



HAL
open science

Deux études de propriétés collectives de systèmes quantiques : compression du spin nucléaire de l'Helium-3 par mesure quantique non destructive et amortissement des phonons dans un superfluide à deux dimensions

Alan Serafin

► **To cite this version:**

Alan Serafin. Deux études de propriétés collectives de systèmes quantiques : compression du spin nucléaire de l'Helium-3 par mesure quantique non destructive et amortissement des phonons dans un superfluide à deux dimensions. Physique Quantique [quant-ph]. Sorbonne Université, 2022. Français. NNT : 2022SORUS449 . tel-04002097

HAL Id: tel-04002097

<https://theses.hal.science/tel-04002097v1>

Submitted on 23 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat de Sorbonne Université

Spécialité : Physique
Ecole doctorale n°564 : Physique en Île-de-France

réalisée sous la direction de Alice SINATRA
et co-dirigée avec Yvan CASTIN

au **Laboratoire Kastler Brossel**



présentée par

Alan SERAFIN

Sujet de la thèse :

Deux études de propriétés collectives de systèmes quantiques

Soutenue le 5 décembre 2022

devant le jury composé de :

M. Jean-Francois Roch	Professeur	ENS Paris-Saclay	Président
Mme. Isabelle Bouchoule	Directrice de recherche	Lab. Charles-Fabry	Rapporteuse
M. Tommaso Roscilde	Maître de Conférence	ENS Lyon	Rapporteur
M. Jean-Noël Fuchs	Directeur de recherche	LPTMC	Examineur
Mme. Alice Sinatra	Professeure	LKB	Directrice de thèse
M. Yvan Castin	Directeur de recherche	LKB	Co-directeur de thèse

Table des matières

Remerciements	ix
I Compression de spin nucléaire par mesure quantique non destructive en continu	1
1 Introduction	3
1.1 Hélium 3 : Propriétés physiques et pompage optique	4
1.2 La compression de spin : concept et enjeu	6
1.3 Schéma de principe pour le dispositif expérimental	6
1.4 Mesures quantiques non destructives	8
2 Collisions d'échange de métastabilité	11
2.1 Origines physiques des collisions d'échange de métastabilité	11
2.2 Équations d'évolution des observables	13
2.2.1 Les observables lors de la collision	13
2.2.2 Évolution des observables macroscopiques du gaz	14
2.3 Étude du modèle simplifié à 2 spins 1/2	16
2.3.1 Définitions et équations pour les fluctuations quantiques	17
2.3.2 Dynamique des corrélations quantiques	18
2.3.3 Équation pilote pour les échanges de métastabilité	20
3 Modèle à trois spins couplés	23
3.1 Description semi-classique de l'évolution du système	24
3.1.1 Équations semi-classiques non linéaires	24
3.1.2 Solution stationnaire partiellement polarisée	25
3.2 Description des fluctuations quantiques	25
3.2.1 Équations semi-classiques linéarisées	25
3.2.2 Réduction à trois spins collectifs couplés	26
3.3 Modèles à trois modes bosoniques	27
3.3.1 Approximation de Holstein-Primakoff	27
3.3.2 Équation pilote à trois modes pour l'échange de métastabilité	30
3.3.3 Équation pilote à trois modes complète	30

4	Compression par comptage de photons	33
4.1	Principe des fonctions d'onde Monte-Carlo	34
4.2	Analyse de la limite à un mode	35
4.3	Dynamique conditionnée au résultat du comptage	38
4.3.1	Résultats analytiques à un mode	38
4.3.2	Résultats numériques à trois modes	41
5	Compression par détection homodyne	45
5.1	Formulation stochastique adaptée de l'équation pilote	46
5.2	Solutions analytiques dans le modèle à un mode	48
5.3	Solutions analytiques dans le modèle à trois modes	52
5.4	Effets de la décohérence	56
5.4.1	Dans le modèle à un mode	57
5.4.2	Dans le modèle à trois modes	59
5.5	Paramètres pour une réalisation expérimentale	62
5.5.1	Estimations numériques des paramètres et variables.	62
5.5.2	Notes sur le champ magnétique en cavité	65
5.6	Conclusion de la première partie	67
	Bibliographie	69
II	Amortissement des phonons dans un gaz de boson superfluide 2D	75
1	Cadre théorique : l'hydrodynamique quantique	79
1.1	Hamiltonien hydrodynamique	79
1.2	Adimensionnement des quantités	83
1.3	Taux d'amortissement Landau-Beliaev via la règle d'or de Fermi	84
1.3.1	Expressions des taux adimensionnés comme des intégrales sur les im- pulsions.	87
1.3.2	Solution en champ classique	88
1.3.3	Développement à l'ordre dominant en ϵ	88
1.3.4	Intégration	89
2	La simulation numérique	93
2.1	Structure du programme	94
2.1.1	Discrétisation de l'espace : taille et pas du réseau	94
2.1.2	Processus Umklapp	94
2.1.3	La coupure ultraviolette	95
2.1.4	Estimation d'une moyenne d'ensemble	95
2.1.5	Résumé des paramètres d'entrée	96
2.2	Implémentation de l'évolution hamiltonienne	97
2.2.1	Initialisation du champ	97
2.2.2	Évolution sur un pas de temps	98
2.2.3	L'opérateur gradient sur un réseau discret	102

3	Étude par fonctions de Green à N corps	105
3.1	Expression du signal en termes de la fonction énergie propre Σ	105
3.2	Développement perturbatif de la fonction énergie propre	107
3.2.1	Expressions des fonctions énergie propre d'ordre 2	108
3.2.2	Expression du signal pour le champ classique	108
3.2.3	Principe d'un calcul numérique	109
3.3	Spécificité du cas 2D	110
3.4	Théorie diagrammatique à l'ordre dominant en ϵ	111
3.4.1	Étude des ordres supérieurs de la fonction énergie propre	111
4	Résultats et comparaison	115
4.1	Régime de validité et d'interaction des séries	115
4.2	Vérifications de la conservation de l'énergie	116
4.3	Règle d'or de Fermi-Dirac contre simulation	118
4.4	Fonctions de Green contre simulations numériques	120
4.4.1	Série 1	121
4.4.2	Série 2	124
4.5	Conclusion de la deuxième partie	125
	Bibliographie	127

Table des figures

1.1	Vue d'ensemble du dispositif expérimental	7
1.2	Niveaux d'énergie utiles de l'atome ^3He	8
2.1	Simulation Monte-Carlo des collisions d'échange de métastabilité pour le modèle simplifié	19
3.1	Taux effectifs d'échange de métastabilité et dépendance en polarisation nucléaire de la pulsation de Faraday	28
4.1	Compression de P_a^2 par comptage de photons aux temps courts	41
4.2	Compression de P_a^2 par comptage de photons aux temps longs dans le modèle à un mode	42
5.1	Marche au hasard du modèle à un mode dans le cas de la compression par détection homodyne en continu	49
5.2	Compression du spin nucléaire par mesure homodyne en continu.	52
5.3	Couplages et taux de compression en fonction de la polarisation	64
5.4	Gain et compression du spin nucléaire en fonction de la polarisation	65
1.1	Diagrammes des processus d'interaction associés à l'hamiltonien hydrodynamique cubique $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)}$	82
3.1	Chemins d'intégration C_+ et C_-	106
3.2	Chemin d'intégration avec lacets	107
3.3	Diagramme d'ordre 4 en $\bar{H}^{(3)}$	112
4.1	Propriétés de conservation de l'énergie	117
4.2	Règle d'or de Fermi et amortissement du signal	119
4.3	Série 1 : Comparaisons pour des réseaux de tailles différentes et pour des modes de même impulsion mais distincts	122
4.4	Série 1 : Fonction de corrélation temporelle de deux modes pour le réseau de taille 128×128	123
4.5	Série 2 : Comparaisons pour des réseaux de tailles différentes et pour des modes de même nombre d'onde mais distincts sur le réseau	124
4.6	Série 2 : Fonction de corrélation temporelle de deux modes pour le réseau de taille 128×128	125

Remerciements

Le travail présenté dans ce manuscrit est le fruit de trois années de recherche effectuée au sein du laboratoire Kastler Brossel entre mai 2019 et décembre 2022. Je souhaite remercier l'ensemble de ses membres pour l'accueil chaleureux qu'ils m'ont offert. Je remercie en particulier son personnel administratif, toujours sympathique et disponible.

Je voudrais remercier tout particulièrement Alice Sinatra et Yvan Castin pour avoir dirigé cette thèse avec tant de bienveillance. Merci Alice pour ta confiance lorsque tu m'as pris comme doctorant et durant tout le reste de la thèse et merci Yvan pour ces discussions animées et amicales. Votre bonne humeur et votre attention ont permis un environnement de travail enrichissant tout au long de la thèse. Nos discussions hebdomadaires de physique furent des enseignements précieux et le travail commun, toujours méthodique et rigoureux, fut une formation scientifique profonde dont je vous suis reconnaissant. Ces discussions de travail furent aussi simplement des moments dont j'ai toujours pris du plaisir à participer, souvent amusante et où l'on riait beaucoup. Je vous remercie encore tous deux pour toutes ces raisons.

Merci aussi aux membres de l'équipe microcircuit à atomes et tous les doctorants qui y sont passés ces trois dernières années. Je remercie en particulier Jean Hare pour toutes les conversations de fin d'après-midi. Je voudrais aussi remercier Jules Grucker, pour son parrainage pris au sérieux, et Félix Werner pour m'avoir introduit aux calculs sur clusters.

Je remercie les membres du jury, Jean-François Roch, Jean-Noël Fuchs ainsi que Isabelle Bouchoule et Tommaso Roscilde dont je suis reconnaissant d'avoir accepté d'être les rapporteurs de la thèse.

Enfin, j'aimerais remercier mes parents et mes soeurs pour leur soutien continu, et mes ami-es de la diaspora caennaise et d'ailleurs. Merci aussi à toi Léa, pour les relectures du manuscrit et pour tout le reste.

Première partie

Compression de spin nucléaire par
mesure quantique non destructive
en continu

Chapitre 1

Introduction

Avant-propos

Le spin nucléaire des atomes d'hélium 3 dans un gaz à température ambiante est un système quantique très bien isolé qui présente des temps de cohérence record pouvant atteindre plusieurs jours [1]. Il est aujourd'hui utilisé dans de nombreuses applications, telles que la magnétométrie [2], les gyroscopes pour la navigation [3], comme cible dans les expériences de physique des particules [1], et même en médecine pour l'imagerie par résonance magnétique du système respiratoire humain [4, 5]. De plus, des cellules emplies d'hélium 3 sont utilisées pour des mesures de précision en physique fondamentale, c'est-à-dire dans la recherche de forces anormales [6] ou de violations de symétries fondamentales dans la nature [7].

Si l'isolation exceptionnelle des spins nucléaires de l'hélium 3 est essentielle pour obtenir de longs temps de cohérence, elle rend sa mesure et son contrôle difficiles. Il est remarquable que les spins nucléaires des gaz nobles puissent être polarisés par pompage optique via des collisions d'échange de métastabilité ou encore via des collisions d'échange de spin, en exploitant les collisions entre des atomes dans des états différents ou d'espèces différentes qui transfèrent la polarisation électronique induite optiquement aux noyaux [1, 8]. Cependant, le rôle de la cohérence quantique, du bruit quantique et des corrélations quantiques à plusieurs corps dans ce processus commence seulement à être étudié [9, 10, 11]. Le contrôle quantique optique des ensembles de spins nucléaires de gaz rares n'en est encore qu'à ses débuts, et des concepts clé de la technologie quantique, tels que la génération d'états non classiques pour la métrologie quantique [12] ou le stockage d'états quantiques de la lumière [13], n'ont pas encore été démontrés.

Dans ce travail, nous proposons une technique pour la manipulation optique des spins nucléaires de l'hélium 3 dans le régime quantique. Comme l'état de spin nucléaire ne peut être manipulé directement avec la lumière, notre approche utilise les collisions d'échange de métastabilité pour établir un couplage efficace entre la lumière et le spin nucléaire. Contrairement à certaines idées précédemment proposées [9, 10] au sein du Laboratoire Kastler Brossel, où les travaux théoriques présentés dans cette thèse ont été menés, le schéma considéré ici réalise une interaction de Faraday [14] couplant les fluctuations de la lumière et du spin nucléaire. Cette interaction est aujourd'hui couramment utilisée comme une interface quantique spin-lumière puissante et versatile dans les expériences avec les vapeurs alcalines [14, 15]. Comme notre schéma ne nécessite pas d'autres espèces atomiques comme médiateur

[11] et que les taux de collisions d'échange de métastabilité sont comparativement élevés [1], il peut fonctionner à température ambiante et à des pressions de l'ordre du millibar, comme c'est le cas dans les expériences avec l'hélium 3. De plus, l'interaction peut être branchée et débranchée, en commutant la décharge électrique faible qui peuple l'état métastable, permettant ainsi le couplage effectif entre le spin nucléaire et la lumière. Notre schéma permettra de développer des technologies à amélioration quantique avec l'hélium 3, comme des dispositifs de mesure dont la sensibilité dépasse la limite quantique standard [12]. Ce travail donne une présentation théorique détaillée du mécanisme de compression et de ses limites ainsi qu'une étude de faisabilité prenant en compte les valeurs expérimentalement accessibles des paramètres. Très récemment, des idées similaires ont été mises en avant dans un système physique différent, le mélange alcalin-gaz rare [11, 16].

Ce chapitre introduit les grands concepts et propositions sur lesquels est basé la première partie de cette thèse. La première section discute de l'atome d'hélium 3 et de son spin nucléaire au temps de cohérence exceptionnelle, elle aborde aussi la question du pompage optique d'un ensemble d'atomes d'hélium 3. Cette question n'est pas sans rapport avec notre travail : d'une part l'expérience que l'on prévoit demande que les atomes soient initialement polarisés, d'autre part notre proposition est un « détournement » des techniques de pompage optique dans l'hélium 3. De plus, les équations qui furent développées pour décrire le pompage optique de l'hélium forment le point de départ de notre étude analytique. Dans la section qui suit, nous présentons les états comprimés de spin ainsi qu'une métrique pour comparer des états comprimés de spins entre eux en fonction de leur utilité métrologique. La section 1.3 présente le schéma expérimental tel que nous le prévoyons. Enfin, nous terminons ce chapitre introductif par une discussion autour de la mesure quantique non destructive, technique par laquelle nous créons les corrélations quantiques dans l'ensemble des spins nucléaires.

1.1 Hélium 3 : Propriétés physiques et pompage optique

L'Hélium 3 est le second isotope stable de l'hélium en termes d'abondance. Son noyau est composé de deux protons et d'un neutron, ce qui lui confère un spin nucléaire non nul $I = 1/2$. Par ailleurs, en tant que gaz noble, les couches électroniques de l'atome sont toutes complètes dans l'état fondamental et son spin électronique est alors nul. Propriété remarquable : le spin total de l'hélium 3 est donc purement nucléaire dans son état fondamental. En conséquence, ces spins peuvent présenter de très grands temps de cohérence en cellule. Ainsi, un temps de cohérence T_2^* supérieur à 60 heures a été mesuré dans des dispositifs de magnétométrie ultra-précise [17], et semble limité seulement par le temps de décroissance longitudinal T_1 dû aux collisions avec les parois.¹ Ces valeurs font du spin nucléaire macroscopique d'un gaz à température ambiante un système idéal pour la production, l'étude et l'utilisation d'états intriqués, et donc un compétiteur des gaz d'atomes froids et des condensats de Bose-Einstein en métrologie et traitement quantique de l'information [12].

Le pompage optique dans l'hélium et les collisions d'échange de métastabilité

Par une technique indirecte de polarisation nucléaire bien maîtrisées de l'hélium 3, on peut préparer de manière routinière un spin nucléaire collectif géant, atteignant un taux de 90 %, avec une durée de vie extrêmement longue. Cette technique ancienne maintenant se nomme

1. Des temps T_1 de plusieurs centaines d'heures peuvent même être obtenus [1].

« collision d'échange de métastabilité ». Historiquement, le pompage optique direct et standard pour la polarisation ne pouvait pas être appliqué sur des gaz d' ^3He car aucune transition n'était accessible aux lampes atomiques d'alors. Rappelons que le principe du pompage optique consiste à créer une situation d'asymétrie entre un (ou des) processus d'excitation de l'atome d'une part et un processus de désexcitation (comme l'émission spontanée) d'autre part afin d'amener le plus d'atomes possibles dans un sous-niveau Zeeman donné. Ceci nécessite de pouvoir interagir optiquement avec les états excités de l'atome. En ce qui concerne l'atome d'hélium 3, le premier état excité se trouve loin dans l'ultra-violet, autour de 20 eV de l'état fondamental, et encore aujourd'hui, il n'est pas standard pour les expériences de disposer de laser accédant à de telles transitions. Ce problème de la polarisation nucléaire de l'atome d'hélium était d'une grande importance dans les années d'après-guerre car il y avait une importante demande pour des cibles polarisées dans le cadre des expériences de physique nucléaire [18]. L'impossibilité de créer de telles cibles fit naître beaucoup de propositions alternatives, par exemple via des effets de polarisation dans les solides comme l'effet « Overhauser » ou dans les liquides d'hélium 3 mais ces méthodes se révélèrent insuffisantes. En 1960, la méthode optique fait son retour avec l'article de Bouchiat, Carver et Varnum [19]. Elle consiste en un pompage optique indirect en considérant un mélange d'hélium 3 et de rubidium où le mécanisme de transfert est une interaction dipolaire. Les auteurs n'atteignent que 0,01% de polarisation, ce qui reste insuffisant pour les expériences de collision nucléaire. Parallèlement, la technique de pompage optique des atomes d'hélium 3 dans un état métastable se perfectionnait [20]. La méthode de polarisation la plus efficace fut introduite en 1962 par Walters, Colegrove et Schearer [21] avec une polarisation de quelques pourcents et rapidement améliorée pour obtenir une polarisation de 40% en 1963 [22]. Elle repose d'une part sur l'utilisation du premier état excité de l'atome 2^3S_1 que l'on nomme « métastable » car sa durée de vie est de l'ordre de 10^3 secondes [23] et d'autre part sur les collisions entre les atomes de l'état fondamental et ceux dans l'état métastable. Car celles-ci ont l'étonnante propriété de pouvoir transférer la polarisation d'un atome à l'autre, c'est-à-dire que les états des nuages électroniques sont échangés d'un noyau à l'autre. Elles étaient déjà connues mais il n'était pas évident de les considérer comme un mécanisme en mesure de transférer une polarisation² car le rapport entre les deux populations fondamental et métastable est extrêmement grand si bien que les atomes dans l'état fondamental ne subissent pas souvent de collisions avec un métastable. Toutefois, comme Walters, Colegrove et Schearer le firent remarquer (i) les métastables subissent une collision très rapidement avec un fondamental, et même plus rapidement qu'ils n'absorbent de photon, le taux de transfert n'est donc pas marginal et (ii) il suffit que le taux de relaxation du spin nucléaire soit plus faible que ce taux de transfert pour qu'une polarisation nucléaire puisse apparaître. Or, le spin nucléaire est naturellement protégé contre les relaxations optiques. Ceci ouvra la voie à de grandes polarisations dans les gaz nobles qui furent explorées les années suivantes. On citera parmi les développements remarquables desquels notre travail prend la suite, les articles de J. Dupont-Roc, M. Leduc et F. Laloë [24] dans la première moitié de la décennie 1970 où sont établies de manière formelle les équations qui régissent la dynamique des variables de spin d'un mélange d'hélium dans l'état fondamental et métastable en présence de ces collisions d'échange de métastabilité. Ces équations sont le point de départ de notre formalisme.

2. Nous pouvons prendre en exemple Colegrove et Franken (1960) [20] que nous avons déjà cité, où les collisions sont considérées comme un processus incohérent qui détruirait la « mémoire » du spin électronique de l'atome métastable.

1.2 La compression de spin : concept et enjeu

Par analogie avec les états comprimés de la lumière en optique quantique, un spin (ici collectif) \vec{I} est dit être dans un état comprimé si, dans une direction Oz orthogonale à celle Ox du spin moyen, il admet des fluctuations réduites par rapport à la limite quantique standard. Le bruit (ou limite) quantique standard correspond à des écart-types $\Delta I_y^{\text{st}} = \Delta I_z^{\text{st}} = (|\langle I_x \rangle|/2)^{1/2}$, c'est-à-dire au cas d'égalité avec symétrie de révolution des fluctuations autour du spin moyen dans l'inégalité de Heisenberg $\Delta I_y \Delta I_z \geq |\langle I_x \rangle|/2$, nos spins étant ici sans dimension. Ces états de spin comprimé sont d'une grande utilité dans le contexte de la métrologie quantique. En effet, les mesures de grande précision pour des quantités physiques comme la force ou la direction d'un champ ou bien un intervalle de temps se traduisent en une phase accumulée dans le spin d'un ensemble atomique. Si l'on imagine un tel spin complètement polarisé, en rotation sur la sphère de Bloch alors la variance initiale de la composante du spin dans la direction de la rotation, cruciale pour toute estimation de la phase accumulée, est égale à $\frac{N}{4}$ avec N le nombre d'atomes dans l'ensemble. Lorsque l'on discute d'états comprimés, il est donc intéressant de les comparer avec cet état « classique ». Dans la suite de cette partie, lorsque nous considérerons le spin nucléaire comprimé, on discutera du rapport entre la variance de cet état et celui de l'état cohérent, que l'on exprimera en décibel ($10 \log_{10}(r)$ avec r le rapport des variances et \log_{10} la fonction logarithme dans la base 10). Une discussion plus approfondie montre que, dans le schéma considéré, le rapport bruit sur signal dans une mesure de fréquence de précession est en fait proportionnel à $\xi = (2I)^{1/2} \Delta I_z / |\langle I_x \rangle|$ (ceci fait apparaître naturellement les fluctuations de l'angle qui donne la direction du spin dans le plan xOz) plutôt qu'au rapport $\Delta I_z / \Delta I_z^{\text{st}}$ naïvement attendu [25]. On utilisera alors aussi cette métrique pour jauger de l'intérêt d'un état comprimé de spin dans le reste de cette partie.

1.3 Schéma de principe pour le dispositif expérimental

Le système physique considéré est représenté sur la figure 1.1. Une cellule remplie d'un gaz pur polarisé d'atomes d'hélium 3 à une pression de quelques mbars est placée à l'intérieur d'une cavité optique dont on note l'axe Oz . Alors que la majorité des atomes restent dans l'état singulet fondamental 1^1S de l'hélium, une faible décharge porte une infime fraction des atomes, en général $\simeq 10^{-6}$, dans l'état triplet métastable 2^3S . Nous représentons sur la figure 1.2 les niveaux d'énergie utiles de l'atome d'hélium 3. Nous notons \vec{I} le spin associé à l'état fondamental, qui est un état singulet. Le spin métastable est un état triplet et nous notons \vec{K} et \vec{J} les spins associés aux multiplicités hyperfines $F = 1/2$ et $F = 3/2$ respectivement. Par les techniques de polarisation que nous avons précédemment introduites, on polarise l'échantillon atomique dans la direction Ox par pompage optique. Le couplage entre ces trois sous-systèmes, le spin total des atomes dans l'état fondamental, le spin total des atomes dans l'état métastable et le mode lumineux de la cavité se fait deux à deux. D'une part, on injecte dans la cavité un faisceau laser se propageant selon l'axe de la cavité Oz et polarisé linéairement selon la direction Ox pour exciter la transition C_8 entre le niveau $F = 1/2$ de l'état métastable 2^3S_1 et le plus haut niveau d'énergie $F = 1/2$ de l'état excité 2^3P , avec un désaccord en fréquence négatif beaucoup plus grand en valeur absolue que la mi-largeur Doppler de l'état excité (de l'ordre de 1 GHz), afin que la classe de vitesse résonnante avec le laser soit presque vide, mais beaucoup plus faible que le clivage hyperfin

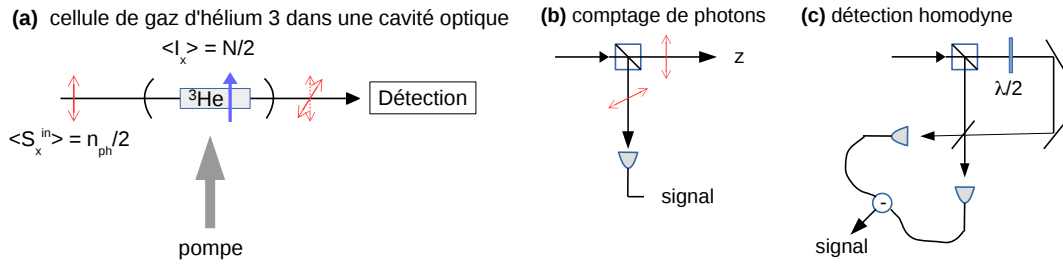


FIGURE 1.1 – Vue d’ensemble du dispositif. (a) Cellule en verre centimétrique remplie d’un gaz d’hélium 3 à température ambiante et placée dans une cavité optique d’axe Oz (axe horizontal sur la figure). Le spin de Stokes de la lumière et les spins atomiques (nucléaires et des métastables) sont polarisés linéairement selon Ox (axe vertical sur la figure). Le mode du champ en cavité polarisé selon Oy , initialement vide, se peuple par effet Faraday sous l’action des fluctuations quantiques du spin des métastables selon Oz lors de sa propagation dans le gaz. On le mesure en continu à l’extérieur de la cavité par l’une des deux méthodes suivantes : (b) les photons sortant de la cavité polarisés selon Oy sont séparés de ceux polarisés selon Ox par un cube polariseur puis détectés dans le régime de comptage de photons ; (c) on effectue une détection homodyne d’une quadrature du champ sortant polarisé selon Oy , en utilisant comme oscillateur local le champ sortant polarisé selon Ox (dont on a fait tourner au préalable la polarisation avec une lame demi-onde pour l’amener selon Oy).

de 6,74 GHz dans l’état métastable (et a fortiori que le clivage fin $2^3P_1 - 2^3P_0$ de 29,6 GHz dans l’état excité), afin que le niveau métastable $F = 3/2$ soit très peu affecté par le laser.³ On obtient alors un couplage effectif de type Faraday entre le mode de la cavité optique et le spin total de l’état métastable. D’autre part, les atomes dans l’état métastable 2^3S (de spin hyperfin électronique et nucléaire) sont couplés aux atomes dans l’état fondamental (de spin purement nucléaire) par des collisions d’échange de métastabilité ; de façon remarquable, bien que chaque collision d’échange soit individuellement incohérente, ceci conduit à un couplage macroscopique bien défini entre les spins collectifs correspondants [24, 27]. Comme l’interaction de Faraday avec les atomes métastables fait légèrement tourner autour de l’axe Oz la polarisation de la lumière initialement dirigée selon Ox , d’un angle proportionnel à la composante du spin collectif des métastables selon Oz comme nous le verrons, une mesure destructive en continu de la composante de polarisation selon Oy du champ sortant de la cavité (i) par comptage de photons comme indiqué sur la figure 1.1(b) ou (ii) par détection homodyne comme sur la figure 1.1(c), réalise in fine une mesure quantique non destructive en continu du spin nucléaire collectif selon Oz des atomes d’hélium 3 dans l’état fondamental. Cette mesure quantique non destructive, que nous présentons dans la section suivante, réduit les fluctuations quantiques associées aux observables mesurées et prépare donc un état comprimé de spin. Nous résumons par le schéma suivant l’ensemble des étapes

3. L’espace en fréquence ne permet pas de satisfaire largement ces deux contraintes, et l’on ne peut exclure que le couplage de $F = 3/2$ au champ n’ait un petit effet sur la dynamique de compression ; nous le négligeons ici mais on pourrait en tenir compte avec un hamiltonien plus complet que notre modèle minimal (3.2), comme celui de la référence [26]. Nous avons par ailleurs vérifié, au moyen de cette référence, qu’il n’existe pas de fréquence laser « magique », loin de résonance permettant d’annuler la contribution du tenseur d’alignement du niveau $F = 3/2$ à l’opérateur de déplacement lumineux.

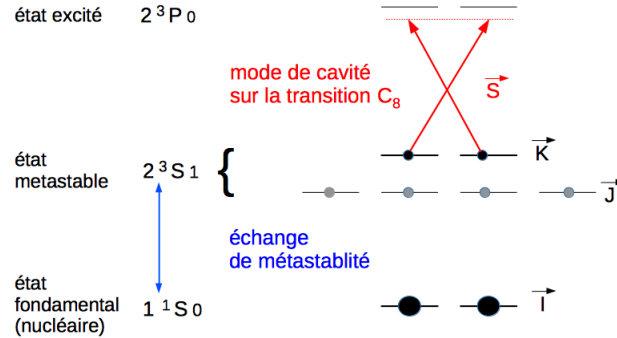
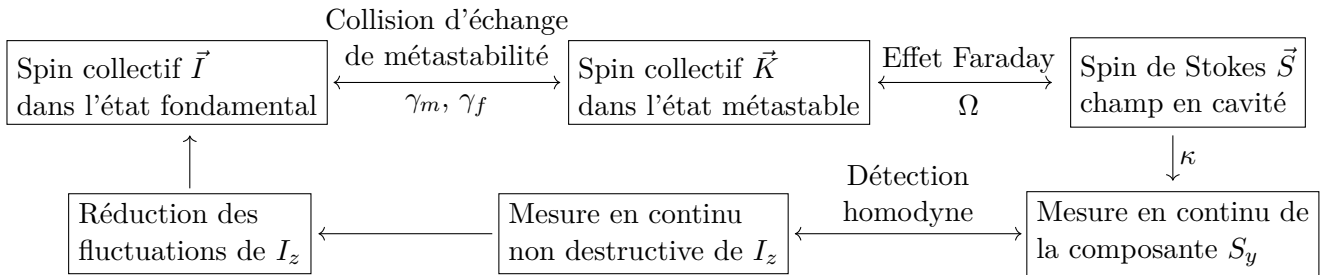


FIGURE 1.2 – Niveaux d'énergie utiles de l'atome ${}^3\text{He}$ (les sous-niveaux Zeeman correspondent au choix de Oz comme axe de quantification, les atomes étant polarisés selon Ox). Les six sous-niveaux de l'état métastable 2^3S_1 sont couplés aux deux sous-niveaux (purements nucléaires) de l'état fondamental 1^1S_0 par les collisions d'échange de métastabilité.

pour le cas d'une détection homodyne.



1.4 Mesures quantiques non destructives

En mécanique quantique, on formalise l'effet d'une mesure sur un système comme la projection du vecteur d'état sur un certain sous-espace de l'espace de Hilbert qui correspond à une valeur propre de la quantité mesurée. Dans le cas d'une mesure parfaite, si l'on note $|\psi\rangle$ le vecteur d'état, \hat{A} l'observable mesurée et a la valeur obtenue par la mesure, valeur propre de \hat{A} ; alors l'état du système juste après la mesure est $|a\rangle$, le vecteur propre de \hat{A} associé à la valeur propre a , dans le cas non dégénéré. Remarquons que la variance de \hat{A} dans l'état juste après la mesure est nulle : la mesure a comprimé (infiniment) l'état du système vis-à-vis de \hat{A} . Comme on s'y attend, la variance dans l'opérateur conjugué est infinie (afin de respecter la relation d'indétermination d'Heisenberg entre les deux opérateurs). C'est une situation bien connue des manuels de physique quantique : lors de la mesure projective de la position d'une particule donnant comme résultat \bar{x} , la fonction d'onde dans l'espace des positions est la distribution de Dirac $\delta(x - \bar{x})$, de variance nulle, le paquet d'onde dans l'espace des impulsions est alors uniforme sur tout l'espace. Lors d'une mesure imparfaite, une mesure dont le résultat est compatible avec plusieurs valeurs propres de l'observable, le vecteur d'état juste après une mesure n'est pas un vecteur propre de l'observable, mais il faut s'attendre à ce que la variance de \hat{A} dans cette superposition soit inférieure à celle initiale si au cours de la mesure nous avons bel et bien gagné de l'information sur l'état du

système. Comme exemple, considérons le cas d'une particule de masse m dans l'espace libre, dont le mouvement est régi par l'hamiltonien $\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{P}^2$, avec \hat{P} l'observable impulsion de la particule, conjuguée à l'observable \hat{X} sa position. À un instant t , on mesure \hat{X} et l'on obtient la valeur \bar{x} . C'est la situation évoquée précédemment, à la différence que dans le cas d'une mesure imparfaite, on s'attend à une fonction d'onde centrée sur \bar{x} et de largeur non nulle. Bien sûr, dans le cas de la particule libre, l'évolution induite par \hat{H} va rapidement détruire toutes corrélations ainsi créées par la mesure. De plus, la relation d'indétermination d'Heisenberg entre la position et l'impulsion implique alors une très grande variance dans l'impulsion pour compenser la compression en position. Dès lors, la fonction d'onde va s'étaler rapidement dans l'espace après la mesure. Considérons maintenant le cas d'une mesure de l'impulsion \hat{P} au temps t , toujours sur notre particule libre. Dès lors, c'est dans l'espace des impulsions que la fonction d'onde juste après t est centrée et étroite mais, à la différence de la mesure de la position, cette observable est une constante du mouvement ! En effet, $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$. Ainsi non seulement la moyenne de l'observable \hat{P} est une constante du mouvement, mais il en va de même de sa variance ! Dès lors, la mesure de l'impulsion d'une particule libre crée des corrélations durables dans la fonction d'onde. À notre connaissance, il n'existe pas de telle mesure de l'impulsion d'une particule libre mais l'idée présentée ici est assez générique pour être appliquée à toute sorte de système quantique. Ces mesures non destructives, dues à la commutation de l'observable mesurée avec l'Hamiltonien sont connues et discutées depuis l'aube de la mécanique quantique mais c'est seulement dans le courant de la décennie 1970 que V. B. Braginskii et Yu. I. Vorontsov proposent pour la première fois une méthode basée sur cette propriété afin de mesurer le nombre d'excitations dans une cavité électromagnétique résonnante sans perturber son énergie [28, 29, 30]. À l'époque, les mesures physiques deviennent si précises que le formalisme quantique est nécessaire à la description du système et de l'appareil de mesure. En astrophysique par exemple, il devient crucial pour la détection alors naissante d'ondes gravitationnelles, de pouvoir mesurer le nombre d'excitation d'un oscillateur en régime quantique, mécanique ou électromagnétique sans perturber ce nombre d'excitations.⁴ Plus tard, ces techniques diffusèrent en optique quantique où la manipulation des états du champ en cavité ou des variables internes des atomes en cavité prenait son essor. En particulier, l'émergence de la production d'état « au bruit quantique », c'est-à-dire d'un état qui sature la relation d'indétermination d'Heisenberg pour deux variables conjuguées (on peut penser à un état cohérent d'un mode lumineux où $\Delta X = \Delta P = \hbar/2$), transforma cette limite fondamentale en un obstacle technologique à dépasser.

Comme nous l'avons déjà évoqué à la section 1.2, on peut définir une « limite quantique standard » pour une certaine quantité, qui correspond à la valeur de la variance de cette quantité dans un état cohérent qui sature la relation d'Heisenberg. Un état dont la variance sur la quantité d'intérêt est inférieure à cette limite est dit comprimé. Dans le cas du spin collectif d'un gaz constitué de N atomes polarisés selon une direction $\langle S_x \rangle = \frac{N}{2}$, soit $\Delta S_y \Delta S_z \geq N/4$, la limite quantique standard sur l'une des directions perpendiculaires au spin moyen est donc égale à $N/4$.

4. Les idées de V. B. Braginskii et Yu. I. Vorontsov eurent un brillant avenir puisqu'on retrouve leur influence jusqu'à aujourd'hui dans la spectaculaire première observation directe d'une onde gravitationnelle par la collaboration LIGO/VIRGO en 2015 [31], dont Braginskii fait d'ailleurs parti.

Chapitre 2

Collisions d'échange de métastabilité

Avant-propos

Dans ce chapitre, nous étudierons les équations décrivant les collisions d'échange de métastabilité dans les gaz d'hélium 3 et nous montrerons en particulier qu'elles peuvent transférer des corrélations quantiques de l'état métastable à l'état fondamental. Connues depuis les années 50, ces collisions viennent échanger l'état du nuage électronique entre les deux atomes et affectent profondément la dynamique des variables internes du gaz, ses différents moments de spin. Elles furent mises à profit pour la première fois en 1962 dans le cadre du pompage optique du spin nucléaire de l'hélium 3 mais une étude complète de l'évolution de la matrice densité à un corps et des observables du gaz ne fut développée qu'au début de la décennie 1970. Ces équations forment la base de la description quantique de notre système.

On commencera donc dans ce chapitre par un retour sur l'origine physique de ces collisions suivi d'une description des effets qu'elles ont sur les variables internes d'un gaz dans les conditions de notre étude. Ceci nous amènera à rappeler les équations pour l'évolution des moyennes des observables du système développées par J. Dupont-Roc, M. Leduc et F. Laloë en 1973 [24]. Ces équations concernent des valeurs moyennes des observables atomiques. Afin d'étudier l'effet de l'échange sur les corrélations quantiques, nous introduisons une description en termes d'équation pilote de la forme de Lindblad que nous serons amenés à utiliser dans les prochains chapitres. Enfin, nous clôturerons le chapitre en évoquant un modèle simplifié de l'atome d'hélium 3 fondamental et métastable, pour illustrer comment ces collisions peuvent transférer des corrélations quantiques. Les développements mathématiques nécessaires à cette illustration formeront une introduction à ceux que nous présenterons dans le chapitre 3.

2.1 Origines physiques des collisions d'échange de métastabilité

Parmi les collisions élastiques entre deux atomes d'une même espèce, le cas où l'un des deux atomes est initialement dans un état excité métastable a donné naissance à une riche littérature scientifique et ceci très tôt. On peut relier cette histoire à la présence de ce type de collision dans de nombreux phénomènes de transport d'énergie dans les flammes,

les explosions, ou encore la photochimie [32]. Ces cas de collisions peuvent être séparés en deux canaux : on peut parler de simple diffusion lorsque $X + X^* \rightarrow X + X^*$ et de collision d'échange ou de transfert pour le processus $X + X^* \rightarrow X^* + X$ où l'excitation électronique de l'un est transférée à l'autre. Pour une espèce donnée avec un état excité donné, ces processus d'échange s'avèrent rapidement compliqués à analyser. Pour obtenir des sections efficaces totales ou différentielles par exemple, il faut étudier le potentiel d'interaction du dimère $X - X^*$, l'hamiltonien à N-corps se caractérise alors par une multitude d'échelles d'énergie (Van der Walls, interaction fine et hyper-fine) et de distance (noyau 1 - noyau 2, nuage électronique 1 - noyau 1, nuage électronique 2 - noyau 1, etc). Parmi toutes les situations dans lesquelles de tels processus apparaissent, le cas de l'hélium se démarque par ses propriétés a priori uniques. En premier lieu le processus $He - He^* \rightarrow He^* - He$, que l'on appelle alors collision d'échange de métastabilité, joue un rôle important dans la dynamique d'un mélange fondamental/métastable et domine les processus de décohérence, même à température ambiante. La collision a d'importants effets sur les variables internes, puisque l'on peut considérer que l'état du nuage électronique est échangé au moment de la collision. Si l'on prend en compte l'interaction hyper-fine subséquente, alors le spin nucléaire du métastable est polarisé avec le spin électronique. Ainsi, le spin électronique du métastable avant la collision a été transféré au spin nucléaire de l'atome fondamental à la suite de la collision ! Il est possible d'observer ces collisions d'échange métastable dans le cas d'autres gaz nobles, comme le néon ou le xénon [33, 34], mais elles sont accompagnées d'autres canaux de collisions dépolarisantes qui les dominent¹. Ainsi, seul l'hélium semble disposer d'une dynamique fortement pilotée par les collisions d'échange. Il serait délicat d'y apporter une justification complète ici mais sa couche électronique complète qui protège des recombinaisons électroniques, même dans le cas où un électron est excité associé à la faible énergie de liaison du dimère d'hélium (de l'ordre de mK) ainsi qu'une distance internucléaire de l'ordre de 60Å [37] sont des propriétés atomiques qui semblent favoriser le processus d'échange [38].

Du point de vue théorique, certains aspects des collisions d'échange de métastabilité dans l'hélium se trouvent être relativement simples à analyser. Comme le relève J. Dupont-Roc dans sa thèse [27], il est possible de traiter de manière indépendante l'aspect énergétique de la collision, c'est-à-dire le calcul des sections efficaces et l'aspect interne, c'est-à-dire l'évolution des spins des atomes sous l'effet de la collision. Il est en effet possible d'obtenir les équations d'évolution des populations des sous-niveaux Zeeman et de la matrice densité sans jamais avoir à spécifier la forme du potentiel d'interaction mais seulement à partir des considérations de symétrie, de conservation et de règle de sélection au cours de la collision. Nous ne reproduisons pas ici ces développements mais ils peuvent être consultés dans la thèse que nous venons de citer [27] ainsi que dans la référence [24]. Dans la section suivante, nous présenterons les variables internes des atomes et les équations qui régissent l'évolution des variables collectives d'un mélange macroscopique d'atomes dans l'état fondamental et métastable.

1. Citons aussi la référence [35], où l'on tente de polariser le spin nucléaire d'un xénon-129 via l'état métastable comme pour les l'hélium, sans succès. Les auteurs évoquent de possible canaux de décohérence supplémentaire pour les atomes de l'état fondamental. Une polarisation nucléaire d'un gaz de xénon-131 fut néanmoins réalisé via les collisions d'échange métastables en 1967 [36], mais au sein d'un faisceau d'électrons.

2.2 Équations d'évolution des observables

Dans cette section, nous considérons dorénavant un gaz d'hélium 3 et ses observables collectives. On se place dans une situation similaire à celle du schéma de la figure 1.1(a) en ce qui concerne la cellule et les atomes, en mettant de côté toute référence à la cavité optique et à la lumière : dans la cellule, le gaz se trouve à température ambiante et à une pression de quelques mbar. Il y a N_{cell} atomes dans leur état fondamental auxquels on fait subir une décharge électrique de faible intensité qui amène une petite fraction des atomes dans l'état métastable 2^3S_1 (et dont la durée de vie est finie car l'atome se désexcite par collision avec les parois de la cellule). La décharge est maintenue de manière continue durant l'expérience, ce qui nous permet de considérer le nombre de métastables n_{cell} fixés. Les collisions d'échange de métastabilité sont alors les seuls processus affectant les variables atomiques. Dans la suite de cette section, après avoir défini ces variables, on discute de leur évolution au cours d'une collision puis leur évolution au niveau macroscopique, au moyen de matrices densité d'abord puis de moyennes collectives.

Définitions des observables L'état fondamental de l'hélium 3 est de configuration 1^1S_0 . Dans cette configuration, un atome dispose d'un spin nucléaire de nombre quantique $I = 1/2$ alors que le spin du nuage électronique est nul, on note \vec{I}_f^{at} le spin nucléaire d'un atome initialement dans un tel état. Dans l'état métastable, la configuration de spin est 2^3S_1 . Outre le spin nucléaire que l'on note \vec{I}_m^{at} , l'atome dispose alors d'un spin électronique de nombre quantique $S = 1$ que l'on note $\vec{\Sigma}_m^{at}$. On note aussi \vec{J}_m^{at} et \vec{K}_m^{at} les spins associés aux multiplicités hyperfines $F = 3/2$ et $F = 1/2$ de $\vec{I}_m^{at} + \vec{\Sigma}_m^{at}$, le spin total d'un atome dans l'état métastable. Il ne faut pas oublier \vec{Q}_m^{at} le tenseur d'alignement dans $F = 3/2$, de composantes cartésiennes $Q_{\alpha\beta}^{(at)}$. On peut écrire les éléments du tenseur d'alignement comme

$$Q_{\alpha\beta}^{(at)} = \frac{1}{6} \left[3 \frac{\Sigma_{\alpha}^{(at)} \Sigma_{\beta}^{(at)} + \Sigma_{\beta}^{(at)} \Sigma_{\alpha}^{(at)}}{2} - S(S+1) \delta_{\alpha\beta} \right] \quad (2.1)$$

avec $\alpha, \beta = x, y, z$ et $\delta_{\alpha\beta}$ le symbole de Kroenecker non-nul et égal à 1 uniquement pour $\alpha = \beta$. Enfin, ces deux configurations ont un moment cinétique orbital nul. On peut définir les variables collectives à un corps comme la somme directe de l'opérateur de cette variable, sur tous les atomes d'une population. Ainsi, on note $\vec{I} = \sum_{i=1}^{N_{\text{cell}}} \vec{I}_f^{at}(i)$ le spin nucléaire collectif des atomes dans l'état fondamental, où i court de 1 à N_{cell} et désigne l'atome i dans l'état fondamental. Nous pouvons faire de même pour $\vec{\Sigma}_m = \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} \vec{\Sigma}_m^{at}(j)$, $\vec{J} = \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} \vec{J}_m^{at}(j)$, $\vec{K} = \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} \vec{K}_m^{at}(j)$ et $\vec{Q} = \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} \vec{Q}_m^{at}(j)$ où cette fois la somme court de 1 à n_{cell} et désigne un atome dans l'état métastable.

2.2.1 Les observables lors de la collision

Lors d'une collision d'échange de métastabilité, aucune interaction magnétique ne joue de rôle dans la collision : en effet, les interactions spin-orbite sont toutes nulles car les deux atomes sont dans une configuration s . Quant aux couplages spin-spin hyperfins, la vitesse des atomes à température ambiante les rend inaptes à affecter les spins car les atomes ne restent à proximité l'un de l'autre que durant un temps extrêmement court (de l'ordre de

	Fondamental	Métastable
Avant	$\rho_f^{(1)}$	$\rho_m^{(1)}$
Après	$\text{Tr}_e \rho_m^{(1)}$	$\rho_f^{(1)} \otimes \text{Tr}_n \rho_m^{(1)}$

TABLE 2.1 – $\rho_f^{(1)}$ représente la matrice densité d'un atome dans l'état fondamental, $\rho_m^{(1)}$ celle d'un atome dans l'état métastable et Tr_n , Tr_e les opérations de traces sur les variables nucléaires et électroniques respectivement.

quelques centaines de femtosecondes). L'interaction électrostatique dominant le potentiel d'interaction, on en conclut que les opérateurs de spin commutent avec l'hamiltonien, établissant une conservation des différents moments magnétiques au cours de la collision. Ainsi, le spin électronique est transféré sans altération, en même temps que le nuage électronique lors de la collision d'échange de métastabilité. On comprend bien comment ces échanges de métastabilité permettent le transfert d'une polarisation de spin : une fois la population de métastable créée par décharge électrique dans le gaz puis orientée par pompage optique sur la transition $2^3S - 2^3P$, l'orientation est partagée entre le spin électronique et nucléaire des atomes métastables. Lorsqu'un atome métastable polarisé de cette façon subit une collision d'échange avec un atome dans l'état fondamental, les nuages électroniques sont comme échangés entre les noyaux. Le noyau qui appartenait à la population métastable et dont le spin est polarisé ne dispose plus de spin électronique et participe maintenant au spin collectif de l'état fondamental. Dans les travaux présentés dans l'article de J. Dupont-Roc, M. Leduc et F. Laloë de 1973 [24] ainsi que dans la thèse de J. Dupont-Roc [27], les équations d'évolution des observables sont reconstruites sans aucun calcul de section efficace, simplement par une étude précautionneuse des éléments utiles de la matrice de diffusion de la collision à partir des remarques physiques et de symétrie que nous venons de présenter. Nous nous contenterons ici de rappeler ces équations sans rentrer dans le détail de leur construction.

2.2.2 Évolution des observables macroscopiques du gaz

Description en termes de matrice densité Notons $\rho_f^{(1)}$ la matrice densité d'un atome dans l'état fondamental, $\rho_m^{(1)}$ celle d'un atome dans l'état métastable et Tr_n , Tr_e les opérations de traces sur les variables nucléaires et électroniques respectivement, nous notons par ailleurs $\text{Tr} = \text{Tr}_n \text{Tr}_e = \text{Tr}_e \text{Tr}_n$ la trace complète. On pose $\text{Tr} \rho_m^{(1)} = 1$ et $\text{Tr} \rho_f^{(1)} = 1$. Dès lors nous pouvons représenter la collision à partir de ces matrices : c'est ce que le tableau 2.1 présente. On considérera par ailleurs qu'il n'y a pas de cohérences entre l'état métastable et fondamental avant ou après la collision.² On note ρ_f et ρ_m les opérateurs densité à un corps

2. Remarquons la conservation du spin total des deux atomes par ces règles de collision : En effet, en notant I_z , S_z , les spins d'un noyau et du nuage électronique respectivement et $\Sigma_{\text{totale},z}$ ce spin total dans la direction z par exemple. Nous avons

$$\langle \Sigma_{\text{totale},z}(\text{avant la collision}) \rangle = \text{Tr}_n \left[\rho_f^{(1)} I_z \right] + \text{Tr} \left[\rho_m^{(1)} (I_z + S_z) \right] \quad (2.2)$$

pour les atomes dans l'état fondamental et métastable respectivement³. Pour des atomes indépendants, nous pouvons écrire

$$\rho_f = \sum_{i=1}^{N_{\text{cell}}} \rho_f^{(1)}(i) \quad \text{et} \quad \rho_m = \sum_{j=1}^{n_{\text{cell}}} \rho_m^{(1)}(j) \quad (2.6)$$

avec $\rho_f^{(1)}(i), \rho_m^{(1)}(j)$ les matrices densité de l'atome numéro i et j respectivement. Par définition, $\text{Tr} \rho_f = N_{\text{cell}}$ et $\text{Tr} \rho_m = n_{\text{cell}}$. On introduit la quantité $\frac{dt}{T}$ qui représente la fraction des atomes de l'état fondamental subissant une collision d'échange de métastabilité durant un intervalle de temps dt . T^{-1} est donc un taux de collisions d'échange de métastabilité pour un atome de l'état fondamental. De même, nous pouvons définir le rapport $\frac{dt}{\tau}$ représentant la fraction d'atomes métastables subissant une collision d'échange dans un laps de temps dt , avec τ^{-1} un taux d'échange des métastables. Puisqu'un nombre égal d'atomes fondamentaux et d'atomes métastables ont subi une collision d'échange, nous pouvons écrire :

$$\frac{N_{\text{cell}}}{T} = \frac{n_{\text{cell}}}{\tau} \quad (2.7)$$

Ainsi le rapport des taux d'échange est égal au rapport des populations $\frac{\tau}{T} = \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}}$. À partir de ces taux et de la table 2.1, et en ne considérant que les collisions d'échange de métastabilité, on peut écrire des équations d'évolution pour les matrices densité à un corps préalablement définies :

$$d\rho_f = -\frac{dt}{T}\rho_f + \frac{dt}{\tau}\text{Tr}_e \rho_m \quad (2.8)$$

$$d\rho_m = -\frac{dt}{\tau}\rho_m + \frac{dt}{T}\rho_f \otimes \text{Tr}_n \rho_m \quad (2.9)$$

De ces équations d'évolution, il est possible d'obtenir celles des moyennes des observables à un corps du gaz. On définit la moyenne de l'opérateur à un corps $\hat{O} = \sum_{i=1}^N O_i$, par $\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{O}\sigma)$ en remplaçant σ par ρ_f ou ρ_m en fonction de la nature nucléaire ou métastable de l'observable. Pour son évolution, il suffit de considérer la trace de l'une ou l'autre des équations d'évolution des matrices densité (2.8) et (2.9) multipliées par l'observable $\frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr}(O \frac{d\sigma}{dt})$. Enfin, remarquons que $\langle \hat{O} \rangle = \mathcal{N}\langle O \rangle_{\text{at}}$.

et rappelons que l'état initial de l'atome métastable $\rho_m^{(1)}$ court sur les variables nucléaires et électroniques. Après la collision, nous pouvons écrire

$$\langle \Sigma_{\text{totale},z}(\text{après la collision}) \rangle = \text{Tr}_n [\text{Tr}_e \rho_m^{(1)} I_z] + \text{Tr} [(\rho_f^{(1)} \otimes \text{Tr}_n \rho_m^{(1)})(I_z + S_z)] \quad (2.3)$$

$$= \text{Tr} [\rho_m^{(1)} I_z] + \text{Tr}_n [\rho_f^{(1)} (I_z + S_z)] + \text{Tr}_e [(\text{Tr}_n \rho_m^{(1)})(I_z + S_z)] \quad (2.4)$$

$$= \text{Tr} [\rho_m^{(1)} I_z] + \text{Tr}_n [\rho_f^{(1)} I_z] + \text{Tr} [\rho_m^{(1)} (I_z + S_z)] \quad (2.5)$$

où l'on a utilisé $\text{Tr}_n [\rho_f^{(1)} S_z] = 0$ et $\text{Tr}_e [(\text{Tr}_n \rho_m^{(1)})(I_z + S_z)] = \text{Tr} [\rho_m^{(1)} (I_z + S_z)]$. On retrouve alors (2.2) et ainsi $\langle \Sigma_{\text{totale},z}(\text{après la collision}) \rangle = \langle \Sigma_{\text{totale},z}(\text{avant la collision}) \rangle$.

3. La matrice densité à un corps décrivant le gaz d'hélium est alors de la forme $\begin{pmatrix} \rho_m & 0 \\ 0 & \rho_f \end{pmatrix}$ avec ρ_m une matrice de taille 6×6 et ρ_f de taille 2×2

Évolution des variables internes Dès lors, la contribution des collisions d'échange de métastabilité (ECH) entre atomes fondamentaux et métastables se déduit directement de l'équation pilote sur l'opérateur densité à un atome des références [24, 27] par simple multiplication ou division par le nombre total de fondamentaux N_{cell} ou métastables n_{cell} dans la cellule :

$$\left. \frac{d\langle \vec{K} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{7}{9\tau} \langle \vec{K} \rangle + \frac{1}{9\tau} \langle \vec{J} \rangle - \frac{1}{9\tau} \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{I} \rangle - \frac{4}{3\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{Q} \rangle \cdot \langle \vec{I} \rangle \quad (2.10)$$

$$\left. \frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{4}{9\tau} \langle \vec{J} \rangle + \frac{10}{9\tau} \langle \vec{K} \rangle + \frac{10}{9\tau} \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{I} \rangle + \frac{4}{3\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \langle \vec{Q} \rangle \cdot \langle \vec{I} \rangle \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{2}{3\tau} \langle Q_{\alpha\beta} \rangle + \frac{1}{9\tau} \frac{1}{N_{\text{cell}}} \left(3 \frac{\langle I_\alpha \rangle \langle \Sigma_\beta \rangle + \langle I_\beta \rangle \langle \Sigma_\alpha \rangle}{2} - \delta_{\alpha\beta} \langle \vec{I} \rangle \cdot \langle \vec{\Sigma} \rangle \right) \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} = -\frac{1}{T} \langle \vec{I} \rangle + \frac{1}{3T} \frac{N_{\text{cell}}}{n_{\text{cell}}} (\langle \vec{J} \rangle - \langle \vec{K} \rangle) \quad (2.13)$$

où $\langle \vec{\Sigma} \rangle = \frac{2}{3} [\langle \vec{J} \rangle + 2\langle \vec{K} \rangle]$ est la valeur moyenne du spin électronique dans l'état métastable. On se reportera aux équations (1.37b), (1.37a), (1.39) et (1.25) de la référence [24] (en tenant compte d'un écart d'un facteur 6 sur la définition du tenseur d'alignement), ou aux équations (VIII.30), (VIII.29), (VIII.32) et (VIII.15) de la référence [27] [en ajoutant un facteur de Kronecker $\delta_{\alpha\beta}$ omis dans (VIII.32)]. Il est à noter que cette description néglige les corrélations hyperfines entre les niveaux hyperfins $F = 3/2$ et $F = 1/2$ de l'état métastable. De manière générale, les collisions créent de telles cohérences via le terme $\rho_f \otimes \text{Tr}_n \rho_m$ dans (2.9) mais celles-ci évoluent avec une fréquence propre très grande (de l'ordre du GHz) par rapport au taux d'évolution $1/\tau$ (plusieurs MHz) ce qui permet de découpler l'évolution des cohérences et des populations hyperfines et d'ignorer les premières (voir la partie D du chapitre VII de [27]).

2.3 Étude du modèle simplifié à 2 spins 1/2

Pour illustrer l'effet des collisions d'échange de métastabilité sur les variables collectives du gaz, considérons un cas simplifié où l'état fondamental se caractérise par un spin nucléaire $I = 1/2$ et l'état métastable par un spin électronique $K = 1/2$. Ce modèle simple révélera son intérêt physique lorsque nous éliminerons adiabatiquement les fluctuations du spin \vec{J} ainsi que du tenseur d'alignement \vec{Q} dans le chapitre 3. D'autant plus que les approches mathématiques utilisées sont les mêmes. Pour faciliter la comparaison avec les discussions de ce chapitre 3, nous notons N et n les nombres d'atomes dans l'état fondamental et métastable respectivement, $N = N_{\text{cell}}$, $n = n_{\text{cell}}$ et $\gamma_f = 1/T$, $\gamma_m = 1/\tau$ les taux de collisions. Nous avons toujours la relation $\frac{\gamma_f}{\gamma_m} = \frac{n}{N}$ entre les taux et les populations. Dans le chapitre 3, ces quantités correspondront aux nombres effectifs dans le cas où les spins ne sont pas complètement polarisés initialement. En ce qui concerne le reste de cette section, elles ne représentent qu'un changement de notation.

