



**HAL**  
open science

# Etude de la facilité d'émission des cuivres et des instruments à anche au moyen des diagrammes de bifurcation

Rémi Matteoli

► **To cite this version:**

Rémi Matteoli. Etude de la facilité d'émission des cuivres et des instruments à anche au moyen des diagrammes de bifurcation. Acoustique [physics.class-ph]. Le Mans Université, 2022. Français. NNT : 2022LEMA1039 . tel-03990730

**HAL Id: tel-03990730**

**<https://theses.hal.science/tel-03990730>**

Submitted on 15 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

LE MANS UNIVERSITÉ

ÉCOLE DOCTORALE N° 602  
*Sciences pour l'Ingénieur*  
Spécialité : *Acoustique*

Par

**Rémi Mattéoli**

**Étude de la facilité d'émission des cuivres et des instruments à  
anche au moyen des diagrammes de bifurcation**

Thèse présentée et soutenue à Le Mans, le 12 décembre 2022

Unité de recherche : UMR CNRS 6613 Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM)

Thèse N° : 2022LEMA1039

## Rapporteurs avant soutenance :

Thomas HÉLIE     Directeur de recherche CNRS, IRCAM  
Olivier THOMAS     Professeur des universités, Arts et Métiers

## Composition du Jury :

Président :	Olivier THOMAS	Professeur des universités, Arts et Métiers
Examineurs :	Thomas HÉLIE	Directeur de recherche CNRS, IRCAM
	Soizic TERRIEN	Chargée de recherche CNRS, LAUM
	Christophe VERGEZ	Directeur de recherche CNRS, LMA
	Murray CAMPBELL	Professor, School of Physics and Astronomy
Dir. de thèse :	Jean-Pierre DALMONT	Professeur des universités, LAUM
Co-dir. de thèse :	Sylvain Maugeais	Maître de conférences, LMM





---

*À Joël.*



# TABLE DES MATIÈRES

---

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>1 Modèle physique et outils théoriques</b>	<b>17</b>
1.1 Modèle générique d'instruments à vent . . . . .	18
1.1.1 Équations de base . . . . .	18
1.1.2 Mesure et modélisation de l'impédance d'entrée . . . . .	20
1.1.3 Point de vue des systèmes dynamiques . . . . .	24
1.1.4 Adimensionnement . . . . .	27
1.2 Méthodes numériques . . . . .	28
1.2.1 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	28
1.2.2 Résolution temporelle . . . . .	30
1.2.3 Diagrammes de bifurcation . . . . .	30
1.3 Étude de l'impact de la représentation modale choisie sur les résultats numériques . . . . .	33
1.3.1 Convention de notation . . . . .	33
1.3.2 Modèles de décomposition modale de l'impédance d'entrée . . . . .	34
1.3.3 Calcul analytique des solutions stationnaires . . . . .	35
1.3.4 Analyse de stabilité linéaire . . . . .	36
1.3.5 Diagrammes de bifurcation . . . . .	38
<b>2 Caractérisation de la pression de seuil des cuivres au moyen des diagrammes de bifurcation</b>	<b>41</b>
2.1 Introduction . . . . .	46
2.2 Theoretical background . . . . .	47
2.2.1 Generic brass model . . . . .	47
2.2.2 Numerical considerations . . . . .	50
2.3 Lips' parameters and linear stability analysis . . . . .	55

TABLE DES MATIÈRES

---

2.3.1	Constant lip-opening height at rest . . . . .	55
2.3.2	Frequency-dependent lip-opening height at rest . . . . .	56
2.4	Bifurcation diagrams and minimal blowing pressure . . . . .	59
2.4.1	Case of the third regime . . . . .	59
2.4.2	Minimal blowing pressures . . . . .	60
2.5	Bifurcation diagrams, case of the first regime . . . . .	62
2.5.1	Case of the trombone . . . . .	62
2.5.2	Case of a bass brass instruments with predominantly-expanding bore profile . . . . .	64
2.5.3	Assessment of the frequency interval between pedal note and ghost note . . . . .	68
2.6	Conclusion . . . . .	68
2.7	Acknowledgements . . . . .	71
2.8	Appendix . . . . .	71
<b>3</b>	<b>Variété des notes fantômes des tubas, euphoniums et saxhorns</b>	<b>75</b>
3.1	Introduction . . . . .	79
3.2	Theoretical background . . . . .	83
3.2.1	Physical model of brass instrument . . . . .	83
3.2.2	Numerical considerations . . . . .	85
3.3	Minimal blowing pressures and playing frequencies . . . . .	91
3.3.1	Case of the B $\flat$ -contrabass tuba . . . . .	91
3.3.2	Case of the B $\flat$ -baritone saxhorn . . . . .	98
3.4	Comparison between tubas with different nominal pitch . . . . .	102
3.4.1	Recording set-up . . . . .	102
3.4.2	Results . . . . .	102
3.5	Conclusion . . . . .	106
3.6	Acknowledgments . . . . .	107
3.7	Appendix . . . . .	108
3.8	Résultats supplémentaires . . . . .	110
3.8.1	Processus de reconnexion de la branche de la note pédale . . . . .	110
3.8.2	Étude de l'évolution des pressions et fréquences de seuil optimales entre un saxhorn baryton et un saxhorn basse . . . . .	113
<b>4</b>	<b>Étude expérimentale d'un système à deux pics</b>	<b>117</b>

4.1	Outils expérimentaux . . . . .	119
4.1.1	Impédance d'entrée . . . . .	119
4.1.2	Bouche artificielle . . . . .	124
4.1.3	Obtention des diagrammes expérimentaux . . . . .	129
4.1.4	Confrontation au modèle physique . . . . .	135
4.2	Analyse de bifurcation expérimentale . . . . .	139
4.2.1	Choix des configurations du résonateur . . . . .	140
4.2.2	Influence de la configuration du résonateur sur les diagrammes de bifurcation . . . . .	142
4.3	Conclusion . . . . .	142
4.A	Annexe : étude du phénomène de <i>vena contracta</i> dans le diaphragme . . .	144
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>147</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>153</b>



# INTRODUCTION

---

La maîtrise d'un instrument de musique par le musicien nécessite plusieurs années de travail assidu. Celle-ci constitue un processus de long terme, s'améliorant à travers une pratique régulière, jusqu'à ce que l'intention artistique se retrouve naturellement dans le résultat musical. Au bout d'un temps suffisamment long, le musicien parvient alors à acquérir un geste expert, et à s'affranchir des difficultés techniques imposées par l'instrument.

Pour un scientifique cherchant à comprendre le processus de production du son par un instrument de musique, l'observation et l'analyse du comportement du musicien en situation de jeu est cruciale. En effet, cette démarche permet de donner des indications sur les paramètres que modifie le musicien lors du jeu (force avec laquelle souffle le musicien, position de la bouche,...), afin de produire le son voulu. Un des objectifs de l'acoustique musicale est d'expliquer les mécanismes en jeu dans la production du son, et de mesurer l'impact des paramètres de contrôle du musicien sur le régime de jeu. Pour cela, il est possible de reproduire le processus de génération du son par un instrument de musique au moyen d'un modèle physique de l'instrument. Dans cette thèse, on s'intéressera aux modèles permettant de reproduire le comportement des instruments de la famille des cuivres et des instruments à anche simple. Ces modèles sont nécessairement une simplification de la réalité, mais permettent une hiérarchisation des paramètres influents sur le jeu.

Les instruments de la famille des cuivres sont ceux pour lesquels le son résulte de la vibration des lèvres couplées au tube. On y retrouve notamment les tubas, le trombone, le saxhorn, le cor, la trompette, ou encore le serpent et l'ophicléide. Le musicien jouant d'un de ses instruments dispose de plusieurs moyens de modifier son jeu. Premièrement, il peut agir les caractéristiques de l'instrument lui-même, en appuyant sur les pistons ou en déplaçant la coulisses. Ensuite, il peut contrôler la pression de l'air qu'il injecte dans son instrument, par exemple pour modifier la nuance. Enfin et surtout, il peut modifier les caractéristiques de ses lèvres, et donc la façon dont elles vibrent, en modifiant son masque



musculaire<sup>1</sup>. Ce faisant, il modifie entre autres la fréquence de résonance de ses lèvres, voisine de la fréquence de jeu. C'est ce dernier type de contrôle qui permet au musicien de choisir entre plusieurs régimes d'oscillation, sans appuyer sur les pistons ou la coulisse de son instrument : c'est la série des notes dites « naturelles » (Campbell et al. 2021). Dans une certaine mesure, le musicien peut également faire en sorte de modifier continûment la fréquence de jeu au voisinage d'une note, mais cela lui demandera un certain effort. Du point de vue du musicien, les notes naturelles de l'instrument sont perçues comme « les plus faciles à jouer ». L'intervalle entre ces notes diminue avec leur numéro : il y a une octave entre la note pédale (note naturelle la plus grave) et la seconde naturelle, mais seulement un ton entre la septième et la huitième. Dans le registre suraigu, les notes naturelles forment un continuum et le musicien peut passer continûment de l'une à l'autre. Cette série des notes naturelles est commune à tous les cuivres en terme d'intervalle entre notes, à l'exception des tubas qui en possèdent une supplémentaire, appelée la note fantôme. Cette note est singulière à plusieurs titres comme nous le verrons dans ce travail. La gestion du masque musculaire par le musicien est donc un point clé pour la compréhension des instruments à vent, mais est aussi extrêmement complexe à reproduire et à simuler.

D'un autre côté, la famille des instruments à anche regroupe les instruments pour lesquels la production du son fait intervenir la vibration d'une ou plusieurs anche(s). On y retrouve notamment le saxophone, la clarinette, le hautbois ou le basson. À l'instar des cuivres, le musicien peut agir sur les caractéristiques de l'instrument en modifiant son doigté<sup>2</sup>, et peut contrôler la pression de l'air injecté dans l'instrument. En revanche, au contraire des cuivres, il est plus difficile pour le musicien de modifier la façon dont vibre l'anche : ses caractéristiques sont fixées pour une anche donnée, même si elles sont dépendantes de la façon dont le musicien comprime l'anche avec sa lèvre inférieure, de l'humidité ou de la fatigue. En particulier, la fréquence de résonance de l'anche est constante, très élevée devant la fréquence des sons de l'ambitus de l'instrument (typiquement entre 1 et 2 kHz). Au contraire des cuivres, les instruments à anche ne possèdent que deux voire trois notes naturelles espacées d'une octave ou d'une douzième, ainsi que le « canard », note suraiguë dont la fréquence est proche de la fréquence de résonance de l'anche.

Les travaux présentés dans cette thèse visent à mieux comprendre l'émergence des

---

1. Les musiciens désignent par ce terme l'ensemble des muscles du visage agissant sur les lèvres.

2. c'est-à-dire en bouchant ou débouchant les trous latéraux de l'instrument

différents régimes périodiques, ainsi qu'à évaluer l'impact des différents paramètres de contrôle du musicien et de la géométrie de l'instrument sur la facilité d'émission de ces régimes. Les musiciens décrivent habituellement une stratégie de jeu consistant à minimiser l'effort fourni pour produire un son dans un régime donné (Campbell et al. 2021). On fait donc le choix d'évaluer la facilité d'émission d'une note à travers sa pression de seuil<sup>3</sup>, c'est-à-dire la valeur de pression dans la bouche du musicien nécessaire pour mettre en vibration ses lèvres. Cette recherche s'appuie sur l'étude d'un modèle physique d'instrument reproduisant les mécanismes impliqués dans la production du son, couplée à une analyse du ressenti des musiciens. Trois méthodes d'analyse sont retenues pour évaluer la capacité du modèle à reproduire les régimes d'oscillations observés expérimentalement : l'analyse de stabilité linéaire, la simulation temporelle, et la continuation numérique. Cette approche numérique est complétée par une étude expérimentale portant sur l'analyse de signaux enregistrés de musiciens dans le cas des tubas d'une part, afin d'évaluer la pertinence des informations sur l'intonation des notes naturelles fournies par le modèle. En particulier, on s'attache à caractériser une note naturelle propre aux tubas, mise en évidence numériquement dans (Velut et al. 2017), puis dont l'existence avait été prouvée expérimentalement. Les résultats numériques et expérimentaux se complètent et sont confrontés aussi souvent que possible. D'autre part, on cherche à mesurer l'impact des paramètres de contrôle sur le régime de jeu dans le cas des instruments à anche, au moyen d'une bouche artificielle afin de gagner en répétabilité.

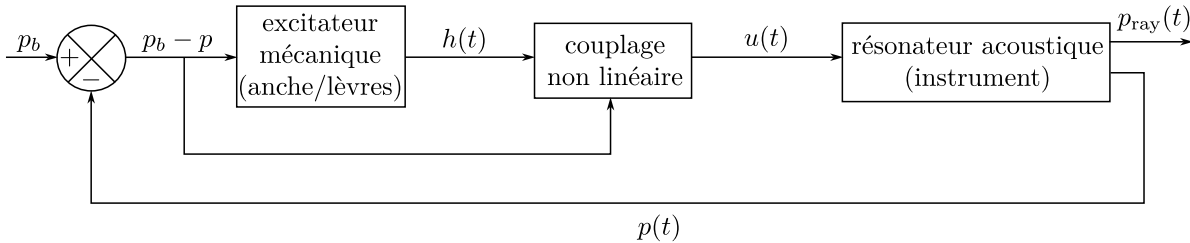
Un modèle physique d'instrument de musique consiste en un système d'équations modélisant partiellement les phénomènes physiques intervenant au sein de l'instrument pour aboutir à la production d'un son, avec pour objectif que les résultats donnés par le modèle soient cohérents avec les observations expérimentales. Il existe aujourd'hui des modèles pour la plupart des instruments à vent : des cuivres aux instruments à anche (Campbell et al. 2021 ; Chaigne et Kergomard 2013), en passant par les flûtes (Terrien et al. 2014). Les cuivres, au même titre que les instruments à anche, sont qualifiés de systèmes oscillants auto-entretenus : la production du son s'y fait à partir d'une source d'énergie quasi-statique<sup>4</sup>. Dans le cas des cuivres (respectivement des instruments à anche), la source d'énergie en entrée du système est la pression dans la bouche du musicien, qui va mettre

---

3. On pourrait également considérer que la note la plus facile à jouer est la plus timbrée, c'est-à-dire la note la plus riche spectralement.

4. c'est-à-dire variant lentement dans le temps par rapport aux échelles de temps de l'acoustique, si l'on ne s'intéresse pas à l'attaque de la note.

les lèvres (respectivement l’anche) en vibration, et ainsi instaurer une pression acoustique oscillante à l’intérieur de l’instrument et dont une partie sera rayonnée vers l’extérieur par le pavillon. Le couplage entre le musicien et l’instrument se modélise à l’aide du débit d’air s’écoulant de la bouche du musicien dans l’instrument, dépendant de manière non linéaire des autres variables du modèle. Les travaux historiques de Helmholtz (Helmholtz et Margenau 1954) ont montré qu’une représentation du système {musicien  $\cup$  instrument} sous forme de système bouclé était pertinente, à la manière de la figure 1. En première approximation, on considère alors que la note jouée par l’instrument est le fruit du couplage non linéaire de la résonance mécanique des lèvres avec une des résonances acoustiques de la colonne d’air contenue dans le tube de l’instrument (Campbell et al. 2021). C’est également l’approche adoptée dans cette thèse.



**Figure 1** – Schéma bloc représentant le processus de production du son dans un instrument de musique à vent (cuivre ou instrument à anche).  $p_b$  : pression dans la bouche du musicien ;  $h(t)$  : hauteur anche/table dans le cas des instruments à anche, ou hauteur entre lèvres dans le cas des cuivres ;  $u(t)$  : débit d’air s’écoulant de la bouche du musicien dans l’instrument ;  $p(t)$  : pression acoustique régnant dans l’embouchure de l’instrument ;  $p_{\text{ray}}(t)$  : pression acoustique rayonnée vers l’extérieur en sortie de l’instrument.

Le parti pris de cette thèse est de se baser sur un modèle de cuivre et d’instrument à anche aussi simple que possible. Ainsi, les lèvres sont modélisées par un oscillateur harmonique amorti à un degré de liberté, suivant (Elliott et Bowsher 1982 ; Fletcher 1993). Par ailleurs, la propagation du son dans l’instrument est supposée linéaire : le phénomène de cuivrage (Hirschberg et al. 1995) intervenant dans la production du son à fort niveau ne peut donc pas être décrite ici. En effet, cette modification du timbre du son lorsque le musicien joue fort nécessiterait la prise en compte de la propagation non linéaire des ondes de pression dans l’instrument. Cependant, (Vergez 2010) a démontré que ce phénomène a peu d’influence sur l’auto-oscillation. De même, l’influence du conduit vocal (Chen et al. 2011) n’est pas pris en compte, ce qui implique une pression acoustique efficace dans la bouche négligeable devant celle régnant dans l’embouchure de l’instrument : la pression

---

dans la bouche est considérée constante. Enfin, l'instrument seul est représenté par son impédance d'entrée sur laquelle on effectue une identification modale, sans tenir compte des éventuelles pertes non linéaires en sortie de l'instrument. Dans le cas des instruments à petits trous latéraux comme la clarinette, cette hypothèse n'est valable que pour des nuances *piano* voire *pianissimo*. Le modèle physique ainsi décrit constitue un système dynamique non linéaire. Cette terminologie regroupe de nombreux modèles construits pour décrire des phénomènes pourtant très différents les uns des autres, allant des phénomènes climatiques aux modes de fonctionnement d'un réacteur à fusion nucléaire, en passant par l'évolution de réactions chimiques. Plusieurs outils et méthodes mathématiques ont été développés pour analyser le comportement de tels systèmes, et permettre d'apporter des informations précieuses sur les régimes d'oscillation du modèle de cuivre et d'instrument à anche étudié ici.

La première approche est l'analyse de stabilité linéaire. Elle consiste à analyser la stabilité d'une solution d'équilibre non oscillante en fonction d'un paramètre de contrôle, au moyen d'une linéarisation du système au voisinage de son équilibre. On obtient alors la valeur seuil de ce paramètre de contrôle pour laquelle la solution d'équilibre se déstabilise et donne potentiellement naissance à un régime oscillant. Cette méthode présente l'avantage d'être peu coûteuse en temps de calcul, même si la quantité d'informations fournies sur le régime oscillant est limitée : la forme d'onde ou la stabilité ne peuvent être déterminées par l'étude du modèle linéarisé. On utilise cette méthode afin d'obtenir une première estimation des pressions de seuil – dites linéaires – de l'instrument en fonction des paramètres de contrôle, ce qui prépare le terrain pour une étude plus poussée comme l'analyse de bifurcation. (Velut et al. 2017) ont déjà montré que les pressions de seuil linéaires étaient directement reliées aux seuils d'émergence des notes naturelles.

Afin d'obtenir plus d'informations sur le régime d'oscillation, on utilise un autre outil classique d'étude des systèmes dynamiques non linéaires : la simulation temporelle. Cette méthode consiste à résoudre les équations constituant le modèle minimal d'instrument à vent pour un ensemble donné de valeurs des paramètres du modèle, à l'aide d'une méthode classique de résolution d'équations différentielles de type Runge-Kutta. On obtient ainsi une forme d'onde simulée de toutes les variables du système, ainsi que des informations sur le régime transitoire qui la précède, pour un jeu de paramètres donné. Une des principales limitations de cette méthode est la sensibilité aux conditions initiales du système, déterminant la solution stable vers laquelle le système converge dans le cas où

plusieurs régimes stables coexistent. Cette méthode d'analyse permet ainsi de compléter les résultats d'analyse de stabilité linéaire. C'est l'approche la plus communément adoptée pour étudier un modèle physique, que ce soit pour l'analyse de ses solutions ou pour la synthèse sonore.

Le troisième outil utilisé permet la continuation des branches des solutions périodiques d'un système dynamique en fonction d'un paramètre choisi par l'utilisateur, appelé paramètre de continuation, qui sera en pratique un paramètre de contrôle du musicien. L'approche retenue est celle d'AUTO-07p (Doedel et al. 1999), utilisant la collocation orthogonale pour discrétiser les équations différentielles du système, ainsi qu'une méthode de type prédicteur-correcteur pour déterminer les caractéristiques d'une solution (périodique ou non) en fonction d'un ou plusieurs paramètres de contrôle. La stabilité des solutions est également déterminée via une analyse des multiplicateurs de Floquet. Cet outil est appliqué dans ce travail à la continuation de branches de solutions périodiques de cuivres et d'instruments à anche simple, et donne une vision très globale du fonctionnement du système étudié. En particulier, la coexistence de solutions pour un jeu de paramètres donné, et l'évolution de leur stabilité respective en fonction du paramètre de continuation permettent de mieux comprendre les changements de régime du système. Cette méthode donne accès à de nouvelles valeurs de pression de seuil, car il apparaît que certains régimes périodiques peuvent être atteints loin de l'équilibre, et ce pour des valeurs de pression dans la bouche plus faibles que celles données par analyse de stabilité linéaire. La continuation de branches de solutions périodiques d'un instrument à anche simple a été réalisée récemment dans (Gilbert et al. 2020), ainsi que pour la trompette (Fréour et al. 2020). D'autres logiciels permettant la continuation numérique existent, comme MANLAB (Karkar et al. s. d.). Ce logiciel repose sur la méthode asymptotique numérique (Cochelin et al. 2007), et a été appliquée par exemple à la clarinette dans (Karkar et al. 2012) ou à la trompette dans (Fréour et al. 2020). Dans ce travail, on applique la continuation numérique à l'aide d'AUTO-07p au trombone et plus particulièrement au tuba, dans le prolongement direct de (Velut et al. 2017). En effet, l'efficacité de l'analyse de stabilité linéaire à décrire la série des notes naturelles avait été prouvée dans le cas du trombone et du tuba, sauf pour la note pédale du tuba, non décrite par cette analyse. Il avait alors été suggéré que le modèle physique ou la méthode d'analyse utilisés étaient insuffisants, ce qui constitue le point de départ des travaux numériques présentés dans cette thèse. Ainsi, la continuation numérique des branches de solutions est particulièrement mise en avant dans cette thèse, afin d'explorer de manière plus exhaustive les caractéristiques des régimes périodiques des

cuivres et des instruments à anche.

Cette étude théorique d'un modèle physique de cuivre et d'instrument à anche est complétée par une étude expérimentale des deux types d'instrument. Pour les cuivres, on s'appuie sur des enregistrements de notes naturelles jouées par des musiciens professionnels, dont on extrait la fréquence instantanée à l'aide d'un algorithme d'estimation de fréquence fondamentale (de Cheveigné et Kawahara 2002). Ces résultats sont alors utilisés pour estimer la pertinence des fréquence d'oscillation des régimes périodiques obtenus numériquement. Pour les instruments à anche, l'étude d'un saxophone couplé à une bouche artificielle permet la construction de diagrammes de bifurcations expérimentaux, utilisés là aussi pour estimer la pertinence des résultats numériques donnés par le modèle physique associé.

Le chapitre 1 détaille la modélisation physique des cuivres et des instruments à anche, et présente succinctement quelques résultats d'analyse de stabilité linéaire et des diagrammes de bifurcation pour un trombone basse. Le chapitre 2 reproduit un premier article publié à *Acta Acustica* présentant une méthode d'évaluation des pressions de seuil au moyen de diagrammes de bifurcation, dans le cadre du modèle physique de cuivre présenté au chapitre 1. Le chapitre 3 reproduit un second article, également publié à *Acta Acustica United*, qui propose une étude plus approfondie de la note fantôme des tubas, une note naturelle particulière présente chez ces instruments. Enfin, le chapitre 4 décrit un modèle d'un instrument à anche avec un résonateur simplifié ne comportant que deux résonances prépondérantes par rapport à leurs voisines. On confronte les résultats donnés par le modèle physique à des mesures réalisées sur une bouche artificielle, et on présente une étude de l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des pics de résonance sur la pression de seuil minimale.



# MODÈLE PHYSIQUE ET OUTILS THÉORIQUES

---

## Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Modèle générique d'instruments à vent</b>	<b>18</b>
1.1.1	Équations de base	18
1.1.2	Mesure et modélisation de l'impédance d'entrée	20
1.1.3	Point de vue des systèmes dynamiques	24
1.1.4	Adimensionnement	27
<b>1.2</b>	<b>Méthodes numériques</b>	<b>28</b>
1.2.1	Analyse de stabilité linéaire	28
1.2.2	Résolution temporelle	30
1.2.3	Diagrammes de bifurcation	30
<b>1.3</b>	<b>Étude de l'impact de la représentation modale choisie sur les résultats numériques</b>	<b>33</b>
1.3.1	Convention de notation	33
1.3.2	Modèles de décomposition modale de l'impédance d'entrée	34
1.3.3	Calcul analytique des solutions stationnaires	35
1.3.4	Analyse de stabilité linéaire	36
1.3.5	Diagrammes de bifurcation	38

---

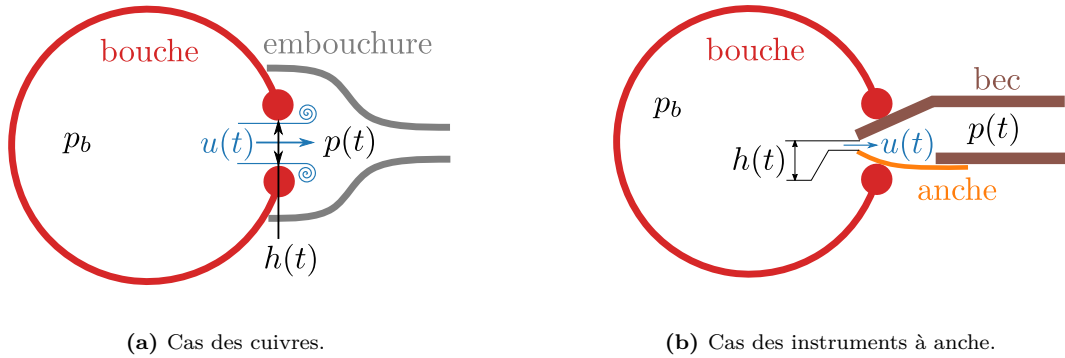
Dans ce chapitre, on présente d'abord un modèle physique décrivant un musicien couplé à son instrument (Hirschberg 1995; Campbell et al. 2021). Ce modèle comporte trois équations, une première décrivant le mécanisme d'excitation (vibration des lèvres dans le cas des cuivres, ou vibration de l'anche dans le cas des instruments à anche), une seconde décrivant l'instrument de musique, caractérisé par son impédance d'entrée, et une



troisième décrivant le débit d'air s'écoulant de la bouche du musicien dans l'instrument. Dans une seconde section, on présente trois méthodes d'analyse permettant d'étudier les caractéristiques des régimes périodiques de ce modèle, que sont l'analyse de stabilité linéaire, la résolution temporelle, et l'analyse de bifurcation. Dans une troisième section, on se propose d'étudier l'impact de différents modes de représentation de l'impédance d'entrée de l'instrument sur le comportement du système.

## 1.1 Modèle générique d'instruments à vent

### 1.1.1 Équations de base



**Figure 1.1** – Schéma représentant la modélisation d'un instrumentiste couplé à son instrument et définition des variables du système  $(h(t), p(t), u(t))$ .

Un instrument à vent consiste en un excitateur mécanique (les lèvres dans le cas des cuivres, ou l'anche dans le cas des instruments à anche) couplé à un résonateur acoustique (le corps de l'instrument), l'ensemble formant un potentiel oscillateur auto-entretenu. Les variables caractérisant l'état du système sont la pression dans l'embouchure  $p$ , l'ouverture  $h$  entre les lèvres dans le cas des cuivres (resp. entre l'anche et le bec dans le cas des instruments à anche), ainsi que le débit d'air volumique  $u$  (voir figure 1.1). Ces grandeurs sont des perturbations par rapport à l'équilibre, et sont calculées dans l'embouchure de l'instrument à l'aide du système d'équations (1.1) tiré de (Campbell et al. 2021). Dans toute cette thèse, un indice  $\ell$  (respectivement  $r$ ) pour « lips » (respectivement « reed ») fait référence à une grandeur caractéristique des cuivres (respectivement des instruments à anche). Les équations suivantes ne comportent qu'un indice  $\ell$  pour ne pas alourdir les notations, mais sont également valable pour les instruments à anche.

$$\begin{cases} \ddot{h} + \frac{\omega_\ell}{Q_\ell} \dot{h} + \omega_\ell^2 (h - H) = \pm \frac{p - p_b}{\mu} & (1.1a) \\ u(t) = wh \Theta(h) \operatorname{sgn}(p_b - p) \sqrt{\frac{2|p_b - p|}{\rho}} & (1.1b) \\ \hat{p}(\omega) = Z(\omega) \hat{u}(\omega). & (1.1c) \end{cases}$$

L'équation (1.1a) décrit la dynamique des lèvres avec le signe  $-$  (modèle de valve « outward »), ou de l'anche avec le signe  $+$  (modèle de valve « inward »). Cette équation est obtenue en appliquant le principe fondamental de la dynamique aux lèvres (resp. à l'anche). Les lèvres (resp. l'anche) sont caractérisées par leur fréquence de résonance  $\omega_\ell$  (resp.  $\omega_r$ ), leur facteur de qualité  $Q_\ell$  (resp.  $Q_r$ ) ainsi que leur masse surfacique  $\mu$ . Dans le cas des instruments à anche, on reliera  $\mu$  à la raideur mécanique de l'anche via  $K_r = \mu\omega_r^2$ . Il est important de noter que dans ce dernier cas,  $\omega_r$  ne peut que faiblement varier autour d'une valeur fixée (environ  $2\pi \times 2\text{kHz}$ ), alors que dans le cas des cuivres les lèvres du musicien possèdent une fréquence de résonance variable sur une plage d'environ quatre octaves, déterminée par la configuration du « masque » du musicien (c'est-à-dire la tension de ses lèvres), qu'il peut modifier à volonté.  $H$  est l'ouverture initiale entre le bec et l'anche (resp. entre les lèvres). Enfin, on note  $p_b$  la pression dans la bouche du musicien, qui constituera le principal paramètre de contrôle dans la suite de l'étude. La présence du signe  $\pm$  dans le membre de droite est caractéristique du type d'instrument étudié :  $+$  pour les instruments à anche et  $-$  pour les cuivres.

L'équation (1.1b) décrit l'écoulement de l'air de la bouche du musicien dans l'instrument, et provient du théorème de Bernoulli avec perte de charge<sup>1</sup> appliqué le long d'une ligne de courant partant de la bouche du musicien. Certains résultats mettent néanmoins en évidence quelques limites à la capacité du modèle choisi à reproduire le comportement d'un instrument de la famille des cuivres en et allant jusqu'à l'embouchure.  $\rho$  est la masse volumique de l'air et  $w \times h = S_0$  la section d'entrée de l'anche (resp. des lèvres).  $w$  est la largeur effective des lèvres/du bec, définie par  $w = S_0/h_0$ . La distribution de Heaviside  $\Theta$  appliquée à  $h$  découle du modèle de lèvres (resp. d'anche) « fantôme » (Colinot et al. 2019), autorisant les lèvres (resp. l'anche et la table) à s'interpénétrer, mais imposant alors un débit volumique nul lorsqu'elles se touchent. Ainsi, il n'est pas nécessaire de modifier l'équation (1.1a), qui peut rester linéaire. Dans le cas des instruments à anche, c'est le

1. Cette perte de charge correspond à la dissipation visqueuse d'énergie cinétique du jet dans les tourbillons créés derrière les lèvres à cause du changement brusque de section.

modèle le plus simple d'anche battante, c'est-à-dire autorisant un contact anche/table. Par ailleurs, la fonction signe appliquée à  $p_b - p$  traduit le fait qu'un débit d'air de l'instrument vers la bouche du musicien (cas  $p_b < p$ ) est *a priori* possible, même s'il n'a pas été mis en évidence expérimentalement jusqu'à aujourd'hui.

L'équation (1.1c) décrit la réponse acoustique du résonateur, elle traduit le lien entre le débit volumique  $u$  et la pression  $p$  à l'entrée de l'instrument dans le domaine de Fourier (dans lequel les grandeurs sont notées avec un « ^ »), au moyen de l'impédance d'entrée acoustique  $Z$ .

## 1.1.2 Mesure et modélisation de l'impédance d'entrée

### 1.1.2.1 Mesure d'impédance



**Figure 1.2** – Photos du montage de mesure d'impédance d'un trombone basse Antoine Courtois (modèle AC502) : le pont d'impédance (Macaluso et Dalmont 2011) est la pièce de bronze, connectée à l'embouchure via une pièce d'adaptation en aluminium.

L'impédance d'entrée d'un instrument peut être mesurée en fonction de la fréquence, au moyen d'un pont d'impédance (Macaluso et Dalmont 2011) – visible sur les figures 1.2 et 1.3 – connecté à l'embouchure de l'instrument via une pièce d'adaptation. Un schéma de principe du pont d'impédance est visible sur la figure 1.4. Cet appareil a été développé



**Figure 1.3** – Photos du montage de mesure d'impédance d'un saxophone alto Selmer : le pont d'impédance (Macaluso et Dalmont 2011) est la pièce de bronze connectée au bocal.

conjointement par le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans<sup>2</sup> et le Centre de Transfert Technologique du Mans<sup>3</sup>. Le pont consiste en deux cavités (arrière et avant) séparées par une pastille piézoélectrique fonctionnant en flexion, laquelle génère une onde sonore dans les deux cavités simultanément. Les débits volumiques ainsi générés de part et d'autre de la source sont alors égaux en valeur absolue. La cavité arrière a des dimensions connues, et la cavité avant est ouverte afin de pouvoir accueillir l'instrument à mesurer. Un premier microphone mesurant la pression acoustique  $p_1$  dans la cavité arrière permet d'estimer la débit volumique  $u$  de la source sonore :  $p_1 \propto u$  au premier ordre. Un second microphone mesurant la pression acoustique  $p_2$  dans la chambre avant permet d'estimer la pression à l'entrée de l'instrument, toujours au premier ordre. Dans ce cas, l'impédance d'entrée de l'instrument  $Z_2 = p_2/u$  est donc proportionnelle à la fonction de transfert entre les deux microphones  $p_1/p_2$  :

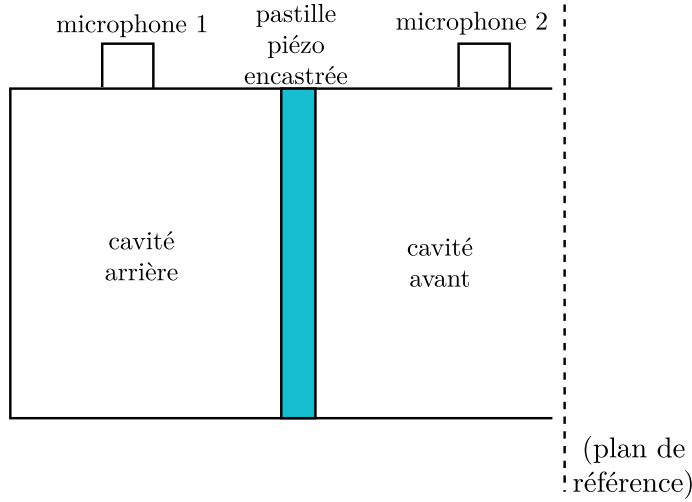
$$Z_2 = \frac{p_2}{p_1} Z_1$$

avec  $Z_1$  l'impédance de la cavité arrière, obtenue par étalonnage.

Le principe est alors de générer un sinus glissant (chirp logarithmique) avec le logiciel dédié via une carte son connectée au pont d'impédance, qui émettra alors un son dont la fréquence varie selon une loi fixée par l'utilisateur dans le domaine de fréquence à sonder.

2. Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans, Avenue Olivier Messiaen, 72085 LE MANS Cedex 09, France

3. Centre de Transfert Technologique du Mans, 20 rue Thalès de Milet, 72000 LE MANS, France



**Figure 1.4** – Schéma de principe du pont d’impédance, reproduit d’après (Le Roux et al. 2012).

Le pavillon de l’instrument a initialement pour fonction de rayonner une pression acoustique dans une large zone, mais il a aussi pour effet d’amplifier et de capter les bruits parasites lors d’une mesure d’impédance, c’est pourquoi il est impératif d’effectuer cette mesure en chambre sourde (en particulier pour les tubas).

### 1.1.2.2 Reconstruction d’impédance par décomposition modale

Afin d’écrire le système (1.1) sous la forme  $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$  (voir section 1.1.3), il est nécessaire d’effectuer une décomposition modale de l’impédance mesurée (Ewins 2000), afin de pouvoir exprimer  $Z$  dans l’équation (1.1c). Deux modèles d’impédance reconstruite sont couramment utilisés : la représentation « modes complexes » (à 4 coefficients modaux) et la représentation « modes réels » (à 3 coefficients modaux) (Ablitzer 2021).

La représentation « modes complexes » de l’impédance est utilisée par (Silva 2009 ; Karkar 2012 ; Velut 2016 ; Ablitzer 2021) :

$$Z_{\mathbb{C}}(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^N \left( \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right) \quad (1.2)$$

avec  $(C_n, s_n) \in \mathbb{C}^2$  les deux coefficients modaux complexes (soit quatre coefficients modaux réels) et  $Z_c$  l’impédance caractéristique des ondes planes dans un tube :  $Z_c = \frac{\rho c}{S_e}$  avec  $S_e$  la section d’entrée du tube.

L'étude sur les instruments à anche est menée sur un saxophone alto, dont le bocal possède un diamètre à l'entrée  $d = 16,0$  mm. Dans le cas de cuivres, le diamètre d'entrée de l'embouchure est compris entre 24 mm (embouchure de trombone ténor) et 33 mm (embouchure de contretuba en sib). La forme de la cuvette d'une embouchure de cuivre étant complexe, le diamètre d'entrée est difficilement mesurable. Une mesure au pied à coulisse ne permet donc pas de donner un diamètre très précis, rendant la valeur de l'impédance d'entrée caractéristique d'un cuivre quelque peu arbitraire.

D'un autre côté, la représentation « modes réels » de l'impédance est utilisée par (Karkar 2012; Gilbert et al. 2020; Ablitzer 2021) :

$$Z_{\mathbb{R}}(\omega) = \sum_{n=1}^N Z_n \frac{j\omega \left(\frac{\omega_n}{Q_n}\right)}{\omega_n^2 + j\omega \left(\frac{\omega_n}{Q_n}\right) - \omega^2} \quad (1.3)$$

avec  $(\omega_n, Q_n, Z_n) \in \mathbb{R}^3$  les trois coefficients modaux réels.

Il est possible de passer d'une représentation « modes complexes » à une représentation « modes réels » en identifiant (1.2) à (1.3) via les formules :

$$\begin{cases} \omega_n &= |s_n| \\ Q_n &= -\frac{\omega_n}{2\Re(s_n)} \\ Z_n &= -Z_c \frac{\Re(C_n)}{\Re(s_n)}. \end{cases}, \text{ si } \forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(C_n s_n^*) = 0. \quad (1.4)$$

Il est également possible de passer d'une représentation « modes réels » à une représentation « modes complexes » via les formules :

$$\begin{cases} C_n &= \frac{Z_n \omega_n}{Z_c 2Q_n} \left(1 + j\sqrt{\frac{1}{4Q_n^2 - 1}}\right) \\ s_n &= \frac{\omega_n}{2Q_n} \left(-1 + j\sqrt{4Q_n^2 - 1}\right) \end{cases}. \quad (1.5)$$

Dans ce cas, les coefficients  $C_n$  et  $s_n$  vérifient automatiquement la relation  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(C_n s_n^*) = 0$ , découlant du fait que l'on passe d'une décomposition modale à 3 coefficients modaux à une décomposition modale à 4 coefficients modaux.

Les deux impédances théoriques ainsi définies sont identiques, mais peuvent se comporter différemment numériquement, car les systèmes différentiels qui en découlent dans

les deux cas sont différents. En particulier, dans le cas d'une décomposition modale « modes complexes », il est possible d'avoir  $Z_{\mathbb{C}}(\omega = 0) \neq 0$  si la condition  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(C_n s_n^*) = 0$  n'est pas vérifiée, permettant l'existence d'une pression à l'équilibre non nulle. Ici, on fait le choix de travailler avec une décomposition modale à 3 coefficients modaux plutôt que 4, choix que l'on justifie dans la sous-section 1.3.

### 1.1.2.3 Cas des cuivres

Les cuivres possèdent une impédance d'entrée comprenant de nombreuses résonances, comme on peut le voir sur la figure 1.5. Ainsi, on considérera typiquement une quinzaine de modes pour la décomposition modale évoquée plus haut <sup>4</sup>.

On peut constater sur la figure 1.5 que l'écart de la décomposition modale à l'impédance mesurée défini par :

$$\epsilon = \left| |Z_{\text{rec}}| - |Z_{\text{exp}}| \right| e^{j(\arg(Z_{\text{rec}}) - \arg(Z_{\text{exp}}))}$$

reste inférieur à quelques pourcents quelque soit la fréquence, validant ainsi la décomposition modale.

### 1.1.3 Point de vue des systèmes dynamiques

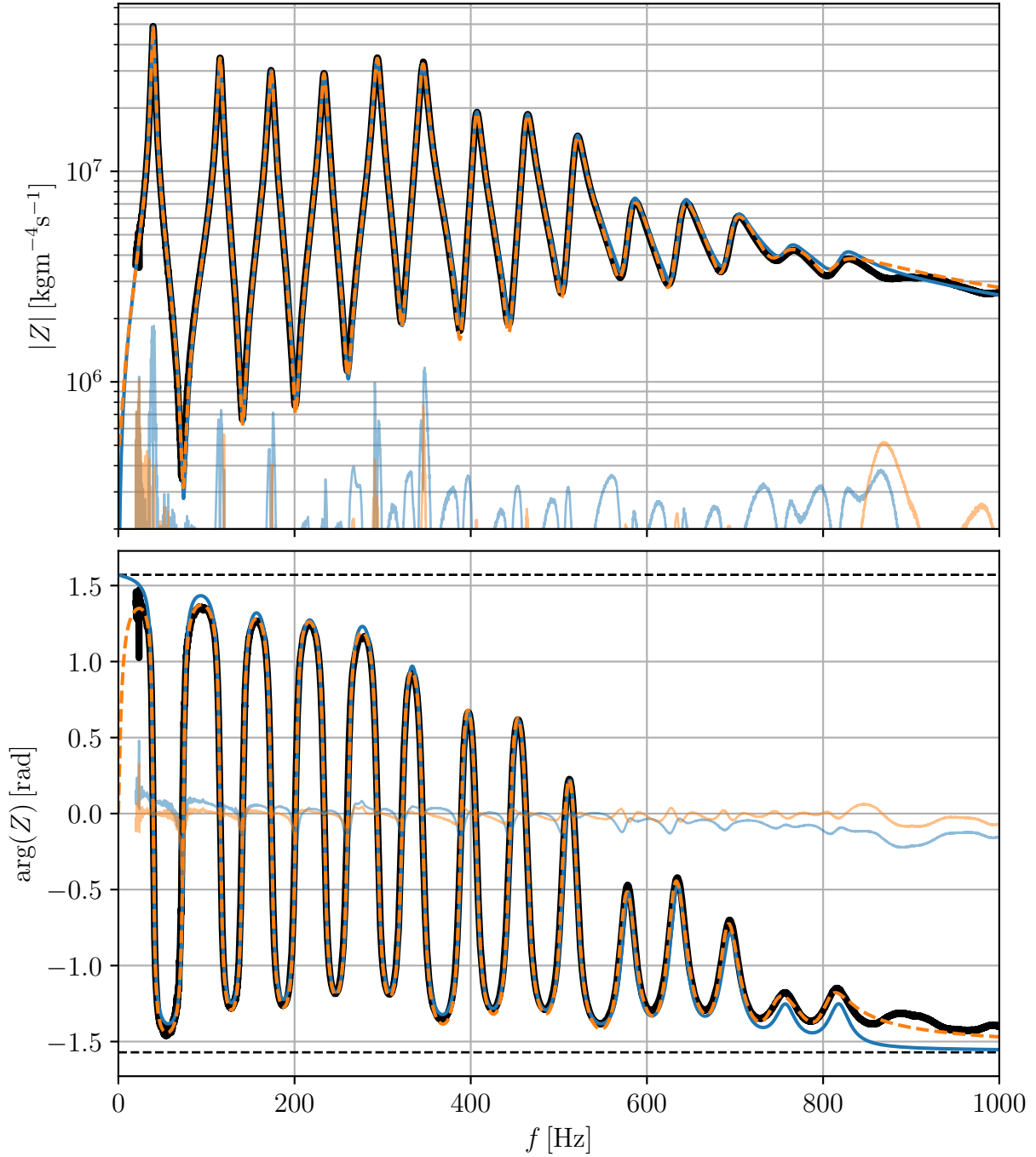
En vue de l'étude du système par méthode de continuation à l'aide du logiciel AUTO, il est nécessaire d'exprimer le système (1.1) sous la forme  $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$ , avec  $\mathbf{X}$  le vecteur d'état. Dans ce formalisme, les méthodes d'analyse propres aux systèmes dynamiques décrites par exemple dans (Manneville 2004), en particulier l'analyse de bifurcation, pourront être utilisées.

En considérant un des deux modèles d'impédance reconstruite décrits dans la section 1.1.2.2, on prend tout d'abord la transformée de Fourier inverse de l'équation (1.1c) afin de revenir dans le domaine temporel :

$$\mathfrak{F}^{-1}[(1.1c)] \Rightarrow \dot{p}_n = Z_c C_n u + s_n p_n, \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (1.6)$$

---

4. les coefficients modaux des différents cuivres utilisés ici ont été fournis par l'algorithme d'identification modale décrit dans (Ablitzer 2021).



**Figure 1.5** – Tracé du module (gauche) et de la phase (droite) de l'impédance d'entrée de la **reconstitution modale à 3 coefficients modaux**, de la **reconstitution modale à 4 coefficients modaux**, et de l'impédance mesurée d'un trombone basse Antoine Courtois modèle AC502 sur laquelle sont basées ces reconstitutions. Courbes en couleurs claires : tracé de l'écart de la décomposition modale à l'impédance mesurée, défini par  $\epsilon = ||Z_{\text{rec}} - |Z_{\text{exp}}|| \exp[j(\arg(Z_{\text{rec}}) - \arg(Z_{\text{exp}}))]$ . Le module de l'écart est tracé dans le graphe supérieur, sa phase dans le graphe inférieur.



en considérant une décomposition modale « modes complexes » (équation (1.2)). La pression acoustique dans l'embouchure fait alors l'objet d'une décomposition modale (Chaigne et Kergomard 2013), de telle sorte que  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n)$  avec  $\{p_n\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \subset \mathbb{C}$  les composantes modales de la pression et  $N$  le nombre de modes choisis pour la décomposition.

À titre informatif, on obtiendrait à partir de la décomposition modale « modes réels » (équation (1.3)) :

$$\mathfrak{F}^{-1} [(1.1c)] \Rightarrow \ddot{p}_n + \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{p}_n + \omega_n^2 p_n = Z_n \frac{\omega_n}{Q_n} \dot{u}, \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (1.7)$$

Dans ce cas, la pression acoustique dans l'embouchure s'écrit  $p = \sum_{n=1}^N p_n$ .

Dans le cadre de l'équation (1.6), le vecteur d'état du système s'écrit alors :

$$\mathbf{X} = \left( h, \dot{h}, \{\Re(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}, \{\Im(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right) = \left( \{X_m\}_{m \in \llbracket 1, 2(N+1) \rrbracket} \right).$$

L'équation (1.6) étant écrite dans le domaine temporel, le système (1.1) peut alors s'écrire sous la forme  $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$  avec  $F \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{2N+2}, \mathbb{R}^{2N+2})$  (Manneville 2004), et donnée par :

$$F : \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{\omega_\ell}{Q_\ell} X_2 - \omega_\ell^2 (X_1 - H) + \frac{p_b - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{\mu} \\ \Re [s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Re [s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Re [s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \\ \Im [s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Im [s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Im [s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

avec  $u(\mathbf{X}) = w X_1 \Theta(X_1) \operatorname{sgn}(p_b - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n) \sqrt{\frac{2}{\rho} |p_b - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n|}$ .

La dimension du système dynamique ainsi défini est alors  $\dim(\mathbf{X}) = 2N + 2$ .

### 1.1.4 Adimensionnement

Dans le cadre de la physique numérique, il est souvent préférable de travailler en variables adimensionnées afin d'améliorer le conditionnement, que l'on définit comme suit :

$$\tilde{h} = \frac{h}{h_0} ; \tilde{p} = \frac{p}{p_0} ; \tilde{u} = \frac{Z_c}{p_0} u ; \tilde{t} = \omega_0 t \quad (1.9)$$

avec  $\omega_0 = \omega_{ac,1}$  dans le cas des instruments à anche, et  $\omega_0 = \omega_{ac,4}/4 \approx s_{4,i}/4$  une pulsation proche de la première pulsation de résonance acoustique dans le cas des cuivres étudiés dans cette thèse. On choisit d'utiliser le quart de la pulsation de résonance du quatrième mode et non directement la pulsation de résonance du premier mode, car cette dernière varie sur une plage de 4 tons pour des instruments de même tonalité nominale (trombone ou euphonium par exemple) et à vide (sans pistons enfoncés ou de coulisse tirée), au contraire de la quatrième résonance acoustique qui possède à peu près toujours la même fréquence.  $p_0$  est une pression de référence, égale à la pression de placage  $p_M = \mu\omega_r^2 h_0$  dans le cas des instruments à anche. Dans le cas des cuivres, la pression de placage n'est pas définie ( $\omega_\ell$  n'est pas une constante), on choisit alors de définir  $p_0$  par analogie avec les instruments à anche :  $p_0 = \mu\omega_0^2 h_0$ .

On définit de plus :

$$\theta_\ell = \frac{\omega_\ell}{\omega_0}, \kappa_n = \frac{C_n}{\omega_0}, \sigma_n = \frac{s_n}{\omega_0}, \text{ et } \zeta = wh_0 Z_c \sqrt{\frac{2}{\rho p_0}}.$$

Ainsi, le système (1.1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{h} + \frac{\theta_\ell}{Q_\ell} \tilde{h} + \theta_\ell^2 (\tilde{h} - \tilde{H}(\theta_\ell)) = \tilde{p}_b - \tilde{p} \end{array} \right. \quad (1.10a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{p}_n = \kappa_n \tilde{u} + \sigma_n \tilde{p}_n \end{array} \right. \quad (1.10b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u} = \zeta \tilde{h} \Theta(\tilde{h}) \operatorname{sgn}(\tilde{p}_b - \tilde{p}) \sqrt{\tilde{p}_b - \tilde{p}} \end{array} \right. \quad (1.10c)$$

$$\tilde{u} = \zeta \tilde{h} \Theta(\tilde{h}) \left( \operatorname{sgn}(\tilde{p}_b - \tilde{p}) \tilde{h} \sqrt{\tilde{p}_b - \tilde{p}} - \frac{\tilde{h} \tilde{p}}{2\sqrt{\tilde{p}_b - \tilde{p}}} \right)$$

Tous les résultats numériques présentés dans cette thèse ont été obtenus à partir du système adimensionné, cependant toutes les équations données dans ce qui suit seront données dimensionnées pour faciliter l'interprétation physique.

## 1.2 Méthodes numériques

### 1.2.1 Analyse de stabilité linéaire

L'analyse de stabilité linéaire consiste à étudier la stabilité du système proche de son équilibre, à travers une étude des valeurs propres du système linéarisé autour d'une solution stationnaire. C'est une étape clef dans l'étude des instruments à vent : elle permet d'orienter le choix des valeurs des paramètres du système comme  $p_b$  ou  $f_\ell$  pour la résolution temporelle des équations, et de vérifier certains résultats fournis par l'étude du comportement dynamique du système. Elle est utile en tant qu'étude préliminaire du comportement des cuivres, ces derniers possédant deux paramètres de contrôle principaux : pression dans la bouche  $p_b$  et fréquence de résonance des lèvres  $f_\ell$ .

