



HAL
open science

Estimations d'erreur a posteriori pour le couplage des équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection-diffusion-réaction

Joanna Faddoul

► **To cite this version:**

Joanna Faddoul. Estimations d'erreur a posteriori pour le couplage des équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection-diffusion-réaction. Mathématiques [math]. Université Sorbonne Paris Nord; Université Saint Joseph de Beyrouth, 2022. Français. NNT: . tel-04001427

HAL Id: tel-04001427

<https://theses.hal.science/tel-04001427v1>

Submitted on 22 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License



UNIVERSITÉ PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD École Doctorale Sciences,
Technologies, Santé Galilée
et
UNIVERSITÉ SAINT-JOSEPH DE BEYROUTH École Doctorale Sciences,
d'Ingénierie et de Technologie

Estimations d'erreur a posteriori pour le couplage des équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection–diffusion–réaction

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Joanna FADDOUL

pour l'obtention du grade de
DOCTEUR EN MATHÉMATIQUE

soutenue le 13/12/2022 devant le jury d'examen composé de :

BENKHALDOUN Fayssal, Université Sorbonne Paris Nord Président du jury
CHAMOIN Ludovic, École normale supérieure Paris-Saclay Rapporteur
MGHAZLI Zoubida, Université Ibn Tofaïl, Kenitra, Maroc Rapporteuse
LUCE Robert, Université de Pau et des Pays de l'Adour Examinateur
MANSOUR Gihane, Université Saint-Joseph de Beyrouth Examinatrice
SAYAH Toni, Université Saint-Joseph de Beyrouth Directeur de thèse
OMNES Pascal, Université Sorbonne Paris Nord Directeur de thèse
DAKROUB Jad, Université Saint-Joseph de Beyrouth Co-directeur de thèse

Remerciements

Ce manuscrit de thèse est l'aboutissement d'un travail de trois années, effectué en cotutelle entre la Faculté des Sciences de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth et le laboratoire LAGA de l'Université Sorbonne Paris Nord. Cette thèse a été financée par la bourse de l'AUF - Agence Universitaire de la Francophonie, le CNRS-Liban - Centre national de la recherche scientifique et le conseil de la recherche de l'Université Saint-Joseph de Beyrouth.

Je n'aurais jamais pu réaliser ce travail doctoral sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité et l'intérêt se sont manifestés à l'égard de ma recherche.

Mes premiers remerciements s'adressent à mes directeurs de thèse Pr. Pascal Omnes et Pr. Toni Sayah, et à mon co-directeur Dr. Jad Dakroub.

Je commence par remercier Pr. Pascal Omnes, qui m'a accueillie et dirigée tout au long de cette thèse. Je vous remercie pour votre patience, votre rigueur et votre disponibilité ainsi que pour votre bonne humeur. Je n'aurais pas pu progresser et m'épanouir autant dans mon travail de recherche sans votre soutien. Merci de m'avoir si bien encadrée dans le monde de la recherche.

Je tiens également à remercier du fond du cœur Pr. Toni Sayah pour sa disponibilité, son encadrement et son appui autour de mes travaux, ce qui m'a permis d'avancer à mon rythme dans les meilleures conditions. Je le remercie aussi pour son optimisme, son enthousiasme, ses conseils et sa confiance sans faille, qui ont été une source d'appui pour mener à bien ce travail. Je lui suis profondément reconnaissante pour son encadrement scientifique et humain ainsi que la construction d'une ambiance de travail sereine et dynamique. Je tiens aussi à le remercier d'être toujours disponible pour répondre à toutes mes questions.

Je termine en remerciant mon co-directeur de thèse Dr. Jad Dakroub pour son aide et ses encouragements.

Je ne peux clôturer mes remerciements qu'en ayant une immense pensée à mes amis Valeria, Tracy, Judith, Christina, Rita, Angelo et surtout Marilynn, avec qui j'ai partagé les moments difficiles, et qui répondaient toujours présentes pour m'épauler. Je remercie également celles qui furent présentes à mes côtés lorsque j'en avais besoin : Ghina, Rebecca, Rim et mon groupe des Guides de la Sainte Famille Jounieh. Un merci spécial, à une personne pas comme les autres. Merci Marcel pour ton encouragement et ton soutien sans limite, qui furent d'une aide si précieuse.

Je termine enfin par ceux que je ne pourrai jamais remercier par des mots, ma famille,

mon père Khalil et ma mère Clémona pour leur indestructible et constant soutien. Je les remercie pour leur encouragement et leur amour infini. Ma soeur Christelle et mon frère Christopher m'ont toujours soutenu de manière indéfectible et ont été la source de ma motivation ! J'aimerais aussi remercier ma tante Fériale et ma grande mère pour leurs prières.

Que celles et ceux que j'aurais oubliés ici me pardonnent !

Table des matières

Introduction	1
1 Problème de couplage continu et discret	7
1.1 Rappels et définitions	8
1.2 Problème variationnel continu	11
1.3 Problème discret stabilisé	15
1.3.1 Discrétisation en temps	15
1.3.2 Discrétisation en espace	16
1.3.3 Existence et unicité de la solution du problème discret	18
2 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i>	22
2.1 Construction des indicateurs d'erreurs	22
2.2 Les majorations d'erreur <i>a posteriori</i>	31
2.2.1 Majoration des indicateurs	57
3 Problème de couplage avec coefficient de diffusion dépendant de la concentration	67
3.1 Introduction	67
3.2 Problème variationnel continu	68
3.3 Problème discret stabilisé	85
3.3.1 Existence et unicité de la solution du problème discret	86
3.4 Estimation d'erreur <i>a posteriori</i>	87
3.5 Construction des indicateurs d'erreurs	87
3.6 Les majorations d'erreur <i>a posteriori</i>	91
3.6.1 Majoration des indicateurs	98
4 Simulations numériques	103
4.1 Simulation numérique sur maillage uniforme	103
4.2 Simulation numérique adaptative (cas académique)	106
4.2.1 Terme de diffusion constant	106
4.2.2 Terme de diffusion qui dépend de la concentration	109
4.3 Simulation numérique <i>adaptative (cas plus réaliste)</i>	112

Table des figures

4.1	Domaine Ω	103
4.2	Pression numérique à $t = 1$	104
4.3	Pression théorique à $t = 1$	104
4.4	Vitesse numérique à $t = 1$	104
4.5	Vitesse théorique à $t = 1$	104
4.6	Concentration numérique à $t = 1$	105
4.7	Concentration théorique à $t = 1$	105
4.8	Courbe d'erreur en fonction du pas de maillage.	105
4.9	Maillage initial	107
4.10	Maillage à $t = 0.241$	107
4.11	Maillage à $t = 0.496$	107
4.12	Maillage à $t = 0.897$	107
4.13	Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique du cas étudié.	108
4.14	Courbe des indicateurs d'erreur en échelle logarithmique du cas étudié.	108
4.15	Maillage initial	110
4.16	Maillage à $t = 0.268$	110
4.17	Maillage à $t = 0.475$	110
4.18	Maillage à $t = 0.857$	110
4.19	Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique du cas étudié.	111
4.20	Courbe des indicateurs d'erreur en échelle logarithmique du cas étudié.	111
4.21	Le domaine	112
4.22	le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 50$	113
4.23	le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 150$	113
4.24	le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 200$	114
4.25	La température numérique (à gauche) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 600$	114
4.26	La température numérique (à gauche) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 1200$	115
4.27	Indicateurs d'erreur totaux E_{tot}	115

Liste des tableaux

- 4.1 Répartition de l'indice d'efficacité en fonction du nombre de degrés de liberté.109
- 4.2 Répartition de l'indice d'efficacité en fonction du nombre de degrés de liberté.112

Résumé

La solution exacte des équations aux dérivées partielles est en général difficile à calculer. Pour cela, des méthodes numériques ont été développées, qui nous permettent de trouver des solutions approchées. Dans cette thèse, nous nous intéressons aux équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires qui décrivent le comportement d'un fluide. Nous choisissons un cas où la force appliquée au fluide ainsi que la viscosité du fluide dépendent d'une autre variable, par exemple sa température ou la concentration d'une certaine matière dans ce fluide. Alors nous avons besoin de coupler les équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection-diffusion-réaction qui décrit le transport de la variable supplémentaire à la vitesse du fluide. Notre étude s'est développée à trois niveaux.

Le problème est tout d'abord discrétisé en utilisant le schéma d'Euler pour la discrétisation en temps et les éléments finis " P1-bulle/ P1/ P1" pour la discrétisation en espace. Dans un premier temps, nous étudions l'estimation d'erreur *a posteriori* de notre problème de couplage en supposant que le coefficient de diffusion dans l'équation de transport est une constante. Cette estimation fait apparaître deux types d'indicateurs d'erreur, le premier lié à la discrétisation en temps et le second lié à discrétisation en espace.

Dans un second temps, nous reprenons l'étude du problème couplé en supposant cette fois que le coefficient de diffusion dépend aussi de la variable transportée. Nous commençons par montrer l'existence et l'unicité conditionnelle de la solution de ce nouveau problème. Puis nous établissons l'estimation d'erreur *a posteriori* de ce dernier en suivant des étapes identiques à celles effectuées lors de notre première étude.

Finalement, des simulations numériques sont élaborées à l'aide du logiciel FreeFem++ pour valider les résultats théoriques. Les simulations adaptatives en temps et en espace démontrent l'utilité de la démarche.

Mots clés : Estimation d'erreur *a posteriori*, équations de Navier-Stokes, équation de convection-diffusion-réaction, éléments finis, méthode adaptative.

Abstract

The exact solution of partial differential equations is generally difficult to calculate. For this reason, numerical methods have been developed, which allow to find approximate solutions. In this thesis, we are interested in the unsteady incompressible Navier-Stokes equations which describe the behaviour of a fluid. We choose a case where the force applied to the fluid as well as its viscosity depend on another variable, for example its temperature or the concentration of a certain material in the fluid. So we need to couple the Navier-Stokes equations with the convection-diffusion-reaction equation which describes the transport of the additional variable with the fluid velocity. Our study was developed along three lines.

The problem is discretized using the Euler scheme for the time discretization and the "P1-bubble/P1/P1" finite elements for the space discretization. In a first step, we study the error estimate of the coupled problem assuming that the diffusion coefficient in the transport equation is a constant. This estimate involves two types of error indicators, the first related to the discretization in time and the second to the discretization in space.

In a second step, we take up the study of the coupled problem, assuming this time that the diffusion coefficient also depends on the transported variable. We start by showing the existence and the conditional uniqueness of the solution of this new problem. Then we establish the error estimate of the latter by following the same steps as those carried out in our first study.

Finally, numerical simulations are elaborated using FreeFem++ software to validate the theoretical results. The time and space adaptive simulations demonstrate the usefulness of the approach.

Keywords : *A posteriori* error estimation, Navier-Stokes equations, convection-diffusion-reaction equation, finite element method, adaptive methods.

Introduction

Notre compréhension des phénomènes physique du monde qui nous entoure et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur des modèles décrits par des équations aux dérivées partielles. Nous pouvons citer l'exemple auquel nous nous intéressons dans cette thèse, à savoir les équations de Navier-Stokes, des équations aux dérivées partielles en temps et en espaces associées à la mécanique des fluides.

Les équations de Navier-Stokes

Les équations de Navier-Stokes sont l'ensemble des équations les plus utilisées dans le domaine de la modélisation des écoulements des fluides visqueux newtoniens. Ces équations décrivent l'évolution du mouvement d'un tel fluide soumis à des contraintes extérieures. Ces équations sont constituées de plusieurs lois de conservation. La première loi qui est appelée loi de conservation de la masse, impose la relation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

la seconde loi de conservation de la quantité de mouvement donne

$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla P - \nabla \cdot (2\mu \mathbb{D} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{Id}) = F, \quad (2)$$

où ρ est la masse volumique et \mathbf{u} est la vitesse du fluide, μ est la viscosité dynamique du fluide, λ le coefficient de Lamé, P est la pression, F est une force extérieure donnée et $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.

Dans le cas d'un fluide très faiblement compressible, la masse volumique est (presque) constante. Alors d'après (1), nous pouvons faire l'approximation que le champ de vitesse est à divergence nulle. Par suite les équations (1) et (2) se résument à

$$\begin{cases} \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \nabla \cdot (2\mu \mathbb{D} \mathbf{u}) + \nabla P = F \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases}$$

Nous supposons de plus que la viscosité μ ainsi que la force extérieure F dépendent toutes les deux d'une autre variable, notée C dans la suite, qui peut être par exemple la concentration d'une certaine matière dans le fluide ou la température de celui-ci. Dans ce dernier cas, la force extérieure permet de prendre en compte la dilatation du fluide, tout en conservant sa nature incompressible (approximation de Boussinesq).

Alors le système des équations de Navier-Stokes sera donné dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) et pour un intervalle de temps $[0, T]$ par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot (2\nu(C) \mathbb{D} \mathbf{u}) + \nabla p = \mathbf{f}(C) \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (3)$$

En notant ρ_0 la masse volumique supposée constante du fluide, les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} , la pression cinématique $p = \frac{P}{\rho_0}$ et la concentration (ou la température) C . Les

contraintes extérieures sont notées $\mathbf{f} = \frac{F}{\rho_0}$ et la viscosité cinématique $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$.

Puisque nous nous intéressons à l'étude d'un cas où la force appliquée au fluide ainsi que la viscosité du fluide dépendent d'une nouvelle inconnue, nous avons besoin de donner un modèle décrivant l'évolution de celle-ci. Nous choisissons ici de coupler les équations de Navier-Stokes avec l'équation de convection-diffusion-réaction décrivant le transport de cette nouvelle inconnue par le fluide.

L'équation de convection-diffusion-réaction

L'équation de convection–diffusion–réaction décrit les variations en espace et en temps d'une certaine quantité (concentration d'une certaine substance dans un fluide par exemple, énergie thermique) sous l'influence de trois processus, à savoir, la convection, la diffusion et la réaction.

L'équation de convection–diffusion–réaction instationnaire dont l'inconnue est la concentration C , est donnée par :

$$\frac{\partial C}{\partial t} - \nabla \cdot (\alpha \nabla C) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)C + r_0 C = g$$

où α est la constante de diffusion, r_0 est un réel positif et g est une fonction donnée. À noter que dans la première partie de notre étude nous supposons α constante alors que dans le chapitre trois le coefficient de diffusion dépendra de la concentration (soit $\alpha = \alpha(C)$).

Nous nous amenons donc au problème de Navier-Stokes instationnaire couplé avec l'équation de convection-diffusion-réaction.

Notre problème de couplage

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ continue lipschitzienne et $[0, T]$ un intervalle de \mathbb{R} .

Nous supposons pour la simplicité que la vitesse et la concentration du fluide satisfont les conditions de Dirichlet homogènes.

Le problème à résoudre se modélise alors comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \operatorname{div}(2\nu(C(x, t))\mathbb{D}(\mathbf{u})(x, t)) \\ \quad + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(x, t) + \nabla p(x, t) & = \mathbf{f}(x, C(x, t)) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)C(x, t) \\ \quad - \operatorname{div}(\alpha(C(x, t))\nabla C(x, t)) + r_0 C(x, t) & = g(x, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(x, t) & = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, t) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ C(x, t) & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, 0) & = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega , \\ C(x, 0) & = C_0 & \text{sur } \Omega . \end{array} \right. \quad (4)$$

Malheureusement, comme pour la plupart des équations aux dérivées partielles, il est impossible d'obtenir explicitement la solution exacte de notre problème. Néanmoins, il existe des méthodes numériques qui nous permettent d'obtenir des solutions approchées pour ces équations. À titre d'exemple, nous pouvons citer la méthode des éléments finis, que l'on utilise dans notre étude.

Méthode des éléments finis

Les éléments finis sont une technique de discrétisation qui permet de transformer une théorie continue conduisant à des problèmes dont on ne sait pas trouver de solution exacte, en une théorie discrète conduisant à de simples systèmes d'équations algébriques que l'on sait résoudre. En général, la discrétisation consiste à découper le domaine en des sous-domaines polygonaux ou polyédriques par morceaux (pour avoir une approximation de la géométrie). Ce pavage du domaine se nomme "maillage" et les pavés sont les éléments du maillage. Une fois le maillage défini, il faut choisir un espace d'approximation de la solution du problème. Dans la méthode des éléments finis, cet espace est déterminé par des fonctions polynomiales définies sur les éléments du maillage du domaine.

Une simulation réalisée par une méthode numérique peut prendre beaucoup de temps. Une élément déterminant dans ce processus est la finesse du maillage. En effet, si le maillage est grossier uniformément dans le domaine, la durée des calculs sera courte, mais le résultat ne sera pas forcément satisfaisant en terme de précision de l'approximation obtenue. Par contre, si le maillage est très fin de façon uniforme, le temps de calcul peut se révéler prohibitif, alors que dans certaines régions du domaine où la solution recherchée ne présente pas de variations importantes, on aurait pu se contenter d'un maillage grossier. Il faut donc trouver un bon compromis de manière à ce que le maillage soit fin uniquement là où cela est nécessaire. Dans le but de développer une méthode à maillage adaptatif nous allons avoir recours à des estimations d'erreur *a posteriori*.

L'estimation d'erreur *a posteriori*

L'intérêt de ces estimations est de fournir des bornes sur l'erreur qui peuvent être évaluées dès que la solution approchée a été calculée. L'erreur entre la solution exacte (notée (\mathbf{u}, C, p)) et la solution approchée (notée $(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, p_h^n)$) est majorée par la somme de quantités locales en espace et en temps. Notons \mathcal{T}_{nh} le maillage à l'instant t_n et $N = \frac{T}{\tau}$ le nombre d'intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ de temps utilisés, l'estimation d'erreur *a posteriori* sera exprimée de la manière suivante :

$$\|(\mathbf{u}, C, p) - (\mathbf{u}_h^n, C_h^n, p_h^n)\|^2 \leq c \left(\sum_{n=1}^N \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{n,\kappa_n}^h)^2 + (\eta_{n,\kappa_n}^\tau)^2) \right), \quad (5)$$

où η_{n,κ_n}^h et η_{n,κ_n}^τ sont respectivement les indicateurs en espace et en temps qui dépendent uniquement de la solution approchée $(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, p_h^n)$. La constante c est en général indépen-

dante de la solution exacte dans les problèmes linéaires mais dans le cas des systèmes d'équations non-linéaires (comme est notre cas), elle dépend en général de (\mathbf{u}, p, C) . Dans ce cas on ne peut pas la calculer, mais ceci ne nous empêche pas d'appliquer la technique d'adaptation de maillage, qui se base uniquement sur les indicateurs η . En fait, la majoration (5) nous permettra de réadapter (raffiner ou déraffiner) certaines régions du maillage et aussi de réadapter à chaque itération le pas de temps utilisé. Un premier objectif est toujours de faire diminuer les η les plus élevés par raffinement local, et de déraffiner là où les η sont faibles. Un second objectif est d'équilibrer les estimateurs en temps et en espace.

L'objectif est donc d'établir une analyse d'erreur *a posteriori* pour les équations instationnaire de Navier-Stokes couplées avec l'équation de convection diffusion réaction.

L'analyse d'erreur *a posteriori* a commencé avec Babuška et Rheinboldt [8, 7] ; on peut également citer les références importantes suivantes : Verfürth [34] ou Ainsworth et Oden [4]. Cette analyse d'erreur contrôle l'erreur globale de la discrétisation en fournissant des indicateurs d'erreur faciles à calculer. Une fois que ces indicateurs sont construits, leur efficacité peut être prouvée en bornant chaque indicateur par l'erreur locale, une propriété également appelée optimalité. De nombreuses études ont été faites concernant les erreurs *a posteriori*. Sans prétendre à l'exhaustivité, on peut citer par exemple Ladevèze [28] pour les estimateurs d'erreur basées sur les relations constitutives pour l'analyse par éléments finis de problèmes non linéaires et instationnaires, Verfürth [35] pour l'équation de la chaleur, Bernardi et Verfürth [15] pour les équations de Stokes instationnaires, Bernardi et Süli [14] pour l'adaptabilité temporelle et spatiale pour l'équation d'onde du second ordre, Bergam, Bernardi et Mghazli [9] pour quelques équations paraboliques, Ern et Vohralík [23] pour des estimations basées sur le potentiel et reconstruction du flux pour l'équation de la chaleur. Une perspective chronologique de l'estimation d'erreur *a posteriori* dans diverses normes pour les problèmes paraboliques est présentée dans [22].

En ce qui concerne les problèmes d'écoulements incompressibles, divers travaux traitent des estimateurs d'erreur *a posteriori* pour les discrétisations par éléments finis mixtes des équations de Navier-Stokes. Nous pouvons citer Luo et Zhu [29], El Akkad, El Khalfi et Guessous [21], Bernardi *et al.* [10], Durango et Novo [20]. Bernardi et Sayah ont établi une estimation d'erreur *a posteriori* pour l'équation de Stokes instationnaire [13] et puis celle du système de Navier-Stokes [12] avec des conditions mixtes aux bords ; enfin, Nassreddine et Sayah ont proposé des estimations améliorées dans [31]. Dans le cas stationnaire, Dakroub, Faddoul et Sayah [18] ont présenté une analyse *a posteriori* de la méthode de Newton appliquée au problème de Navier-Stokes, tandis que l'estimation d'erreur *a posteriori* de la méthodologie de simulation des grandes échelles appliquée au problème de Navier-Stokes est présentée par Nassreddine, Omnes et Sayah [30].

Pour ce qui concerne le couplage de l'équation de convection-diffusion avec d'autres modèles, nous pouvons citer Chalhoub *et al.* [16] qui ont établi l'estimation d'erreur *a posteriori* du problème instationnaire de l'équation de convection-diffusion-réaction couplée avec l'équation de Darcy ; de même nous pouvons citer Agroum [1] pour une analyse d'erreur *a posteriori* pour résoudre le problème de Navier-Stokes stationnaire couplé à l'équation de convection-diffusion.

Dans cette thèse, nous traitons le problème instationnaire de l'équation de Navier-Stokes couplé avec l'équation de convection-diffusion-reaction. Nous utilisons une formulation discrétisée à l'aide du schéma d'Euler pour la discrétisation en temps et des éléments finis pour la discrétisation en espace, pour laquelle Aldbaissy *et al.* [5] ont établi une estimation d'erreur *a priori*. Le couplage de ces deux équations est dû au fait que le coefficient de viscosité ainsi que la force extérieure appliquée au fluide présents dans l'équation de Navier-Stokes dépendent de la concentration, et au fait que la vitesse de convection dans l'équation de transport est la vitesse impliquée dans le système de Navier-Stokes. Ici, nous établissons une estimation d'erreur *a posteriori* basée sur deux types d'indicateurs d'erreur calculables, le premier étant lié à la discrétisation temporelle et le second à la discrétisation spatiale. Nous montrons également les investigations numériques correspondantes.

Le plan de la thèse

1. Dans le premier chapitre, nous introduisons quelques notations et rappelons quelques théorèmes et propositions utiles pour notre étude. Nous considérons que le coefficient de diffusion de l'équation de convection diffusion réaction est une constante. Puis, nous introduisons la formulation variationnelle de notre problème de couplage. Par la suite, nous le discrétisons en utilisant le schéma d'Euler pour la discrétisation en temps et les éléments finis "P1-bulle/ P1 / P1" pour la discrétisation en espace pour obtenir notre problème variationnel discret. La dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'existence et l'unicité de la solution du problème discret.
2. Dans le second chapitre, nous établissons l'estimation d'erreur *a posteriori* de notre problème de couplage. Nous commençons par établir les indicateurs d'erreur en temps et en espace de la vitesse et de la concentration. Dans la première étape nous majorons l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée par ces indicateurs d'erreur qui sont des quantités locales. Dans une seconde étape, notre but sera de montrer l'efficacité. En d'autres termes, nous majorons les indicateurs d'erreur par l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.
3. Nous voulons dans le chapitre 3 généraliser notre problème de couplage en prenant le coefficient de diffusion dépendant de la concentration. Pour établir l'étude *a posteriori* de notre nouveau problème de couplage nous allons reprendre toutes les étapes de l'étude *a posterriori*. Mais avant il nous est indispensable d'étudier l'existence et l'unicité de la solution du nouveau problème continu.
4. Le dernier chapitre est consacré à des simulations numériques afin de valider nos résultats théoriques.

Les principaux résultats des Chapitres 1, 2 et 4 font l'objet d'un article actuellement soumis : DAKROUB Jad , FADDOUL Joanna, OMNES Pascal, SAYAH Toni. A posteriori error estimates for the time dependent Navier-Stokes system coupled with the convection-diffusion-reaction equation. *Advances in Computational Mathematics (Springer)*.

Chapitre 1

Problème de couplage continu et discret

Pour commencer notre premier chapitre, nous présentons notre problème de Navier-Stokes instationnaire couplé avec l'équation convection-diffusion-réaction, puis nous introduisons quelques notations, propositions et propriétés. Dans la suite, nous présentons la formulation variationnelle (E) ainsi que son étude d'existence et d'unicité. La dernière partie de ce chapitre est consacré à la discretisation du problème variationnel en temps et en espace et à montrer l'existence et l'unicité de sa solution.

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ continue lipschitzienne et $[0, T]$ un intervalle de \mathbb{R} .

Nous supposons que ν et \mathbf{f} dépendent de la concentration et que, pour la simplicité, la vitesse et la concentration du fluide satisfont les conditions de Dirichlet homogènes.

Le problème à résoudre se modélise alors comme suit,

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \operatorname{div}(2\nu(C(x, t))\mathbb{D}(\mathbf{u})(x, t)) \\ \quad + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(x, t) + \nabla p(x, t) = \mathbf{f}(x, C(x, t)) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)C(x, t) \\ \quad - \alpha \Delta C(x, t) + r_0 C(x, t) = g(x, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ C(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega , \\ C(x, 0) = C_0 & \text{sur } \Omega . \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où α est la constante de diffusion, r_0 est une constante positive et g est une fonction donnée.

Les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} , la pression p et la concentration C de la substance chimique diluée dans le fluide.

Nous avons posé d'une façon classique $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.

Dans ces équations, $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ et $(\mathbf{u} \cdot \nabla)C$ représentent des termes de convection, $\operatorname{div}(\nu(C)\nabla \mathbf{u})$

et ΔC représentent des termes de diffusion et $r_0 C(x, t)$ représente le terme de réaction.

1.1 Rappels et définitions

Dans cette partie, nous introduisons les notations et les espaces fonctionnels que nous utiliserons par la suite.

Remarque 1.1.1. *En coordonnées cartésiennes dans un espace euclidien de dimension d , nous avons pour $\mathbf{u} = (u_i)_{1 \leq i \leq d}$,*

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d} \right), \quad (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^d u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}(x, t),$$

$$\Delta \mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i^2}(x, t) \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(x, t) = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(x, t).$$

Nous définissons, pour tout entier $p \geq 1$, l'espace

$$L^p(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d; \mathbf{f} \text{ est mesurable et } \int_{\Omega} |\mathbf{f}(x)|^p d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\| \mathbf{f} \|_{L^p(\Omega)^d} = \left(\int_{\Omega} |\mathbf{f}(x)|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}.$$

Nous définissons de même, pour tout entier m positif et tout réel $r \geq 1$, l'espace de Sobolev

$$W^{m,r}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^r(\Omega); \partial^k \mathbf{v} \in L^r(\Omega), \forall |k| \leq m \},$$

où $k = (k_1, \dots, k_d)$ est un d-uplet d'entiers positifs tel que $|k| = k_1 + \dots + k_d$ et

$$\partial^k \mathbf{v} = \frac{\partial^{|k|} \mathbf{v}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_d^{k_d}}.$$

L'espace $W^{m,r}(\Omega)$ est muni de la semi-norme

$$|\mathbf{v}|_{m,r,\Omega} = \left(\sum_{|k|=m} \int_{\Omega} |\partial^k v|^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}$$

et de la norme

$$\| \mathbf{v} \|_{m,r,\Omega} = \left(\sum_{\ell=0}^m |\mathbf{v}|_{\ell,r,\Omega}^r d\mathbf{x} \right)^{1/r}.$$

Si $r = 2$, l'espace $W^{m,2}(\Omega)$ est noté

$$H^m(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \partial^k \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d, \forall |k| \leq m \right\}.$$

De plus, $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Nous considérons en particulier l'espace

$$H_0^1(\Omega)^d = \{ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \mathbf{v}|_{\partial\Omega} = 0 \},$$

muni de la norme $|\cdot|_{H_0^1(\Omega)^d}$. Nous notons $H^{-1}(\Omega)$ son dual.

L'espace $L^2(\Omega)^d$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} \mathbf{v}(x) \cdot \mathbf{w}(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in L^2(\Omega)^d.$$

Nous utilisons cette même notation quand l'intégrale du membre de droite a une sens, même si \mathbf{v} et \mathbf{w} ne sont pas dans l'espace $L^2(\Omega)^d$. Nous l'utilisons aussi pour les fonctions scalaires au lieu des fonctions vectorielles.

Lemme 1.1.2. *Pour tout réel $p \geq 1$, en dimension $d = 1$ ou 2 , ou pour tout $1 \leq p \leq \frac{2d}{d-2}$ en dimension $d \geq 3$, l'injection de Sobolev nous donne l'existence d'une constante S_p et S_p^0 tel que,*

$$\forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p^0 |\mathbf{v}|_{1,\Omega}, \quad (1.2)$$

et

$$\forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d, \quad \|\mathbf{v}\|_{L^p(\Omega)^d} \leq S_p \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \quad (1.3)$$

Lemme 1.1.3. *En dimension $d = 2$, pour tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$, nous avons*

$$\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \leq 2^{1/4} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} |\mathbf{v}|_{1,\Omega}^{1/2}. \quad (1.4)$$

Pour traiter la variable de temps t , nous définissons l'espace des fonctions définies sur un intervalle de temps $]a, b[$ à valeurs dans un espace fonctionnel séparable W muni d'une norme $\|\cdot\|_W$. Alors, pour tout réel $r \geq 1$, nous introduisons l'espace

$$L^r(a, b; W) = \left\{ \mathbf{f} \text{ est mesurable sur }]a, b[\text{ et } \int_a^b \|\mathbf{f}(t)\|_W^r \, dt < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^r(a,b;W)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_W^r \, dt \right)^{1/2}.$$

Pour $r = \infty$, nous avons

$$L^\infty(a, b; W) = \left\{ \mathbf{f} \text{ est mesurable sur }]a, b[\text{ et } \sup_{t \in [a,b]} \|\mathbf{f}(t)\|_W < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(a,b;W)} = \sup_{t \in [a,b]} \|f(t)\|_W.$$

Remarque 1.1.4. *L'espace $L^r(a, b; W)$ est un espace de Banach si W est un espace de Banach.*

Par la suite, nous définissons l'espace $C^j(0, \hat{T}; W)$ comme étant des fonctions de classe C^j en temps à valeurs dans W .

Afin de formuler le problème variationnel, nous adaptons les notations suivantes :

$$X = H_0^1(\Omega)^d, M = L_0^2(\Omega) \text{ et } Y = H_0^1(\Omega).$$

Les duals de X et Y sont respectivement notés $X' = H^{-1}(\Omega)^d$ et $Y' = H^{-1}(\Omega)$, De plus, nous définissons l'espace suivant

$$V = \left\{ \mathbf{v} \in X; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}.$$

Remarque 1.1.5. *L'espace V est un espace de Hilbert pour la norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ étant donné qu'il est fermé dans un complet X .*

Nous introduisons, l'espace polaire

$$V^\circ = \left\{ \mathbf{f} \in X'; \forall \mathbf{v} \in V, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle = 0 \right\}$$

et l'espace orthogonal

$$V^\perp = \left\{ \mathbf{v} \in X; \forall \omega \in X, \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}(x) \cdot \nabla \omega(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} = 0 \right\}.$$

Nous énonçons dans la suite, un résultat indispensable à l'établissement de l'existence et l'unicité de la solution du problème continu ([25]) :

Théorème 1.1.6. *Si Ω est connexe alors il existe $\beta > 0$ telle que*

a) *l'opérateur ∇ est un isomorphisme de M dans V° . De plus, pour tout $p \in M$,*

$$\| \nabla p \|_{H^{-1}(\Omega)^d} \geq \beta \| p \|_{L^2(\Omega)}, \quad (1.5)$$

b) *l'opérateur div est un isomorphisme de V^\perp dans M . De plus, pour tout $\mathbf{v} \in V^\perp$,*

$$\| \operatorname{div} \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)} \geq \beta |\mathbf{v}|_{(1,\Omega)}. \quad (1.6)$$

De plus, pour tout $p \in M$,

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d} \frac{(p, \operatorname{div} \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_{1,\Omega}} \geq \beta \| p \|_{L^2(\Omega)}. \quad (1.7)$$

Proposition 1.1.7. *Pour tout $w \in L^p(\Omega)^2$, $g \in L^q(\Omega)^2$ et $\forall h \in L^r(\Omega)^2$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, nous avons*

$$\int_{\Omega} w g f \, \mathbf{d}\mathbf{x} \leq \| w \|_{L^p(\Omega)} \| g \|_{L^q(\Omega)} \| h \|_{L^r(\Omega)}. \quad (1.8)$$

Dans la plupart des démonstrations des théorèmes, nous utiliserons les relations évidentes suivantes :

Propriété 1.1.8. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons*

$$a(a - b) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a - b)^2 \quad (1.9)$$

et

$$ab \leq \frac{\xi}{2}a^2 + \frac{1}{2\xi}b^2, \quad (1.10)$$

où ξ est un réel strictement positif quelconque.

1.2 Problème variationnel continu

Pour l'étude théorique d'existence et d'unicité de la solution du problème (1.1), nous nous référons à [2] et [5]. En fait, dans [5], le problème de couplage instationnaire de l'équation de Navier-Stokes avec la chaleur a été étudié. Ils ont démontré l'existence et l'unicité de la solution. Dans cette section, nous introduisons la formulation variationnelle correspondante à notre problème et nous rappelons les résultats théoriques correspondantes.

Nous introduisons désormais les hypothèses suivantes :

Hypothèse 1.2.1. *Nous supposons que les données \mathbf{f}, g et ν vérifient :*

i) \mathbf{f} peut s'écrire sous la forme

$$\mathbf{f}(x, t, C(x, t)) = \mathbf{f}_0(x, t) + \mathbf{f}_1(x, C(x, t)),$$

où $\mathbf{f}_0 \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et \mathbf{f}_1 est $c_{\mathbf{f}_1}^*$ -lipschitzienne par rapport à la concentration de \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R}^d . De plus, nous supposons qu'il existe une constante positive $c_{\mathbf{f}_1}$ telle que

$$\forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}, |\mathbf{f}_1(x, \xi)| \leq c_{\mathbf{f}_1}|\xi|, \quad (1.11)$$

ii) $g \in C^0(0, T; L^2(\Omega))$,

iii) la viscosité cinématique $\nu = \nu_0 + \nu_C$ où $\nu_0 > 0$ est une constante positive et $0 \leq \nu_C \in L^\infty(\mathbb{R})$ et est c_ν -lipschitzienne. De plus, elle vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq \nu_C(\theta) \leq \hat{\nu}_2 \quad (1.12)$$

où $\hat{\nu}_2$ est une constante positive.

iv) $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega)^d$, $\operatorname{div} \mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = 0$ et $C_0 \in L^2(\Omega)$.

Comme conséquence de ces hypothèses, comme ν_0 est une constante et $\mathbb{D}(\mathbf{u})$ est symétrique, pour toute fonction $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in [H_0^1(\Omega)^d]^2$ avec $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous avons

$$(2\nu\mathbb{D}(\mathbf{u}), \nabla\mathbf{v}) = \nu_0(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + (2\nu_C\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v})).$$

De plus, pour toute fonction $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)^d]$ nous avons

$$\nu_0|\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq \nu_0(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{u}) + (2\nu_C\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{u})) \leq (\nu_0 + 2\hat{\nu}_2)|\mathbf{u}|_{H_0^1(\Omega)^d}^2.$$

Remarque 1.2.2. Si \mathbf{f}_1 dépend de x, t et C , nous obtenons les mêmes résultats mais en supposant que \mathbf{f}_1 vérifie l'inégalité suivante

$$\left| \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t}(x, \xi) \right| \leq c'_{\mathbf{f}_1} |\xi|, \forall x \in \Omega, \forall t \in [0, T], \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Par la suite, nous introduisons les notations suivantes :

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\cdot, t), \quad C(t) = C(\cdot, t) \text{ et } p(t) = p(\cdot, t).$$

De plus nous introduisons les formes trilineaires suivantes :

$$c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \int_{\Omega} (\mathbf{u}(x) \nabla) \cdot \mathbf{v}(x) \mathbf{w}(x) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in X$$

et

$$c_C(\mathbf{u}, C, r) = \int_{\Omega} (\mathbf{u}(x) \nabla) \cdot C(x) r(x) \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{u} \in X, \forall C, r \in Y.$$

Les résultats du lemme suivant sont évidents.

Lemme 1.2.3. Pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ et $C \in H_0^1(\Omega)$ tels que $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous avons

$$c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

et

$$c_C(\mathbf{u}, C, C) = 0.$$

La formulation variationnelle équivalente à (1.1) au sens des distributions dans $]0, T[$ est :

$$(E) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\ \quad + \nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) - (p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t, C(t)), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X, \\ \frac{d}{dt}(C(t), r) + c_C(\mathbf{u}(t), C(t), r) + \alpha(\nabla C(t), \nabla r) \\ \quad + r_0(C(t), r) = (g(t), r) \quad \forall r \in Y, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}(t), q) = 0 \quad \forall q \in M, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \\ C(0) = C_0 \quad \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Dans le prochain théorème, nous énonçons le résultat d'existence d'une solution d'un problème similaire au Problème (E) (légèrement modifié) qui a été démontré dans [5, 2].

