



**HAL**  
open science

# Compactification des espaces de modules en géométrie torique quantique

Antoine Boivin

► **To cite this version:**

Antoine Boivin. Compactification des espaces de modules en géométrie torique quantique. Combinatoire [math.CO]. Université d'Angers, 2022. Français. NNT : 2022ANGE0047 . tel-04006185

**HAL Id: tel-04006185**

**<https://theses.hal.science/tel-04006185>**

Submitted on 27 Feb 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITÉ D'ANGERS  
COMUE UNIVERSITÉ BRETAGNE LOIRE

ÉCOLE DOCTORALE N° 601  
*Mathématiques et Sciences et Technologies  
de l'Information et de la Communication*  
Spécialité : Mathématiques et leurs interactions

Par

**Antoine BOIVIN**

**« Compactification des espaces de modules en géométrie torique  
quantique »**

Thèse présentée et soutenue à l'Université d'ANGERS, le 30 novembre 2022  
Unité de recherche : LAREMA, UMR CNRS 6093  
Thèse N° : 226076

## Rapporteurs avant soutenance :

Carlos SIMPSON Directeur de recherche CNRS, Université de Nice.  
Lev BORISOV Professor, Rutgers University.

## Composition du Jury :

|                      |                    |  |
|----------------------|--------------------|--|
| Président :          | Étienne MANN       | Professeur des Universités, Université d'Angers. |
| Examineurs :         | Denis AUROUX       | Professor, Harvard University.                   |
|                      | Lev BORISOV        | Professor, Rutgers University.                   |
|                      | Ludmil KATZARKOV   | Professor, Miami University.                     |
|                      | Ernesto LUPERCIO   | Professor, Cinvestav-IPN.                        |
|                      | Étienne MANN       | Professeur des Universités, Université d'Angers. |
|                      | Cristina MANOLACHE | Senior Lecturer, University of Sheffield.        |
|                      | Carlos SIMPSON     | Directeur de recherche CNRS, Université de Nice. |
| Directeur de thèse : | Laurent MEERSSEMAN | Professeur des Universités, Université d'Angers. |



# RÉSUMÉ

---

Le but de cette thèse est de continuer l'étude des champs toriques quantiques introduits par L.KATZARKOV, E.LUPERCIO, L.MEERSEMAN et A.VERJOVSKY. Ce sont des champs analytiques d'Artin définis grâce aux recollements, décrits par les cônes (non nécessairement rationnels) d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$ , de quotients d'un espace affine par un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$ .

Contrairement aux variétés toriques qui sont rigides à cause de la rationalité des éventails les définissant, les champs toriques quantiques peuvent être déformés continûment. Dans leurs articles, ils ont étendu l'équivalence géométrie-combinatoire des variétés toriques aux champs toriques quantiques définis par un éventail simplicial. En utilisant cela, ils ont défini et étudié les espaces de modules des champs toriques à combinatoire de l'éventail fixé.

Dans un premier temps, nous montrons que ces espaces de modules sont le quotient d'un ouvert semi-algébrique par un groupe fini et qu'ils sont la base d'une famille universelle de champs toriques quantiques. Nous proposons ensuite une construction d'une compactification combinatoire de ces espaces de modules, grâce à un plongement dans une variété grassmannienne, avec une extension de la famille universelle qui est décrite par les dégénérescences de la combinatoire initiale.

Dans un deuxième temps, nous étendons la construction de champs toriques quantiques à des éventails quelconques et montrons que cela étend l'équivalence géométrie-combinatoire précédemment citée. Grâce à cela, nous pouvons utiliser les éventails secondaires introduits par I.GELFAND, M.KAPRANOV et A.ZELEVINSKY dans le cadre quantique. Cela permet de décrire des passages de murs entre champs toriques quantiques de combinatoire différente. Cela définit donc des morphismes birationnels entre eux (que l'on peut aussi décrire de façon combinatoire). La souplesse du cadre quantique nous permet même d'obtenir des familles continues entre deux champs toriques reliés par un passage de murs qui passe par un champ torique donné par un éventail non-simplicial (le « mur »).

Tout cela nous permet de définir un « espace de modules augmenté » défini par deux paramètres : le premier paramétrant les générateurs des cônes de l'éventail (lorsqu'on le fixe, on bouge dans l'éventail secondaire) et le deuxième paramétrant la combinatoire (lorsqu'on le fixe, on bouge dans les espaces de modules). Le travail sur la compactification des espaces de modules nous permet aussi de compactifier cet espace de modules augmenté avec sa famille universelle.



# REMERCIEMENTS

---

Il est maintenant temps de faire un bilan de ces trois ans de thèse. Voici donc le traditionnel moment des remerciements :

Ils commencent évidemment par la personne sans laquelle ce manuscrit n'aurait pas vu le jour : mon directeur de thèse Laurent MEERSSEMAN. Merci beaucoup de m'avoir suivi pendant tout le master puis pendant ces trois années de thèse. Merci de m'avoir proposé ce sujet, pour tous ces conseils et les relectures de mes essais mathématiques. Enfin merci pour avoir toujours su trouver du potentiel dans mes explications parfois fouillées.

Je voudrais ensuite remercier Lev BORISOV et Carlos SIMPSON pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je souhaite aussi remercier les autres membres du jury : Denis AUROUX, Ludmil KATZARKOV, Ernesto LUPERCIO, Étienne MANN et Cristina MANOLACHE. Je remercie également Ernesto LUPERCIO pour avoir suivi ce travail depuis le début et pour toutes les discussions mathématiques que l'on a pu avoir et Ludmil KATZARKOV pour m'avoir invité à la conférence Homological Mirror Symmetry à Miami.

Je tiens ensuite à remercier tous les membres du LAREMA pour m'avoir accueilli pendant ces quatre ans et tout particulièrement tous mes enseignants de Licence et de Master. Je voudrais à nouveau remercier Étienne pour m'avoir aidé depuis la L3 et jusqu'à avoir accepté d'être président du jury de ma thèse, notamment par tes explications dans des points ardu de géométrie algébrique et de la vie universitaire. Merci aussi à Daniel pour ton aide pour le TikZ (notamment pour la figure 1.6) et pour tous ces cours que l'on a partagé. Merci à Mattia pour nous avoir fait découvrir Love e Basta. Merci à Laurent ÉVAIN pour avoir organisé le GTT. Je voudrais ensuite remercier Alexandra pour sa bonne humeur et pour son aide en toute circonstance pour gérer toute sorte de formalités administratives. Merci Denis pour toutes nos discussions matinales.

Vient maintenant le moment de remercier un élément crucial dans l'accomplissement de cette thèse : l'équipe de doctorants (/post-doctorants/ATER). Commençons par les « anciens ». Merci à Johan pour ce super cours que tu as donné quand j'étais L2 et de m'avoir rassuré sur le monde, à première vue effrayant, des catégories. Merci à Alexis pour cette mémorable explication des invariants de Gromov-Witten et de tous les conseils que tu m'as donné en début de thèse. Merci à Ann pour m'avoir officiellement accueilli en thèse. Passons maintenant ceux avec qui j'ai partagé le quotidien de la thèse. Merci à Théo, mon « grand frère de thèse », qui m'a permis de m'intégrer dans le laboratoire, pour toutes ces conversations (pendant mes régulières invasions du bureau I106) sur toute sorte de sujets, de m'expliquer le mystérieux monde des représentations (en remplissant mon tableau de  $\rho$ ,  $\text{Ad}$ ,  $\text{SL}_2(\mathbb{C})$ ,  $\mathfrak{sl}$ ,...) et des toujours très raisonnables petits-déjeuners partagés au Quimpériodique. Merci à David, mon cobureau champêtre, pour avoir partagé le bureau Emmy NOETHER pendant ces deux années, pour toutes ces discussions mathématiques et notamment pour avoir toujours été là pour m'assister dans mes pérégrinations  $n\text{Labesque}$ , pour m'avoir convaincu de la nécessité d'utiliser un peu d'abstraction et pour finir, pour toutes ces pizzas. Merci à Ouriel pour toutes tes tentatives pour nous/m'apprendre le bridge, les paroles de « Vent frais »

et de « Drunken Sailor » ou, plus modestement, les modules instables sur l'algèbre de Steenrod et les calculs d'invariants de  $H^*(BW)$ , son aide pour la propagande sur Dishonored et, pour finir, ton soutien sans faille pendant la fin de la rédaction de la thèse. Merci à Axel pour tes explications sur la théorie de Hodge et de la géométrie complexe. Merci à Sofia pour ta bonne humeur si communicative. Merci à François<sup>1</sup> pour toutes les discussions mathématiques (du mystérieux « cas projectif » à notre futur article commun), notre co-organisation du séminaire des doctorants et de ses grands talents de blagueur et de graphiste. Promis, un jour, on comprendra les règles de la rondade à l'italienne et on jouera ensemble à Overwatch. Merci à Maxime (pas encore Ayçgéea), tout d'abord pour m'avoir accueilli à Nantes lors de notre M2 puis pour toutes nos discussions matinales où on essayait de s'expliquer nos problèmes autour d'un café. Merci à eux deux pour avoir accepté de si nombreuses invasions<sup>2</sup> de leur bureau par David et moi. Merci à Eunice pour toutes nos discussions (rarement mathématiques). Merci à Thomas pour toutes les soirées que l'on a pu partager, ton soutien pendant la rédaction de ma thèse et pour avoir assez de patience pour m'expliquer ce que tu fais. Merci à Thibault pour avoir relayé David comme cobureau, pour supporter mes râleries régulières sur toute sorte de sujets et ta grande maîtrise des milk-shakes. Merci à Aurore pour amener de la bonne humeur dans notre bureau. Merci à Mohamed pour tes anecdotes toujours aussi distrayantes. Merci à Liana pour ton cours aux Lectures Sophie KOWALEVSKI qui a inspiré un des chapitres de cette thèse et pour ton soutien pendant la fin de cette rédaction. Maintenant, je voudrais remercier les deux doctorants émérites du laboratoire : le chaotique Sinan<sup>3</sup> pour toutes les discussions rôlistico-politico-mathématiques (et parfois tout ça en même temps) et en particulier pour avoir pris le relais de, respectivement, Ouriel et David pour les deux dernier sujets, les sorties au bar et tes nombreuses blagues et le manuel-et-musclé Jean-Baptiste (maintenant officiellement titularisé) pour toutes tes énigmes, ton aide au laboratoire (et notamment de faire porter la voix des doctorants) et les mémorables soirées raclette/crêpes - Dominion. Pour finir, je voudrais profiter de ces mots pour souhaiter aux « petits nouveaux », Théo, Clément et Marie, bon courage pour votre thèse à venir. Je voudrais aussi remercier toutes les personnes que j'ai pu apprendre à connaître au fil de ces années : Adrian, Alice, Agnès B., Agnès M., Gaby, Titouan, Victor.

Je voudrais ensuite aussi remercier toutes les autres personnes qui ont été dans ma vie pendant ces trois années. Merci à Alexandre pour toute ton aide informatique (jusqu'à la compilation parfois compliquée de cette thèse), pour m'écouter parler de géométrie algébrique/catégories et de supporter ma nullité dans les jeux auxquels on joue depuis tant de temps. Merci à Mathieu pour toutes ces fois où tu m'as convaincu de sortir de chez moi pour venir jouer, pour toutes ces discussions, pour tout ce que tu m'as appris et pour tes conseils littéraires et vidéoludiques toujours au poil. Merci à Adrien (avec qui je lis des livres « intéressants »), Alexis, Aurélien, Dimitri, Guillaume, Julia, Louna, Nicolas, Pierrick pour tous ces week-ends de jeux de plateaux/de rôles, de discussions et autres sorties groupées.

Pour finir, je voudrais remercier mes parents Géraldine et Patrick, mon frère Alexandre et ma sœur Clémence pour leur amour, leur confiance et leur soutien infaillible (jusqu'à la relecture de ce manuscrit !) pendant toutes ces années.

Merci à tous et à toutes !

Antoine.

---

1. Je voudrais préciser que ces remerciements ont été écrits avant sa soutenance.  
2. Encore ??  
3. Je vous laisse deviner...







*'Habe nun, ach! Philosophie,  
Juristerei und Medizin,  
Und leider auch Theologie!  
Durchaus studiert, mit heißem Bemühn.  
Da steh' ich nun ich armer Tor!  
Und bin so klug als wie zuvor;  
Heiße Magister, heiße Doktor gar  
Und ziehe schon an die zehen Jahr,  
Herauf, herab und quer und krumm,  
Meine Schüler an der Nase herum –  
Und sehe, daß wir nichts wissen können!  
Das will mir schier das Herz verbrennen. '*  
(Johann Wolfgang von Goethe, *Faust*)

# TABLE DES MATIÈRES

---

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Notations</b>  | <b>XVII</b> |
| <b>Introduction</b>   | <b>1</b>    |
| 1 Aperçu historique . . . . .   | 1           |
| 2 Contenu du manuscrit . . . . .  | 3           |
| 2.1 Révision de la littérature . . . . .  | 4           |
| 2.2 Contributions . . . . .   | 4           |
| <b>1 Géométrie torique classique</b>  | <b>9</b>    |
| 1.1 Variétés toriques . . . . .   | 9           |
| 1.1.1 Tores . . . . .   | 9           |
| 1.1.2 Premières définitions . . . . .   | 11          |
| 1.1.3 Construction combinatoire des variétés toriques . . . . .                 | 12          |
| 1.1.3.1 Cônes . . . . .   | 12          |
| 1.1.3.2 Variétés toriques . . . . .   | 14          |
| 1.1.3.3 Éventails et variétés toriques . . . . .                                | 16          |
| 1.1.4 Éclatement . . . . .  | 17          |
| 1.1.5 Quotient global . . . . .   | 18          |
| 1.2 Variétés toriques et polytopes . . . . .                                    | 20          |
| 1.2.1 Polytopes . . . . .   | 21          |
| 1.2.2 Variétés toriques projectives et polytopes . . . . .                      | 23          |
| <b>2 Théorie des champs</b>   | <b>25</b>   |
| 2.1 Sites et faisceaux . . . . .  | 26          |
| 2.1.1 Problèmes de modules . . . . .  | 26          |
| 2.1.2 Définitions . . . . .   | 27          |
| 2.1.2.1 Sites . . . . .   | 27          |
| 2.1.2.2 Faisceaux . . . . .   | 28          |
| 2.1.2.3 Le site analytique équivariant . . . . .                                | 29          |
| 2.1.3 Une classe d'exemples de faisceaux : les espaces difféologiques . . . . . | 30          |
| 2.1.4 Automorphismes dans les problèmes de modules . . . . .                    | 31          |
| 2.2 2-catégories . . . . .  | 32          |
| 2.2.1 Définitions . . . . .   | 32          |
| 2.2.2 Groupoïdes . . . . .  | 35          |
| 2.3 Champs . . . . .  | 39          |
| 2.3.1 Généralités . . . . .   | 39          |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| 2.3.2    | Propriétés géométriques  | 42         |
| 2.4      | Champs géométriques  | 43         |
| 2.4.1    | Construction de champs à partir de groupoïde   | 43         |
| 2.4.2    | Champs analytiques   | 47         |
| 2.5      | Topologie des champs   | 52         |
| 2.5.1    | Espace topologique associé à un champ  | 52         |
| 2.5.2    | Théorie de l'homotopie d'un champ topologique  | 53         |
| 2.6      | Faisceaux sur des champs   | 56         |
| 2.6.1    | Définitions générales  | 56         |
| 2.6.2    | Cas des champs quotients   | 57         |
| 2.7      | Groupes champêtres   | 59         |
| 2.7.1    | Champs de Picard   | 59         |
| 2.7.2    | Actions de groupes sur des champs  | 61         |
| 2.8      | Gerbes   | 63         |
| <b>3</b> | <b>Géométrie torique quantique</b>   | <b>67</b>  |
| 3.1      | Variétés toriques généralisées   | 67         |
| 3.1.1    | Champs de Deligne-Mumford toriques lisses  | 68         |
| 3.1.2    | Quasifoldes toriques   | 69         |
| 3.1.3    | Champs symplectiques toriques  | 70         |
| 3.2      | Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$   | 71         |
| 3.3      | Tores quantiques   | 72         |
| 3.4      | Champs toriques quantiques   | 76         |
| 3.4.1    | Cartes affines   | 76         |
| 3.4.2    | Recollement  | 79         |
| 3.5      | Oubli de la calibration  | 83         |
| 3.6      | Quotient global  | 85         |
| <b>4</b> | <b>Espaces de modules de champs toriques</b>   | <b>89</b>  |
| 4.1      | Définitions et premiers résultats  | 89         |
| 4.2      | Semi-algèbricité de $\Omega$   | 91         |
| 4.3      | Cas polytopal  | 94         |
| 4.4      | Automorphismes d'ensembles partiellement ordonnés                                    | 96         |
| 4.5      | Exemples   | 98         |
| 4.5.1    | Cohomologie des groupes  | 99         |
| 4.5.2    | Espaces projectifs   | 100        |
| 4.5.3    | Surfaces de Hirzebruch   | 100        |
| 4.5.4    | $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$   | 101        |
| <b>5</b> | <b>Compactification des espaces de modules de champs toriques et dégénérescences</b> | <b>103</b> |
| 5.1      | Grassmanniennes  | 103        |
| 5.2      | Passage au quotient des actions de groupes   | 107        |
| 5.3      | Notations  | 110        |
| 5.4      | Familles universelles  | 110        |
| 5.5      | Compactifications  | 113        |
| 5.5.1    | Compactification de l'espace de modules  | 113        |
| 5.5.2    | Construction de l'extension de la famille universelle                                | 115        |
| 5.6      | Exemples   | 119        |
| 5.6.1    | Espaces projectifs   | 119        |

|           |  |            |
|-----------|--|------------|
| 5.6.2     | Exemple de la dimension 2                                    | 120        |
| 5.6.3     | Exemple avec 4 générateurs                                   | 124        |
| <b>6</b>  | <b>Champs toriques quantiques non-simpliciaux</b>            | <b>129</b> |
| 6.1       | Cônes non-simpliciaux  | 129        |
| 6.2       | Tores quantiques présentés                                   | 131        |
| 6.3       | Définition des champs toriques quantiques (non-simpliciaux)  | 133        |
| 6.3.1     | Champs toriques quantiques affines                           | 133        |
| 6.3.1.1   | Cônes de dimension $d$                                       | 134        |
| 6.3.1.2   | Cônes de dimension $k < d$                                   | 136        |
| 6.3.1.3   | Morphismes toriques entre champs toriques quantiques affines | 138        |
| 6.3.2     | Champs toriques quantiques                                   | 142        |
| 6.3.2.1   | Définitions  | 142        |
| 6.3.2.2   | Morphismes toriques  | 143        |
| 6.4       | Construction TGI   | 144        |
| 6.5       | Oubli de la calibration et structure de gerbe                | 145        |
| <b>7</b>  | <b>Deuxième construction non-simpliciale</b>                 | <b>151</b> |
| 7.1       | Définition   | 151        |
| 7.2       | Équivalence de catégories                                    | 152        |
| 7.3       | Différences  | 154        |
| <b>8</b>  | <b>Morphismes birationnels : Éclatements</b>                 | <b>157</b> |
| 8.1       | Morphismes birationnels                                      | 157        |
| 8.1.1     | Éclatement en dimension 2                                    | 158        |
| 8.1.2     | Cas général  | 158        |
| 8.2       | Éclatements rationnels                                       | 159        |
| 8.2.1     | Description des fibres                                       | 159        |
| 8.2.2     | Poids entiers  | 162        |
| 8.2.3     | Cas rationnel  | 164        |
| 8.3       | Éclatements  | 165        |
| 8.3.1     | Éclatements d'un point                                       | 165        |
| 8.3.2     | Éclatement d'une sous-variété                                | 168        |
| 8.3.3     | Flip d'Atiyah  | 169        |
| 8.3.3.1   | Rappel sur le cas classique                                  | 170        |
| 8.3.3.2   | Cas quantique  | 170        |
| 8.4       | Décomposition des morphismes birationnels                    | 171        |
| <b>9</b>  | <b>Cobordismes</b>   | <b>173</b> |
| 9.1       | Polytopes et intersection de quadriques                      | 173        |
| 9.2       | Cobordismes de polytopes et chirurgie                        | 175        |
| 9.3       | Cobordismes d'éventails                                      | 178        |
| <b>10</b> | <b>Fibrés</b>  | <b>187</b> |
| 10.1      | Changements de site et groupes de Picard                     | 187        |
| 10.2      | Fibrés en droites d'un champ torique quantique               | 188        |
| 10.3      | Fibrés au-dessus d'un espace projectif quantique             | 191        |
| 10.3.1    | Fibrés en droites  | 191        |
| 10.3.2    | Fibrés projectifs  | 193        |
| 10.4      | Diviseurs  | 197        |

---

|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 10.4.1    | Rappel du cas rationnel                           | 197        |
| 10.4.2    | Cas quantique                                     | 198        |
| <b>11</b> | <b>Éventail secondaire</b>                        | <b>201</b> |
| 11.1      | Exemple introductif : les surfaces d'Hirzebruch   | 201        |
| 11.2      | Construction d'éventails quantiques à paramètre   | 203        |
| 11.3      | Éventails secondaires                             | 205        |
| 11.4      | Exemples  | 207        |
| 11.5      | Cas classique                                     | 212        |
| 11.6      | Passages de murs                                  | 215        |
| 11.7      | Flips et cobordismes                              | 216        |
| 11.8      | Flips et espaces projectifs                       | 218        |
| <b>12</b> | <b>Espaces de modules augmentés</b>               | <b>223</b> |
| 12.1      | Construction de la famille universelle            | 223        |
| 12.2      | Recollement des espaces de modules                | 225        |
| 12.3      | Compactification des espaces de modules augmentés | 230        |
|           | <b>Publication</b>                                | <b>233</b> |

# TABLE DES FIGURES

---

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1   | Récapitulatif   | 8   |
| 1.1 | Le cône $\sigma$ et son dual $\sigma^\vee$  | 13  |
| 1.2 | Cône $\sigma^\vee = \text{Cone}(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_1)$ pour $d = 4$                               | 14  |
| 1.3 | Un exemple d'éventail   | 16  |
| 1.4 | Éclatement du plan à l'origine  | 18  |
| 1.5 | Éclatement de la droite $0 \times 0 \times \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^3$  | 18  |
| 1.6 | Solides de Platon   | 21  |
| 1.7 | $\text{Conv}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)$                | 23  |
| 2.1 | Famille universelle   | 26  |
| 4.1 | Contre-exemple éventails polypaux/calibration   | 95  |
| 4.2 | Graphe cyclique et éventail   | 98  |
| 4.3 | Le « livre pentagonal » et une de ses dégénérescences   | 98  |
| 5.1 | Éventail associé à $D'_1$   | 116 |
| 5.2 | Dégénérescences en dimension 2  | 120 |
| 5.3 | Carte $\mathbf{U}_{(1,3)}$  | 124 |
| 5.4 | Carte $\mathbf{U}_{(2,4)}$  | 125 |
| 6.1 | Un cône de dimension 3 ayant 5 côtés  | 130 |
| 6.2 | Le cône $\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$             | 130 |
| 6.3 | Le cône $\sigma = \text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, a\mathbf{e}_1 - b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3)$ | 136 |
| 6.4 | Le polytope associé à l'éventail $\Delta$   | 145 |
| 8.1 | Éclatement du plan à l'origine  | 158 |
| 8.2 | Flip d'Atiyah classique   | 169 |
| 9.1 | Triangle coupé  | 174 |
| 9.2 | Cobordisme entre le triangle et le carré  | 176 |
| 9.3 | Le cube et le livre pentagonal  | 176 |
| 9.4 | Polytope de transition  | 176 |
| 9.5 | Polytope de catastrophe   | 176 |
| 9.6 | Cobordisme entre l'éventail de $\mathbb{P}^2$ et son éclaté en un point   | 180 |
| 9.7 | Le cône $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$   | 183 |
| 9.8 | Le cône $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$ éclaté  | 184 |
| 9.9 | Les projections des cônes de $\Delta_0$ et des cônes de $\Delta_1$ reliés au cône maximal du cobordisme                 | 184 |

---

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 9.10  | Diagramme de morphismes birationnels du cobordisme . . . . .  | 184 |
| 9.11  | Déformation du cobordisme entre le triangle et le triangle coupé . . . . .  | 185 |
| 10.1  | Fibrés en droites $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^1}(\alpha)$ pour $\alpha < 0$ et $\alpha > 0$ . . . . .                              | 192 |
| 10.2  | Éventail de $\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^1}(\mathbf{a}))$ . . . . .                | 196 |
| 11.1  | L'éventail secondaire de $\mathbf{h}$ . . . . .   | 202 |
| 11.2  | Le polytope $P_{\mathbf{b}}$ pour $\chi = \mathbf{k}^\top(\mathbf{b})$ appartenant à $\sigma_1, \sigma_2$ et $\sigma_3$ . . . . . | 203 |
| 11.3  | Éventail associé à $\mathbf{b} > 0$ . . . . .   | 207 |
| 11.4  | Éventail associé à $\mathbf{b} < 0$ . . . . .   | 208 |
| 11.5  | Éventail associé à $\mathbf{b} = 0$ . . . . .   | 208 |
| 11.6  | Cône engendré par les $\mathbf{h}(\mathbf{e}_i)$ , $i = 1..5$ . . . . .   | 208 |
| 11.7  | Éventail GKZ . . . . .  | 209 |
| 11.8  | Éventail d'une surface d'Hirzebruch avec un générateur virtuel . . . . .  | 211 |
| 11.9  | Éventail d'une surface d'Hirzebruch éclatée en un point . . . . .   | 211 |
| 11.10 | Éventail d'un plan projectif quantique éclaté en un point avec un générateur virtuel . . . . .                                    | 212 |
| 11.11 | Éventail d'un plan projectif quantique avec deux générateurs virtuels . . . . .   | 212 |
| 11.12 | Éventail secondaire à $t = -1$ et à $t = 1$ . . . . .   | 218 |





# NOTATIONS

---

## Catégories

|   |  |
|---|--|
| <b>Ens</b>  | la catégorie des ensembles avec les fonctions entre eux  |
| <b>Poset</b>  | la catégorie des ensembles partiellement ordonnés avec les fonctions monotones entre eux   |
| $\mathbb{A} - \mathbf{Mod}$   | la catégorie des $\mathbb{A}$ -modules, où $\mathbb{A}$ est un anneau ou un faisceau d'anneaux, avec les morphismes de $\mathbb{A}$ -modules entre eux.  |
| <b>Gr, Ab</b>   | la catégorie des groupes (resp. des groupes abéliens) avec les morphismes de groupes entre eux.  |
| <b>Sch, <math>\mathbf{Var}_{\mathbb{C}}</math>, <math>\mathbf{An}_{\mathbb{C}}</math>, <math>\mathbf{VarDiff}_{\mathbb{K}}</math></b> | les catégories des schémas, des variétés algébriques sur $\mathbb{C}$ , des espaces analytiques complexes, des variétés différentielles sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec les morphismes d'espaces localement annelés entre eux.  |
| <b>Gr(<math>\mathbf{C}</math>)</b>  | la catégorie des groupes internes ou objets en groupes de la catégorie $\mathbf{C}$ avec les morphismes de $\mathbf{C}$ compatibles avec la structure de groupe. En particulier, si $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}$ (resp. $\mathbf{C} = \mathbf{An}_{\mathbb{C}}$ , $\mathbf{C} = \mathbf{VarDiff}_{\mathbb{K}}$ ), ce seront les groupes algébriques (resp. analytiques, de Lie) |
| $\mathfrak{Sch}, \mathfrak{Var}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{An}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{VarDiff}_{\mathbb{K}}$                            | le site des schémas, des espaces analytiques,... avec les recouvrements usuels   |
| $\mathfrak{Sch}_{\text{ét}}$  | le site des schémas avec la topologie étale  |
| $\mathfrak{A}$  | le site des espaces analytiques munis d'une action d'un groupe analytique abélien avec une orbite dense muni des recouvrements équivariants  |
| $\mathbf{C}^{\text{op}}$  | la catégorie opposée de la catégorie $\mathbf{C}$  |
| $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B), \underline{B} = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, B)$  | l'ensemble des morphismes de $\mathbf{C}$ entre $A$ et $B$ (resp. le foncteur $A \in \mathbf{C} \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ ).  |
| $\text{Aut}_{\mathbf{C}}(A)$  | le groupe des automorphismes dans $\mathbf{C}$ de $A$  |

## Groupes

|   |  |
|---|--|
| $\mathfrak{S}_n$                        | le groupe des permutations de $n$ objets   |
| $D_n$                                   | le groupe des symétries d'un polygone régulier à $n$ côtés.  |
| $M_{n,n'}(\mathbb{A}), M_n(\mathbb{A})$ | la $\mathbb{A}$ -algèbre des matrices de taille $n \times n'$ (resp. $n \times n$ ) à coefficients dans $\mathbb{A}$ . |
| $I_n$                                   | la matrice identité de taille $n$  |
| $GL_n(\mathbb{A})$                      | le groupe des matrices inversibles à coefficients de $\mathbb{A}$ .  |
| $PGL_n(\mathbb{C})$                     | le groupe de Lie quotient de $GL_n(\mathbb{C})$ par son centre $Z(GL_n(\mathbb{C})) = \mathbb{C}^* I_n$                |

## Notations générales

|  |  |
|--|--|
| $S_n$  | le type combinatoire de l'éventail de $\mathbb{P}^n$ .   |
| $C_n$  | le type combinatoire d'un éventail complet de $\mathbb{R}^2$ avec $n$ générateurs.   |
| $K(G, n)$  | l'espace de Eilenberg-MacLane dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux sauf le nème qui est $G$                               |
| $BG$   | l'espace classifiant de $G$ i.e. le CW-complexe qui classifie les classes d'homotopie de $G$ -fibrés principaux.                     |
| $\mathcal{B}G$   | le champ classifiant des $G$ -fibrés principaux i.e. $\mathcal{B} = [*/G]$ .   |
| $\mathcal{U}_\sigma, \mathcal{U}_\sigma^{\text{noncal}}$                 | le champ torique quantique associé au cône $\sigma$ (resp. sa contrepartie non-calibrée).  |
| $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}, \mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$ | le champ torique quantique associé à l'éventail $(\Delta, h, g)$ (resp. sa contrepartie non-calibrée).                               |
| $\mathcal{S}(\Delta)$  | l'ouvert torique de $\mathbb{C}^n$ défini par la combinatoire de l'éventail de $\Delta$ .  |
| $\Omega(D), \overline{\Omega(D)}$  | l'espace des calibrations standard $D$ -admissibles (resp. sa compactification dans la compactification $Gr(n - d, \mathbb{R}^n)$ ). |
| $\mathcal{M}(d, n, D), \overline{\mathcal{M}}(d, n, D)$                  | l'espace des modules de champs toriques quantiques de type combinatoire $D$ (resp. sa compactification).                             |

# INTRODUCTION

## 1 Aperçu historique

Une variété torique est une variété algébrique complexe munie de l'action d'un tore complexe  $(\mathbb{C}^*)^n$  ayant une orbite ouverte Zariski-dense. Une telle variété peut être entièrement décrite par la donnée d'une famille de cônes fortement convexes rationnels dans un réseau  $\Gamma$ , appelée éventail (cf. [34] ou [47]). Plus précisément, il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des variétés toriques et la catégorie des éventails. Ce résultat nous donne un dictionnaire entre les propriétés géométriques des variétés toriques et les propriétés combinatoires des éventails. Pour cette raison, les variétés toriques forment une des classes de variétés algébriques complexes les plus étudiées dans de multiples domaines mathématiques :

- en géométrie algébrique ; elles ont été introduites par M.DEMAZURE dans [39] pour l'étude du groupe de Cremona. Elles sont encore beaucoup utilisées notamment en symétrie miroir (voir, par exemple, [33]). Il a aussi été démontré des résultats de symétrie miroir homologique (une conjecture de M.KONTSEVICH (voir [85]) reliant l'existence d'une paire miroir de variétés de Calabi-Yau  $(X, Y)$  à une équivalence entre la catégorie dérivée bornée des faisceaux cohérents sur  $X$ , notée  $D^b(\text{Coh}(X))$ , et la catégorie dérivée bornée de la catégorie de Fukaya de  $Y$ , notée  $D^b(\text{Fuk}(Y))$ ), pour des paires de variétés toriques lisses projectives (voir [1]) et aussi pour des variétés toriques plus générales (avec une variante des catégories de Fukaya) dans [79],
- en géométrie symplectique ; cela commence avec le théorème de Delzant ([38]) qui permet de munir une variété symplectique compacte et ayant une action hamiltonienne du tore réel d'une structure de variété projective torique et même de retrouver un polytope la définissant avec l'application des moments. Cette application des moments fait aussi le lien avec la théorie des systèmes intégrables car elle définit un système intégrable (voir, par exemple, [9]) où les coordonnées de l'application des moments sont les intégrales premières du système,
- en topologie algébrique, on peut notamment montrer que les classes de bordismes de variétés toriques engendrent l'anneau de bordismes complexes (voir [24]) ou, évidemment, en combinatoire, où, par exemple pour montrer la nécessité des conditions dans la  $g$ -conjecture de P.MCMULLEN sur les  $f$ -vecteurs des polytopes simples (voir [90]), R.P. STANLEY utilise dans [116] la théorie de Hodge sur les variétés toriques projectives associées.

Cependant, dans la théorie classique, les éventails doivent être rationnels. De ce fait, les variétés toriques sont rigides (comme espace équivariant) i.e. on ne peut pas les déformer continûment. En effet, si on déforme un réseau, il peut devenir dense (considérer, par exemple, le sous-groupe  $\Gamma_\alpha = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$  de  $\mathbb{R}$  qui est monogène et discret si  $\alpha \in \mathbb{Q}$  et est dense dans  $\mathbb{R}$  sinon). Cela nous mène à la question suivante :

**Question.** *Comment définir un objet torique à partir d'un éventail constitué de cônes dont les générateurs sont dans un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  (aussi appelé quasi-réseau, en référence à son utilisation dans la théorie des quasi-cristaux ([114])) ?*

On peut trouver plusieurs réponses à cette question dans la littérature : on peut définir ces « variétés toriques généralisées » comme des espaces de feuilles de variétés LVM(B) (voir [93] pour le cas classique et [80], [13] pour le cas irrationnel), comme des quasifolles symplectiques (ou par des espaces stratifiés par de tels objets) données par un quotient global (voir [108] pour le cas d'un polytope simple et [12] pour le cas général), comme un CW-complexe (dans [107] dans le cas général) ou comme des champs (différentiels symplectiques (compacts) dans [71] avec la donnée d'un polytope simple ou analytiques dans [81]). Le point de départ de cette thèse est le dernier article cité.

On va commencer par expliquer les adjectifs « non-commutatif » et « quantique » du titre de cet article :

Cela commence avec la dualité de Gelfand ([50]) qui donne une équivalence de catégories entre la catégorie des espaces topologiques compacts et la catégorie (opposée de la catégorie) des  $C^*$ -algèbres complexes commutatives donnée par le foncteur  $\mathcal{C}^0(-, \mathbb{C})$  qui associe à un espace topologique compact  $X$  la  $C^*$ -algèbre  $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{C})$  des fonctions continues  $X \rightarrow \mathbb{C}$ . Cela amène à l'introduction des espaces « non-commutatifs » (notamment par A. CONNES dans [29]) qui correspondraient aux  $C^*$ -algèbres non-commutatives (ou plus précisément aux classes d'équivalences de Morita<sup>4</sup> de celles-ci). Ensuite, CONNES (dans [30]) a introduit la construction de l'algèbre de convolution d'un groupoïde de Lie qui est une algèbre de semi-densités sur sa variété de morphismes muni de la convolution. Cette construction est fonctorielle et descend aux classes d'équivalences de Morita définissant ainsi un (2-)foncteur  $\mathcal{C}\text{hampDiff} \rightarrow C^* - \mathcal{A}lg/\text{Morita}$  entre la (2-)catégorie des champs différentiels (i.e. les classes d'équivalences de Morita de groupoïdes de Lie) et celle des  $C^*$ -algèbres localisée en les équivalences de Morita i.e. la 2-catégorie des espaces « non-commutatifs » (voir [105]). Un des exemples clés de cette construction est celui donné par le champ quotient  $[\mathbb{S}^1 / \exp(2i\pi\hbar\mathbb{Z})]$  (une autre façon plus géométrique de voir ce quotient est de le voir comme l'espace des feuilles (ici, cela sera un champ de feuilles) du feuilletage linéaire de pente  $\hbar$  du 2-tore réel  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  (cf. [26, exemple 1.1.5])). La (classe de)  $C^*$ -algèbre associée est la  $C^*$ -algèbre universelle (appelée dans [121] « tore non-commutatif ») engendrée par  $u$  et  $v$  (unitaire) qui sont liés par la relation

$$uv = \exp(2i\pi\hbar)vu$$

Cette relation est bien connue des physiciens comme étant la relation de commutation de Born-Heisenberg-Jordan (voir [20],[19], ici  $\hbar$  est la constante réduite de Planck) en mécanique quantique. Remarquons que si  $\hbar = 0$  (ou, plus généralement, est un entier) alors on obtient une algèbre commutative et le tore considéré est  $\mathbb{S}^1$ . Ainsi en géométrie torique quantique, les tores considérés seront des « tores (algébriques) complexes quantiques » e.g. des quotients  $[\mathbb{C}^* / \exp(2i\pi\hbar\mathbb{Z})]$  (leur tropicalisation permet de retrouver les feuilletages linéaires sur les tores réels) et ainsi, la géométrie torique quantique peut donc être vue comme une quantification de la géométrie torique classique.

Les auteurs de [81] ont décrit comment construire à partir d'un éventail constitué de cônes simpliciaux (i.e. engendré par une famille libre de vecteurs) sur un groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  un « champ torique quantique<sup>5</sup> ». Cette construction redonne (modulo rigidification) les variétés toriques classiques dans le cas où les cônes sont rationnels. De plus, elle est fonctorielle et définit une équivalence de catégories entre la catégorie des éventails simpliciaux et celle des champs toriques quantiques (simpliciaux) qui étend donc celle sur les variétés toriques classiques évoquée au début de cette introduction. On a donc une bonne notion de morphisme qui est maniable combinatoirement. Grâce à cette équivalence, on peut étudier les espaces de modules de champs toriques grâce à l'étude des espaces de modules d'éventails. Pour obtenir de bons espaces de modules de champs toriques, on doit fixer le nombre de générateurs du groupe  $\Gamma$  (à l'aide d'un épimorphisme  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$ ) car le rang du groupe  $\Gamma$  change lorsqu'on le déforme (penser au groupe  $\Gamma_\alpha = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ ). Les espaces de modules de champs toriques que l'on obtient alors sont des orbifolles réelles

4. Remarquons que dans le cas commutatif, deux algèbres Morita-équivalentes sont isomorphes

5. Dans [81], les auteurs utilisent la terminologie de « quantum toric variety » bien que les objets manipulés soient des champs

de dimension  $d(n - d)$  (où  $d$  est la dimension de l'espace ambiant et  $n$  est le nombre de générateurs).