2.3.1 Définitions et équations pour les fluctuations quantiques

Dans le cas de $I = \frac{1}{2}$ et $K = \frac{1}{2}$ la collision d'échange a le seul effet d'échanger les deux spins et il est possible de se convaincre que les moyennes collectives dans une direction $\alpha = x, y, z$ se réduisent à

$$\frac{d}{dt}\langle K_\alpha \rangle = -\gamma_m \langle K_\alpha \rangle + \gamma_f \langle I_\alpha \rangle \quad (2.14)$$

$$\frac{d}{dt}\langle I_\alpha \rangle = -\gamma_f \langle I_\alpha \rangle + \gamma_m \langle K_\alpha \rangle \quad (2.15)$$

Considérons une solution stationnaire de ce système d'équations :

$$\langle K_x \rangle_s = \frac{n}{2}, \quad \langle I_x \rangle_s = \frac{N}{2}, \quad \langle K_{y,z} \rangle_s = \langle I_{y,z} \rangle_s = 0 \quad (2.16)$$

Cette solution correspond à un gaz parfaitement polarisé selon l'axe Ox , aussi bien les atomes fondamentaux que métastables. On introduit les opérateurs de fluctuations quantiques $\delta K_\alpha = K_\alpha - \langle K_\alpha \rangle_s$ et $\delta I_\alpha = I_\alpha - \langle I_\alpha \rangle_s$ pour une composante du spin α orthogonale à la direction de polarisation.⁴ Ces fluctuations obéissent aux équations de Langevin linéarisées autour de l'état stationnaire. Par exemple Oy , on a

$$\frac{d}{dt}\delta K_y = -\gamma_m \delta K_y + \gamma_f \delta I_y + f_{K_y} \quad (2.17)$$

$$\frac{d}{dt}\delta I_y = -\gamma_f \delta I_y + \gamma_m \delta K_y + f_{I_y} \quad (2.18)$$

Les opérateurs f_{K_y} et f_{I_y} , forces de Langevin, sont de moyenne nulle et ont une variance déduite pour reproduire correctement les variances des spins à l'état stationnaire pour un ensemble d'atomes indépendants. Si l'on note x_i, x_j deux opérateurs de fluctuations (de moyennes nulles donc) avec comme équation d'évolution :

$$\frac{dx_i}{dt} = \mathcal{E}_{x_i} + f_i \quad (2.19)$$

où \mathcal{E}_{x_i} est un opérateur « déterministe » d'évolution et f_i une force de Langevin, alors on peut calculer la moyenne d'un second moment par la relation :

$$\frac{d}{dt}\langle x_i x_j \rangle = \langle x_i \mathcal{E}_{x_j} \rangle + \langle \mathcal{E}_{x_i} x_j \rangle + D_{ij} \quad (2.20)$$

avec $D_{ij} = \langle f_i f_j \rangle$ un élément de la matrice de diffusion que l'on calcule dans l'état stationnaire polarisé (2.16) avec la formule

$$D_{ij} = -\langle x_i \mathcal{E}_{x_j} \rangle_s - \langle \mathcal{E}_{x_i} x_j \rangle_s \quad (2.21)$$

En ce qui concerne les éléments de la matrice de diffusion définie par les équations (2.17)-(2.18) :

$$D_{K_\alpha, K_\alpha} = D_{I_\alpha, I_\alpha} = -D_{K_\alpha, I_\alpha} = -D_{I_\alpha, K_\alpha} = \frac{1}{2}\gamma_m n = \frac{1}{2}\gamma_f N \quad (2.22)$$

avec $\alpha = y, z$ et où tous les autres éléments sont nuls.

4. Par définition, $\langle \delta K_\alpha \rangle_s = 0$ et $\langle \delta K_\alpha^2 \rangle = \text{Var}_s K_\alpha$ et de même pour δI_α

2.3.2 Dynamique des corrélations quantiques

A partir des équations (2.17)-(2.18) on peut décrire le transfert de corrélations quantiques entre l'état fondamental et l'état métastable. En effet, elles permettent d'obtenir un système fermé d'équations pour les variances des fluctuations des spins :

$$\frac{d}{dt}\langle\delta K_y^2\rangle = -2\gamma_m\langle\delta K_y^2\rangle + \gamma_f\langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle + \frac{n\gamma_m}{2} \quad (2.23)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\delta I_y^2\rangle = -2\gamma_f\langle\delta I_y^2\rangle + \gamma_m\langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle + \frac{n\gamma_m}{2} \quad (2.24)$$

$$\frac{d}{dt}\langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle = -(\gamma_m + \gamma_f)\langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle + 2\gamma_m\langle\delta K_y^2\rangle + 2\gamma_f\langle\delta I_y^2\rangle - n\gamma_m \quad (2.25)$$

Système que l'on peut résoudre sans difficulté pour n'importe quel état initial. Prenons le cas d'un état initial où le spin nucléaire est complètement polarisé dans la direction Ox et le spin métastable polarisé dans cette même direction mais comprimé dans la direction Oy :

$$\langle\delta K_y^2\rangle(0) = \frac{n}{4}e^{-2r} \quad (2.26)$$

$$\langle\delta I_y^2\rangle(0) = \frac{N}{4} \quad (2.27)$$

$$\langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle(0) = 0 \quad (2.28)$$

avec r un paramètre positif. En intégrant les équations différentielles (2.23)-(2.25) on obtient

$$\begin{pmatrix} \langle\delta K_y^2\rangle \\ \langle\delta I_y^2\rangle \\ \langle\{\delta K_y, \delta I_y\}\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n}{4} \left[1 - \frac{\gamma_f^2}{\gamma_m^2} C \right] \\ \frac{N}{4} \left[1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_m} C \right] \\ -\frac{n}{2} \frac{\gamma_f}{\gamma_m} C \end{pmatrix} - \frac{n}{2} C e^{-(\gamma_m + \gamma_f)t} \begin{pmatrix} \gamma_f/\gamma_m \\ -1 \\ 1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_m} \end{pmatrix} - \frac{n}{4} C e^{-2(\gamma_m + \gamma_f)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

avec $C = \frac{1-e^{-2r}}{1+(\frac{\gamma_f}{\gamma_m})^2}$. Dans la limite d'un temps long, ce système admet un état stationnaire (que l'on atteint après un temps d'ordre $(\gamma_m + \gamma_f)^{-1}$) :

$$\Delta K_y^2 = \frac{n}{4} \left[1 - \left(\frac{\gamma_f}{\gamma_m} \right)^2 \frac{1 - e^{-2r}}{1 + (\frac{\gamma_f}{\gamma_m})^2} \right] \quad (2.30)$$

$$\Delta I_y^2 = \frac{N}{4} \left[1 - \frac{\gamma_f}{\gamma_m} \frac{1 - e^{-2r}}{1 + (\frac{\gamma_f}{\gamma_m})^2} \right]. \quad (2.31)$$

Nous pouvons remarquer que la compression initiale du spin métastable paramétrée par r s'est en partie transférée au spin nucléaire car le terme $\frac{\gamma_f}{\gamma_m} \frac{1-e^{-2r}}{1+(\gamma_f/\gamma_m)^2}$ est supérieur à 0 et donc $\Delta I_y^2 < \frac{N}{4}$. Ce transfert est fixé par le rapport des populations $\gamma_f/\gamma_m = n/N \sim 10^{-6}$. Introduisons les fonctions de corrélation à deux corps C_J et C_I dans le niveau métastable et le niveau fondamental :

$$C_J \equiv \sum_{l \neq k} \langle K_y^{at}(l) K_y^{at}(k) \rangle = \frac{1}{4(n-1)} \left(\frac{\Delta K_y^2}{n/4} - 1 \right) \quad (2.32)$$

$$C_I \equiv \sum_{l \neq k} \langle I_y^{at}(l) I_y^{at}(k) \rangle = \frac{1}{4(N-1)} \left(\frac{\Delta I_y^2}{N/4} - 1 \right) \quad (2.33)$$

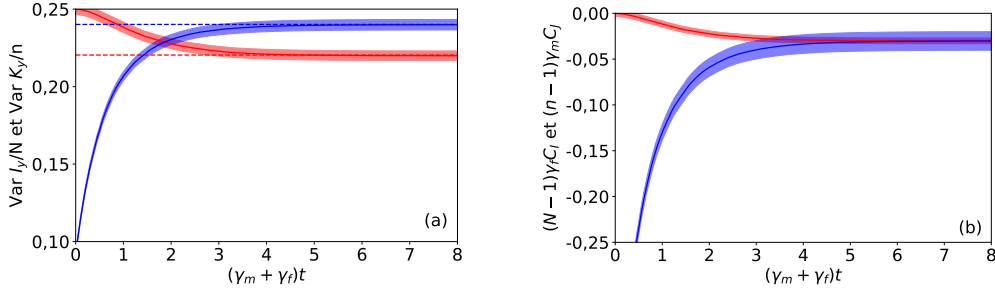


FIGURE 2.1 – Quantité issue d’une simulation Monte-Carlo de deux spins collectifs, métastable et fondamental, couplés par les collisions d’échange de métastabilité. Les moyennes ont été faites sur 10 000 trajectoires Monte-Carlo. $\gamma_f/\gamma_m = 1/3$. Initialement, les deux spins sont polarisés dans la direction Ox , le spin nucléaire (en rouge) est dans un état cohérent tandis que le spin métastable (en bleu) est comprimé dans la direction Oy telle que l’équation (2.26) le définit avec $r = 1/2$. Une zone pleine représente l’incertitude sur la moyenne Monte-Carlo. (a) En ligne continue, la variance des composantes Oy de chacun des spins normalisée par leur population respective. Les pointillés indiquent la limite au temps long. (b) Fonctions de corrélation à deux corps (à un facteur près) définies par les équations (2.32)-(2.33). La ligne rouge représente $(N - 1)\gamma_f C_I$ et la bleue $(n - 1)\gamma_m C_J$. Rappelons que $n\gamma_m = N\gamma_f$ et que cette quantité représente le nombre de collisions d’échange de métastabilité par unité de temps.

où l’on somme sur tous les atomes. Nous retrouvons une propriété connue des collisions d’échange de métastabilité [10] qui tendent à égaliser les fonctions de corrélation C_J et C_I . En effet, en partant de (2.30) et (2.31)

$$1 - \frac{\Delta K_y^2}{n/4} = \left(\frac{\gamma_f}{\gamma_m}\right)^2 \frac{1 - e^{-2r}}{1 + (\frac{\gamma_f}{\gamma_m})^2} \underset{\gamma_f \ll \gamma_m}{\approx} (1 - e^{-2r}) \left(\frac{\gamma_f}{\gamma_m}\right)^2 \quad (2.34)$$

$$1 - \frac{\Delta I_y^2}{N/4} = \frac{\gamma_f}{\gamma_m} \frac{1 - e^{-2r}}{1 + (\frac{\gamma_f}{\gamma_m})^2} \underset{\gamma_f \ll \gamma_m}{\approx} (1 - e^{-2r}) \frac{\gamma_f}{\gamma_m}. \quad (2.35)$$

Ainsi

$$1 - \frac{\Delta K_y^2}{n/4} = \frac{\gamma_f}{\gamma_m} \left(1 - \frac{\Delta I_y^2}{N/4}\right) \quad (2.36)$$

$$C_J \frac{n-1}{n} = C_I \frac{N-1}{N} \quad \longrightarrow \quad C_J \simeq C_I. \quad (2.37)$$

Cette égalisation des fonctions de corrélation confirme qu’elles ne se réduisent pas à un échange « incohérent » des polarisations par transfert des excitations dans la population fondamentale, elles transfèrent aussi des corrélations quantiques entre les atomes du gaz. Comme illustration, nous montrons sur la figure 2.1 les fonctions de corrélation ainsi que les variances sur la direction Oy de deux spins collectifs dont l’un est initialement comprimé dans cette direction (paramètre r non-nul). Nous avons pris $\frac{\gamma_f}{\gamma_m} = \frac{1}{3}$ et $r = 0.5$.⁵ Sur ces

5. Paramètres tout à fait déconnectés des véritables expériences. En particulier, ces paramètres impliquent qu’un tiers des atomes du gaz soient dans l’état métastable. Mais il existe une limite supérieure à la fraction de

illustrations, la convergence des fonctions de corrélation sous l'effet des collisions est bien visible ainsi que la partition des variances entre les deux spins au cours du temps.

Concluons cette discussion du transfert des corrélations par une ultime remarque : bien que l'équation (2.35) indique que la compression du spin nucléaire est non nulle dans l'état asymptotique, nous pouvons constater la présence d'un facteur $\frac{\gamma_f}{\gamma_m}$ par rapport à la compression normalisée initialement présente dans le métastable ($1 - e^{-2r}$). Or ce facteur est très petit en pratique, de l'ordre de 10^{-6} . Ainsi les spins nucléaire et métastable [ce dernier ayant un facteur $\frac{\gamma_f}{\gamma_m}$ supplémentaire dans (2.34)] ne sont que faiblement comprimés. Ceci vient du fait que même en comprimant très fortement la population métastable initialement, les excitations transférées ne représentent qu'une petite fraction des atomes de la population fondamentale. Pour créer une compression notable du spin nucléaire, il nous faut alors continuellement apporter des corrélations dans le système. C'est pourquoi nous considérons une mesure quantique non destructive *en continu* comme source de corrélation. Dès lors, le facteur $\frac{\gamma_f}{\gamma_m}$ interviendra dans le temps caractéristique de compression et non plus dans le niveau de compression asymptotique, comme nous le verrons.

2.3.3 Équation pilote pour les échanges de métastabilité

Pour conclure ce chapitre, nous introduisons une description par équation pilote de l'évolution par collisions d'échange de métastabilité. Cette description se révélera fort utile dans les chapitres suivants. Sous l'hypothèse que les collisions d'échange de métastabilité se produisent indépendamment pour chaque atome dans le gaz, à la façon dont on décrirait par exemple des collisions déphasantes, leur contribution à l'évolution de l'opérateur de densité ρ décrivant les degrés de liberté de spin dans le gaz peut être décrite par une équation pilote de Lindblad :

$$\frac{d}{dt}\rho = \sum_i^{n_{\text{cell}}+N_{\text{cell}}} C_i \rho C_i^\dagger - \frac{1}{2}(C_i^\dagger C_i \rho + \rho C_i^\dagger C_i) \quad (2.38)$$

où $n_{\text{cell}} + N_{\text{cell}}$ est le nombre total d'atomes, et C_i un opérateur de saut agissant uniquement sur l'atome i :

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{T}} \mathbb{1}_f \\ \sqrt{\frac{1}{\tau}} \mathbb{1}_m & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

où $\mathbb{1}_f$ et $\mathbb{1}_m$ désignent les matrices identités dans les sous-espaces décrivant un atome dans l'état fondamental et dans l'état métastable, respectivement. A titre d'exemple, donnons quelques indications qui permettent de retrouver les équations (2.14)-(2.15) dans le cas du modèle simple $I = \frac{1}{2}$ et $K = \frac{1}{2}$, à partir de (2.38). On cherche, pour un observable à un corps $\hat{O} = \sum_i^{\mathcal{N}} O_i$ avec $\mathcal{N} = n + N$ et O_i un opérateur n'agissant que sur l'atome i , l'équation d'évolution de sa moyenne $\frac{d}{dt}\langle \hat{O} \rangle = \text{Tr} \left[\hat{O} \frac{d\rho}{dt} \right] = \text{Tr} \left[\sum_i C_i^\dagger \hat{O} C_i \rho - \frac{1}{2}(C_i^\dagger C_i \hat{O} + \hat{O} C_i^\dagger C_i) \rho \right]$ avec C_i un opérateur de la forme (2.39) agissant uniquement sur l'atome i . On prendra comme exemple l'opérateur de spin métastable dans la direction Oy , $K_y = \sum_i^{\mathcal{N}} K_y^{at}(i)$ avec $K_y^{at}(i) = \frac{i}{2} (|m; +\rangle \langle m; -| - |m; -\rangle \langle m; +|)$ et $|m; +\rangle, |m; -\rangle$ les deux états composant le spin

métastable qui peut exister dans le gaz. Au-delà d'une certaine densité de métastable, les collisions $He^* + He^*$, dites de Penning, ionisent les atomes et détruisent la population de métastable [39].

métastable 1/2, à ne pas confondre avec $|f; +\rangle, |f; -\rangle$ du spin nucléaire 1/2. Notons que deux opérateurs agissant sur deux atomes différents commutent. Dès lors, nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\langle K_y \rangle = \text{Tr} \left[\sum_i C_i^\dagger K_y^{at}(i) C_i \rho - \frac{1}{2} (C_i^\dagger C_i K_y^{at}(i) + K_y^{at}(i) C_i^\dagger C_i) \rho \right]. \quad (2.40)$$

Ainsi chaque terme de la somme ne porte que sur un unique atome, ce qui permet d'écrire

$$\frac{d}{dt}\langle K_y \rangle = \text{Tr}_1 \left[C_1^\dagger K_y^{at}(1) C_1 \rho^{(1)} - \frac{1}{2} (C_1^\dagger C_1 K_y^{at}(1) + K_y^{at}(1) C_1^\dagger C_1) \rho^{(1)} \right] \quad (2.41)$$

avec Tr_1 la trace sur les états de l'atome 1 et $\rho^{(1)} = \mathcal{N} \text{Tr}_{2,3,4,\dots,\mathcal{N}} \rho$. À partir d'une expression de C_1 dans la base $\{|m; +\rangle, |m; -\rangle, |f; +\rangle, |f; -\rangle\}$, il ne reste plus qu'à calculer les produits de matrices $C_1^\dagger K_y^{at}(1) C_1$, $C_1^\dagger C_1 K_y^{at}(1)$ et $K_y^{at}(1) C_1^\dagger C_1$ puis reconnaître les expressions de $K_y^{at}(1)$ et $I_y^{at}(1) = \frac{i}{2} (|f; +\rangle\langle f; -| - |f; -\rangle\langle f; +|)$. On retombe alors sur (2.14) pour $\alpha = y$.

Chapitre 3

Modèle à trois spins couplés

Avant-propos

Dans ce chapitre, nous décrivons les équations du système complet de la cellule et de la cavité. Il s'agira de mettre en place une description quantique du système adaptée à notre problème à partir de laquelle nous pourrions explorer la dynamique lorsque soumise à une mesure quantique non-destructive en continu. Ces mesures ne seront pas abordées dans ce chapitre, car les chapitres 4 et 5 leur sont consacrés. Nous avons d'une part les atomes, le couplage entre les atomes dans l'état fondamental et ceux métastables, et de l'autre la lumière dans la cavité optique et son couplage avec le métastable. Pour décrire ces différents éléments, ce chapitre s'ouvre sur une approche semi-classique, c'est-à-dire qui ignore les fluctuations quantiques, où l'on dérive les équations d'évolution seulement pour les moyennes des observables. Aux équations de la section 2.2.2 du chapitre 2 qui décrivent d'une telle manière les collisions d'échange de métastabilité, il nous faudra ajouter les observables macroscopiques décrivant la lumière (un spin de Stokes) et son couplage avec les observables de spin métastable. Après avoir décrit l'état stationnaire de ces équations dans lequel nous plaçons initialement le système, qui correspond à un état où chacun des spins est polarisé dans une même direction, nous décrivons dans la section suivante l'évolution des opérateurs de fluctuations quantiques autour de cet état stationnaire. Ces opérateurs de fluctuations ne sont que les opérateurs de spins dans les directions perpendiculaires à la polarisation. Mais cette description nous permet d'éliminer adiabatiquement les opérateurs du spin métastable liés à la multiplicité $F = 3/2$ du spin total métastable, à savoir le spin \vec{J} et le tenseur d'alignement \vec{Q} . On tombe alors sur une description du système réduite à trois spins couplés. Dans la section qui clôt le chapitre, on introduit le modèle que l'on considérera durant le reste de cette partie. Ce modèle est celui de trois modes bosoniques couplés, directement issu du modèle à trois spins, où chacun des modes est relié à un des trois spins. Cette transformation se fait par l'approximation dite de Holstein-Primakoff. Pour un spin très grand et polarisé, celle-ci permet de décrire les opérateurs de spin perpendiculaire à la direction de polarisation comme des modes bosoniques, par l'intermédiaire d'une normalisation des opérateurs. Suite à quoi, la section se conclut par une équation pilote à trois modes, où la partie hamiltonienne correspond au couplage lumière-métastable et les opérateurs de saut aux collisions d'échange de métastabilité réécrits dans le cadre de cette approximation de Primakoff.

3.1 Description semi-classique de l'évolution du système

Rappelons les notations pour les observables déjà introduites dans la section 2.2 : \vec{I} le spin nucléaire collectif dans l'état fondamental, \vec{J} et \vec{K} les spins collectifs associés aux multiplicités hyperfines $F = 3/2$ et $F = 1/2$ dans l'état métastable et \vec{Q} le tenseur d'alignement collectif dans $F = 3/2$. Pour la lumière se propageant selon Oz , nous introduisons le spin de Stokes [26] construit à partir des opérateurs de création et d'annihilation d'un photon dans les modes de cavité polarisés linéairement selon Ox et Oy ¹ :

$$S_x = \frac{1}{2} (c_x^\dagger c_x - c_y^\dagger c_y), \quad S_y = \frac{1}{2} (c_x^\dagger c_y + c_y^\dagger c_x), \quad S_z = \frac{1}{2i} (c_x^\dagger c_y - c_y^\dagger c_x). \quad (3.1)$$

Nous supposons pour simplifier que la cellule est éclairée uniformément par le mode de cavité. Dans la limite d'un grand désaccord et d'une faible saturation de la transition atomique par le champ, l'état excité 2^3P peut être éliminé adiabatiquement et l'interaction hamiltonienne entre le spin du métastable \vec{K} et le spin de Stokes \vec{S} prend la forme de Faraday [26] :

$$H = \hbar\chi K_z S_z \quad (3.2)$$

qui n'est autre que l'opérateur de déplacement lumineux des sous-niveaux Zeeman dans le niveau métastable $F = 1/2$, comme on le voit bien sur la forme de S_z dans la note 1.

3.1.1 Équations semi-classiques non linéaires

Nous décrivons dans cette sous-section les équations non-linéaires couplées qui régissent l'évolution des spins moyens. Outre l'évolution due à l'hamiltonien de Faraday (3.2) et aux collisions d'échange de métastabilité, il nous faut inclure la contribution des termes liou-villiens habituels dans l'équation pilote décrivant l'injection d'un champ cohérent polarisé selon Ox dans la cavité et les pertes dues au miroir de sortie, dont l'effet combiné conduit à $\langle S_x \rangle_s = n_{\text{ph}}/2$ dans l'état stationnaire en l'absence d'atomes, n_{ph} étant le nombre moyen de photons dans le mode polarisé selon Ox . On peut alors écrire

$$\frac{d\langle \vec{S} \rangle}{dt} = -\frac{\kappa}{2} \left(\langle \vec{S} \rangle - \frac{n_{\text{ph}}}{2} \vec{u}_x \right) + \chi \langle K_z \rangle \left(\langle \vec{S} \rangle \times \vec{u}_z \right) \quad (3.3)$$

$$\frac{d\langle \vec{K} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle \vec{K} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} + \chi \langle S_z \rangle \left(\langle \vec{K} \rangle \times \vec{u}_z \right) \quad (3.4)$$

$$\frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle \vec{J} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}}, \quad \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle Q_{\alpha\beta} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}}, \quad \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} = \left. \frac{d\langle \vec{I} \rangle}{dt} \right|_{\text{ECH}} \quad (3.5)$$

avec $\vec{u}_{\alpha=x,y,z}$ le vecteur unitaire d'axe $O\alpha$. Nous avons effectué l'approximation $\langle AB \rangle \simeq \langle A \rangle \langle B \rangle$ où A et B sont deux opérateurs, dite semi-classique en optique quantique. Les termes proportionnels au taux de perte κ du miroir de sortie de la cavité font relaxer $\langle S_x \rangle$ vers sa valeur stationnaire $\langle S_x \rangle_s = n_{\text{ph}}/2$ forcée par le champ laser polarisé selon Ox injecté dans la cavité, et les moyennes transverses $\langle S_y \rangle$ et $\langle S_z \rangle$ vers zéro. Les termes notés par « ECH » sont ceux d'échange de métastabilité décrits par (2.10)-(2.13) au chapitre 2.

1. De manière équivalente, on peut construire le spin de Stokes \vec{S} en utilisant les opérateurs d'annihilation dans les modes polarisés circulairement, $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_x - ic_y)$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(c_x + ic_y)$ [40], auquel cas $S_z = \frac{1}{2} (c_1^\dagger c_1 - c_2^\dagger c_2)$.

3.1.2 Solution stationnaire partiellement polarisée

Nous linéarisons maintenant ces équations autour d'une solution stationnaire partiellement polarisée. L'objectif est d'éliminer adiabatiquement les fluctuations du spin \vec{J} et du tenseur d'alignement collectif dans $F = 3/2$. Nous pensons que cette approximation non mathématiquement contrôlée est raisonnable pour l'expérience proposée, car le spin \vec{J} n'est pas directement couplé à la lumière donc n'est pas directement affecté par la mesure du champ en continu. En revanche, si l'on éliminait les fluctuations du spin \vec{K} , directement couplé au champ, on commettrait une erreur non négligeable sur la dynamique de compression du spin dans le cas de la détection par comptage de photons (revenant à omettre le saut double C_d dans l'équation pilote (4.18) et le taux Γ_0 dans le nombre moyen de photons comptés (4.27) donc à sous-estimer fortement le nombre de photodétections requises pour atteindre un niveau de compression donné), mais une erreur négligeable dans le cas de la détection homodyne, comme nous l'avons vérifié sur le modèle à un mode de la section 4.2.

Si nous cherchons un état stationnaire partiellement polarisé à partir d'une polarisation nucléaire $\eta \in [-1, 1]$,

$$\langle I_x \rangle_s = \eta \frac{N_{\text{cell}}}{2}, \quad \langle I_y \rangle_s = \langle I_z \rangle_s = 0, \quad \langle S_x \rangle_s = \frac{n_{\text{ph}}}{2}, \quad \langle S_y \rangle_s = \langle S_z \rangle_s = 0, \quad (3.6)$$

l'invariance par rotation d'axe Ox de cette polarisation et du système (3.3)-(3.5) contraint les spins moyens dans l'état métastable à être alignés selon Ox , et le tenseur d'alignement moyen à être diagonal dans la base cartésienne, avec des valeurs propres égales selon les directions Oy et Oz . Le système (3.3)-(3.5) admet ainsi une solution stationnaire avec comme seules moyennes non nulles dans l'état métastable :

$$\langle K_x \rangle_s = \frac{\eta}{2} \frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}}, \quad \langle J_x \rangle_s = \eta \frac{5 + \eta^2}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}}, \quad \langle \Sigma_x \rangle_s = \frac{4\eta}{3 + \eta^2} n_{\text{cell}}, \quad (3.7)$$

$$\langle Q_{yy} \rangle_s = \langle Q_{zz} \rangle_s = -\frac{1}{2} \langle Q_{xx} \rangle_s = -\frac{\eta}{12} \langle \Sigma_x \rangle_s. \quad (3.8)$$

3.2 Description des fluctuations quantiques

3.2.1 Équations semi-classiques linéarisées

On linéarise maintenant les équations (3.3)-(3.5) en les fluctuations classiques autour de la solution stationnaire (3.6)-(3.8) en effectuant la substitution $\langle A \rangle \rightarrow \langle A \rangle_s + \delta A$ et en traitant δA au premier ordre. En nous limitant au sous-espace des fluctuations transverses, c'est-à-dire aux directions $\alpha = y, z$ orthogonales aux spins moyens, nous obtenons un système

fermé :

$$\frac{d}{dt}\delta S_\alpha = -\frac{\kappa}{2}\delta S_\alpha + \chi\delta_{\alpha y}\langle S_x \rangle_s \delta K_z \quad (3.9)$$

$$\frac{d}{dt}\delta K_\alpha = -\frac{7}{9\tau}\delta K_\alpha + \frac{1}{9\tau}\delta J_\alpha - \frac{2\eta}{3\tau}\delta Q_{\alpha x} - \frac{1}{9T}\left(1 + \frac{12}{n_{\text{cell}}}\langle Q_{\alpha\alpha} \rangle_s\right)\delta I_\alpha + \chi\delta_{\alpha y}\langle K_x \rangle_s \delta S_z \quad (3.10)$$

$$\frac{d}{dt}\delta J_\alpha = -\frac{4}{9\tau}\delta J_\alpha + \frac{10}{9\tau}\delta K_\alpha + \frac{2\eta}{3\tau}\delta Q_{\alpha x} + \frac{10}{9T}\left(1 + \frac{6}{5n_{\text{cell}}}\langle Q_{\alpha\alpha} \rangle_s\right)\delta I_\alpha \quad (3.11)$$

$$\frac{d}{dt}\delta Q_{\alpha x} = -\frac{2}{3\tau}\delta Q_{\alpha x} + \frac{\eta}{12\tau}\delta\Sigma_\alpha + \frac{1}{6Tn_{\text{cell}}}\langle\Sigma_x \rangle_s \delta I_\alpha \quad (3.12)$$

$$\frac{d}{dt}\delta I_\alpha = -\frac{1}{T}\delta I_\alpha + \frac{1}{3\tau}(\delta J_\alpha - \delta K_\alpha). \quad (3.13)$$

On rappelle les notations du chapitre 2 où N_{cell} et n_{cell} sont le nombre d'atomes dans l'état fondamental et métastable respectivement tandis que $1/T$ et $1/\tau$ sont le taux de collisions d'échange vu par les atomes dans l'état fondamental et métastable respectivement.²

3.2.2 Réduction à trois spins collectifs couplés

En posant $\frac{d}{dt}\delta J_\alpha = 0$ dans l'équation (3.11) et $\frac{d}{dt}\delta Q_{\alpha x} = 0$ dans l'équation (3.12), nous éliminons adiabatiquement les fluctuations du spin collectif \vec{J} et du tenseur d'alignement collectif dont les évolutions sont régies par l'échange de métastabilité uniquement.

$$\delta J_\alpha^{\text{adiab}} = \frac{2}{8 - \eta^2}\delta K_\alpha + \frac{12\tau}{T}\frac{5 + 2\eta^2}{(3 + \eta^2)(8 - \eta^2)}\delta I_\alpha \quad (3.14)$$

$$\delta Q_{\alpha x}^{\text{adiab}} = \frac{3\eta}{8 - \eta^2}\delta K_\alpha + \frac{\tau}{T}\frac{\eta(13 + \eta^2)}{(3 + \eta^2)(8 - \eta^2)}\delta I_\alpha \quad (3.15)$$

Le report des expressions adiabatiques (3.14)-(3.15) dans les équations (3.10) et (3.13) sur δK_α et δI_α conduit à un système réduit couplant les trois spins collectifs \vec{I} , \vec{K} et \vec{S} . On redéfinit les valeurs moyennes stationnaires par :

$$\langle\vec{I}\rangle_s = \frac{N}{2}\vec{u}_x \quad \langle\vec{K}\rangle_s = \frac{n}{2}\vec{u}_x \quad \langle\vec{S}\rangle_s = \frac{n_{\text{ph}}}{2}\vec{u}_x \quad (3.16)$$

Ici \vec{u}_x est le vecteur unitaire selon Ox , N et n sont les nombres effectifs d'atomes fondamentaux et métastables participant à la dynamique des spins collectifs. Ils sont renormalisés par rapport aux nombres totaux vrais N_{cell} et n_{cell} dans la cellule, par des facteurs dépendant de la polarisation nucléaire η ³ :

$$N = \eta N_{\text{cell}}, \quad n = \left(\frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2}\right)\eta n_{\text{cell}}. \quad (3.17)$$

2. Dès lors $\frac{N_{\text{cell}}}{T}dt = \frac{n_{\text{cell}}}{\tau}dt$ et cette quantité représente le nombre d'atomes subissant une collision d'échange de métastabilité durant un intervalle dt . Cette relation implique $\frac{\tau}{T} = \frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}}$.

3. Notons que $n = 0$ dans le cas entièrement polarisé $\eta = 1$. En effet, toute la population de l'état métastable se trouve alors dans le sous-niveau Zeeman extrême $m_x = 3/2$ de l'état hyperfin $F = 3/2$ et la multiplicité $F = 1/2$ est vide. Ceci est aussi la raison pour laquelle nous avons considéré un état partiellement polarisé depuis le début de ce chapitre.

Les équations semi-classiques sur les fluctuations des trois spins collectifs s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt}\delta S_z = -\frac{\kappa}{2}\delta S_z \qquad \frac{d}{dt}\delta S_y = -\frac{\kappa}{2}\delta S_y + \chi\langle S_x \rangle_s \delta K_z \qquad (3.18)$$

$$\frac{d}{dt}\delta I_z = -\gamma_f \delta I_z + \gamma_m \delta K_z \qquad \frac{d}{dt}\delta I_y = -\gamma_f \delta I_y + \gamma_m \delta K_y \qquad (3.19)$$

$$\frac{d}{dt}\delta K_z = -\gamma_m \delta K_z + \gamma_f \delta I_z \qquad \frac{d}{dt}\delta K_y = -\gamma_m \delta K_y + \gamma_f \delta I_y + \chi\langle K_x \rangle_s \delta S_z. \qquad (3.20)$$

Rappelons que γ_m et γ_f sont les taux effectifs d'échange de métastabilité dans l'état métastable et dans l'état fondamental. Ces derniers dépendent de la polarisation nucléaire comme ci-dessous et sur la figure 3.1a, et sont dans le même rapport que les nombres d'atomes effectifs N et n (3.17) constituant les spins collectifs :

$$\gamma_f = \frac{4 + \eta^2}{8 - \eta^2} \frac{1 - \eta^2}{3 + \eta^2} \frac{1}{T}, \quad \gamma_m = \frac{4 + \eta^2}{8 - \eta^2} \frac{1}{\tau}, \quad \frac{\gamma_m}{\gamma_f} = \frac{N}{n} \gg 1. \qquad (3.21)$$

Notons que le système d'équations couplant les fluctuations δI_y et δK_y , en ignorant le terme de Faraday en χ , est celui préalablement étudié dans la section 2.3 décrivant le modèle simple de deux spins 1/2 couplés par les collisions d'échange de métastabilité. Sur la figure 3.1b, nous montrons également la dépendance en polarisation nucléaire du couplage de Faraday effectif Ω_α (4.5) entre la lumière et le spin nucléaire hybridé par le métastable, qui contrôle le taux de compression de spin comme nous le verrons.

3.3 Modèles à trois modes bosoniques

L'état stationnaire, polarisé, du système que nous venons de présenter permet la mise en place de l'approximation de Holstein-Primakoff, introduisant une représentation du système par la voie de trois modes bosoniques. Dans cette section, l'introduction de cette approximation sera suivie de l'écriture d'une équation pilote pour un tel système, prenant en compte le couplage de Faraday aussi bien que les collisions d'échange de métastabilité.

3.3.1 Approximation de Holstein-Primakoff

Initialement, le spin nucléaire collectif \vec{I} , le spin collectif du métastable \vec{K} et le spin de Stokes \vec{S} de la lumière sont polarisés selon Ox , et le resteront pendant toute la procédure expérimentale. Dans l'approximation de Holstein-Primakoff, qui assimile les composantes de spin macroscopiques selon Ox à des variables classiques, les composantes Oy et Oz restantes, orthogonales aux spins moyens, se comportent comme les opérateurs de quadratures (parties hermitienne et antihermitienne d'opérateurs d'annihilation donc canoniquement conjuguées,

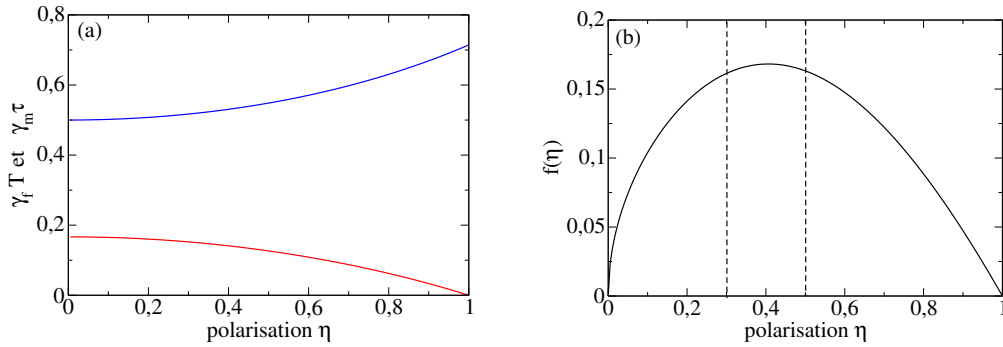


FIGURE 3.1 – (a) Taux effectifs d'échange de métastabilité γ_f (courbe du bas, en rouge) et γ_m (courbe du haut, en bleu) d'après l'équation (3.21) dans l'état fondamental et métastable en fonction de la polarisation nucléaire η , normalisés par les taux des collisions d'échange de métastabilité $1/T$ et $1/\tau$ subies par un atome fondamental et métastable dans le gaz. (b) Dépendance en polarisation nucléaire de la pulsation de Faraday Ω_α entrant dans le taux de création d'excitations par le couplage de Faraday dans le mode bosonique nucléaire hybridé (4.13) et dans les taux de compression de spin (4.32) et (5.51) dans la limite $\gamma_f \ll \gamma_m$; plus précisément, on représente le facteur $f(\eta) = \sqrt{\eta \frac{1-\eta^2}{3+\eta^2}}$ tel que $\Omega_\alpha \simeq \Omega(\gamma_f/\gamma_m)^{1/2} = \chi \sqrt{n_{\text{ph}} n_{\text{cell}}} \sqrt{\frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}}} f(\eta)$. Lorsque la polarisation varie entre 0,3 et 0,5 (lignes tiretées verticales), $f(\eta)$ s'écarte de 4 % de son maximum $\simeq 0,17$ atteint en $\eta = 0,42$. Il est donc avantageux de se placer près de cette valeur de η pour réduire la dérive temporelle de Ω_α due à un léger amortissement de la polarisation nucléaire pendant la compression de spin (en effet, le processus de pompage optique est alors interrompu et la durée de vie de la polarisation est réduite par la présence de la décharge, elle devient de l'ordre de γ_α^{-1} , où γ_α est le taux de décohérence ramené de la section 5.4).

$[X, P] = i/2$) de trois modes bosoniques a, b, c :⁴

$$\frac{I_y}{\sqrt{N}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_a = \frac{a + a^\dagger}{2}, \quad \frac{K_y}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_b = \frac{b + b^\dagger}{2}, \quad \frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} X_c = \frac{c + c^\dagger}{2}, \quad (3.22)$$

$$\frac{I_z}{\sqrt{N}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_a = \frac{a - a^\dagger}{2i}, \quad \frac{K_z}{\sqrt{n}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_b = \frac{b - b^\dagger}{2i}, \quad \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} P_c = \frac{c - c^\dagger}{2i}. \quad (3.23)$$

Nous avons tenu compte des valeurs moyennes (3.16) dans la normalisation. Faisons le lien avec la représentation bosonique exacte (3.1) du spin de Stokes en écrivant :

$$\frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} - i \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} c_y^\dagger c_x \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} c_y^\dagger, \quad \frac{S_y}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} + i \frac{S_z}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{ph}}}} c_x^\dagger c_y \stackrel{\text{Primakoff}}{\simeq} c_y. \quad (3.24)$$

Ceci montre que l'opérateur de création c^\dagger dans (3.22)-(3.23), identifié avec c_y^\dagger dans l'approximation de Primakoff, transfère un photon du mode de cavité fortement peuplé par un état cohérent polarisé selon Ox dans le mode de cavité initialement vide polarisé selon Oy . Dans l'approximation de Primakoff, l'hamiltonien du couplage de Faraday atome-champ (3.2) s'écrit :

$$H = \hbar \Omega P_b P_c \quad \text{avec} \quad \Omega = \chi \sqrt{n n_{\text{ph}}} \quad (3.25)$$

Comme χ ne dépend pas de l'intensité du champ dans la cavité, Ω^2 est proportionnel à cette intensité.

Gain métrologique dû à la compression Écrivons en termes des variables de Primakoff le paramètre ξ de la référence [25] quantifiant le niveau de compression de spin utilisable dans un interféromètre (le gain métrologique est d'autant plus élevé que ξ est plus faible) préalablement introduit dans le chapitre 1, Oz étant la direction transverse au spin moyen de plus forte compression et le spin nucléaire collectif étant de nombre quantique $I = N_{\text{cell}}/2$:

$$\xi^2 \equiv \frac{2I \text{Var}(I_z)}{\langle I_x \rangle^2} = \frac{4 \text{Var}(P_a)}{\eta}. \quad (3.26)$$

La polarisation nucléaire η étant fixée, et une mesure quantique non destructive étant effectuée en continu sur le spin nucléaire, il faut chercher à minimiser la variance de P_a conditionnée au signal de mesure à définir, en la faisant descendre le plus en dessous possible de sa valeur initiale 1/4. Remarquons à ce titre comme une polarisation partielle « joue » contre nous dans cette objectif car elle augmente d'un facteur η la valeur en dessous de laquelle $\text{Var}(P_a)$ doit tomber pour obtenir le même gain que pour un spin complètement polarisé.

4. Si nous considérons un grand spin \vec{S} polarisé selon Ox , nous pouvons approximer la composante de spin dans cette direction par une variable classique, en posant $\hat{S}_x \simeq \langle \hat{S}_x \rangle$ si bien que $[\hat{S}_y/\sqrt{2\langle \hat{S}_x \rangle}, \hat{S}_z/\sqrt{2\langle \hat{S}_x \rangle}] \simeq i/2$.

3.3.2 Équation pilote à trois modes pour l'échange de métastabilité

Considérons dans cette sous-section l'évolution du système due au seul échange de métastabilité ($\chi = 0$). À la différence de la section 2.3, nous formulons les équations en terme des opérateurs bosoniques issus de l'approximation de Primakoff. Dans un traitement quantique, les équations classiques (3.19)-(3.20) deviennent des équations stochastiques incluant les fluctuations quantiques. Dans l'approximation de Primakoff, cela donne pour les quadratures X dans l'état métastable et fondamental :

$$dX_a = -\gamma_f X_a dt + \sqrt{\gamma_m \gamma_f} X_b dt + dX_a^{\text{stoch}}, \quad dX_b = -\gamma_m X_b dt + \sqrt{\gamma_m \gamma_f} X_a dt + dX_b^{\text{stoch}} \quad (3.27)$$

où l'on a utilisé l'égalité des rapports entre taux de collisions et populations des deux états (3.21). Les bruits de Langevin dX_i^{stoch} , avec $i \in \{a, b\}$, ont une moyenne nulle, sont des variables aléatoires indépendantes à des temps différents et ont des variances et des covariances à temps égaux qui reproduisent les variances d'un ensemble d'atomes indépendants. Elles ont déjà été calculées dans le chapitre 2, voir équation (2.22) et la section correspondante de manière générale.

$$\langle dX_i^{\text{stoch}} dX_j^{\text{stoch}} \rangle = D_{ij} dt \quad \text{avec} \quad \underline{D} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \gamma_f & -\sqrt{\gamma_m \gamma_f} \\ -\sqrt{\gamma_m \gamma_f} & \gamma_m \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

On a des équations de même forme que (3.27) pour les quadratures P_i , avec d'autres bruits de Langevin dP_i^{stoch} , de même matrice de covariance que l'équation (3.28) entre eux mais de matrice de covariance avec les bruits dX_i^{stoch} donnés par

$$\langle dX_i^{\text{stoch}} dP_j^{\text{stoch}} \rangle = \mathcal{D}_{ij} dt \quad \text{avec} \quad \underline{\mathcal{D}} = i \underline{D} \quad (3.29)$$

Pour le calcul des valeurs moyennes et des variances des observables atomiques, cette formulation stochastique équivaut à une équation pilote sur l'opérateur densité atomique ρ_{at} des deux modes bosoniques a et b :

$$\frac{d\rho_{\text{at}}}{dt} = C \rho_{\text{at}} C^\dagger - \frac{1}{2} \{C^\dagger C, \rho_{\text{at}}\} \quad \text{avec} \quad C = \sqrt{2\gamma_f} a - \sqrt{2\gamma_m} b \quad (3.30)$$

En effet, la représentation stochastique de Langevin de l'équation pilote (3.30) pour un opérateur quelconque A s'écrit

$$dA = \frac{dt}{2} \{C^\dagger [A, C] - [A, C^\dagger] C\} + dA^{\text{stoch}} \quad \text{où} \quad dA^{\text{stoch}} = [C^\dagger, A] dB + dB^\dagger [A, C] \quad (3.31)$$

et dB est un opérateur stochastique markovien de moyenne nulle, de matrice de covariance à temps égaux

$$\langle dB dB^\dagger \rangle = dt, \quad \langle dB dB \rangle = \langle dB^\dagger dB^\dagger \rangle = \langle dB^\dagger dB \rangle = 0. \quad (3.32)$$

3.3.3 Équation pilote à trois modes complète

L'évolution complète, comprenant l'interaction atome-champ d'hamiltonien hermitien H (3.25), l'échange de métastabilité et les pertes de la cavité, est décrite par l'équation pilote.⁵

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \kappa \left(c \rho c^\dagger - \frac{1}{2} \{c^\dagger c, \rho\} \right) + C \rho C^\dagger - \frac{1}{2} \{C^\dagger C, \rho\} \quad (3.33)$$

5. Nous négligeons ici l'évolution interne des modes atomiques (précession de spin) en supposant que les sous-niveaux Zeeman sont dégénérés dans l'état fondamental et dans le niveau métastable $F = 1/2$, donc que le champ magnétique extérieur est nul, $\vec{B} = \vec{0}$. Cette hypothèse simplificatrice appelle à quelques commentaires que nous développons à la section 5.5.2.

où C est l'opérateur de saut pour l'échange de métastabilité (3.30), κ est le taux de perte de la cavité, γ_m et γ_f sont les taux effectifs d'échange de métastabilité dans l'état métastable et fondamental.

Nous considérons dans cette thèse que les trois modes sont dans l'état vide correspondant à un état cohérent polarisé pour les trois spins⁶ :

$$\langle X_a \rangle(0) = \langle X_b \rangle(0) = \langle X_c \rangle(0) = 0, \quad \langle X_a^2 \rangle(0) = \langle X_b^2 \rangle(0) = \langle X_c^2 \rangle(0) = \frac{1}{4} \quad (3.34)$$

et de même pour les quadratures P . Pour cet état initial, les premiers moments des quadratures restent nuls, et l'on peut obtenir un système fermé d'équations sur les seconds moments. On trouve que les quadratures P restent de variances constantes et de covariances nulles dans les trois modes,

$$\langle P_a^2 \rangle(t) = \langle P_b^2 \rangle(t) = \langle P_c^2 \rangle(t) = \frac{1}{4}, \quad \langle P_a P_b \rangle(t) = \langle P_a P_c \rangle(t) = \langle P_b P_c \rangle(t) = 0 \quad (3.35)$$

que la variance $\langle X_c^2 \rangle$ reste bornée et que les covariances $\langle X_a X_c \rangle$ et $\langle X_b X_c \rangle$ restent nulles, tandis que les variances et la covariance des quadratures X_a et X_b , et donc le nombre d'excitations dans les modes atomiques,⁷ divergent linéairement en temps, du moins tant que l'approximation de Primakoff est applicable. Nous donnons ici explicitement seulement les

6. Nous faisons ici une nouvelle approximation qui revient à ignorer la polarisation seulement partielle des spins nucléaire et métastable dans la définition de l'état initial. En effet, en toute rigueur $\langle X_a^2(0) \rangle = \langle P_a^2(0) \rangle = \frac{1}{4\eta}$ et $\langle X_b^2(0) \rangle = \langle P_b^2(0) \rangle = \frac{1}{4p}$ avec $p = \eta \frac{1-\eta^2}{3+\eta^2}$. L'approximation revient donc à négliger une partie du bruit dans l'état initial. Ici, notre simplification permet de considérer un état initial gaussien, propriété qui se révélera crucial dans le chapitre 5. La question se résume donc à savoir si le vrai état initial cohérent mais non gaussien est affecté de manière similaire par la mesure. Dans la littérature, cette situation n'est pas inconnue. Elle se pose en effet pour toute tentative de comprimer un spin collectif depuis un état non polarisé, ou bien en présence de décohérence. Le travail théorique entrepris par Baragiola, Chase et Geremia dans la référence [41] par exemple semble confirmer notre argument. Dans une étude extensive sur les états collectifs d'ensemble atomiques lors de procédure expérimentale standard d'optique quantique, les auteurs montrent que des états de spins comprimés (en tous cas de variances réduites) peuvent être construits même à partir d'état non complètement polarisé ou en présence de décohérence. Dans les travaux expérimentaux, nous pouvons citer [15] où une compression de 2,2 dB sur un spin d'un ensemble d'atomes polarisé à 98% est obtenue par mesure quantique non destructive via une interaction de Faraday en cavité comme le travail que l'on présente ici. Citons aussi la référence [11], dans laquelle il s'agit de corrélations dans le spin nucléaire d'un gaz noble par mesure continue de la lumière sortante de la cavité ayant interagi par effet Faraday avec l'ensemble atomique, et où il est évoqué le fait qu'un ensemble partiellement polarisé de spins 1/2 est similaire à un mélange de deux ensembles, l'un polarisé et l'autre non, qui n'aurait comme effet global que la réduction de la force de couplage entre la lumière et les atomes. Un schéma alternatif dans lequel on peut atteindre (du moins en théorie), $\eta = 1$ et où un tel problème disparaît, est décrit en tant que perspective dans la section 5.5.1 à la fin de cette partie.

7. Pour l'état initial considéré, on a à tout temps $\langle X_a \rangle = 0$ et $\langle X_a^2 \rangle - \frac{1}{4} = \langle a^\dagger a \rangle$, où $\langle a^\dagger a \rangle$ est le nombre moyen d'excitations dans le mode de spin nucléaire, si bien que $\text{Var } X_a = \langle a^\dagger a \rangle + \frac{1}{4}$; en effet, on a $a^\dagger a + 1/2 = X_a^2 + P_a^2$. Les mêmes relations valent pour les deux autres modes.

comportements aux temps longs :

$$\langle X_a^2 \rangle(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_m \gamma_f}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) \quad (3.36)$$

$$\langle X_b^2 \rangle(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_f^2}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) \quad (3.37)$$

$$\langle X_a X_b \rangle(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \frac{\gamma_m^{1/2} \gamma_f^{3/2}}{(\gamma_m + \gamma_f)^2} \frac{\Omega^2 t}{4\kappa} + O(1) \quad (3.38)$$

$$\langle X_c^2 \rangle(t) - \frac{1}{4} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} \left(\frac{\Omega}{2\kappa} \right)^2 \left(1 - \frac{2\gamma_m}{\kappa + 2(\gamma_m + \gamma_f)} \right). \quad (3.39)$$

Chapitre 4

Compression du spin nucléaire par comptage de photons

Avant-propos

Après avoir introduit les collisions d'échange de métastabilité (chapitre 2), couplant les atomes de l'état fondamental à ceux de l'état métastable, nous avons ajouté le couplage avec la lumière en cavité (chapitre 3) et développé un modèle effectif de 3 modes bosoniques couplés décrivant par une équation pilote (3.33) les fluctuations des spins autour de l'état stationnaire dans lequel on place initialement le système. Pour que le schéma soit complet, et qu'il induise une compression du spin nucléaire, il ne nous reste plus que la description de la mesure quantique non-destructive sur la lumière en sortie de cavité et son effet sur l'état du système à trois modes. En effet, les moyennes quantiques calculées au chapitre 3, équations (3.36)-(3.39), correspondent aux moyennes d'ensemble sur un nombre infini de réalisations de l'expérience. Dans ce chapitre et le suivant, nous étudions ce qui nous intéresse vraiment, l'évolution du système dans une ou plusieurs réalisations données, conditionnée aux résultats d'une mesure en continu sur la lumière polarisée selon Oy sortant de la cavité. Pour cela, nous tirons parti de la formulation en termes de fonctions d'onde Monte-Carlo où des trajectoires stochastiques $|\psi(t)\rangle$ correspondant à une succession particulière de sauts quantiques reconstruisent l'opérateur densité du système conditionné à des résultats de mesure [42]. La forme précise des opérateurs de saut Monte-Carlo, qui n'est pas unique dans la reformulation stochastique d'une équation pilote, est alors déterminée par les mesures particulières effectuées. Ici, on considérera le cas d'une mesure de comptage de photon en sortie de cavité, avec une étude analytique dans le modèle à un mode et une étude numérique dans le modèle complet à trois modes. La première section de ce chapitre est dédiée à introduire ce formalisme des fonctions d'onde Monte-Carlo. Par la suite, nous réalisons une première analyse dans une limite, que nous nommons « à un mode », qui nous permet de décrire l'évolution (lente) du spin nucléaire durant l'expérience. Cette analyse se limite d'abord aux moyennes quantiques puis dans la section 4.3 qui suit, on introduit la mesure en sortie de cavité et son effet sur le système. Nous la prenons en compte, avec le même formalisme introduit en 4.1, en conditionnant les états des modes et les moyennes d'observables aux résultats de mesure. La dernière section propose ainsi un développement analytique dans le cadre de la limite à un mode déjà introduite puis dans le modèle complet à trois modes, mais de manière numérique

seulement. Ces deux analyses permettent de confirmer que ce schéma de comptage produit un état du spin nucléaire collectif avec une structure plus étroite que la limite quantique standard, a priori permettant un gain métrologique.

4.1 Principe des fonctions d'onde Monte-Carlo

Dans le formalisme des fonctions d'ondes Monte-Carlo [42, 43], l'équation pilote générale de la forme de Lindblad [44]

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \sum_m C_m^\dagger \rho C_m - \frac{1}{2} \{C_m^\dagger C_m, \rho\} \quad (4.1)$$

est réinterprétée en termes d'un vecteur de l'espace de Hilbert correspondant qui subit une évolution stochastique. On considère que le vecteur d'onde Monte-Carlo (MC) évolue selon un hamiltonien non hermitien $H_{MC} = H - \frac{i\hbar}{2} \sum_m C_m C_m^\dagger$, évolution interrompue stochastiquement par des sauts quantiques dus aux opérateurs C_m où $|\phi\rangle \rightarrow C_m|\phi\rangle$. Concrètement, calculer l'évolution durant δt d'un vecteur d'onde Monte-Carlo $|\phi(t)\rangle$ peut être fait en deux étapes, en supposant δt suffisamment petit : on définit préalablement les quantités $\delta p_m = \delta t \langle \phi(t) | C_m^\dagger C_m | \phi(t) \rangle$ et $\delta p = \sum_m \delta p_m$ (ces différentes quantités sont supposées petites devant 1). On utilise alors δp comme probabilité que le vecteur d'onde MC subisse un saut quantique. On tire un nombre ϵ uniformément entre 0 et 1, si ce nombre est supérieur à δp alors on prend comme vecteur d'onde à $t + \delta t$ le vecteur $|\phi(t)\rangle$ évolué sous l'action de H_{MC} pendant δt : $|\phi(t + \delta t)\rangle = \mathcal{N} \left(1 - \frac{i\delta t}{\hbar} H_{MC} \right) |\phi(t)\rangle$ avec \mathcal{N} une simple constante pour normaliser le vecteur. Si par contre, $\epsilon < \delta p$ alors $|\phi(t + \delta t)\rangle = \mathcal{N} C_m |\phi(t)\rangle$ où l'on a tiré aléatoirement l'opérateur de saut C_m avec la loi de probabilité $P(m) = \frac{\delta p_m}{\delta p}$. Il est possible de montrer que, pour un δt suffisamment petit, la quantité $|\phi(t + \delta t)\rangle \langle \phi(t + \delta t)|$ moyennée sur les réalisations et les choix de saut quantiques est exactement équivalente à $\rho(t + \delta t)$ évolué selon l'équation pilote (4.1). De même, pour un opérateur A , toute quantité $\langle \phi(t) | A | \phi(t) \rangle$, moyennée pareillement est équivalente à $\text{Tr}(A\rho)$. Enfin, si l'on prend soin de prendre pour C_m des opérateurs ayant un sens physique¹, c'est-à-dire qui sont liés à de véritables processus accessibles dans l'expérience, il est possible d'interpréter physiquement la trajectoire d'un vecteur d'onde Monte-Carlo. Prenons l'exemple d'un atome à deux niveaux couplé à un laser cohérent et au vide du champ électromagnétique. Une trajectoire Monte-Carlo d'un tel atome s'interprète simplement comme l'oscillation de Rabi sporadiquement ramené à l'état fondamental par la production d'un photon. En moyennant sur toutes les trajectoires possibles, on se ramène à l'oscillation amortie caractéristique [42]. On voit comment cette approche permet d'aborder la question de l'impact d'une mesure sur un système quantique, via un opérateur qui représente la mesure au cours du temps puisque l'on peut calculer les moyennes d'opérateurs du système en les moyennant sur les vecteurs d'états conditionnés à un certain historique de la mesure. Par exemple, on peut imaginer un système en cavité, dont des photons s'échappent et sont comptés, si l'on note C l'opérateur de saut associé à la sortie d'un photon de la cavité, on peut imaginer calculer la moyenne d'un opérateur A dans l'ensemble des vecteurs d'ondes MC qui ont subi n sauts de cavité. On obtiendrait alors une moyenne de A conditionnée au fait d'observer n photons en sortie de cavité.