Théorème 1.2.4. (Existence) Si les Hypothèses (1.2.1) sont vérifiées, alors le problème variationnel (E) admet au moins une solution (\mathbf{u}, p, C) dans l'espace

$$L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Hypothèse 1.2.5. Tout au long de ce travail, nous supposons que la vitesse est dans $C^0(0, T; L^2(\Omega)^d)$ et la concentration dans $C^0(0, T; L^2(\Omega))$.

Théorème 1.2.6. *Sous les Hypothèses 1.2.1 et 1.2.5, toute solution de (E) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u} \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^d)} + \| C \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \| C \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ & \leq \hat{C} \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d} + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

où \hat{C} est une constante positive qui dépend de $S_2^0, \nu_0, \alpha, r_0$ et $c_{\mathbf{f}_1}$.

Preuve. Nous remplaçons \mathbf{v} par \mathbf{u} dans (E). D'après le Lemme (1.2.3) nous obtenons que le terme $c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})$ est nul, alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) \mathbf{u}(x, t) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(x, t))^2 \, dx + \int_{\Omega} \nu_C(C(x, t)) (\mathbb{D} \mathbf{u}(x, t))^2 \, dx \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x, t, C(x, t)) \mathbf{u}(x, t) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (1.15)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz, L'Hypothèse 1.2.1 et le Lemme 1.1.2 pour $p = 2$ donnent :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 | \mathbf{u}(t) |_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ & \leq S_2^0 \| \mathbf{f}_0(t) \|_{L^2(\Omega)^d} | \mathbf{u}(t) |_{H_0^1(\Omega)^d} + S_2^0 \| \mathbf{f}_1(t, C(t)) \|_{L^2(\Omega)^d} | \mathbf{u}(t) |_{H_0^1(\Omega)^d}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Nous commençons par utiliser (1.11) et (1.10) avec $\xi = \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0}$. Nous nous référons au Lemme 1.1.2 ($p = 2$) pour obtenir

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0}{2} | \mathbf{u}(t) |_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (1.17)$$

En premier lieu, l'équation (1.17) nous donne

$$\frac{d}{dt} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 \leq \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2. \quad (1.18)$$

Nous intégrons entre 0 et t pour avoir

$$\begin{aligned} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 & \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C|_{L^2(0,t;H_0^1(\Omega))}^2 \\ & \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Ce qui nous conduit à la majoration suivante :

$$\| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2. \quad (1.20)$$

En second lieu, nous reprenons l'équation (1.17)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0}{2} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\nu_0} \|\mathbf{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2, \quad (1.21)$$

en intégrant entre 0 et T , nous obtenons,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^d)}^2 \leq \frac{2(S_2^0)^2}{(\nu_0)^2} \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{(\nu_0)^2} \|C\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \quad (1.22)$$

Nous déduisons de (1.20) et (1.22) la majoration suivante,

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^d)}^2 \\ & \leq \frac{(2S_2^0)^2}{\nu_0} \left(1 + \frac{1}{\nu_0}\right) \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} \left(1 + \frac{1}{\nu_0}\right) \|C\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + 2 \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

D'autre part, en remplaçant r par C dans la seconde équation de (E), nous obtenons

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t}(t), C(t)\right) + c_C(\mathbf{u}(t), C(t), C(t)) + (\alpha \nabla C(t), \nabla C(t)) + r_0(C(t), C(t)) = (g(t), C(t)). \quad (1.24)$$

Or, d'après le Lemme 1.2.3, le terme $c_C(\mathbf{u}, C, C)$ est nul. L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet d'obtenir :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + r_0 \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|g(t)\|_{L^2(\Omega)} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous appliquons l'inégalité (1.10) pour $\xi = \frac{2(S_2^0)^2}{\alpha}$ et le Lemme 1.1.2 au second membre, pour avoir

$$\frac{d}{dt} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha} \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.25)$$

D'une part, d'après (1.25) nous avons

$$\frac{1}{\alpha} \frac{d}{dt} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} \|g(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (1.26)$$

En intégrant entre 0 et t , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\|g\|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \|C_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|C_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.27)$$

Par suite,

$$\frac{1}{\alpha} \|C\|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \|C_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (1.28)$$

D'autre part, (1.25) nous donne

$$\frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\alpha^2} \| g(t) \|_{L^2(\Omega)}^2,$$

en intégrant entre 0 et T , nous obtenons

$$\| C \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{2r_0}{\alpha} \| C \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\frac{2(S_2^0)^2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (1.29)$$

Finalement, les inégalités (1.23), (1.28) et (1.29) nous permettent de déduire la suivante :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u} \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^d)} + \| C \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \| C \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ & \leq \hat{C} \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d} + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

où \hat{C} ne dépend que de S_2^0 , ν_0 , α , r_0 et $c_{\mathbf{f}_1}$. \square

De plus, un résultat d'unicité conditionnelle de la solution (\mathbf{u}, p, C) du problème variationnel (E) peut être obtenu par une preuve analogue à celle effectuée dans [3] et [5].

Théorème 1.2.7. (*Unicité en dimension $d = 2$*) *Supposons que la viscosité ν_C est lipschitzienne de constante de Lipschitz c_ν . Si le problème (E) admet une solution (\mathbf{u}, p, C) telle que pour $p \geq 4$ et $r \geq 4$,*

$$\mathbf{u} \in L^p(0, T; W^{1,r}(\Omega)^d),$$

alors cette solution est unique.

1.3 Problème discret stabilisé

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème variationnel en temps et en espace. Pour approcher les dérivées en temps de la vitesse et de la concentration, nous utilisons le schéma d'Euler semi-implicite d'ordre un. D'autre part, pour la discrétisation en espace, nous nous intéressons à la méthode des éléments finis.

1.3.1 Discrétisation en temps

La méthode de discrétisation utilisée est la méthode d'Euler semi-implicite (cf. [26]).

Nous introduisons une partition de l'intervalle $[0, T]$ de N intervalles de la forme $[t_n, t_{n+1}]$, $1 \leq n \leq N$, où $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = T$.

Désignons par τ_n la longueur de l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$ et τ_{max} (respectivement τ_{min}) le maximum (respectivement le minimum) des τ_n , pour $1 \leq n \leq N$. Nous supposons que $\tau_0 = \tau_1$ et nous notons par σ_τ le paramètre de régularité

$$\sigma_\tau = \max_{2 \leq n \leq N} \max \left(\frac{\tau_n}{\tau_{n-1}}, \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n} \right).$$

Dans ce qui suit, nous travaillons avec des familles de partition régulière où nous supposons que σ_τ est borné indépendamment de τ .

Nous définissons l'opérateur π_τ (resp. $\pi_{l,\tau}$) : pour tout espace de Banach Y et toute fonction g continue de $]0, T]$ (resp. $[0, T[$) dans Y , nous notons par $\pi_\tau g$ (resp. $\pi_{l,\tau} g$) la fonction escalier qui est constante et égale à $g(t_n)$ (resp. $g(t_{n-1})$) sur chaque intervalle $]t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$.

De la même manière, pour toute suite $(\phi_n)_{0 \leq n \leq N}$ dans Y nous associons la fonction escalier $\pi_\tau \phi_\tau$ (resp. $\pi_{l,\tau} \phi_\tau$) qui est constante et égale à ϕ_n (resp. ϕ_{n-1}) sur chaque intervalle $]t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$.

De plus avec toute famille $(\mathbf{v}^n)_{0 \leq n \leq N}$ dans Y^{N+1} , on associe la fonction \mathbf{v}_τ sur $[0, T]$ qui est affine sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$, et égale à \mathbf{v}_n en t_n , pour $1 \leq n \leq N$. Plus précisément, cette fonction est égale dans $[t_{n-1}, t_n]$ à :

$$\mathbf{v}_\tau = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}(\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) + \mathbf{v}^{n-1} = \mathbf{v}_\tau = \frac{t_n - t}{\tau_n}(\mathbf{v}^n - \mathbf{v}^{n-1}) + \mathbf{v}^n.$$

De même pour la concentration, avec toute famille $(C^n)_{0 \leq n \leq N}$ dans Y^{N+1} , nous associons la fonction C_τ sur $[0, T]$ qui est affine sur chaque intervalle $[t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n \leq N$, et égale à C_n en t_n , pour $1 \leq n \leq N$.

Plus précisément, cette fonction est égale dans $[t_{n-1}, t_n]$ à :

$$C_\tau = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}(C^n - C^{n-1}) + C^{n-1} = C_\tau = \frac{t_n - t}{\tau_n}(C^n - C^{n-1}) + C^n.$$

Remarque 1.3.1. Dans la suite, en raison de simplification, nous notons par \mathbf{u}^n, p^n , et C^n les quantités respectives $\mathbf{u}(x, t_n), p(x, t_n)$ et $C(x, t_n)$.

Remarque 1.3.2. Dans le cas où le pas de temps est constant, que nous notons par τ , nous aurons

$$\tau_i = \tau, \forall i = 1, \dots, n.$$

1.3.2 Discrétisation en espace

Dans cette partie, nous nous intéressons à la discrétisation en espace du problème (E) par la méthode des éléments finis. Désormais, nous supposons que notre domaine Ω est polygonal ($d = 2$) ou polyédrique ($d = 3$), de manière à le recouvrir entièrement. Alors, pour tout $1 \leq n \leq N$, notons $(\mathcal{T}_{nh})_h$ une famille de triangulations en triangles ($d = 2$) ou de tétraèdres ($d = 3$) du domaine Ω telle que l'intersection de deux éléments différents est soit un sommet, soit une arête (ou soit une face pour $d = 3$).

De plus nous avons :

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_{nh}} K.$$

Pour tout élément K de \mathcal{T}_{nh} , soit h_K son diamètre et ρ_K le diamètre de la sphère inscrite dans K . Pour chaque $n \in \{1, \dots, N\}$, h_n désigne le diamètre maximal des éléments de \mathcal{T}_{nh} . Nous définissons par h le maximum des h_n , pour $n \in \{1, \dots, N\}$.

Supposons que la famille X_{nh}, M_{nh} et Y_{nh} tel que $X_{nh} \subset X, M_{nh} \subset M$ et $Y_{nh} \subset Y$. Nous

approchons la vitesse \mathbf{u} par des éléments de Lagrange P_{1b} , la pression p et la concentration C par des éléments finis P_1 . Nous rappelons que, pour tout entier k , $P_k(K)$ désigne l'espace des fonctions dont leur restriction sur K est un polynôme à d variables de degré k et $P_{1b}(K) = P_1(K) + \text{vect}(\psi_K)$, où ψ_K est le produit des coordonnées barycentriques de l'éléments K . Nous introduisons l'espace des éléments finis suivant

$$Z_{nh} = \{q_h \in C^0(\bar{\Omega}) \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, q_h|_K \in P_1\}.$$

D'où, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$,

$$\begin{aligned} X_{nh} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in C^0(\bar{\Omega})^d ; \forall K \in \mathcal{T}_{nh}, \mathbf{v}_h|_K \in P_{1b}, \mathbf{v}_h|_{\partial\Omega=0} \right\}, \\ Y_{nh} &= \left\{ r_h \in Z_{nh}; r_h|_{\partial\Omega=0} \right\}, \\ M_{nh} &= \left\{ q_h \in Z_{nh}; \int_{\Omega} q_h \, d\mathbf{x} = 0 \right\}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Nous introduisons les espaces discrets suivants :

$$\begin{aligned} V_{nh} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh}; \forall q_h \in M_{nh}, \int_{\Omega} q_h(x) \text{div} \, \mathbf{v}_h(x) = 0 \right\}, \\ V_{nh}^o &= \left\{ \mathbf{f}_h \in X'_{nh}; \forall \mathbf{v}_h \in V_{nh}, \langle \mathbf{f}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0 \right\}, \\ V_{nh}^{\perp} &= \left\{ \mathbf{v}_h \in X_{nh}; \forall \omega_h \in X_{nh}, \int_{\Omega} \nabla \mathbf{v}_h(x) \nabla \omega_h(x) = 0 \right\}, \end{aligned} \tag{1.32}$$

où X'_{nh} est le dual de X_{nh} .

Remarque 1.3.3. (cf. [6]) Les espaces X_{nh} et M_{nh} considérés vérifient la condition inf-sup discrète avec une constante $\beta > 0$ indépendante de h :

$$\inf_{p_h^n \in M_{nh}} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{nh}} \frac{\int_{\Omega} \mathbf{v}_h(x) p_h^n(x) \, d\mathbf{x}}{|\mathbf{v}_h|_{H_0^1} \|p_h^n\|_{L^2(\Omega)}} \geq \beta.$$

Pour effectuer l'analyse numérique, il sera plus facile d'ajouter un terme de stabilisation aux termes de convections $((\mathbf{u}_h^{n-1} \nabla) \cdot \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h)$ et $((\mathbf{u}_h^n \nabla) \cdot C_h^n, r_h)$. Nous introduisons les formes trilinéaires suivantes :

$$d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = ((\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) + \frac{1}{2}(\text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h)$$

et

$$d_C(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, r_h) = ((\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla) C_h^n, r_h) + \frac{1}{2}(\text{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n, r_h).$$

Proposition 1.3.4. Pour tous $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in X_{nh}$ et $r_h \in Y_{nh}$, nous avons

$$d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) = 0$$

et

$$d_C(\mathbf{u}_h, r_h, r_h) = 0.$$

Preuve. Il suffit d'appliquer l'inégalité de Green-Riemann aux deux termes de chaque égalité. \square

Le problème variationnel discret associé à la formation variationnelle continue (E) est, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, ayant $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$ et $C_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$, trouver $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$, $C_h^n \in Y_{nh}$ tel que,

$$(Eds1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) + (2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h)) \\ \quad + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, \\ \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}, r_h) + d_C(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, r_h) \\ \quad + \alpha(\nabla C_h^n, \nabla r_h) + r_0(C_h^n, r_h) = (g^n, r_h) \quad \forall r_h \in Y_{nh}, \\ (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) = 0 \quad \forall q_h \in M_{nh}, \end{array} \right.$$

où \mathbf{u}_h^0 et C_h^0 sont des approximations de \mathbf{u}_0 et C_0 .
 g^n et \mathbf{f}^n sont données par

$$g^n = g(t_n)$$

et

$$\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(C_h^{n-1})$$

avec

$$\mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n).$$

Alors, pour tout $\mathbf{v}_h \in V_{nh}$, nous avons, pour $n \in \{1, \dots, N\}$:

Trouver $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$, $C_h^n \in Y_{nh}$ tel que ,

$$(Eds2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) + (2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h)) \\ \quad + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_{nh}, \\ \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}, r_h) + d_C(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, r_h) \\ \quad + \alpha(\nabla C_h^n, \nabla r_h) + r_0(C_h^n, r_h) = (g^n, r_h) \quad \forall r_h \in Y_{nh}, \\ (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) = 0 \quad \forall q_h \in M_{nh}, \end{array} \right.$$

1.3.3 Existence et unicité de la solution du problème discret

Nous avons recours au théorème qui suit :

Théorème 1.3.5. (*Existence et unicité*) A chaque pas du temps, pour $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$, $C_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$ et sous l'hypothèse (1.2.1), le problème (Eds1) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$ dans $X_{nh} \times M_{nh} \times Y_{nh}$.

Preuve. Nous prenons $\mathbf{u}_0 \in V_{nh}$, nous supposons que $\mathbf{u}_h^{n-1} \in V_{nh}$ par récurrence. Nous cherchons $\mathbf{u}_h^n \in V_{nh}$ tel que pour tout \mathbf{v} dans V_{nh}

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}) \quad (1.33)$$

avec

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) = \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}) + (2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})) + (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}).$$

Le terme de droite de (1.33) est continu d'après l'Hypothèse 1.2.1 et puisque $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$ et $C_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$. Nous commençons par démontrer que la forme \tilde{a}_1 est continue et coercive. La continuité est évidente compte tenu du fait que $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$. Pour la coercivité, pour tout $\mathbf{u}_h^n \in V_{nh}$, ayant $(\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) = 0$ parce que $\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} = 0$, nous avons

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) = \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{u}_h^n) + (2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)).$$

L'inégalité (1.12) nous donne la majoration suivante

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) \geq \frac{1}{\tau_n} \|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2.$$

D'où,

$$\tilde{a}_1(\mathbf{u}_h^n, \mathbf{u}_h^n) \geq \min\left(\frac{1}{\tau_{max}}, \nu_0\right) \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^1(\Omega)^d}^2.$$

Nous déduisons, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution $\mathbf{u}_h^n \in V_{nh}$ de la première équation du problème variationnel discret (Eds2).

Comme pour tout $\mathbf{v} \in V_{nh}$, nous avons

$$\langle \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n} - \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n - \nabla \cdot (2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) \rangle = 0,$$

alors d'après le théorème 1.1.6, il existe $\mathbf{p}_h^n \in M_{nh}$, tel que pour tout $\mathbf{v} \in X_{nh}$

$$\begin{aligned} -(p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) - \left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{v} \right) - \nu_0(\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}) \\ &\quad - 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})) - (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (1.34)$$

De même pour démontrer l'existence et l'unicité de la concentration C du problème variationnel (Eds1), nous considérons, pour tous $C, r \in Y_{nh}$, la forme bilinéaire suivante :

$$\tilde{a}_2(C, r) = \frac{1}{\tau_n}(C, r) + (\nabla C, \nabla r) + (\mathbf{u}_h^n \nabla C, r) + (r_0 C, r).$$

Comme la forme \tilde{a}_2 est continue et coercive nous déduisons d'après Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution $C_h^n \in Y_{nh}$. \square

Proposition 1.3.6. *A chaque itération n , sous les Hypothèses 1.2.1, la solution $(\mathbf{u}_h^n, C_h^n) \in X_{nh} \times Y_{nh}$ du problème variationnel discret (Eds1) vérifie, pour tout $m \in \{1, \dots, N\}$, les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ &\leq \tilde{C}_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \|g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^m \tau_n \|\mathbf{f}_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_h^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| C_h^m \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n |C_h^n|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \sum_{n=0}^m \frac{\tau_n}{2} \| C_h^n \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \tilde{C}'_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \| g^n \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.36)$$

où \tilde{C}_d et \tilde{C}'_d sont deux constantes positives indépendantes de h et m .

Preuve. Dans une première étape, nous montrons l'inégalité vérifiée par la concentration (1.36). En effet, en suivant la même démarche de la preuve du Théorème 1.2.6, nous obtenons, en remplaçant r_h^n par C_h^n dans la deuxième équation du problème variationnel (Eds1), l'inégalité suivante

$$\frac{1}{2} \| C_h^m \|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{1}{2} \| C_h^{m-1} \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha \tau_m}{2} |C_h^m|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{r_0 \tau_m}{2} \| C_h^m \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2 \tau_m}{2\alpha} \| g^m \|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Nous appliquons la somme sur n de 1 jusqu'à $m \leq N$ pour avoir l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| C_h^m \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n |C_h^n|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{r_0}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n \| C_h^n \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \tilde{C}'_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \| g^n \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.37)$$

D'autre part, nous montrons que \mathbf{u}_h^n vérifie l'estimation (1.35). Il suffit de remplacer \mathbf{v}_h par \mathbf{u}_h^n dans la première équation du problème variationnel (Eds2). Nous obtenons alors, d'après Proposition (1.3.4), l'équation :

$$\left(\frac{\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{u}_h^n \right) + (\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{u}_h^n) + (2\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n, \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n) = (\mathbf{f}_0^n, \mathbf{u}_h^n) + (\mathbf{f}_1(C_h^{n-1}), \mathbf{u}_h^n),$$

qui par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (1.9) donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^n \|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2\tau_n} \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ \leq S_0^2 \| \mathbf{f}_1(C_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} + S_0^2 \| \mathbf{f}_0^n \|_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d} \end{aligned} \quad (1.38)$$

Comme ν est bornée, alors (1.38) implique en utilisant (1.12) et (1.10) pour $\xi = \frac{2}{\nu_0}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \mathbf{u}_h^n \|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \frac{1}{2} \| \mathbf{u}_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0 \tau_n}{2} |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ \leq \frac{(S_0^2)^2 \tau_n c_{\mathbf{f}_1}^2}{\hat{\nu}_2} \| C_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)} + (S_0^2)^2 \tau_n \| \mathbf{f}_0^n \|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Nous insérons (1.37) dans (1.39). Nous obtenons alors, en sommant sur n entre 1 et $m \in \{1, \dots, N\}$, l'estimation de la vitesse suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq \tilde{C}_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \|g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n \sum_{n=0}^m \|\mathbf{f}_0^n\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ \left. + \|C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_h^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

□

Chapitre 2

Estimation d'erreur *a posteriori*

Le but de cette partie est d'établir une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte (\mathbf{u}, p) du problème (1.1) et la solution numérique du problème (Eds1). Nous supposons que la solution du problème (1.1) est unique et suffisamment régulière en particulier $\mathbf{u} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $C \in C^0(0, T; L^2(\Omega))$. Dans ce chapitre, nous nous limitons à la dimension $d = 2$ pour des raisons techniques que nous allons présenter par la suite. Nous commençons par construire les indicateurs, puis nous établissons l'estimation d'erreur *a posteriori*.

2.1 Construction des indicateurs d'erreurs

Nous définissons l'espace :

$$Z_{nh}^l = \{g_h \in L^2(\Omega); \forall \kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}, g_h|_{\kappa_n} \in P_l(\kappa_n)\},$$

où l est plus petit que le degré des polynômes dans X_{nh} . Pour $1 \leq n \leq N$, nous fixons une approximation f_h^n de f^n dans Z_{nh}^l et nous prenons $l = 1$.

Nous notons par :

- Γ_h^i l'ensemble des arêtes du maillage qui ne sont pas contenues dans $\partial\Omega$,
- Γ_h^b l'ensemble des arêtes du maillage qui sont contenues dans $\partial\Omega$.

Pour tout élément κ_n dans \mathcal{T}_{nh} , nous notons par :

- ξ_{κ_n} l'ensemble des arêtes de κ_n qui ne sont pas incluses dans $\partial\Omega$,
- Δ_{κ_n} l'union des éléments de \mathcal{T}_{nh} qui ont un sommet commun avec κ_n ,
- Δ_{e_n} l'union des éléments de \mathcal{T}_{nh} qui ont e_n comme arête,
- h_{κ_n} le diamètre de κ_n et h_{e_n} le diamètre de l'arête e_n ,
- $[\cdot]_{e_n}$ le saut sur chaque arête e_n dans ξ_{κ_n} (ce n'est pas nécessaire de préciser son signe),
- n_{κ_n} le vecteur unitaire normal sortant de κ_n sur $\partial\kappa_n$.

Pour la démonstration des théorèmes suivants, nous définissons pour un élément κ_n de \mathcal{T}_{nh} , la fonction bulle ψ_{κ_n} (resp. ψ_{e_n}) qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées de κ_n (resp. des deux coordonnées barycentriques associées aux sommets de

e_n).

De plus, nous considérons \mathcal{L}_{e_n} l'opérateur de relèvement défini sur les polynômes sur e_n s'annulant sur ∂e_n en des polynômes sur les deux éléments κ_n et κ'_n contenant e_n s'annulant sur $\partial(\kappa_n \cup \kappa'_n) \cap e_n$. Cet opérateur est réalisé par transformation affine à partir d'un opérateur fixé sur l'élément de référence.

Nous rappelons les propriétés suivantes du ([34], lemme 3.3) :

Propriété 2.1.1. *Notons par $P_r(\kappa_n)$ l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à r sur κ_n , nous avons donc :*

$$\forall v \in P_r(\kappa_n), \begin{cases} \|v\|_{0,\kappa_n} \leq \|v\psi_{\kappa_n}^{1/2}\|_{0,\kappa_n} \leq c' \|v\|_{0,\kappa_n}, \\ |v|_{1,\kappa_n} \leq ch_{\kappa_n}^{-1} \|v\|_{0,\kappa_n}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Propriété 2.1.2. *Notons par $P_r(e_n)$ l'espace des polynômes de degré plus petit ou égal à r sur e_n . Par suite, nous avons donc :*

$$\forall v \in P_r(e_n), \quad c \|v\|_{0,e_n} \leq \|v\psi_{e_n}^{1/2}\|_{0,e_n} \leq c' \|v\|_{0,e_n}, \quad (2.2)$$

et pour tout polynôme v dans $P_r(e_n)$ s'annulant sur $\partial(e_n)$, si κ_n est un élément qui contient e_n nous avons,

$$\|\mathcal{L}_{e_n}v\|_{0,\kappa_n} + h_{e_n}| \mathcal{L}_{e_n}v |_{1,\kappa_n} \leq ch_{e_n}^{1/2} \|v\|_{0,e_n}. \quad (2.3)$$

De plus, nous introduisons l'opérateur de régularisation de Clément \mathcal{C}_{hn} [17] qui se caractérise par les propriétés suivantes : (voir [11] section IX.3 BMR) pour tout \mathbf{w} dans $H^1(\Omega)^2$, $\mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}$ appartient à l'espace des éléments finis affines et continus, vérifiant pour tout κ_n dans \mathcal{T}_{nh} et e_n dans ξ_{κ_n} les relations :

$$\|\mathbf{w} - \mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}\|_{0,\kappa_n} \leq ch_{\kappa_n} |\mathbf{w}|_{1,\Delta_{\kappa_n}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{w} - \mathcal{C}_{nh}\mathbf{w}\|_{0,e_n} \leq ch_{e_n}^{1/2} |\mathbf{w}|_{1,\Delta_{e_n}}. \quad (2.4)$$

De plus, nous aurons les mêmes inégalités (2.4) pour \mathbf{w} dans $X = H_0^1(\Omega)^2$ (voir [17] et [11]), section IX.3).

Pour l'étude de l'erreur *a posteriori*, nous considérons les fonctions discrètes en temps et affines par morceaux \mathbf{u}_h et C_h qui prennent dans l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$, les valeurs :

$$\mathbf{u}_h(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \mathbf{u}_h^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \mathbf{u}_h^n$$

et

$$C_h(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + C_h^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + C_h^n. \quad (2.5)$$

Nous avons alors

$$\frac{d\mathbf{u}_h(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})$$

et

$$\frac{dC_h(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}).$$

Nous définissons la fonction p_h constante par morceaux prenant la valeur p_h^n sur chaque intervalle $]t_{n-1}, t_n[$.

Nous démontrons une estimation d'erreur *a posteriori*, en utilisant les normes suivantes :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]](t_m) &= \left(\|\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \nu_0 \max \left(\int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} [[C - C_h]](t_m) &= \left(\|C(t_m) - C_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \alpha \max \left(\int_0^{t_m} \|C(t) - C_h(t)\|_Y^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_Y^2 dt \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dans la suite, nous allons établir les équations aux résidus correspondantes aux problèmes (1.1) et (Eds1).

Lemme 2.1.3. *En combinant (1.1) et (Eds1), nous déduisons que*

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0) &= \mathbf{0}, \\ (C - C_h)(0) &= 0. \end{aligned}$$

De plus, pour $1 \leq n \leq N$, pour t dans $]t_{n-1}, t_n]$, pour tous \mathbf{v} dans X , r dans Y et q dans M nous avons

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \right) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) \\ & \quad + 2(\nu_C(C(t)) \mathbb{D} \mathbf{u}(t) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D} \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbb{D} \mathbf{v}) \\ & + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\ & \quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - p_h(t)) \\ & = (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \langle R_u(\mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \rangle, \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + \alpha (\nabla (C - C_h)(t), \nabla r) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \\ & + r_0 (C(t) - C_h(t), r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\ & = (g(t) - g(t_n), r) + \langle R_c(C_h)(t), r \rangle, \\ & \int_\Omega q(t, x) \operatorname{div} (\mathbf{u}(t, x) - \mathbf{u}_h(t, x)) = - \int_\Omega q(t, x) \operatorname{div} (\mathbf{u}_h(t, x)). \end{aligned} \right. \quad (2.8)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} \rangle &= (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v}) - \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}) \\ & \quad - 2(\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n, \mathbb{D} \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) \\ & \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}(t)) \mathbf{u}_h^n(t), \mathbf{v}) + (\operatorname{div} (\mathbf{v}), p_h^n), \end{aligned} \quad (2.9)$$

et

$$\langle R_c(C_h)(t), r \rangle = \langle R_c^\tau(C_h)(t), r \rangle + \langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle \text{ pour tout } r_h \in Y_{nh}$$

où

$$\langle R_c^\tau(C_h)(t), r \rangle = -\alpha(\nabla(C_h(t) - \pi_\tau(C_h)(t)), \nabla r) + r_0(C_h(t) - \pi_\tau C_h(t), r), \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \langle R_c^h(C_h^n), r \rangle &= (g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}), r) - \alpha(\nabla C_h^n, \nabla r) \\ &\quad - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n, r) - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\pi_\tau \mathbf{u}_h(t))\pi_\tau C_h(t), r) - r_0(C_h^n, r). \end{aligned} \quad (2.11)$$

De plus, si (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) est solution du problème (Eds1), alors nous avons

$$\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} \rangle = \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle \text{ for all } \mathbf{v}_h \in X_{nh} \quad (2.12)$$

et

$$\langle R_c^h(C_h^n), r \rangle = \langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle \text{ for all } r_h \in Y_{nh}. \quad (2.13)$$

Preuve. Nous partons du problème (E) pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$ et nous intercalons $\mathbf{u}_h(t)$, $\nu_0(\nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v})$, $\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D} \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbb{D} \mathbf{v})$, $\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t)$, $p_h(t)$ dans le premier, second, troisième, quatrième et dernier terme respectivement de la première équation. De plus, nous intercalons le terme $\frac{1}{2}(\operatorname{div} \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v})$.

Dans la deuxième équation nous intercalons $C_h(t)$ dans le premier, le second et le dernier terme. Nous intercalons aussi $\pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t)$ et $-\frac{1}{2}(\operatorname{div}(\pi_\tau \mathbf{u}_h(t))\pi_\tau C_h(t), r)$.

C'est ainsi que nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \right) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) \\
 & \quad + 2(\nu_C(C(t)) \mathbb{D} \mathbf{u}(t) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D} \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbb{D} \mathbf{v}) \\
 & + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t)) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\
 & \quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - p_h(t)) \\
 & = (\mathbf{f}(t, C(t)), \mathbf{v}) - \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_h(t)), \mathbf{v} \right) - \nu_0 (\nabla (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)), \nabla \mathbf{v}) \\
 & \quad - 2\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) (\nabla (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)), \nabla \mathbf{v}) - (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\
 & \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) + (\operatorname{div} \mathbf{v}, p_h(t)), \\
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + \alpha (\nabla (C - C_h)(t), \nabla r) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & + r_0 (C(t) - C_h(t), r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & = (g(t), r) - \left(\frac{\partial}{\partial t} (C_h(t)), r \right) - \alpha (\nabla C_h(t), \nabla r) - (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) - r_0 (C_h(t), r), \\
 & \int_\Omega q(t, x) \operatorname{div} (\mathbf{u}(t, x) - \mathbf{u}_h(t, x)) = \int_\Omega q(t, x) \operatorname{div} \mathbf{u}_h(t, x).
 \end{aligned} \right. \tag{2.14}$$

En ajoutant et retranchant $\mathbf{f}^n(C_h^{n-1})$ dans l'équation de la vitesse et $g(t_n)$ dans l'équation de la concentration, en utilisant le problème (*Eds1*) et les définitions des résidus (2.9), (2.10) et (2.11), nous obtenons le résultats souhaité. \square

Lemme 2.1.4. *Pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$, l'égalité (2.10) peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\begin{aligned}
 \langle R_c^r(C_h)(t), r \rangle &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \alpha \int_{\kappa_n} \nabla (C_h^n - C_h^{n-1})(x) \cdot \nabla r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. + r_0 \int_{\kappa_n} (C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Preuve. Rappelons que $\pi_\tau C_h = C_h^n$ et $\pi_{l,\tau} C_h = C_h^{n-1}$.

Nous remarquons que pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned}
 \pi_\tau C_h - C_h(t) &= C_h^n - C_h(t) \\
 &= C_h^n - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) - C_h^{n-1} \\
 &= \frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}).
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

En remplaçant les égalités ci-dessus dans (2.10), nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \langle R_c^r(C_h)(t), r \rangle &= \alpha \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}), \nabla r \right) + r_0 \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), r \right) \\
 &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \alpha \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + r_0 \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

□

Lemme 2.1.5. *L'égalité (2.9) peut être écrite sous la forme ci-dessous :*

$$\begin{aligned}
 \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n \right. \\
 &\quad \left. + 2 \operatorname{div}(\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)(x), \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x) \right\} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa n}} \int_{e_n} [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n - p_h^n \mathbb{I})(\sigma) \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \Big\},
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

et l'égalité (2.11) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned}
 \langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n \right. \\
 &\quad \left. + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n)(r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa n}} \alpha \int_{e_n} [\nabla C_h^n(\sigma) \cdot \mathbf{n}](r(\sigma) - r_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Preuve. Commençons par montrer l'égalité (2.18). Nous intégrons par parties le second et le dernier termes du membre de droite de l'égalité (2.9), pour avoir :

$$\begin{aligned}
 & \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle \\
 &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad + \int_{\kappa_n} \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\partial\kappa_n} (\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n \cdot \mathbf{n})(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \\
 & \quad + \int_{\kappa_n} \operatorname{div} (\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\partial\kappa_n} \nu_C(C_h^{n-1}) ((\mathbb{D} \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{n})(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \\
 & \quad - \frac{1}{2} \int_{\kappa_n} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n)(x) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad \left. - \int_{\kappa_n} \nabla p_h^n(x) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\partial\kappa_n} p_h^n \cdot \mathbf{n}(\sigma) \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\} \\
 &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \operatorname{div} (\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n) \right. \\
 & \quad \left. - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)(x) \cdot (\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \int_{e_n} [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + \nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n - p_h^n)(\sigma) \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Passons maintenant à la seconde égalité (2.19), nous intégrons par parties le second terme du membre de droite de l'égalité (2.11), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \langle R_C^h(C_h^n), r - r_h \rangle \\
 &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1})) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad + \alpha \int_{\kappa_n} \Delta C_h^n \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \alpha \int_{\partial\kappa_n} \nabla((C_h^n \cdot \mathbf{n})(\sigma) \cdot (r(\sigma) - r_h(\sigma))) \, \mathbf{d}\sigma \\
 & \quad - \int_{\kappa_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n C_h^n) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad \quad \left. - \int_{\kappa_n} r_0 C_h^n (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right. \\
 & \quad \quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n(\sigma) \cdot \mathbf{n}] (r(\sigma) - r_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

□

Le travail ci-dessus aboutit à la définition des indicateurs d'erreurs suivante :

Définition 2.1.6. Pour chaque κ_n dans \mathcal{T}_{nh} ,

$$(\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 = \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, \quad (2.22)$$

$$(\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 = \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + 2 \operatorname{div}(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) \right. \\ &\quad \left. - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)(x) \right\|_{0,\kappa_n}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n \mathbb{I})(\sigma)]_{e_n} \mathbf{n} \right\|_{0,e_n}^2 \\ &\quad + \left\| \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n \right\|_{0,\kappa_n}^2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0,\kappa_n}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [\alpha \nabla C_h^n(\sigma)]_{e_n} \cdot \mathbf{n} \right\|_{0,e_n}^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Remarque 2.1.7. Même si ces indicateurs semblent être un peu compliqués, chaque terme est calculé facilement puisqu'il dépend uniquement de la solution discrète.

Lemme 2.1.8. Nous avons les majorations suivantes pour tout $1 \leq n \leq N$,

1. Pour tout $\mathbf{v} \in X$ et $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh} \mathbf{v}$:

$$|\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq c_{rhu} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \quad (2.26)$$

2. Pour tout $r \in Y$ et $r_h = \mathcal{C}_{nh} r$:

$$|\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_{rhc} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_{1,\Omega}. \quad (2.27)$$

Preuve.

1. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (2.20), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \operatorname{div}(\nu_C(C_h^{n-1})\nabla \mathbf{u}_h^n) - \mathbf{u}_h^{n-1} \nabla \mathbf{u}_h^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \right\|_{0,\kappa_n} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,\kappa_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \left\| [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + \nu_C(C_h^{n-1})\nabla \mathbf{u}_h^n - p_h^n \mathbb{I})\mathbf{n}]_{e_n} \right\|_{0,e_n} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{0,e_n} \right\}. \end{aligned}$$

Nous choisissons $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh}\mathbf{v}$ et nous utilisons (2.4), pour avoir la majoration qui suit :

$$\begin{aligned} |\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_1 h_{\kappa_n} \left\{ \left\| \mathbf{f}^n(C_h^{m-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \operatorname{div} (\nu(C_h^{m-1}) \nabla \mathbf{u}_h^n) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n \right\|_{0, \kappa_n} |\mathbf{v}|_{1, \Delta \kappa_n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} c_2 h_{e_n}^{1/2} \left\| [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + \nu(C_h^{m-1}) \nabla \mathbf{u}_h^n - p_h^n) \mathbf{n}] \right\|_{0, e_n} |\mathbf{v}|_{0, \Delta e_n} \right\}. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, et en utilisant la relation $(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$ et (2.24), nous obtenons :

$$|\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n, \kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_4 |\mathbf{v}|_{1, \Delta \kappa_n}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_5 \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} |\mathbf{v}|_{1, \Delta e_n}^2 \right)^{1/2}.$$

Par suite

$$|\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq c_{rhu} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{n, \kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega}.$$

D'où le résultat.

2. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (2.21), nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0, \kappa_n} \|r - r_h\|_{0, \kappa_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} \left\| [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0, e_n} \|r - r_h\|_{0, e_n} \right\}. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Nous choisissons $r_h = \mathcal{C}_{nh}r$ et nous utilisons (2.4), pour trouver :

$$\begin{aligned} |\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_6 h_{\kappa_n} \left\{ \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0, \kappa_n} |r|_{1, \kappa_n} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} c_7 h_{e_n} \left\| [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0, e_n} |r|_{1, e_n} \right\}. \end{aligned} \tag{2.29}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, la relation $(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$ et (2.25), nous donnent :

$$|\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c, n, \kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_9 |r|_{1, \Delta \kappa_n}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_{10} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} |r|_{1, \Delta e_n}^2 \right)^{1/2}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$|\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_{rhc} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_{1,\Omega}.$$

□

2.2 Les majorations d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, notre but est d'introduire les théorèmes qui fournissent les majorations d'erreur *a posteriori* de la vitesse et de la concentration. Pour cela, nous présentons les deux lemmes suivants de Gronwall.