Le but de cette thèse est de continuer l'étude de ces espaces de modules et en particulier d'étudier les questions suivantes :

**Question 1.** *Peut-on définir des champs toriques quantiques et étendre l'équivalence de catégories avec des éventails ayant des cônes quelconques ?*

Le cas des cônes non-simpliciaux est plus compliqué pour plusieurs raisons : la combinatoire des cônes est plus complexe puisque dans le cas simplicial, les faces d'un cône simplicial sont obtenues en prenant toutes les sous-familles d'une base du cône, ce qui n'est plus le cas dans le cas non-simplicial. De plus, les cônes non-simpliciaux peuvent avoir un nombre arbitraire de 1-cônes (on peut considérer le cas du cône engendré par un polygone dans  $\mathbb{R}^3$ ). Du côté géométrique (classique), les variétés obtenues sont aussi plus compliquées pour, notamment, les deux raisons suivantes : elles ne sont plus orbifoldes et on ne peut plus les écrire comme un quotient géométrique global.

**Question 2.** *Quelle est la topologie (e.g. le type d'homotopie, les groupes de cohomologie,...) des espaces de modules obtenus ?*

Le calcul du type d'homotopie d'espaces de modules est souvent compliqué. Par exemple, le type d'homotopie des espaces de modules  $\mathcal{M}_{g,n}$  de courbes projectives de genre  $g$  et avec  $n$  points marqués ([37]) est, en général, inconnu. Ses groupes de cohomologie sont aussi largement inconnus (même si on peut dire quelque chose sur la cohomologie stable, voir [89]).

**Question 3.** *Comment compactifier l'espace de modules ?*

Cela fait écho à la compactification des espaces  $\mathcal{M}_{g,n}$  faite dans [37]. Considérer des espaces compacts permet d'utiliser de nombreux outils de géométrie algébrique comme la théorie de la déformation ou de l'intersection. La question 2 peut être aussi posée pour la compactification ainsi obtenue.

**Question 4.** *Peut-on relier les différents espaces de modules par des passages de murs ? Autrement dit, peut-on décrire un espace représentant des champs toriques quantiques ayant deux « chambres » (ouvertes) où la topologie des champs toriques est stable et un « mur » (espace de codimension 1) les séparant où un changement de topologie se fait. Franchir le mur revient donc à faire une transformation birationnelle entre les champs considérés.*

Cette question renvoie à deux constructions que l'on peut faire sur les variétés toriques. Tout d'abord, on a la variation de la théorie géométrique des invariants que l'on peut interpréter grâce à un éventail secondaire (défini dans [51]) et qui permet d'obtenir des morphismes birationnels entre des variétés toriques avec de bonnes propriétés. La deuxième construction vient de la géométrie complexe non-Kähler : dans [21], les auteurs décrivent comment faire des chirurgies holomorphes sur des variétés LVM, qui sous certaines conditions de rationalité (voir [93]) descendent en une chirurgie sur des variétés toriques. On va voir comment adapter cela au cas quantique.

**Question 5** (« Toric big moduli conjecture »). *Peut-on recoller les différents espaces de modules de champs toriques quantiques de types combinatoires (simpliciaux) différents en un seul espace de module que l'on peut compactifier ?*

Cette question est la synthèse des questions 1, 3 et 4. En effet, les passages de murs permettent de relier les espaces de modules entre eux mais sur les murs, l'objet obtenu est donné par un éventail non-simplicial. Ensuite, il faut compactifier tous les espaces de modules obtenus pour l'espace total voulu.

## 2 Contenu du manuscrit

La suite de cette introduction sera dédiée à présenter le plan de cette thèse. On en profitera pour donner les contributions de cette thèse.

## 2.1 Révision de la littérature

- Chapitre 1* Ce chapitre rappellera la théorie des variétés toriques classiques et notamment comment en construire à partir de la donnée combinatoire d'un éventail. Cela permettra d'énoncer l'équivalence de catégories entre les éventails et les variétés toriques. On donnera ensuite quelques corollaires de cette équivalence. On finira sur la construction de variétés toriques projectives à partir de la donnée combinatoire d'un polytope (et pour cela, on verra la construction de l'éventail normal d'un polytope).
- Chapitre 2* Comme dit précédemment dans cette introduction, les objets que l'on considérera dans cette thèse seront des champs. Ces objets permettent de conserver une structure analytique à un quotient d'une variété par une action de groupe (même non-libre ou non proprement discontinue) et sont aussi utilisés pour l'étude des problèmes de modules (notamment dans les cas où les objets que l'on classe ont des automorphismes, ce qui sera le cas dans ce texte). On en profitera pour rappeler comment définir des objets reliés à une variété (faisceaux, fibrés vectoriels, groupes d'homotopie/cohomologie,...) dans le cas champêtre ainsi qu'une notion d'action de groupes adaptée à ce cadre.
- Chapitre 3* Grâce à ces deux chapitres préliminaires, on a tous les outils nécessaires pour expliquer l'article [81] sur les fondements de la géométrie torique quantique. On commencera par définir la notion de « tore quantique », qui nous servira de remplaçant au tore algébrique  $(\mathbb{C}^*)^d$ , et leurs propriétés. On définira les champs toriques quantiques par recollement de cartes affines grâce à la donnée combinatoire d'un éventail « quantique » i.e. la donnée d'un éventail, d'une famille de générateurs  $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  et d'éventuels générateurs virtuels (qui n'interviennent pas dans l'éventail). On pourra énoncer ensuite les deux théorèmes importants de ce chapitre : l'extension de l'équivalence de catégories entre la catégorie des éventails quantiques et celles des champs toriques quantiques et l'expression des champs toriques quantiques comme un quotient global d'un ouvert torique  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{C}^n$  (donné par la combinatoire de l'éventail) par l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  par transformation de Gale. On décrira aussi une version « non-calibrée » des champs toriques qui permet de décrire les champs toriques quantiques comme une gerbe liée au-dessus de cette version non-calibrée et qui permettra donc de décrire la variété torique  $\mathcal{S}$  comme un  $(\mathbb{C}^*)^{\text{rg}(\ker(h))}$ -fibré principal (à homotopie près) de cette version non-calibrée.

## 2.2 Contributions

- Chapitre 4* Dans ce chapitre, on affinera les résultats de [81] sur les espaces de modules de champs toriques. On montrera tout d'abord le résultat suivant

**Théorème (4.1.6).** *L'espace de modules de champs toriques quantiques de type combinatoire  $D$  fixé et de nombre de générateurs  $n$  fixés dans  $\mathbb{R}^d$ , noté  $\mathcal{M}(d, n, D)$ , est isomorphe à l'orbifolde donnée par le champ quotient :*

$$[\Omega(d, n, D) / \text{Aut}_{\text{Poset}}(D) \times \mathfrak{S}_{n-|D(1)|}]$$

où  $\Omega(d, n, D)$  est un ouvert semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$ .

Grâce à celui-ci, nous allons pouvoir, sur des exemples, calculer le type d'homotopie de ces espaces (pour commencer à répondre à la question 2). On peut le faire entièrement pour la dimension 2 :

**Théorème (4.2.10 et 4.5.0.2).** *Soit  $C_n$  le type combinatoire d'un éventail quantique  $(\Delta, \mathcal{I}, \emptyset)$  de  $\mathbb{R}^2$  avec  $n$  générateurs. Le type d'homotopie de  $\mathcal{M}(2, n, C_n)$  est celui de l'espace classifiant  $B(D_n)$  où  $D_n$  est le groupe diédral à  $2n$  éléments.*

- Chapitre 5* Ce chapitre sera dévoué à répondre à la question 3 i.e. la compactification de l'espace de modules  $\mathcal{M}(d, n, D)$ . Pour ce faire, nous allons plonger l'ouvert  $\Omega(d, n, D)$  dans la grassmannienne  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}(n-d, \mathbb{R}^n)$  (et donc  $\mathcal{M}(d, n, D)$  dans  $[\text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)/G]$ , où  $G$  est le groupe fini cité précédemment) et

prendre l'adhérence dans cet espace compact. Pour montrer que ce candidat a les bonnes propriétés, on va construire la famille universelle de champs toriques quantiques au-dessus de  $\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})$  et l'étendre à une « famille » au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$  en incluant les cas dégénérés obtenus au-dessus de  $\partial\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})$ . En résumé, on a :

**Théorème (5.5.2.13).** *La compactification  $\overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$  de  $\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})$  est la base d'une famille*

$$\overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$$

*de champs toriques quantiques telles que :*

- *Au-dessus de  $\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})$ , les fibres sont des champs toriques quantiques données par un éventail de type combinatoire  $\mathbf{D}$  ;*
- *Au-dessus de  $\partial\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})$ , les fibres sont des champs toriques quantiques données par un éventail de configuration une dégénérescence de  $\mathbf{D}$ .*

On finira ce chapitre par la description complète du cas projectif et la description des dégénérescences apparaissant en dimension 2.

*Chapitre 6* Ce chapitre permettra de présenter les résultats de l'article [17] sur les champs toriques quantiques associés à des éventails quantiques non-simpliciaux et donc de donner une réponse à la question 1. On commencera par définir une notion convenable de tore quantique pour gérer les problèmes associés au cas non-simplicial et en particulier qui permettra d'encoder les changements possibles de nombres de générateurs. Cela permettra ensuite de construire les cartes affines associées aux cônes et puis de construire leur recollement grâce aux données combinatoires de l'éventail. Cela permet d'arriver au théorème principal de ce chapitre :

**Théorème (6.3.2.2.2).** *La catégorie des éventails quantiques et celles des champs toriques quantiques sont équivalentes.*

On décrit ensuite comment présenter le champ obtenu comme un quotient global. Pour finir, on montrera que ces champs toriques quantiques sont eux aussi des gerbes au-dessus d'une version non-calibrée. Contrairement au cas simplicial, on ne peut pas décrire celle-ci indépendamment de la version calibrée.

*Chapitre 7* Ce chapitre donnera une construction différente de champs toriques quantiques que celle du chapitre précédent. Cette construction se fera par un quotient global d'une variété torique par l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  de la même façon que pour le quotient global du cas simplicial (et du cas Deligne-Mumford). L'intérêt de cette construction provient du fait que le groupe par lequel on quotiente ne dépend que de  $\mathbf{n}$  et  $\mathbf{d}$  et ne dépend pas de la calibration  $\mathbf{h}$  (contrairement à la construction du chapitre précédent) ce qui permettra plus tard de faire des constructions en famille. On montrera aussi que les deux constructions ne sont pas équivalentes.

*Chapitre 8* Dans ce chapitre, on commencera l'étude des morphismes birationnels entre champs toriques quantiques à travers l'exemple des éclatements. Dans le cas classique, les éclatements sont donnés par des subdivisions barycentriques du cône correspondant à la sous-variété que l'on éclate. Cela permet de définir aisément des morphismes birationnels entre variétés toriques. De façon similaire, on peut faire une subdivision à poids entiers et ainsi faire un « éclatement à poids ». La nouveauté que l'on pourrait attendre du cas quantique est la possibilité de pouvoir des éclatements à poids irrationnel. Le problème de ces éclatements est que le morphisme que l'on voudrait définir n'existe pas (à cause du fait que l'on a imposé aux morphismes d'envoyer les générateurs sur des combinaisons entières de générateurs pour réussir à définir le morphisme de champs correspondant). On va résoudre ce problème en définissant une bonne notion de « morphisme birationnel » entre éventails



(cf. la définition 8.1.2.1) qui demande la condition plus faible d'être un morphisme d'éventails sur des sous-éventails (les 1-cônes ainsi enlevés sont considérés comme virtuels). Cela induit alors un morphisme birationnel entre les champs toriques quantiques considérés. On étudiera les morphismes birationnels ainsi obtenu et on obtiendra un résultat de décomposition des morphismes birationnels entre champs quantiques toriques ayant des éventails avec le même support en éclatements et contractions par un argument de déformation du cas standard prouvé par [125].

*Chapitre 9* On va continuer à étudier les morphismes birationnels en utilisant une construction combinatoire un peu plus élaborée que les subdivisions étoilées : les cobordismes de polytopes/éventails. Ces cobordismes sont notamment utilisés, dans le cas polytopal, dans [118] pour étudier la combinatoire des polytopes simples et dans [21] pour étudier les chirurgies et les phénomènes de passage de murs des variétés LVM. Dans ce chapitre, nous allons voir comment adapter toutes les constructions découlant de ses cobordismes pour des éventails quantiques et comment ceux-ci permettent de définir des morphismes birationnels entre champs toriques quantiques.

*Chapitre 10* Ce chapitre portera sur les fibrés vectoriels sur les champs toriques quantiques. On commencera par montrer le résultat suivant :

**Théorème (10.2.1).** *Le groupe de Picard (équivariant) d'un champ torique quantique donné par un éventail de  $\mathbb{R}^d$  avec  $n$  générateurs est  $\mathbb{C}^{n-d}$ .*

On se concentrera ensuite sur le cas des espaces projectifs quantiques et on étudiera les fibrés en droites et les fibrés en droites projectives sur ceux-ci en les décrivant explicitement par des éventails. On finira par décrire le lien, dans le cas quantique, entre les diviseurs équivariants et les fibrés en droites (qui se fait moins bien que dans le cas classique à cause du manque de caractères du tore quantique).

*Chapitre 11* Ce chapitre sera dévoué à la question suivante : Si on fixe une calibration  $(\mathfrak{h}, \mathcal{G})$ , quels sont les éventails quantiques  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  que l'on peut obtenir à partir de cette donnée ? Cette question est la question complémentaire à celle des problèmes de modules considérée dans le chapitre 4 où on fixait le type combinatoire de  $\Delta$ . Pour ce faire, nous allons adapter la construction de l'éventail secondaire de la calibration, déjà connu dans le cas rationnel, dans le cadre général des éventails quantiques. On obtiendra ainsi de nouveaux morphismes birationnels découlant des passages de murs de l'éventail secondaire, ce qui nous donnera toutes les clefs pour construire l'espace de modules de toutes les champs toriques quantiques (à dimension et nombre de générateurs fixés) promis dans la question 5. On verra aussi que cette construction complète celle du chapitre précédent dans le sens où un cobordisme est la donnée d'un chemin affine dans l'éventail secondaire.

*Chapitre 12* Ce dernier chapitre servira de bilan des chapitres précédents et notamment à répondre à la question 5. On commencera par utiliser l'éventail secondaire pour construire une famille universelle de variétés toriques  $\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{U}(\mathfrak{h})$  indexé par le cône (ouvert) où la famille est de dimension maximale (i.e. l'intérieur du support de l'éventail secondaire). En faisant varier  $\mathfrak{h}$ , on obtient alors une famille de champs toriques  $\mathcal{X}^{\text{univ}} \rightarrow \mathcal{U}^{\text{adm}}$  indexée par l'ouvert donné par l'union des cônes. On montrera, grâce au travail fait dans le chapitre 12, le résultat de connexité suivant :

**Théorème (12.2.5).** *Pour tout éventail quantique simplicial  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$ , il existe un chemin dans  $\mathcal{U}^{\text{adm}}$  le reliant à un espace projectif quantique.*

En restreignant sur un ouvert de  $\mathcal{U}^{\text{adm}} \subset \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  où la combinatoire ne change pas, on retrouve (à homotopie près) l'ouvert  $\Omega(\mathbb{D})$  du type combinatoire que l'on considère. On peut reprendre les constructions pour compactifier  $\mathcal{U}^{\text{adm}}$  (et en restreignant les cônes en leur intersection avec la boule unité fermée) dans  $\overline{\mathbb{B}(0,1)} \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$ . En quotientant par les isomorphismes, on obtient le théorème récapitulatif suivant :

**Théorème (12.3.7).** *Soit  $n \geq d$  deux entiers. Il existe un champ topologique compact  $\mathcal{K}(d, n)$  et un morphisme de champs  $\mathcal{X}(d, n) \rightarrow \mathcal{K}(d, n)$  tel que :*

- *Pour tout type combinatoire  $D$  d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^d$  à  $n$  générateurs, il existe un fermé  $\mathcal{K}(D)$  de  $\mathcal{K}(d, n)$  qui soit une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}(d, n, D)}$*
- *Cette fibration s'étend en une fibration entre la famille au-dessus de  $\mathcal{K}(D)$  et celle au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}(d, n, D)}$ .*

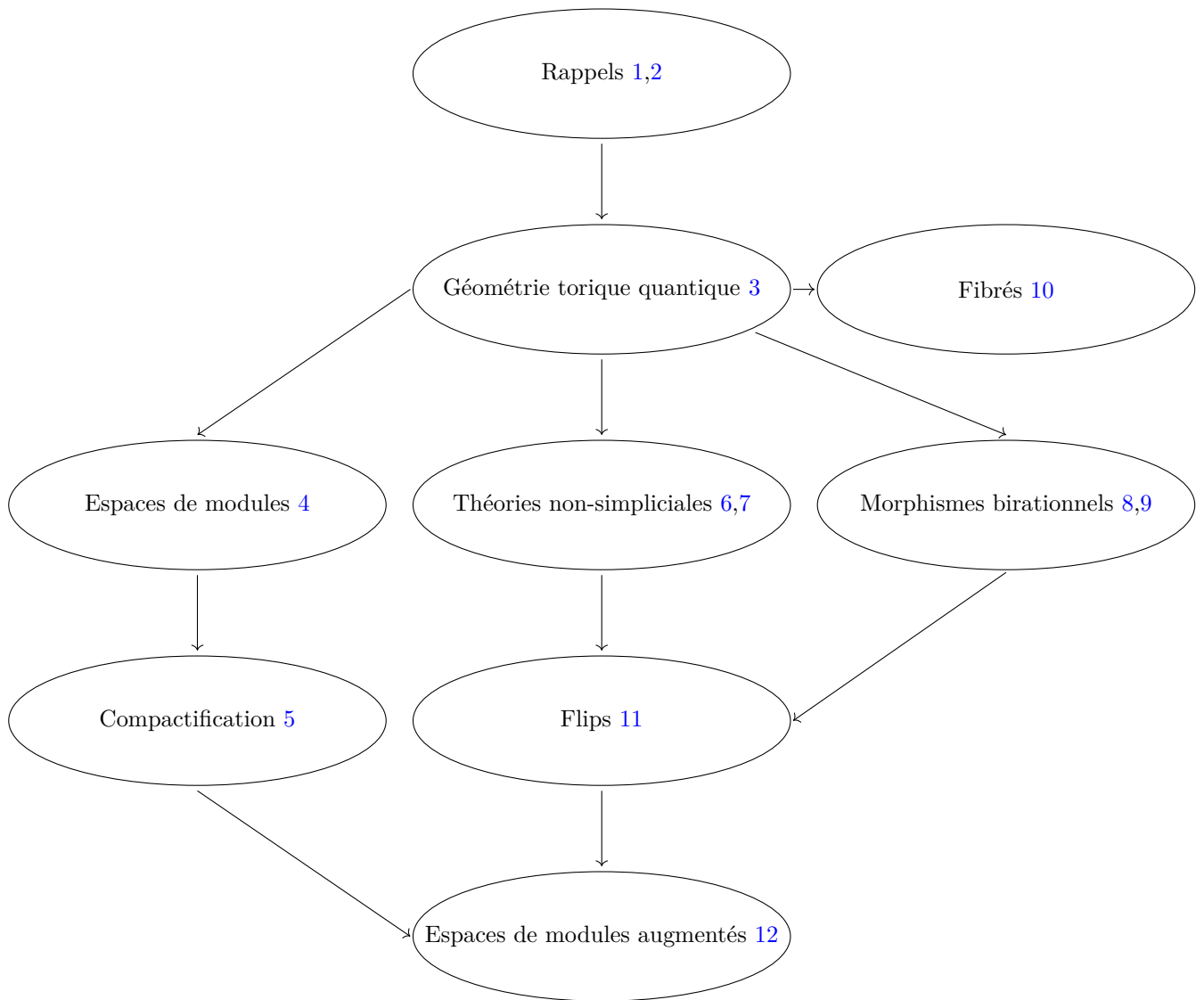


FIGURE 1 – Récapitulatif

# GÉOMÉTRIE TORIQUE CLASSIQUE

CE PREMIER CHAPITRE SERVIRA à rappeler la théorie classique des variétés toriques qui sera utile dans la suite de cette thèse. Le point central de la géométrie torique est le fait que ces variétés toriques sont entièrement déterminées par la donnée combinatoire d'une famille de cônes. De plus, les propriétés de lissité, compacité, projectivité,... des variétés toriques se détectent par des conditions combinatoires sur les cônes de l'éventail permettant d'établir un dictionnaire combinatoire-géométrie entre les éventails et les variétés toriques. C'est ce dictionnaire que l'on va essayer de généraliser dans les chapitres suivants.

Dans la [première section](#), nous allons tout d'abord définir ce qu'est un tore puis ce qu'est une variété torique. Ensuite, nous allons voir comment construire une variété torique à partir, tout d'abord, d'un cône (on obtiendra ainsi une variété affine) puis à partir d'un éventail (une famille de cônes ayant de bonnes propriétés de stabilité) afin de recoller ces variétés affines. Grâce au théorème (cf. [théorème 1.1.3.3.7](#)) de H.SUMIHIRO, on peut montrer que toutes les variétés toriques normales sont obtenues comme cela. De plus, comme cette construction est fonctorielle, cela définit une équivalence de catégories entre la catégorie des éventails et celles des variétés toriques (normales). On verra ensuite deux résultats importants qui seront généralisés dans la suite : les variétés toriques peuvent être décrites comme le quotient global d'un ouvert de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  par l'action d'un sous-groupe de son tore et un éclatement d'une sous-variété équivariante d'une variété torique est encore une variété torique et son éventail se déduit facilement de la variété torique initiale.

Dans la [deuxième section](#), on verra une façon combinatoire alternative de décrire les variétés toriques grâce aux polytopes. Ces polytopes permettent d'obtenir un éventail et donc permettent d'obtenir des variétés toriques qui seront projectives.

Ce chapitre est basé sur le livre *Toric varieties* de D.A. COX, J.B. LITTLE, H.K. SCHENCK ([\[34\]](#)) et le livre *Introduction to Toric Varieties* de W.FULTON ([\[47\]](#)).

Toutes les variétés considérées dans ce chapitre seront au-dessus de  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ . Grâce à [\[60, Exposé XII, Théorèmes 1 et 2\]](#), on pourra traduire tous les énoncés qui suivent dans le cadre holomorphe qui sera utilisé dans les chapitres suivants.

## 1.1 Variétés toriques

### 1.1.1 Tores

Comme dit dans l'introduction de cette thèse, une variété torique est une variété munie d'une action d'un tore (algébrique). On va donc commencer par définir les tores et donner quelques unes de leur propriétés.

Pour cela, rappelons la définition de groupe multiplicatif qui est l'exemple le plus simple de tore et qui nous permettra de définir les tores dans leur généralité.

**Définition 1.1.1.1.** Le groupe multiplicatif sur  $\mathbb{C}$ , noté  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ , est le groupe algébrique  $\text{Spec}(\mathbb{C}[x^{\pm 1}])$  muni de la loi induite par le morphisme d'algèbres défini par  $x \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \mapsto x \otimes x \in \mathbb{C}[x^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[x^{\pm 1}]$  ou encore par le (schéma donné par le) foncteur de points  $S \in \mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}^{\text{op}} \mapsto \Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{\times} \in \mathbf{Ab}$  où  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)^{\times}$  est le groupe multiplicatif de l'anneau  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ .

*Remarque 1.1.1.2.* Dans le cas holomorphe, le groupe multiplicatif est  $\mathbb{C}^*$  et la loi est le produit

$$(x, y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \mapsto xy \in \mathbb{C}^*$$

Le foncteur de points de ce groupe est le même que celui du cas algébrique (en changeant  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}$  par  $\mathbf{An}_{\mathbb{C}}$ ) car une fonction holomorphe  $S \rightarrow \mathbb{C}$  (i.e. un élément de  $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ ) est inversible pour le produit si, et seulement si, elle ne s'annule jamais.

**Définition 1.1.1.3.** Un tore (algébrique) est un groupe algébrique isomorphe à  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^d = \text{Spec}(\mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}])$

*Remarque 1.1.1.4.* Si  $X$  est isomorphe en tant que variété à  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^d$  alors on peut transporter la structure de groupe de  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$  sur  $X$ .

**Définition 1.1.1.5.** Un morphisme de tores est un morphisme de groupes algébriques entre deux tores. Autrement dit, la catégorie des tores est la sous-catégorie pleine des groupes algébriques contenant les tores.

**Définition 1.1.1.6.** • Un caractère d'un tore  $T$  est un morphisme de groupes algébriques  $T \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ . On notera  $X^*(T)$  l'ensemble des caractères de  $T$ .

- Un cocaractère/sous-groupe à un paramètre d'un tore  $T$  est un morphisme de groupes algébriques  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow T$ . On notera  $X_*(T)$  l'ensemble des cocaractères de  $T$ .

**Lemme 1.1.1.7.** Soit  $T$  un tore. Les ensembles  $X^*(T)$  et  $X_*(T)$  sont des groupes abéliens libres de rang  $\dim(T)$  dual l'un de l'autre.

*Démonstration.* Quitte à composer par un isomorphisme de tores, on peut supposer que  $T = \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^n$ . On va commencer par le cas le plus simple des morphismes de tores  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ . Tout d'abord, si l'on considère juste les morphismes de variétés, on obtient les égalités suivantes :

$$\text{Hom}_{\text{Var}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[x, x^{-1}]^{\times} = \{Cx^n \mid C \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{Z}\}$$

Pour cela soit des morphismes de groupes, il faut que  $C = 1$ . On en déduit donc que

$$X^*(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) = X_*(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}$$

Le cas général se fait de la même façon. Pour les caractères, on a :

$$\text{Hom}_{\text{Var}_{\mathbb{C}}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^n, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) = \mathbb{C}[x_1, x_1^{-1}, \dots, x_n, x_n^{-1}]^{\times} = \{Cx_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \mid C \in \mathbb{C}^*, (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n\}$$

(la deuxième égalité se montre par récurrence sur le nombre d'indéterminées) et donc

$$X^*(T) \simeq \mathbb{Z}^n.$$

Pour les cocaractères,

$$X_*(T) = \text{Hom}_{\text{Gr}(\text{Var}_{\mathbb{C}})}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^n) = \text{Hom}_{\text{Gr}(\text{Var}_{\mathbb{C}})}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^n = \mathbb{Z}^n.$$

Le crochet de dualité  $X_*(T) \times X^*(T) \rightarrow X_*(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}$  est défini par

$$\langle u : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow T, v : T \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rangle := v \circ u : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Par les isomorphismes  $X_*(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}^{\dim(\mathbb{T})}$  et  $X^*(\mathbb{T}) \simeq \mathbb{Z}^{\dim(\mathbb{T})}$ , ce morphisme est le produit scalaire usuel.  $\square$

*Remarque 1.1.1.8.* Ce résultat est toujours vrai dans le cas holomorphe. Pour montrer cela, il suffit de le montrer pour le cas  $n = 1$ . Une application holomorphe  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  est un morphisme de tore si, et seulement si, il vérifie l'équation fonctionnelle

$$\begin{cases} f(xy) = f(x)f(y) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

En dérivant l'égalité en  $y$  et en évaluant en  $y = 1$ , on obtient l'équation différentielle suivante

$$\begin{cases} xf'(x) = f(x)f'(1) \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

dont les solutions sont les fonctions  $x \mapsto x^n$ .

**Théorème 1.1.1.9** ([40], chapitre 1 4.4). *Le foncteur  $X^*(-)$  est une anti-équivalence de catégories entre la catégorie des tores et celle des groupes abéliens libres (de rang fini) de quasi-inverse  $\text{Spec}(\mathbb{C}[-])$*

*Remarque 1.1.1.10.* • Cette équivalence s'étend à une équivalence entre la catégorie des groupes diagonalisables (i.e. des sous-groupes du groupe des matrices diagonales) sur  $\mathbb{C}$  et celle des groupes abéliens de types finis.

- La catégorie des groupes abéliens libres est équivalente à la catégorie des  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels (de dimension finie) muni d'un réseau avec des morphismes qui respectent cette donnée par le foncteur  $M \mapsto (M \subset M \otimes \mathbb{R})$  et le foncteur d'oubli dans l'autre sens. Dans le cas irrationnel, on va étendre cette équivalence à une équivalence entre les tores quantiques et les espaces vectoriels (de dimension finie) munis d'un sous-groupe finiment engendré

## 1.1.2 Premières définitions

**Définition 1.1.2.1.** Une variété torique est une variété  $X$  avec une immersion ouverte  $\mathbb{T} \hookrightarrow X$  d'un tore vers  $X$  telle que la loi de groupe de  $\mathbb{T}$  s'étend en une action de groupe sur  $X$

*Remarque 1.1.2.2.* De façon équivalente, c'est une variété avec une action d'un tore avec une orbite dense.

**Exemple 1.1.2.3.** • Le tore  $\mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^n$  lui-même est une variété torique (avec l'action induite par sa loi de groupe);

- L'espace affine  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  est une variété torique pour l'action :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (\lambda_1 z_1, \dots, \lambda_n z_n);$$

- L'espace projectif  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$  est une variété torique pour l'action :

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot [z_0 : \dots : z_n] = [z_0 : \lambda_1 z_1 : \dots : \lambda_n z_n];$$

- Le cusp  $V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$  (courbe non-normale) est une variété torique pour l'action :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^3 y)$$

- La variété  $V(xt - yz) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^4$  (variété normale non-orbifolde) est une variété torique pour l'action :

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \cdot (x, y, z, t) = \left( \lambda_1 x, \lambda_2 y, \lambda_3 z, \frac{\lambda_2 \lambda_3}{\lambda_1} t \right)$$

**Lemme 1.1.2.4** ([115], Tag 01RH). *L'extension de la loi de groupe de  $T$  sur  $X$  est unique*

**Définition 1.1.2.5.** Un morphisme torique est un morphisme de variétés entre variétés toriques qui se restreint en un morphisme de tores sur leur tore.

**Proposition 1.1.2.6.** *Le produit de deux variétés toriques est une variété torique.*

*Démonstration.* Soient  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{d_1} \xrightarrow{i_1} X_1$  et  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{d_2} \xrightarrow{i_2} X_2$  deux variétés toriques. Alors  $X_1 \times X_2$  est une variété torique par l'inclusion

$$\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{d_1+d_2} \xrightarrow{(i_1, i_2)} X_1 \times X_2$$

□

### 1.1.3 Construction combinatoire des variétés toriques

Le principal intérêt des variétés toriques est qu'elles peuvent être entièrement décrites par la donnée combinatoire d'un cône lorsqu'elle est affine ou d'un éventail, qui est une famille de cônes, dans le cas général.

#### 1.1.3.1 Cônes

Soient  $T$  un tore,  $M = X^*(T)$  son groupe de caractères et  $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\dim(T)}$ , et  $N = X_*(T)$  son groupe des cocaractères et  $N_{\mathbb{R}} = N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{\dim(T)}$

**Définition 1.1.3.1.1.** Un cône polyédral (convexe) dans  $N_{\mathbb{R}}$  est un ensemble de la forme

$$\sigma = \text{Cone}(S) := \left\{ \sum_{u \in S} \lambda_u u \mid \lambda_u \geq 0 \right\} \subset N_{\mathbb{R}}$$

où  $S \subset N_{\mathbb{R}}$  est fini. Autrement dit, c'est le plus petit cône convexe contenant  $S$ . On dit alors que le cône  $\sigma$  est engendré par l'ensemble  $S$ .

**Exemple 1.1.3.1.2.**  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_{\geq 0}^l \times \{0\}^{n-p-l} \subset \mathbb{R}^n$  sont des cônes pour tout  $l$  et  $p$ .

**Définition 1.1.3.1.3.** Un morphisme de cônes  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}} \rightarrow \sigma' \subset N'_{\mathbb{R}}$  est une application linéaire  $L : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$  telle que  $L(\sigma) \subset \sigma'$  et  $L(N) \subset N'$ .

**Définition 1.1.3.1.4.** Soit  $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$  un cône polyédral. Son cône dual est défini par :

$$\sigma^\vee = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall u \in \sigma, \langle m, u \rangle \geq 0\}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le crochet de dualité  $M_{\mathbb{R}} \times N_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$

**Exemple 1.1.3.1.5.** Le dual du cône  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$  est :

$$\text{Cone}(e_2, e_1 - e_2)$$

**Lemme 1.1.3.1.6.** *Le dual d'un cône polyédral est polyédral et  $\sigma^{\vee\vee} = \sigma$*

**Définition 1.1.3.1.7.** Une face d'un cône est de la forme

$$\tau = \sigma \cap u^\perp = \{v \in \sigma \mid \langle u, v \rangle = 0\}$$

où  $u \in \sigma^\vee$

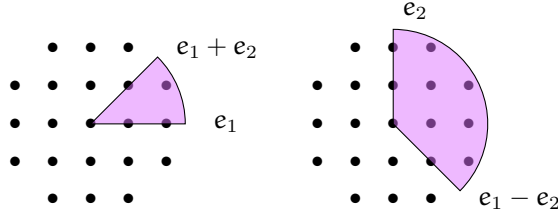


FIGURE 1.1 – Le cône  $\sigma$  et son dual  $\sigma^\vee$

**Exemple 1.1.3.1.8.** Les faces du cône  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$  sont :

- $\sigma = \sigma \cap (0)^\perp$
- $\text{Cone}(e_1) = \sigma \cap e_2^\perp$ ,
- $\text{Cone}(e_1 + e_2) = \sigma \cap (e_2 - e_1)^\perp$ ,
- $(0) = \sigma \cap e_1^\perp$ .

**Théorème 1.1.3.1.9.** La frontière d'un cône polyédral qui engendre  $N_{\mathbb{R}}$  (comme espace vectoriel) est l'union de ses faces propres.

**Exemple 1.1.3.1.10.** La frontière du cône  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_1 + e_2) \subset \mathbb{R}^2$  est  $\text{Cone}(e_1) \cup \text{Cone}(e_1 + e_2)$  (une façon de le voir est de composer avec un isomorphisme avec le cône  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  dont la frontière est  $\partial\mathbb{R}_{\geq 0}^2 = \{0\} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \mathbb{R}_{\geq 0} \times \{0\}$ ).

**Proposition 1.1.3.1.11.** Soit  $\sigma$  un cône polyédral.

- Une face de  $\sigma$  est un cône polyédral convexe.
- L'intersection de faces de  $\sigma$  est une face de  $\sigma$ .
- Une face d'une face de  $\sigma$  est une face de  $\sigma$ .
- La plus petite face de  $\sigma$  est  $\sigma \cap (-\sigma)$ .

**Proposition 1.1.3.1.12.** Soit  $\tau$  une face de  $\sigma$  alors  $\sigma^\vee \cap \tau^\perp$  est une face de  $\sigma^\vee$  telle que

$$\dim(\tau) + \dim(\sigma^\vee \cap \tau^\perp) = \dim(N_{\mathbb{R}}).$$

Cela nous donne une correspondance, renversant l'inclusion, entre les faces de  $\sigma$  et  $\sigma^\vee$ . La face correspondant à la face maximale  $\sigma^\vee$  de  $\sigma^\vee$  est  $\sigma \cap (-\sigma)$ .

**Proposition 1.1.3.1.13.** Soit  $\sigma$  un cône polyédral. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$  ;
- $\sigma$  contient un sous-espace vectoriel non nul ;
- $\{0\}$  est une face de  $\sigma$  ;
- $\sigma^\vee$  engendre  $M_{\mathbb{R}}$ .

**Définition 1.1.3.1.14.** Un cône vérifiant une de ses conditions est dit fortement convexe.

**Exemple 1.1.3.1.15.**  $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}_{\geq 0}^l \times \{0\}^{n-p-l}$  est fortement convexe si, et seulement si,  $p = 0$

**Lemme 1.1.3.1.16** (de séparation). Soient  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  deux cônes de  $N_{\mathbb{R}}$  d'intersection  $\tau$ . Alors pour tout  $m \in \text{Relint}(\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee)$ ,

$$\tau = \sigma_1 \cap m^\perp = \sigma_2 \cap m^\perp$$



**Exemple 1.1.3.1.17.** Si  $\sigma_1 = \text{Cone}(e_1, e_1+e_2)$  et  $\sigma_2 = \text{Cone}(e_1+e_2, e_2)$  alors  $\tau := \sigma_1 \cap \sigma_2 = \text{Cone}(e_1+e_2)$ . On a donc

$$\sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee = \text{Cone}(e_1 - e_2, e_2) \cap -\text{Cone}(e_1, e_2 - e_1) = \text{Cone}(e_1 - e_2)$$

Comme  $\mathbb{R}(e_1 - e_2)^\perp = \mathbb{R}(e_1 + e_2)$  alors pour tout  $\mathfrak{m} \in \text{Cone}(e_1 - e_2)$ ,

$$\sigma_1 \cap \mathfrak{m}^\perp = \sigma_2 \cap \mathfrak{m}^\perp = \tau$$

**Lemme 1.1.3.1.18.** *Un cône polyédral fortement convexe est engendré par ses faces de dimension 1*

### 1.1.3.2 Variétés toriques

Maintenant que l'on a décrit les cônes, on va pouvoir faire le lien avec les variétés toriques.

**Définition 1.1.3.2.1.** Un cône polyédral est dit rationnel s'il existe un sous-ensemble fini  $S \subset \mathbb{N}$  tel que  $\sigma = \text{Cone}(S)$ .