En considérant une écriture du système à l'aide des coefficients modaux  $C_n$  et  $s_n$  issus d'une décomposition modale à trois degrés de liberté (c'est-à-dire que la relation  $\Re(C_n s_n^*) = 0$  est vérifiée), le vecteur d'état à l'équilibre est donné par :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_{\text{eq}} &= \left( h_{\text{eq}}; \dot{h}_{\text{eq}}; \{\Re(p_{n,\text{eq}})\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \{\Im(p_{n,\text{eq}})\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right) \\ &= \left( H + \frac{p_b}{\mu \omega_\ell^2}, 0, \{0\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}, \left\{ -Z_c \Im \left( \frac{C_n}{s_n} \right) \right\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right). \end{aligned} \quad (1.11)$$

On linéarise alors l'équation  $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$  autour de  $\mathbf{X}_{\text{eq}}$  afin de l'écrire sous la forme  $\dot{\mathbf{X}} = \overline{\mathbf{M}}\mathbf{X}$  :

$$\begin{pmatrix} \dot{h} \\ \ddot{h} \\ \dot{p}_{1,r} \\ \dot{p}_{2,r} \\ \vdots \\ \dot{p}_{N,r} \\ \dot{p}_{1,i} \\ \dot{p}_{2,i} \\ \vdots \\ \dot{p}_{N,i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ B & A & C & C & \dots & C & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline D_{1,r} & 0 & E_{1,r} & F_{1,r} & \dots & F_{1,r} & -s_{1,i} & 0 & \dots & 0 \\ D_{2,r} & 0 & F_{2,r} & E_{2,r} & \dots & F_{2,r} & 0 & -s_{2,i} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N,r} & 0 & F_{N,r} & F_{N,r} & \dots & E_{N,r} & 0 & 0 & \dots & -s_{N,i} \\ \hline D_{1,i} & 0 & E_{1,i} & F_{1,i} & \dots & F_{1,i} & s_{1,r} & 0 & \dots & 0 \\ D_{2,i} & 0 & F_{2,i} & E_{2,i} & \dots & F_{2,i} & 0 & s_{2,r} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{N,i} & 0 & F_{N,i} & F_{N,i} & \dots & E_{N,i} & 0 & 0 & \dots & s_{N,r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ \dot{h} \\ p_{1,r} \\ p_{2,r} \\ \vdots \\ p_{N,r} \\ p_{1,i} \\ p_{2,i} \\ \vdots \\ p_{N,i} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

où on a noté  $z_r = \Re(z)$  et  $z_i = \Im(z)$ , avec les coefficients :

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\omega_\ell}{Q_\ell} ; B = -\omega_\ell^2 ; C = -\frac{2}{\mu} ; \\ D_n &= wZ_c \sqrt{\frac{2p_b}{\varrho}} C_n ; F_n = -Z_c \sqrt{\frac{2}{\varrho p_b}} w h_{\text{eq}} C_n ; E_n = F_n + s_n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Dans le sous-espace propre  $\mathbb{E}_\lambda$  associé à la valeur propre  $\lambda$  de  $\overline{\mathbf{M}}$ , cette équation devient  $\dot{\mathbf{V}} = \lambda \mathbf{V}$ , de solution  $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_0 e^{\lambda t} \cos(\lambda_i t)$ , avec  $\lambda = \lambda_r + j\lambda_i \in \text{Sp}_\lambda(\overline{\mathbf{M}})$ . Ensuite, on sait que la solution d'équilibre est stable tant que les valeurs propres de  $\overline{\mathbf{M}}$  sont à partie réelle négative. Dès que la partie réelle d'une valeur propre devient positive, la solution d'équilibre devient instable, et peut donner naissance à un régime périodique. Dans ce cas, on parle de bifurcation de Hopf, notion qui sera précisée dans la sous-section 1.2.3. En effet, on a ici deux paramètres de contrôle en la qualité de  $f_\ell$  et  $p_b$  : on va donc, pour chaque valeur de  $f_\ell$ , augmenter  $p_b$  en partant de  $p_b = 0$  et calculer le spectre de  $\overline{\mathbf{M}}$ . Dès que la partie réelle d'une valeur propre  $\lambda$  devient positive, on en déduit la pression de seuil linéaire  $p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$ <sup>5</sup> correspondant à la valeur de  $p_b$  correspondant la bifurcation. La

5.  $n$  fait référence au numéro de régime auquel on s'intéresse, et « eq » fait référence à l'équilibre afin de faire le lien avec l'analyse de stabilité linéaire, par opposition à la notation « per » qui sera introduite plus tard pour caractériser les grandeurs obtenues par méthode de continuation lors de recherches de solutions périodiques.

fréquence de seuil linéaire associée est notée  $f_{\text{seuil},n}^{\text{eq}} = \Im(\lambda)/2\pi$ , et qui est la fréquence que prendrait la note jouée, dans l’hypothèse où la solution émergeant de l’équilibre déstabilisé est périodique. En répétant cette opération pour plusieurs valeurs de  $f_\ell$ , on peut tracer la courbe  $p_{\text{seuil}} = f(f_\ell)$  qui permet par exemple une première caractérisation des notes naturelles des cuivres, présentée à la section 1.3.

### 1.2.2 Résolution temporelle

Cette méthode consiste à résoudre directement l’équation  $\dot{\mathbf{X}} = F(\mathbf{X})$  avec  $F$  définie dans l’équation (1.8) pour un couple  $(p_b, f_\ell)$  donné afin d’accéder au profil temporel de la solution du système. Elle a déjà été largement utilisée par le passé et ne nécessite qu’assez peu de manipulation et de réflexion en dehors du choix du solveur numérique à utiliser.

On prend comme condition initiale  $\mathbf{X}(t = 0) = \mathbf{X}_{\text{eq}} + \epsilon \mathbf{1}$ , avec  $\epsilon \ll 1$ . Prendre  $\epsilon = 0$  revient à attendre que la solution d’équilibre se déstabilise seule à cause du bruit numérique, ce qui peut parfois prendre un temps considérable. Le solveur utilisé est généralement un solveur Runge-Kutta comme `scipy.integrate.RK45` (Shampine et Reichelt 1997)<sup>6</sup>, même si dans certains cas un solveur à pas variable peut être préférable, comme `scipy.integrate.solve_ivp`<sup>7</sup> (Dormand et Prince 1980).

### 1.2.3 Diagrammes de bifurcation

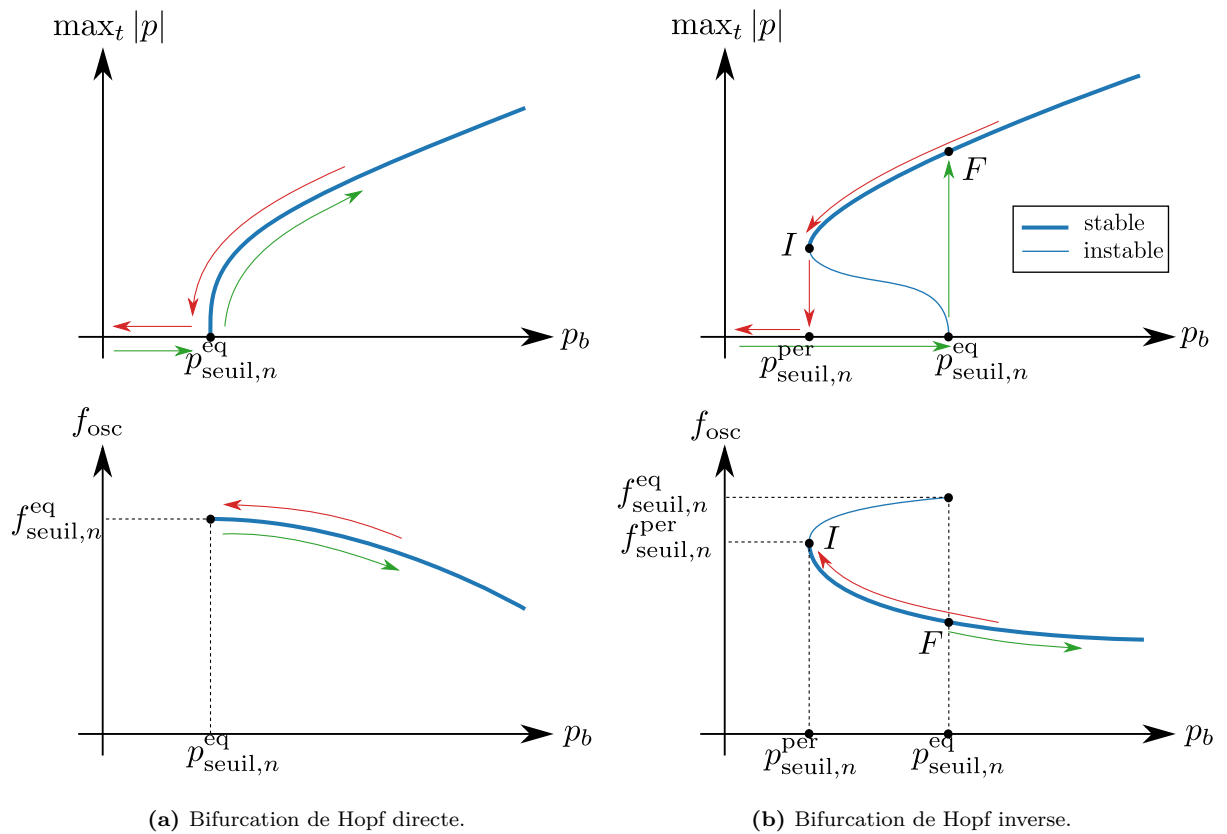
Un diagramme de bifurcation représente l’évolution d’une grandeur caractéristique d’une solution oscillante en régime permanent (par exemple la pression acoustique efficace dans l’embouchure) en fonction de paramètres de contrôle du système. Des exemples de diagrammes de bifurcation sont visibles sur la figure 1.6. Ces diagrammes représentent l’évolution du maximum temporel du module de la pression acoustique dans l’embouchure  $\max_t |p|$  et de la fréquence d’oscillation  $f_{\text{osc}}$ , en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . La lecture de ces diagrammes permet de savoir quels sont les différents régimes accessibles au système (stable/instable) ainsi que leurs caractéristiques telles que la fréquence de jeu ou le profil temporel des solutions en chaque point du diagramme.

On présente ici deux types de bifurcation dans la figure 1.6. La figure 1.6a traduit le fait que lorsque le musicien expulse l’air à travers ses lèvres en situation de jeu en

---

6. <https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.RK45.html>

7. [https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve\\_ivp.html](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html)



**Figure 1.6** – Deux types de bifurcation pouvant être rencontrés : bifurcations de Hopf directe (gauche) et inverse (droite). Haut : module de pression maximal en fonction de  $p_b$  ; bas : fréquence d'oscillation en fonction de  $p_b$ . Trait fin : régime d'oscillation instable ; trait épais : régime d'oscillation stable.

augmentant progressivement sa pression dans la bouche en partant de  $p_b = 0$  (*crescendo*), les lèvres ne vibrent pas et aucun son n’est émis ( $p(t) = 0$ ) : c’est la partie gauche du diagramme. Lorsque  $p_b$  atteint la pression de seuil  $p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$  définie dans la section 1.2.1, le régime précédent devient instable :  $p(t) = 0$  est toujours solution du système, mais est impossible à observer en pratique du fait de son instabilité. Ainsi, on bifurque vers un régime oscillant dont la fréquence d’oscillation  $f_{\text{osc}}$  dépend de  $p_b$  (diagramme inférieur) et représenté par les branches bleues : les lèvres du musicien (respectivement l’anche) vibrent et produisent un son par effet valve. S’il effectue un *decrecendo*, il passera par le même chemin qu’à l’aller pour finalement retourner à l’équilibre, c’est-à-dire le régime pour lequel ses lèvres ne vibrent plus, la pression dans la bouche étant trop basse. Ce scénario correspond à une bifurcation de Hopf directe, et dans ce cas le seuil d’extinction du régime oscillant est confondu avec le seuil d’instabilité du régime statique (seuil linéaire, donné par l’analyse de stabilité linéaire).

D’un autre côté, la figure 1.6b exhibe un comportement légèrement différent (hystérese). En effet, en suivant le même raisonnement que plus haut, en arrivant à  $p_b = p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$ , le système bifurque vers un régime oscillant stable (point  $F$ ). Cependant, si le musicien effectue maintenant un *decrecendo* en partant de  $F$  ou au-delà, il pourra diminuer sa pression dans la bouche jusqu’à une valeur  $p_{\text{seuil},n}^{\text{per}}$  inférieure à  $p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$  tout en conservant une vibration des lèvres jusqu’au point  $I$  pour lequel la vibration s’arrête. La portion du diagramme en trait fin n’est pas accessible au musicien car instable. Ce scénario correspond à une bifurcation de Hopf inverse.

On remarque que dans le cas d’une bifurcation de Hopf inverse, le musicien peut alors réussir à jouer une note pour une pression dans la bouche inférieure à  $p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$ , ce que ne permettait pas de prévoir l’analyse de stabilité linéaire : c’est la différence entre la pression de seuil  $p_{\text{seuil},n}^{\text{eq}}$  discutée en 1.2.1, et la pression de seuil  $p_{\text{seuil},n}^{\text{per}}$  (donnée par le diagramme de bifurcation, et qui peut être identique à la pression de seuil statique dans le cas d’une bifurcation de Hopf directe).

Un diagramme de bifurcation fournit beaucoup d’informations sur l’évolution des solutions périodiques du système en fonction d’un ou plusieurs paramètres de contrôle, et permet notamment d’apporter des explications à des comportements observés lors de simulations temporelles ou lors de mesures. À cet effet, on se sert du logiciel AUTO (Doedel et al. 1999 ; Gilbert et al. 2020), conçu entre autres pour tracer ces diagrammes, et reposant sur une méthode de type prédicteur/correcteur. Celle-ci consiste à calculer dans

un premier temps la solution du système (1.8) pour une valeur de paramètre de contrôle donnée, pour prédire dans un second temps par extrapolation ces caractéristiques pour une nouvelle valeur du paramètre de contrôle proche de la première. La prédiction est alors corrigée par la méthode de Newton. Ainsi, on peut avoir accès de proche en proche à toute une branche de solutions accessibles au système pour différentes valeurs du paramètre de contrôle en beaucoup moins de temps que prendrait la même opération effectuée à l'aide de simulations temporelles pour chaque valeur du paramètre de contrôle. Cette méthode permet donc d'avoir un vaste panorama des caractéristiques des régimes (oscillants ou non) accessibles au système.

Cependant, le fait que la relation (1.1b) non linéaire entre  $h$  et  $p_b - p$  ne soit pas dérivable en particulier en  $p_b = p$  ne permet pas d'utiliser la méthode de continuation, qui repose entre autre sur le fait que la fonction  $F$  de l'équation (1.8) doit être de classe  $\mathcal{C}^1$  au minimum. De ce fait, il sera fait usage (sauf mention contraire) d'une forme régularisée de cette équation tirée de (Colinot et al. 2019) :

$$u \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} w \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \times \frac{h + h_0 \sqrt{\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \eta}}{2} \times \frac{p_b - p}{\sqrt{p_0} \sqrt[4]{\left(\frac{p_b - p}{p_0}\right)^2 + \eta}}, \quad (1.14)$$

avec  $\eta$  le paramètre de régularisation (typiquement  $\eta = 10^{-6}$ ).  $p_0$  et  $\omega_0$  sont les paramètres d'adimensionnement définis dans la sous-section 1.1.4.

## 1.3 Étude de l'impact de la représentation modale choisie sur les résultats numériques

Dans cette section, on présente quelques résultats d'analyse de stabilité linéaire et diagrammes de bifurcation issus du modèle minimal de cuivre présenté dans la section 1.1. En particulier, on discute ici l'impact du choix de la décomposition modale présentée dans la sous-section 1.1.2.2 sur ces résultats.

### 1.3.1 Convention de notation

Dans toute la suite pourront être utilisés indépendamment :



1. deux différents types d'impédance reconstituée :
  - à 3 coefficients modaux  $\{\omega_n, Q_n, Z_n\}$ , noté «  $\mathbb{R}$  »,
  - à 4 coefficients modaux  $\{C_n, s_n\}$ , noté «  $\mathbb{C}$  »,
2. deux différentes représentations du système dynamique :
  - approche « modes réels/ $\mathbb{R}$  » (voir équation (1.7)), dans laquelle le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  est défini par :

$$\mathbf{X} = \left( h; \dot{h}; \{p_n\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \{\dot{p}_n\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right),$$

- approche « modes complexes/ $\mathbb{C}$  » (voir équation (1.6)), dans laquelle le vecteur d'état  $\mathbf{X}$  est défini par :

$$\mathbf{X} = \left( h; \dot{h}; \{\Re(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \{\Im(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right).$$

Afin de différencier les différentes combinaisons de ces deux points sans avoir à recourir à des périphrases trop lourdes, on désignera le cas traité comme suit : « <nom de l'instrument><type d'impédance reconstituée><écriture du système dynamique> ». Par exemple, « trombone basse  $\mathbb{RC}$  ».

### 1.3.2 Modèles de décomposition modale de l'impédance d'entrée

Comme mentionné en 1.3.1, un premier type de décomposition modale utilise 4 coefficients modaux  $\{\Re(C_n), \Im(C_n), \Re(s_n), \Im(s_n)\}$ , définis par l'équation (1.2), et un deuxième utilise 3 coefficients modaux  $\{\omega_n, Q_n, Z_n\}$  (« modes réels »), définis par l'équation (1.3). Le choix d'un de ces deux types de décomposition modale est crucial, car il aboutit à l'existence d'une pression à l'équilibre nulle dans le cas d'une décomposition modale à 3 coefficients modaux puisque  $Z(\omega = 0) = 0$ , ce qui n'est plus vrai dans le cas d'une décomposition modale à 4 coefficients modaux car  $Z(\omega = 0) \neq 0$  en général.

Dans le cas  $\mathbb{RC}$ , on aura besoin d'effectuer une conversion  $\{\omega_n, Q_n, Z_n\}$  vers  $\{C_n, s_n\}$  afin de passer de la décomposition modale à 3 coefficients modaux de l'impédance d'entrée au système dynamique « modes complexes ». Pour cela, on utilisera la relation (1.4).

Le tracé de chaque impédance reconstituée est visible figure 1.5 dans le cas d'un trombone basse. On remarque sur cette figure que la principale différence entre la décom-

position modale à 3 et à 4 coefficients modaux est surtout visible à basse fréquence (en deçà de la première fréquence de résonance) : on a d'une part  $Z_{\mathbb{C}}(\omega = 0) \neq 0$  alors que  $Z_{\mathbb{R}}(\omega = 0) = 0$ . Sur le cas du trombone basse, la condition de passivité  $|\arg(Z)| \leq \frac{\pi}{2}$  est respectée quelque soit la décomposition modale choisie, mais il a été mis en évidence dans (Ablitzer 2021) que la décomposition modale à 4 coefficients modaux pouvait conduire au viol de cette condition pour certains instruments.

### 1.3.3 Calcul analytique des solutions stationnaires

Dans les cas  $\mathbb{C}\mathbb{C}$  et  $\mathbb{R}\mathbb{C}$  (décomposition modale de l'impédance d'entrée à 4 coefficients modaux), le vecteur d'état du système à l'équilibre n'est plus celui donné par l'équation (1.11), car la relation  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(C_n s_n^*) = 0$  n'est plus vérifiée. Ainsi, le système  $\{1.1 \cup 1.6\}$  s'écrit à l'équilibre, dans le cas des cuivres :

$$\begin{cases} h_{\text{eq}} = H + \frac{p_b - p_{\text{eq}}}{\mu\omega_{\ell}^2} & (1.15a) \\ u_{\text{eq}} = wh_{\text{eq}} \Theta(h_{\text{eq}}) \operatorname{sgn}(p_b - p_{\text{eq}}) \sqrt{\frac{2|p_b - p_{\text{eq}}|}{\varrho}} & (1.15b) \\ p_{n,\text{eq}} = -Z_c \frac{C_n}{s_n} u_{\text{eq}}, \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket, & (1.15c) \end{cases}$$

avec  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(p_{n,\text{eq}}) = 0$  (et donc  $p_{\text{eq}} = 0$ ) dans le cas  $\mathbb{R}\mathbb{C}$ , puisque l'on a alors la condition  $\forall n \in \llbracket 1, N \rrbracket, \Re(C_n s_n^*) = 0$ . On pose  $\Delta p = p_b - p$ . La pression est reliée à ses composantes modales via  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n)$ , donc :

$$\begin{aligned} p_{\text{eq}} &= 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n) \\ &= -2Z_c u_{\text{eq}} \sum_{n=1}^N \Re\left(\frac{C_n}{s_n}\right) \\ &= -2Z_c wh_{\text{eq}} \sqrt{\frac{2\Delta p_{\text{eq}}}{\varrho}} \sum_{n=1}^N \Re\left(\frac{C_n}{s_n}\right) \\ &= \alpha h_{\text{eq}} \sqrt{\Delta p_{\text{eq}}} \\ &= \alpha \left( H + \frac{\Delta p_{\text{eq}}}{\mu\omega_{\ell}^2} \right) \sqrt{\Delta p_{\text{eq}}}, \end{aligned}$$

avec  $\alpha = -2wZ_c\sqrt{\frac{2}{\varrho}}\sum_{n=1}^N \Re\left(\frac{C_n}{s_n}\right)$ .

Comme  $p_{\text{eq}} = p_b - \Delta p_{\text{eq}}$ , on a alors :

$$p_b - \Delta p_{\text{eq}} = \alpha \left( H + \frac{\Delta p_{\text{eq}}}{\mu\omega_\ell^2} \right) \sqrt{\Delta p_{\text{eq}}}.$$

En posant  $x = \sqrt{\Delta p_{\text{eq}}}$ , on définit alors un polynôme  $P$  tel que l'équation précédente s'écrive  $P(x) = 0$  :

$$\begin{aligned} P(x) &= p_b - x^2 - \alpha \left( H + \frac{x^2}{\mu\omega_\ell^2} \right) x \\ &= -\frac{\alpha}{\mu\omega_\ell^2} x^3 - x^2 - \alpha H x + p_b \\ &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \end{aligned}$$

avec  $A = -\frac{\alpha}{\mu\omega_\ell^2}$ ,  $B = -1$ ,  $C = -\alpha H$ , et  $D = p_b$ . Les racines de  $P$  peuvent alors être obtenues analytiquement, par exemple au moyen des formules de Cardan (Abramowitz et Stegun 2013)<sup>8</sup>. La seule valeur physiquement acceptable de  $p_{\text{eq}}$  issue des différentes racines de  $P$  est alors réelle ( $\sqrt{\Delta p_{\text{eq}}}$  doit être positif), et nulle lorsque  $p_b$  est nulle.

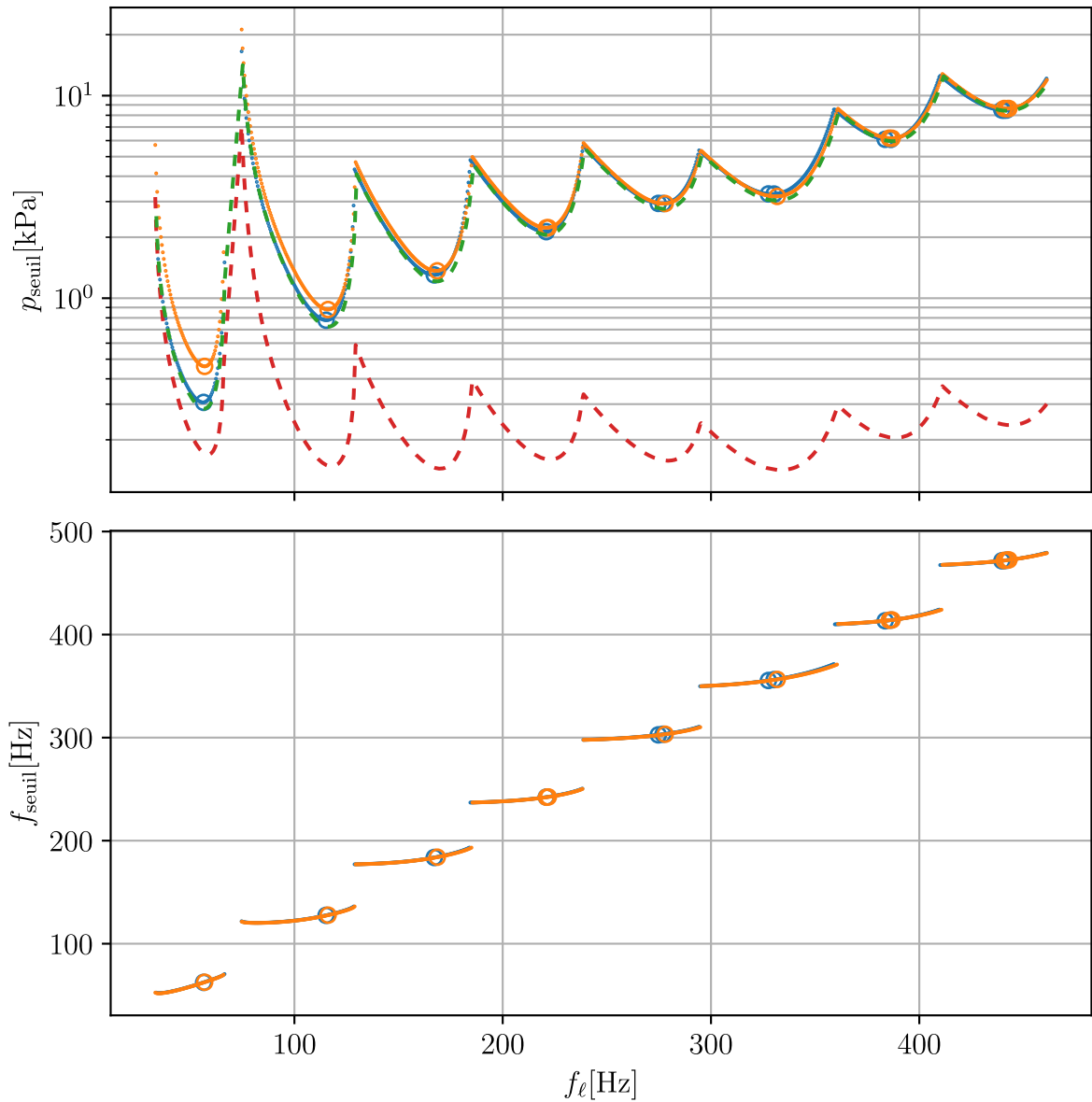
### 1.3.4 Analyse de stabilité linéaire

Le modèle minimal de cuivre est ici adapté à un trombone basse dont l'impédance d'entrée est tracée sur la figure 1.5. Comme décrit en 1.3.1, deux reconstitutions modales à  $N = 14$  modes ont été faites sur l'impédance d'entrée expérimentale, respectivement à 4 et 3 coefficients modaux. Les résultats d'analyse de stabilité linéaire dans les deux cas ont été superposés sur la figure 1.7.

On peut déjà remarquer que dans le cas  $\mathbb{CC}$ , la pression à l'équilibre dépend de la fréquence de lèvres (ligne pointillée rouge). Cette particularité vient du fait que le calcul littéral de  $p_{\text{eq}}$  aboutit à une recherche de racines d'un polynôme du troisième degré dont les coefficients dépendent de  $f_\ell$  pour certains, et de  $p_b$  pour d'autres. D'un point de vue physique, cela signifie qu'un débit d'air est nécessaire pour vaincre l'impédance d'entrée

---

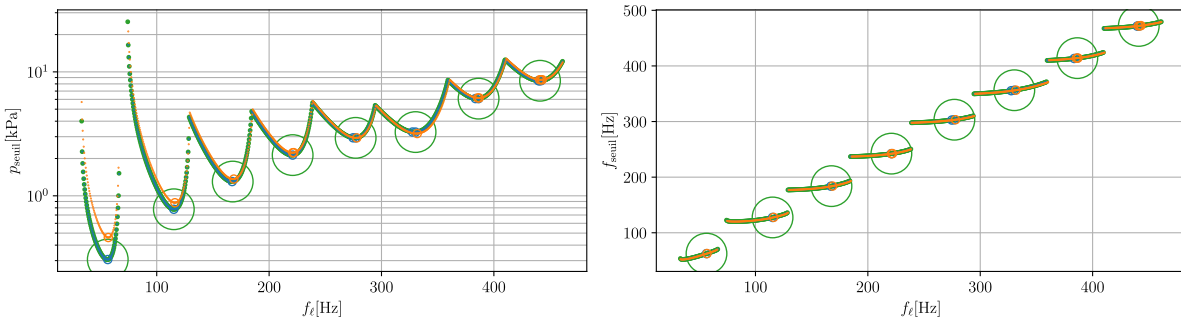
8. Dans la dixième édition, les formules de Cardan sont à la page 17, colonne de droite.



**Figure 1.7** – Tracé des pressions de seuil linéaires (haut) et fréquences de seuil linéaires associées (bas) en fonction de  $f_\ell$  d'un trombone basse Antoine Courtois modèle AC502, dans le cas RC et CC. Ligne pointillée rouge : tracé de  $p_{\text{eq}}$  dans le cas CC ; ligne pointillée verte : tracé de  $|p_{\text{seuil}} - p_{\text{eq}}|$  dans le cas CC.

à fréquence nulle et atteindre l'équilibre. Par ailleurs, le tracé de l'écart de la pression de seuil linéaire à la pression d'équilibre  $|p_{\text{seuil}} - p_{\text{eq}}|$  dans le cas  $\mathbb{CC}$  se superpose quasiment à la pression de seuil du cas  $\mathbb{RC}$ . Ainsi, du point de vue de l'analyse de stabilité linéaire, la seule différence entre le cas  $\mathbb{CC}$  et  $\mathbb{RC}$  réside dans l'existence d'une pression à l'équilibre non nulle.

Pour offrir un autre élément de comparaison, l'analyse de stabilité linéaire a également été effectuée dans le cas  $\mathbb{RR}$ , c'est-à-dire en utilisant la reconstitution modale à 3 coefficients modaux et en remplaçant l'équation 1.6 par l'équation 1.7. Les résultats d'analyse de stabilité linéaire dans ce cas sont affichés sur la figure 1.8 en vert :



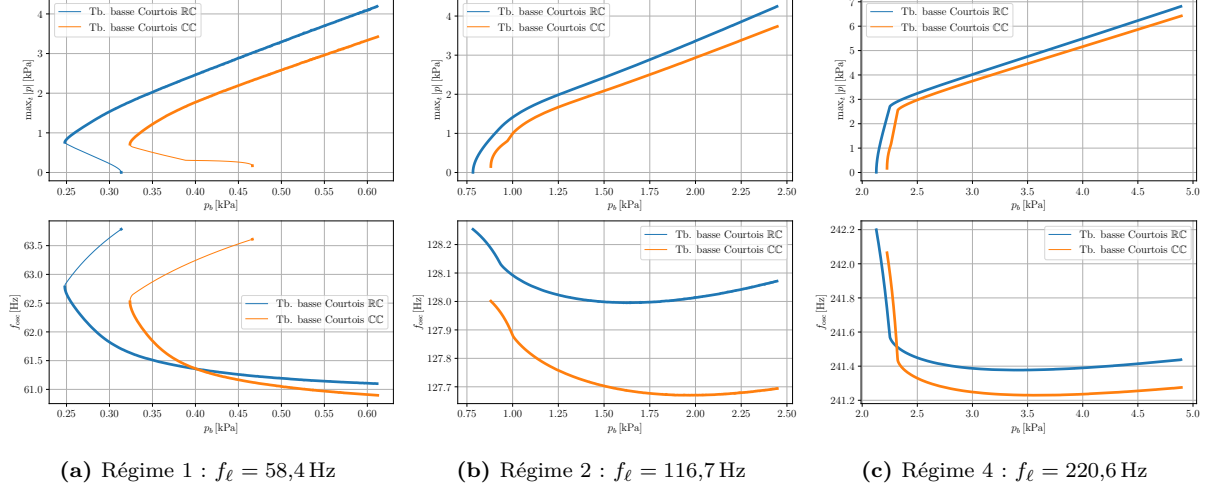
**Figure 1.8** – Pressions de seuil linéaires en fonction de  $f_\ell$  (gauche) et fréquences de seuil linéaires (droite) du trombone basse Courtois, dans le cas  $\mathbb{RR}$ ,  $\mathbb{RC}$  et  $\mathbb{CC}$ .

Il est rassurant de constater que les cas  $\mathbb{RR}$  et  $\mathbb{RC}$  se superposent parfaitement : la formulation de l'équation de l'impédance d'entrée (1.1c) au moyen des coefficients  $\omega_n$ ,  $Q_n$  et  $Z_n$  ou bien de  $C_n$  et  $s_n$  n'a pas d'influence sur les résultats d'analyse de stabilité linéaire.

### 1.3.5 Diagrammes de bifurcation

Les diagrammes de bifurcation dans le cas du système (1.8) adimensionné avec débit régularisé (équation (1.14)) ont été réalisés pour les régimes 1,2 et 4 dans les cas  $\mathbb{RC}$  et  $\mathbb{CC}$ , et sont visibles figure 1.9. Ils n'ont pas pu être obtenus dans le cas  $\mathbb{RR}$  et  $\mathbb{CR}$ , pour lesquels les résultats obtenus par AUTO sont aberrants. De plus, le fait que le calcul de la dérivée temporelle du débit de l'équation soit fastidieux nous a amenés à conserver la représentation complexe des équations du système tout au long de la thèse. Les seuils linéaires sont cohérents avec les résultats d'analyse de stabilité linéaire (figure 1.7), et on

remarque que les branches correspondant au cas  $\mathbb{C}\mathbb{C}$  ne démarrent pas à  $\max_t |p| = 0$ , ce qui est logique car dans ce cas  $p_{\text{eq}} \neq 0$ .



**Figure 1.9** – Diagrammes de bifurcation du trombone basse dans le cas  $\mathbb{R}\mathbb{C}$  et  $\mathbb{C}\mathbb{C}$ , obtenus pour des valeurs de  $f_\ell$  proches des  $f_{\ell,n}^{\text{opt,eq}}$ . Haut : maximum temporel de la valeur absolue de pression dans l’embouchure en fonction de la pression dans la bouche ; bas : fréquence d’oscillation en fonction de la pression dans la bouche.

En considérant la fréquence de jeu au seuil sous-critique ou au seuil linéaire, le plus grand écart de fréquence entre les deux reconstitutions modales est de 5,5 cent dans le cas du régime 1. Ce faible décalage en fréquence de jeu s’explique donc uniquement par la légère différence entre la reconstitution modale à 3 coefficients modaux et celle à 4 coefficients modaux.

Finalement, étant donnée que l’impédance d’entrée à fréquence nulle n’est pas accessible avec le pont d’impédance, ou alors noyée dans le bruit,  $Z(\omega = 0)$  est extrapolée de manière non contrôlée par le processus de décomposition modale à 4 coefficients modaux et peut ainsi donner des résultats difficilement justifiables d’un point de vue physique (Ablitzer 2021), comme par exemple une pression à l’équilibre dépendant de  $\omega_\ell$ . De plus, la décomposition modale « modes réels » conduisant dans les cas traités ici à de très bonnes approximations, on la préférera à la décomposition modale « modes complexes », dont l’usage est plus délicat.



# CARACTÉRISATION DE LA PRESSION DE SEUIL DES CUIVRES AU MOYEN DES DIAGRAMMES DE BIFURCATION

---

## Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>46</b>
<b>2.2</b>	<b>Theoretical background</b>	<b>47</b>
2.2.1	Generic brass model	47
2.2.2	Numerical considerations	50
<b>2.3</b>	<b>Lips' parameters and linear stability analysis</b>	<b>55</b>
2.3.1	Constant lip-opening height at rest	55
2.3.2	Frequency-dependent lip-opening height at rest	56
<b>2.4</b>	<b>Bifurcation diagrams and minimal blowing pressure</b>	<b>59</b>
2.4.1	Case of the third regime	59
2.4.2	Minimal blowing pressures	60
<b>2.5</b>	<b>Bifurcation diagrams, case of the first regime</b>	<b>62</b>
2.5.1	Case of the trombone	62
2.5.2	Case of a bass brass instruments with predominantly-expanding bore profile	64
2.5.3	Assessment of the frequency interval between pedal note and ghost note	68
<b>2.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>68</b>
<b>2.7</b>	<b>Acknowledgements</b>	<b>71</b>
<b>2.8</b>	<b>Appendix</b>	<b>71</b>

---



Dans ce chapitre, nous reproduisons un article publié à *Acta Acustica* le 22 décembre 2021<sup>1</sup>. Il concerne l'utilisation des diagrammes de bifurcation appliqué au modèle minimal de cuivre présenté dans le chapitre 1, afin d'estimer les pressions de seuils minimales des premières notes naturelles du trombone basse et de l'euphonium. Il montre également comment l'analyse de diagrammes de bifurcation permet de décrire la note pédale numériquement. Ce travail s'inscrit dans le prolongement direct de (Velut et al. 2017), dans lequel les pressions de seuil minimales étaient estimées grâce à une analyse de stabilité linéaire.

## Résumé étendu

Les musiciens décrivent habituellement une stratégie de jeu consistant à minimiser l'effort fourni pour produire un son dans un régime donné (Campbell et al. 2021), afin que l'émission soit la plus facile possible. Dans cet article, on choisit de quantifier la facilité d'émission d'un instrument à vent via la pression de seuil minimale d'un régime de jeu donné, c'est-à-dire la pression dans la bouche minimale que doit imposer le musicien pour que le mécanisme d'oscillation auto-entretenu se déclenche et que l'instrument émette un son. Ainsi, il semble raisonnable de supposer que la pression de seuil minimale et sa fréquence de seuil associée soient représentatives du comportement d'un musicien en situation de jeu.

Il est possible d'estimer cette pression de seuil de plusieurs façons. Ici, on s'appuie sur le modèle minimal de cuivre à trois équations présenté dans la section 1.1, que l'on va chercher à caractériser à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire d'une part, et d'analyses de bifurcation d'autre part. L'analyse de stabilité linéaire consiste à étudier la stabilité du système au voisinage de ses solutions stationnaires à travers les valeurs propres du système linéarisé, en fonction de la pression dans la bouche du musicien et de la fréquence de résonance des lèvres. La valeur de pression dans la bouche déstabilisant le système (bifurcation de Hopf) correspond alors à la pression de seuil dite linéaire, à laquelle est associée une fréquence de seuil linéaire, proche de la fréquence de la note jouée dans l'hypothèse de l'émergence d'une solution périodique. Il est tout d'abord apparu en se basant sur des valeurs de pression de seuil optimale mesurées de (Gilbert et al. 2018)

---

1. <https://doi.org/10.1051/aacus/2021049>

---

pour les huit premiers régime de trombones, que les pressions de seuil obtenues grâce au modèle en l'état était sous-estimées pour les faibles valeurs de fréquence de résonance des lèvres, et surestimées pour les grandes valeurs. À partir des travaux de (Elliott et Bowsher 1982) dans lequel sont mesurées différents paramètres du modèle de cuivre en fonction de la fréquence de lèvre, on introduit une hauteur entre lèvres à l'équilibre dépendante de la fréquence de résonance des lèvres. Ce faisant, les courbes d'analyse de stabilité linéaire numériques sont plus cohérentes avec leurs homologues expérimentales de (Gilbert et al. 2018).

L'analyse de stabilité linéaire d'un modèle de cuivre a déjà été présentée dans (Velut et al. 2017) pour un saxhorn basse et un trombone ténor, et a permis de montrer qu'un modèle de cuivre à trois équations était capable de décrire toutes les notes naturelles du trombone ténor, et la majorité des notes naturelles du saxhorn basse. Ce résultat a été obtenu en effectuant une analyse de stabilité linéaire, en conjonction avec une résolution temporelle directe du système. Cependant, il apparaît que les pressions de seuil linéaires sont parfois surestimées avec cette dernière méthode. En effet, si l'on effectue une résolution temporelle des équations du modèle en imposant des conditions initiales judicieusement choisies et en augmentant progressivement la pression dans la bouche en partant d'une valeur nulle, on constate qu'une solution périodique peut émerger pour une valeur de pression dans la bouche inférieure à la pression de seuil linéaire. Ce phénomène est dû au fait que dans certains cas, la déstabilisation d'une solution stationnaire donne naissance à une solution périodique via une bifurcation de Hopf inverse, ce que l'analyse de stabilité linéaire ne peut détecter. Dans ce cas, la solution périodique émerge à partir d'une pression de seuil qualifiée d'inverse, plus basse que la pression de seuil linéaire. Les pressions de seuil obtenues par analyse de stabilité linéaire et analyse de bifurcation ne se confondent que dans le cas d'une bifurcation de Hopf directe, pour laquelle il n'existe pas de pression de seuil inverse. Dès lors, il aurait été fastidieux d'estimer la pression de seuil inverse en s'appuyant sur une résolution temporelle des équations, qu'il aurait fallu mener individuellement pour chaque valeur de pression dans la bouche et de fréquence de lèvres. Pour aller au-delà des résultats de (Velut et al. 2017), une analyse de bifurcation appliquée au système se révèle alors pertinente, puisque cette méthode permet de suivre l'évolution d'une grandeur caractéristique d'une solution oscillante en régime permanent (par exemple la pression acoustique efficace dans l'embouchure) en fonction de paramètres de contrôle du système, et ce moyennant des temps de calcul bien moindres comparé à une étude systématique à l'aide de la résolution temporelle. Il est dès lors possible d'ob-

tenir une estimation plus fine des pressions de seuil minimales pour chaque note naturelle comparée à l'analyse de stabilité linéaire. La pression de seuil minimale est alors donnée, selon les configurations du système, par la pression de seuil linéaire, ou la pression dans la bouche au point de retournement dans la branche de solutions périodiques si cette pression est inférieure à la pression de seuil linéaire.

Un autre résultat clef de (Velut et al. 2017) concerne la mise en évidence d'une note naturelle particulière du saxhorn basse, baptisée « note fantôme » par l'auteur. En effet, l'analyse de stabilité linéaire appliquée à un saxhorn basse prédit l'existence d'une note pédale (note naturelle la plus grave jouable à vide) dont la hauteur est significativement supérieure à la hauteur attendue pour cette note : une quinte augmentée en-dessous du second régime, au lieu d'une octave. Cette note s'est par la suite révélée jouable en pratique. Toutefois, c'est l'existence de la note pédale qui demeurerait alors inexplicée dans cette étude, cette déficience pouvant être attribuée au domaine de validité de l'analyse de stabilité linéaire, restreint au voisinage de l'équilibre du système, aussi bien qu'à une lacune du modèle. Nous apportons une réponse à ce problème signalé par (Velut et al. 2017) en nous appuyant de nouveau sur une analyse de bifurcation du système, mettant en évidence l'existence d'une branche de solutions oscillantes déconnectée de la branche principale issue de la bifurcation de Hopf, et dont la fréquence de jeu est proche de la note pédale attendue, c'est-à-dire une octave en-dessous du second régime. On peut confirmer l'existence de ce régime en effectuant une résolution temporelle du système, initialisé avec les composantes du vecteur d'état calculé sur un point de la branche isolée. On obtient alors une forme d'onde caractéristique de la note pédale (semblable à un signal créneau), tandis que l'on obtient une forme d'onde plus proche d'une sinusoïde et de fréquence plus élevée en initialisant le système avec les solutions d'équilibre du système, puisque le régime obtenu est cette fois la note fantôme. On prouve ainsi la robustesse du modèle minimal de cuivres, capable de décrire toutes les notes naturelles des cuivres, saxhorn basse compris.

---

---

# Minimal blowing pressure allowing periodic oscillations in a model of bass brass instruments

Rémi MATTÉOLI, Joël GILBERT, Christophe VERGEZ,  
Jean-Pierre DALMONT, Sylvain MAUGEAIS, Soizic TERRIEN, Frédéric ABLITZER

---

## Abstract

In this study, an acoustic resonator – a bass brass instrument – with multiple resonances coupled to an exciter – the player’s lips – with one resonance is modelled by a multidimensional dynamical system, and studied using a continuation and bifurcation software. Bifurcation diagrams are explored with respect to the blowing pressure, in particular with focus on the minimal blowing pressure allowing stable periodic oscillations and the associated frequency.

The behaviour of the instrument is first studied close to a (non oscillating) equilibrium using linear stability analysis. This allows to determine the conditions at which an equilibrium destabilises and as such where oscillating regimes can emerge (corresponding to a sound production). This approach is useful to characterise the ease of playing of a brass instrument, which is assumed here to be related – as a first approximation – to the linear threshold pressure. In particular, the lower the threshold pressure, the lower the physical effort the player has to make to play a note (Campbell et al. 2021).

Cases are highlighted where periodic solutions in the bifurcation diagrams are reached for blowing pressures below the value given by the linear stability analysis. Thus, bifurcation diagrams allow a more in-depth analysis. Particular attention is devoted to the first playing regime of bass brass instruments (the pedal note and the ghost note of a tuba in particular), whose behaviour qualitatively differs from a trombone to a euphonium for instance.

## 2.1 Introduction

One main goal of the acoustics of wind instruments is to describe and quantify the intonation and ease of playing of an instrument. From the physics viewpoint, it is interesting to model the coupled system formed by the musician and the instrument. Of particular interest is the influence of the musician’s control parameters on the oscillation frequency (linked to the intonation), and the minimum mouth pressure required to achieve auto-oscillations (related to the ease of playing). Indeed, it is assumed here that the musician’s feeling of ease of playing partly relies on the threshold blowing pressure: the higher the latter, the higher the physical effort the player has to make to play a note (Campbell et al. 2021). In practice, the musician can play several notes without depressing any valves in the case of a tuba, or moving the slide in the case of a trombone. These playing regimes are called the natural notes (B♭1, B♭2, F3, B♭3, D4, F4,... in the case of a trombone or a euphonium for instance), and their frequencies are close to the resonance frequencies of the instrument as a whole, except for the lowest note playable (B♭1).

Several tools are available to infer the oscillation frequencies and the threshold blowing pressures from a model of the system. Linear stability analysis allows to predict the behaviour of a dynamical system in the vicinity of its equilibrium solutions. The method consists in linearising the system and analysing its eigenvalues to determine whether or not the equilibrium solutions are stable. This method has already been applied to physical models of musical instruments – brass instruments – in (Velut et al. 2017). Linear stability analysis is, in essence, only valid close to the equilibrium solutions. As such, this method alone might not explain the existence of periodic regimes, as highlighted for instance in (Velut et al. 2017) for the first regime of a saxhorn.

Alternatively, bifurcation analysis gives access to an extensive knowledge of permanent regimes (namely equilibrium and periodic regimes) of the dynamical system, as well as their stability when relevant. Bifurcation diagrams ideally represent all the families of equilibrium and periodic solutions with respect to one parameter of interest. In this paper, we investigate bifurcation diagrams of a physical model of a brass instrument to understand some aspects of its behaviour.

We consider here a simple model: the player’s lips are modeled through the ‘outward-striking valve’ (Campbell et al. 2021; Cullen et al. 2000a; Elliott and Bowsher 1982), a one degree-of-freedom system. Also, the nonlinear sound propagation in the instrument’s

bore which accounts for the ‘brassy sounds’ (Campbell et al. 2021) at high sound levels is neglected (Msallam et al. 2000; Berjamine et al. 2017). The airflow blown by the musician into the instrument is described by a nonlinear algebraic equation. Some of the functions in this equation being non-smooth, a regularised form of this equation is used for numerical reasons.

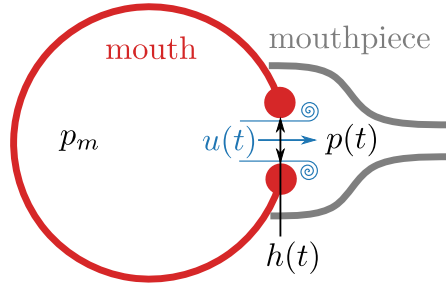
In section 2.2, we describe the considered model and numerical methods, namely linear stability analysis and numerical continuation. In sections 2.3 and 2.4, we use linear stability analysis and bifurcation diagrams, respectively, to investigate the minimal blowing pressure and playing frequencies of the trombone. Eventually, we focus in section 2.5 on the first regime of two bass brass instruments (the trombone and the euphonium), mainly thanks to bifurcation diagrams. This highlights a major difference in the behaviour of these two instruments.

## 2.2 Theoretical background

### 2.2.1 Generic brass model

This subsection details the brass-instrument model considered throughout the article. Brass instruments as a whole can be described through both linear and nonlinear mechanisms. More precisely, a localised nonlinear element (the lips’ valve effect, i.e. the airflow modulation caused by the lips’ vibration) excites a passive linear acoustic multimode element (the musical instrument, usually characterised by its input impedance in the frequency domain). The latter acoustic resonator exerts, in turn, a retroaction on the former mechanical resonator. Such musical instruments are self-sustained oscillators: they generate an oscillating acoustic pressure (the note played) from a static overpressure in the player’s mouth (the blowing pressure).

The brass instrument coupled to the player is then described by a system of three equations. Because it relies on major simplifications (Campbell et al. 2021; Elliott and Bowsher 1982), this model is often referred to as ‘elementary’. More precisely, the three equations link the lip-opening height  $h(t)$ , the pressure in the mouthpiece  $p(t)$  and the volume airflow entering the instrument  $u(t)$ , which will be the three independent variables of interest in this paper. They are all represented schematically in figure 2.1. Several



**Figure 2.1** – Schematic representation of the player's mouth coupled to the mouthpiece of a brass instrument.

control parameters (i.e controlled by the musician) are also involved: this includes in particular the blowing mouth pressure  $p_m$  and the lips' resonance frequency  $f_\ell$ .

First, the vibrating lips of the musician are described by a one-degree-of-freedom damped oscillator:

$$\ddot{h} + \frac{\omega_\ell}{Q_\ell} \dot{h} + \omega_\ell^2 (h - H) = \frac{p_m - p}{\mu}, \quad (2.1)$$

where  $\omega_\ell = 2\pi f_\ell$  and  $Q_\ell$  are the angular resonance frequency and the quality factor of the lips, respectively,  $\mu$  is the lips' mass per unit area, and  $H$  is the lip-opening height at rest.

The Bernoulli's theorem applied between the mouth and the mouthpiece and taking into account the pressure drop caused by the presence of turbulence in the mouthpiece leads to the following equation:

$$u(t) = wh^+(t) \operatorname{sgn}(p_m - p(t)) \sqrt{\frac{2|p_m - p(t)|}{\rho}}, \quad (2.2)$$

with  $w$  the lip-opening width (considered as constant) and  $\rho$  the air density. Here,  $h^+ = \max(h, 0)$  accounts for the fact that the lips cannot physically interpenetrate: as soon as the lips touch ( $h = 0$ ), the volume flow is forced to zero. The sign function  $\operatorname{sgn}$  accounts for the possibility of air flowing from the instrument into the player's mouth.

Finally, the acoustic input impedance  $Z(\omega)$  of the resonator is described in the Fourier domain as the ratio between the pressure and the volume flow at the input of the instrument. This provides a last link between the mouth pressure and the volume airflow:

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \quad (2.3)$$

with  $\omega$  the angular frequency. Figure 2.2 shows the modulus and phase of  $Z$  with respect to the angular frequency  $\omega$ , for a bass trombone (A. Courtois Legend AC502).

Several limitations of this generic model have already been pointed out in previous works (Campbell et al. 2021; Velut et al. 2017). Firstly, it is worth noting that the instrument is described with a linear model of its input impedance: the nonlinear propagation of sound in the instrument itself is not taken into account, preventing any description of the characteristic ‘brassy sound’ of a brass instrument at high sound levels. However, since we focus here on the emergence of auto-oscillations, this effect can be neglected. Furthermore, the harmonics created by the nonlinear distortion of the wavefront propagating in the instrument are known not to be reflected back to the player when they reach the bell (Hirschberg et al. 1995).

Secondly, lips are described as a one-degree-of-freedom damped oscillator, which is also a strong assumption. As a matter of fact, both experiments using artificial lips (Cullen et al. 2000a) and in-vivo measurements (Newton et al. 2008) demonstrated that the lips’ oscillation mechanism relies mainly on a pair of lips’ resonance frequencies. Furthermore, only the first resonance of the lips reflects the ‘outward-striking swinging door’ mechanism described in (Campbell et al. 2021), hence the single degree of freedom. In any case, the one-degree-of-freedom damped oscillator prevents any description of the ‘buzzing phenomenon’, which corresponds to the lips’ vibration without the instrument.