Lemme 2.2.1. (*Lemme de Gronwall*) [36] (p 292) [19] (p 252) Soient :

1. f, \tilde{g} et k , des fonctions intégrables et définies de $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$,
2. $\tilde{g} \geq 0, k \geq 0$,
3. $\tilde{g} \in \mathcal{L}_\infty$,
4. $\tilde{g} \cdot k$ une fonction intégrable sur \mathbb{R}^+ .

Si $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$y(t) \leq f(t) + \tilde{g}(t) \int_0^t k(\tau) y(\tau) d\tau, \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (2.30)$$

alors nous avons :

$$y(t) \leq f(t) + \tilde{g}(t) \int_0^t k(\tau) f(\tau) \exp \left(\int_\tau^t k(s) \tilde{g}(s) ds \right) d\tau. \quad (2.31)$$

Lemme 2.2.2. (*Lemme de Gronwall discret*) [30] (chapitre 4) Soient $(y_n)_n, (f_n)_n$ et $(\tilde{g}_n)_n$ trois suites positives telles que :

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{g}_k y_k.$$

Alors nous avons :

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \tilde{g}_k \prod_{j=k+1}^{n-1} (1 + \tilde{g}_j)$$

et

$$\forall n \geq 0, \quad y_n \leq f_n + \sum_{k=0}^{n-1} f_k \tilde{g}_k \exp \left(\sum_{j=k}^{n-1} \tilde{g}_j \right).$$

Théorème 2.2.3. Nous supposons que \mathbf{u} appartient à $L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$, C appartient à $L^\infty(0, T; L^3(\Omega))$, et ∇C appartient à $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$. Pour tout $1 \leq m \leq N$, il existe une constante c indépendante de h et de τ telle qu'on ait la majoration d'erreur *a posteriori*

suivante entre la concentration C du problème (1.1) et la solution C_h associée à la solution $(C_h^n)_{0 \leq n \leq N}$ du problème (Eds1) tel que :

$$\begin{aligned} & \| C(t_m) - C_h(t_m) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq c \left(\sum_{n=1}^m \| g - g^n \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0, t_m; X)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right), \end{aligned} \quad (2.32)$$

Preuve. Commençons par intercaler $(\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C_h^n, r)$ dans la deuxième équation du problème (2.8) considérée pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + \alpha (\nabla(C - C_h)(t), \nabla r) + r_0 (C(t) - C_h(t), r) \\ & = (g(t) - g(t_n), r) + \langle R_c(C_h)(t), r \rangle \\ & \quad - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n, r) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n, r). \end{aligned} \quad (2.33)$$

De plus, comme $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, nous aurons :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + \alpha (\nabla(C - C_h)(t), \nabla r) + r_0 (C(t) - C_h(t), r) \\ & = (g(t) - g(t_n), r) + \langle R_c(C_h)(t), r \rangle \\ & \quad - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n, r) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}) C_h^n, r). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nous choisissons $r = C - C_h$ pour avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \| r(t) \|_X^2 + r_0 \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = (g(t) - g(t_n), r(t)) + \langle R_c^\tau(C_h), r(t) \rangle + \langle R_c^h(C_h^n), r(t) - r_h \rangle \\ & \quad - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n, r(t)) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}) C_h^n, r(t)). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nous cherchons à majorer le côté droit de l'équation (2.35). Pour cela, nous commençons par majorer $(g(t) - g(t_n), r(t))$ en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{\alpha} a^2 + \frac{\alpha}{4} b^2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (g(t) - g^n, r(t)) & \leq \| g(t) - g^n \|_{Y'} \| r(t) \|_Y \\ & \leq \frac{1}{\alpha} \| g(t) - g^n \|_{Y'}^2 + \frac{\alpha}{4} \| r(t) \|_Y^2. \end{aligned}$$

Avant de majorer les trois derniers termes, nous intercalons $C_h(t)$ et $C(t)$ puis nous utilisons la proposition 1.3.4, pour trouver :

$$\begin{aligned}
 & - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n, r(t)) + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))C_h^n, r(t)) \\
 = & - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h(t) - C(t)), r(t)) + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))(C_h(t) - C(t)), r(t)) \\
 & + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))C(t), r(t)) \\
 = & (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))(C_h^n - C_h(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) \\
 & + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))C(t), r(t)).
 \end{aligned}$$

Passons à effectuer une intégration par partie qui nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & \quad - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))(C_h^n - C_h(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) \\
 & \quad + \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t))C(t), r(t)) \\
 = & (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & \quad - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla r(t), (C_h^n - C_h(t))) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) \\
 & \quad - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & \quad - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla r(t), C(t)) \\
 = & (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C(t)), r(t)) + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 & \quad + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t)) - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla r(t), (C_h^n - C_h(t))) \\
 & \quad - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla r(t), C(t)) \\
 = & T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.
 \end{aligned}$$

Commençons par la majoration de T_1 , nous intercalons par $C_h(t)$ ayant $(\mathbf{u}, \nabla r(t), r(t))$ nul nous obtenons :

$$T_1 = (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C(t)), r(t)) = (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)).$$

En prenant en considération que $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T, L^3(\Omega)^2)$, nous utilisons le fait que $C_h^n - C_h =$

$\frac{t_n - t}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1})$ et nous multiplions et divisons par $\tau_n^{1/2}$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}), r(t))(x) \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right|^2 \|\mathbf{u}\|_{L^3(\Omega)^2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y \|r(t)\|_{L^6(\Omega)} \\
 &\leq c_1 \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;L^3(\Omega)^2)}^2 \frac{\varepsilon_1}{2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|r(t)\|_Y^2.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Passons à la majoration de T_2 , nous intercalons $\mathbf{u}_h(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) &= \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) \\
 &\quad + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)).
 \end{aligned}$$

Nous utilisons le fait que $C_h^n - C_h(t) = \frac{t_n - t}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1})$ et que $ab \leq 2a^2 + \frac{1}{8}b^2$ pour arriver à

$$\begin{aligned}
 |T_2| &= \frac{1}{2} |((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t)) + ((\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla(C_h^n - C_h(t)), r(t))| \\
 &\leq \frac{1}{2} \|r(t)\|_{L^4(\Omega)} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y \left(\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^4(\Omega)^2} + \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(\|r(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 + \|r(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2.
 \end{aligned}$$

D'après (1.4) nous avons $\|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)^2} |\mathbf{v}|_X$ et d'après la proposition (1.3.6) et le théorème (1.2.6) nous avons que la solution exacte et numérique de la vitesse ainsi que celle de la concentration sont bornées dans $L^2(\Omega)$. Ainsi la relation $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$,

et l'expression $\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t) = \frac{t_n - t}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})$, nous donnent

$$\begin{aligned}
 |T_2| &\leq c_2 \left(\|r(t)\|_Y \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)\|_X + \|r(t)\|_Y \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_X \right) + \frac{1}{4} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 \\
 &\leq \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} + \frac{1}{2\varepsilon_3} \right) \|r(t)\|_Y^2 + c_2^2 \left(\frac{\varepsilon_2}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_Y^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_Y^2 \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2.
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

Pour pouvoir majorer T_3 , nous intercalons $\mathbf{u}_h(t)$. Puis nous utilisons la relation $\mathbf{u}_h^n -$

$\mathbf{u}_h(t) = \frac{t_n - t}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1})$ et le fait que $\nabla C \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^2)$. Nous obtenons donc

$$\begin{aligned} |T_3| &= \frac{1}{2} |((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h(t)) \cdot \nabla C(t), r) + (\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C(t), r(t))| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^6(\Omega)^2} + \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_{L^6(\Omega)^2} \right) \|\nabla C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|r(t)\|_{L^3(\Omega)} \\ &\leq c_3 \left(\frac{\epsilon_4}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \frac{\epsilon_5}{2} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 \right) + \left(\frac{1}{2\epsilon_4} + \frac{1}{2\epsilon_5} \right) \|r(t)\|_Y^2. \end{aligned} \quad (2.38)$$

En suivant les mêmes étapes que la majoration de T_2 , nous obtenons la majoration suivante de T_4

$$\begin{aligned} |T_4| &= \frac{1}{2} |((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla r(t), (C_h^n - C_h(t)))| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\epsilon_6} + \frac{1}{2\epsilon_7} \right) \|r(t)\|_Y^2 + c_4 \left(\frac{\epsilon_6}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \frac{\epsilon_7}{2} \|\mathbf{u}_h(t) - \mathbf{u}(t)\|_X^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Le terme T_5 est majoré de la même façon que le terme T_3 , nous obtenons donc en utilisant $C \in L^\infty(0, T; L^3(\Omega))$

$$|T_5| \leq c_5 \left(\frac{\epsilon_8}{2} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \frac{\epsilon_9}{2} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 \right) + \left(\frac{1}{2\epsilon_8} + \frac{1}{2\epsilon_9} \right) \|r(t)\|_Y^2. \quad (2.40)$$

Par ailleurs, il nous reste à majorer le troisième et le quatrième termes de (2.35). D'après (2.15), nous avons

$$\langle R_c^\tau(t), r \rangle = \frac{t_n - t}{\tau_n} \left(\alpha \int_\Omega \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})(x) \cdot \nabla r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + r_0 \int_\Omega (C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right). \quad (2.41)$$

Nous obtenons donc facilement

$$|\langle R_c^\tau(t), r(t) \rangle| \leq c_6 \frac{\epsilon_{10}}{2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 + \frac{1}{2\epsilon_{10}} \|r(t)\|_Y^2.$$

Pour finir, majorons $\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle$. En utilisant la relation $ab \leq \frac{\epsilon_{11}}{2} a^2 + \frac{1}{2\epsilon_{11}} b^2$ dans (2.27), nous avons

$$|\langle R_c^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_7 \left(\frac{\epsilon_{11}}{2} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \frac{1}{2\epsilon_{11}} \|r(t)\|_Y^2 \right). \quad (2.42)$$

Finalement, en regroupant toutes les majorations précédentes et en prenant $\epsilon_i, i = \{1, \dots, 11\}$

tel que $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{11} \frac{1}{\varepsilon_i}$ soit égale à $\frac{\alpha}{4}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \| r(t) \|_Y^2 + 2r_0 \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq c \left(\| g(t) - g^n \|_{Y'}^2 \right. \\ \left. + \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_X^2 + \| C_h^n - C_h^{n-1} \|_Y^2 + \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Nous intégrons cette dernière équation (2.43) entre t_{n-1} et t_n , puis nous sommes sur $n = 1, \dots, m$ pour avoir

$$\begin{aligned} \| r(t_m) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^{t_m} \| r(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^{t_m} \| r(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ \leq c \left(\| g - g^n \|_{L^2(0,t_m;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t_m;X)}^2 \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Nous obtenons donc le résultat souhaité. \square

Pour calculer la borne supérieure de la vitesse, nous nous inspirons de Bernardi et Verfürth [15] ou Bernardi et Sayah [13] afin de découper les erreurs de temps et d'espace. Nous utilisons la discrétisation en temps pour la vitesse comme problème auxiliaire et nous calculons une majoration d'erreur entre la solution du problème auxiliaire et la solution exacte de la vitesse, puis une majoration entre la solution du problème auxiliaire et la solution discrète. Finalement, en combinant les erreurs obtenues, nous obtiendrons la majoration d'erreur *a posteriori* désirée. Nous introduisons le problème auxiliaire semi-discret en temps suivant :

$$(P_{aux}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } C^{n-1} \text{ la composante de concentration de la solution par élément finie} \\ \text{du problème (Eds1), ayant } \mathbf{u}^{n-1}, \text{ trouver } (\mathbf{u}^n, p^n) \in X \times M \text{ et } C^n \in Y \text{ tel que,} \\ \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v}) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v}) + (2\nu_C (C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}^n), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\ \quad + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p^n) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in X, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}^n, q) = 0 \quad \forall q \in M, \end{array} \right.$$

tel que $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ et $\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(C_h^{n-1})$ avec $\mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n)$.

Proposition 2.2.4. *Sous les hypothèses 1.2.1, à chaque itération n , la solution $(\mathbf{u}^n, p^n) \in X \times M$ et $C^n \in Y$ du problème P_{aux} vérifie, pour tout $m = 1, \dots, N$, l'inégalité qui suit :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| \mathbf{u}^m \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\nu_0}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n |\mathbf{u}^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ \leq \tilde{C}_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \| g^n \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^m \tau_n \| \mathbf{f}_0^n \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.45)$$

où \tilde{C}_d est une constante positive indépendante de m .

Preuve. Il suffit de suivre la même démarche que la preuve de la proposition 1.3.6 en remplaçant \mathbf{u}_h^n par \mathbf{u}^n . \square

Nous rappelons les définitions des fonctions discrètes en temps et affines par morceaux \mathbf{u}_τ et C_τ qui prennent dans l'intervalle $[t_{n-1}, t_n]$, les termes :

$$\mathbf{u}_\tau(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) + \mathbf{u}^n \quad (2.46)$$

et

$$C_\tau(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n}(C^n - C^{n-1}) + C^{n-1} = -\frac{t_n - t}{\tau_n}(C^n - C^{n-1}) + C^n. \quad (2.47)$$

Nous avons alors

$$\frac{d\mathbf{u}_\tau(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$$

et

$$\frac{dC_\tau(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_n}(C^n - C^{n-1}).$$

Nous définissons la fonction p_τ constante par morceaux prenant la valeur p^n sur chaque intervalle $]t_{n-1}, t_n[$.

Lemme 2.2.5. *En combinant (E) et (P_{aux}), nous déduisons que*

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(0) = \mathbf{0}, \quad (C - C_\tau)(0) = 0, \quad (p - p_\tau)(0) = 0.$$

De plus, pour $1 \leq n \leq N$, pour t dans $]t_{n-1}, t_n[$, pour tous \mathbf{v} dans X et q dans M nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau)(t), \mathbf{v} \right) + \nu_0(\nabla(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)), \nabla \mathbf{v}) + (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)) \\ \quad - 2\nu_C(\pi_{l,\tau}C_h)\mathbb{D}(\mathbf{u}_\tau(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t), \mathbf{v}) \\ \quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - \pi_\tau p_\tau(t)) \\ \quad = (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \langle R_u^{\tau,2}(t), \mathbf{v} \rangle, \\ (\operatorname{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau), q) = 0, \end{array} \right. \quad (2.48)$$

avec $R_u^{\tau,2}$ défini comme suit :

$$\begin{aligned} \langle R_u^{\tau,2}(t), \mathbf{v} \rangle = & \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} \nu_0 \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(x) : \nabla \mathbf{v}(x) + 2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(x) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & + \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}))(x) \cdot \mathbf{v}(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & - \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau(t))(x) \cdot \mathbf{v}(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Théorème 2.2.6. Soit \mathbf{u} la vitesse du problème (1.1) et \mathbf{u}_τ la vitesse associée à $(\mathbf{u}^n)_{0 \leq n \leq N}$ solution du problème auxiliaire (P_{aux}). Supposons que $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^{2 \times 2})$ et $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$. Nous avons donc, l'estimation d'erreur a posteriori suivante :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(\tau) - \mathbf{u}_\tau(\tau) \|_X^2 d\tau \\ & \leq c \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

où c est une constante positive indépendante de t et de n .

Preuve. Nous commençons par intercaler $(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ et $(\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v})$ dans l'équation de (2.48) où $t \in]t_{n-1}, t_n]$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)), \mathbf{v} \right) + (2(\nu_C(C(t)) - \nu_C(C_h^{n-1}))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\ & \quad + 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) + (\nu_0 \nabla(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)), \nabla \mathbf{v}) \\ & \quad + ((\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t)) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla(\mathbf{u}_\tau(t) - \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}) \\ & \quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - \pi_\tau p_\tau(t)) = (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \langle R_u^{\tau,2}(t), \mathbf{v} \rangle. \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau$. En utilisant le fait que $\operatorname{div} \mathbf{u}_\tau = 0$ et que $(\mathbf{u}_\tau(t) \cdot \nabla \mathbf{v}(t), \mathbf{v}(t)) = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_0 \| \mathbf{v} \|_X^2 + 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{v}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t))) = \\ & \quad (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}(t)) + \langle R_u^{\tau,2}(t), \mathbf{v}(t) \rangle \\ & \quad - (\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t)) + (2(\nu_C(C_h^{n-1}) - \nu_C(C(t)))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v}(t))). \end{aligned} \quad (2.51)$$

Pour majorer le terme de droite de (2.51). Nous commençons par le troisième terme. Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^2 - L^4 - L^4$ et (1.4) pour avoir :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{v}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))| & \leq \| \mathbf{u}(t) \|_X \| \mathbf{v}(t) \|_{L^4(\Omega)^2}^2 \\ & \leq \sqrt{2} \| \mathbf{u}(t) \|_X \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)^2} \| \mathbf{v}(t) \|_X \\ & \leq \varepsilon_1 \| \mathbf{u}(t) \|_X^2 \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \| \mathbf{v}(t) \|_X^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

En suivant la même démarche, nous majorons le premier terme de la partie droite de (2.51) de la façon suivante :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}(t))| & \leq \| \mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)^2} \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)^2} \\ & \leq \frac{(S_0^2)^2 \varepsilon_2}{2} \| \mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_2} \| \mathbf{v}(t) \|_X^2. \end{aligned}$$

Nous utilisons la définition de la fonction \mathbf{f} et le fait que \mathbf{f}_1 est $c_{\mathbf{f}_1}^*$ -lipschitz, pour obtenir :

$$\begin{aligned} |(\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v})| & \leq (S_0^2)^2 \varepsilon_2 \left(\| \mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0^n \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + c_{\mathbf{f}_1}^* \| C(t) - C_h^{n-1} \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ & \quad + \frac{1}{2\varepsilon_2} \| \mathbf{v}(t) \|_X^2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Pour le quatrième terme de la partie droite de (2.51), nous utilisons l' Hypothèse 1.2.1 et le fait que $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^{2 \times 2})$ pour avoir

$$\begin{aligned}
 & 2(\nu_C(C_h^{n-1}) - \nu_C(C(t)))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\
 & \leq 2 \|\nu_C(C_h^{n-1}) - \nu_C(C(t))\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbb{D}(\mathbf{u}(t))\|_{L^4(\Omega)^{2 \times 2}} \|\mathbb{D}(\mathbf{v}(t))\|_{L^2(\Omega)^{2 \times 2}} \\
 & \leq c_0 \frac{\varepsilon_3}{2} \|C_h^{n-1} - C(t)\|_{L^4(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Pour le second terme de la partie droite de (2.51) qui est donné par (2.49), nous le notons $T_a =: T_1 + T_2 + T_3$. Nous allons majorer séparément T_1 , T_2 et T_3 .

T_1 est majoré par

$$\begin{aligned}
 |T_1| &= \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} \nu_0 \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(x) : \nabla \mathbf{v}(x) + 2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})(x) : \mathbb{D}(\mathbf{v}(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right| \\
 &\leq (\nu_0 + 2\hat{\nu}_2) \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \|\mathbf{v}(t)\|_X \\
 &\leq (\nu_0 + 2\hat{\nu}_2)^2 \frac{\varepsilon_4}{2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.
 \end{aligned}$$

T_2 est majoré $\mathbf{u}(t)$ comme suit :

$$\begin{aligned}
 |T_2| &= \left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \int_{\Omega} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}))(x) \cdot \mathbf{v}(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right| \\
 &\leq \|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \\
 &\quad + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^3(\Omega)^2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^6(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X.
 \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$ nous avons :

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^3(\Omega)^2} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^6(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \leq c_1 \frac{\varepsilon_5}{2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{v}(t)\|_X^2.$$

Nous intercalons \mathbf{u}_τ et nous utilisons sa définition donné par (2.46) ; en utilisant le fait que $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_\tau$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \\
 & \leq c_2' (\|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X) + \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \\
 & \leq c_2 (\|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X).
 \end{aligned}$$

En appliquant la relation (1.4) à \mathbf{v} et à $(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})$ et le fait que la solution exacte et semi-discrète de la vitesse soient bornées dans $L^2(\Omega)^2$ (d'après Théorème 1.2.6 et Proposition 2.2.4), nous avons

$$\|\mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}(t)\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X \leq c_3 \left(1 + \frac{\varepsilon_6}{2}\right) \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_6} \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

Par suite, T_2 est majoré comme suit :

$$|T_2| \leq c_4 \left(1 + \frac{\varepsilon_5}{2} + \frac{\varepsilon_6}{2}\right) \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}\|_X^2 + \left(\frac{1}{2\varepsilon_5} + \frac{1}{2\varepsilon_6}\right) \|\mathbf{v}\|_X^2.$$

Passons à la majoration du terme T_3 . Puisque $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} - \mathbf{v}$ et que $((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ en prenant $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^{2 \times 2})$ nous obtenons :

$$\begin{aligned} |T_3| &= \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u}_\tau \cdot \mathbf{v})(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right| \\ &= \left| \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} \int_{\Omega} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right| \\ &\leq \| \nabla \mathbf{u} \|_{L^4(\Omega)^{2 \times 2}} \| \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)} \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_{L^4(\Omega)^2} \\ &\leq c_5 \frac{\varepsilon_7}{2} \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_7} \| \mathbf{v} \|_X^2. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$|\langle R_u^{\tau, 2}(t), \mathbf{v}(t) \rangle| \leq c_6 \left(1 + \frac{\varepsilon_4}{2} + \frac{\varepsilon_5}{2} + \frac{\varepsilon_6}{2} + \frac{\varepsilon_7}{2} \right) \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_X^2 + \left(\frac{1}{2\varepsilon_4} + \frac{1}{2\varepsilon_5} + \frac{1}{2\varepsilon_6} + \frac{1}{2\varepsilon_7} \right) \| \mathbf{v} \|_X^2. \quad (2.55)$$

Ensuite, nous regroupons (2.51), (2.52)–(2.53)–(2.54)–(2.55) et nous choisissons $\varepsilon_i, i = 1, \dots, 7$ tel que $\sum_{i=1}^7 \frac{1}{2\varepsilon_i} \| \mathbf{v} \|_X^2$ soit plus petit $\frac{\nu_0}{2} \| \mathbf{v} \|_X^2$ et nous intégrons entre 0 et t pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{v}(s) \|_X^2 \, ds \\ &\leq c_7 \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right) \\ &\quad + c'_7 \int_0^t \| \mathbf{u}(\tau) \|_X^2 \| \mathbf{v}(\tau) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \, d\tau. \end{aligned}$$

Nous appliquons le Lemme Gronwall 2.2.1 avec les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} y(t) &= \| \mathbf{v}(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{v}(s) \|_X^2 \, ds, \\ \tilde{f}(t) &= c_7 \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right), \\ \tilde{g}(t) &= 1, \\ k(t) &= c'_7 \| \mathbf{u}(t) \|_X^2, \end{aligned}$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\tau(s) \|_X^2 \, ds \\ &\leq c_7 \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right) \\ &\quad + c'_7 \int_0^t \left(\tilde{f}(\tau) \| \mathbf{u}(\tau) \|_X^2 \times \exp \left(c'_7 \int_0^\tau \| \mathbf{u}(s) \|_X^2 \, ds \right) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Puisque $\tau \leq t$, nous avons $\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(t)$, alors

$$\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\tau(s) \|_X^2 \, ds$$

$$\leq c_8 \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right) + c_9 \int_0^t \left(\| \mathbf{u}(\tau) \|_X^2 \times \exp \int_0^\tau \| \mathbf{u}(s) \|_X^2 ds \right) d\tau.$$

En nous basant sur (1.14), l'intégrale de type $\int_0^t \| \mathbf{u}(s) \|_X^2 ds$ est borné par une constante et nous obtenons (2.50). \square

Pour établir l'estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution \mathbf{u}_τ du Problème (P_{aux}) et la solution discrète \mathbf{u}_h , nous introduisons les trois lemmes suivants.

Lemme 2.2.7. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, les solutions des Problèmes (P_{aux}) et (Eds1) vérifient pour tous $\mathbf{v} \in X$ et $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$:*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau_n} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \nu_0 (\nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n), \nabla \mathbf{v}) + 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}\mathbf{v}) \\ & + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) - (\text{div} \mathbf{v}, p^n - p_h^n) = (R_u^h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h), \end{aligned}$$

$$(q, \text{div}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)) = -(q, \text{div}(\mathbf{u}_h^n)), \quad (2.56)$$

où R_u^h est défini dans (2.18) et vérifi l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \langle R_u^h(t), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle &= (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - (\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) \\ & - 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) - (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ & - \frac{1}{2} (\text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) + (\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h), p_h^n). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Preuve. Nous commençons par soustraire la première équation du problème (Eds1) de la première équation du problème (P_{aux}) et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \langle \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h \rangle = \langle \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h - \mathbf{v} + \mathbf{v} \rangle \\ & = \frac{1}{\tau_n} ((\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}) - (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v}) - (\text{div} \mathbf{v}, p^n - p_h^n) + (\nu_0 \nabla(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n), \nabla \mathbf{v}) \\ & + 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}\mathbf{v}) + (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) \\ & - \frac{1}{2} (\text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \right) + (\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) \\ & + 2(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h)) + (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) \\ & + \frac{1}{2} (\text{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) - (\text{div}(\mathbf{v} - \mathbf{v}_h), p_h^n). \end{aligned} \quad (2.58)$$

En utilisant (2.57) et (2.58), nous obtenons la première égalité de (2.56). Pour la seconde égalité de (2.56), nous avons juste à intercaler la dernière équation du problème (P_{aux}) par \mathbf{u}_h^n . \square

Avant de passer au second lemme, nous allons introduire l'opérateur de Stokes Π défini de X dans X de la façon suivante : Pour tout \mathbf{v} dans X , nous notons par $\Pi \mathbf{v}$ la vitesse

\mathbf{w} de la solution unique (\mathbf{w}, r) dans $X \times M$ du problème de Stokes suivant :

$$\begin{cases} \forall \mathbf{t} \in X, (\nabla \mathbf{w}, \nabla \mathbf{t}) - (\operatorname{div} \mathbf{t}, r) = 0, \\ \forall q \in M, (\operatorname{div} \mathbf{w}, q) = (\operatorname{div} \mathbf{v}, q). \end{cases} \quad (2.59)$$

Le lemme suivant cite quelques propriétés de l'opérateur Π ([13], [15] ou [30]).

Lemme 2.2.8. *l'opérateur Π a les propriétés suivantes :*

1. $\forall \mathbf{v} \in V, \Pi \mathbf{v} = \mathbf{0}$.
2. $\forall \mathbf{v} \in X$, on a les estimations suivantes :

$$\| \mathbf{v} - \Pi \mathbf{v} \|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq \| \mathbf{v} \|_X \quad \text{et} \quad \| \Pi \mathbf{v} \|_X \leq \frac{1}{\beta^*} \| \operatorname{div} \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)} .$$

3. $\forall \mathbf{v}_h \in V_{nh}$ et $1 \leq n \leq N$:

$$\| \Pi \mathbf{v}_h \|_{L^2(\Omega)^2} \leq ch_n^{1/2} \| \operatorname{div} \mathbf{v}_h \|_{L^2(\Omega)} .$$

Maintenant, nous introduisons le second et le troisième lemmes qui nous permettront de prouver l'estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution \mathbf{u}_τ du problème (P_{aux}) et la solution \mathbf{u}_h du problème (Eds1).

Lemme 2.2.9. *Soient \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_h^m les solutions respectives de (P_{aux}) et (Eds1). Nous notons $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n$ et $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n$. Nous obtenons l'égalité :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^n \|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\ & + \nu_0 \tau_n \| \mathbf{e}^n \|_X^2 + 2\tau_n (\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\mathbf{e}^n)) \\ & = (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi \mathbf{e}^n) + \nu_0 \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi \mathbf{e}^n)) + 2\tau_n (\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\Pi \mathbf{e}^n)) \\ & \quad \tau_n \langle R_u^h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle - \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}^n) \\ & \quad - \tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Preuve. Avant tout, pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous notons $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^n \|_{L^2(\Omega)^2}^2 - \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \frac{1}{2} \| \mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1} \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \tau_n \| \mathbf{e}^n \|_X^2 \\ & + 2\tau_n (\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\mathbf{e}^n)) \\ & = (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n) + \nu_0 \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla \mathbf{e}^n) + 2\tau_n (\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\mathbf{e}^n)). \end{aligned} \quad (2.61)$$

Soit $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n$ dans la première égalité du Lemme 2.2.7. Ainsi, Sachant que $\operatorname{div} (\mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n) = 0$, le terme de la pression s'annule (c'est pour cette raison que nous avons introduit

Πe^n) et nous obtenons pour tout $\mathbf{v}_h \in X_{nh}$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \mathbf{e}^n) + \nu_0 \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla \mathbf{e}^n) + 2\tau_n (\nu_C (\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\mathbf{e}^n)) = \\ & (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi e^n) + \nu_0 \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi e^n)) + 2\tau_n (\nu_C (\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\Pi e^n)) \\ & + \tau_n \langle R_{u^h}^h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle - \tau_n (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \tau_n (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Dans les deux dernier termes de (2.62), nous intercalons $\tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$, $\frac{1}{2} \tau_n (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$ et nous ajoutons le terme nul $-\frac{1}{2} \tau_n (\operatorname{div} (\mathbf{u}^{n-1}) \mathbf{u}^n, \mathbf{v})$, pour obtenir :

$$\begin{aligned} & -\tau_n (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) = \\ & -\tau_n (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{e}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{e}^{n-1}) \mathbf{u}^n, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Nous intercalons $\tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \Pi e^n, \mathbf{v})$ et $\frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \Pi e^n, \mathbf{v})$, puis nous utilisons le fait que $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi e^n$ pour ensuite appliquer la Proposition 1.3.4; pour avoir

$$\begin{aligned} & -\tau_n (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) = \\ & -\tau_n (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{e}^{n-1}) \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) \quad (2.63) \\ & -\tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \Pi e^n, \mathbf{e}^n) - \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \Pi e^n, \mathbf{e}^n). \end{aligned}$$

Nous intégrons par partie le second terme du côté droit de (2.63), puis en utilisant (2.62) et (2.61), nous obtenons le résultat désiré. \square

Maintenant, nous passons à la majoration de la dernière ligne de (2.60).

Lemme 2.2.10. *Nous supposons que $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . Nous supposons aussi que \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_h^m sont respectivement les solutions de (P_{aux}) et de $(Eds1)$. Nous notons $\mathbf{e}^n = \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n$ et $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi e^n$. Nous obtenons les majorations suivantes :*

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2} (\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}^n) + \tau_n (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \Pi e^n, \mathbf{e}^n) + \frac{\tau_n}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \Pi e^n, \mathbf{e}^n) \right| \\ & \leq c \tau_n \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \quad \left. + (\|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 + \|\mathbf{u}^n\|_X^2) \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \\ & \quad + \frac{\nu_0}{20} \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{\nu_0}{25} \tau_{n-1} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + \frac{3}{100} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2, \end{aligned} \quad (2.64)$$

où c est une constante positive indépendante de h et de n .

Preuve. Nous notons :

$$\begin{aligned} A &:= \frac{\tau_n}{2}(\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}^n, \mathbf{v}) + \frac{\tau_n}{2}(\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{v}, \mathbf{u}^n) =: A_1 + A_2, \\ B &:= \tau_n(\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n) + \frac{\tau_n}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{e}^n) =: B_1 + B_2. \end{aligned}$$

Dans cette première partie, notre objectif est de majorer A . Pour cela nous commençons par la majoration de A_1 . En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^2-L^4-L^4$, puis l'inégalité (1.4) sur \mathbf{e}^{n-1} , \mathbf{e}^n et $\Pi \mathbf{e}^n$, le Lemme 2.2.8 et le fait que $\Pi \mathbf{e}^n = -\Pi \mathbf{u}_h^n$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \frac{\tau_n}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)^2} \\ &\leq c_5 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X \left(\|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} + \|\Pi \mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\Pi \mathbf{e}^n\|_X^{1/2} \right) \\ &\leq c_5 \tau_n \left(\|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^{1/2} \|\mathbf{u}^n\|_X (h_n^{1/2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)})^{1/2} \|\mathbf{e}^n\|_X^{1/2} \right). \end{aligned} \tag{2.65}$$

Nous notons par $A_{1,1}$ et $A_{1,2}$ les termes du côté droit de (2.65). Puis, en prenant en considération que $h_n \leq c_s \tau_n$, nous avons :

$$\begin{aligned} A_{1,1} &\leq c_5 \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X \left(\frac{\varepsilon_1}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \right) \\ &\leq c_5 \tau_n \frac{\varepsilon_1}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{\varepsilon_2}{2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \right) \\ &\quad + c_5 \tau_n \frac{1}{2\varepsilon_1} \left(\frac{1}{2\varepsilon_3} \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{\varepsilon_3}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_{1,2} &\leq c_5 \tau_n \left(\frac{\varepsilon_4}{2} h_n^{1/2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_X \right) \\ &\leq c_5 \tau_n \frac{\varepsilon_4}{2} \left(\frac{\varepsilon_5}{2} h_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \right) \\ &\quad + c_5 \tau_n \frac{1}{2\varepsilon_4} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_X \\ &\leq c_6 \tau_n^2 \frac{\varepsilon_4 \varepsilon_5}{4} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \tau_n \frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_5} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \\ &\quad + c_6 \tau_n \frac{1}{2\varepsilon_4} \left(\frac{1}{2\varepsilon_6} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_6}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right). \end{aligned}$$

Passons à la majoration de A_2 ,

$$A_2 = \frac{\tau_n}{2}(\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{e}^n, \mathbf{u}^n) - \frac{\tau_n}{2}(\mathbf{e}^{n-1} \cdot \nabla \Pi \mathbf{e}^n, \mathbf{u}^n) =: A_{2,1} + A_{2,2}.$$

Nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^2-L^4-L^4$, puis (1.4) sur

\mathbf{u}^n et \mathbf{e}^{n-1} pour avoir :

$$\begin{aligned}
 A_{2,1} &\leq c_7 \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \|\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \\
 &\leq c_8 \left(\frac{\tau_n}{\varepsilon_7} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \tau_n \varepsilon_7 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \right) \\
 &\leq c_9 \left(\frac{\varepsilon_7}{\tau_n} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \tau_n \frac{\varepsilon_7}{\varepsilon_8} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \tau_n \varepsilon_7 \varepsilon_8 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Nous utilisons Lemme 2.2.8, puis nous suivons les mêmes étapes que $A_{2,1}$, pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 A_{2,2} &\leq c_{10} \tau_n \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \\
 &\leq c_{11} \left(\frac{\tau_n}{\varepsilon_9} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_n \varepsilon_9 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}^n\|_X \right) \\
 &\leq c_{12} \left(\frac{\tau_n}{\varepsilon_9} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \tau_n \frac{\varepsilon_9}{\varepsilon_{10}} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \tau_n \varepsilon_9 \varepsilon_{10} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{u}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Finalement, les résultats obtenus et la Proposition 2.2.4, nous donne :

$$\begin{aligned}
 |A| &\leq c_1 \tau_n \left(\left(\frac{1}{\varepsilon_4 \varepsilon_6} + \frac{1}{\varepsilon_9} \right) \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left(\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_6}{\varepsilon_4} + \frac{1}{\varepsilon_7} \right) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right. \\
 &\quad + \left(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_4 \varepsilon_5 \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 + \varepsilon_7 \varepsilon_8 + \varepsilon_9 \varepsilon_{10} \right) \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_3} + \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_5} + \frac{\varepsilon_7}{\varepsilon_8} + \frac{\varepsilon_9}{\varepsilon_{10}} \right) \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

En utilisant la relation $\tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \leq \sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2$ et Proposition 2.2.4, nous pouvons déduire que

$$\tau_n \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \leq \hat{C}, \tag{2.67}$$

où \hat{C} est une constante positive donnée.

Donc, en choisissant $\varepsilon_1 = \frac{100c_1 \sqrt{\hat{C}}}{\sqrt{\nu_0}}$, $\varepsilon_2 = \frac{\nu_0}{100c_1 \varepsilon_1 \sigma_\tau}$, $\varepsilon_3 = \sqrt{\hat{C} \nu_0}$, $\varepsilon_4 = 1$, $\varepsilon_5 = \frac{\nu_0}{100c_1 \hat{C} \sigma_\tau}$, $\varepsilon_6 = \frac{\nu_0}{100c_1}$, $\varepsilon_7 = \frac{100c_1}{\nu_0}$, $\varepsilon_8 = \frac{1}{\varepsilon_7^2} \sigma_\tau$ et $\varepsilon_9 = \varepsilon_{10} = \sqrt{\frac{\nu_0}{100c_1 \sigma_\tau}}$, we obtain,

$$\begin{aligned}
 |A| &\leq \frac{3\nu_0}{100} \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{\nu_0}{25} \tau_{n-1} \|\mathbf{e}^{n-1}\|_X^2 + \frac{1}{100} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 &\quad + c_2 \tau_n \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Dans cette seconde partie, nous passons à la majoration de B .