**Lemme 1.1.3.2.2 (GORDAN).** *Soit  $\sigma$  un cône rationnel. L'intersection  $\sigma^\vee \cap M$  est un monoïde finiment engendré i.e. il existe un ensemble fini  $A \subset M$  tel que  $\sigma^\vee \cap M = \mathbb{N}A := \sum_{a \in A} \mathbb{N}a$ .*

**Exemple 1.1.3.2.3.** Si  $\sigma = \text{Cone}(e_1, -e_1 + de_2)$  alors  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_2, e_2 + de_1)$  et

$$\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2 = \sum_{0 \leq l \leq d} \mathbb{N}(1, l)$$

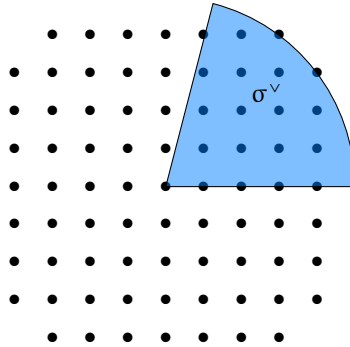


FIGURE 1.2 – Cône  $\sigma^\vee = \text{Cone}(e_2, e_2 + de_1)$  pour  $d = 4$

*Remarque 1.1.3.2.4.* Si  $d \notin \mathbb{Q}$  alors le monoïde  $\sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2$  n'est pas finiment engendré. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \sigma^\vee \cap \mathbb{Z}^2 &= \{(dx_1, x_1 + x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}\} \\ &= \left\{ (dx_1, x_1 + x_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid x_1 \in \frac{1}{d}\mathbb{Z}, x_2 \in \mathbb{Z} + \frac{1}{d}\mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

On conclut par densité dans  $\mathbb{R}$  du sous-groupe  $\mathbb{Z} + \frac{1}{d}\mathbb{Z}$  par irrationalité de  $d$ .

**Théorème 1.1.3.2.5.** *Soit  $\sigma \subset \mathbb{N}_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$  un cône polyédral rationnel. Alors,  $U_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$  est une variété torique affine. De plus, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $\dim(U_\sigma) = n$  ;
- Le tore de  $U_\sigma$  est  $T = \text{Spec}(\mathbb{C}[M])$  ;

- $\sigma$  est fortement convexe.

*Remarque 1.1.3.2.6.* La remarque 1.1.3.2.4 entraîne que dans le cas irrationnel, l'algèbre  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]$  n'est plus de type fini et donc  $U_\sigma$  n'est plus une variété. C'est pour cela que dans le chapitre 3 nous allons donner une autre façon de définir un objet torique à partir d'un cône irrationnel.

**Lemme 1.1.3.2.7.** *La correspondance  $\sigma \mapsto U_\sigma$  est fonctorielle.*

*Démonstration.* Soit  $L : \sigma \subset N_{\mathbb{R}} \rightarrow \tau \subset N_{\mathbb{R}}$  un morphisme de cônes. Alors sa transposée  $L^\top : \tau^\vee \subset M'_{\mathbb{R}} \rightarrow \sigma^\vee \subset M_{\mathbb{R}}$  est un morphisme de cônes. Cela induit donc un morphisme de monoïdes  $\tau^\vee \cap M' \rightarrow \sigma^\vee \cap M$  (car les morphismes de cônes envoient les réseaux sur les réseaux). Comme le foncteur  $\text{Spec } \mathbb{C}[-]$  est contravariant, cela nous donne un morphisme  $U_\sigma = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M]) = U_\tau$ .  $\square$

On va maintenant donner l'image essentielle de ce foncteur :

**Théorème 1.1.3.2.8.** *Soit  $V$  une variété torique affine de tore  $T_N$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $V$  est normale
- $V = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$  où  $\sigma$  est un cône polyédral rationnel fortement convexe.

**Corollaire 1.1.3.2.9.** *La correspondance  $\sigma \mapsto U_\sigma$  définit une équivalence de catégorie entre les cônes et les variétés toriques affines normales*

**Proposition 1.1.3.2.10.** *Soit  $N'$  un sous-groupe d'indice fini d'un réseau  $N$  de  $N_{\mathbb{R}}$ . Notons  $G$  le quotient  $N/N'$ . Soit  $\sigma$  un cône polyédral de  $N'_{\mathbb{R}} = N_{\mathbb{R}}$  alors*

- $G \simeq \ker(T_{N'} \rightarrow T_N) \subset T_{N'}$
- $G$  agit sur  $\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M']$  et donc sur  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M'])$  et

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M'])/G = \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M])$$

**Exemple 1.1.3.2.11.** Soit  $\sigma = \text{Cone}(e_1, -e_1 + de_2)$ . Posons  $N'$  le groupe engendré par  $(e_1, -e_1 + de_2)$ . Alors l'isomorphisme linéaire  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto -e_1 + de_2$  induit un isomorphisme  $\mathbb{Z}^2$  et  $N'$ . On en déduit donc un isomorphisme

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap (N')^\vee]) = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$$

Comme  $G = N/N' = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$  alors

$$\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]) = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2/(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$$

**Corollaire 1.1.3.2.12.** *Soit  $\sigma$  un cône simplicial engendré par les vecteurs  $u_1, \dots, u_k$  de  $N$  (que l'on supposera de norme minimale). Posons  $N' = \bigoplus_{i=1}^k \mathbb{Z}u_i \oplus \bigoplus_{i=k+1}^d \mathbb{Z}u_i$  où  $u_{k+1}, \dots, u_d$  est une complétion de la famille libre  $(u_1, \dots, u_k)$ . Alors  $\text{Card}(N'/N) < \infty$  et*

$$U_\sigma = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^k \times \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^{d-k}/(N'/N)$$

**Lemme 1.1.3.2.13.** *Soient  $\sigma$  un cône polyédral rationnel fortement convexe et  $\tau$  une face de  $\sigma$  (i.e. il existe  $m \in \sigma^\vee \cap M$  tel que  $\tau = m^\perp \cap \sigma$ ). Alors,*

$$\mathbb{C}[\tau^\vee \cap M] = \mathbb{C}[\sigma^\vee \cap M]_m$$

i.e.  $U_\tau$  est un ouvert affine de  $U_\sigma$

1.1.3.3 Éventails et variétés toriques

On va maintenant étudier le cas général :

**Définition 1.1.3.3.1.** Soit  $N$  un groupe abélien libre finiment engendré. Un éventail dans  $N$  est une collection  $\Delta$  de cônes polyédraux fortement convexes rationnels dans  $N_{\mathbb{R}}$  telles que

- si  $\sigma$  est un cône de  $\Delta$  alors les faces de  $\sigma$  aussi
- si  $\sigma$  et  $\tau$  sont des cônes de  $\Delta$  alors  $\sigma \cap \tau$  est une face de  $\sigma$  et de  $\tau$  (et donc est dans  $\Delta$ ).

Le support de l'éventail  $\Delta$  est :

$$|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma$$

On appellera 1-cônes (resp. cônes maximaux) de  $\Delta$  les cônes de dimension 1 (de dimension maximale) de  $\Delta$  et on notera  $\Delta(1)$  (resp.  $\Delta_{\max}$ ) leur ensemble.

Un morphisme d'éventails  $\Delta \rightarrow \Delta'$  est une application linéaire  $N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$  tel que pour tout  $\sigma \in \Delta$ , il existe  $\sigma' \in \Delta'$  tel que  $L(\sigma) \subset \sigma'$

**Exemple 1.1.3.3.2.** Posons  $v = -(e_1 + e_2)$ . La famille

$$\{(0), \mathbb{R}_{\geq 0}e_1, \mathbb{R}_{\geq 0}e_2, \mathbb{R}_{\geq 0}v, \sigma_1 := \text{Cone}(e_1, e_2), \sigma_3 := \text{Cone}(e_1, v), \sigma_2 := \text{Cone}(e_2, v)\}$$

est un éventail

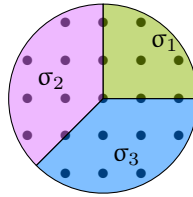


FIGURE 1.3 – Un exemple d'éventail

*Remarque 1.1.3.3.3.* La deuxième condition de la définition d'un éventail et le [lemme 1.1.3.2.13](#) nous donne un isomorphisme entre les ouverts  $U_{\sigma \cap \tau}^{\sigma} \subset U_{\sigma}$  et  $U_{\sigma \cap \tau}^{\tau} \subset U_{\tau}$ . Un éventail définit donc des données de recollement des variétés  $U_{\sigma}$ ,  $\sigma \in \Delta$ .

Cette remarque justifie donc la définition suivante :

**Définition 1.1.3.3.4.** Soit  $\Delta$  un éventail d'un réseau  $N$ . La variété torique associée à l'éventail  $\Delta$  est le recollement des variétés affines  $U_{\sigma}$  le long des intersections  $U_{\sigma \cap \tau}$  :

$$X_{\Delta} := \text{colim}_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma} = \bigsqcup_{\sigma \in \Delta} U_{\sigma} / \simeq$$

où  $\Delta$  est vu comme l'ensemble partiellement ordonné de ses cônes ordonnés par l'inclusion et la relation d'équivalence  $\simeq$  est donnée par les isomorphismes  $U_{\sigma} \supset U_{\sigma \cap \tau}^{\sigma} \simeq U_{\sigma \cap \tau}^{\tau} \subset U_{\tau}$ .

*Remarque 1.1.3.3.5.* Le tore  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Hom}_{\text{Gr}}(N, \mathbb{Z})])$  est dense dans  $X_{\Delta}$

**Exemple 1.1.3.3.6.** L'éventail de la figure (1.3) donne le plan projectif  $\mathbb{P}^2$

**Théorème 1.1.3.3.7** (SUMIHIRO, [117]). *Si  $T$  est un tore et  $X$  est une variété normale avec une action régulière de  $T$  alors  $X$  a un recouvrement d'ouverts affines  $T$ -invariants.*

*Remarque 1.1.3.3.8.* On a un énoncé similaire dans le cadre holomorphe avec quelques hypothèses techniques de plongement équivariant dans un espace Kähler en remplaçant des ouverts affines invariants par des ouverts Stein invariants (voir [86]).

Le morphisme d'éventails  $L : \Delta \rightarrow \Delta'$  induit une famille de morphismes compatibles  $U_\sigma \rightarrow U_{\sigma'}$  où  $L(\sigma) \subset \sigma'$ . Cette famille induit donc un morphisme  $X_\Delta \rightarrow X_{\Delta'}$ , que l'on notera  $X(L)$ .

On peut maintenant énoncer le théorème central de la géométrie torique. On généralise ce résultat dans le cas irrationnel dans la suite (cf. [théorème 3.4.2.16](#) et [théorème 6.3.2.2.2](#)).

**Théorème 1.1.3.3.9.** *La correspondance  $\Delta \mapsto X_\Delta$  définit une équivalence de catégorie entre la catégorie des éventails et celles des variétés toriques normales.*

Dans toute la suite, on supposera que les variétés toriques sont normales.

**Proposition 1.1.3.3.10.** *Un morphisme torique  $X(L) : X_\Delta \rightarrow X_{\Delta'}$  est propre si, et seulement si,  $L^{-1}(|\Delta'|) = |\Delta|$ . En particulier, si  $\Delta' = (0) \subset \mathbb{R}^0$  alors  $X(\Delta') = \text{Spec}(\mathbb{C})$  et  $X_\Delta$  est propre si, et seulement si,  $|\Delta| = \mathbb{N}_\mathbb{R}$ .*

**Définition 1.1.3.3.11.** Un cône est dit simplicial s'il est engendré par une famille libre de  $\mathbb{N}_\mathbb{R}$ . Un éventail est dit simplicial si tous ses cônes sont simpliciaux.

**Théorème 1.1.3.3.12.** *Une variété torique  $X_\Delta$  est une orbifold si, et seulement si,  $\Delta$  est simplicial. Une variété torique  $X_\Delta$  est lisse si, et seulement si, tout cône de  $\Delta$  est engendré par une sous-famille d'une base de  $\mathbb{N}$ .*

*Démonstration.* Voir [corollaire 1.1.3.2.12](#) □

## 1.1.4 Éclatement

Les éclatements d'une sous-variété  $Z$  (de codimension au moins 2) d'une variété  $X$  consiste à remplacer  $Z$  par l'ensemble « des directions partant de  $Z$  » ; l'éclatement de l'origine de  $\mathbb{C}^n$  remplace 0 par l'espace projectif  $\mathbb{P}_\mathbb{C}^{n-1} = \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ .

Si  $X$  est une variété torique, on va vouloir demander à  $Z$  d'être invariant par l'action du tore de  $X$ , i.e. pour tout  $t \in T$ ,  $t \cdot Z \subset Z$ , afin que le résultat obtenu soit aussi une variété torique. Dans ce cas là, la construction peut être entièrement décrite de façon combinatoire.

Pour bien comprendre cet éclatement invariant, on va tout d'abord étudier l'action du tore sur une variété torique donnée par un éventail.

**Théorème 1.1.4.1** ([34] theorem 3.2.6). *Soit  $X_\Delta$  une variété torique de dimension  $d$ . Alors,*

1. *il y a une correspondance bijective entre les cônes  $\sigma$  dans  $\Delta$  et les  $\mathbb{G}_m^d$ -orbites  $O(\sigma) \simeq \text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\perp \cap M]) \subset X_\Delta$  ;*
2. *Pour tout cône  $\sigma \in \Delta$ ,  $\dim(O(\sigma)) = n - \dim(\sigma)$*
3. *Pour tout cône  $\sigma \in \Delta$ ,*

$$U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\tau)$$

4.  *$\tau \leq \sigma$  si, et seulement si,  $O(\sigma) \subseteq \overline{O(\tau)}$  et*

$$\overline{O(\tau)} = \bigcup_{\tau \leq \sigma} O(\sigma)$$

**Exemple 1.1.4.2.** Considérons le cas du plan projectif  $\mathbb{P}^2$  donné par l'éventail de la figure (1.3) :

- $O((0)) = \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^2 = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_0, z_1, z_2 \neq 0\}$  est le tore de  $\mathbb{P}^2$  ;
- $O(\text{Cone}(e_1)) = \{[0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_1, z_2 \neq 0\} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$  ;

- $O(\text{Cone}(e_2)) = \{[z_0 : 0 : z_2] \in \mathbb{P}^2 \mid z_0, z_2 \neq 0\} \simeq \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$  ;
- $O(\text{Cone}(-e_1 - e_2)) = \{[z_0 : z_1 : 0] \in \mathbb{P}^2 \mid z_0, z_1 \neq 0\} \simeq \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$  ;
- $O(\text{Cone}(e_1, e_2)) = [0 : 0 : 1]$  ;
- $O(\text{Cone}(e_1, -e_1 - e_2)) = [0 : 1 : 0]$  ;
- $O(\text{Cone}(e_2, -e_1 - e_2)) = [1 : 0 : 0]$ .

Pour décrire les éclatements, on va utiliser la construction combinatoire suivante :

**Définition 1.1.4.3** ([34] Définition 3.3.13). Soit  $\Delta$  un éventail dans  $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$ . Soit  $\sigma = \text{Cone}(u_1, \dots, u_d)$  un cône lisse de  $\Delta$ . Soit  $I \subset \{1, \dots, d\}$  un ensemble de cardinal  $\geq 2$ . Soit  $u_0 = \sum_{i \in I} u_i$  et soit  $\Delta'(\sigma)$  l'ensemble des cônes engendrés par des sous-ensembles de  $\{u_0, \dots, u_d\}$  contenant  $\{u_i, i \in I^c\}$  et ne contenant pas  $\{u_i, i \in I\}$ . Alors,

$$\Delta^*(\sigma) = (\Delta \setminus \{\text{faces de } \sigma\}) \cup (\Delta'(\sigma))$$

est un éventail de  $\mathbb{R}^d$  appelé subdivision étoilée de  $\Delta$  le long de  $\sigma$ .

**Proposition 1.1.4.4** ([34] Proposition 3.3.15). On utilise les mêmes notations que dans la définition 1.1.4.3. L'identité de  $\mathbb{N}_{\mathbb{R}}$  induit un morphisme d'éventails  $\Delta^*(\sigma) \rightarrow \Delta$  et le morphisme torique associé est l'éclatement de  $\overline{O(\sigma)}$  dans  $X_{\Delta}$ .

Grâce à la décomposition du théorème 1.1.4.1, le diviseur exceptionnel de cet éclatement est isomorphe à  $\mathbb{C}^{|I|} \times \mathbb{P}^{d-|I|-1}$  (voir aussi [65, Chapter I Theorem 8.24].

**Exemple 1.1.4.5.** L'éclatement du plan à l'origine est le morphisme torique

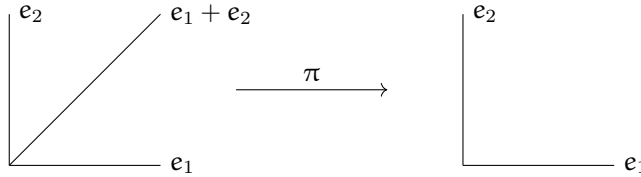


FIGURE 1.4 – Éclatement du plan à l'origine

**Exemple 1.1.4.6.** L'éclatement d'une droite de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3$  est le morphisme torique

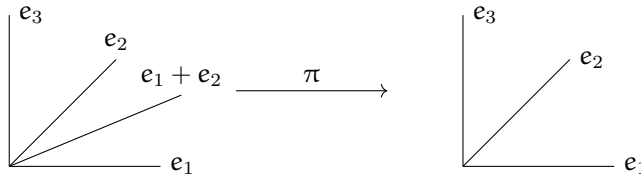


FIGURE 1.5 – Éclatement de la droite  $0 \times 0 \times \mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}^3$

### 1.1.5 Quotient global

Dans cette sous-section, on va voir comment décrire les variétés toriques  $X_{\Delta}$  comme le quotient d'un ouvert  $\mathcal{S} \subset \mathbb{A}^{\Delta(1)}$  par un sous-groupe  $G \subset \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^{\Delta(1)}$  (cf. [35]). Dans la cas simplicial (i.e. si  $X_{\Delta}$  est une orbifolde), la construction fonctionne bien (on obtient un quotient géométrique). Le cas non-simplicial est plus compliqué. On généralisera ces résultats dans le cadre irrationnel (cf. théorème 3.6.7 et théorème 6.4.2).

On va commencer par la description du groupe  $G$  :

**Définition 1.1.5.1.** Un diviseur de Weil d'une variété  $X$  est un élément du groupe abélien engendré par les sous-variétés irréductibles de codimension 1 de  $X$ .

**Exemple 1.1.5.2.** • Soit  $X$  une variété normale et  $f \in \mathbb{C}(X)^*$ . Alors

$$\operatorname{div}(f) = \sum_{D} \nu_D(f)D$$

où  $D$  parcourt les diviseurs de Weil de  $X$ . La fonction  $\nu_D$  est la valuation sur l'anneau à valuation discrète  $\mathcal{O}_{X,D} := \{f \in \mathbb{C}(X) \mid f \text{ est définie sur un ouvert } U \text{ de } D\}$ .

- Soit  $X_\Delta$  une variété torique normale. Les 1-cônes  $\rho$  de  $\Delta$  correspondent à un diviseur  $D_\rho$  qui est l'adhérence (de Zariski) de  $\mathcal{O}(\sigma) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^\perp \cap M])$  dans  $X_\Delta$ . En particulier,

**Définition 1.1.5.3.** Un diviseur est principal s'il est donné par un fonction rationnelle de  $X$ . Les diviseurs principaux de  $X$  forment un sous-groupe de celui des diviseurs de  $X$ . Le groupe des classes de  $X$ , noté  $\operatorname{Cl}(X)$  est le quotient du groupe des diviseurs de Weil par celui des diviseurs principaux.

**Notation 1.1.5.4.** On notera  $\operatorname{Div}_T(X)$  le  $T$ -groupe des diviseurs équivariants de la variété torique  $X$  de tore  $T$  (i.e. les diviseurs  $D$  tels que  $T \cdot D \subset D$ ).

**Lemme 1.1.5.5.**  $\operatorname{Div}_T(X_\Delta) = \bigoplus_{\rho \in \Delta(1)} \mathbb{Z}D_\rho$  où  $D_\rho$  est le diviseur associé au 1-cône  $\rho$ .

**Proposition 1.1.5.6.** Soit  $X_\Delta$  une variété torique sans facteur torique (i.e. sans facteur  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ ) de tore  $T$ . Alors on a la suite exacte de groupes abéliens suivante :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{\operatorname{div}} \mathbb{Z}^{\Delta(1)} \xrightarrow{\pi} \operatorname{Cl}(X_\Delta) \longrightarrow 0 \quad (1.1)$$

où la première flèche associe au caractère  $\mathfrak{m}$  le diviseur principal associé et la deuxième flèche est le passage au quotient.

**Corollaire 1.1.5.7.** Soit  $X_\Delta$  une variété torique normale sans facteur torique. Soient  $v_i$  les générateurs minimaux des 1-cônes de  $\Delta$  et  $\mathfrak{h}: \mathbb{Z}^{\Delta(1)} \rightarrow \mathbb{N}$  le morphisme de groupe défini par :

$$\forall x \in \mathbb{Z}^{\Delta(1)}, \mathfrak{h}(x) = \sum_{i \in \Delta(1)} x_i v_i$$

Alors on a un isomorphisme

$$\operatorname{Cl}(X_\Delta) \simeq \operatorname{coker} \left( \mathfrak{h}^T : M \rightarrow \mathbb{Z}^{\Delta(1)} \right).$$

Le groupe  $G$  associé à la variété torique  $X_\Delta$  sera le groupe algébrique  $\operatorname{Spec}(\mathbb{C}[\operatorname{Cl}(X_\Delta)])$ . On va maintenant pouvoir décrire la variété  $\mathcal{S}$ .

**Lemme 1.1.5.8.** Soit  $\Delta$  un éventail. Les variétés toriques suivantes sont isomorphes :

- la variété torique décrite par l'éventail  $\Delta'$  de cônes maximaux :

$$(\mathbf{e}_i, i \in \sigma(1)) \subset \mathbb{R}^{\Delta(1)}$$

pour tout  $\sigma \in \Delta_{\max}$  ;

- $\mathbb{A}^{\Delta(1)} \setminus V \left( \prod_{\rho \in \Delta(1) \setminus \sigma(i)} x^\rho \mid \sigma \in \Delta_{\max} \right)$  ;

- $\bigcup_{\sigma \in \Delta_{\max}} \mathbb{A}^{\sigma(1)} \times \mathbb{G}_m^{\sigma(1)^c}$

On la notera  $\mathcal{S}(\Delta)$  ou  $\mathcal{S}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté.

**Exemple 1.1.5.9.** La variété associée à l'éventail au plan projectif est  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \setminus \{0\}$ .

*Remarque 1.1.5.10.* Dans le cadre holomorphe, la variété  $\mathcal{S}$  est la variété différentielle des feuilles de Siegel utilisée pour définir les variétés LVM (cf. [91]).

Par contravariance, le groupe algébrique  $G = \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(X)])$  agit sur  $\mathcal{S} \subset \mathbb{A}^{\Delta(1)}$  par le morphisme (injectif)  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\pi]) : \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(X)]) \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}^{\Delta(1)}]) = \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}^{\Delta(1)}$ .

Pour finir, on va rappeler quelques notions sur les quotients de variétés :

**Définition 1.1.5.11.** Soit  $X$  une  $G$ -variété. Un quotient catégorique de  $X$  pour l'action de  $G$  est un morphisme  $G$ -invariant  $\pi : X \rightarrow Y$  tel que tout morphisme  $G$ -invariant  $X \rightarrow Z$  se factorise (de façon unique) par  $\pi$ .

**Lemme 1.1.5.12.** *Le quotient catégorique est unique (à isomorphisme près).*

**Définition 1.1.5.13.** Soit  $X$  une  $G$ -variété. Un quotient géométrique de  $X$  par  $G$  est un morphisme  $G$ -invariant  $X \rightarrow Y$  tel que :

- Si  $U$  est un ouvert de  $Y$  alors le morphisme induit par  $\varphi$

$$\varphi^* \mathcal{O}_Y(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(\varphi^{-1}(U))$$

est un isomorphisme sur  $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(U))^G$  ;

- Si  $W$  est un fermé de  $X$  alors  $\varphi(W)$  est fermé ;
- Si  $W_1, W_2$  sont deux fermés disjoints invariants de  $X$  alors  $\varphi(W_1) \cap \varphi(W_2) = \emptyset$  ;
- Pour tout  $y \in Y$ ,  $\varphi^{-1}(y)$  est contenue dans une orbite de  $G$  ;

**Lemme 1.1.5.14.** *Un quotient géométrique est un quotient catégorique.*

**Théorème 1.1.5.15.** *Soit  $\Delta$  un éventail. Soient  $v_i$  les générateurs minimaux des 1-cônes de  $\Delta$  et  $h : \mathbb{R}^{\Delta(1)} \rightarrow \mathbb{N}_{\mathbb{R}}$  l'application linéaire définie par :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\Delta(1)}, h(x) = \sum_{i \in \Delta(1)} x_i v_i$$

*Alors le morphisme torique  $\mathcal{S} \rightarrow X_{\Delta}$  défini par  $h$  est un quotient catégorique pour l'action de  $G$ . Il est géométrique si, et seulement si,  $\Delta$  est simplicial.*

**Exemple 1.1.5.16.** Dans le cas du plan projectif, cela correspond à la projection  $\mathcal{S} = \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ . Le groupe  $G$  est  $\text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(\mathbb{P}^2)]) = \text{Spec}(\mathbb{C}[\mathbb{Z}]) = \mathbb{G}_{m, \mathbb{C}}$ .

## 1.2 Variétés toriques et polytopes

On va aborder une autre façon de construire une variété torique à partir d'une donnée combinatoire qui sera cela d'un polytope. Cette construction est plus utilisée en géométrie symplectique (voir, par exemple, [32, §4]) puisque les variétés ainsi obtenues sont projectives et donc symplectiques (grâce à la forme de Fubini-Study).

### 1.2.1 Polytopes

**Définition 1.2.1.1.** Soit  $M \subset M_{\mathbb{R}}$  un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un réseau. Un polytope  $P$  dans  $M_{\mathbb{R}}$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini  $S$  de points de  $M_{\mathbb{R}}$  i.e.

$$P = \text{Conv}(S) := \left\{ \sum_{s \in S} \alpha_s s \mid \alpha_s \in \mathbb{R}_{\geq 0}, \sum_{s \in S} \alpha_s = 1 \right\}$$

Il sera dit entier si on peut choisir  $S$  dans  $M$ . La dimension d'un polytope est la dimension du plus petit espace affine de  $M_{\mathbb{R}}$  le contenant.

**Exemple 1.2.1.2.**

- les polygones réguliers de  $\mathbb{R}^2$  sont des polytopes.
- les solides de Platon de  $\mathbb{R}^3$  sont des polytopes.

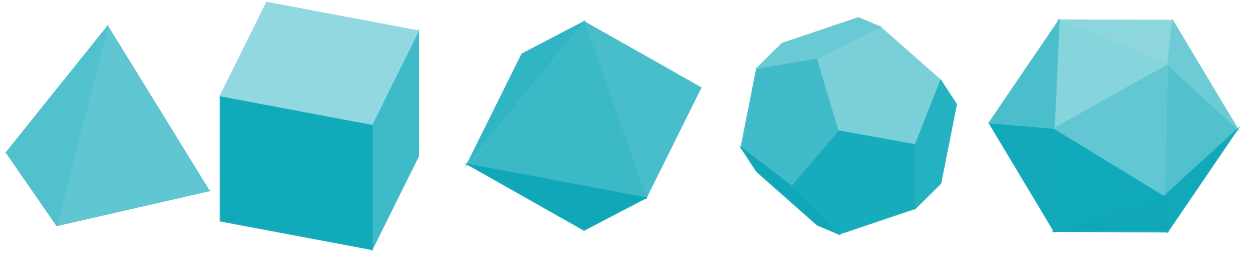


FIGURE 1.6 – Solides de Platon

**Définition 1.2.1.3.** Soit  $P$  un polytope dans  $M_{\mathbb{R}}$ . Un sous-ensemble  $Q$  de  $P$  est une face de  $P$  s'il existe  $u \in M_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$  et  $b \in \mathbb{R}$  tel que :

- $Q = \{x \in P \mid \langle m, x \rangle = b\}$  ;
- $P \subset \{x \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, x \rangle \geq b\}$

Une facette (resp. un côté, un sommet) de  $P$  est une facette de dimension  $\dim(P) - 1$  (resp. 1, 0).

**Exemple 1.2.1.4.** Les faces du carré  $[0, 1]^2 = \text{Conv}((0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1))$  sont :

- $[0, 1] \times \{0\}$ ,  $[0, 1] \times \{1\}$ ,  $\{0\} \times [0, 1]$ ,  $\{1\} \times [0, 1]$  en dimension 1 ;
- $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  en dimension 0.

**Lemme 1.2.1.5.** Soit  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  un polytope. Alors,

- $P$  est l'enveloppe convexe de ses sommets ;
- Si  $P = \text{Conv}(S)$  alors tous les sommets de  $P$  sont dans  $S$  ;
- Si  $Q$  est une face de  $P$  alors toutes les faces de  $Q$  sont les faces de  $P$  contenu dans  $Q$  ;

On va maintenant donner une autre caractérisation des polytopes que l'on utilisera dans le [chapitre 11](#). Tout d'abord, on va montrer qu'un polytope est compact.

**Théorème 1.2.1.6** (CARATHÉODORY, [27]). L'enveloppe convexe d'un sous-ensemble  $S$  d'un espace affine de dimension  $n$  est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de  $n + 1$  points de  $S$ .

**Corollaire 1.2.1.7.** L'enveloppe convexe d'un compact est compacte.



*Démonstration.* Soit  $K$  un compact de l'espace affine de dimension  $n$ . Par le [théorème 1.2.1.6](#), l'enveloppe convexe de  $K$  est l'image du compact  $K^{n+1} \times \Delta^n$  (où  $\Delta^n$  est le simplexe standard de dimension  $n$ ) par l'application continue

$$(v_1, \dots, v_{n+1}, x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} x_i v_i$$

□

Comme un polytope est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini alors

**Corollaire 1.2.1.8.** *Un polytope est compact.*

**Théorème 1.2.1.9.** *Soit  $P$  un sous-ensemble de  $M_{\mathbb{R}}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1.  $P$  est un polytope ;
2.  $P$  est borné et est l'intersection de demi-plans fermés.

*Remarque 1.2.1.10.* Si on enlève l'hypothèse « borné », on appelle cela un polyèdre.

**Corollaire 1.2.1.11.** *Soit  $P$  un polytope de dimension maximale dans  $M_{\mathbb{R}}$ . Alors pour toute facette  $F$  de  $P$ , il existe un unique couple (à un coefficient multiplicatif positif près)  $(u_F, a_F)$  tels que*

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall F, \dim(F) = \dim(P) - 1, \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}$$

**Exemple 1.2.1.12.** Le carré  $[0, 1]^2$  est défini par le système d'équations

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ -x \geq -1 \\ -y \geq -1 \end{cases}$$

**Définition 1.2.1.13.** Soit  $P$  un polytope de dimension  $d$ . Alors

- $P$  est un simplexe s'il a  $d + 1$  sommets ;
- $P$  est simplicial si toutes ses faces sont des simplexes
- $P$  est simple si tout sommet est l'intersection d'exactly  $d$  facettes.

**Exemple 1.2.1.14.** Les tétraèdres sont des simplexes, les cubes sont simples, les octaèdres sont simpliciaux, les dodécaèdres sont simples et les icosaèdres sont simpliciaux.

**Définition 1.2.1.15.** Soit  $P$  un polytope de  $M_{\mathbb{R}}$  contenant  $0$  dans son intérieur. Son polytope dual (ou polaire) est le polytope

$$P^\circ = \{u \in M_{\mathbb{R}}^\vee \mid \forall m \in M_{\mathbb{R}}, \langle m, u \rangle \geq -1\}$$

**Lemme 1.2.1.16.** *Soit  $P$  un polytope de  $M_{\mathbb{R}}$  contenant  $0$  dans son intérieur. Alors  $P^{\circ\circ} = P$ . De plus, si on présente  $P$  comme dans le [corollaire 1.2.1.11](#) alors  $P^\circ$  est l'enveloppe convexe des  $\frac{1}{a_F} u_F$ .*

**Exemple 1.2.1.17.** Le tétraèdre est auto-dual, le cube et l'icosaèdre sont duaux et le dodécaèdre et l'icosaèdre sont duaux

Plus généralement, on a le résultat général suivant :

**Lemme 1.2.1.18.** *Les simplexes sont auto-duaux, le dual d'un polytope simple est simplicial et le dual d'un polytope simplicial est dual.*

### 1.2.2 Variétés toriques projectives et polytopes

Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale présenté par :

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall F, \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}.$$

On peut lui associer une famille  $\Delta_P$  de cônes  $\sigma_Q := \text{Cone}(u_F, Q \text{ de } F) \subset N_{\mathbb{R}}$  où  $Q$  parcourt les faces de  $P$

**Proposition 1.2.2.1.** *Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale. Alors la famille  $\Delta_P = \{\sigma_Q\}$  des cônes associés à  $P$  est un éventail complet, appelé éventail normal de  $P$ . De plus, pour toute face  $Q$ ,*

$$\dim(\sigma_Q) + \dim(Q) = \dim(M_{\mathbb{R}}).$$

**Lemme 1.2.2.2.** *Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale et contenant  $0$  dans son intérieur. Alors l'éventail normal de  $P$  est formé des cônes sur les faces de  $P^\circ$ .*

**Notation 1.2.2.3.** On notera  $X_P$  la variété torique associée à l'éventail  $N_P$ .

**Exemple 1.2.2.4.** Soit  $P$  le polytope de sommets

$$-e_1 - e_2, 2e_1 - e_2, -e_1 + 2e_2.$$

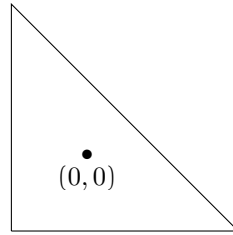


FIGURE 1.7 –  $\text{Conv}(-e_1 - e_2, 2e_1 - e_2, -e_1 + 2e_2)$

Alors  $N_P$  est l'éventail de cônes maximaux

$$e_1, e_2, -e_1 - e_2$$

i.e. celui de  $\mathbb{P}^2$ .

**Théorème 1.2.2.5.** *Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

- $X_P$  est lisse
- $P$  est lisse ou unimodulaire i.e. pour tout sommet  $v$  de  $P$ , les vecteurs  $w_E - v$ , où  $E$  est un côté de  $P$  contenant  $v$  et  $w_E$  est le premier point de  $N \cap E$  obtenu en partant de  $v$  et qui est différent de  $v$ , forment une base de  $M$ .

**Définition 1.2.2.6.** Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale présenté par

$$P = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall F, \langle m, u_F \rangle \geq -a_F\}$$

où  $u_F \in N$  sera supposé être minimal.

Le diviseur associé à  $P$  est le diviseur  $D_P$  sur  $X_P$  défini par :

$$D_P = \sum_F \alpha_F D_{\sigma_F}$$

où la somme parcourt les facettes de  $P$ .

**Lemme 1.2.2.7** ([34] lemma 6.1.10). *Soit  $P$  un polytope entier de dimension maximale. Alors le diviseur  $D_P$  est ample et sans point base. Il est très ample si, et seulement si, le polytope  $P$  est très ample i.e. pour tout sommet  $\mathfrak{m} \in P$ , le monoïde (libre)  $\mathbb{N}(P \cap M - \mathfrak{m})$  est saturé dans  $M$  c'est-à-dire si*

$$\mathbb{N}(P \cap M - \mathfrak{m}) = \text{Cone}(P \cap M - \mathfrak{m}) \cap M.$$

On peut définir une application  $X_P \rightarrow \mathbb{P}(H^0(X_P, \mathcal{O}_{X_P}(D_P))^\vee)$  qui sera un plongement si le polytope est très ample.

**Théorème 1.2.2.8** ([34] theorem 6.2.1). *Soit  $M \subset M_{\mathbb{R}}$  un espace vectoriel de dimension finie muni d'un réseau. Les applications  $P \mapsto (X_P, D_P)$  entre l'ensemble des polytopes entiers de dimension maximale de  $M_{\mathbb{R}}$  et celui des couples (variétés toriques  $X_\Delta$ , diviseurs amples invariants sur  $X_\Delta$ ) est une bijection.*

*Démonstration.* On construit l'inverse de la façon suivante :

Soit  $D = \sum \alpha_F D_F$  un diviseur invariant ample sur  $X_\Delta$ . On peut lui associer une fonction strictement convexe (appelé fonction de support)  $\varphi_D : |\Delta| \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

- $\varphi_D$  est linéaire sur chaque  $\sigma \in \Delta$
- Pour tout  $\rho \in \Delta(1)$ ,  $\varphi_D(\mathbf{u}_\rho) = -\alpha_\rho$

On définit ensuite le polytope associé au diviseur  $D$  par :

$$P_D = \{\mathfrak{m} \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall \mathbf{u} \in |\Sigma|, \varphi_D(\mathbf{u}) \leq \langle \mathfrak{m}, \mathbf{u} \rangle\}$$

□

**Exemple 1.2.2.9.** Considérons le triangle

$$\text{Conv}(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, -(x + y) \geq 1\}.$$

Alors le couple associé à ce polytope est  $(\mathbb{P}^2, D_{\mathbf{e}_1})$  ou autrement dit,  $(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$ .

**Exemple 1.2.2.10.** Considérons le carré

$$[0, 1]^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, -x \geq -1, -y \geq -1\}$$

Alors le couple associé à ce polytope est  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, D_{\mathbf{e}_3} + D_{\mathbf{e}_4})$  ou autrement dit,  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1, \pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$  (où les morphismes  $\pi_i : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$  sont les projections sur les différentes coordonnées). En particulier, le plongement induit par le faisceau  $\pi_1^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \otimes \pi_2^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$  est le plongement de Segre dans  $\mathbb{P}^3$ .