Thirdly, the lips’ opening area  $S$  in the airflow (equation 2.2) is assumed to be proportional to  $h$ , and is thus written  $S = w \times h$  with  $w$  a constant. This assumption was only partially validated in (Bromage et al. 2010), depending on which regime is studied as well as on the sound level. In particular, a law  $S \propto h^2$  would be more adequate when studying the first regimes like the pedal note.



## 2.2.2 Numerical considerations

In this paper, we aim at determining the minimal blowing pressures for which each periodic regime (natural notes Bb1, Bb2, F3, Bb3, D4, F4,...) is observable, as well as the corresponding playing frequencies.

In this subsection, the numerical methods allowing for the investigation of the periodic solutions of model  $\{(2.1) \cup (2.2) \cup (2.3)\}$  are presented, as well as the modal representation of the input impedance required for the practical implementation of these methods.

### 2.2.2.1 Numerical methods

Several numerical methods are available to investigate the influence of a control parameter – such as  $p_m$  or  $f_\ell$ , as they are the most obvious parameters the player can change – on the dynamics of the system. Linear stability analysis (Velut et al. 2017) consists in studying the stability of the equilibrium solutions to small perturbations, obtained by zeroing all time derivatives. This allows one to determine the threshold value of the control parameter at which the equilibrium solution destabilises, which means that at least one of the eigenvalues of the system exhibits a positive real part, and where a small-amplitude periodic regime (stable or unstable) can emerge. When a small-amplitude periodic regime indeed emerges, such a change in the system’s behaviour is called a Hopf bifurcation (Kuznetsov 2004).

In the case of brass instruments, both  $p_m$  and  $f_\ell$  can be considered as control parameters. Figure 2.4 (blue curve) represents the threshold pressure predicted by the linear stability analysis with respect to  $f_\ell$ . This analysis also provides the threshold frequency, that is to say the frequency of the periodic regime that emerges when the equilibrium solution destabilises. This is represented in the bottom plot in figure 2.4.

One of the main advantages of this method is its straight-forward implementation. However, it gives very little information on the oscillation regime of the model far from the so-called Hopf bifurcation point at which the equilibrium loses its stability. This method has already been used in (Velut et al. 2017), and is applied here to the trombone (see blue curves in figure 2.4).

To know more about the oscillating solution arbitrarily far from the bifurcation point

(i.e the point at which the equilibrium solution becomes unstable), another approach consists in numerically solving the whole system, thanks to an ODE solver (Velut et al. 2017). In doing so, both the transient and the stationary parts of the solution are obtained for any value of the control parameter. Nevertheless, this approach becomes tedious and unsuitable in the context of the systematic investigation of the influence of the control parameter on the oscillation regime.

Continuation methods, on the other hand, are more suitable to gain access to a more extensive view of all the oscillating regimes of the system. It consists in computing the waveform of the oscillating solution for successive values of the control parameter. The waveform corresponding to a new value of the control parameter is then deduced from previously computed waveforms, through a predictor/corrector algorithm. The behaviour of an oscillatory solution of the system with respect to a control parameter such as  $p_m$  can then be assessed by plotting bifurcation diagrams, which are shown in section 2.4. This approach is implemented in several softwares, such as AUTO (Doedel et al. 1999; Gilbert et al. 2020; Cochelin and Vergez 2009; Karkar et al. 2013; Fréour et al. 2020) which is used in this publication. However, continuation methods require the system to be written in the form  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X})$ , with certain smoothness properties on  $F$ . Therefore, some work has yet to be done on the equations presented in section 2.2.1, which is done in the following.

### 2.2.2.2 Input impedance

Since the continuation method requires the equations to be written in the time domain, equation (2.3) cannot be used as it is. An analytical form of the input impedance  $Z$  is therefore required to perform an inverse Fourier transform of (2.3). This quantity can be quite easily measured, and is represented in figure 2.2 (blue curve). This measured impedance can then be numerically fitted, in the frequency domain, by a sum of  $N$  individual acoustical resonance modes of the following form (Ablitzer 2021) :

$$Z_{\text{rec}}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{j\omega A_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n\omega_n\omega}. \quad (2.4)$$

Here,  $(A_n, \omega_n, \xi_n) \in \mathbb{R}^3$  are the modal parameters of the modal decomposition. For numerical reasons, it has been chosen to convert this set of parameters  $(A_n, \omega_n, \xi_n)$  into another

one  $(C_n, s_n)$  so that the fitted input impedance writes ( $z^*$  is the complex conjugate of  $z$ ):

$$Z_{\text{rec}}(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^N \left( \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right), \quad (2.5)$$

where  $Z_c$  is the characteristic input impedance of the resonator defined as  $Z_c = \frac{\rho c}{S_e}$  with  $S_e$  the input cross-sectional area, and  $(C_n, s_n) \in \mathbb{C}^2$  are defined as follows:

$$\begin{cases} C_n &= \frac{A_n}{2} \left( 1 + j \frac{\xi_n}{\sqrt{1 - \xi_n^2}} \right), \\ s_n &= \omega_n \left( -\xi_n + j \sqrt{1 - \xi_n^2} \right). \end{cases} \quad (2.6)$$

The new coefficients  $(C_n, s_n)$  also verify the relation  $\Re(C_n s_n^*) = 0$ , since one switched from a 3-real parameters description with  $(A_n, \omega_n, \xi_n)$  to a 2-complex parameters description with  $(C_n, s_n)$ .

The fitted impedance  $Z_{\text{rec}}(\omega)$  is plotted (orange dashed curve) in figure 2.2.

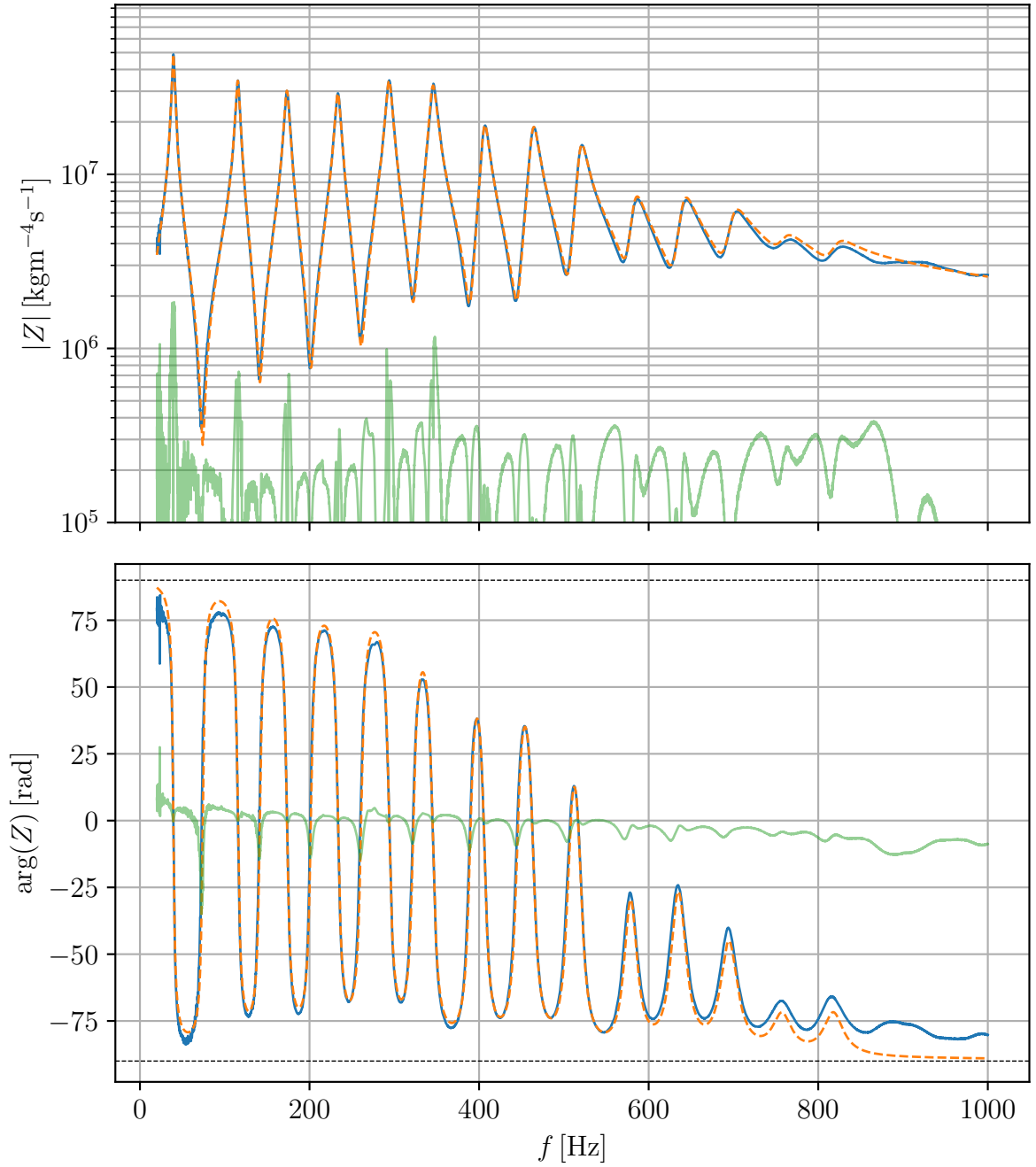
Reinjecting equation (2.5) in equation (2.3) and applying an inverse Fourier transform (for details, see appendix 2.8) leads to the following expression in the time domain (Fréour et al. 2020; Silva et al. 2014):

$$\dot{p}_n = Z_c C_n u + s_n p_n, \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (2.7)$$

The mouthpiece pressure  $p$  can then be written as  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n)$ . Eventually, the system  $\{(2.1) \cup (2.2) \cup (2.7)\}$  is now written in the form  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X})$ , with:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left( \{X_m\}_{m \in \llbracket 1, 2(N+1) \rrbracket} \right) \\ &= \left( h; \dot{h}; \{\Re(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \{\Im(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

the state vector, so that  $h = X_1$ ,  $\dot{h} = X_2$ , and  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n) = 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n$ . Taking the real and imaginary part of the  $N$  equations (2.7) yields  $2N$  real equations, so that the nonlinear function  $F$  is defined as:



**Figure 2.2** – Modulus (top) and phase (bottom) of the input impedance of a bass trombone (A. Courtois Legend AC502) with respect to frequency. Blue curve: measured impedance; dashed orange curve: modal fit function with  $N = 15$  modes; green curve: error between measured and fitted impedances, defined by  $||Z_{\text{rec}}| - |Z_{\text{exp}}||$  and  $\arg(Z_{\text{rec}}) - \arg(Z_{\text{exp}})$  respectively as regards the module and phase.

$$F : \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{\omega_\ell}{Q_\ell} X_2 - \omega_\ell^2 (X_1 - H) + \frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{\mu} \\ \Re [s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Re [s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Re [s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \\ \Im [s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Im [s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Im [s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\text{with } u : \mathbf{X} \mapsto w X_1^+ \operatorname{sgn} \left( p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n \right) \times \sqrt{\frac{2}{\varrho} \left| p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n \right|}.$$

### 2.2.2.3 Regularisation of the volume airflow

For the continuation method implemented in AUTO to work correctly,  $F$  has to be a  $\mathcal{C}^1$  vector function. In this respect, noting that  $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$  for  $x \neq 0$  and  $x^+ = \max(x, 0) = \frac{1}{2}(x + |x|)$ , equation (2.2) is regularised based on the regularisation  $|x| \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{x^2 + \eta}$  used in section 2 of (Colinot et al. 2019):

$$u \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} w \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \times \frac{h + h_0 \sqrt{\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \eta}}{2} \times \frac{p_m - p}{\sqrt{p_0} \sqrt[4]{\left(\frac{p_m - p}{p_0}\right)^2 + \eta}}, \quad (2.10)$$

or equivalently

$$u \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} w \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \times \frac{X_1 + h_0 \sqrt{\left(\frac{X_1}{h_0}\right)^2 + \eta}}{2} \times \frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{\sqrt{p_0} \sqrt[4]{\left(\frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{p_0}\right)^2 + \eta}} \quad (2.11)$$

in terms of the components of the state vector  $\mathbf{X}$ , with  $\eta$  the regularisation parameter, which is fixed to  $10^{-6}$  in the following.  $p_0$  is defined in a similar way as the closure pressure for woodwind instruments (Gilbert et al. 2020):  $p_0 = \mu\omega_0^2 h_0$ , except that  $\omega_0$  is chosen close to the first resonance frequency of the resonator. Indeed, the choice of  $\omega_\ell$  generally considered for woodwind instruments is not suitable in the case of brass instruments where  $\omega_\ell$  is no longer constant. In practice, the choice is not  $\omega_0 = \omega_{\text{res},1}$  (where  $\{\omega_{\text{res},n}\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  are the resonance angular frequencies of the resonator), but rather  $\omega_0 = \omega_{\text{res},4}/4$ , because the fourth resonance of instruments having the same tube length (a trombone and a euphonium for instance) appears to be quite constant, contrary to the first resonance frequency which can vary up to 8 semitones between a trombone and euphonium.

In the following, the system equations (2.9) with  $u(\mathbf{X})$  given by equation (2.11) are processed numerically in a dimensionless form, which is detailed in appendix 2.8. Typical bifurcation diagrams will be shown in section 2.4.

## 2.3 Lips' parameters and linear stability analysis

The results of the linear stability analysis detailed in subsection 2.3.1 suggest that the lips' parameter  $f_\ell$  can be tuned so as to obtain a given desired oscillatory regime. The values of the other lips' parameters are difficult to measure and thus hardly found in the literature. In a first subsection, we consider the same parameters as in (Velut et al. 2017), which are detailed in table 2.1. In order to be more consistent with experimental results, we introduce, in a second subsection; a frequency-dependent lip-opening at rest, based on experimental data from (Elliott and Bowsher 1982).

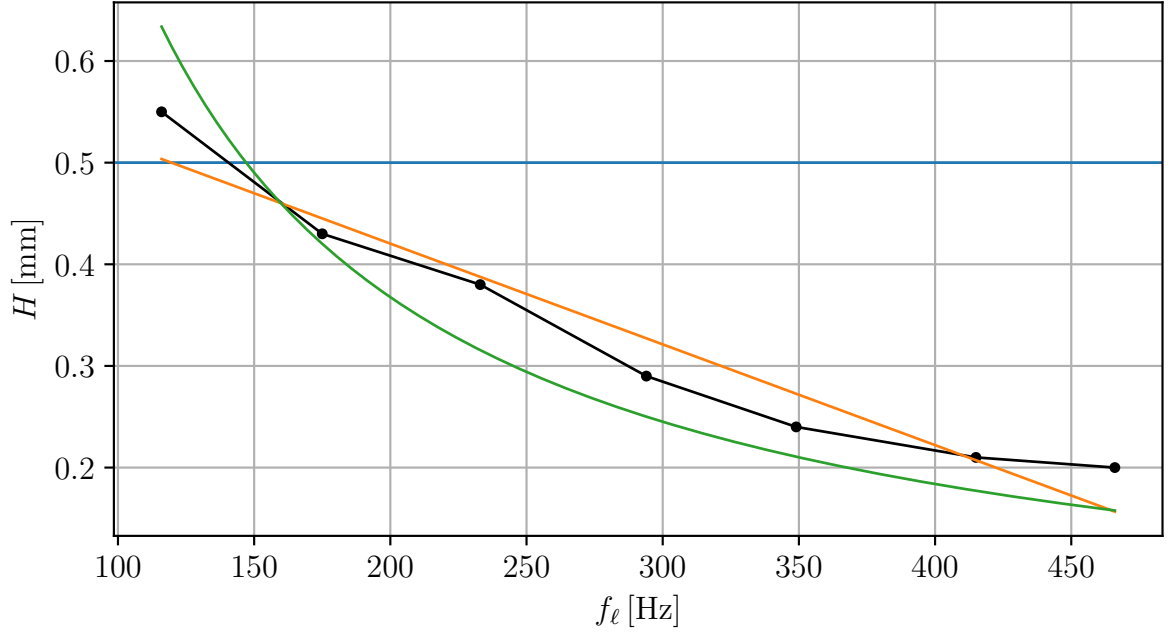
### 2.3.1 Constant lip-opening height at rest

In the case of constant lips' parameters, the results of the linear stability analysis of the system are represented in figure 2.4 by the blue U-shaped patterns. As described in subsection 2.2.2, these results give the values of the mouth pressure  $p_m$  at which the equilibrium solution destabilises (the threshold mouth pressures), as well as the related frequency at which the oscillating solution emerges (the threshold frequencies). As a matter of fact, the multiple U-shaped patterns on the top plot of figure 2.4 reflect the fact that for a given configuration of the resonator (i.e without moving the slide nor activating any

trigger), the trombone player can play several notes called ‘natural notes’ just by changing the lips’ resonance frequency (see for instance (Campbell et al. 2021)) represented in figure 2.5, from the B♭1 (58 Hz) to B♭4 (466 Hz) approximately. For each natural note or regime  $n$  to emerge, there is an optimal lips’ resonance frequency  $f_{\ell,n}^{\text{opt,eq}}$  which corresponds to the minimum of a U-shaped pattern. This is associated with an optimal threshold mouth pressure  $p_{\text{thresh},n}^{\text{opt,eq}}$  and an optimal threshold frequency  $f_{\text{thresh},n}^{\text{opt,eq}}$ . The notation  $f_{\ell,n}^{\text{opt,eq}}$  has been chosen to be as consistent as possible with (Velut et al. 2017): in this article, the equilibrium optimal threshold value (i.e. the threshold inferred from the linear stability analysis) of a quantity  $q$  in the  $n^{\text{th}}$  regime was written  $q_{\text{thresh},n}^{\text{opt}}$ . Here, the threshold quantities are obtained either using linear stability analysis or through a bifurcation analysis, which will be defined and addressed in section 2.4. Therefore, it has been chosen to add an extra superscript ‘eq’ for ‘equilibrium’, referring to the linear stability analysis, or ‘per’ for ‘periodic solutions’, referring to the analysis of bifurcation diagrams. Furthermore, it can be noticed that the patterns on the bottom plot of figure 2.4 are always above the line whose equation is  $f_{\text{seuil}} = f_{\ell}$ , which is a characteristic of the outward-striking valve model: the instrument always plays a note slightly above the lips’ resonance frequency.

### 2.3.2 Frequency-dependent lip-opening height at rest

In order to assess the validity of the results presented above, a comparison is drawn with the minimal threshold mouth pressures estimated experimentally in (Gilbert et al. 2018), for the exact same trombone as the one considered in this paper. In figure 2.4, the comparison between the minima of the blue U-shaped patterns and the red dots (representing the experimental measures of the minimal threshold mouth pressures) highlights significant differences. In particular, the results of the linear stability analysis, on the one hand, and of the experiment, on the other hand, are quite different: compared to the experimental data, threshold pressures computed numerically are too low for the first regimes, and too high for the last regimes. To overcome this issue, additional information coming from experiments in (Elliott and Bowsher 1982) is considered. Indeed, the lips’ opening height at rest  $H$  is measured to decrease monotonously with  $f_{\ell}$ . The experimental points are plotted in black on the top plot of figure 2.3, together with two regression functions which aim at fitting these points. The inverse function  $H = k/f_{\ell}$  ( $k$  is given in table 2.1) appears here to better fit the experimental points than the linear regression  $H = af_{\ell} + b$ . Therefore, the former  $H$ -profile will be retained hereafter, even if the case  $H = h_0$  is still given alongside for sake of comparison until the end of section 2.4.

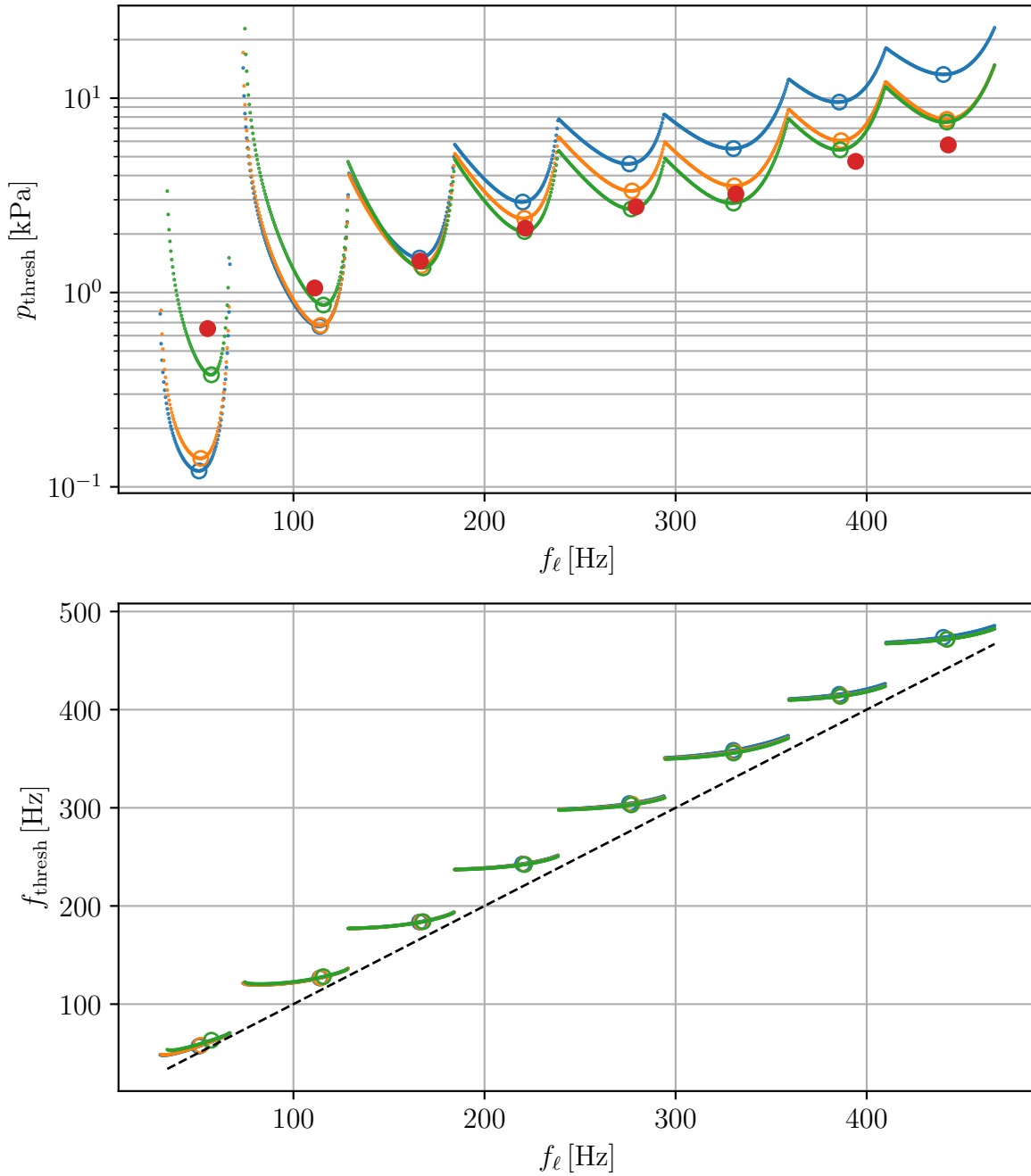


**Figure 2.3** – Considered  $H$ -profiles vs. lips' resonance frequency. Blue line corresponds to the constant value of  $H = h_0$  from (Velut et al. 2017), black points correspond to experimental data from (Elliott and Bowsheer 1982), and the orange and green curves correspond to the regression functions chosen to fit the experimental points, respectively  $H = af_\ell + b$  and  $H \propto 1/f_\ell$ .

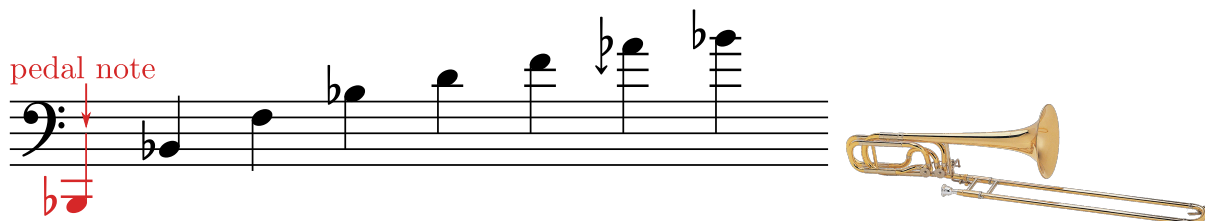
$h_0$ [m]	$w$ [m]	$Q_\ell$	$\frac{1}{\mu}$ [ $\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$ ]
$5.0 \times 10^{-4}$	$1.2 \times 10^{-2}$	7.0	$1.1 \times 10^{-1}$
$\varrho$ [ $\text{kg m}^{-3}$ ]	$c_0$ [ $\text{m s}^{-1}$ ]	$k$ [m Hz]	
1.2	$3.4 \times 10^2$	$7.4 \times 10^{-2}$	

**Table 2.1** – Lips' parameters used in the present publication, mostly taken from (Velut et al. 2017).





**Figure 2.4** – Results of the linear stability analysis with the constant, linear and inverse  $H$ -profile described on figure 2.3. Top and bottom plots represent respectively the threshold mouth pressure and the threshold frequency vs. the lips' resonance frequency. Blue:  $H = h_0$ , orange:  $H = af_\ell + b$ , green:  $H \propto 1/f_\ell$ . Circles point out the minima of each U-shaped pattern on the top plot. Red points represent the experimental values of minimal threshold pressures given by (Gilbert et al. 2018). The black dashed line on the bottom plot represents  $f_{\text{seuil}} = f_\ell$ .



**Figure 2.5** – Natural notes playable by a trombone, i.e without moving the slide nor activating any trigger. From left to right: Bb1 (pedal note), Bb2, F3, Bb3, D4, F4, Ab4 (naturally a bit flat compared to an equal tempered scale), Bb4.

## 2.4 Bifurcation diagrams and minimal blowing pressure

In this section several typical bifurcation diagrams of a trombone are shown and discussed in detail. The additional information obtained with the continuation method on the threshold mouth pressure is also discussed, leading to new conclusions compared to the case of the linear stability analysis.

### 2.4.1 Case of the third regime

In this section the example of the third regime of a trombone is considered (F3, third U-shaped pattern on top plot of figure 2.4), as it shows a variety of different behaviours of the system.

The left plot of figure 2.6 shows the bifurcation diagrams obtained by continuation for a constant  $H$ -profile  $H = h_0$  and for three different but close values of  $f_\ell$ . For each branch of periodic solution, there is a global minimum of the mouth pressure (identified by the vertical dotted lines) below which the regime does not exist anymore. This minimum can be lower than or equal to the linear threshold mouth pressure given by the linear stability analysis in section 2.3. As for this latter method, an optimal threshold mouth pressure  $p_{\text{thresh},n}^{\text{opt,per}}$  which can be lower than or equal to  $p_{\text{thresh},n}^{\text{opt,eq}}$  is introduced, as well as the associated optimal threshold frequency  $f_{\text{thresh},n}^{\text{opt,per}}$  and the associated optimal lips' resonance frequency  $f_{\ell,n}^{\text{opt,per}}$ . For instance, in the case  $f_\ell = 175.09$  Hz (green curve) the observed bifurcation is a direct Hopf (Kuznetsov 2004) and the minimal blowing pressure is the same as the one given by the linear stability analysis. On the contrary, in the case

2. see subsection 2.3.1 for details about this notation.

$f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,eq}}$  (blue curve) and  $f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,per}}$  (orange curve), a small stable portion at the very beginning of the branch is noticed, thus rigorously classifying the bifurcation as a direct Hopf. However, since this stable portion only exists for a narrow range of  $p_m$  it would be very difficult to observe it experimentally, hence we choose to neglect it. In the following, this configuration will be referred to as ‘almost-inverse Hopf’ instead. In the case of this almost-inverse Hopf bifurcation, the solution emerging from the equilibrium is unstable (if we neglect the small stable portion at the very beginning) and stabilises further on the branch at a value of threshold mouth pressure lower than at the equilibrium. For  $f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,per}}$ , the actual minimal blowing pressure is not only below the linear threshold pressure but also below the minimal blowing pressure given by the case  $f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,eq}}$ .

However, it is worth noting that the linear stability analysis provides a rather accurate first guess of the note which is the easiest to play. Indeed, the frequency interval between the easiest note according to the linear stability analysis (corresponding to the minimal blowing pressure of the blue curve on figure 2.6) and according to the bifurcation diagrams (corresponding to the minimal blowing pressure of the orange curve on figure 2.6) is less than a semitone.

Eventually, it is reassuring to note that even if the variable  $H$ -profile  $H \propto 1/f_\ell$  has a significant impact on the threshold pressure of the system, it has nonetheless qualitatively no influence on its threshold frequencies as shown on bottom plot of figure 2.4.

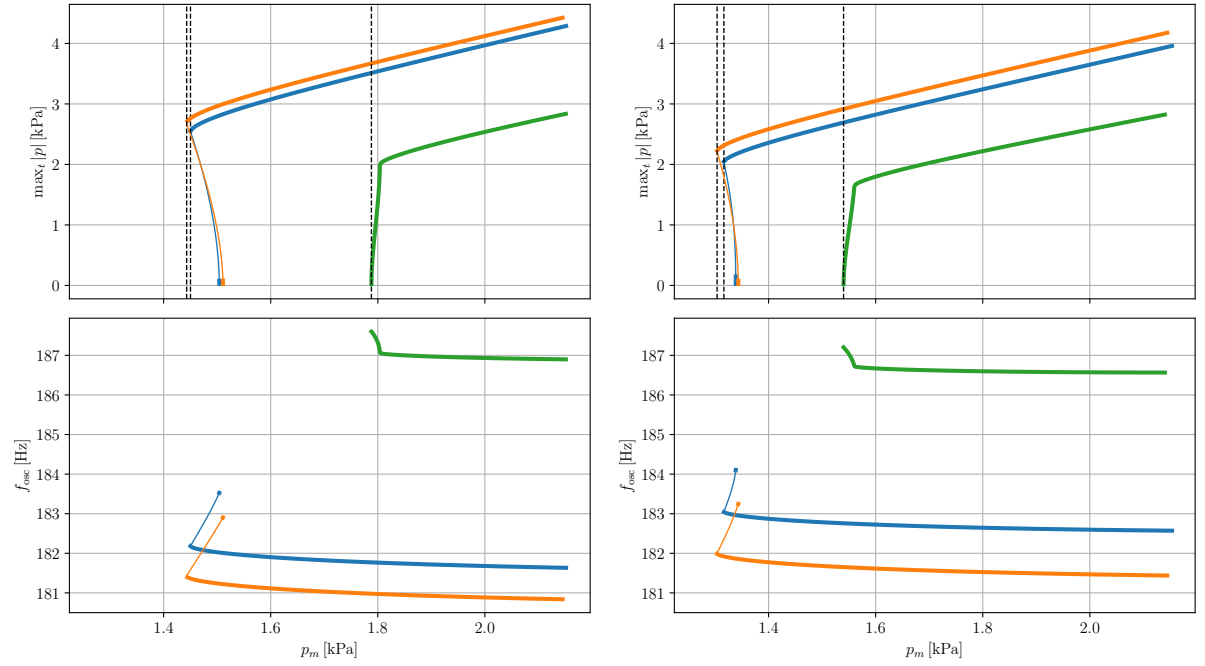
For the interested reader, an animation showing the evolution of the bifurcation diagrams as a function of the lips’ resonance frequency  $f_\ell$  is provided online<sup>3</sup>. It especially shows how the bifurcation can go from almost-inverse Hopf to direct Hopf through the merging of the two stable portions of the branch into a single one.

## 2.4.2 Minimal blowing pressures

The investigation performed in subsection 2.4.1 for two values of  $f_\ell$  is repeated for a wide range of lips’ resonance frequency. For each value of  $f_\ell$ , the global minimal blowing pressure is extracted from the bifurcation diagrams, and these threshold values are compared with the results of linear stability analysis. The results of both methods are

---

3. Animation showing the evolution of the bifurcation diagrams as a function of the lips’ resonance frequency  $f_\ell$  increasing from 134.2 Hz to 182.1 Hz in the case of the constant  $H$ -profile  $H = h_0$  at [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd\\_dyn\\_AC\\_basse\\_reg\\_reg3.avi](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd_dyn_AC_basse_reg_reg3.avi) or in the case of the inverse  $H$ -profile  $H \propto 1/f_\ell$  at [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd\\_dyn\\_AC\\_basse\\_Hinv\\_reg\\_reg3.avi](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd_dyn_AC_basse_Hinv_reg_reg3.avi).



**Figure 2.6** – Top and bottom plots represent respectively the maximum amplitude of the periodic oscillation branches and their oscillation frequency vs. the blowing pressure. Left: case  $H = h_0$ ; right: case  $H \propto 1/f_\ell$ . Blue curves: case  $f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,eq}} = 165.84$  Hz (left) or  $167.75$  Hz (right); orange curves: case  $f_\ell = f_{\ell,3}^{\text{opt,per}} = 164.00$  Hz (left) or  $165.17$  Hz (right); green curves: case  $f_\ell = 175.09$  Hz, which corresponds to an arbitrary  $f_\ell$  value at which the Hopf bifurcations are direct. The line thickness indicates whether the branch portion is stable (thick line) or unstable (thin line). The vertical dashed lines locate the value of the minimal threshold mouth pressure of each curve.

represented in figure 2.7, which clearly highlights the added value of the continuation approach. In particular, the fact the first regimes (Bb1, Bb2 and F3) emerge through inverse Hopf bifurcations results in an actual threshold pressure which is lower than the one predicted by the linear stability analysis. Nevertheless, it is worth noting that the system only exhibit direct Hopf bifurcations for regimes  $\geq 4$ . This means that the linear stability analysis is sufficient to characterise the threshold mouth pressures for these regimes. Nevertheless, it is worth noting that similar investigations performed for a trumpet (which is very similar to a trombone considering its bore, except that its pitch is an octave higher) in (Fréour et al. 2020) highlighted an inverse Hopf bifurcation for the fourth regime. Also, the behaviour observed here for the trombone has also been observed in the case of the euphonium or the saxhorn, except for the first regime which will be addressed in section 2.5.

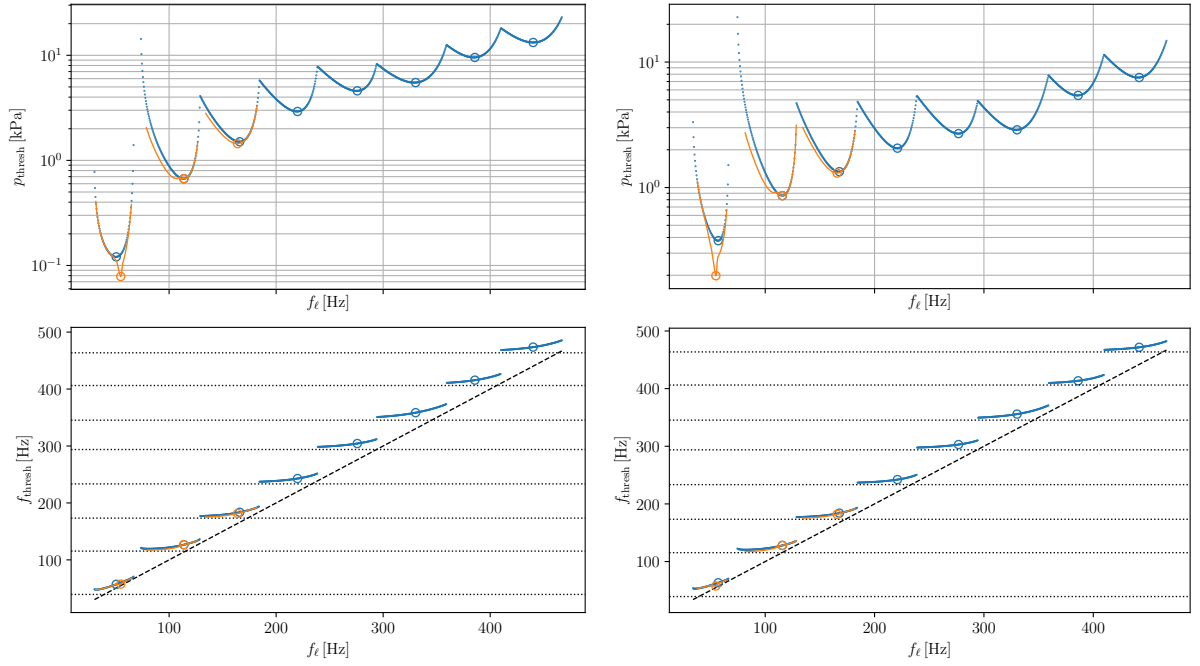
As in subsection 2.4.1, it is reassuring here to note that the variable  $H$ -profile  $H \propto 1/f_\ell$  has qualitatively no influence on the system’s behaviour discussed above, in particular its threshold frequencies as shown on bottom plots of figure 2.7.

Among all the regimes that can be played by the musician according to figure 2.7 and figure 2.5, the first one is especially worth focusing on. Indeed, it exhibits a very different behaviour depending on whether the instrument has a predominantly-cylindrical bore profile (case of the trombone or the trumpet for instance) or a predominantly-expanding bore profile (case of the tubas or the flugelhorn); see for instance figure 7.34 of (Campbell et al. 2021). In this respect, the last section of this paper focuses on the study of the first regime of the trombone (predominantly-cylindrical bore profile) and the euphonium (predominantly-expanding bore profile).

## 2.5 Bifurcation diagrams, case of the first regime

### 2.5.1 Case of the trombone

Similarly to the case of the third regime (see subsection 2.4.1), the bifurcation diagrams of the trombone show that the first regime generally emerges through an inverse Hopf bifurcations (see figure 2.8). As already discussed in subsection 2.4.2, this leads to an optimal threshold pressure  $p_{\text{thresh},1}^{\text{opt,per}}$  smaller than  $p_{\text{thresh},1}^{\text{opt,eq}}$ . However, it is worth noting that, similarly to other regimes, only one note is accessible to the musician since only one



**Figure 2.7** – Top and bottom plots represent respectively the threshold pressures and threshold frequencies given by the linear stability analysis (blue) and the continuation method (orange) vs. the lips' frequency. Left: case  $H = h_0$ ; right: case  $H \propto 1/f_\ell$ . The circles identify the value of  $f_\ell$  corresponding to a local minimum of blowing pressure. Horizontal dotted lines on the bottom plots locate the values of the acoustical resonances of the resonator; the black dashed line on the bottom plots represents  $f_{\text{seuil}} = f_\ell$ .

branch of the bifurcation diagrams is stable. The corresponding note is called the ‘pedal note’ (B♭1, lowest note playable in first position and roughly one octave below the second regime B♭2, see also figure 2.5).

The optimal playing frequency  $f_{\text{thresh},1}^{\text{opt,per}}$  of the pedal note predicted by the bifurcation diagrams is about a semitone lower than the optimal linear threshold frequency  $f_{\text{thresh},1}^{\text{opt,eq}}$  given by the linear stability analysis used in (Velut et al. 2017). Therefore, the analysis of the bifurcation diagrams adds a significant information as regards the playing frequency, even though – as previously discussed in subsection 2.4.2 – the linear stability analysis already provides a rather good estimation of the playing frequency.

### 2.5.2 Case of a bass brass instruments with predominantly-expanding bore profile

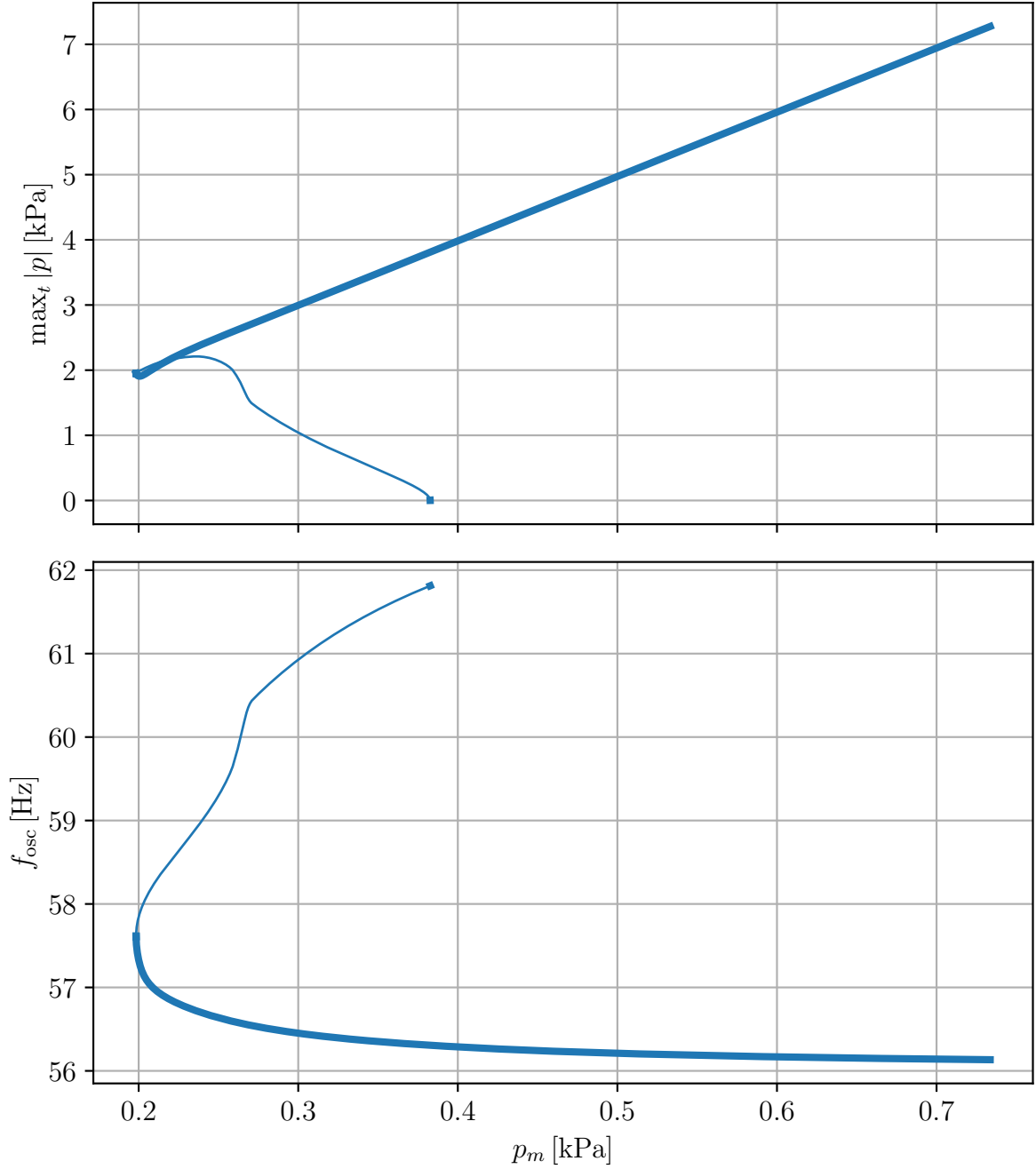
For the regimes 2 to 8, the bifurcation diagrams of the euphonium (not shown here) are very similar to the trombone’s ones, in terms of the direct or inverse nature of the Hopf bifurcations. However, the euphonium exhibits a specific behaviour for the first regime, which is qualitatively different from the one observed for the trombone.

In the case of the euphonium, the left part of figure 2.10 shows typical bifurcation diagrams, obtained for a value of lips’ resonance frequency  $f_\ell$  in the range of the first regime. Contrary to the trombone, these diagrams display two stable regimes corresponding to two distinct periodic solution branches, thus resulting in two different playing regimes accessible to the musician. The note with the lowest oscillation frequency is called – as for the trombone – the ‘pedal note’ (B♭1, lowest note playable without any valve pushed, see also figure 2.9), whereas the other one is referred to as the ‘ghost note’<sup>4</sup> (see figure 2.9).

On the one hand, the pedal note (red note on figure 2.9) is a natural note, which is as familiar as any other regime for both trombone and euphonium players. On the other hand, the ghost note (green note on figure 2.9) is a regime exclusively accessible to bass brass instruments with predominantly-expanding bore profile as a whole, such as the euphonium. Even though the ghost note is not much used in a musical context by euphonium players, it can be played by any tuba player and was brought to light

---

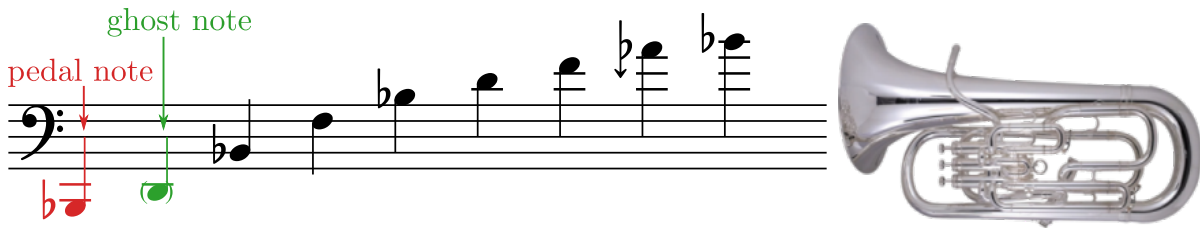
4. We chose here to use the term employed by (Velut et al. 2017) to qualify this note being between a minor third and a perfect fourth higher than the pedal note.



**Figure 2.8** – Top and bottom plots represent respectively the maximum amplitude of the periodic solutions branches and their oscillation frequency vs. the blowing pressure in the case of a trombone, for  $f_\ell = f_{\ell,1}^{\text{opt,per}} = 54.86$  Hz. The line thickness indicates whether the branch portion is stable (thick line) or unstable (thin line).



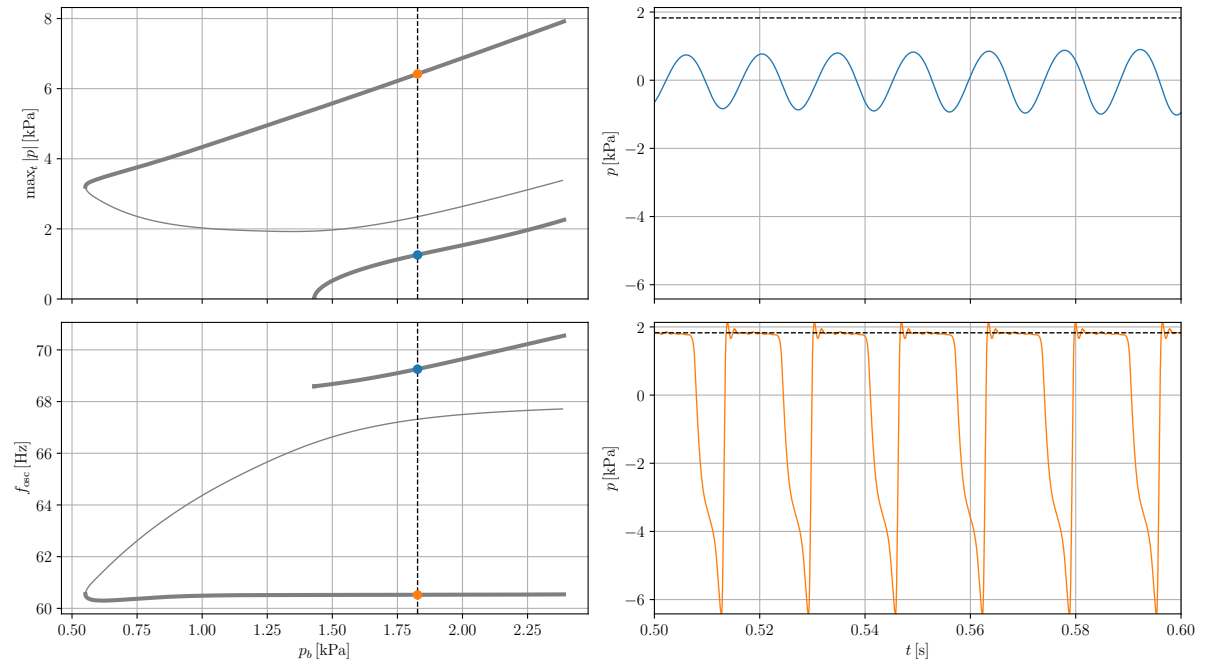
for the first time in (Velut et al. 2017) using linear stability analysis. In particular, it was the only note playable for values of  $f_\ell$  close to the first acoustic resonance of the resonator according to this method. As a matter of fact, since the branch corresponding to the pedal note (see the left plots of figure 2.10) does not emerge from the equilibrium solution (whereas the branch of the ghost note does), this regime could not be found by linear stability analysis which gives trustworthy information only in the vicinity of an equilibrium. Furthermore, the ghost note can be linked to one of the ‘factitious notes’ mentioned in (Herbert et al. 2019), where it is referred to as a ‘phenomenon whereby a player can sound a note intermediate between notes low in the series of natural notes’ and sounds a perfect fourth above the pedal note in the case of an E $\flat$ -tuba.



**Figure 2.9** – Natural notes playable by a euphonium, i.e without depressing any valves. From left to right: B $\flat$ 1 (pedal note, red), D2 (ghost note, green), B $\flat$ 2, F3, B $\flat$ 3, D4, F4, A $\flat$ 4 (naturally a bit flat compared to an equal tempered scale), B $\flat$ 4.

To illustrate the uncommon behaviour of the bifurcation diagrams shown in figure 2.10 (left), figure 2.10 (right) shows results of time-domain simulations. The first simulation (left) corresponds to the blue point on the ghost note branch of the bifurcation diagrams. Its instantaneous frequency is 69.5 Hz, which is coherent with the oscillation frequency displayed on the top right plot in figure 2.10. The second time-domain simulation (right) corresponds to the orange point on the pedal note branch of the bifurcation diagrams. Its instantaneous frequency is 60.6 Hz, which is coherent with the oscillation frequency displayed on the top left bottom in figure 2.10.

In the case of the pedal note, it is worth noting that over one period,  $p(t)$  becomes higher than  $p_m$  (horizontal dotted line), which is physically questionable as it was never observed experimentally. This phenomenon might be considered as a weakness of the model used, caused by the raw modelling of the contact between the lips in equation 2.2. To overcome this limitation, a contact force between the lips – currently unavailable in literature – could be added in this equation. However, it is worth mentioning that such a contact force has already been introduced in the case of reed instruments (Munoz Arancon



**Figure 2.10** – Typical bifurcation diagrams (left) and time-domain simulations (right) in the case of the euphonium’s first regime, obtained for  $p_m = 1.8$  kPa and  $f_\ell = f_{\ell, \text{PN}}^{\text{opt, per}}$  (Pedal Note) = 49 Hz. Left plots represent the maximum amplitude of the periodic oscillation branches vs. the blowing pressure (top) and the frequency of the corresponding periodic solutions vs. the blowing pressure (bottom). The line thickness indicates whether the branch portion is stable (thick line) or unstable (thin line). Right plots represent the time evolution of the acoustic pressure at two points of the bifurcation diagrams above, given by the intersection of the vertical dotted line and the branches. Top: time-domain simulation of the ghost note (blue point on the bifurcation diagrams); bottom: time-domain simulation of the pedal note (orange point on the bifurcation diagrams). The horizontal dotted line represents the value of  $p_m$ .

et al. 2013).

### 2.5.3 Assessment of the frequency interval between pedal note and ghost note

It is possible to qualitatively check the relevance, in terms of intonation, of these two regimes predicted by the bifurcation analysis. In particular, one can compare the frequency intervals between the ‘easiest-to-play’ notes predicted by the bifurcation diagrams on the one hand, and by analysing recordings of a euphonium player on the other hand. In the case of a euphonium and considering the U-shaped patterns in figure 2.11, the ‘easiest-to-play’ notes are those with the lowest threshold mouth pressure. The corresponding oscillation frequencies are  $f_{\text{thresh,PN}}^{\text{opt,per}} = 60.6$  Hz for the pedal note,  $f_{\text{thresh,GN}}^{\text{opt,eq}} = 75.6$  Hz for the ghost note, and  $f_{\text{thresh,2}}^{\text{opt,per}} = 120.4$  Hz for the B $\flat$ 2 (in the bifurcation diagrams, we have actually  $f_{\text{thresh,2}}^{\text{opt,per}} < f_{\text{thresh,2}}^{\text{opt,eq}}$ ). Therefore, it has been found that the frequency interval between the pedal note and the ghost note inferred from the bifurcation analysis ( $75.6/60.6 \approx 1.25 = 5/4$ ) is about 2 tones (major third), whereas the recording of a euphonium player<sup>5</sup> leads to a high major third between the pedal note and the ghost note, which is reasonably close. Furthermore, the frequency interval between the pedal note and the second regime obtained in the bifurcation diagrams is found to be close to 12 semitones (octave), as one would expect between a B $\flat$ 1 and a B $\flat$ 2.

