented at the TOP FUEL 2021, Santander, Spain.
- Largenton, R., Michel, J.-C., Suquet, P., 2013. Optimisation de l'analyse en champs de transformation non uniformes pour le comportement du combustible MOX en service., in: 11ème Colloque National En Calcul Des Structures (CSMA 2013). Giens, France, p. 8.
- Lascar C., 2015. Advanced predictive tool for fuel assembly bow based on a 3d coupled fsi approach. Presented at the TOPFUEL 2015, European Nuclear Society, Zurich, Switzerland, pp. 323–331.
- Lee, D., Seung, H., 1999. Learning the Parts of Objects by Non-Negative Matrix Factorization. *Nature* 401, 788–91. <https://doi.org/10.1038/44565>
- Levasseur, B., Chaigne, G., Fernandes, R., 2009. 3-D Modeling of Fuel Assemblies Growth and Bow for EDF PWRs.
- Liang, Y.C., Lee, H.P., Lim, S.P., Lin, W.Z., Lee, K.H., Wu, C.G., 2002. PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION AND ITS APPLICATIONS—PART I: THEORY. *J. Sound Vib.* 252, 527–544. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.4041>
- Lumley, J.L., 1967. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbul. Radio Wave Propag.* 166–178.
- Maistre, J.F. de, 2018. Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact. Application à la simulation du comportement des combustibles nucléaires (phdthesis). Université Paris sciences et lettres.
- Mardon, J.P., Hoffmann, P.B., Garner, G.L., 2005a. High burnup behavior and licensing of alloy M5TM, in: *Nuclear Energy Systems for Future Generation and Global Sustainability*. p. 558.
- Mardon, J.P., Hoffmann, P.B., Garner, G.L., 2005b. High burnup behavior and licensing of alloy M5TM. *Water React. Fuel Perform. Meet. Kyoto Jpn.*
- Metoui, S., Pruliere, E., Ammar, A., Dau, F., Iordanoff, I., 2014. The proper generalized decomposition for the simulation of delamination using cohesive zone model. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 99, 1000–1022. <https://doi.org/10.1002/nme.4732>
- Michel, J.-C., Suquet, P., 2016. A model-reduction approach in micromechanics of materials preserving the variational structure of constitutive relations. *J. Mech. Phys. Solids* 90, 254–285. <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.02.005>
- Michel, J.C., Suquet, P., 2004. Computational analysis of nonlinear composite structures using the nonuniform transformation field analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 193, 5477–5502. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2003.12.071>
- Michel, J.C., Suquet, P., 2003. Nonuniform transformation field analysis. *Int. J. Solids Struct.* 40, 6937–6955. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(03\)00346-9](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(03)00346-9)
- Ortiz, M., Simo, J.C., 1986. An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 23, 353–366. <https://doi.org/10.1002/nme.1620230303>
- Oskay, C., Fish, J., 2007. Eigendeformation-based reduced order homogenization for failure analysis of heterogeneous materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 196, 1216–1243. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2006.08.015>
- Paatero, P., 1997. Least squares formulation of robust non-negative factor analysis. *Chemom. Intell. Lab. Syst.* 37, 23–35. [https://doi.org/10.1016/S0169-7439\(96\)00044-5](https://doi.org/10.1016/S0169-7439(96)00044-5)
- Pearson, K, 1901. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Lond. Edinb. Dublin Philos. Mag. J. Sci.* 2, 559–572. <https://doi.org/10.1080/14786440109462720>
- Priser, M., 2011. Analyses multi-échelles du comportement en fluage d'alliages de zirconium (PhD Thesis). Université de Bretagne Sud.