1. La forme précise des opérateurs de saut n'est pas unique dans la reformulation stochastique d'une équation pilote.

4.2 Analyse de la limite à un mode

Dans cette sous-section, nous établissons une équation pilote à un mode décrivant l'évolution lente du spin nucléaire dans la limite

$$\Gamma_{\text{ex}} \ll \gamma_f < \gamma_m \quad \text{et} \quad \Gamma_{\text{ex}} \ll \kappa \quad (4.2)$$

où Γ_{ex} est un taux de création d'excitations dans le mode bosonique nucléaire hybridé α défini plus bas (4.13) sous l'effet du couplage de Faraday (il suffit de savoir ici que $\Gamma_{\text{ex}} \propto \Omega^2$ si bien que (4.2) est une limite de couplage de Faraday faible $\Omega \rightarrow 0$). Il convient à cette fin d'introduire les opérateurs bosoniques d'annihilation dans une base astucieusement tournée, au moyen des combinaisons linéaires suivantes des opérateurs a et b :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}} a + \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} b, \quad \beta = \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}} b - \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} a \quad (4.3)$$

α et β correspondent en effet aux modes propres de la partie d'échange de métastabilité de l'équation pilote à trois modes (3.33).² Tandis que le mode α subit une divergence en temps de son nombre moyen d'excitations (d'où la possibilité de définir un taux Γ_{ex}), le mode β est fortement amorti et tend vers une valeur stationnaire,³ ce qui permettra de l'éliminer adiabatiquement, tout comme le champ en cavité. Dans cette nouvelle base, l'équation pilote à trois modes (3.33) prend la forme

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \kappa \left(c\rho c^\dagger - \frac{1}{2} \{c^\dagger c, \rho\} \right) + \gamma_\beta \left(\beta\rho\beta^\dagger - \frac{1}{2} \{\beta^\dagger\beta, \rho\} \right)} \quad (4.4)$$

où $\gamma_\beta \equiv 2(\gamma_m + \gamma_f)$ et

$$H = \hbar(\Omega_\alpha P_\alpha + \Omega_\beta P_\beta) P_c \quad \text{avec} \quad \Omega_\alpha \equiv \Omega \sqrt{\frac{\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f}} \quad \text{et} \quad \Omega_\beta \equiv \Omega \sqrt{\frac{\gamma_m}{\gamma_m + \gamma_f}}. \quad (4.5)$$

La référence [45] explique en toute généralité comment effectuer une élimination adiabatique au niveau de l'équation pilote. Ici, nous préférons l'effectuer, comme dans la référence [46], en couplage de Faraday faible $\Omega \rightarrow 0$ dans le formalisme des fonctions d'onde Monte-Carlo. On écrit l'hamiltonien effectif non hermitien que l'on fera agir sur le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ comme

$$H_{\text{eff}} = H - \frac{i\hbar}{2} \left(\kappa c^\dagger c + \gamma_\beta \beta^\dagger \beta \right) \quad (4.6)$$

et les sauts quantiques, interrompant aléatoirement (évolutions discontinues $|\psi\rangle \rightarrow C|\psi\rangle$) la trajectoire, d'opérateurs de saut

$$C_c = \sqrt{\kappa} c \quad \text{et} \quad C_\beta = \sqrt{\gamma_\beta} \beta \quad (4.7)$$

En l'absence du couplage cohérent Ω dans (4.5) le mode métastable hybridé et le mode de cavité restent dans l'état vide initial. Au premier ordre en Ω , cet état est couplé à des états

2. En pratique, on a $\gamma_m \gg \gamma_f$, voir l'équation (3.21), si bien que le mode β correspond au spin du métastable légèrement hybridé avec le spin de l'état fondamental, et α au spin nucléaire légèrement hybridé avec le spin du métastable

3. Voir les résultats (3.35)-(3.39), qui montrent que $\langle P_\beta^2 \rangle = 1/4$ et $\langle X_\beta^2 \rangle = O(1)$ où $X_\beta = (\beta + \beta^\dagger)/2$ et $P_\beta = (\beta - \beta^\dagger)/2i$, on définit de manière similaire les quadratures X_α, P_α .

à une excitation dans la cavité (par l'action de P_c) et à zéro ou une excitation dans le mode du métastable hybridé (par l'action de P_α ou de P_β). Nous pouvons alors tronquer le vecteur d'état Monte-Carlo $|\psi\rangle$ dans la base de Fock $\{|n_\alpha\rangle_{\text{fond}}|n_\beta\rangle_{\text{méta}}|n_c\rangle_{\text{cav}}\}$ comme suit,

$$|\psi\rangle = |\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle + |\psi_\alpha^{01}\rangle|0\rangle|1\rangle + |\psi_\alpha^{11}\rangle|1\rangle|1\rangle \quad (4.8)$$

en commettant une erreur de norme $O(\Omega^2)$. Sous l'effet de l'hamiltonien effectif (4.6) les composantes rapides $|\psi_\alpha^{01}\rangle$ et $|\psi_\alpha^{11}\rangle$ rejoignent exponentiellement un régime de suivi adiabatique de la composante lente $|\psi_\alpha^{00}\rangle$ avec des taux $\kappa/2$ ou $(\kappa + \gamma_\beta)/2$. En effet, dans le suivi adiabatique, les probabilités d'occupation des composantes excitées sont

$$\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}/\langle\psi|\psi\rangle = [\Omega_\beta^2/4(\kappa + \gamma_\beta)^2]\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle/\langle\psi|\psi\rangle \quad (4.9)$$

$$\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}/\langle\psi|\psi\rangle = (\Gamma_{\text{ex}}/\kappa)\langle\psi_\alpha^{00}|P_\alpha^2|\psi_\alpha^{00}\rangle/\langle\psi|\psi\rangle \quad (4.10)$$

où l'on a utilisé par avance les définitions (4.13). Dans la limite (4.2), on vérifie aisément qu'elles sont $\ll 1$, si bien que presque toute la population est dans la composante $|\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle$ comme il se doit, ce qui nous permettra dans la suite de remplacer $\langle\psi|\psi\rangle$ par $\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle$ et justifie l'élimination adiabatique des composantes excitées dans cette limite⁴

$$|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}} \simeq \frac{i\Omega_\beta}{2(\kappa + \gamma_\beta)}|\psi_\alpha^{00}\rangle \quad \text{et} \quad |\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}} \simeq \frac{\Omega_\alpha}{\kappa}P_\alpha|\psi_\alpha^{00}\rangle \quad (4.11)$$

On reporte les expressions de $|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}$, $|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}$ dans l'équation d'évolution hamiltonienne de $|\psi_\alpha^{00}\rangle$ pour obtenir

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi_\alpha^{00}\rangle = -\frac{i\hbar}{2}\left(\Gamma_{\text{ex}}P_\alpha^2 + \Gamma_0\right)|\psi_\alpha^{00}\rangle \equiv H_{\text{eff}}^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle \quad (4.12)$$

où l'on a introduit les taux

$$\boxed{\Gamma_{\text{ex}} = \frac{\Omega_\alpha^2}{\kappa} \quad \text{et} \quad \Gamma_0 = \frac{\Omega_\beta^2}{4(\kappa + \gamma_\beta)}} \quad (4.13)$$

En étudiant l'effet de l'opérateur de saut de cavité C_c et de saut d'échange de métastabilité C_β sur le vecteur d'état (4.8), nous pouvons interpréter l'hamiltonien effectif de l'équation (4.12).

4. On vérifie également qu'une autre condition de validité de l'élimination adiabatique, à savoir la lenteur de l'évolution du spin nucléaire hybridé α par rapport aux variables rapides, qui s'écrit ici $\Gamma_{\text{ex}}, \Gamma_0 \ll \kappa, \kappa + \gamma_\beta$, est satisfaite. Ces considérations ne permettent cependant pas de montrer que la condition $\Gamma_{\text{ex}} \ll \gamma_f$ est nécessaire (sauf si $\kappa \ll \gamma_\beta$). Pour le voir en toute généralité, nous poussons à l'ordre Ω^4 le calcul de l'hamiltonien effectif $H_{\text{eff}}^{00} = PH_{\text{eff}}P + PHQ(zQ - QH_{\text{eff}}Q)^{-1}QHP$ dans le sous-espace $n_\beta = n_c = 0$ sur lequel P projette (ici $Q = \mathbb{1} - P$ et $z = O(\Omega^2)$). Qualitativement, à cet ordre, par action de H_α puis H_β sur $|\psi_\alpha^{00}\rangle|0\rangle|0\rangle$ (avec la notation évidente $H = H_\alpha + H_\beta$), on crée virtuellement une excitation β seule, relaxant au taux $\gamma_\beta/2$, d'où la condition d'adiabaticité supplémentaire $\Gamma_0 \ll \gamma_\beta$; jointe à $\Gamma_0 \ll \kappa$ et $\gamma_f < \gamma_m$, elle implique $\Gamma_{\text{ex}} \ll \gamma_f$ puisque $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f = (\Gamma_0/\kappa + \Gamma_0/\gamma_\beta)(4\gamma_\beta/\gamma_m) < 16(\Gamma_0/\kappa + \Gamma_0/\gamma_\beta)$. Quantitativement, nous trouvons une correction au coefficient de P_α^2 dans H_{eff}^{00} de type $H_\alpha G_0 H_\beta G_0 H_\beta G_0 H_\alpha$ (G_0 est la résolvante de H_{eff} pour $\Omega = 0$) de la forme $\hbar\Gamma_{\text{ex}}\Omega_\beta^2/\gamma_\beta\kappa$, qui doit être négligeable, ce qui impose $\Omega_\beta^2/\gamma_\beta\kappa \ll 1$, c'est-à-dire $\Gamma_{\text{ex}} \ll \gamma_f$ compte tenu de $\gamma_f < \gamma_m$. Les corrections au terme scalaire sont négligeables dès que $\Gamma_0 \ll \gamma_\beta, \kappa$, et le nouveau terme en P_α^4 qui apparaît est négligeable devant $\hbar\Gamma_{\text{ex}}P_\alpha^2$ pour $P_\alpha = O(1)$ si $\Gamma_{\text{ex}} \ll \kappa$.

(i) Considérons d'abord l'effet d'un saut de cavité, qui se produit à l'instant t avec un taux $\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}/\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle$. Juste après le saut, le vecteur d'état, initialement en régime de suivi adiabatique, devient

$$|\psi(t^+)\rangle = C_c|\psi(t^-)\rangle_{\text{adiab}} \propto |\psi_\alpha^{01}(t^-)\rangle_{\text{adiab}}|0\rangle|0\rangle + |\psi_\alpha^{11}(t^-)\rangle_{\text{adiab}}|1\rangle|0\rangle. \quad (4.14)$$

C'est la superposition d'une composante instable $|1\rangle|0\rangle$ et d'une composante stable $|0\rangle|0\rangle$. Avec une probabilité $\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}/(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}$ le saut de cavité est alors suivi d'un saut d'échange de métastabilité avant que le vecteur d'état du système n'ait le temps de rejoindre sa valeur adiabatique. On a dans ce cas un « saut double », qui en définitive n'affecte pas la composante $|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$ puisque

$$C_\beta C_c|\psi(t^-)\rangle_{\text{adiab}} \propto |\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle|0\rangle|0\rangle \quad (4.15)$$

Ce processus contribue au terme scalaire (proportionnel à l'identité) dans l'hamiltonien effectif de l'équation (4.12). Avec la probabilité complémentaire $\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}/(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}$ le vecteur d'état rejoint sa valeur adiabatique avant que d'autres sauts ne se produisent, et est asservi à $|\psi_\alpha^{(01)}(t^-)\rangle_{\text{adiab}} \propto P_\alpha|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$, c'est-à-dire que la composante lente $|\psi_\alpha^{00}(t^-)\rangle$ a subi de manière effective un saut quantique simple avec un opérateur de saut proportionnel à P_α . Ce processus correspond au premier terme, proportionnel à P_α^2 , dans l'hamiltonien effectif de l'équation (4.12).

(ii) Supposons ensuite que le saut à l'instant t est un saut d'échange de métastabilité, ce qui se produit avec un taux $\gamma_\beta\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}/\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle$. On vérifie dans ce cas que le vecteur d'état après le saut, $C_\beta|\psi(t^-)\rangle$, est entièrement instable et subit presque immédiatement un second saut, un saut de cavité. L'effet total correspond là encore à un saut double et à l'action d'un opérateur scalaire sur la composante lente. Nous tirons de cette discussion les taux de saut simple et de saut double suivants :

$$\Gamma_s = \frac{\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \frac{\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle_{\text{adiab}}}{(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}} = \Gamma_{\text{ex}} \frac{\langle\psi_\alpha^{00}|P_\alpha^2|\psi_\alpha^{00}\rangle}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \equiv \Gamma_{\text{ex}}\langle P_\alpha^2 \rangle \quad (4.16)$$

$$\Gamma_d = \frac{\kappa(\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle + \langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle)_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} \frac{\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}}{(\langle\psi_\alpha^{01}|\psi_\alpha^{01}\rangle + \langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle)_{\text{adiab}}} + \frac{\gamma_\beta\langle\psi_\alpha^{11}|\psi_\alpha^{11}\rangle_{\text{adiab}}}{\langle\psi_\alpha^{00}|\psi_\alpha^{00}\rangle} = \Gamma_0. \quad (4.17)$$

On obtient finalement l'équation pilote à un mode décrivant l'évolution lente de l'opérateur densité ρ_α du mode bosonique α (hybridé mais presque purement de spin nucléaire) :

$$\boxed{\frac{d\rho_\alpha}{dt} = C_s\rho_\alpha C_s^\dagger - \frac{1}{2}\{C_s^\dagger C_s, \rho_\alpha\} + C_d\rho_\alpha C_d^\dagger - \frac{1}{2}\{C_d^\dagger C_d, \rho_\alpha\}} \quad (4.18)$$

en termes de deux sauts quantiques, le saut simple (uniquement de cavité) C_s et le saut double (de cavité et d'échange de métastabilité dans cet ordre ou dans l'autre) C_d :

$$C_s = \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}\mathbb{P}_\alpha, \quad C_d = \sqrt{\Gamma_0}\mathbb{1}. \quad (4.19)$$

De l'équation (4.18) intégrée pour l'état initial vide de α , on tire :

$$\langle X_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4}(1 + \Gamma_{\text{ex}}t), \quad \langle P_\alpha^2 \rangle = \frac{1}{4} \quad (4.20)$$

ce qui désigne effectivement Γ_{ex} comme un taux de création d'excitations dans le mode α . En revenant à la base atomique initiale (non tournée) et en limitant le vecteur d'état (4.8) à son premier terme, on retrouve les résultats (3.35)-(3.38) du modèle à trois modes, pourtant valables à couplage de Faraday Ω quelconque, pas nécessairement infinitésimal. Enfin, le nombre moyen de photons polarisés selon Oy sortant de la cavité par unité de temps, donné dans le modèle à un mode par $\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}}/4$ comme le montrera l'équation (4.27), est en accord avec la valeur exacte $\kappa \langle c^\dagger c \rangle_s$ où le nombre moyen stationnaire de photons polarisés selon Oy dans la cavité $\langle c^\dagger c \rangle_s = \langle X_c^2 \rangle_s - 1/4$ est le résultat (3.39).⁵

4.3 Dynamique conditionnée au résultat du comptage

Supposons que l'on compte en continu et directement (par photodétection) le nombre de photons polarisés selon Oy sortant de la cavité (voir la figure 1.1b), comme l'a proposé la référence [47]. L'opérateur de saut associé à cette mesure est $\sqrt{\kappa}c$, de sorte que l'équation pilote à trois modes (3.33) est déjà sous la bonne forme pour analyser l'évolution du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ conditionnée à la mesure. Commençons par étudier la situation d'un faible couplage de Faraday, la limite $\Omega \rightarrow 0$, qui conduit au modèle à un mode de la section 4.2. On enchaînera par la suite avec une vérification numérique de ces prédictions analytiques dans le modèle à trois modes.

4.3.1 Résultats analytiques à un mode

Comme les opérateurs de saut C_d et C_s de l'équation pilote (4.18) correspondent tous deux à la perte en cavité d'un photon polarisé selon Oy (rappelons-le, C_d résulte d'un saut de cavité immédiatement suivi ou précédé d'un saut d'échange de métastabilité, et C_s d'un saut simple de cavité), la mesure ne peut faire la distinction entre les deux, et l'opérateur densité conditionné à un nombre donné n de photons détectés est obtenu en moyennant sur des réalisations ayant ce même nombre *total* n de sauts. Un vecteur d'état Monte-Carlo non normalisé ayant subi ces n sauts pendant la durée t s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}}^{00}(t-t_n)} C_{\epsilon_n} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}}^{00}(t_n-t_{n-1})} C_{\epsilon_{n-1}} \dots C_{\epsilon_1} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{\text{eff}}^{00} t_1} |\psi(0)\rangle \quad (4.21)$$

où $\epsilon_k \in \{s, d\}$ et t_k sont le type et l'instant du k ème saut, H_{eff}^{00} est l'hamiltonien effectif (4.12) et nous notons le vecteur d'état du modèle à un mode $|\psi\rangle$ plutôt que $|\psi_\alpha^{00}\rangle$ pour alléger. La moyenne quantique d'une observable O s'obtient en moyennant sur toutes les trajectoires possibles, donc en sommant sur le nombre et le type des sauts et en intégrant sur leurs instants :

$$\langle O \rangle(t) = \sum_n \int_{0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t} dt_1 dt_2 \dots dt_n \sum_{(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{s, d\}^n} \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle \quad (4.22)$$

où la norme au carré de chaque vecteur d'état non normalisé $|\psi(t)\rangle$ donne automatiquement sa densité de probabilité [48]. En prenant $O = \mathbb{1}$, nous en déduisons la probabilité que n

5. En revanche, la valeur de $\langle c^\dagger c \rangle_{\text{adiab}}$ dans la forme adiabatique (4.11) du vecteur d'état ne représente pas ce nombre. La solution du paradoxe tient à l'existence de la voie de désexcitation (ii), celle de l'annihilation en premier saut de l'excitation $n_\beta = 1$ dans le mode du métastable immédiatement suivie par la perte d'un photon en cavité. Le vrai taux de sortie de photons polarisés selon Oy est donc $\kappa \langle c^\dagger c \rangle_{\text{adiab}} + \gamma_\beta \langle \beta^\dagger \beta \rangle_{\text{adiab}}$.

sauts se soient produits dans l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\Pi_n(t) = \int_{0 < t_1 < t_2 \dots < t_n < t} dt_1 dt_2 \dots dt_n \sum_{(\epsilon_k)_{1 \leq k \leq n} \in \{s, d\}^n} \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle \quad (4.23)$$

Pour évaluer (4.23), nous tirons parti du fait que tous les opérateurs de saut dans (4.21) et leurs conjugués hermitiens commutent entre eux et avec H_{eff}^{00} .⁶ En utilisant les identités

$$\sum_{\epsilon_n=s,d} \dots \sum_{\epsilon_1=s,d} (C_{\epsilon_n}^\dagger C_{\epsilon_n} \dots C_{\epsilon_1}^\dagger C_{\epsilon_1}) = \left(\sum_{\epsilon_n=s,d} C_{\epsilon_n}^\dagger C_{\epsilon_n} \right) \dots \left(\sum_{\epsilon_1=s,d} C_{\epsilon_1}^\dagger C_{\epsilon_1} \right) = (\Gamma_{\text{ex}} P_\alpha^2 + \Gamma_0 \mathbb{1})^n \quad (4.24)$$

et en injectant une relation de fermeture dans la base propre de P_α telle que $P_\alpha |p_\alpha\rangle = p_\alpha |p_\alpha\rangle$, après avoir intégré sur les temps t_k comme le permet le produit télescopique des opérateurs d'évolution, nous obtenons

$$\Pi_n(t) = \frac{t^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_\alpha (\Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)^n e^{-\Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2 t} e^{-\Gamma_0 t} \Pi(p_\alpha, 0) \quad (4.25)$$

$$= \binom{2n}{n} \frac{(\Gamma_{\text{ex}} t / 8)^n e^{-\Gamma_0 t}}{(1 + \Gamma_{\text{ex}} t / 2)^{n+1/2}} \Phi \left(-n, \frac{1}{2} - n; \Gamma_0 t + \frac{2\Gamma_0}{\Gamma_{\text{ex}}} \right) \quad (4.26)$$

où $\Pi(p_\alpha, 0)$ est la distribution de probabilité initiale de p_α (une gaussienne de moyenne nulle et de variance $1/4$) et Φ est la fonction hypergéométrique confluyente de Kummer ${}_1F_1$. On remarque que (4.26) est en fait une moyenne gaussienne sur p_α d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = (\Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)t$. On en déduit la moyenne et la variance du nombre de photodétections pendant la durée t :

$$\langle n \rangle = \left(\Gamma_0 + \frac{1}{4} \Gamma_{\text{ex}} \right) t, \quad \text{Var } n = \langle n \rangle + \frac{(\Gamma_{\text{ex}} t)^2}{8}. \quad (4.27)$$

Toujours en utilisant l'équation (4.26), nous accédons à la distribution de probabilité de p_α sachant que n photons ont été détectés dans l'intervalle de temps $[0, t]$:

$$\Pi_t(p_\alpha | n) = \frac{1}{\Pi_n(t)} \frac{t^n}{n!} (\Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2 + \Gamma_0)^n e^{-\Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2 t} e^{-\Gamma_0 t} \Pi(p_\alpha, 0) \quad (4.28)$$

Comme on pouvait s'y attendre, c'est une fonction paire de p_α , la photodétection donnant accès seulement à l'intensité du champ sortant polarisé selon Oy et ne pouvant distinguer entre des valeurs opposées $\pm p_\alpha$ de la quadrature P_α du spin nucléaire hybridé selon Oz . Il en résulte donc une compression des fluctuations de P_α^2 plutôt que de P_α , ce que nous caractérisons par la moyenne et la variance conditionnelles de P_α^2 sachant que n photons ont été détectés pendant t , déduites de (4.28) :

$$\langle P_\alpha^2 \rangle_n = \frac{(n+1) \Pi_{n+1}(t)}{\Gamma_{\text{ex}} t \Pi_n(t)} - \frac{\Gamma_0}{\Gamma_{\text{ex}}} \quad (4.29)$$

6. Pour cette raison, garder l'information sur les instants des sauts ne permet pas, par post-sélection, d'augmenter l'efficacité de la compression de spin. En effet, l'opérateur densité $\rho_\alpha(t)|_{t_1, \dots, t_n}$ sachant que n sauts se sont produits aux instants t_1, \dots, t_n conduit à la même distribution de probabilité de P_α que l'opérateur densité $\rho_\alpha(t)|_n$ sachant seulement qu'il y a eu n sauts pendant $[0, t]$.

$$\text{Var}_n(P_\alpha^2) \equiv \langle P_\alpha^4 \rangle_n - \langle P_\alpha^2 \rangle_n^2 = \frac{(n+1)^2}{(\Gamma_{\text{ext}} t)^2} \left[\frac{(n+2)\Pi_{n+2}(t)}{(n+1)\Pi_n(t)} - \frac{\Pi_{n+1}^2(t)}{\Pi_n^2(t)} \right]. \quad (4.30)$$

Enfin, au moyen de l'équation (4.28), nous trouvons que pour $\Gamma_{\text{ext}} t \rightarrow +\infty$, la distribution de probabilité de p_α^2 conditionnée au nombre n de photodétections est piquée autour d'une valeur p_0^2 avec une variance conditionnelle tendant vers zéro⁷ :

$$\boxed{p_0^2 - \frac{1}{4} = \frac{n - \langle n \rangle}{\Gamma_{\text{ext}} t}} \quad \text{d'où} \quad \langle P_\alpha^2 \rangle_n \underset{\Gamma_{\text{ext}} t \rightarrow +\infty}{\sim} p_0^2 \quad ; \quad \boxed{\text{Var}_n(P_\alpha^2) \underset{\Gamma_{\text{ext}} t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{(\Gamma_{\text{ext}} t)^2} \rightarrow 0} \quad (4.31)$$

En remplaçant dans cette expression n par sa valeur moyenne et en tenant compte de la valeur $1/8$ de la variance de P_α^2 dans l'état initial, nous aboutissons au taux de compression du spin nucléaire par comptage de photons :

$$\boxed{\Gamma_{\text{sq}} = \frac{\Gamma_{\text{ex}}^2}{8(\Gamma_0 + \frac{1}{4}\Gamma_{\text{ex}})}}. \quad (4.32)$$

De même, la distribution de probabilité conditionnelle de p_α présente deux pics à $\pm p_0$ comme on peut le voir sur la fonction de Wigner de la figure 4.2b, obtenue par simulation numérique de l'évolution conditionnelle du système aux temps longs dans le modèle à un mode (4.18). Ceci montre bien que, lors d'une réalisation donnée de l'expérience, la photodétection en continu des photons polarisés selon Oy sortant de la cavité rend de plus en plus certaine la valeur de P_α^2 , et donc dans une large mesure de I_z^2 , le carré de la composante selon Oz du spin nucléaire collectif, comme on le voit en reliant dans la limite $\Omega \rightarrow 0$ les moments conditionnels de P_a^2 , c'est-à-dire de I_z^2 , à ceux de P_α^2 :

$$\langle P_a^2 \rangle_n = \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \langle P_\alpha^2 \rangle_n + \frac{\gamma_f/4}{\gamma_f + \gamma_m} \quad (4.33)$$

$$\text{Var}_n(P_a^2) = \frac{\gamma_m^2}{(\gamma_f + \gamma_m)^2} \text{Var}_n(P_\alpha^2) + \frac{\gamma_f \gamma_m}{(\gamma_f + \gamma_m)^2} \langle P_\alpha^2 \rangle_n + \frac{\gamma_f^2/8}{(\gamma_f + \gamma_m)^2}. \quad (4.34)$$

Puisque la compression porte sur P_a^2 plutôt que sur P_a , la distribution angulaire conditionnelle du spin nucléaire collectif est bimodale (elle présente comme celle de P_α deux pics bien séparés pourvu que $\gamma_f/\gamma_m \ll (2p_0)^2$); ces structures plus étroites que la limite quantique standard permettent quand même un pointage angulaire plus précis qu'avec un état non comprimé. Nous redéfinissons donc le gain métrologique (3.26) en remplaçant au troisième membre de cette équation la variance conditionnelle de P_a par le carré de la mi-largeur δP_a des pics centrés en $\pm P_{a,0}$ de la distribution de probabilité conditionnelle de P_a , puis en assimilant le centre $P_{a,0}^2$ et la largeur $\delta(P_a^2)$ de la distribution de P_a^2 à la moyenne et à l'écart-type conditionnels de P_a^2 :

$$\xi^2 = \frac{4(\delta P_a)^2}{\eta} = \frac{(2P_{a,0}\delta P_a)^2}{\eta P_{a,0}^2} = \frac{[\delta(P_a^2)]^2}{\eta P_{a,0}^2} = \frac{\text{Var}_n(P_a^2)}{\eta \langle P_a^2 \rangle_n} \quad (4.35)$$

7. D'après l'équation (4.27), le second membre de la première équation (4.31) est asymptotiquement de l'ordre de l'unité pour une séquence de photodétection typique. Cette équation n'a en fait de sens que pour p_0^2 positif donc $n > \Gamma_0 t$; alors, les équivalents (4.31) s'appliquent lorsque l'écart entre les deux pics dans $\Pi_t(p_\alpha|n)$ est beaucoup plus grand que leur largeur, ce qui impose $2p_0^2 \gg n^{1/2}/\Gamma_{\text{ext}} t = (\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}} p_0^2)^{1/2}/\Gamma_{\text{ext}} t^{1/2}$. Pour les obtenir, on pose $n = \gamma t$ avec $\gamma > \Gamma_0$, puis on écrit (4.28) sous la forme $\exp[-tS(p_\alpha)]\Pi(p_\alpha, 0)$ et on quadratise $S(p_\alpha)$ autour de ses minima.

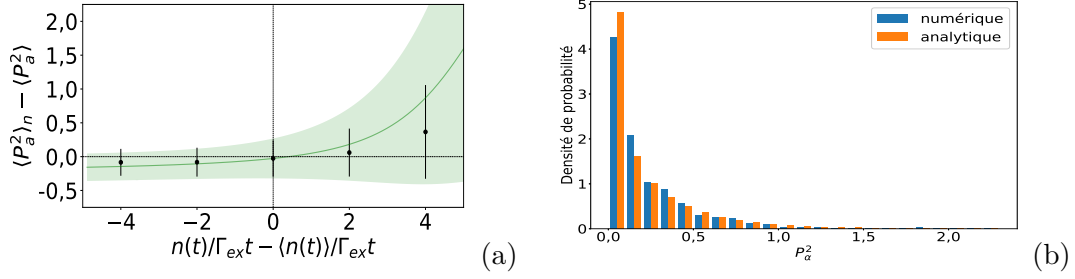


FIGURE 4.1 – Compression de P_a^2 par comptage de photons aux temps courts, $\Gamma_{\text{ext}} t = 15$, où Γ_{ex} est le taux (4.13) de création d’excitations dans le mode bosonique nucléaire hybridé α . (a) Moyenne et écart-type conditionnels de la quadrature du spin nucléaire au carré P_a^2 sachant que n photodétections ont eu lieu dans l’intervalle de temps $[0, t]$, en fonction de ce nombre n . L’écart-type est représenté sous la forme d’un intervalle de confiance. La moyenne inconditionnelle $\langle P_a^2 \rangle = 1/4$ est indépendante du temps, voir l’équation (3.35). Points noirs et barres d’erreur : simulation numérique du modèle à trois modes avec 3000 réalisations ; ligne verte et zone colorée : prédictions analytiques tirées des équations (4.26), (4.29), (4.30) et (4.33), (4.34) du modèle à un mode. En pratique, les points noirs sont obtenus après moyenne sur des classes de valeurs de n centrées sur ces points (dans une classe donnée, les trajectoires ont des nombres de photodétections proches mais des histoires indépendantes pour les sauts d’échange de métastabilité auxquelles l’expérimentateur n’a pas accès). Paramètres du modèle à trois modes : $\Omega/\kappa = 1/3$, $\gamma_m/\kappa = 1/10$, $\gamma_f/\kappa = 1/1000$ (si bien que $\Gamma_{\text{ex}}/\kappa = 1/909$), $n_a^{\text{max}} = 64$, $n_b^{\text{max}} = n_c^{\text{max}} = 8$. Ceci correspond à $\Gamma_0/\Gamma_{\text{ex}} = 12\,500/601 \simeq 20,8$ et $\Gamma_{\text{sq}}/\Gamma_{\text{ex}} = 601/101\,202 \simeq 1/168$ où Γ_{sq} est le taux de compression (4.32). (b) Pour la classe centrée sur $n = \langle n(t) \rangle$, histogramme des valeurs conditionnelles de P_a^2 . Barres bleues : simulation numérique du modèle à trois modes ; barres orange : prédictions analytiques tirées de l’équation (4.28) du modèle à un mode.

Remarquons que cette expression ne se déduit pas de la méthode des moments exposée dans la section II.B.6 de la référence [12] en prenant P_a^2 comme estimateur, car l’effet de la transformation unitaire $\exp(2i\theta X_a)$ (en pratique, une précession du spin nucléaire autour d’un champ magnétique selon Oy) n’est pas de déplacer le pic dans la distribution de P_a^2 mais de le cliver en deux pics centrés en $(P_{a,0} \pm \theta)^2$.

4.3.2 Résultats numériques à trois modes

Effectuons pour terminer une vérification numérique de ces prédictions analytiques dans le modèle à trois modes. Sur la figure 4.1a, nous représentons la moyenne conditionnelle du carré P_a^2 de la quadrature de spin nucléaire sachant que n photodétections se sont produites dans l’intervalle de temps $[0, t]$, avec $\Gamma_{\text{ext}} t = 15$ (points noirs), en fonction de ce nombre n . L’ensemble des réalisations est divisé en 5 classes correspondant à un nombre de photodétections tombant dans un intervalle donné, et les points noirs sont obtenus en moyennant sur les réalisations dans une même classe. Les résultats numériques sont proches des prédictions analytiques tirées de (4.33) et (4.34) et représentées en vert, sauf dans les classes extrêmes qui comportent un nombre trop faible de réalisations. En revanche, les prédictions analytiques asymptotiques (4.31), non représentées, seraient en désaccord avec les simulations des

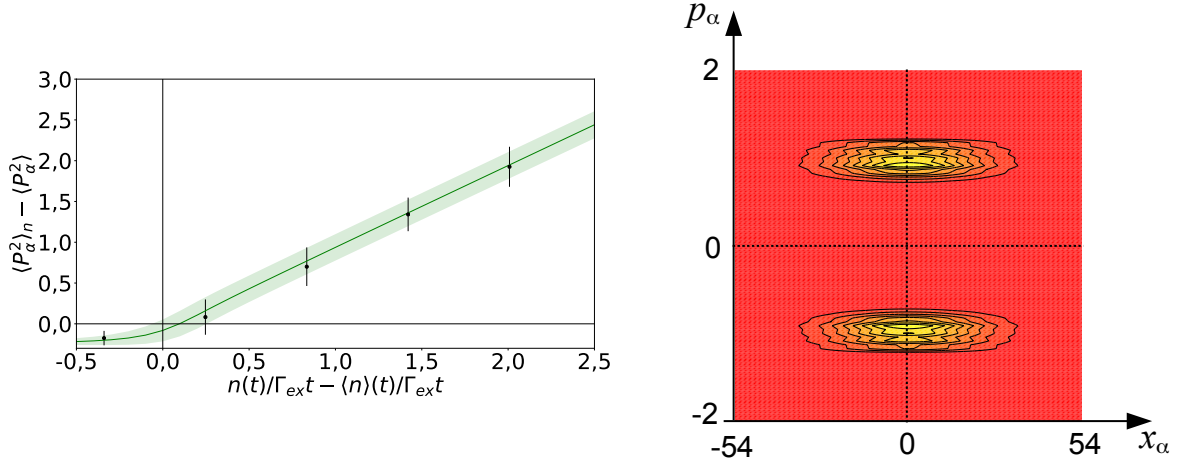


FIGURE 4.2 – Compression de P_α^2 par comptage de photons aux temps longs dans le modèle à un mode (4.18). (a) Moyenne et écart-type conditionnels de P_α^2 sachant que le nombre de photodétections n tombe dans une classe de valeurs donnée, de manière similaire à la figure 4.1a mais pour $\Gamma_{\text{ex}}t = 1000$ et 2000 réalisations (ce temps long rendrait difficile une simulation dans le modèle à trois modes). (b) Distribution de Wigner du mode bosonique nucléaire hybridé dans l'espace des quadratures (X_α, P_α) à $\Gamma_{\text{ex}}t = 1000$, obtenue par moyennage des dyades $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ dont le nombre de photodétections tombe dans la troisième classe de (a) (302 trajectoires sur 5000 réalisations). Elle présente deux lignes de crête mais pas de franges d'interférence.

deux modèles car le temps $t = 15/\Gamma_{\text{ex}}$ n'est pas assez long, il est très inférieur au temps de compression $1/\Gamma_{\text{sq}}$. Sur la figure 4.1b, nous représentons la distribution de probabilité conditionnelle de P_α^2 correspondant à la classe centrale de la figure 4.1a; il y a là aussi bon accord entre analytique à un mode et numérique à trois modes.

Sur la figure 4.2, nous explorons justement les temps longs dans le modèle à un mode, avec $\Gamma_{\text{ex}}t = 1000$ c'est-à-dire $\Gamma_{\text{sq}}t \simeq 5,94$. La figure 4.2a, qui est l'équivalent de la figure 4.1a, montre que $\langle P_\alpha^2 \rangle_n$ est alors relié au nombre de photodétections n comme dans la prédiction analytique (4.31), c'est-à-dire selon la première bissectrice dans les unités de la figure, avec un écart-type conditionnel dans (4.31) à peu près constant $\simeq (\Gamma_0 t)^{1/2}/\Gamma_{\text{ex}}t \simeq 1/(\Gamma_{\text{sq}}t)^{1/2}$ car Γ_0 est ici $\gg \Gamma_{\text{ex}}$. L'absence de franges montre qu'on a préparé un mélange statistique plutôt qu'une superposition cohérente de deux états comprimés en la quadrature P_α . Sur la figure 4.2b, on trouve en effet à partir de l'équation (4.22) que

$$\langle p_0 | \rho_n(t) | -p_0 \rangle / \langle p_0 | \rho_n(t) | p_0 \rangle = [(\Gamma_0 - \Gamma_{\text{ex}} p_0^2) / (\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}} p_0^2)]^n \simeq \exp(-2\Gamma_{\text{ex}} t p_0^2) \lll 1 \quad (4.36)$$

$\rho_n(t)$ étant l'opérateur densité conditionnel. La méthode de Laplace donne aux temps longs la distribution de Wigner conditionnelle

$$W_t(x_\alpha, p_\alpha | n) \sim \pi \Pi_t(p_\alpha | n) \exp[-2x_\alpha^2 / \Gamma_{\text{ex}} t s(p_\alpha)] / \sqrt{\pi \Gamma_{\text{ex}} t s(p_\alpha)} \quad (4.37)$$

avec $s(p_\alpha) = [1 + (\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}} p_0^2) / (\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}} p_\alpha^2)] / 2$. On remarque que $s(\pm p_0) = 1$ et $s(p_\alpha) \simeq 1$ pour $\Gamma_0 \gg \Gamma_{\text{ex}}$. Alors que $W_t(0, 0 | n)$ est écrasé exponentiellement en temps (dans la limite $\Gamma_{\text{ex}} \ll \Gamma_0$, il vient $W_t(0, 0 | n) \sim (\Gamma_{\text{ex}}/\Gamma_0)^{1/2} p_0 \exp(2p_0^2) \exp(-4p_0^4 \Gamma_{\text{sq}} t)$), on a aussi

$W_t(0, 0|n) = \langle 2\varepsilon \rangle_n$ où $\varepsilon = \pm 1$ est la parité de la fonction d'onde Monte-Carlo $\psi(p_\alpha, t)$. Dans une simulation numérique, on a donc seulement une décroissance lente $\langle \varepsilon \rangle_n \approx 1/\sqrt{\mathcal{N}_n}$ où \mathcal{N}_n est le nombre de trajectoires ayant subi n sauts pendant t ; ceci conduit à des franges non physiques à valeurs négatives dans la distribution de Wigner près de l'axe Ox_α . Pour minimiser cet effet et le rendre imperceptible à une résolution en p_α pas trop haute ($dp_\alpha = 0,044$ sur la figure 4.2b), on arrête la simulation Monte-Carlo à un stade où il y a exactement le même nombre $\mathcal{N}_n/2$ de fonctions d'onde paires et impaires. Pour obtenir une superposition cohérente d'états comprimés, il faudrait effectuer une post-sélection supplémentaire, en se limitant aux réalisations Monte-Carlo de fonction d'onde $\psi(p_\alpha, t)$ de parité fixée ε (ayant subi un nombre pair de sauts simples si $\varepsilon = 1$, un nombre impair sinon, l'opérateur de saut C_s changeant la parité). Dans l'opérateur densité conditionnel correspondant, on a alors $\langle p_0|\rho_{n,\varepsilon}(t)|-p_0\rangle/\langle p_0|\rho_{n,\varepsilon}(t)|p_0\rangle = \overline{\psi(-p_0, t)\psi(p_0, t)^{n,\varepsilon}}/\overline{\psi(p_0, t)\psi(p_0, t)^{n,\varepsilon}} = \varepsilon$ sans que la structure à deux pics de la distribution de P_α ne soit affectée aux temps longs car $\Pi_t(p_\alpha|n, \varepsilon)/\Pi_t(p_\alpha|n) \propto 1 + \varepsilon[(\Gamma_0 - \Gamma_{\text{ex}}p_\alpha^2)/(\Gamma_0 + \Gamma_{\text{ex}}p_\alpha^2)]^n \rightarrow 1$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ à p_α non nul fixé. La distribution de Wigner $W_t(x_\alpha, p_\alpha|n, \varepsilon)$ présente désormais des franges positives et négatives d'amplitude maximale 2 sur l'axe $p_\alpha = 0$. Cette technique de filtrage vient à bout aussi des mécanismes de décohérence de la section 5.4 car les fonctions d'onde Monte-Carlo restent de parité bien définie après action de l'opérateur de saut correspondant $\gamma_\alpha^{1/2}\alpha$.⁸

8. Cette idée de contrôler la décohérence au travers de mesures de parité est bien connue en électrodynamique quantique en cavité [49].

Chapitre 5

Compression du spin nucléaire par détection homodyne

Avant-propos

Nous supposons maintenant que les photons sortant de la cavité polarisés selon Oy sont mesurés en continu par détection homodyne [50], comme sur la figure 1.1c, c'est-à-dire de la mesure de l'une des quadratures du champ en sortie de cavité. Dans cette situation, nous sommes en mesure de calculer, analytiquement, l'évolution de la variance de la direction Oz du spin nucléaire au cours du temps dans le modèle à un mode et dans le modèle complet à 3 modes, avec l'expression explicite de taux de compression en termes des taux du système. On poussera l'analyse jusqu'à résoudre, avec la même méthode analytique, le cas d'une décohérence dans la population métastable¹, que ce soit dans le modèle à un mode ou trois modes, en obtenant finalement l'expression du taux de compression modifié par cette perte d'atome. Pour cela, il nous faut d'abord trouver les bonnes équations stochastiques donnant l'évolution du vecteur d'état du système conditionnée à la détection homodyne, puisque les opérateurs de saut apparaissant naturellement dans l'écriture (4.4) ou (4.18) de l'équation pilote à trois modes ou à un mode sont inadaptés. Afin d'obtenir ces résultats, nous avons utilisé le fait que, pour l'état initial vide considéré ici, le vecteur d'état conditionnel est donné exactement à tout temps par un ansatz gaussien [51], quel que soit le nombre de modes du modèle, en présence ou en absence de décohérence. Les résultats montrent que cette configuration permet d'obtenir une équation déterministe donnant la réduction de la variance d'une composante transverse du spin nucléaire, bien que les résultats soient a priori conditionnés aux résultats de la mesure homodyne. Plusieurs arguments nous poussent à considérer cette configuration comme plus adaptée à une véritable réalisation expérimentale dans le cadre de la construction d'un état métrologique allant au-delà de la limite quantique standard. En premier lieu, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le taux de compression du spin nucléaire par comptage de photon est proportionnel au taux d'excitation dans le mode nucléaire Γ_{ex} , relié au processus de « saut simple » où un photon sort de la cavité corrélé à une excitation créée dans le spin nucléaire et inversement proportionnel à celui du taux

1. Seul processus de décohérence ayant un impact significatif sur le système, il correspond à la collision des atomes métastables sur les parois de la cellule, qui les ramène à l'état fondamental en perdant toute information du nuage électronique.

de « saut double » Γ_0 qui correspond à un photon sortant de la cavité sans excitation créée. Comme les photons de ces deux processus sont indiscernables, les photons du saut « double » polluent la mesure et réduisent la compression du spin accessible. Comme nous le verrons dans ce chapitre, l'avantage de la détection homodyne est qu'elle supprime la contribution de ces sauts doubles dans la dynamique du spin nucléaire accélérant d'autant le taux de compression. Une autre raison à son avantage se trouve dans la distribution des probabilités conditionnelles de I_z obtenue, qui n'est plus bimodale comme celle du chapitre 4, c'est-à-dire qu'elle converge bien vers une valeur de I_z et non de I_z^2 . Ceci assure que la nature de l'état du spin à la fin de la procédure est bien celle d'un état comprimé de spin standard, tel qu'on l'entend dans les travaux de métrologie quantique. C'est pourquoi, pour conclure ce chapitre et cette partie, nous nous basons sur cette configuration par détection homodyne pour proposer une expérience de principe. On donne des valeurs pour les paramètres définissant la configuration, qui sont réalistes dans la littérature aujourd'hui, et on montre qu'en se basant sur les résultats analytiques de ce chapitre, nous pouvons nous attendre à une compression de quelques décibels par rapport à la limite quantique standard d'un état complètement polarisé, ainsi que d'un gain métrologique $\xi^2 < 1$.²

5.1 Formulation stochastique adaptée de l'équation pilote

Une équation pilote générale de la forme de Lindblad [44]

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H, \rho] + \sum_m C_m \rho C_m^\dagger - \frac{1}{2} \{C_m^\dagger C_m, \rho\} \quad (5.1)$$

avec H la partie hermitienne de l'hamiltonien et C_m les opérateurs de saut, peut être réécrite de manière équivalente en ajoutant une constante arbitraire aux opérateurs de saut et/ou en les mélangeant par combinaison linéaire unitaire quelconque. Afin de tenir compte d'une détection homodyne sur le champ sortant, on forme, à partir d'un opérateur de saut C_m correspondant à une photodétection, les deux opérateurs de saut « homodynes » $D_{m,\pm}$ [42]

$$D_{m,+} = \frac{\mu \mathbb{1} + C_m}{\sqrt{2}}, \quad D_{m,-} = \frac{\mu \mathbb{1} - C_m}{\sqrt{2}} \quad (5.2)$$

où μ^2 a les dimensions d'une pulsation. La mesure de la différence des taux de saut $D_+^\dagger D_+ - D_-^\dagger D_-$ donne alors accès à une quadrature de C_m . Ainsi, pour μ réel et C_m correspondant à l'opérateur saut de cavité C_c , voir l'équation (4.7), la différence entre les nombres de photons N_\pm détectés pendant le court intervalle de temps Δt dans les deux voies de sortie de la figure 1.1c, qui constitue par définition le signal homodyne,

$$N_+ = (D_{c,+}^\dagger D_{c,+}) \Delta t, \quad N_- = (D_{c,-}^\dagger D_{c,-}) \Delta t, \quad \frac{N_+ - N_-}{2\mu} = \frac{c + c^\dagger}{2} \sqrt{\kappa} \Delta t \quad (5.3)$$

donne accès à X_c ; c'est bien la quadrature du champ conjuguée à P_c donc translatée d'une quantité proportionnelle à P_b et au temps sous l'action de l'hamiltonien H (3.25), ce qui

2. Rappelons que la compression du spin nucléaire dans la direction Oz est définie par la relation $\frac{\Delta I_z}{N/4}$ inférieure à 1 si la variance dans cette direction est inférieure à celle de l'état cohérent complètement polarisé, on exprimera cette compression en décibels. Le gain métrologique quant à lui, est défini par la relation $\xi^2 = (2I)^{1/2} \Delta I_z / |I_z|$ et est inférieur à 1 si l'état du spin nucléaire est plus sensible au champ magnétique que l'état cohérent complètement polarisé. Nous empruntons cette mesure à la référence [25].

renseigne sur P_a au travers des collisions d'échange de métastabilité. Dans le cas de l'équation pilote à 3 modes (4.4), on est obligé d'appliquer la procédure de dédoublement (5.2) *a priori* seulement à l'opérateur de saut de cavité. En pratique, nous l'appliquerons également à l'opérateur de saut C_β , c'est-à-dire que nous dédoublerons par homodyne *tous* les opérateurs de saut C_m , afin d'éviter l'inconfort d'une représentation mixte mêlant sauts quantiques discrets et évolution stochastique continue, voir l'équation (5.4) à venir. Dans le cas de l'équation pilote à un mode (4.18), il faut de toute façon « homodyner » les deux opérateurs de saut C_s et C_d , puisque chacun s'accompagne de la perte d'un photon en cavité, comme l'explique la section 4.2.

Dans la limite d'un oscillateur local de grande amplitude μ , on peut faire comme si Δt était infinitésimal³ et représenter l'évolution de la fonction d'onde Monte-Carlo, cette fois normalisée à l'unité, par une équation stochastique non linéaire continue sans sauts quantiques [42, 52, 53] en point de vue d'Ito :

$$\begin{aligned} d|\phi(t)\rangle = & -\frac{i}{\hbar}H|\phi(t)\rangle dt \\ & -\frac{1}{2}\sum_m \left(C_m^\dagger C_m - \langle\phi(t)|C_m + C_m^\dagger|\phi(t)\rangle C_m + \frac{1}{4}\langle\phi(t)|C_m + C_m^\dagger|\phi(t)\rangle^2 \right) |\phi(t)\rangle dt \\ & + \sum_m \left(C_m - \frac{1}{2}\langle\phi(t)|C_m + C_m^\dagger|\phi(t)\rangle \right) |\phi(t)\rangle d\zeta_m(t) \end{aligned} \quad (5.4)$$

où, à chaque opérateur de saut C_m dans l'écriture initiale de l'équation pilote, on associe un processus stochastique en temps continu $d\zeta_m(t)$, à valeurs réelles, gaussien, de moyenne nulle, de variance dt , statistiquement indépendant des autres processus et sans mémoire. Au même niveau d'approximation, l'opérateur de signal homodyne (5.3) est remplacé par la somme de sa moyenne et d'un bruit classique représentant ses fluctuations, qui n'est autre que le $d\zeta_m$ correspondant [42] :

$$\frac{N_+ - N_-}{2\mu} = \frac{\sqrt{\kappa}\langle\phi|c + c^\dagger|\phi\rangle}{2} dt + \frac{1}{2}d\zeta_c. \quad (5.5)$$

En pratique, plus que l'historique d'homodyne, c'est-à-dire la dépendance en temps détaillée du signal de détection homodyne, c'est sa moyenne temporelle sur un intervalle de temps $[0, t]$ qui est facilement accessible dans une expérience (et permet une post-sélection des états c'est-à-dire des réalisations expérimentales) sur un ensemble de poids statistique non négligeable. Nous introduisons donc le signal intégré ayant la dimension de la racine d'une pulsation,

$$\sigma(t) \equiv \frac{N_+^{\text{tot}} - N_-^{\text{tot}}}{2\mu t} = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \left[\sqrt{\kappa}\langle\phi(t')|X_c|\phi(t')\rangle + \frac{1}{2} \frac{d\zeta_c(t')}{dt'} \right] \quad (5.6)$$

et nous calculerons dans la suite la moyenne et la variance de la quadrature P_a du spin nucléaire conditionnées à σ . Rappelons que la moyenne et la variance d'une observable (ici P_a) dans une seule réalisation $|\phi(t)\rangle$ de l'équation stochastique, donc de l'expérience, n'ont en

3. Cette approximation est valable pour une résolution en temps, c'est-à-dire un pas temporel Δt , telle que $\mu^{-2} \ll \Delta t \ll \kappa^{-1}$, où κ est en pratique le taux d'évolution le plus rapide du système dans l'expérience.

général pas de sens physique, car il n'y a pas de mesure possible de la valeur moyenne d'une observable dans une seule réalisation, il faut au contraire moyenner sur un grand nombre de réalisations de l'expérience ayant évolué pendant t à partir du même cas pur ou opérateur densité initial. Un contre-exemple correspond au cas où l'on peut, par des mesures en continu, remonter à la dépendance en temps de tous les processus stochastiques $d\zeta_m$; c'est le cas du modèle à un mode soumis à une détection homodyne, la dépendance en temps du signal (5.5) fixant celle de l'unique processus stochastique $d\zeta_c$. Ceci permettrait alors, en principe, de sélectionner, parmi un grand nombre de réalisations de l'expérience, celles conduisant à l'état $|\phi(t)\rangle$ choisi, et d'en déduire les moyennes d'observables dans $|\phi(t)\rangle$; en pratique, ce serait irréaliste, compte tenu du poids statistique infinitésimal des réalisations à garder.

5.2 Solutions analytiques dans le modèle à un mode

Écrivons explicitement l'équation stochastique (5.4) pour le modèle à un mode (4.18) :

$$d|\phi(t)\rangle = -\frac{dt}{2}\Gamma_{\text{ex}}[P_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)]^2|\phi(t)\rangle + \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}\text{d}\zeta_s(t)[P_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)]|\phi(t)\rangle \quad (5.7)$$

avec $\bar{P}_\alpha(t) \equiv \langle\phi(t)|P_\alpha|\phi(t)\rangle$. Le fait marquant est que les sauts associés à l'opérateur C_d proportionnel à l'identité, qui ajoutaient du bruit dans la détection par comptage de photons de la section 4.3, ne donnent pas de contribution, l'opérateur C_d disparaissant de l'équation d'évolution conditionnelle dans le cas homodyne. En effet, les photons émis lors de ces sauts proviennent de la composante $|1\rangle|1\rangle$ du vecteur d'état (4.8) contenant une excitation β , ce qui les rend optiquement incohérents avec le champ lumineux injecté en cavité, c'est-à-dire avec la composante $|0\rangle|0\rangle$ de (4.8), au sens où $|1\rangle|1\rangle$ contribue à $\langle c^\dagger c \rangle$ mais pas à $\langle c + c^\dagger \rangle$. Il ne reste donc que le processus stochastique $d\zeta_s$ associé à l'opérateur de saut C_s . Ce processus se confond avec celui $d\zeta_c$ apparaissant dans le signal de détection homodyne (5.5), $d\zeta_s \equiv d\zeta_c$, fait admis ici mais qui sera établi en revenant au modèle à trois modes dans la section 5.3.

L'équation stochastique (5.7) présente un terme de bruit linéaire et un terme déterministe quadratique en l'opérateur P_α , réels dans l'espace de Fourier. Pour l'état initial considéré ici, elle est donc résolue exactement par un ansatz gaussien sur la fonction d'onde en représentation impulsion, réel et correctement normalisé pour la relation de commutation $[X_\alpha, P_\alpha] = i/2$:

$$\langle p_\alpha|\phi(t)\rangle = [2\pi u(t)]^{1/4} \exp\{-u(t)[p_\alpha - \bar{P}_\alpha(t)]^2\}. \quad (5.8)$$

En revanche, la gaussianité est perdue dans la compression par photodétection de la section 4.3. En utilisant le calcul d'Ito,⁴ on trouve que u suit une équation d'évolution déterministe, à intégrer avec la condition initiale $u(0) = 1$:

$$du(t) = \Gamma_{\text{ex}}dt \quad \text{donc} \quad u(t) = 1 + \Gamma_{\text{ex}}t \quad \text{et} \quad \text{Var}_\phi P_\alpha(t) \equiv \frac{1}{4u(t)} = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{ex}}t)} \quad (5.9)$$

où nous avons donné aussi la variance de P_α dans l'état $|\phi\rangle$. En revanche, l'équation sur la valeur moyenne de P_α dans $|\phi\rangle$ est purement stochastique, avec un coefficient de diffusion $D(t)$ dépendant du temps et la condition initiale $\bar{P}_\alpha(0) = 0$:

$$d\bar{P}_\alpha(t) = [2D(t)]^{1/2}\text{d}\zeta_s(t) \quad \text{avec} \quad D(t) = \frac{\Gamma_{\text{ex}}}{8u(t)^2} = \frac{\Gamma_{\text{ex}}}{8(1 + \Gamma_{\text{ex}}t)^2}. \quad (5.10)$$

4. On ne garde que les termes linéaires en dt ou en le bruit, et on remplace systématiquement les termes quadratiques $d\zeta_s^2$ par leur moyenne dt .

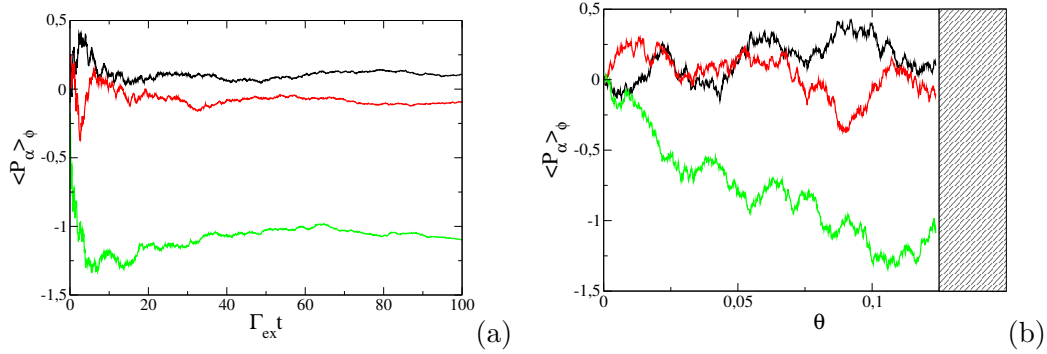


FIGURE 5.1 – Dans le cas de la compression par détection homodyne en continu, marche au hasard (5.10) effectuée dans le modèle à un mode par la valeur moyenne quantique de la quadrature P_α du spin nucléaire dans une réalisation donnée de l'expérience. (a) Valeur moyenne en fonction du temps vrai t adimensionné par le taux (4.13) de création d'excitations pour trois réalisations de l'expérience ; il s'agit d'un mouvement brownien étiré convergeant aux temps longs vers une valeur fixe mais imprédictible. (b) Idem en fonction du temps renormalisé compact θ (5.11) ; il s'agit cette fois d'un mouvement brownien ordinaire mais limité à $\theta \leq 1/8$.

Comme $D(t)$ est d'intégrale finie, $\bar{P}_\alpha(t)$ se stabilise asymptotiquement (aux temps longs) à une valeur fixe sur une seule réalisation, comme on le voit sur la figure 5.1, avec une variance dans l'état quantique $\text{Var}_\phi P_\alpha$ tendant vers 0. Ce phénomène de « convergence stochastique » vers un état propre de l'observable mesurée (en l'occurrence P_α) est attendu dans la description d'une mesure quantique par une équation de diffusion du vecteur d'état [52, 53, 54]. Pour le montrer ici, on introduit un temps θ renormalisé vis-à-vis duquel \bar{P}_α effectue un mouvement brownien ordinaire avec un coefficient de diffusion unité, et on remarque que ce temps est borné :

$$\theta = \int_0^t dt' D(t') = \frac{\Gamma_{\text{ex}} t}{8(1 + \Gamma_{\text{ex}} t)} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \theta_\infty = \frac{1}{8}. \quad (5.11)$$

À l'instant renormalisé θ_∞ , \bar{P}_α suit une loi gaussienne de moyenne nulle et de variance $1/4$: \bar{P}_α a donc la même distribution de probabilité asymptotique ($t \rightarrow +\infty$) que celle de l'observable P_α dans l'état quantique initial du spin nucléaire.