Eventually, it is worth highlighting that the ghost note does exist for other tuba types than the euphonium, such as the E $\flat$ -tuba for instance<sup>5</sup>.

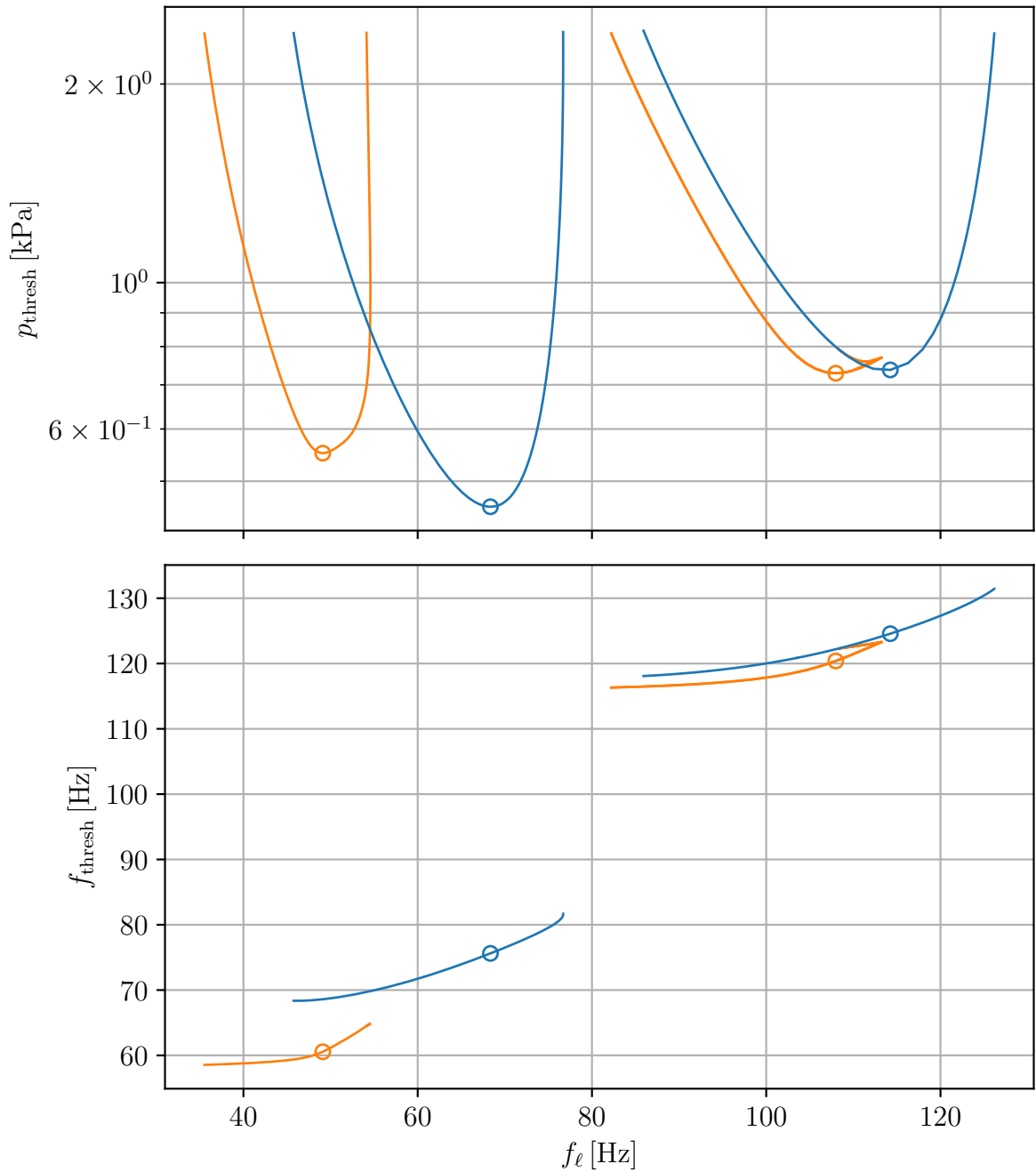
## 2.6 Conclusion

Most results in this study highlight the usefulness of linear stability analysis to understand various near-threshold behaviours of a complete nonlinear model of brass instrument applied to trombone and euphonium, as well as the ability of bifurcation diagrams to quickly give valuable information about their periodic solutions.

The ease of playing of an instrument is chosen to be assessed based on the minimal

---

5. Recording of a euphonium player at [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bb-euphonium\\_reg1-6.mp4](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bb-euphonium_reg1-6.mp4) and of an E $\flat$ -tuba player at [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/eb-tuba\\_reg1-6.mp4](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/eb-tuba_reg1-6.mp4) playing successively an ascending series and a descending series of the six first natural notes, going through the ghost note when descending.



**Figure 2.11** – Top and bottom plots represent respectively the threshold pressures and threshold frequencies given by the linear stability analysis (blue) and the continuation method (orange) vs. the lips' resonance frequency in the case of a euphonium. The circles identify the value of  $f_\ell$  corresponding to a local minimum of blowing pressure. In the case of the second regime, the easiest note playable is given by the minimum of the continuation method (orange curve), since its minimal threshold mouth pressure is lower than the one given by the linear stability analysis (blue curve). The first two regimes on the left of each plot represent respectively the pedal note and the ghost note.

threshold pressures. A good estimate can be obtained using linear stability analysis. At the same time, the associated threshold oscillation frequency is inferred, which is directly linked to the pitch of the note. For the considered elementary model of brass instrument, this method provides information on all the periodic regimes accessible to a trombone player for a given position of the slide, and on almost all periodic regimes accessible for a given fingering of a euphonium.

However, linear stability analysis turns out to be unable to describe the pedal note of the euphonium. In this respect, the analysis of bifurcation diagrams are conveniently introduced. It allows to illustrate the existence of the pedal regime in the form of a branch of periodic solutions far from equilibrium (hence the failure of linear stability analysis to describe it) separated from the one describing the ghost note, which itself emerges from the destabilisation of the equilibrium solution. Moreover, compared to the linear stability analysis, bifurcation diagrams give a more precise prediction of the threshold mouth pressures in the event of an inverse Hopf bifurcation. However, it is worth highlighting that the minimal threshold mouth pressure of each periodic regimes for a given slide position or fingering in the case of a trombone or a euphonium – except the pedal note of the latter – given by the bifurcation diagrams is qualitatively the same as given by the linear stability analysis.

If the ghost note seems to exist on every model of tubas, the interval between the ghost note and the first regime appears to vary from a minor third to a perfect fourth depending on the tuba's pitch. Future work include a more quantitative study on a wide range of tubas going from the B $\flat$ -contrabass tuba to the B $\flat$ -baritone horn (an octave higher), in order to determine whether or not the frequency interval between the pedal note and the ghost note remains constant regardless of the considered bass brass instrument with predominantly-expanding bore profile.

Moreover, it is worth noting that the pedal note also exhibits different behaviours for the high brass instruments, depending on the bore profile of the instrument. For example, the pedal note appears to be more 'slotted' (meaning that the player has the sensation of a well-defined pitch) on a flugelhorn (predominantly-expanding bore profile) than on a trumpet (predominantly-cylindrical bore profile).

One important limitation of the present study lies in the difficulty to estimate the lips' parameters used in the model. Indeed, it would be reasonable to think that lips'

parameters would vary from playing a low note to playing a high note, not to mention from playing a contrabass tuba to playing an alto trombone for instance. Yet, these lips' parameters being difficult to measure both on an artificial mouth or directly on the player, they were kept the same regardless the instrument or the note played. Even though the obtained results look reasonable, i.e consistent with the musicians' experience, *in vivo* measurements of lips parameters during musical performance would be very valuable. Furthermore, even if the system dynamics does not seem to depend sensitively on the model's parameters such as the lip-opening height at rest  $H$ , it may be worth checking the impact of a finer modelling of various elements on the ease of playing and pitch: for instance, considering a mouth section proportional to  $H^2$  (instead of only  $H$  in the present study), taking a second resonance frequency of the lips into account, or adding a contact force between the lips when they are about to touch each other.

## 2.7 Acknowledgements

We wish to thank Emmanuel Brasseur and Julia Mourier for useful discussions and for their help in this work.

## 2.8 Appendix

### Inverse Fourier transform of the input impedance

This appendix is based on the demonstration found in section 6.3 of (Silva 2009).

Quantities in the Fourier domain are written using capital letters, whereas quantities in the time domain are written using small letters.

Starting from equation (2.5), we have  $P(\omega) = Z_{\text{rec}}(\omega)U(\omega)$  by definition of the input impedance. Since  $Z_{\text{rec}}$  represents the impulse response of the resonator, the inverse Fourier transform of  $Z_{\text{rec}}$  has to be real. Thus,  $Z_{\text{rec}}$  is hermitian-symmetric, that is to say  $Z_{\text{rec}}(-\omega) = Z_{\text{rec}}^*(\omega)$ . The pressure in the mouthpiece in the time domain  $p$  can then be inferred by taking the inverse Fourier transform of  $P$ :

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \mathfrak{F}^{-1} [P(\omega)] (t) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} Z_{\text{rec}}(\omega) U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n}{j\omega - s_n} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n}{j\omega - s_n} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n^*}{-j\omega' - s_n^*} U(-\omega') e^{-j\omega' t} d\omega' \right),
 \end{aligned}$$

with  $\omega' = -\omega$ .  $U$  being also hermitian-symmetric, we have:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n}{j\omega - s_n} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{C_n}{j\omega' - s_n} U(\omega') e^{j\omega' t} \right)^* d\omega' \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N 2\Re \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{C_n}{j\omega - s_n} U(\omega) e^{j\omega t} d\omega \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N 2\Re (p_n(t)),
 \end{aligned}$$

where  $p_n$  is the complex component of the pressure in the mouthpiece  $p$ , whose dynamical behaviour is linked to  $C_n$  and  $s_n$ :

$$P_n(\omega) = \frac{C_n}{j\omega - s_n} U(\omega) \Rightarrow \dot{p}_n(t) - s_n p_n(t) = C_n u(t).$$

## Dimensionless variables and equations

From a numerical point of view, it is reasonable to make equations dimensionless in order to prevent the variables from varying on a too-large scale, especially when using the continuation method in AUTO. In all that follows, most dimensionless quantity are written with a tilde ‘ $\sim$ ’ unless otherwise stated.

The dimensionless variables of the system  $(\tilde{h}, \tilde{p}, \tilde{u})$ , the dimensionless time  $\tilde{t}$ , the dimensionless mouth pressure  $\gamma$ , the dimensionless lips’ resonance frequency  $\theta_\ell$  and the dimensionless modal parameters  $(\kappa_n, \sigma_n)$  are defined as follows :

$$\begin{aligned}\tilde{h} &= \frac{h}{h_0} ; \tilde{p} = \frac{p}{p_0} ; \tilde{u} = \frac{Z_c}{p_0} u ; \\ \tilde{t} &= \omega_0 t ; \gamma = \frac{p_m}{p_0} ; \theta_\ell = \frac{\omega_\ell}{\omega_0} ; \\ \kappa_n &= \frac{C_n}{\omega_0} ; \sigma_n = \frac{s_n}{\omega_0},\end{aligned}$$

where  $h_0$  is given in table 2.1,  $\omega_0 = \Im\mathfrak{m}(s_4)/4$  is the quarter of the fourth resonance angular frequency of the resonator (chosen as so because the fourth resonance frequency appears to be quite similar between instruments of the same tube length, such as a trombone and a euphonium for instance), so that  $p_0$  can be defined in a similar way as the closure pressure for woodwind instruments (Colinot et al. 2019):  $p_0 = \mu\omega_0^2 h_0$ . Given the new set of variables, the state vector is now:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{X}} &= \left( \left\{ \tilde{X}_m \right\}_{m \in \llbracket 1, 2(N+1) \rrbracket} \right) \\ &= \left( \tilde{h}; \tilde{h}; \left\{ \Re(\tilde{p}_n) \right\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \left\{ \Im(\tilde{p}_n) \right\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right),\end{aligned}$$

so the equation (2.9) is now written as:



$$\tilde{F} : \tilde{\mathbf{X}} \mapsto \begin{pmatrix} \tilde{X}_2 \\ -\frac{\theta_\ell}{Q_\ell} \tilde{X}_2 - \theta_\ell^2 (\tilde{X}_1 - \tilde{H}) + \gamma - 2 \sum_{n=3}^{N+2} \tilde{X}_n \\ \Re \left[ \sigma_1 (\tilde{X}_3 + j\tilde{X}_{N+3}) + \kappa_1 \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \\ \Re \left[ \sigma_2 (\tilde{X}_4 + j\tilde{X}_{N+4}) + \kappa_2 \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \\ \vdots \\ \Re \left[ \sigma_N (\tilde{X}_{N+2} + j\tilde{X}_{2(N+1)}) + \kappa_N \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \\ \Im \left[ \sigma_1 (\tilde{X}_3 + j\tilde{X}_{N+3}) + \kappa_1 \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \\ \Im \left[ \sigma_2 (\tilde{X}_4 + j\tilde{X}_{N+4}) + \kappa_2 \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \\ \vdots \\ \Im \left[ \sigma_N (\tilde{X}_{N+2} + j\tilde{X}_{2(N+1)}) + \kappa_N \tilde{u}(\tilde{\mathbf{X}}) \right] \end{pmatrix},$$

with  $\tilde{u}$  now written as:

$$\tilde{u} : \tilde{\mathbf{X}} \mapsto \zeta \times \frac{\tilde{X}_1 + \sqrt{\tilde{X}_1^2 + \eta}}{2} \times \frac{(\gamma - 2 \sum_{n=3}^{N+2} \tilde{X}_n)}{\sqrt[4]{(\gamma - 2 \sum_{n=3}^{N+2} \tilde{X}_n)^2 + \eta}},$$

and eventually  $\zeta = \frac{wZ_c}{\omega_0} \sqrt{\frac{2h_0}{\rho\mu}}$  the dimensionless lip-opening height at rest, defined similarly to (Gilbert et al. 2020).

---

# VARIÉTÉ DES NOTES FANTÔMES DES TUBAS, EUPHONIUMS ET SAXHORNS

---

## Sommaire

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>79</b>
<b>3.2</b>	<b>Theoretical background</b>	<b>83</b>
3.2.1	Physical model of brass instrument	83
3.2.2	Numerical considerations	85
<b>3.3</b>	<b>Minimal blowing pressures and playing frequencies</b>	<b>91</b>
3.3.1	Case of the B $\flat$ -contrabass tuba	91
3.3.2	Case of the B $\flat$ -baritone saxhorn	98
<b>3.4</b>	<b>Comparison between tubas with different nominal pitch</b>	<b>102</b>
3.4.1	Recording set-up	102
3.4.2	Results	102
<b>3.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>106</b>
<b>3.6</b>	<b>Acknowledgments</b>	<b>107</b>
<b>3.7</b>	<b>Appendix</b>	<b>108</b>
<b>3.8</b>	<b>Résultats supplémentaires</b>	<b>110</b>
3.8.1	Processus de reconnexion de la branche de la note pédale	110
3.8.2	Étude de l'évolution des pressions et fréquences de seuil opti- males entre un saxhorn baryton et un saxhorn basse	113

---

Dans ce chapitre, nous reproduisons un article publié à *Acta Acustica* le 2 août 2022<sup>1</sup>. Il s'inscrit dans le prolongement direct de (Mattéoli et al. 2021) (reproduit en section 2), dans lequel les notes naturelles de cuivres graves – tels que le trombone et l'euphonium

1. <https://doi.org/10.1051/aacus/2022026>

– étaient étudiées. Cet article privilégie l'étude approfondie d'une note naturelle propre aux tubas, la « note fantôme ». Une partie « Résultats supplémentaires » (section 3.8) a été ajoutée à la fin de l'article. D'une part, elle présente une étude plus approfondie de l'influence de la fréquence de résonance des lèvres sur la reconnexion de la branche de solutions périodiques correspondant à la note pédale dans le cas du tuba, brièvement abordée dans l'article. D'autre part, elle présente une étude qualitative de l'évolution des pressions et fréquences de seuil, lorsque d'une transition continue d'un saxhorn basse à un saxhorn basse.

## Résumé étendu

On distingue dans la famille des cuivres deux grandes catégories, les cuivres à perce essentiellement cylindrique d'une part, et les cuivres à perce essentiellement conique d'autre part. Les cuivres à perce essentiellement cylindrique, parmi lesquels on trouve par exemple la trompette ou le trombone, sont fait d'un tube dont le diamètre, la perce, varie très peu entre l'entrée de l'instrument et le début du pavillon. Les résonances de ces instruments forment une série harmonique, à l'exception de la première résonance, dont la fréquence vaut environ le tiers de la seconde fréquence de résonance. Par ailleurs, la série des notes naturelles (c'est-à-dire les notes pouvant être jouées sans enfoncer de piston ou bouger la coulisse) de ces instruments est proche d'une série harmonique. Ainsi, la note pédale (note naturelle la plus grave) de ces instruments ne se synchronise pas sur la première résonance, comme c'est le cas pour les autres notes naturelles en première approximation. D'autre part, les cuivres à perce essentiellement conique, parmi lesquels on trouve par exemple le cornet à pistons ou le tuba, possèdent une perce qui augmente régulièrement entre l'entrée et la sortie de l'instrument. Les résonances de ces instruments sont plus proches d'une série harmonique, la première fréquence de résonance valant environ la moitié de la deuxième fréquence de résonance. La série des notes naturelles des instruments à perce essentiellement conique étant identique à celle des instruments à perce essentiellement cylindrique en terme d'intervalles entre les notes naturelles, on peut considérer que la note pédale se synchronise sur la première résonance de l'instrument, toujours en première approximation. Cependant, en se basant sur le modèle de cuivre à trois équation décrit en section 1.1, (Velut et al. 2017) a mis en évidence une note naturelle supplémentaire sur un saxhorn basse (type de tuba), située entre la note pédale et le second régime, et appelée la note « fantôme ». Cette note s'est par la suite révélée jouable en pratique, et

---

constitue alors une note naturelle singulière à plusieurs titres, à commencer par le fait qu'elle est propre aux cuivres à perce essentiellement conique. De plus, sa fréquence de jeu ne s'accorde sur aucune résonance de l'instrument, de manière similaire à la note pédale des cuivres à perce essentiellement cylindrique. Enfin, si à titre d'exemple l'intervalle entre la note pédale et le second régime reste proche de l'octave quelle que soit la tonalité nominale de l'instrument, l'intervalle entre la note pédale et la note fantôme varie d'une tierce mineure à une quarte juste. Les mentions de cette note dans la littérature musicale ou scientifique sont très rares, et elle est peu connue des tubistes, d'où son nom.

On avait montré dans (Mattéoli et al. 2021) que le modèle élémentaire de cuivres décrit dans la section 1.1 était capable de décrire à la fois la note fantôme et la note pédale. On montre alors dans ce nouvel article que le même modèle de cuivres est de plus capable de décrire la diversité des notes fantômes au sein de la famille des tubas, sur l'exemple de sept types de tuba différents. Pour ce faire, on commence par mesurer l'impédance d'entrée de chaque instrument au moyen d'un pont d'impédance, sur laquelle on effectue une décomposition modale, que l'on injecte ensuite dans le modèle. On détermine alors les trois premières notes naturelles de chaque tuba en utilisant les mêmes outils que (Mattéoli et al. 2021), c'est-à-dire l'analyse de stabilité linéaire d'une part et la continuation numérique d'autre part. Par cette deuxième méthode d'analyse, on trace, dans les plans  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$  et  $(f_\ell, f_{\text{seuil}})$ , le lieu des points particuliers du diagramme de bifurcation partiel tels que les points de Hopf ou les points nœud-col dans le cas des bifurcations de Hopf inverses. Ces lieux décrivent des cuvettes, dont le minimum correspond à une note dont la pression de seuil est la plus basse, et donc la plus facile à jouer selon la définition de la facilité d'émission que l'on s'est donnée. Deux cuvettes distinctes peuvent caractériser une même note si leur fréquence de seuil est proche l'une de l'autre, par exemple lorsque la bifurcation est inverse : le lieu des points de Hopf forme une première cuvette, et le lieu des points nœud-col (seuil inverse) une seconde cuvette. Dans ce cas, la note la plus facile à jouer est donnée par la cuvette dont le minimum est le plus bas dans le plan  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$ . On en déduit les trois premières notes naturelles (note pédale, note fantôme et second régime) les plus faciles à jouer, puis les intervalles fréquentiels entre note pédale et note fantôme, note fantôme et second régime, et note pédale et second régime. Parallèlement, on estime expérimentalement la hauteur de chaque note à partir d'enregistrements des sept types de tuba, chacun joué tour à tour par deux tubistes professionnels. L'exercice joué par les tubistes consiste en une alternance des trois première notes naturelles *ad libitum*, avec la consigne de chercher la note paraissant la plus facile à jouer, au détriment de la justesse.

Un exercice comportant plusieurs occurrences d'une même note, on obtient alors une bonne estimation de la hauteur de cette note au moyen de l'algorithme d'estimation de fréquence fondamentale YIN. On montre alors que le modèle et les enregistrements sont en bon accord du point de vue des intervalles calculés, à l'exception du saxhorn baryton. Dans ce dernier cas, la note fantôme est décrite comme « peu centrée » par les tubistes, et donc de hauteur incertaine, comme en témoigne le désaccord entre les deux tubistes pour la hauteur de cette note. Numériquement, il apparaît que la cuvette décrivant le premier régime dans le plan  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$  comporte deux minima contigus, l'un correspondant à la note fantôme, l'autre à la note pédale. Il est de ce fait plus facile de passer d'un minimum à l'autre (et donc d'une note à l'autre) en modifiant la fréquence de résonance de lèvres que sur les autres tubas, pour lesquels la note pédale et la note fantôme sont caractérisées par deux cuvettes distinctes dans le plan  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$ . Ce phénomène, propre au saxhorn baryton, a donc été jugé pertinent afin d'expliquer le ressenti des tubistes à propos de la note fantôme sur cet instrument.

---

## Diversity of ghost notes in tubas, euphoniums and saxhorns

Rémi MATTÉOLI, Joël GILBERT, Soizic TERRIEN, Jean-Pierre DALMONT,  
Christophe VERGEZ, Sylvain MAUGEAIS, Emmanuel BRASSEUR

---

### Abstract

The ghost note is a natural note which can be played exclusively on bass brass instruments with a predominantly-expanding bore profile such as tubas, euphoniums or saxhorns. It stands between the pedal note – the lowest natural note playable, or first regime – and the instrument’s second regime. However, if the interval between the pedal note and the second regime remains close to an octave regardless of the instrument, the interval between the pedal note and the ghost note vary from a minor third to a perfect fourth. References about this note are very scarce, and it is not commonly known among tuba players.

This study shows that an elementary brass model describing the player coupled to the instrument is capable of bringing both the ghost and the pedal note to light. Here, we adopt a dynamical systems point of view and perform a bifurcation analysis using a software of numerical continuation. The numerical results provided in terms of frequency intervals between pedal note and ghost note are compared with frequency intervals experimentally inferred from recordings of seven different types of tuba, each of them being played by two professional tuba players.

### 3.1 Introduction

One important goal of the acoustics of wind instruments is to describe and quantify the intonation and ease of playing of an instrument. From the physics point of view, a classical approach consists in modelling the coupled system composed of the musician and the instrument. Of particular interest is the influence of the musician’s control parameters

on the oscillation frequency (linked to the intonation), and the minimum blowing mouth pressure required to trigger self-oscillations (related to the ease of playing). Indeed, it is assumed here that the musician’s feeling of ease of playing partly relies on the blowing threshold pressure: the higher the latter, the higher the physical effort the player has to make to play a note (Campbell et al. 2021). In practice, the musician can play several notes without changing the acoustical properties of the instrument itself, that is to say without depressing any valves in the case of a tuba, or moving the slide in the case of a trombone. These notes are called the natural notes (B♭1, B♭2, F3, B♭3, D4, F4,... in the case of a trombone or a B♭-bass saxhorn for instance), and their frequencies are close to the resonance frequencies of the instrument as a whole, except for the lowest note playable (B♭1, frequency  $\approx 58$  Hz).

The oscillation regimes and ease of playing of bass brass instruments have been investigated in (Mattéoli et al. 2021): a bifurcation analysis showed that a simple mathematical model accurately describes all the natural notes of a bass trombone and a euphonium in terms of frequency. However, a main difference was highlighted in (Velut et al. 2017; Mattéoli et al. 2021), between instruments with predominantly-cylindrical bore profile such as the trombone, and instruments with predominantly-expanding bore profile such as the euphonium or bass saxhorn. Indeed, the latter exhibit an extra regime located between the pedal note and the second regime, referred to as ‘ghost note’. It was also pointed out that the frequency interval between the pedal note and the ghost note could vary between a minor third and a perfect fourth, depending on the bore geometry of the instrument, whereas all other intervals between natural notes remained approximately the same.








This paper aims at proving that the same generic brass model is also able to render the variety of ghost notes existing among the tuba family. In that respect, a bifurcation analysis is performed to determine the easiest-to-play pedal note, ghost note and second regime. Then, the frequency intervals between the pedal note and the second regime, and between the ghost note and the second regime are assessed for the seven tubas displayed in figure 3.1, and compared to recordings of two professional tuba players playing the same set of tubas. A more exhaustive description of the characteristics of each tuba and their mouthpiece can be found in table 3.1. It is worth noting from this table that the baritone saxhorn, the bass saxhorn and the euphonium have the same nominal pitch (B♭), and the same set of natural notes. However, while the bass saxhorn and the euphonium have a bore profile quite similar to the other tubas (predominantly-expanding bore profile), the



**Figure 3.1** – Photograph showing the different tubas studied in the present publication. From left to right (lowest to highest nominal pitch): contrabass tuba in  $B\flat$ , contrabass tuba in  $C$ , bass tuba in  $E\flat$ , bass tuba in  $F$ , euphonium in  $B\flat$ , bass saxhorn in  $B\flat$ , baritone saxhorn in  $B\flat$ . Details about each tuba can be found in the table 3.1.



baritone saxhorn’s bore profile is intermediate between a tuba’s and a trombone’s bore profile (predominantly-cylindrical bore profile), as it is seen in the bottom plot of figure 3.8. Therefore, this instrument constitutes a borderline case in this paper.

	B♭-contrabass tuba	C-contrabass tuba	E♭-bass tuba
Nominal pitch	18-ft B♭	16-ft C	13-ft E♭
Brand	Besson	Hirsbrunner	Besson
Model	BE994	HBS 510	BE983
Mouthpiece	Perantucci PT-50	Perantucci PT-50	Romera FT20
Visual			
F-bass tuba	B♭-euphonium	B♭-bass saxhorn	B♭-baritone saxhorn
12-ft F	9-ft B♭	9-ft B♭	9-ft B♭
Melton	Besson	A. Courtois	SML
2250	BE967	AC164	BA16
Romera FT20	A. Courtois T2	A. Courtois T2	A. Courtois T2
			

**Table 3.1** – Characteristics of the seven tubas studied in this paper, classified in the same order as in figure 3.1. By convention, the nominal pitch specifies a number of feet (ft) coupled with a musical pitch name, being the nominal fundamental of the instrument (lowest note playable without any valve depressed). The number of feet corresponds to the equivalent cone length  $L_{\text{nom}}^{\text{ec}}$ , related to the frequency  $F_{\text{nom}}$  of its nominal fundamental by the formula  $L_{\text{nom}}^{\text{ec}} = \frac{c_0}{2F_{\text{nom}}}$ , with  $c_0$  the speed of sound in the air<sup>2</sup>.

In section 3.2, we describe the considered model and numerical methods, namely linear stability analysis and numerical continuation. In section 3.3, we use linear stability

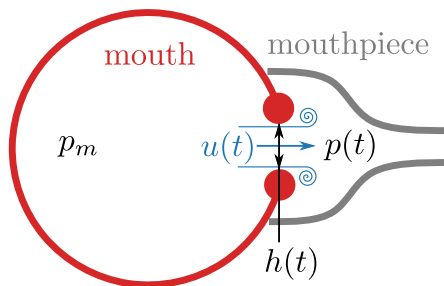
<sup>2</sup>. See for instance paragraph 1.2.3 of (Campbell et al. 2021) for more details about the notion of nominal pitch.

analysis and bifurcation diagrams, respectively, to investigate the minimal mouth pressure and playing frequencies of two particular tubas. Eventually, we present in section 3.4 the procedure used to assess experimental oscillation frequencies based on recordings of two professional tuba players, which we use for comparison with numerical oscillation frequencies.

## 3.2 Theoretical background

### 3.2.1 Physical model of brass instrument

This subsection briefly presents the brass instrument model considered throughout the article. It has already been thoroughly described in (McIntyre et al. 1983; Hirschberg 1995; Velut et al. 2017; Mattéoli et al. 2021). Brass instruments as a whole can be described through both linear and nonlinear mechanisms. More precisely, a localised nonlinear element (the lips' valve effect, namely the velocity modulation caused by the lips' vibration) excites a passive linear acoustic multimode element (the musical instrument, usually characterised by its input impedance in the frequency domain) (Fletcher and Rossing 1998). The latter acoustic resonator exerts, in turn, a retroaction on the former mechanical resonator. Such musical instruments are self-sustained oscillators: they generate an oscillating acoustic pressure (the note played) from a static overpressure in the player's mouth (the blowing pressure) (Chaigne and Kergomard 2016; Campbell et al. 2021; Fletcher and Rossing 1998).



**Figure 3.2** – Schematic representation of the player's mouth coupled to the mouthpiece of a brass instrument.  $p_m$  stands for the blowing mouth pressure,  $u(t)$  is the volume velocity flowing from the player's mouth into the mouthpiece,  $p(t)$  is the acoustic pressure inside the mouthpiece, and  $h(t)$  is the height between the lips.

The brass instrument coupled to the player is then described by a system of three

equations. Because it relies on major simplifications (Campbell et al. 2021; Elliott and Bowsher 1982), this model is often referred to as ‘elementary’<sup>3</sup>. More precisely, the three equations link the lip-opening height  $h(t)$ , the pressure in the mouthpiece  $p(t)$  and the volume velocity entering the instrument  $u(t)$ , which are the three independent variables of interest in this paper. These are all represented schematically in figure 3.2. Several control parameters (that is to say controlled by the musician) are involved: this includes, in particular, the blowing mouth pressure  $p_m$  – which is simply referred to as the mouth pressure in the following – and the lips’ resonance frequency  $f_\ell$ .

First, the vibrating lips of the musician are described by a one-degree-of-freedom damped oscillator (Fletcher 1993):

$$\frac{d^2h}{dt^2} + \frac{\omega_\ell}{Q_\ell} \frac{dh}{dt} + \omega_\ell^2 (h(t) - H(\omega_\ell)) = \frac{p_m - p(t)}{\mu}, \quad (3.1)$$

where  $\omega_\ell = 2\pi f_\ell$  and  $Q_\ell$  are the angular resonance frequency and the quality factor of the lips, respectively,  $\mu$  is the lips’ mass per unit area, and  $H(\omega_\ell)$  is the lip-opening height at rest. Based on *in vivo* measurements of  $H$  with respect to  $\omega_\ell$  from (Elliott and Bowsher 1982),  $H$  is assumed to be proportional to the inverse of the lips’ resonance frequency as in (Mattéoli et al. 2021). In this respect, we write  $H(\omega_\ell) = 2\pi k/\omega_\ell$ ,  $k$  being given in table 3.2 along with the other parameters of the model.

The Bernoulli’s principle is applied between the mouth and the mouthpiece. Taking into account the pressure drop caused by the presence of turbulence in the mouthpiece, one obtains the following equation:

$$u(t) = wh^+(t) \operatorname{sgn}(p_m - p(t)) \sqrt{\frac{2|p_m - p(t)|}{\varrho}}, \quad (3.2)$$

with  $w$  the lip-opening width (considered to be constant) and  $\varrho$  the air density. Here,  $h^+ = \max(h, 0)$  accounts for the fact that the lips cannot physically interpenetrate: as soon as the lips touch ( $h = 0$ ), the volume velocity is forced to zero. The sign function

---

3. The vibrating lips are modeled as a linear one-degree-of-freedom oscillator. The upstream resonances of the player’s windway are neglected, as is nonlinear propagation of sound in the air column of the instrument. Wall vibrations are also ignored.

sgn accounts for the possibility of air flowing from the instrument into the player’s mouth.

Finally, the acoustic input impedance  $Z(\omega)$  of the resonator is described in the Fourier domain as the ratio between the acoustic pressure and the volume velocity at the input of the instrument. This provides another link between the mouth pressure and the volume velocity:

$$P(\omega) = Z(\omega)U(\omega), \quad (3.3)$$

with  $\omega$  the angular frequency. Figure 3.3a shows the modulus and phase of  $Z$  with respect to the frequency  $f$ , for the B♭-contrabass tuba (see table 3.1 for details) which will be considered in subsection 3.3.1.

$w$ [m]	$Q_\ell$	$\frac{1}{\mu}$ [m <sup>2</sup> kg <sup>-1</sup> ]
$1.2 \times 10^{-2}$	7.0	$1.1 \times 10^{-1}$
$\rho$ [kg m <sup>-3</sup> ]	$c_0$ [m s <sup>-1</sup> ]	$k$ [m Hz]
1.2	$3.4 \times 10^2$	$7.4 \times 10^{-2}$

**Table 3.2** – Lips’ parameters used throughout the article, taken from (Mattéoli et al. 2021).

## 3.2.2 Numerical considerations

We aim here at determining the minimal mouth pressure for which each periodic regime (natural notes B♭1, B♭2, F3, B♭3, D4, F4,... in the case of an euphonium) is observable, as well as the corresponding playing frequencies.

In this subsection, the numerical methods allowing for the investigation of the periodic solutions of model  $\{(3.1) \cup (3.2) \cup (3.3)\}$  are presented, and the modal representation (Pagneux et al. 1996) of the input impedance required for the practical implementation of these methods is discussed.

### 3.2.2.1 Numerical methods

Several numerical methods are available to investigate the influence of a control parameter – such as  $p_m$  or  $f_\ell$ , which are the main control parameters of the musician – on the dynamics of the system. Linear stability analysis (Velut et al. 2017; Seydel

2010; Fletcher 1993) consists in studying the stability of the system linearised around an equilibrium solution, obtained by zeroing all time derivatives. This allows one to determine the threshold value of the control parameter at which the equilibrium solution destabilises. This happens here in a Hopf bifurcation (Kuznetsov 2004), which means that two complex conjugate eigenvalues of the linearised system cross the imaginary axis. At this point, a small-amplitude periodic regime (stable or unstable) can emerge. This method has already been applied to physical models of musical instruments, such as woodwind instruments in (Wilson and Beavers 1974; Chang 1994; Silva et al. 2008; Karkar et al. 2012; Saneyoshi et al. 1987), flute-like instruments in (Terrien et al. 2014), and brass instruments in (Cullen et al. 2000b; Lopez et al. 2006; Silva et al. 2007)

In the case of brass instruments, both  $p_m$  and  $f_\ell$  are considered as control parameters. Figure 3.4 (blue curve) represents the pressure threshold predicted by the linear stability analysis with respect to  $f_\ell$ . This analysis also provides the oscillation frequency at threshold (referred to as the threshold frequency in the following), that is to say the frequency of the periodic regime that emerges when the equilibrium solution destabilises. This method is applied in subsection 3.3.1.1 to the case of the B♭-contrabass tuba.

One of the main advantages of this method is its straight-forward implementation. However, it gives very little information on the oscillation regime of the model far from the so-called Hopf bifurcation point at which the equilibrium loses its stability. To know more about the oscillating solution arbitrarily far from the bifurcation point (namely the point at which the equilibrium solution becomes unstable), another approach – not considered in this article – consists in numerically solving the whole system, thanks to an ODE solver (Velut et al. 2017; Gilbert et al. 2020; Silva et al. 2014). In doing so, both the transient and the stationary parts of the solution are obtained for any value of the control parameter. Nevertheless, this approach becomes tedious and unsuitable in the context of the systematic investigation of the influence of the control parameter on the oscillation regime. It is also unsure that all regimes are described with this method, due to sensitivity to initial conditions.

Continuation methods, on the other hand, are more suitable to gain access to an extensive knowledge of all the oscillating regimes of the system, that is to say a family of periodic solutions with respect to a parameter of interest for instance. It consists in computing the waveform of the oscillating solution for successive values of the control parameter. The waveform corresponding to a new value of the control parameter is then

deduced from previously computed waveforms, through a predictor/corrector algorithm. The behaviour of an oscillating solution of the system with respect to a control parameter such as  $p_m$  is then assessed by plotting bifurcation diagrams, which are shown in section 3.3. This approach is implemented in several softwares dedicated to advanced numerical bifurcation analysis, such as AUTO (Doedel et al. 1999), which is used in this publication and in (Gilbert et al. 2020; Akay et al. 2021) as well. While AUTO relies on the collocation method, other softwares – such as Manlab (Guillot et al. 2019; Cochelin and Vergez 2009; Karkar et al. 2013; Colinot et al. 2019; Fréour et al. 2020) – are based on the Harmonic Balance Method (Nakhla and Vlach 1976). It is worth noting that continuation methods require the system to be written in the form  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X})$ , with certain smoothness properties on  $F$ . Therefore, some work has yet to be done on the equations presented in section 3.2.1, which is done in the following.

### 3.2.2.2 Input impedance

The implementation of the continuation method requires to rewrite equation (3.3) in the time domain. An analytical form of the input impedance  $Z$  is therefore required to perform an inverse Fourier transform of (3.3). This quantity is quite easily measured, and is represented in figure 3.3a (blue curve). This measured impedance is then numerically fitted, in the frequency domain, by a sum of  $N$  individual acoustical resonance modes of the following form (Ablitzer 2021; Silva et al. 2014):

$$Z_{\text{rec}}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{j\omega A_n}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\xi_n \omega_n \omega}. \quad (3.4)$$

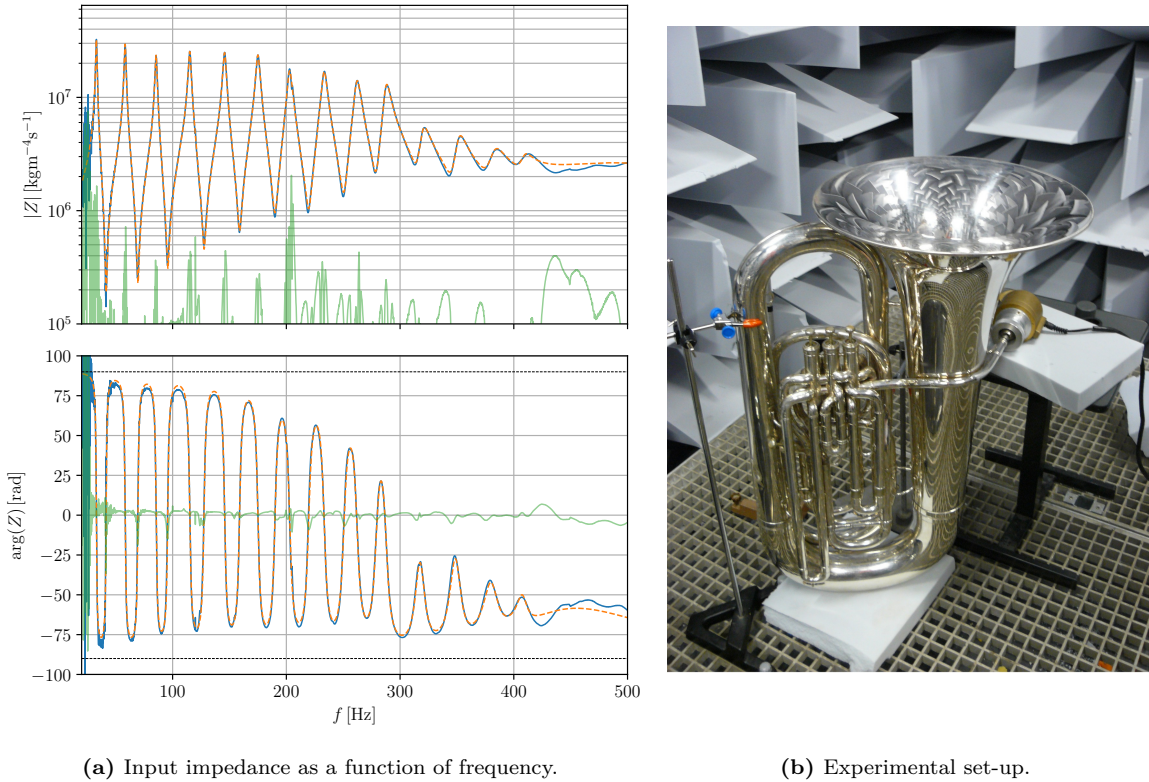
Here,  $(A_n, \omega_n, \xi_n) \in \mathbb{R}^3$  are the modal parameters of the modal decomposition. For numerical reasons, this set of parameters has been converted here into another one  $(C_n, s_n)$  so that the fitted input impedance is written:

$$Z_{\text{rec}}(\omega) = Z_c \sum_{n=1}^N \left( \frac{C_n}{j\omega - s_n} + \frac{C_n^*}{j\omega - s_n^*} \right), \quad (3.5)$$

where  $z^*$  stands for the complex conjugate of  $z$ ,  $Z_c$  is the characteristic input impedance of the resonator defined as  $Z_c = \frac{\rho c_0}{S_e}$  with  $S_e$  the input cross-sectional area, and  $(C_n, s_n) \in \mathbb{C}^2$  defined as follows:

$$\begin{cases} C_n &= \frac{A_n}{2} \left( 1 + j \frac{\xi_n}{\sqrt{1-\xi_n^2}} \right), \\ s_n &= \omega_n \left( -\xi_n + j \sqrt{1-\xi_n^2} \right). \end{cases} \quad (3.6)$$

The new coefficients  $(C_n, s_n)$  also verify the relation  $\Re(C_n s_n^*) = 0$ , since one switched from a 3-real parameter description with  $(A_n, \omega_n, \xi_n)$  to a 2-complex parameter description with  $(C_n, s_n)$ . The fitted impedance  $Z_{\text{rec}}(\omega)$  is plotted (orange dashed curve) in figure 3.3a.



**Figure 3.3** – Left: modulus (top) and phase (bottom) of the input impedance of the Bb-contrabass tuba with respect to frequency. Blue curve: measured impedance; dashed orange curve: modal fit function with  $N = 13$  modes; green curve: error between measured and fitted impedances, defined by  $||Z_{\text{rec}}| - |Z_{\text{exp}}||$  and  $\arg(Z_{\text{rec}}) - \arg(Z_{\text{exp}})$  as regards the modulus and phase, respectively. Right: photograph of the experimental set-up for the measure of the input impedance of the Bb-contrabass tuba, displaying the device described in (Macaluso and Dalmont 2011), here mounted on the tuba’s mouthpiece.

Reinjecting equation (3.5) in equation (3.3) and applying an inverse Fourier transform<sup>4</sup> leads to the following expression in the time domain (Fréour et al. 2020; Silva et al.

4. For details about this calculation, see appendix A of (Mattéoli et al. 2021).

2014):

$$\frac{dp_n}{dt} = Z_c C_n u + s_n p_n, \quad n \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (3.7)$$

The mouthpiece pressure  $p$  is then written as  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n)$ . Eventually, the system  $\{(3.1) \cup (3.2) \cup (3.7)\}$  is now written in the form  $\frac{d\mathbf{X}}{dt} = F(\mathbf{X})$ , with:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \left( \{X_m\}_{m \in \llbracket 1, 2(N+1) \rrbracket} \right) \\ &= \left( h; \frac{dh}{dt}; \{\Re(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}; \{\Im(p_n)\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

the state vector, so that  $h = X_1$ ,  $\frac{dh}{dt} = X_2$ , and  $p = 2 \sum_{n=1}^N \Re(p_n) = 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n$ . Taking the real and imaginary part of the  $N$  equations (3.7) yields  $2N$  real equations, so that the nonlinear function  $F$  is defined as:

$$F : \mathbf{X} \mapsto \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{\omega_\ell}{Q_\ell} X_2 - \omega_\ell^2 (X_1 - H) + \frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{\mu} \\ \Re[s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Re[s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Re[s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \\ \Im[s_1 (X_3 + jX_{N+3}) + Z_c C_1 u(\mathbf{X})] \\ \Im[s_2 (X_4 + jX_{N+4}) + Z_c C_2 u(\mathbf{X})] \\ \vdots \\ \Im[s_N (X_{N+2} + jX_{2(N+1)}) + Z_c C_N u(\mathbf{X})] \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

with  $u : \mathbf{X} \mapsto w X_1^+ \operatorname{sgn} \left( p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n \right) \times \sqrt{\frac{2}{\rho} \left| p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n \right|}$ .

### 3.2.2.3 Regularisation of the volume velocity

Continuation methods rely on the assumption of a smooth nonlinear vector function  $F$ , which needs to be at least  $\mathcal{C}^1$ . Consequently, equation (3.2) is regularised in the exact



same way as in (Mattéoli et al. 2021; Colinot et al. 2019):

$$u \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} w \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \times \frac{h + h_0 \sqrt{\left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \eta}}{2} \times \frac{p_m - p}{\sqrt{p_0} \sqrt[4]{\left(\frac{p_m - p}{p_0}\right)^2 + \eta}}, \quad (3.10)$$

or equivalently

$$u \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} w \sqrt{\frac{2}{\varrho}} \times \frac{X_1 + h_0 \sqrt{\left(\frac{X_1}{h_0}\right)^2 + \eta}}{2} \times \frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{\sqrt{p_0} \sqrt[4]{\left(\frac{p_m - 2 \sum_{n=3}^{N+2} X_n}{p_0}\right)^2 + \eta}} \quad (3.11)$$

in terms of the components of the state vector  $\mathbf{X}$ , with  $\eta$  the regularization parameter, which is fixed to  $10^{-4}$  in the following.  $h_0 = 5 \times 10^{-4}$  m is defined for purely dimensional reasons, and  $p_0$  is defined similarly to the closure pressure for woodwind instruments (Gilbert et al. 2020):  $p_0 = \mu \omega_0^2 h_0$ , except that  $\omega_0$  is chosen close to the first resonance frequency of the resonator. Indeed, the choice of the lips' angular resonance frequency  $\omega_\ell$  generally considered for woodwind instruments is not suitable in the case of brass instruments where  $\omega_\ell$  is no longer constant. In practice, the choice is not  $\omega_0 = \omega_{\text{res},1}$  (where  $\{\omega_{\text{res},n}\}_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$  are the resonance angular frequencies of the resonator), but rather  $\omega_0 = \omega_{\text{res},4}/4$ , because the fourth resonance of instruments having the same nominal pitch (a trombone and a euphonium for instance) appears to be quite constant, in contrast to the first resonance frequency which varies up to 8 semitones between a trombone and euphonium.

In the following, the system of equations (3.9) with  $u(\mathbf{X})$  given by equation (3.11) are processed numerically in a dimensionless form, which is detailed in appendix B of (Mattéoli et al. 2021). Typical bifurcation diagrams of the system will be shown in section 3.3.

## 3.3 Minimal blowing pressures and playing frequencies

It was shown in (Velut et al. 2017; Mattéoli et al. 2021) that the linear stability analysis was able to accurately describe the ghost note in terms of playing frequency. However, this method did not allow to describe the pedal note of any tuba. Therefore, this section aims at proving that the pedal note can actually be described by the generic brass model analysed through a complete bifurcation analysis instead of a linear stability analysis only. This section focuses on the first three natural notes of the B $\flat$ -contrabass tuba and the B $\flat$ -baritone saxhorn, as they show a variety of different behaviours of the system.

### 3.3.1 Case of the B $\flat$ -contrabass tuba

This subsection focuses on the study of the first three natural notes of the B $\flat$ -contrabass tuba (B $\flat$ 0, D1, B $\flat$ 1, see figure 3.5), which is the lowest-pitched tuba among the seven tubas, namely the one with the longest tube (see table 3.1).

#### 3.3.1.1 Linear stability analysis

The results of the linear stability analysis of the system are represented in figure 3.4 by the blue U-shaped patterns. As described in subsection 3.2.2, these results give the values of the mouth pressure  $p_m$  at which the equilibrium solution destabilises (the threshold mouth pressures), as well as the related frequency at which the oscillating solution emerges (the threshold frequencies). As a matter of fact, the multiple U-shaped patterns on the top plot of figure 3.4 reflect the fact that for a given configuration of the resonator (that is to say without depressing any valves), the tuba player is able to play several notes represented in figure 3.5 called ‘natural notes’, just by changing the lips’ resonance frequency (see for instance (Campbell et al. 2021)). In figure 3.4, we chose to perform a stability analysis from D1 (37 Hz, first U-shaped pattern) up to B $\flat$ 3 (233 Hz, eighth U-shaped pattern) in terms of threshold frequency, even if a tuba player could play higher notes in practice. For each natural note or regime  $n$  to emerge, there is an optimal lips’ resonance frequency  $f_{\ell,n}^{\text{opt,eq}}$  which corresponds to the minimum of a U-shaped pattern. This is associated with an optimal threshold mouth pressure  $p_{\text{thresh},n}^{\text{opt,eq}}$  and an optimal threshold frequency  $f_{\text{thresh},n}^{\text{opt,eq}}$ . The notation  $f_{\ell,n}^{\text{opt,eq}}$  has been introduced and used in (Mattéoli et al. 2021), and is chosen

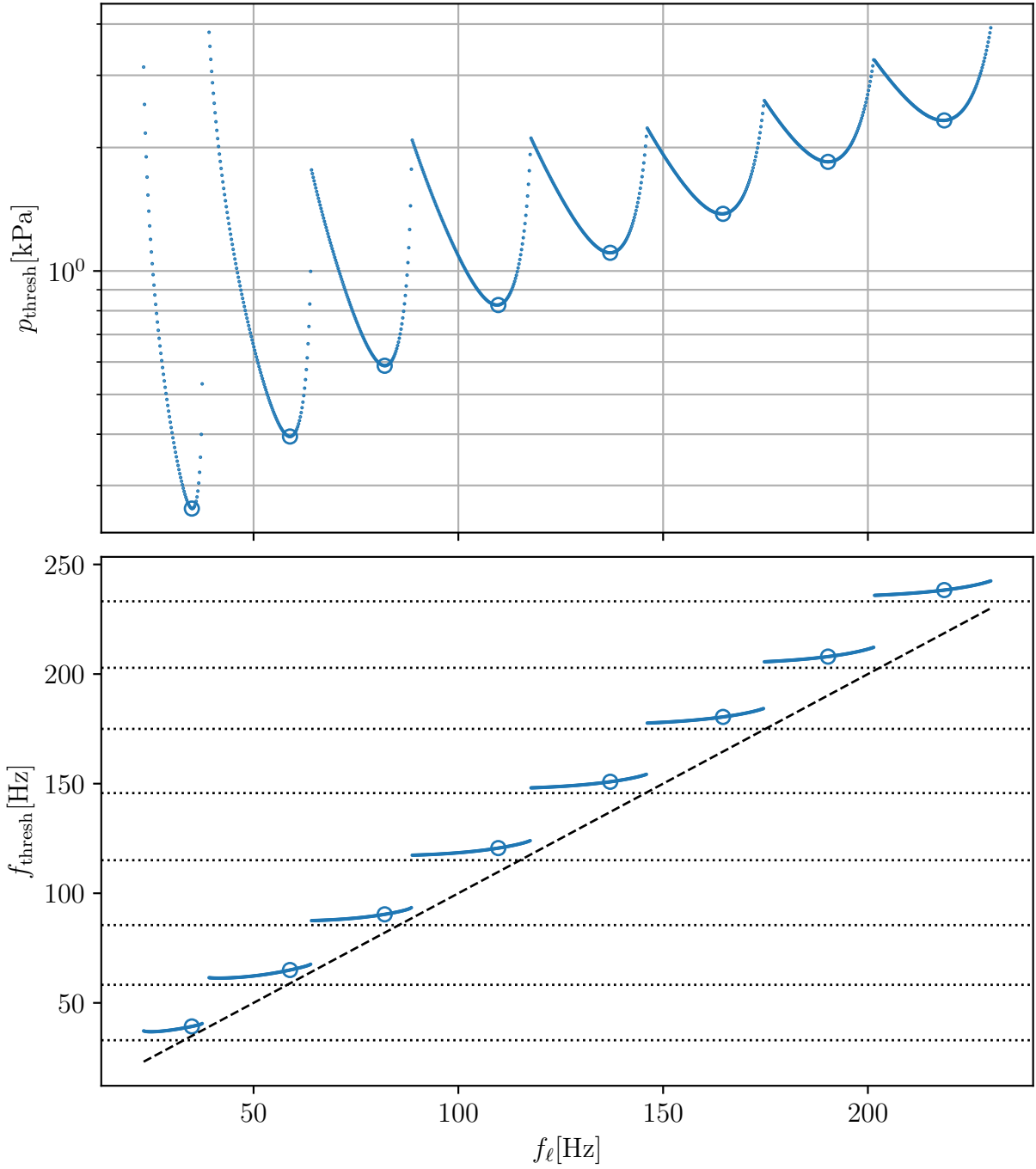
to be as consistent as possible with (Velut et al. 2017), in which the equilibrium optimal threshold value (namely the threshold given by the linear stability analysis) of a quantity  $q$  in the  $n^{\text{th}}$  regime was written  $q_{\text{thresh},n}^{\text{opt}}$ . Here, the threshold quantities are obtained either using linear stability analysis or through a bifurcation analysis, which will be defined and addressed in section 3.3.1.2. Therefore, it has been chosen to add an extra superscript ‘eq’ for ‘equilibrium’, referring to the linear stability analysis, or ‘per’ for ‘periodic solutions’, referring to the analysis of bifurcation diagrams.