- Relun, N., Néron, D., Boucard, P.A., 2013. A model reduction technique based on the PGD for elastic-viscoplastic computational analysis. *Comput. Mech.* 51, 83–92. <https://doi.org/10.1007/s00466-012-0706-x>
- Rice, J.R., 1970. On the Structure of Stress-Strain Relations for Time-Dependent Plastic Deformation in Metals. *J. Appl. Mech.* 37, 728–737. <https://doi.org/10.1115/1.3408603>
- Richardson, L.F., Glazebrook, R.T., 1911. IX. The approximate arithmetical solution by finite differences of physical problems involving differential equations, with an application to the stresses in a masonry dam. *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. Contain. Pap. Math. Phys. Character* 210, 307–357. <https://doi.org/10.1098/rsta.1911.0009>
- Roussette, S., Michel, J.C., Suquet, P., 2009. Nonuniform transformation field analysis of elastic–viscoplastic composites. *Compos. Sci. Technol.* 69, 22–27. <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2007.10.032>
- Ryckelynck, D., 2009. Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 77, 75–89. <https://doi.org/10.1002/nme.2406>
- Ryckelynck, D., Chinesta, F., Cueto, E., Ammar, A., 2006. On the a priori model reduction: Overview and recent developments. *Arch. Comput. Methods Eng.* 13, 91–128.
- Ryckelynck, D., Missoum-Benziane, D., 2010. Multi-level A Priori Hyper-Reduction of mechanical models involving internal variables. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 199, 1134–1142. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2009.12.003>
- Saeed, A., Bakr, M.A., Saqib, A.U., 2016. Estimation of Axial and radial in-core power peaking in PWR plant using artificial neural network technique. *IEEE*, pp. 1–6. <https://doi.org/10.1109/ICET.2016.7813216>
- Scholz, R., Matera, R., 2000. Proton irradiation creep of Inconel 718 at 300°C. *J. Nucl. Mater.* 283–287, 414–417. [https://doi.org/10.1016/S0022-3115\(00\)00081-7](https://doi.org/10.1016/S0022-3115(00)00081-7)
- Serres, A., 2008. Corrosion sous contrainte par l'iode du Zircaloy-4 : cinétiques de fissuration et influence de l'irradiation sur l'amorçage (PhD thesis). INSA.
- Sheng, D.-Y., Seidl, M., 2015. Towards the development of a full-scale transient cfd model to simulate the static and dynamic in-core mass flux distribution in a classical german PWR. Presented at the NURETH-16th International Topical Meeting on Nuclear Reactor Thermalhydraulics, Chicago, IL.
- Signorini, A., 1959. Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti Mat. E Delle Sue Appl.* V Ser. 18, 95–139.
- Sirovich, L., 1987. Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. *Q. Appl. Math.* 45, 561–571.
- Stabel, J., Dressel, B., Marx, V., Muench, C.J., Horvath, A., Brun, C., Mery de Montigny, E., Song, C., 2011. Advanced methodology to predict in-reactor bow of PWR fuel assemblies for efficient design optimization : background, validation, examples. Presented at the Water Reactor Fuel Performance Meeting, Chengdu, China.
- Wanninger, A., 2018a. Mechanical analysis of the bow deformations of the fuel assemblies in a pressurized water reactor core. Technische universitat München, München.
- Wanninger, A., 2018b. Mechanical analysis of the bow deformations of the fuel assemblies in a pressurized water reactor core. Technische universitat München.
- Wanninger, A., Seidl, M., Macian, R., 2016a. Screening sensitivity analysis of a PWR fuel assembly FEM structural model. Presented at the Top Fuel 2016, Advanced Nuclear Sciences, Boise, ID.
- Wanninger, A., Seidl, M., Macian, R., 2016b. Screening sensitivity analysis of a PWR fuel assembly FEM structural model.
- Wanninger, A., Seidl, M., Macián-Juan, R., 2018a. Mechanical analysis of the bow deformation of a row of fuel assemblies in a PWR core. *Nucl. Eng. Technol.* 50, 297–305. <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.12.009>
- Wanninger, A., Seidl, M., Macián-Juan, R., 2018b. Mechanical analysis of the bow deformation of a row of fuel assemblies in a PWR core. *Nucl. Eng. Technol.*, Special issue on the water reactor fuel performance meeting 2017 (WRFPM 2017) 50, 297–305. <https://doi.org/10.1016/j.net.2017.12.009>