**Corollaire 1.2.2.11.** *Une variété torique normale  $X_\Delta$  est projective si, et seulement,  $\Delta$  est un éventail polytopal i.e. est l'éventail normal d'un polytope.*

# THÉORIE DES CHAMPS

L'ÉTUDE DES CHAMPS PROVIENT de celle des problèmes de modules i.e. la classification d'objets géométriques à une relation d'équivalence près. Une obstruction à l'existence d'un espace de modules fin à un problème de modules est la présence d'isomorphismes dans les objets que l'on veut classifier. L'exemple prototypique de cela est celui de la classification des courbes projectives de genre  $g$  avec  $n$  points marqués qui a amené P.DELIGNE et D.MUMFORD à définir les champs algébriques (qui sont maintenant appelés « champs de Deligne-Mumford ») dans [37]. Par exemple, le champ de modules des courbes de genre 1 et avec un point marqué (i.e. les tores complexes compacts) est

$$[\mathbb{H}/\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})]$$

où  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  agit sur  $\mathbb{H}$  par homographie. Le but des champs algébriques (ou différentiels, analytiques,... selon le contexte géométrique considéré) est de pouvoir donner une structure géométrique à un objet qui n'en aurait pas a priori et notamment aux quotients de variété par des groupes qui n'agissent pas librement ou de façon proprement discontinue. Dans notre exemple, l'action de  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$  sur  $\mathbb{H}$  n'est pas libre. Cette généralisation va être nécessaire pour pouvoir généraliser les variétés toriques définies dans le [chapitre 1](#) pour des éventails ayant des cônes non-rationnels et pour pouvoir classifier ces variétés toriques généralisées (voir [chapitre 4](#)).

Dans la [première section](#), nous allons rappeler les notions autour des problèmes de modules et tout particulièrement celles de faisceaux (d'ensembles) et de topologies de Grothendieck. On conclura par les problèmes apportés par la présence d'automorphismes dans le cas des faisceaux et donc la nécessité d'étendre cette catégorie pour étudier les problèmes de modules. La façon usuelle de faire cela est de remplacer la catégorie des ensembles par celles des groupoïdes. La subtilité ici est que les groupoïdes forment naturellement une 2-catégorie et il est nécessaire pour avoir les bonnes propriétés de les considérer comme tel. On va donc, dans la [deuxième section](#), donner les définitions de base sur les 2-catégories pour étudier les champs. Dans la [troisième section](#), on définira la notion de champs et quels sont les constructions que l'on peut faire avec. Dans la [quatrième section](#), on va se restreindre à la classe des champs « géométriques » (algébriques, analytiques, différentiels,...) qui sont des champs où on peut reprendre les propriétés géométriques standards (lissité, réduction, normalité,...) et les transposer aux champs. On continuera cela dans la [cinquième section](#) en étudiant la théorie de l'homotopie des champs analytiques ou différentiels qui permettront de donner un sens aux groupes d'homotopie et de cohomologie. Un autre classe d'objets intéressants en géométrie analytique ou algébrique sont les faisceaux que l'on va voir dans la [sixième section](#) et tout particulièrement sur le cas qui nous intéresse celui des faisceaux sur les champs quotients (qui sont les faisceaux avec une  $G$ -linéarisation qui sont des objets utilisés dans la théorie géométrique des invariants (cf. [97])). Pour construire les familles universelles au-dessus de nos espaces de modules, on va utiliser des actions de groupes sur des champs. Comme les champs forment une 2-catégorie, on doit adapter les définitions pour obtenir les résultats classiques des actions de groupes, ce que l'on verra

dans la [septième section](#). Enfin, dans la [huitième section](#), on regardera les gerbes au-dessus des champs qui permettront notamment de comprendre les conséquences de l'ineffectivité des actions de groupes sur les champs quotients et quelles sont les relations entre  $[X/G]$  et  $[X/(G/\text{Ineff})]$  (où  $\text{Ineff}$  est le groupe d'ineffectivité de l'action de  $G$  sur  $X$ ).

Pour ce chapitre, nous allons nous baser sur les références suivantes : [44],[14], [115] et [69].

## 2.1 Sites et faisceaux

### 2.1.1 Problèmes de modules

Un problème de modules est un problème de classification d'objets (courbes, fibrés vectoriels,...) à une relation d'équivalence près. Un premier exemple est la classification des droites dans un espace vectoriel fixé  $V$  ou autrement dit, l'ensemble des vecteurs de  $V \setminus \{0\}$  à homothétie près. Une solution à un problème de modules est appelée un espace de modules, un objet géométrique dont les points sont les classes d'équivalences des objets du problème de modules. Une solution au dernier problème est l'espace projectif  $\mathbb{P}(V)$  (comme variété différentiable).

Parmi les espaces de modules associés à un problème de modules, on peut définir le « meilleur » d'entre eux (quand il existe) : l'espace de modules fin. C'est un espace de modules  $\mathcal{M}$  avec une famille universelle  $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}$  i.e. toute famille de courbes, fibrés vectoriels,... au-dessus d'un espace géométrique est obtenue par tiré-en-arrière de la famille universelle  $\mathcal{F}$  (la variété  $\mathbb{P}(V)$  est un espace de modules fin grâce au fibré tautologique :

$$\mathcal{F} = \{(v, L) \in V \times \mathbb{P}(V) \mid v \in L\} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}(V).$$

L'espace de modules fin est unique à isomorphisme près.

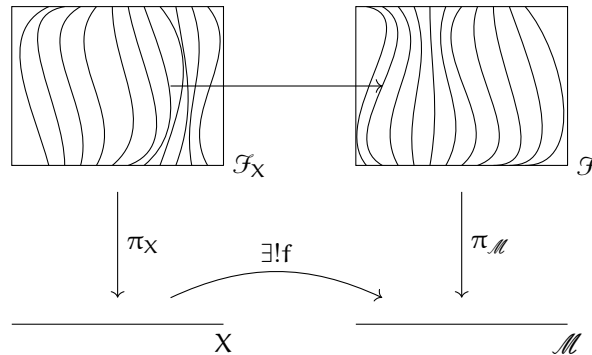


FIGURE 2.1 – Famille universelle

La bonne façon de définir toutes ces notions est d'utiliser le langage catégorique :

**Définition 2.1.1.1.** Un problème de modules est un foncteur  $F: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  d'une catégorie d'objets géométriques  $\mathbf{C}$  (par exemple,  $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}$  la catégorie des schémas,  $\mathbf{An}_{\mathbf{C}}$  la catégorie des espaces analytiques,  $\mathbf{VarDiff}$  la catégorie des variétés différentielles) vers la catégorie des ensembles.

*Remarque 2.1.1.2.* L'existence d'un espace de modules fins est équivalent à la représentabilité du foncteur décrivant le problème de modules (i.e. il existe  $X \in \text{Ob}(\mathbf{C})$  tel que  $F$  soit équivalent à  $\text{Hom}(-, X)$ ).

**Exemple 2.1.1.3.** • Un objet de  $\mathbf{C}$  induit un foncteur  $\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ , noté  $\underline{X}$  et appelé foncteur de points de  $X$ , défini par :

$$Y \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(Y, X).$$

- L'espace projectif de dimension  $n$  est un espace de module fin défini du foncteur

$$S \in \text{Ob}(\mathbf{C}) \mapsto \{\mathcal{L} \rightarrow S \text{ fibré en droites} \subset \mathcal{O}_S^{n+1}\} \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$$

où  $\mathbf{C} = \mathbf{Sch}, \mathbf{AnC}, \mathbf{VarDiff}$ .

On peut définir de façon ressemblante les grassmanniennes (voir, par exemple, [99]).

- Soit  $P \in \mathbb{Q}[t]$ . Le schéma de Hilbert associé au polynôme  $P$  (introduite par A.GROTHENDIECK, voir [59]) est l'espace de module fin du foncteur

$$S \in \text{Ob}(\mathbf{Sch}) \mapsto \{\mathcal{X} \subset \mathbb{P}^n \times S \rightarrow S \text{ plat dont toutes les fibres ont pour polynôme de Hilbert } P\} \in \text{Ob}(\mathbf{Ens})$$

- A.DOUDY a montré que le foncteur analogue pour le cas analytique (en remplaçant  $\mathbb{P}^n$  par un espace analytique quelconque) a aussi un espace de modules fin (dans [41]).

L'énoncé principal sur de tels foncteurs est le lemme de Yoneda :

**Théorème 2.1.1.4** (Lemme de Yoneda). *Soit  $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Ens}$  un foncteur et  $X$  un objet de  $\mathbf{C}$ . Alors, il existe une bijection naturelle*

$$\text{Nat}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, -), F) \simeq F(X), \alpha \mapsto \alpha_X(\text{id}_X)$$

où  $\text{Nat}(F, G)$  désigne les transformations naturelles entre  $F$  et  $G$ .

**Corollaire 2.1.1.5.** *Le foncteur  $\mathbf{C} \rightarrow \text{Hom}(\mathbf{C}^{\text{op}}, \mathbf{Ens}) =: \text{PSh}(\mathbf{C}), X \mapsto \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X)$  est pleinement fidèle*

Autrement dit, pour toute paire d'objets  $X, Y$  dans  $\mathbf{C}$ ,

$$\text{Hom}(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\text{PSh}(\mathbf{C})}(\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X), \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, Y))$$

Le foncteur de points de  $X$  définit donc entièrement  $X$  :

**Corollaire 2.1.1.6.** *Si  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(-, X')$  alors  $X \simeq X'$*

Ces préfaisceaux  $\text{Hom}(-, X)$  induisent des faisceaux sur  $Y$ , pour tout objet  $Y$  :

$$\mathbf{U} \subset Y \mapsto \text{Hom}(\mathbf{U}, X).$$

On verra que ces foncteurs sont des faisceaux pour une bonne notion de topologie que l'on verra dans la sous-section prochaine.

## 2.1.2 Définitions

### 2.1.2.1 Sites

**Définition 2.1.2.1.1.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie. Une topologie de Grothendieck sur  $\mathbf{C}$  est la donnée d'un ensemble  $\mathcal{T}$ , dont les éléments sont des recouvrements i.e. des familles de morphismes de  $\mathbf{C}$   $\{\varphi_i : \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U}\}_{i \in I}$  qui vérifient :

(T1) Soient  $\{\varphi_i : \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U}\}_{i \in I} \in \mathcal{T}$  et  $f : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$  un morphisme de  $\mathbf{C}$ , alors pour tout  $i \in I$ , le produit fibré  $\mathbf{U}_i \times_{\mathbf{U}} \mathbf{V}$  existe et les projections  $(\pi_2)_i : \mathbf{U}_i \times_{\mathbf{U}} \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ , obtenues par le diagramme de produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{U}_i \times_{\mathbf{U}} \mathbf{V} & \xrightarrow{(\pi_2)_i} & \mathbf{V} \\ (\pi_1)_i \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbf{U}_i & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathbf{U} \end{array}$$

forment un recouvrement (topologie induite).

(T2) Soient  $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in I} \in \mathcal{T}$  et, pour tout  $i$ ,  $\{\psi_{ij} : \mathcal{V}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}_i\}_j$  des recouvrements de  $\mathbf{C}$ . Alors,  $\{\varphi_i \circ \psi_{ij} : \mathcal{V}_{ij} \rightarrow \mathcal{U}\}_{ij} \in \mathcal{T}$  (transitivité d'un recouvrement).

(T3) Si  $\varphi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}$  est un isomorphisme alors  $\{\varphi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}\} \in \mathcal{T}$ .

**Définition 2.1.2.1.2.** Un site est la donnée d'une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck

*Remarque 2.1.2.1.3.* La définition 2.1.2.1.1 est, en fait, la définition d'une pré-topologie de Grothendieck. La définition de topologie de Grothendieck est la donnée de cribles sur  $\mathbf{C}$  i.e. la donnée pour tout objet  $c \in \mathbf{C}$  de morphismes de but  $c$  stable par précomposition. On passe d'une définition à l'autre en précomposant les recouvrements  $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$  par les morphismes de but  $\mathcal{U}_i$ .

**Exemple 2.1.2.1.4.** Soit  $X$  un espace topologique. On note  $\mathbf{Ouv}(X)$  la catégorie induite par son réseau d'ouverts. Alors les recouvrements « classiques » (i.e.  $\{\mathcal{U}_i \hookrightarrow \mathcal{U}\}$  est un recouvrement si  $\mathcal{U}_i$  est un ouvert de  $\mathcal{U}$  et si  $\bigcup \mathcal{U}_i = \mathcal{U}$ ) définissent une topologie de Grothendieck sur  $\mathbf{Ouv}(X)$  (car  $\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V} = \mathcal{U}_i \cap \mathcal{V}$ ).

**Exemple 2.1.2.1.5.** Soit  $\mathfrak{S}$  un site. La catégorie tranche  $\mathfrak{S}/_{\mathcal{U}}$  des  $\mathcal{U}$ -objets de  $\mathfrak{S}$  hérite d'une topologie :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{V}_i & \xrightarrow{f_i} & \mathcal{V} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \mathcal{U} & \end{array} \right\} \text{ est un recouvrement de } \mathfrak{S}/_{\mathcal{U}} \text{ si } \{f_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}\} \text{ est un recouvrement de } \mathfrak{S}.$$

**Exemple 2.1.2.1.6.** • La catégorie des espaces topologiques (ou une catégorie d'espaces géométriques :  $\mathbf{Sch}_S$  celle des schémas au-dessus d'un schéma  $S$ ,  $\mathbf{VarDiff}_{\mathbb{K}}$  celle des variétés différentielles sur  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ),  $\mathbf{An}_{\mathbb{C}}$  celle des espaces analytiques,...) peut être muni d'une topologie de Grothendieck en prenant comme recouvrement les familles  $\{\varphi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$  d'immersions ouvertes telles que  $\coprod \varphi_i : \coprod \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}$  soit surjectif (on dira qu'elles sont jointement surjective). On notera  $\mathfrak{Sch}_S$ ,  $\mathfrak{VarDiff}_{\mathbb{K}}$  et  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  les sites associés ;

- Une autre topologie sur  $\mathbf{Sch}_S$  est la topologie étale : ces recouvrements sont des familles  $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$  d'applications étales jointement surjectives (on notera  $\mathfrak{Sch}_{S,et}$  le site associé). Cette topologie a été étudié intensivement dans [6] et est faite notamment pour pallier le fait que le théorème d'inversion locale n'est pas vrai dans les schémas dû aux ouverts trop gros de la topologie de Zariski.

**Exemple 2.1.2.1.7.** Dans cette thèse, on utilisera un autre site, qui sera noté  $\mathfrak{A}$ , définie comme suit :

- Ses objets sont les espaces analytiques complexes munis d'une action d'un groupe analytique abéliens avec une orbite dense ;
- Ses morphismes sont les morphismes équivariants ;
- Un recouvrement est une famille d'immersions ouvertes équivariantes jointement surjectives.

**Notation 2.1.2.1.8.** Dans la suite, on notera les sites en  $\text{fractur}$  (et on écrira de la même façon la catégorie sous-jacente) et le plus souvent par  $\mathfrak{S}$  et les recouvrements du site (i.e. la donnée de  $\mathcal{T}$ ) par  $\text{Cov}(\mathfrak{S})$ .

### 2.1.2.2 Faisceaux

**Définition 2.1.2.2.1.** Un faisceau sur un site  $\mathfrak{S}$  est un foncteur (ou préfaisceau)  $F : \mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  tel que, pour tout recouvrement  $\{\varphi : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in I}$ ,

$$F(\mathcal{U}) = \lim \left( \prod_i F(\mathcal{U}_i) \rightrightarrows \prod_{ij} F(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_j) \right)$$

On note  $\text{Sh}(\mathfrak{S})$  la sous-catégorie pleine de  $\text{PSh}(\mathfrak{S})$  des faisceaux.

**Lemme 2.1.2.2.2.** Soit  $X$  un espace topologique. Un faisceau  $\mathcal{D}\text{ub}(X)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est un faisceau dans le sens standard (par exemple, celui de [65, Chapter II, section 1])

**Proposition 2.1.2.2.3** ([115] Tag 00WH). Le foncteur d'oubli  $\text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{PSh}(\mathcal{C})$  a un adjoint à gauche appelé faisceautisation.

**Corollaire 2.1.2.2.4.** Les limites dans  $\text{Sh}(\mathcal{C})$  commutent avec le foncteur d'inclusion i.e. pour tout diagramme  $\mathcal{I} \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C})$  et tout objet  $X$  de  $\mathcal{C}$ ,

$$(\lim_g \mathcal{F}_i)(X) = \lim_g (\mathcal{F}_i(X))$$

**Corollaire 2.1.2.2.5.** Les colimites dans  $\text{Sh}(\mathcal{C})$  sont obtenus par faisceautisation des colimites dans  $\text{PSh}(\mathcal{C})$  (qui sont calculées terme-à-terme).

**Définition 2.1.2.2.6.** Soient  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux sites. Un foncteur  $F: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  est dit continu s'il vérifie les deux conditions suivantes :

1. Si  $\{\varphi: \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U}\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C}')$  alors  $\{F(\varphi): F(\mathbf{U}_i) \rightarrow F(\mathbf{U})\}_{i \in I} \in \text{Cov}(\mathcal{C})$
2. Soient  $\{\varphi: \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U}\}_{i \in I}$  un recouvrement et  $f: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{U}$  un morphisme de  $\mathcal{C}'$ . La flèche naturelle  $F(\mathbf{U}_i \times_{\mathbf{U}} \mathbf{V}) \rightarrow F(\mathbf{U}_i) \times_{F(\mathbf{U})} F(\mathbf{V})$  est un isomorphisme.

C'est un morphisme de sites<sup>1</sup>  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  si, de plus, le foncteur  $\mathbf{u}_s: \text{Sh}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Sh}(\mathcal{C}')$  (adjoint à gauche du foncteur  $\mathcal{F} \in \text{Sh}(\mathcal{C}') \mapsto (\mathbf{V} \mapsto \mathcal{F}(F(\mathbf{V})) \in \text{Sh}(\mathcal{C}))$  voir [115, Tag 00WW, 00WX] ) est exact.

### 2.1.2.3 Le site analytique équivariant

On étudiera dans ce paragraphe quelques propriétés du site analytique équivariant  $\mathfrak{A}$ .

**Lemme 2.1.2.3.1.** La catégorie **VarTor** des variétés toriques (vues comme espaces analytiques) avec les morphismes toriques entre elles est une sous-catégorie pleine de  $\mathfrak{A}$ .

*Remarque 2.1.2.3.2.* L'inclusion est stricte puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (muni de l'action de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ ) est un espace analytique qui n'est pas torique.

Cette catégorie hérite donc d'une topologie de Grothendieck qui peut être définie de la façon suivante :  $\{\mathbf{U}_i \hookrightarrow \mathbf{U}\}$  est un recouvrement de **VarTor** si c'en est un de  $\mathfrak{A}$ . C'est ce site qui est considéré dans [81] comme base des champs toriques quantiques.

Il existe un foncteur d'oubli  $\mathbf{U}: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$  où on oublie les actions. La fin de ce paragraphe sera dédiée à montrer que ce foncteur définit un morphisme de sites  $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{A}$  :

**Lemme 2.1.2.3.3.** Les produits fibrés existent dans  $\mathfrak{A}$  et le foncteur  $\mathbf{U}$  commute avec eux.

*Démonstration.* Soient  $G \hookrightarrow X, H \hookrightarrow Y$  et  $K \hookrightarrow Z$  trois objets dans  $\mathfrak{A}$  et deux morphismes équivariants  $\varphi: X \rightarrow Z$  et  $\psi: Y \rightarrow Z$ .

On a le diagramme cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccccc} G \times_K H = G \times_Z H & \hookrightarrow & G \times_Z Y & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X \times_Z H & \hookrightarrow & X \times_Y Z & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H & \hookrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

1. On remarque qu'il y a eu un changement de sens des sites



(l'égalité en haut à gauche vient de l'équivariance des morphismes  $X \rightarrow Z$  et  $Y \rightarrow Z$ ). On en déduit donc que  $G \times_K H \hookrightarrow X \times_Z Y$  est un objet dans  $\mathfrak{A}$  pour l'action :

$$(g, h) \cdot (x, y) = (g \cdot_G x, h \cdot_H y)$$

qui est bien définie car :

$$\varphi(g \cdot_G x) = \varphi(g) \cdot_K \varphi(x) = \psi(h) \cdot_K \psi(y) = \psi(h \cdot_H y).$$

Montrons que c'est bien le produit fibré voulu.

Soit  $L \hookrightarrow W$  un objet de  $\mathfrak{A}$  avec deux morphismes  $W \rightarrow X$  et  $W \rightarrow Y$  qui composés par  $\varphi$  et  $\psi$  sont identiques. Par propriété universelle (dans la catégorie des espaces analytiques) de  $X \times_Z Y$ , il existe un unique morphisme  $L \rightarrow X \times_Z Y$  qui est équivariant par propriété universelle (dans la catégorie des groupes analytiques) de  $G \times_Z H = G \times_K H$   $\square$

**Proposition 2.1.2.3.4.** *U est continu (au sens de la définition 2.1.2.2.6).*

*Démonstration.* Le premier point vient de la définition des recouvrements dans  $\mathfrak{A}$  et le deuxième point du lemme 2.1.2.3.3  $\square$

**Lemme 2.1.2.3.5.** *L'objet final de  $\mathfrak{A}$  est  $\text{Spec}(\mathbb{C})$  avec l'action du groupe trivial.*

*Démonstration.* Soit  $G \hookrightarrow X$  un objet de  $\mathfrak{A}$ . Comme  $X$  est un espace analytique alors il existe un unique morphisme  $X \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$ . Ce morphisme est équivariant car il se restreint en un morphisme analytique  $G \rightarrow \text{Spec}(\mathbb{C})$  (qui est juste le morphisme de groupes  $G \rightarrow 1$ ).  $\square$

Pour conclure, on va utiliser le résultat suivant :

**Proposition 2.1.2.3.6** ([115] Tag 00X6). *Soient  $\mathfrak{C}$  et  $\mathfrak{D}$  deux sites et soient  $u : \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{D}$  un foncteur continu tels que :*

- $\mathfrak{C}$  a un objet final  $*$  et que  $u(*)$  est l'objet final de  $\mathfrak{D}$ .
- les produits fibrés dans  $\mathfrak{C}$  existent et  $u$  commute avec eux.

Alors  $u$  définit un morphisme de sites  $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{C}$ .

**Théorème 2.1.2.3.7.** *Le foncteur U définit un morphisme de sites  $\mathfrak{A}_{\mathbb{N}\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{A}$*

*Démonstration.* On utilise la proposition 2.1.2.3.6 : on a vu que U est un foncteur continu dans la proposition 2.1.2.3.4 et qu'il commute aux produits fibrés dans le lemme 2.1.2.3.3. De plus, il envoie l'objet final de  $\mathfrak{A}$  dans  $\mathfrak{A}_{\mathbb{N}\mathbb{C}}$ .  $\square$

### 2.1.3 Une classe d'exemples de faisceaux : les espaces difféologiques

Les espaces difféologiques (réels) ont été introduit par Jean-Marie SOURIAU dans les années 1980 généralisant les variétés différentielles (réelles). C'est la donnée d'un ensemble  $X$  et de pour tout ouvert  $U$  d'un  $\mathbb{R}^n$  d'une famille d'applications  $U \rightarrow X$  qui seront considérés comme « lisses » vérifiant des conditions de compatibilité sur les recouvrements qui en font des faisceaux sur le sites des ouverts des  $\mathbb{R}^n$ . Dans l'article [10], les auteurs ont étendu la définition de difféologie pour des sites plus généraux. Dans cette section, on va donner leurs définitions pour le site des variétés différentielles sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 2.1.3.1.** Un site concret est un site sous-canonique  $\mathfrak{S}$  (i.e. tous les foncteurs représentables sont des faisceaux) avec un objet terminal  $*$  tel que

- Le foncteur  $\text{Hom}_{\mathfrak{S}}(*, -) : \mathfrak{S} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est fidèle ;

- Pour tout recouvrement  $(f_i : X_i \rightarrow X)$ , les fonctions

$$\mathrm{Hom}(*, f_i) : \mathrm{Hom}(*, X_i) \rightarrow \mathrm{Hom}(*, X)$$

sont jointement surjectives

**Lemme 2.1.3.2.** *Le site  $\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}$  (i.e. la catégorie des variétés différentielles sur  $\mathbb{K}$  muni des recouvrements euclidiens) est concret.*

*Démonstration.* L'objet terminal de  $\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}$  est  $\mathrm{Spec}(\mathbb{K})$ . Le foncteur  $\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}), -)$  est le foncteur d'oubli  $\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  car, pour toute variété  $X$ ,

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Spec}(\mathbb{K}), X) = X(\mathbb{K})$$

est l'ensemble sous-jacent de  $X$ . Ce foncteur est fidèle car est la composition de deux foncteurs fidèles : le foncteur d'oubli sur les espaces topologiques, qui est fidèle car les variétés différentielles sont réduites et le foncteur d'oubli sur les ensembles qui est toujours fidèle. □

*Remarque 2.1.3.3.* Le site analytique  $\mathcal{A}\mathrm{nc}_{\mathbb{C}}$  n'est pas concret à cause de la présence d'espaces analytiques non-réduits. Si on se restreint aux espaces analytiques réduits, cela devient un site concret.

**Définition 2.1.3.4.** Soit  $\mathcal{C}$  un site concret. Un faisceau  $\mathcal{F} : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  est concret si pour tout  $X \in \mathcal{C}$ , l'application

$$\varphi \in \mathcal{F}(X) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X), \mathcal{F}) \mapsto \varphi_* : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(*, X) \rightarrow \mathcal{F}(*) \quad (2.1)$$

est injective.

**Définition 2.1.3.5.** Un espace difféologique sur  $\mathbb{K}$  est un faisceau concret  $\mathcal{F} : \mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}^{\mathrm{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$ . La catégorie  $\mathbf{Esp}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}$  des espaces difféologiques sur  $\mathbb{K}$  est la sous-catégorie pleine des (pré)faisceaux sur  $\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}$  contenant les espaces difféologiques sur  $\mathbb{K}$ .

Par définition, cela revient à prescrire sur  $X := \mathcal{F}(*)$  l'ensemble de ses fonctions lisses/holomorphes  $U \rightarrow X$  (d'où le terme « concret ») où  $U$  est une variété.

**Exemple 2.1.3.6.** • Les variétés différentielles sur  $\mathbb{K}$  forment une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Esp}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}}$ .

- Les espaces analytiques forment aussi une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Esp}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{C}}$  : en effet, l'espace analytique modèle  $Z(f_1, \dots, f_p) \subset \mathbb{C}^n$  est le produit fibré  $\mathbb{C}^n_{(f_1, \dots, f_p)} \times_0 \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$ . On conclut en utilisant les propriétés de recollement des faisceaux.

**Exemple 2.1.3.7** ([75] 1.33). Soit  $\mathcal{F}$  un espace difféologique. Soit  $A$  un sous-ensemble de  $X = \mathcal{F}(*)$  (notons  $j : A \rightarrow X$  l'inclusion). La difféologie induite sur  $A$  est définie par :

$$\forall M \in \mathrm{Ob}(\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}), j^* \mathcal{F}(M) = \{(f : M \rightarrow X) \in \mathcal{F}(M) \mid f(M) \subset A\}$$

**Proposition 2.1.3.8** ([123]). *L'inclusion  $\mathbf{Esp}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}} \hookrightarrow \mathrm{Sh}(\mathcal{V}\mathrm{ar}\mathcal{D}\mathrm{iff}_{\mathbb{K}})$  a un adjoint à droite, appelé foncteur de concrétisation  $\kappa$ .*

## 2.1.4 Automorphismes dans les problèmes de modules

Le cadre des faisceaux n'est pas suffisant dans l'étude des problèmes de modules. En effet, cela induit la perte de l'information des automorphismes de ce que l'on veut classifier :

Par exemple, si on veut classifier les  $G$ -fibrés (localement triviaux) principaux (où  $G$  est un groupe de Lie) à isomorphisme près i.e. on cherche une variété  $\mathcal{B}G$  telle que

$$\text{Hom}_{\text{VarDiff}_{\mathbb{R}}}(X, \mathcal{B}G) = \{\mathcal{P} \rightarrow X \text{ fibré } G\text{-principal}\}/\text{iso}$$

Cependant un tel espace ne peut pas exister. En effet, les fibrés étant localement triviaux, les morphismes  $X \rightarrow \mathcal{B}G$  sont localement constants (car si  $\{U_i\}$  est un recouvrement trivialisant d'un fibré principal  $\mathcal{P} \rightarrow X$ , donné par  $X \rightarrow \mathcal{B}G$ , alors les composées  $U_i \hookrightarrow X \rightarrow \mathcal{B}G$  est le morphisme donné par le fibré trivial  $U_i \times G \rightarrow U_i$ ), ce qui est absurde.

Une autre façon de voir cela est la suivante : on considère une variété  $X$  muni d'une action triviale d'un groupe de Lie  $G$ . On peut définir le « quotient » défini comme le coégaliseur  $X/G := \text{coeg}(\text{act}, \pi_1 : X \times G \rightrightarrows X)$  i.e. vérifiant que la projection  $\pi : X \rightarrow X/G$  vérifie la propriété universelle suivante :

- $\pi \circ \text{act} = \pi \circ \pi_1$  ;
- Si une autre morphisme  $X \rightarrow Z$  vérifie cette égalité alors il se factorise par  $\pi$ .

Alors dans notre cas, c'est la variété  $X$ . Le quotient oublie donc totalement l'action de  $G$ . C'est pour cela que le fait de se restreindre aux faisceaux d'ensembles est insuffisant et il faut réussir à étendre la catégorie des ensembles afin de permettre de se souvenir des automorphismes de la structure.

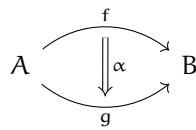
## 2.2 2-catégories

Cette section sera dédiée à l'étude des 2-catégories ce qui nous permettra de définir les champs dans la section 2.3 qui permettront de résoudre les problèmes soulevés dans la sous-section 2.1.4.

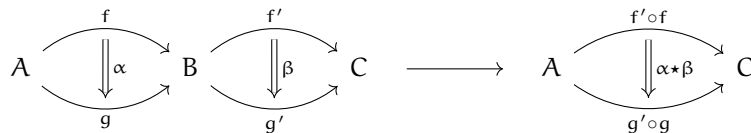
### 2.2.1 Définitions

**Définition 2.2.1.1.** Une 2-catégorie  $\mathcal{C}$  est la donnée :

- d'un ensemble d'objets  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  ;
- pour tout objet  $A, B$ , d'une catégorie  $\mathbf{Hom}(A, B)$ . Les objets de cette catégorie sont appelés 1-morphismes de  $\mathcal{C}$  et les morphismes, 2-morphismes de  $\mathcal{C}$ . La composition des morphismes de cette catégorie est appelée composition verticale ;



- pour tout triplet d'objets  $(A, B, C)$ , d'un foncteur  $\mathbf{Hom}(B, C) \times \mathbf{Hom}(A, B) \rightarrow \mathbf{Hom}(A, C)$ . L'image par ce foncteur d'une paire de 1-morphismes  $(f, g)$  est appelé composée de  $f$  et  $g$ , et notée  $f \circ g$ , et celle d'une paire de 2-morphismes  $(\alpha, \beta)$ , la composition horizontale de  $\alpha$  et  $\beta$ , et notée  $\alpha \star \beta$



telle que

- Les objets avec les 1-morphismes associés forment une catégorie ;
- La composition horizontale est associative ;

- $\text{id}_{\text{id}_X}$  est le neutre pour la composition horizontale.

**Exemple 2.2.1.2.** • Les catégories forment une 2-catégorie, que l'on notera  $\mathcal{C}at$  avec les foncteurs entre elles et les transformations naturelles entre les foncteurs.

- Les espaces topologiques forment une 2-catégorie avec les applications continues comme 1-morphismes et les homotopies entre elles comme 2-morphismes.

On se donne une 2-catégorie  $\mathcal{C}$ . Les lettres  $A, B, C, \dots$  désigneront les objets,  $f, g, h, \dots$  des 1-morphismes et  $\alpha, \beta, \dots$  des 2-morphismes.

**Définition 2.2.1.3.** On dit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{i} & D \end{array}$$

2-commute s'il existe un 2-isomorphisme  $\varphi : i \circ g \Rightarrow h \circ f$

**Notation 2.2.1.4.** Si le diagramme précédent 2-commute alors on le notera ainsi :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ g \downarrow & & \downarrow h \\ C & \xrightarrow{i} & D \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow \end{array}$$

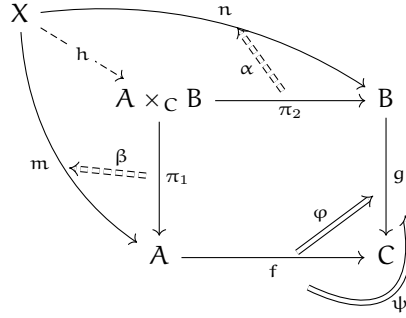
Les 2-limites reprennent cette idée : Au lieu de demander que les diagrammes commutent, on va demander qu'ils 2-commutent.

**Exemple 2.2.1.5.** Soient  $f : A \rightarrow C$  et  $g : B \rightarrow C$  deux 1-morphismes. On définit le produit fibré  $A \times_C B$  avec ses deux projections  $\pi_1 : A \times_C B \rightarrow A$  et  $\pi_2 : A \times_C B \rightarrow B$  tels que

$$\begin{array}{ccc} A \times_C B & \xrightarrow{\pi_2} & B \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array} \begin{array}{c} \nearrow \varphi \\ \searrow \end{array}$$

et qui vérifie la propriété universelle suivante :

- Pour toute paire de morphismes  $m : X \rightarrow A$  et  $n : X \rightarrow B$  avec un 2-isomorphisme  $\psi : fm \cong gn$ , il existe  $h : X \rightarrow A \times_C B$  et des isomorphismes  $\alpha : \pi_1 h \cong m$  et  $\beta : \pi_2 h \cong n$  tels que  $g\beta \circ \varphi h \circ \alpha^{-1} = \psi$ , (où si  $f$  est un 1-morphisme et  $\eta$  un 2-morphisme,  $f\eta = \text{id}_f \star \eta$ ),



- Pour toute paire de morphismes  $u, t : X \rightarrow A \times_C B$  et des 2-morphismes  $\alpha : \pi_1 u \Rightarrow \pi_1 t$  et  $\beta : \pi_2 u \Rightarrow \pi_2 t$  tels que  $\varphi t \circ f \alpha = g \beta$ , il existe un unique 2-morphisme  $\gamma : u \Rightarrow t$  tel que  $p\gamma = \alpha$  et  $q\gamma = \beta$ .

**Exemple 2.2.1.6** ([115] Tag 003R). Prenons  $\mathbb{C} = \mathbb{C}at$ . Soient  $F : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$  et  $G : \mathbf{F} \rightarrow \mathbf{E}$  deux foncteurs. Le produit fibré  $\mathbf{D} \times_{\mathbf{E}} \mathbf{F}$  existe et

- ses objets sont les triplets  $(A, B, f)$  où  $A$  est un objet de  $\mathbf{D}$ ,  $B$  est un objet de  $\mathbf{F}$  et  $f$  est un isomorphisme  $F(A) \rightarrow G(B)$  dans  $\mathbf{E}$ ,
- un morphisme entre  $(A, B, f)$  et  $(A', B', f')$  est une paire de morphisme  $a : A \rightarrow A'$  et  $b : B \rightarrow B'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{f} & G(B) \\ F(a) \downarrow & & \downarrow G(b) \\ F(A') & \xrightarrow{f'} & G(B') \end{array}$$

commute.

**Définition 2.2.1.7.** Soient  $\mathbf{A}$  une catégorie et  $\mathbb{C}$  une 2-catégorie. Un pseudo-foncteur (ou 2-foncteur) de  $\mathbf{A}$  dans  $\mathbb{C}$  est la donnée :

- d'une application  $\mathcal{L} : \text{Ob}(\mathbf{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathbb{C})$ ,
- Pour toute paire  $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{A})$  et tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$ , d'un 1-morphisme  $\mathcal{L}(f) : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{L}(Y)$ ,
- Pour tout  $X \in \text{Ob}(\mathbf{A})$ , un 2-morphisme  $\alpha_X : \text{id}_{\mathcal{L}(X)} \rightarrow \mathcal{L}(\text{id}_X)$ ,
- Pour toute paire de morphismes composables  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  de  $\mathbf{A}$ , d'un 2-morphisme  $\alpha_{g,f} : \mathcal{L}(g \circ f) \rightarrow \mathcal{L}(g) \star \mathcal{L}(f)$ .

qui vérifient

- Les 2-morphismes  $\alpha_X$  and  $\alpha_{g,f}$  sont des isomorphismes,
- pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{A}$  on a  $\alpha_{f, \text{id}_X} = \text{id}_{\mathcal{L}(f)} \star \alpha_X$ ,
- pour tout morphisme  $(f : X \rightarrow Y)$  dans  $\mathbf{A}$ , on a  $\alpha_{\text{id}_Y, f} = \alpha_Y \star \text{id}_{\mathcal{L}(f)}$ ,
- pour tout triplet de morphismes composables  $(f : W \rightarrow X), (g : X \rightarrow Y)$  et  $(h : Y \rightarrow Z)$  de  $\mathbf{A}$ , on a

$$(\text{id}_{\mathcal{L}(h)} \star \alpha_{g,f}) \circ \alpha_{h, g \circ f} = (\alpha_{h,g} \star \text{id}_{\mathcal{L}(f)}) \circ \alpha_{h \circ g, f}$$

**Définition 2.2.1.8.** Soit  $\mathbf{A}$  une catégorie et  $\mathbb{C}$  une 2-catégorie. Un morphisme de pseudo-foncteurs  $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{Y}$  entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathbb{C}$  est une collection de foncteurs  $(F_X : \mathcal{L}(X) \rightarrow \mathcal{Y}(X))_{X \in \text{Ob}(\mathbf{A})}$  telle que, pour

tout  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{A}$ , on ait un isomorphisme naturel  $F_f : F_Y \mathcal{Z}(f) \Rightarrow \mathcal{Y}(f) F_X$  i.e. on ait ce diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X) & \xrightarrow{\mathcal{Z}(f)} & \mathcal{Z}(Y) \\ F_X \downarrow & \nearrow F_f & \downarrow F_Y \\ \mathcal{Y}(X) & \xrightarrow{\mathcal{Y}(f)} & \mathcal{Y}(Y) \end{array}$$

Un 2-morphisme de pseudo-foncteurs  $\varphi : F \Rightarrow G$  entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathcal{C}$  est une famille de transformations naturelles  $(\varphi_X : F_X \rightarrow G_X)_{X \in \text{Ob}(\mathbf{A})}$  vérifiant, pour tout  $f : X \rightarrow Y$  dans  $\mathbf{A}$ ,

$$(\mathcal{Y}(f)\varphi_X) \circ F_f = G_f \circ (\varphi_Y \mathcal{Z}(f))$$

Autrement dit, le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} F_Y \mathcal{Z}(f) & \xrightarrow{\varphi_Y \mathcal{Z}(f)} & G_Y \mathcal{Z}(f) \\ F_f \downarrow & & \downarrow G_f \\ \mathcal{Y}(f) F_X & \xrightarrow{\mathcal{Y}(f)\varphi_X} & \mathcal{Y}(f) G_X \end{array}$$

**Théorème 2.2.1.9.** *Soit  $\mathbf{A}$  une catégorie et  $\mathcal{C}$  une 2-catégorie. La donnée des pseudo-foncteurs entre  $\mathbf{A}$  et  $\mathcal{C}$  avec ses morphismes et ses 2-morphismes définit une 2-catégorie que l'on notera  $\text{p}\mathfrak{F}\text{unc}(\mathbf{A}, \mathcal{C})$ .*

Dans la suite, on considérera des pseudo-foncteurs dans une 2-catégorie précise qui est celle des groupoïdes.