Venons-en maintenant à la moyenne et à la variance de P_α conditionnées à la valeur \mathcal{S} du signal d'homodynage intégré en temps σ (5.6). De façon remarquable, nous trouvons que la moyenne conditionnelle est toujours proportionnelle au signal, avec un coefficient de proportionnalité dépendant du temps, et que la variance conditionnelle dépend du temps mais pas du signal :

$$\boxed{\begin{aligned} \langle P_\alpha \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} &= m(t) \frac{\mathcal{S}}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} \quad ; \quad \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_\alpha) = \mathcal{V}(t) \\ \text{où } m(t) &= \frac{\Gamma_{\text{ex}} t}{1 + \Gamma_{\text{ex}} t} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(t) = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{ex}} t)}. \end{aligned}} \quad (5.12)$$

Ces expressions désignent Γ_{ex} comme le taux de compression du spin nucléaire par homody-

nage dans le modèle à un mode donc à faible couplage de Faraday :

$$\Gamma_{\text{sq}} \underset{\Omega \rightarrow 0}{\sim} \Gamma_{\text{ex}} = \frac{\Omega^2}{\kappa} \frac{\gamma_{\text{f}}}{\gamma_{\text{m}} + \gamma_{\text{f}}}. \quad (5.13)$$

Sur la figure 5.2a, nous représentons $m(t)$ et $\mathcal{V}(t)$ en fonction du temps réduit $\Gamma_{\text{ex}}t$. De même que la variance quantique sur une réalisation $\text{Var}_{\phi}P_{\alpha}$, avec laquelle elle coïncide en fait, la variance conditionnelle tend asymptotiquement vers zéro comme l'inverse du temps. Dans la moyenne conditionnelle, le coefficient $m(t)$ tend vers 1 aux temps longs. Pour le comprendre, relierons le signal intégré (5.6) à \bar{P}_{α} en utilisant les expressions adiabatiques (4.11) dans le vecteur d'état tronqué (4.8) :

$$\sigma(t) = \frac{1}{t} \int_0^t dt' \left[\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}} \bar{P}_{\alpha}(t') + \frac{1}{2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \right]. \quad (5.14)$$

Comme $\bar{P}_{\alpha}(t)$ se stabilise asymptotiquement sur une seule réalisation, et que la moyenne temporelle du bruit $d\zeta_s$ tend vers zéro comme $1/t^{1/2}$ presque sûrement, $\sigma(+\infty)$ donne directement la valeur de $\bar{P}_{\alpha}(+\infty)$ à un facteur constant $\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}$ près.

Pour établir les résultats (5.12), relierons d'abord la variance conditionnelle de l'opérateur P_{α} à celle de sa moyenne quantique sur une réalisation \bar{P}_{α} comme suit :

$$\text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_{\alpha}) \equiv \langle \langle \phi | P_{\alpha}^2 | \phi \rangle \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} - \langle \langle \phi | P_{\alpha} | \phi \rangle \rangle_{\sigma=\mathcal{S}}^2 \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned} &= \langle \langle \phi | P_{\alpha}^2 | \phi \rangle - \langle \phi | P_{\alpha} | \phi \rangle^2 \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} + \langle \bar{P}_{\alpha}^2 \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} - \langle \bar{P}_{\alpha} \rangle_{\sigma=\mathcal{S}}^2 \\ &= \langle \text{Var}_{\phi} P_{\alpha} \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} + \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(\bar{P}_{\alpha}) \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \Gamma_{\text{ex}}t} + \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(\bar{P}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (5.16)$$

où nous avons utilisé l'expression (5.9) de la variance quantique de P_{α} dans l'état $|\phi\rangle$. Il reste donc à déterminer la distribution de probabilité conditionnelle de \bar{P}_{α} sachant que $\sigma = \mathcal{S}$,

$$P(\bar{P}_{\alpha} = p_{\alpha} | \sigma = \mathcal{S}) \equiv \frac{P(\bar{P}_{\alpha} = p_{\alpha}, \sigma = \mathcal{S})}{P(\sigma = \mathcal{S})}. \quad (5.17)$$

Or, la variable aléatoire $\bar{P}_{\alpha}(t)$, résultant d'un mouvement brownien (5.10), a une distribution de probabilité gaussienne; il en va de même pour l'intégrale temporelle de \bar{P}_{α} et du bruit $d\zeta_s$, donc du signal σ (5.14) qui en est la somme. Comme les variables \bar{P}_{α} et σ sont de moyennes nulles, leur distribution de probabilité conjointe est caractérisée par leur matrice de covariance, ou plus directement par sa matrice inverse, si bien que

$$P(\bar{P}_{\alpha} = p_{\alpha} | \sigma = \mathcal{S}) = \frac{\frac{1}{2\pi \sqrt{\langle P_{\alpha}^2 \rangle_{\text{stoch}} \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma P_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}}^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{p_{\alpha}^2 \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} + \mathcal{S}^2 \langle \bar{P}_{\alpha}^2 \rangle_{\text{stoch}} - 2p_{\alpha} \mathcal{S} \langle \sigma \bar{P}_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}}}{\langle P_{\alpha}^2 \rangle_{\text{stoch}} \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma P_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}}^2}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{S}^2}{2 \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}\right)} \quad (5.18)$$

$$P(\bar{P}_{\alpha} = p_{\alpha} | \sigma = \mathcal{S}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \left[\langle \bar{P}_{\alpha}^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}}^2 / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} \right]}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{\left(p_{\alpha} - \mathcal{S} \langle \sigma \bar{P}_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}} / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}} \right)^2}{2 \langle \bar{P}_{\alpha}^2 \rangle_{\text{stoch}} - \langle \sigma \bar{P}_{\alpha} \rangle_{\text{stoch}}^2 / \langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}} \right] \quad (5.19)$$

où $\langle \dots \rangle_{\text{stoch}}$ à l'instant t est la moyenne prise sur toutes les réalisations du processus stochastique $d\zeta_s(t')$ sur l'intervalle de temps $[0, t]$. On en déduit que, dans les équations (5.12),

$$m(t) = \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}} \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad (5.20)$$

$$\mathcal{V}(t) = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{ex}} t)} + \langle \bar{P}_\alpha^2(t) \rangle_{\text{stoch}} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}}. \quad (5.21)$$

Afin de déterminer leurs variances et covariance, on écrit $\sigma(t)$ et $\bar{P}_\alpha(t)$ comme des fonctionnelles linéaires du processus stochastique $d\zeta_s$ et on utilise le fait que les forces de Langevin $d\zeta_s(t)/dt$ et $d\zeta_s(t')/dt'$ ont une fonction de corrélation de Dirac $\delta(t - t')$. Donnons l'exemple de la première contribution à $\sigma(t)$:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt'' \bar{P}_\alpha(t'') &= \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \\ &= \int_0^t dt' \int_{t'}^t dt'' [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \\ &= \int_0^t dt' (t - t') [2D(t')]^{1/2} \frac{d\zeta_s(t')}{dt'} \end{aligned} \quad (5.22)$$

où l'on a changé l'ordre d'intégration sur t' et t'' puis intégré explicitement sur t'' . On aboutit aux expressions cherchées (5.12), dont la simplicité découle du fait que, sur une réalisation de l'expérience, on a toujours

$$\boxed{\sigma(t) = \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}} \frac{1 + \Gamma_{\text{ex}} t}{\Gamma_{\text{ex}} t} \bar{P}_\alpha(t)}. \quad (5.23)$$

De manière remarquable, la connaissance du seul signal intégré $\sigma(t)$ dans une réalisation de l'expérience de durée t suffit à préparer le spin nucléaire dans un cas pur gaussien bien défini (5.8), avec un paramètre u donné par l'équation (5.9) et une quadrature moyenne \bar{P}_α liée au signal par l'équation (5.23).

Pour terminer, revenons à la quadrature P_a du spin nucléaire non hybridé, qui est celle véritablement utilisable dans l'expérience une fois la décharge éteinte dans la cellule, comme le montre l'expression (3.26) du gain métrologique dans une mesure de précession. En quittant la base tournée par inversion de la transformation (4.3) et en limitant l'équation (4.8) à son premier terme (à l'ordre dominant en Ω), il vient

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} = \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \right)^{1/2} \langle P_\alpha \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} \quad (5.24)$$

$$\text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_a) = \frac{\gamma_f}{4(\gamma_f + \gamma_m)} + \frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_\alpha). \quad (5.25)$$

La variance conditionnelle de P_a aux temps longs tend vers une valeur non nulle, bien que faible en pratique : c'est la limite intrinsèque de ce schéma de compression de spin nucléaire, qui utilise l'état métastable de ^3He comme intermédiaire.

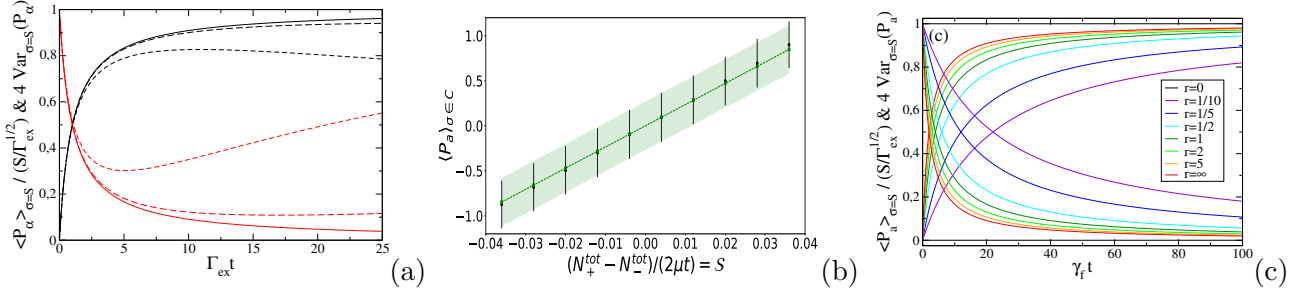


FIGURE 5.2 – Compression du spin nucléaire par mesure homodyne en continu. (a) Dans le modèle à un mode, moyenne (en noir) et variance (multipliée par 4, en rouge) de la quadrature P_α du spin nucléaire hybridé conditionnées au signal d’homodynage intégré σ , en fonction du temps d’intégration t . Traits pleins : expressions analytiques (5.12). Tiretés : expressions (5.60) en présence de décohérence par désexcitation des métastables sur les parois de la cellule (tireté long : $\epsilon = 1/100$, tireté court : $\epsilon = 1/10$, avec $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{ex}}$ et γ_α le taux de décohérence ramené (5.56)). (b) Dans le modèle à trois modes, pour $\Gamma_{\text{ex}} t = 5$, moyenne et écart-type de la quadrature P_a du spin nucléaire conditionnés à l’appartenance du signal σ à une classe C , l’intervalle de valeurs de σ ayant été partagé en 10 classes de même largeur (les valeurs S de σ sont en unités de $\Gamma_{\text{ex}}^{1/2}$ sur l’axe des abscisses). L’écart-type est représenté sous la forme d’un intervalle de confiance. En noir : simulation numérique de l’équation stochastique (5.4) avec 1079 réalisations. Tireté vert et zone colorée : résultats exacts tirés des relations (5.38) et (5.39), et de l’expression analytique de la distribution de probabilité conditionnelle de \bar{P}_a en termes des variances et covariance (5.46)-(5.48) sur le modèle de l’équation (5.19). L’écart entre numérique et analytique dans les classes extrêmes est imputable au faible nombre de réalisations tombant dans ces classes. Valeurs des paramètres : $\Omega/\kappa = 1/10$, $\gamma_m/\kappa = 1/10$, $\gamma_f/\kappa = 1/100$, $\Gamma_{\text{ex}}/\kappa = 1/1000$. (c) Dans la limite $\Gamma_{\text{ex}} \rightarrow 0$ à $\Gamma_{\text{ex}}/2\gamma_f$ fixé du modèle à trois modes, moyenne et variance conditionnelles de P_a (5.50) en fonction du temps réduit $\gamma_f t$, pour différentes valeurs du rapport $r = 2\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f$ (courbes croissantes : moyenne, courbes décroissantes : variance).

5.3 Solutions analytiques dans le modèle à trois modes

L’étude de la compression de spin dans le cadre du modèle à un mode est limitée au régime (4.2) où le taux de compression $\Gamma_{\text{sq}} \sim \Gamma_{\text{ex}}$ correspond à l’échelle de temps la plus longue du système. Il est cependant crucial pour les applications de voir jusqu’où on peut accélérer le processus de compression en augmentant Γ_{ex} donc, par exemple, le couplage de Faraday Ω des atomes métastables au champ en cavité. À cette fin, nous obtenons la solution analytique du modèle à trois modes en utilisant le caractère gaussien du vecteur d’état qui résulte, comme pour le modèle à un mode, de l’état initial considéré (le vide), de la linéarité des opérateurs de saut C_m et de la quadraticité de l’hamiltonien H en les quadratures des modes. L’équation stochastique (5.4) admet donc comme solution exacte l’ansatz gaussien généralisant celui de l’équation (5.8),

$$\langle p_\alpha, p_\beta, x_c | \phi(t) \rangle = \phi(\mathbf{q}, t) = [8\pi \det \underline{u}(t)]^{1/4} \exp \left\{ -[\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}(t)] \cdot \underline{u}(t) [\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}(t)] \right\} \equiv e^{-S} \quad (5.26)$$

où \underline{u} est une matrice 3×3 symétrique réelle, $\bar{\mathbf{q}}$ est un vecteur à trois composantes réelles, les coordonnées $q_\alpha = p_\alpha$ et $q_\beta = p_\beta$ sont dans l'espace de Fourier (base propre de la quadrature P) et la coordonnée $q_c = x_c$ est dans l'espace des « positions » (base propre de la quadrature X). La seule astuce ici était de choisir comme opérateur de saut d'échange de métastabilité $C_\beta = \sqrt{\gamma_\beta} i\beta$; ce choix de phase, qui ne change bien entendu pas l'équation pilote (4.4), reste légitime pour l'évolution conditionnée à la détection homodyne du champ car les sauts de métastabilité ne sont pas mesurés. Dans la représentation mixte de la fonction d'onde (5.26), l'hamiltonien H est alors imaginaire pur et les opérateurs de saut sont réels, d'où l'ansatz réel (5.26).⁵

Pour obtenir les équations du mouvement sur \underline{u} et $\bar{\mathbf{q}}$, nous calculons de deux manières différentes la variation relative $d\phi(\mathbf{q}, t)/\phi(\mathbf{q}, t)$ de la fonction d'onde, d'une part en la reliant à la variation dS de la quantité S dans (5.26), séparée en une partie déterministe dS_d et une partie de bruit dS_b , d'autre part en reportant l'ansatz (5.26) dans l'équation stochastique (5.4). En identifiant les parties déterministes et les parties bruitées des deux formes qui en résultent, nous obtenons

$$-dS_b = \gamma_\beta^{1/2} \left(\frac{1}{2} \partial_{q_\beta} S - q_\beta + \bar{q}_\beta \right) d\zeta_\beta - \kappa^{1/2} \left(\frac{1}{2} \partial_{q_c} S - q_c + \bar{q}_c \right) d\zeta_c \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} -dS_d + \frac{1}{2}(dS_b)^2 &= (\Omega_\alpha q_\alpha + \Omega_\beta q_\beta) \frac{dt}{2} \partial_{q_c} S \\ &\quad - \frac{\gamma_\beta dt}{2} \left\{ q_\beta^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\partial_{q_\beta}^2 S - (\partial_{q_\beta} S)^2 \right] + \bar{q}_\beta (\partial_{q_\beta} S - 2q_\beta) + \bar{q}_\beta^2 \right\} \\ &\quad - \frac{\kappa dt}{2} \left\{ q_c^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[\partial_{q_c}^2 S - (\partial_{q_c} S)^2 \right] + \bar{q}_c (\partial_{q_c} S - 2q_c) + \bar{q}_c^2 \right\}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Il reste à reporter dans (5.28) l'expression de dS_b tirée de (5.27), en appliquant la règle d'Ito de remplacement des carrés des bruits par leur moyenne, puis à identifier les termes de degré 2 en $\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ pour obtenir l'équation linéaire purement déterministe sur \underline{u} :⁶

$$\begin{aligned} du_{\alpha\alpha} &= -\Omega_\alpha dt u_{\alpha\alpha} & du_{\alpha\beta} &= -\frac{dt}{2} (\gamma_\beta u_{\alpha\beta} + \Omega_\beta u_{\alpha\alpha} + \Omega_\alpha u_{\beta c}) \\ du_{\beta\beta} &= -\Omega_\beta dt u_{\beta\beta} + \gamma_\beta dt (1 - u_{\beta\beta}) & du_{\alpha c} &= -\frac{dt}{2} (\kappa u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{cc}) \\ du_{cc} &= \kappa dt (1 - u_{cc}) & du_{\beta c} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\beta + \kappa) u_{\beta c} + \Omega_\beta u_{cc}] \end{aligned} \quad (5.29)$$

et les termes de degré 1 en $\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}$ pour obtenir l'équation linéaire stochastique sur $\bar{\mathbf{q}}$:

$$d\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_\beta & 0 \\ \Omega_\alpha & \Omega_\beta & -\kappa \end{pmatrix} dt \bar{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} [\mathbb{1} - \underline{c}(t)] \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma_\beta^{1/2} d\zeta_\beta(t) \\ -\kappa^{1/2} d\zeta_c(t) \end{pmatrix}. \quad (5.30)$$

Faut-il le préciser, $\bar{\mathbf{q}}$ est le vecteur des moyennes quantiques des variables q dans le vecteur d'état (5.26)⁷; par ailleurs, on a introduit la notation \underline{c} pour la matrice inverse de \underline{u} , qui

5. Par exemple, $i\beta = i(X_\beta + iP_\beta)$ est représenté en impulsion par l'opérateur réel $-\partial_{p_\beta}/2 - p_\beta$, et $\beta^\dagger\beta$ par $-\partial_{p_\beta}^2/4 + p_\beta^2 - 1/2$.

6. On remarque que les termes quadratiques en \underline{u} au second membre de (5.28) se compensent avec ceux de $(dS_b)^2/2$ au premier membre.

7. On peut donc retrouver l'équation (5.30) à partir de l'équation stochastique déduite de (5.4) sur la moyenne d'une observable O , $d\langle O \rangle = (dt/i\hbar)\langle [O, H] \rangle + (dt/2) \sum_m \langle C_m^\dagger [O, C_m] + \text{h.c.} \rangle + \sum_m [\langle OC_m + \text{h.c.} \rangle - \langle C_m + C_m^\dagger \rangle \langle O \rangle] d\zeta_m$, où $\langle \dots \rangle$ est prise dans l'état $|\phi(t)\rangle$, en la spécialisant aux cas $O = P_\alpha$, $O = P_\beta$ et $O = X_c$.

n'est autre que la matrice de covariance quantique des q à un facteur numérique près. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle \phi(t) | q_i | \phi(t) \rangle &= \bar{q}_i(t) \quad \text{et} \quad \langle \phi(t) | q_i q_j | \phi(t) \rangle = \bar{q}_i(t) \bar{q}_j(t) + \frac{1}{4} c_{ij}(t) \\ &\forall i, j \in \{\alpha, \beta, c\} \quad \text{avec} \quad \underline{c}(t) = [\underline{u}(t)]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Le système différentiel (5.29) s'intègre aisément pour la condition initiale $\underline{u}(0) = \mathbb{1}$:

$$u_{\alpha\alpha}(t) = 1 + \frac{\Omega_\alpha^2 t}{\kappa} - \frac{2\Omega_\alpha^2}{\kappa^2} (1 - e^{-\kappa t/2}) \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}(t) &= \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\gamma_\beta} \left(\frac{1}{\gamma_\beta + \kappa} + \frac{1}{\kappa} \right) (1 - e^{-\gamma_\beta t/2}) + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\kappa(\kappa - \gamma_\beta)} (e^{-\kappa t/2} - e^{-\gamma_\beta t/2}) \\ &\quad + \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\kappa(\gamma_\beta + \kappa)} (e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2} - e^{-\gamma_\beta t/2}) \end{aligned} \quad (5.33)$$

$$u_{\alpha c}(t) = -\frac{\Omega_\alpha}{\kappa} (1 - e^{-\kappa t/2}) \quad (5.34)$$

$$u_{\beta\beta}(t) = 1 + \frac{\Omega_\beta^2}{\gamma_\beta(\gamma_\beta + \kappa)} (1 - e^{-\gamma_\beta t}) - \frac{2\Omega_\beta^2}{\kappa^2 - \gamma_\beta^2} (e^{-\gamma_\beta t} - e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2}) \quad (5.35)$$

$$u_{\beta c}(t) = -\frac{\Omega_\beta}{\gamma_\beta + \kappa} (1 - e^{-(\gamma_\beta + \kappa)t/2}) \quad (5.36)$$

$$u_{cc}(t) = 1. \quad (5.37)$$

Il en serait allé autrement si nous avions pris comme inconnue la matrice de covariance $\underline{c}(t)$, qui obéit à un système différentiel non linéaire de Riccati [55]. Comme $\bar{\mathbf{q}}$ décrit un mouvement brownien (partiellement amorti, car la matrice de frottement dans (5.30) est de valeurs propres 0, $\gamma_\beta/2$ et $\kappa/2$), et comme le signal homodyne moyenné sur l'intervalle de temps $[0, t]$ σ s'en déduit par intégration, ces variables aléatoires ont une statistique gaussienne et nous pouvons reproduire le raisonnement de la section 5.2. Nous trouvons pour la moyenne et la variance conditionnelles de la quadrature P_a du spin nucléaire sachant que $\sigma = \mathcal{S}$, cette variance déterminant le gain métrologique (3.26) :

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} = \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \mathcal{S} \quad (5.38)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_a) &= \frac{1}{4} \left[\frac{\Omega_\beta^2}{\Omega^2} c_{\alpha\alpha}(t) + \frac{\Omega_\alpha^2}{\Omega^2} c_{\beta\beta}(t) - 2 \frac{\Omega_\alpha \Omega_\beta}{\Omega^2} c_{\alpha\beta}(t) \right] \\ &\quad + \langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}}. \end{aligned} \quad (5.39)$$

L'expression entre crochets dans l'équation (5.39) est l'élément de matrice de $\underline{c}(t)$ dans le vecteur $(\Omega_\beta/\Omega, -\Omega_\alpha/\Omega, 0)$ des coordonnées de la direction a dans la base tournée, donc, à un facteur 4 près, la variance quantique de P_a dans l'état stochastique $\phi(t)$, dépendant du temps mais, rappelons-le, indépendante de la réalisation particulière de $\phi(t)$. De la chaîne d'égalités

$$\begin{aligned} \langle P_a^2 \rangle(t) &= \langle \langle \phi(t) | P_a^2 | \phi(t) \rangle \rangle_{\text{stoch}} \\ &= \langle \langle \phi(t) | P_a^2 | \phi(t) \rangle - \langle \phi(t) | P_a | \phi(t) \rangle^2 + \langle \phi(t) | P_a | \phi(t) \rangle^2 \rangle_{\text{stoch}} \\ &= \langle \text{Var}_{\phi(t)} P_a \rangle_{\text{stoch}} + \langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} \end{aligned} \quad (5.40)$$

ainsi que la propriété (3.35) sur la moyenne non conditionnelle $\langle P_a^2 \rangle(t) = 1/4$, on en déduit l'expression simplifiée

$$\text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_a) = \frac{1}{4} - \frac{\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}}. \quad (5.41)$$

Il reste, pour déterminer les variances et covariance des variables aléatoires $\bar{P}_a(t)$ et $\sigma(t)$, à calculer leurs amplitudes sur les processus stochastiques $d\zeta_\beta(t')$ et $d\zeta_c(t')$, en intégrant formellement l'équation (5.30) par la méthode de variation de la constante pour \bar{P}_a et \bar{X}_c , et en procédant comme dans l'équation (5.22) pour σ :

$$p_\beta(t, t') = -\frac{1}{2} \gamma_\beta^{1/2} \left\{ \frac{\Omega_\beta}{\Omega} c_{\alpha\beta}(t') + \frac{\Omega_\alpha}{\Omega} [1 - c_{\beta\beta}(t')] e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} \right\} \quad (5.42)$$

$$p_c(t, t') = \frac{1}{2} \kappa^{1/2} \left\{ \frac{\Omega_\beta}{\Omega} c_{\alpha c}(t') - \frac{\Omega_\alpha}{\Omega} c_{\beta c}(t') e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} \right\} \quad (5.43)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\beta(t, t') = \frac{(\gamma_\beta \kappa)^{1/2}}{2t} & \left\{ -c_{\alpha\beta}(t') [t - t' - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\alpha}{\kappa} - c_{\beta c}(t') f_\kappa(t - t') \right. \\ & \left. + [1 - c_{\beta\beta}(t')] [f_{\gamma_\beta}(t - t') - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\beta}{\kappa - \gamma_\beta} \right\} \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c(t, t') = \frac{1}{2t} - \frac{\kappa}{2t} & \left\{ -c_{\alpha c}(t') [t - t' - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\alpha}{\kappa} + [1 - c_{cc}(t')] f_\kappa(t - t') \right. \\ & \left. - c_{\beta c}(t') [f_{\gamma_\beta}(t - t') - f_\kappa(t - t')] \frac{\Omega_\beta}{\kappa - \gamma_\beta} \right\} \end{aligned} \quad (5.45)$$

où $f_\lambda(\tau) \equiv [1 - \exp(-\lambda\tau/2)]/(\lambda/2)$. On obtient :

$$\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' [p_\beta(t, t') \sigma_\beta(t, t') + p_c(t, t') \sigma_c(t, t')] \quad (5.46)$$

$$\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' [\sigma_\beta^2(t, t') + \sigma_c^2(t, t')] \quad (5.47)$$

$$\langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' [p_\beta^2(t, t') + p_c^2(t, t')]. \quad (5.48)$$

On déduit de ces résultats les limites aux temps longs⁸

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\gamma_m}{\gamma_f + \gamma_m} \right)^{1/2} \frac{\mathcal{S}}{\Gamma_{\text{ex}}^{1/2}}, \quad \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_a) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \frac{\gamma_f}{\gamma_f + \gamma_m} \quad (5.49)$$

8. Donnons quelques résultats et considérations intermédiaires. (i) Alors que $c_{\beta\beta}(t')$, $c_{\beta c}(t')$ et $c_{cc}(t')$ ont une limite finie lorsque $t' \rightarrow +\infty$ [on aura besoin de $c_{\beta\beta}(+\infty) = (1 + \rho)^{-1}$, $c_{\beta c}(+\infty) = \Omega_\beta / ((\gamma_\beta + \kappa)(1 + \rho))$ avec $\rho = \Omega_\beta^2 \kappa / (\gamma_\beta (\gamma_\beta + \kappa)^2)$], $c_{\alpha\alpha}(t')$, $c_{\alpha\beta}(t')$ et $c_{\alpha c}(t')$ tendent vers zéro comme $1/t'$. (ii) Dans une intégrale sur t' contenant le facteur exponentiel $\exp[-\gamma_\beta(t - t')/2]$ ou son carré, on peut remplacer la fonction qui le multiplie par sa limite en $t' = +\infty$. (iii) Pour toute fonction uniformément bornée $w(t, t')$, on peut montrer pour $\nu \in \{\beta, c\}$ que $\int_0^t dt' [(t - t') c_{\alpha\nu}(t') + w(t, t')]^2 / t^2 \rightarrow \int_0^{+\infty} dt' c_{\alpha\nu}^2(t')$. (iv) On obtient alors les limites asymptotiques $\langle P_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\beta / 2\Omega)^2 \mathcal{I} + (\Omega_\alpha / 2\Omega)^2 \rho / (1 + \rho)$, $\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\alpha^2 / 4\kappa) \mathcal{I}$, $\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} \rightarrow (\Omega_\alpha \Omega_\beta / 4\Omega \kappa^{1/2}) \mathcal{I}$ où $\mathcal{I} \equiv \int_0^{+\infty} dt' [\gamma_\beta c_{\alpha\beta}^2(t') + \kappa c_{\alpha c}^2(t')]$. Nous déduisons ainsi (5.49) de (5.38) et de la première égalité dans (5.39), sans avoir besoin de connaître la valeur de \mathcal{I} . On tire de la seconde égalité dans (5.39) le résultat $\mathcal{I} = 1$, que l'on peut déduire aussi de l'équation du mouvement $dc_{\alpha\alpha}/dt = -\gamma_\beta c_{\alpha\beta}^2 - \kappa c_{\alpha c}^2$ intégrée entre $t = 0$ et $t = +\infty$.

avec lesquelles les prédictions (5.24) et (5.25) du modèle à un mode, pourtant obtenues dans la limite de couplage faible (4.2), sont en accord parfait.

En application de notre solution analytique du modèle à trois modes, faisons tendre le taux Γ_{ex} vers zéro à temps réduit $\tau = \Gamma_{\text{ex}}t$ fixé en maintenant (contrairement au modèle à un mode) le rapport $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f$ à une valeur constante non infinitésimale. La motivation physique est claire : dans les expériences projetées,⁹ γ_f et Γ_{ex} sont du même ordre de grandeur mais sont vraiment beaucoup plus petits que γ_m et κ (par des facteurs $\approx 10^{-6}$ et 10^{-9}). Nous trouvons dans cette limite :¹⁰

$$\langle P_a \rangle_{\sigma=S} \sim \frac{\Gamma_{\text{sq}}t}{1 + \Gamma_{\text{sq}}t} \frac{\mathcal{S}}{\Gamma_{\text{ex}}^{1/2}} \quad \text{et} \quad \text{Var}_{\sigma=S}(P_a) \sim \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \Gamma_{\text{sq}}t} \quad (5.50)$$

où l'on a introduit le taux de compression du spin nucléaire dans le modèle à trois modes et

$$\Gamma_{\text{sq}} \equiv \left(\frac{1}{\Gamma_{\text{ex}}} + \frac{2}{\gamma_f} \right)^{-1}. \quad (5.51)$$

On retrouve l'adimensionnement naturel du signal par $\Gamma_{\text{ex}}^{1/2}$ déjà constaté dans le modèle à un mode et les mêmes formes fonctionnelles en temps, mais on perd toute relation de proportionnalité de type (5.23) entre signal intégré et moyenne de quadrature sur une réalisation, la variance conditionnelle de \bar{P}_a étant désormais $\neq 0$.¹¹ Nous représentons sur la figure 5.2c la dépendance en le temps adimensionné $\gamma_f t$ de la moyenne et de la variance conditionnelles (5.50) pour différentes valeurs du rapport $r = 2\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f$. On remarque que le processus de compression est d'autant plus rapide que r est plus grand, et qu'il sature à un comportement limite. C'était prévisible, car Γ_{sq} est une fonction croissante de r de limite finie ; à temps fixé, la moyenne conditionnelle (en unités de $\mathcal{S}/\Gamma_{\text{ex}}^{1/2}$) est donc une fonction croissante et la variance conditionnelle une fonction décroissante de r , comme on le voit sur la figure 5.2c. Plus précisément, dans la limite de couplage faible $\Omega \rightarrow 0$, où $r \rightarrow 0$, le taux de compression est équivalent au taux de création d'excitations Γ_{ex} , en accord avec le modèle à un mode, et dans la limite $r \rightarrow +\infty$, il sature à la valeur $\gamma_f/2$. On ne peut donc comprimer plus rapidement qu'au taux γ_f , ce qui n'est pas surprenant : on ne peut espérer réduire les fluctuations du spin nucléaire avant que chaque atome dans l'état fondamental n'ait subi en moyenne au moins une collision d'échange de métastabilité, le taux effectif γ_f étant en pratique du même ordre de grandeur que le taux individuel $1/T$ dans l'équation (3.21) sauf en cas d'extrême polarisation (voir figure 3.1a).

5.4 Effets de la décohérence

Pour être complets, nous tenons compte, dans le schéma de compression homodyne, de la durée de vie finie $(2\gamma_0)^{-1}$ des atomes métastables, qui se désexcitent lorsqu'ils atteignent

9. On consultera à ce titre la section 5.5 de ce chapitre présentant de telles propositions.

10. En pratique, il suffit de faire tendre Ω_α vers zéro à $\tau = \Gamma_{\text{ex}}t > 0$, Ω_β , γ_β et κ fixés. En particulier, ceci fait disparaître tous les transitoires exponentiels dans les équations (5.32)-(5.37). Pour simplifier les calculs, il est utile d'introduire la quantité $\rho = \Omega^2 \kappa / [2\gamma_m(\kappa + 2\gamma_m)^2]$ si bien que $\rho = (\Gamma_{\text{ex}}/2\gamma_f)(1 + 2\gamma_m/\kappa)^{-2}$ dans la limite $\gamma_f \rightarrow 0$.

11. On a en effet $\text{Var}_{\sigma=S}(\bar{P}_a) \sim \Gamma_{\text{ex}}t/[4(1 + \Gamma_{\text{ex}}t)] - \Gamma_{\text{sq}}t/[4(1 + \Gamma_{\text{sq}}t)]$.

les parois de la cellule après un mouvement diffusif dans le gaz. À cette fin, nous ajoutons un opérateur de saut $\sqrt{2\gamma_0}b$ à l'équation pilote à trois modes (3.33). Comme la partie autre qu'hamiltonienne hermitienne reste quadratique en les quadratures des modes, elle peut être mise sous forme réduite par une rotation appropriée des modes atomiques, comme nous l'avons déjà fait dans la section 4.2 : il faut décomposer le vecteur (a, b) dans la base propre orthonormale de la matrice des taux

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \begin{pmatrix} 2\gamma_f & -2\sqrt{\gamma_f\gamma_m} \\ -2\sqrt{\gamma_f\gamma_m} & 2(\gamma_0 + \gamma_m) \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

avec des coefficients à valeur opérateur α et β . La direction β reste celle de la valeur propre maximale γ_β de $\underline{\underline{\Gamma}}$, et α celle de la valeur propre minimale γ_α , désormais non nulle

$$\gamma_{\alpha,\beta} = \gamma_m + \gamma_f + \gamma_0 \mp [(\gamma_m + \gamma_f + \gamma_0)^2 - 4\gamma_f\gamma_0]^{1/2}. \quad (5.53)$$

En termes des pulsations de Faraday Ω_α et Ω_β , les vecteurs propres normalisés correspondants s'écrivent $(\Omega_\beta/\Omega, \Omega_\alpha/\Omega)$ et $(-\Omega_\alpha/\Omega, \Omega_\beta/\Omega)$, si bien que $\alpha = (\Omega_\beta a + \Omega_\alpha b)/\Omega$ et $\beta = (\Omega_\beta b - \Omega_\alpha a)/\Omega$ avec

$$\Omega_\alpha = \frac{\Omega(\gamma_f - \gamma_\alpha/2)}{[\gamma_m\gamma_f + (\gamma_f - \gamma_\alpha/2)^2]^{1/2}}, \quad \Omega_\beta = \frac{\Omega\sqrt{\gamma_m\gamma_f}}{[\gamma_m\gamma_f + (\gamma_f - \gamma_\alpha/2)^2]^{1/2}} \quad (5.54)$$

dans un choix de signe assurant que $\alpha \rightarrow a$ et $\beta \rightarrow b$ lorsque $\gamma_f \rightarrow 0$ et reproduisant (4.5) lorsque $\gamma_0 \rightarrow 0$. Ceci conduit à l'équation pilote

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} = & \frac{1}{i\hbar} [\hbar(\Omega_\alpha P_\alpha + \Omega_\beta P_\beta)P_c, \rho] + \kappa \left(c\rho c^\dagger - \frac{1}{2}\{c^\dagger c, \rho\} \right) \\ & + \gamma_\alpha \left(\alpha\rho\alpha^\dagger - \frac{1}{2}\{\alpha^\dagger\alpha, \rho\} \right) + \gamma_\beta \left(\beta\rho\beta^\dagger - \frac{1}{2}\{\beta^\dagger\beta, \rho\} \right). \end{aligned}} \quad (5.55)$$

Puisque l'opérateur de saut $C_\alpha \propto \alpha$ décrit des processus non mesurés, nous pouvons, comme nous l'avons fait pour C_β , le prendre de la forme $\sqrt{\gamma_\alpha}i\alpha$ et réutiliser l'ansatz gaussien réel (5.26).

5.4.1 Dans le modèle à un mode

Nous nous restreignons ici à la limite physiquement utile $\gamma_0 \ll \gamma_m$ (on a toujours $\gamma_f < \gamma_m$). À l'ordre le plus bas en γ_0 , les coefficients Ω_α , Ω_β et γ_β restent inchangés, et l'on a

$$\gamma_\alpha \simeq \frac{2\gamma_0\gamma_f}{\gamma_m + \gamma_f} \quad (5.56)$$

ce qui n'est autre que le taux de décohérence ramené dans le spin nucléaire hybridé. De plus, nous nous plaçons dans la limite à un mode (4.2), avec $\gamma_\alpha = O(\Gamma_{\text{ex}})$, ce qui permet d'évaluer l'effet de la décohérence en utilisant le modèle à un mode, dont l'obtention reste la même que dans la section 4.2. L'équation stochastique (5.7) est complétée comme suit

$$\begin{aligned} d|\phi(t)\rangle = & -\frac{\Gamma_{\text{ex}}dt}{2}(P_\alpha - \bar{P}_\alpha)^2|\phi(t)\rangle + \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}d\zeta_s(t)(P_\alpha - \bar{P}_\alpha)|\phi(t)\rangle \\ & -\frac{\gamma_\alpha dt}{2}(\alpha^\dagger\alpha + 2i\bar{P}_\alpha\alpha + \bar{P}_\alpha^2)|\phi(t)\rangle + \sqrt{\gamma_\alpha}d\zeta_\alpha(t)(i\alpha + \bar{P}_\alpha)|\phi(t)\rangle. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Le choix de $\gamma_\alpha^{1/2}i\alpha$ comme opérateur de saut de la décohérence ramenée permet de résoudre l'équation par le même ansatz gaussien réel (5.8). Nous trouvons cette fois¹²

$$du = [\Gamma_{\text{ex}} + \gamma_\alpha(1 - u)]dt \implies u(\tau) = 1 + \frac{1 - \exp(-\epsilon\tau)}{\epsilon} \quad (5.58)$$

$$d\bar{P}_\alpha = -\frac{1}{2}\gamma_\alpha\bar{P}_\alpha dt + \frac{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}d\zeta_s + \sqrt{\gamma_\alpha}(u-1)d\zeta_\alpha}}{2u} \quad (5.59)$$

où nous avons posé $\tau = \Gamma_{\text{ex}}t$ et $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{ex}}$. Les mêmes arguments de gaussianité que dans la section 5.2 conduisent aux mêmes dépendances en le signal \mathcal{S} de la moyenne et de la variance conditionnelles,¹³

$$\langle P_\alpha \rangle_{\sigma=\mathcal{S}} = m(\tau) \frac{\mathcal{S}}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}}, \quad \text{Var}_{\sigma=\mathcal{S}}(P_\alpha) = \mathcal{V}(\tau) \quad (5.60)$$

$$\text{avec } m(\tau) = \sqrt{\Gamma_{\text{ex}}} \frac{\langle \sigma(t)\bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4} - \frac{\langle \sigma(t)\bar{P}_\alpha(t) \rangle_{\text{stoch}}^2}{\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}}}$$

et les variance et covariance prises sur les processus stochastiques $d\zeta_s \equiv d\zeta_c$ et $d\zeta_\alpha$,

$$\frac{\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}{\Gamma_{\text{ex}}} = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\tau^2} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{\epsilon u(\tau')} \right]^2 + \frac{[u(\tau') - 1]^2 [1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}]^2}{u^2(\tau') \epsilon} \right\} \quad (5.61)$$

$$= \frac{\epsilon\tau - 2(1 - e^{-\epsilon\tau/2})}{\epsilon^2\tau^2} + \frac{1}{4\tau}$$

$$\frac{\langle \sigma\bar{P}_\alpha \rangle_{\text{stoch}}}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} = \int_0^\tau \frac{d\tau'}{\tau} \frac{e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{2u(\tau')} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}}{\epsilon u(\tau')} + \frac{[u(\tau') - 1]^2}{u(\tau')} [1 - e^{\epsilon(\tau'-\tau)/2}] \right\} \quad (5.62)$$

$$= \frac{1 - e^{-\epsilon\tau/2}}{2\epsilon\tau}.$$

Ces expressions permettent d'évaluer facilement l'effet de la décohérence sur la compression de spin au travers du gain métrologique (3.26), voir les tiretés sur la figure 5.2a. Pour le cas utile en pratique d'une faible décohérence $\epsilon \ll 1$ et d'un temps court devant $1/\gamma_\alpha$, elles peuvent être développées au premier ordre en ϵ :

$$\boxed{m(\tau) = \frac{\tau}{1 + \tau} - \epsilon \frac{(\tau + 3)\tau^2}{12(\tau + 1)^2} + O(\epsilon^2\tau^2), \quad \mathcal{V}(\tau) = \frac{1}{4(\tau + 1)} + \epsilon \frac{(\tau + 3/2)\tau^2}{12(\tau + 1)^2} + O(\epsilon^2\tau^2).} \quad (5.63)$$

12. Dans le régime $\epsilon \ll 1$, la limite aux temps longs de la variance de P_α sur une seule réalisation dépend fortement du choix de phase dans l'opérateur de saut de la décohérence ramenée, ce qui souligne le caractère non physique de cette variance (voir la section 5.1) : si l'on prend $\gamma_\alpha^{1/2}\alpha$ comme opérateur de saut, on trouve que $\text{Var}_\phi P_\alpha \rightarrow \epsilon^{1/2}/4$ au lieu de $\text{Var}_\phi P_\alpha \rightarrow 1/4\epsilon$ comme dans l'équation (5.58). Plus généralement, le choix $\gamma_\alpha^{1/2} \exp(i\theta)\alpha$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, conduit à l'équation de Riccati sur le paramètre u de l'ansatz gaussien (désormais complexe) $du = \Gamma_{\text{ex}}dt + \gamma_\alpha dt \{ \exp(2i\theta)u + [1 - \exp(2i\theta)]/2 - u^2[1 + \exp(2i\theta)]/2 \}$ si bien que $\text{Var}_\phi P_\alpha \rightarrow (1/4)\epsilon^{1/2}\sqrt{\cos\theta \cos(\theta/2)}$ en un temps $\tau \sim 1/\sqrt{2\epsilon[1 + \exp(2i\theta)]}$; la loi de puissance en ϵ obtenue pour $\theta = 0$ est donc la règle, celle obtenue pour $\theta = \pi/2$ est l'exception.

13. Nous avons simplifié l'expression de $\mathcal{V}(\tau)$ dans (5.60) à l'aide de l'identité $[4u(\tau)]^{-1} + \langle \bar{P}_\alpha^2 \rangle_{\text{stoch}} = 1/4$, qui résulte comme dans l'équation (5.40) du fait que la moyenne inconditionnelle $\langle P_\alpha^2 \rangle = 1/4$, même en présence de décohérence.

On en déduit que la compression optimale sur P_α est obtenue à un temps $t_{\text{opt}} \sim (3/\Gamma_{\text{ex}}\gamma_\alpha)^{1/2}$ et correspond à une variance conditionnelle $\mathcal{V}_{\text{opt}} \sim (\gamma_\alpha/12\Gamma_{\text{ex}})^{1/2}$. Remarquons qu'on introduit souvent, dans les études de compression de spin dans les gaz d'atomes alcalins en cavité, la coopérativité C du système couplé atome-champ, définie comme le carré de la pulsation de couplage divisé par les taux de décroissance des états couplés [56]. En ce sens, la coopérativité du système spin nucléaire hybridé-champ vaut

$$C \equiv \frac{\Omega_\alpha^2}{\kappa\gamma_\alpha} = \frac{\Gamma_{\text{ex}}}{\gamma_\alpha} \simeq \frac{\Omega^2}{2\gamma_0\kappa} \quad (5.64)$$

si bien que nous retrouvons la loi d'échelle d'exposant $-1/2$, habituelle dans les alcalins, reliant la variance de spin optimale à C [56]. Plus généralement, la décohérence a un effet faible sur la compression du spin nucléaire tant qu'on reste à des temps courts devant t_{opt} .

5.4.2 Dans le modèle à trois modes

La réutilisation de l'ansatz gaussien réel (5.26) afin de résoudre l'équation stochastique (5.4) sur le vecteur d'état en toute généralité permet une extension de ces lois d'échelle au-delà du modèle à un mode, c'est-à-dire pour un rapport $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f$ quelconque, non infinitésimal. Comme nous le verrons, le lien entre \mathcal{V}_{opt} et la coopérativité (5.64) est alors rompu.

Dans l'équation d'évolution de la matrice \underline{u} apparaissant dans l'ansatz, les indices α et β jouent désormais des rôles symétriques et l'on obtient

$$\begin{aligned} du_{\alpha\alpha} &= -\Omega_\alpha dt u_{\alpha c} + \gamma_\alpha dt (1 - u_{\alpha\alpha}) & du_{\alpha\beta} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)u_{\alpha\beta} + \Omega_\beta u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{\beta c}] \\ du_{\beta\beta} &= -\Omega_\beta dt u_{\beta c} + \gamma_\beta dt (1 - u_{\beta\beta}) & du_{\alpha c} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\alpha + \kappa)u_{\alpha c} + \Omega_\alpha u_{cc}] \\ du_{cc} &= \kappa dt (1 - u_{cc}) & du_{\beta c} &= -\frac{dt}{2} [(\gamma_\beta + \kappa)u_{\beta c} + \Omega_\beta u_{cc}] \end{aligned} \quad (5.65)$$

dont la solution pour la condition initiale $\underline{u}(0) = \mathbb{1}$ s'écrit

$$u_{\alpha\alpha}(t) = 1 + \frac{\Omega_\alpha^2}{\gamma_\alpha(\kappa + \gamma_\alpha)} (1 - e^{-\gamma_\alpha t}) - \frac{2\Omega_\alpha^2}{\kappa^2 - \gamma_\alpha^2} (e^{-\gamma_\alpha t} - e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2}) \quad (5.66)$$

$$\begin{aligned} u_{\alpha\beta}(t) &= \frac{\Omega_\alpha\Omega_\beta}{\gamma_\alpha + \gamma_\beta} \left(\frac{1}{\kappa + \gamma_\alpha} + \frac{1}{\kappa + \gamma_\beta} \right) (1 - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) \\ &+ \frac{\Omega_\alpha\Omega_\beta}{(\kappa - \gamma_\beta)(\kappa + \gamma_\alpha)} (e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2} - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) \\ &+ \frac{\Omega_\alpha\Omega_\beta}{(\kappa - \gamma_\alpha)(\kappa + \gamma_\beta)} (e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2} - e^{-(\gamma_\alpha + \gamma_\beta)t/2}) \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$u_{\alpha c}(t) = -\frac{\Omega_\alpha}{\kappa + \gamma_\alpha} (1 - e^{-(\kappa + \gamma_\alpha)t/2}) \quad (5.68)$$

$$u_{\beta\beta}(t) = 1 + \frac{\Omega_\beta^2}{\gamma_\beta(\kappa + \gamma_\beta)} (1 - e^{-\gamma_\beta t}) - \frac{2\Omega_\beta^2}{\kappa^2 - \gamma_\beta^2} (e^{-\gamma_\beta t} - e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2}) \quad (5.69)$$

$$u_{\beta c}(t) = -\frac{\Omega_\beta}{\kappa + \gamma_\beta} (1 - e^{-(\kappa + \gamma_\beta)t/2}) \quad (5.70)$$

$$u_{cc}(t) = 1. \quad (5.71)$$

Le vecteur des coordonnées moyennes $\bar{\mathbf{q}}$ apparaissant dans l'ansatz (5.26) obéit à l'équation stochastique

$$d\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\gamma_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_\beta & 0 \\ \Omega_\alpha & \Omega_\beta & -\kappa \end{pmatrix} dt \bar{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} [\mathbb{1} - \underline{c}(t)] \begin{pmatrix} \gamma_\alpha^{1/2} d\zeta_\alpha(t) \\ \gamma_\beta^{1/2} d\zeta_\beta(t) \\ -\kappa^{1/2} d\zeta_c(t) \end{pmatrix}. \quad (5.72)$$

La moyenne non conditionnelle $\langle P_a^2 \rangle$ valant toujours 1/4, la moyenne et la variance de P_a conditionnées au signal homodyne intégré restent données par les équations (5.38) et (5.39), en généralisant les expressions (5.46)-(5.48) des variances et covariances des variables aléatoires $\bar{P}_a(t)$ et $\sigma(t)$ au cas de trois processus stochastiques indépendants $d\zeta_\alpha(t')$, $d\zeta_\beta(t')$ et $d\zeta_c(t')$ comme suit :

$$\langle \sigma(t) \bar{P}_a(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} p_\nu(t, t') \sigma_\nu(t, t') \quad (5.73)$$

$$\langle \sigma^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} \sigma_\nu^2(t, t') \quad (5.74)$$

$$\langle \bar{P}_a^2(t) \rangle_{\text{stoch}} = \int_0^t dt' \sum_{\nu \in \{\alpha, \beta, c\}} p_\nu^2(t, t') \quad (5.75)$$

avec les expressions compactes des amplitudes correspondantes

$$p_\nu(t, t') = (-1)^{\delta_{\nu c}} \frac{\sqrt{\gamma_\nu}}{2\Omega} \left\{ \Omega_\beta e^{-\gamma_\alpha(t-t')/2} [\delta_{\alpha\nu} - c_{\alpha\nu}(t')] - \Omega_\alpha e^{-\gamma_\beta(t-t')/2} [\delta_{\beta\nu} - c_{\beta\nu}(t')] \right\} \quad (5.76)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\nu(t, t') = & \frac{\delta_{\nu c}}{2t} + (-1)^{\delta_{\nu c}} \frac{\sqrt{\kappa\gamma_\nu}}{2t} \left\{ [\delta_{c\nu} - c_{c\nu}(t')] f_\kappa(t-t') \right. \\ & \left. + \sum_{\mu \in \{\alpha, \beta\}} \frac{\Omega_\mu}{\kappa - \gamma_\mu} [\delta_{\mu\nu} - c_{\mu\nu}(t')] [f_{\gamma_\mu}(t-t') - f_\kappa(t-t')] \right\}. \end{aligned} \quad (5.77)$$

L'indice ν court sur les trois valeurs α , β , c et l'on a posé $\gamma_c = \kappa$. La fonction δ est celle de Kronecker, et la fonction f_λ est la même que dans les équations (5.42)-(5.45).

La solution générale que nous venons d'exposer comporte les cinq taux $\gamma_\alpha, \Gamma_{\text{ex}} = \Omega_\alpha^2/\kappa, \gamma_f$ d'une part, γ_β, κ d'autre part. Le régime pertinent expérimentalement est celui où les deux derniers sont « infiniment » plus grands que les trois premiers et ne contribuent qu'au travers de régimes transitoires inobservables. Mathématiquement, on accède à cette limite en faisant tendre γ_f vers zéro à $\kappa, \gamma_m, \gamma_0$ et Ω fixés et à $\tau = \Gamma_{\text{ex}} t > 0$ fixé. Alors les trois premiers taux tendent conjointement vers zéro, c'est-à-dire dans des rapports de limite finie et non nulle $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f \rightarrow \Omega^2 \gamma_m / [\kappa(\gamma_0 + \gamma_m)^2]$ et $\gamma_\alpha/\gamma_f \rightarrow 2\gamma_0/(\gamma_0 + \gamma_m)$, le taux γ_β se réduit à $\gamma \equiv 2(\gamma_0 + \gamma_m)$ et le couplage de Faraday Ω_β à Ω . Tous les transitoires exponentiels disparaissent dans les éléments de matrice (5.66)-(5.70) de \underline{u} sauf ceux relaxant au taux γ_α . Les amplitudes (5.76)

et (5.77) sur les processus stochastiques se réduisent à

$$\frac{p_\alpha(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} = \frac{u(\tau') - 1}{2u(\tau')} \sqrt{\epsilon} e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2} \quad (5.78)$$

$$\frac{p_\beta(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} = \frac{\sqrt{\rho}}{(1 + \rho)u(\tau')} e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2} \quad (5.79)$$

$$\frac{p_c(t, t')}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} = \frac{(1 - \rho)}{2(1 + \rho)u(\tau')} e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2} \quad (5.80)$$

$$\frac{\sigma_\alpha(t, t')}{\Gamma_{\text{ex}}} = \frac{u(\tau') - 1}{\tau u(\tau')} \sqrt{\epsilon} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2}}{\epsilon} \quad (5.81)$$

$$\frac{\sigma_\beta(t, t')}{\Gamma_{\text{ex}}} = \frac{\sqrt{\rho}}{(1 + \rho)\tau} \left[\frac{2}{u(\tau')} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2}}{\epsilon} + \rho + \frac{\gamma}{\kappa}(\rho - 1) \right] \quad (5.82)$$

$$\frac{\sigma_c(t, t')}{\Gamma_{\text{ex}}} = \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{2} + \frac{1 - \rho}{1 + \rho} \frac{1}{u(\tau')} \frac{1 - e^{-\epsilon(\tau - \tau')/2}}{\epsilon} + \frac{\rho}{1 + \rho} \left(1 + \frac{2\gamma}{\kappa} \right) \right] \quad (5.83)$$

où $\epsilon = \gamma_\alpha/\Gamma_{\text{ex}}$ comme dans la section 5.4, la fonction $u(\tau)$ est donnée par l'équation (5.58) et la notation $\rho = \Omega^2 \kappa / [\gamma(\kappa + \gamma)^2]$ généralise celle de la note 10. Les relations (5.38) et (5.39) restent valables, avec les nouvelles expressions des variance et covariance

$$\boxed{\frac{\langle \sigma^2 \rangle_{\text{stoch}}}{\Gamma_{\text{ex}}} = \frac{\epsilon\tau - 2(1 - e^{-\epsilon\tau/2})}{\epsilon^2\tau^2} + \frac{\Gamma_{\text{ex}}}{4\tau\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \quad \text{et} \quad \frac{\langle \sigma \bar{P}_a \rangle_{\text{stoch}}}{\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}} = \frac{1 - e^{-\epsilon\tau/2}}{2\epsilon\tau}} \quad (5.84)$$

et du taux de compression généralisé

$$\boxed{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} = \left[\frac{1}{\Gamma_{\text{ex}}} + \frac{2(\gamma_0 + \gamma_m)}{\gamma_f \gamma_m} \right]^{-1}} \quad (5.85)$$

qui reproduisent les variance et covariance (5.61) et (5.62) du modèle à un mode avec décohérence lorsque $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f \rightarrow 0$ et le taux de compression de spin (5.51) du modèle à trois modes sans décohérence lorsque $\gamma_0 \rightarrow 0$. Les nouveaux résultats peuvent être simplifiés dans la limite utile de faible décohérence ramenée $\gamma_\alpha/\Gamma_{\text{ex}} \rightarrow 0$ par un développement à l'ordre un en ϵ , ce qui permet de généraliser comme suit les résultats (5.63) sur la moyenne et la variance conditionnelles à une valeur de $\Gamma_{\text{ex}}/\gamma_f$ non infinitésimale :

$$m(t) = \frac{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t}{1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t} - \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \frac{(3 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2}{12(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2} + O[(\gamma_\alpha t)^2] \quad (5.86)$$

$$\mathcal{V}(t) = \frac{1}{4(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)} + \frac{\gamma_\alpha}{\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}} \frac{(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t + 3/2)(\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2}{12(1 + \Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t)^2} + O[(\gamma_\alpha t)^2]. \quad (5.87)$$

Cette généralisation revient simplement à remplacer τ par $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} t$ et ϵ par $\gamma_\alpha/\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}}$ dans les seconds membres de (5.63).¹⁴ La compression optimale sur P_a est alors obtenue au bout d'un temps $t_{\text{opt}} \sim (3/\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} \gamma_\alpha)^{1/2}$ et correspond à une variance conditionnelle

$$\text{Var}_{\sigma=S}^{\text{opt}}(P_a) \sim (\gamma_\alpha/12\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}})^{1/2}. \quad (5.88)$$

14. Elle vaut en fait à tous les ordres en ϵ puisque le remplacement proposé ne change pas $\epsilon\tau$ (toujours égal à $\gamma_\alpha t$) et fait passer des équations (5.61) et (5.62) à l'équation (5.84).

Le gain métrologique optimal s'en déduit par l'équation (3.26)

$$\xi_{\text{opt},\sigma=S}^2 \sim \frac{2}{\eta} \sqrt{\frac{\gamma_\alpha}{3}} \left[\frac{1}{\Gamma_{\text{ex}}} + \frac{2(\gamma_0 + \gamma_m)}{\gamma_f \gamma_m} \right]^{-1/2}. \quad (5.89)$$

5.5 Discussion des paramètres pour une réalisation expérimentale

Dans cette section, nous formulons quelques estimations sur les paramètres du modèle dans l'optique d'une réalisation expérimentale du schéma. Dans le traitement théorique tout au long de ce chapitre, nous avons supposé le champ magnétique nul, les effets d'un petit champ directeur seront discutés à la fin de cette section.

Rappel du dispositif expérimental envisagé Une vue d'ensemble du montage est schématisée dans la figure 1.1. Ce montage consiste en une cellule à vapeur d'hélium 3 à température ambiante et à une pression de quelques mbar placée à l'intérieur d'une cavité optique asymétrique, garantissant que les photons quittent la cavité de manière prédominante à travers le miroir de sortie. On peut séparer schématiquement le processus expérimental en quatre étapes :

- Une décharge continue maintient une petite fraction des atomes dans un état métastable tandis que l'ensemble reste majoritairement dans l'état fondamental (de spin purement nucléaire).
- Les spins atomiques collectifs de la population métastable et fondamentale sont orientés dans la direction Ox par pompage optique. Les collisions d'échange de métastabilité couplent alors les spins du fondamental et métastable de sorte à ce que les corrélations quantiques soit continûment transférées de l'un à l'autre.
- La lumière en entrée est polarisée linéairement et selon la direction Ox ; elle traverse la cavité dans la direction Oz et aborde la transition $2^3S_1 - 2^3P_0$ C_8 à 1083 nm. Pour un grand désaccord et dans la limite de faible saturation, l'état excité 2^3P_0 peut être éliminé de manière adiabatique, ce qui donne lieu à l'hamiltonien d'interaction de Faraday (3.2) [14]. Lors de sa propagation dans le gaz, le mode du champ en cavité polarisé selon Oy , initialement vide, se peuple par effet Faraday sous l'action des fluctuations quantiques du spin des métastables selon Oz .
- En sortie de cavité, on mesure en continu ce mode polarisé selon Oy . Cette mesure alliée aux collisions d'échange effectue une mesure quantique non destructive du spin nucléaire.

Nous avons considéré deux mesures quantiques non-destructives différentes : par comptage de photon 1.1b ou bien par une mesure homodyne 1.1c.