It is worth noting that the linear stability analysis is not able to reproduce the pedal note (red note in figure 3.5), in contrast to the case of the trombone described in (Mattéoli et al. 2021). Indeed, the first U-shaped pattern exhibits an optimal threshold frequency of 39 Hz whereas the optimal threshold frequency of the second regime is 65 Hz: there is a frequency interval of 8.8 semitones between these two notes instead of the expected octave (12 semitones) between a B♭0 and a B♭1. Moreover, it is inferred from recordings that the ghost note of the B♭-contrabass tuba lies between a D1 and a D♯1, that is to say between a minor sixth (8 semitones) and a perfect fifth (7 semitones) under the second regime B♭1. Thus, the first U-shaped pattern likely corresponds to the ghost note, which is thoroughly investigated in the following sections. Furthermore, it can be noticed that the patterns on the bottom plot of figure 3.4 are always above the line  $f_{\text{seuil}} = f_{\ell}$ . This is a characteristic of the outward-striking valve model: the instrument always plays a note slightly above the lips’ resonance frequency.

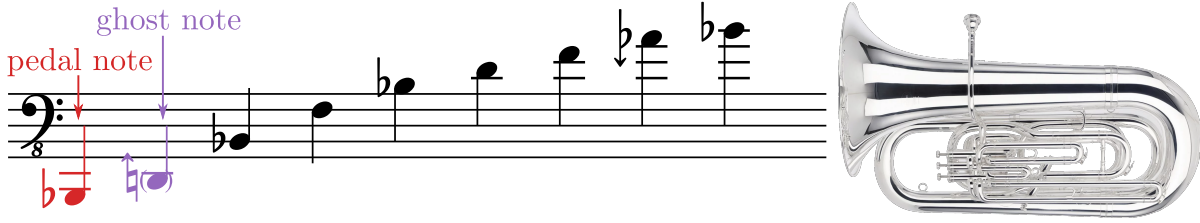
### 3.3.1.2 Bifurcation analysis

In contrast to the linear stability analysis which gives information about the system close to its equilibrium only, the continuation method described in section 3.2.2.1 allows to investigate the system’s behaviour arbitrarily far from it. In particular, it was shown in (Mattéoli et al. 2021) that the pedal note of an euphonium could actually be described thanks to this method. Figure 3.6 shows typical partial bifurcation diagrams representing the branch of oscillating solutions emerging from the first (left) and second (right) Hopf bifurcations of the B♭-contrabass tuba.

Considering the second Hopf bifurcation (subfigure 3.6b) corresponding to a B♭1 (58 Hz), the upper bifurcation diagram exhibits a S-shaped branch emerging from the equilibrium point (or Hopf point) H1, which consists of two stable portions (thick lines) separated by an unstable portion (thin line). Such a curve means that the second Hopf



**Figure 3.4** – Results of the linear stability analysis applied to the Bb-contrabass tuba. Top and bottom plots represent respectively the threshold mouth pressure and the threshold frequency with respect to the lips' resonance frequency. Circles point out the minima of each U-shaped pattern on the top plot. Horizontal dotted lines on the bottom plots locate the values of the acoustical resonances of the resonator; the black dashed line on the bottom plots represents  $f_{\text{seuil}} = f_l$ .



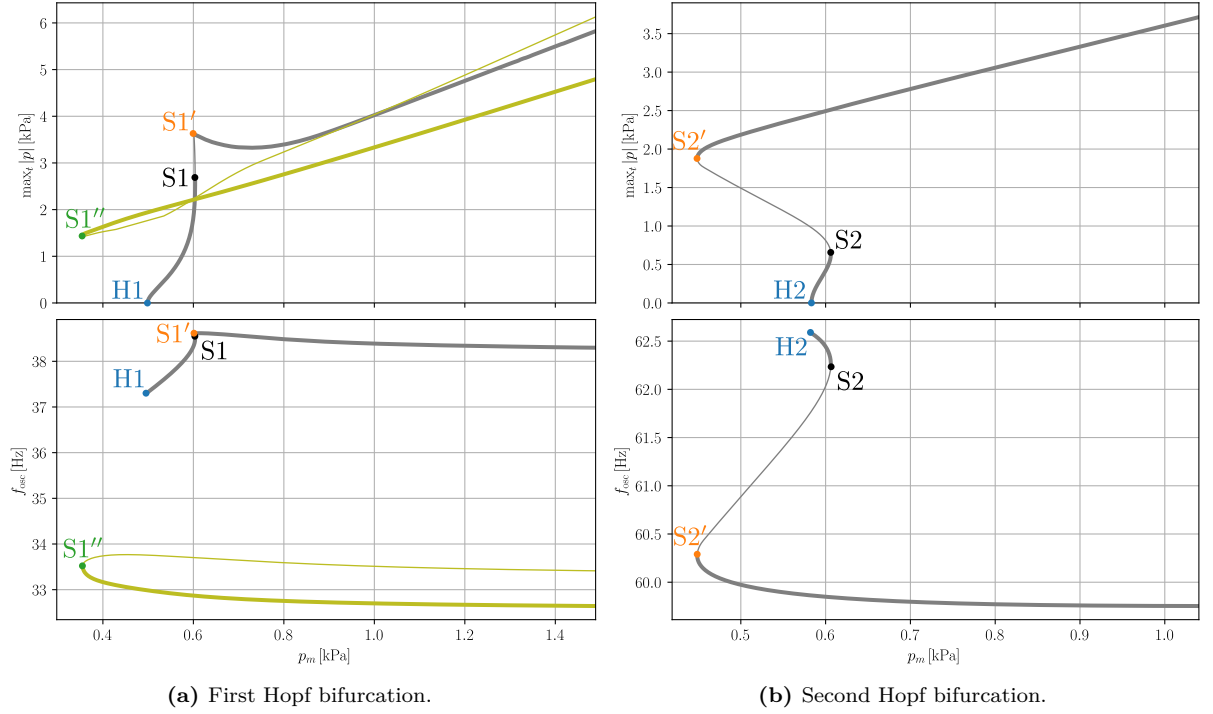
**Figure 3.5** – Natural notes playable by a B $\flat$ -contrabass tuba, that is to say without depressing any valves. From left to right: B $\flat$ 0 (pedal note), D1 (ghost note, naturally a bit sharp compared to an equal tempered scale), B $\flat$ 1, F2, B $\flat$ 2, D3, F3, A $\flat$ 3 (naturally a bit flat compared to an equal tempered scale), B $\flat$ 3.

bifurcation is actually related to the emergence of two stable regimes, and thus two notes. However, it is worth noting that the oscillation frequencies (bottom plot) taken at the emergence of each regime (namely the points H2 and S2') are about 62.6 Hz for H2 and 60.3 Hz for S2', less than a semitone away from H2. Therefore, both regimes are assumed to correspond to the same note, namely the B $\flat$ 1.

Regarding the first Hopf bifurcation (subfigure 3.6a), a part of the bifurcation diagram is discussed in the same way as the second Hopf bifurcation (namely the grey curve), since the oscillation frequencies taken at H1 and S1' are less than a semitone away from each other<sup>5</sup>. Both these regimes are considered to be only one, corresponding to the ghost note since the whole branch arises from the equilibrium. However, there also exists another stable regime represented by the isolated lime green curve, whose oscillation frequency (taken at S1'') lies 2.4 semitones away from the stable regime emerging from H1 and 1.8 semitones away from the stable regime emerging from S1'. Given the significance of these intervals, the lime green portion is considered to correspond to the pedal note – namely B $\flat$ 0 – of the B $\flat$ -contrabass as pointed out in (Mattéoli et al. 2021). It can be noted that this branch is not connected to the ‘principal branch’ (namely the branch arising from the Hopf point H1), making it more difficult to access without any prior work. As a matter of fact, the point S1'' is a saddle-node bifurcation point of the principal branch like S1'. However, it only connects to the principal branch above a critical value of the lips' quality factor  $Q_\ell$ , at which the two distinct branches on figure 3.6 merge into a unique branch. In the case of the B $\flat$ -contrabass tuba for instance, this critical value lies around  $Q_\ell = 21.7$ . At such a value, S1'' is accessed in the exact same way as S1 or

5. in contrast to the case of the trombone described in (Mattéoli et al. 2021), in which the stable portion emerging from the Hopf point is almost non-existent given its narrow mouth pressure range of stability, as the stable portion emerging from the unstable portion actually corresponds to the pedal note.

$S1'$ , that is to say by performing a 1D-continuation (with respect to  $p_m$ ) of the periodic solution branch from the Hopf point H1. Then,  $S1''$  is continued a second time in the plane  $(Q_\ell, p_m)$  (2D-continuation) to obtain its locus at  $Q_\ell = 7$  which is the value of interest in the present work.



**Figure 3.6** – Typical partial bifurcation diagrams for the first Hopf bifurcation and second Hopf bifurcation. Top and bottom plots represent respectively the maximum amplitude of the periodic oscillation branches and their oscillation frequency with respect to the blowing pressure. Left: case of the first Hopf bifurcation,  $f_\ell = f_{\ell, \text{PN}}^{\text{opt, per}} = 28.67$  Hz; right: case of the second Hopf bifurcation,  $f_\ell = 51.35$  Hz. The line thickness indicates whether the branch portion is stable (thick line) or unstable (thin line). The points H1 and H2 correspond to the Hopf bifurcation points at which a stable oscillation regime arises from the equilibrium for the first and second Hopf bifurcation respectively. S1 and S2 correspond to the saddle-node bifurcation points at which the stable regime arising from the Hopf point destabilises. S1' and S2' correspond to the saddle-node bifurcation points at which another stable regime appears for the first and second Hopf bifurcation respectively. S1'' corresponds to the saddle-node bifurcation point at which the stable regime of the pedal note arises from the isolated branch (lime green).

In order to define the easiest notes playable according to the model and our definition of the ease of playing, the mouth pressure threshold of each solution listed above – namely the mouth pressure at which a stable oscillating solution arises – needs to be determined, as well as its corresponding threshold frequency. These minimal mouth pressures are given by the abscissa of the point  $S1''$ , H1 and  $S1'$  on the top plot of subfigure 3.6a for the first

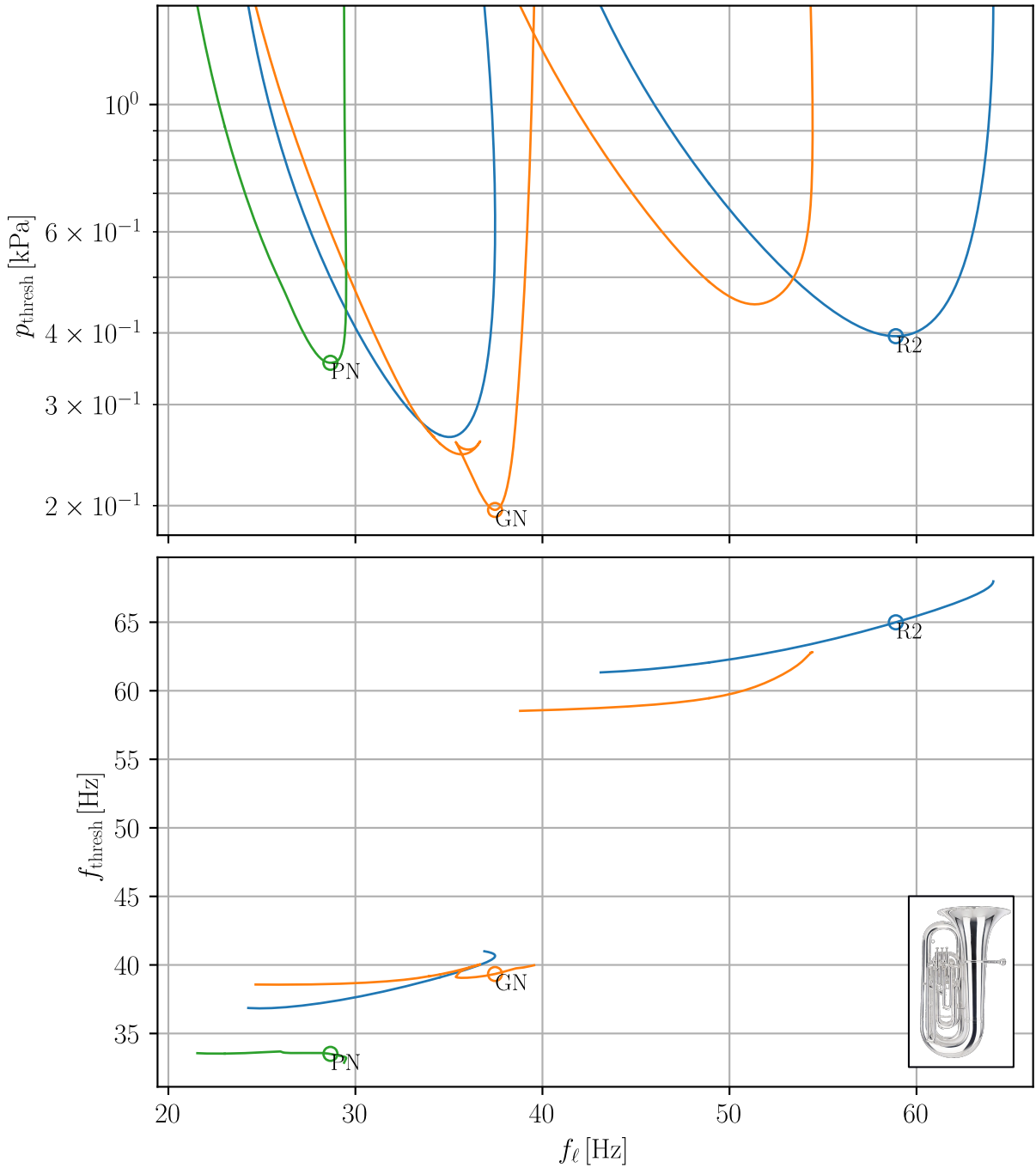
Hopf bifurcation, and of H2 and S2' on the top plot of subfigure 3.6b for the second Hopf bifurcation. However, it was demonstrated above that both for the first and second Hopf bifurcation,  $H_i$  and  $S_i'$  actually corresponded to the same note: the ghost note for the first Hopf bifurcation and Bb1 for the second Hopf bifurcation. Taking the results in figure 3.6 as an example, the minimal mouth pressure of the ghost note is therefore given by H1, whereas the minimal pressure of Bb1 is given by S2'. The points S1 and S2 have no relevance to our definition of the ease of playing, since they both correspond to a point at which an oscillating solution destabilises, meaning that they cannot be experimentally observed anymore. In that respect, they will not be taken into account in what follows.

The minimal mouth pressure of a note highly depends on the lips' resonance frequency, as we saw in figure 3.4 with the linear stability analysis. Therefore, the points S1'', H1, S1', H2 and S2' are continued in the plane  $(f_\ell, p_m)$ , which is represented in figure 3.7 in a similar manner as the results of the linear stability in figure 3.4. In this figure, the blue U-shaped patterns are the locus in the plane  $(f_\ell, p_m)$  of the Hopf points H1 and H2 resulting from the continuation, and provide the same information as the two first U-shaped patterns in figure 3.4 obtained by performing a linear stability analysis. The orange U-shaped patterns correspond to the locus of S1' and S2'<sup>6</sup>, and the green one to the locus of S1''. For the second Hopf bifurcation, the easiest note playable – namely the local minimum of the lowest U-shaped pattern – is given by the locus of the Hopf points H2 (circle labelled 'R2'). On the contrary, it is given by the locus of the saddle-node bifurcation points S1' in the case of the ghost note (circle labelled 'GN') for the first Hopf bifurcation. There is no ambiguity for the easiest pedal note playable as there is only one U-shaped pattern (circle labelled 'PN'). The easiest pedal note, ghost note or second regime playable are then characterised by their individual optimal blowing pressure  $p_{\text{thresh},n}^{\text{opt,per}}$  (ordinate of the circled point on the top plot), its optimal lips' resonance frequency  $f_{\ell,n}^{\text{opt,per}}$  (abscissa of the circled point on both plots), and its optimal threshold frequency  $f_{\text{thresh},n}^{\text{opt,per}}$  (ordinate of the circled point on the bottom plot) which corresponds to the playing frequency of the note. Since the U-shaped patterns cross paths at some points, the minimal mouth pressure  $p_{\text{seuil}per}$  is given by the blue curve if it is below the orange one, and by the orange curve if it is below the blue one.

Apart from the case of the Bb-baritone saxhorn which is studied in subsection 3.3.2,

---

6. The angular loop that is seen on the locus of S1' is called a swallowtail bifurcation (Seydel 2010). Since hardly any physical interpretation can be given of this zone, we chose not to discuss it in this work.



**Figure 3.7** – Top and bottom plots represent respectively the threshold pressures and threshold frequencies given by the locus of the Hopf points (blue) and the locus of the saddle-node bifurcation points (orange and green) with respect to the lips' resonance frequency in the case of the Bb-contrabass tuba (colors correspond to the ones in figure 3.6). The circles identify the local minimum of blowing pressure for each note, namely the pedal note (PN), the ghost note (GN), and the second regime (R2). In the case of the second Hopf bifurcation, the easiest note playable is given by the minimum of the Hopf points' locus (blue curve), since its minimal threshold mouth pressure is lower than the one given by the saddle-node bifurcation points' locus (orange curve). On the contrary, in the case of the ghost note it is given by the minimum of the saddle-node bifurcation points' locus (orange curve).



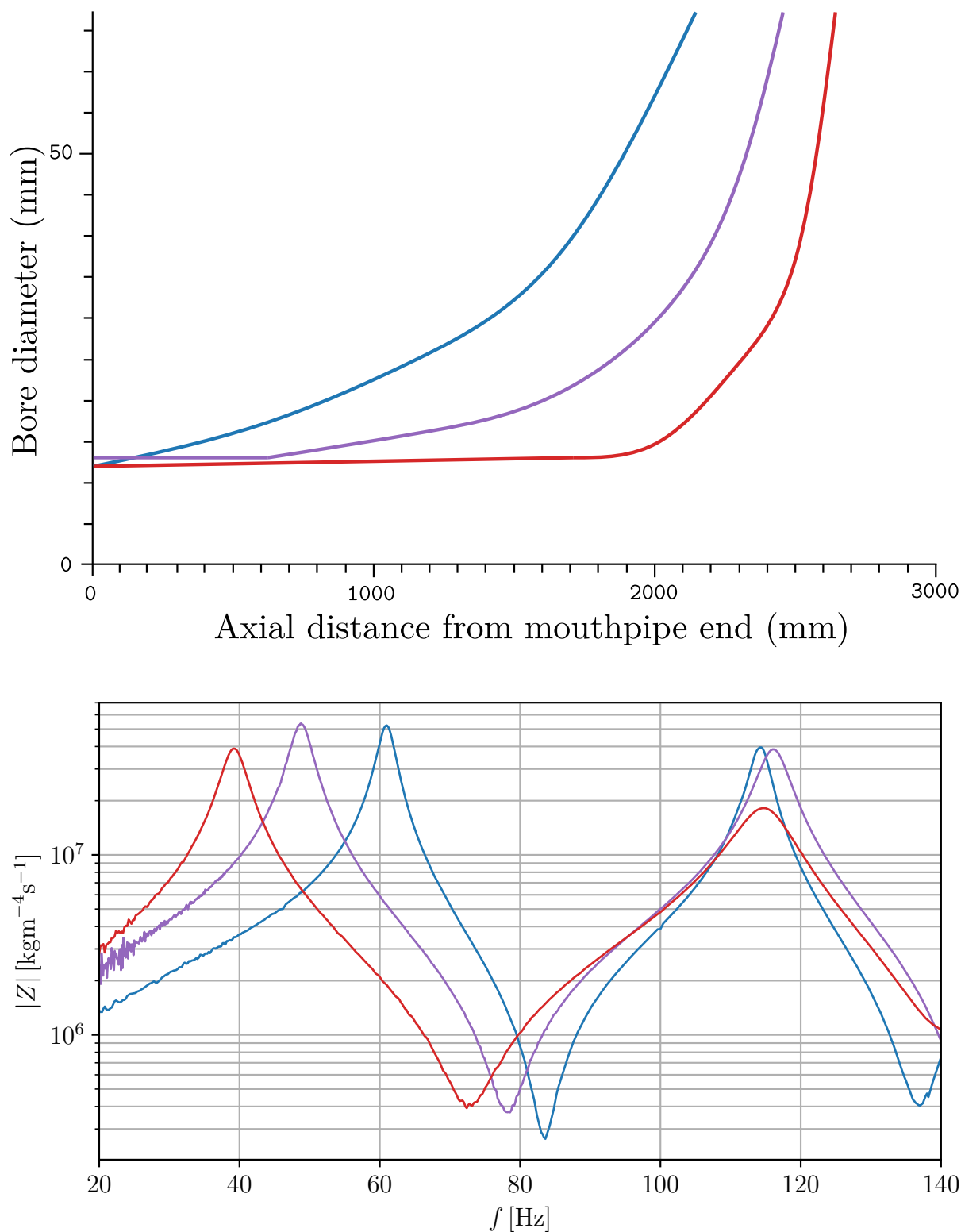
the threshold pressures and threshold frequencies of the other tubas – namely the C-contrabass tuba, the E $\flat$ -bass tuba, the F-bass tuba, the B $\flat$ -euphonium and the B $\flat$ -bass saxhorn – are all displayed in appendix 3.7 in the same manner as figure 3.7. Even though these figures are interpreted in the exact same way as the figure 3.7, they display various different shapes of U-shaped patterns, due to presence of cusps and swallowtails (Seydel 2010).

Eventually, it could be noted that the pedal note is supported by the first acoustic mode (that is to say its frequency is close to the pedal note’s expected playing frequency), but the frequency of the ghost note does not correspond directly to one of the resonance frequencies. The latter observation on the ghost note appears similar to the case of the trombone’s pedal note (playing frequency around 60 Hz), sounding much higher than the first resonance frequency (around 38 Hz, see the red curve in the bottom plot of figure 3.8). Another common characteristic of the tuba’s ghost note and the trombone’s pedal note is that, according to the model, both belong to a branch of periodic solutions emanating from the branch of equilibrium solutions (Hopf points). It is also worth pointing out that the pedal note does not fundamentally result from the cumulated contribution of higher acoustic modes, as it is commonly admitted. Indeed, (Velut et al. 2014) proves that the pedal note of a trombone or a tuba does exist with a dummy input impedance containing only the first peak, based on time-domain simulations using the same brass model as in the present paper. However, this work also shows that the number of acoustic modes taken into account highly impacts the playing frequency of the pedal note: the more acoustic modes, the lower the playing frequency, bringing it closer to the expected playing frequency of the note.

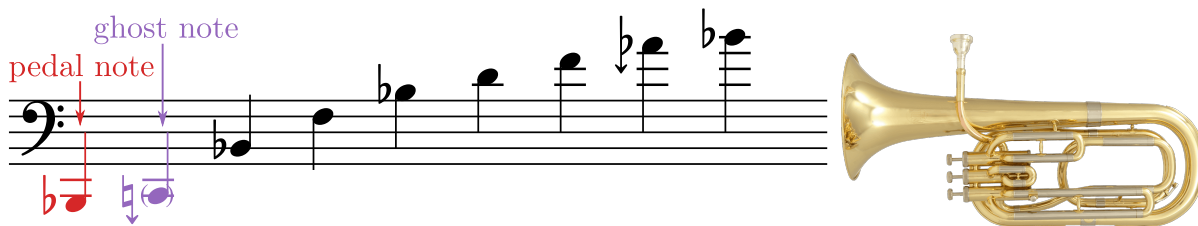
### 3.3.2 Case of the B $\flat$ -baritone saxhorn

This subsection focuses on the study of the first three natural notes of the B $\flat$ -baritone saxhorn (B $\flat$ 1, C2, B $\flat$ 2, see figure 3.9), which is one of the highest-pitched tubas among the seven tubas. Even though the baritone saxhorn still belongs to the family of bass brass instruments with predominantly-expanding bore profile, it is worth noticing that both its bore profile and the first peak of its input impedance lie between those of a tuba and a trombone, as it is highlighted in figure 3.8.

In the case of the baritone saxhorn, the partial bifurcation diagram for the first Hopf bifurcation exhibits a S-shaped branch, similarly to the B $\flat$ -contrabass tuba. Nevertheless,

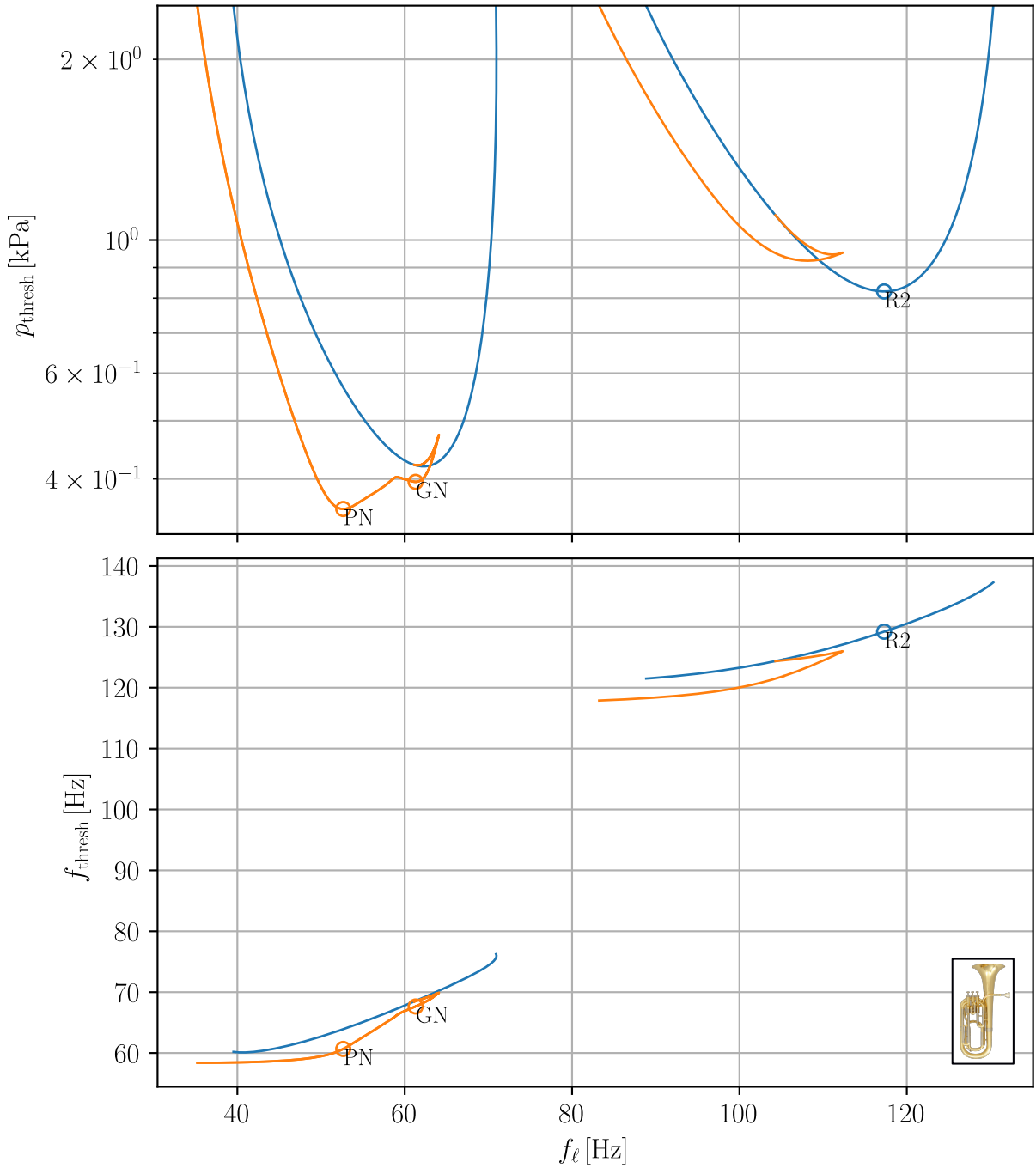


**Figure 3.8** – Top: bore profile as a function of the axial distance to mouthpiece end, taken from (Campbell et al. 2021) (where bore profiles of several other instruments can be found); bottom: modulus of the input impedance as a function of frequency (zoom on the first two peaks). Red: bass trombone; purple: B♭-baritone saxhorn; blue: B♭-euphonium.



**Figure 3.9** – Natural notes playable by a B $\flat$ -baritone saxhorn, that is to say without depressing any valves. From left to right: B $\flat$ 1 (pedal note), C2 (ghost note, naturally a bit flat compared to an equal tempered scale), B $\flat$ 2, F3, B $\flat$ 3, D4, F4, A $\flat$ 4 (naturally a bit flat compared to an equal tempered scale), B $\flat$ 4.

there seems to exist no isolated branch corresponding to the pedal note as in subfigure 3.6a. Instead, the S-shaped branch includes a stable portion emerging from a saddle-node bifurcation point  $S1'$  corresponding to the pedal note, whereas the same portion of this branch in the case of the B $\flat$ -contrabass tuba was only related to another specimen of the ghost note, as shown in subsection 3.3.1.2. The locus of the saddle-node bifurcation points  $S_i'$  and Hopf points  $H_i$  in the plane  $(f_\ell, p_m)$  is displayed in figure 3.10. In the case of the second Hopf bifurcation, it can be noted that similarly to the B $\flat$ -contrabass tuba, the easiest-to-play note is not given by the minimal mouth pressure of the saddle-node bifurcation points' locus, but by the minimal mouth pressure of the Hopf points' locus, as it lies lower. More importantly, the saddle-node bifurcation curve for the first Hopf bifurcation is W-shaped, namely it displays two local minima, each of them labelled PN and GN on the left side of figure 3.10. Their optimal threshold frequency on the bottom plot shows that they correspond to two different notes, as they differ by about a whole tone from each other. Furthermore, this W-shaped pattern having its minimal mouth pressures both lower than the minimal mouth pressure of the Hopf points' locus, they are considered to correspond to the pedal note and the ghost note, respectively. It is worth noting that, in contrast to the case of the B $\flat$ -contrabass tuba studied in subsection 3.3.1.2, for which the pedal note and the ghost note belong to a distinct U-shaped pattern, these notes belong to a unique W-shaped pattern in the case of the baritone saxhorn. Furthermore, in the case of the B $\flat$ -contrabass tuba, there also exists a similar case of a W-shaped pattern for the first Hopf bifurcation (orange curve on the left side of figure 3.7) caused by a swallowtail, except here both local minima of this W-shaped pattern correspond to the ghost note, given their very close optimal oscillation frequency at threshold.



**Figure 3.10** – Top and bottom plots represent respectively the threshold pressures and threshold frequencies given by the locus of the Hopf points (blue) and the locus of the saddle-node bifurcation points (orange) with respect to the lips' resonance frequency in the case of the B♭-baritone saxhorn. The circles identify the local minimum of blowing pressure for each note, namely the pedal note (PN), the ghost note (GN), and the second regime (R2). In the case of the second Hopf bifurcation, the easiest note playable is given by the minimum of the Hopf points' locus (blue curve), as its minimal threshold mouth pressure is lower than the one given by the saddle-node bifurcation points' locus (orange curve). In the case of the first Hopf bifurcation, the locus of the saddle-node bifurcation points (orange curve) shows two local minima, each one corresponding to the ghost note and the pedal note, as both these minima lie lower than the locus of the Hopf points and have a significantly different threshold frequency.

## 3.4 Comparison between tubas with different nominal pitch

In this section, the recording set-up used to experimentally assess the playing frequencies of the first three natural notes of a tuba is first presented. Second, the experimental playing frequencies of the seven tubas are compared to the optimal threshold frequencies obtained thanks to the numerical bifurcation analysis presented in section 3.3.

### 3.4.1 Recording set-up

The frequency of the easiest-to-play pedal note, ghost note and second regime was experimentally assessed based on recordings of two professional tuba players, whose experimental set-up is described in figure 3.11. They were both asked to play successively these three notes according to the procedure described in figure 3.11b (all tuning slides completely pushed in). They were asked to play the easiest notes playable in terms of ‘slotted notes’ (which are defined here as the most stable notes) according to the player, regardless of the pitch. After recording the exercise using a Zoom recorder H4n in a semi-anechoic room<sup>7</sup>, the instantaneous frequency of each note was extracted using Yin (de Cheveigné and Kawahara 2002) based on the time signal of the note without its transient states, as displayed in figure 3.12 (dashed box). In this way, the experimental conditions were as close as possible to the framework of the numerical bifurcation diagrams, which provide informations on permanent regimes only.

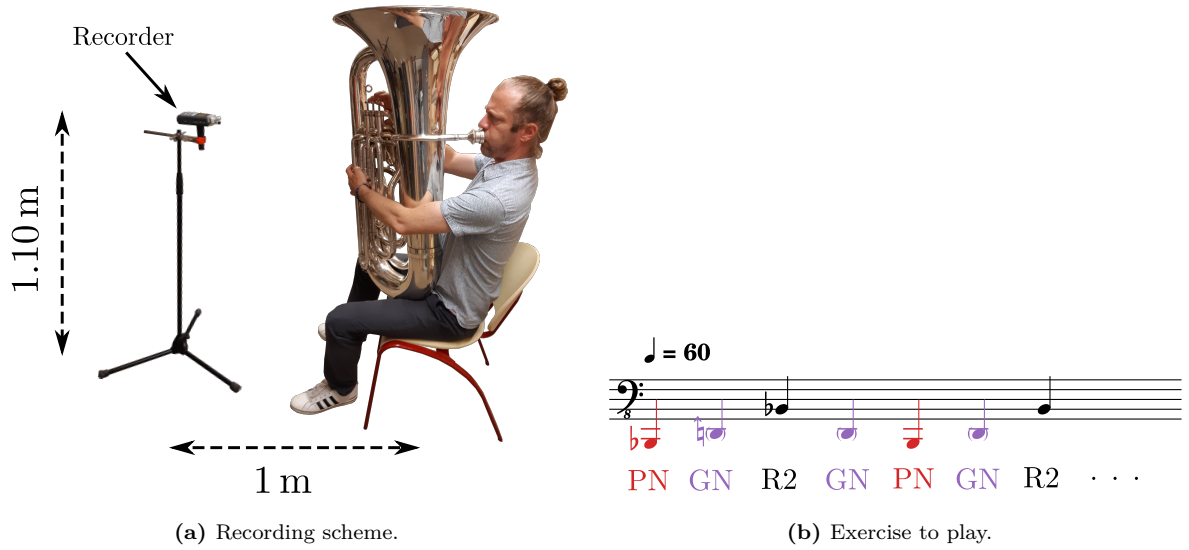
### 3.4.2 Results

The procedure described in section 3.4.1 was performed by both professional tuba players on the seven different tubas. The tubas were characterised in the following manner: from the lowest nominal pitch (Bb-contrabass tuba) to the highest (baritone saxhorn), each tuba had first its input impedance measured thanks to the same device used in (Macaluso and Dalmont 2011) – which is seen in figure 3.3b – and was afterwards given to the professional tuba players to be played.

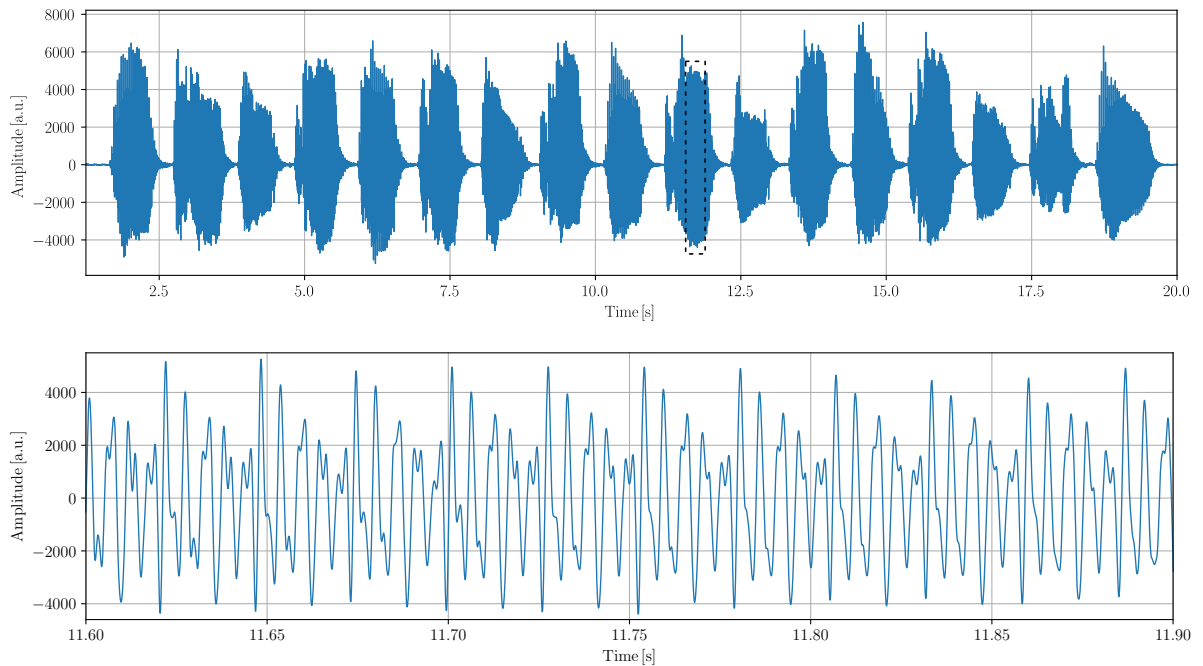
Several experimental factors such as temperature and hygrometry rate are known to have a significant impact on the pitch of a note, but were not taken into account

---

7. The signal displayed in figure 3.12 can be listened to at [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bb-contrabass\\_tuba\\_exercise.mp4](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bb-contrabass_tuba_exercise.mp4).



**Figure 3.11** – Experimental scheme used to record the professional tuba players (left) and score of the exercise they were asked to play (right), here in the case of the B $\flat$ -contrabass tuba. The audio recorder is a Zoom H4n, allowing stereo recording. The recording took place in a semi-anechoic room.

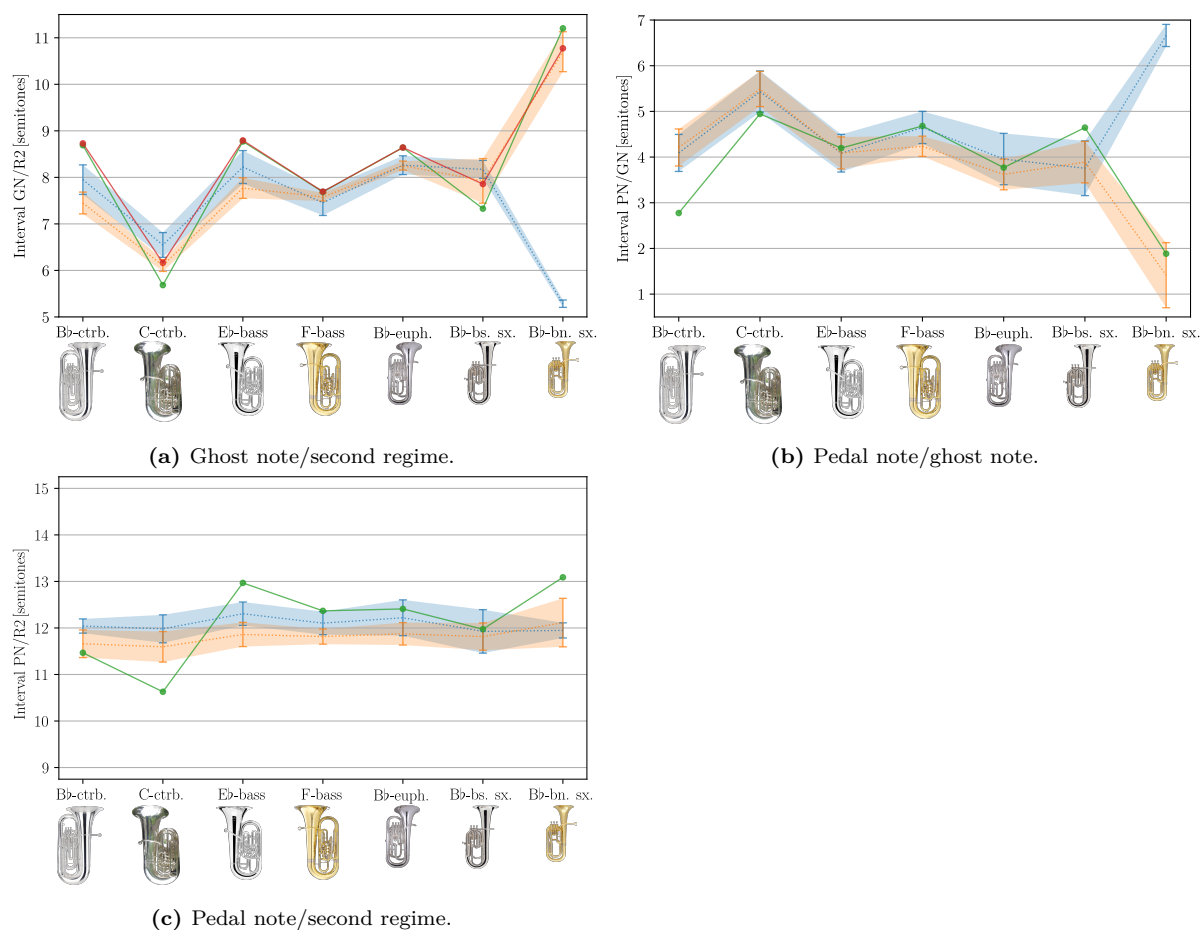


**Figure 3.12** – Top: shape of the time signal recorded from one tuba player playing the exercise described in figure 3.11 on the B $\flat$ -contrabass tuba: each ‘wavepacket’ corresponds to a note of the exercise. Bottom: details of the recorded signal of a ghost note played during the exercise, corresponding to the dashed box drawn in the top plot.

in the numerical model. Moreover, the lips' parameters such as  $Q_\ell$  were probably not held constant in the experiments. Therefore, comparing the notes' pitches given by the numerical bifurcation diagrams and the recordings would be irrelevant. Instead, we choose to compute the frequency interval in semitones between two notes, as the quantity to compare between the numerical results and the experimental results.

Since three notes are involved, namely the pedal note PN, the ghost note GN and the second regime R2, three intervals are computed:  $i_{\text{PN/GN}}$ ,  $i_{\text{GN/R2}}$  and  $i_{\text{PN/R2}} = i_{\text{PN/GN}} + i_{\text{GN/R2}}$ . The results of these calculations are displayed in figure 3.13. A first interesting result is that, given the incursion of the experimental points, the monotonicity of the frequency intervals as a function of the tuba type is consistent between the recordings and the generic brass model. Secondly, the experimental frequency interval between the pedal note and the second regime (subfigure 3.13c) tends to be always close to an octave (12 semitones). This could reflect the fact that, even told to chose the more slotted and easiest-to-play notes regardless of the pitch, the tuba players may have a tendency to instinctively play the pedal note in tune. On the contrary, the generic brass model exhibits a frequency interval between the pedal note and the second regime ranging from 10.6 semitones in the case of the C-contrabass tuba to almost 13 semitones in the case of the Eb-bass tuba. Eventually, subfigure 3.13a highlights the fact that the frequency interval computed using the linear stability analysis (red dots) is less than a quarter tone away from the frequency interval computed using the continuation method as a whole, meaning that the linear stability analysis is actually sufficient to describe the ghost note. As a matter of fact, the difference comes from the fact that the U-shaped pattern drawn by the locus of the saddle-node bifurcation points  $S_i'$  in the plane  $(f_\ell, p_m)$  has a lowest minimum than the one of the Hopf point, which is not predicted by the linear stability analysis. It is for instance the case for the ghost note of the Bb contrabass tuba, as shown in figure 3.7. The case of the Bb-baritone saxhorn is singular, as the frequency intervals involving the ghost note (figure 3.13a and 3.13b) are not consistent between the two players. However, it is worth noticing that one of them seems to be consistent with the numerical model. This discrepancy could reflect the fact that a baritone saxhorn being close to a trombone – for which the ghost note does not exist – as regards its bore profile (see top plot of figure 3.8), the ghost note is not very well-defined. This is confirmed by the feeling, shared by both tuba players, that the ghost note on this instrument is not very slotted compared to the other tubas. Numerically, this could be illustrated by the fact that the ghost note and the pedal note both belongs to a W-shaped pattern whose

minima are not very steep nor deep, making it easier to switch from the ghost note to the pedal note and vice-versa. In the case of the other tubas, each note was characterised by a distinct U-shaped pattern, thus making it more difficult to switch continually from the ghost note to the pedal note and vice-versa.



**Figure 3.13** – Frequency intervals with respect to type of tuba. Blue points: frequency interval inferred from the recording of the first tuba player, orange points: frequency interval inferred from the recording of the second tuba player, green points: frequency interval inferred from the bifurcation diagrams, red points: frequency interval inferred from the linear stability analysis (when relevant). The instantaneous frequency (respectively the ‘error’ bar) of a note is computed taking the average (respectively the standard deviation) of the frequency over the notes occurrences in the exercise – usually from 4 to 8 identical notes – of the average frequencies individually computed by Yin (de Cheveigné and Kawahara 2002) in a permanent regime.



## 3.5 Conclusion

Most results in this paper highlight the usefulness of bifurcation diagrams analysis to understand the behaviours of the complete nonlinear model of brass instrument, both near and arbitrarily far from the oscillation threshold. Here, this in-depth analysis is applied to seven type of tubas. In contrast to the trombone, tubas have an extra natural note – referred to as ‘ghost note’ – between their pedal note (first playable note) and their second regime (one octave above). One special aspect of the ghost note is to be lying at a different interval with respect to the other natural notes, depending on the instrument’s bore geometry. Nevertheless, not only does bifurcation analysis prove that the considered elementary model of brass instrument is able to reproduce the whole range of natural notes of a tuba, but also accurately describes the diversity of ghost notes among seven tubas featuring different bore geometries. Our results show that this is in excellent agreement with recordings of two professional tuba players.

The study especially focuses on the first three natural notes of the tubas, namely the pedal note, the ghost note and the second regime. The ease of playing of a tuba is chosen to be assessed based on the minimal pressure thresholds, namely the minimal value of mouth pressure at which an oscillating solution exists. Because the pedal note requires to determine oscillating regimes far from the equilibrium state, a linear stability analysis is not sufficient to characterise this note. Instead, the minimal pressure thresholds are estimated thanks to a bifurcation analysis. At the same time, the associated threshold oscillation frequency is inferred, which is directly related to the pitch of the note. For the considered elementary model of brass instrument, this method provides information on all the periodic regimes accessible to a tuba player for a given fingering. From the experimental point of view, the playing frequency of a note is estimated based on the recording of two professional tuba players.

The intervals between the pedal note and the ghost note, the ghost note and the second regime, and the pedal note and the second regime appear consistent between recordings and numerical bifurcation analysis for six tubas out of seven. The last tuba, the baritone saxhorn (which is one of the highest-pitched), actually has an intermediate bore profile between a tuba and a trombone, the latter featuring no ghost note. In this case, the two professional tuba players felt that the ghost note was not as ‘slotted’ (meaning that the player does not have the sensation of a stable, well-defined pitch) as on the

other tubas, resulting in a discrepancy between the two tuba players for this instrument. Nonetheless, this fact is consistent with the bifurcation diagrams analysis, which points out that the ghost note is more easily accessible by bending the pedal note up (that is to say by physically raising the lips' resonance frequency) than it is on the other tubas. The ghost note is thus numerically less well-defined on the baritone saxhorn, as confirmed by the sensation of both professional tuba players.

One important limitation of the present study lies in the difficulty to estimate the lips' parameters used in the model. Indeed, it would be reasonable to think that lips' parameters – such as  $Q_\ell$ , which is known to have a strong impact on the shape of the bifurcation diagrams – would vary from playing a low note to playing a high note, not to mention from playing a contrabass tuba to playing a baritone saxhorn. Yet, these lips' parameters being difficult to measure both on an artificial mouth or directly on a player, they were kept constant regardless the instrument or the note played. Even though the obtained results look reasonable, that is to say consistent with the musicians' experience, *in vivo* measurements of lips parameters during musical performance would be very valuable. Furthermore, the harsh modelling of the contact between the lips is known to artificially add harmonics to the time signals generated. This could be avoided by considering a more realistic contact model between the lips, even though regarding the frequency intervals, the model presented in this paper yields satisfying results as it is. Eventually, it is worth noting that the low number of tuba players (two) and the note occurrences (four to eight) per exercise performed by each tuba player may affect the quality of the statistics yielded. Thus, the recording process described in this paper would also highly benefit from being undertaken with a higher number of players in order to assess its repeatability and to refine the results obtained regarding the comparison of the frequency intervals between the elementary brass model and the recordings.

## 3.6 Acknowledgments

We wish to thank both professional tuba players Mathieu Chalange and Matthias Quilbault for allowing us to measure their tubas and record their performances, as well as Julia Mourier for useful discussions and for her help in this work.