Réduction de modèles thermomécaniques non linéaires d'assemblages combustibles en vue d'un calcul de cœur REP

**Mots clés :** réduction d'ordre de modèles, fluage, contact, frottement

**Résumé :** Les assemblages combustibles se déforment progressivement de quelques millimètres au sein du cœur des réacteurs nucléaires à eau pressurisée. Les forces hydrauliques exercées par le caloporteur, le fluage sous irradiation et le contact-frottement des crayons dans les grilles en sont la cause. *In fine*, ces déformations irréversibles peuvent générer des endommagements mineurs ou des délais de manutention. Le calcul simultané et détaillé des déformations de tous les assemblages au sein du cœur par la technique des éléments finis serait de taille prohibitive. On cherche donc à établir un modèle réduit d'assemblage combustible *a posteriori* qui permette de réduire de plusieurs ordres de grandeur la durée d'exécution d'un calcul de cœur sans dégrader significativement sa précision. Afin d'atteindre cet objectif, nous nous sommes inspirés de la NTFA, technique d'homogénéisation non-linéaire (Michel et Suquet, 2003), dont une particularité est de mettre en œuvre une loi de comportement en base réduite. Cette méthode a été adaptée au traitement d'un volume élémentaire

représentatif de type structure élancée sans séparation d'échelle afin d'obtenir un modèle réduit pour le fluage hétérogène de l'assemblage combustible. La réduction du modèle de contact s'appuie, quant à elle, sur les travaux de (Balajewicz et al., 2016), qui utilise une base de modes positifs obtenue par NMF pour représenter les multiplicateurs de Lagrange du contact et réduire le nombre des conditions de Signorini. Trois formulations de type primale ou mixtes sont alors définies, validées et comparées. Enfin, la réduction du modèle de frottement de Coulomb s'appuie sur une base POD de modes de glissements et sur les efforts normaux issus du problème de contact. Le vecteur seuil des forces de frottement est approché à chaque instant par superposition des efforts normaux et par interpolation sphérique de la direction de glissement par rapport aux directions modales. Le critère de frottement en base réduite étant défini, une régularisation en facilite la mise en œuvre. L'ensemble des cas-tests fait apparaître des speed-up allant de 40 à 1000 suivant les cas.

**Title :** Order reduction of nonlinear thermomechanical models of fuel assemblies for PWR core calculation

**Keywords :** model order reduction, creep, contact, friction

Fuel assemblies deform progressively by a few millimeters within the core of pressurized water reactors. The main reasons are the hydraulic forces exerted by the coolant, the creep under irradiation and the contact-friction of the rods in the grids. In the end, these irreversible deformations can generate minor damages or handling delays. The detailed calculation of the deformations of all the assemblies within the core by the finite element technique would be prohibitively large. Therefore, we seek to establish an *a posteriori* reduced model of the fuel assembly that would reduce the execution time of a core calculation by several orders of magnitude without significantly degrading its accuracy. In order to achieve this objective, we were inspired by the NTFA, a non-linear homogenization technique (Michel and Suquet, 2003), whose particularity is to implement an evolution law in reduced basis. This method has been adapted to a representative elementary volume of slender structure without scale

separation in order to obtain a reduced model for the heterogeneous creep of the fuel assembly. The order reduction of the contact model, meanwhile, builds on the work of (Balajewicz et al., 2016), which uses a positive mode basis obtained by NMF to represent the Lagrange multipliers of the contact and reduce the number of Signorini conditions. Three primal or mixed formulations are then defined, validated and compared. Finally, the reduction of the Coulomb friction model is based on a POD basis of sliding modes and uses the normal forces solution of the contact problem. The threshold vector of the friction forces is approximated at any time by superposition of the normal forces and by spherical interpolation of the sliding direction with respect to the modal directions. The friction criterion in reduced basis being defined, a regularization facilitates its implementation. All the test cases show speed-ups ranging from 40 to 1000 depending on the case.