Dans cette section, c'est bien le cas d'une détection homodyne que l'on considérera. Rappelons que dans ce travail, nous avons supposé que les inhomogénéités spatiales du mode de la cavité sont moyennées durant le mouvement des atomes, ce qui couple effectivement la lumière de manière homogène à tous les atomes de la cellule. En effet, l'échelle de temps de compression $1/\Gamma_{\text{sq}}$ est longue comparée à l'échelle de temps $1/\gamma_0^{\text{paroi}}$ pour le mouvement atomique entre les parois de la cellule, $\gamma_0^{\text{paroi}}/\Gamma_{\text{sq}} \sim 10^4$. Le mouvement atomique moyenne donc les variations spatiales du mode de cavité, ce qui garantit la validité d'une description par interaction collective.

5.5.1 Estimations numériques des paramètres et variables.

Nous discutons dans cette section des valeurs des paramètres du modèle que pourrait prendre une expérience basée sur le schéma homodyne. L'objectif d'un état de spin com-

primé peut être atteint, état qui démontre aussi un gain métrologique par rapport à un état complètement polarisé à la limite quantique standard pour une utilisation en magnétométrie par exemple. On en profitera pour discuter de la dépendance des paramètres et des résultats en la polarisation nucléaire (nécessairement partielle dans notre cas). Ceci nous amènera à évoquer un schéma alternatif possible, qui ne fut pas étudié au cours de cette thèse, mais qui représente une direction possible vers lequel le projet peut évoluer.

Cellule et cavité Nous considérons une cellule cylindrique de 20 mm de long et 5 mm de diamètre, remplie de $N_{\text{cell}} = 2,5 \times 10^{16}$ atomes de ^3He à une pression de $p = 2$ Torr. La cellule est à température ambiante. Elle est placée à l'intérieur d'une cavité optique pour amplifier l'interaction atome-lumière [57]. Pour une finesse de $\mathcal{F} = 50$ et une longueur de cavité de 3 cm, nous obtenons $\kappa = 2\pi 1,0 \times 10^8$ Hz comme taux de sortie de la cavité. La cavité est pilotée par laser sur la polarisation d'axe Ox de sorte que 5 mW de la lumière sort de la cavité dans cette polarisation, et nous prenons la lumière pour être désaccordée de $\Delta = 2\pi 2,0$ GHz de la transition C_8 . En régime permanent, on trouve que $6,5 \times 10^5$ s $^{-1}$ photons polarisés selon Oy quittent la cavité (3.39).¹⁵

Atomes et lumière La décharge dans le gaz maintient de façon stationnaire $n_{\text{cell}} = 1,25 \times 10^{11}$ atomes dans l'état métastable, dans un rapport $\frac{n_{\text{cell}}}{N_{\text{cell}}} = 5 \times 10^{-6}$. Pour une polarisation de $\eta = 0,4$, cela donne un nombre effectif d'atomes (3.17) dans l'état fondamental de $N = 1,0 \times 10^{16}$ et $n = 1,3 \times 10^{10}$ dans l'état métastable. Pour le couplage entre la lumière et la population métastable (3.25), nous obtenons ainsi $\Omega = 2\pi 4,15 \times 10^6$ Hz. À partir du coefficient de taux d'échange de métastabilité (voir table II p.19 de la référence [1]), on détermine les taux d'échange de métastabilité effectifs $\gamma_m = 5,2 \times 10^6$ s $^{-1}$ et $\gamma_f = 6,9$ s $^{-1}$ via (3.21). À partir du coefficient de diffusion des atomes métastables [58], nous estimons que le taux de relaxation métastable dû aux collisions avec la paroi est de $\gamma_0^{\text{paroi}} = 2,6 \times 10^4$ s $^{-1}$ [59].¹⁶

Taux de compression, taux de décohérence et limite fondamentale au schéma Le taux de compression du spin nucléaire est évalué à partir de l'équation (5.85), résultat de l'analyse du modèle à 3 modes avec décohérence : $\Gamma_{\text{sq}} = 1,0$ s $^{-1}$. Nous avons établi à la toute fin de la section 5.2 que le schéma homodyne en continu dispose d'une limite intrinsèque en ce qui concerne la variance finale du spin nucléaire qu'il est possible d'obtenir. Selon (5.88), la plus forte compression que l'on peut obtenir serait de $[-6,71$ dB]. Nous pouvons aussi calculer le gain métrologique que cet état permet s'il est utilisé au sein d'un magnétomètre via l'équation (5.89) : $\xi^2 = 0,53$. On constate ici la forte contrainte qu'impose la polarisation seulement partielle des atomes, puisque dans le cas d'une polarisation complète, le gain métrologique serait de $\eta\xi^2 = 0,21$.

Choix de la polarisation nucléaire Pour rappel, nous sommes contraints à $\eta \neq 1$ dès lors que nous prenons la composante $F = 1/2$ (donc le spin \vec{K}) du spin métastable comme

15. Rappelons que $\langle X_c^2 \rangle(t) - 1/4 = \langle c^\dagger c \rangle(t)$ dans le cas d'un état initial vide.

16. Bien supérieur au taux de diffusion des photons hors résonance dans l'état métastable, en moyenne sur la cellule, que nous estimons à $\gamma_0^{\text{scat}} \approx 2,4 \times 10^3$ s $^{-1}$. Rappelons par ailleurs que le taux de décohérence dans la théorie à trois modes de la section 5.4 est défini avec un facteur 2 : $\gamma_0 = \gamma_0^{\text{paroi}}/2$.

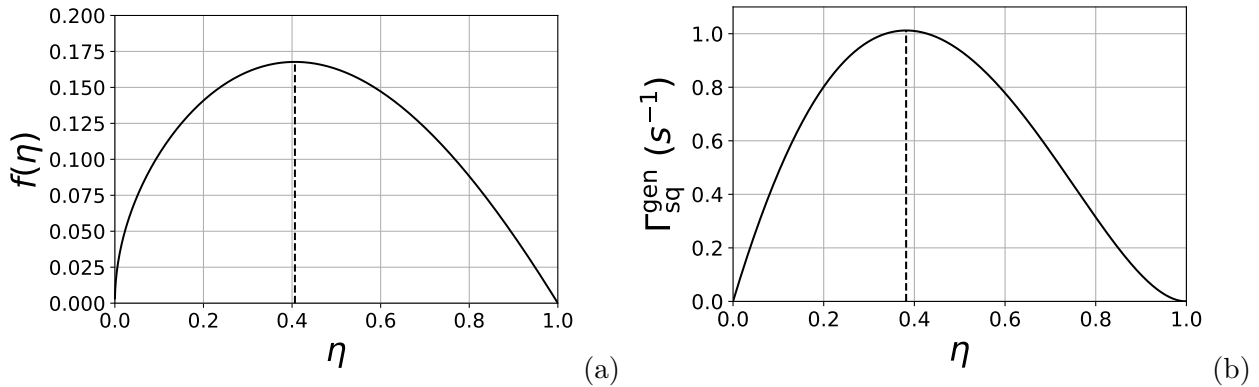


FIGURE 5.3 – Dépendance du couplage et du taux caractéristiques du système en fonction de la polarisation nucléaire η . Les paramètres par ailleurs sont ceux de la section 5.5.1. Les tiretés verticales indiquent les maxima. (a) Dépendance en la polarisation nucléaire de la pulsation de Faraday $\Omega_\alpha = \chi \sqrt{n_{ph} n_{cell}} \sqrt{\frac{n_{cell}}{N_{cell}}} f(\eta)$. Similaire à la figure 3.1b, elle en diffère par l'utilisation des résultats du modèle à 3 modes en présence de décohérence dans le métastable présentés dans la section 5.4, équations (5.54). Le maximum $f(\eta) = 0,168$ se trouve en $\eta = 0,406$. (b) Taux de compression généralisé (5.85) en fonction de la polarisation. Le minimum $\Gamma_{sq}^{gen} = 1,01 \text{ s}^{-1}$ se trouve en $\eta = 0,382$.

intermédiaire dans le schéma. En effet, si nous polarisons complètement la population métastable, alors tous les atomes se trouvent dans l'état $|F = 3/2, M_F = +3/2\rangle$ de la multiplicité $F = 3/2$ et aucun dans un état de la multiplicité $F = 1/2$ induisant un spin \vec{K} nul. Dans notre cas, nous devons faire un choix sur la polarisation qui va déterminer les résultats théoriques et optimaux que le schéma peut obtenir. Sur la figure 5.3, nous représentons, en fonction de la polarisation nucléaire η , en (a) la dépendance en cette variable de la pulsation de Faraday Ω_α pour le mode bosonique nucléaire hybridé,¹⁷ et en (b) le taux de compression généralisé du spin nucléaire. Remarquons que le maximum du couplage effectif correspond à celui du taux de compression, les deux maxima se trouvant autour d'une polarisation nucléaire $\eta \simeq 0,4$. Tandis que sur la figure 5.4, nous représentons en (a) la compression optimale du spin nucléaire par rapport à la limite quantique standard en dB, et en (b) le gain métrologique de l'état du spin nucléaire pour une utilisation en tant que magnétomètre tel que définit par la référence [25]. En comparant la figure 5.3(a) et 5.4(b), on constate que le maximum du couplage effectif (et donc du taux de compression) ne correspond pas aux minima de compression et de gain métrologique, contrairement à ce que l'on pourrait croire.¹⁸ Ceci vient du fait que la limite quantique standard est proportionnelle à la taille du spin, et donc à la polarisation. Ainsi, il y a un compromis à trouver entre le taux de compression Γ_{sq} d'une part et la compression de spin ou le gain métrologique d'autre part.

17. A la différence de la figure 3.1b, nous prenons ici le facteur $f_\alpha(\eta)$ tel qu'il apparaît dans le modèle à 3 modes avec décohérence, construit à partir de l'équation (5.54)

18. Puisque augmenter le couplage effectif Ω assure de comprimer le spin plus fortement et plus rapidement. En effet, la pulsation de Faraday Ω_α dépend linéairement de Ω (5.54), le taux d'excitation dans le mode nucléaire Γ_{ex} dépend quadratiquement de cette pulsation (4.13), le taux de compression du spin nucléaire Γ_{sq} dépend linéairement de ce taux d'excitation (5.85) et enfin, la variance conditionnelle optimale dépend du taux de compression à une puissance $-1/2$ (5.88).

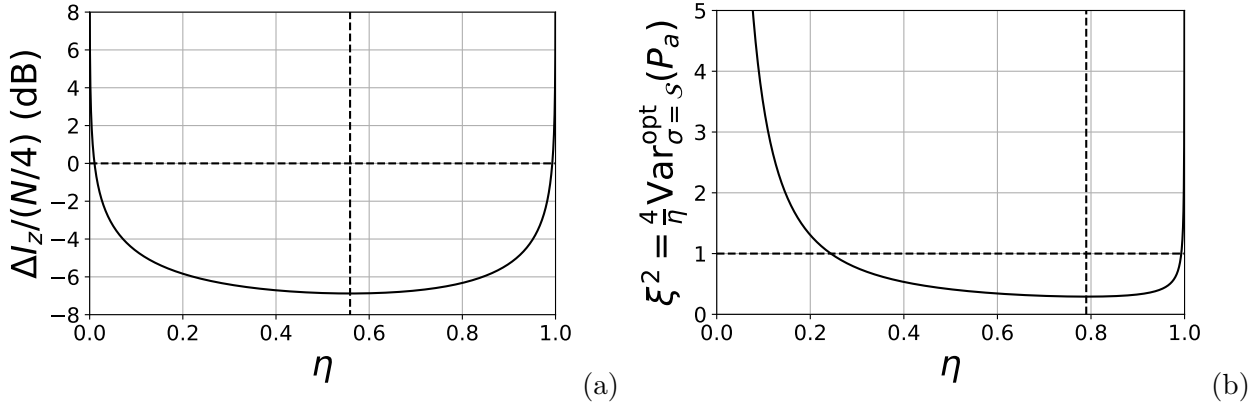


FIGURE 5.4 – Dépendance du gain métrologique et de la compression de spin optimaux en fonction de la polarisation nucléaire η . Les paramètres par ailleurs sont ceux de la section 5.5.1. Les lignes tirtées verticales indiquent les minima. Celles horizontales indiquent la limite quantique standard d'un état complètement polarisé. (a) Compression du spin optimale (5.88) par rapport à la limite quantique standard d'un état complètement polarisé du spin nucléaire. Le minimum $\text{Var}_{\sigma=S}^{\text{opt}}(P_a)/(N/4) = -6,880$ dB se trouve en $\eta = 0,559$. (b) Gain métrologique ξ^2 pour une utilisation de l'état de variance minimale (5.88) en tant que magnétomètre [25]. Le minimum $\xi^2 = 0,291$ se trouve en $\eta = 0,790$.

Les figures indiquent que l'on peut choisir une polarisation de 0,4 pour obtenir un taux de compression autour de $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} \simeq 1 \text{ s}^{-1}$ et un gain de métrologique optimal de $\xi^2 \simeq 0,5$ (c'est ce que nous venons de présenter) ou bien préférer maximiser le gain métrologique optimal avec une polarisation de 0.8 pour obtenir un gain $\xi^2 \simeq 0,3$ mais ralentir la compression avec un taux de $\Gamma_{\text{sq}}^{\text{gen}} \simeq 0,3 \text{ s}^{-1}$.

Quelques mots pour une alternative au schéma étudié Pour pouvoir profiter d'une polarisation complète, une idée serait de coupler la lumière à la multiplicité $F = 3/2$, donc au spin \vec{J} . Cette possibilité aurait l'avantage certain que tout degré supplémentaire de polarisation amène à une compression plus forte et plus rapide. Mais cette solution amène aussi ses propres difficultés : dès lors que la lumière se couple avec \vec{J} , il n'est plus possible d'écarter comme nous l'avons fait l'influence du tenseur d'alignement dans la dynamique. La structure des équations est alors fondamentalement différente de celle étudiée dans cette partie. Il existe cependant une voie alternative à partir de cette idée. Elle consiste à choisir le désaccord de cavité de façon à retrouver un hamiltonien de type Faraday $H = \chi S_z J_z$ sur le spin \vec{J} , tout en gardant les composantes du tenseur \vec{Q} et du spin \vec{K} sous-dominant, de sorte à pouvoir éliminer ou négliger leurs fluctuations et retrouver le modèle à 3 spins du chapitre 3.

5.5.2 Notes sur le champ magnétique en cavité

Nous revenons dans cette section sur la question du champ magnétique, imposé ou résiduel, en cavité et qui a été jusqu'ici négligé.

Un champ magnétique résiduel S'il existe pendant la phase de compression un petit champ magnétique statique parasite (en plus du champ directeur) dans le plan yOz , d'angle ϕ avec Oy , ce champ tourne à la pulsation $-\omega_L^{(x)}$ dans le référentiel tournant ; dans l'équation stochastique du modèle à un mode (5.7) pour la détection homodyne, ceci ajoute une contribution d'hamiltonien hermitien $H_\alpha = \sqrt{N}\hbar\omega_L^{(y)}(\Omega_\beta/\Omega)[\cos(\phi - \omega_L^{(x)}t)X_\alpha + \sin(\phi - \omega_L^{(x)}t)P_\alpha]$ où $\omega_L^{(y)} \ll \omega_L^{(x)}$ est la pulsation de Larmor du spin nucléaire dans le champ parasite et Ω_β/Ω est donné par l'équation (4.5). Le terme en P_α s'absorbe dans un changement de phase de l'ansatz (5.8). Le terme en X_α ne change pas le paramètre u de l'ansatz (5.8) donc la variance de P_α dans une réalisation mais ajoute une partie déterministe oscillante à \bar{P}_α , à savoir $(\sqrt{N}\omega_L^{(y)}/2\omega_L^{(x)})(\Omega_\beta/\Omega)[\sin(\phi - \omega_L^{(x)}t) - \sin\phi]$ et, d'après (5.14), une partie déterministe $\sqrt{\Gamma_{\text{ex}}}(\Omega_\beta/\Omega)(\sqrt{N}\omega_L^{(y)}/2\omega_L^{(x)})\{[\cos(\phi - \omega_L^{(x)}t) - \cos\phi]/(\omega_L^{(x)}t) - \sin\phi\}$ au signal intégré $\sigma(t)$. Le terme en $\sin\phi$ dans le signal peut être annulé en jouant sur l'instant initial « $t = 0$ » de la phase de compression ; les autres contributions s'annulent pour une durée t de l'expérience multiple entier de $2\pi/\omega_L^{(x)}$.

Un champ magnétique imposé Dans l'expérience, on prévoit d'imposer un champ directeur selon Ox de l'ordre du μT pour éviter une précession « sauvage », du spin moyen autour d'un champ magnétique résiduel de direction inconnue. Pour les polarisations et niveaux de compression estimés dans la section 5.5.1, nous estimons que la précession de Larmor dans un petit champ de guidage de 10^{-7} G pour $t = 10$ s, soit approximativement la durée totale de l'expérience, peut être négligée. Nous considérons que l'effet d'un champ magnétique B sur un temps t est négligeable si la précession de l'ellipse de bruit d'un état comprimé 10 dB dégrade la variance comprimée de moins de 10 % (cela correspond à un angle de 1,8 degrés). Étant donné que la fréquence de Larmor dans l'état fondamental est de 3,24 kHz/G, nous obtenons la condition $B[\text{G}] \times t[\text{s}] \leq 1,5 \times 10^{-6}$. Bien que la fréquence de Larmor dans l'état métastable soit beaucoup plus grande, 1,87 MHz/G, la précession dans cet état est négligeable pour des champs magnétiques allant jusqu'à ~ 10 mG puisque la rotation dans le plan zOy ne se produit que pendant le court temps $1/\gamma_m$ entre deux collisions d'échange de métastabilité, ce qui correspond à un angle d'ordre 1 degré. D'un point de vue théorique, nous pouvons néanmoins intégrer ce champ de guidage à l'analyse en se plaçant dans le référentiel tournant autour de Ox à la pulsation de Larmor correspondante $\omega_L^{(x)}$ du spin nucléaire pour éliminer ce champ directeur¹⁹ ; il faut en principe faire tourner aussi la cavité à la vitesse angulaire $\omega_L^{(x)}$ pour qu'elle soit immobile dans le référentiel tournant ; si la cavité reste fixe dans le référentiel du laboratoire, on peut établir le couplage de Faraday et effectuer une mesure du champ sortant de la cavité non plus en continu mais de manière stroboscopique (à chaque fois que la direction à comprimer en spin se confond avec l'axe optique) [57].

Par ailleurs, si l'on veut utiliser l'état comprimé de spin pour mesurer un champ magnétique, on éteint la décharge et le champ directeur et on s'arrange pour que le champ à mesurer \vec{B}_{mes} soit orienté selon Oy . Le spin nucléaire collectif précesse alors dans le plan xOz d'un angle qu'il faut mesurer pour remonter à B_{mes} , et la direction de compression initiale Oz est justement celle qu'il faut pour réduire l'incertitude de pointage angulaire sur

19. Il faudrait en toute rigueur compenser l'écart entre les pulsations de Larmor métastable et fondamentale, par exemple au moyen d'un champ magnétique fictif créé par déplacement lumineux, mais cette précaution semble superflue car la pulsation de Larmor métastable reste petite devant le taux effectif d'échange de métastabilité γ_m

le spin. Une autre stratégie consiste à partir d'un état polarisé ordinaire, non comprimé, du spin nucléaire et à effectuer, décharge allumée mais champ directeur éteint, la mesure en continu du champ lumineux sortant de la cavité *en présence* de $B_{\text{mes}}\vec{u}_y$; dans le modèle à un mode avec détection homodyne de la section 5.2, on retombe alors sur les propositions de magnétométrie des références [60, 61].

5.6 Conclusion de la première partie

Cette partie a présenté une proposition d'expérience visant à préparer un état quantique (état comprimé de spin nucléaire) dans un gaz d'hélium 3 dans son état électronique fondamental à température ambiante. Un tel état serait obtenu en plaçant une cellule d'hélium 3 dans une cavité optique et en effectuant une mesure en continu sur le mode sortant de la cavité, après que la lumière a interagi avec les spins nucléaires par l'intermédiaire d'un état électronique métastable. L'analyse théorique montre qu'une compression notable du spin nucléaire est atteignable dans des conditions accessibles en laboratoire et pour des temps caractéristiques de l'ordre de la seconde. En particulier, les paramètres physiques du gaz (température et pression) sont similaires aux conditions de simple pompage optique dans l'hélium 3, avec cependant la contrainte supplémentaire qu'il faut placer la cellule à l'intérieur d'une cavité optique centimétrique.

Notre étude ouvre la voie à la réalisation d'états comprimés de très longue durée de vie (plusieurs heures) dans un système déjà bien connu et utilisé en métrologie.

Bibliographie

- [1] B. Saam T. R. GENTILE P. J. Nacher et T. G. WALKER. “Optically polarized He 3”. en. In : *Reviews of Modern Physics* 89 (déc. 2017), p. 045004. ISSN : 0034-6861, 1539-0756. DOI : [10.1103/RevModPhys.89.045004](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.89.045004).
- [2] Werner HEIL. “Helium Magnetometers”. en. In : *High Sensitivity Magnetometers*. Sous la dir. d’Asaf GROSZ, Michael J. HAJI-SHEIKH et Subhas C. MUKHOPADHYAY. Smart Sensors, Measurement and Instrumentation. Cham, 2017, p. 493-521. ISBN : 978-3-319-34070-8. DOI : [10.1007/978-3-319-34070-8_16](https://doi.org/10.1007/978-3-319-34070-8_16).
- [3] John KITCHING, Svenja KNAPPE et Elizabeth A. DONLEY. “Atomic Sensors – A Review”. In : *IEEE Sensors Journal* 11 (sept. 2011), p. 1749-1758. ISSN : 1558-1748. DOI : [10.1109/JSEN.2011.2157679](https://doi.org/10.1109/JSEN.2011.2157679).
- [4] J R MACFALL et al. “Human lung air spaces: potential for MR imaging with hyperpolarized He-3.” In : *Radiology* 200 (août 1996), p. 553-558. ISSN : 0033-8419. DOI : [10.1148/radiology.200.2.8685356](https://doi.org/10.1148/radiology.200.2.8685356).
- [5] Marcus J. COUCH et al. “Hyperpolarized and inert gas MRI: the future”. eng. In : *Molecular Imaging and Biology* 17 (avr. 2015), p. 149-162. ISSN : 1860-2002. DOI : [10.1007/s11307-014-0788-2](https://doi.org/10.1007/s11307-014-0788-2).
- [6] G. VASILAKIS et al. “Limits on New Long Range Nuclear Spin-Dependent Forces Set with a ^3He Comagnetometer”. In : *Physical Review Letters* 103 (déc. 2009), p. 261801. DOI : [10.1103/PhysRevLett.103.261801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.261801).
- [7] Werner HEIL et al. “Spin clocks: Probing fundamental symmetries in nature”. In : *Annalen der Physik* 525 (2013), p. 539-549. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.201300048](https://doi.org/10.1002/andp.201300048).
- [8] M. BATZ, P.-J. NACHER et G. TASTEVIN. “Fundamentals of metastability exchange optical pumping in helium”. en. In : *Journal of Physics: Conference Series* 294 (juin 2011), p. 012002. ISSN : 1742-6596. DOI : [10.1088/1742-6596/294/1/012002](https://doi.org/10.1088/1742-6596/294/1/012002).
- [9] A. DANTAN et al. “Long-Lived Quantum Memory with Nuclear Atomic Spins”. In : *Physical Review Letters* 95 (sept. 2005), p. 123002. DOI : [10.1103/PhysRevLett.95.123002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.123002).
- [10] G. REINAUDI et al. “Squeezing and entangling nuclear spins in helium 3”. In : *Journal of Modern Optics* 54 (mars 2007), p. 675-695. ISSN : 0950-0340. DOI : [10.1080/09500340600677005](https://doi.org/10.1080/09500340600677005).

- [11] Or KATZ et al. “Long-Lived Entanglement Generation of Nuclear Spins Using Coherent Light”. In : *Physical Review Letters* 124 (jan. 2020), p. 043602. DOI : [10.1103/PhysRevLett.124.043602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.043602).
- [12] Luca PEZZÈ et al. “Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles”. In : *Reviews of Modern Physics* 90 (sept. 2018), p. 035005. DOI : [10.1103/RevModPhys.90.035005](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005).
- [13] Félix BUSSIÈRES et al. “Prospective applications of optical quantum memories”. In : *Journal of Modern Optics* 60 (oct. 2013), p. 1519-1537. ISSN : 0950-0340. DOI : [10.1080/09500340.2013.856482](https://doi.org/10.1080/09500340.2013.856482).
- [14] Klemens HAMMERER, Anders S. SØRENSEN et Eugene S. POLZIK. “Quantum interface between light and atomic ensembles”. In : *Reviews of Modern Physics* 82 (avr. 2010), p. 1041-1093. DOI : [10.1103/RevModPhys.82.1041](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.82.1041).
- [15] G. VASILAKIS et al. “Generation of a squeezed state of an oscillator by stroboscopic back-action-evading measurement”. en. In : *Nature Physics* 11 (mai 2015), p. 389-392. ISSN : 1745-2481. DOI : [10.1038/nphys3280](https://doi.org/10.1038/nphys3280).
- [16] Or KATZ, Roy SHAHAM et Ofer FIRSTENBERG. “Quantum Interface for Noble-Gas Spins Based on Spin-Exchange Collisions”. In : *PRX Quantum* 3 (jan. 2022), p. 010305. DOI : [10.1103/PRXQuantum.3.010305](https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.3.010305).
- [17] C. GEMMEL et al. “Ultra-sensitive magnetometry based on free precession of nuclear spins”. en. In : *The European Physical Journal D* 57 (avr. 2010), p. 303-320. ISSN : 1434-6079. DOI : [10.1140/epjd/e2010-00044-5](https://doi.org/10.1140/epjd/e2010-00044-5).
- [18] G. C. PHILLIPS et al. “Demonstration of a Polarized ${}^3\text{He}$ Target for Nuclear Reactions”. In : *Physical Review Letters* 9 (déc. 1962), p. 502-504. DOI : [10.1103/PhysRevLett.9.502](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.9.502).
- [19] M. A. BOUCHIAT, T. R. CARVER et C. M. VARNUM. “Nuclear Polarization in He 3 Gas Induced by Optical Pumping and Dipolar Exchange”. en. In : *Physical Review Letters* 5 (oct. 1960), p. 373-375. ISSN : 0031-9007. DOI : [10.1103/PhysRevLett.5.373](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.5.373).
- [20] F. D. COLEGROVE et P. A. FRANKEN. “Optical Pumping of Helium in the ${}^3\text{S}_1$ Metastable State”. In : *Physical Review* 119 (juill. 1960), p. 680-690. DOI : [10.1103/PhysRev.119.680](https://doi.org/10.1103/PhysRev.119.680).
- [21] G. K. WALTERS, F. D. COLEGROVE et L. D. SCHEARER. “Nuclear Polarization of ${}^3\text{He}$ Gas by Metastability Exchange with Optically Pumped Metastable ${}^3\text{He}$ Atoms”. In : *Physical Review Letters* 8 (juin 1962), p. 439-442. DOI : [10.1103/PhysRevLett.8.439](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.8.439).
- [22] F. D. COLEGROVE, L. D. SCHEARER et G. K. WALTERS. “Polarization of ${}^3\text{He}$ Gas by Optical Pumping”. In : *Physical Review* 132 (déc. 1963), p. 2561-2572. DOI : [10.1103/PhysRev.132.2561](https://doi.org/10.1103/PhysRev.132.2561).
- [23] S. S. HODGMAN et al. “Metastable Helium: A New Determination of the Longest Atomic Excited-State Lifetime”. In : *Physical Review Letters* 103 (juill. 2009), p. 053002. DOI : [10.1103/PhysRevLett.103.053002](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.103.053002).

- [24] J. DUPONT-ROC, M. LEDUC et F. LALOË. “Contribution à l’étude du pompage optique par échange de métastabilité dans ^3He . - Première Partie”. fr. In : *Journal de Physique* 34 (nov. 1973), p. 961-976. ISSN : 0302-0738, 2777-3396. DOI : [10.1051/jphys:019730034011-12096100](https://doi.org/10.1051/jphys:019730034011-12096100).
- [25] D. J. WINELAND et al. “Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy”. In : *Physical Review A* 50 (juill. 1994), p. 67-88. DOI : [10.1103/PhysRevA.50.67](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.50.67).
- [26] J. CVIKLINSKI et al. “Conditional squeezing of an atomic alignment”. In : *Phys. Rev. A* 76 (3 sept. 2007), p. 033830. DOI : [10.1103/PhysRevA.76.033830](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.76.033830).
- [27] Jacques DUPONT-ROC. “Etude de quelques effets liés au pompage optique en champ faible”. fr. thèse. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, mars 1972.
- [28] Vladimir B. BRAGINSKIĬ, Yu I VORONTSOV et V D KRIVCHENKOV. “Unperturbed measurements of the n-quantum state of an harmonic oscillator”. en. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 41 (mai 1975), p. 28.
- [29] Vladimir B. BRAGINSKIĬ et Yurii I. VORONTSOV. “Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique”. en. In : *Soviet Physics Uspekhi* 17 (mai 1975), p. 644. ISSN : 0038-5670. DOI : [10.1070/PU1975v017n05ABEH004362](https://doi.org/10.1070/PU1975v017n05ABEH004362).
- [30] Vladimir B. BRAGINSKIĬ, Yurii I. VORONTSOV et F. Ya KHALILI. “Quantum singularities of a ponderomotive meter of electromagnetic energy”. English. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 46 (oct. 1977), p. 705.
- [31] Abbott B. P. et AL. et LIGO SCIENTIFIC COLLABORATION AND VIRGO COLLABORATION. “Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger”. en. In : *Physical Review Letters* 116 (fév. 2016), p. 061102. ISSN : 0031-9007, 1079-7114. DOI : [10.1103/PhysRevLett.116.061102](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.061102).
- [32] E. E. MUSCHLITZ. “Metastable Atoms and Molecules”. In : *Science* 159 (1968), p. 599-604. DOI : [10.1126/science.159.3815.599](https://doi.org/10.1126/science.159.3815.599). eprint : <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.159.3815.599>.
- [33] V. LEFEVRE-SEGUIN et M. LEDUC. “Metastability-exchange and depolarising collisions in xenon and krypton”. en. In : *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics* 10 (août 1977), p. 2157-2164. ISSN : 0022-3700. DOI : [10.1088/0022-3700/10/11/016](https://doi.org/10.1088/0022-3700/10/11/016).
- [34] L. D. SCHEARER. “Depolarization Cross Sections for the Metastable Noble Gases by Optical Pumping”. In : *Physical Review* 188 (déc. 1969), p. 505-506. DOI : [10.1103/PhysRev.188.505](https://doi.org/10.1103/PhysRev.188.505).
- [35] T. XIA et al. “Polarization and hyperfine transitions of metastable $^{\infty}129\text{Xe}$ in discharge cells”. In : *Physical Review A* 81 (mars 2010), p. 033419. DOI : [10.1103/PhysRevA.81.033419](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.033419).
- [36] Tetsuo HADEISHI et Chung-Heng LIU. “Nuclear Alignment of the $^{\infty}1S_0$ Ground State of $^{\infty}131\text{Xe}$ by Electron Pumping and Metastability-Exchange Collisions”. In : *Physical Review Letters* 19 (juill. 1967), p. 211-213. DOI : [10.1103/PhysRevLett.19.211](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.19.211).
- [37] Fei LUO, Clayton F. GIESE et W. Ronald GENTRY. “Direct measurement of the size of the helium dimer”. In : *The Journal of Chemical Physics* 104 (jan. 1996), p. 1151-1154. ISSN : 0021-9606. DOI : [10.1063/1.470771](https://doi.org/10.1063/1.470771).

- [38] D VRINCEANU et H R SADEGHPOUR. “Spin polarization transfer in ground and metastable helium atom collisions”. en. In : *New Journal of Physics* 12 (juin 2010), p. 065039. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/12/6/065039](https://doi.org/10.1088/1367-2630/12/6/065039).
- [39] B. J. GARRISON, W. H. MILLER et H. F. SCHAEFER. “Penning and associative ionization of triplet metastable helium atoms”. In : *The Journal of Chemical Physics* 59 (sept. 1973), p. 3193-3198. ISSN : 0021-9606. DOI : [10.1063/1.1680460](https://doi.org/10.1063/1.1680460).
- [40] A. KUZMICH et al. “Quantum nondemolition measurements of collective atomic spin”. In : *Phys. Rev. A* 60 (3 sept. 1999), p. 2346-2350. DOI : [10.1103/PhysRevA.60.2346](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.60.2346).
- [41] Ben Q. BARAGIOLA, Bradley A. CHASE et JM GEREMIA. “Collective uncertainty in partially polarized and partially decohered spin- $\frac{1}{2}$ systems”. In : *Physical Review A* 81 (mars 2010), p. 032104. DOI : [10.1103/PhysRevA.81.032104](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.81.032104).
- [42] Yvan CASTIN, Jean DALIBARD et Klaus MØLMER. “A wave function approach to dissipative processes”. In : *AIP Conference Proceedings* 275 (juin 1993), p. 143-156. ISSN : 0094-243X. DOI : [10.1063/1.43795](https://doi.org/10.1063/1.43795).
- [43] Klaus MØLMER, Yvan CASTIN et Jean DALIBARD. “Monte Carlo wave-function method in quantum optics”. en. In : *Journal of the Optical Society of America B* 10 (mars 1993), p. 524. ISSN : 0740-3224, 1520-8540. DOI : [10.1364/JOSAB.10.000524](https://doi.org/10.1364/JOSAB.10.000524).
- [44] G. LINDBLAD. “On the generators of quantum dynamical semigroups”. en. In : *Communications in Mathematical Physics* 48 (juin 1976), p. 119-130. ISSN : 1432-0916. DOI : [10.1007/BF01608499](https://doi.org/10.1007/BF01608499).
- [45] Florentin REITER et Anders S. SØRENSEN. “Effective operator formalism for open quantum systems”. In : *Physical Review A* 85 (mars 2012), p. 032111. DOI : [10.1103/PhysRevA.85.032111](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.85.032111).
- [46] Yvan CASTIN et Klaus MØLMER. “Monte Carlo Wave-Function Analysis of 3D Optical Molasses”. In : *Physical Review Letters* 74 (mai 1995), p. 3772-3775. DOI : [10.1103/PhysRevLett.74.3772](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.3772).
- [47] H. M. WISEMAN et G. J. MILBURN. “Quantum theory of field-quadrature measurements”. In : *Physical Review A* 47 (jan. 1993), p. 642-662. DOI : [10.1103/PhysRevA.47.642](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.47.642).
- [48] Yun LI, Y. CASTIN et A. SINATRA. “Optimum Spin Squeezing in Bose-Einstein Condensates with Particle Losses”. In : *Physical Review Letters* 100 (mai 2008), p. 210401. DOI : [10.1103/PhysRevLett.100.210401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.210401).
- [49] Stefano ZIPPILLI et al. “Scheme for decoherence control in microwave cavities”. In : *Physical Review A* 67 (mai 2003), p. 052101. DOI : [10.1103/PhysRevA.67.052101](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.67.052101).
- [50] L. K. THOMSEN, S. MANCINI et H. M. WISEMAN. “Continuous quantum nondemolition feedback and unconditional atomic spin squeezing”. en. In : *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics* 35 (nov. 2002), p. 4937-4952. ISSN : 0953-4075. DOI : [10.1088/0953-4075/35/23/316](https://doi.org/10.1088/0953-4075/35/23/316).
- [51] Lars Bojer MADSEN et Klaus MØLMER. “Spin squeezing and precision probing with light and samples of atoms in the Gaussian description”. In : *Physical Review A* 70 (nov. 2004), p. 052324. DOI : [10.1103/PhysRevA.70.052324](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.052324).

- [52] Nicolas GISIN. “Stochastic quantum dynamics and relativity”. en. In : *Helvetica Physica Acta* 62 (mai 1989), p. 363. DOI : [10.5169/SEALS-116034](https://doi.org/10.5169/SEALS-116034).
- [53] N GISIN et I C PERCIVAL. “The quantum-state diffusion model applied to open systems”. en. In : *Journal of Physics A: Mathematical and General* 25 (nov. 1992), p. 5677-5691. ISSN : 0305-4470, 1361-6447. DOI : [10.1088/0305-4470/25/21/023](https://doi.org/10.1088/0305-4470/25/21/023).
- [54] N. GISIN. “Quantum Measurements and Stochastic Processes”. In : *Physical Review Letters* 52 (mai 1984), p. 1657-1660. DOI : [10.1103/PhysRevLett.52.1657](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.52.1657).
- [55] John K. STOCKTON et al. “Robust quantum parameter estimation: Coherent magnetometry with feedback”. In : *Physical Review A* 69 (mars 2004), p. 032109. DOI : [10.1103/PhysRevA.69.032109](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.032109).
- [56] Haruka TANJI-SUZUKI et al. “Chapter 4 - Interaction between Atomic Ensembles and Optical Resonators: Classical Description”. en. In : *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*. Sous la dir. d’E. ARIMONDO, P. R. BERMAN et C. C. LIN. T. 60. Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics. Jan. 2011, p. 201-237. DOI : [10.1016/B978-0-12-385508-4.00004-8](https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385508-4.00004-8).
- [57] G. VASILAKIS et al. “Generation of a squeezed state of an oscillator by stroboscopic back-action-evading measurement”. en. In : *Nature Physics* 11 (mai 2015), p. 389-392. ISSN : 1745-2481. DOI : [10.1038/nphys3280](https://doi.org/10.1038/nphys3280).
- [58] W. A. FITZSIMMONS, N. F. LANE et G. K. WALTERS. “Diffusion of He(2^3S_1) in Helium Gas; $2^3S_1 - 1^1S_0$ Interaction Potentials at Long Range”. In : *Physical Review* 174 (oct. 1968), p. 193-200. DOI : [10.1103/PhysRev.174.193](https://doi.org/10.1103/PhysRev.174.193).
- [59] W. FRANZEN. “Spin Relaxation of Optically Aligned Rubidium Vapor”. In : *Physical Review* 115 (août 1959), p. 850-856. DOI : [10.1103/PhysRev.115.850](https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.850).
- [60] JM GEREMIA et al. “Quantum Kalman Filtering and the Heisenberg Limit in Atomic Magnetometry”. In : *Physical Review Letters* 91 (déc. 2003), p. 250801. DOI : [10.1103/PhysRevLett.91.250801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.91.250801).
- [61] Klaus MØLMER et Lars Bojer MADSEN. “Estimation of a classical parameter with Gaussian probes: Magnetometry with collective atomic spins”. In : *Physical Review A* 70 (nov. 2004), p. 052102. DOI : [10.1103/PhysRevA.70.052102](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.052102).

Deuxième partie

**Amortissement des phonons dans
un gaz de boson superfluide 2D**

Introduction

La superfluidité est un phénomène fascinant, car elle constitue l'une des manifestations macroscopiques des propriétés quantiques de la matière. Elle est caractérisée par différentes propriétés selon le système considéré, dont la viscosité nulle, la plus connue et celle qui lui donna son nom, et la supraconductivité. Dans les gaz de bosons en dimension $d = 3$, la superfluidité est une conséquence de la condensation de Bose-Einstein, état collectif d'un système bosonique où un mode du champ acquiert une population macroscopique. En revanche, dans les cas $d = 1$ et 2 , la condensation de Bose-Einstein est interdite à température non nulle par le théorème de Mermin-Wagner [1] qui énonce l'absence d'ordre à longue portée à la limite thermodynamique. Intuitivement, les fluctuations quantiques d'un système à N corps en dimensionnalité réduite sont toujours assez fortes pour détruire la cohérence à distance finie. De façon remarquable, le phénomène de superfluidité survit en dimension 2 à température non nulle et apparaît via une transition d'ordre infini, dite de Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [2, 3], observée pour la première fois en 1978 dans un film d'hélium 4 liquide [4].

Dans le cadre de la matière condensée, l'étude de la propagation du son et de son atténuation apporte des informations importantes sur les propriétés thermodynamiques et les excitations de basse énergie du système qui sont directement liées aux propriétés de transport [5, 6]. De plus, dans un gaz dégénéré, le temps de cohérence intrinsèque d'un condensat est directement lié aux interactions entre phonons [7]. Par ailleurs, la propagation du son dans un superfluide a acquis un domaine d'application plus large lorsqu'elle a été reliée à des problèmes d'astrophysique [8], via notamment le concept de « gravité analogue » [9], comme la radiation d'Hawking sur l'horizon des événements d'un trou noir [10] ou la modélisation d'étoiles à neutrons [11].

Historiquement, c'est dans l'hélium 4 liquide qu'ont été menés les premières expériences de condensation et de superfluidité. L'hélium 4 liquide est un système en interaction forte où la fraction condensée est donc faible (autour de 10%), ce qui rend sa modélisation théorique difficile. C'est pourquoi l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein dans une vapeur atomique diluée en 1995,²⁰ récompensé par un prix Nobel de physique en 2001, fut dans ce domaine une petite révolution [12].

Aujourd'hui les gaz dilués froids, système en interaction faible ou forte, constituent un terrain très favorable pour l'étude de la superfluidité et de la condensation de Bose-Einstein. En effet, le caractère dilué du système permet d'entrer facilement dans le régime d'interaction faible et donc d'obtenir des fractions condensées très grandes. De plus, ce sont des systèmes où les paramètres essentiels sont sous le contrôle des expérimentateurs. Au moyen des résonances de Feshbach, il est en effet possible de contrôler la force des interactions entre les particules tandis que le potentiel extérieur est modulable à volonté (on sait même réaliser des boîtes de potentiel à fond plat [13]).

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas d'un gaz de bosons froid superfluide dans lequel les phonons se trouvent dans le régime faiblement collisionnel. Un phonon donné de vecteur d'onde \vec{q} quelconque est dans un tel régime lorsque sa pulsation propre $\omega_{\vec{q}} \sim cq$ avec c la vitesse du son dans le fluide, est grande comparée au taux d'amortissement thermique Γ^{th} , $\omega_{\vec{q}} \gg \Gamma^{\text{th}}$. En d'autres termes, la longueur d'onde du mode est bien plus petite que le libre parcours moyen d'un phonon thermique dans le milieu. Le régime inverse, où le mode oscille

20. Les chercheurs purent obtenir un condensat presque pur dans un gaz de rubidium 87 refroidi à 170 nK dans un piège magnétique.

plus lentement que le taux de thermalisation du système, est appelé « hydrodynamique ». L'étude du son dans les gaz superfluides bidimensionnels a connu un regain d'intérêt grâce aux expériences sur les gaz d'atomes froids dans des boîtes de potentiel, avec des bosons [14, 15] ou des fermions [16], voir les travaux théoriques récents dans le cas bosonique [17, 18].

Nous présentons une simulation numérique en champ classique d'un système régi par l'hamiltonien de l'hydrodynamique quantique développée par Landau et Khalatnikov en 1949 [19]. En particulier, on étudie l'évolution de la fonction de corrélation temporelle des phonons $\langle b_{\vec{q}}(t)b_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle$ dans une boîte à l'équilibre thermique. À deux dimensions, comme à trois, considérer le mode \vec{q} comme un petit système couplé au réservoir formé par le reste du gaz, dans l'approximation de Born-Markov, prédit une décroissance exponentielle de cette fonction de corrélation avec un taux $\Gamma_q/2$ où Γ_q est le taux d'amortissement calculé par la règle d'or de Fermi d'une surpopulation initiale dans le mode \vec{q} . Dans le cas $d = 3$, nous montrons que cette prédiction est exacte [20] dans la limite d'une température réduite $\epsilon = k_B T/mc^2 \rightarrow 0$ avec m la masse d'un boson. Dans le cas $d = 2$ en revanche, et comme nous le montrons, cette condition n'est a priori plus suffisante mais seulement nécessaire. En particulier, nous montrons que la définition d'un régime de validité pour la règle d'or de Fermi nécessite l'introduction d'un second « petit paramètre » u^{-1} proportionnel à la constante de couplage effective adimensionnée $\tilde{g} = \frac{1}{\rho \xi^2}$ (introduite dans les articles [14, 15]) avec ρ la densité moyenne de bosons et $\xi = \hbar/mc$ la longueur de relaxation.

Nous constatons effectivement dans nos simulations un écart systématique à la loi exponentielle de taux $\Gamma_q/2$ même à basse température réduite. Grâce à la théorie diagrammatique des fonctions de Green à N corps (dans un domaine de validité que nous précisons), nous sommes en mesure de proposer une prédiction pour cet écart au second ordre en l'interaction entre phonons à tous les ordres en ϵ et à l'ordre dominant en $1/u$. Nos simulations s'accordent très bien à cette prédiction. Nous mettons ainsi en évidence des écarts significatifs à la décroissance exponentielle prédite par la règle d'or de Fermi, contrairement à ce qui se passe dans le cas tridimensionnel. Ces écarts nous semblent accessibles à une vérification expérimentale ; à ce titre, nous avons choisi les paramètres d'une série d'exécutions du programme de simulation proche des conditions de l'expérience décrite dans la référence [15].

Cette partie est structurée de la manière suivante : dans le chapitre 1 nous présentons le cadre général de notre étude, à savoir l'hydrodynamique quantique de Landau-Khalatnikov et nous calculons le taux d'amortissement des phonons par la règle d'or de Fermi. Au chapitre 2, nous présentons le programme informatique en détail, avec une discussion des diverses approximations et méthodes numériques que nous avons utilisées. Le chapitre 3 discute de la théorie diagrammatique des fonctions de Green à N corps. On en extrait le paramètre u^{-1} servant de petit paramètre supplémentaire à la théorie en $d = 2$ et nous obtenons une expression intégrale de la fonction de corrélation temporelle. Enfin, au chapitre 4, nous présentons les résultats des simulations numériques que nous avons réalisées. On les compare à la règle d'or de Fermi et à la théorie diagrammatique.

Chapitre 1

Cadre théorique : l'hydrodynamique quantique

Avant-propos

En 1949, Landau et Khalatnikov [19], dans le cadre du calcul de la viscosité de l'hélium superfluide, proposent une théorie effective de basse énergie permettant d'accéder au comportement du fluide à température non nulle d'une manière exacte même dans le régime d'interaction forte mais à une échelle spatiale que l'on pourrait qualifier de « mésoscopique » puisque le modèle est une description « à gros grains » du fluide de sorte à moyenniser les propriétés microscopiques du fluide tout en décrivant ses excitations collectives de grande longueur d'onde. Le seul élément à fournir à la théorie est l'équation d'état du fluide à température nulle. Une comparaison entre cette théorie effective et les approches microscopiques pour l'amortissement des phonons dans le cas 3D a été faite en [21]. Le présent chapitre introduit ce modèle, son régime de validité et l'hamiltonien qui fait l'objet des simulations numériques. Ceci nous amènera à expliciter l'observable du système sur laquelle nous travaillerons dans les chapitres suivants. Dans la dernière section, nous appliquerons la règle d'or de Fermi afin d'obtenir une première prédiction sur les taux d'amortissement des excitations collectives dans le gaz.

1.1 Hamiltonien hydrodynamique

Le modèle hydrodynamique quantique est une description du fluide « à gros grains » [22]. Pour formaliser ce point de départ nous considérons une discrétisation de la boîte contenant le fluide par un maillage carré de longueur l choisie de telle sorte que la densité et la vitesse du fluide à l'intérieur d'une maille soient bien définies et quasi-homogènes. Pour cela, il faut disposer d'une longueur l très petite devant la longueur d'onde typique des excitations collectives thermiques du fluide $\frac{2\pi}{q_{\text{th}}}$ mais beaucoup plus grande que la distance moyenne entre particules $\rho^{-1/2}$, c'est-à-dire

$$\rho^{-1/2} \ll l \ll q_{\text{th}}^{-1} \quad (1.1)$$

avec ρ la densité moyenne de bosons à l'équilibre thermodynamique à la température T et $q_{\text{th}} = \frac{k_B T}{\hbar c}$ avec c la vitesse du son dans le fluide. Si cette condition est satisfaite, on

introduit deux opérateurs hermitiens canoniquement conjugués : un champ de densité locale de particules $\hat{\rho}(\vec{r})$ et un champ de phase locale $\hat{\phi}(\vec{r})$,¹

$$[\hat{\rho}(\vec{r}), \hat{\phi}(\vec{r}')] = i \frac{\delta_{\vec{r}, \vec{r}'}}{l^2} \quad (1.2)$$

avec \vec{r} et \vec{r}' deux points du maillage. On définit le champ de vitesse à partir d'un gradient discret sur ce réseau $\vec{v}(\vec{r}) = \frac{\hbar}{m} \nabla \hat{\phi}(\vec{r})$ avec m la masse d'une particule. La dynamique de ces champs est décrite par l'hamiltonien hydrodynamique

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^2 \sum_{\vec{r}} \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \hat{\phi}) \cdot \hat{\rho} (\nabla \hat{\phi}) + e_0(\hat{\rho}). \quad (1.3)$$

Le terme e_0 désigne la densité volumique d'énergie dans l'état fondamental, reliée au potentiel chimique à température nulle par la relation $\mu = \frac{de_0}{d\rho}$.²

L'étape suivante consiste à linéariser l'hamiltonien (1.3) autour de l'état stationnaire homogène à l'équilibre thermodynamique

$$\hat{\rho}(\vec{r}) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\vec{r}) \quad (1.4)$$

$$\hat{\phi}(\vec{r}) = \hat{\phi}_0 + \delta\hat{\phi}(\vec{r}) \quad (1.5)$$

où nous avons introduit les moyennes spatiales $\hat{\rho}_0$ et $\hat{\phi}_0$ des opérateurs $\hat{\rho}(\vec{r})$ et $\hat{\phi}(\vec{r})$; on a simplement $\hat{\rho}_0 = \hat{N}/L^d$ où \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules; comme c'est une quantité conservée, on remplace dans la suite $\hat{\rho}_0$ par sa moyenne quantique ρ dans l'état du système. Les opérateurs fluctuations $\delta\hat{\rho}(\vec{r})$ et $\delta\hat{\phi}(\vec{r})$ n'ont de composantes de Fourier non nulles que sur les vecteurs d'onde non nuls et portent les excitations collectives du fluide. En introduisant ces développements dans l'hamiltonien hydrodynamique et en séparant les contributions d'ordres différents en les opérateurs fluctuations, nous obtenons la décomposition suivante

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(0)} = l^2 \sum_{\vec{r}} e_{0,0}(\rho) = e_{0,0}(\rho) L^2 \quad (1.6)$$

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(1)} = l^2 \sum_{\vec{r}} \mu(\rho) \delta\hat{\rho}(\vec{r}) = 0 \quad (1.7)$$

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)} = l^2 \sum_{\vec{r}} \frac{\hbar^2}{2m} \rho (\nabla \delta\hat{\phi})^2(\vec{r}) + \frac{1}{2} \frac{d\mu(\rho)}{d\rho} (\delta\hat{\rho})^2(\vec{r}) \quad (1.8)$$

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = l^2 \sum_{\vec{r}} \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \delta\hat{\phi} \cdot \delta\hat{\rho} \nabla \delta\hat{\phi}(\vec{r}) + \frac{1}{6} \frac{d^2\mu(\rho)}{d\rho^2} (\delta\hat{\rho})^3(\vec{r}). \quad (1.9)$$

On constate que $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(0)}$ est une constante (avec L^2 le volume de la boîte) que l'on peut donc ignorer. En fin de compte, c'est l'hamiltonien quadratique $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)}$ qui apporte la première

1. La possibilité d'introduire l'opérateur phase $\hat{\phi}(\vec{r})$ au site \vec{r} résulte de la condition de grande occupation du site $\rho l^d \gg 1$.

2. En principe, il faudrait introduire une densité volumique d'énergie nue $e_{0,0}$ que l'on doit ensuite renormaliser, par l'énergie de point zéro des modes pour obtenir la densité volumique d'énergie vraie dans l'état fondamental et supprimer la dépendance en le pas du maillage. Cette procédure est décrite dans la référence [22].

contribution à la dynamique des champs. Puisque cet hamiltonien est facile à diagonaliser et que $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)}$ est d'un ordre supérieur, il est utile de penser le système comme un hamiltonien perturbé $\hat{H}_0 + \hat{V}$ avec $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)}$ dans le rôle de l'hamiltonien bien connu et simple et $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)}$ dans le rôle de la perturbation. En effet, on peut mettre l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)}$ sous la forme normale

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)} = \sum_{\vec{q}} \varepsilon_q \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger \hat{b}_{\vec{q}} \quad (1.10)$$

au moyen d'une transformation de Bogolioubov sur les fluctuations des champs

$$\delta\hat{\rho}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\rho}{L^2}} \sum_{\vec{q} \in \mathcal{D}^*} \sqrt{\frac{\hbar q}{2mc}} (\hat{b}_{\vec{q}} + \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (1.11)$$

$$\delta\hat{\phi}(\vec{r}) = \frac{-i}{\sqrt{\rho L^2}} \sum_{\vec{q} \in \mathcal{D}^*} \sqrt{\frac{mc}{2\hbar q}} (\hat{b}_{\vec{q}} - \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger) e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} \quad (1.12)$$

avec \mathcal{D} la première zone de Brillouin du maillage de la boîte et \mathcal{D}^* cette même zone privée de $\vec{q} = \vec{0}$. Nous reconnaissons les opérateurs de création $\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger$ et d'annihilation $\hat{b}_{\vec{q}}$ d'un quantum dans le mode \vec{q} qui obéissent aux règles de commutation bosoniques $[\hat{b}_{\vec{q}}; \hat{b}_{\vec{k}}^\dagger] = \delta_{\vec{q}, \vec{k}}$. Le spectre d'excitation des phonons ainsi obtenu est purement linéaire $\varepsilon_q \equiv \hbar\omega_q = \hbar cq$ où la vitesse du son est donnée par $\rho \frac{d\mu}{d\rho} = mc^2$ qui n'est autre que l'habituelle relation thermodynamique, ce qui justifie l'appellation « phonons » pour ces quanta.

Cependant, pour pouvoir décrire toute la physique du problème, notamment pour savoir quels processus d'interaction entre phonons conservent l'énergie et peuvent conduire à l'amortissement du son, nous sommes amenés à introduire « à la main », comme l'avaient fait Landau et Khalatnikov, une courbure γ qui représente la première correction au spectre phononique linéaire :

$$\varepsilon_q \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar cq \left(1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + \dots \right). \quad (1.13)$$

Cette courbure peut être introduite de manière systématique en ajoutant à l'hamiltonien hydrodynamique les corrections de gradient [23].

Ceci étant dit, nous pouvons insérer les expressions des champs en fonction des modes propres dans (1.9) pour obtenir

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = & \frac{mc^2}{\sqrt{\rho L^2}} \sum_{\vec{k}_1; \vec{k}_2; \vec{k}_3} \sqrt{\frac{\hbar^3 k_1 k_2 k_3}{8m^3 c^3}} \left(3\Lambda + u_{\vec{k}_1; \vec{k}_2} + u_{\vec{k}_1; \vec{k}_3} + u_{\vec{k}_2; \vec{k}_3} \right) \\ & \times \left[\frac{1}{2} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2; \vec{k}_3} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_3} + \text{h.c.} \right) + \frac{1}{6} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3; \vec{0}} \left(\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_3}^\dagger + \text{h.c.} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

avec $u_{\vec{k}_1; \vec{k}_2} = \frac{\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2}{k_1 k_2}$ le cosinus de l'angle entre \vec{k}_1 et \vec{k}_2 et $\Lambda = \frac{\rho}{3} \frac{d^2 \mu}{d\rho^2} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \right)^{-1}$ un paramètre thermodynamique. Cette dernière expression de $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)}$ en termes des modes propres phononiques de $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)}$ est particulièrement intéressante dans la mesure où elle rend explicites les processus d'interaction entre phonons. En effet, dans la somme sur les vecteurs d'onde, le terme proportionnel à $\hat{b}_{\vec{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\vec{k}_3}$ par exemple représente l'annihilation d'un phonon \vec{k}_3 et la

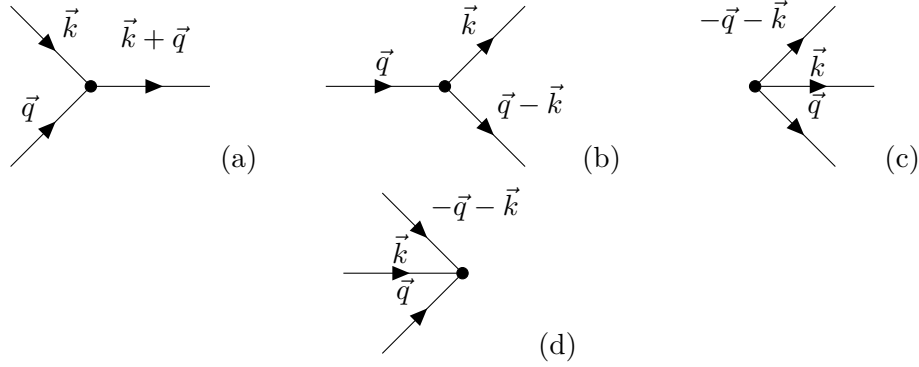


FIGURE 1.1 – Diagrammes des processus d'interaction associés à l'hamiltonien cubique $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)}$ donné par (1.14). (a) Processus de Landau associé au terme $\hat{b}_{k_3}^\dagger \hat{b}_{k_2} \hat{b}_{k_1}$. (b) Processus de Beliaev associé au terme $\hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2}^\dagger \hat{b}_{k_3}$. (c) et (d) processus non résonnants associées aux termes $\hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2}^\dagger \hat{b}_{k_3}^\dagger$ et $\hat{b}_{k_3} \hat{b}_{k_2} \hat{b}_{k_1}$ respectivement.

création de deux phonons de vecteurs d'onde \vec{k}_1 et \vec{k}_2 avec la contrainte de conservation de l'impulsion $\vec{k}_3 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$. On interprète alors ce terme comme la désintégration d'un phonon en deux autres. Il est appelé processus de Beliaev et nous le représentons sous la forme d'un diagramme d'interaction sur la figure 1.1b. Nous représentons aussi les processus associés aux autres termes de la somme. À savoir, le processus de Landau associé à $\hat{b}_{k_3}^\dagger \hat{b}_{k_2} \hat{b}_{k_1}$ où deux phonons \vec{k}_1 et \vec{k}_2 fusionnent en un seul de vecteur d'onde \vec{k}_3 , représenté en (a), et les processus non résonnants $\hat{b}_{k_1}^\dagger \hat{b}_{k_2}^\dagger \hat{b}_{k_3}^\dagger$ et $\hat{b}_{k_3} \hat{b}_{k_2} \hat{b}_{k_1}$, représentés en (c) et (d) respectivement, où trois phonons sont créés à partir du vide ou s'annihilent.