## 3.7 Appendix

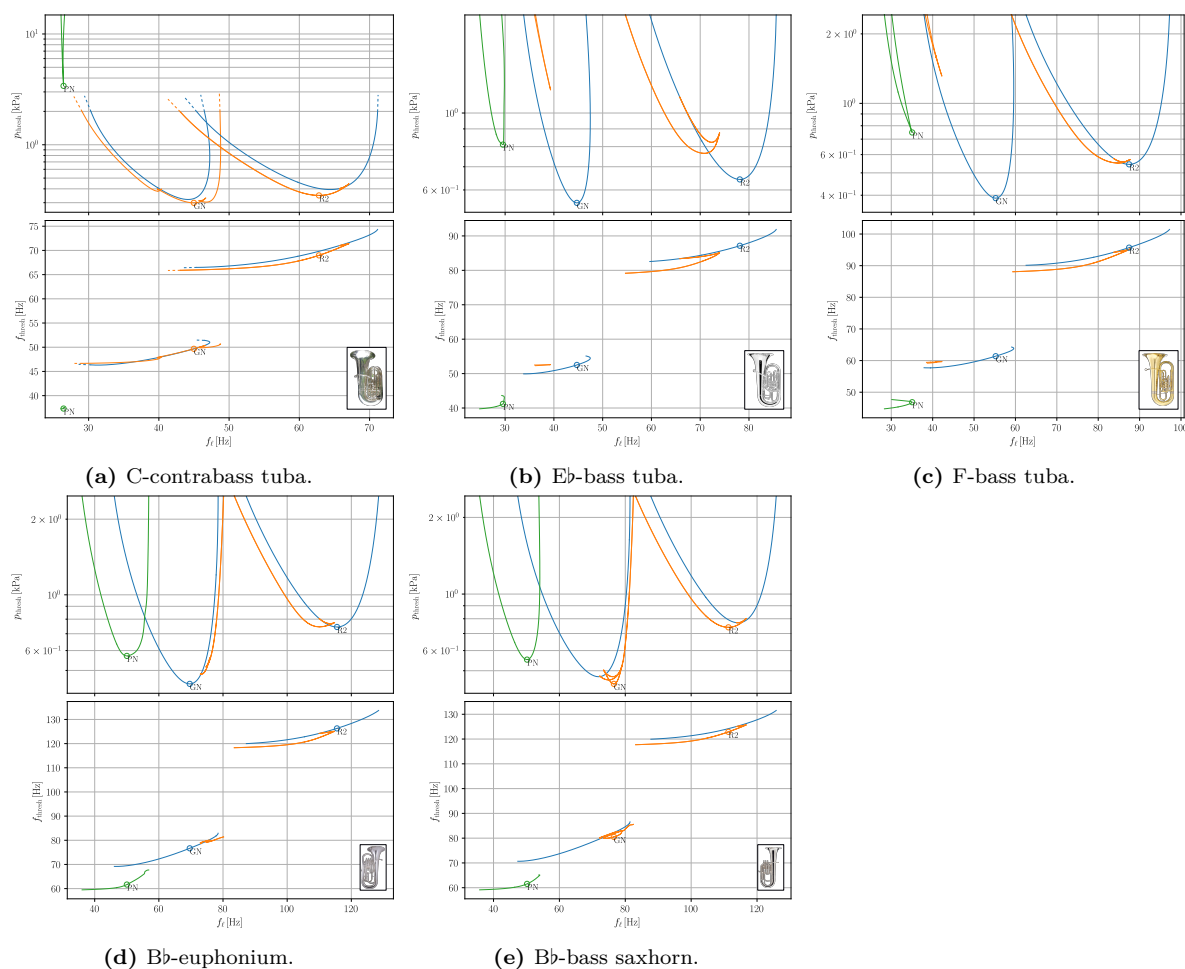
### Minimum blowing pressures of the seven tubas

In this appendix are displayed the same plots as in figure 3.7 (namely the threshold pressure and threshold frequency as functions of the lips' resonance frequency) for all the tubas that have not been treated in detail in this paper.

These figures illustrate well the fact that for a given note, the easiest note playable correspond to the minimum of either the Hopf points' locus (blue curve), or the saddle-node bifurcation points' locus (orange curve). For instance, both the easiest ghost note and second regime playable correspond to the minima of the blue U-shaped patterns in the case of the B $\flat$ -euphonium (subfigure 3.14d), whereas they both correspond to the minima of the orange U-shaped patterns in the case of the B $\flat$ -bass saxhorn (subfigure 3.14e).

It is also worth noticing that, in the case of the C-contrabass tuba (subfigure 3.14a), the pedal note's U-shaped pattern appears very narrow and have a very high optimal threshold mouth pressure (more than 3 kPa) compared to the U-shaped patterns of the ghost note and the second regime. This would mean that the pedal note is very slotted, namely very stable and well-defined, but also hard to obtain considering the high mouth pressure the player would have to exert in the instrument, and the narrow span in the values of lips' resonance frequency at which this note exists. However, as discussed in subsection 3.4.2 and section 3.5, several key-lips' parameters such as  $Q_\ell$  were held constant regardless of the tuba in the bifurcation analysis, which is very unlikely to be the case in practice. Therefore, it could result in such a discrepancy.

Secondly, several regions exhibit a singular behaviour in figure 3.14. For instance, F-tuba's and Eb-bass tuba's orange U-shaped patterns (subfigures 3.14c and 3.14b) show what are referred to as 'cusps' in (Seydel 2010) on their right side. Also, several swallow-tails (Seydel 2010) are seen, a noticeable one being on the left orange U-shaped pattern in the case of the B $\flat$ -bass saxhorn for instance (subfigure 3.14e). Since no physical interpretation of these areas could be made, we chose not to discuss them in this study.



**Figure 3.14** – Top and bottom plots represent respectively the threshold pressures and threshold frequencies given by the locus of the Hopf points (blue) and the locus of the saddle-node bifurcation points (orange and green) with respect to the lips’ resonance frequency in the case of the C-contrabass tuba, E♭-bass tuba, F-bass tuba, B♭-euphonium and B♭-bass saxhorn. The circles identify the local minimum of blowing pressure for each note, namely the pedal note (PN), the ghost note (GN), and the second regime (R2). The dashed portions at the ends of each U-shaped patterns in the case of the C-contrabass tuba mean that these curves still exist above  $p_m = 2$  kPa, but the computation was simply not performed above this value of mouth pressure.

## 3.8 Résultats supplémentaires

### 3.8.1 Processus de reconnexion de la branche de la note pédale

Au début de la section 3.3.1.2, on mentionne que la branche de solutions périodiques correspondant à la note pédale, présentée dans l'article comme un *isola* (Seydel 2010), peut néanmoins être localisée. En effet, il existe une valeur critique de  $Q_\ell$  pour laquelle la branche de la note pédale se connecte à la branche issue des points de Hopf. Dès lors, on accède à la branche de solutions périodiques correspondant à la note pédale en se déplaçant sur la branche de solutions périodiques issue du point de Hopf. On effectue ensuite continuation en fonction de  $Q_\ell$  d'un point de la branche de solutions périodiques correspondant à la note pédale pour se ramener à la valeur habituelle de facteur de qualité des lèvres  $Q_\ell = 7$ . Une vidéo illustrant cette réorganisation du diagramme de bifurcation en fonction de  $Q_\ell$  dans le cas d'un euphonium est visionnable en ligne<sup>8</sup>. Cette valeur critique de  $Q_\ell$  dépend également de la valeur des autres paramètres du modèle, en particulier de  $f_\ell$ . On choisit de se placer dans cette sous-partie à  $Q_\ell = Q_{\ell, \text{crit}} = 8$  pour le cas d'un euphonium, et on illustre le mécanisme de transition, qualifié de reconnexion dans ce qui suit par analogie avec la reconnexion magnétique, entre deux diagrammes de bifurcation qualitativement différents : l'un où la branche de solutions périodiques correspondante émerge d'une bifurcation de Hopf, et l'autre où l'on observe l'*isola* mentionné avant.

Sur la figure 3.15, la partie supérieure représente le tracé de  $p_{\text{seuil}}$  et de  $f_{\text{seuil}}$  en fonction de  $f_\ell$ . Cette figure est très similaire à la figure 3.14d, à l'exception du fait que seules les seuils de déstabilisation de la solution d'équilibre des notes pédale et fantôme sont représentées, et que le facteur de qualité des lèvres a été pris égal à 8. De plus, dans un souci de compréhension du processus de reconnexion observé sur les diagrammes de bifurcation partiels de la partie inférieure de la figure (tracés pour différentes valeurs de  $f_\ell$ ), le tracé de la courbe de bifurcation nœud-col S1 correspondant à la déstabilisation du régime de la note fantôme a été rajouté. Cette courbe de bifurcation présentant un pli pour  $f_\ell \approx 51$  Hz, on aura en dessous de cette valeur de  $f_\ell$  deux points de bifurcation nœud-col, que l'on a nommé S1<sup>I</sup> et S1<sup>II</sup>. Le scénario ① correspond à un cas pour lequel la note pédale est accessible, car la branche associée issue de S1'' est connectée à la branche de solutions périodiques issue du point de Hopf H1 et associée à la note fantôme. On

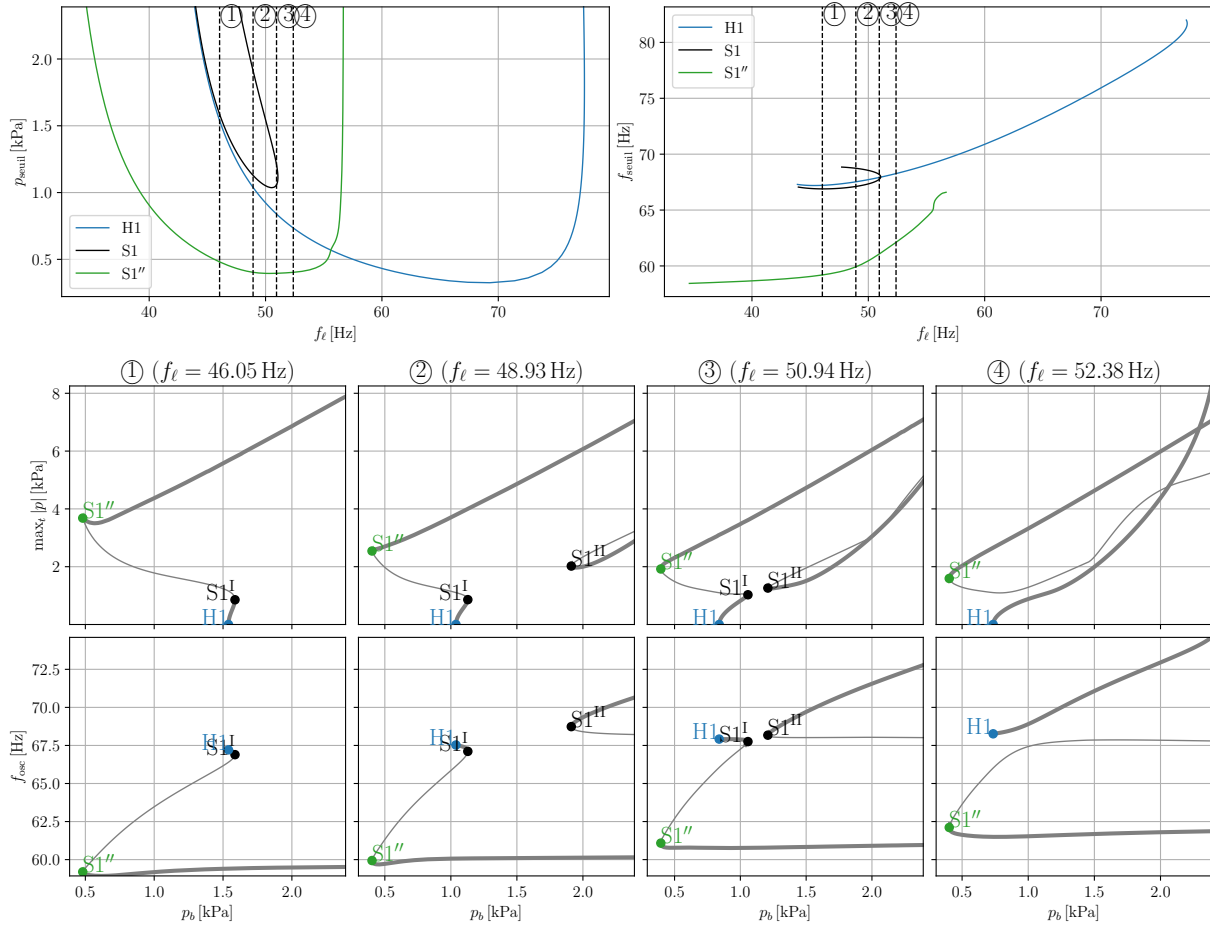
---

8. Animation montrant l'évolution des diagrammes de bifurcation en fonction du facteur de qualité des lèvres  $Q_\ell$ , tracé de  $Q_\ell = 8$  à  $Q_\ell = 7$  par pas 0,05 : [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/BE967\\_Hinv\\_Q17\\_NLreg\\_reg1\\_etude\\_impact\\_Q1.avi](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/BE967_Hinv_Q17_NLreg_reg1_etude_impact_Q1.avi).

peut alors accéder à la branche de la note pédale simplement en se déplaçant sur la branche de solutions en partant du point de Hopf H1. Dans le scénario ②, on constate qu'il existe en fait un *isola* (branche de solutions périodiques isolée), puisqu'il existe deux points de bifurcation nœud-col  $S1^I$  et  $S1^{II}$  pour cette valeur de  $f_\ell$ <sup>9</sup>. Au vu de la fréquence d'oscillation de l'*isola*, cette branche correspond à la note fantôme, au même titre que la branche issue de H1. Le scénario ③ est tracé pour une valeur critique de  $f_\ell$ , pour laquelle la courbe de bifurcation  $S1^I$  et  $S1^{II}$  sont très proches puisque l'on se situe alors proche du pli de la courbe de bifurcation S1 dans  $(f_\ell, Q_\ell)$ . L'allure du diagramme est donc très similaire à celle du diagramme ②, les points  $S1^I$  et  $S1^{II}$  étant seulement plus proches l'un de l'autre. En augmentant  $f_\ell$  au delà du pli de la courbe de bifurcation S1, on assiste alors à une reconnexion des branches du diagramme de bifurcation partiel, puisqu'alors la courbe de bifurcation S1 n'existe plus : c'est le processus à l'œuvre dans la transition ③→④. Dans ce dernier scénario, l'*isola* correspond dorénavant au régime de la note pédale au vu de sa fréquence d'oscillation, tandis que la branche issue du point de Hopf H1 correspond exclusivement à la note fantôme. En pratique, pour la valeur considérée jusqu'ici du facteur de qualité des lèvres  $Q_\ell = 7$  utilisée tout au long de cette thèse, les diagrammes de bifurcations partiels sont exclusivement du type de ④ pour les tubas traités dans l'article, rendant le régime de la note pédale inaccessible en se déplaçant continûment sur la branche issue du point de Hopf H1. Ainsi, la méthode adoptée dans l'article pour trouver la branche de la note pédale est de partir d'une valeur de  $Q_\ell$  comprise entre 8,0 et 21,7 suivant le type de tuba<sup>10</sup>, permettant ainsi d'obtenir un scénario partiel du type de ①, ②, ou ③ afin de pouvoir accéder à la branche de la note pédale en se déplaçant continûment sur la branche issue du point de Hopf H1. Par la suite, on effectue une continuation du point  $S1''$  en fonction de  $Q_\ell$  afin de revenir à la valeur  $Q_\ell = 7$ .

9.  $S1^{II}$  existait également pour le diagramme ①, mais n'était pas visible du fait de la plage de  $p_b$  choisi pour l'étude.

10. D'une manière générale, on constate que plus la tonalité nominale du tuba est basse, plus la valeur critique de  $Q_\ell$  (à  $f_\ell$  fixée) pour laquelle la branche de la note pédale se reconnecte à la branche issue du point de Hopf H1 est élevée :  $Q_\ell^{\text{crit.}} = 8,0$  pour un euphonium en sib, contre  $Q_\ell^{\text{crit.}} = 21,7$  pour un contretuba en sib.



**Figure 3.15** – Haut : diagrammes de bifurcation dans le plan des paramètres  $p_b$  et  $f_\ell$ . Les courbes de bifurcations délimitent des zones de l'espace des paramètres associées à des dynamiques qualitativement différentes. Bleu : courbe de bifurcation de Hopf H1 (points de déstabilisation de la solution d'équilibre, donnant naissance au régime de la note fantôme) ; noir : courbe de bifurcation nœud-col S1 (points de déstabilisation du régime de la note fantôme issu de H1) ; vert : courbe de bifurcation nœud-col S1'' (points d'émergence du régime de la note pédale). Lignes pointillées verticales : valeurs particulières de  $f_\ell$  choisies pour tracer les diagrammes de bifurcation partiels de la partie inférieure de la figure. Bas : diagrammes de bifurcation à 1 paramètre, montrant l'évolution d'une observable (module de pression dans l'embouchure maximal ou fréquence d'oscillation) le long des branches de solutions, en fonction de la pression d'alimentation  $p_b$ . Trait épais : régime stable ; trait fin : régime instable. Les points particuliers (de Hopf ou de bifurcation nœud-col) mentionnés plus haut sont annotés sur les diagrammes de bifurcation.

Du point de vue du ressenti du musicien, ce phénomène de reconnexion traduit un changement soudain dans le comportement de l'instrument pour un petit changement d'un paramètre de contrôle comme  $Q_\ell$  ou  $f_\ell$ . En effet, dans les scénarios ①, ② et ③,

il existe une plage de valeurs de  $p_b$  délimitée par les points  $S1^I$  et  $S1^II$ , à l'intérieur de laquelle le régime de la note fantôme n'existe pas, seul celui de la note pédale est accessible. À l'inverse, dans le scénario ④, le régime de la note fantôme est accessible continûment depuis l'équilibre (point H1) et ce pour toute valeur de  $p_b$ , c'est-à-dire lorsque le musicien effectue un *crescendo* en partie d'une pression dans la bouche nulle. Dans ce cas, le régime de la note pédale, représenté par un *isola*, n'est accessible qu'au moyen d'un vecteur d'état initial bien choisi, c'est-à-dire lorsque le musicien attaque la note. Du fait des spécificités du diagramme de bifurcations telles que l'*isola*, seules les méthodes de continuation permettent d'accéder à ces informations.

### 3.8.2 Étude de l'évolution des pressions et fréquences de seuil optimales entre un saxhorn baryton et un saxhorn basse

Il est mis en évidence dans la sous-section 3.3.2 que le saxhorn baryton exhibe une note fantôme au même titre que les autres tubas, mais que celle-ci se situe moins d'un ton au-dessus de la note pédale (voir figure 3.13b), contre plus d'un ton et demi minimum pour les autres tubas. De plus, la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre décrivant la note pédale dans le plan  $(f_\ell, p_b)$  (courbe de bifurcation nœud-col  $S1''$ ) a pour particularité d'être non seulement connectée à la courbe de bifurcation de Hopf, mais aussi de posséder deux minima locaux contigus, que l'on a analysés comme étant la note pédale d'une part et la note fantôme d'autre part, étant donné leur pression et fréquence de seuil optimale respective. Ce comportement singulier avait été interprété en se basant sur la perce de l'instrument, étant à la fois proche de la perce cylindrique d'un trombone – ne possédant pas de note fantôme – et d'une perce conique à l'instar des tubas (voir figure 3.8). Suite à la publication de cet article, on s'est alors demandé de quelle manière les seuils de déstabilisation de la solution d'équilibre de chaque régime dans le plan  $(f_\ell, p_b)$  évoluaient en passant continûment d'un tuba ayant une perce résolument conique, comme le saxhorn basse, au cas particulier du saxhorn baryton. Dans cette optique, on définit un nouvel instrument dont l'impédance d'entrée est caractérisée par des coefficients modaux combinaison linéaire des coefficients modaux du saxhorn basse (bs) et du saxhorn baryton (btn) :



$$\begin{aligned} C_n &= \alpha C_n^{\text{btn}} + (1 - \alpha) C_n^{\text{bs}} \\ s_n &= \alpha s_n^{\text{btn}} + (1 - \alpha) s_n^{\text{bs}} \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec  $\alpha \in [0, 1]$  le paramètre de *morphing*. En considérant  $\alpha$  comme un nouveau paramètre de contrôle du système, on trace alors les seuils de déstabilisation de la solution d'équilibre caractéristiques des notes fantôme (points de Hopf H1 et des points de bifurcation nœud-col S1') et pédale (points de bifurcation nœud-col S1'') dans les plan  $(f_\ell, p_b)$  et  $(f_\ell, f_{\text{osc}})$ , pour différentes valeurs de  $\alpha$ . Une vidéo illustrant cette démarche de  $\alpha = 0$  (saxhorn basse) à  $\alpha = 1$  (saxhorn baryton) par pas de 0,05 peut être visionnée à [http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd\\_dyn\\_BA16\\_Q17\\_NLreg\\_reg1-2.avi](http://perso.univ-lemans.fr/~rmatte/bd_dyn_BA16_Q17_NLreg_reg1-2.avi). Le code couleur adopté pour les seuils de déstabilisation de la solution d'équilibre est celui de la figure 3.14e, et les conditions de simulations sont identiques à celles de l'article, en particulier on se place à  $Q_\ell = 7$ . Sur cette vidéo, on assiste entre  $\alpha = 0,75$  et  $\alpha = 0,8$  à la reconnexion des points de bifurcation nœud-col S1'' (en vert) aux points de Hopf H1 (en bleu) pour former la double-seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre caractéristique du saxhorn baryton visible sur la figure 3.10. Sur les points de Hopf H1 en bleu et de bifurcation nœud-col S1' en orange dans le plan  $(f_\ell, f_{\text{osc}})$  (diagramme de droite), on constate également que la fréquence de seuil de la note fantôme diminue en se rapprochant du saxhorn baryton, tandis que la partie de la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre verte destinée à se reconnecter voit sa fréquence d'oscillation augmenter pour se rapprocher de celle de la note fantôme. On peut noter la présence de la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre orange à la droite de la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre bleue pour  $\alpha = 1$  (cas du saxhorn baryton), mais n'ayant pas été représentée sur la figure 3.10, vraisemblablement non détectée au moment de l'étude individuelle de l'instrument en raison de son isolement et de son étroitesse. Cependant, sa pression de seuil optimale étant beaucoup plus haute que la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre bleue et sa fréquence de seuil associée proche de celle de la seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre bleue, cela n'invalide pas l'étude menée dans l'article au sujet du saxhorn baryton.

Cette vidéo ne peut pas être comprise dans son intégralité en l'état, puisqu'en particulier les points de bifurcation nœud-col S1 n'y est pas tracé faute de temps, ce qui pourrait pourtant expliquer de manière plus claire le processus de reconnexion, en parti-

culier la formation de la partie gauche de l'étroite seuil de déstabilisation de la solution d'équilibre verte isolée visible à partir de  $\alpha = 0,8$ .

Les résultats présentés ici constituent un point de départ pour une étude plus poussée de l'impact des paramètres de lèvres sur le comportement dynamique du système au moyen de la continuation, qui fera l'objet d'un article à venir.



# ÉTUDE EXPÉRIMENTALE D'UN SYSTÈME À DEUX PICS

---

## Sommaire

---

<b>4.1 Outils expérimentaux . . . . .</b>	<b>119</b>
4.1.1 Impédance d'entrée . . . . .	119
4.1.2 Bouche artificielle . . . . .	124
4.1.3 Obtention des diagrammes expérimentaux . . . . .	129
4.1.4 Confrontation au modèle physique . . . . .	135
<b>4.2 Analyse de bifurcation expérimentale . . . . .</b>	<b>139</b>
4.2.1 Choix des configurations du résonateur . . . . .	140
4.2.2 Influence de la configuration du résonateur sur les diagrammes de bifurcation . . . . .	142
<b>4.3 Conclusion . . . . .</b>	<b>142</b>
<b>4.A Annexe : étude du phénomène de <i>vena contracta</i> dans le diaphragme . . . . .</b>	<b>144</b>

---

En facture instrumentale, on remarque qu'un instrument à vent est souvent conçu de manière à ce que les résonances du tube forment une série harmonique, c'est-à-dire que chaque fréquence de résonance est un multiple de la première. Si cette particularité est réputée cruciale pour l'intonation, elle est aussi susceptible d'influencer la pression de seuil d'oscillation, et donc la facilité d'émission. Ce critère d'harmonicité des résonances du tube est qualifié de « prescription de Bouasse-Benade » (Benade 1990 ; Benade et Gans 1968) dans (Gilbert et al. 2020). Pour s'en convaincre par l'absurde, Benade et Gans créent un instrument de musique conçu de manière à éviter toute relation d'harmonicité entre les fréquences de résonance (Benade et Gans 1968). Baptisé « tacet horn », cet instru-

ment rend les conditions d’oscillation défavorables. Ce critère étant purement qualitatif, (Gilbert et al. 2020) ont montré dans le cadre d’un modèle physique d’instrument à anche sans dynamique d’anche et possédant seulement deux résonances (bichromateur) que l’inharmonicité optimale (c’est-à-dire pour laquelle la pression de seuil est minimale) est de 0% pour un rapport d’amplitude des deux pics de résonance de 1,5. On souhaite dans ce chapitre quantifier d’une part ce résultat expérimentalement, et d’autre part étudier l’influence combinée de l’inharmonicité et du rapport d’amplitude des pics de résonance sur la pression de seuil minimale.

Pour ce faire, on choisit de travailler avec un instrument de musique possédant deux résonances prépondérantes afin de se placer dans le cas du bichromateur. On choisit alors comme résonateurs les notes de sol à do du premier registre d’un saxophone alto, dont le bocal peut être prolongé de tubes permettant de varier l’inharmonicité des résonances. Dans l’optique d’assurer une meilleure reproductibilité qu’un musicien, on fait jouer ces « instruments » avec une bouche artificielle, et on analyse les diagrammes de bifurcation. Les régimes périodiques sont explorés en fonction du paramètre de contrôle  $p_b$ , pression dans la bouche du musicien. Le but étant d’évaluer la facilité d’émission des notes jouées, on cherche en particulier à évaluer la pression de seuil (inverse lorsqu’elle existe, directe sinon) pour une configuration du résonateur donnée. Cependant, les valeurs de pression de seuil aux seuils de stabilité d’une branche de solutions périodiques – c’est-à-dire aux endroits où les régimes périodiques apparaissent ou s’éteignent – étant particulièrement difficiles à mesurer, on couple cette démarche expérimentale à une continuation numérique du modèle physique utilisé tout au long de cette thèse. Les paramètres d’embouchure du modèle sont mesurés à partir de la configuration expérimentale choisie, et l’impédance d’entrée de chaque résonateur systématiquement approchée par une impédance reconstruite ne comportant que deux pics.

Dans la section 4.1, on présente les résonateurs avec lesquels on travaille, ainsi que les outils permettant d’une part de tracer des diagrammes de bifurcation expérimentalement, et d’autre part d’estimer les paramètres d’embouchure pour un réglage donné de la bouche artificielle en vue d’alimenter le modèle physique. Dans la section 4.2, on confronte plusieurs diagrammes de bifurcations expérimentaux issus de plusieurs configurations du résonateur, afin de mesurer l’influence combinée de l’inharmonicité et du rapport d’amplitude des pics de résonance sur la pression de seuil minimale.

## 4.1 Outils expérimentaux

### 4.1.1 Impédance d'entrée

Les instruments à trous latéraux possèdent généralement moins de résonances acoustiques que les cuivres pour certains doigtés, comme on peut le voir sur la figure 4.2 dans le cas d'un saxophone alto. Plus on bouche de trous (doigté de sol grave figure 4.2b), plus on observe un nombre élevé de résonances car le résonateur se rapproche de plus en plus d'un résonateur sans trous latéraux : la coupure induite par le réseau de trous latéraux ouvert tend à disparaître en même temps que la fréquence fondamentale diminue (Chaigne et Kergomard 2013 ; Petersen 2020). On travaille alors avec un résonateur simplifié comportant seulement deux résonances, afin d'étudier l'influence combinée de l'amplitude relative et l'inharmonicité de la seconde résonance sur la pression de seuil :

- l'inharmonicité  $\text{Inh}$  entre les deux pics d'impédance est définie par  $\text{Inh} = \frac{f_{ac,2}}{2f_{ac,1}} - 1$  (ici l'inharmonicité du pic 2 par rapport au 1) en notant  $f_{ac,n}$  la fréquence de résonance du pic  $n$  ;
- le rapport  $\alpha$  entre les amplitudes  $Z_1$  et  $Z_2$  des deux premiers pics est défini par  $\alpha = \frac{Z_2}{Z_1}$ .

En pratique, on peut modifier  $\text{Inh}$  et  $\alpha$  en modifiant le doigté et/ou en rajoutant des portions de tube de longueur connue entre le bocal et le bec du saxophone, comme montré sur la figure 4.1. Le diamètre intérieur des tubes a été choisi identique au diamètre intérieur d'entrée du bocal. Lorsque plusieurs tubes sont mis bout à bout, on les maintient ensemble à l'aide de manchons en inox, le tout rendu étanche au moyen de téflon et de graisse à vide. Cette dernière opération a pour effet de déplacer les pics prépondérants de l'impédance d'entrée vers les basses fréquences, et l'impédance ainsi modifiée peut être calculée connaissant l'impédance d'entrée sans tube ajouté à l'aide de la formule de l'impédance ramenée (Chaigne et Kergomard 2013). Connaissant l'impédance d'entrée mesurée  $Z(0)$  et la longueur  $L$  de tube rajoutée, l'impédance modifiée est donnée par :

$$Z(L) = jZ_c \tan \left[ kL + \arctan \left( \frac{Z(0)}{jZ_c} \right) \right], \quad (4.1)$$

avec  $k = \omega/c$  et  $Z_c = \frac{\rho c}{S_e}$  avec  $S_e$  la section d'entrée du tube.

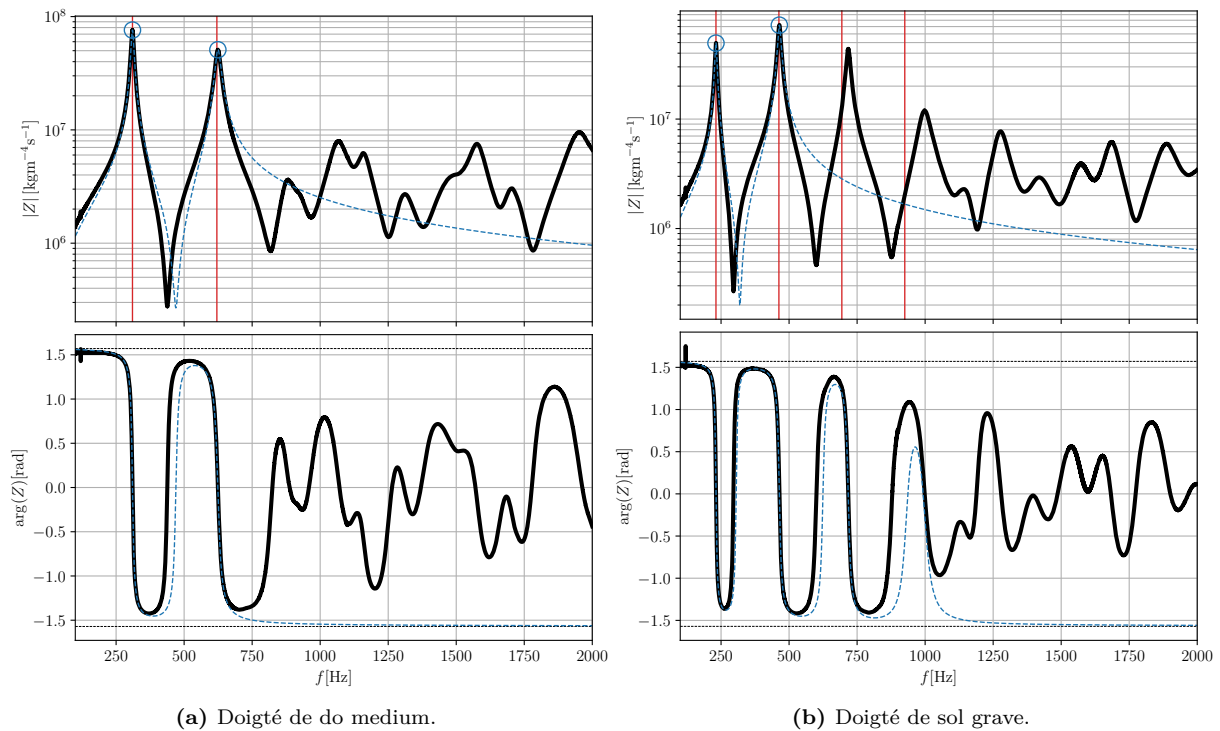


**Figure 4.1** – Photo des portions de tubes (en cuivre, longueurs  $L = 35$  mm et  $L = 50$  mm) qu'il est possible d'insérer entre le bocal et le bec du saxophone. Le diamètre intérieur des tubes est identique au diamètre intérieur d'entrée du bocal. Les tubes sont maintenus ensemble par des manchons en inox, visibles au-dessus.

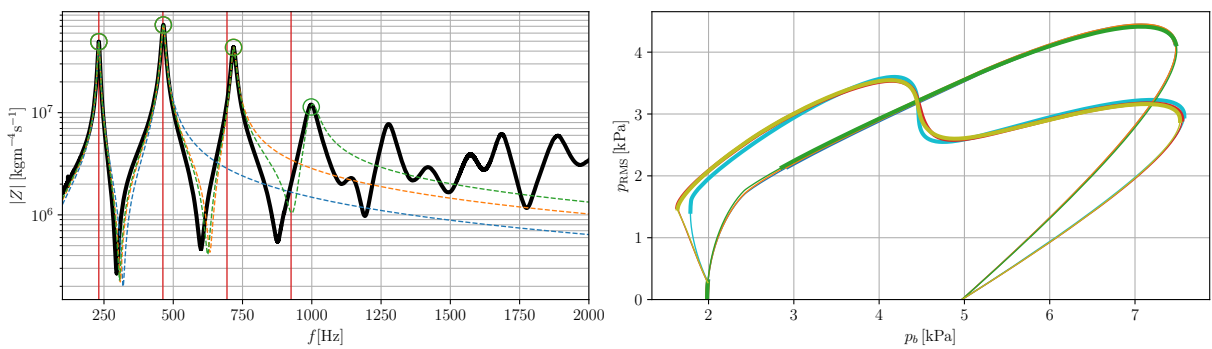
Pour mesurer l'impédance d'entrée, on utilise le même pont d'impédance que celui utilisé pour les cuivres dans la section 1.1.2 du chapitre 1 (Le Roux et al. 2012). Le bec est alors remplacé par une pièce d'adaptation permettant sa connexion au pont d'impédance. L'impédance ainsi mesurée étant forcément différente de l'impédance du saxophone en situation de jeu (c'est-à-dire avec le bec), il est nécessaire de modifier l'impédance mesurée en lui ajoutant un « volume équivalent », prenant en compte le bec. Théoriquement, cela revient à ajouter artificiellement une portion de tube au résonateur, dont la longueur est choisie de telle sorte que la première fréquence de résonance du bocal seul soit approximativement la même que sa fréquence de jeu (réputée stable quelle que soit la valeur de  $p_b$ ). L'impédance ainsi modifiée peut être calculée analytiquement à l'aide de la formule de l'impédance ramenée (équation (4.1)). L'impédance d'entrée étant entre autre modifiée par le doigté, il est nécessaire de mesurer l'impédance d'entrée pour chaque doigté. En revanche, il n'est pas nécessaire de mesurer l'impédance d'entrée lorsque des portions de tube sont ajoutées entre le bocal et le bec (voir figure 4.1), car dans ce cas-là l'impédance d'entrée avec tubes ajoutés se déduit simplement de l'impédance d'entrée sans tube ajouté via la formule de l'impédance ramenée (4.1).

En vue de confronter les mesures de pression de seuil au modèle physique décrit au chapitre 1 appliqué au saxophone alto, il est entre autres nécessaire d'effectuer une décomposition modale de l'impédance d'entrée mesurée du saxophone dans les différentes configurations, comme décrit dans la section 1.1.2.2 du chapitre 1 dans le cas des cuivre. Dans le cas du doigté de do medium, l'impédance d'entrée correspondante montre deux pics clairement prépondérants (figure 4.2a). Ainsi, il semble légitime d'approcher l'impédance d'entrée par une décomposition modale à deux modes (courbe en pointillés bleu sur la figure 4.2a). En revanche, ce choix peut sembler plus discutable dans le cas du doigté de sol grave (figure 4.2b), pour lequel l'impédance d'entrée correspondante exhibe au moins une résonance significative supplémentaire. Afin de le valider, on réalise une continuation numérique de solution périodique sur le modèle physique décrit au chapitre 1 appliqué au saxophone alto pour un doigté de sol grave, dans les cas d'une impédance d'entrée à 2, 3 et 4 pics. La branche de l'octave et son doublement de période associé sont représentés sur la figure 4.3. On constate alors le peu d'impact de la prise en compte des troisième et quatrième pics de l'impédance sur l'allure du diagramme de bifurcation en  $p_{\text{RMS}}$ . Cette étude menée sur les autres doigtés du saxophone mène au même constat. Ainsi, il est légitime de ne prendre en compte que deux modes dans l'impédance d'entrée du résonateur, quel que soit le doigté choisi.





**Figure 4.2** – Module et phase de l'impédance d'entrée mesurée (noir) et reconstruite sur une base modale à 3 coefficients modaux (pointillé bleu foncé) d'un saxophone alto. L'impédance reconstruite est basée sur une méthode polynomiale de décomposition en fraction rationnelle décrite dans (Ewins 2000). Cercles : valeurs maximales des pics considérés pour la décomposition modale. Lignes rouges verticales :  $f = f_{ac,1}$  et  $f = 2f_{ac,1}$ , ainsi que  $f = 3f_{ac,1}$  et  $f = 4f_{ac,1}$  dans la figure de droite. Gauche : doigté de do medium ; droite : doigté de sol grave.



(a) Tracé du module de l'impédance d'entrée d'un saxophone (doigté de sol grave).

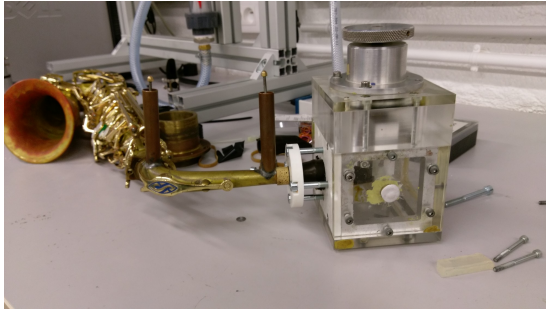
(b) Diagramme de bifurcation en valeur efficace de pression acoustique dans le bec en fonction de la pression dans la bouche.

**Figure 4.3** – Étude de l'influence sur le diagramme de bifurcation en pression efficace de la prise en compte de modes supplémentaires pour décrire l'impédance d'entrée d'un saxophone, dans le cas d'un doigté de sol grave. Gauche : tracé du module de l'impédance d'entrée d'un saxophone (doigté de sol grave). Lignes rouges verticales :  $f = f_{ac,1}$ ,  $f = 2f_{ac,1}$ ,  $f = 3f_{ac,1}$  et  $f = 4f_{ac,1}$ . Noir : impédance mesurée. Droite : diagrammes de bifurcation en valeur efficace de pression acoustique dans le bec en fonction de la pression dans la bouche. Bleu foncé (octave) et bleu clair (doublement de période) : impédance reconstruite à 2 modes. Orange (octave) et rouge (doublement de période) : impédance reconstruite à 3 modes. Vert foncé (octave) et vert clair (doublement de période) : impédance reconstruite à 4 modes. Trait fin : régime d'oscillation instable ; trait épais : régime d'oscillation stable.

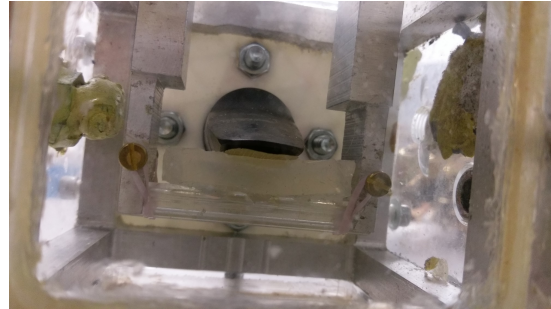
## 4.1.2 Bouche artificielle

On présente dans cette section une méthode permettant de tracer des diagrammes de bifurcation expérimentaux dans le cas d'un saxophone alto.

### 4.1.2.1 Présentation générale



(a) Vue générale de la bouche artificielle connectée à un saxophone alto Selmer.

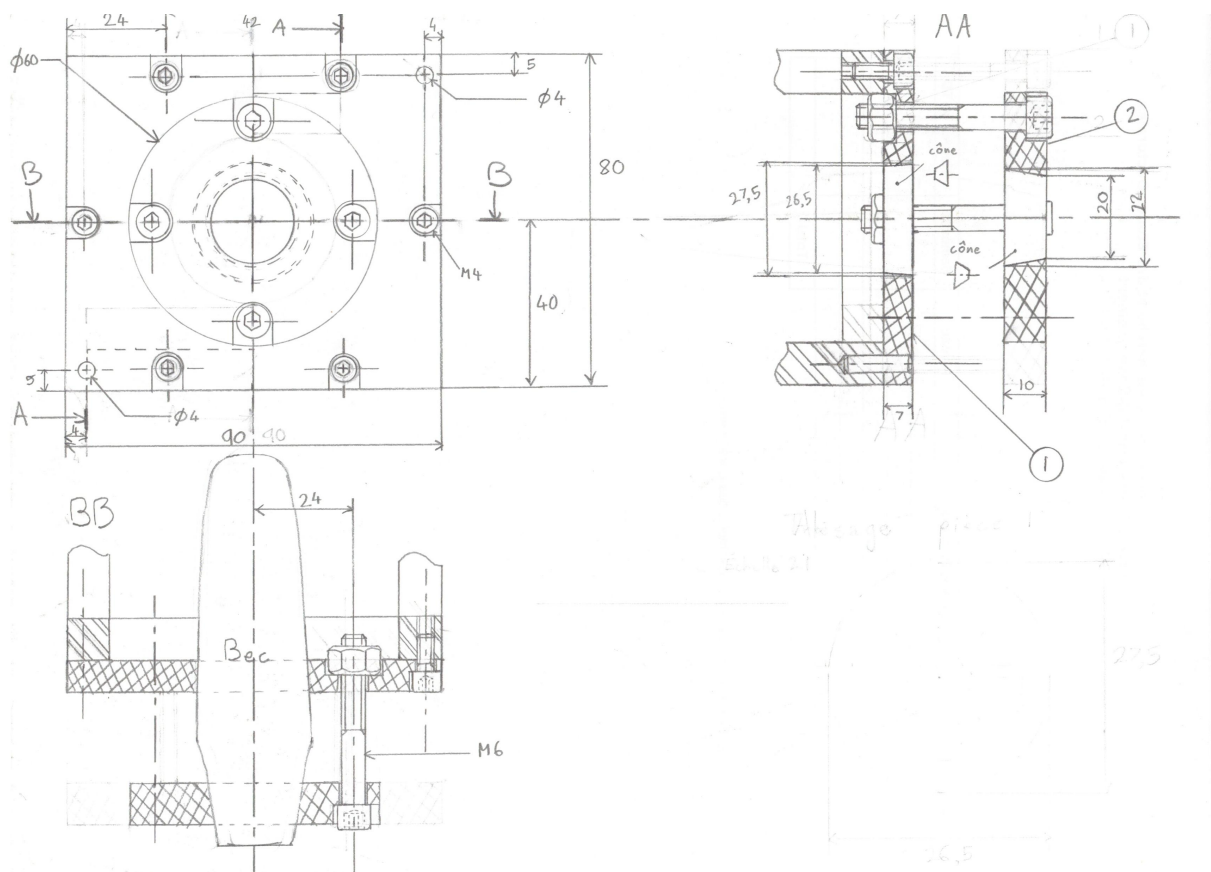


(b) Détail de l'intérieur de la bouche artificielle.

**Figure 4.4** – Photos de la bouche artificielle pour instruments à anche, développée par B. Gazengel dans (Dalmont et al. 1995).

La bouche artificielle représentée sur la figure 4.4 a initialement été conçue pour accueillir une clarinette dans (Dalmont et al. 1995). Nous avons réalisé une pièce d'adaptation en impression 3D (en blanc sur les photos) dont le plan est représenté sur la figure 4.5. afin que la bouche puisse accueillir un bec de saxophone. La bouche consiste en une boîte possédant une arrivée d'air comprimé et un dispositif permettant de fixer le bec muni de son anche à travers une paroi de la boîte. La bouche proprement dite est une lèvre en silicone visible sur la figure 4.4b dont on peut régler la position longitudinale sur l'anche (nécessite l'accès à l'intérieur de la bouche) ainsi que l'appui sur l'anche à l'aide de la molette dépassant de la boîte sur la figure 4.4a.

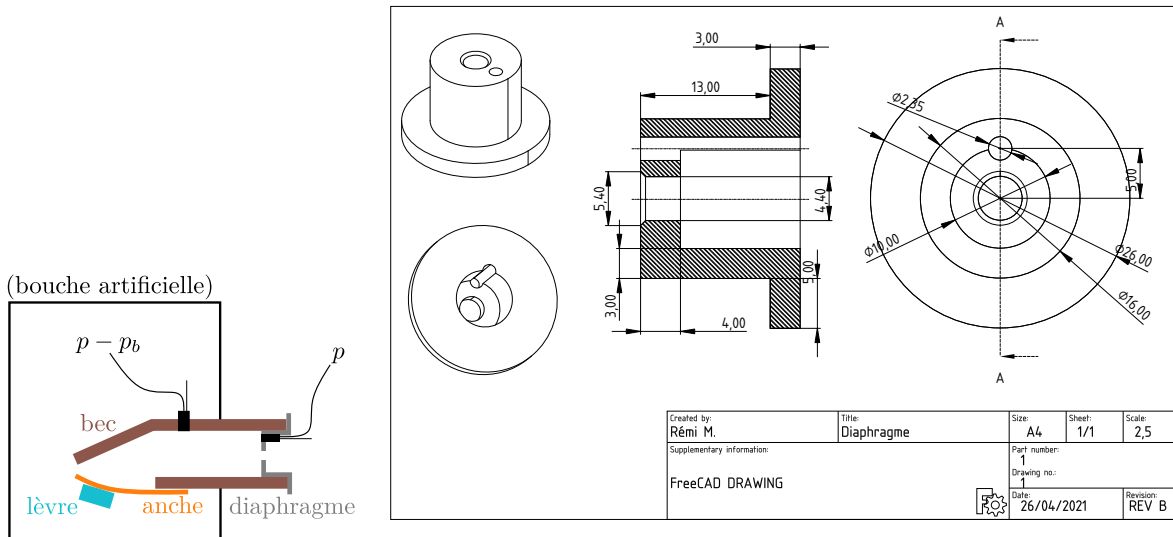
La pression dans la bouche  $p_b$  et  $\Delta p = p_b - p$  sont mesurés à l'aide de deux capteurs de pression piézorésistifs Endevco 8507C-5 (étalonnés statiquement au moyen d'un manomètre à tube en U rempli d'eau) placés à l'intérieur de la chambre. Ces capteurs disposent d'un capillaire métallique situé à l'arrière de la tête constituant une référence, représenté sur la figure 4.6a. Sur cette figure, un seul capteur placé sur le bec permet alors de mesurer directement la différence de pression  $p - p_b$  de part et d'autre de la paroi, la tête du capteur mesurant la pression dans le bec tandis que le capillaire mesure la pression dans la bouche.



**Figure 4.5** – Dessin de la pièce d'adaptation permettant de connecter un bec de saxophone à la bouche artificielle. La plaque rectangulaire à six trous remplace une des parois de la bouche artificielle, initialement conçue pour accueillir un bec de clarinette.

#### 4.1.2.2 Mesure de la caractéristique non linéaire de l'anche

Le modèle physique d'instrument à anche faisant intervenir non seulement l'impédance d'entrée du résonateur, mais aussi les paramètres d'embouchure  $w$ ,  $H$  et  $K_r$ , il est nécessaire de pouvoir les mesurer via une caractérisation du bec seul couplé à la bouche artificielle. Suivant la méthode détaillée dans (Dalmont et al. 2003), un diaphragme dont le dessin est visible figure 4.6a est inséré dans le bec à la place du bocal selon le schéma de la figure 4.6b. Puis, en forçant un flux d'air à s'écouler de la bouche vers l'extérieur à travers le bec (sans faire vibrer l'anche) et en mesurant la différence de pression entre l'entrée du diaphragme et sa sortie (égale à  $p$ ), il est possible de remonter à la section  $S_0 = wH$  du jet ainsi qu'à la pression de placage  $p_M$ .

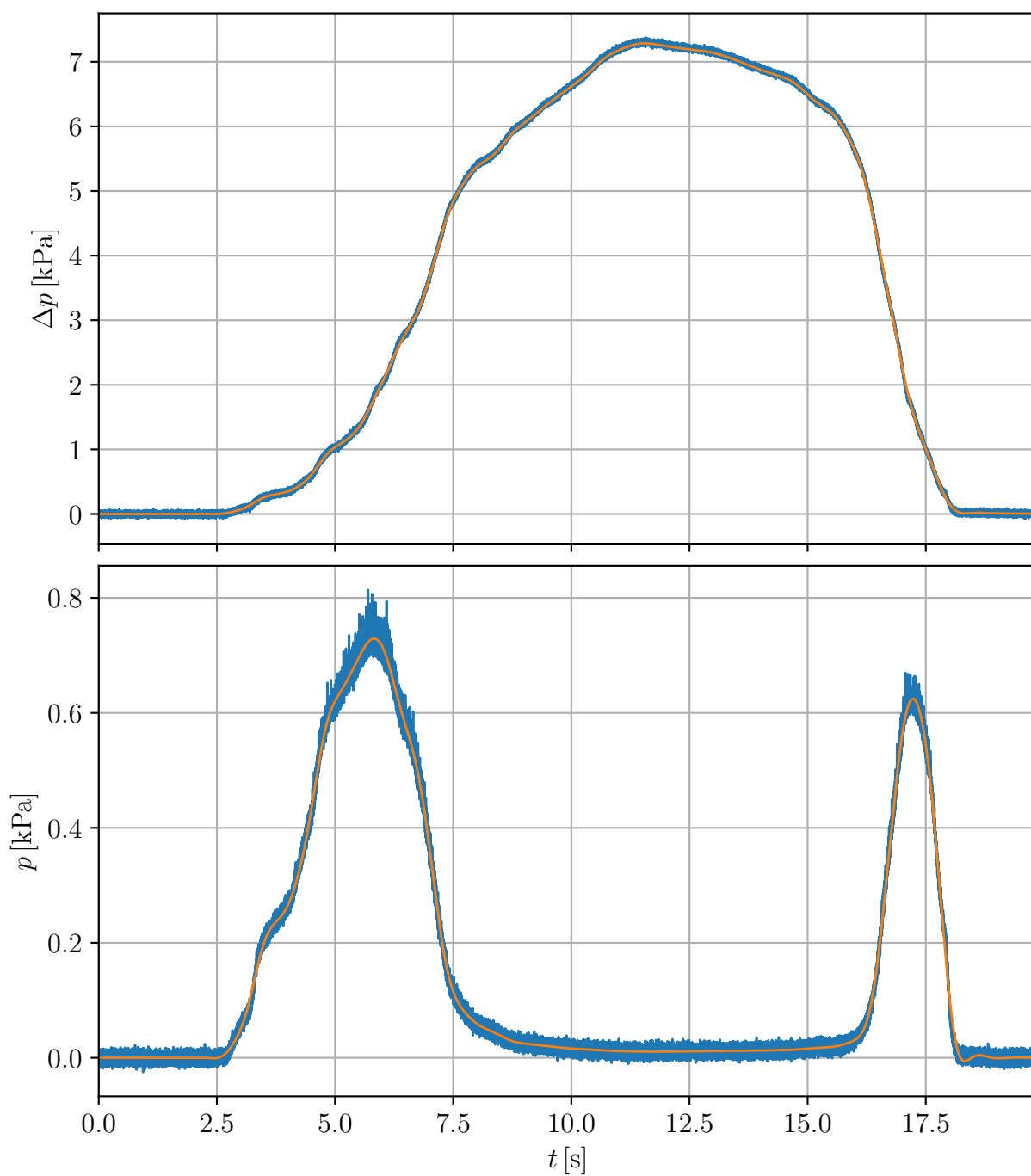


(a) Schéma du montage du diaphragme dans le bec et positionnement des capteurs de pression.

(b) Dessin du diaphragme utilisé pour caractériser le bec.

**Figure 4.6** – Schéma montrant le positionnement du diaphragme dans le bec et dessin du diaphragme. Le bec viendra s'emmancher sur la partie cylindrique de diamètre 16 mm pour venir en butée contre l'épaule. Le perçage de diamètre 2,35 mm est prévu pour accueillir un capteur de pression afin de pouvoir mesurer la pression à l'intérieur du bec.

En pratique, on augmente graduellement la pression dans la bouche (la valeur moyenne de  $p$  augmente alors de même), ce qui aura pour effet de plaquer l'anche à partir d'une certaine valeur de  $p_b$  à partir de laquelle  $p$  chute jusqu'à approximativement zéro puisque le bec est alors bouché : il n'existe plus de surpression dans le bec. On diminue alors  $p_b$  pour effectuer ce cycle dans l'autre sens. Ce trajet est représenté sur la figure 4.7.



**Figure 4.7** – Tracé de  $\Delta p = p_b - p$  (gauche) et de  $p$  (droite) en fonction du temps lors de la mesure de la caractéristique non linéaire de l'anche. Bleu : données brutes ; orange : données filtrées (filtre de Butterworth passe-bas d'ordre 4 (Bildstein 1980)).