## 2.2.2 Groupoïdes

**Définition 2.2.2.1.** Un groupoïde est un catégorie où tous les morphismes sont inversibles.

**Lemme 2.2.2.2.** *Soit  $\mathbf{G}$  un groupoïde. Alors il est équivalent à la sous-catégorie pleine  $\text{sq}(\mathbf{G})$ , appelé squelette de  $\mathbf{G}$ , constituée des représentants des classes d'isomorphie des objets de  $\mathbf{G}$ . Les morphismes de  $\text{sq}(\mathbf{G})$  sont donc donnés par :*

$$\text{Hom}_{\text{sq}(\mathbf{G})}(x, y) = \begin{cases} \text{Aut}_{\mathbf{G}}(x) & \text{si } x = y \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

*Démonstration.* L'inclusion  $\text{sq}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{G}$  est pleinement fidèle et essentiellement surjective par construction. C'est donc une équivalence de catégories.  $\square$

La donnée d'un groupoïde de points est donc équivalente à la donnée d'un ensemble de points avec un groupe d'automorphismes en chacun de ses points. Cela permettra donc étendre la construction par foncteurs de points en conservant la donnée des automorphismes des objets considérés.

**Lemme 2.2.2.3 ([101]).** *Un groupoïde est entièrement décrit par deux ensembles :  $G_0$  (les objets) et  $G_1$  (les morphismes), et cinq morphismes de structure : les morphismes de source et de but  $s, t : G_1 \rightarrow G_0$  (qui associe à un morphisme  $x \rightarrow y$  l'objet  $x$  resp.  $y$ ), la composition  $m : G_1 \times_t G_1 \rightarrow G_0$ , l'inverse  $i : G_1 \rightarrow G_1$  et l'identité  $e : G_0 \rightarrow G_1$ . Ces applications vérifient les conditions suivantes :*

- $\forall g, h \in G_1, s(m(g, h)) = s(g) ; t(m(g, h)) = t(h) ;$
- $\forall g, h, k \in G_1, m(g, m(h, k)) = m(m(g, h), k) ;$
- $\forall g \in G_1, m(e(t(g)), g) = g ; m(g, e(s(g))) = g ;$

- $\forall g \in G_1, m(g, i(g)) = e(s(g)) ; m(i(g), g) = e(t(g)).$

**Exemple 2.2.2.4.** • Un ensemble  $X$  définit un groupoïde : ses objets sont les éléments de  $X$  et pour tout  $x, y \in X, \text{Hom}(x, y) = \{\text{id}_x\}$  si  $x = y$  et est vide sinon. Dans ce cas, les morphismes  $s, t, m, e, i$  sont l'identité de  $X$  ;

- Soit  $X$  un espace topologique. Le groupoïde fondamental de  $X$  est la catégorie dont les objets sont les points de  $X$  et les morphismes de  $x$  dans  $y$  sont les classes d'homotopie de chemins de  $x$  vers  $y$ . L'ensemble des morphismes est l'ensemble, que l'on notera  $LX$  des classes d'homotopies de lacets entre deux points fixés de  $X$  et l'ensemble des objets est  $X$ . Les morphismes de but et de source sont

$$s : [\gamma] \in LX \mapsto \gamma(0) \in X, t : [\gamma] \in LX \mapsto \gamma(1) \in X$$

La multiplication est

$$m : (\gamma, \delta) \in LX \times_X LX \mapsto [\gamma \circ \delta] \in LX$$

$$\text{où } \gamma \circ \delta : t \mapsto \begin{cases} \delta(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq 0.5 \\ \gamma(2t - 1) & \text{sinon} \end{cases},$$

l'inverse est

$$i : [\gamma] \in LX \mapsto [t \mapsto \gamma(1 - t)] \in LX$$

et l'élément neutre est

$$e : x \in X \mapsto [t \mapsto x] \in LX.$$

- Soit  $X$  un ensemble et  $\sim$  une relation d'équivalence sur  $X$ . Alors le groupoïde associé à  $\sim$  est la catégorie dont les objets sont les éléments de  $X$  et pour tout  $x, y \in X, \text{Hom}(x, y) = \text{id}_x$  si  $x \sim y$  et est vide sinon. L'ensemble des morphismes est  $R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \sim y\}$  et l'ensemble des objets est  $X$ . Les morphismes de but et de de source sont les projections, la multiplication

$$((x, y), (y, z)) \in R \times_X R \mapsto (x, z) \in R,$$

l'inverse est

$$(x, y) \in R \mapsto (y, x) \in R$$

et l'élément neutre est

$$x \in X \mapsto (x, x) \in R.$$

- Soit  $X$  un ensemble et  $G$  un groupe agissant sur  $X$ . Alors, on peut définir le groupoïde de translation associé  $G \ltimes X$  à cette action par :

$$\pi_2, \text{act} : (G \ltimes X)_1 = G \times X \rightrightarrows X = (G \ltimes X)_0$$

La multiplication est

$$(x, g, h) \in (X \times G) \times_X (X \times G) = X \times G \times G \mapsto (g \cdot x, x),$$

l'inverse est

$$i : (x, g) \in X \times G \mapsto (g \cdot x, g^{-1}) \in X \times G$$

et l'élément neutre est

$$e : x \in X \mapsto (x, e_G) \in X \times G$$

**Proposition 2.2.2.5.** *Les groupoïdes forment une sous-2-catégorie pleine  $\mathcal{G}p\mathcal{b}$  de la 2-catégorie des catégories et tous les 2-morphismes de cette catégorie sont inversibles.*

**Lemme 2.2.2.6.** *Un morphisme de groupoïdes  $F : \mathbf{G} = (\mathbf{G}_1 \rightrightarrows \mathbf{G}_0) \rightarrow \mathbf{H} = (\mathbf{H}_1 \rightrightarrows \mathbf{H}_0)$  est aussi la donnée d'un morphisme  $F_1 : \mathbf{G}_1 \rightarrow \mathbf{H}_1$  et d'un morphisme  $F_0 : \mathbf{G}_0 \rightarrow \mathbf{H}_0$  tels que :*

- $s_{\mathbf{H}}F_1 = F_0s_{\mathbf{G}}$  (un foncteur envoie un objet sur un objet);
- $t_{\mathbf{H}}F_1 = F_0t_{\mathbf{G}}$  (un foncteur envoie un morphisme sur un morphisme);
- $m_{\mathbf{H}}(F_1-, F_1-) = F_1m_{\mathbf{G}}(-, -)$  (un foncteur respecte la composition);

où  $s_{\mathbf{G}}, s_{\mathbf{H}}, \dots$  désignent les morphismes structuraux des groupoïdes associés.

*Remarque 2.2.2.7.* • Les deux premières conditions s'écrivent en diagramme de la façon suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_1 & \xrightarrow{F_1} & \mathbf{H}_1 \\ s_{\mathbf{G}} \downarrow & & \downarrow s_{\mathbf{H}} \\ \mathbf{G}_0 & \xrightarrow{F_0} & \mathbf{H}_0 \\ t_{\mathbf{G}} \downarrow & & \downarrow t_{\mathbf{H}} \end{array}$$

- $F_0$  et  $F_1$  commutent avec les autres morphismes structuraux (grâce aux égalités du [lemme 2.2.2.3](#)).

Dans la suite, on va vouloir recoller des champs ou autrement dit prendre des colimites de champs. Pour ce faire, nous allons tout d'abord voir comment faire des colimites de groupoïdes puis, dans la section suivante, de pseudo-foncteurs  $\mathfrak{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  puis de champs.

Rappelons, tout d'abord, le cas 1-catégorique :

**Lemme 2.2.2.8** ([\[112\]](#) exemple 4.1.15). *Le foncteur d'inclusion (pleinement fidèle)  $\mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Cat}$  a un adjoint à gauche donné par la localisation de toutes les flèches et un adjoint à droite donné par le groupoïde maximal de la catégorie.*

Si on considère, cette fois-ci,  $\mathfrak{Gpd}$  et  $\mathfrak{Cat}$  comme des 2-catégories, on a le résultat suivant :

**Proposition 2.2.2.9** ([\[48\]](#) Lemma 1.2). *Le 2-foncteur d'inclusion (pleinement fidèle)  $\iota : \mathfrak{Gpd} \rightarrow \mathfrak{Cat}$  a un 2-adjoint à gauche (que l'on notera  $\mathcal{L}$  et qui va localiser une catégorie en l'ensemble des morphismes de cette catégorie) i.e. on a une équivalence de catégories*

$$\mathbf{Hom}_{\mathfrak{Gpd}}(\mathcal{L}(\mathbf{C}), \mathbf{G}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathfrak{Cat}}(\mathbf{C}, \iota\mathbf{G})$$

pour toute catégorie  $\mathbf{C}$  et tout groupoïde  $\mathbf{G}$ .

On n'a pas l'adjonction dans l'autre sens car dans ce cas là, on a retiré des foncteurs et donc on a perdu des transformations naturelles; on ne peut donc plus avoir d'équivalence de catégories entre les catégories de morphismes.

**Proposition 2.2.2.10** ([\[100\]](#)). *Soit  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{Cat}$  un diagramme de catégories. La colimite de ce diagramme est la catégorie, notée  $\int D$ , dont les objets sont les couples  $(i, \mathbf{a})$  où  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$  et  $\mathbf{a} \in \text{Ob}(F(i))$  et dont les morphismes sont les paires  $(f : i \rightarrow i', \alpha : F(f)(\mathbf{a}) \rightarrow \mathbf{a}')$ .*

**Corollaire 2.2.2.11.** *Soit  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  un diagramme de groupoïdes. Alors*

$$\text{colim}(D) = \mathcal{L} \left( \int D \right)$$



*Démonstration.* On a les équivalences suivantes (où  $\underline{\mathbf{E}}$  est le pseudo-foncteur constant valant  $\mathbf{E}$ ) :

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G}\text{pb}}\left(\mathcal{L}\left(\int \mathbf{D}\right), \mathbf{E}\right) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}\text{at}}\left(\int \mathbf{D}, \mathfrak{t}\mathbf{E}\right) \quad (2.2)$$

$$\simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{G}\text{at}}(\text{colim}(\mathfrak{t}\mathbf{D}), \mathfrak{t}\mathbf{E}) \quad (2.3)$$

$$\simeq \mathbf{Hom}_{\text{p}\mathcal{F}\text{onc}(\mathcal{G}, \mathcal{G}\text{at})}(\mathfrak{t}\mathbf{D}, \mathfrak{t}\underline{\mathbf{E}}) \quad (2.4)$$

$$\simeq \mathbf{Hom}_{\text{p}\mathcal{F}\text{onc}(\mathcal{G}, \mathcal{G}\text{pb})}(\mathbf{D}, \underline{\mathbf{E}}) \quad (2.5)$$

La première vient de l'adjonction de la proposition 2.2.2.9, la deuxième de la proposition 2.2.2.10, la troisième de la définition de colimite et la quatrième de la pleine fidélité de  $\mathfrak{t}$ .  $\square$

**Exemple 2.2.2.12.** Soit  $\mathcal{G}$  la catégorie

$$\begin{array}{ccc} & \text{id} & \\ & \curvearrowright & \\ & 2 & \\ & \uparrow_{0 \rightarrow 2} & \\ 1 & \xleftarrow{0 \rightarrow 1} & 0 \\ \text{id} \curvearrowright & & \text{id} \curvearrowright \end{array}$$

et  $\mathbf{D}$  un diagramme  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}\text{pb}$ . La colimite de  $\mathbf{D}$  est donc la somme amalgamée de  $\mathbf{D}(1)$  et  $\mathbf{D}(2)$  le long de  $\mathbf{D}(0)$ . La catégorie  $\int \mathbf{D}$  est la catégorie dont les objets sont les éléments de  $\coprod_i \mathbf{D}(i)$  et les morphismes sont :

- $\text{Hom}((0, c), (i, d)) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(i)}(\mathbf{D}(0 \rightarrow i)(c), d)$  pour  $i = 1, 2$ ;
- $\text{Hom}((i, c), (i, d)) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(i)}(c, d)$  pour  $i = 0, 1, 2$ .

Pour obtenir la colimite voulue, on va inverser les morphismes de  $\text{Hom}_{\mathbf{D}(i)}(\mathbf{D}(0 \rightarrow i)(c), d)$ . Autrement dit, les morphismes  $(1, c) \rightarrow (2, d)$  existent s'il existe un objet  $x \in \mathbf{D}(0)$  tel que

- $c \simeq \mathbf{D}(0 \rightarrow 1)(x)$ ;
- $d \simeq \mathbf{D}(0 \rightarrow 2)(x)$ ;

Alors ces morphismes sont de la forme

$$\begin{array}{ccc} (0, x) & \longrightarrow & (1, c) \\ \downarrow & & \\ (2, d) & & \end{array}$$

On peut ensuite remarquer que ce groupoïde, que l'on notera  $\mathbf{D}(1) \coprod_{\mathbf{D}(0)} \mathbf{D}(2)$ , est équivalent à celui dont les objets sont les éléments de  $\text{Ob}(\mathbf{D}(1)) \coprod \text{Ob}(\mathbf{D}(2))$  et avec les morphismes induits en identifiant les objets de  $\mathbf{D}(0)$  avec ceux obtenus comme image de  $\mathbf{D}(0 \rightarrow 1)$  où les morphismes sont définis comme suit

- $\text{Hom}((i, c), (i, d)) = \text{Hom}_{\mathbf{D}(i)}(c, d)$  si  $i = 1, 2$ ;
- $\text{Hom}((i, c), (j, d)) = \left\{ \begin{array}{ccc} (0, x) & \longrightarrow & (i, c) \\ \downarrow & & \\ (j, d) & & \end{array} \mid c \simeq \mathbf{D}(0 \rightarrow i)(x), d \simeq \mathbf{D}(0 \rightarrow j)(x) \right\}$  pour  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ .

## 2.3 Champs

On a maintenant tout ce qu'il faut pour définir les objets que l'on va considérer : les champs. Pour cette section, on se fixe un site  $\mathcal{C}$  pour lequel les foncteurs représentables soient des faisceaux (par exemple, les sites introduits dans la sous-sous-section 2.1.2.1) pour avoir un lemme de Yoneda pour les champs.

### 2.3.1 Généralités

**Notation 2.3.1.1.** Soient  $\mathcal{X} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{G}\text{pd}$  un pseudo-foncteur,  $\{p : U_i \rightarrow X\}$  un recouvrement dans  $\mathcal{C}$  et  $P \in \text{Ob}(\mathcal{X}(X))$ . Dans la suite, on abrégera  $\mathcal{X}(p)(P)$  par  $P|_{U_i}$

**Définition 2.3.1.2.** Un champ sur  $\mathcal{C}$  est un pseudo-foncteur  $\mathcal{X} : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{G}\text{pd}$  tel que :

- Pour tout recouvrement  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  et toute famille d'objets  $P_i \in \mathcal{X}(U_i)$ ,  $i \in I$  avec des isomorphismes  $\varphi_{ij} : P_i|_{U_i \times_X U_j} \rightarrow P_j|_{U_i \times_X U_j}$  qui vérifient la condition de cocycles

$$\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$$

sur  $U_i \times_X U_j \times_X U_k$ , il existe un objet  $P \in \mathcal{X}(X)$  avec des isomorphismes  $\varphi_i : P|_{U_i} \rightarrow P_i$  tels que :

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$

- Soient  $P, P' \in \mathcal{X}(X)$ , un recouvrement ouvert  $\{U_i \rightarrow X\}$  et des isomorphismes  $\varphi : P|_{U_i} \rightarrow P'|_{U_i}$  tels que

$$\varphi_i|_{U_i \times_X U_j} \rightarrow \varphi_j|_{U_i \times_X U_j}$$

alors il existe un unique morphisme  $\varphi : P \rightarrow P'$  tel que  $\varphi_i = \varphi|_{U_i}$

*Remarque 2.3.1.3.* La première condition nous dit que, dans un champ, on peut recoller les objets « donnés localement » (i.e. sur un recouvrement) comme pour les faisceaux (on dit aussi que les conditions de descente sont effectives). Mais on peut aussi le faire sur les morphismes par la deuxième condition. Cela justifie l'appellation de « faisceau en groupoïdes » donnée aux champs.

**Exemple 2.3.1.4.** •  $\underline{X} : Y \mapsto \text{Hom}(Y, X)$  est un champ (voir le première exemple de l'exemple 2.2.2.4) ;

- Soit  $X$  un objet de  $\mathcal{C}$  et  $G$  un groupe interne de  $\mathcal{C}$  agissant sur  $X$ . Le pseudo-foncteur

$$[X/G] : T \mapsto \left\{ \begin{array}{c} M \xrightarrow{f} X \\ \pi \downarrow \\ T \end{array} \mid f \text{ est } G\text{-équivariant, } \pi \text{ est un } G\text{-fibré principal} \right\}$$

(les morphismes sont les (iso)morphismes de  $G$ -fibrés principaux qui font commuter le diagramme) est un champ ;

- En particulier,  $\mathcal{B}G := [*/G]$  est un champ (où  $*$  est l'objet final de  $\mathcal{C}$ ).
- Le pseudo-foncteur  $\mathcal{V}ect_r$  qui associe à  $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  le groupoïde des fibrés vectoriels de rang  $r$  sur  $T$  (avec ses isomorphismes de fibrés vectoriels) est un champ. Plus précisément, grâce à l'équivalence de catégories entre les fibrés vectoriels de rang  $r$  et les  $GL(r)$ -fibrés principaux (cf. [62, exemple 5.9], on a un isomorphisme

$$\mathcal{V}ect_r \simeq [*/GL(r)] = \mathcal{B}GL(r)$$

On peut faire la même chose avec les fibrés projectifs et les  $PGL(r)$ -fibrés principaux.

*Remarque 2.3.1.5.* Une autre façon (plus classique) de définir un champ est de remplacer les pseudo-foncteurs par des catégories fibrés en groupoïdes (i.e. des foncteurs  $\mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}$  tels que la « fibre » au-dessus d'un objet est un groupoïde). Les 2-catégories obtenues sont équivalentes grâce à la construction de Grothendieck (cf. [122],[100])

**Définition 2.3.1.6.** La 2-catégorie des champs au-dessus de  $\mathfrak{S}$  est la sous-2-catégorie pleine  $\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}$  de celle des pseudo-foncteurs  $\mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  dont les objets sont les champs i.e. qui vérifie pour toute paire de champs  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$ ,

$$\mathbf{Hom}_{\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \mathbf{Hom}_{\mathfrak{P}^{\text{fonc}}(\mathfrak{S}^{\text{op}}, \mathfrak{Gpd})}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

(en tant que catégorie).

**Lemme 2.3.1.7.** Soient  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  deux champs. Alors la catégorie de morphismes  $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  est un groupoïde.

*Démonstration.* Cela vient de la définition de morphismes de champs et de la proposition 2.2.2.5 □

Comme dans le cas des faisceaux d'ensembles, on a un lemme de Yoneda pour les champs :

**Théorème 2.3.1.8** (Lemme de Yoneda pour les champs). Soit  $\mathcal{X}$  un champ sur  $\mathfrak{S}$  et  $X$  un objet de  $\mathfrak{S}$ . Alors il y a un équivalence canonique de catégories

$$\mathbf{Hom}_{\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}}(\underline{X}, \mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}(X)$$

**Exemple 2.3.1.9.** Un morphisme  $Y \rightarrow [X/G]$  est donc la donnée d'un fibré  $G$ -principal  $P \rightarrow Y$  et d'un morphisme  $G$ -équivariant  $P \rightarrow X$ .

En particulier, on obtient la pleine fidélité du plongement associé :

**Corollaire 2.3.1.10.** Le foncteur  $X \in \mathfrak{S} \mapsto \underline{X} \in \mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}$  est pleinement fidèle.

**Définition 2.3.1.11.** Les champs dans l'image essentielle de ce plongement sont dits représentables.

On a aussi une opération de faisceautisation (qui sera appelé champification ici) :

**Définition 2.3.1.12.** Soit  $\mathcal{X}_0 : \mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  un pseudo-foncteur. Alors une champification de  $\mathcal{X}_0$  est un champ  $\mathcal{X}$  avec un morphisme de pseudo-foncteurs  $\mathfrak{b} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}$  tel que pour tout champ  $\mathcal{Y}$  le foncteur  $\mathbf{Hom}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \rightarrow \mathbf{Hom}(\mathcal{X}_0, \mathcal{Y})$  induite par composition par  $\mathfrak{b}$  est une équivalence de catégories.

**Théorème 2.3.1.13.** Soit  $\mathcal{X}_0 : \mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  un pseudo-foncteur. Soient  $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$  deux champifications de  $\mathcal{X}_0$  donnés par  $\mathfrak{b} : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}$  et  $\mathfrak{b}' : \mathcal{X}_0 \rightarrow \mathcal{X}'$ . Alors il existe un isomorphisme (unique à 2-isomorphisme près)  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}'$  et un 2-isomorphisme  $f \circ \mathfrak{b} \Rightarrow \mathfrak{b}'$  :

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathcal{X}' \\
 & \nearrow \mathfrak{b}' & \downarrow \simeq \\
 \mathcal{X}_0 & & \mathcal{X} \\
 & \searrow \mathfrak{b} & \\
 & & 
 \end{array}$$

**Exemple 2.3.1.14.** Soit  $G$  un groupe de  $\mathfrak{S}$  agissant sur un objet  $X$  de  $\mathfrak{S}$ . On peut former le groupoïde de translation  $G \times X = (\text{act}, \pi_2 : G \times X \rightrightarrows X)$ . Une champification du pseudo-foncteur  $[X/G]^{\text{pre}} : \mathfrak{T} \mapsto [\text{act}(\mathfrak{T}, \pi_2(\mathfrak{T}) : \underline{G}(\mathfrak{T}) \times \underline{X}(\mathfrak{T}) \rightrightarrows \underline{X}(\mathfrak{T}))]$  (où  $\underline{G}$  et  $\underline{X}$  sont les foncteurs  $\mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$  représentables par  $G$  et  $X$ ) est le champ quotient  $[X/G]$ . En effet, on peut remarquer que le groupoïde  $[\underline{G}(\mathfrak{T}) \times \underline{X}(\mathfrak{T}) \rightrightarrows \underline{X}(\mathfrak{T})]$

est le groupoïde des  $G$ -fibrés triviaux  $T \times G \rightarrow T$  avec un morphisme équivariant  $T \times G \rightarrow X$  grâce au diagramme

$$\begin{array}{ccc} G \times T & \longrightarrow & G \times X \xrightarrow{\text{act}} X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi_1 \\ T & \xrightarrow{u} & X \end{array}$$

où  $u \in \text{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X) = \underline{X}(T)$ .

**Théorème 2.3.1.15.** Soient  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  et  $G : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$  deux morphismes de champs. Alors, le 2-produit fibré de ces deux morphismes existe et est défini par, pour tout  $X \in \mathfrak{C}$  :

$$\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}(X) = \{(f, g, \varphi) \mid f : X \rightarrow \mathcal{X}, g : X \rightarrow \mathcal{Y}, \varphi : Ff \simeq Gg\}$$

Les morphismes entre  $(f, g, \varphi)$  et  $(f', g', \varphi')$  sont des paires de morphismes  $(\alpha : f \rightarrow f', \beta : g \rightarrow g')$  tels que  $G\beta \circ \varphi = \varphi' \circ F\alpha$ .

**Exemple 2.3.1.16.** • Soient  $X, Y$  et  $S$  trois objets de  $\mathfrak{C}$ . Alors  $\underline{X} \times_{\underline{S}} \underline{Y} = \underline{X \times_S Y}$  car le seul 2-morphisme d'un champ représentable est l'identité ;

- Soient  $\mathcal{X} = [X/G], \mathcal{Y} = [Y/H]$  deux champs quotients au-dessus d'un objet  $S \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ . Alors  $\mathcal{X} \times_{\underline{S}} \mathcal{Y} = [X \times_S Y/G \times H]$  (cf. [87, 2.2.2 et 2.4.2])
- Soit  $f_P : X \rightarrow \mathcal{B}G$  un morphisme de champs donné par le  $G$ -fibré principal  $P \rightarrow X$ . Alors (voir [69, section 2]),

$$\underline{X} \times_{\mathcal{B}G} * = \underline{P}$$

Autrement dit, on a le diagramme (2-)cartésien suivant :

$$\begin{array}{ccc} P & \longrightarrow & * \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f_P} & \mathcal{B}G \end{array}$$

**Proposition 2.3.1.17** ([87]). Soit  $D : \mathcal{I} \rightarrow \text{pFonc}(\mathfrak{C}^{\text{op}}, \mathfrak{Gpd})$  un diagramme de pseudo-foncteurs. La colimite de  $D$  est calculée fibre-à-fibre : Soit  $U \in \mathfrak{C}$ , on a :

$$\text{colim}(D)(U) = \text{colim}(D(U))$$

où  $D(U)$  est le diagramme de groupoïdes  $\mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  défini, pour tout  $i \in \text{Ob}(\mathcal{I})$ , par  $D(U)(i) := [D(i)](U)$

Par le même raisonnement que dans la preuve du corollaire 2.2.2.11 et avec la 2-adjonction donnée par la champification (de la même façon que dans le corollaire 2.1.2.2.5), on obtient :

**Théorème 2.3.1.18.** Soit  $D : \mathcal{I} \rightarrow \mathfrak{Champ}_{\mathfrak{C}}$  un diagramme de champs. Alors la colimite de  $D$  est la champification du pseudo-foncteur

$$U \mapsto \mathcal{L} \left( \int D(U) \right).$$

**Exemple 2.3.1.19.** Soient  $(\mathcal{X}_i)$  une famille de champs sur le site  $\mathfrak{C}$ . Soit  $U \in \text{Ob}(\mathfrak{C})$ . Alors

$$\text{Ob} \coprod_i \mathcal{X}_i(U) = \coprod_i \text{Ob}(\mathcal{X}_i(U))$$

et

$$\text{Hom}_{\text{Ob} \coprod_i \mathcal{X}_i(U)}((i, x), (j, y)) = \begin{cases} \text{Hom}_{\mathcal{X}_i(U)}(x, y) & \text{si } i = j \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Le champifié  $\mathcal{X}$  du pseudo-foncteur  $\mathbf{U} \mapsto \coprod_i \mathcal{X}_i(\mathbf{U})$  est donné par

$$\text{Ob}(\mathcal{X}(\mathbf{U})) = \left\{ \{ \mathbf{U}_j \rightarrow \mathbf{U} \}_j, \left( x_j \in \prod_i \mathcal{X}_i(\mathbf{U}_j) \right), \{ \varphi_{ij} : x_j|_{\mathbf{U}_j \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_k} \simeq x_k|_{\mathbf{U}_j \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_k} \}_{j,k} \right\}$$

et comme morphismes les familles de morphismes compatible avec les données de descente  $(\varphi_{ij})$ . Comme les seuls morphismes de  $\prod_i \mathcal{X}_i(\mathbf{U}_j \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_k)$  sont ceux entre éléments du même groupoïde (et donc ils ne peuvent pas avoir de données de descente entre eux) et que, par définition de champ, la donnée d'un recouvrement  $\{ \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U} \}$ , d'une famille d'éléments de  $x_i \in \text{Ob} \mathcal{X}_i(\mathbf{U}_i)$  et de données de descente est équivalente à la donnée d'un élément  $\mathcal{X}(\mathbf{U}_i)$  et à des isomorphismes entre les restrictions de  $x$  et les  $x_i$  alors

$$\text{Ob}(\mathcal{X}(\mathbf{U})) \simeq \{ \{ \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U} \}_i, (x_i \in \mathcal{X}_i(\mathbf{U}_i))_i \}$$

**Exemple 2.3.1.20.** Soient  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $G : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  deux morphismes de champs. Alors la somme amalgamée  $\mathcal{Y} \coprod_{\mathcal{X}} \mathcal{Z}$  est le champ dont les objets au-dessus de  $\mathbf{U}$  sont la donnée d'un recouvrement  $\{ \mathbf{U}_i \rightarrow \mathbf{U} \}_{i=1,2}$  et d'une paire d'objet  $(X_1 \in \text{Ob}(\mathcal{Y}(\mathbf{U}_1)), X_2 \in \text{Ob}(\mathcal{Z}(\mathbf{U}_2)))$  qui sont isomorphes sur  $\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2$  si, et seulement si, il existe  $Z \in \mathcal{Z}(\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2)$  tel que  $X_1|_{\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2} = F(\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2)(Z)$  et  $X_2|_{\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2} = G(\mathbf{U}_1 \times_{\mathbf{U}} \mathbf{U}_2)(Z)$  (cf. l'exemple 2.2.2.12).

### 2.3.2 Propriétés géométriques

Dans ce paragraphe, nous allons voir comment définir des propriétés géométriques pour certains morphismes de champs dits représentables :

**Définition 2.3.2.1.** Soit  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme de champs. Ce morphisme est représentable si, pour tout  $T \in \text{Ob}(\mathcal{S})$  et tout morphisme  $\mathbf{I} \rightarrow \mathcal{Y}$ , le produit fibré  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathbf{I}$  est représentable.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathbf{I} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow \tilde{f} & \lrcorner & \downarrow f \\ \mathbf{I} & \xrightarrow{\vee} & \mathcal{Y} \end{array}$$

**Exemple 2.3.2.2.** • La projection  $* \rightarrow \mathcal{B}G$  est représentable (voir l'exemple 2.3.1.16) et même, plus généralement, le morphisme  $X \rightarrow [X/G]$  est représentable.

- Si  $\mathcal{S}$  est stable par produits fibrés alors tout morphisme  $X \rightarrow Y$  est représentable (on peut se restreindre au cas où le tiré-en-arrière de ce morphisme existe, par exemple pour le cas des submersions entre variétés différentielles).

Maintenant que l'on a obtenu un morphisme  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}$  qui est dans  $\mathcal{S}$ , on peut définir les propriétés de  $f$  par les propriétés des morphismes  $\tilde{f}$ . On va commencer par fixer le site  $\mathcal{S}$  comme étant le site  $\mathcal{A}_{\text{nc}}$ ,  $\mathcal{S}_{\text{ch}_{\text{et}}}$  ou  $\mathcal{B}\text{arDiff}$ .

Pour ce faire, il faut tout d'abord que ces propriétés vérifient quelques propriétés de stabilité :

**Définition 2.3.2.3.** Une propriété  $\mathbb{P}$  de morphismes est préservé par extension de la base si, pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  ayant la propriété  $\mathbb{P}$  et pour tout morphisme  $Y' \rightarrow Y$ , le morphisme  $Y' \times_Y X \rightarrow Y'$

a la propriété  $\mathbb{P}$

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y_i & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ Y' & \longrightarrow & Y \end{array}$$

**Définition 2.3.2.4.** La propriété  $\mathbb{P}$  de morphismes dans  $\mathcal{S}$  est locale si, pour tout morphisme  $f : X \rightarrow Y$  et tout recouvrement  $\{Y_i \rightarrow Y\}$  pour lequel  $f_i : X \times_Y Y_i \rightarrow Y_i$  a la propriété  $\mathbb{P}$ , le morphisme  $f$  a la propriété  $\mathbb{P}$ .

**Proposition 2.3.2.5.** Les propriétés suivantes sont locales et préservées par extension de la base : lisse (ou être une submersion), étale (ou être un difféomorphisme local), propre, plat, immersion ouverte, immersion fermée.

**Définition 2.3.2.6.** Soit  $\mathbb{P}$  une propriété locale et préservée par extension de la base. Un morphisme de champ représentable  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  a la propriété  $\mathbb{P}$  si pour tout morphisme  $\mathbb{I} \rightarrow \mathcal{Y}$ , le morphisme  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Y}} \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{I}$  (le champ est représentable par hypothèse) a la propriété  $\mathbb{P}$ .

**Exemple 2.3.2.7.** Si  $G$  est un groupe lisse alors le morphisme  $*$   $\rightarrow \mathcal{B}G$  est lisse (et est même un  $G$ -fibré principal). Plus généralement, la projection  $X \rightarrow [X/G]$  est un  $G$ -fibré principal.

## 2.4 Champs géométriques

Dans cette section, nous allons nous restreindre à une classe de champs avec lesquels « on peut faire de la géométrie » dans le sens où on peut définir les propriétés géométriques sur ces champs ou les morphismes entre eux (généralisant les résultats de la sous-section 2.3.2). Cela s'apparente aux restrictions que l'on fait sur les faisceaux étales en se restreignant aux espaces algébriques (cf. [83]) ou entre les faisceaux sur  $\mathcal{B}ar\mathcal{D}iff$  et les espaces difféologiques.

### 2.4.1 Construction de champs à partir de groupoïde

Pour commencer, nous allons donner une façon de construire des champs à partir des groupoïdes généralisant la construction des champs quotients (voir l'exemple 2.3.1.14) :

**Définition 2.4.1.1.** Soit  $\mathbf{A}$  une catégorie stable par produits fibrés. Un groupoïde dans la catégorie  $\mathbf{A}$  est la donnée de deux objets  $G_0, G_1$  et de cinq morphismes de structure  $s, t : G_1 \rightarrow G_0, m : G_1 \times_{G_0} G_1 \rightarrow G_1, e : G_0 \rightarrow G_1$  et  $i : G_1 \rightarrow G_1$  soumis aux conditions du lemme 2.2.2.3. Un 1-morphisme de groupoïdes internes  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  est la donnée de deux morphismes  $f_1 : G_1 \rightarrow H_1$  et  $f_0 : G_0 \rightarrow H_0$  de  $\mathbf{A}$  respectant les conditions du lemme 2.2.2.6. Un 2-morphisme de groupoïdes internes  $f \Rightarrow g : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  est un morphisme  $\alpha : G_0 \rightarrow H_1$  tel que :

- $s_H \alpha = f_0$  ;
- $t_H \alpha = g_0$  ;
- le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{(\alpha t_G, f_1)} & H_1 \times_{H_0} H_1 \\ \downarrow (g_1, \alpha s_G) & & \downarrow m_H \\ H_1 \times_{H_0} H_1 & \xrightarrow{m_H} & H_1 \end{array}$$

commute

On notera  $\mathbb{G}pd(\mathbf{A})$  la 2-catégorie des groupoïdes internes de  $\mathbf{A}$ . Si  $\mathbf{A} = \mathbf{An}_{\mathbb{C}}$ , ce seront des groupoïdes analytiques, si  $\mathbf{A} = \mathbf{Sch}$ , on dira que ce sont des groupoïdes algébriques,...

*Remarque 2.4.1.2.* On peut aussi considérer une catégorie qui ne soit pas stable par produits fibrés (e.g. la catégorie  $\mathbf{VarDiff}$ ) mais il faut rajouter la condition que les morphismes  $s, t$  admettent des tirés-en-arrière (sont des submersions dans le cas de  $\mathbf{VarDiff}$ ).

De la même façon que dans l'exemple 2.3.1.14, on peut construire un champ à partir d'un groupoïde interne.

**Définition 2.4.1.3.** Soient  $\mathcal{S}$  un site et  $\mathbf{G} = (G_1 \rightrightarrows G_0)$  un groupoïde interne de  $\mathcal{S}$ . Le champ associé au groupoïde  $\mathbf{G}$ , noté  $\mathcal{B}\mathbf{G}$  ou  $[G_1 \rightrightarrows G_0]$ , est la champification du pseudo-foncteur

$$[G_1 \rightrightarrows G_0]^{pre} : T \in \mathcal{S}^{op} \mapsto (\underline{G}_1(T) \rightrightarrows \underline{G}_0(T)) \in \mathbb{G}pd$$

*Remarque 2.4.1.4.* On peut aussi considérer que  $G_1$  et  $G_0$  ne soient pas juste des objets de  $\mathcal{S}$  mais plus généralement des faisceaux sur  $\mathcal{S}$ .

Pour faciliter la description, on va supposer que  $\mathcal{S}$  est une catégorie d'espaces géométriques (i.e.  $\mathcal{S} = \mathcal{C}h_{et}, \mathcal{M}n_{\mathbb{C}}, \mathcal{A}, \mathcal{V}arDiff$ ) et on va considérer seulement des groupoïdes « lisses » i.e. on suppose que  $s$  et  $t$  soient des morphismes lisses (ainsi on peut aussi considérer le cas où  $\mathcal{S} = \mathcal{V}arDiff$ ). On notera  $\mathbb{G}pd_{lisse}(\mathcal{S})$  la 2-sous-catégorie pleine de  $\mathbb{G}pd(\mathcal{S})$  contenant les groupoïdes lisses.