Commençons par le terme B_1 , nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^2 - L^4 - L^4$, puis Lemme 2.2.8, la condition d'incompressibilité $\operatorname{div} \mathbf{u}^n = \mathbf{0}$ et Lemme

1.1.3, pour avoir :

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq c_{13}\tau_n \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^4(\Omega)^2} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2} \\ &\leq c_{14}\tau_n \left(\frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \right). \end{aligned}$$

Comme $\|\mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2}$ est borné d'après (1.35), nous avons :

$$\begin{aligned} |B_1| &\leq c_{15}\tau_n \left(\frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \left(\frac{\varepsilon_{12}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \right) \\ &\leq c_{16}\tau_n \left(\frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{11}}{2} \left(\frac{\varepsilon_{12}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{11}}{4\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Puis nous suivons les mêmes étapes, remarquant que $\Pi\mathbf{u}^n = \mathbf{0}$ et en utilisant Lemme 2.2.8, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |B_2| &\leq \frac{\tau_n}{2} \left(\frac{1}{2\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_{13}}{2} \|\Pi\mathbf{u}_h^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^4(\Omega)^2}^2 \right) \\ &\leq c_{17}\tau_n \left(\frac{1}{\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + h_n^{1/2}\varepsilon_{13} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)} \|\Pi\mathbf{u}_h^n\|_X \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2} \|\mathbf{e}^n\|_X \right) \\ &\leq c_{18}\tau_n \left(\frac{1}{\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_{13} \left(\frac{\varepsilon_{14}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{h_n}{2\varepsilon_{14}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \right) \\ &\leq c_{19}\tau_n \left(\frac{1}{\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon_{13} \left(\frac{\varepsilon_{14}}{2} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{\tau_n}{2\varepsilon_{14}} \|\mathbf{u}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tau_n\varepsilon_{13}}{2\varepsilon_{14}} \|\mathbf{u}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right). \end{aligned}$$

Donc, B est majoré comme suit :

$$\begin{aligned} |B| &\leq c_{20}\tau_n \left(\frac{1}{\varepsilon_{11}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{14}) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_n \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{14}} \|\mathbf{u}_h^n\|_X^4 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{14}} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_X^4 \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \end{aligned} \tag{2.69}$$

En utilisant la relation $\tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 \leq \sum_{n=1}^N \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2$ et le Théorème 1.3.6, nous pouvons déduire que

$$\tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 \leq \hat{C}, \tag{2.70}$$

où \hat{C} est une constante positive. Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned}
 |B| \leq & c_{20}\tau_n \left(\frac{1}{\varepsilon_{11}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\varepsilon_{13}} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + (\varepsilon_{11}\varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}\varepsilon_{14}) \|\mathbf{e}^n\|_X^2 \right. \\
 & \left. + \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \hat{C} \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{14}} \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right) \\
 & + c_{20} \left(\hat{C} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} + \hat{C}^2 \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon_{14}} \right) \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

Nous choisissons $\varepsilon_{11} = \frac{\sqrt{\nu_0}}{100c_{20}\sqrt{\hat{C}}}$, $\varepsilon_{12} = \sqrt{\hat{C}\nu_0}$, $\varepsilon_{13} = \frac{\sqrt{\nu_0}}{100c_{20}\hat{C}}$ et $\varepsilon_{14} = \hat{C}\sqrt{\nu_0}$, et nous obtenons

$$\begin{aligned}
 |B| \leq & \frac{\nu_0}{50}\tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{1}{50} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 & + c_3\tau_n \left(\|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 & \left. + \|\mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 \|\mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.72}$$

Finalement, (2.68) et (2.72) nous donnent le résultat recherché. \square

Théorème 2.2.11. *Soit $h_n \leq c_s\tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, avec c_s une constante positive indépendante de n . Nous avons l'erreur a posteriori entre \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_h^m suivante :*

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_X^2 \leq & c \left(\|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0\|_X^2 \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right),
 \end{aligned} \tag{2.73}$$

où C est une constante positive indépendante de h et de n .

Preuve. Premièrement, nous majorons la partie droite (2.60) ; nous allons utiliser souvent la relation $ab \leq \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ pour tout $\varepsilon > 0$, en particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sachant que $\Pi\mathbf{e}^n = -\Pi\mathbf{u}_h^n$ (comme $\Pi\mathbf{u}^n = 0$, voir Lemme 2.2.8) et $h_n \leq c_s\tau_n$, partant du Lemme 2.2.8, le premier et le second termes seront majorés de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}, \Pi\mathbf{e}^n) & \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \|\Pi\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 & \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{e}^n - \mathbf{e}^{n-1}\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + c c_s \tau_n \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2,
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

et

$$\begin{aligned}
 & \nu_0 \tau_n (\nabla \mathbf{e}^n, \nabla (\Pi \mathbf{e}^n)) + 2\tau_n (\nu_C (\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{e}^n), \mathbb{D}(\Pi \mathbf{e}^n)) \\
 & \leq \frac{\nu_0 \tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + 4\nu_0 \tau_n \|\Pi \mathbf{u}_h^n\|_X^2 \\
 & \quad + \frac{\nu_0 \tau_n}{16} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + \frac{2^2 \times 4 \times (\hat{\nu}_2)^2}{\nu_0} \tau_n \|\Pi \mathbf{u}_h^n\|_X^2 \\
 & \leq \frac{\nu_0 \tau_n}{8} \|\mathbf{e}^n\|_X^2 + c_2 \tau_n \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2.
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

Pour le troisième terme de la partie droite (2.60), nous posons $\mathbf{v}_h = C_{nh} \mathbf{v}$ et nous utilisons la définition de R_u^h et Lemme 2.1.8. Puis, comme $\mathbf{v} = \mathbf{e}^n - \Pi \mathbf{e}^n$ et d'après Lemme 2.2.8 nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \tau_n \langle R_u^h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle & \leq c_3 \tau_n \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X \\
 & \leq \frac{c_4}{\nu_0} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 + \frac{\nu_0 \tau_n}{8} \|\mathbf{e}^n\|_X^2.
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

Pour majorer le dernier terme de (2.60), nous utilisons Lemme 2.2.10. En regroupant (2.64), (2.74), (2.75) et (2.76) puis en sommant sur n de 1 à m et en utilisant $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ nous avons :

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 & \leq c_5 \left(\|\mathbf{e}^0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \|\mathbf{e}^0\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=0}^{m-1} \tau_n (\|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_X^2) \|\mathbf{e}^n\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right).
 \end{aligned}$$

Nous appliquons le Lemme de Gronwall 2.2.2 avec les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
 y_m & = \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2, \\
 \tilde{f}_m & = c_5 \left(\|\mathbf{e}^0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \|\mathbf{e}^0\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right),
 \end{aligned}$$

et

$$\tilde{g}_n = c_5 \tau_n (\|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_X^2).$$

Nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{e}^m\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \|\mathbf{e}^n\|_X^2 & \leq c_6 \left(\|\mathbf{e}^0\|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \|\mathbf{e}^0\|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=0}^{m-1} \tau_n \tilde{f}_n (\|\mathbf{u}^{n+1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^n\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^{n+1}\|_X^2) \times \right. \\
 & \quad \left. \exp\left(\sum_{j=n}^{m-1} \tau_j (\|\mathbf{u}^{j+1}\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^j\|_X^2 + \|\mathbf{u}_h^{j+1}\|_X^2) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Sachant que pour tout $n \leq m$, $\tilde{f}_n \leq \tilde{f}_m$ nous avons :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{e}^m \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \| \mathbf{e}^n \|_X^2 \leq c_6 \left(\| \mathbf{e}^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{e}^0 \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right. \\ & + \tilde{f}_m \sum_{n=0}^{m-1} \tau_n (\| \mathbf{u}^{n+1} \|_X^2 + \| \mathbf{u}_h^n \|_X^2 + \| \mathbf{u}_h^{n+1} \|_X^2) \times \\ & \left. \exp \left(\sum_{j=n}^{m-1} \tau_j (\| \mathbf{u}^{j+1} \|_X^2 + \| \mathbf{u}_h^j \|_X^2 + \| \mathbf{u}_h^{j+1} \|_X^2) \right) \right). \end{aligned}$$

Nous utilisons Théorème 1.3.6, Proposition 2.2.4 et la définition de σ_τ nous obtenons :

$$\| \mathbf{e}^m \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \| \mathbf{e}^n \|_X^2 \leq c \left(\| \mathbf{e}^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{e}^0 \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right).$$

Nous terminons ainsi la preuve du Théorème 2.2.11, qui nous donne l'estimation d'erreur *a posteriori* entre \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_h^m . \square

Afin de relier la partie gauche de (2.73) avec la norme augmentée définie par (2.6), nous introduisons les deux résultats suivants.??

Lemme 2.2.12. *Soient \mathbf{u}^m et \mathbf{u}_h^m les solutions respectives de (P_{aux}) et $(Eds1)$. Nous avons*

$$\frac{1}{3} \sum_{n=1}^m \tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2 \leq \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}_\tau(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \leq \frac{1 + \sigma_\tau}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2. \quad (2.77)$$

Preuve. Puisque $\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h$ est affine sur $[t_{n-1}; t_n]$, son carré est un polynôme d'ordre deux en temps et la formule de Simpson nous permet d'écrire l'intégrale suivante :

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}_\tau(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds &= \frac{\tau_n}{3} (\| \mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n) \|_X^2 + \| \mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h(t_{n-1}) \|_X^2 \\ &+ \| \mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n) \|_X \| \mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h(t_{n-1}) \|_X), \end{aligned} \quad (2.78)$$

dans laquelle nous utilisons le fait que $\| \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h \|_X$ est affine, pour remplacer sa valeur dans $\frac{t_{n-1} + t_n}{2}$ par la moitié de la somme de sa valeur dans t_{n-1} et t_n . Nous obtenons ainsi immédiatement

$$\frac{\tau_n}{3} \| \mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n) \|_X^2 \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}_\tau(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds. \quad (2.79)$$

D'autre part, en utilisant $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ et $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$ dans la partie droite de (2.78), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}_\tau(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds &\leq \frac{\tau_n}{2} (\| \mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n) \|_X^2 + \| \mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h(t_{n-1}) \|_X^2) \\ &\leq \frac{\tau_n}{2} \| \mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n) \|_X^2 \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$+ \sigma_\tau \frac{\tau_{n-1}}{2} \| \mathbf{u}_\tau(t_{n-1}) - \mathbf{u}_h(t_{n-1}) \|_X^2. \quad (2.81)$$

En sommant (2.79) et (2.81) sur n , nous obtenons le résultats désiré (2.77). \square

Corollaire 2.2.13. *Soit $t \in]t_{m-1}, t_m]$. Soit $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . L'erreur a posteriori établie entre $\mathbf{u}_\tau(t)$ et $\mathbf{u}_h(t)$ est la suivante :*

$$\begin{aligned} & \| (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h)(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \int_0^t \| \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h \|_X^2(s) ds \\ & \leq c \left(\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.82)$$

où c est une constante positive indépendante de h et de n .

Preuve. Soit $t \in]t_{m-1}, t_m]$. Puisque $t \mapsto \| (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h)(t) \|_{L^2(\Omega)^2}$ est une fonction affine par morceaux en temps sur $[t_{m-1}, t_m]$, alors

$$\| (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h)(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq \sup(\| \mathbf{u}^{m-1} - \mathbf{u}_h^{m-1} \|_{L^2(\Omega)^2}^2, \| \mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m \|_{L^2(\Omega)^2}^2).$$

Les deux termes de la partie droite juste au dessus sont majorés par la partie droite de (2.73), puisque c'est une fonction croissante de m . Donc

$$\| (\mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h)(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \leq c \left(\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right). \quad (2.83)$$

Puis, nous avons d'après (2.77) que

$$\int_0^t \| \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h \|_X^2(s) ds \leq \int_0^{t_m} \| \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h \|_X^2(s) ds \leq \frac{1 + \sigma_\tau}{2} \sum_{n=0}^m \tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2.$$

avec (2.73) nous obtenons

$$\int_0^t \| \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}_h \|_X^2(s) ds \leq c \left(\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right). \quad (2.84)$$

Les inégalités (2.83) et (2.84) nous donnent le résultat (2.82). \square

Corollaire 2.2.14. *Soit $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . Sous les hypothèses du Theorem 2.2.6, pour $t \in]t_{m-1}, t_m]$, nous avons l'estimation d'erreur a posteriori suivante entre la vitesse \mathbf{u} solution du problème (1.1) et \mathbf{u}_h qui correspond à \mathbf{u}_h^n solution du problème (Eds1) :*

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \leq c \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\ & \quad + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 \\ & \quad \left. + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right), \end{aligned} \quad (2.85)$$

où c est une constante positive.

Preuve. La preuve est une conséquence directe du Théorème 2.2.6 et du Corollaire 2.2.13. Nous commençons par appliquer l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\ & \leq 2 \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_\tau(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_\tau(s) \|_X^2 ds \\ & \quad + 2 \| \mathbf{u}_\tau(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + 2\nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}_\tau(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant Théorème 2.2.6 et Corollaire 2.2.13 Nous obtenons (2.85). \square

Jusqu'à present, la majoration d'erreur de la concentration (2.32) dépend de l'erreur de la vitesse et la majoration (2.85) dépend de l'erreur de la concentration. Pour cela, nous avons besoin de combiner ces deux inégalités, puis utiliser Corollaire 2.2.14 et Théorème 2.2.3 pour obtenir la majoration désirée.

Théorème 2.2.15. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3 et du Corollaire 2.2.14, nous avons la majoration suivante pour chaque $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\begin{aligned} & \| C(t_m) - C_h(t_m) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + r_0 \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \quad + \| \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h(t_m) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^{t_m} \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\ & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0, t_m; Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ & \quad + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0, t_m; L^2(\Omega)^2)}^2 \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right), \end{aligned}$$

où c est une constante positive.

Preuve. D'après relation (1.4) et l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2\varepsilon}a^2 + \frac{\varepsilon}{2}b^2$ nous avons

$$\| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 \leq c \left(\frac{1}{2\varepsilon} \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;Y)}^2 \right). \quad (2.86)$$

Dans un premier lieu, pour $t \in]t_{m-1}, t_m]$ nous considérons Inégalités (2.85) et (2.86) pour avoir la majoration suivante :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\ & \leq c_1 \left(\sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\ & \quad \left. + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;Y)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.87)$$

Dans un second lieu, pour chaque $n \in [1, N]$, et pour chaque $s \in]t_{n-1}, t_n]$, nous avons :

$$\begin{aligned} \| C(s) - \pi_{l,\tau} C_h(s) \|_Y^2 &\leq \left(\| C(s) - C_h(s) \|_Y + \| C_h(s) - C_h^{n-1} \|_Y \right)^2 \\ &\leq \left(\| C(s) - C_h(s) \|_Y + \left(\frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} \right) \| C_h^{n-1} - C_h^n \|_Y \right)^2 \\ &\leq 2 \left(\| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 + \| C_h^n - C_h^{n-1} \|_Y^2 \right). \end{aligned}$$

Soit $t \in [t_{m-1}, t_m]$; afin d'intégrer l'inégalité ci-dessus entre 0 et t , nous commençons par intégrer entre t_{n-1} et t_n , puis nous sommes sur n de 1 à $m-1$ et finalement nous ajoutons l'intégration entre t_{m-1} et t . Ainsi, nous obtenons

$$\int_0^t \| C(t) - \pi_{l,\tau} C_h(t) \|_Y^2 dt \leq c' \left(\int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right), \quad (2.88)$$

où c' est une constante positive indépendante de h et de n . De même, nous avons :

$$\| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq c' \left(\| C - C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \quad (2.89)$$

En suivant le même raisonnement, nous intégrons (2.43) entre 0 et t , nous obtenons :

$$\begin{aligned} &\| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &\leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Pour traiter le terme $\| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_X^2$ dans (2.87) nous utilisons l'inégalité triangulaire pour chaque $n \leq m$, alors nous obtenons

$$\| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_X^2 \leq 3 \left(\| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2 + \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \|_X^2 + \| \mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}_h^{n-1} \|_X^2 \right).$$

Nous multiplions par τ_n , nous utilisons la définition de l'indicateur (2.22) et la propriété $\tau_n \leq \sigma_\tau \tau_{n-1}$, pour avoir

$$\tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_X^2 \leq 3 \left(\tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \sigma_\tau \tau_{n-1} \| \mathbf{u}^{n-1} - \mathbf{u}_h^{n-1} \|_X^2 \right).$$

Comme $t \in [t_{m-1}, t_m]$, nous avons :

$$\int_0^t \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_X^2 \leq \sum_{n=1}^m \tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1} \|_X^2 \leq c'' \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \| \mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n \|_X^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \quad (2.91)$$

En sommant (2.87) et (2.90) et en utilisant (2.88), (2.89), (2.91) et (2.73) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \quad + \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\
 & \leq c_2 \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\
 & \quad + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \| C - C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \| C - C_h \|_{L^2(0,t;Y)}^2 \\
 & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Nous considérons $\varepsilon = \frac{\alpha}{c_2}$ pour avoir :

$$\begin{aligned}
 & \| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{2} \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \quad + \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\
 & \leq c_3 \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\
 & \quad + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| C - C_h \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 \\
 & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Puis nous appliquons le Théorème de Gronwall's 2.2.1 en considérant :

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(t) & = \| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 & \quad + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 \\
 & \quad + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right), \\
 y(t) & = \| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds \\
 & \quad + r_0 \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^m \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \\
 & \quad + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds,
 \end{aligned}$$

$\tilde{g}(t) = 1$ et $k(\tau) = c_3$.

Comme k et \tilde{g} sont constants, nous avons

$$\begin{aligned} & \| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + r_0 \int_0^t \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \quad + \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\ & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ & \quad \left. + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Pour $t = t_m$ nous obtenons le résultat du Theorem 2.2.15. \square

Théorème 2.2.16. *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3, la solution exacte C du Problème (1.1) et la solution C_h du Problème (Eds1), pour $1 \leq n \leq m$ avec $m \in \{1, \dots, N\}$, vérifient l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \pi_\tau \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h) \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(0,t_m;Y')} \\ & \leq c \left(\sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left(\tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t_m;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t_m;X)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

où c est une constante positive indépendante de h et de n .

Preuve. Nous considérons la seconde égalité du système (2.8) du Lemme 2.1.3, avec (2.15), (2.19) :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\ & = -\alpha (\nabla (C(t) - \pi_\tau C_h), \nabla r) - r_0 (C(t) - \pi_\tau C_h, r) + \langle R_c^h(t), r - r_h \rangle \\ & \quad + \langle R_c^\tau(t), r \rangle + (g(t) - g(t_n), r). \end{aligned}$$

Toutefois,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t) \right\|_{Y'} \\ & = \sup_{r \in Y} \frac{1}{\| r \|_Y} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \right) \\ & = \sup_{r \in Y} \frac{1}{\| r \|_Y} \left(-\alpha (\nabla (C(t) - \pi_\tau C_h), \nabla r) - r_0 (C(t) - \pi_\tau C_h, r) + \langle R_c^h(t), r - r_h \rangle \right. \\ & \quad \left. + \langle R_c^\tau(t), r \rangle + (g(t) - g(t_n), r) \right). \end{aligned}$$

Tous les termes de la partie droite, à l'exception du troisième et du quatrième peuvent être traités en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour le troisième terme, nous prenons $r_h = C_{nh}r$ et nous utilisons (2.27) pour obtenir :

$$|\langle R_c^h(t), r - r_h \rangle| \leq c_1 \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_Y.$$

Pour le quatrième terme, un simple calcul nous permet d'écrire :

$$|\langle R_c^r(t), r \rangle| \leq c_2 \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right)^{1/2} \|r\|_Y.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t) \right\|_{Y'} \\ & \leq c_3 \left(\alpha \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_{Y'}^2 + r_0 \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(t) - g(t_n)\|_{Y'}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous obtenons le résultat désiré (2.92) en intégrant entre t_{n-1} et t_n , en sommant sur n de 0 à m et en utilisant l'inégalité (2.88) et (2.89) appliquées à $(C - \pi_\tau C_h)$ et puis (2.32). \square

Pour obtenir la forme finale de la majoration *a posteriori*, il nous faut encore majorer ce dernier terme :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla (p - p_h).$$

Théorème 2.2.17. *Soit (\mathbf{u}, p, C) la solution du Problème (1.1) et (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) la solution du Problème (Eds1). Pour $1 \leq n \leq m$ avec $m \in \{1, \dots, N\}$, nous avons les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(0,t_m;X')} \\ & \leq c \left(\sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 + (\eta_{c,n,\kappa_n}^r)^2) + \|\mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|C - C_h\|_{L^2(0,t_m;Y)}^2 + \|\mathbf{u} - \pi_\tau \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,t_m;X)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.93}$$

Preuve. La première égalité du système (2.8) du Lemme 2.1.3 nous donne :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\ & - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t) - p_h(t)) \\ & = -\nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) - 2(\nu_C(C(t)) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\ & + \langle R_u^h(t), \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{m-1}), \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Toutefois,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t) + \nabla(p - p_h)(t) \right\|_{X'} \\
 &= \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_X} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - (\operatorname{div} \mathbf{v}, p(t) - p_h(t)) \right) \\
 &= \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{1}{\|\mathbf{v}\|_X} \left(-\nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) \right. \\
 & \quad - 2(\nu_C(C(t)) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\
 & \quad \left. + \langle R_u^h(t), \mathbf{v} \rangle + (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) \right). \tag{2.94}
 \end{aligned}$$

Nous commençons par majorer les deux premiers termes de (2.94). Tout d'abord, nous insérons $2(\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$; nous utilisons (1.12) pour le second terme de (2.95) ci-dessous. Pour le troisième terme, nous utilisons le fait que ν_C est lipschitzienne, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^4 - L^4 - L^2$, le fait que $\nabla(\mathbf{u}) \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^{2 \times 2})$ et (1.3) avec $p = 4$; nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \left| -\nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) - 2(\nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \right. \\
 & \quad \left. - 2((\nu_C(C(t)) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h)) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \right| \tag{2.95} \\
 & \leq (\nu_0 + 2\hat{\nu}_2) \|\mathbf{u}(t) - \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t)\|_X \|\mathbf{v}\|_X + c_0 \|C(t) - C_h^{n-1}\|_Y \|\mathbf{v}\|_X.
 \end{aligned}$$

Pour les autres termes de (2.94), en utilisant (2.12) et (2.26) nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & |\langle \mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) + R_u^h(t), \mathbf{v} \rangle| \\
 & \leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_1 \|\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})\|_{L^2(\kappa_n)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\kappa_n)} + c_2 \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_X.
 \end{aligned}$$

D'où, en utilisant la définition et les propriétés de \mathbf{f} nous avons,

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t) + \nabla(p - p_h)(t) \right\|_{X'} \\
 & \leq c_3 \left(\|\mathbf{u}(t) - \pi_{\tau} \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|\mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0^n\|_{L^2(\kappa_n)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C(t) - C_h^{n-1}\|_Y^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Nous insérons $C_h(t)$ dans le troisième terme de la partie droite de l'inégalité précédente, puis nous utilisons (2.47) (la définition de $C_h(t)$), ensuite nous intégrons sur t entre t_{n-1} et t_n , et enfin nous sommes sur n de 0 à m pour avoir le résultat recherché. \square

Afin d'obtenir l'estimation d'erreur *a posteriori*, il nous faut encore majorer ce terme :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \|_X^2 dt.$$

Pour cela, nous suivons les mêmes étapes suivies dans (2.88) et nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \|_X^2 dt \leq c \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \quad (2.96)$$

Corollaire 2.2.18. *Soit $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3 et du Corollaire 2.2.14, pour chaque $m \in \{1, \dots, N\}$, les solutions (\mathbf{u}, p, C) de (1.1) et (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) de (Eds1) satisfont l'estimation *a posteriori* suivante :*

$$\begin{aligned} & [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]^2(t_m) \\ & + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(0,t_m;X')} \\ & + [[C - C_h]]^2(t_m) \\ & + \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \pi_\tau \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h) \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(0,t_m;Y')} \\ & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t_m;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\ & \left. + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^2)}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (2.97)$$

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la définition de $[[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]^2(t_m)$ et $[[C - C_h]]^2(t_m)$, Théorème 2.2.15 et Inégalités (2.92), (2.93) et (2.96). \square

2.2.1 Majoration des indicateurs

Dans cette section, nous allons monter l'efficacité de l'estimation d'erreur *a posteriori*, cette dernière consiste à majorer chacun des indicateurs $\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau, \eta_{u,n,\kappa_n}^h, \eta_{c,n,\kappa_n}^\tau$ et η_{c,n,κ_n}^h localement avec l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique.

Pour établir la preuve de l'efficacité, nous introduisons \mathbf{f}_h^n une approximation de \mathbf{f}^n , ν_h une approximation de ν_C et g_h^n une approximation de g^n de la forme suivante : Pour toute fonction $\xi \in L^p(\kappa_n)$ et pour chaque élément $\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}$ nous posons

$$\mathbf{f}_h^n(\xi)|_{\kappa_n} = \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} \mathbf{f}^n(\xi(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x}, \quad (2.98)$$

$$\nu_h(\xi)|_{\kappa_n} = \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} \nu_C(\xi(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \quad (2.99)$$

et

$$g_h^n|_{\kappa_n} = \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} g^n(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \quad (2.100)$$

Une conséquence directe des propriétés de \mathbf{f}^n et de ν_C est que ν_h est majoré et que \mathbf{f}_h^n et ν_h sont Lipschitziennes par rapport à ξ .

Remarque 2.2.19. *Nous introduisons \mathbf{f}_h^n, ν_h et g_h^n , qui sont constants sur chaque κ_n , ainsi nous pourrons appliquer Propriété 2.1.1 qui s'applique seulement sur des polynômes.*

Théorème 2.2.20. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous avons l'estimation suivante :*

$$(\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq c \left(\|C - C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 \right),$$

où c est une constante indépendante du pas de temps et du pas de maillage.

Preuve. En nous basant sur la définition de C_h et de C_h^n , nous avons pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$ et pour tout $t \in [t_{n-1}, t_n]$,

$$C_h(t) - \pi_\tau C_h(t) = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{m-1}).$$

Alors, en intercalant par $C(t)$ dans l'inégalité précédente, nous obtenons :

$$\left(\frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 \|C_h^m - C_h^{m-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \leq 2 \left(\|C(t) - C_h(t)\|_{H^1(\kappa_n)}^2 + \|(C(t) - \pi_\tau C_h(t))\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right).$$

Nous intégrons sur t entre t_{n-1} et t_n pour obtenir le résultat recherché. \square

Passons à la majoration de l'indicateur η_{c,n,κ_n}^h .

Théorème 2.2.21. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous avons*

$$\begin{aligned} & \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \\ & \leq c \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^m + r_0 (C - C_h^m) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta\kappa_n))}^2 \right) \\ & \quad + \|C - \pi_\tau C_h\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta\kappa_n))}^2 \\ & \quad \left. + h_{\kappa_n}^2 \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta\kappa_n))}^2 + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \|g^n - g_h^n\|_{L^2(\Delta\kappa_n)}^2 \right), \end{aligned} \quad (2.101)$$

où c est une constante indépendante de n et de m .

Preuve. Nous considérons la seconde égalité du système (2.8) du Lemme 2.1.3 dans lequel nous simplifions la partie droite et la partie gauche par $\langle R_c^\tau(t), r \rangle$, et nous utilisons (2.19)

ainsi nous obtenons pour chaque $t =]t_{n-1}, t_n]$:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \alpha \int_{\Omega} \nabla(C(t) - C_h^n) \cdot \nabla r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} (C(t) - C_h^n) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g(t) - g^n) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n} (g^n - g_h^n) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad + \int_{\kappa_n} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad \left. - \frac{\alpha}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} \int_{e_n} [\nabla C_h^n(\sigma) \cdot \mathbf{n}] r(\sigma) \, \mathbf{d}\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

Nous prenons $r = r_{\kappa_n}$, où

$$r_{\kappa_n} = \begin{cases} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right) \psi_{\kappa_n} & \text{on } \kappa_n, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \kappa_n. \end{cases}$$

Rappelons que ψ_{κ_n} est une fonction bulle qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées avec les sommets de κ_n .

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\kappa_n} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right)^2 \psi_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & = \int_{\kappa_n} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \alpha \int_{\kappa_n} \nabla(C(t) - C_h^n) \cdot \nabla r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\kappa_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + r_0 \int_{\kappa_n} (C(t) - C_h^n) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\kappa_n} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\kappa_n} (g(t) - g^n) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (g^n - g_h^n) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Puisque $r_{\kappa_n} \in H_0^1(\kappa_n)$, nous appliquons la définition de la norme de $H^{-1}(\kappa_n)$. Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir :

$$\begin{aligned}
 & \left\| \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right) \psi_{\kappa_n}^{1/2} \right\|_{0, \kappa_n}^2 \\
 & \leq c_1 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + r_0 (C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H_0^1(\kappa_n)} + \alpha \left\| \nabla(C(t) - C_h^n) \right\|_{0, \kappa_n} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H_0^1(\kappa_n)} \right. \\
 & \quad \left. + \left\| g(t) - g^n \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{0, \kappa_n} + \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{0, \kappa_n} \right).
 \end{aligned}$$

Nous multiplions par h_{κ_n} , nous utilisons Propriété 2.1.1 et le fait que $0 \leq \psi_{\kappa_n} \leq 1$; puis nous simplifions et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & h_{\kappa_n} \left\| \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right) \right\|_{0, \kappa_n} \\
 & \leq c_2 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \right. \\
 & \quad \left. + \left\| \nabla (C(t) - C_h^n) \right\|_{0, \kappa_n} + h_{\kappa_n} \left\| g(t) - g^n \right\|_{0, \kappa_n} + h_{\kappa_n} \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n} \right).
 \end{aligned} \tag{2.103}$$

Nous commençons par intercaler g^n et utiliser l'inégalité triangulaire. Puis en élevant au carré l'inégalité précédente et en intégrant sur t entre t_{n-1} et t_n , nous pouvons majorer le premier terme de l'indicateur η_{c,n,κ_n}^h comme suit :

$$\begin{aligned}
 & \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0, \kappa_n}^2 \\
 & \leq c_3 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n))}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \left\| C - C_h^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 + h_{\kappa_n}^2 \left\| g - g^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.104}$$

Pour obtenir la majoration du second terme de η_{c,n,κ_n}^h , nous considérons un élément $\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}$ et $e_n \in \partial \kappa_n \cap \Gamma_h^i$; nous nottons par κ_n' l'autre cellule du maillage qui contient e_n et nous considérons Équation (2.102) avec $r = r_{e_n}$ où :

$$r_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}(\alpha [\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{on } \kappa_n \cup \kappa_n', \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus (\kappa_n \cup \kappa_n'). \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \int_{e_n} [\alpha \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}^2 \psi_{e_n} ds = \\
 & \int_{\kappa_n \cup \kappa_n'} \left(g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 C_h^n \right) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\kappa_n \cup \kappa_n'} \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & + \int_{\kappa_n \cup \kappa_n'} (g(t) - g^n) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} + \alpha \int_{\kappa_n \cup \kappa_n'} \nabla (C(t) - C_h^n) \nabla r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Comme $r_{e_n} \in H_0^1(K_n \cup K_n')$, nous pouvons appliquer la définition de la norme $H^{-1}(K_n \cup K_n')$; nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous utilisons Propriété 2.1.1 et Propriété

2.1.2, Nous multiplions par $h_{e_n}^{1/2}$ et simplifions par $\| \alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \|_{0, e_n}$ pour avoir

$$\begin{aligned}
 & h_{e_n}^{1/2} \| \alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \|_{0, e_n} \\
 & \leq c_4 \left(h_{e_n} \| g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha \Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 C_h^n \|_{0, \kappa_n \cup \kappa'_n} \right. \\
 & \left. \| \frac{\partial}{\partial t} (C(t) - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \|_{H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n)} \right. \\
 & \quad \left. + \| g(t) - g^n \|_{L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n)} + \| C(t) - C_h^n \|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)} \right).
 \end{aligned} \tag{2.105}$$

Nous pouvons majorer le premier terme de la partie droite de (2.105), en utilisant (2.103) et le fait que $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa_n}}$ et $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa'_n}}$ sont bornés par 1. En élevant au carré l'inégalité précédente, puis en intégrant sur t entre t_{n-1} et t_n , nous pouvons majorer le second terme de l'indicateur η_{c,n,κ_n}^h comme suit :

$$\begin{aligned}
 & h_{e_n} \tau_n \| \alpha[\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \|_{0, e_n}^2 \\
 & \leq c_5 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right. \\
 & \quad \left. + h_{e_n}^2 \| g - g^n \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + \tau_n h_{e_n}^2 \| g^n - g_h^n \|_{0, \kappa_n \cup \kappa'_n}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \| C - C_h^n \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

En regroupant (2.104) et (2.106), nous obtenons la majoration de η_{c,n,κ_n}^h . \square

Il nous reste à majorer les indicateurs de la vitesse η_{u,n,κ_n}^τ et η_{u,n,κ_n}^h .

Théorème 2.2.22. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous avons les estimations suivantes :*

$$(\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq c \left(\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \| \mathbf{u} - \pi_\tau \mathbf{u}_h \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right),$$

où c est une constante positive indépendante de n et de h .

Pour la preuve, nous avons juste à suivre la preuve du Théorème 2.2.20.

Théorème 2.2.23. *Soit $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})$, nous avons pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\begin{aligned}
 & \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \leq \\
 & c \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta \kappa_n)^2)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \| C - C_h \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))}^2 + \tau_n \| C_h^n - C_h^{n-1} \|_{H^1(\Delta \kappa_n)}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u} \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))}^2 + \| \nu_h(C) - \nu_C(C) \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 \right. \\
 & \quad \left. + h_{\kappa_n}^2 \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 + h_{\kappa_n}^2 \| \mathbf{f}^n(C) - \mathbf{f}_h^n(C) \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n)^2)}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

où c est une constante positive indépendante de n et de h .

Preuve. En nous basant sur la première inégalité du système (2.8) dans Lemme 2.1.3, nous utilisons 2.18 et nous intercalons les termes $(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v})$, $2(\nu_h(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$, et $2(\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}), \mathbb{D}(\mathbf{v}))$ pour avoir :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n \right) \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{v}(t) (p(t) - p_h(t)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \nu_0 \int_{\Omega} \nabla (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) : \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & + 2 \int_{\Omega} \nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + 2 \int_{\Omega} (\nu_C(C(t)) - \nu_h(C(t))) \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad + 2 \int_{\Omega} (\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\Omega} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} \left(\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \nabla \cdot (2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n \right) \cdot \mathbf{v} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \int_{e_n} [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n)(\sigma) \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v}(\sigma) \, \mathbf{d}\sigma \right\}.
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Nous prenons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\kappa_n}$ tel que

$$\mathbf{v}_{\kappa_n} = \begin{cases} \left((\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \nabla \cdot (2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) \right. \\ \quad \left. - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n(x) \right) \psi_{\kappa_n} & \text{on } \kappa_n, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \kappa_n. \end{cases}$$

Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \nabla \cdot (2\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) \\
 & \quad - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n)^2 \psi_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &= \int_{\kappa_n} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n + \nabla (p(t) - p_h(t)) \right) \cdot \mathbf{v}_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &+ \nu_0 \int_{\kappa_n} \nabla (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) : \nabla \mathbf{v}_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n} 2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{\kappa_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\kappa_n} 2(\nu_C(C(t)) - \nu_h(C(t))) \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{\kappa_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\kappa_n} 2(\nu_h(C(t)) - \nu_h(C_h^{n-1})) \mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{\kappa_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &- \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

Puisque $\mathbf{v}_{\kappa_n} \in H_0^1(K_n)^2$, nous pouvons appliquer la définition de la norme $H^{-1}(\kappa_n)^2$. Nous notons par $I_i, i = 0, \dots, 6$ les termes de la partie droite de l'égalité (2.109). Les trois premiers termes peuvent être majorés facilement en utilisant les propriétés de ν_h et l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi nous obtenons :

$$|I_0 + I_1 + I_2| \leq c_1 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n \right. \right. \\
 \left. \left. + \nabla (p(t) - p_h(t)) \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)^2} + \left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n \right\|_{H^1(\kappa_n)^2} \right) \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)^2}$$

Passons à la majoration de I_3 . Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz en considérant $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})$. alors nous avons :

$$\begin{aligned}
 |I_3| &\leq 2 \left\| \nu_C(C(t)) - \nu_h(C(t)) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})} \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)^2} \\
 &\leq c_2 \left\| \nu_C(C(t)) - \nu_h(C(t)) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)^2}.
 \end{aligned}$$

Comme ν_h est Lipschitzienne, et $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})$, nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous intercalons par $C_h(t)$ pour avoir :

$$\begin{aligned}
 |I_4| &\leq c_5 \left\| C(t) - C_h^{n-1} \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| \mathbb{D}(\mathbf{u}) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})} \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)^2} \\
 &\leq c_6 \left(\left\| C(t) - C_h(t) \right\|_{H^1(\kappa_n)} + \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)} \right) \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)^2}.
 \end{aligned}$$

Pour le terme I_5 , nous intercalons par $\mathbf{f}(C_h(t))$, nous utilisons la définition et les propriétés de \mathbf{f} (hypothèse 1.2.1) et nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 |I_5| &\leq c_7 \left(\left\| \mathbf{f}_0(t) - \mathbf{f}_0(t_n) \right\|_{L^2(\kappa_n)^2} + \left\| C(t) - C_h(t) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \right. \\
 & \quad \left. + \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{L^2(\kappa_n)} \right) \left\| \mathbf{v}_{\kappa_n} \right\|_{L^2(\kappa_n)^2}.
 \end{aligned}$$

Il nous reste à majorer le terme I_6 . Nous intercalons par $\mathbf{f}^n(C(t))$ et $\mathbf{f}_h^n(C(t))$ puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir :

$$|I_6| \leq c_8 \left(\begin{aligned} & \| \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C(t)) \|_{L^2(\kappa_n)^2} + \| \mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t)) \|_{L^2(\kappa_n)^2} \\ & + \| \mathbf{f}^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) \|_{L^2(\kappa_n)^2} \end{aligned} \right) \| \mathbf{v}_{\kappa_n} \|_{L^2(\kappa_n)^2} .$$

En utilisant les propriétés de \mathbf{f}^n et \mathbf{f}_h^n et puis en intercalant par $C_h(t)$ dans le premier et le troisième terme dans la partie droite de la majoration précédente, nous obtenons :

$$|I_6| \leq c_9 \left(\begin{aligned} & \| C_h^n - C_h^{n-1} \|_{L^2(\kappa_n)^2} + \| \mathbf{f}_h^n(C(t)) - \mathbf{f}^n(C(t)) \|_{L^2(\kappa_n)^2} \\ & + \| C(t) - C_h(t) \|_{L^2(\kappa_n)^2} \end{aligned} \right) \| \mathbf{v}_{\kappa_n} \|_{L^2(\kappa_n)^2} .$$

Ainsi, nous considérons l'Équation (2.109), nous combinons les majorations correspondantes de $I_i, i = 0, \dots, 6$, puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les propriétés 2.1.1 et 2.1.2, ensuite nous multiplions par $h_{\kappa_n}^2$ et nous intégrons entre t_{n-1} et t_n pour avoir l'inégalité qui suit :

$$\begin{aligned} & \tau_n h_{\kappa_n}^2 \| \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + \nabla \cdot (2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) \\ & \quad - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n \|_{0, \kappa_n}^2 \\ & \leq c_{10} \left(\begin{aligned} & \| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n + \nabla (p - p_h)) \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n))}^2 \\ & + \| C - C_h \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 + \tau_n \| C_h^n - C_h^{n-1} \|_{H^1(\kappa_n)}^2 \\ & + \| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u} \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 + \| \nu_h(C) - \nu_C(C) \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 \\ & + h_{\kappa_n}^2 \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 + h_{\kappa_n}^2 \| \mathbf{f}_h^n(C) - \mathbf{f}^n(C) \|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 \end{aligned} \right), \end{aligned} \tag{2.110}$$

Cette dernière inégalité représente la majoration du premier terme de l'indicateur η_{u,n,κ_n}^h . Passons à la majoration du second terme.