Il est possible de calculer le débit d'air  $u$  s'écoulant du bec vers l'extérieur en fonction de  $p$ , en appliquant le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant s'engouffrant dans le diaphragme :

$$u(p) = S_d \sqrt{\frac{2p}{\rho}}, \quad (4.2)$$

avec  $S_d = \pi r_d^2$  la section du diaphragme. Le rayon du diaphragme doit être choisi assez petit pour que la surpression dans le bec  $p$  soit assez grande pour être mesurée et empêcher l'auto-oscillation de l'anche, et en même temps assez grand pour faire en sorte que l'anche ne se plaque pas de manière trop soudaine, empêchant alors une exploration complète de la caractéristique non linéaire (Dalmont et al. 2003). Ici, on a choisi  $r_d = 2,74$  mm pour satisfaire à ces conditions. Le tracé de  $u$  en fonction de  $\Delta p = p_b - p$  est représenté sur le graphe supérieur de la figure 4.8 (il existe un hystérésis entre les phases d'augmentation et de diminution de  $p_b$  à cause de la fatigue de l'anche due au premier placage). Une première approximation de la pression de placage et de  $S_0 = wH$  peut dès lors être obtenue, sachant que (Dalmont et al. 2003) :

$$u_{\max} = u\left(\Delta p = \frac{p_M}{3}\right) = \frac{2}{3} S_0 \sqrt{\frac{2p_M}{3\rho}}. \quad (4.3)$$

Cette méthode d'estimation étant peu précise puisqu'elle n'utilise qu'un point de la courbe, on utilise une autre expression de  $u$  en appliquant le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant du flux d'air s'écoulant de la bouche artificielle dans le bec :

$$u(\Delta p) = S \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}. \quad (4.4)$$

Ainsi, en combinant (4.2) et (4.4), on obtient :

$$S(\Delta p) = S_d \sqrt{\frac{p}{\Delta p}} \quad (4.5)$$

Le tracé de  $S$  en fonction de  $\Delta p$  est visible sur le graphe inférieur de la figure 4.8. Afin d'obtenir les paramètres d'embouchure pour une anche déjà sollicitée (ce qui est cohérent

avec une situation de jeu), on considère la partie « retour » de l'hystérèse. On y effectue une régression affine (courbe orange) dans la région linéaire, dont l'ordonnée à l'origine vaut  $S_0$ , et dont la pente vaut  $-S_0/p_M$ . De cette façon, on obtient une estimation plus précise de  $S_0$  et de  $p_M$ .

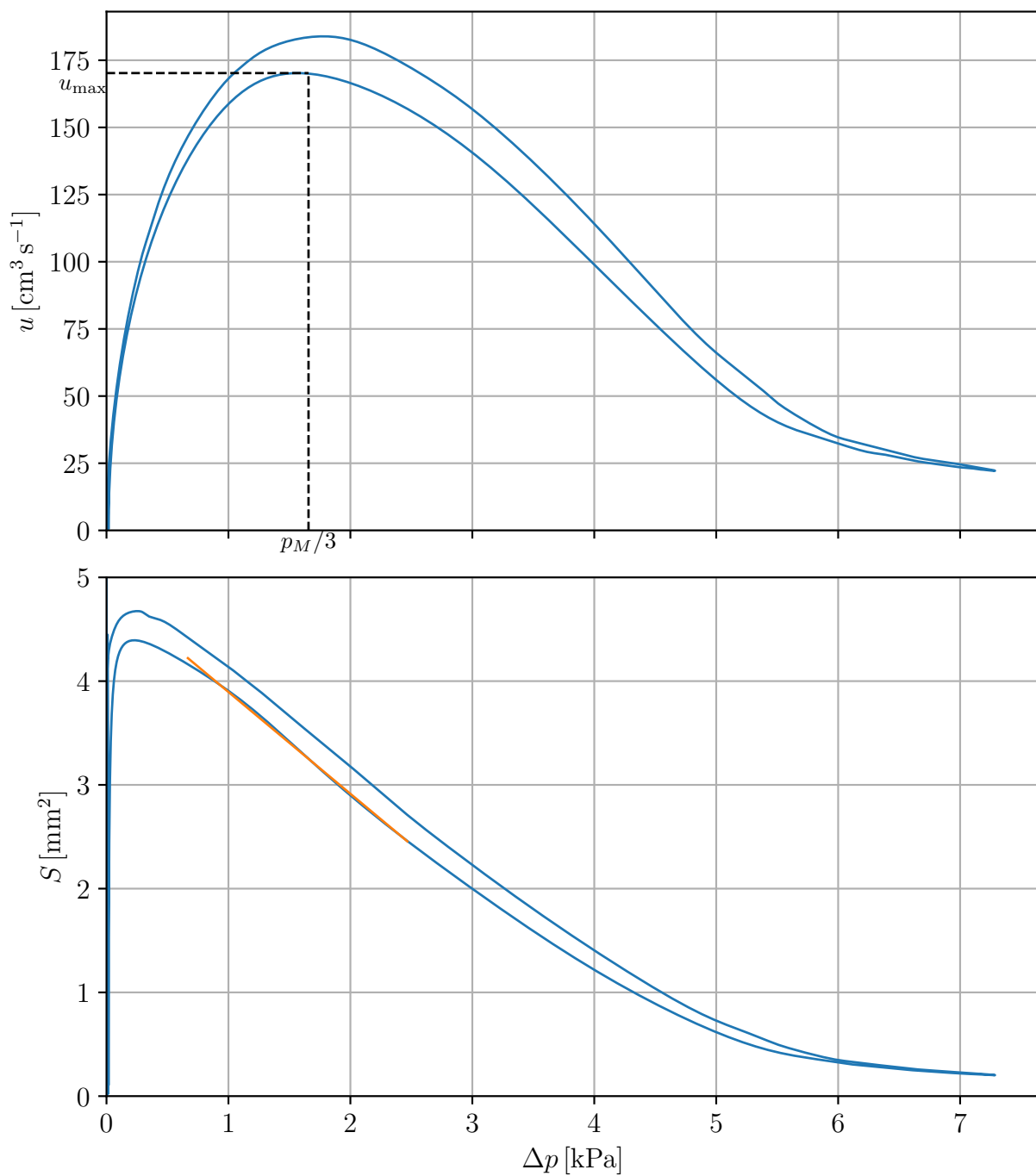
Les paramètres d'embouchure  $S_0$  et  $p_M$  étant connus, il est dès lors possible de les rentrer dans le modèle physique afin de pouvoir confronter des résultats numériques et expérimentaux, ce qui est réalisé dans la section 4.1.4.

### 4.1.3 Obtention des diagrammes expérimentaux

Le saxophone étant cette fois-ci connecté au bec, l'instrument peut émettre un son. En modifiant la pression dans la bouche artificielle, il est alors possible de décrire un diagramme de bifurcation (régimes stables uniquement). Le processus décrit ci-après est représenté de manière schématique sur la figure 4.9. Partant de  $p_b = 0$  et en l'augmentant graduellement (*crescendo*), le saxophone se met à « chanter » à partir d'une certaine valeur de  $p_b$ , correspondant au seuil montant d'oscillation. Puis, à partir d'une autre valeur de  $p_b$  correspondant au seuil montant d'extinction, l'anche se plaque et l'instrument s'arrête de « chanter ». Dès lors, on diminue  $p_b$  (*decrescendo*) toujours par paliers et l'instrument « chante » à nouveau à partir d'une certaine valeur de  $p_b$  (seuil descendant d'oscillation), et se tait pour une nouvelle valeur de  $p_b$  (seuil descendant d'extinction) pour laquelle cette dernière n'est plus suffisante pour maintenir l'oscillation de l'anche. Cette pression est notée « pression de seuil inverse » dans ce qui suit, et caractérise la facilité d'émission de la note. La figure 4.9 représente l'exemple de bifurcations de Hopf inverses pour le seuil d'oscillation comme pour le seuil d'extinction, mais certaines configurations du résonateur peuvent donner lieu à des bifurcations de Hopf directes (les natures des bifurcations de Hopf aux seuils d'oscillation et d'extinction ne sont pas liées). Dans le cas où il existe une bifurcation de Hopf directe au seuil d'oscillation, le seuil montant d'oscillation et le seuil descendant d'extinction sont théoriquement confondus.

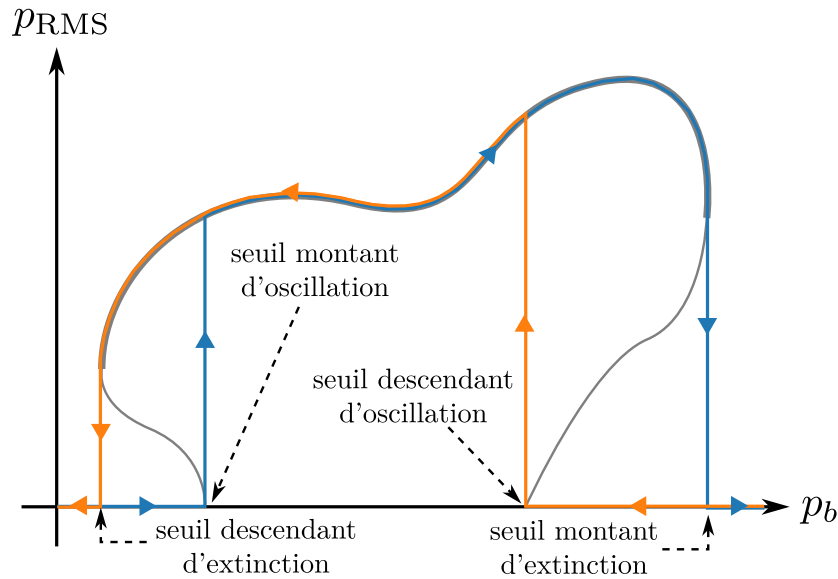
Chaque palier correspond à un régime permanent et donc à un point sur le diagramme de bifurcation de la figure 4.9, à condition d'écarter les régimes transitoires entre chaque palier lors du traitement des données. Afin de s'assurer que le régime établi est effectivement atteint pour chaque point du diagramme, chaque palier de  $p_b$  dure environ cinq secondes, à l'exception des points proches des seuils d'extinction ou d'oscillation, où les régimes transitoires peuvent durer plus longtemps. Dans ce dernier cas, on effectue





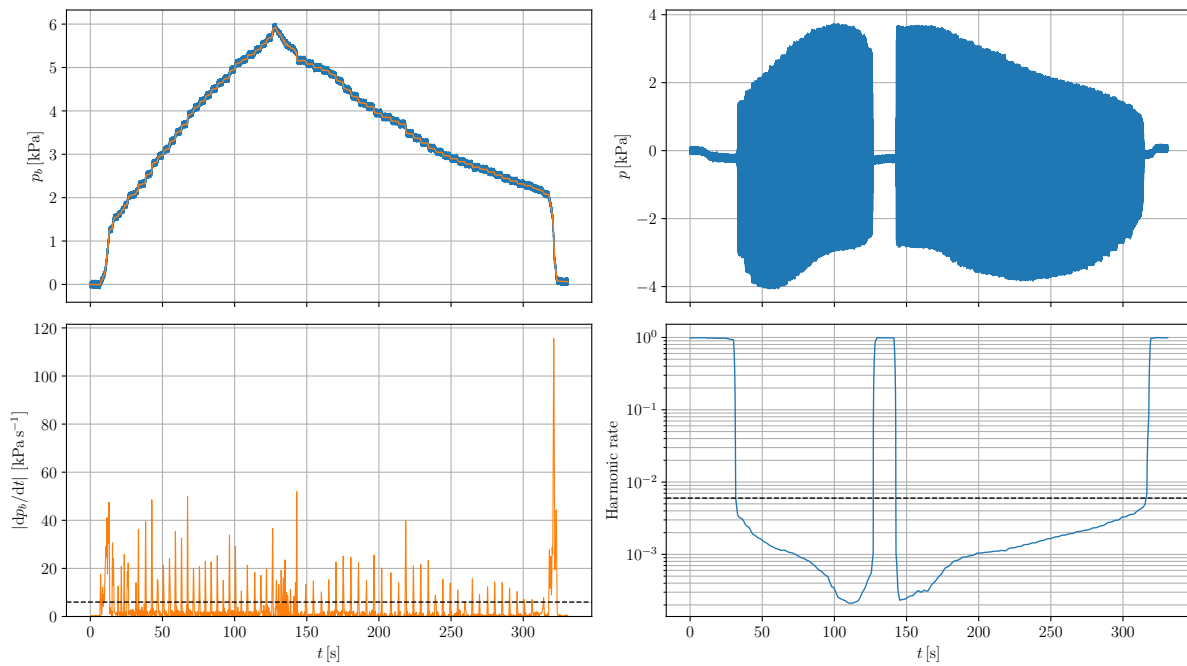
**Figure 4.8** – Résultats de mesure de la caractéristique non linéaire de l'anche. Haut : tracé du débit d'air  $u$  s'écoulant du bec vers l'extérieur en fonction de  $\Delta p$ . Bas : tracé de la section d'entrée  $S$  en fonction de  $\Delta p$ . Sur chaque graphe, la portion de courbe supérieure correspond à la montée en pression, tandis que la portion inférieure correspond à la descente en pression.

des paliers durant jusqu'à quinze secondes. Par ailleurs, il est important de faire jouer l'instrument au préalable afin de faire travailler l'anche, ainsi la fatigue de cette dernière se fera moins ressentir entre les phases de *crescendo* et de *decrescendo*. Le cheminement décrit dans ce paragraphe est représenté sur les figures supérieures de la figure 4.10, dans le cas d'un saxophone avec un doigté de do et sans tube supplémentaire ajouté entre le bocal et le bec.



**Figure 4.9** – Schématisation du processus expérimental de tracé de diagramme de bifurcation. Les bifurcations au seuil d'oscillation (gauche de la courbe) et au seuil d'extinction (droite de la courbe) représentées ici sont deux bifurcations de Hopf inverses, mais il existe des configurations du résonateur donnant lieu à des bifurcations de Hopf directe pour le seuil d'oscillation et d'extinction indépendamment.

Afin de pouvoir tracer automatiquement le diagramme de bifurcation, une première étape a été de détecter et séparer les paliers de pression dans la bouche numériquement. Premièrement, le signal de pression dans la bouche  $p_b(t)$  (graphe supérieur gauche de la figure 4.10) est filtré au moyen d'un filtre passe-bas numérique d'ordre 4 de type Butterworth (Bildstein 1980) afin d'en retirer le bruit dû au souffle de la bouche. Le signal ainsi filtré est dérivé en fonction du temps afin de pouvoir repérer plus facilement la frontière entre chaque palier, correspondant aux pics visibles sur le graphe inférieur gauche. Comme le saxophone n'émet pas de son durant chaque palier de pression dans la bouche (en particulier en dehors des plages de jeu) et que l'on peut avoir affaire à des régimes amortis lorsque la pression dans la bouche est proche d'un seuil d'oscillation, l'algorithme



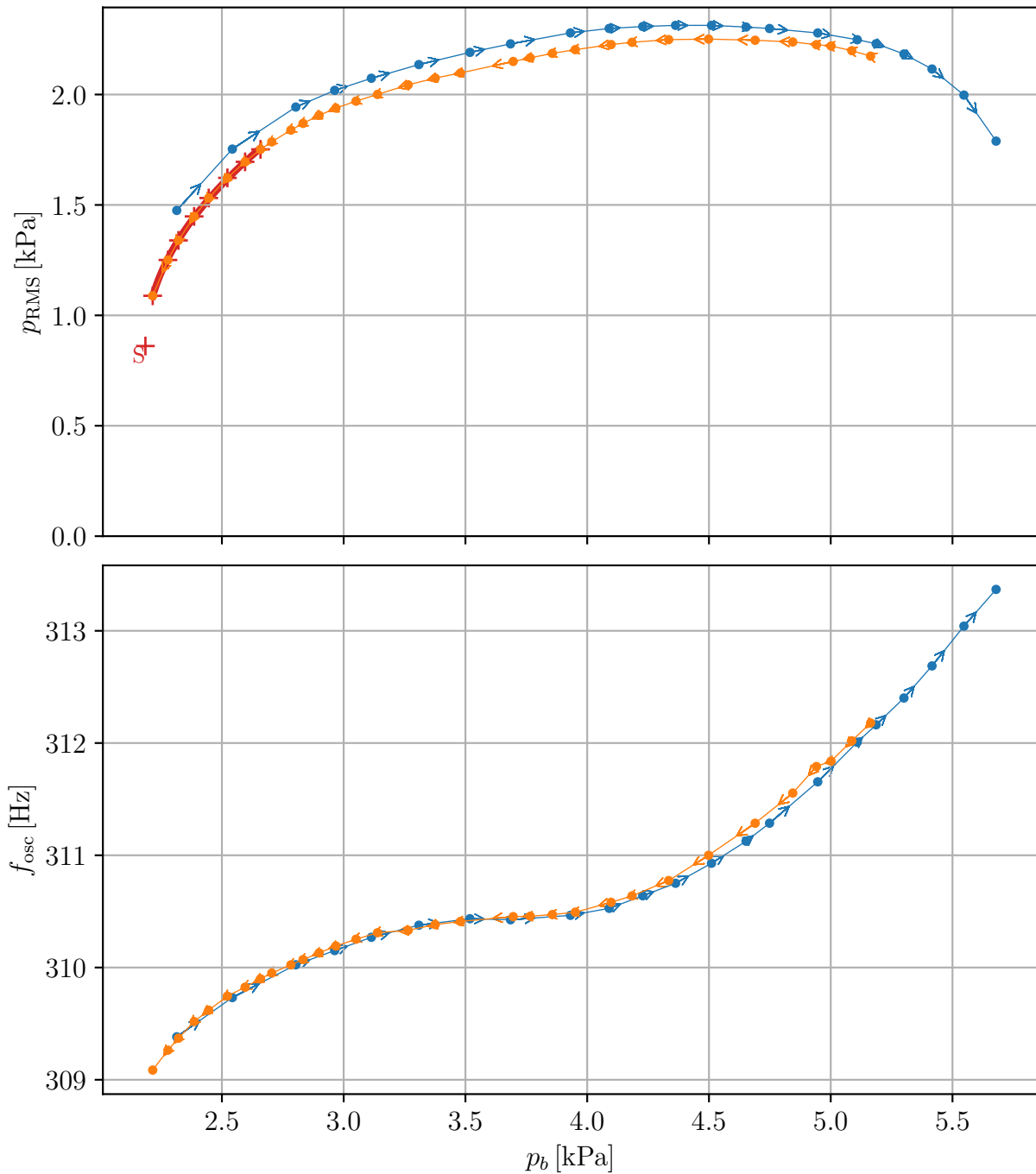
**Figure 4.10** – Allure des signaux de pression relevés sur un saxophone alto pour un doigté de do medium, sans tube supplémentaire ajouté entre le bocal et le bec. Haut : signaux de pression mesurés dans la bouche (gauche) et dans le bec (droite) en fonction du temps durant le parcours du diagramme de bifurcation. Bas : tracé en fonction du temps du module de la dérivée temporelle de  $p_b$  (gauche) et de l'« harmonic rate » du signal de pression acoustique dans le bec (droite), estimé par le logiciel Yin (de Cheveigné et Kawahara 2002). Bleu : signaux bruts ; orange : signaux filtrés. Lignes horizontales pointillées : critère retenu pour la détection des paliers.

YIN (de Cheveigné et Kawahara 2002) a été utilisé. Plus précisément, ce logiciel permet de calculer une grandeur appelée « harmonic rate » (graphe inférieur droit) permettant d'estimer la périodicité du signal étudié : plus cette grandeur est petite, plus le signal est proche d'un régime périodique. On définit alors d'une part un critère sur  $|dp_b/dt|$  déterminant la hauteur minimale des pics de la courbe  $|dp_b/dt|$  à considérer afin d'être certain d'avoir affaire à un changement de palier (ligne pointillée sur le graphe inférieur gauche de la figure 4.10). D'autre part, on définit un critère déterminant la valeur maximale de l'harmonic rate afin d'écarter les plages de silence et les éventuels régimes amortis (ligne pointillée sur le graphe inférieur droit de la figure 4.10). Ainsi, il est possible de séparer chaque régime permanent dans une expérience, chacun correspondant à un point dans un diagramme de bifurcation. Pour un palier donné, il est possible de calculer la valeur efficace de la pression acoustique dans le bec  $p_{\text{RMS}}$ , la pression dans la bouche  $p_b$  (valeur moyenne de  $p_b(t)$  le long du palier), ainsi que la fréquence d'oscillation du signal  $f_{\text{osc}}$  à l'aide de YIN (valeur moyenne de la fréquence instantanée le long du palier). On choisit de représenter d'une part  $p_{\text{RMS}}$  en fonction de  $p_b$ , et d'autre part  $f_{\text{osc}}$  en fonction de  $p_b$ . Les diagrammes de bifurcation correspondant au cas de la figure 4.10 sont représentés sur la figure 4.11. Cette procédure d'automatisation de tracé des diagrammes de bifurcation est un travail original et a été réalisée en `python`, à partir des signaux bruts de pression obtenus au moyen d'un logiciel d'acquisition développé par le LAUM.

Malgré un rodage préalable de l'anche (faire jouer le saxophone), on constate une hystérèse sur le diagramme en pression efficace : lors du parcours du diagramme dans le sens inverse, la fatigue de l'anche empêche d'obtenir une pression efficace aussi élevée qu'à l'aller. Ce diagramme de bifurcation semble correspondre à une bifurcation de Hopf inverse, puisque dans la phase de diminution de pression dans la bouche,  $p_{\text{RMS}}$  passe brusquement de 1,1 kPa à zéro<sup>1</sup>. De ce fait, il existe un point de bifurcation nœud-col situé à gauche du dernier point expérimental de la phase de diminution de pression (point le plus à gauche de la courbe orange sur le graphe supérieur de la figure 4.11). Ce point de bifurcation permettrait alors – au même titre que pour les cuivres – d'estimer la pression de seuil inverse, et ainsi de caractériser la facilité d'émission d'une note donnée, selon la définition de la facilité d'émission que l'on s'est donnée dans cette thèse. Cependant, il n'est possible d'obtenir expérimentalement qu'une valeur approchée par valeur supérieure de la pression de seuil inverse, les régimes transitoires ayant une durée de vie d'autant plus

---

1. Dans le cas d'une bifurcation de Hopf directe, il aurait été possible de faire tendre  $p_{\text{RMS}}$  vers une valeur nulle continûment en diminuant  $p_b$ .



**Figure 4.11** – Diagrammes de bifurcation expérimentaux d'un saxophone alto pour un doigté de do medium, sans tube supplémentaire ajouté entre le bocal et le bec. Haut : tracé de la valeur efficace de la pression acoustique dans le bec  $p_{RMS}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Bas : tracé de la fréquence d'oscillation  $f_{osc}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Les flèches indiquent le sens de parcours du diagramme. Bleu : parcours du diagramme lors du *crescendo* ( $p_b \nearrow$ ), du seuil d'oscillation au seuil d'extinction. Orange : parcours du diagramme lors du *decrescendo* ( $p_b \searrow$ ). Rouge : courbe de régression en racine carrée sur les huit derniers points de la courbe, du type  $p_b \mapsto a\sqrt{p_b - b} + c$ . Le point nommé « S » correspond à la position du point de bifurcation nœud-col extrapolée au moyen de cette régression.

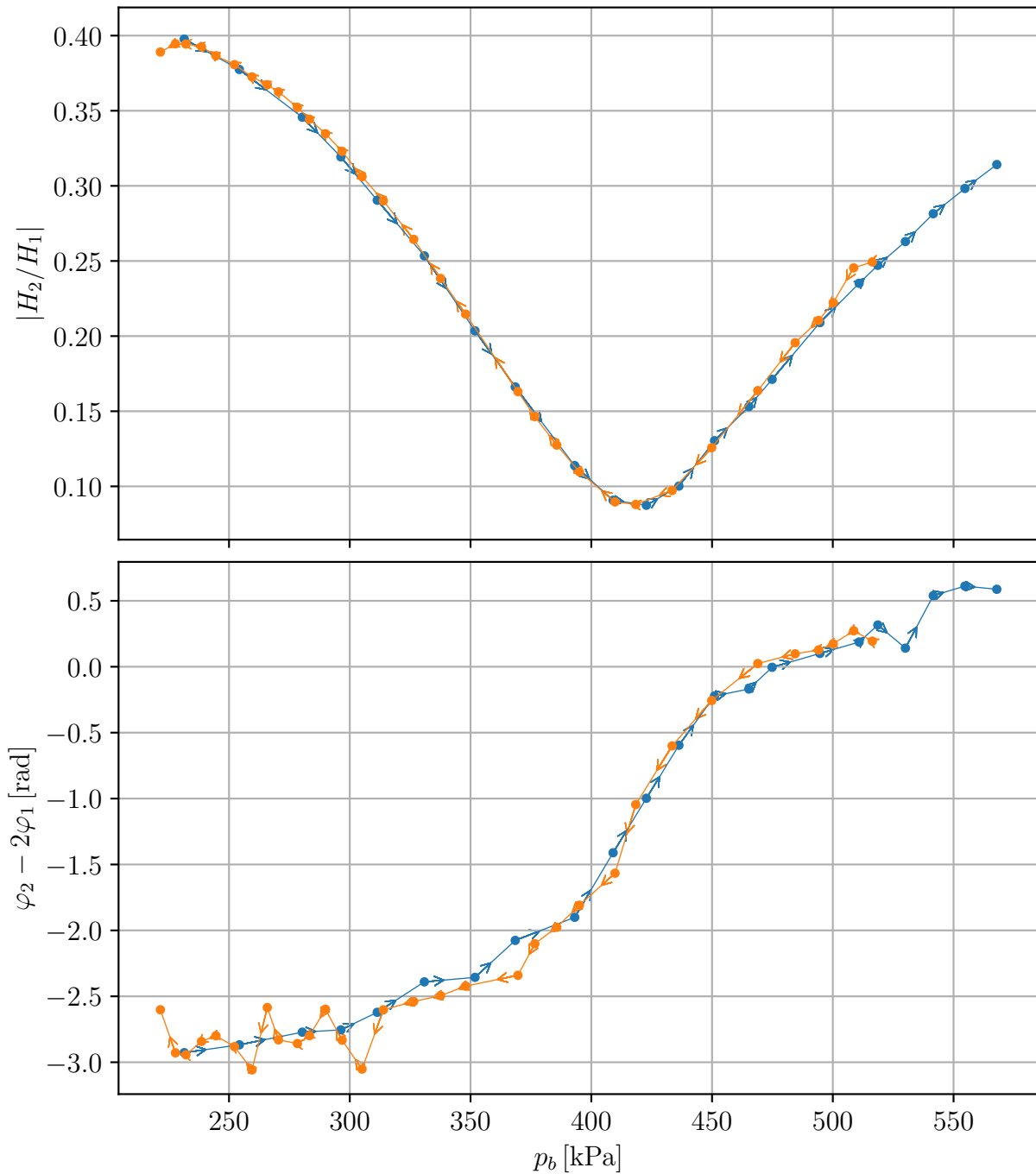
grande que l'on se trouve proche du point de bifurcation nœud-col. Au voisinage d'une telle bifurcation, on sait néanmoins que  $p_{\text{RMS}}$  évolue en racine carrée du paramètre de contrôle  $p_b$  (Seydel 2010). Il est alors possible d'effectuer une régression du type  $p_b \mapsto a\sqrt{p_b - b} + c$  au voisinage du dernier point mesuré avant extinction, afin d'estimer où se situe le point de bifurcation nœud-col par extrapolation (noté S sur la figure 4.11). Dans le cas présenté sur la figure 4.11, on a choisi de prendre les huit derniers points de la courbe pour effectuer la régression, avec pour critère de minimiser l'erreur type sur les paramètres de régression  $a$ ,  $b$  et  $c$ . Ces derniers valent dans ce cas  $a = 1,3 \text{ kPa}^{1/2}$ ,  $b = 2,2 \text{ kPa}$ , et  $c = 8,6 \times 10^{-1} \text{ kPa}$ . Ainsi, il est possible d'obtenir une estimation de la pression de seuil inverse en relevant l'abscisse du point S, qui vaut  $b$ .

Une analyse des deux premiers coefficients de Fourier  $H_1$  et  $H_2$  permet de détecter un changement de nature de la forme d'onde suivant le point du diagramme. On trace en particulier le rapport  $|H_2/H_1|$  ainsi le déphasage  $\varphi_2 - 2\varphi_1$  entre  $H_2$  et  $H_1$  en fonction de  $p_b$  sur la figure 4.12. Le facteur 2 dans le déphasage est dû au fait que  $H_2$  oscille au double de la fréquence de  $H_1$ .

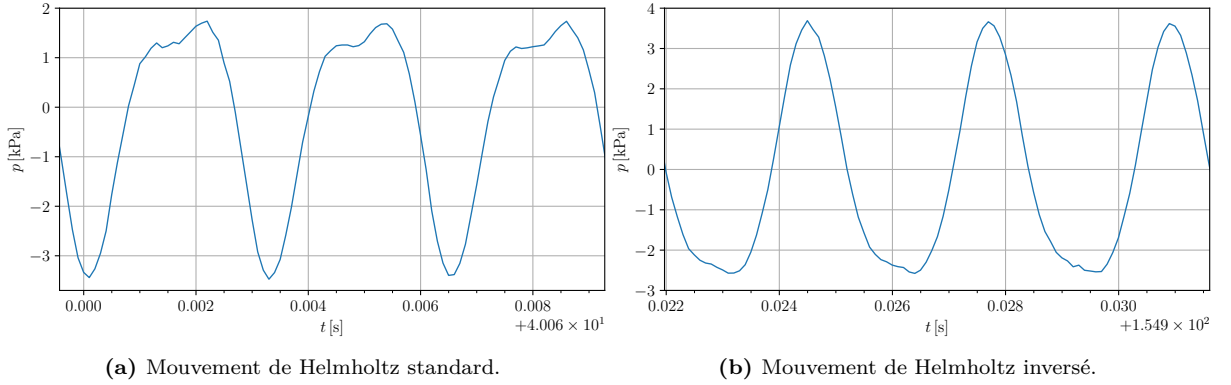
On constate alors que lors du parcours du diagramme, le rapport  $|H_2/H_1|$  varie : l'influence de l'harmonique 1 devient maximale autour de  $p_b = 420 \text{ kPa}$ , et le déphasage change de signe au même endroit. Sur la figure 4.13 sont tracées trois périodes du signal de pression acoustique dans le bec sont tracées à l'endroit où le déphasage de  $H_2$  par rapport à  $H_1$  est négatif, ainsi que trois autres périodes de ce même signal à l'endroit où ce déphasage est positif. Dans le cas de la figure 4.13a, on a affaire à un mouvement de Helmholtz standard, c'est-à-dire que la partie positive d'une période du signal dure plus longtemps que la partie négative (Dalmont et al. 2000). Dans le cas de la figure 4.13b, c'est l'inverse qui se produit et on parle alors de mouvement de Helmholtz inversé. Le mouvement de Helmholtz standard a été initialement observé par Helmholtz dans le cas d'instruments à cordes frottées (Helmholtz et Margenau 1954 ; Raman 1918). La transition du mouvement standard au mouvement inversé, obtenue en augmentant la pression dans la bouche, s'accompagne parfois d'un changement de timbre du son émis par l'instrument.

#### 4.1.4 Confrontation au modèle physique

Comme on l'a vu dans le cas des cuivres aux chapitres 2 et 3, la continuation numérique donne rapidement accès aux points particuliers d'un diagramme de bifurcation, en particulier les points de bifurcation nœud-col caractérisant la pression de seuil. Le modèle



**Figure 4.12** – Tracé des harmoniques de Fourier de la pression acoustique dans le bec d'un saxophone alto pour un doigté de do medium, sans tube supplémentaire ajouté entre le bocal et le bec. Haut : tracé du rapport des deux premiers coefficients de Fourier du signal  $|H_2/H_1|$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Bas : tracé du déphasage entre les deux premiers coefficients de Fourier du signal  $\varphi_2 - 2\varphi_1$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Les flèches indiquent le sens de parcours du diagramme. Bleu : parcours du diagramme lors du *crescendo* ( $p_b \nearrow$ ), du seuil d'oscillation au seuil d'extinction. Orange : parcours du diagramme lors du *decrescendo* ( $p_b \searrow$ ).



**Figure 4.13** – Tracés à deux instants différents du signal de pression acoustique dans le bec en fonction du temps dans le cas du saxophone alto pour un doigté de do medium (zooms sur deux laps de temps extraits du signal visible dans le graphe supérieur droit de la figure 4.10).

d’instrument à anche présenté au chapitre 1 appliqué au saxophone alto est alors apparu comme pertinent afin d’estimer plus précisément les pressions de seuil inverse. Dans le cas des instruments à anche, il est possible de simplifier l’équation 1.1a décrivant la dynamique de l’anche, en supposant que la fréquence de résonance de l’anche est grande étant donné les échelles de temps acoustiques. Cela revient à faire tendre  $\omega_r$  vers  $+\infty$  dans l’équation (1.1a), cette dernière devenant alors simplement :

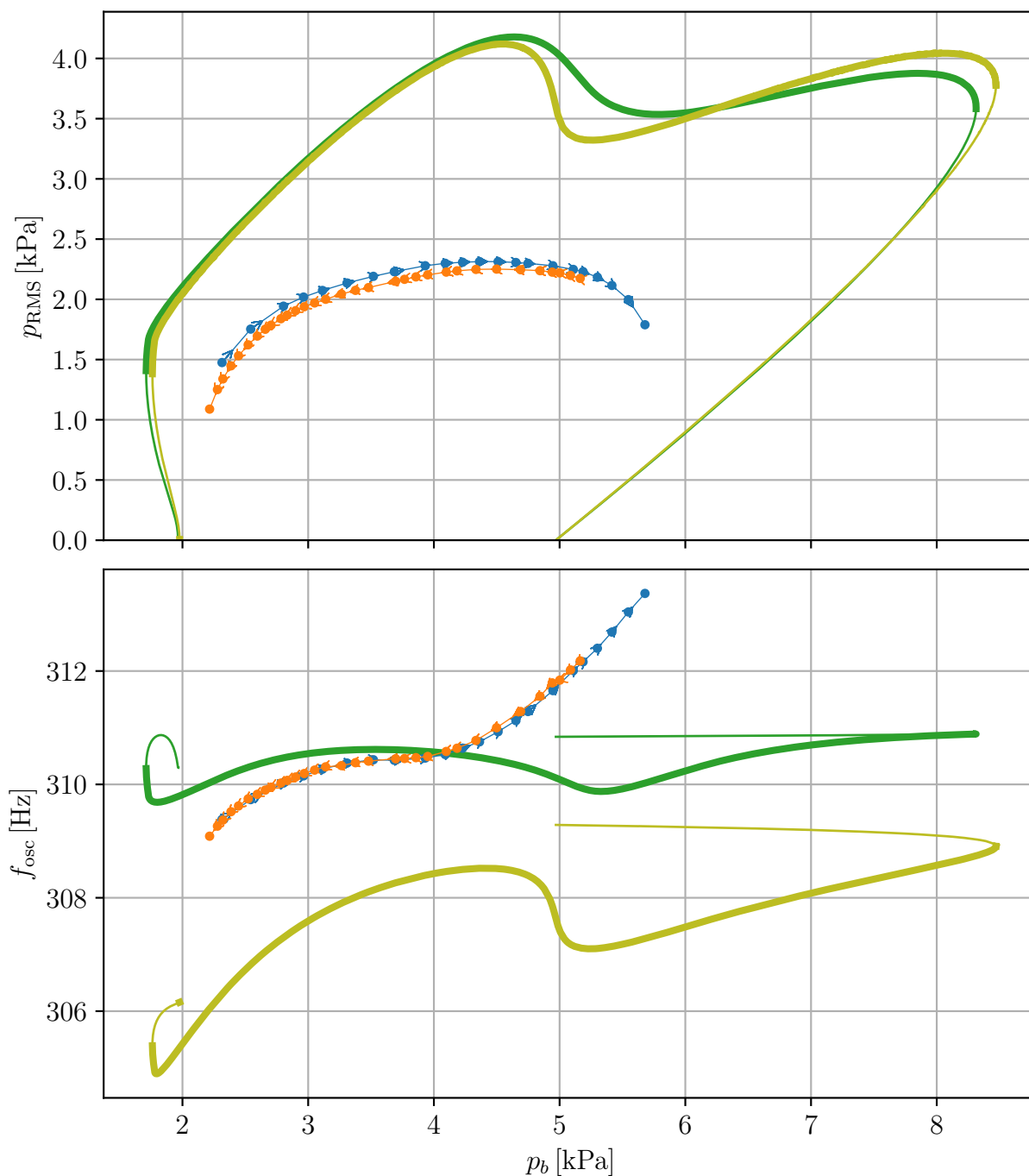
$$h(t) = H + \frac{p - p_b}{K_r}, \quad (4.6)$$

l’anche n’étant plus caractérisée que par sa raideur  $K_r$ .

On travaille dans cette section sur un saxophone alto Selmer dans les mêmes conditions qu’à la sous-section 4.1.3, c’est-à-dire pour un doigté de do medium (impédance d’entrée reconstruite tracée sur la figure 4.2a) et sans tube supplémentaire ajouté entre le bec et le bocal. Les paramètres d’embouchure, tels que la section d’ouverture du bec au repos  $S_0 = wH = 4,9 \text{ mm}^2$  et la pression de placage  $p_M = K_r H = 5,0 \text{ kPa}$ , sont déduits de la mesure de la caractéristique non linéaire de l’anche présentée en sous-section 4.1.2.2. On présente sur la figure 4.14 deux diagrammes de bifurcation numériques, sans (courbe vert foncé) et avec (courbe vert clair) dynamique d’anche. Dans le cas où la dynamique de l’anche est prise en compte, on prendra  $f_r = 2 \text{ kHz}$  ainsi que  $Q_r = 1,0$  pour une anche bien amortie (Karkar 2012).

Sur la partie supérieure de la figure 4.14, on constate que le modèle physique d’instru-





**Figure 4.14** – Diagrammes de bifurcation expérimental (courbes bleue et orange) et numérique (courbes vert foncé et vert clair) d'un saxophone alto pour un doigté de do medium, sans tube supplémentaire ajouté entre le bocal et le bec. Haut : tracé de la valeur efficace de la pression acoustique dans le bec  $p_{RMS}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Bas : tracé de la fréquence d'oscillation  $f_{osc}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Les flèches indiquent le sens de parcours du diagramme. Bleu : parcours du diagramme lors du *crescendo* ( $p_b \nearrow$ ), du seuil d'oscillation au seuil d'extinction; orange : parcours du diagramme lors du *decrescendo* ( $p_b \searrow$ ). Vert foncé : modèle physique sans dynamique d'anche; vert clair : modèle physique avec dynamique d'anche.

ment à anche surestime les valeurs de pressions d'environ 170 %. Nous faisons l'hypothèse que ce phénomène est dû aux pertes non linéaires dues aux trous latéraux du saxophone, non prises en compte dans le modèle actuel d'impédance reconstruite. Ces pertes ont une influence sur les valeurs maximale de  $p_{\text{RMS}}$  en particulier, comme cela est montré dans le cadre du modèle de Raman pour une clarinette (Dalmont et Frappé 2007). Il est possible de modifier manuellement les valeurs de  $S_0$  et de  $p_M$  afin de faire coïncider les diagrammes expérimental et théorique de manière plus satisfaisante, mais la valeur numérique de la pression de seuil inverse obtenue dans ce cas n'aurait plus de pertinence. La prise en compte de la dynamique d'anche n'a pas une influence significative sur l'allure du diagramme de bifurcation en  $p_{\text{RMS}}$ , mais modifie en revanche l'allure du diagramme de bifurcation en fréquence d'oscillation (partie inférieure de la figure 4.14), qui se rapproche alors qualitativement de l'évolution globale de la fréquence d'oscillation expérimentale. Lors de son oscillation, l'anche occasionne un débit supplémentaire (oscillant) de la bouche du musicien dans l'instrument, appelé débit d'anche (Dalmont et al. 2012). On sait que ce débit dans un modèle physique de clarinette a une forte influence sur l'intonation. Il est donc naturel de supposer qu'il en est de même pour le saxophone. Afin d'améliorer l'adéquation entre le modèle physique et l'expérience du point de vue de la fréquence d'oscillation, il serait nécessaire d'intégrer les variations du débit d'anche dans le modèle. Cependant, ceci n'a pas été fait ici car on ne s'intéresse pas à la fréquence de jeu.

Finalement, on effectuera dans la section suivante uniquement des analyses de diagrammes de bifurcation expérimentaux, en l'absence d'informations pertinentes sur les pressions de seuil fournies par le modèle physique d'instrument à anche en l'état.

## 4.2 Analyse de bifurcation expérimentale

Le but de cette section est de quantifier expérimentalement la prescription de Bouasse-Benade (Gilbert et al. 2019), en analysant l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des pics de résonance sur la valeur de la pression de seuil inverse. On présente ici plusieurs diagrammes de bifurcation expérimentaux réalisés sur le saxophone alto dans différentes configurations du résonateur, afin de modifier ces deux paramètres. À cet effet, on peut modifier le doigté, ou ajouter des portions de tubes entre le bocal et le bec de l'instrument, comme détaillé en sous-section 4.1.1. Le but étant d'évaluer la facilité d'émission des notes jouées, on cherche à mesurer la pression de seuil (inverse lorsqu'elle

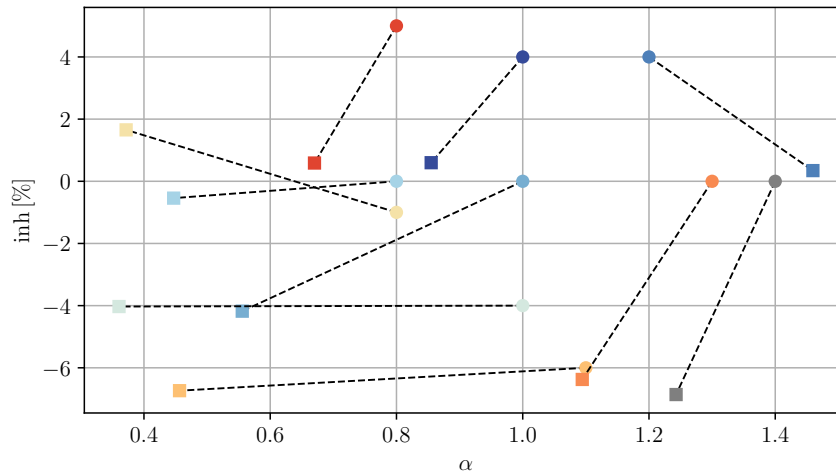
existe, directe sinon) pour une configuration du résonateur donnée. À cet effet, le modèle physique en l'état n'étant pas cohérent avec l'expérience, on se base uniquement sur l'extrapolation du point de bifurcation nœud-col obtenue par régression en racine carrée de la courbe de bifurcation au voisinage du seuil d'extinction inverse.

### 4.2.1 Choix des configurations du résonateur

Une première étape de l'étude consiste à déterminer quelles plages des paramètres  $\text{Inh}$  et  $\alpha$  il serait possible et pertinent de balayer pour le tracé des diagrammes de bifurcation expérimentaux. À cet effet, on se base sur les résultats d'un stage de M2 effectué par Léo Côté dans le cadre de cette thèse, portant sur le même sujet que le présent chapitre. Dans cette étude, il avait entre autres été déterminé théoriquement (à l'aide de la formule de l'impédance ramenée en ce qui concerne les ajouts de tubes) une série de configurations doigté/tubes ajoutés correspondant à un maillage le plus régulier possible du plan  $(\alpha, \text{Inh})$ . Ce maillage comprend des valeurs de  $\alpha$  supérieures et inférieures à 1, et des valeurs d'inharmonicité positives et négatives. Les longueurs de tube et le doigté correspondant à chaque point du maillage sont données dans le tableau 4.1, et ce maillage est représenté par des marqueurs ronds sur la figure 4.15. On s'est alors placé dans les configurations données par le tableau 4.1 pour le choix des points de mesures de diagrammes de bifurcation. Les valeurs des rapports d'amplitude et d'inharmonicité correspondant, calculées *a posteriori* à partir des impédances d'entrée mesurées, sont représentées par des marqueurs carrés sur la figure 4.15, et ce sont révélées différentes de celles obtenues par calcul par Léo Côté. Néanmoins, faute de temps, les diagrammes de bifurcations expérimentaux présentés dans ce qui suit se basent sur ce maillage. En particulier, il existe une plus forte proportion de configurations présentant une inharmonicité négative. Cette proportion n'est pas nécessairement un problème car on sait qu'il existe d'après (Gilbert et al. 2020) une similitude entre les résultats à inharmonicité négative et positive du point de vue de la pression de seuil. La configuration  $(\alpha, \text{Inh}) = (1, 4, 0)$  (point en gris sur la figure 4.15) n'ayant pas permis d'obtenir un diagramme de bifurcation exploitable, elle n'est pas représentée sur la figure 4.16.

Doigté	Longueur ajoutée [m]	$\alpha$	Inh [%]
do medium	0	0,8	5
do medium	50	0,8	0
do medium	85	0,8	-1
sib medium	0	1	4
sib medium	35	1	0
sib medium	85	1	-4
la medium	85	1,1	-6
sol $\sharp$ grave	35	1,3	0
sol grave	0	1,2	4
sol grave	35	1,4	0

**Tableau 4.1** – Calcul du rapport des modules des deux premiers pics de l’impédance d’entrée  $\alpha$  et de leur inharmonicité Inh en fonction des doigtés et longueurs de tube ajoutées entre le bocal et le bec du saxophone alto. Ces données sont issues du rapport de stage de Léo Côté.



**Figure 4.15** – Maillage des points de mesure dans le plan  $(\alpha, \text{Inh})$ . Ronds : données calculées correspondant au tableau 4.1, issues du rapport de stage de Léo Côté. Carrés : données mesurées sur les impédances d’entrée du saxophone alto, dans les configurations (doigté, longueur de tube ajouté) listées dans le tableau 4.1. Le point en gris  $(\alpha, \text{Inh}) = (1,4, 0)$  n’a pas permis d’obtenir un diagramme de bifurcation expérimental exploitable, et n’apparaît pas sur la figure 4.16.

### 4.2.2 Influence de la configuration du résonateur sur les diagrammes de bifurcation

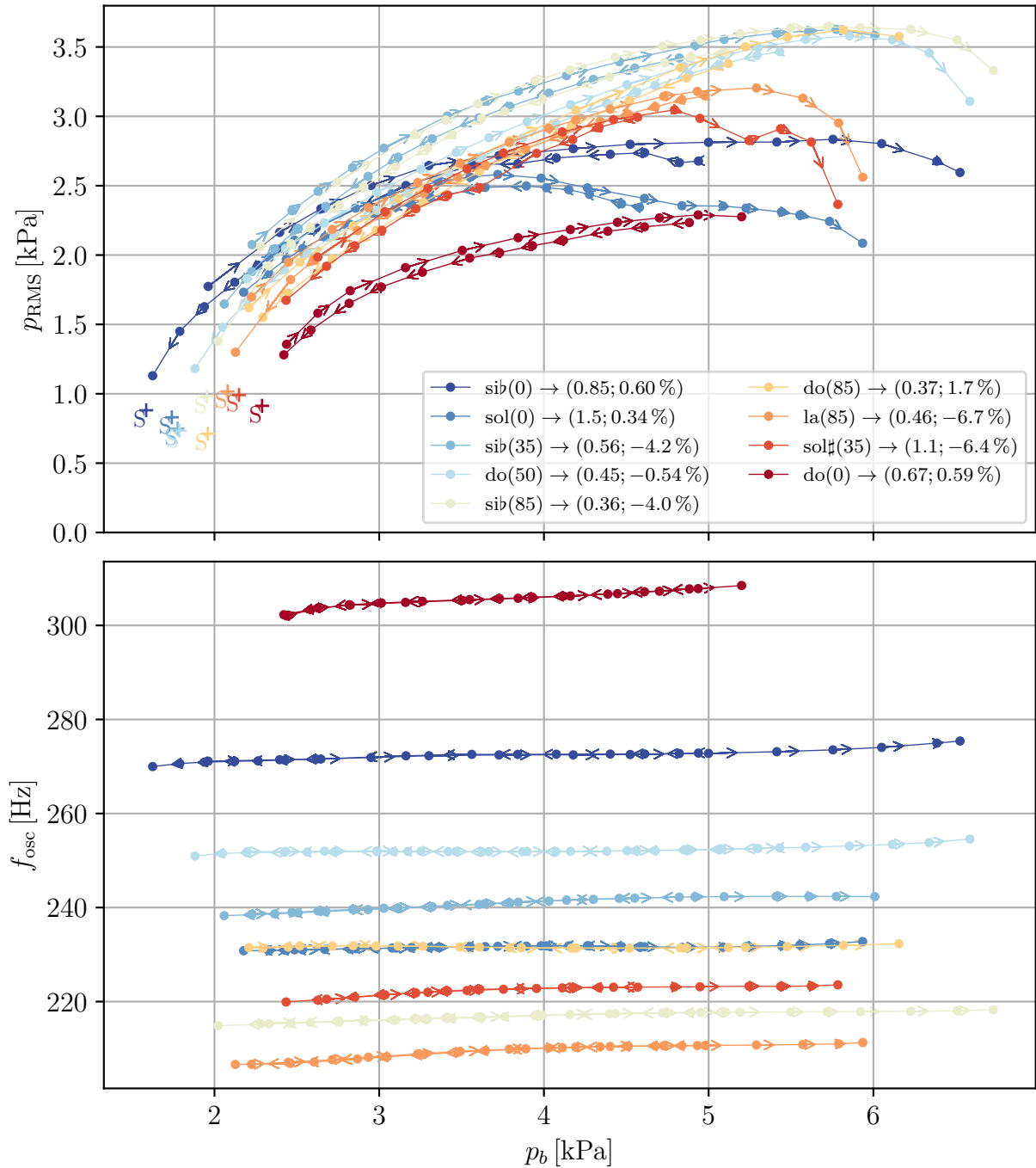
Les neuf diagrammes de bifurcation correspondant aux marqueurs carrés de la figure 4.15 (sans compter la configuration  $(\alpha, \text{Inh}) = (1,4, 0)$ ) sont superposés sur la figure 4.16, tous obtenus pour un réglage de la bouche (force d'appui et position de la lèvre sur l'anche) identique. Par ailleurs, les neuf mesures ont été effectuées de manière consécutive, afin de s'assurer des conditions expérimentales (humidité et température) relativement constantes. Sur chaque diagramme, la position du point de bifurcation nœud-col S est estimée par une extrapolation en racine carrée (voir sous-section 4.1.3) à partir des quatre derniers points de chaque courbe, afin de situer approximativement la pression de seuil inverse de chaque courbe par rapport à ses voisines. La configuration possédant la pression de seuil inverse la plus basse (1,6 kPa) est celle du doigté de sib sans tube ajouté, correspondant à  $\text{Inh} = 0,60\%$  et  $\alpha = 0,85$ . La configuration possédant la pression de seuil inverse la plus haute (2,3 kPa) est celle du doigté de do medium sans tube ajouté, correspondant à  $\text{Inh} = 0,59\%$  et  $\alpha = 0,67$ . Dans le dernier cas, cette valeur maximale de pression de seuil s'explique par le fait que le do correspond à un doigté de fourche<sup>2</sup>, qui occasionne des pertes non linéaires plus importantes que pour les doigtés classiques (Dalmont et Frappé 2007). Il en résulte alors une note plus difficile d'émission que pour un doigté classique. Les configurations du résonateur favorisant une pression de seuil inverse minimale et maximale étant très proches en terme d'inharmonicité et de rapport d'amplitude des pics de résonance, il apparaît donc que les pertes non linéaires ont, dans le cas du saxophone, une plus grande influence sur la pression de seuil que le rapport d'amplitude et l'inharmonicité. Par ailleurs, il semble difficile de déduire une tendance générale de l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des pics de résonance sur la facilité d'émission.