**Proposition 2.4.1.5.** Soit  $G_1 \rightrightarrows G_0$  un groupoïde lisse.

Un objet de  $[G_1 \rightrightarrows G_0](\mathcal{U})$  ou  $G_1 \rightrightarrows G_0$ -torseur au-dessus de  $\mathcal{U}$  est une paire de morphismes

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{m_P} & X_0 \\ \pi \downarrow & & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

avec une « action »  $\rho : P_{m_P \times_s X_1} \rightarrow P$  tel que :

- $m_P(\rho(p, x)) = t(x)$  ( $\rho$ -équivariance de  $m_P$ );
- $\pi(\rho(p, x)) = \pi(p)$  ( $\rho$ -invariance de  $\pi$ );
- Si  $\pi(p) = \pi(p')$  alors il existe un unique  $x \in X_1$  tel que  $p' = \rho(p, x)$  (transitivité de l'action de  $\rho$ );
- Le fibré  $P \rightarrow \mathcal{U}$  est localement trivial i.e. il existe un recouvrement  $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$  tel que, pour tout  $i$ , il existe un morphisme  $C_i : \mathcal{U}_i \rightarrow X_0$  tel que
  - $P \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_i \simeq \mathcal{U}_i \times_{C_i} X_1$ ;
  - La morphisme  $P \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_i \simeq \mathcal{U}_i \times_{C_i} X_1 \rightarrow X_1 \xrightarrow{t} X_0$  est  $m_P|_{\mathcal{U}_i}$
  - Le morphisme  $(P \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_i) \times_{X_0} X_1 \simeq (\mathcal{U}_i \times_{C_i} X_1) \times_{t\pi_2} X_1 \xrightarrow{id \times m} \mathcal{U}_i \times_{C_i} X_1 \simeq P \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_i$  est  $\rho|_{\mathcal{U}_i}$  (où  $m$  est la multiplication du groupoïde)

Un morphisme de  $[G_1 \rightrightarrows G_0](\mathcal{U})$  est la donnée d'un morphisme  $\alpha : P \rightarrow Q$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & & X_0 \\ & \nearrow m_P & \uparrow m_Q \\ P & \xrightarrow{\alpha} & Q \\ \downarrow & \swarrow & \\ \mathcal{U} & & \end{array}$$

**Exemple 2.4.1.6.** Soit  $X$  un espace analytique (resp. schéma, variété,...) et  $\{U_i \rightarrow X\}$  un recouvrement ouvert de  $X$ . On peut définir un groupoïde interne, dit de Čech, associé à ce recouvrement

$$\mathbf{G} = \coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod_i U_i$$

où le morphisme source est l'inclusion  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_i$  et le morphisme but est l'inclusion  $U_i \cap U_j \hookrightarrow U_j$ . Dans ce cas, le champ associé à ce groupoïde est isomorphe à  $\underline{X}$ .

En particulier  $[\text{id}, \text{id}: X \rightrightarrows X] = \underline{X}$

**Lemme 2.4.1.7.** Soit  $F: \mathbf{G} = (G_1 \rightrightarrows G_0) \rightarrow \mathbf{H} = (H_1 \rightrightarrows H_0)$  un morphisme de groupoïdes internes lisses. Il induit un morphisme de champs  $\mathcal{B}F: \mathcal{B}\mathbf{G} \rightarrow \mathcal{B}\mathbf{H}$  défini à un 2-morphisme près.

*Démonstration.* Le morphisme de groupoïdes internes induit un morphisme de pseudo-foncteurs

$$F^*: [G_1 \rightrightarrows G_0]^{\text{pre}} \rightarrow [H_1 \rightrightarrows H_0]^{\text{pre}}$$

grâce au [lemme 2.2.2.6](#). On peut ensuite composer par le morphisme de champification

$$\text{b}F^*: [G_1 \rightrightarrows G_0]^{\text{pre}} \rightarrow [H_1 \rightrightarrows H_0]$$

Par définition de la champification, ce morphisme correspond à un morphisme de champs

$$[G_1 \rightrightarrows G_0] \rightarrow [H_1 \rightrightarrows H_0]$$

à un 2-morphisme près. □

*Remarque 2.4.1.8.*  $\mathcal{B}$  est en fait un 2-foncteur entre la 2-catégorie des groupoïdes internes et celle des champs.

**Théorème 2.4.1.9.** Soit  $F: \mathbf{G} = (G_1 \rightrightarrows G_0) \rightarrow \mathbf{H} = (H_1 \rightrightarrows H_0)$  un morphisme de groupoïdes internes lisses. Le morphisme  $\mathcal{B}F$  est un isomorphisme de champs si, et seulement si,

- $t\pi_1: H_{1s} \times_{F_0} G_0 \rightarrow H_0$  est lisse (resp. submersif) et surjectif
- Le diagramme suivant est cartésien

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{F_1} & H_1 \\ (s_G, t_G) \downarrow & \lrcorner & \downarrow (s_H, t_H) \\ G_0 \times G_0 & \xrightarrow{F_0 \times F_0} & H_0 \times H_0 \end{array}$$

**Définition 2.4.1.10.** Le morphisme  $F$  est une équivalence de Morita entre les groupoïdes s'il vérifie les conditions du théorème précédent.

**Corollaire 2.4.1.11.** Le 2-foncteur  $\mathcal{B}$  descend en un 2-foncteur  $\mathcal{B}: \mathcal{O}pd_{\text{lisse}}(\mathcal{E})[W^{-1}] \rightarrow \mathcal{C}hamp_{\mathcal{E}}$  (où  $W$  est la classe des équivalences de Morita) tel que

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}pd_{\text{lisse}}(\mathcal{E})[W^{-1}]}(\mathbf{G}, \mathbf{H}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{C}hamp_{\mathcal{E}}}(\mathcal{B}\mathbf{G}, \mathcal{B}\mathbf{H})$$

De plus,  $\mathcal{O}pd(\mathcal{E})$  ayant un calcul de fractions à droite (cf. [48]), un morphisme de champs  $\mathcal{B}\mathbf{G} \rightarrow \mathcal{B}\mathbf{H}$



est équivalent à la donnée d'un groupoïde  $\mathbf{K}$  et d'une paire de morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{G} \\ \text{w}\exists \downarrow & & \\ \mathbf{H} & & \end{array}$$

**Exemple 2.4.1.12.** Soit  $G$  un groupe et  $P \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal i.e. un morphisme  $f_P : X \rightarrow \mathcal{B}G$ . Soit  $\{X_i\}$  un recouvrement d'ouverts trivialisant de  $X$ . Alors le morphisme  $f_P$  s'écrit

$$\begin{array}{ccc} [\coprod_{i,j} U_i \cap U_j \rightrightarrows \coprod_i U_i] & \longrightarrow & [G \rightrightarrows *] \\ \simeq \downarrow & & \\ [X \rightrightarrows X] & & \end{array}$$

où le morphisme du haut est donné par les cocycles  $f_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ .

**Théorème 2.4.1.13.** Soient  $P \rightarrow X$  un  $G$ -fibré principal et  $F$  une  $G$ -variété (donnée par le morphisme  $\varphi : G \rightarrow \text{Aut}(F)$ ). Alors le fibré associé  $P \times_{\varphi} F$  est donné par le produit fibré :

$$\begin{array}{ccc} P \times_{\varphi} F & \longrightarrow & [F/G] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{oubli} \\ X & \xrightarrow{f_P} & \mathcal{B}G \end{array}$$

où  $f_P$  est le morphisme donné par le lemme de Yoneda par le fibré  $P \rightarrow X$  et la deuxième flèche oublie le morphisme équivariant vers  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $\{U_i\}$  un recouvrement d'ouverts trivialisant de  $P \rightarrow X$ . Alors le morphisme de  $f_P$  s'écrit comme un zig-zag de morphismes de groupoïdes :

$$\begin{array}{ccc} [\coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i] & \xrightarrow{T} & [G \rightrightarrows *] \\ \simeq \downarrow & & \\ [X \rightrightarrows X] & & \end{array}$$

où la flèche du haut est donnée par les cocycles  $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$  du fibré  $P \rightarrow X$ . Comme la flèche d'oubli est donné par un morphisme de groupoïdes  $U$  alors le produit fibré  $X \times_{\mathcal{B}G} [F/G]$  est donné par le groupoïde :

$$\mathbf{G} := \left[ \coprod_{i,j} U_{ij} \rightrightarrows \coprod_i U_i \right] \times_{[G \rightrightarrows *]} [F \times G \rightrightarrows F]$$

(car la champification commute aux produits fibrés)

Examinons maintenant ce groupoïde :

Ces objets sont les triplets  $(x \in V, y \in \coprod_i U_i, (g : U(x) = * \rightarrow T(y) = *) \in G)$  et les morphismes sont les couples  $(\alpha : x \rightarrow x' \in V \times G, \beta : y \rightarrow y' \in \coprod_{i,j} U_{i,j})$  tels que :

$$\begin{array}{ccc} U(x) = * & \xrightarrow{g} & * = T(y) \\ \text{u}(\alpha) \downarrow & & \downarrow T(\beta) \\ U(x') = * & \xrightarrow{h} & * = T(y') \end{array}$$

Plus précisément,  $\mathbf{y} = \mathbf{y}'$ , il existe  $\gamma$  tel que  $\mathbf{x}' = \gamma \cdot \mathbf{x}$  et  $\mathbf{U}(\alpha) = \gamma$  et  $\mathbf{T}(\beta) = f_{ij}(\mathbf{y})$ . Par conséquent,  $\text{Hom}((\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{g}), (\mathbf{x}', \mathbf{y}', \mathbf{h}))$  a au plus un élément donné (lorsqu'il existe) par  $(\alpha = \mathbf{h}^{-1}f_{ij}(\mathbf{y})\mathbf{g}, \beta = \mathbf{y})$ . Par conséquent, le champ  $\mathcal{B}\mathbf{G}$  est équivalent à la variété donnée par

$$\coprod_{i,j} \mathbf{U}_{ij} \times \mathbf{V} \rightrightarrows \coprod_i \mathbf{U}_i \times \mathbf{V}$$

en oubliant le morphisme  $\mathbf{g}$ .

La première flèche est l'inclusion et la deuxième est

$$\mathbf{t}(\mathbf{y}, \mathbf{v}) = (\mathbf{y}, f_{ij}(\mathbf{y})\mathbf{v})$$

Cette variété est donc bien  $\mathbf{P} \times_{\varphi} \mathbf{F}$ . □

**Proposition 2.4.1.14** ([69] exemple 3.3). *Soit  $X$  une  $G$ -variété et  $H$  un sous-groupe normal de  $G$  agissant librement sur  $X$  et tel que  $X \rightarrow X/H$  soit un  $H$ -fibré principal. Alors*

$$[X/G] = [(X/H)/(G/H)]$$

## 2.4.2 Champs analytiques

Dans cette sous-section, on va se concentrer sur le cas analytique i.e. les champs géométriques au-dessus du site analytique  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ . La littérature sur le cas analytique étant extrêmement réduite et ne donne pas, à la connaissance de l'auteur, toutes les preuves complètes, on donnera les preuves des énoncés donnés.

**Lemme 2.4.2.1** ([14] 5.12). *Soit  $\mathcal{X}$  un champ sur un site  $\mathfrak{S}$  admettant des produits fibrés. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La diagonale  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  est représentable ;*
2. *Pour tout espace  $S \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$ , le morphisme  $\underline{1} \rightarrow \mathcal{X}$  est représentable ;*

*Démonstration.* L'implication 1)  $\Rightarrow$  2) vient de l'isomorphisme

$$S \times_{\mathcal{X}} T \simeq S \times T \times_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \mathcal{X}$$

(qui est aussi vrai pour n'importe quelle paire de champs  $S$  et  $T$ ) et l'implication 2)  $\Rightarrow$  1) vient de l'isomorphisme

$$S \times_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \mathcal{X} \simeq S \times_{\mathcal{X}} S$$

□

**Lemme 2.4.2.2.** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ donné par le groupoïde analytique lisse  $[X_1 \rightrightarrows X_0]$  et  $S \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  un morphisme de champs donné par les deux morphismes  $f_1: S \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $f_2: S \rightarrow \mathcal{X}$ . Alors le produit fibré  $S \times_{\mathcal{X} \times \mathcal{X}} \mathcal{X} \simeq S \times_{\mathcal{X}} S$  est représentable.*

*Démonstration.* Grâce au lemme de Yoneda, les morphismes  $f_1$  et  $f_2$  sont entièrement décrits par deux objets  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{X}(S)$ . Pour se souvenir de cela, on va noter le morphisme  $f_1$  par  $f_P$  et le morphisme  $f_2$  par  $f_Q$ .

Dans un premier temps, supposons  $P$  et  $Q$  triviaux. Notons  $C_1$  et  $C_2$  les morphismes  $S \rightarrow X_0$  utilisés dans le tiré-en-arrière du toseur trivial (cf. le quatrième point de la définition de  $X_1 \rightrightarrows X_0$ -torseurs de la proposition 2.4.1.5) i.e.  $P = S_{C_1 \times_s X_1}$  et  $Q = S_{C_2 \times_s X_1}$ . Notons aussi  $\pi$  la projection sur la première coordonnée,  $m_P$  est la composition de la projection sur la deuxième coordonnée avec  $t$  et  $\rho$  est donné par

$\text{id} \times \text{m}_P$  (idem pour  $Q$ ). Un objet de  $S \times_{\mathcal{A}} S(\mathbf{U})$  est une paire de morphismes  $(f : \mathbf{U} \rightarrow S, g : \mathbf{U} \rightarrow S)$  avec un isomorphisme  $\alpha$  de  $X_1 \rightrightarrows X_0$ -torseurs au-dessus de  $\mathbf{U}$  entre les toseurs triviaux  $f^*P = \mathbf{U}_{q \times_s X_1}$  et  $g^*Q = \mathbf{U}_{q' \times_s X_1}$

$$\begin{array}{ccc}
 f^*P & \longrightarrow & P & \longrightarrow & X_1 & & g^*Q & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & X_1 \\
 \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow s & & \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow s \\
 \mathbf{U} & \xrightarrow{f} & S & \xrightarrow{C_1} & X_0 & & \mathbf{U} & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{C_2} & X_0
 \end{array} \quad (2.6)$$

(où  $q = C_1 \circ f : \mathbf{U} \rightarrow X_0$  et  $q' = C_2 \circ g : \mathbf{U} \rightarrow X_0$ ) i.e. un isomorphisme  $\alpha : \mathbf{U}_{q \times_s X_1} \rightarrow \mathbf{U}_{q' \times_s X_1}$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 & & X_0 & \\
 & \nearrow t\pi_2 & & \\
 \mathbf{U}_{q \times_s X_1} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{U}_{q' \times_s X_1} & \xleftarrow{t\pi'_2} \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi'_1 & \\
 \mathbf{U} & \xrightarrow{=} & \mathbf{U} & 
 \end{array} \quad (2.7)$$

Le seul morphisme de  $S \times_{\mathcal{A}} S(\mathbf{U})$  est l'identité car  $S$  est représentable. On doit donc montrer que cet ensemble est en bijection naturelle avec l'ensemble de morphismes entre  $\mathbf{U}$  et un espace analytique.

Le morphisme  $\pi_1 : \mathbf{U}_{q \times_s X_1} \rightarrow \mathbf{U}$  admet une section  $\sigma : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}_{q \times_s X_1}$  définie par :

$$\sigma(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \text{id}_{q(\mathbf{u})}) \quad (2.8)$$

On peut donc définir le morphisme  $\psi = \pi'_2 \alpha \sigma : \mathbf{U} \rightarrow X_1$ . On a donc deux morphismes  $(f, g) : \mathbf{U} \rightarrow S \times S$  et  $\psi : \mathbf{U} \rightarrow X_1$ . La dernière étape de cette preuve est de trouver le(s) relation(s) entre eux.

Pour la même raison que pour  $f^*P$ , les morphismes  $P \rightarrow S$  et  $Q \rightarrow S$  admettent une section. On peut donc définir le morphisme :

$$\Phi = \Phi_1 \times \Phi_2 : S \times S \xrightarrow{\text{sections}} (S \times_{X_0} X_1) \times (S \times_{X_0} X_1) \xrightarrow{t\pi_2 \times t\pi_2} X_0 \times X_0$$

Grâce aux égalités

$$\Phi_1 \circ f(\mathbf{u}) = t\pi_2(f(\mathbf{u}), \text{id}_{C_1(f(\mathbf{u}))}) = t(\text{id}_{C_1(f(\mathbf{u}))}) = C_1(f(\mathbf{u})) = q(\mathbf{u}), \quad (2.9)$$

$$\Phi_2 \circ g(\mathbf{u}) = t\pi_2(g(\mathbf{u}), \text{id}_{C_2(g(\mathbf{u}))}) = C_2(g(\mathbf{u})) = q'(\mathbf{u}), \quad (2.10)$$

$$s\psi(\mathbf{u}) = (s\pi'_2)\alpha(\mathbf{u}, \text{id}_{q(\mathbf{u})}) = (q'\pi_1)\alpha(\mathbf{u}, \text{id}_{q(\mathbf{u})}) = q'(\mathbf{u}), \quad (2.11)$$

$$t\psi(\mathbf{u}) = t\pi'_2\alpha(\mathbf{u}, \text{id}_{q(\mathbf{u})}) = t\pi_2(\mathbf{u}, \text{id}_{q(\mathbf{u})}) = t(\text{id}_{q(\mathbf{u})}) = q(\mathbf{u}), \quad (2.12)$$

on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & S \times S & \\
 (f, g) \nearrow & & \searrow \Phi \\
 \mathbf{U} & & X_0 \times X_0 \\
 \psi \searrow & & \nearrow (t, s) \\
 & X_1 & 
 \end{array} \quad (2.13)$$

L'ensemble  $S \times_{\mathcal{A}} S(\mathbf{U})$  est en bijection naturelle avec l'ensemble de tels diagrammes ou autrement dit, c'est en bijection naturelle avec l'ensemble des morphismes  $\mathbf{U} \rightarrow (S \times S)_{\Phi \times (t, s)} X_1$ . Comme la catégorie des espaces analytiques est stable par produits fibrés, le produit fibré  $(S \times S)_{\Phi \times (t, s)} X_1$  est un espace

analytique et  $S \times_{\mathcal{Z}} S$  est représentable.

Considérons maintenant des objets  $P$  et  $Q$  généraux de  $\mathcal{Z}(S)$ .

Soient  $\{S_i \rightarrow S\}_{i \in I}$  un recouvrement trivialisant de  $P$  et  $\{S_j \rightarrow S\}_{j \in J}$  un recouvrement trivialisant de  $Q$ . Pour tout  $i, i' \in I$  and  $j, j' \in J$ , on a les isomorphismes

$$(S_i \cap S_{i'}) \times_{\mathcal{Z}} S_j \simeq (S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j) \times_{S_i} (S_i \cap S_{i'}) \quad (2.14)$$

$$S_i \times_{\mathcal{Z}} (S_j \cap S_{j'}) \simeq (S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j) \times_{S_j} (S_j \cap S_{j'}) \quad (2.15)$$

grâce aux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccccc} S_i \times_{\mathcal{Z}} (S_j \cap S_{j'}) & \hookrightarrow & S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j & \longrightarrow & S_i \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_j \cap S_{j'} & \hookrightarrow & S_j & \longrightarrow & \mathcal{Z} \end{array} \quad (2.16)$$

$$\begin{array}{ccccc} (S_i \cap S_{i'}) \times_{\mathcal{Z}} S_j & \hookrightarrow & S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j & \longrightarrow & S_j \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S_i \cap S_{i'} & \hookrightarrow & S_i & \longrightarrow & \mathcal{Z} \end{array} \quad (2.17)$$

On obtient de cela les immersions ouvertes

$$\varphi_{ii',jj'} : (S_i \cap S_{i'}) \times_{\mathcal{Z}} (S_j \cap S_{j'}) \hookrightarrow S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j. \quad (2.18)$$

Ces immersions ouvertes  $\varphi_{ii',jj'}$  définissent des données de recollement pour la famille  $\{S_i \times_{\mathcal{Z}} S_j\}_{(i,j) \in I \times J}$  (voir, par exemple, [54]). Le résultat de ce recollement est exactement le champ  $S \times_{\mathcal{Z}} S$  (grâce aux propriétés de recollement des faisceaux) qui est donc un espace analytique.  $\square$

*Remarque 2.4.2.3.* • Dans le cas algébrique (i.e. sur le site  $\mathfrak{Sch}_{\text{ét}}$ ), on va recoller des schéma mais avec la topologie étale. Cela entraîne que l'on va obtenir des espaces algébriques plutôt que des schémas. Dans le cas analytique, on n'a pas besoin puisque l'on recolle avec la topologie usuelle.

- Ce résultat est un peu plus fort que celui obtenu, en toute généralité, dans [120, Proposition 1.3.4.2] (et spécialisé dans le cadre analytique dans [119]) dans le cadre 1-géométrique puisque on n'a pas besoin d'agrandir la catégorie des espaces analytiques pour avoir la représentabilité (cf. [119, Remarque 2.14]).

**Définition 2.4.2.4.** Un champ  $\mathcal{Z}$  sur le site analytique  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  est dit (Artin-)analytique s'il vérifie les conditions suivantes :

- La diagonale  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z} \times \mathcal{Z}$  est représentable ;
- Il existe un espace analytique  $X$  et un morphisme  $X \rightarrow \mathcal{Z}$  (appelé atlas de  $\mathcal{Z}$ ) représentable, lisse et surjectif.

On notera  $\mathfrak{ChampAn}$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathfrak{ChampAn}_{\mathbb{C}}$  des champs analytiques.

*Remarque 2.4.2.5.* • Dans le cas algébrique, la définition (cf. [87]) de champ d'Artin rajoute deux conditions sur la diagonale de  $\mathcal{Z}$  : il faut qu'elle soit séparée et quasi-compacte. Cela permet que l'atlas soit représentable par des espaces algébriques. Cependant dans le cadre analytique, ces conditions sont automatiquement vérifiées puisque les espaces analytiques sont toujours séparés (contrairement au schéma).

- Dans le cadre différentiel, la définition (cf. [69]) de champ d'Artin enlève la première condition puisque le site  $\mathfrak{Var}\mathfrak{Diff}$  n'est pas stable par produits fibrés.

**Exemple 2.4.2.6.** • Si  $X$  est un espace analytique alors  $\underline{X}$  est un champ analytique ;

- Si  $G$  est un groupe analytique et  $X$  est un espace analytique avec une action de  $G$  alors  $[X/G]$  est un champ analytique ;
- Le champ de modules des surfaces de Riemann compactes de genre fixé et avec  $n$  marqués est un champ analytique (voir [74] pour des discussions sur la structure analytique de (l'espace grossier de) ses espaces) ;
- Plus généralement, les champs de structures complexes d'une variété différentiable réelle de dimension paire fixée  $M$  (dit « de Teichmüller »)  $\mathcal{T}eich(M)$  sont des champs analytiques sous des conditions faibles (voir [92]). Pour des constructions explicites de présentations de tels champs, on pourra consulter les thèses de C.FROMENTEAU ([46]) pour les surfaces de Hopf et celle de T.JAMIN([77]) pour les quotients de  $SL_2(\mathbb{C})$  par un sous-groupe discret co-compact).

**Théorème 2.4.2.7.** *Le 2-foncteur  $\mathcal{B}$  se restreint en une équivalence de 2-catégories*

$$\mathfrak{Gpd}_{\text{lisse}}(\mathfrak{An}_{\mathbb{C}})[W^{-1}] \rightarrow \mathfrak{Champ}\mathfrak{An}$$

*i.e. toute champification d'un groupoïde analytique est un champ analytique et tout champ analytique est présenté par un groupoïde analytique.*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{X} = [s, t : X_1 \rightrightarrows X_0]$  un champ donné par un groupoïde. Alors le morphisme  $X_0 \rightarrow \mathcal{X}$  donné par le  $X_1 \rightrightarrows X_0$ -torseur trivial

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{t} & X_0 \\ s \downarrow & & \\ X_0 & & \end{array}$$

Ce morphisme est lisse et surjectif (car  $X_1 = X_0 \times_{\mathcal{X}} X_0 \rightarrow X_0$  l'est). De plus, le morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  est représentable (voir lemme 2.4.2.2). C'est donc un champ analytique.

Réciproquement, si  $\mathcal{X}$  est un champ analytique et  $X \rightarrow \mathcal{X}$  un atlas. Alors le produit fibré  $\mathbb{R} := X \times_{\mathcal{X}} X$  est représentable et  $\mathcal{X} \simeq [\mathbb{R} \rightrightarrows X]$  (cela se montre de la même façon que [15, theorem 2.22]).

Grâce au corollaire 2.4.1.11, on en déduit que le 2-foncteur  $\mathcal{B}$  est une 2-équivalence de catégories.  $\square$

**Proposition 2.4.2.8.** *Soient  $X$  un  $G$ -espace analytique et  $Y$  un  $H$ -espace analytique ( $G$  et  $H$  sont des groupes analytiques). Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme  $\alpha$ -équivariant, avec  $\alpha$  un morphisme de groupes  $G \rightarrow H$ . Alors le morphisme  $f$  descend en un morphisme de champs  $[X/G] \rightarrow [Y/H]$ .*

*Démonstration.* Par  $\alpha$ -équivariance de  $f$ , le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{(f, \alpha)} & Y \times H \\ \text{act} \downarrow \pi_1 & & \text{act} \downarrow \pi_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Autrement dit, on a un morphisme de groupoïdes analytiques  $[X \times G \rightrightarrows X] \rightarrow [Y \times H \rightrightarrows Y]$  entre les groupoïdes de translation et donc un morphisme de champs  $[X/G] \rightarrow [Y/H]$  entre les champs analytiques associés.  $\square$

On va maintenant voir comment construire des champs analytiques :

**Corollaire 2.4.2.9** ([115] Tag 04TF pour le cas algébrique). *Le produit fibré de champs analytiques est analytique.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un espace analytique et  $u = (x, y, \alpha), v = (x', y', \alpha') \in \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}(T)$ . Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} T_{u \times v} T & \longrightarrow & T_{y \times y'} T \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_{x \times x'} T & \longrightarrow & T_{f(x) \times g(y')} T \end{array} \quad (2.19)$$

est cartésien où le morphisme  $T_{x \times x'} T \rightarrow T_{f(x) \times g(y')} T$  est donné par :

$$(t : T \rightarrow \mathcal{X}, t' : T \rightarrow \mathcal{X}, \theta : t \circ x \simeq t' \circ x') \mapsto (t : T \rightarrow \mathcal{Z}, t' : T \rightarrow \mathcal{Z}, \alpha' f(\theta) : t \circ f(x) \simeq t' \circ g(y'))$$

et le morphisme  $T_{y \times y'} T \rightarrow T_{f(x) \times g(y')} T$  est donné par :

$$(t : T \rightarrow \mathcal{Y}, t' : T \rightarrow \mathcal{Y}, \theta : t \circ y \simeq t' \circ y') \mapsto (t : T \rightarrow \mathcal{Z}, t' : T \rightarrow \mathcal{Z}, g(\theta) \alpha : t \circ f(x) \simeq t' \circ g(y'))$$

Le diagramme est cartésien par construction des morphismes dans le produit fibré de champs. Comme les diagonales de  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}$  sont représentables alors  $T_{u \times v} T$ ,  $T_{x \times x'} T$  et  $T_{f(x) \times g(y')} T$  sont des espaces analytiques et donc,  $T_{u \times v} T$  est un espace analytique. La diagonale de  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$  est donc représentable. Construisons maintenant un atlas de  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$  :

$$\begin{array}{ccccc} X \times_{\mathcal{Z}} Y & \longrightarrow & X \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} Y & \longrightarrow & \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{Z} \end{array} \quad (2.20)$$

Le morphisme de champs  $X \times_{\mathcal{Z}} Y \rightarrow \mathcal{X} \times_{\mathcal{Z}} \mathcal{Y}$  est lisse et surjectif puisque les morphismes  $X \rightarrow \mathcal{X}$  et  $Y \rightarrow \mathcal{Y}$  sont lisses et surjectifs et ces propriétés sont stables par changement de base. De plus, puisque  $\mathcal{Z}$  est analytique, le champ  $X \times_{\mathcal{Z}} Y$  est représentable. On a ainsi obtenu l'atlas désiré.  $\square$

On va maintenant voir comment construire un champ analytique à partir d'un champ algébrique (sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ ) généralisant l'analytification (cf. [60, Exposé XII]) des  $\mathbb{C}$ -schémas localement de type fini en espace analytique. Tout d'abord, il faut pouvoir analytifier les espaces algébriques :

**Lemme 2.4.2.10** ([5]). *Soit  $X$  un espace algébrique de type fini sur  $\mathbb{C}$ . On peut construire un espace analytique  $X^{\text{an}}$ , appelé analytification de  $X$ , qui étend la construction de l'analytification des schémas de type fini sur  $\mathbb{C}$ .*

*Remarque 2.4.2.11.* Les faisceaux analytiques étales et les faisceaux analytiques « euclidiens » sont les mêmes choses puisque les applications holomorphes étales (et en particulier, l'analytification des morphismes étales) sont des isomorphismes locaux.

**Théorème 2.4.2.12.** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ (d'Artin) algébrique de type fini donné par une présentation  $[X_1 \rightrightarrows X_0]$  ( $X_1$  et  $X_0$  sont des espaces algébriques et les morphismes sont lisses). Alors l'analytifié  $\mathcal{X}^{\text{an}}$  de  $\mathcal{X}$  est le champ analytique donné par  $[X_1^{\text{an}} \rightrightarrows X_0^{\text{an}}]$  (À isomorphisme près, le champ obtenu ne dépend pas de la présentation utilisée).*

*Démonstration.* Montrons que l'analytification ainsi définie ne dépend pas de la présentation choisie. Prenons donc deux présentations de  $\mathcal{X}$  par des groupoïdes  $[X_1 \rightrightarrows X_0]$  et  $[Y_1 \rightrightarrows Y_0]$ . Il y a donc une

équivalence de Morita entre ces deux groupoïdes que l'on notera  $F$ . Alors puisque l'analytification commute avec les produits fibrés (voir [60, Exposé XII-1.2]) alors l'égalité  $X_1 = X_0 \times_{X_0 \times_{Y_0 \times Y_0}} Y_1$  entraîne l'égalité  $X_1^{\text{an}} = X_0^{\text{an}} \times_{X_0^{\text{an}} \times_{Y_0^{\text{an}} \times Y_0^{\text{an}}}} Y_1^{\text{an}}$ . De plus, puisque  $t\pi_1 : Y_1 \times_{Y_0} X_0 \rightarrow Y_0$  est lisse et surjectif alors son analytifié  $(t\pi_1)^{\text{an}} = t^{\text{an}}\pi_1^{\text{an}} : Y_1^{\text{an}} \times_{Y_0^{\text{an}}} X_0^{\text{an}} \rightarrow Y_0^{\text{an}}$  est lisse (cf. [60, Exposé XII, Proposition 3.1]) et surjectif (cf. [60, Exposé XII, Proposition 3.2]). On en déduit donc que l'analytifié  $F^{\text{an}} = (F_0^{\text{an}}, F_1^{\text{an}})$  est aussi une équivalence de Morita. Par conséquent, le foncteur  $F^{\text{an}}$  induit un isomorphisme

$$[X_1^{\text{an}} \rightrightarrows X_0^{\text{an}}] \simeq [Y_1^{\text{an}} \rightrightarrows Y_0^{\text{an}}]$$

□

**Exemple 2.4.2.13.** L'analytifié du champ quotient  $[X/G]$  (où  $G$  est un groupe algébrique et  $X$  un  $G$ -schéma de type fini) est  $[X^{\text{an}}/G^{\text{an}}]$ .

## 2.5 Topologie des champs

Comme dit précédemment, les champs permettent de donner une structure analytique au quotient d'une variété par l'action d'un groupe qui n'en a pas a priori et qui n'est donc qu'un espace topologique. Cette section a pour but de voir le sens inverse i.e. obtenir des résultats topologiques à propos des champs analytiques.

### 2.5.1 Espace topologique associé à un champ

Dans un premier temps, on va le faire de façon « naïve » i.e. qui généralise le fait d'associer au champ quotient  $[X/G]$  l'espace topologique  $X/G$ .

On fixe le site que l'on va considérer :  $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$  ou  $\mathfrak{A}$  (le cas différentiel réel se fait de la même façon en remplaçant « analytique » par « différentiel », « espace analytique » par « variété différentielle » et  $\text{Spec}(\mathbb{C})$  par  $\text{Spec}(\mathbb{R})$ ).

**Définition 2.5.1.1.** Soit  $\mathcal{X}$  un champ. Un sous-champ de  $\mathcal{X}$  est un champ  $\mathcal{X}'$  tel que pour tout  $S \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$ ,  $\mathcal{X}'(S)$  est une sous-catégorie pleine saturée (i.e. close par isomorphisme) de  $\mathcal{X}$ .

**Définition 2.5.1.2.** Soit  $\mathcal{X}$  un champ analytique et  $\mathcal{X}'$  un sous-champ.  $\mathcal{X}'$  est un sous-champ localement fermé (resp. ouvert, fermé) si le morphisme  $\mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$  est représentable et si pour tout objet  $S \in \mathfrak{S}$  et tout morphisme  $\underline{S} \rightarrow \mathcal{X}$ , le morphisme  $\underline{S} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}' \rightarrow \underline{S}$  est un plongement localement fermé (resp. ouvert, fermé) dans  $\mathfrak{S}$ .

**Proposition 2.5.1.3.** Soit  $\mathcal{X}$  un champ analytique présenté par le groupoïde  $s, t: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{U}$ . Il y a une correspondance bijective entre les sous-champs localement fermés (resp. ouverts, fermés) et les sous-espaces analytiques localement fermés (resp. ouverts, fermés)  $V \subset \mathbb{U}$  satisfaisant  $s^{-1}(V) = t^{-1}(V)$ .

*Avertissement 2.5.1.4.* Contrairement au cas algébrique et la topologie de Zariski, un fermé d'un espace analytique n'est pas nécessairement un espace analytique (penser à  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ).

**Exemple 2.5.1.5.** Si  $\mathcal{X} = [X/G] = [\text{act}, \pi_1: X \times G \rightrightarrows X]$  alors les sous-champs ouverts (resp. fermés, localement fermés) de  $\mathcal{X}$  sont les champs quotients d'un ouvert (resp. fermé, localement fermé)  $G$ -invariant de  $X$ .

**Définition 2.5.1.6.** Soit  $\mathcal{X}$  un champ analytique. L'espace topologique  $|\mathcal{X}|$  associé à  $\mathcal{X}$  est

$$(\pi_0(\mathcal{X}(\text{Spec}(\mathbb{C}))), \{\pi_0(\mathcal{U}(\text{Spec}(\mathbb{C}))), \mathcal{U} \text{ est un sous-champ ouvert de } \mathcal{X}\})$$

où  $\pi_0$  est le foncteur  $\mathbf{Gpd} \rightarrow \mathbf{Ens}$  qui associe à un groupoïde l'ensemble de ses classes d'équivalences i.e.  $\pi_0(\mathbf{G}) = \text{Ob}(\text{sq}(\mathbf{G}))$ .

*Remarque 2.5.1.7.* Si  $(S, \mathcal{O}_S)$  est un objet de  $\mathfrak{S}$  alors  $|(S, \mathcal{O}_S)| = S$  (car tous les points d'un espace analytique sont des  $\mathbb{C}$ -points).

**Proposition 2.5.1.8.** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ analytique présenté par le groupoïde  $\mathcal{X} = [R \rightrightarrows U]$ . Alors, les points de  $\mathcal{X}$  sont les classes d'équivalence de points pour la relation  $R$  de  $U$ . Les ouverts de  $|\mathcal{X}|$  correspondent aux ouverts de  $U$ .*

**Corollaire 2.5.1.9.** *Soit  $X$  une  $G$ -espace analytique. Alors l'espace topologique associé au champ quotient  $[X/G]$  est l'ensemble  $X/G$  muni de la topologie quotient*

**Exemple 2.5.1.10.** L'espace topologique associé à  $\Theta = [\mathbb{C}/\mathbb{C}^*]$  est constitué de deux points : un fermé donné par  $[0/\mathbb{C}^*]$ , un ouvert donné par  $[\mathbb{C}^*/\mathbb{C}^*]$ .

**Corollaire 2.5.1.11.** *Soient  $\mathcal{X}$  un champ analytique et  $x \in \mathcal{X}(\text{Spec}(\mathbb{C}))$  (c'est un point de l'espace topologique  $|\mathcal{X}|$  ou encore, par Yoneda, un morphisme  $x: \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{X}$ ). Le produit fibré  $\text{Spec}(\mathbb{C}) \times_{\mathcal{X}} \text{Spec}(\mathbb{C})$  est un groupe analytique, que l'on appellera groupe d'automorphismes (ou groupe d'isotropie) de  $x$  et que l'on notera  $\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$ . Plus précisément, si  $\mathcal{X} = [s, t: R \rightrightarrows U]$  et si le point de  $|\mathcal{X}|$  est donné par la classe de  $R$ -équivalence de  $\tilde{x} \in U$  alors*

$$\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x) = s^{-1}(\tilde{x}) \cap t^{-1}(\tilde{x})$$

En particulier, si  $\mathcal{X} = [X/G]$  alors le groupe d'automorphismes de  $x$  est le stabilisateur de  $x$  par l'action de  $G$ .

*Démonstration.* On va montrer cet énoncé dans le cas où  $\mathcal{X} = [X/G]$  :

Pour tout espace analytique  $U$ , le groupe d'automorphisme de  $x: \text{Spec}(\mathbb{C}) \rightarrow [X/G]$ , donné par le morphisme  $G$ -équivariant  $f: G \rightarrow X$ , est l'ensemble des morphisme de  $G$ -fibres principaux au-dessus de  $U$ ,  $\alpha: (g, x) \in G \times U \mapsto (g\tilde{\alpha}(x), x) \in G \times U$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ f\pi_2 \nearrow & & \nwarrow f\pi_2 \\ U \times G & \xrightarrow{\alpha} & U \times G \end{array}$$

Grâce à ce diagramme et à l'équivariance de  $f$ , on déduit les égalités suivantes, pour tout  $x \in U$  et tout  $g \in G$ ,

$$\begin{aligned} f(g) &= f\pi_2(\alpha(g, x)) = f(g\tilde{\alpha}(x)) \\ gf(e_G) &= g\tilde{\alpha}(x)f(e_G) \\ f(e_G) &= \tilde{\alpha}(x)f(e_G) \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\tilde{\alpha}(x)$  est à valeurs dans  $\text{Stab}_G(x)$ . On a donc montré que  $\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x)(U)$  est l'ensemble des morphismes  $U \rightarrow \text{Stab}_G(x)$ . Autrement dit,  $\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x)$  est le groupe analytique  $\text{Stab}_G(x)$ .  $\square$

**Lemme 2.5.1.12.** *Si  $F: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est un morphisme de champs analytiques alors  $|F| = F(\text{Spec}(\mathbb{C})) : |\mathcal{X}| \rightarrow |\mathcal{Y}|$  est continue.*

## 2.5.2 Théorie de l'homotopie d'un champ topologique

Dans cette sous-section, nous allons donner un sens aux groupes d'homotopie et de (co)homologie dans le cadre champêtre qui étend celui des espaces topologiques. Pour cela, on va tout d'abord construire



les groupes d'homotopie d'un champ puis définir l'espace classifiant d'un champ  $\mathcal{X}$  qui sera un espace topologique « universellement » homotope à  $\mathcal{X}$ . Cela permettra de définir les groupes de (co)homologie du champ comme celui de son espace classifiant.

**Notation 2.5.2.1.** Le site  $\mathfrak{Top}$  est la catégorie des espaces topologiques compactement engendrés et des fonctions continues entre eux, munie des recouvrements par des ouverts.