Expression de l'hamiltonien en fonction de $\hat{\psi}_{\vec{r}}$ Introduisons l'opérateur de champ des bosons, exprimé en point de vue module-phase

$$\hat{\psi}_{\vec{r}} = \sqrt{\hat{\rho}(\vec{r})} e^{i\hat{\phi}(\vec{r})} \quad (1.15)$$

et l'opérateur fluctuation de ce champ $\hat{\psi}_{\vec{r}} = \sqrt{\hat{\rho}} + \delta\hat{\psi}_{\vec{r}}$ pour le choix $\hat{\phi}_0 = 0$. On a alors

$$\delta\hat{\psi}_{\vec{r}} = \sqrt{\hat{\rho}} \left(\frac{\delta\hat{\rho}}{2\hat{\rho}} + i\delta\hat{\phi} \right). \quad (1.16)$$

En notant $\text{Re } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}} = \frac{\delta\hat{\psi}_{\vec{r}} + \delta\hat{\psi}_{\vec{r}}^\dagger}{2}$ et $\text{Im } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}} = \frac{\delta\hat{\psi}_{\vec{r}} - \delta\hat{\psi}_{\vec{r}}^\dagger}{2i}$ nous pouvons exprimer les fluctuations des champs comme $\delta\hat{\rho} = 2\sqrt{\hat{\rho}} \text{Re } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}}$ et $\delta\hat{\phi} = \frac{1}{\sqrt{\hat{\rho}}} \text{Im } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}}$ et insérer ces formules dans l'expression (1.9) de l'hamiltonien d'ordre 3

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = \frac{l^2}{\sqrt{\hat{\rho}}} \sum_{\vec{r}} \frac{\hbar^2}{m} \nabla \left(\text{Im } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}} \right) \left(\text{Re } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}} \nabla \text{Im } \delta\hat{\psi}_{\vec{r}} \right) + 4mc^2 \Lambda \left(\delta\hat{\psi}_{\vec{r}} \right)^3. \quad (1.17)$$

Pour conclure cette section, introduisons les opérateurs $\hat{a}_{\vec{q}}$ dans l'espace réciproque défini par la transformée de Fourier discrète de $\delta\hat{\psi}_{\vec{r}}$

$$\delta\hat{\psi}_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{L^2}} \sum_{\vec{q} \in \mathcal{D}^*} \hat{a}_{\vec{q}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}}. \quad (1.18)$$

Ces opérateurs $\hat{a}_{\vec{q}}$ ne coïncident pas avec les modes phononiques $\hat{b}_{\vec{q}}$ mais on peut passer des uns aux autres par simple combinaison linéaire³

$$\hat{a}_{\vec{q}} = u_{\vec{q}}\hat{b}_{\vec{q}} + v_{\vec{q}}\hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger \quad \text{avec} \quad u_{\vec{q}} + v_{\vec{q}} = \sqrt{\frac{\hbar q}{2mc}} \quad \text{et} \quad u_{\vec{q}} - v_{\vec{q}} = \sqrt{\frac{2mc}{\hbar q}}. \quad (1.19)$$

Observable cible Avant de conclure cette section, nous introduisons l'observable cible que les simulations du chapitre 2 ainsi que la théorie des fonctions de Green à N corps du chapitre 3 étudient et analysent. C'est la fonction de corrélation temporelle du mode \vec{q} à l'équilibre thermodynamique

$$\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t)\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle \quad (1.20)$$

À l'instant initial cette quantité s'exprime en fonction du nombre d'occupation moyen $n_{\vec{q}} = \langle \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(t)\hat{b}_{\vec{q}}(t) \rangle$ du mode \vec{q} , soit $\langle \hat{b}_{\vec{q}}(0)\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle = 1 + n_{\vec{q}}$. A priori, cette fonction de corrélation tend vers 0 aux temps longs. Plus précisément, dans la méthode de l'équation pilote, bien connue en optique quantique, qui traite le mode \vec{q} comme un petit système couplé au réservoir que forment les autres modes dans l'approximation de Born-Markov, on montre que cette fonction de corrélation décroît exponentiellement avec un taux $\Gamma_q/2$ où Γ_q est le taux d'amortissement prédit par la règle d'or de Fermi et calculé à la section 1.3 [24, 25].

1.2 Adimensionnement des quantités

Dans le reste de cette partie, nous ferons appel à des quantités adimensionnées. Ainsi, nous introduisons la température réduite $\epsilon = \frac{k_B T}{mc^2}$ qui doit être $\ll 1$ dans le régime de validité de l'hydrodynamique quantique. Comme nous le verrons, dans le cas $d = 3$, ce petit paramètre contrôle la validité de la règle d'or de Fermi. Dans le cas $d = 2$ en revanche, ϵ doit partager son royaume avec un second petit paramètre physique. De plus, nous avons écrit nos simulations uniquement en termes de quantités adimensionnées, ce qui offre un certain confort dans l'écriture du programme et l'interprétation des données de sortie puisque la dynamique ne dépend plus que d'un nombre limité de paramètres d'entrée qui reflètent des rapports de quantités physiques dans le système (comme nous le verrons au chapitre 2 consacré à la description du programme).

La version adimensionnée d'une quantité x sera toujours notée \bar{x} . Le plus souvent, l'adimensionnement est effectué au moyen de la température T . Toutes les énergies sont ainsi adimensionnées par $k_B T$, les temps par $\frac{\hbar}{k_B T}$, les distances par $\frac{\hbar c}{k_B T}$. Par exemple, nous notons $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)} = k_B T \bar{H}^{(2)}$ et $\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = k_B T \bar{H}^{(3)}$. On introduit aussi la longueur de relaxation $\xi = \frac{\hbar}{mc}$ grâce à laquelle on exprime la densité adimensionnée $\rho \xi^2$. La suite de cette section consiste à réécrire les relations et les quantités jusqu'ici abordées dans leur version adimensionnée.

3. Pour retrouver ces expressions, il suffit d'exprimer $\delta\psi_{\vec{r}}$ en termes des $\hat{b}_{\vec{q}}$ via les équations (1.16) et (1.11)-(1.12) et de comparer à la décomposition de Fourier (1.18) vecteur d'onde par vecteur d'onde.

Les opérateurs de fluctuation local de la densité et de la phase

$$\delta\bar{\rho}(\vec{r}) = \sqrt{\frac{\rho\xi^2}{2\epsilon\bar{L}^2}} \sum_{\vec{q}\in\mathcal{D}^*} \sqrt{\bar{q}} \left(\hat{b}_{\vec{q}}(t) + \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger(t) \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (1.21)$$

$$\delta\bar{\phi}(\vec{r}) = \frac{-i}{\sqrt{2\rho\xi^2}} \frac{\epsilon}{\bar{L}^2} \sum_{\vec{q}\in\mathcal{D}^*} \sqrt{\frac{1}{\bar{q}}} \left(\hat{b}_{\vec{q}}(t) - \hat{b}_{-\vec{q}}^\dagger(t) \right) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \quad (1.22)$$

et le spectre des phonons

$$\bar{\epsilon}_q = \bar{q} \left(1 + \frac{\gamma}{8} \epsilon^2 \bar{q}^2 \right). \quad (1.23)$$

Les hamiltoniens hydrodynamiques d'ordre 2 et 3 L'hamiltonien d'ordre 2 en fonction des opérateurs phononiques $\hat{b}_{\vec{q}}$

$$\bar{H}^{(2)} = \sum_{\vec{k}} \bar{\epsilon}_k \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k, \quad (1.24)$$

l'hamiltonien d'ordre 3 en fonction des opérateurs phononiques

$$\begin{aligned} \bar{H}^{(3)} = & \sqrt{\frac{1}{\bar{L}^2}} \frac{\epsilon^3}{8\rho\xi^2} \sum_{\vec{k}_1; \vec{k}_2; \vec{k}_3 \in \mathcal{D}^*} \sqrt{\bar{k}_1 \bar{k}_2 \bar{k}_3} \left(3\Lambda + u_{\vec{k}_1; \vec{k}_2} + u_{\vec{k}_1; \vec{k}_3} + u_{\vec{k}_2; \vec{k}_3} \right) \\ & \times \left[\frac{1}{2} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2; \vec{k}_3} \left(b_{\vec{k}_1}^\dagger b_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_3} + \text{h.c.} \right) + \frac{1}{6} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3; \vec{0}} \left(b_{\vec{k}_1}^\dagger b_{\vec{k}_2}^\dagger b_{\vec{k}_3}^\dagger + \text{h.c.} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

et l'hamiltonien d'ordre 3 en fonction des opérateurs fluctuations du champ bosonique $\hat{\psi}_{\vec{r}}$

$$\bar{H}^{(3)} = \frac{\epsilon^2}{\sqrt{\rho\xi^2}} \bar{l}^2 \sum_{\vec{r}} \text{Re} \delta\bar{\psi}_{\vec{r}} \nabla \left(\text{Im} \delta\bar{\psi}_{\vec{r}} \right)^2 + 4\Lambda \left(\text{Re} \delta\bar{\psi}_{\vec{r}} \right)^3. \quad (1.26)$$

1.3 Taux d'amortissement Landau-Beliaev via la règle d'or de Fermi

Le calcul du taux d'amortissement par la règle d'or de Fermi que nous allons exposer dans cette section 1.3 ne constitue pas un résultat original et se retrouve par exemple dans la référence [26]. Nous allons toutefois le présenter en détail car il constitue un premier point de comparaison pour les simulations et car nous reprendrons des notations et arguments similaires dans le cas de la théorie des fonctions de Green du chapitre 3.

Considérons la situation d'un mode \vec{q} mis hors d'équilibre thermodynamique et demandons-nous quelle est l'équation d'évolution de son nombre d'occupation moyen $n_{\vec{q}} = \langle \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(t) \hat{b}_{\vec{q}}(t) \rangle$? Comme nous sommes dans le cas standard d'un hamiltonien H_0 que l'on sait diagonaliser faiblement perturbé par un hamiltonien V à la structure plus complexe⁴ [27], la règle d'or de Fermi nous permet de répondre à la question.

4. Qui est plus connue sous le nom « règle d'or de Fermi » bien que ce soit en réalité Dirac qui fit l'essentiel du travail en 1927 [27]. Seulement, Fermi cita l'équation comme la « règle d'or n°2 » dans son livre *Nuclear Physics* en 1950. Cette expression entra dans le vocabulaire courant de la physique. On mesure l'immensité des contributions de ces deux personnages dans la physique moderne à ce que ce quiproquo n'affecte en aucune façon l'héritage intellectuel de l'un ou de l'autre.

1.3. TAUX D'AMORTISSEMENT LANDAU-BELIAEV VIA LA RÈGLE D'OR DE FERMI⁵

Pour écrire l'équation d'évolution de la population moyenne du mode \vec{q} hors équilibre selon la règle d'or de Fermi, il suffit de lister les processus qui peuplent ou dépeuplent le mode \vec{q} . Ensuite, il faut sommer ces contributions avec un « + » pour ceux qui peuplent et un « - » pour ceux qui dépeuplent, avec en facteur la norme au carré de l'élément de matrice de l'hamiltonien de perturbation entre l'état initial et l'état final du processus, les nombres d'occupation des modes impliqués avant et après l'interaction (elles interviennent au travers des facteurs d'amplification bosonique) et enfin les distributions de Dirac et de Kronecker de conservation de l'énergie et de l'impulsion au cours du processus :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}n_{\vec{q}} = & -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q} \rangle \right|^2 (1 + \bar{n}_{k_1})(1 + \bar{n}_{k_2}) n_{\vec{q}} \delta_{\vec{q}, \vec{k}_1 + \vec{k}_2} \delta(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_q) \\
& + \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{q}, \vec{k}_2 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{k}_1 \rangle \right|^2 (1 + n_{\vec{q}})(1 + \bar{n}_{k_2}) \bar{n}_{k_1} \delta_{\vec{k}_2 + \vec{q}, \vec{k}_1} \delta(\varepsilon_{k_2} + \varepsilon_q - \varepsilon_{k_1}) \\
& - \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k}_1 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q}, \vec{k}_2 \rangle \right|^2 (1 + \bar{n}_{k_1}) \bar{n}_{k_2} n_{\vec{q}} \delta_{\vec{q} + \vec{k}_2, \vec{k}_1} \delta(\varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_q) \\
& + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{q} | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \right|^2 (1 + n_{\vec{q}}) \bar{n}_{k_2} \bar{n}_{k_1} \delta_{\vec{q}, \vec{k}_2 + \vec{k}_1} \delta(\varepsilon_q - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2}) \\
& - \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle 0 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q}, \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \right|^2 \bar{n}_{k_1} \bar{n}_{k_2} n_{\vec{q}} \delta_{\vec{q} + \vec{k}_2 + \vec{k}_1, 0} \delta(0 - \varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_q) \\
& + \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{q}, \vec{k}_1, \vec{k}_2 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | 0 \rangle \right|^2 (1 + n_{\vec{q}})(1 + \bar{n}_{k_2})(1 + \bar{n}_{k_1}) \delta_{\vec{0}, \vec{q} + \vec{k}_2 + \vec{k}_1} \delta(\varepsilon_q + \varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - 0)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

avec \bar{n}_k le nombre d'occupation thermique du mode \vec{k} (qui ne dépend que de sa norme) et $|0\rangle$ le vide de phonons. La première somme correspond au cas où un processus de Beliaev dépeuplerait le mode \vec{q} , faisant passer de l'état $|\vec{q} : n_{\vec{q}}; \vec{k}_1 : \bar{n}_{k_1}; \vec{k}_2 : \bar{n}_{k_2}\rangle$ à l'état $|\vec{q} : n_{\vec{q}} - 1; \vec{k}_1 : \bar{n}_{k_1} + 1; \vec{k}_2 : \bar{n}_{k_2} + 1\rangle$. Le facteur 1/2 devant la somme est un facteur de comptage ; en effet, les vecteurs d'état obtenus en échangeant \vec{k}_1 et \vec{k}_2 décrivent la même situation physique qui ne doit être comptée qu'une seule fois. Il suffit d'appliquer cette même logique pour chacun des processus, en déplaçant le phonon \vec{q} surnuméraire dans l'état initial ou dans l'état final et en accordant le signe devant la somme en conséquence. L'expression que nous venons d'écrire est très lourde mais deux observations vont la simplifier. La première est que les deux dernières sommes, liées aux processus non résonnants, sont nulles. En effet, le Dirac de conservation d'énergie dans chacune d'elles est toujours d'argument strictement positif.⁵ La seconde remarque est que les lignes 1 et 4 d'une part, et 2 et 3 d'autre part font intervenir le même élément de matrice ainsi que les mêmes Dirac et Kronecker de conservation d'énergie et d'impulsion (c'est une manifestation du principe de microréversibilité). Nous pouvons donc réexprimer l'équation d'évolution (1.27) comme la somme de deux termes, l'un associé

5. Remarquons que tous les phonons et sommes de phonons impliqués dans un terme doivent se trouver dans la première zone de Brillouin privée du vecteur nul \mathcal{D}^* . Ainsi, sont concernés les vecteurs d'onde \vec{k}_1 , \vec{k}_2 , \vec{q} mais aussi $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ dans la première ligne de (1.27), $\vec{k}_2 + \vec{q}$ dans la deuxième, etc.

aux processus de Beliaev direct et inverse, l'autre aux processus de Landau direct et inverse :

$$\frac{d}{dt}n_{\vec{q}} = \left. \frac{dn_{\vec{q}}}{dt} \right|_{\text{Bel}} + \left. \frac{dn_{\vec{q}}}{dt} \right|_{\text{Lan}} \quad (1.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn_{\vec{q}}}{dt} \right|_{\text{Bel}} &= -\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k}_1; \vec{k}_2 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q} \rangle \right|^2 [(1 + \bar{n}_{k_1})(1 + \bar{n}_{k_2})n_{\vec{q}} - (1 + n_{\vec{q}})\bar{n}_{k_2}\bar{n}_{k_1}] \\ &\quad \times \delta_{\vec{q}; \vec{k}_1 + \vec{k}_2} \delta(\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_q) \end{aligned} \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{dn_{\vec{q}}}{dt} \right|_{\text{Lan}} &= -\frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2 \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k}_1 | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q}; \vec{k}_2 \rangle \right|^2 [(1 + \bar{n}_{k_1})\bar{n}_{k_2}n_{\vec{q}} - (1 + n_{\vec{q}})(1 + \bar{n}_{k_2})\bar{n}_{k_1}] \\ &\quad \times \delta_{\vec{q} + \vec{k}_2; \vec{k}_1} \delta(\varepsilon_{k_1} - \varepsilon_{k_2} - \varepsilon_q). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Considérons maintenant un régime de petite perturbation du mode \vec{q} autour de l'état d'équilibre thermodynamique $n_{\vec{q}} = \bar{n}_q + \delta n_{\vec{q}}$. On vérifie aisément que l'équation d'évolution (1.28) est identiquement nulle pour $n_{\vec{q}} = \bar{n}_{\vec{q}}$. En effet, pour un gaz de bosons, l'équilibre thermodynamique obéit à la loi de distribution de Bose-Einstein $\bar{n}_k = \frac{1}{\exp(\beta\varepsilon_k) - 1}$ avec $\beta = \frac{1}{k_B T}$ que l'on réécrit $1 + \bar{n}_k = \exp(\beta\varepsilon_k)\bar{n}_k$. En utilisant cette relation dans les expressions entre crochets dans (1.29) et (1.30), on trouve qu'elles s'annulent compte tenu du Dirac de conservation de l'énergie. Au premier ordre en la perturbation du mode \vec{q} , nous avons alors

$$\frac{d}{dt}\delta n_{\vec{q}} = -\Gamma_{\vec{q}}\delta n_{\vec{q}} \quad (1.31)$$

avec

$$\Gamma_{\vec{q}} = \Gamma_{\vec{q}}^{\text{Bel}} + \Gamma_{\vec{q}}^{\text{Lan}} \quad (1.32)$$

et

$$\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Bel}} = \frac{\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k}; \vec{q} - \vec{k} | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q} \rangle \right|^2 (1 + \bar{n}_k + \bar{n}_{|\vec{q} - \vec{k}|}) \delta(\varepsilon_k + \varepsilon_{|\vec{q} - \vec{k}|} - \varepsilon_q) \quad (1.33)$$

$$\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Lan}} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}^*} \left| \langle \vec{k} + \vec{q} | \hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} | \vec{q}; \vec{k} \rangle \right|^2 (\bar{n}_k - \bar{n}_{|\vec{q} + \vec{k}|}) \delta(\varepsilon_{|\vec{q} + \vec{k}|} - \varepsilon_k - \varepsilon_q) \quad (1.34)$$

où nous avons utilisé le Kronecker de conservation de l'impulsion. Ces quantités $\Gamma_{\vec{q}}$, $\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Bel}}$ et $\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Lan}}$ s'interprètent donc comme des taux d'amortissement de la perturbation ou encore comme des taux de thermalisation du mode. Dans le reste de cette section, nous déroulons le calcul afin d'obtenir le taux $\Gamma_{\vec{q}}$ dans la limite d'une température réduite petite devant 1, c'est-à-dire $\epsilon \ll 1$. Nous procéderons processus par processus, les calculs pour Beliaev et Landau étant quasiment identiques. Le plan du calcul est le suivant : nous passons à la limite thermodynamique afin de considérer les expressions de $\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Bel}}$ et $\Gamma_{\vec{q}}^{\text{Lan}}$ comme des intégrales sur la variable \vec{k} . En coordonnées polaires d'axe \vec{q} , ce sont des intégrales doubles, l'une sur la norme k , l'autre sur l'angle θ entre \vec{k} et \vec{q} . Nous passons ensuite à l'approximation du champ classique, qui modifie la loi de distribution et donc le facteur de population dans les intégrales,

mais aussi introduit une coupure η sur la norme des vecteurs d'onde \vec{k} et $\vec{q} \mp \vec{k}$. Nous nous plaçons ensuite à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ et nous exprimons le Dirac de conservation d'énergie en terme de la variable θ à l'ordre dominant en ϵ . Nous obtenons des solutions θ_0 que l'on réintroduit dans l'intégrale, dorénavant simple que nous pouvons intégrer directement.

1.3.1 Expressions des taux adimensionnés comme des intégrales sur les impulsions.

Par ailleurs, nous ferons tout le reste du calcul dans les variables adimensionnées introduites à la section 1.2 du présent chapitre. À partir de l'expression (1.25) de $\bar{H}^{(3)}$, exprimons les éléments de matrice (adimensionnés donc) intervenant dans (1.33) et (1.34)

$$\langle \vec{k}; \vec{q} - \vec{k} | \bar{H}^{(3)} | \vec{q} \rangle = 2 \sqrt{\frac{1}{\bar{L}^2} \frac{\epsilon^3}{2^5 \rho \xi^2}} \sqrt{\bar{q} \bar{k} |\vec{q} - \vec{k}|} \left(3\Lambda + u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} - \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} - \vec{k}} \right) \quad (1.35)$$

$$\langle \vec{k} + \vec{q} | \bar{H}^{(3)} | \vec{q}; \vec{k} \rangle = 2 \sqrt{\frac{1}{\bar{L}^2} \frac{\epsilon^3}{2^5 \rho \xi^2}} \sqrt{\bar{q} \bar{k} |\vec{q} + \vec{k}|} \left(3\Lambda + u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} + \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} + \vec{k}} \right). \quad (1.36)$$

Pour effectuer le passage à la limite thermodynamique, nous faisons simplement la transformation $\sum_{\vec{k} \in \mathcal{D}^*} \rightarrow \bar{L}^2 \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2}$ et nous insérons les éléments de matrices :

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Bel}} = \frac{\epsilon^3 \pi}{2^3 \rho \xi^2} \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \bar{q} \bar{k} |\vec{q} - \vec{k}| \left(3\Lambda + u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} - \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} - \vec{k}} \right)^2 \left(1 + \bar{n}_k + \bar{n}_{|\vec{q} - \vec{k}|} \right) \delta(\bar{\epsilon}_k + \bar{\epsilon}_{|\vec{q} - \vec{k}|} - \bar{\epsilon}_q) \quad (1.37)$$

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Lan}} = \frac{\epsilon^3 \pi}{2^2 \rho \xi^2} \int \frac{d^2 \vec{k}}{(2\pi)^2} \bar{q} \bar{k} |\vec{q} + \vec{k}| \left(3\Lambda + u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} + \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} + \vec{k}} \right)^2 \left(\bar{n}_k - \bar{n}_{|\vec{q} + \vec{k}|} \right) \delta(\bar{\epsilon}_{|\vec{q} + \vec{k}|} - \bar{\epsilon}_k - \bar{\epsilon}_q). \quad (1.38)$$

On introduit θ l'angle entre \vec{q} et \vec{k} . Alors, par définition, nous pouvons écrire $u_{\vec{q}, \vec{k}} = \cos \theta$ et

$$u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} - \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} - \vec{k}} = \cos \theta + \frac{\bar{q} - \bar{k}}{|\vec{q} - \vec{k}|} (1 + \cos \theta) \quad (1.39)$$

$$u_{\vec{q}, \vec{k}} + u_{\vec{q}, \vec{q} + \vec{k}} + u_{\vec{k}, \vec{q} + \vec{k}} = \cos \theta + \frac{\bar{q} + \bar{k}}{|\vec{q} + \vec{k}|} (1 + \cos \theta). \quad (1.40)$$

Ainsi

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Bel}} = \frac{\epsilon^3}{2^5 \pi \rho \xi^2} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \bar{q} \bar{k}^2 |\vec{q} - \vec{k}| \left(3\Lambda + \cos \theta + \frac{\bar{q} - \bar{k}}{|\vec{q} - \vec{k}|} (1 + \cos \theta) \right)^2 \times \left(1 + \bar{n}_k + \bar{n}_{|\vec{q} - \vec{k}|} \right) \delta(\bar{\epsilon}_k + \bar{\epsilon}_{|\vec{q} - \vec{k}|} - \bar{\epsilon}_q) \quad (1.41)$$

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Lan}} = \frac{\epsilon^3}{2^4 \pi \rho \xi^2} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_{-\pi}^{+\pi} d\theta \bar{q} \bar{k}^2 |\vec{q} + \vec{k}| \left(3\Lambda + \cos \theta + \frac{\bar{q} + \bar{k}}{|\vec{q} + \vec{k}|} (1 + \cos \theta) \right)^2 \times \left(\bar{n}_k - \bar{n}_{|\vec{q} + \vec{k}|} \right) \delta(\bar{\epsilon}_{|\vec{q} + \vec{k}|} - \bar{\epsilon}_k - \bar{\epsilon}_q). \quad (1.42)$$

1.3.2 Solution en champ classique

Bien qu'il soit possible de finir le calcul directement pour le champ quantique, nous ne présentons en détail ici uniquement la version en champ classique puisque c'est dans cette approximation que le programme informatique des simulations a été écrite, ce qui permet une comparaison directe. L'approximation de champ classique consiste à considérer uniquement les modes fortement peuplés, donc tels que $n_{\vec{q}} \geq 1$ et ignorer ceux faiblement peuplés pour lesquels les distributions de Bose et de Boltzmann sont radicalement différentes. Il faut donc introduire une coupure dans l'espace des impulsions, ici notée η , auxquelles tous les nombres d'onde (adimensionnés) qui apparaissent doivent être inférieurs. Dans cette approximation, le modèle ne peut plus être comparé quantitativement aux expériences car toutes les quantités dérivées dépendront de ce paramètre non physique η que nous choisissons à loisir.

Pour nos deux intégrales, passer à la limite du champ classique impose trois modifications. La première est de retirer dans les facteurs de populations le terme $+1$ qui représente la contribution des fluctuations quantiques, ignorées dans cette approximation. La deuxième est de considérer pour le nombre d'occupation thermique d'un mode la formule d'équipartition de l'énergie de la physique statistique classique $\bar{n}_q = \frac{k_B T}{\epsilon_q} = \frac{1}{\bar{\epsilon}_q}$. La dernière est de considérer la coupure « ultraviolette » η sur chaque phonon intervenant dans le processus. Bien entendu, le mode \vec{q} choisi est autorisé, c'est-à-dire $\bar{q} \leq \eta$. Pour les deux autres phonons de chaque processus, nous insérons dans l'intégrale correspondante autant de fois que nécessaire une fonction de Heaviside $\Theta(x)$, nulle pour $x < 0$ et égale à 1 sinon. Soit, en nous ramenant par parité à des intégrales sur $\theta > 0$,

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_q^{\text{Bel}} = & \frac{\epsilon^3}{16\pi\rho\xi^2} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_0^{+\pi} d\theta \bar{q}\bar{k}^2 \overline{|\vec{q} - \vec{k}|} \left(3\Lambda + \cos\theta + \frac{\bar{q} - \bar{k}}{|\vec{q} - \vec{k}|} (1 + \cos\theta) \right)^2 \\ & \times \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}_k} + \frac{1}{\bar{\epsilon}_{|\vec{q}-\vec{k}|}} \right) \delta(\bar{\epsilon}_k + \bar{\epsilon}_{|\vec{q}-\vec{k}|} - \bar{\epsilon}_q) \Theta(\eta - \bar{k}) \Theta(\eta - \overline{|\vec{q} - \vec{k}|}) \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_q^{\text{Lan}} = & \frac{\epsilon^3}{8\pi\rho\xi^2} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_0^{+\pi} d\theta \bar{q}\bar{k}^2 \overline{|\vec{q} + \vec{k}|} \left(3\Lambda + \cos\theta + \frac{\bar{q} + \bar{k}}{|\vec{q} + \vec{k}|} (1 + \cos\theta) \right)^2 \\ & \times \left(\frac{1}{\bar{\epsilon}_k} - \frac{1}{\bar{\epsilon}_{|\vec{q}+\vec{k}|}} \right) \delta(\bar{\epsilon}_{|\vec{q}+\vec{k}|} - \bar{\epsilon}_k - \bar{\epsilon}_q) \Theta(\eta - \bar{k}) \Theta(\eta - \overline{|\vec{q} + \vec{k}|}). \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.3.3 Développement à l'ordre dominant en ϵ

Nous allons passer à la limite d'un $\epsilon \ll 1$, choix motivé par le régime de validité de l'hydrodynamique quantique. On aurait pu cependant résoudre numériquement ces intégrales (1.43) et (1.44), ce que l'on a d'ailleurs fait en calculant numériquement la fonction énergie propre, dont ces intégrales ne sont que la valeur en un point particulier, afin d'obtenir une prédiction diagrammatique des fonctions de Green à tous les ordres en ϵ , comme nous le verrons au chapitre 3. Notre résolution à l'ordre dominant en ϵ repose sur le fait que pour une température réduite suffisamment petite, l'angle θ_0 qui satisfait la conservation d'énergie est lui-même petit.

1.3. TAUX D'AMORTISSEMENT LANDAU-BELIAEV VIA LA RÈGLE D'OR DE FERMI 89

Les relations de conservation de l'énergie dans chacun des Dirac s'expriment en fonction de θ comme suit :

$$\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{q}-\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q = \bar{k} - \bar{q} + \frac{\gamma}{8}\epsilon^2(\bar{k}^3 - \bar{q}^3) + (\bar{k}^2 + \bar{q}^2 - 2\bar{k}\bar{q}\cos\theta)^{1/2} + \frac{\gamma}{8}\epsilon^2(\bar{k}^2 + \bar{q}^2 - 2\bar{k}\bar{q}\cos\theta)^{3/2} \quad (1.45)$$

$$\bar{\varepsilon}_{|\bar{q}+\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q - \bar{\varepsilon}_k = (\bar{q}^2 + \bar{k}^2 + 2\bar{q}\bar{k}\cos\theta)^{1/2} + \frac{\gamma}{8}\epsilon^2(\bar{q}^2 + \bar{k}^2 + 2\bar{q}\bar{k}\cos\theta)^{3/2} - \bar{q} - \frac{\gamma}{8}\epsilon^2\bar{q}^3 - \bar{k} - \frac{\gamma}{8}\epsilon^2\bar{k}^3. \quad (1.46)$$

Notons θ_0 la solution positive en la variable θ de l'équation $\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{q}-\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q = 0$ ou $\bar{\varepsilon}_{|\bar{q}+\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_k - \bar{\varepsilon}_q = 0$ à \bar{k} et \bar{q} fixés. On se convainc que dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$, la solution de ces équations est $\theta_0 = 0$ (pour Beliaev cependant, une solution réelle n'existe que pour $\bar{k} \leq \bar{q}$). Dès lors, par continuité, nous pouvons faire l'hypothèse que pour un ϵ suffisamment petit, nous avons $\theta_0 \ll 1$. Reprenons les expressions des arguments des Dirac (1.45) et (1.46) et développons aux petits angles (et à l'ordre dominant en ϵ) :

$$\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{q}-\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q = \bar{k} - \bar{q} + |\bar{k} - \bar{q}| + \frac{\gamma}{8}\epsilon^2(\bar{k}^3 - \bar{q}^3 + |\bar{k} - \bar{q}|^3) + \frac{\bar{k}\bar{q}}{|\bar{k} - \bar{q}|} \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \quad (1.47)$$

$$\bar{k} > \bar{q} \quad : \quad \bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{k}-\bar{q}|} - \bar{\varepsilon}_q = 2(\bar{k} - \bar{q}) + \frac{\bar{k}\bar{q}}{\bar{k} - \bar{q}} \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \quad (1.48)$$

→ pas de solution en θ .

$$\bar{k} \leq \bar{q} \quad : \quad \bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{k}-\bar{q}|} - \bar{\varepsilon}_q = \frac{3\gamma}{8}\epsilon^2\bar{q}\bar{k}(\bar{q} - \bar{k}) + \frac{\bar{k}\bar{q}}{\bar{q} - \bar{k}} \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) \quad (1.49)$$

$$\rightarrow \theta_0^2 \simeq \frac{3\gamma}{4}\epsilon^2(\bar{q} - \bar{k})^2. \quad (1.50)$$

$$\bar{\varepsilon}_{|\bar{q}+\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q - \bar{\varepsilon}_k = \frac{3\gamma}{8}\bar{q}\bar{k}(\bar{q} + \bar{k})\epsilon^2 - \frac{\bar{q}\bar{k}}{2(\bar{q} + \bar{k})}\theta^2 + O(\theta^4) \quad (1.51)$$

$$\rightarrow \theta_0^2 \simeq \frac{3\gamma}{4}\epsilon^2(\bar{q} + \bar{k})^2. \quad (1.52)$$

Ce sont ces solutions θ_0 que nous devons maintenant insérer dans l'intégrale pour tenir compte du Dirac de conservation de l'énergie. Remarquons au passage que les dénominateurs d'énergie sont d'ordre 2 en ϵ (lorsqu'une solution existe), cette observation prendra toute son importance au chapitre 3 lorsque l'on évoquera les diagrammes d'ordre supérieur.

1.3.4 Intégration

Rappelons en premier lieu la formule $\delta(f(x)) = \sum_{x^*} \frac{\delta(x-x^*)}{|f'(x^*)|}$ pour le Dirac d'une fonction dérivable f quelconque, avec f' sa dérivée et $\{x^*\}$ ses racines. Ainsi, pour l'intégration angulaire du Dirac de conservation d'énergie, il nous faut les dérivées par rapport à θ des équations (1.45) et (1.46) évaluées aux solutions θ_0 . Soit, à l'ordre dominant en ϵ ,

$$\left| \frac{d}{d\theta}(\bar{\varepsilon}_k + \bar{\varepsilon}_{|\bar{q}-\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q)(\theta_0) \right| \simeq \frac{\sqrt{3\gamma}}{2}\bar{k}\bar{q}\epsilon \quad (1.53)$$

$$\left| \frac{d}{d\theta}(\bar{\varepsilon}_{|\bar{q}+\bar{k}|} - \bar{\varepsilon}_q - \bar{\varepsilon}_k) \right| \simeq \frac{\sqrt{3\gamma}}{2}\bar{k}\bar{q}\epsilon. \quad (1.54)$$

Il ne nous reste plus qu'à rassembler tous ses ingrédients pour calculer l'intégrale selon θ ,

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Bel}} = \frac{\epsilon^2}{2^3 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \int_0^{\bar{q}} d\bar{k} \bar{k} (\bar{q} - \bar{k}) (3\Lambda + 3)^2 \left(\frac{1}{\bar{k}} + \frac{1}{\bar{q} - \bar{k}} \right) \Theta(\eta - \bar{k}) \Theta(\eta - (\bar{q} - \bar{k})) \quad (1.55)$$

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Lan}} = \frac{\epsilon^2}{2^2 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \bar{k} (\bar{q} + \bar{k}) (3\Lambda + 3)^2 \left(\frac{1}{\bar{k}} - \frac{1}{\bar{q} + \bar{k}} \right) \Theta(\eta - \bar{k}) \Theta(\eta - (\bar{q} + \bar{k})). \quad (1.56)$$

L'intégration dans Beliaev est restreinte à $\bar{k} \leq \bar{q}$, car il n'y a pas de solution au-dessus de \bar{q} comme nous l'avons vu. Remarquons que $\eta - \bar{q} \geq 0$ et $\eta - (\bar{q} - \bar{k}) \geq 0$ pour $\bar{k} \in [0; \bar{q}]$ donc les fonctions de Heaviside dans Beliaev sont sans effet sur l'intégration. Dans Landau en revanche, la seconde fonction de Heaviside impose $[0; \eta - \bar{q}]$ comme intervalle d'intégration. Ceci étant précisé, les intégrales peuvent simplement être menées à terme et donnent :

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Bel}} = \frac{9(1 + \Lambda)^2 \epsilon^2}{2^3 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \bar{q}^2 \quad (1.57)$$

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{Lan}} = \frac{9(1 + \Lambda)^2 \epsilon^2}{2^2 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \bar{q} (\eta - \bar{q}). \quad (1.58)$$

Et donc, le taux d'amortissement d'un phonon d'impulsion \bar{q} , calculé selon la règle d'or de Fermi-Dirac, s'écrit pour le champ classique

$$\boxed{\bar{\Gamma}_q^{\text{class}} = \frac{9(1 + \Lambda)^2 \epsilon^2}{4 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \bar{q} \left(\eta - \frac{\bar{q}}{2} \right)}. \quad (1.59)$$

On remarque qu'il dépend quadratiquement de \bar{q} et qu'il est d'ordre 2 en ϵ .

Retour au cas quantique Par souci d'exhaustivité, reprenons le cas quantique. Une fois passé à la limite $\epsilon \rightarrow 0$, nous sommes amené à écrire

$$\bar{\Gamma}_q^{\text{quant}} = \frac{9(1 + \Lambda)^2 \epsilon^2}{8 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} (I_B + 2I_L) \quad (1.60)$$

avec I_B et I_L deux intégrales provenant respectivement du cas Beliaev et Landau

$$I_B = \int_0^{\bar{q}} d\bar{k} \bar{k} (\bar{q} - \bar{k}) (1 + \bar{n}_k + \bar{n}_{q-k}) \quad (1.61)$$

$$I_L = \int_0^{+\infty} d\bar{k} \bar{k} (\bar{q} + \bar{k}) (\bar{n}_k - \bar{n}_{q+k}) \quad (1.62)$$

avec cette fois-ci $\bar{n}_k = 1/(e^{\bar{k}} - 1)$. Il se trouve qu'il est possible d'exprimer séparément ces intégrales à l'aide de fonctions de Bose $g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}$ mais que ces fonctions se compensent lorsque l'on somme les intégrales ! Si bien que nous avons $I_B + 2I_L = \frac{\bar{q}^3}{6} + 4\bar{q}\zeta(2)$ avec $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ la valeur de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$ en $s = 2$, et

$$\boxed{\bar{\Gamma}_q^{\text{quant}} = \frac{9(1 + \Lambda)^2 \epsilon^2}{8 \sqrt{3} \gamma \pi \rho \xi^2} \bar{q} \left(\frac{2\pi^2}{3} + \frac{\bar{q}^2}{6} \right)} \quad (1.63)$$

Comparons notre résultat à l'article de M.-C. Chung et A.B. Bhattacharjee (2009) [26]. Les auteurs y présentent des calculs de l'amortissement des phonons dans des gaz de bosons en interaction faible dans le cas $d = 2$ et $d = 3$. En dimension 2, dans la limite de basse température $k_B T/mc^2 \rightarrow 0$, ils trouvent les comportements aux limites (voir les équations (30) et (22) de [26] mises dans nos notations en tenant compte d'un facteur 2 dans la définition des taux)

$$\Gamma_q \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} \frac{\sqrt{3}\pi}{4\rho} \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^2 cq \quad (1.64)$$

$$\Gamma_q \underset{\bar{q} \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\sqrt{3}}{16\pi\rho} cq^3. \quad (1.65)$$

Le comportement à faible q étant dominé par Landau et celui à grand q par Beliaev. Dans la limite d'interaction faible, il faut prendre $\gamma = 1$ (comme dans le spectre de Bogolioubov) et $\Lambda = 0$ (comme pour l'équation d'état de champ moyen $\mu = \rho g$); ces résultats sont alors en accord parfait avec le nôtre (1.63).

Par ailleurs, l'étude récente [17] prédit bien, dans la limite $q \rightarrow 0$, un taux d'amortissement linéaire en q mais avec un coefficient $\propto T$ à basse température, en désaccord avec (1.64) et avec la référence [26]. En effet, la méthode utilisée, basée sur l'approximation de Hartree-Fock, ne tient pas compte de la partie linéaire du spectre d'excitation dans la description de l'état thermique, voir l'équation (11) de cette référence, ce qui devient irréaliste lorsque $k_B T \ll mc^2$ où la thermodynamique est dominée par les phonons (une étude similaire a été faite dans la référence [18]).

Chapitre 2

La simulation numérique

Avant-propos

Dans ce chapitre, nous présentons le programme de simulation numérique. C'est-à-dire sa structure, ses paramètres et les choix de modélisation qui ont présidé à son écriture ainsi que les méthodes numériques que nous avons utilisées. Nous laissons l'exploitation des données issues des exécutions du programme, la discussion physique des paramètres choisis ainsi que les figures vérifiant le respect des bonnes propriétés physiques du système au chapitre 4, qui présente l'ensemble de nos résultats. Le programme est écrit en Fortran.¹

L'objet dont le programme informatique détermine l'évolution est le champ classique $\delta\psi_{\vec{r}} = \sqrt{\rho}(\frac{\delta\rho}{2\rho} + i\delta\phi)$ qui décrit les fluctuations d'un champ bosonique $\psi_{\vec{r}} = \sqrt{\rho(\vec{r})}e^{i\phi(\vec{r})}$ autour du cas homogène $\psi_0 = \sqrt{\rho}$ de l'équilibre thermodynamique. Ce champ vit dans une boîte de quantification à deux dimensions avec des conditions aux limites périodiques. En pratique, on peut donc exprimer le champ $\psi_{\vec{r}}$ à travers les coefficients $a_{\vec{q}}$ de son développement en ondes planes ou ses coefficients $b_{\vec{q}}$ sur les modes de phonons (voir équations (1.11), (1.12) et (1.19)). Si bien qu'il est représenté dans l'ordinateur par un tableau de nombres complexes à deux entrées.² Chaque élément de ces tableaux représente soit la valeur du champ à une position donné dans la boîte (pour ψ) soit la valeur du champ pour un vecteur d'onde donné (pour $a_{\vec{q}}$ et $b_{\vec{q}}$). Pour avoir un nombre fini de coefficients $a_{\vec{q}}$ nous devons faire une approximation : nous devons discrétiser l'espace. Le programme est écrit de manière à être centré sur le tableau $b_{\vec{q}}$ que l'on prend comme objet du programme, les autres tableaux n'intervenant que comme intermédiaires de calcul dans les fonctions qui réalisent l'évolution. Le cœur du programme consiste donc à prendre en entrée un tableau $b_{\vec{q}}$, un hamiltonien et un pas de temps et à donner en sortie un tableau $b'_{\vec{q}}$, une estimation du champ évolué par l'hamiltonien. En d'autres termes, nous voulons intégrer les fonctions du temps $b_{\vec{q}}(t)$ d'évolution régie par le système d'équations différentielles (2.2) entre un instant initial 0 et final \bar{t}_{\max} . Pour définir

1. C'est un langage puissant et très abouti, particulièrement adapté aux calculs scientifiques et numériques, ce qui lui vaut d'être toujours l'un des langages les plus utilisés pour le calcul intensif et les supercalculateurs, malgré son âge vénérable. Son avantage crucial réside dans ses hautes performances computationnelles pour l'arithmétique sur les très grands tableaux. Par ailleurs, sa longévité et sa présence continue dans le monde scientifique ont fait émerger des bibliothèques de calcul très optimisées dont certaines testées et déboguées depuis des décennies. Dans ce projet par exemple, c'est un programme de transformée de Fourier rapide bien connu écrit par Daisuke Takahashi [28] que nous avons intensivement utilisé pour l'évolution temporelle du système comme nous le verrons.

2. Nombres numériquement représentés par deux flottants en double précision.

une telle évolution, nous avons besoin d'un certain nombre de paramètres qui fixent les caractéristiques de la boîte, du fluide qui s'y trouve et de l'hamiltonien, donc des interactions qui s'y déroulent. Puisque nous ne pouvons intégrer analytiquement le système d'équations différentielles de $b_{\vec{q}}$, il est nécessaire d'introduire un certain nombre d'approximations dans le traitement numérique de ces équations. À intervalles réguliers durant l'intégration, nous enregistrons sur le disque les valeurs des $b_{\vec{q}}$ pour un certain nombre de modes. C'est de ses valeurs sauvegardées que nous pouvons extraire une estimation de l'observable $\langle b_{\vec{q}}(t)b_{\vec{q}}^*(0) \rangle$. En l'occurrence dans nos simulations, la moyenne $\langle \dots \rangle$ est effectuée sur un nombre suffisant de trajectoires indépendantes et représentatives d'un état d'équilibre thermodynamique.

Ce chapitre est séparé en deux grandes sections. La première définit le programme en présentant les grandes lignes de la simulation, comme la question de la discrétisation, de l'estimation de moyennes d'ensemble $\langle \dots \rangle$ avant de conclure en résumant les paramètres numériques d'entrée du programme. La seconde section présente l'implémentation de l'évolution hamiltonienne du champ. Elle débute par une discussion sur l'initialisation du système avant de décrire l'algorithme qui réalise un pas de temps en pratique en décrivant les diverses méthodes numériques et approximations que nous avons dû utiliser pour intégrer rapidement mais de manière précise les équations différentielles.

2.1 Structure du programme

2.1.1 Discrétisation de l'espace : taille et pas du réseau

Notons L_x et L_y les deux longueurs qui fixent la taille de la boîte à deux dimensions. Comme nous l'avons évoqué dans l'avant-propos, nous devons considérer dans la boîte un ensemble fini de positions possibles pour pouvoir modéliser numériquement le problème. Ainsi, nous discrétisons l'espace en ses deux directions avec une maille de longueur l_x et l_y respectivement. Nous représenterons alors tout champ dans cette boîte rectangulaire comme un tableau à deux entrées de $n_x n_y$ éléments avec $n_x = L_x/l_x$ et $n_y = L_y/l_y$, le nombre de points dans chacune des directions. Pour abrégé, on donne les résultats pour $L_x = L_y$ et $n_x = n_y$ (nous avons effectué quelques calculs pour $L_x \neq L_y$ sans observer de grands changements dans les résultats). Par ailleurs, nous considérons une boîte avec des conditions aux limites périodiques selon Ox et Oy . Cette discrétisation impose une coupure dans l'espace réciproque et revient à limiter les vecteurs d'onde à la première zone de Brillouin

$$k_\alpha \in \left[-\frac{\pi}{l_\alpha}, \frac{\pi}{l_\alpha} \right] \quad \text{avec } \alpha = x, y. \quad (2.1)$$

2.1.2 Processus Umklapp

Le traitement de l'espace réel au moyen d'un réseau discret a une conséquence néfaste dans l'espace réciproque des impulsions : l'apparition de processus dits Umklapp. Considérons deux vecteurs d'onde, disons \vec{k}_1 et \vec{k}_2 , de la première zone de Brillouin que nous venons de définir. Il est tout à fait possible que le vecteur d'onde somme (on peut imaginer la coalescence de deux phonons en un troisième) soit en dehors de la première zone de Brillouin. En prenant en compte la périodicité de l'espace, on pourrait traduire ce vecteur somme comme équivalent à un vecteur de la première zone. Mais cette équivalence implique une perte de conservation de l'impulsion (seule la quasi-impulsion est conservée) ! Dans les cristaux et solides de manière

générale, ces processus sont appelés « Umklapp » et sont tout à fait physiques et jouent un rôle important dans les propriétés thermodynamique et de propagation ; ils correspondent à des oscillations de longueur d'onde plus petite que la maille fondamentale, l'ondulation effective peut alors être associée à un vecteur d'onde de la première zone de Brillouin. Dans notre cas, le « cristal » numérique sous-jacent est complètement artificiel et ne doit jouer aucun rôle dans la dynamique du champ. Il est donc crucial de ne jamais autoriser un processus Umklapp lors du calcul des interactions entre phonons. Pour cela, nous définissons un réseau numérique deux fois plus grand que le réseau de la zone de Brillouin physique. C'est-à-dire que tous les tableaux auront $n_x n_y$ éléments avec $n_x = 2n_x^{\text{PZB}}$, $n_y = 2n_y^{\text{PZB}}$. La première zone de Brillouin correspond alors au rectangle intérieur de ce réseau de dimensions n_x^{PZB} , n_y^{PZB} . Dans la suite, seuls les vecteurs d'onde de la première zone de Brillouin sont considérés comme physiques, les autres n'existant que pour gérer les processus Umklapp numériquement. En effet, grâce au doublement du réseau, à chaque fois que l'on devra sommer deux vecteurs d'onde de la première zone de Brillouin, les processus Umklapp feront intervenir des points de la zone numérique non physique, sur laquelle nous pourrions mettre à 0 la valeur du champ à chaque pas de temps. Cet aspect, que l'on nomme « filtrage des processus Umklapp » sera éclairci à la section deux lorsque nous détaillerons l'algorithme d'évolution du tableau. Notons enfin que l'origine du réseau réciproque, le vecteur d'onde nul $\vec{0}$, fait partie des modes non physiques que nous devons filtrer car c'est un mode interdit aux phonons.

Dans la pratique, ce sont ces nombres de modes physiques n_x^{PZB} , n_y^{PZB} par direction qui servent de paramètre d'entrée au programme.

2.1.3 La coupure ultraviolette

Notre programme fonctionne dans l'approximation de champ classique qui remplace l'opérateur bosonique $\hat{b}_{\vec{q}}$ par une variable complexe. Numériquement, nous devons donc manipuler un tableau de nombres complexes à deux dimensions de taille numérique $n_x n_y$. Cette transformation en champ classique nécessite l'introduction d'une coupure de l'espace des impulsions pour éviter la catastrophe du rayonnement du corps noir. On ne retiendra donc comme physiques que les vecteurs d'onde \vec{q} tels que $q \leq q_{\text{max}}$ correspondant à la coupure en énergie $\hbar c q_{\text{max}} = \eta k_B T$ avec η un nombre réel positif, qui est un paramètre d'entrée du programme. Pour que ce traitement classique soit physiquement cohérent, il est nécessaire que la coupure soit suffisamment haute pour retenir les modes peuplés mais suffisamment basse pour ignorer les modes régis par les fluctuations quantiques, c'est-à-dire les modes dont la population moyenne à l'équilibre thermodynamique est très faible devant 1. C'est pourquoi nous avons toujours pris $\eta = 1$ dans nos simulations. Notons qu'en considérant les quantités adimensionnées, nous avons $\bar{q}_{\text{max}} = \eta$.

2.1.4 Estimation d'une moyenne d'ensemble

Comme nous l'avons mentionné dans l'introduction, l'évolution que nous appliquerons au système est hamiltonienne. Ceci implique que l'évolution est déterministe. Pour autant, exécuter une seule fois le programme ne nous permettrait pas de récupérer l'information complète sur l'évolution de l'observable tout simplement parce que nous nous intéressons à l'évolution dans l'état macroscopique de l'équilibre thermodynamique. Pour obtenir cette évolution d'ensemble, il faut partir d'un état microscopique tiré de la loi de probabilité

de l'équilibre thermodynamique et faire évoluer le système. En répétant ces deux étapes et en moyennant les trajectoires obtenues, on doit converger vers les moyennes d'ensemble de l'équilibre thermodynamique. Ainsi le nombre de trajectoires à effectuer est aussi un paramètre d'entrée que nous notons n_{traj} mais qui vaut toujours 3200 dans les résultats de cette thèse.

2.1.5 Résumé des paramètres d'entrée

Le programme est entièrement écrit en termes des quantités adimensionnées introduites au chapitre 1. Pour définir le système, il faut donner la température réduite $\epsilon = \frac{k_B T}{mc^2}$, la densité du gaz à l'équilibre (adimensionnée par la longueur de relaxation) $\rho\xi^2$, le paramètre thermodynamique Λ ainsi que la courbure du spectre phononique γ .

Ces paramètres physiques déterminent les interactions entre phonons dans le gaz ainsi que toutes les variables thermodynamiques. Ensuite, il faut fournir une coupure ultraviolette η et un nombre de modes physique par direction n_x^{PZB} qui fixent la taille du système par les relations $n_x = 2n_x^{\text{PZB}}$, $\bar{l}_x = \pi/(2\eta)$ et $\Delta\bar{k}_x = 2\eta/n_x^{\text{PZB}}$ (forme adimensionnée de $\Delta k_x = 2\pi/L_x$) avec $\Delta\bar{k}_x$ le pas du réseau réciproque dans la direction x et donc $\bar{L}_x = n_x \bar{l}_x$ (de même pour la direction y). Enfin, il faut définir un pas d'intégration temporelle, $\Delta\bar{t}$, un temps d'intégration \bar{t}_{max} et le nombre de trajectoires n_{traj} à réaliser et sur lesquelles calculer une moyenne. Nous donnons la liste de ces paramètres dans le tableau qui suit.

Paramètres d'entrée physiques	Description	Valeurs dans nos séries d'exécutions
ϵ	Température réduite du gaz	1/2 ou 1/3
γ	Courbure du spectre phononique	1
$\rho\xi^2$	Densité d'équilibre adimensionnée du gaz	10 ou 1,5625
Λ	Paramètre thermodynamique	0

Paramètres d'entrée numériques		
η	Coupure ultraviolette sur l'impulsion	1
$n_x^{\text{PZB}} \times n_y^{\text{PZB}}$	Nombre de modes physique (PZB)	32×32 , 64×64 , 128×128
$\Delta\bar{t}$	Pas d'intégration temporelle	1/8 ou 0,0195
\bar{t}_{max}	Temps d'intégration	10^3 ou 10^4
n_{traj}	Nombre de trajectoires indépendantes effectuées	3200

Paramètres dérivés		
$n_x = 2n_x^{\text{PZB}}$ et n_y	Taille des tableaux numériques	64, 128, 256
$\bar{l}_x = \pi/(2\eta)$ et \bar{l}_y	Pas du réseau en position	$\pi/2$
$\Delta\bar{k}_x = 2\eta/n_x^{\text{PZB}}$ et $\Delta\bar{k}_y$	Pas du réseau réciproque	1/16, 1/32, 1/64

2.2 Implémentation de l'évolution hamiltonienne

Cette section est consacrée à la description de l'algorithme d'évolution temporelle. On commencera néanmoins par décrire la méthode de tirage de l'état initial du système échantillonnant l'équilibre thermique pour l'hamiltonien complet. Comme il n'y a pas de moyen direct évident de le faire en présence d'interactions entre phonons, on utilise une méthode indirecte qui fait intervenir l'évolution temporelle. La suite en vient justement à cette évolution, on aborde les équations différentielles à résoudre avec les approximations qui nous permettent de les intégrer sur un pas de temps $\Delta\bar{t}$.

2.2.1 Initialisation du champ

Comme nous l'avons expliqué à la section précédente, à chaque nouvelle trajectoire, il nous faut initialiser le tableau $b_{\vec{k}}$ par un état tiré de la loi de probabilité de l'équilibre thermodynamique de \bar{H} , c'est-à-dire avec la loi $\mathcal{N}e^{-\beta\bar{H}[b_{\vec{k}}]}$ où \mathcal{N} est une constante de normalisation. Mais la présence de $\bar{H}^{(3)}$ dans cette loi ne permet pas d'obtenir une fonction simple pour cette loi. Dès lors nous utilisons une méthode indirecte : puisque $\bar{H}^{(3)}$ est petit devant $\bar{H}^{(2)}$ à l'équilibre thermodynamique, voir la section 4.2 du chapitre 3, nous pouvons tirer initialement un état de l'équilibre thermodynamique pour $\bar{H}^{(2)}$, appelons cet état $\{b_{\vec{k}}^{(2)}(0)\}$, qui en constitue une bonne approximation. Pour en déduire un état thermique de l'hamiltonien complet, nous pouvons faire évoluer $\{b_{\vec{k}}^{(2)}(0)\}$ pendant un certain temps selon l'évolution ergodique engendrée par \bar{H} de sorte à thermaliser l'état $\{b_{\vec{k}}^{(2)}(0)\}$. Dans les séries d'exécutions, nous avons choisi un temps de thermalisation de l'ordre du millième du temps d'évolution total, donc entre 300 et $1200\hbar/k_B T$ ce qui équivaut à un nombre de pas de temps de l'ordre de 10^3 . Précisons que l'on initialise les modes non physiques avec une valeur nulle.

En pratique : nous devons tirer, pour chaque mode physique \vec{q} , un nombre complexe $b_{\vec{q}}$ avec la loi $\frac{\beta\varepsilon_q}{\pi}e^{-\beta\varepsilon_q b_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}}}$. Manifestement, cette loi ne dépend pas de la phase de $b_{\vec{q}}$, nous pouvons donc commencer par tirer une phase dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ avec une loi uniforme. Quant au module à l'équilibre, il suit la loi exponentielle³ $P(n_{\vec{q}}) = \beta\varepsilon_q e^{-\beta\varepsilon_q n_{\vec{q}}}$. Cette loi peut être échantillonnée en tirant un nombre réel $u \in [0; 1]$ avec une loi uniforme, la valeur $\frac{-1}{\beta\varepsilon_q} \log(1 - u)$ échantillonne alors la loi exponentielle précédente.⁴

3. On note $b_{\vec{q}} = x_{\vec{q}} + iy_{\vec{q}}$ et $n_{\vec{q}} = b_{\vec{q}}^* b_{\vec{q}} = x_{\vec{q}}^2 + y_{\vec{q}}^2$ avec $x_{\vec{q}}, y_{\vec{q}}, n_{\vec{q}} \in \mathbb{R}$ et on considère une fonction quelconque $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous pouvons exprimer la valeur moyenne de $f(n_{\vec{q}})$ avec $b_{\vec{q}}$ tiré dans l'état thermodynamique de $\bar{H}^{(2)}$ par $\langle f(n_{\vec{q}}) \rangle = \int dx_{\vec{q}} dy_{\vec{q}} \frac{\beta\varepsilon_q}{\pi} f(n_{\vec{q}}) e^{-\beta\varepsilon_q(x_{\vec{q}}^2 + y_{\vec{q}}^2)} = 2\beta\varepsilon_q \int d\rho \rho f(\rho^2) e^{-\beta\varepsilon_q \rho^2}$ où $\rho = \sqrt{x_{\vec{q}}^2 + y_{\vec{q}}^2}$. Nous pouvons la réexprimer comme une intégrale sur n , $\langle f(n_{\vec{q}}) \rangle = \int_0^\infty dn \beta\varepsilon_q f(n) e^{-\beta\varepsilon_q n}$, ce qui donne la loi de n .