Nous considérons l'élément $\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}$ et $e_n \subset \partial \kappa_n \cap \Gamma_h^i$; nous notons par κ_n' les autres cellules du maillage qui contiennent e_n et nous considérons l'Équation (2.108) avec $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{e_n}$ tel que

$$\mathbf{v}_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}([\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_h(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n] \mathbf{n})_{e_n} \psi_{e_n} & \text{on } \kappa_n \cup \kappa_n', \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus (\kappa_n \cup \kappa_n'). \end{cases}$$

Nous obtenons,

$$\begin{aligned}
 & - \int_{e_n} [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n)\mathbf{n}]_{e_n}^2 \psi_{e_n} ds \\
 & = \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n + \nabla(p - p_h)(t) \right) \cdot \mathbf{v}_{e_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \nu_0 \nabla (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n) : \nabla \mathbf{v}_{e_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} 2(\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h^n)) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{e_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} 2(\nu_C(C(t)) - \nu_h(C(t)))\mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{e_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} 2(\nu_h(C_h(t)) - \nu_h(C_h^{n-1}))\mathbb{D}(\mathbf{u}) : \mathbb{D}(\mathbf{v}_{e_n}) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{e_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1})) \cdot \mathbf{v}_{e_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\mathbf{f}_h^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n \\
 & \quad + \nabla \cdot (2\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n) \cdot \mathbf{v}_{e_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivi pour majorer le premier terme de $(\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2$. En utilisant (2.110) et le fait que $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa_n}}$ et $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa'_n}}$ sont bornés par 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & \tau_n h_{e_n} \left\| [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_h(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n)\mathbf{n}]_{e_n} \right\|_{0,e_n}^2 \\
 & \leq c_{11} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n + \nabla(p - p_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right. \\
 & \quad + \left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + \tau_n \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 \\
 & \quad + \left\| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + \left\| \nu_h(C) - \nu_C(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \\
 & \quad \left. + h_{e_n}^2 \left\| \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_0(t_n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + h_{e_n}^2 \left\| \mathbf{f}^n(C) - \mathbf{f}_h^n(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

Nous terminons la preuve en majorant le dernier terme de $(\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2$.

Nous utilisons la condition d'incompressibilité du fluide $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ pour avoir

$$\left\| \operatorname{div} \mathbf{u}_h(t) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \leq \left\| \operatorname{div} (\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)) \right\|_{L^2(\kappa_n)}.$$

Nous intégrons entre t_{n-1} et t_n , et nous utilisons la relation (2.79) avec le terme $(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h(t_n)))$

au lieu du terme $(\mathbf{u}_\tau(t_n) - \mathbf{u}_h(t_n))$ pour avoir :

$$\begin{aligned}
 \frac{\tau_n}{3} \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{0,\kappa_n} &\leq \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\kappa_n))} \\
 &\leq \|\operatorname{div} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(t_{n-1},t_n;L^2(\kappa_n))} \\
 &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\kappa_n))} .
 \end{aligned}
 \tag{2.113}$$

En combinant (2.110), (2.112) et (2.113), et le fait que $h_{e_n} \leq h_{\kappa_n}$, nous obtenons le résultat désiré.

□

Chapitre 3

Problème de couplage avec coefficient de diffusion dépendant de la concentration

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème de couplage étudié dans les chapitres précédents mais cette fois-ci en supposant que le coefficient diffusion α dépend de la concentration. Nous commençons par montrer l'existence et l'unicité de la solution du problème correspondant. Ensuite nous discrétisons le problème comme dans le chapitre 1 et nous démontrons l'existence, l'unicité et la continuité de la solution discrète. Nous terminons en établissant les estimations d'erreur *a posteriori* correspondantes.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, de frontière $\partial\Omega$ continue lipschitzienne et $[0, T]$ un intervalle de \mathbb{R} .

Nous supposons que ν , α et \mathbf{f} dépendent de la concentration et que, pour la simplicité, la vitesse et la concentration du fluide satisfont les conditions de Dirichlet homogènes.

Le problème considéré est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \operatorname{div}(\nu(C(x, t))\mathbb{D}(\mathbf{u})(x, t)) \\ \quad + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)\mathbf{u}(x, t) + \nabla p(x, t) = \mathbf{f}(x, C(x, t)) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \frac{\partial C}{\partial t}(x, t) - \operatorname{div}(\alpha(C(x, t))\nabla C(x, t)) \\ \quad + (\mathbf{u}(x, t) \cdot \nabla)C(x, t) + r_0 C(x, t) = g(x, t) & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div} \mathbf{u}(x, t) = 0 & \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ C(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 & \text{sur } \Omega , \\ C(x, 0) = C_0 & \text{sur } \Omega . \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où r_0 est une constante positive, g est une fonction donnée et $\mathbb{D}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$.

La viscosité ν est la somme d'une viscosité constante ν_0 et d'une viscosité $\nu_C(C)$ qui dépend de la concentration. Les inconnues sont la vitesse \mathbf{u} , la pression p et la concentration C de la substance chimique diluée dans le fluide.

Le fait que le coefficient de diffusion α dépend de la concentration nous incite à reprendre l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution exacte du problème de couplage, ainsi que l'étude du schéma discret correspondant.

3.2 Problème variationnel continu

Pour l'étude théorique de l'existence et de l'unicité de la solution du problème (3.1), nous nous basons sur les travaux effectués dans [2], [24] et [33].

Dans cette section, nous introduisons la formulation variationnelle correspondant à notre problème et nous étudions les résultats théoriques correspondants.

Nous reprenons les mêmes définitions des espaces X, Y, V et M , et les hypothèses 1.2.1 introduites dans le premier chapitre et nous ajoutons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.2.1. *Nous supposons que le coefficient de diffusion $\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})$ est c_α -lipschitzienne, et vérifie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,*

$$\hat{\alpha}_1 \leq \alpha(\theta) \leq \hat{\alpha}_2 \quad (3.2)$$

où $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2$ sont deux constantes strictement positives.

La formulation variationnelle associée à (3.1) au sens des distributions dans $]0, T[$ est : $\forall \mathbf{v} \in X, \forall r \in Y$ et $\forall q \in M$ nous avons

$$(E1) \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) + (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \\ \quad - (p(t), \operatorname{div} \mathbf{v}) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = (\mathbf{f}(t, C(t)), \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in X, \\ \frac{d}{dt}(C(t), r) + (\alpha(C(t))\nabla C(t), \nabla r) \\ \quad + c_C(\mathbf{u}(t), C(t), r) + r_0(C(t), r) = (g(t), r) & \forall r \in Y, \\ (\operatorname{div} \mathbf{u}(t), q) = 0 & \forall q \in M, \\ \mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 & \text{dans } \Omega, \\ C(0) = C_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Dans ce qui suit, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution (\mathbf{u}, p, C) du problème variationnel (E1). Nous commençons par rappeler que $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact et nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 3.2.2. *Nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :*

$$\mathcal{V} = \left\{ \mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\Omega))^d; \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\},$$

La fermeture de \mathcal{V} dans $H_0^1(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \right\} = V$

et

$H =$ La fermeture de \mathcal{V} dans $L^2(\Omega)^d = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^d : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \gamma_n \mathbf{v} = 0 \right\}$, où γ_n est obtenu par extension continue de l'opérateur de trace normale défini sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ par densité de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ dans $H(\operatorname{div}; \Omega)$.

Afin de pouvoir démontrer l'existence d'au moins une solution du problème (3.1), nous allons introduire un nouvel espace fonctionnel. Pour tout $v \in L^2(0, T)$, on note par \tilde{v} l'extension de v par 0 en dehors de $[0, T]$:

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{sur } [0, T], \\ 0 & \text{sur }]-\infty, 0[\cup]T, +\infty[, \end{cases} \quad (3.4)$$

Définition 3.2.3. Nous notons par $D_t^\gamma v$ la dérivé en temps d'ordre γ de v qui est la transformée de Fourier inverse de $(2i\pi\tau)^\gamma \hat{v}$ avec $\widehat{D_t^\gamma v}(\tau) = (2i\pi\tau)^\gamma \hat{v}(\tau)$. Soient X_0, X et X_1 trois espaces de Hilbert tels que $X_0 \subset X \subset X_1$ et l'injection de X_0 dans X soit compacte. Nous introduisons les espaces fonctionnels suivants :

$$H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \left\{ v \in L^2(\mathbb{R}; X_0); D_t^\gamma v \in L^2(\mathbb{R}, X_1) \right\}.$$

$$H_K^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1) = \left\{ u \in H^\gamma(\mathbb{R}; X_0, X_1); \text{ support de } u \subset K \right\}$$

Théorème 3.2.4. (Théorème 2.2 p 274 [33]) L'injection $H_K^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ est compacte. De même, l'injection $H_K^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$ dans $L^2(0, T; H)$ est compacte.

Pour montrer l'existence de la solution du problème (3.1), nous allons suivre une démonstration classique ([33], [24]). Nous choisissons des solutions discrètes $\mathbf{u}_m(t)$ et $C_m(t)$ par la méthode de Galerkin puis nous allons montrer la convergence de ces solutions vers la solution du problème (3.1). Comme V est un espace séparable et \mathcal{V} est dense dans V , il existe donc une base $(\mathbf{w}_m)_m$ de \mathcal{V} et une base $(w_m)_m$ de Y . Nous notons V_m et Y_m des sous espaces respectifs de V et Y , engendrés respectivement par $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ et $\{w_1, \dots, w_m\}$. Nous considérons,

$$\mathbf{u}_m(t) = \sum_{j=1}^m u_{jm}(t) \mathbf{w}_j, \quad (3.5)$$

et

$$C_m(t) = \sum_{j=1}^m C_{jm}(t) w_j. \quad (3.6)$$

Pour $m \in \mathbb{N}$ fixé, nous introduisons le système d'équations différentielles suivant,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver les fonctions } u_{jm}, C_{jm} \text{ de } \mathbb{R}^+ \text{ dans } \mathbb{R}, \text{ telles que, pour tout } t \in [0, T] \\
 \sum_{j=1}^m \frac{du_{jm}}{dt}(t)(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_i) + \nu_0 \sum_{j=1}^m u_{jm}(t)(\nabla \mathbf{w}_j, \nabla \mathbf{w}_i) \\
 + 2 \sum_{j=1}^m u_{jm}(t) (\nu_C (\sum_{l=1}^m C_{lm}(t) w_l) \mathbb{D} \mathbf{w}_j, \mathbb{D} \mathbf{w}_i) + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m u_{jm}(t) u_{lm}(t) c_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}_j, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_i) \\
 = (\mathbf{f}_0(t), \mathbf{w}_i) + \left(\mathbf{f}_1 \left(\sum_{j=1}^m C_{jm}(t) w_j \right), \mathbf{w}_i \right) \quad \forall 1 \leq i \leq m, \\
 \\
 \sum_{j=1}^m \frac{dC_{jm}}{dt}(t)(w_j, w_i) + \sum_{j=1}^m C_{jm}(t) (\alpha (\sum_{l=1}^m C_{lm}(t) w_l) \nabla w_j, \nabla w_i) \\
 + \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m C_{jm}(t) u_{lm}(t) c_c(\mathbf{w}_j, w_l, w_i) + r_0 \sum_{j=1}^m C_{jm}(t)(w_j, w_i) = (g(t), w_i) \\
 \quad \forall 1 \leq i \leq m, \\
 \\
 u_{im}(0) = u_{im}^0, \\
 C_{im}(0) = C_{im}^0,
 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

où u_{im}^0 et C_{im}^0 sont respectivement les projections orthogonales de \mathbf{u}_0 et C_0 sur H et $L^2(\Omega)$ dans la base $\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}$ et $\{w_i\}_{1 \leq i \leq m}$.

Théorème 3.2.5. (*Existence d'une solution de (3.7)*) *Sous les Hypothèses 1.2.1 et 3.2.1, le système (3.7) admet au moins une solution et le couple (\mathbf{u}_m, C_m) construit par (3.5) et (3.6) est dans un sous-ensemble borné uniformément en m de l'espace $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.*

Preuve. Comme $\{\mathbf{w}_i\}_{1 \leq i \leq m}$ et $\{w_i\}_{1 \leq i \leq m}$ sont deux familles libres alors les deux matrices de coefficients respectifs $(\mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j)$ et (w_i, w_j) sont inversibles. Le système équivalent à (3.7) sera de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} u'_{im}(t) \\ C'_{im}(t) \end{pmatrix} = \phi_i(t; u_m(t), u_{2m}(t), \dots, u_{mm}(t), C_{1m}(t), C_{2m}(t), \dots, C_{mm}(t)), \quad \forall 1 \leq i \leq m,$$

où les fonctions $\phi_i, i = 1, \dots, m$ sont localement lipschitziennes par rapport aux variables $u_{im}(t)$ et $C_{im}(t)$ du fait que ν_C, α et \mathbf{f} sont lipschitziennes. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local (*cf.* [32]), le problème (3.7) admet une unique solution maximale $(u_{im}(t), C_{im}(t)) \in C^0(0, T_m; V_m) \times C^0(0, T_m; Y_m)$ pour un certain réel positif T_m . Si $T_m < T$, alors nécessairement \mathbf{u}_m et C_m ne sont pas bornés quand $t \rightarrow T_m$ par valeur inférieures. Donc, si nous montrons que \mathbf{u}_m et C_m sont bornés indépendamment de m et de t dans $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, alors on peut déduire que $T_m = T$.

Nous cherchons donc à présent des bornes sur \mathbf{u}_m et C_m . Soit $t \in [0, T_m[$. Nous multiplions

la seconde équation du problème (3.7) par $C_{im}(t)$ et nous sommes par rapport à i . Nous utilisons le fait que α soit borné (Hypothèse 3.2.1) et comme \mathbf{u}_m est à divergence nulle alors la forme trilinéaire s'annule (Lemme 1.2.3) et nous obtenons

$$\left(\frac{d}{dt}C_m(t), C_m(t)\right) + \hat{\alpha}_1 |C_m(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq (g(t), C_m(t)).$$

Nous intégrons entre 0 et t , et nous obtenons :

$$\frac{1}{2}(\|C_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|C_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2) + \hat{\alpha}_1 \int_0^t |C_m(s)|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq \int_0^t (g(s), C_m(s)) ds.$$

Passons à la majoration du second membre, nous utilisons le Lemme 1.1.2 pour $p = 2$ et (1.10) avec $\xi = \frac{\hat{\alpha}_1}{(S_2^0)^2}$, $a = S_2^0 |C_m(s)|_{H_0^1(\Omega)}$, $b = \|g\|_{L^2(\Omega)}$ pour avoir

$$\int_0^t (g(s), C_m(s)) ds \leq \frac{\hat{\alpha}_1}{2} \int_0^t |C_m(s)|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds + \frac{(S_2^0)^2}{2\hat{\alpha}_1} \int_0^t \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 ds.$$

Par suite, nous obtenons la majorations suivante :

$$\|C_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^t |C_m(s)|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds \leq (\|C_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1} \|g\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2). \quad (3.8)$$

Du fait que le membre de droite de la précédente inégalité est indépendant de t et de m , nous déduisons que C_m est une solution globale sur $[0, T]$ et d'autre part que C_m est uniformément borné dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et dans $L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$.

Nous allons suivre le même raisonnement pour \mathbf{u}_m . Nous commençons par multiplier la première équation du problème (3.7) par $\mathbf{u}_{im}(t)$ et nous sommes par rapport à i . Comme \mathbf{u}_m est à divergence nulle, nous utilisons alors le fait que la forme trilinéaire s'annule (Lemme 1.2.3) et nous obtenons

$$\left(\frac{d}{dt}\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t)\right) + \nu_0 |\mathbf{u}_m(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \leq (\mathbf{f}_0(t) + \mathbf{f}_1(C_m(t)), \mathbf{u}_m(t)).$$

Nous intégrons entre 0 et t , et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 - \|\mathbf{u}_m(0)\|_{L^2(\Omega)^d}^2) + \nu_0 \int_0^t |\mathbf{u}_m(s)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 ds \\ \leq \int_0^t (\mathbf{f}_0(s) + \mathbf{f}_1(C_m(s)), \mathbf{u}_m(s)) ds. \end{aligned}$$

Passons à la majoration du second membre. Nous utilisons Lemme 1.1.2 pour $p = 2$ et nous utilisons deux fois (1.10) avec $\xi = \frac{\nu_0}{2(S_2^0)^2}$, $a = S_2^0 |\mathbf{u}_m(s)|_{H_0^1(\Omega)^d}$, $b = \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)}$ la première fois et $b = c_{\mathbf{f}_1} \|C_m\|_{L^2(\Omega)}$ la seconde fois, pour avoir

$$\begin{aligned} \int_0^t (\mathbf{f}_0(s) + \mathbf{f}_1(C_m(s)), \mathbf{u}_m(s)) ds \leq \frac{\nu_0}{4} \int_0^t |\mathbf{u}_m(s)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 ds + \frac{(S_2^0)^2}{\nu_0} \int_0^t \|\mathbf{f}_0\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ + \frac{\nu_0}{4} \int_0^t |\mathbf{u}_m(s)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 ds + \frac{(S_2^0)^2 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} \int_0^t \|C_m\|_{L^2(\Omega)}^2 ds. \end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u}_m(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_0 \int_0^t | \mathbf{u}_m(s) |_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ & \leq \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2(S_2^0)^2}{\nu_0} \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \frac{2(S_2^0)^2 c_{\mathbf{f}_1}^2}{\nu_0} \| C_m \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Le fait que les deux premiers termes du second membre de l'estimation précédente sont indépendants de t et de m et que $\| C_m \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2$ est borné d'après (3.8), implique que \mathbf{u}_m est uniformément borné dans $L^\infty(0, T; H)$ et dans $L^2(0, T; V)$.

Ainsi, \mathbf{u}_m et C_m sont des solutions globales uniformément bornées par rapport à m dans

$$L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

□

Théorème 3.2.6. *Pour $\gamma \in]0, \frac{1}{4}[$, les fonctions $\tilde{\mathbf{u}}_m$ et \tilde{C}_m , construites à partir de (3.4) avec \mathbf{u}_m et C_m solutions du système (3.7), appartiennent respectivement à des sous-ensembles bornés uniformément en m des espaces $H^\gamma(\mathbb{R}; V, H)$ et $H^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$.*

Preuve. Commençons par noter \hat{C}_m la transformé de Fourier de \tilde{C}_m . Notre but est de montrer que $\tilde{C}_m \in H^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$. Ayant $C_m \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega))$ d'après le Théorème 3.2.5, nous avons donc que $\tilde{C}_m \in L^2(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega))$, il nous reste à montrer que : il existe $\gamma > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \| \hat{C}_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 dt \leq c, \quad (3.10)$$

avec c une constante positive indépendante de m .

D'après la deuxième équation du problème (3.7), nous avons pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{C}_m, w_j) = \langle \tilde{g}_m; w_j \rangle + (C_{0m}, w_j)\sigma_0 - (C_m(T), w_j)\sigma_T, \quad (3.11)$$

avec σ_0 et σ_T sont les distributions de Dirac en 0 et T ,

$$g_m = g + \operatorname{div}(\alpha(C_m)\nabla C_m) - \mathbf{u}_m \cdot \nabla C_m - r_0 C_m, \quad (3.12)$$

et

$$\tilde{g}_m = \begin{cases} g_m & \text{sur } [0, T], \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (3.13)$$

Appliquons la transformée de Fourier à (3.11), nous avons donc

$$2i\pi\tau(\hat{C}_m, w_j) = \langle \hat{g}_m, w_j \rangle + (C_{0m}, w_j) - (C_m(T), w_j)\exp(-2i\pi T\tau), \quad (3.14)$$

où \hat{g}_m est la transformée de Fourier de \tilde{g}_m .

Nous multiplions par $\hat{C}_{jm}(\tau)$ et nous sommes sur $j \in \{1, \dots, m\}$

$$2i\pi\tau \| \hat{C}_m(\tau) \|_{L^2(\Omega)}^2 = \langle \hat{g}_m(\tau), \hat{C}_m(\tau) \rangle + (C_{0m}, \hat{C}_m(\tau)) - (C_m(T), \hat{C}_m(\tau))\exp(-2i\pi T\tau). \quad (3.15)$$

Or, d'après (3.12)

$$\int_0^T \|g_m(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} dt \leq c_1 \int_0^T \left(\|g(t)\|_{L^2(\Omega)} + \hat{\alpha}_2 |C_m|_{H_0^1(\Omega)} + |\mathbf{u}_m|_{H_0^1(\Omega)^d} |C_m|_{H_0^1(\Omega)} + r_0 \|C_m\|_{L^2(\Omega)} \right) dt.$$

D'après le Théorème 3.2.5, nous avons que $(\mathbf{u}_m, C_m) \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, ce qui nous permet de déduire que $\int_0^T \|g_m(t)\|_{H^{-1}} dt$ est borné. Alors $\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|\hat{g}_m(\tau)\|_{H^{-1}}$ est aussi borné. De plus, comme $C_m(0)$ et $C_m(T)$ sont bornés, la relation (3.15) nous donne :

$$\begin{aligned} |\tau| \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c_2 |\hat{C}_m|_{H_0^1(\Omega)} + c_3 \|\hat{C}_m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_4 |\hat{C}_m|_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Notons d'abord que pour $\gamma \leq \frac{1}{2}$, nous avons

$$|\tau|^{2\gamma} \leq 2 \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}}; \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Alors, nous obtenons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + |\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Le premier terme du membre de droite de l'inégalité (3.17) est borné. En effet nous avons

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau.$$

Or, d'après l'égalité de Parseval et la définition de \tilde{C}_m , nous avons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \|\tilde{C}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt = \int_0^T \|C_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Par suite,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau \leq \int_0^T \|C_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt$$

et cette quantité est bornée indépendamment de m , d'après le Théorème 3.2.5.

Pour le second terme du membre de droite de (3.17), nous déduisons d'après (3.16) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq c_4 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{C}_m|_{H_0^1(\Omega)}}{1 + |\tau|^{1-2\gamma}} d\tau.$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz et l'inégalité de Parseval, nous obtenons :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{1+|\tau|^{1-2\gamma}} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau \leq c_4 \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau}{(1+|\tau|^{1-2\gamma})^2} \right)^{1/2} \left(\int_0^T |C_m(t)|_{H_0^1}^2 dt \right)^{1/2},$$

qui est fini pour $\gamma < \frac{1}{4}$ et borné indépendamment de m d'après le Théorème 3.2.5. Finalement, le terme $\int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \|\hat{C}_m(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2 d\tau$ est alors borné indépendamment de m pour $\gamma < \frac{1}{4}$. Ainsi nous avons vérifié (3.10) et nous déduisons alors que

$$\tilde{C}_m \in H^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)), \text{ pour } \gamma < \frac{1}{4}. \quad (3.18)$$

Il nous reste à montrer que

$$\tilde{\mathbf{u}}_m = \begin{cases} \mathbf{u}_m & \text{sur } [0, T], \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (3.19)$$

est tel que

$$\tilde{\mathbf{u}}_m \in H^\gamma(\mathbb{R}; V, H).$$

La preuve est similaire à la démonstration faite pour C_m et se trouve également dans [33, p. 285], en tenant compte du fait que $\nu_C(C)$ est par hypothèse bornée indépendamment de C . \square

Afin de pouvoir démontrer la convergence de la solution discrète, nous allons rappeler les lemmes suivants :

Lemme 3.2.7. (Lemme 1.1 p.250 [33]) Soient X un espace de Banach et X' son dual, et soient v et g deux fonctions qui appartiennent à $L^1(a, b; X)$. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(i)

$$v(t) = \xi + \int_0^t g(s) ds, \xi \in X, \text{ presque partout pour } t \in [a, b]$$

(ii) Pour toute fonction $\phi \in \mathcal{D}(]a, b[)$, nous avons :

$$\int_a^b v(t) \frac{d}{dt} \phi(t) dt = - \int_a^b g(t) \phi(t) dt.$$

(iii) Pour tout $\mu \in X'$, v vérifie

$$\frac{d}{dt} \langle v, \mu \rangle_X = \langle g, \mu \rangle_X \text{ dans } \mathcal{D}'(]a, b[).$$

Si v satisfait (i) – (iii), v est presque partout égale à une fonction de $C^0([a, b]; X)$.

Lemme 3.2.8. (Lemme 1.4 p.263 [33]) Soient X et Y , deux espaces de Banach tels que $X \subset Y$ avec une injection continue. Si ϕ est une fonction dans $L^\infty(0, T; X)$ et faiblement continue en temps à valeur dans Y , alors ϕ est faiblement continue à valeur dans X .

Théorème 3.2.9. (*Existence*) Si les Hypothèses 1.2.1 et 3.2.1 sont vérifiées, alors le problème (3.1) admet au moins une solution (\mathbf{u}, p, C) dans l'espace $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$.

Preuve. Dans la preuve du Théorème 3.2.5, nous avons montré que (\mathbf{u}_m, C_m) sont bornés dans

$$L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Nous en déduisons qu'il existe une sous-suite que nous noterons à nouveau (\mathbf{u}_m, C_m) pour la simplification et un couple de fonctions (\mathbf{u}, C) telles que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ faible dans } L^2(0, T; V), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = C \text{ faible dans } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \quad (3.20)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(0, T; H), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = C \text{ faible } \star \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.21)$$

D'après le Théorème 3.2.6, $(\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{C}_m)$ appartient à $H^\gamma(\mathbb{R}; V, H) \times H^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ pour $\gamma \in]0, \frac{1}{4}[$ donc $(\tilde{\mathbf{u}}_m, \tilde{C}_m)$ appartient aussi à $H_K^\gamma(\mathbb{R}; V, H) \times H_K^\gamma(\mathbb{R}; H_0^1(\Omega), L^2(\Omega))$ toujours pour $\gamma \in]0, \frac{1}{4}[$. Alors, le Théorème 3.2.4 entraîne que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{u}_m = \mathbf{u} \text{ forte dans } L^2(0, T; H), \quad \lim_{m \rightarrow \infty} C_m = C \text{ forte dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (3.22)$$

Montrons à présent que (\mathbf{u}, C) est solution du problème (E1). Soit $i \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq i$. Nous considérons le problème (3.7), multiplions par une fonction test $\psi(t)$ telle que $\psi \in C^1([0, T])$ et $\psi(T) = 0$, intégrons sur t entre 0 et T et appliquons la formule d'intégration par partie sur $[0, T]$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_i) \psi'(t) dt - (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{w}_i) \psi(0) + \int_0^T \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_m(t), \nabla \mathbf{w}_i) \psi(t) dt \\ & \quad + \int_0^T (2\nu_C(C_m(t)) \mathbb{D}(\mathbf{u}_m(t)), \mathbb{D}(\mathbf{w}_i)) \psi(t) dt + \int_0^T c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_m(t), \mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_i) \psi(t) dt \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}(C_m(t)), \mathbf{w}_i) \psi(t) dt, \\ & - \int_0^T (C_m(t), w_i) \psi'(t) dt - (C_m(0), w_i) \psi(0) + \int_0^T (\alpha(C_m(t)) \nabla C_m(t), \nabla w_i) \psi(t) dt \\ & \quad + \int_0^T c_C(\mathbf{u}_m(t), C_m(t), w_i) \psi(t) dt + \int_0^T r_0(C_m(t), w_i) \psi(t) dt \\ & = \int_0^T (g(t), w_i) \psi(t) dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Passons à la limite lorsque m tend vers $+\infty$. La convergence de la majorité des termes a été étudiée dans les Théorème 2.3 de [2] et 1.4 p. 165 de [24] et dans le Lemme 3.2 p. 289

de [33] avec quelques différences provenant du fait que la force extérieure et le coefficient de diffusion dépendent de la concentration C_m .

Le terme $\int_0^T (\mathbf{f}(C_m(t)), \mathbf{w}_i)\psi(t)dt$ converge vers $\int_0^T (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{w}_i)\psi(t)dt$ du fait que \mathbf{f} est lipschitz (Hypothèse 1.2.1). En effet,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (\mathbf{f}(C_m(t)) - \mathbf{f}(C(t)), \mathbf{w}_i)\psi(t)dt \right| = \left| \int_0^T (\mathbf{f}_1(C_m(t)) - \mathbf{f}_1(C(t)), \mathbf{w}_i)\psi(t)dt \right| \\ & \leq \int_0^T c_{f_1^*} \|C_m(t) - C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{w}_i\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^\infty(0,T)} dt \\ & \leq c_{f_1^*} T^{\frac{1}{2}} \|C_m - C\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\mathbf{w}_i\|_{L^2(\Omega)} \|\psi\|_{L^\infty(0,T)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

De plus, C_m converge fortement vers C dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ d'après (3.22). Étudions maintenant la convergence du terme

$$\int_0^T (\alpha(C_m(t))\nabla C_m(t), \nabla w_i)\psi(t)dt = \int_0^T (\alpha(C_m(t))\nabla w_i, \nabla C_m(t))\psi(t)dt.$$

Tout d'abord la convergence forte de C_m vers C dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (voir (3.22)) implique la convergence de C_m vers C presque partout. Avec l'hypothèse 3.2.1 sur le caractère Lipschitz de α , ceci implique la convergence presque partout de $\alpha(C_m)$ vers $\alpha(C)$. De plus, l'hypothèse 3.2.1 assurant que α est borné, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue nous permet de déduire que $\alpha(C_m)\nabla w_i$ converge vers $\alpha(C)\nabla w_i$ dans $L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)$. Ceci nous permettra de déduire la convergence de

$$\int_0^T (\alpha(C_m(t))\nabla w_i, \nabla C_m(t))\psi(t)dt \quad \text{vers} \quad \int_0^T (\alpha(C(t))\nabla w_i, \nabla C(t))\psi(t)dt.$$

La convergence du terme $\int_0^T ((\mathbf{u}_m(t) \cdot \nabla)\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_i)\psi(t)dt$ a été démontrée dans le Théorème 1.4 p. 165 de [24]. L'étude de la convergence du terme $\int_0^T ((\mathbf{u}_m(t) \cdot \nabla)C_m(t), w_i)\psi(t)dt$ se démontre d'une façon similaire.

Ainsi, avec i fixé quelconque, nous obtenons que les deux premières équations du système

(3.23) convergent vers

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{w}_i) \psi'(t) dt - (\mathbf{u}_0, \mathbf{w}_i) \psi(0) + \int_0^T \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{w}_i) \psi(t) dt \\
 & \quad + \int_0^T (2\nu_C(C(t)) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{w}_i)) \psi(t) dt + \int_0^T c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_i) \psi(t) dt \\
 & = \int_0^T (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{w}_i) \psi(t) dt, \\
 & - \int_0^T (C(t), w_i) \psi'(t) dt - (C_0, w_i) \psi(0) + \int_0^T (\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla w_i) \psi(t) dt \\
 & \quad + \int_0^T c_C(\mathbf{u}(t), C(t), w_i) \psi(t) dt + \int_0^T r_0(C(t), w_i) \psi(t) dt \\
 & = \int_0^T (g(t), w_i) \psi(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Soient $n \in \mathbb{N}$ fixé, nous considérons $\mathbf{v}_n \in V_n$ et $r_n \in Y_n$ quelconques. Ils s'écrivent dans les bases respectives de ces deux espaces de la façon suivante : $\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^n v_{in} \mathbf{w}_i$ et

$r_n = \sum_{i=1}^n r_{in} w_i$. En multipliant dans le système précédent la première équation par v_{in} et la deuxième par r_{in} , et en sommant sur i de 1 jusqu'à n , nous obtenons le système (3.25) avec \mathbf{v}_n à la place de \mathbf{w}_i et r_n à la place de w_i . Comme l'indice n est arbitraire et $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n \times Y_n$ est dense dans $V \times Y$, on peut remplacer (\mathbf{v}_n, r_n) par un élément arbitraire dans $(\mathbf{v}, r) \in V \times Y$:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \psi'(t) dt - (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) \psi(0) + \int_0^T \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) \psi(t) dt \\
 & \quad + \int_0^T (2\nu_C(C(t)) \mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) \psi(t) dt + \int_0^T c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) \psi(t) dt \\
 & = \int_0^T (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{v}) \psi(t) dt, \\
 & - \int_0^T (C(t), r) \psi'(t) dt - (C_0, r) \psi(0) + \int_0^T (\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla r) \psi(t) dt \\
 & \quad + \int_0^T c_C(\mathbf{u}(t), C(t), r) \psi(t) dt + \int_0^T r_0(C(t), r) \psi(t) dt \\
 & = \int_0^T (g(t), r) \psi(t) dt.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

On obtient ainsi dans $\mathcal{D}'(]0, T[)^d \times \mathcal{D}'(]0, T[)$: $\forall(\mathbf{v}, r) \in V \times Y$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + \nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) + (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) + c_u(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) &= (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{v}), \\ \frac{d}{dt}(C(t), r) + (\alpha(C(t))\nabla C(t), \nabla r) + c_C(\mathbf{u}(t), C(t), r) + r_0(C(t), r) &= (g(t), r). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Il reste maintenant à démontrer les conditions initiales $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $C(0) = C_0$. Pour cela, nous avons besoin de démontrer la continuité en temps de \mathbf{u} et de C . L'Hypothèse 1.2.1, le fait que $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$ et la première équation de (3.27) nous permettent de déduire que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(0, T; V')$. En effet, d'après (3.27) nous avons :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = -\nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) - (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) - c_u(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) + (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{v}).$$

Pour montrer que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(0, T; V')$ intégrons le terme de droite entre 0 et T ; nous obtenons :

$$\int_0^T (-\nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) - (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) - c_u(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})) dt + \int_0^T (\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{v}) dt. \quad (3.28)$$

Nous commençons par majorer le premier terme de (3.28) où nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le fait de ν_C soit borné (1.12) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^4 - L^2 - L^4$ et le lemme 1.1.2. Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T (-\nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) - (2\nu_C(C(t))\mathbb{D}(\mathbf{u}(t)), \mathbb{D}(\mathbf{v})) - c_u(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v})) dt \right| \\ & \leq \left| \int_0^T \nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) dt \right| + 2\nu_2 \left| \int_0^T (\mathbb{D}\mathbf{u}(t), \mathbb{D}\mathbf{v}) dt \right| + \left| \int_0^T (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) dt \right| \\ & \leq \nu_0 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}\|_X dt + c'_2 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}\|_X dt + c'_3 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{u}(t)\|_X \|\mathbf{v}\|_X dt \\ & \leq c_1 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 dt + c_2 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 dt + c_3 \int_0^T \|\mathbf{u}(t)\|_X^2 dt. \end{aligned}$$

Puisque $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V)$, alors ce premier terme est borné. Nous passons à la majoration du second terme de (3.28)

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T (\mathbf{f}_0(t) + \mathbf{f}_1(C(t)), \nabla \mathbf{v}) dt \right| & \leq \left| \int_0^T \|\mathbf{f}_0(t)\| \|\mathbf{v}\|_X dt \right| + \left| \int_0^T c_{f_1} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_X dt \right| \\ & \leq c_4 \int_0^T \|\mathbf{f}_0(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + c_5 \int_0^T \|C(t)\|_{L^2(\Omega)} dt. \end{aligned}$$

Puisque $C \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ et $\mathbf{f}_0 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, alors le second terme de (3.28) est aussi borné, alors nous déduisons que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(0, T; V')$. Par suite, ayant $\mathbf{u} \in L^2(0, T; V) \subset L^1(0, T; V')$ nous appliquons le lemme 3.2.7 pour $X = V'$; ainsi nous déduisons que \mathbf{u} est égale à une fonction continue de $[0, T]$ à valeur dans V' . De plus, comme

$\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; H)$ (d'après (3.21)), le lemme 3.2.8, nous permet de déduire en prenant $X = H$ et $Y = V'$, que \mathbf{u} est faiblement continue à valeur dans H . En tenant compte que α est bornée (Hypothèse 3.2.1) et en suivant les mêmes démarches nous montrons que C est faiblement continue sur $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$. À présent, nous reprenons (3.27) au sens des fonctions $L^1(0, T)$ (puisque nous avons montré que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(0, T; V')$). Nous pouvons alors multiplier chacune des équations de (3.27) par une fonction ψ comme avant ($\psi \in C^1[0, T]$, $\psi(T) = 0$ et $\psi(0) \neq 0$); en effectuant des intégrations par parties, et en comparant avec (3.26) on aura pour tout $(\mathbf{v}, r) \in V \times Y$,

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}) \quad \text{et} \quad (C_0, r) = (C(0), r).$$

On déduit alors que $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $C(0) = C_0$.