*Remarque 2.5.2.2.* Tout espace localement compact est compactement engendré. En particulier, les (espaces topologiques sous-jacents des) variétés différentielles (complexes ou réelles) et les espaces analytiques sont compactement engendrés.

**Définition 2.5.2.3.** Un champ topologique est un champ  $\mathcal{X}$  au-dessus de  $\mathfrak{Top}$  tel que la diagonale  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{X}$  soit représentable et tel qu'il existe un morphisme surjectif  $X \rightarrow \mathcal{X}$  qui a des sections locales. De façon équivalente, c'est la champification d'un groupoïde dans  $\mathfrak{Top}$  dont les flèches de source et de but ont des sections locales. On note  $\mathfrak{Champ}\mathfrak{Top}$  la sous-2-catégorie pleine de  $\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{Top}}$  contenant les champs topologiques.

*Remarque 2.5.2.4.* Une submersion (ou un morphisme lisse) admet des sections locales.

*Remarque 2.5.2.5.* On peut transposer la proposition 2.5.1.3 pour les champs topologiques et on n'a plus le problème soulevé dans l'avertissement 2.5.1.4.

**Proposition 2.5.2.6.** Le foncteur d'oubli de  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{Top}$  oubliant la structure analytique induit un foncteur d'oubli  $\mathfrak{Champ}\mathfrak{An} \rightarrow \mathfrak{Champ}\mathfrak{Top}$  défini sur les groupoïdes par l'oubli des structures analytiques sur les espaces de source et de but.

**Définition 2.5.2.7.** Une paire est un couple  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  de champs topologiques et un morphisme  $\iota : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{X}$ . Un morphisme de paire  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, \iota) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{B}, \jmath)$  est une couple de morphismes  $(f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, f' : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$  et un 2-isomorphisme  $\alpha : f \circ \iota \Rightarrow \jmath \circ f'$  tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f'} & \mathcal{B} \\ \downarrow \iota & \nearrow \alpha & \downarrow \jmath \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \end{array}$$

Si  $\mathcal{A} = \text{pt}$  alors la paire  $(\mathcal{X}, \text{pt})$  est appelé champ pointé. Un 2-morphisme de paire  $(f, f') \Rightarrow (g, g')$  est une paire de 2-morphismes de champs  $f \Rightarrow g$  et  $f' \Rightarrow g'$  telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f'} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g'} \end{array} & \mathcal{B} \\ \downarrow \iota & & \downarrow \jmath \\ \mathcal{X} & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \Downarrow \\ \xrightarrow{g} \end{array} & \mathcal{Y} \end{array}$$

**Définition 2.5.2.8.** Soient  $f, g : (\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{B})$  deux morphismes de paires. Une homotopie entre  $f$  et  $g$  est un triplet  $(H, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  où :

- Le morphisme  $H$  est un morphisme de paires  $H : (I \times \mathcal{X}, I \times \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{B})$
- $\varepsilon_0 : f \Rightarrow H_{0 \times \mathcal{X}}$  et  $\varepsilon_1 : g \Rightarrow H_{1 \times \mathcal{X}}$  sont deux 2-morphismes de paires

où  $I = [0, 1]$  est l'intervalle unité.

Les classes d'homotopie de morphismes de paires  $(\mathcal{X}, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{Y}, \mathcal{B})$  est noté  $[(\mathcal{X}, \mathcal{A}), (\mathcal{Y}, \mathcal{B})]$

**Lemme 2.5.2.9** ([102], section 17). Soit  $(\mathcal{X}, x : \mathbf{pt} \rightarrow \mathcal{X})$  un champ topologique pointé. L'ensemble  $[(\mathbb{S}^n, \mathbf{pt}), (\mathcal{X}, x)]$  a une structure de groupe naturel pour  $n \geq 1$ .

**Définition 2.5.2.10.** Ce groupe est appelé  $n$ ème groupe d'homotopie de  $(\mathcal{X}, x)$ , et est noté  $\pi_n(\mathcal{X}, x)$ .

Comme dans le cas des espaces topologiques, on a les deux résultats suivants :

**Proposition 2.5.2.11.** Si  $n \geq 2$  alors  $\pi_n(\mathcal{X}, x)$  est abélien.

**Théorème 2.5.2.12** ([104] theorem 5.2). Soit  $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  un morphisme ayant des sections locales. Soit  $x : \mathbf{pt} \rightarrow \mathcal{X}$  un point et  $\mathcal{F} := \mathbf{pt} \times_{\mathcal{X}} \mathcal{X}$  la fibre de  $p$  au-dessus de  $y = p(x)$ . Alors, il y a une suite exacte longue de groupes d'homotopie (pour tout  $n \geq 1$ ) :

$$\pi_{n+1}(\mathcal{Y}, y) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{F}, x) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{X}, x) \longrightarrow \pi_n(\mathcal{Y}, y) \longrightarrow \pi_{n-1}(\mathcal{F}, x)$$

**Exemple 2.5.2.13.** Soit  $G$  un groupe topologique agissant sur un espace topologique  $X$ . Prenons  $\mathcal{X} = X$  et  $\mathcal{Y} = [X/G]$ , le morphisme est la projection  $X \rightarrow [X/G]$  et  $x \in X$ . Alors,  $\mathcal{F} = \mathbf{pt} \times_{\mathcal{X}} X = G$ . Alors, le [théorème 2.5.2.12](#) nous donne la suite exacte :

$$\pi_{n+1}([X/G], y) \longrightarrow \pi_n(G, x) \longrightarrow \pi_n(X, x) \longrightarrow \pi_n([X/G], y) \longrightarrow \pi_{n-1}(G, x)$$

En particulier, si  $G$  est contractile alors la projection  $X \rightarrow [X/G]$  est une équivalence faible d'homotopie et si  $X$  est contractile et  $G$  est discret alors  $[X/G]$  a le type d'homotopie de  $BG = K(G, 1)$ . En particulier, le champ  $\mathcal{B}G$  a le type d'homotopie de  $BG$ .

**Théorème 2.5.2.14** ([103] theorem 6.3, [43]). Tout champ topologique admet un (unique à équivalence d'homotopie près) espace classifiant i.e. un morphisme  $X \rightarrow \mathcal{X}$  qui est une équivalence d'homotopie universelle (i.e. pour tout morphisme  $T \rightarrow \mathcal{X}$ , le morphisme  $T \times_{\mathcal{X}} X \rightarrow T$  est une équivalence d'homotopie).

*Idee de preuve.* Soit  $\mathcal{X} = \mathcal{B}G$  un champ topologique.

L'espace  $X$  est la réalisation géométrique « épaisse » du nerf de  $G$  où le nerf d'une catégorie  $G$  est l'ensemble simplicial  $n_{\bullet}G$  donné par :

$$n_{\bullet}G = \{C_0 \xrightarrow{f_1} C_1 \dots \xrightarrow{f_n} C_n \mid C_i \in G\}$$

la première et la dernière face oublient un morphisme et un objet (respectivement le premier et le dernier) et les faces intermédiaires composent deux morphismes, les dégénérescences ajoutent une identité. La réalisation géométrique épaisse d'un objet simplicial  $X_{\bullet}$  est :

$$\|X_{\bullet}\| = \coprod_n X_n \times \Delta^n / \simeq$$

où  $\Delta^n$  est le  $n$ -simplexe standard et  $\simeq$  est engendré par les relations  $(\varphi^*x, y) \simeq (x, \varphi_*t)$  pour  $\varphi$  une application injective  $\varphi$  de la catégorie simpliciale  $\Delta$ . □

**Exemple 2.5.2.15** ([103] section 4.3). Soit  $\mathcal{X} = [S/G]$  un champ quotient. Alors l'espace classifiant  $X$  de  $\mathcal{X}$  est donné par la construction de Borel :

Notons  $EG \rightarrow BG$  le  $G$ -fibré principal universel. Alors  $G$  agit librement sur  $EG \times S$  par :

$$(e, x) \cdot g = (eg, g^{-1}x)$$

Alors  $X = (EG \times S)/G$ .

**Définition 2.5.2.16.** Soient  $\mathcal{X}$  un champ topologique et  $X$  son espace classifiant. Soit  $G$  un groupe. L'homologie singulière de  $\mathcal{X}$  à coefficients dans  $G$  est le groupe

$$H_*(\mathcal{X}, G) := H_*(X, G)$$

et on définit de la même façon la cohomologie singulière.

## 2.6 Faisceaux sur des champs

### 2.6.1 Définitions générales

Dans cette section, on va supposer que le site  $\mathfrak{S}$  est celui des espaces analytiques (ou celui des espaces analytiques équivariants). Le formalisme reste le même que celui du site étale (cf. [14, Chapter 9]) mais cette restriction implique que l'on ne va considérer que les faisceaux cohérents et non quasi-cohérents (cf. [31, Example 2.1.6] pour voir les problèmes associés).

Soit  $X$  un espace analytique et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent sur  $X$ . Alors, pour tout morphisme  $f: T \rightarrow X$ , on peut définir le tiré-en-arrière  $f^*\mathcal{F}$  de  $\mathcal{F}$  par

$$f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_T$$

où  $f^{-1}\mathcal{F}$  est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto \operatorname{colim}_{f(U) \subset V} \mathcal{F}(V).$$

Cependant, cette construction n'est pas (contravariamment) fonctorielle. En effet, si on a deux morphismes  $g: S \rightarrow T$  et  $f: T \rightarrow X$  alors

$$g^*(f^*\mathcal{F}) \neq (fg)^*\mathcal{F}$$

mais on a un isomorphisme canonique entre eux. Cela suggère que la bonne façon de voir ce tiré-en-arrière est de le faire de façon 2-catégorique :

**Notation 2.6.1.1.** On note  $\mathcal{Coh} : \mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathfrak{Gpd}$  le pseudo-foncteur  $T \mapsto \operatorname{Coh}(T), (T \rightarrow S) \mapsto (\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(S) \mapsto f^*\mathcal{F} \in \operatorname{Coh}(T))$  où  $\operatorname{Coh}(T)$  est la catégorie des faisceaux cohérents sur  $T$  avec les isomorphismes d' $\mathcal{O}_T$ -modules comme morphismes.

**Lemme 2.6.1.2.** *Le pseudo-foncteur  $\mathcal{Coh}$  est un champ au-dessus de  $\mathfrak{S}$ .*

Par le lemme de Yoneda pour les champs, on a une équivalence de catégories

$$\operatorname{Coh}(T) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathfrak{Champ}_{\mathfrak{S}}}(\underline{T}, \mathcal{Coh})$$

On définit les faisceaux cohérents sur les champs de la même façon :

**Définition 2.6.1.3.** Un module cohérent sur un champ  $\mathcal{X}$  est un morphisme de champs  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Coh}$ . On note  $\operatorname{Coh}(\mathcal{X})$  la catégorie des modules cohérents sur  $\mathcal{X}$ .

**Exemple 2.6.1.4.** Le morphisme  $\mathcal{O} = (\mathcal{O}_X : x \in \mathcal{X}(X) \mapsto \mathcal{O}_X \in \operatorname{Coh}(X))$  est un module au-dessus du champ  $\mathcal{X}$  que l'on note  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ .

**Proposition 2.6.1.5.** *Soit  $\mathcal{X}$  un champ. Un module cohérent sur  $\mathcal{X}$  est la donnée*

- pour tout espace analytique  $T$  et tout morphisme  $t: T \rightarrow \mathcal{X}$ , d'un faisceau cohérent  $\mathcal{F}_t$  sur  $T$ ;

- pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow z & \downarrow t \\ & & \mathcal{X} \end{array},$$

d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_Z$ -modules  $\varphi_f : \mathcal{F}_z \rightarrow f^* \mathcal{F}_t$

Ces morphismes doivent vérifier la condition de cocycle suivante : si le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} W & \xrightarrow{g} & Z & \xrightarrow{f} & T \\ & \searrow w & \searrow z & & \downarrow t \\ & & & & \mathcal{X} \end{array}$$

commute alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_w & \xrightarrow{\varphi_{f \circ g}} & (f \circ g)^* \mathcal{F}_t \\ \varphi_g \downarrow & & \downarrow \cong \\ g^* \mathcal{F}_z & \xrightarrow{g^* \varphi_f} & g^* f^* \mathcal{F}_t \end{array}$$

commute

**Définition 2.6.1.6.** Un module cohérent  $\mathcal{F}$  est un fibré vectoriel de rang  $n$  (resp. un fibré en droites) si tous les  $\mathcal{F}_t$  sont localement libres de rang  $n$  (resp. inversibles)

*Remarque 2.6.1.7.* Un fibré vectoriel de rang  $n$  sur un champ  $\mathcal{X}$  est donc un morphisme de pseudo-foncteurs de  $\mathcal{X}$  vers  $\mathcal{Vect}_n \simeq \mathcal{B}GL_n(\mathbb{C})$

**Exemple 2.6.1.8.** Cette définition est cohérente avec la définition usuelle :  $\text{Coh}(\underline{X}) = \text{Coh}(X)$

## 2.6.2 Cas des champs quotients

Dans cette sous-section, nous allons étudier les modules sur une classe de champs plus simples, les champs quotients.

**Définition 2.6.2.1.** Soit  $X$  un espace analytique et  $G$  un groupe analytique agissant sur  $X$  (on note  $\text{act} : G \times X \rightarrow X$  le morphisme de l'action). Un faisceau équivariant est la donnée d'un faisceau  $\mathcal{F}$  sur  $X$  et la donnée d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{G \times X}$ -modules :

$$\rho : \pi_2^* \mathcal{F} \simeq \text{act}^* \mathcal{F}$$

tel que le diagramme suivant de  $\mathcal{O}_{G \times G \times X}$ -modules commute

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi_{23}^* \text{act}^* \mathcal{F} & \xrightarrow{=} & (\text{id}_G \times \text{act})^* \pi_2^* \mathcal{F} \\ & \nearrow \pi_{23}^*(\rho) & & & \searrow (\text{id}_G \times \text{act})^*(\rho) \\ \pi_{23}^* \pi_2^* \mathcal{F} & & & & (\text{id}_G \times \text{act})^* \text{act}^* \mathcal{F} \\ & \searrow = & & & \nearrow \\ & & (\mu \times \text{id}_X)^* \pi_2^* \mathcal{F} & \xrightarrow{(\mu \times \text{id}_X)^*(\rho)} & (\mu \times \text{id}_X)^* \text{act}^* \mathcal{F} \end{array}$$

où  $\pi_{23} : (g, h, x) \in G \times G \times X \mapsto (h, x) \in G \times X$  et  $\mu$  est la loi de groupe de  $G$ .

Remarque 2.6.2.2. Au niveau des ouverts, on a un isomorphisme pour tout  $g \in G$  :

$$\rho_{g,U} : \mathcal{F}(gU) \simeq \mathcal{F}(U)$$

Les sections d'un faisceau équivariant sont invariantes par l'action de  $G$ .

**Proposition 2.6.2.3.** *Soit  $X$  un espace analytique et  $G$  un groupe analytique agissant sur  $X$  et  $V \rightarrow X$  un fibré vectoriel sur  $X$  (i.e. un faisceau localement libre sur  $X$ ). Alors une  $G$ -linéarisation de  $\mathcal{F}$  est un relèvement  $\text{act}_V$  de l'action de  $G$  sur  $X$  en une action sur  $V$  i.e. le diagramme commutatif suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} V \times G & \xrightarrow{\text{act}_V} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times G & \xrightarrow{\text{act}} & X \end{array}$$

**Exemple 2.6.2.4.** Supposons que  $V \rightarrow X$  est un fibré vectoriel trivial. Alors une  $G$ -linéarisation est donc un relèvement de l'action de  $G$  sur  $X$  défini par :

$$\begin{array}{ccc} X \times \mathbb{C}^n \times G & \xrightarrow{\text{act}_V} & X \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ X \times G & \xrightarrow{\text{act}} & X \end{array}$$

Comme les morphismes  $\text{act}_V(\cdot, \cdot, g)$  sont des morphismes de fibrés vectoriels pour tout  $g$  alors  $\text{act}_V$  s'écrit sous la forme

$$(x, v, g) \in X \times \mathbb{C}^n \times G \mapsto (g \cdot x, \chi(g)v)$$

où  $\chi : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  est une application holomorphe. Comme, de plus,  $\text{act}_V$  est une action de groupe alors  $\chi$  est un morphisme de groupes.

**Théorème 2.6.2.5** ([4] Chapter XIII, Proposition 2.19). *Soit  $G$  un groupe analytique agissant sur un espace analytique  $X$ . On a une équivalence de catégories entre la catégorie  $\text{Coh}(X, G)$  des faisceaux cohérents sur  $X$  avec une  $G$ -linéarisation et  $\text{Coh}([X/G])$ .*

On peut étendre la construction de l'exemple 2.4.1.12 pour les fibrés vectoriels au-dessus des champs quotients :

**Construction 2.6.2.6.** *Soit  $\mathcal{V}$  un fibré vectoriel de rang  $n$  au-dessus de  $[X/G]$  donné par un fibré vectoriel  $V \rightarrow X$  avec une  $G$ -linéarisation. Soient  $\{U_i\}$  un recouvrement d'ouverts trivialisants de  $V \rightarrow X$  et  $f_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  les fonctions de transition. La  $G$ -linéarisation sur chaque fibré trivial  $\pi^{-1}(U_i) \simeq U_i \times \mathbb{C}^n \rightarrow U_i$  est donnée par un caractère  $\chi_i : G \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$  et les conditions de compatibilités des caractères sont données par le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \times G & \xrightarrow{(x,v,t) \mapsto (t \cdot x, \chi_i(t)v)} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow (x,v,t) \mapsto (x, f_{ij}(x)v, t) & & \downarrow (x,v,t) \mapsto (x, f_{ij}(x)v, t) \\ (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^n \times G & \xrightarrow{(x,v,t) \mapsto (t \cdot x, \chi_j(t)v)} & U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^n \end{array}$$

i.e.

$$\forall x \in U_i \cap U_j, \forall g \in G, f_{ij}(t \cdot x) \chi_i(t) = \chi_j(t) f_{ij}(x) \quad (2.21)$$

**Théorème 2.6.2.7.** *On a une équivalence de catégories :*

$$\text{Pic}([X/G]) \simeq \text{Pic}(X, G)$$

## 2.7 Groupes champêtres

Lorsqu'on a défini les 2-catégories dans la section 2.2, on a vu que la bonne façon de voir les égalités que l'on a dans le cadre 1-catégorique comme des 2-isomorphismes (cf. la définition de produit fibré). Dans cette section, on va voir comment étendre les définitions de groupes et d'actions de groupe dans ce contexte et quels résultats on peut obtenir de cela.

### 2.7.1 Champs de Picard

**Définition 2.7.1.1** ([6] exposé XVIII définition 1.4.5, [45] definition B.8). Un champ de Picard est un champ  $\mathcal{G}$  muni

- (loi de composition) d'un morphisme de champs  $m : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$  ;
- (2-associativité) d'un 2-morphisme

$$\theta_{g_1, g_2, g_3} : m(m(g_1, g_2), g_3) \Rightarrow m(g_1, m(g_2, g_3))$$

où un objet  $g_i \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$  est vu comme un morphisme  $\mathbf{U} \rightarrow \mathcal{G}$

- (2-commutativité) d'un 2-morphisme

$$\tau_{g_1, g_2} : m(g_1, g_2) \Rightarrow m(g_2, g_1)$$

vérifiant les propriétés suivantes :

- pour tout objet  $\mathbf{U}$  de  $\mathfrak{S}$  et tout objet  $g \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ , le morphisme de champs  $m(\mathbf{U})(g, -) : \mathcal{G}(\mathbf{U}) \rightarrow \mathcal{G}(\mathbf{U})$  est une équivalence de catégories ;
- pour tout objet  $\mathbf{U}$  de  $\mathfrak{S}$  et quadruplet d'objets  $g_i \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ , on a :

$$(\text{id}_{g_1} \times \theta_{g_2, g_3, g_4}) \circ \theta_{g_1, m(g_2, g_3)} \circ (\theta_{g_1, g_2, g_3} \times \text{id}_{g_4}) = \theta_{g_1, g_2, m(g_3, g_4)} \circ \theta_{m(g_1, g_2), g_3, g_4}$$

- pour tout objet  $\mathbf{U}$  de  $\mathfrak{S}$  et tout objet  $g \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ ,  $\tau_{g, g} = \text{id}_g$
- pour tout objet  $\mathbf{U}$  de  $\mathfrak{S}$  et tous objets  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ ,  $\tau_{g_1, g_2} \tau_{g_2, g_1} = \text{id}_{m(g_2, g_1)}$
- pour tout objet  $\mathbf{U}$  de  $\mathfrak{S}$  et triplet d'objets  $g_i \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ , on a :

$$\theta_{g_1, g_2, g_3} \circ \tau_{g_3, m(g_1, g_2)} \circ \theta_{g_3, g_1, g_2} = (\text{id}_{g_1} \times \tau_{g_3, g_2}) \circ \theta_{g_3, g_1, g_2} \circ (\tau_{g_3, g_1} \times \text{id}_{g_2})$$

**Exemple 2.7.1.2.** Un faisceau en groupes est un champ de Picard avec sa loi de groupe (les 2-morphismes sont l'identité). En particulier, un groupe interne de  $\mathfrak{S}$  est un champ de Picard en l'identifiant avec son foncteur de points  $\mathfrak{S}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Gr}$ .

**Lemme 2.7.1.3** ([6] Exposé XVIII, 1.4.4). *Un champ de Picard a un élément neutre i.e. un couple  $(e : * \rightarrow \mathcal{G}, \varepsilon : m(e, e) \Rightarrow e)$ .*

*Ce couple est unique à unique isomorphisme près et vérifie la condition suivante : Pour tout  $\mathbf{U} \in \mathfrak{S}$  et tout  $x \in \mathcal{G}(\mathbf{U})$ , il existe un unique isomorphisme*

$$\alpha_x : m(e_{\mathbf{U}}, x) \simeq x$$

où  $e_U$  est la composé de  $e$  avec le morphisme  $U \rightarrow *$ , faisant commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} m(e_U, m(e_U, x)) & \xrightarrow{\theta_{e_U, e_U, x}} & m(m(e_U, e_U), x) \\ m(e_U, \alpha_x) \downarrow & & \downarrow m(\varepsilon, x) \\ m(e_U, x) & \xrightarrow{=} & m(e_U, x) \end{array}$$

**Lemme 2.7.1.4.** Soit  $(G, \mu)$  un groupe de  $\mathfrak{S}$  et  $(\Gamma, m)$  un groupe agissant sur  $G$  de telle sorte que  $\mu$  soit  $m$ -équivariant. Alors  $[G/\Gamma]$  est un champ de Picard.

*Démonstration.* Comme  $\mu$  est  $m$ -équivariant alors il descend en un morphisme

$$m : [G/\Gamma] \times [G/\Gamma] \simeq [G \times G/\Gamma \times \Gamma] \rightarrow [G/\Gamma]$$

Les relations d'associativité sont compatibles avec le passage au quotient grâce aux égalités suivantes (qui se correspondent puisque  $m$  et  $\mu$  sont des morphismes de groupes) :

$$\begin{aligned} \forall g, h, k \in G, \forall \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma, \mu(\mu(\gamma \cdot g, \gamma' \cdot h), \gamma'' \cdot k) &= \mu(m(\gamma, \gamma')\mu(g, h), \gamma'' \cdot k) \\ &= m(m(\gamma, \gamma'), \gamma'')\mu(\mu(g, h), k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall g, h, k \in G, \forall \gamma, \gamma', \gamma'' \in \Gamma, \mu(\gamma \cdot g, \mu(\gamma' \cdot h, \gamma'' \cdot k)) &= \mu(\gamma \cdot g, m(\gamma', \gamma''))\mu(h, k) \\ &= m(\gamma, m(\gamma', \gamma''))\mu(g, \mu(h, k)) \end{aligned}$$

Le même type de calcul montre que la commutativité est aussi compatible avec le passage au quotient. Notons  $\theta_{g,h,k}$  et  $\tau_{g,h}$  les 2-morphismes obtenus par la champification des égalités obtenues pour, respectivement, l'associativité et la commutativité. La donnée  $([G/\Gamma], m, \{\tau_{g,h}\}_{g,h}, \{\theta_{g,h,k}\}_{g,h,k})$  est un champ de Picard.  $\square$

Ce résultat sera utilisé dans le [chapitre 3](#) pour donner une « structure de groupe » au remplaçant du tore algébrique  $(C^*)^d$  dans le cadre irrationnel.

**Définition 2.7.1.5.** Un morphisme de champs de Picard  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  est un morphisme de champs  $F : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$  avec un 2-morphisme  $\varphi_{g_1, g_2} : F(m^{\mathcal{G}}(g_1, g_2)) \Rightarrow m^{\mathcal{H}}(F(g_1), F(g_2))$  pour tout objet  $g_1, g_2$  de  $\mathcal{G}$  vérifiant :

- pour tout objet  $U$  de  $\mathfrak{S}$  et couple d'objets  $g_i \in \mathcal{G}(U)$ ,

$$\tau_{F(g_1), F(g_2)}^{\mathcal{H}} \circ \varphi_{g_1, g_2} = \varphi_{g_2, g_1} \circ F(\tau_{g_1, g_2}^{\mathcal{G}})$$

- pour tout objet  $U$  de  $\mathfrak{S}$  et triplet d'objets  $g_i \in \mathcal{G}(U)$ ,

$$\varphi_{g_1, m^{\mathcal{G}}(g_2, g_3)} \circ (\text{id}_{F(g_1)} \times \varphi_{g_2, g_3}) \circ F(\theta_{g_1, g_2, g_3}) = \theta_{F(g_1), F(g_2), F(g_3)}^{\mathcal{H}} \circ (\varphi_{g_1, g_2} \times \text{id}_{F(g_3)}) \circ \varphi_{g_1, m^{\mathcal{G}}(g_2, g_3)}$$

**Exemple 2.7.1.6.** Un morphisme de faisceaux en groupes est un morphisme de champs de Picard.

**Lemme 2.7.1.7.** Soient  $(G, \mu_1)$  et  $(H, \mu_2)$  deux groupes de  $\mathfrak{S}$  et  $(\Gamma, m_1), (\Xi, m_2)$  agissant sur, respectivement,  $G$  et  $H$  tel que  $\mu_i$  soit  $m_i$ -équivariant. Soit  $f : G \rightarrow H$  un morphisme de groupes qui est  $(\alpha : \Gamma \rightarrow \Xi)$ -équivariant. Alors le morphisme  $f$  descend au quotient en un morphisme  $[G/\Gamma] \rightarrow [H/\Xi]$  qui est un morphisme de champs de Picard.

*Démonstration.* Tout d'abord, le morphisme équivariant  $f : G \rightarrow H$  descend en un morphisme de champs  $f : [G/\Gamma] \rightarrow [H/\Xi]$ .

La suite de la preuve se fait de la même façon que le [lemme 2.7.1.4](#). Pour tout  $g, h \in G$  et tout  $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ , on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} f(\mu_1(\gamma \cdot g, \gamma' \cdot h)) &= f(m_1(\gamma, \gamma')\mu_1(g, h)) \\ &= \alpha(m_1(\gamma, \gamma'))f(\mu_1(g, h)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mu_2(f(\gamma \cdot g), f(\gamma' \cdot h)) &= \mu_2(\alpha(\gamma)f(g), \alpha'(\gamma')f(h)) \\ &= m_2(\alpha(\gamma), \alpha(\gamma'))\mu_2(f(g), f(h)) \end{aligned}$$

On en déduit que la compatibilité de  $f$  et des  $m_i$  descend au quotient. Notons  $\varphi_{g,h}$  les 2-morphismes obtenues par champification des égalités. La donnée de  $(f, \{\varphi_{g,h}\}_{g,h})$  est un morphisme de champs de Picard  $[G/\Gamma] \rightarrow [H/\Xi]$ .  $\square$

**Définition 2.7.1.8** ([\[45\]](#) définition B.12). Soit  $\mathcal{G}$  un champ de Picard et  $\mathcal{X}$  un champ. Alors une action de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{X}$  est la donnée

- d'un morphisme  $\cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$
- d'un 2-morphisme  $\eta_x : e \cdot x \Rightarrow x$
- d'un 2-morphisme  $\sigma : m(g_1, g_2) \cdot x \Rightarrow g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$

vérifiant

- pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{S}$  et triplet d'objets  $g_i \in \mathcal{G}(U)$  et tout objet  $X \in \mathcal{X}(U)$ ,

$$(\text{id}_{g_1} \cdot \sigma_{g_2, g_3, X}) \circ \sigma_{g_1, m(g_2, g_3), X} \circ (\theta_{g_1, g_2, g_3} \cdot \text{id}_X) = \sigma_{g_1, g_2, g_3, X} \circ \sigma_{g_1 \cdot g_2, g_3, X}$$

- pour tout objet  $U$  de  $\mathcal{S}$  et tout objet  $x \in \mathcal{X}(U)$ ,

$$(\text{id}_e \cdot \eta_x) \circ \sigma_{e, e, x} = (e \cdot \text{id}_x)$$

## 2.7.2 Actions de groupes sur des champs

On va maintenant se concentrer sur les actions de (faisceaux en) groupes sur les champs. Ces résultats sur les actions de groupe sur les champs seront utilisés dans le [chapitre 5](#) pour construire des familles universelles de champs toriques pour pouvoir quotienter les isomorphismes.

**Définition 2.7.2.1** ([\[113\]](#)). Soit  $\mathcal{G}$  un faisceau en groupes dans  $\mathcal{S}$ . La donnée des champs muni d'une action de  $\mathcal{G}$  (cf. [la définition 2.7.1.8](#)) avec les morphismes  $\mathcal{G}$ -équivariants et les 2-morphismes compatibles avec l'action forment une 2-catégorie, que l'on notera  $\mathcal{G} - \mathcal{Champ}_{\mathcal{S}}$ .

**Définition 2.7.2.2.** Soient  $\mathcal{G}$  un faisceau en groupes et  $\mathcal{X}$  un champ. L'action triviale de  $\mathcal{G}$  sur  $\mathcal{X}$  est l'action donnée par  $m(g, x) = x$ ,  $\eta_x = \text{id}_x$  et  $\sigma_{g_1, g_2, x} = \text{id}$ . Le  $\mathcal{G}$ -champ obtenu sera noté  $\mathcal{X}^{\text{triv}}$

**Théorème 2.7.2.3** ([\[113\]](#)). *L'association  $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\text{triv}}$  est un 2-foncteur  $\mathcal{Champ}_{\mathcal{S}} \rightarrow \mathcal{G} - \mathcal{Champ}_{\mathcal{S}}$  qui a un adjoint à gauche  $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}/\mathcal{G}$  de formation du quotient et à droite  $\mathcal{G} \curvearrowright \mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}^{\mathcal{G}}$  des invariants i.e. on a, pour tout champ  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{G}$ -champ  $\mathcal{X}$ , des équivalences de catégories*

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G} - \mathcal{Champ}}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\text{triv}}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{Champ}}(\mathcal{X}/\mathcal{G}, \mathcal{Y}) \quad (2.22)$$

$$\mathbf{Hom}_{\mathcal{G} - \mathcal{Champ}}(\mathcal{Y}^{\text{triv}}, \mathcal{X}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathcal{Champ}}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{G}}) \quad (2.23)$$



*Idée de preuve.* Le champ  $\mathcal{X}/\mathbb{G}$  est la champification du pseudo-foncteur  $\mathcal{P}_{\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{X}}$  qui associe à  $S \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$  la catégorie dont les objets sont les objets de  $\mathcal{X}(S)$  et les morphismes entre  $x$  et  $y$  sont les paires  $(g, \varphi)$  où  $g \in \mathbb{G}(S)$  et  $\varphi : g \cdot x \rightarrow y$  est un morphisme de  $\mathcal{X}(S)$ .

Par le lemme de Yoneda, le champ  $\mathcal{X}^{\mathbb{G}}$  est défini par

$$\mathcal{X}^{\mathbb{G}}(S) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathfrak{S}\text{-hamp}}(\underline{S}, \mathcal{X}^{\mathbb{G}}) \simeq \mathbf{Hom}_{\mathbb{G}\text{-}\mathfrak{S}\text{-hamp}}(\underline{S}^{\text{triv}}, \mathcal{X})$$

Ce qui définit bien un champ □

**Exemple 2.7.2.4.** Soit  $G$  un groupe de  $\mathfrak{S}$  qui agit sur  $X \in \text{Ob}(\mathfrak{S})$ . Alors

$$\underline{X}/\underline{G} = [X/G] \quad ; \quad \underline{X}^G = X^G$$

En effet,  $\text{Ob}\mathcal{P}_{\underline{G} \rightarrow \underline{X}} = X(T) = \text{Ob}([X \times G \rightrightarrows X]^{\text{pre}})$  et

$$\text{Hom}_{\mathcal{P}_{\underline{G} \rightarrow \underline{X}}}(x, y) = \{g \in G(T) \mid g \cdot x = y\} = \text{Hom}_{[X \times G \rightrightarrows X]^{\text{pre}}}(x, y)$$

car les morphismes de  $X(T)$  sont les identités. On en déduit que  $\mathcal{P}_{\underline{G} \rightarrow \underline{X}} = [X \times G \rightrightarrows X]^{\text{pre}}$  et leur champification sont aussi égales.

On obtient la deuxième égalité en remarquant que  $\underline{X}^G$  et  $X^G$  ont la même propriété universelle car (par pleine fidélité du plongement de Yoneda)

$$\text{Hom}_{\mathbb{G}\text{-}\mathfrak{S}\text{-hamp}}(\underline{S}^{\text{triv}}, \underline{X}) = \text{Hom}_{G\text{-}\mathfrak{S}}(\underline{S}^{\text{triv}}, X).$$

**Corollaire 2.7.2.5.** La 2-catégorie  $\mathbb{G}\text{-}\mathfrak{S}\text{-hamp}_{\mathfrak{S}}$  a toutes les (2-)limites et toutes les (2-)colimites.

**Notation 2.7.2.6.** L'équivalence (2.22) va associer au morphisme identité  $\mathcal{X}/\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{X}/\mathbb{G}$  un morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{X}/\mathbb{G})^{\text{triv}}$  que l'on notera  $\pi_{\mathcal{X}, \mathbb{G}}$ .

**Lemme 2.7.2.7.** L'inverse du foncteur (2.22) est la pré-composition par  $\pi_{\mathcal{X}, \mathbb{G}}$ .

*Remarque 2.7.2.8.* Le morphisme  $\pi_{X, G} : X \rightarrow X/G$  correspond au  $G$ -fibré trivial  $X \rightarrow [X/G]$ .

**Proposition 2.7.2.9.** Soit  $\mathbb{G}$  un faisceau en groupes dans  $\mathfrak{S}$ . Soient  $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$  deux  $\mathbb{G}$ -champs. Un morphisme  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  de  $\mathbb{G}\text{-}\mathfrak{S}\text{-hamp}_{\mathfrak{S}}$  descend en un morphisme  $\bar{f} : \mathcal{X}/\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{Y}/\mathbb{G}$ .

*Démonstration.* Par l'équivalence (2.22), le morphisme  $\pi_{\mathcal{Y}, \mathbb{G}} \circ f : \mathcal{X} \rightarrow (\mathcal{Y}/\mathbb{G})^{\text{triv}}$  correspond à un morphisme  $\bar{f} : \mathcal{X}/\mathbb{G} \rightarrow \mathcal{Y}/\mathbb{G}$ . Par le lemme 2.7.2.7, on obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{f} & \mathcal{Y} \\ \pi_{\mathcal{X}, \mathbb{G}} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathcal{Y}, \mathbb{G}} \\ \mathcal{X}/\mathbb{G} & \xrightarrow{\bar{f}} & \mathcal{Y}/\mathbb{G} \end{array}$$

□

**Proposition 2.7.2.10.** Soit  $\mathbb{G}$  un faisceau en groupes agissant sur un champ  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{H}$  un sous-(faisceau en )groupe distingué de  $\mathbb{G}$  (i.e.  $\mathcal{H}(T)$  est un sous-groupe distingué de  $\mathbb{G}(T)$  pour tout  $T$ ). Alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{X}/\mathcal{H})/(\mathbb{G}/\mathcal{H}) &\simeq \mathcal{X}/\mathbb{G} \\ (\mathcal{X}^{\mathcal{H}})^{\mathbb{G}/\mathcal{H}} &\simeq \mathcal{X}^{\mathbb{G}} \end{aligned}$$

## 2.8 Gerbes

Dans cette section, nous allons aborder la notion de gerbe au-dessus du champ.

**Définition 2.8.1.** Soit  $\mathfrak{C}$  un site. Une gerbe au-dessus du site  $\mathfrak{C}$  est un champ  $\mathcal{G}$  au-dessus de  $\mathfrak{C}$  tel que :

- $\mathcal{G}$  est localement non-vide : pour tout objet  $U$  de  $\mathfrak{C}$ , il existe un recouvrement  $\{U_i \rightarrow U\}$  tel que  $\mathcal{G}(U_i)$  est non-vide pour tout  $i$ .
- $\mathcal{G}$  est localement connexe : pour tout objet  $U$  et pour tout  $g_1$  et  $g_2$  dans  $\mathcal{G}(U)$  tel qu'il existe un recouvrement  $\{U_i \rightarrow U\}$  tel que

$$\text{Hom}(g_{1|U_i}, g_{2|U_i}) \neq \emptyset$$

**Définition 2.8.2.** Soit  $\mathfrak{C}$  un site et  $\mathcal{X}$  un champ au-dessus de  $\mathfrak{C}$ . Une gerbe au-dessus du champ  $\mathcal{X}$  est un morphisme de champs  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  tel que pour tout objet  $U$  de  $\mathfrak{C}$  et tout morphisme  $u : U \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $U \times_{\mathcal{X}} \mathcal{G}$  est un gerbe au-dessus de  $\mathfrak{C}/U$ .

On va maintenant fixer le site  $\mathfrak{C}$  comme étant un des exemples de l'exemple 2.1.2.1.6 ou  $\mathfrak{A}$ .