4. Pour échantillonner une loi $P(x)$, il faut en effet résoudre $\int_0^x dx' P(x') = u$ où u est tiré uniformément

Pour résumer, initialement, pour les modes non physiques, on initialise la valeur à 0, pour les autres :

- On tire u et v deux nombres réels dans l'intervalle $[0; 1]$ selon une loi uniforme.
- La valeur de l'amplitude dans le mode \vec{q} est initialisée par $b_{\vec{q}} = e^{2i\pi v} \sqrt{\frac{k_B T}{\varepsilon_q}} \sqrt{-\log(1-u)}$.
- On fait évoluer cet état pendant un certain temps t_{therm} par l'hamiltonien complet du système.

2.2.2 Évolution sur un pas de temps

Venons-en justement à l'évolution hamiltonienne. Pour rappel, l'évolution du tableau des $b_{\vec{q}}$ est déterministe et régie par l'hamiltonien $\bar{H} = \bar{H}^{(2)} + \bar{H}^{(3)}$, séparé en deux contributions décrites par les équations (1.24) et (1.26) respectivement. Une méthode naïve pour faire évoluer le tableau des $b_{\vec{q}}$ d'un pas de temps $\Delta\bar{t}$ serait de simplement intégrer les équations sur les $b_{\vec{q}}$, c'est-à-dire de calculer des expressions de la forme

$$i\hbar \frac{d}{dt} b_{\vec{q}} = \frac{1}{l_x l_y} \partial_{b_{\vec{q}}^*} \bar{H} = \varepsilon_q b_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k}} (\dots) b_{\vec{k}} b_{\vec{q}-\vec{k}} + \dots \quad (2.2)$$

avec la somme sur les \vec{k} tels que $\vec{k} \in \text{PZB}$ et $\vec{q} - \vec{k} \in \text{PZB}$. Le coefficient (\dots) dépend de \vec{q} et \vec{k} mais, bien entendu, pas de $b_{\vec{q}}$, $b_{\vec{k}}$ ou $b_{\vec{q}-\vec{k}}$. Il suffit ensuite de mettre à jour le tableau des $b_{\vec{q}}$ par un schéma d'Euler : $b_{\vec{q}}(t + \Delta\bar{t}) = b_{\vec{q}}(t) + \Delta\bar{t} \left(\frac{d}{dt} b_{\vec{q}}(t) \right)$. Mais ce schéma naïf demande un nombre d'opérations en \mathcal{N}^2 pour mettre à jour tout le tableau par pas de temps avec $\mathcal{N} = n_x^{\text{PZB}} n_y^{\text{PZB}}$ le nombre de modes physique dans la simulation. Cette dépendance quadratique en le nombre de modes ne permettrait pas d'explorer des tailles de boîte suffisamment grandes.

2.2.2.1 La méthode d'intégration : le clivage de l'hamiltonien complet

C'est pourquoi nous avons considéré une autre méthode, que l'on pourrait appeler « par clivage de l'hamiltonien », qui profite des propriétés respectives de $\bar{H}^{(2)}$ et $\bar{H}^{(3)}$ en plus de la complexité quasi-linéaire des algorithmes de transformée de Fourier rapide discrète en le nombre de points. Il suffit de remarquer que $\bar{H}^{(2)}$ est local dans l'espace direct des impulsions, puisqu'il dépend d'une somme sur \vec{k} des $b_{\vec{k}}$, voir équation (1.24), mais que $\bar{H}^{(3)}$ est local dans l'espace direct puisqu'il peut être exprimé sur une somme sur les positions de $\psi_{\vec{r}}$, voir l'équation (1.26). Ainsi, nous pourrions faire en premier lieu une évolution selon $\bar{H}^{(2)}$ avec un pas de temps $\Delta\bar{t}/2$ puis une évolution selon $\bar{H}^{(3)}$ avec un pas de temps $\Delta\bar{t}$ et enfin de nouveau une évolution selon $\bar{H}^{(2)}$ avec un pas de temps $\Delta\bar{t}/2$. Chacune de ces opérations a une complexité linéaire en le nombre de modes. Nous devons certes faire une transformée de Fourier pour faire passer le tableau de l'espace direct à l'espace réciproque et inversement mais, comme nous l'avons dit, l'algorithme de transformée de Fourier rapide est de complexité quasi linéaire⁵ en le nombre de modes. Cette méthode produit donc une évolution avec un temps de calcul grandissant linéairement avec le nombre de modes et non plus quadratiquement comme dans la méthode naïve !

dans $[0, 1]$. Pour notre cas, nous avons $\beta\varepsilon_q \int_0^{n_{\vec{q}}} dx e^{-\beta\varepsilon_q x} = u \Rightarrow \frac{\beta\varepsilon_q}{\beta\varepsilon_q} (1 - e^{-\beta\varepsilon_q n_{\vec{q}}}) = u$ qui s'inverse en $n_{\vec{q}} = \frac{-1}{\beta\varepsilon_q} \log(1-u)$.

5. Plus précisément en $\mathcal{N} \log \mathcal{N}$.

Ce clivage constitue une approximation de l'opérateur d'évolution puisqu'il consiste à remplacer l'opérateur $e^{-i\bar{H}\Delta\bar{t}}$ par l'opérateur $e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2}e^{-i\bar{H}^{(3)}\Delta\bar{t}}e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2}$. Nous pouvons montrer que cette approximation comporte une erreur proportionnelle à $\Delta\bar{t}^3$. Nous partons donc de l'opérateur d'évolution que l'on peut partager à l'intérieur de l'exponentiel comme

$$U \equiv e^{-i\bar{H}\Delta\bar{t}} = e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2 - i(\bar{H}^{(3)} + \bar{H}^{(2)}/2)\Delta\bar{t}}. \quad (2.3)$$

Puis en utilisant la formule de Zassenhaus⁶ deux fois, une fois à gauche, une fois à droite, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} U &= e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2} e^{-i\bar{H}^{(3)}\Delta\bar{t}} e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2} \\ &\times e^{-\frac{1}{4}[\bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}](\Delta\bar{t})^2} \exp\left\{-\frac{(-i\Delta\bar{t})^3}{12} [\bar{H}^{(2)} + \bar{H}^{(3)}, [\bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}]]\right\} \dots \\ &\times e^{\frac{1}{4}[\bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}](\Delta\bar{t})^2} \exp\left\{\frac{(-i\Delta\bar{t})^3}{12} [\bar{H}^{(2)} + 2\bar{H}^{(3)}, [\bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}]]\right\} \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

Remarquons que chaque exponentielle du développement par la formule de Zassenhaus est d'un ordre bien défini de $\Delta\bar{t}$ dans notre cas. En particulier, tous les termes cachés dans les ... sont d'ordre $(\Delta\bar{t})^4$ ou plus. Restreignons maintenant l'opérateur d'évolutions aux termes d'ordre 3 en $\Delta\bar{t}$. Dans l'équation précédente, ceci revient à retirer les ... de l'équation. Mais pas seulement, car il faut remarquer que les termes des quatre dernières exponentielles de celle-ci sont d'ordres 2 ou 3 en $\Delta\bar{t}$. Ce qui implique que n'importe quelle commutateur entre deux de ces termes est d'ordre 4 ou 5 en $\Delta\bar{t}$. Ainsi à l'ordre 3 en $\Delta\bar{t}$, les ... disparaissent et nous pouvons rassembler les quatre dernières exponentielles en une seule. On s'aperçoit alors que ces termes d'ordre 2 s'annulent entre eux et nous obtenons finalement

$$U \simeq e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2} e^{-i\bar{H}^{(3)}\Delta\bar{t}} e^{-i\bar{H}^{(2)}\Delta\bar{t}/2} \exp\left\{-i\frac{(\Delta\bar{t})^3}{6} \left[\bar{H}^{(2)} + \frac{3}{2}\bar{H}^{(3)}, [\bar{H}^{(2)}, \bar{H}^{(3)}]\right]\right\}. \quad (2.5)$$

Notre évolution « clivée » correspond donc à une approximation d'ordre 3 en $\Delta\bar{t}$. La disparition par symétrie du terme d'ordre 2 en $\Delta\bar{t}$ nous conforte dans la qualité de notre schéma d'intégration temporelle.

2.2.2.2 Les étapes de l'intégration sur un pas de temps

Maintenant que nous avons exposé la méthode d'intégration par clivage, nous pouvons nous poser la question de l'évolution concrète des tableaux numériques. Il nous faut donc considérer les équations différentielles telles que définies par la théorie hamiltonienne des champs

$$i\frac{d}{dt}b_{\vec{q}} = \partial_{b_{\vec{q}}^*}\bar{H}^{(2)}(\vec{q}) \quad (2.6)$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}\bar{\psi}_{\vec{r}} = \frac{1}{l_x l_y}\partial_{\bar{\psi}_{\vec{r}}^*}\bar{H}^{(3)} \quad (2.7)$$

où le champ $\bar{\psi}_{\vec{r}}$ est de coefficients de Fourier $a_{\vec{q}}$, combinaison linéaire des $b_{\vec{q}}$ comme nous l'avons vu au chapitre 1.

6. $e^{X+Y} = e^X e^Y e^{-\frac{1}{2}[X,Y]} e^{\frac{1}{6}[X+2Y,[X,Y]]} \dots$ pour deux matrices X et Y carrées quelconques.

Évolution selon $\bar{H}^{(2)}$ À partir de l'expression (1.24) de l'hamiltonien de second ordre en termes des $b_{\bar{q}}$, il vient :

$$i \frac{d}{dt} b_{\bar{q}}(t) = \partial_{b_{\bar{q}}^*} \bar{H}^{(2)}(\bar{q}) = -i \bar{\varepsilon}_q b_{\bar{q}}(t) \quad (2.8)$$

$$b_{\bar{q}} \rightarrow e^{-i \bar{\varepsilon}_q \Delta \bar{t} / 2} b_{\bar{q}}. \quad (2.9)$$

L'équation (2.9) représente la transformation que l'on opère réellement sur le tableau numérique, notez le facteur 1/2 sur le pas de temps. Remarquons par ailleurs que cette transformation est exacte et n'implique donc aucune erreur due à la valeur non infinitésimale de $\Delta \bar{t}$.

Évolution selon $\bar{H}^{(3)}$ L'étape suivante de l'algorithme d'évolution est de transformer le tableau des $b_{\bar{q}}$ en tableau des $a_{\bar{q}}$ par combinaison linéaire (1.19) avant d'appliquer une transformée de Fourier pour obtenir le tableau $\psi_{\bar{r}}$. Pour réaliser l'évolution de ce tableau, nous considérons l'équation d'évolution définie par $i \hbar \frac{d}{dt} \psi_{\bar{r}} = \partial_{\psi_{\bar{r}}^*} \bar{H}^{(3)}$. Cela nous donne l'équation d'évolution

$$\frac{d\bar{\psi}_{\bar{r}}}{dt} = -i \rho \xi^2 \left[\frac{\epsilon^2}{2} (\nabla \text{Im } \psi_{\bar{r}})^2 - i \epsilon^2 \nabla (\text{Re}(\psi_{\bar{r}}) \nabla [\text{Im } \psi_{\bar{r}}]) + 6 \Lambda (\text{Re } \psi_{\bar{r}})^2 \right]. \quad (2.10)$$

Dans la sous-section 2.2.3, nous déduisons cette expression explicitement de l'hamiltonien d'ordre 3 en point de vue \bar{r} . En toute généralité, le calcul d'un gradient sur un réseau n'est pas local en position mais est une opération locale en impulsion ; pour préserver la localité de l'intégration sur $\bar{H}^{(3)}$ et éviter de multiplier les transformées de Fourier, nous présentons dans cette même sous-section 2.2.3 la forme approchée du gradient que nous utilisons dans le programme. C'est une approximation très bonne et dont on a contrôlé l'erreur par comparaison avec le gradient exact.

Filtrage des processus Umklapp Dans l'expression (2.10), il faut remarquer que le tableau $\bar{\psi}_{\bar{r}}$ est mis au carré. D'un point de vue numérique, cela veut dire qu'une fois que l'on sera repassé en représentation impulsion, tous les modes numériques, y compris ceux que l'on a décrits comme non physiques au début de ce chapitre, seront a priori d'amplitude non nulle car les termes quadratiques en $\bar{\psi}_{\bar{r}}$ mélangent tous les modes. En effet, on peut écrire $\bar{\psi}_{\bar{r}} = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \bar{r}}$ par définition de la transformée de Fourier et donc $\bar{\psi}_{\bar{r}}^2 = \frac{1}{L_x L_y} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} a_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2} e^{i (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \bar{r}}$. Numériquement, certains modes non physiques seront peuplés puisque la somme $\vec{k}_1 + \vec{k}_2$ peut représenter un vecteur d'onde dont l'impulsion est supérieure à η ou le vecteur nul $\vec{0}$ ou encore un vecteur d'onde en dehors de la première zone de Brillouin. Ce sont ces fameux processus Umklapp que nous avons évoqués à la section 2.1.2 plus tôt dans ce chapitre. Pour éviter que ces termes ne perturbent l'intégration temporelle, il nous faut les retirer chaque fois qu'ils apparaissent. Dans la pratique du programme, cela veut dire mettre à 0 l'amplitude du champ sur les modes non physiques du tableau des $b_{\bar{q}}$ chaque fois que l'on a fait une opération non linéaire sur $\bar{\psi}_{\bar{r}}$.

Méthode d'intégration temporelle naïve : Euler Pour implémenter une évolution, il faut décider d'une méthode d'intégration temporelle car on ne peut pas explicitement

intégrer l'expression (2.10). Dans le cas d'une méthode d'Euler, l'évolution durant $\Delta\bar{t}$ se fait par $\bar{\psi}_{\vec{r}}(t+\Delta\bar{t}) \simeq \bar{\psi}_{\vec{r}}(t) + \Delta\bar{t} \frac{d\bar{\psi}_{\vec{r}}}{dt}$. Une fois la dérivée temporelle calculée et cette transformation du tableau réalisée, nous pouvons appliquer la transformée de Fourier inverse pour obtenir de nouveau $a_{\vec{q}}$ puis $b_{\vec{q}}$. On peut alors filtrer les processus Umklapp en mettant à 0 dans ce tableau les modes non physiques puis réaliser une seconde fois l'évolution selon $\bar{H}^{(2)}$ exactement comme dans la première étape (2.9).⁷ L'erreur commise sur un pas de temps a deux sources : l'approximation de la méthode d'Euler qui dépend de $\Delta\bar{t}$ et l'approximation lors du calcul de la dérivée (2.10), c'est-à-dire notre approximation du gradient (voir section 2.2.3). Enfin, durant ce pas de temps $\Delta\bar{t}$, nous avons dû faire deux transformées de Fourier 2D.

Méthode d'intégration temporelle : Runge Kutta d'ordre 4 La méthode d'Euler est connue pour être insatisfaisante pour l'intégration temporelle. C'est en effet un schéma instable pour une évolution conservative puisqu'il consiste à approximer une courbe par sa tangente au point initial connu et son erreur sur un pas grandit comme $\Delta\bar{t}^2$ tandis que son erreur total accumulée est d'ordre $\Delta\bar{t}$. Pour ce type de systèmes physiques, ce schéma se caractérise par la divergence linéaire en temps de l'énergie totale du système, dont la pente est contrôlée par $\Delta\bar{t}$.⁸ À l'inverse, les schémas de la forme Runge-Kutta sont très populaires grâce à la facilité de leurs mises en oeuvre d'une part, mais aussi par leur précision et la stabilité de l'évolution qu'elles permettent d'autre part. En l'occurrence, nous nous sommes portés sur la méthode de Runge Kutta d'ordre 4, qui nous permet d'obtenir de très bons résultats pour la conservation de l'énergie totale (comme nous l'illustrons à la section 4.2) tout en gardant des temps de calcul raisonnables. Dans cette méthode, il faut calculer 4 fois la dérivée selon l'équation (2.10) en des points différents qui dépendent les uns des autres.⁹ Pour éviter les processus Umklapp, il nous faudra donc faire trois retours au tableau $b_{\vec{q}}$, une après chaque calcul de la dérivée, afin de filtrer les modes non physiques. Chaque retour demande deux transformées de Fourier, une pour revenir au $a_{\vec{q}}/b_{\vec{q}}$, puis une autre pour revenir au $\bar{\psi}_{\vec{r}}$ après le filtre. Ce qui correspond à 6 transformées de Fourier supplémentaires au schéma d'intégration total par rapport à celui de la méthode d'Euler ce qui porte le nombre total de transformée de Fourier à 8.¹⁰

Résumé Résumons les étapes numériques dans notre schéma pour réaliser l'évolution durant un pas $\Delta\bar{t}$ à partir du tableau $b_{\vec{q}}(\bar{t})$:

- Application de $\bar{H}^{(2)}$: $b_{\vec{q}} \rightarrow b'_{\vec{q}} = b_{\vec{q}}(t) \exp(-i\bar{\varepsilon}_{\vec{q}}\Delta\bar{t}/2)$

7. Puisque la relation entre $a_{\vec{q}}$ et $b_{\vec{q}}$ est une transformation linéaire, le filtrage des processus Umklapp peut se faire sur l'un ou sur l'autre, voire dans la transformation linéaire numérique de l'un à l'autre en posant $u_{\vec{k}} = v_{\vec{k}} = 0$ pour tout mode non physique \vec{k} .

8. En effet, prenons une équation différentielle $i\dot{\alpha} = \omega\alpha$ et donc $\alpha(dt) = \alpha(0)e^{-i\omega dt}$ de manière exacte. La méthode d'Euler consiste à prendre $\alpha(dt) \simeq (1 - i\omega dt)\alpha(0)$ donc $\alpha(ndt) \simeq (1 - i\omega dt)^n\alpha(0)$. Le problème alors c'est que $|1 - i\omega dt| > 1$ donc le schéma est instable! On peut expliciter cette propriété par la formule $(1 - i\omega dt)^n = e^{n \log(1 - i\omega dt)} = e^{n[-i\omega dt + \frac{(\omega dt)^2}{2} + \dots]} = e^{-i\omega t} e^{\omega t \frac{dt}{2}}$ avec $t = ndt$.

9. Soit une fonction $y(t)$ dont on connaît et peut calculer sa dérivée $f(t, y(t))$, une valeur connue de y à un temps donné y_n et un pas d'intégration h , la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 d'intégration pour trouver une valeur y_{n+1} à t_{n+1} à partir de y_n à t_n consiste à faire évoluer selon l'expression $y_{n+1} = y_n + h \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}$ avec $k_1 = f(t_n, y_n)$, $k_2 = f(t_n + h/2, y_n + hk_1/2)$, $k_3 = f(t_n + h/2, y_n + hk_2/2)$, $k_4 = f(t_n + h, y_n + hk_3)$.

10. Si nous avons choisi la méthode de Runge Kutta d'ordre 2, il nous aurait fallu faire une opération de filtrage supplémentaire, donc 4 transformées de Fourier au total.

- Obtention des $a_{\vec{q}} = u_{\vec{q}} b_{\vec{q}} + v_{\vec{q}} b_{-\vec{q}}^*$
- Transformée de Fourier des $a_{\vec{q}} : \bar{\psi}_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{L_x L_y}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$
- Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 à partir de $\bar{\psi}_{\vec{r}}$, pour un pas d'intégration $\Delta \bar{t}$ et comme expression de la dérivée l'équation (2.10). Réaliser la méthode en excluant les processus Umklapp implique 4 transformées de Fourier.
- Transformée de Fourier inverse pour obtenir $a_{\vec{q}}$ puis $b_{\vec{q}}$ et filtrer les processus Umklapp.
- Application de $\bar{H}^{(2)}$ une seconde fois : $b_{\vec{q}} \rightarrow b'_{\vec{q}} = b_{\vec{q}}(t) \exp(-i\bar{\epsilon}_q \Delta \bar{t}/2)$

2.2.3 L'opérateur gradient sur un réseau discret

Dans cette sous-section, nous obtenons l'équation d'évolution du champ classique $\bar{\psi}_{\vec{r}}$ de l'hamiltonien (adimensionné) $\bar{H}^{(3)}$ de l'équation (1.26). On peut écrire :

$$i \frac{d}{d\bar{t}} \bar{\psi}_{\vec{r}} = \frac{1}{l_x l_y} \partial_{\bar{\psi}_{\vec{r}}}^* \bar{H}^{(3)}. \quad (2.11)$$

Plaçons-nous à 1D pour simplifier le reste du développement. Dans ce cas, le gradient d'un champ à valeurs complexes $\psi^*(x)$ défini sur un réseau discret de pas l_x peut s'écrire

$$\partial_x \psi(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \psi(x + ml_x) \quad (2.12)$$

avec c_m des coefficients réels obéissant à la contrainte $c_{-m} = -c_m$. C'est-à-dire qu'un gradient est une certaine combinaison linéaire antisymétrique des valeurs prises par le champ sur le réseau dans une certaine direction. On peut écrire notre hamiltonien en termes de ces coefficients :

$$\bar{H}^{(3)} = \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \sum_y \left[\epsilon^2 \operatorname{Re} \psi(y) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \frac{\psi(y + ml_x) - \psi^*(y + ml_x)}{2i} \right)^2 + 4\Lambda (\operatorname{Re} \psi(y))^3 \right] \quad (2.13)$$

$$= \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \sum_y \left[-\frac{\epsilon^2}{4} \operatorname{Re} \psi(y) \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_m c_n (\psi(y + ml_x) - \psi^*(y + ml_x)) (\psi(y + nl_x) - \psi^*(y + nl_x)) \right. \quad (2.14)$$

$$\left. + 4\Lambda (\operatorname{Re} \psi(y))^3 \right].$$

On peut maintenant réaliser la dérivation partielle par rapport à $\psi^*(x)$

$$\partial_{\psi^*(x)} \bar{H}^{(3)} = \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \sum_y \left[6\Lambda (\operatorname{Re} \psi(x))^2 \delta_{x,y} + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_m c_n \delta_{x, y + ml_x} \operatorname{Re} \psi(y) (\psi(y + nl_x) - \psi^*(y + nl_x)) \right. \quad (2.15)$$

$$\left. - \frac{\epsilon^2}{8} \delta_{x,y} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} c_m c_n (\psi(y + ml_x) - \psi^*(y + nl_x)) (\psi(y + nl_x) - \psi^*(y + nl_x)) \right].$$

Au second membre, on reconnaît dans la troisième contribution (la double somme), un gradient au carré. Par ailleurs, nous pouvons sommer sur y et tenir compte des deltas de

Kronecker dans chaque contribution

$$\begin{aligned} \partial_{\psi^*(x)} \bar{H}^{(3)} = \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \left[6\Lambda (\operatorname{Re} \psi(x))^2 + \frac{\epsilon^2}{2} (\partial_x \operatorname{Im} \psi(x))^2 \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_m c_n \operatorname{Re} \psi(x - ml_x) (\psi(x - ml_x + nl_x) - \psi^*(x - ml_x + nl_x)) \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Au second membre, nous reconnaissons dans la somme sur n l'expression du gradient :

$$\begin{aligned} \partial_{\psi^*(x)} \bar{H}^{(3)} = \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \left[6\Lambda (\operatorname{Re} \psi(x))^2 + \frac{\epsilon^2}{2} (\partial_x \operatorname{Im} \psi(x))^2 \right. \\ \left. + \frac{\epsilon^2}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \operatorname{Re} \psi(x - ml_x) \partial_x (\psi(x - mdx) - \psi^*(x - mdx)) \right]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Enfin on peut faire le changement de variable muette $m \rightarrow -m'$ puis retrouver l'expression du gradient en utilisant $c_{-m'} = -c_{m'}$. Il reste

$$\partial_{\psi^*(x)} \bar{H}^{(3)} = \frac{l_x l_y}{\sqrt{\rho \xi^2}} \left[6\Lambda (\operatorname{Re} \psi(x))^2 + \frac{\epsilon^2}{2} (\partial_x \operatorname{Im} \psi(x))^2 - i\epsilon^2 \partial_x \operatorname{Re} \psi(x) \partial_x (\operatorname{Im} \psi(x)) \right]. \quad (2.18)$$

On revient à l'évolution de $\bar{\psi}_{\vec{r}}$ et au cas général du réseau à d dimensions :

$$i \frac{d}{dt} \bar{\psi}_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{\rho \xi^2}} \left[6\Lambda (\operatorname{Re} \bar{\psi}_{\vec{r}})^2 + \frac{\epsilon^2}{2} (\nabla \operatorname{Im} \bar{\psi}_{\vec{r}})^2 - i\epsilon^2 \nabla (\operatorname{Re} \bar{\psi}_{\vec{r}} \nabla \operatorname{Im} \bar{\psi}_{\vec{r}}) \right]. \quad (2.19)$$

Calcul numérique du gradient Comme nous venons de l'écrire, l'expression de l'équation différentielle sur $\bar{\psi}_{\vec{r}}$ repose sur le calcul de gradients discrets de fonctions de $\bar{\psi}_{\vec{r}}$. L'expression générique du gradient discret telle que nous l'avons écrite (2.12) n'est pas locale en position et implique donc que son calcul numérique est quadratique en le nombre de modes puisque que pour chaque point du réseau, il faut sommer sur les termes de chaque direction. La sommation numérique naïve ralentirait sûrement grandement le programme et tuerait la complexité linéaire que nous avons gagné en « clivant » l'opérateur d'évolution total.

Nous avons alors deux possibilités pour préserver cette linéarité : la première est de calculer ces gradients dans l'espace des impulsions car l'opération y est locale. En effet $\partial_x \psi(x) = \partial_x \sum_{k_x} a_x e^{-ixk_x} = \sum_{k_x} -ik_x a_{k_x} e^{-ixk_x}$. Cette possibilité, qui a l'avantage certain d'être exacte, rajoute donc autant de paires de transformées de Fourier que de gradient pour un pas de temps. Pour notre schéma de type Runge-Kutta d'ordre 4, cela revient à ajouter 16 transformées de Fourier. C'est donc un choix assez lourd. La seconde possibilité, et celle que nous avons retenue, est tout simplement d'approximer le gradient par une différence finie, c'est-à-dire de restreindre la formule générique (2.12) à seulement quelques coefficients non nuls sur les points voisins. Nous avons choisi comme troncature la formule

$$\begin{aligned} \partial_x \psi(x) \simeq \frac{4}{3} \left(A - \frac{1}{4} B \right) \\ \text{avec } A = \frac{\psi(x + l_x) - \psi(x - l_x)}{2l_x} \quad \text{et} \quad B = \frac{\psi(x + 2l_x) - \psi(x - 2l_x)}{4l_x}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Il est possible de se convaincre que cette expression constitue une bonne approximation du gradient en considérant la fonction test $\psi(x) = e^{ikx}$. Sa dérivée exacte est $\partial_x \psi(x) = ike^{ikx}$ alors que notre approximation donne

$$\partial_x \psi(x) \simeq ike^{ikx} \frac{4}{3} \left(\frac{\sin(kl_x)}{kl_x} - \frac{1}{4} \frac{\sin(2kl_x)}{2kl_x} \right). \quad (2.21)$$

En supposant $u = kl_x$ suffisamment petit, nous pouvons développer les sinus avec $\frac{\sin u}{u} = 1 - \frac{u^2}{6} + O(u^4)$. Ce qui donne, pour le facteur dans l'équation précédente

$$F = \frac{4}{3} \left(\frac{\sin(kl_x)}{kl_x} - \frac{1}{4} \frac{\sin(2kl_x)}{2kl_x} \right) = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{(kl_x)^2}{6} - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{4(kl_x)^2}{6} \right) + O(u^4) \right) = 1 + O(u^4) \quad (2.22)$$

où le $O(u^4)$ est non nul, ce qui fait de notre troncature une approximation d'ordre 4 de la dérivée spatiale. Mais kl_x est-il assez petit ? Se limiter à un développement de Taylor au second ordre est-il légitime ? Sur ce point, nous sommes aidés par le fait que $k \leq \frac{\pi}{2l_x}$ pour tout k vecteur d'onde physique du réseau. Certes, $\frac{\pi}{2l_x} l_x \simeq 1,57$ n'est pas petit a priori mais le facteur F est strictement décroissante avec une pente très plate sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ et $F(\frac{\pi}{2}) = \frac{8}{3\pi} \simeq 0,85$. C'est pourquoi nous nous sommes permis d'utiliser cette approximation dans l'intégration numérique, approximation tout à fait raisonnable et qui accélère le calcul.

Ces approximations trouveront la confirmation de leur validité au chapitre 4 où, avant de présenter les résultats finaux de nos simulations, nous montrerons les figures de conservation de l'énergie ainsi que d'atteinte de l'équilibre thermodynamique.

Chapitre 3

Étude par fonctions de Green à N corps

Avant-propos

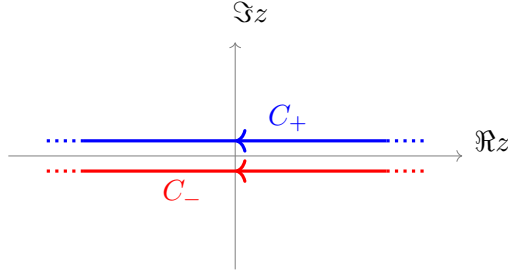
En physique quantique, le problème à N corps pour un système à l'équilibre thermodynamique peut être étudié au moyen du formalisme des fonctions de Green, moyennées dans l'état d'équilibre de l'opérateur $\psi(\vec{r}_2, t_2)\psi^\dagger(\vec{r}_1, t_1)$ avec $\psi_{\vec{r}}(t)$ l'opérateur de champ créant une particule au point \vec{r} à l'instant t en point de vue de Heisenberg [29]. Cette fonction est intéressante car il est possible d'extraire des singularités de sa transformée de Fourier des informations sur les propriétés dynamiques du système, sur ses états excités ainsi que sur ses réponses à une perturbation externe. Nous verrons d'ailleurs comment la règle d'or de Fermi décrite dans le chapitre 1 se retrouve dans l'approche par fonctions de Green comme une approximation mal contrôlée et comment cette approche permet d'aller au-delà en prenant en compte systématiquement tous les diagrammes du même ordre en la perturbation.

Dans un premier temps, dans les sections 3.1 et 3.2, le présent chapitre s'attarde à définir les différentes fonctions et quantités intervenant dans la méthode, qu'on relie à notre observable avant de construire la série diagrammatique que nous utilisons par la suite. Dans un second temps, les sections 3.3 et 3.4 présentent les résultats nouveaux que nous avons obtenus. On y explore la spécificité du cas $d = 2$ par rapport au cas $d = 3$ dans la limite de basse température réduite $\epsilon = k_B T / mc^2 \rightarrow 0$, ce qui nous amènera à discuter de l'applicabilité de la règle d'or de Fermi dans les gaz de bosons bidimensionnels.

3.1 Expression du signal en termes de la fonction énergie propre Σ

L'étude par fonctions de Green de notre problème d'amortissement des phonons a été principalement menée par Yvan Castin. Dans cette section, nous en présentons les principaux ingrédients, afin de parvenir à la formulation intégrale (3.13) que nous avons calculée numériquement à tous les ordres en ϵ pour comparer à nos simulations.

En utilisant les enseignements de A. Fetter et J. Walecka présentés dans leur ouvrage *Quantum Theory of Many-Particle Systems* [29], en particulier dans leur section 31 p.292 et

FIGURE 3.1 – Chemins d'intégration C_+ et C_- dans le plan complexe de la variable z .

leurs équations (31.23) et (31.24), nous pouvons exprimer notre signal pour $t \geq 0$ comme

$$\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t) \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{-2i\pi} e^{-i\omega t} \left(\frac{\mathcal{G}(\vec{q}, \omega + i0^+)}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} + \frac{\mathcal{G}(\vec{q}, \omega - i0^+)}{1 - e^{\beta\hbar\omega}} \right) \quad (3.1)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{-2i\pi} e^{-i\omega t} \left(\mathcal{G}(\vec{q}, \omega + i0^+) + \frac{\mathcal{G}(\vec{q}, \omega + i0^+) - \mathcal{G}(\vec{q}, \omega - i0^+)}{e^{\beta\hbar\omega} - 1} \right) \quad (3.2)$$

où la fonction de Green $\mathcal{G}(\vec{q}, \omega)$, analytique dans le plan complexe privé de l'axe réel (sur lequel elle présente une ligne de coupure), est définie en termes de la fonction énergie propre Σ par

$$\mathcal{G}(\vec{q}, z) \equiv \frac{1}{z - \varepsilon_q - \Sigma(\vec{q}, z)} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Pour développer une intuition de l'expression (3.1), donnons-en une forme simplifiée dans la limite de couplage faible où l'intégrale sur ω est dominée par un voisinage de ε_q/\hbar . On peut alors remplacer $e^{\pm\beta\hbar\omega}$ par $e^{\pm\beta\varepsilon_q}$ aux dénominateurs de l'intégrande. Limitons-nous aussi au cas $t > 0$ qui permet de se ramener à une intégrale curviligne dans le plan complexe¹

$$\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t) \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle \simeq (1 + \bar{n}_q) \int_{C_+} \frac{dz}{2i\pi} e^{-izt/\hbar} \mathcal{G}(\vec{q}, z) \quad (3.4)$$

où C_+ désigne une droite parallèle à l'axe réel dans le demi-plan supérieur, dirigée vers $-\infty$, comme sur la figure 3.1. On peut prolonger analytiquement Σ donc \mathcal{G} du demi-plan supérieur au demi-plan inférieur à travers leur ligne de coupure ; la fonction de Green prolongée $\mathcal{G}_\downarrow(\vec{q}, z)$ admet en général un ou plusieurs pôles z_0 , définis par $z_0 = \varepsilon_q + \Sigma_\downarrow(\vec{q}, z_0)$, et qui jouent un rôle dans la dynamique de l'observable. En effet, en refermant le chemin C_+ par un demi-cercle dans le demi-plan inférieur, avec un rayon que l'on fait tendre vers l'infini, on crée un chemin d'intégration fermé permettant d'appliquer le théorème des résidus. Dès lors, chaque pôle apporte une contribution exponentiellement décroissante à la moyenne $\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t) \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle$. L'application du théorème des résidus oblige cependant à déplacer puis à contourner la ligne de coupure de $\mathcal{G}(\vec{q}, z)$, voir la figure 3.2, le lacet de contournement apportant une contribution à la fonction de corrélation tendant vers 0 algébriquement (en loi de puissance) aux temps longs.

1. La contribution du chemin C_- défini sur la figure 3.1 est nulle dans ce cas comme on peut le montrer en refermant le contour dans le demi-plan inférieur sur un grand demi-cercle et en utilisant l'analyticité de \mathcal{G} dans ce demi-plan.

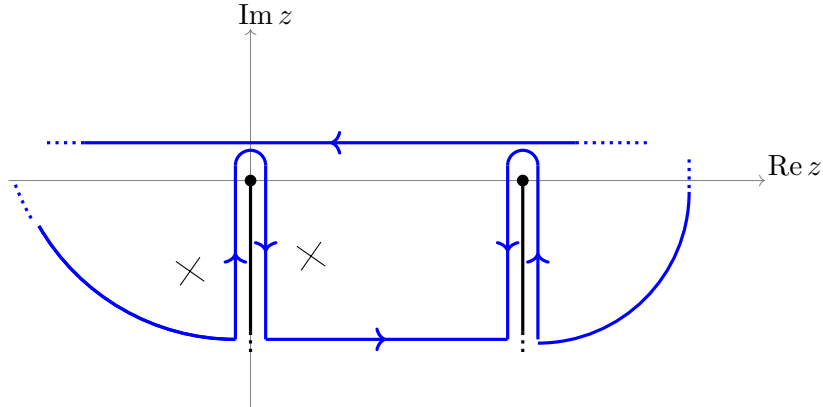


FIGURE 3.2 – Chemin d’intégration dans le plan complexe permettant d’appliquer le théorème des résidus à la forme simplifiée (3.4) du signal. Les points noirs sont les points de branchements et les lignes noires qui en partent sont les lignes de coupure déplacées. Les croix noires représentent les pôles de la fonction \mathcal{G}_\downarrow .

3.2 Développement perturbatif de la fonction énergie propre

En s’inspirant du Fetter-Walecka, on peut effectuer un développement perturbatif de la fonction énergie propre en puissances de l’interaction cubique phonon-phonon sous forme de diagrammes de Feynman :

$$\Sigma = \underbrace{\text{---} \circ \text{---}}_{\text{Ordre 2 en } \bar{H}^{(3)}} + \underbrace{\text{---} \circ \text{---}}_{\text{Ordre 4 en } \bar{H}^{(3)}} + \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

(3.5)

où nous représentons les diagrammes d’ordres 2 (le premier terme) et 4 (les deux suivants) en $H^{(3)}$. Les tiretés représentent les facteurs $\tilde{\mathcal{G}}_0(\vec{q}, \omega)$ qui encadrent toujours Σ dans le développement de la fonction de Green en temps imaginaire $\mathcal{G}(\vec{q}, i\omega)$. Chaque sommet de chaque graphe correspond à une action de $H^{(3)}$ donc est toujours le point de rencontre de trois lignes et contribue par un facteur égal à l’élément de matrice de $H^{(3)}$ correspondant.² L’étape suivante consiste à orienter chaque ligne d’un diagramme donné, d’assigner à chaque ligne deux quantités (l’impulsion et la fréquence de Matsubara du mode) conservées aux noeuds. Enfin, il faut sommer les contributions sur toutes les orientations possibles des lignes internes, sur tous les vecteurs d’onde et sur toutes les fréquences de Matsubara internes indépendants.

2. Notons une entorse aux consignes du manuel : nous omettons les lignes d’interactions (représentées par des lignes ondulées dans [29]) car elles ne sont pas utiles dans notre cas. Cela provient du fait que les calculs d’élément de matrice chez Fetter et Walecka se font entre états non symétrisés donc doivent distinguer entre les termes directs et d’échange, tandis que les états de phonons que nous considérons sont automatiquement symétrisés.

3.2.1 Expressions des fonctions énergie propre d'ordre 2

Si on se concentre sur l'ordre 2, cela donne la somme de diagrammes

$$\Sigma^{(2)} = \begin{array}{ccc} \text{Landau} & \text{Beliaev} & \text{non-résonnant} \\ \begin{array}{c} \vec{k}, \omega' \\ \vec{q}, \omega \quad \vec{q}, \omega \\ \vec{q} + \vec{k}, \omega + \omega' \end{array} & \begin{array}{c} \vec{k}, \omega' \\ \vec{q}, \omega \quad \vec{q}, \omega \\ \vec{q} - \vec{k}, \omega - \omega' \end{array} & \begin{array}{c} \vec{k}, \omega' \\ \vec{q}, \omega \quad \vec{q}, \omega \\ -(\vec{q} + \vec{k}), -(\omega + \omega') \end{array} \end{array} \quad (3.6)$$

où nous reconnaissons sans peine, de gauche à droite dans (3.6), les processus de Landau, de Beliaev et non résonnant que nous avons déjà introduits sous forme de diagrammes au chapitre 1 (figure 1.1). Les règles pour construire la fonction Σ à partir des diagrammes, dites « règles de Feynman », sont énoncées dans le Fetter-Walecka. Pour le diagramme de Beliaev par exemple, ceci donne :

$$\Sigma_{\text{Bel}}^{(2)}(\vec{q}, i\omega) = \frac{1}{-\beta\hbar^2} \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \sum_{\omega' \in \frac{2\pi}{\beta\hbar}\mathbb{Z}} \frac{\frac{1}{2} |\langle \vec{k}, \vec{q} - \vec{k} | \hat{\mathcal{H}}^{(3)} | \vec{q} \rangle|^2}{[i\omega' - \varepsilon_k/\hbar][i(\omega - \omega') - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}}/\hbar]} \quad (3.7)$$

où $\hat{\mathcal{H}}^{(3)}$ est l'hamiltonien volumique. Pour effectuer la somme sur ω' , on décompose en éléments simples le facteur $\frac{1}{(z'-a)(b-z')} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z'-a} + \frac{1}{b-z'} \right)$ où $z' = i\omega'$ et on utilise le résultat du Fetter-Walecka p.249 $\lim_{\eta \rightarrow 0} \sum_{\omega' \in \frac{2\pi}{\beta\hbar}\mathbb{Z}} \frac{e^{i\eta\omega'}}{i\omega' - x} = \frac{-\beta\hbar}{e^{\beta\hbar x} - 1}$ pour tout réel x non nul. On notera le facteur 1/2 au numérateur de (3.7) qui permet d'éviter un double comptage : le diagramme est en effet invariant par rotation d'un angle π autour de l'axe horizontal. Ce facteur 1/2 apparaît dans $\Sigma_{\text{non-res}}^{(2)}$ pour la même raison mais pas dans $\Sigma_{\text{Lan}}^{(2)}$.

La méthode étant reproduite pour les processus de Landau et non-résonnant, on prolonge analytiquement à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ en remplaçant la variable discrète $i\hbar\omega$ par la variable continue z et on obtient

$$\Sigma_{\text{Bel}}^{(2)}(\vec{q}, z) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\frac{1}{2} |\langle \vec{k}, \vec{q} - \vec{k} | \hat{\mathcal{H}}^{(3)} | \vec{q} \rangle|^2}{z - (\varepsilon_k - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}})} \left(1 + \bar{n}_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{q}-\vec{k}} \right) \quad (3.8)$$

$$\Sigma_{\text{Lan}}^{(2)}(\vec{q}, z) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{|\langle \vec{q} + \vec{k} | \hat{\mathcal{H}}^{(3)} | \vec{k}, \vec{q} \rangle|^2}{z + \varepsilon_k - \varepsilon_{\vec{q}+\vec{k}}} \left(\bar{n}_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{q}+\vec{k}} \right) \quad (3.9)$$

$$\Sigma_{\text{non-res}}^{(2)}(\vec{q}, z) = - \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\frac{1}{2} |\langle \vec{0} | \hat{\mathcal{H}}^{(3)} | \vec{k}, \vec{q}, -(\vec{q} + \vec{k}) \rangle|^2}{z + \varepsilon_k + \varepsilon_{-(\vec{q}+\vec{k})}} \left(1 + \bar{n}_{-(\vec{q}+\vec{k})} + \bar{n}_{\vec{k}} \right). \quad (3.10)$$

3.2.2 Expression du signal pour le champ classique

Avant d'étudier plus avant les propriétés de cette fonction énergie propre dans le cas $d = 2$, revenons à l'expression (3.1) du signal comme une intégrale de la fonction de Green et adaptons-la au cas de l'approximation de champ classique. Dans ce cas, nous remplaçons

la loi de Bose $\frac{1}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$ par celle d'équipartition de la physique classique $\frac{1}{\beta\hbar\omega}$, ce qui donne

$$\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t)\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle^{\text{class}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{-2i\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\beta\hbar\omega} \left(\mathcal{G}(\vec{q}, \omega + i0^+) - \mathcal{G}(\vec{q}, \omega - i0^+) \right). \quad (3.11)$$

Comme Σ admet une ligne de coupure sur l'axe réel, entraînant une discontinuité de sa partie imaginaire mais pas de sa partie réelle, on peut écrire

$$\Sigma(\vec{q}, \omega \pm i0^+) = \Sigma_R(\vec{q}, \omega) \pm i\Sigma_I(\vec{q}, \omega) \quad (3.12)$$

où les fonctions Σ_R et Σ_I sont à valeurs réelles. En introduisant ces expressions dans le signal, nous obtenons

$$\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t)\hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle^{\text{class}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\beta\hbar\omega} \frac{-\Sigma_I(\vec{q}, \omega)}{[\hbar\omega - \varepsilon_q - \Sigma_R(\vec{q}, \omega)]^2 + [\Sigma_I(\vec{q}, \omega)]^2}. \quad (3.13)$$

3.2.3 Principe d'un calcul numérique

Remarquons qu'il est toujours possible de réécrire nos fonctions énergie propre comme des intégrales sur une variable réelle d'une densité d'état sur un dénominateur d'énergie. En effet, on peut écrire l'expression schématique

$$\Sigma(\vec{q}, z) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \frac{\dots}{z - \Delta\varepsilon} = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \delta(\Delta\varepsilon - \varepsilon) \frac{\dots}{z - \varepsilon} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{z - \varepsilon} \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\Delta\varepsilon - \varepsilon)(\dots)$$

à partir de laquelle on peut définir une densité d'états $\rho(\vec{q}, \varepsilon) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\Delta\varepsilon - \varepsilon)(\dots)$ et donc $\Sigma(\vec{q}, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varepsilon}{z - \varepsilon} \rho(\vec{q}, \varepsilon)$. Pour nos trois processus à l'ordre 2 en $\hat{H}^{(3)}$, les densités d'états s'écrivent

$$\rho_{\text{Bel}}(\vec{q}, \varepsilon) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}} - \varepsilon) \frac{1}{2} \left| \langle \vec{k}, \vec{q} - \vec{k} | \hat{H}^{(3)} | \vec{q} \rangle \right|^2 \left(1 + \bar{n}_{\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{q}-\vec{k}} \right) \quad (3.14)$$

$$\rho_{\text{Lan}}(\vec{q}, \varepsilon) = \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon_{\vec{q}+\vec{k}} - \varepsilon_k - \varepsilon) \left| \langle \vec{q} + \vec{k} | \hat{H}^{(3)} | \vec{k}, \vec{q} \rangle \right|^2 \left(\bar{n}_{\vec{k}} - \bar{n}_{\vec{q}+\vec{k}} \right) \quad (3.15)$$

$$\rho_{\text{non-res}}(\vec{q}, \varepsilon) = - \int \frac{d^d\vec{k}}{(2\pi)^d} \delta(\varepsilon_k + \varepsilon_{\vec{q}+\vec{k}} + \varepsilon) \frac{1}{2} \left| \langle \vec{0} | \hat{H}^{(3)} | \vec{k}, \vec{q}, -(\vec{q} + \vec{k}) \rangle \right|^2 \left(1 + \bar{n}_{\vec{q}+\vec{k}} + \bar{n}_{\vec{k}} \right). \quad (3.16)$$

On reconnaît ici une forme généralisée des intégrales (1.33)-(1.34) pour les taux d'amortissement de Beliaev-Landau selon la règle d'or de Fermi calculées au chapitre 1. On peut en effet écrire $\Gamma_{\vec{q}}^{\text{proc}} = \rho_{\text{proc}}(\vec{q}, \varepsilon_q)$. Un calcul numérique peut alors suivre la même stratégie que celle prise à cette occasion : on intègre le Dirac de conservation de l'énergie sur la variable θ , angle entre \vec{q} et \vec{k} , et on réinsère les racines θ_0 dans l'élément de matrice et les nombres d'occupation pour finalement intégrer explicitement sur le nombre d'onde k . Il faudra faire attention à ce que les angles θ_0 assurant la conservation de l'énergie n'introduisent aucun phonon nul ou de nombre d'onde supérieur à la coupure ultraviolette η (que ce soit \vec{k} , $\vec{q} + \vec{k}$ ou $\vec{q} - \vec{k}$). Enfin remarquons que les processus non résonnants contribuent cette fois au résultat final, sur Σ_R bien sûr mais aussi sur Σ_I si ε est assez négatif, bien que cette contribution soit

négligeable dans la pratique devant celles des processus Beliaev et Landau. Enfin, on montre que

$$\Sigma_I(\vec{q}, \omega) = -\pi\rho(\vec{q}, \hbar\omega), \quad (3.17)$$

$$\Sigma_R(\vec{q}, \omega) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \frac{\rho(\vec{q}, \hbar\omega + \varepsilon) - \rho(\vec{q}, \hbar\omega - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad (3.18)$$

notamment en exprimant l'intégrande de Σ_R en termes de la valeur principale de Cauchy et celui de Σ_I en termes de la distribution de Dirac :

$$\Sigma(\vec{q}, \hbar\omega + i0^+) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon \rho(\vec{q}, \varepsilon) \left(\text{v.p.} \frac{1}{\hbar\omega - \varepsilon} - i\pi\delta(\hbar\omega - \varepsilon) \right). \quad (3.19)$$

3.3 Spécificité du cas 2D

Afin d'éclaircir la spécificité du cas $d = 2$, nous proposons dans cette section une analyse du comportement de Σ dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ à $\rho\xi^2$ et \bar{q} fixés. L'objectif est de déterminer l'applicabilité de la règle d'or de Fermi dans cette limite. À ce titre, on comparera avec le cas $d = 3$ où l'on peut l'appliquer. L'argument repose sur la considération de l'ordre dominant en ϵ de Σ d'une part, et de celui de l'échelle de variation de Σ en $z - \varepsilon_q \equiv \zeta$ d'autre part. Les deux lois de puissance correspondantes ont déjà été abordées et même exprimées au chapitre 1. En effet, dans les expressions de Σ_{proc} (3.8)-(3.10), on constate que c'est le terme de « défaut d'énergie » de forme $\frac{1}{\zeta - \Delta\varepsilon}$, qui détermine la variation de Σ en ζ . Or, ces défauts d'énergie ont déjà été calculés à l'ordre dominant en ϵ . On lit, sur les équations (1.49) et (1.51), que ces défauts sont d'ordre ϵ^3 (en raisonnant sur les quantités dimensionnées), conséquence de la dépendance en ϵ de l'angle θ_0 [voir les équations (1.50) et (1.52)].

De même pouvons-nous lire sur l'expression de $\bar{\Gamma}_q$ (1.59) l'ordre ϵ^3 pour l'ordre dominant de Σ . En effet, comme pour l'intégrale des taux d'amortissement, l'élément de matrice au carré adimensionné contribue par un facteur ϵ^3 tandis que le défaut d'énergie adimensionné contribue par un facteur ϵ^{-1} à l'ordre dominant. $\bar{\Sigma}$ est donc d'ordre 2 en ϵ et Σ d'ordre 3 en ϵ .

Les deux lois de puissance mises en jeu sont donc identiques, ce qui aura des conséquences importantes pour le comportement du signal pour de faibles valeurs de ϵ . Dans le cas $d = 3$ a contrario, l'échelle de variation en ζ de Σ reste d'ordre ϵ^3 mais la fonction énergie propre est d'ordre ϵ^5 , le taux d'amortissement variant comme T^5 [30].

Conséquences sur l'exactitude de l'approximation du pôle Introduisons une mise à l'échelle de Σ , ζ et t dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$

$$\Sigma(\vec{q}, z) \equiv \epsilon^\nu \sigma(\vec{q}, \frac{z - \varepsilon_q}{\epsilon^\mu} = \frac{\zeta}{\epsilon^\mu}) \quad ; \quad \frac{t}{\hbar} \equiv \epsilon^{-\nu} \underline{t} \quad ; \quad \zeta \equiv \epsilon^\nu \underline{\zeta} \quad (3.20)$$

et écrivons le signal (3.4) en termes de ces variables mises à l'échelle

$$\frac{\langle \hat{b}_{\vec{q}}(t) \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger(0) \rangle}{\bar{n}_{\vec{q}}} e^{\varepsilon_q t / \hbar} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\simeq} \int_{C_+} \frac{d\underline{\zeta}}{2i\pi \underline{\zeta} - \sigma(\vec{q}, \underline{\zeta} \epsilon^{\nu-\mu})} \frac{e^{-i\underline{\zeta} \underline{t}}}{\underline{\zeta}}. \quad (3.21)$$

Le constat est clair : pour le cas $d = 3$ où $\nu = 5$ et $\mu = 3$, il vient $\epsilon^{\nu-\mu} = \epsilon^2 \rightarrow 0$ donc l'approximation du pôle remplaçant la fonction Σ au dénominateur de (3.21) par la

constante $\sigma(\vec{q}, 0)$ est exacte dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$. En revanche, dans le cas $d = 2$, $\nu = \mu = 3$ soit $\epsilon^{\nu-\mu} = 1$, ce qui implique que cette limite ne suffit pas à rendre l'approximation du pôle donc la règle d'or de Fermi exacte !

3.4 Théorie diagrammatique à l'ordre dominant en ϵ

Maintenant que nous avons établi la spécificité du cas $d = 2$ concernant la limite $\epsilon \rightarrow 0$, il serait utile d'obtenir un « petit paramètre » du modèle qui caractériserait la force des interactions et au moyen duquel nous pourrions obtenir une condition de validité de la règle d'or de Fermi. Nous commençons par réaliser une nouvelle mise à l'échelle des variables, cette fois à partir des quantités adimensionnées

$$\tilde{t} \equiv \epsilon^2 \frac{3\gamma}{8} \bar{q} \bar{t} \quad ; \quad \bar{z} - \bar{\epsilon}_q \equiv \epsilon^2 \frac{3\gamma}{8} \tilde{\zeta} \quad ; \quad \bar{\Sigma}^{(2)} \equiv \epsilon^2 \frac{3\gamma}{8} \tilde{\Sigma}^{(2)}. \quad (3.22)$$

Les fonctions énergies propres adimensionnées de Beliaev et Landau à l'ordre 2 en $\bar{H}^{(3)}$ s'écrivent alors dans la limite $\epsilon \rightarrow 0$ dans le demi-plan supérieur :

$$\tilde{\Sigma}_{\text{Bel}}^{(2)}(\bar{q}, \tilde{\zeta}) = \frac{1}{iu} \int_0^{\bar{q}/2} \frac{d\bar{k}}{\bar{q}} \frac{(\bar{k}(\bar{q} - \bar{k}))^{3/2} (1 + \bar{n}_k + \bar{n}_{q-k})}{(\bar{k}(\bar{q} - \bar{k}) + \tilde{\zeta})^{1/2}} \quad (3.23)$$

$$\tilde{\Sigma}_{\text{Lan}}^{(2)}(\bar{q}, \tilde{\zeta}) = \frac{1}{iu} \int_0^{+\infty} \frac{d\bar{k}}{\bar{q}} \frac{(\bar{k}(\bar{q} + \bar{k}))^{3/2} (\bar{n}_k - \bar{n}_{q+k})}{(\bar{k}(\bar{q} + \bar{k}) - \tilde{\zeta})^{1/2}} \quad (3.24)$$

$$\text{avec } \boxed{u = \frac{\pi \rho \xi^2 \gamma^{3/2}}{\sqrt{3}(1 + \Lambda)^2}}. \quad (3.25)$$

Ainsi, à l'ordre 2 en ϵ , la physique du système ne dépend plus que du paramètre physique u ! En particulier, ces relations suggèrent que la règle d'or de Fermi peut être appliquée avec succès lorsque $u \gg 1$.³ Il faut néanmoins contrôler l'ordre de grandeur en ϵ et u des fonctions énergie propre d'ordre supérieur.

3.4.1 Étude des ordres supérieurs de la fonction énergie propre

Pour étudier ces ordres supérieurs, nous utilisons une méthode de « comptage de puissance » des termes dans les intégrales contribuant à Σ afin d'évaluer l'ordre dominant en ϵ et en u sans avoir à calculer explicitement ces intégrales. En particulier, cette méthode repose sur l'argument suivant : nous faisons l'hypothèse que, pour tous les diagrammes à tous les ordres en $\bar{H}^{(3)}$, les angles qui satisfont le Dirac de conservation de l'énergie sont petits et d'ordre ϵ et que par conséquent, les dénominateurs d'énergie sont eux aussi petits et d'ordre ϵ^3 . C'est ce que nous avons effectivement constaté à l'ordre 2 dans les expressions (3.8) et (3.9). Cette hypothèse n'est pas si forte que ça à cause de la quasi-linéarité de notre spectre phononique. S'il était exactement linéaire (un véritable spectre phononique $\varepsilon = ck$),

3. L'échelle de temps caractéristique de la règle d'or correspond à $\tilde{t} \sim u$ donc à $\tilde{\zeta} \sim 1/u$ dans l'espace des fréquences si bien que, dans la limite $u \rightarrow +\infty$, $\tilde{\Sigma}^{(2)}(\bar{q}, \tilde{\zeta})$ peut être approximée par $\tilde{\Sigma}^{(2)}(\bar{q}, i0^+)$ dans l'intégrande du signal, ce qui redonne l'approximation du pôle et donc la règle d'or de Fermi pour l'amortissement.

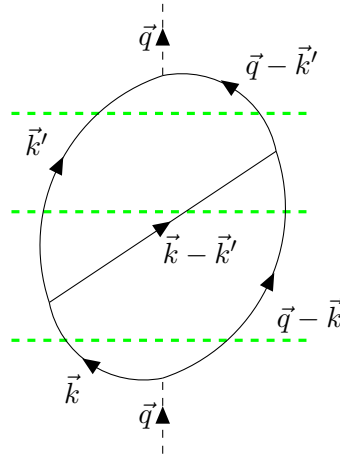


FIGURE 3.3 – Un des diagrammes d'ordre 4 en $\bar{H}^{(3)}$ avec un phonon intermédiaire couplant les deux branches de la boucle. Nous avons noté l'impulsion de chaque phonon, en tenant compte de la conservation de l'impulsion à chaque noeud, ce qui laisse deux vecteurs d'onde internes sur lesquelles intégrer. Les tiretés verts représentent les dénominateurs d'énergie ΔE . On divisera en effet les éléments de matrice de l'interaction cubique $\bar{H}^{(3)}$ par l'énergie de chaque état intermédiaire autant de fois qu'il y a d'états intermédiaires indépendants (ΔE contient la somme des énergies des phonons que coupe un tireté vert donné).

seuls des phonons colinéaires auraient pu interagir sur la couche d'énergie, c'est-à-dire que $\theta_0 = 0$ aurait été l'unique solution possible pour la conservation de l'énergie.⁴ Dès lors, par continuité, une faible courbure doit amener à un angle petit.