Comme $V \subset X$ et $H \subset L^2(\Omega)^d$, alors on peut déduire que le problème (3.1) admet une solution dans

$$L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Pour montrer l'existence de la pression, nous définissons, pour tout $t \in [0, T]$, la fonction $L_t \in X'$, qui à tout $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d$ associe

$$\begin{aligned} L_t(\mathbf{v}) = & \int_0^t ((\mathbf{f}(C(t)), \mathbf{v}) - \nu_0(\nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{v}) - 2(\nu_C(C(t))\mathbb{D}\mathbf{u}(t), \mathbb{D}\mathbf{v}) \\ & - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) - \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}))dt. \end{aligned}$$

D'après (3.27), nous avons que pour tout $\mathbf{v} \in V$, $L_t(\mathbf{v}) = 0$, c'est-à-dire que $L_t \in V^\circ$. Ainsi, pour tout $t \in [0, T]$, le Théorème 1.1.6 nous permet de déduire qu'il existe $P(t) \in M$ tel que

$$L_t(\mathbf{v}) = -(\operatorname{div}(\mathbf{v}), P(t)), \forall \mathbf{v} \in X, \quad (3.29)$$

et que

$$\|P(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sup_{\mathbf{v} \in X} \frac{|L_t(\mathbf{v})|}{\|\mathbf{v}\|_{H_0^1(\Omega)^d}}.$$

En dérivant (3.29) au sens des distributions par rapport à t , nous déduisons que $p(t) = \frac{\partial P}{\partial t}(t)$ vérifie la première équation du problème variationnel (3.3).

D'où l'existence de la pression. \square

Remarque 3.2.10. *Le Théorème 3.2.9 nous permet de déduire que le problème (E1) admet au moins une solution (\mathbf{u}, p, C) dans*

$$L^2(0, T; X) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d) \times W^{-1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)) \times L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Théorème 3.2.11. *Pour $d = 2$, nous avons*

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; V') \quad \text{et} \quad \frac{dC}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)).$$

De plus, nous avons que \mathbf{u} est presque partout égale à une fonction continue de $[0, T]$ dans H et que C est presque partout égale à une fonction continue de $[0, T]$ dans $L^2(\Omega)$.

Preuve. Pour la démonstration de la vitesse, nous commençons par considérer la première équation de (3.27). Nous nous référons au [33] (Lemme 3.4, page 292) pour démontrer que $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \in L^2(0, T; V')$. De plus, l'hypothèse 1.2.1, nous permet de montrer que le terme de diffusion et le membre de droite de la première équation de (3.27) appartiennent à l'espace $L^2(0, T; V')$, ce qui nous permet de déduire que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2(0, T; V')$. Pour la démonstration de la concentration, nous poursuivons la même démarche en commençant par considérer la deuxième équation de (3.27). En se référant à [33] (Lemme 3.4, page 292) pour le terme $\mathbf{u} \cdot \nabla C$ et en utilisant Hypothèse 3.2.1, nous déduisons que $\frac{dC}{dt} \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$. \square

Théorème 3.2.12. *Sous les Hypothèses 1.2.1 et 3.2.1, toute solution (\mathbf{u}, p, C) du problème (E1) telle que $\mathbf{u} \in C^0(0, T; H)$ et $C \in C^0(0, T; L^2(\Omega))$ vérifie l'inégalité suivante :*

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u} \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)} + \| C \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} + \| C \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))} \\ & \leq \hat{C} \left(\| g \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} + \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d} + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

où \hat{C} est une constante positive qui dépend de $S_2^0, \nu_0, \hat{\alpha}_1, r_0$ et $c_{\mathbf{f}_1}$.

Preuve. Soit (\mathbf{u}, p, C) une solution du problème variationnel (3.1).

La première équation du problème (E1) étant la même que la première équation de (E), la majoration (1.23) reste vraie. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} & \| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^d)}^2 + \| \mathbf{u} \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega)^d)}^2 \\ & \leq \frac{(S_2^0)^2}{\nu_0} \left(1 + \frac{1}{\nu_0} \right) \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0, T; L^2(\Omega)^d)}^2 + \frac{2(S_2^0)^4 c_{\mathbf{f}}^2}{\nu_0} \left(1 + \frac{1}{\nu_0} \right) \| C \|_{L^2(0, T; H_0^1(\Omega))}^2 + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d}^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

D'autre part, en remplaçant r par C dans la deuxième équation de (3.3) (E1), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial C}{\partial t}(t), C(t) \right) + c_C(\mathbf{u}(t), C(t), C(t)) + (\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla C(t)) \\ & + r_0(C(t), C(t)) = (g(t), C(t)). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Or, d'après le Lemme 1.2.3, le terme $c_C(\mathbf{u}, C, C)$ est nul. L'Hypothèse 3.2.1 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permettent d'obtenir :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \| \nabla C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + r_0 \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \| g(t) \|_{L^2(\Omega)} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}.$$

Nous appliquons l'inégalité (1.10) pour $\xi = \frac{2(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1}$ et le Lemme 1.1.2 au second membre, pour avoir

$$\frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\hat{\alpha}_1}{2} \| C(t) \|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1} \| g(t) \|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.33)$$

D'une part, d'après (3.33) nous avons

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_1} \frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} \| g(t) \|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (3.34)$$

En intégrant entre 0 et t , nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\| g \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Par suite,

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_1} \| C \|_{L^\infty(0,t;L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\frac{(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.36)$$

D'autre part, nous reprenons (3.33)

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_1} \frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2r_0}{\hat{\alpha}_1} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{2(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} \| g(t) \|_{L^2(\Omega)}^2,$$

en intégrant entre 0 et T , nous obtenons

$$\| C \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}^2 + \frac{2r_0}{\hat{\alpha}_1} \| C \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 \leq \left(\frac{2(S_2^0)^2}{\hat{\alpha}_1^2} + \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \right) \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \quad (3.37)$$

Finalement, les inégalités (3.31), (3.36) et (3.37) nous permettent de déduire la suivante :

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{u} \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u} \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega)^d)} + \| C \|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \| C \|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\ &\leq \hat{C} \left(\| g \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \| \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,T;L^2(\Omega)^d)} + \| \mathbf{u}_0 \|_{L^2(\Omega)^d} + \| C_0 \|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

où \hat{C} ne dépend que de S_2^0 , ν_0 , $\hat{\alpha}_1$, r_0 et $c_{\mathbf{f}_1}$. \square

Théorème 3.2.13. (*Unicité en dimension $d = 2$*) Si le problème (E) admet une solution (\mathbf{u}, p, C) telle que pour $p \geq 4$ et $r \geq 4$,

$$\mathbf{u} \in L^p(0, T; W^{1,r}(\Omega)^d) \text{ et } C \in L^p(0, T; W^{1,r}(\Omega)),$$

alors cette solution est unique.

Preuve. Nous supposons que (\mathbf{u}_1, p_1, C_1) et (\mathbf{u}_2, p_2, C_2) sont deux solutions du problème (E1). Il faut montrer que $(\mathbf{u}_1, p_1, C_1) = (\mathbf{u}_2, p_2, C_2)$. Pour cela nous posons $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $p = p_1 - p_2$ et $C = C_1 - C_2$. Nous remplaçons dans la première équation du problème variationnel (E1), \mathbf{v} par \mathbf{u} et nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (2\nu_C(C_1(t)) \mathbb{D} \mathbf{u}_1(t), \mathbb{D} \mathbf{u}(t)) \\ \quad + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) = (\mathbf{f}(t, C_1(t)), \mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } [0; T], \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_2(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (2\nu_C(C_2(t)) \mathbb{D} \mathbf{u}_2(t), \mathbb{D} \mathbf{u}(t)) \\ \quad + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) = (\mathbf{f}(t, C_2(t)), \mathbf{u}(t)) \quad \text{dans } [0; T]. \end{array} \right. \quad (3.39)$$

En effectuant la différence des deux équations du système précédent nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) + c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) - c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}(t)) \\ & + \nu_0(\nabla(\mathbf{u}_1(t) - \mathbf{u}_2(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (\nu(C_1(t))\mathbb{D}\mathbf{u}_1(t), \mathbb{D}\mathbf{u}(t)) - (\nu(C_2(t))\mathbb{D}\mathbf{u}_2(t), \mathbb{D}\mathbf{u}(t))) \\ & = (\mathbf{f}(t, C_1(t)) - \mathbf{f}(t, C_2(t)), \mathbf{u}(t)). \end{aligned}$$

Nous ajoutons et nous retranchons les termes $c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t))$ et $(\nu(C_2(t))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t))$, et nous utilisons le lemme 1.2.3 pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t)) + (\nu_0 \nabla \mathbf{u}(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (\nu_C(C_2(t))\mathbb{D}\mathbf{u}(t), \mathbb{D}\mathbf{u}(t)) = -c_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1(t), \mathbf{u}(t)) \\ & + ((\nu_C(C_2(t)) - \nu_C(C_1(t)))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t)) + (\mathbf{f}_1(t, C_1(t)) - \mathbf{f}_1(t, C_2(t)), \mathbf{u}(t)). \end{aligned}$$

Commençons par noter $A = ((\nu_C(C_2(t)) - \nu_C(C_1(t)))\nabla \mathbf{u}_1(t), \nabla \mathbf{u}(t))$. Puisque \mathbf{f}_1 est c_{f_1} -lipschitzienne d'après l'hypothèse 1.2.1 et ν_C est borné (1.12), l'inégalité de Hölder et Sobolev fournissent

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \|A\|_{L^4(\Omega)^d} |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d} + |A| + c_{f_1} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Sobolev, les relations (1.1.3), (1.8) et (1.10), nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \sqrt{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d} |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 + |A| + \frac{c_{f_1}}{2} (\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2) \\ & \leq \varepsilon_1 |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2 |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ & \quad + |A| + \frac{c_{f_1}}{2} (\|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)^d}^2). \end{aligned}$$

Pour la majoration de $|A|$, comme $\mathbf{u} \in L^p(0, T; W^{1,r}(\Omega)^d)$ pour $r \geq 4$, nous avons :

$$\begin{aligned} |A| & \leq c_{\nu} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \|C(t)\|_{L^{r^*}(\Omega)} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d} \\ & \leq \frac{c_{\nu}}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \|C(t)\|_{L^{r^*}(\Omega)}^2 + \frac{c_{\nu}\varepsilon_2}{2} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)^d}, \end{aligned}$$

avec $r^* = \frac{2}{r-2} \leq 4$. Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} |A| & \leq \frac{c_{\nu}}{2\varepsilon_2} \|\mathbf{u}_1(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_3}} \|C(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{2}} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\ & \quad + \frac{c_{\nu}\varepsilon_2}{2} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \|\mathbf{u}_1(t)\|_{W^{1,r}(\Omega)^d}. \end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \nu_0 |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\
 & \leq \varepsilon_1 |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_1} \left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\
 & \quad + \frac{c_{f_1}}{2} \left(\left\| C(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right) \\
 & \quad + \frac{c_\nu}{2\varepsilon_2} \left\| \mathbf{u}_1(t) \right\|_{W^{1,r}(\Omega)^d} \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_3}} \left\| C(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_3}{\sqrt{2}} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\
 & \quad + \frac{c_\nu \varepsilon_2}{2} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \left\| \mathbf{u}_1(t) \right\|_{W^{1,r}(\Omega)^d}.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

D'autre part, en remplaçant dans la seconde équation du problème variationnel (E1) r par C , nous déduisons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (C_1(t), C(t)) + (\alpha(C_1(t)) \nabla C_1(t), \nabla C(t)) + c_C(\mathbf{u}_1(t), C_1(t), C(t)) \\ \quad + r_0(C_1(t), C(t)) = (g(t), C_1(t)) \quad \text{dans } [0; T], \\ \frac{d}{dt} (C_2(t), C(t)) + (\alpha(C_2(t)) \nabla C_2(t), \nabla C(t)) + c_C(\mathbf{u}_2(t), C_2(t), C(t)) \\ \quad + r_0(C_2(t), C(t)) = (g(t), C_2(t)) \quad \text{dans } [0; T], \end{array} \right. \tag{3.41}$$

Nous effectuons la différence et nous intercalons les termes

$$c_C(\mathbf{u}_2(t), C_1(t), C(t)) \text{ et } (\alpha(C_2(t)) \nabla C_1(t), \nabla C(t)).$$

En utilisant Lemme 1.2.3 et en suivant la même démarche que précédemment nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (C(t), C(t)) + (\alpha(C_2(t)) \nabla C(t), \nabla C(t)) + r_0(C(t), C(t)) &= -c_C(\mathbf{u}(t), C_1(t), C(t)) \\
 &+ ((\alpha(C_2(t)) - \alpha(C_1(t))) \nabla C_1(t), \nabla C(t)).
 \end{aligned}$$

Comme $C \in L^p(0, T; W^{1,r}(\Omega))$, nous prenons $r \geq 4$ et $r^* = \frac{2}{r-2} \leq 4$ comme précédemment. Puisque α est borné (voir (3.2)), les inégalités de Hölder et Sobolev (1.1.3), (1.8) et (1.10) nous donnent :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\| C(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \left\| C(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \left\| \mathbf{u}(t) \right\|_{L^4(\Omega)^d} \left\| C(t) \right\|_{L^4(\Omega)} |C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)} \\
 & \quad + c_\alpha \left\| C(t) \right\|_{L^{r^*}(\Omega)} \left\| C_1(t) \right\|_{W^{1,r}(\Omega)} \left\| \nabla C(t) \right\|_{L^2(\Omega)}.
 \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités (1.1.3) et (1.10), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + r_0 \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \\
 & \leq \frac{|C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}}{2} (\| \mathbf{u}(t) \|_{L^4(\Omega)^d}^2 + \| C(t) \|_{L^4(\Omega)}^2) \\
 & \quad + \frac{c_\alpha}{2\varepsilon_4} |C_1(t)|_{W^{1,r}(\Omega)} \| C(t) \|_{L^4(\Omega)}^2 + \frac{c_\alpha \varepsilon_4}{2} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 |C_1(t)|_{W^{1,r}(\Omega)} \\
 & \leq \frac{|C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_5}} \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \frac{\varepsilon_5}{\sqrt{2}} |\mathbf{u}(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_6}} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_6}{\sqrt{2}} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\
 & \quad + \frac{c_\alpha}{2\varepsilon_4} \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_7}} \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\varepsilon_7}{\sqrt{2}} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \right) \\
 & \quad + \frac{c_\alpha \varepsilon_4}{2} |C(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)}. \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

En additionnant les deux équations (3.40) et (3.42) et en choisissant $\varepsilon_1 = \frac{\nu_0}{3}$,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_2 &= \frac{2\nu_0}{3c_\nu \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d}}, & \varepsilon_3 &= \frac{2\hat{\alpha}_1 \varepsilon_2}{\sqrt{2}c_\nu \| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d}}, \\
 \varepsilon_4 &= \frac{\hat{\alpha}_1}{2c_\alpha \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)}}, & \varepsilon_5 &= \frac{2\nu_0}{3|C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}}, \\
 \varepsilon_6 &= \frac{\hat{\alpha}_1}{2|C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}}, & \varepsilon_7 &= \frac{\hat{\alpha}_1 \varepsilon_4}{\sqrt{2}c_\alpha \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)}}
 \end{aligned}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \leq \\
 & \quad c \left(\| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d}^4 + \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)}^4 \right. \\
 & \quad \left. + |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 + |C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 1 \right) (\| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2).
 \end{aligned}$$

Soit $u(t) = \| \mathbf{u}(t) \|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \| C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2$ et

$$k(t) = c \left(\| \mathbf{u}_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)^d}^4 + \| C_1(t) \|_{W^{1,r}(\Omega)}^4 + |\mathbf{u}_1(t)|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 + |C_1(t)|_{H_0^1(\Omega)}^2 + 1 \right),$$

Nous intégrons entre 0 et t l'inégalité précédente et nous obtenons

$$u(t) \leq \int_0^t k(s)u(s)ds.$$

Nous appliquons le lemme de Gronwall avec 2.2.1 avec $\tilde{g}(t) = 1$ et $f(t) = 0$ pour obtenir $u = 0$, ainsi $C_1 = C_2$ et $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$.

En ce qui concerne l'unicité de la pression $p = p_1 - p_2$, nous considérons l'équation (E1) vérifiée par \mathbf{u}_1 et par \mathbf{u}_2 et nous effectuons la différence et nous intégrons entre 0 et t pour obtenir :

$$\text{pour tout } \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^d, \quad \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{v}(x)) \left(\int_0^t p(x, s) ds \right) dx = 0.$$

En conclusion, d'après le théorème 1.1.6, nous avons $\int_0^t p(\cdot, s) ds$ pour tout $t \in [0, T]$, et ensuite $p = 0$.

D'où l'unicité de la solution. \square

3.3 Problème discret stabilisé

Cette section est consacrée à la discrétisation du problème variationnel (E1) en temps et en espace en utilisant la même approche que celle utilisée dans le chapitre 1 : Le schéma d'Euler semi-implicite d'ordre 1 pour la discrétisation en temps et la méthode des éléments finis pour la discrétisation en espace. Le problème variationnel discret associé à la formation variationnelle continue (E1) est le suivant :

pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, ayant $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$ et $C_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$, trouver $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$, $C_h^n \in Y_{nh}$ tel que,

$$(\text{Eds1}^*) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}_h) + (2\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n), \mathbb{D}(\mathbf{v}_h)) \\ \quad + d_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h) - (p_h^n, \operatorname{div} \mathbf{v}_h) = (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_{nh}, \\ \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}, r_h) + d_C(\mathbf{u}_h^n, C_h^n, r_h) \\ \quad + (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n, \nabla r_h) + r_0(C_h^n, r_h) = (g^n, r_h) \quad \forall r_h \in Y_{nh}, \\ (q_h, \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n) = 0 \quad \forall q_h \in M_{nh}, \end{array} \right.$$

où \mathbf{u}_h^0 et C_h^0 sont des approximations de \mathbf{u}_0 et C_0 .

g^n et \mathbf{f}^n sont données par

$$g^n = g(t_n)$$

et

$$\mathbf{f}^n(C^{n-1}) = \mathbf{f}_0^n + \mathbf{f}_1(C^{n-1})$$

avec

$$\mathbf{f}_0^n = \mathbf{f}_0(t_n).$$

La différence entre le problème variationnel (Eds1*) et (Eds1) est au niveau du terme de diffusion qui désormais dépend de la concentration : $\alpha(\nabla C_h^n, \nabla r_h)$ est remplacé par $(\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n, \nabla r_h)$.

3.3.1 Existence et unicité de la solution du problème discret

Nous commençons par établir l'existence et l'unicité du problème (Eds1*).

Théorème 3.3.1. *(Existence et unicité) À chaque pas de temps, pour $\mathbf{u}_h^{n-1} \in X_{(n-1)h}$, $C_h^{n-1} \in Y_{(n-1)h}$ et sous les Hypothèses (3.2.1), le problème (Eds1*) admet une unique solution $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n, C_h^n)$ dans $X_{nh} \times M_{nh} \times Y_{nh}$.*

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution $(\mathbf{u}_h^n, p_h^n) \in X_{nh} \times M_{nh}$ de la première équation du problème variationnel discret (Eds1*) sont déjà démontrées dans le Théorème 1.3.5. Nous suivons les mêmes démarches de la preuve du Théorème 1.3.5 pour démontrer l'existence et l'unicité de la concentration C_h^n du problème variationnel (Eds1*). Nous considérons, pour tous $C, r \in Y_{nh}$, la forme bilinéaire suivante :

$$\tilde{a}_2(C, r) = \frac{1}{\tau_n}(C, r) + (\alpha(C_h^{n-1})\nabla C, \nabla r) + (\mathbf{u}_h^n \nabla C, r) + r_0(C, r).$$

Le fait que α soit bornée nous donne immédiatement la continuité de \tilde{a}_2 . Il nous reste à démontrer qu'elle est coercive.

En effet, pour tout $C_h \in Y_{nh}$, nous avons

$$\tilde{a}_2(C_h, C_h) = \frac{1}{\tau_n}(C_h, C_h) + (\alpha(C_h^{n-1})\nabla C_h, \nabla C_h) + r_0(C_h, C_h).$$

L'inégalité (3.2) nous donne la majoration suivante :

$$\tilde{a}_2(C_h, C_h) \geq \left(\frac{1}{\tau_n} + r_0\right) \|C_h\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 |C_h|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

D'où,

$$\tilde{a}_2(C_h, C_h) \geq \min\left(\frac{1}{\tau_n} + r_0, \hat{\alpha}_1\right) \|C_h\|_{H_0^1(\Omega)}^2.$$

Nous déduisons, en appliquant le théorème de Lax-Milgram, l'existence et l'unicité de la solution $C_h^n \in Y_{nh}$ de la deuxième équation du problème variationnel discret (Eds1*). \square

Proposition 3.3.2. *À chaque itération n , sous les hypothèses 1.2.1 et 3.2.1, la solution $(\mathbf{u}_h^n, C_h^n) \in X_{nh} \times Y_{nh}$ du problème variationnel discret (Eds1*) vérifie, pour tout $m = 1, \dots, N$, les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)^d}^2 + \sum_{n=0}^m \frac{\nu_0 \tau_n}{2} |\mathbf{u}_h^n|_{H_0^1(\Omega)^d}^2 \\ & \leq \tilde{C}_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \|g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^m \tau_n \|\mathbf{f}_0^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}_h^0\|_{L^2(\Omega)^d}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|C_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^m \frac{\hat{\alpha}_1 \tau_n}{2} |C_h^n|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=0}^m r_0 \frac{\tau_n}{2} \|C_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \tilde{C}'_d \left(\sum_{n=0}^m \tau_n \|g^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.44)$$

où \tilde{C}_d et \tilde{C}'_d sont deux constantes positives indépendantes de h et m .

preuve. Pour la preuve, nous suivons les mêmes étapes que la preuve de la proposition 1.3.6. L'inégalité (3.43) est déjà démontrée dans la Proposition 1.3.6. En ce qui concerne l'inégalité (3.44), elle s'obtient d'une façon similaire à celle obtenue dans la Proposition 1.3.6 avec la seule différence au niveau du terme de diffusion α qui dépend cette fois-ci de la concentration. Le fait qu'il soit borné nous permet d'obtenir à partir de (1.36), l'équation (3.44) en remplaçant α par $\hat{\alpha}_1$. \square

3.4 Estimation d'erreur *a posteriori*

Le but de cette partie est d'établir une estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte (\mathbf{u}, p) du problème (3.1) et la solution numérique du problème (Eds1*). Nous supposons que la solution du problème (3.1) est unique et suffisamment régulière en particulier $\mathbf{u} \in C^0(0, T; L^2(\Omega)^2)$ et $C \in C^0(0, T; L^2(\Omega))$. Dans cette section, nous nous limitons à la dimension $d = 2$ pour des raisons techniques que nous allons présenter par la suite. Nous commençons par construire les indicateurs, puis nous établissons l'estimation d'erreur *a posteriori*.

3.5 Construction des indicateurs d'erreurs

Nous démontrons une estimation d'erreur *a posteriori*, en utilisant les normes (2.6) et (2.7) mais avec $\hat{\alpha}_1$ à la place de α :

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]](t_m) = & \left(\|\mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ & \left. + \nu_0 \max \left(\int_0^{t_m} \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt \right) \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (3.45)$$

et

$$\begin{aligned} [[C - C_h]](t_m) = & \left(\|C(t_m) - C_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)^2}^2 \right. \\ & \left. + \hat{\alpha}_1 \max \left(\int_0^{t_m} \|C(t) - C_h(t)\|_X^2 dt, \sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|C(t) - \pi_\tau C_h(t)\|_X^2 dt \right) \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Dans la suite, nous allons établir les équations aux résidus correspondant aux problèmes (3.1) et (Eds1*) d'une façon similaire au chapitre 2.

Lemme 3.5.1. *En combinant (3.1) et (Eds1*), nous déduisons que*

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(0) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad (C - C_h)(0) = 0.$$

De plus, pour $1 \leq n \leq N$, pour t dans $]t_{n-1}, t_n]$, pour tous \mathbf{v} dans X , r dans Y et q dans M nous avons

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \right) + \nu_0 (\nabla \mathbf{u}(t) - \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \nabla \mathbf{v}) \\
 & \quad + 2(\nu_C(C(t)) \mathbb{D} \mathbf{u}(t) - \nu_C(\pi_{l,\tau} C_h) \mathbb{D} \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbb{D} \mathbf{v}) \\
 & + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) - (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h(t), \mathbf{v}) \\
 & \quad - (\operatorname{div} \mathbf{v}(t), p(t) - p_h(t)) \\
 & = (\mathbf{f}(t, C(t)) - \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}), \mathbf{v}) + \langle R_u^h(\mathbf{u}_h)(t), \mathbf{v} \rangle, \\
 & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + (\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla r) - (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h(t), \nabla r) \\
 & \quad + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & \quad + r_0(C(t) - C_h(t), r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & = (g(t) - g(t_n), r) + \langle R_{c^*}(C_h)(t), r \rangle, \\
 & \int_{\Omega} q(t, x) \operatorname{div}(\mathbf{u}(t, x) - \mathbf{u}_h(t, x)) = - \int_{\Omega} q(t, x) \operatorname{div}(\mathbf{u}_h(t, x)).
 \end{aligned} \right. \tag{3.47}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} \rangle &= (\mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n} (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}), \mathbf{v}) - \nu_0 (\nabla \mathbf{u}_h^n, \nabla \mathbf{v}) \\
 & \quad - 2(\nu_C(C_h^{n-1}) \mathbb{D} \mathbf{u}_h^n, \mathbb{D} \mathbf{v}) - (\mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}) \\
 & \quad - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}(t)) \mathbf{u}_h^n(t), \mathbf{v}) + (\operatorname{div}(\mathbf{v}), p_h^n),
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

et

$$\langle R_{c^*}(C_h)(t), r \rangle = \langle R_{c^*}^r(C_h)(t), r \rangle + \langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle \text{ pour tout } r_h \in Y_{nh}$$

où

$$\langle R_{c^*}^r(C_h)(t), r \rangle = -(\alpha(C_h^{n-1}) \nabla (C_h(t) - \pi_\tau(C_h)(t)), \nabla r) + r_0(C_h(t) - \pi_\tau C_h(t), r), \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}
 \langle R_{c^*}^h(C_h^n), r \rangle &= (g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), r) - (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n, \nabla r) \\
 & \quad - (\mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n, r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\
 & \quad - r_0(C_h^n, r).
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

De plus, si (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) est solution du problème (Eds1*), alors nous avons

$$\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} \rangle = \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle \text{ for all } \mathbf{v}_h \in X_{nh} \tag{3.51}$$

et

$$\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r \rangle = \langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle \text{ for all } r_h \in Y_{nh}. \tag{3.52}$$

Preuve. En remplaçant dans Théorème 2.1.3 le coefficient de diffusion α par $\alpha(C_h^{m-1})$ nous obtenons le résultat du Théorème 3.5.1. \square

Lemme 3.5.2. *L'égalité (3.48) peut être écrite sous la forme ci-dessous :*

$$\begin{aligned} \langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (\mathbf{f}^n(C_h^{m-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n \right. \\ &\quad + 2\nabla \cdot (\nu_C(C_h^{m-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^{n-1} \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n(x), \mathbf{v}(x) - \mathbf{v}_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa n}} \int_{e_n} [(\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_C(C_h^{m-1})\mathbb{D}\mathbf{u}_h^n - p_h^n \mathbb{I})(\sigma) \mathbf{n}] \cdot (\mathbf{v}(\sigma) - \mathbf{v}_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (3.53)$$

et l'égalité (3.50) peut être écrite comme suit :

$$\begin{aligned} \langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n \right. \\ &\quad + \operatorname{div}(\alpha(C_h^{m-1})C_h^n) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - r_0 C_h^n)(r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa n}} \int_{e_n} [\alpha(C_h^{m-1})\nabla C_h^n(\sigma) \cdot \mathbf{n}](r(\sigma) - r_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Preuve. L'égalité (3.53) est exactement la même que (2.18) .

Pour obtenir l'égalité (3.54), nous intégrons par parties le second terme du membre de droite de l'égalité (3.50) pour obtenir :

$$\begin{aligned} &\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle \\ &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) \cdot (r(x) - r_h(x))) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\ &\quad + \int_{\kappa_n} \operatorname{div}(\alpha(C_h^{m-1})\nabla C_h^n) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\quad - \int_{\partial \kappa_n} \alpha(C_h^{m-1})\nabla((C_h^n \cdot \mathbf{n})(\sigma)) \cdot (r(\sigma) - r_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \\ &\quad - \int_{\kappa_n} \mathbf{u}_h^n \nabla C_h^n (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)C_h^n) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ &\quad \left. - \int_{\kappa_n} r_0 C_h^n (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right\} \quad (3.55) \\ &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \operatorname{div}(\alpha(C_h^{m-1}))\nabla C_h^n - \mathbf{u}_h^n \nabla C_h^n \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)C_h^n - r_0 C_h^n) \cdot (r(x) - r_h(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa n}} \int_{e_n} [\alpha(C_h^{m-1})\nabla C_h^n(\sigma) \cdot \mathbf{n}](r(\sigma) - r_h(\sigma)) \, \mathbf{d}\sigma \right\}. \end{aligned}$$

\square

Définition 3.5.3. Pour chaque κ_n dans \mathcal{T}_{nh} , nous rappelons la définition de $(\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2$, $(\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2$, $(\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2$ et nous introduisons celle de $(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2$

$$\begin{aligned}
 (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 &= \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, \\
 (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 &= \tau_n \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2, \\
 (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| \mathbf{f}^n(C_h^{n-1}) - \frac{1}{\tau_n}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}) + \nu_0 \Delta \mathbf{u}_h^n + 2 \operatorname{div}(\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n)) \right. \\
 &\quad \left. - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n - \nabla p_h^n(x) \right\|_{0,\kappa_n}^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [\nu_0 \nabla \mathbf{u}_h^n + 2\nu_C(C_h^{n-1})\mathbb{D}(\mathbf{u}_h^n) - p_h^n \mathbb{I}](\sigma) \right\|_{0,e_n}^2 \\
 &\quad + \|\operatorname{div} \mathbf{u}_h^n\|_{0,\kappa_n}^2, \\
 (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 &= h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \operatorname{div}(\alpha(C_h^{n-1})\nabla C_h^n) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^n \right. \\
 &\quad \left. - r_0 C_h^n \right\|_{0,\kappa_n}^2 + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} h_{e_n} \left\| [\alpha(C_h^{n-1})\nabla C_h^n](\sigma) \right\|_{0,e_n}^2.
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Lemme 3.5.4. Nous avons les majorations suivantes pour tout $1 \leq n \leq N$,

1. Pour tout $\mathbf{v} \in X$ et $\mathbf{v}_h = \mathcal{C}_{nh}\mathbf{v}$:

$$|\langle R_u^h(\mathbf{u}_h^n), \mathbf{v} - \mathbf{v}_h \rangle| \leq c_{rhu} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}. \tag{3.57}$$

2. Pour tout $r \in Y$ et $r_h = \mathcal{C}_{nh}r$:

$$|\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_{rhc^*} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_{1,\Omega}. \tag{3.58}$$

Preuve.

1. Le résultat (3.57) est le même que (2.26) du Lemme 2.1.8.
2. Pour obtenir (3.58), nous commençons par appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à (3.55) et nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 |\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^n - C_h^{n-1}) + \alpha(C_h^{n-1})\Delta C_h^n - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0,\kappa_n} \|r - r_h\|_{0,\kappa_n} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \varepsilon_{\kappa_n}} \left\| [\alpha(C_h^{n-1})\nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0,e_n} \|r - r_h\|_{0,e_n} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Nous choisissons $r_h = \mathcal{C}_{nh}r$ et nous utilisons (2.4), pour trouver :

$$\begin{aligned}
 |\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| &\leq \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_6 h_{\kappa_n} \left\{ \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} \mathbf{u}_h^n C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0, \kappa_n} |r|_{1, \kappa_n} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} c_7 h_{e_n} \left\| [\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}] \right\|_{0, e_n} |r|_{1, e_n} \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, la relation $(ab + cd) \leq (a + c)(b + d)$ et (3.56), nous donnent :

$$|\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c^*, n, \kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_9 |r|_{1, \Delta \kappa_n}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} c_{10} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} |r|_{1, \Delta e_n}^2 \right)^{1/2}.$$

Finalement, nous obtenons :

$$|\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_{rhc^*} \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c^*, n, \kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_{1, \Omega}.$$

□

3.6 Les majorations d'erreur *a posteriori*

Dans cette partie, notre but est d'introduire les théorèmes qui fournissent les majorations d'erreur *a posteriori* de la vitesse et de la concentration.

Théorème 3.6.1. *Nous supposons que \mathbf{u} appartient à $L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$, C appartient à $L^\infty(0, T; L^3(\Omega))$, et ∇C appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)$. Pour tout $1 \leq m \leq N$, il existe une constante c indépendante de h et de τ telle qu'on ait la majoration d'erreur *a posteriori* suivante entre la concentration C du problème (3.1) et la solution C_h associée à la solution $(C_h^n)_{0 \leq n \leq N}$ du problème (Eds1*) :*

$$\begin{aligned}
 &\|C(t_m) - C_h(t_m)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^{t_m} \|C(s) - C_h(s)\|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^{t_m} \|C(s) - C_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 &\leq c \left(\sum_{n=1}^m \|g - g^n\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; Y')}^2 + \|C_0 - C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0, t_m; X)}^2 \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{c, n, \kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u, n, \kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c^*, n, \kappa_n}^h)^2) \right),
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Preuve. Commençons par intercaler $(\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C(t), \nabla r)$ et $(\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C_h^n, r)$ dans la deuxième équation du problème (3.47) considérée pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$. Nous obtenons en utilisant le

fait que $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$ la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t), r \right) + (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla(C - C_h)(t), \nabla r) + r_0(C(t) - C_h(t), r) \\ &= (g(t) - g(t_n), r) + \langle R_{c^*}(C_h^n)(t), r \rangle + (\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))) \nabla C(t), \nabla r) \\ & \quad - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r) + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n), r) \\ & \quad + \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}) C_h^n, r). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Nous choisissons $r = C - C_h$ et nous utilisons la relation (3.2) pour avoir :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \|r(t)\|_X^2 + r_0 \|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq \left| (g(t) - g(t_n), r(t)) + \langle R_{c^*}^\tau(C_h), r(t) \rangle + \langle R_{c^*}^h(C_h^n), r(t) - r_h \rangle \right. \\ & \quad + (\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))) \nabla C(t), \nabla r) - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla(C(t) - C_h^n), r) \\ & \quad \left. + ((\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}(t)) \cdot \nabla C_h^n), r) + \frac{1}{2} (\operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}) C_h^n, r) \right|. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Nous cherchons à majorer le côté droit de l'équation (3.63). Pour cela, nous commençons par majorer $(g(t) - g(t_n), r(t))$ en utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{\hat{\alpha}_1} a^2 + \frac{\hat{\alpha}_1}{4} b^2$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} (g(t) - g^n, r(t)) & \leq \|g(t) - g^n\|_{Y'} \|r(t)\|_Y \\ & \leq \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \|g(t) - g^n\|_{Y'}^2 + \frac{\hat{\alpha}_1}{4} \|r(t)\|_Y^2. \end{aligned}$$

La majoration des trois derniers termes de (3.63) s'effectue exactement de la même façon que les trois derniers termes de (2.35). Il nous reste donc à majorer les termes $\langle R_{c^*}^\tau(C_h), r(t) \rangle$, $\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r(t) - r_h \rangle$ et $(\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))) \nabla C(t), \nabla r)$.