## 4.3 Conclusion

Ce chapitre focalisé sur la caractérisation expérimentale de la facilité d'émission d'un instrument à anche en particulier a permis de mettre en évidence une des limites du modèle physique associé. En effet, si ce modèle est capable de fournir des résultats cohérents avec des enregistrements dans le cas des cuivres en ce qui concerne l'intonation

---

2. Un doigté de fourche est un doigté pour lequel il existe un trou fermé en aval du premier trou ouvert.



**Figure 4.16** – Haut : tracé de la valeur efficace de la pression acoustique dans le bec  $p_{RMS}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Bas : tracé de la fréquence d'oscillation  $f_{osc}$  en fonction de la pression dans la bouche  $p_b$ . Les flèches indiquent le sens de parcours du diagramme. Chaque courbe correspond à une configuration donnée par les marqueurs carrés de la figure 4.15, détaillée dans le cartouche du graphe supérieur et codifiée comme suit : [doigté]([longueur de tube ajouté en mm]) → ( $\alpha$ , Inh). Les points S sont les points de bifurcation nœud-col obtenus par extrapolation en racine carrée décrite dans la sous-section 4.1.3, à partir des 4 derniers points de la partie « retour » de chaque courbe. Les courbes sont classées de la pression de seuil la plus basse (bleu) à la pression de seuil la plus haute (rouge). Les points expérimentaux correspondant au doigté de sol grave avec 35 mm de tube ajouté (en gris) n'ont pas permis d'obtenir une régression en racine carrée exploitable au voisinage du seuil inverse, et donc d'estimation du point de bifurcation nœud-col. Ce code couleur correspond à celui utilisé dans la figure 4.15.

(fréquence d'oscillation), son utilisation ne semble pas pertinente pour estimer les valeurs de pression de seuil inverse en l'état. À notre connaissance, c'est la première fois que la dynamique globale du saxophone mesurée avec une bouche artificielle est comparée à la dynamique du modèle physique classiquement utilisé en acoustique musicale. L'incapacité du modèle à reproduire quantitativement les mesures est donc un résultat intéressant en soi, qui suggère par ailleurs des pistes d'amélioration du modèle. En particulier, les valeurs de pression acoustique efficace dans le bec sont systématiquement surévaluées par rapport aux valeurs expérimentales, probablement dû au fait que le modèle n'inclut pas les pertes non linéaires dues aux trous latéraux de l'instrument. Une prise en compte de ces pertes permettrait d'introduire un nouveau processus de dissipation, et ainsi de fournir des valeurs de pression acoustique efficace dans le bec plus cohérentes avec les valeurs expérimentales. Ceci supposerait une reformulation des équations du modèle, l'impédance d'entrée étant linéaire par définition. Alternativement, travailler avec un résonateur plus simple de section plus faible et sans trous latéraux permettrait de diminuer les pertes non linéaires dues aux trous latéraux, au point de les rendre négligeables et ainsi conserver le modèle physique en l'état. Pour construire un résonateur possédant un nombre limité de fréquences de résonance (comme le saxophone alto utilisé dans ce chapitre), il serait par exemple possible de considérer deux résonateurs de Helmholtz connectés, pour obtenir une impédance d'entrée à deux résonances (Dalmont et Le Vey 2017).

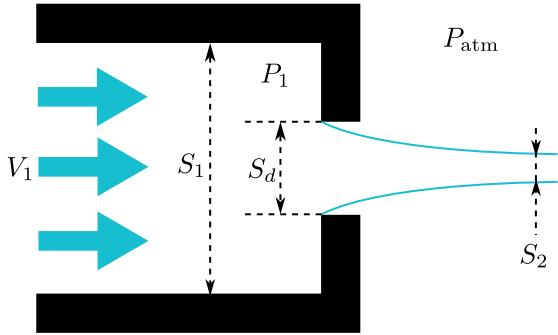
Une caractérisation purement expérimentale de la pression de seuil inverse au voisinage du seuil d'extinction reste néanmoins possible par extrapolation, mais dont il n'apparaît pas possible de tirer des conclusions vis-à-vis de l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des pics de résonance sur les seuils inverses. Ce résultat suggère que l'évaluation de la pression de seuil minimale en fonction des deux seuls paramètres  $\alpha$  et  $Inh$  est insuffisante, et doit probablement dépendre d'autres caractéristiques du résonateur, comme le facteur de qualité des pics de résonance par exemple.

## 4.A Annexe : étude du phénomène de *vena contracta* dans le diaphragme

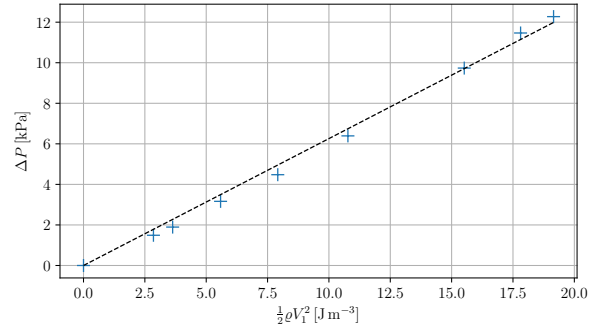
Les calculs de la sous-section précédente faisant intervenir la section du diaphragme  $S_d$  reposent en fait sur l'hypothèse que la section du jet en sortie du diaphragme est égale à  $S_d$ . Cependant, un phénomène de *vena contracta* (Guyon et al. 2012) peut apparaître

représenté sur la figure 4.17a, faisant que la section d'un jet d'air en sortie d'un orifice de section  $S_d$  peut être inférieure à  $S_d$ .

On a réalisé le montage visible sur la figure 4.18 afin de vérifier que le coefficient de contraction de l'écoulement  $C_c = S_2/S_d \approx 1$ . Un capteur de pression placé en amont du diaphragme et dont la référence de pression est prise à l'extérieur du montage permet de mesurer  $\Delta P = P_2 - P_{\text{atm}}$ , et un compteur à gaz placé avant le diaphragme permet de calculer la vitesse particulaire  $V_1$  en amont du diaphragme en mesurant le volume d'air s'écoulant pendant une durée  $\Delta t$ . Il est alors possible de calculer la différence de pression de part et d'autre du diaphragme  $\Delta P$  en fonction de l'énergie cinétique volumique en amont du diaphragme  $e_{c1} = \frac{1}{2}\rho V_1^2$  pour plusieurs valeurs de débit d'entrée (réglé à l'aide du régulateur de pression), dont la courbe est représentée figure 4.17b. Sachant que la constante de proportionnalité  $A$  entre  $\Delta P$  et  $e_{c1}$  est directement reliée à  $S_1$  et  $S_2$  via la relation  $A = (S_1/S_2)^2 - 1$  (Guyon et al. 2012), on en déduit alors la section contractée  $C_c = S_2/S_d = 0.90$ . Il y a donc un léger effet de réduction de section du jet à prendre en compte, malgré le fait que l'alésage du diaphragme soit fraisé du côté de l'arrivée d'air afin de favoriser le recollement du jet d'air, comme représenté sur la figure 4.6b.



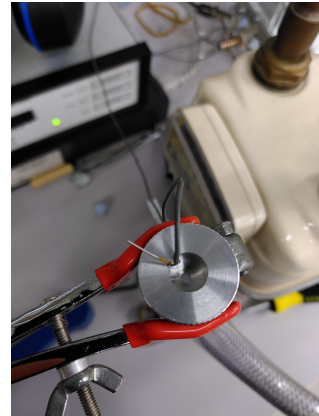
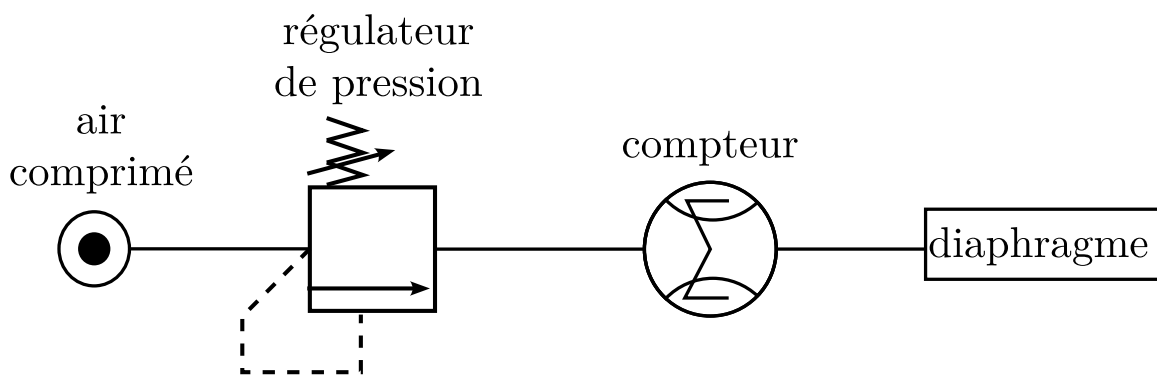
(a) Illustration du phénomène de vena contracta en sortie d'un diaphragme.



(b) Tracé de la différence de pression de part et d'autre du diaphragme  $\Delta P = P_2 - P_{\text{atm}}$  en fonction de l'énergie cinétique volumique en amont du diaphragme  $e_{c1} = \frac{1}{2}\rho V_1^2$ .

Figure 4.17





**Figure 4.18** – Schéma pneumatique du montage permettant la mesure de la section contractée du jet d'air en sortie du diaphragme.

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

## Conclusion

Les travaux présentés dans cette thèse visent à mieux comprendre l'émergence et les caractéristiques des différents régimes d'oscillation d'un instrument de la famille des cuivres, en fonction des paramètres de contrôle du musicien. L'approche utilisée consiste, à partir d'un modèle physique, à déterminer quels comportements de l'instrument ce modèle est capable de reproduire. Des résultats expérimentaux complètent cette analyse et permettent de comparer certains comportements observés sur le modèle au comportement d'un instrument réel.

L'étude bibliographique a mené au choix d'un modèle physique, qui repose sur le couplage non linéaire d'une valve à un degré de liberté – « en dehors » (Elliott et Bowsher 1982) dans le cas des cuivres, et « en dedans » dans le cas des instruments à anche (Wilson et Beavers 1974) – avec un résonateur linéaire. Il s'agit d'un système bouclé admettant entre autres des solutions stationnaires ou auto-oscillantes. Le résonateur est modélisé par son impédance d'entrée mesurée, et approximée par une somme de modes complexes modélisant les résonances acoustiques de la colonne d'air (Ablitzer 2021). La valve lippale et le résonateur linéaire sont couplés non linéairement par le jet d'air s'écoulant entre les lèvres du musicien (Hirschberg 1995). Le paramétrage du modèle, et en particulier des lèvres, est issu d'une étude bibliographique portant une attention spécifique aux résultats de mesures sur lèvres humaines ou artificielles. L'introduction d'une hauteur entre lèvres à l'équilibre dépendant de la fréquence de résonance des lèvres est le fruit de l'analyse de pressions de seuils optimales mesurées (Gilbert et al. 2018), initialement peu cohérentes avec leurs homologues numériques. De ce fait, l'analyse des mesures de paramètres de masque en fonction de la fréquence de résonance des lèvres (Elliott et Bowsher 1982) ont conduit à l'adoption d'une loi pour l'ouverture entre lèvre à l'équilibre inversement proportionnelle à la fréquence de résonance des lèvres. L'un des avantages de ce modèle

---

est sa grande flexibilité : en particulier, la somme de modes complexes représentant le résonateur peut modéliser l'impédance de n'importe quel instrument, qu'elle ait été mesurée ou calculée. La modification des pôles et résidus de ces modes complexes permet de transformer virtuellement les caractéristiques de l'instrument.

Le modèle physique de cuivre et d'instrument à anche a été capable de reproduire plusieurs comportements observés expérimentalement, mis en évidence aux moyens de plusieurs méthodes d'analyse :

- L'analyse de stabilité linéaire a permis de calculer des informations sur le fonctionnement global du modèle, en particulier le seuil de pression dans la bouche à partir duquel une oscillation est susceptible d'apparaître, et la fréquence de l'oscillation émergeant de cette déstabilisation. Cette méthode, couramment utilisée pour l'analyse des modèles d'instruments à vent (Wilson et Beavers 1974), a été entièrement adaptée à notre modèle de cuivre durant cette thèse. Un faible coût de calcul a permis d'obtenir une vision du comportement du modèle au voisinage de sa solution d'équilibre sur une plage du paramètre de contrôle  $f_\ell$  couvrant l'ensemble de la tessiture de l'instrument.
- La simulation temporelle, basée sur un solveur Runge-Kutta, résout numériquement les équations non linéaires du système pour un jeu de paramètres donné. Cette méthode permet de calculer des solutions stables de toute nature (stationnaire, périodique, quasi-périodique, etc.) pour un jeu de paramètres donné. L'évolution temporelle de chaque variable du système est calculée, ce qui permet de compléter les résultats d'analyse de stabilité linéaire.
- La continuation numérique à l'aide d'AUTO-07p permet de suivre l'évolution d'une solution du problème en fonction d'un ou plusieurs paramètres de contrôle, en l'occurrence la pression dans la bouche et la fréquence de résonance des lèvres (entre autres). La fréquence d'oscillation est calculée pour toute valeur des paramètres de continuation, ainsi que la stabilité des solutions. L'utilisation de cette méthode en vue d'évaluer les pressions de seuil du système et les fréquences de seuil associées, ainsi que pour expliquer l'existence de la note pédale des tubas est un travail original.

L'analyse du modèle à l'aide des différents outils met en évidence sa capacité à repro-

---

duire la série des notes naturelles du trombone et du tuba. En particulier, la continuation numérique des solutions périodiques correspondant aux trois premiers régimes du trombone montre qu'elles émergent d'une bifurcation de Hopf inverse. On évalue ainsi des pressions de seuil de manière plus générale qu'avec l'analyse de stabilité linéaire (Velut et al. 2017) grâce aux pressions de seuil inverse. Lorsque la bifurcation de Hopf est directe (à partir de la quatrième note naturelle), les valeurs de pressions de seuil linéaire concordent avec les pressions de seuil obtenues par continuation numériques. Ces résultats ont conduit à la rédaction d'un premier article publié à *Acta Acustica* (Mattéoli et al. 2021). En fonction des paramètres, et en particulier selon la fréquence de résonance des lèvres et la pression dans la bouche, la fréquence d'oscillation des notes les plus faciles à jouer du modèle de trombone est proche d'un des modes du résonateur, à l'exception du premier régime (note pédale). Dans ce cas, la fréquence d'oscillation de la note pédale la plus facile à jouer vaut environ une fois et demie celle de la première résonance, et la moitié de celle de la seconde. En ce qui concerne les tubas, l'existence de cette même note pédale ne peut être expliquée par la seule analyse de stabilité linéaire du système. En effet, on constate au moyen d'une continuation numérique que la branche de solutions périodiques correspondant à la note pédale forme un *isola* : elle est déconnectée de la branche de solutions périodiques issue du point de Hopf, cette dernière correspondant à la note fantôme mise en évidence par (Velut et al. 2017). Au contraire du trombone, la note pédale des tubas possède une fréquence d'oscillation proche de la première fréquence de résonance de l'instrument. La note pédale ne pouvant donc pas être décrite par analyse de stabilité linéaire, (Velut et al. 2017) avait imputé cette lacune soit à une faiblesse du modèle, soit à une méthode d'analyse limitée. Notre travail permet alors d'apporter une réponse à cette interrogation, en confirmant la robustesse du modèle de cuivre utilisé en ce qui concerne la description des notes naturelles.

D'autre part, nous réalisons une étude plus approfondie de la « note fantôme » des tubas, mise en évidence par analyse de stabilité linéaire (Velut et al. 2017). Ces résultats ont conduit à la rédaction d'un second article à *Acta Acustica* (Mattéoli et al. 2022). La fréquence de jeu de la note fantôme ne s'accorde sur aucune résonance de l'instrument, de manière similaire à la note pédale du trombone. Par ailleurs, les notes naturelles des cuivres habituellement jouées possèdent la propriété d'être espacées du même intervalle, quelque soit la tonalité nominale du cuivre considéré. Cette propriété n'est pas vérifiée par la note fantôme : si, à titre d'exemple, l'intervalle entre la note pédale et le second régime reste proche de l'octave quel que soit le cuivre, l'intervalle entre la note pédale et la note

---

fantôme varie d'une tierce mineure à une quarte juste. En confrontant les résultats issus de la continuation de solutions périodiques du modèle physique appliqué à sept tubas différents d'une part, et sur des enregistrements réalisés sur les mêmes tubas, on montre que le modèle physique et les enregistrements sont en bon accord du point de vue des intervalles entre les trois premières notes naturelles, à l'exception du saxhorn baryton. Dans ce dernier cas, la note fantôme est décrite comme « peu centrée » par les tubistes, et donc de hauteur incertaine, comme en témoigne le désaccord entre les deux tubistes pour la hauteur de cette note. Numériquement, il apparaît que la cuvette décrivant le premier régime dans le plan  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$  comporte deux minima contigus, l'un correspondant à la note fantôme, l'autre à la note pédale. Il est de ce fait plus facile de passer d'un minimum à l'autre (et donc d'une note à l'autre) en modifiant la fréquence de résonance de lèvres que sur les autres tubas, pour lesquels la note pédale et la note fantôme sont caractérisées par deux cuvettes distinctes dans le plan  $(f_\ell, p_{\text{seuil}})$ . Cette singularité, propre au saxhorn baryton, a donc été jugée pertinente pour expliquer le ressenti des tubistes à propos de la note fantôme sur cet instrument.

Même si le modèle de cuivre fournit des résultats cohérents avec des enregistrements du point de vue de l'intonation, une des principales difficultés dans son utilisation réside dans la difficulté à estimer les paramètres de lèvres. Il serait par exemple raisonnable de considérer qu'un paramètre de lèvre tel que le facteur de qualité soit différent lorsque l'on considère un contretuba ou un trombone alto. Cependant, ces paramètres étant difficile à mesurer aussi bien sur bouche artificielle que directement sur le musicien, ils ont été gardés constant quelque soit le type d'instrument considéré. Par ailleurs, les enregistrements des tubistes réalisés dans le cadre de l'étude de la note fantôme ne permettent pas de faire des statistiques, et bénéficieraient d'une étude sur une plus large population de musiciens. Enfin, si le modèle physique le plus simple avec un résonateur linéaire s'est néanmoins montré suffisant pour expliquer les différences de comportement entre différents cuivres, il n'en est pas de même pour les instruments à trous latéraux comme le saxophone. En effet, les relevés de pression acoustique dans le bec du saxophone couplé à la bouche artificielle aboutissent à des diagrammes de bifurcation très différents des diagrammes de bifurcation numériques. En particulier, les valeurs de pression RMS loin des seuils linéaires se révèlent largement surestimées dans le modèle physique, dont les paramètres d'anche (pression de placage et section d'ouverture à l'équilibre) sont déduits d'une mesure de caractéristiques non linéaire de l'anche en régime statique. Cette surestimation provient probablement du fait que les pertes non linéaires dues aux trous latéraux du résonateur n'ont pas été prises

---

en compte, et seraient difficiles à inclure compte tenu de l'écriture actuelle du modèle. On parvient cependant à obtenir des diagrammes de bifurcation expérimentaux pour plusieurs valeurs d'inharmonicité et de rapport d'amplitude des résonance de l'instrument, mais qui ne permettent néanmoins pas de tirer de conclusion générale en ce qui concerne l'influence de ces deux paramètres sur la pression de seuil. On constate finalement l'influence, prépondérante par rapport à celle du rapport d'amplitude et de l'inharmonicité des pics des résonances acoustiques, des pertes non linéaires dues aux trous latéraux du résonateur sur la pression de seuil.

## Perspectives

Le parti pris de cette thèse est de caractériser la facilité d'émission via les pressions de seuil minimales. La facilité d'émission faisant avant tout partie du musicien, ce parti pris est évidemment discutable. Il serait par exemple tout aussi pertinent de considérer que la note la plus facile à jouer est celle qui est la plus timbrée (c'est-à-dire la plus riche en harmoniques), souvent recherchée dans un style de jeu classique du trombone par exemple. Dans ce cas, une étude du contenu spectral de la note serait nécessaire à la caractérisation de la facilité d'émission.

Des résultats obtenus durant cette thèse incitent à continuer l'exploration de certains phénomènes. Vu les limitations sus-citées du modèle de lèvres/d'anche à un degré de liberté, un choix possible serait de complexifier ce modèle. Dans le cas des cuivres, la prise en compte du conduit vocal a déjà été réalisée, par exemple dans (Fréour et al. 2015). Certains modèles de lèvres à deux degrés de liberté tels que ceux utilisés, par exemple, dans (Adachi et Sato 1996) s'avèrent capables de reproduire certains comportements des instruments inaccessibles avec le modèle utilisé dans cette thèse. Ces deux modifications du modèle peuvent être faites sans difficulté particulière du point de vue de la formulation des équations. Cependant, augmenter le nombre de degrés de liberté, donc le nombre de paramètres du modèle à régler, ne ferait qu'augmenter la complexité du paramétrage. De même, modéliser le conduit vocal signifie extraire des quantités *in vivo* pertinentes pour le paramétrer. Dans le cas du saxophone, la prise en compte des pertes non linéaires à la sortie de l'instrument n'ont à notre connaissance jamais été considérées, mais nécessiteraient une reformulation des équations du système pour être intégrées. Néanmoins, l'objectif visé n'est pas l'étude du saxophone en particulier, mais l'étude de l'influence de la géométrie de l'instrument sur la pression de seuil minimale dans le cas d'un résonateur simplifié ne

---

possédant que deux résonances (bichromateur). Le saxophone répondant bien à ce critère du point de vue de son impédance d'entrée, mais introduisant des phénomènes non linéaires de dissipation difficiles à prendre en compte dans le modèle, une autre alternative serait de considérer un autre type de résonateur simplifié. Par exemple, deux résonateurs de Helmholtz connectés et d'un plus petit diamètre (Dalmont et Le Vey 2017), moins sujets aux pertes non linéaires du fait de l'absence de trous latéraux, constitueraient un résonateur pertinent pour l'étude l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des deux pics de résonance sur la pression de seuil minimale, tout en restant susceptible d'être décrit par le modèle en l'état.

Étant données les difficultés supplémentaires qu'engendrerait un modèle plus complexe, il semble raisonnable de s'en tenir à un modèle aussi simple que possible. Si ce modèle est capable de reproduire une grande partie des comportements des cuivres, comme montré dans cette thèse, il peut encore contribuer à leur compréhension et leur pratique. En particulier, l'exploration des diagrammes de bifurcation via AUTO-07p – ou tout autre logiciel de continuation – pour l'étude de l'influence de certains paramètres du modèle comme le facteur de qualité des lèvres aideraient grandement à comprendre les comportements observés en pratique.

# BIBLIOGRAPHIE

---

- Ablitzer, Frédéric (2021), « Peak-Picking Identification Technique for Modal Expansion of Input Impedance of Brass Instruments », in : *Acta Acust.* 5, p. 53, ISSN : 2681-4617, DOI : 10.1051/aacus/2021046, URL : <https://acta-acustica.edpsciences.org/articles/aacus/abs/2021/01/aacus210061/aacus210061.html>.
- Abramowitz, Milton et Irene A. Stegun, éd. (2013), *Handbook of Mathematical Functions : With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, 9. Dover print. ; [Nachdr. der Ausg. von 1972], Dover Books on Mathematics, New York, NY : Dover Publ, 1046 p., ISBN : 978-0-486-61272-0.
- Adachi, Seiji et Masa-aki Sato (fév. 1996), « Trumpet Sound Simulation Using a Two-dimensional Lip Vibration Model », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 99.2, p. 1200-1209, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.414601, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.414601>.
- Akay, Mehmet Selim, Alexander D. Shaw et Michael I. Friswell (1<sup>er</sup> juill. 2021), « Continuation Analysis of a Nonlinear Rotor System », in : *Nonlinear Dyn* 105.1, p. 25-43, ISSN : 1573-269X, DOI : 10.1007/s11071-021-06589-8, URL : <https://doi.org/10.1007/s11071-021-06589-8>.
- Benade, A. H. et D. J. Gans (1968), « Sound Production in Wind Instruments », in : *Annals of the New York Academy of Sciences* 155.1, p. 247-263, ISSN : 1749-6632, DOI : 10.1111/j.1749-6632.1968.tb56770.x, URL : <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1111/j.1749-6632.1968.tb56770.x>.
- Benade, Arthur H. (1990), *Fundamentals of Musical Acoustics*, New York : Dover Publications, 596 p., ISBN : 978-0-486-26484-4.
- Berjamin, Harold et al. (2017), « Time-Domain Numerical Modeling of Brass Instruments Including Nonlinear Wave Propagation, Viscothermal Losses, and Lips Vibration », in : *Acta Acustica united with Acustica* 103, p. 117-131, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01226234>.



- 
- Bildstein, Paul (1980), *Filtres actifs*, 3 éd, Paris : Editions Radio, ISBN : 978-2-7091-0826-3.
- Bromage, Seona, Murray Campbell et Joël Gilbert (2010), « Open Areas of Vibrating Lips in Trombone Playing », in : *Acta Acustica united with Acustica* 96.4, p. 603-613, ISSN : 1610-1928, DOI : 10.3813/AAA.918315, URL : <https://www.research.ed.ac.uk/en/publications/open-areas-of-vibrating-lips-in-trombone-playing>.
- Campbell, Murray, Joël Gilbert et Arnold Myers (2021), *The Science of Brass Instruments*, Springer-Verlag, ISBN : 978-3-030-55684-6.
- Chaigne, Antoine et J. Kergomard (2016), *Acoustics of musical instruments*, Modern Acoustics and Signal Processing, New York, New York : ASA Press : Springer, 844 p., ISBN : 978-1-4939-3677-9.
- Chaigne, Antoine et Jean Kergomard (2013), *Acoustique des instruments de musique*, Paris : Belin, ISBN : 978-2-7011-8280-3.
- Chang, Y. M. (1<sup>er</sup> jan. 1994), « Reed Stability », in : *Journal of Fluids and Structures* 8.7, p. 771-783, ISSN : 0889-9746, DOI : 10.1016/S0889-9746(94)90240-2, URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974694902402>.
- Chen, Jer-Ming, John Smith et Joe Wolfe (jan. 2011), « Saxophonists Tune Vocal Tract Resonances in Advanced Performance Techniques », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.1, p. 415-426, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.3514423, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.3514423>.
- Cochelin, Bruno, Nouredine Damil et Michel Potier-Ferry (2007), *Méthode asymptotique numérique*, Collection Méthodes numériques, Paris : Hermès science publications-Lavoisier, ISBN : 978-2-7462-1567-2.
- Cochelin, Bruno et Christophe Vergez (2009), « A High Order Purely Frequency-Based Harmonic Balance Formulation for Continuation of Periodic Solutions », in : *Journal of Sound and Vibration* 324.1-2, p. 243-262, DOI : 10.1016/j.jsv.2009.01.054, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00315288>.
- Colinot, Tom et al. (nov. 2019), « Influence of the "Ghost Reed" Simplification on the Bifurcation Diagram of a Saxophone Model », in : *Acta Acustica united with Acustica* 105.6, p. 1291-1294, DOI : 10.3813/AAA.919409, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02433732>.
- Cullen, John, Joël Gilbert et Murray Campbell (août 2000a), « Brass Instruments : Linear Stability Analysis and Experiments with an Artificial Mouth », in : *Acta Acustica*

- 
- united with Acustica* 86.4, p. 704-724, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00474993>.
- (août 2000b), « Brass Instruments : Linear Stability Analysis and Experiments with an Artificial Mouth », in : *Acta Acustica united with Acustica* 86.4, p. 704-724, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00474993>.
- Dalmont, J.-P. et G. Le Vey (1<sup>er</sup> jan. 2017), « Discrete Acoustical Resonators with Harmonic Eigenfrequencies », in : *Acta Acustica united with Acustica* 103.1, p. 94-105, DOI : 10.3813/AAA.919036.
- Dalmont, Jean-Pierre et Cyrille Frappé (31 juill. 2007), « Oscillation and Extinction Thresholds of the Clarinet : Comparison of Analytical Results and Experiments », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 122.2, p. 1173-1179, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.2747197, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.2747197>.
- Dalmont, Jean-Pierre, Joël Gilbert et Jean Kergomard (août 2000), « Reed Instruments, from Small to Large Amplitude Periodic Oscillations and the Helmholtz Motion Analogy », in : *Acta Acustica united with Acustica* 86.4, p. 671-684, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00474996>.
- Dalmont, Jean-Pierre, Joël Gilbert et Sébastien Ollivier (oct. 2003), « Nonlinear Characteristics of Single-Reed Instruments : Quasistatic Volume Flow and Reed Opening Measurements », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 114.4, p. 2253-2262, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.1603235, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1603235>.
- Dalmont, Jean-Pierre, Philippe Guillemain et Pierre-André Taillard (avr. 2012), « Influence of the Reed Flow on the Intonation of the Clarinet », in : *Acoustics 2012*, sous la dir. de Société Française d'Acoustique, Nantes, France, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00810980>.
- Dalmont, Jean-Pierre et al. (mars 1995), « Some Aspects of Tuning and Clean Intonation in Reed Instruments », in : *Applied Acoustics* 46.1, p. 19-60, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00475069>.
- De Cheveigné, Alain et Hideki Kawahara (1<sup>er</sup> avr. 2002), « YIN, a Fundamental Frequency Estimator for Speech and Music », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 111.4, p. 1917-1930, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.1458024, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1458024>.

- 
- Doedel, Eusebius et al. (27 juin 1999), « AUTO 97 : Continuation And Bifurcation Software For Ordinary Differential Equations (with HomCont) », in : *Tech. report*.
- Dormand, J. R. et P. J. Prince (1<sup>er</sup> mars 1980), « A Family of Embedded Runge-Kutta Formulae », in : *Journal of Computational and Applied Mathematics* 6.1, p. 19-26, ISSN : 0377-0427, DOI : 10.1016/0771-050X(80)90013-3, URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0771050X80900133>.
- Elliott, S. J. et J. M. Bowsheer (22 juill. 1982), « Regeneration in Brass Wind Instruments », in : *Journal of Sound and Vibration* 83.2, p. 181-217, ISSN : 0022-460X, DOI : 10.1016/S0022-460X(82)80086-2, URL : <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022460X82800862>.
- Ewins, D. J. (2000), *Modal Testing : Theory, Practice, and Application*, 2nd ed, Mechanical Engineering Research Studies 10, Baldock, Hertfordshire, England ; Philadelphia, PA : Research Studies Press, 562 p., ISBN : 978-0-86380-218-8.
- Fletcher, N. H. (avr. 1993), « Autonomous Vibration of Simple Pressure-controlled Valves in Gas Flows », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 93.4, p. 2172-2180, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.406857, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.406857>.
- Fletcher, Neville H. et Thomas D. Rossing (1998), *The Physics of Musical Instruments*, 2nd ed, New York : Springer, 756 p., ISBN : 978-0-387-98374-5.
- Fréour, V. et al. (1<sup>er</sup> mars 2015), « In-Vitro and Numerical Investigations of the Influence of a Vocal-Tract Resonance on Lip Auto-Oscillations in Trombone Performance », in : *Acta Acustica united with Acustica* 101.2, p. 256-269, DOI : 10.3813/AAA.918824.
- Fréour, Vincent et al. (1<sup>er</sup> août 2020), « Numerical Continuation of a Physical Model of Brass Instruments : Application to Trumpet Comparisons », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 148.2, p. 748-758, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/10.0001603, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/10.0001603>.
- Gilbert, Joël, Lévy Leblanc et Christophe Vergez (2018), « L'analyse de Stabilité Linéaire Pour Évaluer La Facilité d'émission Des Cuivres - Étude Comparative de Trombones Ténor et Basse », in : *CFA Le Havre*, URL : [https://www.conforg.fr/cfa2018/output\\_directory2/data/articles/000002.pdf](https://www.conforg.fr/cfa2018/output_directory2/data/articles/000002.pdf).
- Gilbert, Joël, Sylvain Maugeais et Christophe Vergez (sept. 2019), « From the Bifurcation Diagrams to the Ease of Playing of Reed Musical Instruments. A Theoretical Illustration of the Bouasse-Benade Prescription ? », in : *International Symposium on*

- 
- Music Acoustics (ISMA 2019)*, Detmold, Germany, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02169517>.
- (2020), « Minimal Blowing Pressure Allowing Periodic Oscillations in a Simplified Reed Musical Instrument Model : Bouasse-Benade Prescription Assessed through Numerical Continuation », in : *Acta Acust.* 4.6 (6), p. 27, ISSN : 2681-4617, DOI : 10.1051/aacus/2020026, URL : <https://acta-acustica.edpsciences.org/articles/aacus/abs/2020/06/aacus200016/aacus200016.html>.
- Guillot, Louis, Bruno Cochelin et Christophe Vergez (1<sup>er</sup> déc. 2019), « A Taylor Series-Based Continuation Method for Solutions of Dynamical Systems », in : *Nonlinear Dyn* 98.4, p. 2827-2845, ISSN : 1573-269X, DOI : 10.1007/s11071-019-04989-5, URL : <https://doi.org/10.1007/s11071-019-04989-5>.
- Guyon, Étienne, Jean-Pierre Hulin et Luc Petit (2012), *Hydrodynamique physique*, 3e éd, Savoirs actuels, Les Ulis Paris : EDP sciences CNRS éd, ISBN : 978-2-7598-0561-7.
- Helmholtz, Hermann von et Henry Margenau (1954), *On the Sensations of Tone*, sous la dir. d'Alexander John Ellis, Unabr. and unalt. republ. of the 2. (1885) ed, Dover Histories, Biographies and Classics of Mathematics and the Physical Sciences, New York : Dover, 576 p., ISBN : 978-0-486-60753-5.
- Herbert, Trevor, Arnold Myers et John Wallace, éd. (2019), *The Cambridge Encyclopedia of Brass Instruments*, Cambridge, UK New York, NY Port Melbourne New Delhi Singapore : Cambridge University Press, 612 p., ISBN : 978-1-107-18000-0.
- Hirschberg, A., éd. (1995), *Mechanics of Musical Instruments*, Courses and Lectures / International Centre for Mechanical Sciences 355, Wien : Springer, 369 p., ISBN : 978-3-211-82801-4.
- Hirschberg, Abraham et al. (1995), « Shock Waves in Trombones », in : *Journal of the Acoustical Society of America* 99.3, p. 1754-1758, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01105563>.
- Karkar, Sami (10 jan. 2012), « Méthodes Numériques Pour Les Systèmes Dynamiques Non Linéaires : Application Aux Instruments de Musique Auto-Oscillants », thesis, Aix-Marseille, URL : <http://www.theses.fr/2012AIXM4769>.
- Karkar, Sami, Bruno Cochelin et Christophe Vergez (fév. 2013), « A High-Order, Purely Frequency Based Harmonic Balance Formulation for Continuation of Periodic Solutions : The Case of Non-Polynomial Nonlinearities », in : *Journal of Sound and Vibration* 332.4, p. 968-977, DOI : 10.1016/j.jsv.2012.09.033, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00758184>.

- 
- Karkar, Sami, Christophe Vergez et Bruno Cochelin (jan. 2012), « Oscillation Threshold of a Clarinet Model : A Numerical Continuation Approach », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 131.1, p. 698-707, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.3651231, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.3651231>.
- Karkar, Sami et al. (s. d.), *Manlab - An Interactive Path-Following and Bifurcation Analysis Software*, URL : <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr/spip/>.
- Kuznetsov, Yuri A (2004), *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Springer-Verlag, ISBN : 978-1-4757-3978-7, URL : <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3978-7>.
- Le Roux, Jean-Christophe, Marc Pachebat et Jean-Pierre Dalmont (mai 2012), « Un Capteur de Nouvelle Génération Pour La Mesure d'impédance Acoustique En Contexte Industriel », in : *Acoustique et Techniques : trimestriel d'information des professionnels de l'acoustique* 68, p. 6, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00834134>.
- Lopez, I. et al. (2006), « Physical modeling of buzzing artificial lips : The effect of acoustical feedback », in : *Acustica united with Acta Acustica* 92.6, p. 1047-1059, ISSN : 1610-1928, URL : <https://research.utwente.nl/en/publications/physical-modeling-of-buzzing-artificial-lips-the-effect-of-acoust>.
- Macaluso, Charles A. et Jean-Pierre Dalmont (1<sup>er</sup> jan. 2011), « Trumpet with Near-Perfect Harmonicity : Design and Acoustic Results », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 129.1, p. 404-414, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.3518769, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.3518769>.
- Manneville, Paul (2004), *Instabilités, chaos et turbulence*, Palaiseau : Ecole polytechnique, ISBN : 978-2-7302-0913-7.
- Mattéoli, Rémi et al. (2021), « Minimal Blowing Pressure Allowing Periodic Oscillations in a Model of Bass Brass Instruments », in : *Acta Acust.* 5, p. 57, ISSN : 2681-4617, DOI : 10.1051/aacus/2021049, URL : <https://acta-acustica.edpsciences.org/articles/aacus/abs/2021/01/aacus210076/aacus210076.html>.
- Mattéoli, Rémi et al. (2022), « Diversity of Ghost Notes in Tubas, Euphoniums and Saxhorns », in : *Acta Acust.* 6, p. 32, ISSN : 2681-4617, DOI : 10.1051/aacus/2022026, URL : <https://acta-acustica.edpsciences.org/articles/aacus/abs/2022/01/aacus220031/aacus220031.html>.
- McIntyre, M. E., R. T. Schumacher et J. Woodhouse (nov. 1983), « On the Oscillations of Musical Instruments », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 74.5, p. 1325-1345, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.390157, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.390157>.

- 
- Msallam, Régis et al. (1<sup>er</sup> juill. 2000), « Physical Model of the Trombone Including Non-linear Effects. Application to the Sound Synthesis of Loud Tones », in : *Acta Acustica united with Acustica* 86, p. 725-736.
- Munoz Arancon, Alberto, Bruno Gazengel et Jean-Pierre Dalmont (1<sup>er</sup> jan. 2013), « In Vivo and in Vitro Characterization of Single Cane Reeds », in : *In : Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference, July 30 - August 3, 2013*, Stockholm Music Acoustics Conference 2013, Stockholm.
- Nakhla, M. et J. Vlach (fév. 1976), « A Piecewise Harmonic Balance Technique for Determination of Periodic Response of Nonlinear Systems », in : *IEEE Transactions on Circuits and Systems* 23.2, p. 85-91, ISSN : 1558-1276, DOI : 10.1109/TCS.1976.1084181.
- Newton, Michael J., Murray Campbell et Jöel Gilbert (1<sup>er</sup> jan. 2008), « Mechanical Response Measurements of Real and Artificial Brass Players Lips », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 123.1, EL14-EL20, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.2805042, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.2805042>.
- Pagneux, V., N. Amir et J. Kergomard (oct. 1996), « A Study of Wave Propagation in Varying Cross-section Waveguides by Modal Decomposition. Part I. Theory and Validation », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 100.4, p. 2034-2048, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.417913, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.417913>.
- Petersen, Erik Alan (20 nov. 2020), « Wave Propagation in Periodic Structures Applied to Woodwind Tonehole Lattices : How the Cutoff Frequency Balances Sound Production and Radiation », These de doctorat, Aix-Marseille, URL : <https://www.theses.fr/2020AIXM0520>.
- Raman, C. V. (1918), « On the Mechanical Theory of the Vibrations of Bowed Strings and of Musical Instruments of the Violin Family, with Experimental Verification of the Results, Part I », in : *Bulletin of the Indian Association for the Cultivation of Science* 15, p. 1-158, URL : <http://dspace.rrri.res.in/bitstream/2289/2118/3/1918%20Bull%20Indian%20Assoc%20Cultiv%20Sci%20V15%20p1-158%20-1.pdf>.
- Saneyoshi, J., H. Teramura et Shigeru Yoshikawa (1<sup>er</sup> jan. 1987), « Feedback Oscillations in Reed Woodwind and Brasswind Instruments », in : *Acta Acustica united with Acustica* 62, p. 194-210.
- Seydel, Rüdiger (2010), *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Interdisciplinary Applied Mathematics 5, New York, NY : Springer Science+Business Media, LLC Springer e-books, ISBN : 978-1-4419-1740-9.

- 
- Shampine, Lawrence F. et Mark W. Reichelt (jan. 1997), « The MATLAB ODE Suite », in : *SIAM J. Sci. Comput.* 18.1, p. 1-22, ISSN : 1064-8275, DOI : 10.1137/S1064827594276424, URL : <https://epubs.siam.org/doi/10.1137/S1064827594276424>.
- Silva, Fabrice (7 déc. 2009), « Émergence des auto-oscillations dans un instrument de musique à anche simple », thèse de doct., Université de Provence - Aix-Marseille I, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00456719>.
- Silva, Fabrice, Jean Kergomard et Christophe Vergez (sept. 2007), « Oscillation Thresholds for "striking Outwards" Reeds Coupled to a Resonator », in : *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics (ISMA)*, Barcelona, Spain, CD-ROM(7 pages), URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00150185>.
- Silva, Fabrice et al. (nov. 2008), « Interaction of Reed and Acoustic Resonator in Clarinetlike Systems », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 124.5, p. 3284-3295, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.2988280, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.2988280>.
- Silva, Fabrice et al. (2014), « MoReeSC : A Framework for the Simulation and Analysis of Sound Production in Reed and Brass Instruments », in : *Acta Acustica united with Acustica* 100.1, p. 126-138, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00770238>.
- Terrien, S. et al. (1<sup>er</sup> juill. 2014), « Calculation of the Steady-State Oscillations of a Flute Model Using the Orthogonal Collocation Method », in : *Acta Acustica united with Acustica* 100.4, p. 690-704, DOI : 10.3813/AAA.918748.
- Terrien, Soizic, Christophe Vergez et Benoît Fabre (juill. 2014), « To What Extent Can a Linear Analysis Predict the Behaviour of a Flute Model? », in : *International Symposium on Musical Acoustics*, Le Mans, France, p. 171-176, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01038010>.
- Velut, Lionel (19 déc. 2016), « Contrôle Par Le Musicien Des Régimes d'oscillation Des Instruments de La Famille Des Cuivres : Modélisation et Mesures Acoustiques, Analyse Du Système Dynamique », thesis, Aix-Marseille, URL : <http://www.theses.fr/2016AIXM4764>.
- Velut, Lionel et al. (juill. 2014), « Numerical Simulation of the Production of Pedal Notes in Brass Instruments », in : *ISMA 2014 - International Symposium on Musical Acoustics*, Le Mans, France, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01086749>.
- Velut, Lionel et al. (2017), « How Well Can Linear Stability Analysis Predict the Behavior of an Outward Valve Brass Instrument Model? », in : *Acta Acustica united with Acus-*

- 
- tica* 103.1, p. 132-148, DOI : 10.3813/AAA.919039, URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01245846>.
- Vergez, Christophe (22 juin 2010), « Analyse du fonctionnement des instruments de musique à vent », thesis, Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00535716>.
- Wilson, Theodore A. et Gordon S. Beavers (août 1974), « Operating Modes of the Clarinet », in : *The Journal of the Acoustical Society of America* 56.2, p. 653-658, ISSN : 0001-4966, DOI : 10.1121/1.1903304, URL : <https://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.1903304>.







**Titre :** Étude de la facilité d'émission des cuivres et des instruments à anche au moyen des diagrammes de bifurcation

**Mot clés :** acoustique musicale, facilité d'émission, systèmes dynamiques, continuation, diagrammes de bifurcation

**Résumé :** Ce travail s'intéresse à la caractérisation de la facilité d'émission des cuivres et des instruments à anches, qu'on choisit de quantifier grâce à la valeur minimale de pression dans la bouche du musicien nécessaire pour que l'instrument émette un son (pression de seuil). La fréquence de seuil associée permet alors d'évaluer la justesse de l'instrument.

Les pressions de seuil sont caractérisées numériquement sur la base d'un modèle minimal d'instrument à vent couplé à trois méthodes d'analyse :

- l'analyse de stabilité linéaire : elle consiste à analyser la stabilité d'une solution d'équilibre non oscillante en fonction d'un paramètre de contrôle, afin d'obtenir la valeur seuil de ce paramètre pour laquelle la solution d'équilibre se déstabilise et donne potentiellement naissance à un régime oscillant ;
- la résolution numérique temporelle : elle consiste à résoudre les équations constituant le modèle minimal d'instrument à vent pour un ensemble donné de valeurs des paramètres du modèle, à l'aide d'une méthode classique de résolution d'équations différentielles de type Runge-Kutta ;
- la continuation numérique de solutions : elle consiste à étudier l'évolution, en régime permanent, d'une quantité caractéristique d'une solution oscillante en fonction d'un ou

plusieurs paramètres de contrôle du système, permettant une exploration rapide des régimes oscillants et de leurs bifurcations. Cette analyse est ici effectuée grâce au logiciel de continuation numérique AUTO-07p, reposant sur une méthode de prédiction-corrrection.

Un modèle physique non linéaire de cuivre est étudié en détail. Ce modèle comporte deux paramètres de contrôle principaux, c'est-à-dire deux paramètres que le musicien peut ajuster à volonté : la pression dans la bouche, et la fréquence de résonance des lèvres. On s'attache à étudier l'influence de ces deux paramètres sur le régime de jeu. Tout d'abord, une analyse de la stabilité linéaire du système permet d'accéder aux pressions de seuil linéaires et les fréquences de seuil associées en fonction de la fréquence de résonance des lèvres. Ces résultats donnent une première description fidèle de la plupart des notes naturelles des cuivres. Cependant, comme il avait déjà été mis en évidence dans de précédents travaux, la note naturelle la plus grave des tubas (dite « note pédale ») ne peut être décrite dans le cadre de l'analyse de stabilité linéaire. Ainsi, dans un second temps, à partir de la branche de solutions statiques et ses bifurcations, on calcule les différentes branches de solutions périodiques, ainsi que leur stabilité et leurs bifurcations. On accède alors à de nouvelles estimations des pressions et fréquences de seuil en fonction des deux paramètres de contrôle

---

principaux du système cités plus haut, selon le type de bifurcation auquel on a affaire. Dans le cas d'une bifurcation de Hopf inverse, la pression dans la bouche la plus basse à laquelle la solution périodique stable existe est plus basse que la pression de seuil linéaire, on la qualifie de pression de seuil inverse ; dans le cas d'une bifurcation de Hopf directe, la solution périodique stable émerge directement de la solution d'équilibre déstabilisée, c'est-à-dire à une pression dans la bouche égale à la pression de seuil linéaire. Par ailleurs, l'existence de la note pédale des tubas est expliquée par la présence d'une branche de solutions périodiques isolée, déconnectée des branches de solutions statiques, expliquant l'impossibilité de décrire cette note via la seule analyse de stabilité linéaire. Par ailleurs, on effectue une étude plus poussée d'une note naturelle propre aux tubas, nommée la « note fantôme » parce qu'ignorée des musiciens, dont l'existence avait initialement été découverte numériquement grâce à l'analyse de stabilité linéaire, puis confirmée expérimentalement par la suite. Au contraire de toutes les autres notes naturelles, cette note présente la particularité de se trouver à une hauteur différente selon le type de tuba. On s'intéresse à l'écart de cette note aux autres notes naturelles sur sept tubas différents. Numérique-

ment, on calcule les intervalles entre la note fantôme et les notes naturelles voisines au moyen d'une analyse de stabilité linéaire ou d'une analyse de bifurcation. Expérimentalement, on extrait la fréquence des notes jouées à partir d'enregistrements de deux musiciens professionnels jouant les sept types de tubas, au moyen d'un algorithme d'estimation de fréquence fondamentale (YIN). Le modèle minimal de cuivre et les enregistrements étant en bon accord, cela permet de confirmer la robustesse du modèle de cuivre minimal, malgré sa relative simplicité.

Dans une seconde étude, le système considéré est un instrument à anche avec un résonateur simplifié ne comportant que deux résonances prépondérantes par rapport à leurs voisines (ce qui est le cas pour certains doigtés sur le saxophone par exemple). L'objectif de ce travail est d'étudier l'influence combinée de l'inharmonicité et du rapport d'amplitude des résonances sur les valeurs de pression de seuil, afin d'évaluer dans quelle mesure l'émergence de régimes d'oscillations stables est favorisée par l'harmonicité des résonances de l'instrument (prescription de Bouasse-Benade). Des diagrammes de bifurcation expérimentaux, obtenus au moyen d'une bouche artificielle adaptée à l'instrument considéré, sont présentés.

---

**Title:** Study of the ease of playing of brass and reed instruments by means of bifurcation diagrams

**Keywords:** musical acoustics, ease of playing, dynamical systems, continuation, bifurcation diagrams

**Abstract:** This work focuses on the characterisation of the ease of playing of musical notes in brass and reed instruments. Here we consider the ease of playing to be related to the lowest value of the musician's mouth pressure required for the instrument to produce a sound (the so-called mouth pressure threshold). The tuning of the instrument is as-

sessed through the corresponding threshold frequency.

The mouth pressure thresholds are estimated here in a minimal model of brass/reed instruments, through three numerical methods:

- 
- linear stability analysis: this consists in studying the stability of the equilibrium (non oscillating) solution with respect to one control parameter. This provides the threshold value of this parameter at which the equilibrium solution destabilises, and where a periodic solution may emerge;
  - time-domain simulations: this consists in solving numerically, in the time domain, the equations of the minimal model, for a given set of control parameters. This is classically done with Runge-Kutta-like methods for ODEs;
  - bifurcation analysis: this consists in studying the evolution, in permanent regime, of a characteristic quantity of a periodic solution, as well as its stability. It is performed with respect to one or more control parameter of the system, quickly providing a global overview of the periodic solutions as well as their bifurcations. Here, this is performed with the numerical continuation software AUTO-07p, which is based on orthogonal collocation coupled with a predictor-corrector continuation method.

A nonlinear model of brass instrument is studied extensively. It has two main control parameters that the musician can adjust in practice: the mouth blowing pressure, and the lips' resonance frequency. We focus on the influence of these two parameters on the playing (oscillating) regime. First, a linear stability analysis of the equilibrium solution gives access to the linear pressure thresholds and the corresponding threshold frequencies, with respect to the lips' resonance frequency. These results give a first accurate description of most natural notes of brass instruments. Nevertheless, as it has been shown in previous works, this does not predict the tuba's lowest natural note (referred to as the 'pedal note'). Secondly, a bifurcation analysis is performed,

which gives access to the periodic solutions branches as well as their stability and bifurcations, starting from the branch of equilibrium solutions. This in-depth analysis provides new estimations of the pressure threshold and corresponding frequency with respect to the two main control parameters described above. Different scenarios are observed depending on the nature of the bifurcation: in case of an inverse (subcritical) Hopf bifurcation, the lowest mouth pressure at which the stable periodic regime appears lays lower than the linear pressure threshold, and is referred to as the inverse pressure threshold. On the other hand, when a direct (supercritical) Hopf bifurcation occurs, the stable periodic regime emerges directly from the destabilised equilibrium, for a mouth pressure equal to the linear pressure threshold. Moreover, the existence of the pedal note is shown to be related to an isolated branch of periodic solutions, which is disconnected from the branch of equilibrium solutions. This explains why its emergence is not predicted by the linear stability analysis. Furthermore, we investigate the existence and emergence of a natural note observed specifically on tubas, which is referred to as 'ghost note' due to the fact that it is generally unknown by the tuba players community. Its existence has first been brought to light in a model, through a linear stability analysis of the equilibrium regime, and has been confirmed experimentally only later on. In contrast to all other natural notes, its pitch difference with the closest natural notes depends on the type of tuba. The intervals between the ghost note and the three first natural notes are investigated numerically on seven different tubas, by studying the frequencies at threshold in both a linear stability analysis and a bifurcation analysis. Experimentally, recordings of two professional tuba players – each playing successively the seven tubas – are analysed with a fundamental frequency estimator algorithm (YIN) to estimate the intervals. The brass model and recordings show in good agreement, which confirms the robustness of the minimal brass model, despite its simplicity.

In a second study, we investigate the

---

emergence of stable oscillations in a reed instrument with a simple resonator that features two main resonances only, that is to say two resonance peaks being significantly higher than all the others. The influence of both the inharmonicity of the resonance frequencies and the ratio between the resonance peaks amplitudes on the oscillation threshold is ex-

plored. In particular, we investigate whether or not the case of perfectly harmonic resonance frequencies favours the emergence of stable oscillation (Bouasse-Benade prescription). Experimental bifurcations diagrams are presented, which are obtained with an artificial mouth suitable for reed instruments.

---