À titre d'exemple, on considère un diagramme d'ordre 4 en $\bar{H}^{(3)}$ que l'on représente sur la figure 3.3. Pour commencer, un élément de matrice quelconque peut se représenter schématiquement (voir équation (1.14)) par $\langle f | \mathcal{H}^{(3)} | i \rangle \propto \sqrt{\frac{\hbar k_1}{mc} \frac{\hbar k_2}{mc} \frac{\hbar k_3}{mc} \frac{mc^2}{\sqrt{\rho}}} \propto \frac{\epsilon^{3/2} mc^2}{\sqrt{\rho}}$ car chaque nombre d'onde est d'ordre $k_B T / \hbar c$. Ainsi, on peut écrire (en comptant quatre éléments de matrice de $H^{(3)}$ sur le diagramme)

$$\Sigma^{(4)} \propto \int d^2 \vec{k} \int d^2 \vec{k}' \left(\frac{\epsilon^{3/2} mc^2}{\sqrt{\rho}} \right)^4 \frac{1}{\Delta E \Delta E \Delta E} \quad (3.26)$$

où ΔE représente un dénominateur d'énergie à chaque fois différent. Il y en a trois car, comme il est possible de le constater sur la figure 3.3, pour chaque diagramme possible à cet ordre (c'est-à-dire pour toutes les orientations possibles des lignes intérieures du diagramme), il y a trois états intermédiaires (il n'y en avait qu'un seul à l'ordre 2). On passe en coordonnées polaires d'axe \vec{q} dans l'espace des vecteurs d'onde et on tient compte du fait que la largeur

4. C'est la raison pour laquelle on ne peut pas se satisfaire de ce spectre, qui restreint les collisions d'une manière différente de la réalité expérimentale.

angulaire est $\approx \epsilon$ et que $\Delta E \approx k_B T \epsilon^2$. Donc

$$\Sigma^{(4)} \propto \int dk dk' k k' \int d\theta d\theta' \left(\frac{\epsilon^{3/2} m c^2}{\sqrt{\rho}} \right)^4 \frac{1}{\Delta E \Delta E \Delta E} \quad (3.27)$$

$$\propto \left(\left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^2 \right)^2 (\epsilon)^2 \left(\frac{\epsilon^{3/2} m c^2}{\sqrt{\rho}} \right)^4 \left(\frac{1}{k_B T \epsilon^2} \right)^3. \quad (3.28)$$

En conclusion,

$$\Sigma^{(4)} \propto k_B T \left(\frac{\epsilon}{\rho \xi^2} \right)^2 \quad \text{ou} \quad \boxed{\bar{\Sigma}^{(4)} \propto \frac{\epsilon^2}{(\rho \xi^2)^2}}. \quad (3.29)$$

Avec les mêmes arguments, considérons l'ajout d'un ordre supérieur. Du point de vue du diagramme, nous devons ajouter deux noeuds $H^{(3)}$ soit deux éléments de matrice, un phonon intermédiaire donc une intégration $\int dk k \int \theta$, deux états intermédiaires donc deux dénominateurs d'énergie. Ainsi on ajoute un facteur d'ordre

$$\int dk k \int \theta \langle f | H^{(3)} | i \rangle \frac{1}{\Delta E \Delta E \Delta E} \propto \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^2 \epsilon \left(\frac{\epsilon^{3/2} m c^2}{\sqrt{\rho}} \right)^2 \left(\frac{1}{k_B T \epsilon^2} \right)^2 = \frac{1}{\rho \xi^2} \quad (3.30)$$

Selon cette méthode de comptage de puissances associée à l'hypothèse des petits dénominateurs d'énergie pour les petits angles, les diagrammes d'ordre supérieur sont tous d'ordre dominant ϵ^2 mais d'ordre de plus en plus élevé en $1/u$:

$$\boxed{\bar{\Sigma}^{(2n)} \propto \frac{\epsilon^2}{(\rho \xi^2)^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*} \quad (3.31)$$

qui apparaît donc comme un petit paramètre inattendu dans la série diagrammatique.

Chapitre 4

Résultats et comparaison

Avant-propos

Dans ce chapitre, nous discutons des résultats issus de deux séries d'exécutions du programme de simulation qui se distinguent par leur régime d'interaction. Bien que les deux séries restent dans le régime faiblement collisionnel pour tous les modes de la simulation, elles se distinguent par la valeur du paramètre $u = \frac{\pi\gamma^{3/2}}{\sqrt{3}(1+\Lambda)^2}\rho\xi^2$ que nous avons introduit dans le chapitre précédent et qui caractérise la force des interactions dans le gaz de bosons bidimensionnel. Parmi les paramètres physiques des deux séries, plusieurs sont identiques : la courbure phononique $\gamma = 1$, le paramètre thermodynamique $\Lambda = 0$, la coupure ultraviolette $\eta = 1$ ainsi que la température réduite $\epsilon = 1/2$. Elles diffèrent donc seulement par la valeur de la densité adimensionnée $\rho\xi^2$. Nous avons $\rho\xi^2 = 10$ pour la série 1 et $\rho\xi^2 = 1,5625$ pour la série 2. Nous présentons aussi des résultats issus de simulations identiques à la série 1 à l'exception de la valeur de la température réduite $\epsilon = 1/3$ et que nous nommons série 1 bis. Avant de présenter les résultats des simulations, nous vérifions que les jeux de paramètres s'accordent avec les contraintes de validité de la théorie de l'hydrodynamique quantique avant d'aborder la question du régime d'interaction défini par ces paramètres physiques. Puis nous présentons quelques données extraites des simulations qui nous assurent de la cohérence physique de notre intégration numérique avant d'illustrer à la section suivante le comportement de la fonction de corrélation temporelle $\langle b_{\vec{q}}(t)b_{\vec{q}}^*(0) \rangle$ des phonons à proprement parler que l'on compare à la prédiction de la règle d'or de Fermi. Enfin, dans l'ultime section de ce chapitre, de cette partie et de cette thèse, nous étudions en détail l'écart entre nos simulations et l'approximation du pôle ainsi que les différentes prédictions sur cet écart issues de la méthode diagrammatique par fonctions de Green à N corps. Cette discussion nous permet de conclure sur la validité et la viabilité de nos simulations et de notre théorie.

4.1 Régime de validité et d'interaction des séries

Comme nous l'avons mentionné à la section 1.1 du chapitre 1, l'hydrodynamique quantique, théorie mésoscopique de basse énergie, est soumise à des restrictions sur les paramètres du système garantissant la cohérence de sa description. Les contraintes se résument à (i) $\frac{\rho}{q_{\text{th}}^2} = \frac{\rho\xi^2}{\epsilon^2} \gg 1$ qui assure la pertinence de la description à gros grains de l'hydrodynamique (1.1) et (ii) $k_B T \ll mc^2 \Rightarrow \epsilon \ll 1$ qui assure que la température soit assez basse pour peupler

seulement la partie phononique du spectre d'excitation. Une autre quantité utile pour juger de la pertinence de notre description est le nombre de particules dans une maille de notre réseau. Pour que notre description « à gros grains » soit pertinente, il faut que ce nombre soit grand devant 1, donc $\rho dxdy = \rho \xi^2 \left(\frac{\pi}{\eta\epsilon}\right)^2 \gg 1$.¹ Nous résumons nos séries et la valeur de ces contraintes dans le tableau suivant :

Série	$\rho \xi^2$	ϵ	u	$\rho dxdy$	$\frac{\rho \xi^2}{\epsilon^2}$	$\Gamma^{\text{th}}/\omega_{\vec{q}}^{\text{min}}$
1	10	1/2	18, 14	394, 8	40	$2, 2 \cdot 10^{-2}$
1 bis	10	1/3	18, 14	888, 3	90	0, 11
2	1, 5625	1/2	2, 83	61, 7	6, 25	0, 96

Pour nos trois séries, la contrainte $\frac{\rho \xi^2}{\epsilon^2} \gg 1$ semble bien réalisée. Si la valeur $\epsilon = 1/2$ peut sembler un peu grande pour satisfaire la contrainte $\epsilon \ll 1$, ce qui impliquerait que les excitations collectives ne soient pas tout à fait phononiques, il ne faut pas oublier que la courbure du spectre est de la forme $\frac{\gamma}{8}\epsilon^2 \simeq 0,031$ dans la simulation, ce qui reste faible. On constate dès lors que ce qui différencie nettement les deux séries est la valeur du paramètre $u = \frac{\pi\gamma^{3/2}}{\sqrt{3}(1+\Lambda)^2}\rho\xi^2$ que nous avons introduit au chapitre 3 [voir (3.25)] et qui n'est autre que l'inverse du petit paramètre du développement diagrammatique. Il vaut 18, 14 pour la série 1 et 2, 83 pour la série 2. Par conséquent, la règle d'or de Fermi devrait être plus proche de la série 1 que de la 2.

Régime collisionnel des simulations Avec ces paramètres, sommes-nous, pour un mode donné, plutôt dans le régime hydrodynamique ou faiblement collisionnel? Nous pouvons répondre à cette interrogation en comparant la pulsation du mode à l'amortissement d'un mode thermique typique. On peut considérer par exemple le mode d'excitation fondamental de chaque grille, de pulsation adimensionnée $\bar{\omega}_{\vec{q}}^{\text{min}} = 2\eta/n_x^{\text{PZB}}$ et comme taux d'amortissement celui du mode d'énergie maximale dont la population moyenne est égale à 1, et que nous trouvons à partir des données des simulations (voir la section 4.3). Le régime hydrodynamique correspond alors à la limite $\Gamma^{\text{th}}/\omega_{\vec{q}}^{\text{min}} \gg 1$ tandis que le régime faiblement collisionnel désigne la limite inverse $\Gamma^{\text{th}}/\omega_{\vec{q}}^{\text{min}} \ll 1$. D'après la dernière colonne du tableau précédent, qui donne la valeur de ce rapport, les trois séries 1, 1 bis et 2 sont dans le régime faiblement collisionnel pour tous les modes, même pour la plus grande taille 128×128 .²

4.2 Vérifications de la conservation de l'énergie

Les contraintes sur les valeurs des paramètres imposées par les approximations du modèle ne sont pas les seules auxquelles nous devons faire attention pour être sûr de bien rendre

1. Notons toutefois que cette quantité dépend de la coupure ultraviolette ce qui affaiblit son interprétation physique et donc son importance en tant que condition de validité.

2. Cela indique que la taille limitée de la boîte nous empêche d'observer des modes de faibles énergies qui pourraient se trouver dans le régime hydrodynamique. En l'occurrence, ce régime semble à portée de main au vu de la série 2, puisque doubler ou quadrupler le nombre de mode ferait rentrer une fraction des modes d'énergie les plus faibles dans ce régime. Pour l'instant, nous n'avons pas pu explorer en profondeur ce régime, nous mettons à la fin de ce chapitre, en conclusion, un premier coup d'oeil issu d'une troisième série d'exécutions tentant d'apercevoir ces petits modes en régime hydrodynamique dans le cas $\rho \xi^2 = 1, 5625$.

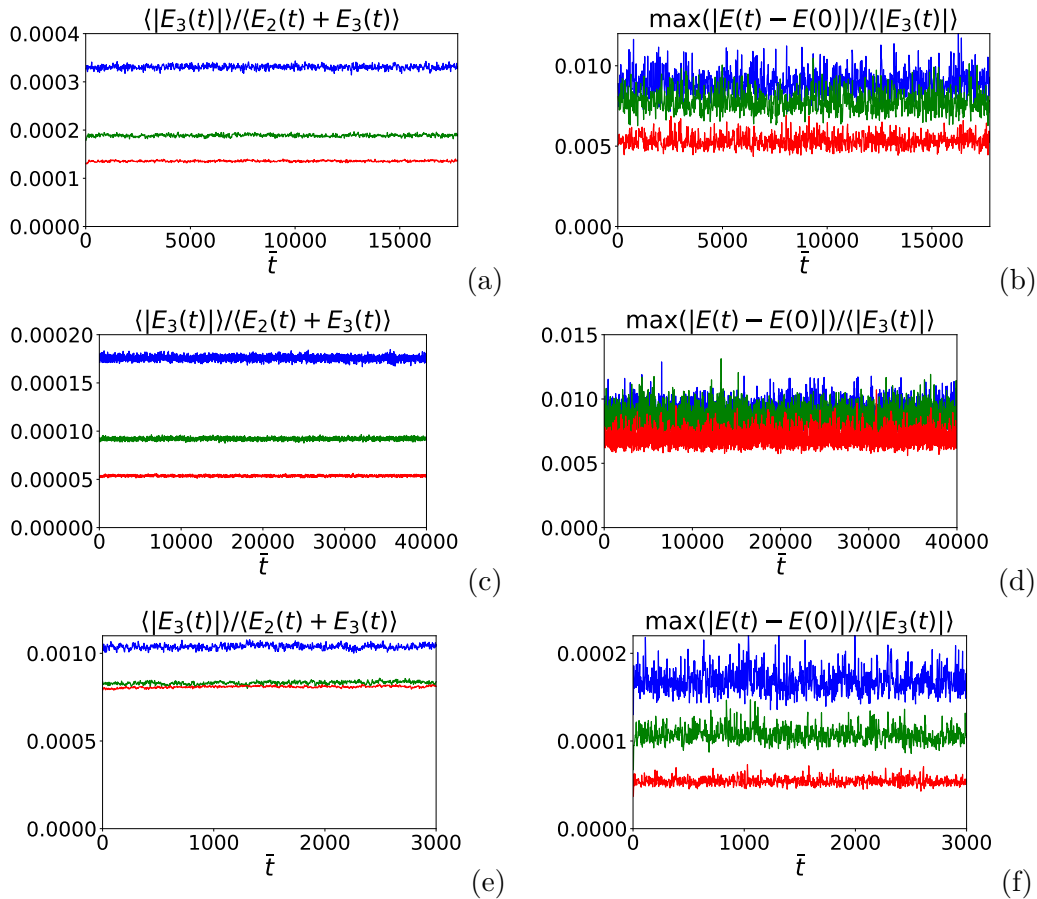


FIGURE 4.1 – On représente deux quantités moyennes liées à l'énergie du gaz et à sa conservation durant l'intégration. Chaque couleur correspond à une taille de système différente : bleu pour 32×32 modes physiques, vert pour 64×64 et rouge pour 128×128 . Chaque point qui compose les courbes est la moyenne d'ensemble sur les 3200 réalisations à un même instant \bar{t} . À gauche, on représente la moyenne de la valeur absolue de l'énergie d'interaction, c'est-à-dire de la valeur absolue de $\bar{H}^{(3)}$, rapportée à l'énergie totale, la moyenne de $\bar{H} = \bar{H}^{(2)} + \bar{H}^{(3)}$ au cours du temps. À droite, la valeur maximale parmi les 3200 réalisations de la quantité $|E_{\text{tot}}(\bar{t}) - E_{\text{tot}}(0)|$ avec $E_{\text{tot}}(\bar{t})$ la valeur de \bar{H} pour une réalisation donnée à un instant donné. On rapporte cette valeur maximale à la moyenne de la valeur absolue de $\bar{H}^{(3)}$ à cet instant. (a) et (b) correspondent à la série 1, (c) et (d) à la série 1 bis, (e) et (f) à la série 2.

compte des phénomènes physiques par nos simulations. Il faut aussi que les méthodes numériques que nous utilisons pour calculer en pratique l'évolution soient assez précises. Dans cette section, nous vérifions les bonnes propriétés de stabilité de la méthode d'intégration temporelle, triplement approchée (voir chapitre 2) : une première fois dans l'intégration faite via la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 sur $\bar{H}^{(3)}$, une deuxième fois par la formule à 4 points utilisée pour le calcul du gradient et une troisième fois par le clivage de l'hamiltonien en $\bar{H}^{(2)}$ et $\bar{H}^{(3)}$.

Sur la figure 4.1 nous représentons deux types de quantités liées à l'énergie du gaz et à sa conservation au cours du temps dans les simulations. Ces moyennes sont toujours prises sur les réalisations, les sous-figures de la colonne gauche représentent la moyenne de la valeur absolue de l'hamiltonien $\bar{H}^{(3)}$ à un instant \bar{t} , rapportée à la moyenne de l'hamiltonien total $\bar{H}^{(2)} + \bar{H}^{(3)}$ à ce même instant. Quant aux sous-figures de la colonne de droite, on y représente l'écart maximal (en valeur absolue) parmi toutes les réalisations entre l'énergie totale à l'instant \bar{t} et à l'instant 0, rapporté à la moyenne de la valeur absolue de l'énergie d'interaction à l'instant \bar{t} . Comme nous pouvons le constater, les simulations sont d'une précision satisfaisante. La constance du rapport entre l'énergie d'interaction et l'énergie totale des sous-figures à gauche nous confirme que le système a bien thermalisé, c'est-à-dire atteint un état d'équilibre. Les sous-figures à droite nous renseignent sur deux sujets. Tout d'abord on constate que la méthode d'intégration temporelle de Runge-Kutta d'ordre 4 est tout à fait satisfaisante puisque l'énergie totale fluctue très peu et est stable au cours du temps. Par ailleurs, en comparant aux sous-figures à gauche on constate que l'énergie totale est conservée en valeur relative à 10^{-6} près pour la série 1 et 1 bis et 10^{-7} pour la série 2 sans divergence apparente. La deuxième information que l'on retire des figures à droite est que la fluctuation de l'énergie totale est toujours une fraction très petite de l'énergie d'interaction, au pire de $\simeq 1\%$ pour les séries 1 et 1 bis et au mieux de $\simeq 0,005\%$ dans la sous-série 128×128 de la série 2. Disposer d'un tel rapport très faible est important dans la mesure où tous les effets que nous voulons observer dans ces simulations résultent de l'hamiltonien d'interaction, il est donc important que son effet sur le système soit plus grand que les erreurs et incertitudes numériques. Le fait que la moyenne d'ensemble de $\bar{H}^{(3)}$ soit toujours bien plus grande que l'écart maximal à la conservation de l'énergie nous confirme que cette contrainte est satisfaite.

Enfin, nous pouvons faire remarquer que le rapport des énergies des sous-figures de gauche est une variable physique du système. À ce titre donc, il ne devrait pas dépendre de la taille de la boîte numérique si celle-ci a atteint la limite thermodynamique. Sur les figures, on constate une certaine dépendance en la taille tout en s'accordant sur l'ordre de grandeur mais aussi que les sous-séries les plus grandes sont bien plus proches de la limite thermodynamique. C'est pourquoi les figures suivantes se concentrent sur ces sous-séries. Nous reviendrons sur la question de l'atteinte à la limite thermodynamique dans la dernière section lorsque nous constaterons que la dynamique dépend peu de la taille du système en montrant que les modes d'impulsions différentes mais de même nombre d'onde ont des dynamiques proches.

4.3 Règle d'or de Fermi-Dirac contre simulation

Dans l'approximation qui sous-tend la règle d'or de Fermi-Dirac, l'évolution de l'observable $\langle \hat{b}_q(t) \hat{b}_q^\dagger(0) \rangle$ ou sa version en champ classique est purement exponentielle avec un taux d'amortissement adimensionné $\frac{\bar{\Gamma}_q}{2}$ avec $\bar{\Gamma}_q$ donné dans l'équation (1.59). Sur la figure 4.2,

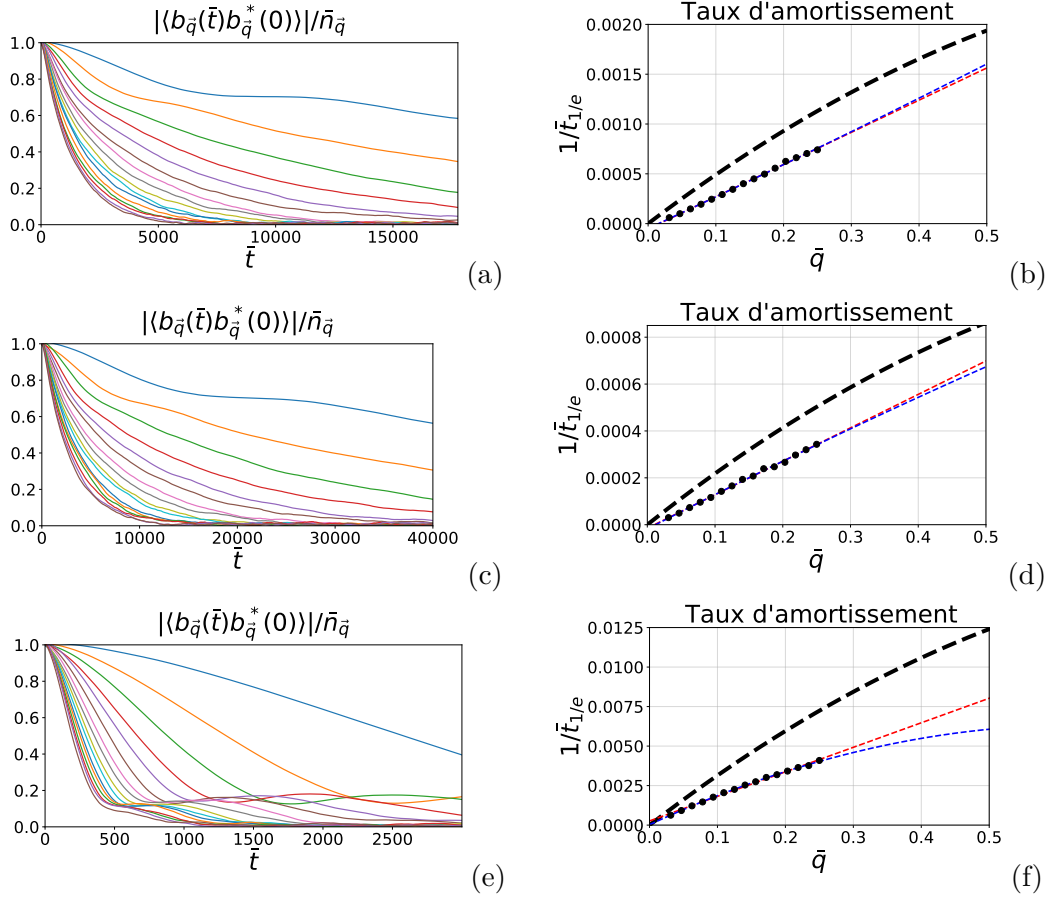


FIGURE 4.2 – Dans la colonne de gauche, nous montrons la valeur absolue de notre observable cible dans les sous-séries 128×128 pour chaque série, ramenée à la population d'équilibre thermodynamique, avec laquelle elle coïncide à l'instant initial, pour les 16 premiers modes par demi-axe, c'est-à-dire dont le vecteur d'onde est de la forme $(\pm \frac{2n}{n_x^{PZB}}, 0)$ ou $(0, \pm \frac{2n}{n_y^{PZB}})$ avec n entier compris entre 1 et 16. Nous avons moyenné les signaux des quatre modes de même n puisqu'ils sont équivalents dans la boîte de quantification carrée. Dans la colonne de droite, nous représentons les taux d'amortissement en fonction de \bar{q} . Les points noirs sont issus des courbes de la colonne de gauche, chaque point est pris comme l'inverse du temps auquel le module du signal a décru d'un facteur $1/e$. Le tireté rouge correspond à un ajustement affine tandis que le bleu correspond à un ajustement quadratique en \bar{q} . Enfin, le tireté noir est le taux d'amortissement de Landau-Beliaev (divisé par deux) tel que calculé par la règle d'or de Fermi-Dirac (1.59). Les figures (a) et (b) sont issues de la série 1, les (c) et (d) de la 1 bis et les (e) et (f) de la 2.

nous représentons, à gauche, l'évolution au cours du temps de cette observable $\langle b_{\bar{q}}(\bar{t})b_{\bar{q}}^*(0) \rangle$ normalisée par la population \bar{n}_q de l'équilibre thermodynamique pour les 16 premiers modes sur chaque demi-axe du réseau pour la sous-série 128×128 de chaque série et à droite, une estimation numérique du taux d'amortissement de cette observable pour ces mêmes modes et cette même sous-série 128×128 (de haut en bas : la série 1, puis 1 bis puis 2). Nous entendons par mode sur un demi-axe, les modes de vecteur d'onde de la forme $(\pm \frac{2l}{n_x^{\text{PZB}}}, 0)$ ou $(0, \pm \frac{2l}{n_y^{\text{PZB}}}, 0)$ avec $l \in \llbracket 1; n_{x/y}^{\text{PZB}}/2 \rrbracket$. Pour un l donné, les 4 vecteurs sur chacun des demi-axes jouent des rôles symétriques pour un réseau carré. Les observables de ces 4 modes doivent donc se comporter de la même façon car ils sont soumis strictement aux mêmes équations d'évolution. Aussi avons-nous moyenné les signaux de ces 4 modes pour obtenir les moyennes d'ensemble de l'observable avec une incertitude statistique réduite d'un facteur 2. Notons que la fonction de corrélation temporelle que nous représentons est strictement égale à la population moyenne de l'équilibre thermodynamique à l'instant initial. Raison pour laquelle toutes ces courbes doivent débiter à 1, ce qui est bien le cas sur les figures. On remarque aussi très bien l'amortissement pas tout à fait exponentiel aux temps court et aux temps longs, comme notre théorie le prévoit³, avec ces « rebonds » que l'on peut constater dans la fonction de corrélation. C'est la conséquence de la structure plus riche de la fonction énergie propre, celle-ci présentant une ligne de coupure partant d'un point de branchement en plus d'un pôle dans son prolongement analytique. Puisque l'amortissement n'est pas tout à fait exponentiel, il est difficile d'extraire un taux d'amortissement par un ajustement. Pour obtenir l'estimation d'un taux, nous avons plutôt déterminé le temps $\bar{t}_{1/e}$ au bout duquel notre observable de corrélation temporelle a décré d'un facteur $1/e \simeq 0,368$. Si la règle d'or de Fermi-Dirac était exacte, alors on aurait une correspondance parfaite entre ces taux $\frac{\bar{\Gamma}_{\bar{q}}}{2} = 1/\bar{t}_{1/e}$. C'est donc l'inverse de ce temps que nous représentons dans les figures de la colonne de droite (points noirs), taux déterminés directement à partir des courbes des figures de la colonne de gauche.⁴ En tireté noir, nous traçons le taux (divisé par deux) issu de la règle d'or de Fermi-Dirac (1.59). Les tiretés rouge et bleu correspondent à des ajustements affine et quadratique des points noirs. C'est d'ailleurs la pente obtenue par l'ajustement affine que nous avons utilisé pour estimer le taux de thermalisation Γ^{th} , c'est-à-dire celui des modes de $\bar{q} = 1$.

On constate que les modes s'amortissent plus lentement que la prédiction de la règle d'or. Malgré tout, la linéarité manifeste des taux de décroissance à $1/e$ à faible \bar{q} n'est pas en contradiction avec celle-ci et appuie l'idée que ces simulations se trouvent bien dans le régime faiblement collisionnel et non dans le régime hydrodynamique.

4.4 Comparaison entre théorie par fonctions de Green et simulations numériques

Dans cette dernière section, nous présentons les résultats de nos simulations pour l'écart entre le signal réduit et l'approximation du pôle. En particulier les figures de cette section

3. Notons toutefois que le départ non exponentiel n'est pas spécifique au cas bidimensionnel. En effet la règle d'or de Fermi qui prédit un amortissement purement exponentiel n'est jamais valable aux temps courts, quel que soit l'ordre en ϵ et la dimensionnalité du système.

4. On ne compte que 15 points car le mode fondamental ne s'est pas amorti suffisamment pour qu'on puisse lui attribuer un temps $\bar{t}_{1/e}$.

représentent toutes la quantité

$$\frac{\langle b_{\bar{q}}(\bar{t})b_{\bar{q}}^*(0) \rangle}{\bar{n}_{\bar{q}}} e^{i\bar{\varepsilon}_{\bar{q}}\bar{t}} - e^{-i\Sigma(\bar{q},\bar{\varepsilon}_{\bar{q}}+i0^+)\bar{t}} \quad (4.1)$$

pour des valeurs \bar{q} égales à $1/4$ et $5/16$. Dans l'équation (4.1), la fonction énergie propre $\Sigma(\bar{q},\bar{\omega})$ est calculée à l'ordre 2 en $\bar{H}^{(3)}$. Former cette quantité revient à soustraire aux courbes de la colonne de gauche de la figure 4.2 la prédiction de l'approximation du pôle $e^{-i\Sigma(\bar{q},\bar{\varepsilon}_{\bar{q}}+i0^+)\bar{t}}$ que l'on obtient numériquement en réalisant les intégrations (3.17) et (3.18) puis en retenant l'approximation d'ordre 0 du pôle $\bar{\omega} = \bar{\varepsilon}_{\bar{q}} + i0^+$. Rappelons aussi que $\bar{n}_{\bar{q}} = 1/\bar{\varepsilon}_{\bar{q}}$ d'après la loi de l'équipartition de la physique classique. Comme Σ est calculé à l'ordre 2 en $\bar{H}^{(3)}$, la partie imaginaire redonne (à un facteur 2 près) le taux d'amortissement de la règle d'or de Fermi ; en revanche, la partie réelle décrit un déplacement de la pulsation propre des modes sous l'effet de leurs interactions, qui échappe à la règle d'or et contribue à la phase du signal. Nous comparons ces résultats aux prédictions de la méthode diagrammatique des fonctions de Green avec un calcul de la fonction énergie propre, à toutes les pulsations $\bar{\omega}$, à l'ordre 2 et à tous les ordres en ϵ .

Pour rappel, le comptage de puissance exposé à la section 3.3 du chapitre 3 suggère que dans le cas bidimensionnel, l'approximation du pôle ne suffit pas à prédire l'amortissement des phonons, même à faible température. Pour que la règle d'or de Fermi puisse être applicable, il faut qu'un second paramètre, $1/u$, soit petit. Nos simulations tentent précisément de confirmer ou d'infirmer ce fait par une intégration temporelle à tous les ordres en $\bar{H}^{(3)}$ et en ϵ . Nous présentons les différents résultats par série. Le code couleur et de forme est identique sur toutes les figures qui suivent : la couleur rouge est associée à la partie réelle du signal et la couleur bleue à la partie imaginaire. Les traits pleins représentent les résultats des simulations. Les tiretés sont associés à une prédiction diagrammatique à tous les ordres en ϵ tandis que les pointillés sont associés à la prédiction à l'ordre 2. On choisit une teinte d'autant plus foncée que la taille du système est plus grande.

4.4.1 Série 1

Commençons par considérer la série 1 qui se caractérise, rappelons-le, par les paramètres $\rho\xi^2 = 10$ et $\epsilon = 1/2$. La figure 4.3a représente l'écart (4.1) pour le mode phononique d'impulsion $\bar{q} = 1/4$ pour différentes tailles du système. Pour une atteinte parfaite de la limite thermodynamique, ces trois sous-séries devraient donner strictement les mêmes résultats puisque la fonction de corrélation considérée ne dépend plus des variables extensives du système. Ce que l'on constate sur cette figure, c'est que les trois sous-séries s'accordent bien même si on peut regretter que la partie réelle n'ait pas tout à fait convergé sauf aux temps courts. On remarque d'abord la structure de ce signal : une croissance brutale de l'écart à l'approximation du pôle avant une convergence oscillante vers celle-ci aux temps longs. Cette structure se retrouvera à l'identique dans toutes les figures à venir ainsi que dans les prédictions diagrammatiques. Sur la sous-figure (b), nous comparons, dans la sous-série de taille intermédiaire 64×64 l'écart pour le mode $\bar{q} = 5/16$ pour les modes sur les axes du réseau numérique et les modes hors axes de même nombre d'onde.⁵ Là encore, toute différence dans la dynamique de ces deux modes ne peut être qu'un effet de la taille finie du système. La

5. Par modes hors axes, nous désignons les 8 modes de coordonnées $(\pm 3n_x^{\text{PZB}}/2, 4n_x^{\text{PZB}}/2)$ et $(\pm 4n_x^{\text{PZB}}/2, 3n_x^{\text{PZB}}/2)$ dans le réseau numérique des vecteurs d'onde. Le nombre d'onde adimensionné de

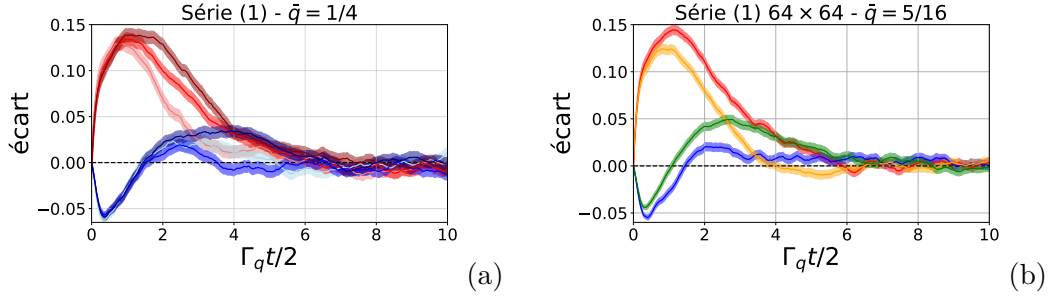


FIGURE 4.3 – Série 1 : écarts à l’approximation du pôle de la fonction de corrélation temporelle moyenne comme dans l’équation (4.1) pour différentes tailles du réseau et différents nombres d’onde du mode dans le réseau. Le rouge est associé à la partie réelle du signal, le bleu à sa partie imaginaire. La zone colorée correspond à l’incertitude statistique sur la moyenne donnée par la formule habituelle (écart-type)/ $\sqrt{n_{\text{traj}}n_{\text{mode}}}$ avec n_{mode} le nombre de mode de même nombre d’onde sur l’axe. Le temps est en unités de $2/\bar{\Gamma}_q$, prédiction de la règle d’or de Fermi pour le champ classique (1.59). (a) Le signal pour les trois sous-séries de tailles différentes pour les modes de $\bar{q} = 1/4$ sur les demi-axes du réseau. À chaque dégradé de couleur on associe un dégradé de taille du réseau (le plus clair correspond au réseau le plus petit et le plus foncé au plus grand). (b) Le signal des modes d’impulsion $\bar{q} = 5/16$ pour la sous-série de taille 64×64 , on compare le signal des modes sur l’axe (rouge et bleu) et les modes hors axes (orange et vert) définis dans la note 5.

conclusion qu’on en tire est la même que pour la sous-figure (a), les dynamiques sont largement similaires même si les modes n’ont pas parfaitement convergé entre eux. Il faut noter que, par nature, la convergence thermodynamique pour cet écart est ardue à obtenir puisque nous cherchons à extraire et à mettre en lumière un terme sous-dominant de la dynamique.

Sur la figure 4.4, nous nous concentrons sur la sous-série de plus grande taille, la plus proche a priori de la limite thermodynamique, et nous comparons le signal avec les prédictions des méthodes diagrammatiques par fonctions de Green obtenues par intégration numérique des équations (3.17) et (3.18) du chapitre 3. La sous-figure (a) concerne toujours les modes $\bar{q} = 1/4$ et la sous-figure (b) les modes d’impulsions $\bar{q} = 5/16$ (hors axes). On constate un très bon accord qualitatif et quantitatif entre les prédictions par fonctions de Green (en pointillés et en tiretés) et les simulations (en traits pleins) mais c’est aux temps très courts que l’on obtient le meilleur accord entre les différentes courbes. Par ailleurs, nous présentons des résultats pour une variante de la série 1 avec une température réduite plus faible $\epsilon = 1/3$. C’est la série que nous avons introduite précédemment sous le nom 1 bis et que nous illustrons dans les sous-figures (c) et (d). La comparaison avec les sous-figures (a) et (b) de la série 1 montre que les deux variantes sont très similaires, tout au plus constatons-nous sans surprise

ces modes est bien bien égal à $\bar{q} = 5/16$. Ce mode a été justement choisi pour le « triplet pythagoricien » $5^2 = 3^2 + 4^2$ qui fait correspondre un mode sur l’axe avec les modes hors axes de même nombre d’onde. Pour des raisons d’économie de mémoire sur le disque, nous enregistrons uniquement les 16 modes les plus petits sur chaque axe pour chaque série, c’est la raison pour laquelle nous ne disposons pas du mode $\bar{q} = 5/16$ sur l’axe pour la grille de plus grande taille 128×128 car ce mode est de coordonnées $(\pm 20, 0)$ et $(0, \pm 20)$ sur le réseau numérique. Enfin, notons que le signal de ces modes pythagoriciens a été moyenné sur les 8 modes de même nombre d’onde sur le réseau (et non 4 comme pour les modes sur les axes).

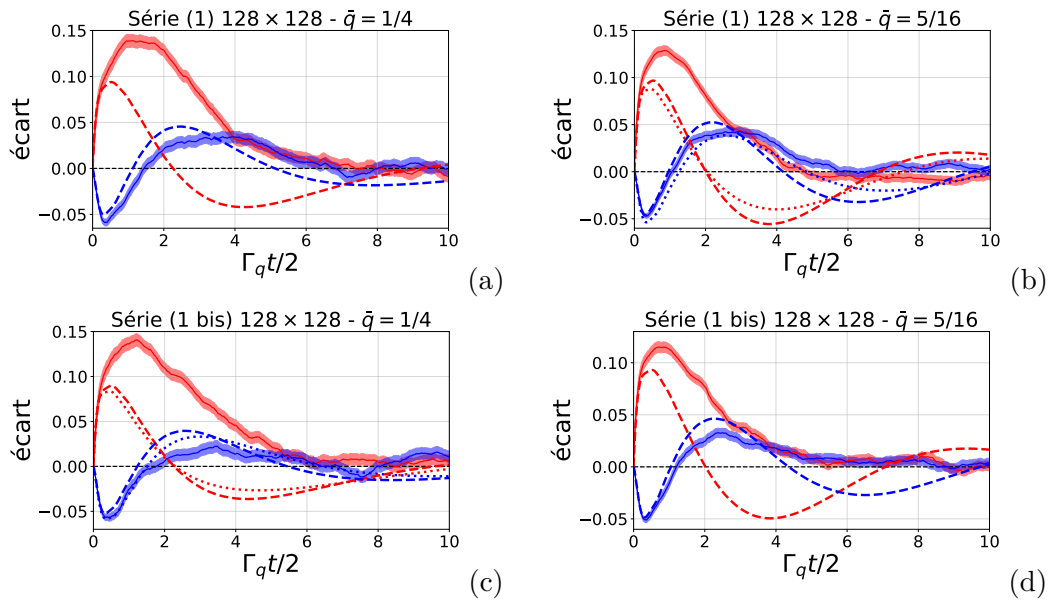


FIGURE 4.4 – Dans la série 1, pour les simulations sur le réseau de 128×128 modes physiques, l'écart à l'approximation du pôle de la fonction de corrélation temporelle (4.1) pour deux modes distincts du réseau. Formes et couleurs des courbes identiques à la figure 4.3, voir sa description ainsi que le texte pour le détail. Par intégration numérique des équations (3.17) et (3.18) du chapitre 3, nous obtenons une prédiction à tous les ordres en ϵ (tiretés) et à l'ordre 2 en ϵ (pointillés). (a) Le signal pour les modes phononiques d'impulsion $\bar{q} = 1/4$. (b) Le signal pour les modes d'impulsion $\bar{q} = 5/16$ et qui se trouvent en dehors des axes du réseau. Les figures (c) et (d) sont l'équivalents de (a) et (b) pour la série 1 bis.

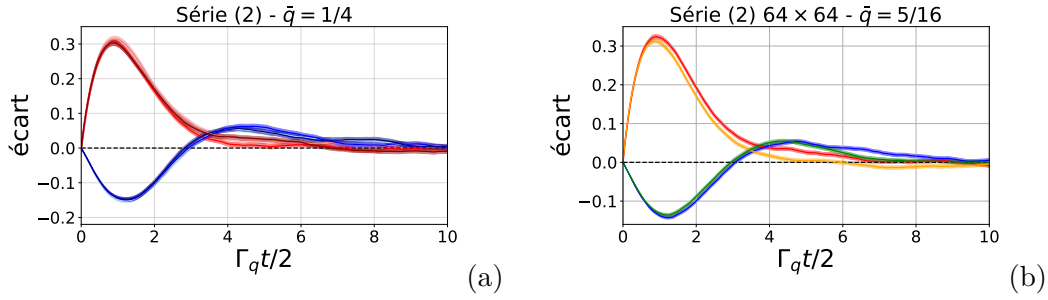


FIGURE 4.5 – Dans la série 2, plusieurs écarts à l’approximation du pôle de la fonction de corrélation temporelle comme dans (4.1) comparés selon la taille du réseau d’une part et la position du mode dans le réseau d’autre part. Formes et couleurs des courbes identiques à la figure 4.3, voir sa description ainsi que le texte pour le détail. (a) Le signal pour les trois sous-séries de tailles différentes pour les modes $\bar{q} = 1/4$ sur les axes du réseau. (b) Le signal des modes de nombre d’onde $\bar{q} = 5/16$ pour la sous-série de taille 64×64 , on compare le signal des modes sur l’axe (rouge et bleu) et les modes hors axes (orange et vert).

que la prédiction de la méthode diagrammatique à l’ordre 2 en ϵ s’accorde moins bien avec celle à tous les ordres dans la série 1 que dans la série 1 bis. Le changement $\epsilon = 1/2 \rightarrow \epsilon = 1/3$ peut ne pas paraître impressionnant mais il faut se rappeler que la courbure du spectre pour le vecteur d’onde adimensionné \bar{q} est en ϵ^2 de mêmes que la plupart des propriétés physiques que nous étudions comme les taux d’amortissement. Cette modification introduit un facteur 2,25 sur ϵ^2 , ce qui n’est pas négligeable. Comme le suggérait le tableau de la section 4.1 qui résume les paramètres, les séries 1 et 1 bis, bien que de paramètres et régime différents, sont toutes les deux profondément dans le régime faiblement collisionnel et on ne constate de fait que peu de différence dans nos simulations. On doit se souvenir des enseignements du chapitre 3 : à l’ordre 2 en ϵ , u est le seul paramètre physique (en plus de ϵ) du système. La série 2 explore justement l’effet d’un changement de ce paramètre sur la dynamique des phonons.

4.4.2 Série 2

La série 2 correspond à un régime d’interactions beaucoup plus fortes que la série 1, puisque son paramètre u est beaucoup moins grand (de $u \simeq 18$ nous passons à $u \simeq 3$). Nous avons déjà fait remarquer que les premiers modes de la grille numérique frôlent le régime hydrodynamique car $\Gamma^{\text{th}}/\omega_{\bar{q}}^{\text{min}} \simeq 1$. Nous représentons sur la figure 4.5 l’écart (4.1) de la fonction de corrélation temporelle à l’approximation du pôle pour chacune des sous-séries de tailles différentes, comme nous l’avons fait précédemment pour la série 1. En premier lieu, nous remarquons que les simulations ont bien mieux convergées avec la taille du système : dans la sous-figure (a) les courbes pour le mode $\bar{q} = 1/4$ pour différentes tailles de la simulation montrent des courbes quasiment indiscernables ; il en va de même dans la sous-figure (b) qui compare le mode $\bar{q} = 5/16$ sur l’axe et hors axe dans les simulations de taille 64×64 . A la différence de la série 1 donc, l’atteinte de la limite thermodynamique est ici manifeste.

La figure 4.6 se concentre sur la sous-série 128×128 et compare les simulations aux

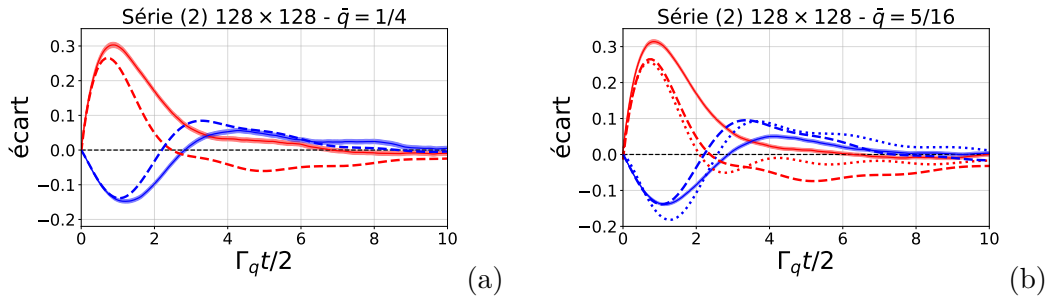


FIGURE 4.6 – Dans la série 2, pour les simulations sur le réseau de 128×128 modes physiques, l'écart à l'approximation du pôle de la fonction de corrélation temporelle comme dans (4.1) pour deux modes distincts du réseau. Formes et couleurs des courbes comme sur la figure 4.3, voir sa légende ainsi que le texte pour plus de détail. Par intégration numérique des équations (3.17) et (3.18) du chapitre 3, nous obtenons une prédiction à tous les ordres en ϵ (tiretés) ou à l'ordre 2 en ϵ (pointillés). (a) Le signal pour les modes phononiques sur les axes de nombre d'onde $\bar{q} = 1/4$. (b) Le signal des modes hors axes de nombre d'onde $\bar{q} = 5/16$.

prédictions diagrammatiques. Les prédictions, à tous les ordres en ϵ (tiretés), s'accordent très bien avec les simulations tandis que celles à l'ordre 2 s'en éloignent (pointillés). Ce bon accord n'était pas gagné d'avance. En effet, comme nous l'avons appris au chapitre 3, les diagrammes que la prédiction par fonctions de Green ignore, même si l'on se restreint à l'ordre ϵ^2 , se différencient par leur ordre en $1/u$. En diminuant u , nous avons donc augmenté la contribution de ces diagrammes sous-dominants, ce qui devrait aggraver l'erreur que fait la méthode diagrammatique à l'ordre 2 en $\bar{H}^{(3)}$. Pourtant, l'accord reste tout aussi bon.

La théorie diagrammatique par fonctions de Green que nous avons testée avec succès par nos simulations pour différents régimes de paramètres peut être adaptée au cas quantique donc être comparée avec des mesures réelles issues des expériences. Nous pensons ainsi avoir établi la capacité de notre schéma numérique à décrire ces superfluides bidimensionnels. C'est un programme informatique d'une grande versatilité à partir duquel nous pouvons explorer d'autres régimes de paramètres. Par exemple, augmenter la taille du système permettrait de sonder la transition vers le régime hydrodynamique. Une autre direction directement accessible sans avoir à adapter le programme serait d'explorer le cas concave $\gamma < 0$ où ce sont désormais les diagrammes d'ordre 4 en $\bar{H}^{(3)}$ qui caractérisent la dynamique dissipative, les diagrammes d'ordre 2 ayant une contribution purement réelle à la fonction énergie propre dans l'approximation du pôle.

4.5 Conclusion de la deuxième partie

Nous avons effectué des simulations basées sur l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov pour étudier l'amortissement des phonons dans un gaz de bosons bidimensionnel dans le régime superfluide et de basse température. Les simulations ont montré un écart significatif à la décroissance exponentielle prédite par la règle d'or de Fermi même à basse température. C'est un comportement surprenant et différent du cas tridimensionnel où la règle d'or de Fermi devient exacte dans la limite où la température tend vers zéro. Dans

le chapitre 3, nous avons utilisé la méthode diagrammatique des fonctions de Green à N corps pour étudier la dynamique phononique du système. Par cette méthode, nous obtenons une prédiction à l'ordre 2 en l'hamiltonien d'interaction $H^{(3)}$ (cubique en les opérateurs de création et annihilation des phonons) qui confirme qualitativement l'écart à la règle d'or de Fermi visible dans les simulations, menées elles à tous les ordres en $H^{(3)}$. Par ailleurs, la méthode diagrammatique nous informe que, à deux dimensions, la règle d'or de Fermi ne devient pas exacte dans la limite de très basse température et suggère l'existence d'un second « petit paramètre » nécessaire pour sa validité.

La caractérisation de cet écart est un résultat nouveau, à notre connaissance, et se situe dans un régime proche d'observations expérimentales récentes dans des gaz bidimensionnels d'atomes froids [14, 15, 16].

Bibliographie

- [1] N. D. MERMIN et H. WAGNER. “Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models”. In : *Physical Review Letters* 17 (nov. 1966), p. 1133-1136. DOI : [10.1103/PhysRevLett.17.1133](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.17.1133).
- [2] V L BEREZINSKII. “Destruction of Long-Range Order in One Dimensional and Two Dimensional Systems possessing a Continuous Symmetry Group. II. Quantum Systems”. en. In : *Soviet Physics JETP* 34 (sept. 1971), p. 7.
- [3] J. M. KOSTERLITZ et D. J. THOULESS. “Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems”. en. In : *Journal of Physics C: Solid State Physics* 6 (avr. 1973), p. 1181-1203. ISSN : 0022-3719. DOI : [10.1088/0022-3719/6/7/010](https://doi.org/10.1088/0022-3719/6/7/010).
- [4] D. J. BISHOP et J. D. REPPY. “Study of the superfluid transition in two-dimensional 4 He films”. In : *Phys. Rev. Lett.* 40 (1978), p. 1727.
- [5] I.M. Khalatnikov et D.M. CHERNIKOVA. “Relaxation Phenomena in Superfluid Helium”. In : *ZhETF* 49 (juin 1966), p. 1957.
- [6] Charles D. H. Williams et Adrian F. G. Wyatt DAMIAN H. S. SMITH Ruslan V. Vovk. “Pressure dependence of phonon interactions in liquid 4 He”. In : *Phys. Rev. B* 72 (août 2005), p. 054506.
- [7] et E. Witkowska A. SINATRA Y. Castin. “Coherence time of a Bose-Einstein condensate”. In : *Phys. Rev. A* 80 (sept. 2009), p. 033614.
- [8] G. E. VOLOVIK. “Superfluid analogies of cosmological phenomena”. en. In : *Physics Reports* 351 (sept. 2001), p. 195-348. ISSN : 0370-1573. DOI : [10.1016/S0370-1573\(00\)00139-3](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00139-3).
- [9] Carlos BARCELÓ, Stefano LIBERATI et Matt VISSER. “Analogue Gravity”. en. In : *Living Reviews in Relativity* 14 (mai 2011), p. 3. ISSN : 1433-8351. DOI : [10.12942/lrr-2011-3](https://doi.org/10.12942/lrr-2011-3).
- [10] L. J. GARAY et al. “Sonic Analog of Gravitational Black Holes in Bose-Einstein Condensates”. In : *Physical Review Letters* 85 (nov. 2000), p. 4643-4647. DOI : [10.1103/PhysRevLett.85.4643](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.4643).
- [11] Pieter van WYK et al. “Superfluid Fermi atomic gas as a quantum simulator for the study of the neutron-star equation of state in the low-density region”. In : *Phys. Rev. A* 97 (1 jan. 2018), p. 013601. DOI : [10.1103/PhysRevA.97.013601](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.97.013601).
- [12] M. H. ANDERSON et al. “Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor”. In : *Science* 269 (1995), p. 198-201. DOI : [10.1126/science.269.5221.198](https://doi.org/10.1126/science.269.5221.198). eprint : <https://www.science.org/doi/pdf/10.1126/science.269.5221.198>.

- [13] Alexander L. GAUNT et al. “Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential”. In : *Phys. Rev. Lett.* 110 (20 mai 2013), p. 200406. DOI : [10.1103/PhysRevLett.110.200406](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.110.200406).
- [14] J. L. VILLE et al. “Sound Propagation in a Uniform Superfluid Two-Dimensional Bose Gas”. In : *Physical Review Letters* 121 (oct. 2018), p. 145301. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.145301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.145301).
- [15] Panagiotis CHRISTODOULOU et al. “Observation of first and second sound in a BKT superfluid”. en. In : *Nature* 594 (juin 2021), p. 191-194. ISSN : 1476-4687. DOI : [10.1038/s41586-021-03537-9](https://doi.org/10.1038/s41586-021-03537-9).
- [16] Markus BOHLEN et al. “Sound Propagation and Quantum-Limited Damping in a Two-Dimensional Fermi Gas”. In : *Phys. Rev. Lett.* 124 (24 juin 2020), p. 240403. DOI : [10.1103/PhysRevLett.124.240403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.240403).
- [17] A. CAPPELLARO, F. TOIGO et L. SALASNICH. “Collisionless dynamics in two-dimensional bosonic gases”. In : *Physical Review A* 98 (oct. 2018), p. 043605. DOI : [10.1103/PhysRevA.98.043605](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.98.043605).
- [18] Miki OTA et al. “Collisionless Sound in a Uniform Two-Dimensional Bose Gas”. In : *Physical Review Letters* 121.14 (oct. 2018), p. 145302. DOI : [10.1103/PhysRevLett.121.145302](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.145302).
- [19] L.D. LANDAU et I.M. KHALATNIKOV. “The theory of the viscosity of Helium II: II. Calculation of the viscosity coefficient”. In : *Journal of Experimental and Theoretical Physics* 19 (1949), p. 709.
- [20] P. O. FEDICHEV et G. V. SHLYAPNIKOV. “Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas”. In : *Physical Review A* 58 (oct. 1998), p. 3146-3158. DOI : [10.1103/PhysRevA.58.3146](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.58.3146).
- [21] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA. “Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas”. In : *Annalen der Physik* 529 (2017), p. 1600352. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.201600352](https://doi.org/10.1002/andp.201600352).
- [22] Hadrien KURKJIAN, Yvan CASTIN et Alice SINATRA. “Brouillage thermique d’un gaz cohérent de fermions”. fr. In : *Comptes Rendus Physique. Quantum microwaves / Microondes quantiques* 17 (août 2016), p. 789-801. ISSN : 1631-0705. DOI : [10.1016/j.crhy.2016.02.005](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2016.02.005).
- [23] D.T. SON et M. WINGATE. “General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics: Unitary Fermi gas.” In : *Ann. Physics* 321 (2006), p. 197-224.
- [24] J. Dupont-Roc C. COHEN-TANNOUJDI et G. GRYNBERG. *Processus d’interaction entre photons et atomes*. 1988.
- [25] Y. Castin A. SINATRA et E. WITKOWSKA. “Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature”. In : *Phys. Rev. A* 75 (mars 2007), p. 033616.
- [26] Ming-Chiang CHUNG et Aranya B. BHATTACHERJEE. “Damping in 2D and 3D dilute Bose gases”. en. In : *New Journal of Physics* 11 (déc. 2009), p. 123012. ISSN : 1367-2630. DOI : [10.1088/1367-2630/11/12/123012](https://doi.org/10.1088/1367-2630/11/12/123012).

- [27] Paul Adrien Maurice DIRAC. “The quantum theory of the emission and absorption of radiation”. In : *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 114 (mars 1927), p. 243-265. DOI : [10.1098/rspa.1927.0039](https://doi.org/10.1098/rspa.1927.0039).
- [28] Daisuke T. *FFTE: A Fast Fourier Transform Package*. 2020. URL : <http://www.ffte.jp/>.
- [29] Fetter A. L. et WALECKA D. J. *Quantum Theory of Many-Particle Systems*. 1971.
- [30] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA. “Three-Phonon and Four-Phonon Interaction Processes in a Pair-Condensed Fermi Gas”. In : *Annalen der Physik* 529 (2017), p. 1600352. ISSN : 1521-3889. DOI : [10.1002/andp.201600352](https://doi.org/10.1002/andp.201600352).

Résumé

Dans une première partie, nous étudions la possibilité d'obtenir des états comprimés de spin nucléaire dans un gaz d'hélium 3 à température ambiante en cellule par mesure quantique non destructive en continu. Comme les atomes dans l'état fondamental interagissent très peu avec l'environnement, nous les couplons à une faible fraction d'atomes dans l'état métastable par des collisions d'échange de métastabilité, ces derniers pouvant interagir avec un champ électromagnétique en cavité. Nous avons considéré deux configurations dans lesquelles on mesure un nombre de photons ou une quadrature du champ en sortie de la cavité. Nous prédisons qu'une compression significative du spin nucléaire de très longue durée de vie pourrait être ainsi obtenue avec des valeurs des paramètres à la portée d'une expérience.

Dans une seconde partie, nous étudions, à température non nulle, l'amortissement des modes de phonons dans un superfluide bidimensionnel d'atomes froids bosoniques ou d'hélium 4 liquide. À cette fin, nous utilisons un hamiltonien effectif de basse énergie, celui de l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov qui vaut même dans le régime d'interactions fortes pour peu que l'on connaisse l'équation d'état du système dans son état fondamental. Par des simulations de champ classique très précises, à notre connaissance jamais effectuées pour ce type d'hamiltonien, nous mettons en évidence des écarts significatifs à la décroissance exponentielle prédite par la règle d'or de Fermi, contrairement à ce qui se passe dans le cas tridimensionnel. Ces résultats sont confirmés par la méthode diagrammatique des fonctions de Green à N corps (dans son domaine de validité que nous précisons) et nous semblent accessibles à une vérification expérimentale.

Mots-clés Métrologie quantique, compression de spin, spin nucléaire, hélium 3, mesure quantique non destructive en continu, fonction d'onde Monte-Carlo.
Condensat de Bose-Einstein bidimensionnel, superfluide, amortissement des phonons, hydrodynamique quantique, processus Landau-Beliaev, fonction de Green à N corps.

Abstract

In a first part, we study the possibility of obtaining nuclear spin squeezing in a room temperature helium-3 gas in a cell by continuous quantum non-demolition measurement. As atoms in the ground state interact very little with the environment, we couple them to a small fraction of atoms in the metastable state by metastability exchange collisions, the latter being able to interact with an electromagnetic field in an optical cavity. We have considered two configurations in which either a photon number or a quadrature of the field at the cavity output is measured. We predict that a significant very long-lived squeezing of the nuclear spin could be obtained in this way with experimentally feasible parameter values.

In a second part, we study, at non-zero temperature, the damping of phonon modes in a two-dimensional superfluid of cold bosonic atoms or liquid helium-4. For this purpose, we use an effective low-energy Hamiltonian, the Landau-Khalatnikov quantum hydrodynamics Hamiltonian, which holds even in the strong interaction regime as long as the equation of state of the system in its ground state is known. By means of very precise classical field simulations, to our knowledge never carried out for this type of Hamiltonian, we highlight significant deviations from the exponential decay predicted by Fermi's golden rule, contrary to what happens in the three-dimensional case. These results are confirmed by the diagrammatic method of many-body Green's functions (in its domain of validity that we specify) and seem accessible to experimental verification.

Keywords Quantum metrology, spin squeezing, nuclear spin, helium 3, continuous quantum non-destructive measurement, Monte-Carlo wave functions.
Bose-Einstein condensate in 2D, superfluid, phonons damping, quantum hydrodynamic, Landau-Beliaev process, many-body Green functions.