L'équation (2.5) nous donne les relations suivantes : Pour $t \in]t_{n-1}, t_n]$

$$\begin{aligned} \pi_\tau C_h - C_h(t) &= \frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), \\ C_h(t) - \pi_{l,\tau} C_h &= \frac{t - t_{n-1}}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pour la majoration de $(\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))) \nabla C(t), \nabla r)$ nous utilisons l'Hypothèse 3.2.1, le fait que $\nabla C \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)$ pour avoir

$$\begin{aligned} & ((\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))) \nabla(C(t)), \nabla(r)) \\ & \leq \| \alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t)) \|_{L^2(\Omega)} \| \nabla(C(t)) \|_{L^\infty(\Omega)} \| \nabla(r(t)) \|_{L^2(\Omega)^2} \\ & \leq c'_0 \frac{\varepsilon_0}{2} \| C_h^{n-1} - C(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\varepsilon_0} \| r(t) \|_Y^2. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Or, pour chaque $n \in [1, N]$, et pour chaque $s \in]t_{n-1}, t_n]$, nous avons en utilisant (3.64) :

$$\begin{aligned} \|C(s) - \pi_{l,\tau} C_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 & \leq \left(\|C(s) - C_h(s)\|_{L^2(\Omega)} + \|C_h(s) - C_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\ & \leq \left(\|C(s) - C_h(s)\|_{L^2(\Omega)} + \left(\frac{s - t_{n-1}}{\tau_n} \right) \|C_h^{n-1} - C_h^n\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \\ & \leq 2 \left(\|C(s) - C_h(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (S_2^0)^2 \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 \right). \end{aligned} \quad (3.66)$$

Alors,

$$\begin{aligned} & (\alpha(C_h^{n-1}) - \alpha(C(t))\nabla(C(t)), \nabla(r)) \\ & \leq c_0\varepsilon_0 \left(\|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 \right) + \frac{1}{2\varepsilon_0} \|r(t)\|_Y^2. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Passons à la majoration de $\langle R_{c^*}^\tau(C_h)(t), r \rangle$. En utilisant (3.64) dans (3.49), nous obtenons

$$\begin{aligned} \langle R_{c^*}^\tau(C_h)(t), r \rangle &= \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} \alpha(C_h^{n-1}) \nabla(C_h^n - C_h^{n-1}), \nabla r \right) + r_0 \left(\frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}), r \right) \\ &= \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} \alpha(C_h^{n-1}) \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})(x) \cdot \nabla r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\ & \quad \left. + r_0 \int_{\kappa_n} \frac{t_n - t}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right\}. \end{aligned} \quad (3.68)$$

Puisque α est borné (voir (3.2)) et que $\left| \frac{t_n - t}{\tau_n} \right| \leq 1$, nous avons :

$$|\langle R_{c^*}^\tau(C_h)(t), r \rangle| \leq \left| \hat{\alpha}_1 \int_{\Omega} \nabla(C_h^n - C_h^{n-1})(x) \cdot \nabla r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right| + r_0 \left| \int_{\Omega} (C_h^n - C_h^{n-1})(x) r(x) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right|. \quad (3.69)$$

Nous obtenons donc facilement

$$|\langle R_{c^*}^\tau(C_h)(t), r(t) \rangle| \leq c_6 \frac{\varepsilon_{10}}{2} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{10}} \|r(t)\|_Y^2.$$

Pour finir, majorons $\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle$. En utilisant la relation $ab \leq \frac{\varepsilon_{11}}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} b^2$ dans (2.27), nous avons

$$|\langle R_{c^*}^h(C_h^n), r - r_h \rangle| \leq c_7 \left(\frac{\varepsilon_{11}}{2} \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 + \frac{1}{2\varepsilon_{11}} \|r(t)\|_Y^2 \right). \quad (3.70)$$

Finalement, en regroupant toutes les majorations précédentes avec (2.36), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40) et en prenant $\varepsilon_i, i = \{0, \dots, 11\}$ tel que $\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{11} \frac{1}{\varepsilon_i}$ soit égal à $\frac{\hat{\alpha}_1}{4}$ et nous notons $c_0\varepsilon_0 = c_{01}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \|r(t)\|_Y^2 + 2r_0 \|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq c \left(\|g(t) - g^n\|_{Y'}^2 + \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 \right. \\ & \quad \left. + \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_Y^2 + \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h^{n-1}\|_X^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right) + c_{01} \|r(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Soit $t \in [t_{m-1}, t_m]$; afin d'intégrer l'inégalité ci-dessus entre 0 et t , nous commençons par intégrer entre t_{n-1} et t_n , puis nous sommes sur n de 1 à $m-1$ et finalement nous ajoutons l'intégration entre t_{m-1} et t . Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^t \| r(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| r(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right) + c_{01} \| r \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Nous appliquons le Lemme Gronwall 2.2.1 avec les fonctions suivantes :

$$y(t) = \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^t \| r(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| r(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds,$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) = c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t;X)}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{g}(t) = 1,$$

$$k(t) = c_{01},$$

et nous obtenons

$$\begin{aligned} & \| r(t) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^t \| r(s) \|_Y^2 ds + 2r_0 \int_0^t \| r(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega))}^2 + \| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t;X)}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \tau_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right) \\ & \quad + c_{01} \int_0^t \left(\tilde{f}(\tau) \times \exp \int_0^\tau c_{01} ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Puisque $\tau \leq t$, nous avons $\tilde{f}(\tau) \leq \tilde{f}(t)$, alors le dernier terme de (3.73) peut être majoré par une constante fois $\tilde{f}(t)$.

Pour $t = t_m$ nous obtenons donc le résultat souhaité. \square

Rappelons maintenant le Corollaire 2.2.14

Corollaire 3.6.2. *Soit $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . Supposons que $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^{2 \times 2})$ et $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^3(\Omega)^2)$, pour $t \in [t_{m-1}, t_m]$, nous avons l'estimation d'erreur a posteriori suivante entre la vitesse*

\mathbf{u} solution du problème (3.1) et \mathbf{u}_h qui correspond à \mathbf{u}_h^n solution du problème (Eds1*) :

$$\begin{aligned}
 & \| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^t \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\
 & \leq c \left(\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t;L^2(\Omega)^2)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\
 & \left. + \| C - \pi_{l,\tau} C_h \|_{L^2(0,t;L^4(\Omega))}^2 + \| \pi_\tau \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u} \|_{L^2(0,t;X)}^2 + \sum_{n=1}^m \tau_n \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right),
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

où c est une constante positive.

Ainsi nous avons que la majoration d'erreur de la concentration (3.61) dépend de l'erreur sur la vitesse et la majoration (3.74) dépend de l'erreur sur la concentration. Pour cette raison, nous avons besoin de combiner ces deux inégalités dans un premier lieu, puis dans un second lieu nous allons utiliser le Théorème 3.6.1 et le Corollaire 3.6.2 pour obtenir la majoration désirée.

Théorème 3.6.3. *Sous les hypothèses du Corollaire 3.6.2 et du Théorème 3.6.1, nous avons la majoration suivante pour chaque $m \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\begin{aligned}
 & \| C(t_m) - C_h(t_m) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \hat{\alpha}_1 \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_Y^2 ds + r_0 \int_0^{t_m} \| C(s) - C_h(s) \|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\
 & \quad + \| \mathbf{u}(t_m) - \mathbf{u}_h(t_m) \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \nu_0 \int_0^{t_m} \| \mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s) \|_X^2 ds \\
 & \leq c \left(\| g - \pi_\tau g \|_{L^2(0,t_m;Y')}^2 + \| C_0 - C_h^0 \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_{L^2(\Omega)^2}^2 + \tau_0 \| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \|_X^2 \right. \\
 & \left. + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^2)}^2 + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} ((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2) \right),
 \end{aligned}$$

où c est une constante positive.

Preuve. La preuve de ce théorème est exactement la même que celle du théorème 2.2.15 avec une toute petite différence. Nous aurons à remplacer le terme α par $\hat{\alpha}_1$. \square

Rappelons à présent le Théorème 2.2.17 que nous allons à nouveau utiliser :

Théorème 3.6.4. *Soit (\mathbf{u}, p, C) la solution du Problème (3.1) et (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) la solution du Problème (Eds1*). Pour $1 \leq n \leq m$ avec $m \in \{1, \dots, N\}$, nous avons les inégalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
 & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(0,t_m;X')} \\
 & \leq c \left(\sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 + (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2) + \| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \| C - C_h \|_{L^2(0,t_m;Y)}^2 + \| \mathbf{u} - \pi_\tau \mathbf{u}_h \|_{L^2(0,t_m;X)}^2 \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

Théorème 3.6.5. *Sous les hypothèses du Théorème 3.6.1, la solution exacte C du Problème (3.1) et la solution C_h du Problème (Eds1*), pour $1 \leq n \leq m$ avec $m \in \{1, \dots, N\}$, vérifient l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \pi_\tau \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h) \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(0, t_m; Y')} \\ & \leq c \left(\sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n (\eta_{c^*, n, \kappa_n}^h)^2 + (\eta_{c^*, n, \kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u^*, n, \kappa_n}^\tau)^2) \right. \\ & \quad \left. + \|g - \pi_\tau g\|_{L^2(0, t_m; Y')}^2 + \|C_0 - C_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0, t_m; X)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.76)$$

où c est une constante positive indépendante de h et de n .

Preuve. Nous considérons la seconde égalité du système (3.47) du Lemme 3.5.1 :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t), r \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \\ & = -(\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla r) + (\alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t)) \nabla C_h(t), \nabla r) - r_0(C(t) - C_h(t), r) \\ & \quad + \langle R_{c^*}^h(t), r - r_h \rangle + \langle R_{c^*}^\tau(t), r \rangle + (g(t) - g(t_n), r). \end{aligned}$$

Toutefois,

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t) \right\|_{Y'} \\ & = \sup_{r \in Y} \frac{1}{\|r\|_Y} \left(\left(\frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t), r \right) + (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t), r) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} (\operatorname{div} (\pi_{l, \tau} \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t), r) \right) \\ & = \sup_{r \in Y} \frac{1}{\|r\|_Y} \left(-(\alpha(C(t)) \nabla C(t), \nabla r) + (\alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t)) \nabla C_h(t), \nabla r) \right. \\ & \quad \left. - r_0(C(t) - C_h(t), r) + \langle R_{c^*}^h(t), r - r_h \rangle + \langle R_{c^*}^\tau(t), r \rangle + (g(t) - g(t_n), r) \right). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Nous commençons par majorer les deux premiers termes de (3.77). Tout d'abord, nous insérons $(\alpha(\pi_{l, \tau} C_h) \nabla(C(t)), \nabla(r))$; nous obtenons :

$$(\alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t)) \nabla(C_h(t) - C(t)), \nabla r) - ((\alpha(C(t)) - \alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t))) \nabla C(t), \nabla r).$$

Pour le premier terme de l'équation ci-dessus, nous utilisons le fait que α soit borné (voir (3.2)). Pour le second nous utilisons le fait que α soit lipschitzienne (Hypothèse (3.2.1)), puis, nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée $L^4 - L^4 - L^2$, le fait que $\nabla(C) \in L^\infty(0, T; L^4(\Omega)^2)$ et (1.3) avec $p = 4$; nous obtenons :

$$\begin{aligned} & |(\alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t)) \nabla(C_h(t) - C(t)), \nabla r) + ((\alpha(C(t)) - \alpha(\pi_{\tau, l} C_h(t))) \nabla C(t), \nabla r)| \\ & \leq \hat{\alpha}_1 \|C_h(t) - C(t)\|_Y \|r\|_Y + c_0 \|C(t) - C_h^{m-1}\|_Y \|r\|_Y \end{aligned} \quad (3.78)$$

Le troisième et dernier terme de la partie droite de (3.77), peuvent être traités en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour le quatrième terme, nous prenons $r_h = C_{nh} r$ et nous

utilisons (3.58) pour obtenir :

$$|\langle R_{c^*}^h(t), r - r_h \rangle| \leq c_1 \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2} \|r\|_Y.$$

Pour le cinquième terme, un simple calcul nous permet d'écrire :

$$|\langle R_{c^*}^\tau(t), r \rangle| \leq c_2 \left(\sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right)^{1/2} \|r\|_Y.$$

D'où

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t) \cdot \nabla \pi_\tau C_h(t) - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h(t)) \pi_\tau C_h(t) \right\|_Y, \\ & \leq c_3 \left(\hat{\alpha}_1 \|C(t) - C_h(t)\|_Y^2 + r_0 \|C(t) - C_h(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|g(t) - g(t_n)\|_Y^2 \right. \\ & \left. + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \|C_h^n - C_h^{n-1}\|_{H^1(\kappa_n)}^2 + \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Pour obtenir le résultat désiré (3.76), nous intégrons entre t_{n-1} et t_n , et nous sommes sur n de 0 à m .

Sachant que

$$\int_0^t \|C(s) - \pi_{l,\tau} C_h(s)\|_Y^2 ds \leq c' \left(\int_0^t \|C(s) - C_h(s)\|_Y^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right), \quad (3.79)$$

nous utilisons (3.61) et nous obtenons le résultat recherché. \square

Afin d'obtenir l'estimation d'erreur *a posteriori*, il nous faut encore majorer ce terme :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt.$$

Pour cela, nous suivons les mêmes étapes suivies dans (3.79) et nous obtenons :

$$\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(t) - \pi_\tau \mathbf{u}_h(t)\|_X^2 dt \leq c \left(\sum_{n=1}^m \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\mathbf{u}(s) - \mathbf{u}_h(s)\|_X^2 ds + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 \right). \quad (3.80)$$

Finalement, nous sommes en mesure d'établir le résultat final de l'estimation d'erreur *a posteriori* correspondante aux problèmes (3.1) et (Eds1*).

Corollaire 3.6.6. *Soit $h_n \leq c_s \tau_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$, où c_s est une constante positive indépendante de n . Sous les hypothèses du théorèmes 3.6.1 et du corollaire 3.6.2, pour*

chaque $m \in \{1, \dots, N\}$, les solutions (\mathbf{u}, p, C) de (3.1) et (\mathbf{u}_h, p_h, C_h) de (Eds1*) satisfont l'estimation *a posteriori* suivante :

$$\begin{aligned}
 & [[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]^2(t_m) + [[C - C_h]]^2(t_m) \\
 & + \left\| \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau \mathbf{u}_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_{l,\tau} \mathbf{u}_h) \pi_\tau \mathbf{u}_h + \nabla(p - p_h) \right\|_{L^2(0,t_m;X')} \\
 & \quad + \left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \pi_\tau \mathbf{u}_h \cdot \nabla \pi_\tau C_h - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\pi_\tau \mathbf{u}_h) \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(0,t_m;Y')} \\
 & \leq c \left(\left\| g - \pi_\tau g \right\|_{L^2(0,t_m;Y')}^2 + \left\| C_0 - C_h^0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \tau_0 \left\| \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_h^0 \right\|_X^2 + \left\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \right\|_{L^2(0,t_m;L^2(\Omega)^2)}^2 \right. \\
 & \quad \left. + \sum_{n=1}^m \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left((\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + (\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n (\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n (\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 \right) \right). \tag{3.81}
 \end{aligned}$$

Preuve. Le résultat est une conséquence directe de la définition de $[[\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]]^2(t_m)$ et $[[C - C_h]]^2(t_m)$, du Théorème 3.6.3 et des Inégalités (3.76), (3.75) et (3.80). \square

3.6.1 Majoration des indicateurs

Dans cette section, nous allons monter l'efficacité de l'estimation d'erreur *a posteriori* (3.81). Cette dernière consiste à majorer chacun des indicateurs $\eta_{u^*,n,\kappa_n}^\tau, \eta_{u^*,n,\kappa_n}^h, \eta_{c^*,n,\kappa_n}^\tau$ et η_{c^*,n,κ_n}^h localement avec l'erreur entre la solution exacte et la solution numérique.

Pour établir la preuve de l'efficacité, nous rappelons \mathbf{f}_h^n, ν_h et g_h^n qui sont respectivement des approximations de \mathbf{f}^n, ν_C et g^n données par les formules (2.98), (2.99) et (2.100). De plus, pour toute fonction $\xi \in L^p(\kappa_n)$ et pour chaque élément $\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}$ nous posons

$$\alpha_h(\xi)|_{\kappa_n} = \frac{1}{|\kappa_n|} \int_{\kappa_n} \alpha(\xi(x)) \, \mathbf{d}\mathbf{x}. \tag{3.82}$$

Une conséquence directe des propriétés de α est que α_h est bornée et Lipschitzienne par rapport à ξ .

La majoration de l'indicateur $\eta_{c^*,n,\kappa_n}^\tau$ est identique à celle de η_{c,n,κ_n}^τ établie dans le Théorème 2.2.20 que nous rappelons par la suite.

Théorème 3.6.7. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous avons l'estimation suivante :*

$$(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq c \left(\left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\kappa_n))}^2 + \left\| C - \pi_\tau C_h \right\|_{L^2(t_{n-1},t_n;H^1(\kappa_n))}^2 \right),$$

où c est une constante indépendante du pas de temps et du pas de maillage.

$$C_h(t) - \pi_\tau C_h(t) = \frac{t - t_n}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}).$$

$$\left(\frac{t - t_n}{\tau_n} \right)^2 \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \leq 2 \left(\left\| C(t) - C_h(t) \right\|_{H^1(\kappa_n)}^2 + \left\| (C(t) - \pi_\tau C_h(t)) \right\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \right).$$

Passons à la majoration de l'indicateur η_{c^*,n,κ_n}^h .

Théorème 3.6.8. Soit $\nabla C \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)$, nous avons pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} & \tau_n (\eta_{C^*, n, \kappa_n}^h)^2 \leq \\ & c \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^m + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta \kappa_n))}^2 \right. \\ & + \left\| \alpha_h(C) - \alpha_C(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 + \left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))} + \tau_n \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\Delta \kappa_n)}^2 \\ & \left. + h_{\kappa_n}^2 \left\| g - \pi_\tau g \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - g_h^n \right\|_{L^2(\Delta \kappa_n)}^2 \right), \end{aligned} \quad (3.83)$$

où c est une constante indépendante de n et de m .

Preuve. Nous considérons la seconde égalité du système (3.47) du Lemme 3.5.1 dans lequel nous simplifions la partie droite et la partie gauche par $\langle R_{c^*}^r(t), r \rangle$. Nous utilisons (3.54), nous intercalons g_h^n , $(\alpha_h(C_h^{n-1}) \nabla C(t), \nabla r)$ et $(\alpha_h(C(t)) \nabla C(t), \nabla r)$, et nous obtenons pour chaque $t \in]t_{n-1}, t_n]$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} \alpha_h(C_h^{n-1}) \nabla (C(t) - C_h^m) : \nabla (r) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} (\alpha(C(t)) - \alpha_h(C(t))) \nabla (C) : \nabla (r) \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\alpha_h(C(t)) - \alpha_h(C_h^{n-1})) \nabla (C) : \nabla (r) \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + r_0 \int_{\Omega} (C(t) - C_h^m) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^m r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left\{ \int_{\kappa_n} (g(t) - g^n) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n} (g^n - g_h^n) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \right. \\ & + \int_{\kappa_n} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{n-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^m) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^m - r_0 C_h^m \right) r \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\ & \left. - \frac{1}{2} \sum_{e_n \in \mathcal{E}_{\kappa_n}} \int_{e_n} [\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^m(\sigma) \cdot \mathbf{n}] r(\sigma) \, \mathbf{d}\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Nous choisissons tout d'abord $r = r_{\kappa_n}$ où

$$r_{\kappa_n} = \begin{cases} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^m - C_h^{n-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^m) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^m - r_0 C_h^m \right) \psi_{\kappa_n} & \text{on } \kappa_n, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus \kappa_n. \end{cases}$$

Rappelons que ψ_{κ_n} est une fonction bulle qui est égale au produit des coordonnées barycentriques associées avec les sommets de κ_n .

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \int_{\kappa_n} (g_h^n - \frac{1}{\tau_n}(C_h^m - C_h^{m-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{m-1})\nabla C_h^m) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n)C_h^m - r_0 C_h^m)^2 \psi_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &= \int_{\kappa_n} \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n} \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\kappa_n} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^m r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + r_0 \int_{\kappa_n} (C(t) - C_h^m) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &+ \int_{\Omega} (\alpha(C(t)) - \alpha_h(C(t))\nabla(C) : \nabla r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\Omega} (\alpha_h(C(t)) - \alpha_h(C_h^{m-1}))\nabla(C) : \nabla r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\quad + \int_{\Omega} \alpha_h(C_h^{m-1})\nabla(C(t) - C_h^m) : \nabla r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 &\quad - \int_{\kappa_n} (g(t) - g^n) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n} (g^n - g_h^n) r_{\kappa_n} \, \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{3.85}$$

Puisque $r_{\kappa_n} \in H_0^1(\kappa_n)$, nous appliquons la définition de la norme de $H^{-1}(\kappa_n)$. Nous notons par $I_i, i = 0, \dots, 9$ les termes de la partie droite de l'égalité (3.85). Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir :

$$\begin{aligned}
 |I_0 + I_1 + I_2 + I_3 + I_4| &\leq c_1 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t}(C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^m \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{u}_h^n) C_h^m + r_0(C(t) - C_h^m) \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H_0^1(\kappa_n)} \right)
 \end{aligned}$$

Passons à la majoration de I_5 . Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et nous remarquons que $\nabla C \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)$. Alors nous avons :

$$\begin{aligned}
 |I_5| &\leq 2 \left\| \alpha(C(t)) - \alpha_h(C(t)) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| \nabla(C(t)) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)} \\
 &\leq c_2 \left\| \alpha(C(t)) - \alpha_h(C(t)) \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)}.
 \end{aligned}$$

Comme α_h est Lipschitzienne, et $\nabla C \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)$, nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous intercalons par $C_h(t)$ et nous utilisons (3.64) pour avoir :

$$\begin{aligned}
 |I_6| &\leq c_5 \left\| C(t) - C_h^{n-1} \right\|_{L^2(\kappa_n)} \left\| \nabla(C(t)) \right\|_{L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^2)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)} \\
 &\leq c_6 \left(\left\| C(t) - C_h(t) \right\|_{H^1(\kappa_n)} + \left\| C_h^m - C_h^{m-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)} \right) \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)}.
 \end{aligned}$$

Pour le terme I_7 , nous utilisons le fait que α soit bornée, puis nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous intercalons par $C_h(t)$ et nous utilisons (3.64) pour obtenir :

$$|I_7| \leq c_7 \left(\left\| C(t) - C_h(t) \right\|_{H^1(\kappa_n)} + \left\| C_h^m - C_h^{m-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)} \right) \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{H^1(\kappa_n)}.$$

Il nous reste à majorer les deux derniers termes. Il nous suffit d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour avoir :

$$|I_8 + I_9| \leq c_8 \left(\left\| g(t) - g^n \right\|_{H^{-1}(\kappa_n)} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{0, \kappa_n} + \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n} \left\| r_{\kappa_n} \right\|_{0, \kappa_n} \right).$$

Ainsi, nous considérons l'équation (3.85), nous combinons les majorations correspondantes de $I_i, i = 0, \dots, 9$, puis nous utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les propriétés 2.1.1 et 2.1.2, ensuite nous multiplions par $h_{\kappa_n}^2$ et nous intégrons entre t_{n-1} et t_n pour avoir l'inégalité qui suit :

$$\begin{aligned}
 & \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n - r_0 C_h^n \right\|_{0, \kappa_n}^2 \\
 & \leq c_9 \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n))}^2 \right. \\
 & + \left\| \alpha_h(C) - \alpha_C(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 + \left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n))}^2 + \tau_n \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n)}^2 \\
 & \quad \left. + h_{\kappa_n}^2 \left\| g - g^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n))}^2 + \tau_n h_{\kappa_n}^2 \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n}^2 \right). \tag{3.86}
 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité représente la majoration du premier terme de l'indicateur $\eta_{\mathcal{C}^*, n, \kappa_n}^h$. Passons à la majoration du second terme.

Pour obtenir la majoration du second terme de $\eta_{\mathcal{C}^*, n, \kappa_n}^h$, nous considérons un élément $\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}$ et $e_n \in \partial \kappa_n \cap \Gamma_h^i$; nous notons par κ'_n l'autre cellule du maillage qui contient e_n et nous considérons l'Équation (2.61) avec $r = r_{e_n}$ où :

$$r_{e_n} = \begin{cases} \mathcal{L}_{e_n}([\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \psi_{e_n}) & \text{on } \kappa_n \cup \kappa'_n, \\ 0 & \text{on } \Omega \setminus (\kappa_n \cup \kappa'_n). \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 & \int_{e_n} [\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n}^2 \psi_{e_n} ds = \\
 & \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left(g_h^n - \frac{1}{\tau_n} (C_h^n - C_h^{n-1}) + \nabla \cdot (\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 C_h^n \right) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \left(\frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \nabla C(t) - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C(t) - C_h^n) \right) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\alpha(C(t)) - \alpha_h(C(t)) \nabla(C) : \nabla r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (\alpha_h(C(t)) - \alpha_h(C_h^{n-1})) \nabla(C) : \nabla r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad + \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} \alpha_h(C_h^{n-1}) \nabla(C(t) - C_h^n) : \nabla r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} \\
 & \quad - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (g(t) - g^n) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x} - \int_{\kappa_n \cup \kappa'_n} (g^n - g_h^n) r_{e_n} \mathbf{d}\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Nous suivons les mêmes étapes que nous avons suivi pour majorer le premier terme de

$(\eta_{C^*,n,\kappa_n}^h)^2$. En utilisant (3.86) et le fait que $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa_n}}$ et $\frac{h_{e_n}}{h_{\kappa'_n}}$ sont bornés par 1, nous avons :

$$\begin{aligned}
 & h_{e_n} \tau_n \left\| [\alpha(C_h^{n-1}) \nabla C_h^n \cdot \mathbf{n}]_{e_n} \right\|_{0,e_n}^2 \leq \\
 & c_{10} \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (C - C_h)(t) + \mathbf{u} \cdot \nabla C - \mathbf{u}_h^n \cdot \nabla C_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^n) C_h^n + r_0 (C - C_h^n) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\kappa_n \cup \kappa'_n))} \right. \\
 & + \left\| \alpha_h(C) - \alpha_C(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + \left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n))} \\
 & \left. + \tau_n \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\kappa_n \cup \kappa'_n)}^2 + h_{e_n}^2 \left\| g - g^n \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\kappa_n \cup \kappa'_n))}^2 + \tau_n h_{e_n}^2 \left\| g^n - g_h^n \right\|_{0, \kappa_n \cup \kappa'_n}^2 \right). \tag{3.87}
 \end{aligned}$$

En regroupant (3.86) et (3.87), nous obtenons la majoration de η_{C^*,n,κ_n}^h . \square

Il nous reste à majorer les indicateurs de la vitesse $\eta_{u^*,n,\kappa_n}^\tau$ et η_{u^*,n,κ_n}^h , qui sont exactement les mêmes que η_{u,n,κ_n}^τ et η_{u,n,κ_n}^h . Nous rapellons ci-dessous, les deux théorèmes correspondants.

Théorème 3.6.9. *Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, nous avons les estimations suivantes :*

$$(\eta_{u^*,n,\kappa_n}^\tau)^2 \leq c \left(\left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n)^2)}^2 + \left\| \mathbf{u} - \pi_\tau \mathbf{u}_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\kappa_n)^2)}^2 \right),$$

où c est une constante positive indépendante de n et de h .

Théorème 3.6.10. *Soit $\nabla \mathbf{u} \in L^\infty(0, T; L^\infty(\Omega)^{2 \times 2})$, nous avons pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$:*

$$\begin{aligned}
 & \tau_n (\eta_{u^*,n,\kappa_n}^h)^2 \leq \\
 & c \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u}_h^{n-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^n - \frac{1}{2} \operatorname{div} (\mathbf{u}_h^{n-1}) \mathbf{u}_h^n + \nabla (p - p_h) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^{-1}(\Delta \kappa_n)^2)} \right. \\
 & + \left\| C - C_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))} + \tau_n \left\| C_h^n - C_h^{n-1} \right\|_{H^1(\Delta \kappa_n)}^2 + \left\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))} \\
 & + \left\| \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u} \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; H^1(\Delta \kappa_n))}^2 + \left\| \nu_h(C) - \nu_C(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 \\
 & \left. + h_{\kappa_n}^2 \left\| \mathbf{f}_0 - \pi_\tau \mathbf{f}_0 \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n))}^2 + h_{\kappa_n}^2 \left\| \mathbf{f}^n(C) - \mathbf{f}_h^n(C) \right\|_{L^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Delta \kappa_n)^2)}^2 \right). \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

où c est une constante positive indépendante de n et de h .

Chapitre 4

Simulations numériques

Dans ce chapitre, l'objectif est de vérifier numériquement les résultats théoriques des estimations d'erreur obtenus dans les chapitres précédents. Nous nous intéressons alors au problème de Navier-Stokes instationnaire couplé avec l'équation de convection-diffusion-réaction (1.1) en dimension 2. Nous utilisons le logiciel Freefem++ [27].

4.1 Simulation numérique sur maillage uniforme

En premier lieu, nous illustrons et vérifions l'analyse *a priori* du schéma proposé ici et dont l'estimation d'erreur *a priori* a déjà été établie dans [5]. Nous considérons une géométrie simple de Ω , le carré $[0, 1]^2$, où chaque côté est décomposé en N segments (voir figure 4.1). Nous considérons la constante de diffusion $\alpha = 1$, la constante $r_0 = 1$ et la viscosité de la forme $\nu_0 = 0.5$ et $\nu_C(C) = 0.2 \sin(C) + 0.5$.

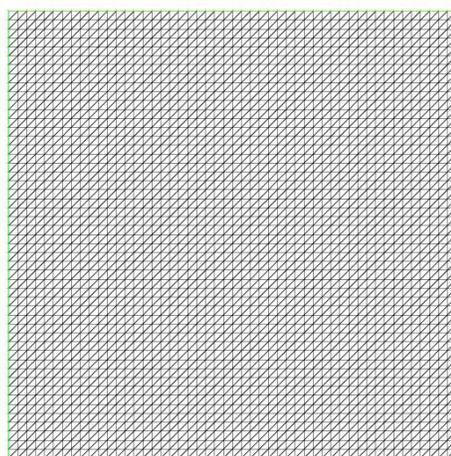


FIGURE 4.1 – Domaine Ω

Nous posons comme solution théorique $(\mathbf{u}_{ex}, p_{ex}, C_{ex}) = (\text{rot}\psi, p_{ex}, C_{ex})$, telle que pour

tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\psi(x, y) = x^2(x - 1)^2 y^2(y - 1)^2 \sin(t),$$

$$p_{ex}(x, y, t) = (t + 1) \cos(\pi x) \cos(\pi y),$$

$$C_{ex} = -t e^{-100((x-0.3-0.3t)^2+(y-0.3)^2)}.$$

Notre but est de tester les résultats numériques obtenus et de les comparer aux solutions exactes. Les figures 4.2 et 4.3 comparent les solutions numérique et exacte de la pression. De même, les figures 4.4 et 4.5 illustrent une comparaison entre les vitesses numérique et exacte. Finalement, les solutions numérique et exacte de la concentration sont présentées dans les figures 4.6 et 4.7. On remarque que la solution numérique calculée représente une bonne approximation de la solution exacte pour les problèmes de Navier-Stokes et l'équation de convection-diffusion-réaction instationnaire.

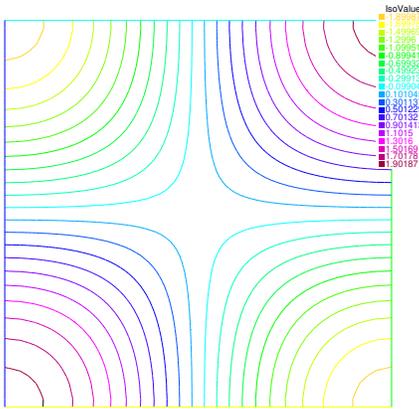


FIGURE 4.2 – Pression numérique à $t = 1$.

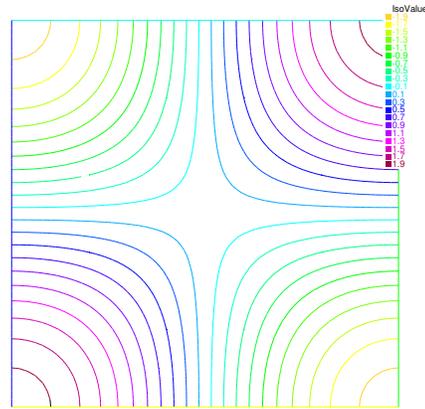


FIGURE 4.3 – Pression théorique à $t = 1$.

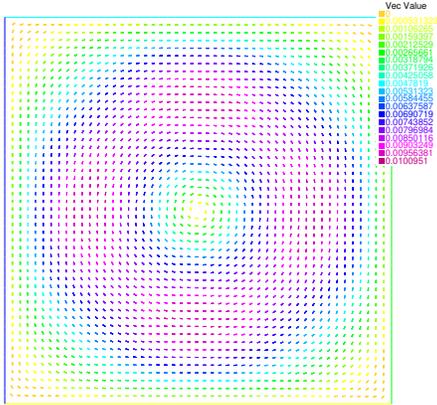


FIGURE 4.4 – Vitesse numérique à $t = 1$.

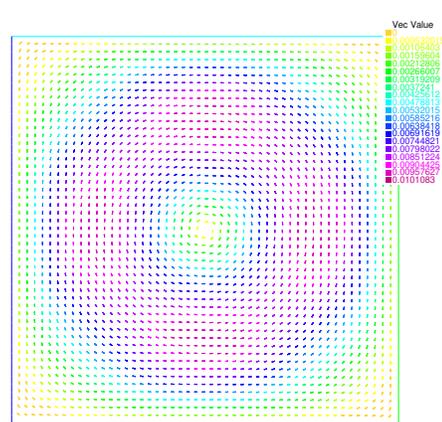
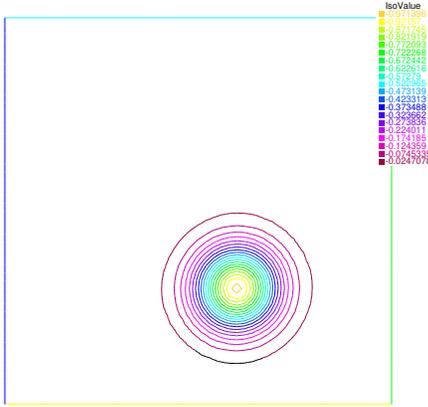
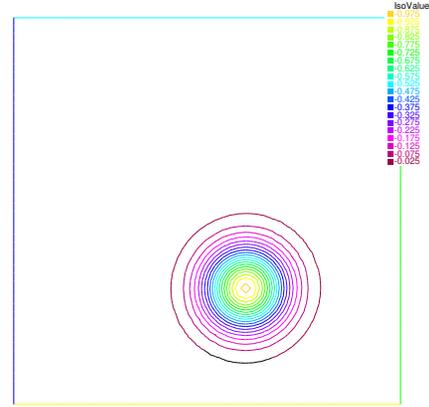


FIGURE 4.5 – Vitesse théorique à $t = 1$.


 FIGURE 4.6 – Concentration numérique à $t = 1$.

 FIGURE 4.7 – Concentration théorique à $t = 1$.

Pour l'estimation d'erreur *a priori* nous définissons l'erreur relative totale suivante :

$$err = \left(\frac{\sum_{n=1}^N \tau_n |\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n \|p_h^n - p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{n=1}^N \tau_n |C_h^n - C^n|_{H^1(\Omega)}^2}{\sum_{n=1}^N \tau_n (|\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C^n|_{H^1(\Omega)}^2)} \right)^{1/2}.$$

La figure 4.8 représente, en échelle logarithmique, la courbe de l'erreur relative totale correspondant au schéma discret (Eds1), en fonction du pas de maillage h . On teste l'algorithme pour N allant de 20 à 50, par pas de 10 avec $T = 1$, $h = \frac{1}{N}$ et $\tau = h$. La pente de la courbe d'erreur en échelle logarithmique est d'ordre 0.9838, les résultats numériques sont alors d'ordre un en temps et en espace.

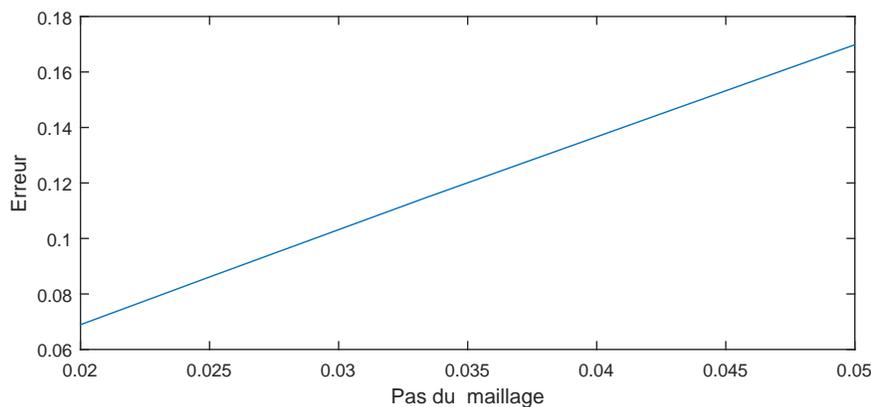


FIGURE 4.8 – Courbe d'erreur en fonction du pas de maillage.

4.2 Simulation numérique adaptative (cas académique)

Nous effectuons maintenant la vérification de l'analyse *a posteriori* de notre algorithme. Nous considérons le même exemple que dans la section précédente.

La solution théorique est $(\mathbf{u}_{ex}, p_{ex}, C_{ex}) = (\text{rot}\psi, p_{ex}, C_{ex})$, telle que pour tout $(x, y) \in \Omega$,

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= x^2(x-1)^2 y^2(y-1)^2 \sin(t), \\ p_{ex}(x, y, t) &= (t+1) \cos(\pi x) \cos(\pi y), \\ C_{ex} &= -t e^{-100((x-0.3-0.3t)^2 + (y-0.3)^2)}.\end{aligned}$$

Nous considérons $\Omega = [0, 1]^2$, $r_0 = 1$, $\nu(C) = 0.2 \sin(C) + 1$ et $T = 1$. Nous commençons l'algorithme adaptatif avec un maillage initial correspondant à $N = 20$ et le pas de temps $\tau = \frac{1}{N}$.

4.2.1 Terme de diffusion constant

Dans cette section, nous supposons que le terme de diffusion est constant ($\alpha = 1$). Pour montrer les résultats numériques de l'estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte et la solution approchée étudiée dans le chapitre précédent, nous introduisons les indicateurs d'erreur temporels suivants :

$$E_{\tau_u} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{u,n}^\tau)^2}{D} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad E_{\tau_c} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{c,n}^\tau)^2}{D} \right)^{1/2},$$

où

$$(\eta_{u,n}^\tau)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau \right)^2, \quad (\eta_{c,n}^\tau)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau \right)^2,$$

et

$$D = \sum_{n=1}^N \tau_n (|\mathbf{u}_h^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C_h^n|_{H^1(\Omega)}^2).$$

Nous introduisons aussi les indicateurs d'erreur spatiaux :

$$E_{h_u} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{u,n}^h)^2}{D} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad E_{h_c} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{c,n}^h)^2}{D} \right)^{1/2},$$

où

$$(\eta_{u,n}^h)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{u,n,\kappa_n}^h \right)^2 \quad \text{et} \quad (\eta_{c,n}^h)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{c,n,\kappa_n}^h \right)^2.$$

Notons $E_{tot} = E_{\tau_u} + E_{\tau_c} + E_{h_u} + E_{h_c}$.

Les figures 4.9 jusqu'à 4.12, nous montrent l'adaptation du maillage.

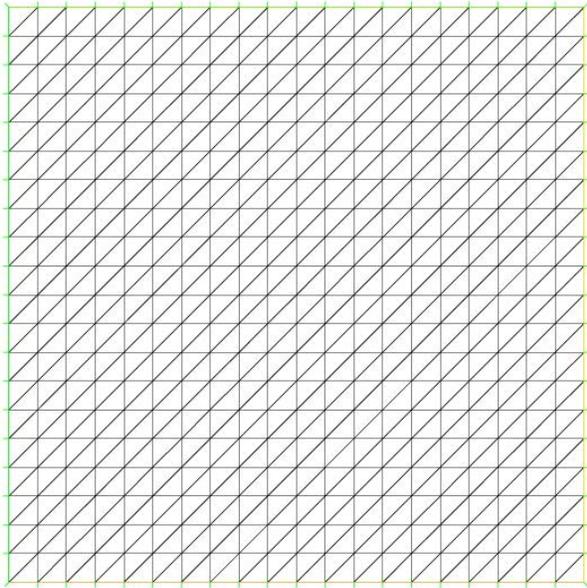


FIGURE 4.9 – Maillage initial

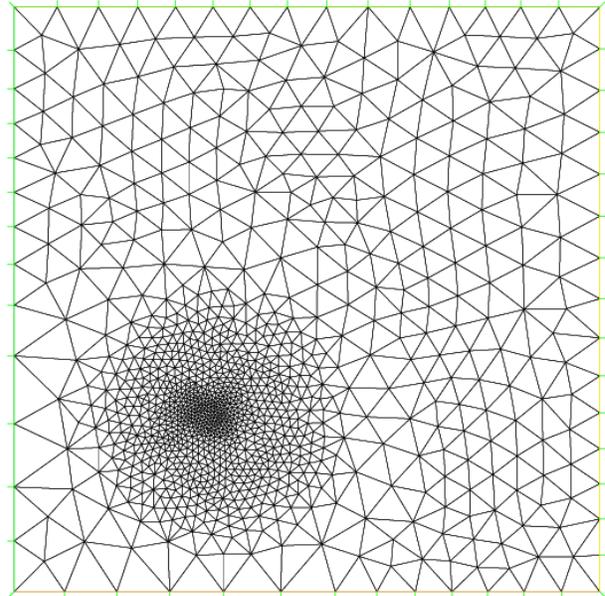


FIGURE 4.10 – Maillage à $t = 0.241$

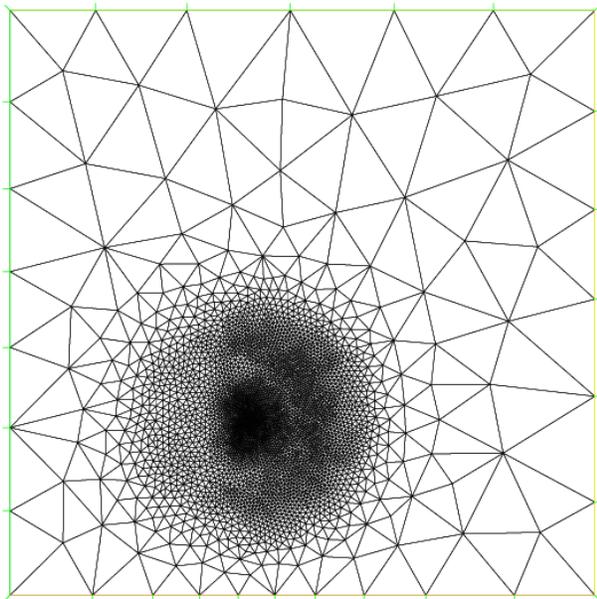


FIGURE 4.11 – Maillage à $t = 0.496$

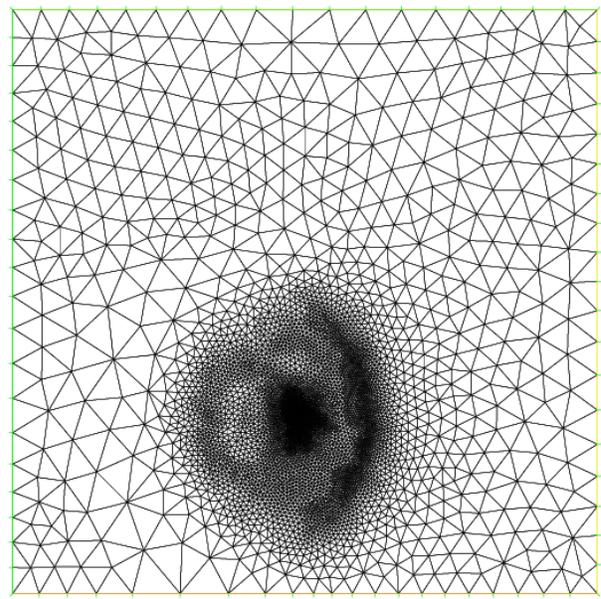


FIGURE 4.12 – Maillage à $t = 0.897$

Sur les figures 4.13 et 4.14 nous illustrons la performance de l'algorithme adaptatif. En effet, nous comparons l'erreur totale et les indicateurs d'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté pour l'algorithme adaptatif et pour l'algorithme uniforme. Ce nombre est obtenu comme la somme sur tous les pas de temps du nombre de degrés de liberté sur le maillage utilisé à chaque pas de temps. Nous pouvons constater l'avantage de la méthode adaptative puisque l'erreur est toujours inférieure à l'erreur obtenue par la méthode uniforme.

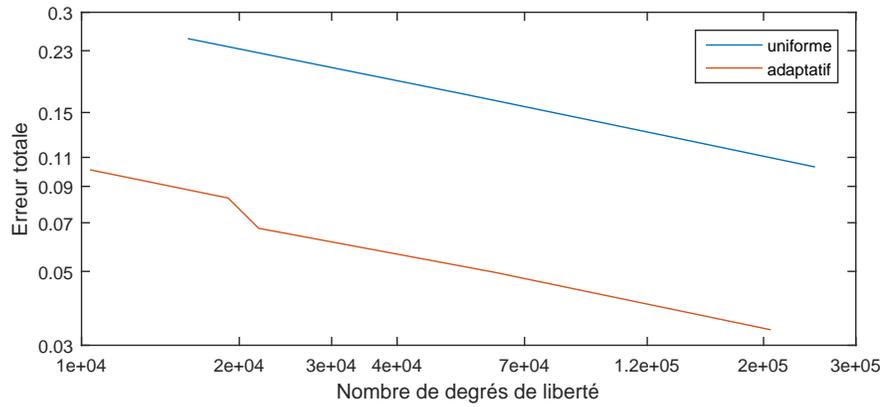


FIGURE 4.13 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique du cas étudié.

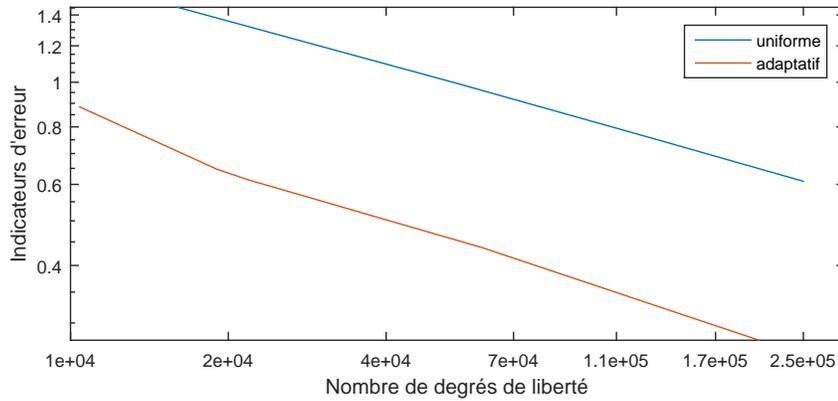


FIGURE 4.14 – Courbe des indicateurs d'erreur en échelle logarithmique du cas étudié.

Nous définissons d'autre part l'indice d'efficacité de la façon suivante :

$$IE = \left(\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{u,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n(\eta_{c,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n(\eta_{u,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n(\eta_{c,n,\kappa_n}^h)^2)}{\sum_{n=1}^N \tau_n (|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_h^n - p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C_h^n - C^n|_{H^1(\Omega)}^2)} \right)^{1/2}.$$

Dans ce tableau, nous montrons la valeur de l'indice d'efficacité pour différents nombres de degrés de liberté (DDL). C'est le rapport entre l'estimateur d'erreur et l'erreur exacte. Nous pouvons remarquer que l'indice d'efficacité varie aux alentours de 8.

DDL	10 324	18 965	23 913	54 948	241 276
IE	8.80	7.67	9.09	8.74	7.60

TABLE 4.1 – Répartition de l'indice d'efficacité en fonction du nombre de degrés de liberté.

4.2.2 Terme de diffusion qui dépend de la concentration

Dans cette section, nous supposons que le terme de diffusion dépend de la concentration ($\alpha(C) = 2 + \sin(C)$).

Pour montrer les résultats numériques de l'estimation d'erreur *a posteriori* entre la solution exacte et la solution approchée étudiée dans le cas où le coefficient de diffusion dépend de la concentration, nous introduisons les indicateurs d'erreur temporels suivants :

$$E_{\tau_{u^*}} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{u^*,n}^\tau)^2}{D} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad E_{\tau_{c^*}} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{c^*,n}^\tau)^2}{D} \right)^{1/2},$$

où

$$(\eta_{u^*,n}^\tau)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{u^*,n,\kappa_n}^\tau \right)^2, \quad (\eta_{c^*,n}^\tau)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^\tau \right)^2,$$

et

$$D = \sum_{n=1}^N \tau_n (|\mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C^n|_{H^1(\Omega)}^2).$$

Nous introduisons aussi les indicateurs d'erreur spatiaux :

$$E_{h_{u^*}} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{u^*,n}^h)^2}{D} \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad E_{h_{c^*}} = \left(\frac{\sum_{n=0}^N (\eta_{c^*,n}^h)^2}{D} \right)^{1/2},$$

où

$$(\eta_{u^*,n}^h)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{u^*,n,\kappa_n}^h \right)^2 \quad \text{et} \quad (\eta_{c^*,n}^h)^2 = \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} \left(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h \right)^2.$$

Notons $E_{tot^*} = E_{\tau_{u^*}} + E_{\tau_{c^*}} + E_{h_{u^*}} + E_{h_{c^*}}$.

Les figures 4.15 jusqu'à 4.18 nous montrent l'adaptation du maillage.

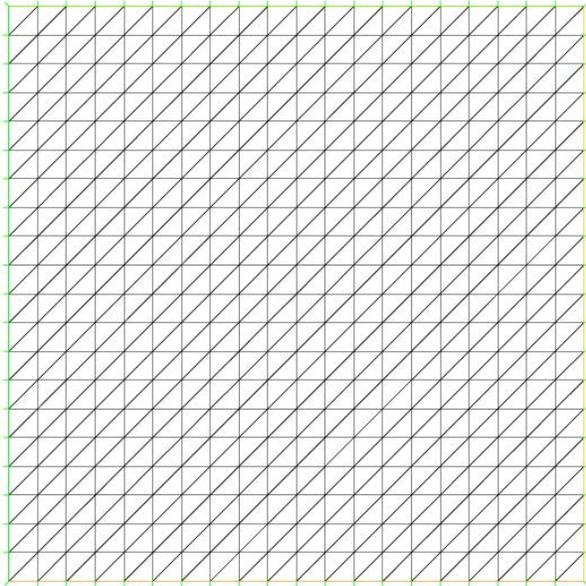


FIGURE 4.15 – Maillage initial

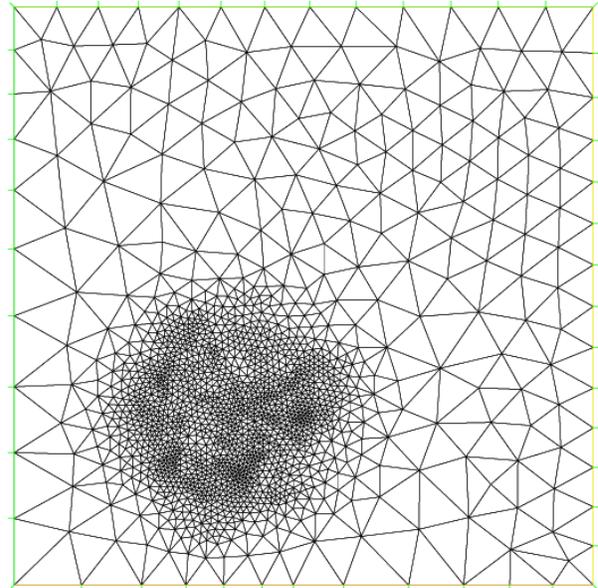


FIGURE 4.16 – Maillage à $t = 0.268$

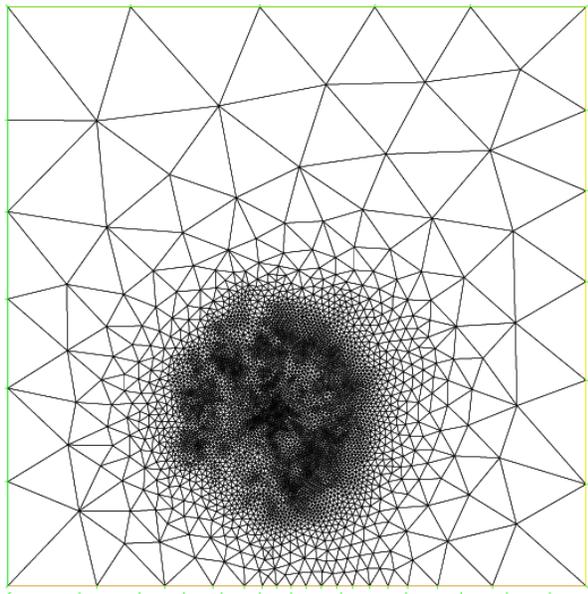


FIGURE 4.17 – Maillage à $t = 0.475$

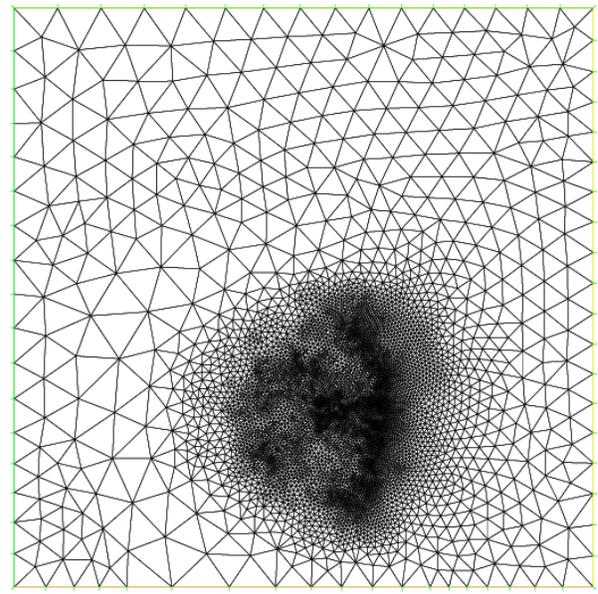


FIGURE 4.18 – Maillage à $t = 0.857$

Sur les figures 4.19 et 4.20, nous illustrons la performance de l'algorithme adaptatif. En effet, nous comparons l'erreur totale et les indicateurs d'erreur en fonction du nombre de degrés de liberté pour l'algorithme adaptatif et pour l'algorithme uniforme. Nous pouvons constater l'avantage de la méthode adaptative puisque l'erreur est toujours inférieure à l'erreur obtenue par la méthode uniforme.

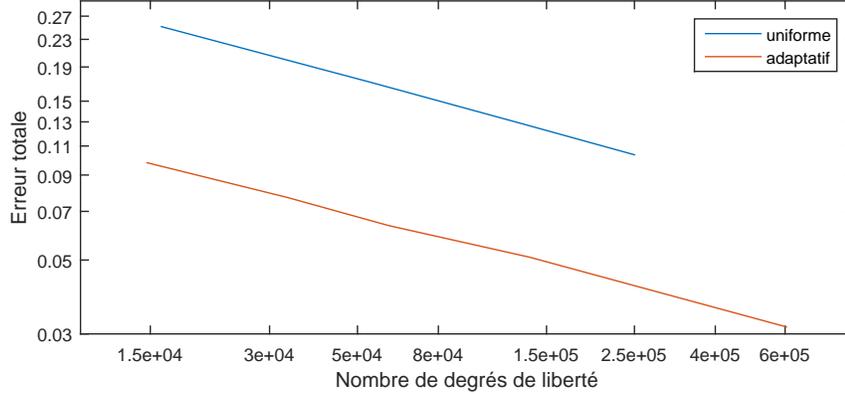


FIGURE 4.19 – Courbe d'erreur totale en échelle logarithmique du cas étudié.

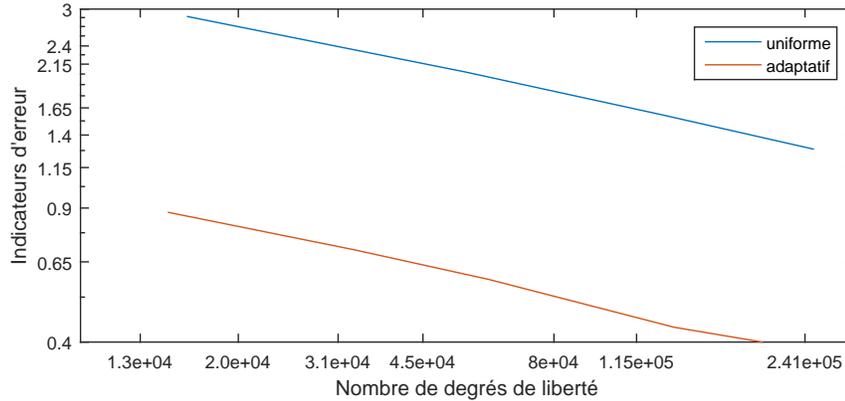


FIGURE 4.20 – Courbe des indicateurs d'erreur en échelle logarithmique du cas étudié.

Nous définissons l'indice d'efficacité de la façon suivante :

$$IE = \left(\frac{\sum_{n=1}^N \sum_{\kappa_n \in \mathcal{T}_{nh}} (\tau_n(\eta_{u^*,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^\tau)^2 + \tau_n(\eta_{u^*,n,\kappa_n}^h)^2 + \tau_n(\eta_{c^*,n,\kappa_n}^h)^2)}{\sum_{n=1}^N \tau_n (|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n|_{H^1(\Omega)}^2 + \|p_h^n - p^n\|_{L^2(\Omega)}^2 + |C_h^n - C^n|_{H^1(\Omega)}^2)} \right)^{1/2}.$$

Dans ce tableau, nous montrons la valeur de l'indice d'efficacité pour différents nombres de degrés de liberté (DDL). Nous pouvons remarquer que l'indice d'efficacité varie aux alentours de 8.

DDL	14 670	30 643	58 409	147 168	568 467
IE	8.73	8.89	8.87	8.69	7.92

TABLE 4.2 – Répartition de l'indice d'efficacité en fonction du nombre de degrés de liberté.

4.3 Simulation numérique adaptative (cas plus réaliste)

Passons maintenant à un cas test plus réaliste. Dans ce nouveau cas l'inconnue $C(t)$ représente la variation de la température à un temps t dans un domaine supposé être ici la section verticale d'une pièce avec deux hauteurs de toit différentes. Nous supposons que la température initiale est uniformément égale à $C_0 = 290K$ (aux alentours de $16^\circ C$). Nous supposons aussi que cette pièce est muni d'un radiateur ($BDEF$) placé en bas du domaine comme le montre la Figure 4.21 où $AB = 1.6$, $BD = 0.4$, $BF = 0.8$, $FG = 1.6$, $GH = 2.5$, $HI = 2$, $IJ = 1$, $JK = 2$ et $KA = 3.5$.

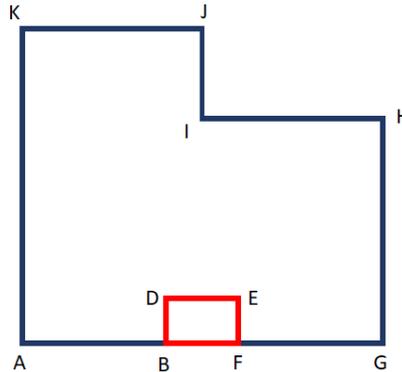


FIGURE 4.21 – Le domaine

Par conséquent, la simulation décrit l'évolution de la variation de la température et de la vitesse de l'air dans la pièce en fonction du temps. Les paramètres physiques sont choisis pour représenter les valeurs typiques de l'air et sont tous exprimés en unités SI : $T = 1200$, $r_0 = 0$, $\alpha = 2 \times 10^{-5}$, et $\nu = 10^{-5}$. De plus, le terme source dans l'équation de quantité de mouvement est donnée par la force de la flottabilité $\mathbf{f}(C) = (0, \text{grav} \times C/C_0)$ où $\text{grav} = 10$. En outre, le terme source de chaleur est choisi suffisamment petit pour que l'écoulement reste en dessous d'un régime turbulent ; il est donné par

$$g = \begin{cases} 10^{-3} & \text{au niveau du radiateur } BDEF, \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Pour finir, sur la frontière $\partial\Omega$, nous utilisons les conditions de Robin avec un coefficient de Robin égal à 10^{-6} , et ceci afin de modéliser de faibles pertes de chaleur.

Nous commençons la simulation avec un maillage uniforme. Le processus adaptatif génère des maillages qui suivent bien la vitesse et la variation de température au cours du temps. Les figures 4.22, 4.23, 4.24 affichent les maillages, les variations de température et les normes de vitesse aux différents instants $t = 50$, $t = 150$, $t = 200$. Dans les figures 4.25 et 4.26 pour $t = 600$ and $t = 1200$ nous n'affichons pas les maillages car ils sont trop denses pour être correctement présentés.

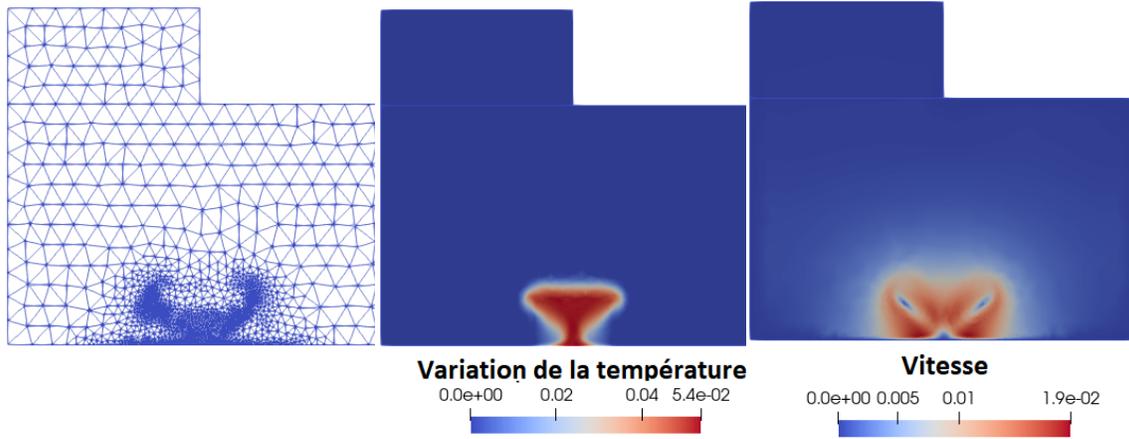


FIGURE 4.22 – le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 50$.

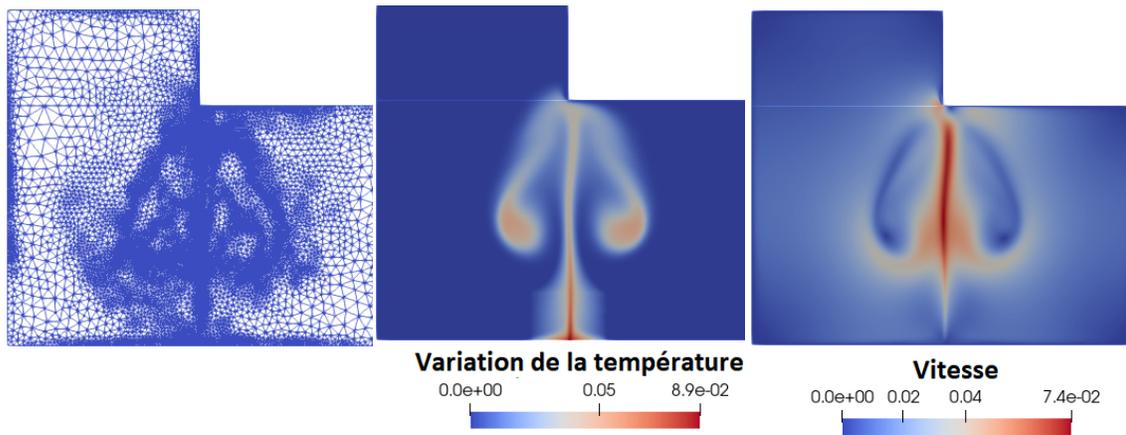


FIGURE 4.23 – le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 150$.

Dans la figure 4.27, nous comparons les valeurs des indicateurs d'erreur totaux en fonction du nombre de degrés de liberté en utilisant l'échelle logarithmique, et ceci pour les deux algorithmes, uniforme et adaptatif. La figure nous montre clairement l'avantage de

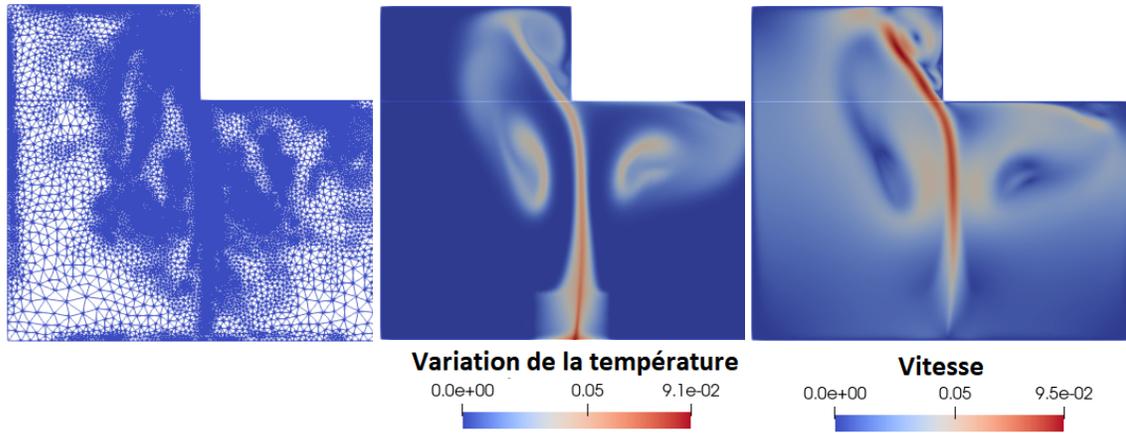


FIGURE 4.24 – le maillage (à gauche), la température numérique (au centre) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 200$.



FIGURE 4.25 – La température numérique (à gauche) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 600$.

la méthode adaptative par rapport à la méthode uniforme, puisque les indicateurs correspondant à la méthode adaptative sont plus petits que ceux de la méthode uniforme. La méthode adaptative demande à peu près 2 à 3 fois moins d'inconnues spatio-temporelles que la méthode uniforme pour atteindre un indicateur donné, ce qui se traduit par une accélération significative des simulations.



FIGURE 4.26 – La température numérique (à gauche) et la vitesse numérique (à droite) à $t = 1200$.

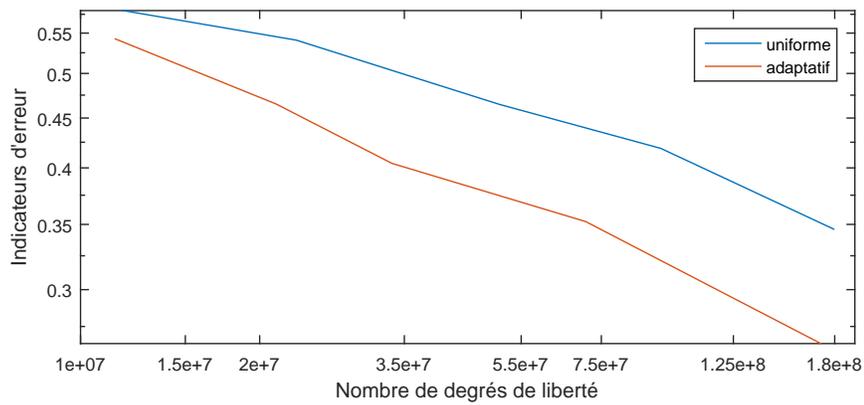


FIGURE 4.27 – Indicateurs d'erreur totaux E_{tot} .

Conclusion

Le couplage des équations de Navier-Stokes incompressibles instationnaires avec l'équation de convection-diffusion-réaction, qui décrit le comportement d'un fluide avec des variations soit de la température du milieu considéré soit de la concentration d'un élément chimique dans le fluide, a été notre sujet d'étude. Dans une première partie, nous avons cherché à établir l'estimation d'erreur *a posteriori* de notre problème de couplage en supposant que α le coefficient de diffusion est une constante. Dans une autre partie, nous avons repris notre étude *a posteriori* de notre problème de couplage mais en supposant cette fois que le coefficient de diffusion aussi dépend de la concentration comme c'était déjà le cas de la viscosité et de la force extérieure appliquée au fluide. La dernière partie fut consacrée à des simulations numériques afin de valider nos résultats théoriques.

Nous avons donc commencé par introduire la formulation variationnelle (E) de notre problème de couplage. Ensuite, nous l'avons discrétisé en utilisant le schéma d'Euler pour la discrétisation en temps et les éléments finis " P1-bulle/ P1/ P1" pour la discrétisation en espace. Ainsi nous avons obtenu notre problème variationnel discret (Eds1). Puis nous avons avancé pour établir notre étude *a posteriori*, dont le but est de contrôler globalement l'erreur par le biais de bornes calculables et de fournir des indicateurs permettant le raffinement adaptatif en espace et en temps. Nous avons commencé par établir la majoration de l'erreur par les indicateurs d'erreur qui sont des quantités locales. Et c'est à ce niveau, plus précisément dans la majoration de l'erreur de la vitesse que nous avons eu recours à un problème intermédiaire discrétisé seulement en temps. Puis nous avons terminé notre étude *a posteriori* en établissant l'efficacité.

Pour passer à la deuxième partie de notre étude, où la seule différence était que α le coefficient de diffusion désormais dépend de la concentration, il a fallu non seulement introduire la formulation variationnelle (E1) mais nous avons dû aussi montrer l'existence et l'unicité de la solution de notre nouveau problème de couplage. Ensuite, en suivant la même méthode de discrétisation et les mêmes étapes pour la majoration de l'erreur et la majoration des indicateurs, nous avons pu établir l'estimation d'erreur *a posteriori* de notre nouveau problème de couplage.

La validation numérique des résultats théoriques est effectuée sur deux cas-tests pour lesquels on connaît les solutions exactes et nous avons proposé un algorithme adaptatif basé sur les estimations *a posteriori* et présenté des essais numériques qui montrent l'efficacité de la stratégie adaptative. D'autre part, nous avons proposé un cas test plus réaliste lié au chauffage d'une pièce avec deux hauteurs de toit différentes.

Une perspective naturelle de ce travail de recherche serait d'étendre notre étude *a posteriori* en dimension 3, pour s'approcher plus de la réalité. Une autre perspective peut être envisagée, celle de reprendre ce problème de couplage pour la simulation des grandes échelles, ce qui est pertinent lorsque l'écoulement devient turbulent.

Bibliographie

- [1] Rahma Agroum. A posteriori error analysis for solving the Navier-Stokes problem and convection-diffusion equation. *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, 34(2) :401–418, 2018.
- [2] Rahma Agroum, Saloua Mani Aouadi, Christine Bernardi, and Jamil Satouri. Spectral discretization of the Navier-Stokes equations coupled with the heat equation. *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, 49(3) :621–639, 2015.
- [3] Rahma Agroum, Christine Bernardi, and Jamil Satouri. Spectral discretization of the time-dependent Navier-Stokes problem coupled with the heat equation. *Appl. Math. Comput.*, 268 :59–82, 2015.
- [4] Mark Ainsworth and J. Tinsley Oden. A posteriori error estimation in finite element analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 142(1-2) :1–88, 1997.
- [5] Rim Aldbaissy, Frédéric Hecht, Gihane Mansour, and Toni Sayah. A full discretisation of the time-dependent Boussinesq (buoyancy) model with nonlinear viscosity. *Calcolo*, 55(4) :49, 2018. Id/No 44.
- [6] Douglas N Arnold, Franco Brezzi, and Michel Fortin. A stable finite element for the Stokes equations. *Calcolo*, 21 :337–344, 1984.
- [7] Ivo Babuška and Werner C. Rheinboldt. A-posteriori error estimates for the finite element method. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 12 :1597–1615, 1978.
- [8] Ivo Babuška and Werner C. Rheinboldt. Error estimates for adaptive finite element computations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 :736–754, 1978.
- [9] Amal Bergam, Christine Bernardi, and Zoubida Mghazli. A posteriori analysis of the finite element discretization of some parabolic equations. *Math. Comput.*, 74(251) :1117–1138, 2005.
- [10] Christine Bernardi, Jad Dakroub, Gihane Mansour, and Toni Sayah. A posteriori analysis of iterative algorithms for Navier-Stokes problem. *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, 50(4) :1035–1055, 2016.
- [11] Christine Bernardi, Yvon Maday, and Francesca Rapetti. *Discrétisations variationnelles de problèmes aux limites elliptiques*, volume 45 of *Math. Appl. (Berl.)*. Berlin : Springer, 2004.
- [12] Christine Bernardi and Toni Sayah. A posteriori error analysis of the time dependent Navier-Stokes equations with mixed boundary conditions. *SĚMA J.*, 69(1) :1–23, 2015.

-
- [13] Christine Bernardi and Toni Sayah. A posteriori error analysis of the time-dependent Stokes equations with mixed boundary conditions. *IMA J. Numer. Anal.*, 35(1) :179–198, 2015.
- [14] Christine Bernardi and Endre Süli. Time and space adaptivity for the second-order wave equation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 15(2) :199–225, 2005.
- [15] Christine Bernardi and Rüdiger Verfürth. A posteriori error analysis of the fully discretized time-dependent Stokes equations. *M2AN, Math. Model. Numer. Anal.*, 38(3) :437–455, 2004.
- [16] Nancy Chalhoub, Pascal Omnes, Toni Sayah, and Rebecca El Zahlaniyeh. A posteriori error estimates for the time-dependent convection-diffusion-reaction equation coupled with the Darcy system. *Numer. Algorithms*, 89(3) :1247–1286, 2022.
- [17] Philippe Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *Rev. Franc. Automat. Inform. Rech. Operat., R*, 9(2) :77–84, 1975.
- [18] Jad Dakroub, Joanna Faddoul, and Toni Sayah. A posteriori analysis of the Newton method applied to the Navier-Stokes problem. *J. Appl. Math. Comput.*, 63(1-2) :411–437, 2020.
- [19] Charles A. Desoer and Mathukumalli Vidyasagar. Feedback systems : Input-output properties. Electrical Science Series. New York - San Francisco - London : Academic Press, a subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers. XVI, 264 p. \$ 26.00 (1975)., 1975.
- [20] Francisco Durango and Julia Novo. A posteriori error estimations for mixed finite element approximations to the Navier-Stokes equations based on Newton-type linearization. *J. Comput. Appl. Math.*, 367 :15, 2020. Id/No 112429.
- [21] Abdeslam Elakkad, Ahmed Elkhalfi, and Najib Guessous. An a posteriori error estimate for mixed finite element approximations of the Navier-Stokes equations. *J. Korean Math. Soc.*, 48(3) :529–550, 2011.
- [22] Alexandre Ern, Iain Smears, and Martin Vohralík. Equilibrated flux *a posteriori* error estimates in $L^2(H^1)$ -norms for high-order discretizations of parabolic problems. *IMA J. Numer. Anal.*, 39(3) :1158–1179, 2019.
- [23] Alexandre Ern and Martin Vohralík. A posteriori error estimation based on potential and flux reconstruction for the heat equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(1) :198–223, 2010.
- [24] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations*, volume 749 of *Lect. Notes Math.* Springer, Cham, 1979.
- [25] Vivette Girault and Pierre-Arnaud Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms.*, volume 5 of *Springer Ser. Comput. Math.* Springer, Cham, (Extended version of the 1979 publ.) edition, 1986.
- [26] Yinnian He. The Euler implicit/explicit scheme for the 2d time-dependent Navier-Stokes equations with smooth or non-smooth initial data. *Math. Comput.*, 77(264) :2097–2124, 2008.
- [27] Frédéric Hecht. New development in freefem++. *J. Numer. Math.*, 20(3-4) :251–265, 2012.

-
- [28] Pierre Ladevèze. Constitutive relation error estimators for time-dependent nonlinear FE analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 188(4) :775–788, 2000.
- [29] Zhendong Luo and Jiang Zhu. A nonlinear Galerkin mixed element method and a posteriori error estimator for the stationary Navier-Stokes equations. *Appl. Math. Mech., Engl. Ed.*, 23(10) :1194–1206, 2002.
- [30] Ghina Nassreddine, Pascal Omnes, and Toni Sayah. A posteriori error estimates for the large eddy simulation applied to stationary Navier-Stokes equations. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 38 :1468–1498, 2022.
- [31] Ghina Nassreddine and Toni Sayah. New results for the a posteriori estimates of the two dimensional time dependent Navier-Stokes equation. *International journal of mechanics Vol. 11*, 2017.
- [32] Michelle Schatzman. *Analyse numérique : Cours et exercices pour la licence*. Paris : InterEditions, 1991.
- [33] Roger Temam. Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. Studies in Mathematics and its Applications. Vol. 2. Amsterdam - New York - Oxford : North-Holland Publ. Co. X, 1977.
- [34] Rüdiger Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*. Chichester : John Wiley & Sons ; Stuttgart : B. G. Teubner, 1996.
- [35] Rüdiger Verfürth. A posteriori error estimates for finite element discretizations of the heat equation. *Calcolo*, 40(3) :195–212, 2003.
- [36] Mathukumalli Vidyasagar. *Nonlinear systems analysis*. London : Prentice Hall, 2nd ed. edition, 1993.