**Définition 2.8.3** ([69]). Soit  $G$  un groupe abélien. Une gerbe  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  est une  $G$ -gerbe si

- le morphisme  $\pi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  admet des sections locales i.e. il existe un atlas  $X \rightarrow \mathcal{X}$  et un section  $(s : X \rightarrow \mathcal{G}, \varphi : \pi \circ s \rightarrow p)$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{s} & \mathcal{G} \\ & \searrow p & \downarrow \varphi \\ & & \mathcal{X} \end{array}$$

- il existe un atlas  $p : X \rightarrow \mathcal{X}$  et une section  $(s : X \rightarrow \mathcal{G}, \varphi : \pi \circ s \rightarrow p)$  tels que l'on ait un isomorphisme au-dessus de  $X$

$$\Phi : \text{Aut}(s/p) := (X \times_{\mathcal{G}} X) \times_{X \times_{\mathcal{X}} X} X \simeq X \times G$$

où le morphisme  $X \times_{\mathcal{G}} X \rightarrow X \times_{\mathcal{X}} X$  est donné par la propriété universelle du produit fibré et  $X \rightarrow X \times_{\mathcal{X}} X$  est le morphisme diagonal, vérifiant la condition de compatibilité suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Aut}(s \circ \text{pr}_1/p \circ \text{pr}_1) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Aut}(s \circ \text{pr}_2/p \circ \text{pr}_2) \\ & \searrow \text{pr}_1^* \Phi & \swarrow \text{pr}_2^* \Phi \\ & & (X \times_{\mathcal{X}} X) \times G \end{array}$$

où les groupes d'automorphismes se réfèrent au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times_{\mathcal{X}} X & \xrightarrow{\text{pr}_i} & X \xrightarrow{s} \mathcal{G} \\ \text{pr}_i \downarrow & & \swarrow \pi \\ X & & \\ p \downarrow & & \\ \mathcal{X} & & \end{array}$$

**Exemple 2.8.4.** Soit  $G$  un groupe abélien et  $X \in \mathfrak{C}$  sur lequel  $G$  agit trivialement. Considérons la projection  $\pi : [X/G] = X \times \mathcal{B}G \rightarrow X$ . On voit immédiatement que c'est une gerbe. Montrons que c'est une  $G$ -gerbe.

- $\pi : X \times \mathcal{B}G \rightarrow X$  admet des sections locales (on prend le morphisme  $X \rightarrow X \times \mathcal{B}G$  donné par le fibré  $G$ -principal trivial au-dessus de  $X$  et l'identité sur  $X$  pour la section  $s$  et l'atlas  $p = \text{id}_X$  )
- Reprenons la même section. Alors

$$\begin{aligned} \text{Aut}(s/p) &= (X \times_{[X/G]} X) \times_{X \times X} X = (X \times_{[X/G]} X) \times_X X \\ &= (X \times G) \times_X X = X \times G \end{aligned}$$

Grâce aux propriétés de recollement des faisceaux, un morphisme  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  qui est localement de la forme  $\mathcal{U} \times \mathcal{B}G \rightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{X}$  est une  $G$ -gerbe. Réciproquement, toutes les  $G$ -gerbes peuvent se décrire ainsi (une façon de le voir est que le fait que le groupe d'automorphisme soit isomorphe à  $G \times X$  implique qu'en tout point de  $X$  et les points associés  $x_{\mathcal{X}}$  et  $x_{\mathcal{G}}$  de  $\mathcal{X}$  et de  $\mathcal{G}$ , on a

$$G = \text{Aut}(s/p)(*) = \text{Aut}_{\mathcal{G}}(x_{\mathcal{G}}) \times_{\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x_{\mathcal{X}})} *$$

et donc la flèche  $\text{Aut}_{\mathcal{G}}(x_{\mathcal{G}}) \times_{\text{Aut}_{\mathcal{X}}(x_{\mathcal{X}})}$  est un  $G$ -fibré, on conclut en globalisant ce raisonnement).

*Slogan 2.8.5.* Une  $G$ -gerbe est une « fibration » de fibre  $\mathcal{B}G$ .

**Exemple 2.8.6.** Soit  $H$  un groupe abélien agissant librement sur un objet  $X$  et

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{h} K \xrightarrow{\pi} H \longrightarrow 0$$

une suite exacte de groupes de  $\mathcal{S}$  et tel que  $\pi$  soit lisse. Le groupe  $K$  agit sur  $X$  grâce au morphisme  $\pi$ . Montrons que le morphisme  $\pi: [X/K] \rightarrow [X/H]$  est une  $G$ -gerbe.

Comme tout morphisme  $T \rightarrow H$  peut se remonter localement en un morphisme  $T \rightarrow K$  (grâce à la section donnée par le morphisme lisse  $\pi$  alors le morphisme  $\pi: [X/K] \rightarrow [X/H]$  est une gerbe.

Remarquons ensuite que le diagramme suivant 2-commute

$$\begin{array}{ccc} [X/K] & \xrightarrow{\pi} & [X/H] \\ \uparrow & \nearrow & \\ X & & \end{array}$$

Le morphisme  $\pi$  a donc des sections locales.

Il nous reste plus qu'à calculer le groupe d'automorphisme :

$$\text{Aut}(s/p) = (X \times_{[X/K]} X) \times_{X \times_{[X/H]} X} = (X \times K) \times_{X \times H} X$$

Comme l'action de  $H$  sur  $X$  est libre alors le morphisme composé

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times_{[X/H]} X \simeq X \times H$$

est le morphisme  $x \mapsto (x, 0_H)$ . On en déduit donc que

$$\text{Aut}(s/p) = X \times \ker(\pi) = X \times G$$

Cet exemple sera utilisé dans la suite où on considérera des actions non-effectives sur des variétés. Le quotient sera donc une Ineff-gerbe (Ineff est le groupe d'ineffectivité de l'action) au-dessus du quotient où on a retiré l'ineffectivité.

**Proposition 2.8.7** ([2], theorem 5.1.5). *Si  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  est une  $G$ -gerbe alors pour tout sous-groupe  $H$  dans  $\mathcal{S}$  de  $G$ , on peut construire sa rigidification par  $H$  qui est un morphisme lisse  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^H$  tel que*

- il existe un morphisme  $\mathcal{G}^H \rightarrow \mathcal{X}$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G} & & \\
 \downarrow & \searrow & \\
 & & \mathcal{G}^H \\
 & \swarrow & \\
 \mathcal{X} & & 
 \end{array}$$

- un tel morphisme est une  $G/H$ -gerbe.

**Définition 2.8.8.** Deux  $G$ -gerbes  $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $\mathcal{G}' \rightarrow \mathcal{X}$  sont équivalentes s'il existe un isomorphisme de champs entre  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}'$  au-dessus de  $\mathcal{X}$  qui préserve la structure de  $G$ -gerbe.

**Théorème 2.8.9** ([53], Proposition 3.5.1). Soient  $\mathcal{X}$  un champ et  $G$  un groupe. Les classes d'équivalence de  $G$ -gerbes au-dessus de  $\mathcal{X}$  est isomorphe au groupe de cohomologie

$$H^2(\mathcal{X}, G)$$

*Remarque 2.8.10.* On peut interpréter cette classe de cohomologie de la façon suivante :

Prenons une variété  $X$  et faisons agir un groupe de Lie avec ineffectivité  $H$ . Par conséquent, on a un  $(G/H)$ -fibré principal  $X \rightarrow X/G$ . Ce fibré (ou plus précisément sa classe d'isomorphie) peut être vu comme un élément de  $H^1(X, G/H)$ .

Comme on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \longrightarrow 0$$

alors on a une suite exacte longue en cohomologie

$$\dots \longrightarrow H^1(X, G) \longrightarrow H^1(X, G/H) \longrightarrow H^2(X, G) \longrightarrow \dots$$

La classe de cohomologie donnée par la  $G$ -gerbe  $[X/G] \rightarrow X/G$  représente l'obstruction à relever les  $(G/H)$ -cocycles de  $X \rightarrow X/G$  en des  $G$ -cocycles (donc un élément de  $H^1(X, G)$ ).

Au niveau homotopique, on obtient :

**Corollaire 2.8.11.** Les classes d'équivalences de  $G$ -gerbes sont les classes d'homotopie de morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow K(G, 2)$  (où  $K(G, 2)$  est l'espace d'Eilenberg-MacLane dont tous les groupes d'homotopie sont triviaux sauf le deuxième qui est isomorphe à  $G$ ). En particulier, si  $G = \mathbb{Z}$  alors ce sont les classes d'homotopie de fibrés en droites complexes.

*Démonstration.* On a la suite d'isomorphismes suivants :

$$H^2(\mathcal{X}, G) \simeq H^2(X, G) \simeq [X, K(G, 2)] \simeq [\mathcal{X}, K(G, 2)]$$

où  $X$  est l'espace classifiant de  $\mathcal{X}$  et  $[\cdot, \cdot]$  sont les classes d'homotopie de morphismes d'espaces/champs topologiques.

Prenons  $G = \mathbb{Z}$ . Comme le groupe  $\mathbb{C}^*$  est un espace  $K(\mathbb{Z}, 1)$  alors  $B\mathbb{C}^* = \mathbb{C}P^\infty$  est un espace  $K(\mathbb{Z}, 2)$ . Ainsi, on a l'isomorphisme

$$H^2(\mathcal{X}, \mathbb{Z}) \simeq [\mathcal{X}, B\mathbb{C}^*],$$

La partie de droite est, par définition de  $B\mathbb{C}^*$ , le groupe des classes d'homotopie de  $\mathbb{C}^*$ -fibrés principaux

sur  $\mathcal{X}$  i.e. les classes d'homotopie de fibrés en droites complexes sur  $\mathcal{X}$ . Les  $\mathbb{Z}$ -gerbes au-dessus de  $\mathcal{X}$  correspondent donc aux classes d'homotopie de fibrés en droites complexes au-dessus de  $\mathcal{X}$ . □

# GÉOMÉTRIE TORIQUE QUANTIQUE

COMME LES ÉVENTAILS DÉFINISSANT LES VARIÉTÉS toriques contiennent uniquement des éventails rationnels, les variétés toriques sont rigides comme espaces équivariants. En effet, si l'on veut déformer une variété torique avec son action du tore, on va le faire en déformant l'éventail le définissant. Or si on déforme continûment un éventail, on va nécessairement obtenir des cônes engendrés par des éléments irrationnels et donc sortir du cadre classique des variétés toriques. Le but de ce chapitre est donc d'étendre la notion de variétés toriques afin d'englober des objets toriques définis par des éventails définis sur un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  quelconque afin de pouvoir considérer des espaces de modules d'objets toriques dans le [chapitre 4](#). Pour cela, on va suivre la description faite dans l'article [81] écrit par L.KATZARKOV, E.LUPERCIO, L.MEERSSEMAN, A.VERJOVSKY sur la géométrie torique quantique.

Dans la [première section](#), on donnera quelques constructions d'objets toriques qui généralisent les variétés toriques où on a changé les conditions imposées aux données combinatoires (et notamment sur le groupe des cocaractères que l'on considère : présence de torsion, rationalité). Dans la [deuxième section](#), on va se concentrer sur cette condition de rationalité et regarder ce que l'on peut dire lorsque le groupe  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  que l'on considère n'est plus discret (i.e. a un rang strictement supérieur à  $d$ ). Comme vu dans les exemples de la première section, il est nécessaire de considérer des tores plus généraux que ceux considérés dans la théorie classique. On introduira pour cela la notion de « tore quantique ». La [troisième section](#) sera dédiée à donner les définitions et quelques propriétés de ces tores quantiques. Maintenant que l'on a les tores, on va pouvoir définir, dans la [quatrième section](#), des champs toriques « quantiques ». Pour cela, on va procéder en deux étapes : on va définir les cartes affines puis les recoller. Les sections suivantes seront dédiées à l'étude de ses champs toriques : on verra dans la [cinquième section](#) que ces champs toriques sont obtenus comme une  $\mathbb{Z}^a$ -gerbe au-dessus d'un champ qui sera une version « non-calibrée » de ceux-ci (comme étudiée dans [81]) et la description du fibré définissant cette gerbe analytique. On montrera dans la [sixième section](#) que ces champs toriques quantiques définis par recollement s'écrivent comme un quotient global d'une variété torique par l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$ .

## 3.1 Variétés toriques généralisées

Dans cette section, nous allons donner des généralisations qui ont pu être faites des variétés toriques. Tout d'abord, en restant dans le cadre rationnel, avec les champs de Deligne-Mumford toriques (comme introduits dans [18]) où on a remplacé, dans la donnée combinatoire, le réseau  $N$  par la donnée d'un épimorphisme  $\mathbb{Z}^n \rightarrow N$  (où  $N$  est un groupe abélien finiment engendré) de conoyau fini. Ensuite, on se concentra sur le cas irrationnel avec deux constructions issues de la géométrie symplectique :

- les quasifolds toriques (comme introduite dans [108]) où on va associer à un polytope (avec la donnée de vecteurs normaux à ces faces) un objet géométrique qui va être localement modelé par des quotients d'ouvert d'espace linéaire par un groupe dénombrable ;

- les champs toriques symplectiques (dans [71]) qui va aussi associer à un polytope un champ différentiel (ayant un tore (champêtre) dense) muni d'une forme symplectique.

### 3.1.1 Champs de Deligne-Mumford toriques lisses

Dans ce paragraphe, on se placera sur le site étale sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ .

Les champs de Deligne-Mumford toriques ont été tout d'abord introduits dans [18] par L.BORISOV, L.CHEN et G.SMITH. comme champs de Deligne-Mumford obtenus à partir de la donnée (combinatoire) d'un éventail champêtre qui permet de construire un champ quotient de façon similaire à la construction de D.COX dans [35] et ont été décrits de façon géométrique par B. FANTECHI, É.MANN, et F.NIRONI dans [45].

Commençons par la définition de champs torique qui est similaire à celle des variétés toriques (cf. la définition 1.1.2.1)

**Définition 3.1.1.1.** Un tore de Deligne-Mumford est un produit  $T \times \mathcal{B}G$  où  $T \simeq (\mathbb{C}^*)^d$  et  $G$  est un groupe fini.

**Définition 3.1.1.2.** Un champ torique de Deligne-Mumford est un champ de Deligne-Mumford lisse et séparé  $\mathcal{X}$  avec une immersion ouverte  $\mathcal{T} \hookrightarrow \mathcal{X}$  (où  $\mathcal{T}$  est un tore de Deligne-Mumford) avec une image dense et telle que l'action de  $\mathcal{T}$  sur lui-même s'étend en une action de  $\mathcal{T}$  sur  $\mathcal{X}$ .

Notons  $\mathcal{X}^{\text{rig}}$  l'orbifolde obtenue par rigidification de  $\mathcal{X}$  par  $G$  (i.e. le tore dense de  $\mathcal{X}^{\text{rig}}$  est  $(\mathbb{C}^*)^d$ ). Ainsi,  $\mathcal{X}^{\text{rig}}$  n'a plus de stabilisateur générique. Voici comment obtenir  $\mathcal{X}$  à partir de  $\mathcal{X}^{\text{rig}}$  :

**Théorème 3.1.1.3** ([45], Corollary 6.26). Notons  $G = \prod_{j=1}^n \mu_{b_j}$ . Il existe des fibrés en droites  $\mathcal{L}_i \in \text{Pic}(\mathcal{X}^{\text{rig}})$  tels que :

$$\mathcal{X} = \sqrt[b_1]{\mathcal{L}_1/\mathcal{X}^{\text{rig}}} \times_{\mathcal{X}^{\text{rig}}} \dots \times_{\mathcal{X}^{\text{rig}}} \sqrt[b_n]{\mathcal{L}_n/\mathcal{X}^{\text{rig}}}$$

où, pour tout  $j$ , le choix de  $\mathcal{L}_j$  est unique dans  $\text{Pic}(\mathcal{X}^{\text{rig}})/b_j \text{Pic}(\mathcal{X}^{\text{rig}})$ .

Les champs  $\sqrt[b]{\mathcal{L}/\mathcal{X}^{\text{rig}}}$  sont appelés champs de racines et sont données par le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} \sqrt[b]{\mathcal{L}/\mathcal{X}^{\text{rig}}} & \longrightarrow & \mathcal{B}\mathbb{C}^* \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow ( )^{\otimes b} \\ \mathcal{X}^{\text{rig}} & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{B}\mathbb{C}^* \end{array}$$

**Définition 3.1.1.4.** Un éventail champêtre est un triplet  $(N, \Sigma, \beta)$  où  $N$  est un groupe abélien finiment engendré,  $\Sigma$  est un éventail rationnel simplicial et  $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow N$  est un épimorphisme de groupe de conoyau fini tel que les  $\beta(e_i)$  engendrent les 1-cônes de  $\Sigma$ .

À partir d'un éventail champêtre, on peut construire un champ torique donné par un quotient  $[\mathcal{S}/G]$  où  $\mathcal{S}$  est la variété torique quasi-affine donné par l'éventail et  $G$  est construit comme suit :

Le morphisme  $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow N$  est entièrement déterminée par les éléments  $\bar{\beta}_i := \beta(e_i)$ . Comme  $N$  est un groupe abélien,  $N$  admet une résolution projective

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^r \xrightarrow{Q} \mathbb{Z}^{d+r} \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

(où  $d = \dim_{\mathbb{Q}}(N \otimes \mathbb{Q})$  est le rang de  $N$ ) Soit  $\beta_i \in \mathbb{Z}^{d+r}$  un relèvement de  $\bar{\beta}_i$ . Alors le morphisme  $\beta : \mathbb{Z}^n \rightarrow N$  se relève en un morphisme  $B : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{d+r}$ . On obtient ainsi un morphisme

$$h : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^r \rightarrow \mathbb{Z}^{d+r}, (m, n) \mapsto Bm + Qn$$

Alors le groupe  $G$  est le groupe  $\text{Hom}(\text{coker}(\mathfrak{h}), \mathbb{G}_m)$  et agit sur  $\mathbb{A}^n$  en appliquant le foncteur  $\text{Hom}(-, \mathbb{G}_m)$  au morphisme  $(\mathbb{Z}^n)^* \rightarrow (\mathbb{Z}^{n+r})^* \rightarrow \text{coker}(\mathfrak{h})$  où la première flèche est l'inclusion et la deuxième est l'application quotient.

**Proposition 3.1.1.5** ([18], Proposition 3.2). *Un champ décrit comme précédemment est un champ de Deligne-Mumford torique.*

**Théorème 3.1.1.6** ([45], Theorem 7.7). *Soit  $\mathcal{X}$  un champ de Deligne-Mumford torique dont l'espace de modules grossiers est  $X$ . Soit  $\Sigma$  l'éventail de  $X$  que l'on supposera complet. Alors il existe un éventail champêtre tel que  $\mathcal{X}$  est isomorphe, comme champ de Deligne-Mumford torique, au champ de Deligne-Mumford associé à un éventail champêtre. De plus, si  $\mathcal{X}$  a des stabilisateurs génériques triviaux alors l'éventail champêtre est unique.*

### 3.1.2 Quasifolles toriques

Un des premiers résultats reliant la géométrie symplectique et la géométrie torique est le suivant :

**Théorème 3.1.2.1** ([38]). *Soit  $M$  une variété symplectique compacte connexe de dimension  $2n$  munie d'une action hamiltonienne effective de  $(\mathbb{S}^1)^n$ . Alors, l'image de l'application des moments associée est un polytope  $P$  lisse et  $X$  est difféomorphe (en tant que  $(\mathbb{S}^1)^n$ -espace hamiltonien) à la variété torique projective  $X_P$ .*

Dans ce résultat, le polytope obtenu a des sommets entiers. Une question naturelle est alors d'étendre ce résultat à des polytopes quelconques. Pour cela, il est nécessaire de considérer des objets plus généraux que des variétés symplectiques. E.PRATO a pour cela introduit dans [108] les quasifolles qui sont localement des quotients de  $\mathbb{R}^n$  par des groupes dénombrables :

**Définition 3.1.2.2** ([108],[76]). *Une  $n$ -quasifolde est un espace difféologique  $X$  qui est localement difféomorphe à un  $\mathbb{R}^n/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un sous-groupe dénombrable, potentiellement infini, de  $\text{Aff}(\mathbb{R}^n)$  (qui n'est pas fixé).*

Dans ce contexte, on peut aussi définir un tore quasifold :

**Définition 3.1.2.3** ([108]). *Soit  $\mathfrak{d}$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Un quasi-réseau dans  $\mathfrak{d}$  est un groupe abélien  $Q$ , engendré par une famille de vecteurs  $X_1, \dots, X_d$  engendrant (sur  $\mathbb{R}$ )  $\mathfrak{d}$ . On appelle quasitore de dimension  $n$  le groupe quasifold donné par une carte  $D = \mathfrak{d}/Q$ .*

On obtient ensuite l'extension du [théorème 3.1.2.1](#) dans le cas des polytopes simples.

**Théorème 3.1.2.4** ([108] Theorem 3.3). *Soit  $\mathfrak{d}$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Pour tout polytope convexe simple  $\Delta \subset \mathfrak{d}^*$ , il existe un quasitore  $D$  de dimension  $n$  d'algèbre de quasi-Lie  $\mathfrak{d}$ , une  $2n$ -quasifolde compacte symplectique  $M$  et une action effective hamiltonienne du quasitore  $D$  sur la quasifolde  $M$  tel que l'image de l'application des moments est le polytope  $\Delta$ .*

Le cas non-simple est plus difficile ; on ne va plus considérer des quasifolles mais des objets stratifiés par celles-ci.

**Théorème 3.1.2.5** ([11] Theorem 3.3). *Soient  $\mathfrak{d}$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $d$  et  $\Delta \subset \mathfrak{d}^*$  un polytope convexe. Fixons des vecteurs normaux des facettes de  $\Delta$ ,  $X_1, \dots, X_n \in \mathfrak{d}^*$ . Soit  $Q$  un quasi-réseau les contenant. Le quotient correspondant  $X_\Delta = \mathcal{S}(\Delta) // N_C$  est un espace complexe stratifié par des quasifolles où*

- *Le morphisme  $\mathfrak{h} : (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum \lambda_i X_i \in \mathfrak{d}$  descend en un morphisme  $(\mathbb{S}^1)^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathfrak{d}/Q$  de noyau  $N$ . Le groupe  $N_C$  est son complexifié ;*
- *// est le quotient catégorique.*



### 3.1.3 Champs symplectiques toriques

Une autre façon d'étendre le [théorème 3.1.2.1](#), due à B.HOFFMAN, est de remplacer les variétés symplectiques par des champs symplectiques (comme décrit dans [\[71\]](#)) :

**Définition 3.1.3.1.** Un tore champêtre est le champ (au-dessus du site  $\mathfrak{VarDiff}_{\mathbb{R}}$ ) classifiant  $\mathcal{G}$  d'un groupe dans la catégorie (pas la 2-catégorie!) des groupoïdes de Lie  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}_1 \rightrightarrows \mathbf{G}_0)$  tel que :

- $\mathbf{G}$  est un groupoïde de feuilletage (i.e. a des groupes d'isotropie discrets cf. [\[36, Théorème 1\]](#));
- $\mathbf{G}_0$  est un tore;
- $\pi_0(\mathbf{G}_1)$  est finiment engendré.

Ceux-ci induisent un morphisme  $\pi_1(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Lie}(\mathcal{G}) := \text{Lie}(\mathbf{G}_0)/\text{Lie}(\mathfrak{t})(\ker(\text{Lie}(s)))$  (cf. [\[72, section 6.3\]](#))

**Définition 3.1.3.2.** Un champ torique symplectique est un quadruplet  $(\mathcal{X}, \omega, \mathcal{G}, \mu)$  où  $(\mathcal{X}, \omega)$  est un champ symplectique,  $\mathcal{G}$  est un tore champêtre et  $\mu : \mathcal{X} \rightarrow \text{Lie}(\mathcal{G})^*$  une application des moments tels que :

- $\mathcal{G}$  agit sur  $\mathcal{X}$ ;
- Pour tout  $v \in \text{Lie}(\mathcal{G})$ ,

$$\langle d\mu, v \rangle = \iota_v \omega;$$

- $\mu$  est  $(\mathcal{G}, \text{action coadjointe})$ -équivariant;
- $2 \dim(\mathcal{G}) = \dim(\mathcal{X})$ ;
- $|\mathcal{X}|$  est compacte et connexe et  $|\mathcal{G}|$  est connexe;
- $|\mu|^{-1}(\mathfrak{p})/|\mathcal{G}| \simeq \text{pt}$  pour tout  $\mathfrak{p} \in \mu(\mathcal{X})$ ;
- Pour toute valeur régulière  $\mathfrak{p} \in \mu(\mathcal{X})$  et tout point  $x : \text{pt} \rightarrow \mu^{-1}(\mathfrak{p}) := X \times_{\text{Lie}(\mathcal{G})^*} \{\mathfrak{p}\}$ , la composée

$$\mathcal{G} \times \text{pt} \rightarrow \mathcal{G} \times \mu^{-1}(\mathfrak{p}) \rightarrow \mu^{-1}(\mathfrak{p})$$

est une équivalence de champs;

- L'ensemble des valeurs régulières de  $|\mu|$  est un ouvert dense de  $|\mathcal{X}|$ .

Dans ce cadre, on va considérer la donnée combinatoire suivante :

**Définition 3.1.3.3.** Un polytope moment champêtre décoré est un triplet  $(\Delta, \mathcal{G}, \{\Lambda_f\}_{f \in F})$  où

- $\mathcal{G}$  est un tore champêtre induisant un morphisme  $\mathfrak{h} : \Gamma \rightarrow \text{Lie}(\mathcal{G})^*$ ;
- $\Delta$  est un polytope  $\mathfrak{h}(\Gamma)$ -rationnel et  $F$  est l'ensemble de ses faces ouvertes;
- Pour tout  $f \in F$ ,  $\Lambda_f$  est un sous-groupe de  $\mathfrak{h}(\Gamma)$  tel que :
  - Pour tout  $f \in F$ , une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\Lambda_f$  est une  $\mathbb{R}$ -base de

$$\text{ann}(f) := \{v \in \text{Lie}(\mathcal{G}) \mid \forall \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in f, \langle \mathfrak{p} - \mathfrak{q}, v \rangle = 0\};$$

- Pour toute famille  $(f_1, \dots, f_s)$  de faces ouvertes et toute face ouverte  $f$  de codimension  $s$  telles que  $\bar{f} = \bigcap_{i=1}^s \bar{f}_i$  alors  $\Lambda_f = \Lambda_{f_1} + \dots + \Lambda_{f_s}$ .

Un isomorphisme de polytopes moment champêtres décorés est un isomorphisme  $\Phi$  de tores champêtres tel que

$$\text{Lie}(\Phi)(\Delta) = \Delta' + \mathfrak{c}$$

où  $\mathfrak{c} \in \text{Lie}(\mathcal{G}')$ .

On obtient ensuite la correspondance combinatoire-géométrie voulue :

**Théorème 3.1.3.4** ([71] Theorem 6.1). *Les classes d'équivalences des champs toriques symplectiques sont en bijection avec les classes d'isomorphismes de polytopes moment champêtres décorés.*

Dans les deux exemples de variétés toriques généralisées précédents, on obtient des espaces compacts (car donnés par des polytopes et donc des éventails complets) et pas d'équivalence de catégories entre les données combinatoires et les géométriques toriques. On n'a donc pas assez de résultats pour bien étudier les problèmes de modules et leur dégénérescence. Le but de ce chapitre est donc de décrire une troisième construction afin d'avoir ses deux points importants.

## 3.2 Sous-groupes de $\mathbb{R}^n$

Cette section sera dédiée à donner des résultats sur les sous-groupes de  $(\mathbb{R}^n, +)$  pour permettre de mieux comprendre dans la suite les champs toriques. Tout d'abord, on a des résultats de classification :

**Théorème 3.2.1** ([22], Chapitre VII, théorème 1). *Tout sous-groupe discret de  $\mathbb{R}^n$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}^p$  avec  $0 \leq p \leq n$ .*

**Théorème 3.2.2** ([22], Chapitre VII, corollaire 2). *Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $\mathbb{R}^n$ . Alors il existe une famille libre  $(\mathbf{a}_i)_{1 \leq i \leq p}$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que*

$$G = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\mathbf{a}_i, 1 \leq i \leq q) \oplus \bigoplus_{i=q+1}^p \mathbb{Z}\mathbf{a}_i$$

où  $0 \leq q \leq p \leq n$ . Autrement dit,  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^q \times \mathbb{Z}^{p-q}$ .

En particulier, l'adhérence d'un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$  est de cette forme (cela généralise le résultat classique en dimension 1 où un sous-groupe est soit engendré par un élément soit dense dans  $\mathbb{R}$ ).

**Exemple 3.2.3.** • Si  $G = \mathbb{Z} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$  alors  $\overline{G} \simeq \mathbb{Z}$  si tous les  $\alpha_i$  sont rationnels et  $\overline{G} = \mathbb{R}$  sinon (le rang de  $G$  est 1 dans le premier cas et peut être arbitrairement grand dans l'autre cas).

- Si  $G = \mathbb{Z}^2 + (\alpha, \beta)\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$  alors il y a trois cas possibles :
  - si  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Q}^2$  alors  $G \simeq \mathbb{Z}^2$  ;
  - si  $(\alpha, \beta) \notin \mathbb{Q}^2$  et  $(1, \alpha, \beta)$  est une famille liée (e.g.  $\alpha = 2\pi$  et  $\beta = 3\pi + 1$ ) alors  $\overline{G} \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$  ;
  - dans le dernier cas,  $\overline{G} \simeq \mathbb{R}^2$ .

On peut dans ce cadre aussi définir une extension du dual d'un groupe discret à un sous-groupe quelconque de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition 3.2.4.** Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ . Le groupe associé à  $G$ , noté  $G^*$ , est le groupe

$$G^* := \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \mid \forall \mathbf{g} \in G, \langle \mathbf{u}, \mathbf{g} \rangle \in \mathbb{Z}\}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ .

*Remarque 3.2.5.* Le groupe  $G^*$  est le sous-groupe de  $\text{Hom}_{\mathbb{G}\mathbb{r}}(G, \mathbb{Z})$  des restrictions des applications  $\mathbb{R}$ -linéaires  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $G$  vers  $\mathbb{Z}$

**Lemme 3.2.6.** *Soit  $G$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $h_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application linéaire qui se restreint en un épimorphisme de groupes  $\mathbb{Z}^m \rightarrow G$ . Alors  $\mathbf{x} \in G^*$  si, et seulement si,  $h^{\top}(\mathbf{x}) \in \mathbb{Z}^m$*

*Démonstration.* Comme la famille  $(h(\mathbf{e}_1), \dots, h(\mathbf{e}_m))$  engendre  $G$  alors les deux assertions sont équivalentes

- pour tout  $g \in G$ ,  $\langle g, x \rangle \in \mathbb{Z}$
- pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\mathbb{Z} \ni \langle h(e_i), x \rangle = \langle e_i, h^\top(x) \rangle.$$

□

On va finir cette section avec un résultat de classification des duals des sous-groupes de  $\mathbb{R}^n$  :

**Théorème 3.2.7** ([22] chapitre VII, proposition 5). *Si  $G$  est un sous-groupe de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\overline{G} \simeq \mathbb{R}^p \times \mathbb{Z}^q$  alors*

$$G^* \simeq \mathbb{R}^{n-p-q} \times \mathbb{Z}^q$$

*En particulier,  $(\mathbb{Z}^p)^* \simeq \mathbb{Z}^p$  (i.e. tous les morphismes de groupes  $\mathbb{Z}^p \rightarrow \mathbb{Z}$  viennent d'une application linéaire) et si  $p + q = n$  alors  $G^* = \mathbb{Z}^q$ .*

Le rôle important joué par la dualité dans le cas classique est dû au fait que l'on a l'égalité  $(\mathbb{Z}^p)^* \simeq \mathbb{Z}^p$ . Dans le cas irrationnel, ce groupe dual n'a plus d'intérêt puisque dans le cas générique, l'adhérence d'un sous-groupe de  $\mathbb{R}^d$  est  $\mathbb{R}^d$  donc le dual est 0. On ne peut donc plus l'utiliser dans la construction d'objets toriques.

### 3.3 Tores quantiques

Pour pouvoir définir les champs toriques associées à un éventail sur un groupe non-discret de  $\mathbb{R}^n$ , il faut étendre la définition de tore (comme expliqué dans les autres exemples de la section 3.1). En effet, on a le résultat suivant :

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \mathbb{R}^d$ . Faisons agir  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C}^d$  par l'inclusion  $\Gamma \hookrightarrow \mathbb{R}^d \hookrightarrow \mathbb{C}^d$ . Alors  $\mathbb{C}^d/\Gamma$  est une variété (complexe) si, et seulement si,  $\Gamma$  est un groupe discret. Dans ce cas,  $\mathbb{C}^d/\Gamma \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ .*

*Démonstration.* Si  $\Gamma$  n'est pas discret alors l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathbb{C}^d$  n'est pas propre. Sinon il existe un automorphisme de  $\mathbb{C}^d$  qui se restreint en un isomorphisme  $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^d$ . L'exponentielle donne alors un isomorphisme  $\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^d \simeq (\mathbb{C}^*)^d$ . □

Dans tous les autres cas, il nous faudra utiliser le formalisme champêtre pour garder une structure analytique sur ces quotients. Dans toute la suite, les tores/champs toriques que l'on utilisera seront des champs sur le site analytique équivariant  $\mathfrak{A}$  (voir la définition dans l'exemple 2.1.2.1.7).

**Définition 3.3.2.** Un tore quantique est le quotient champêtre, que l'on notera  $\mathcal{T}_\Gamma$ , de  $\mathbb{C}^d$  par l'action d'un sous-groupe finiment engendré  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^d$  tels que  $\text{Vect}_{\mathbb{R}} \Gamma = \mathbb{R}^d$ .

Par le lemme 2.7.1.4, la loi de groupe de  $(\mathbb{C}^d, +)$  descend au quotient :

**Lemme 3.3.3.** *Un tore quantique muni des lois induites par le groupe de Lie  $(\mathbb{C}^d, +)$  est un champ de Picard.*

**Définition 3.3.4.** Les tores quantiques forment une catégorie **TQ** dont les morphismes sont les morphismes de champs de Picard (que l'on appellera morphisme torique).

On peut donner une version combinatoire des morphismes toriques :

**Proposition 3.3.5.** *Un morphisme torique est la donnée d'un morphisme linéaire de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}^{d'}$  tel que  $L(\Gamma) \subset \Gamma'$  i.e. un morphisme qui descend au quotient :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \xrightarrow{L \otimes_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{C}}} & \mathbb{C}^{d'} \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{C}^d/\Gamma] & \xrightarrow{\ell} & [\mathbb{C}^{d'}/\Gamma'] \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $\ell$  un morphisme de champs de Picard  $[\mathbb{C}^d/\Gamma] \rightarrow [\mathbb{C}^{d'}/\Gamma']$ . On a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & L & & \\ & \searrow & \text{---} & \nearrow & \\ \mathbb{C}^d & \xrightarrow{(\text{id}_{\mathbb{C}^d}, 0)} & \mathbb{C}^d \times_{[\mathbb{C}^{d'}/\Gamma']} \mathbb{C}^{d'} \simeq \mathbb{C}^d \times \Gamma' & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{C}^{d'} \\ & \searrow = & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\quad} & [\mathbb{C}^d/\Gamma] \xrightarrow{\ell} [\mathbb{C}^{d'}/\Gamma'] \end{array}$$

le  $\Gamma$ -revêtement  $\mathbb{C}^d \times_{[\mathbb{C}^{d'}/\Gamma']} \mathbb{C}^{d'} \rightarrow \mathbb{C}^d$  est trivial car  $\mathbb{C}^d$  est contractile.

Comme  $\ell$  est un morphisme de champs de Picard alors  $L$  est un morphisme de groupes. De plus, comme  $L$  est une application holomorphe alors c'est une application linéaire (on dérive en  $x$  l'équation fonctionnelle  $L(x+y) = L(x) + L(y)$  et on l'évalue en 0 pour montrer que  $L$  est de différentielle constante et valant 0 en 0). On en déduit donc que  $\ell$  est obtenu par descente au quotient d'une application linéaire qui préserve les groupes  $\Gamma$  et  $\Gamma'$ .  $\square$

**Corollaire 3.3.6.** *La catégorie des tores quantiques est équivalente à la catégorie **QReseau** dont les objets sont les inclusions  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  (avec  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \mathbb{R}^d$ ) et les morphismes sont les applications linéaires  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}$  se restreignant en un morphisme de groupes  $\Gamma \rightarrow \Gamma'$ .*

Dans la suite, on va surtout considérer une variante de ces tores quantiques où l'on va fixer le nombre de générateurs de  $\Gamma$  par un épimorphisme  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  ce qui sera nécessaire dans l'étude des espaces de modules du [chapitre 4](#).

**Définition 3.3.7.** La catégorie des calibrations **QReseau**<sup>cal</sup> est la catégorie des couples  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathcal{G} \subset \{1, \dots, n\})$  tels que

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(h(e_i), i \in [1, n] \setminus \mathcal{G}) = \mathbb{R}^d$$

et les morphismes sont les couples de morphismes  $(L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'})$  tels qu'il existe une application  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  telle que :

- $Lh = Hh'$
- $L(\Gamma) \subset \Gamma'$
- Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{G}$ ,  $H(e_i) \in \bigoplus_{j \notin \mathcal{G}'} \mathbb{Z}e_j$  ;
- Pour tout  $i \in \mathcal{G}$ ,  $H(e_i) = e_{s(i)}$  ;

**Définition 3.3.8.** Soit  $(h, \mathcal{G})$  une calibration. Le tore quantique calibré associé à cette calibration est le quotient champêtre de  $\mathbb{C}^d$  par l'action de  $\mathbb{Z}^n$  donnée par le morphisme  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que l'on notera  $\mathcal{T}_{h, \mathcal{G}}$ . Un morphisme de tores quantiques calibrés  $[\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^n] \rightarrow [\mathbb{C}^{d'}/\mathbb{Z}^{n'}]$  est la donnée d'un morphisme

$\mathbf{QReseau}^{\text{cal}}$  entre les objets associés i.e. un morphisme qui descend au quotient :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z}^{n'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}^d & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}^{d'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^n] & \xrightarrow{\ell^{\text{cal}}} & [\mathbb{C}^{d'}/\mathbb{Z}^{n'}]
 \end{array} \tag{3.1}$$

On notera  $\mathbf{TQ}^{\text{cal}}$  la catégorie des tores quantiques calibrés (qui est équivalente à  $\mathbf{QReseau}^{\text{cal}}$ ).

**Lemme 3.3.9.** *Il existe un foncteur d'oubli  $\mathbf{QReseau}^{\text{cal}} \rightarrow \mathbf{QReseau}$  qui conserve uniquement l'image du morphisme  $h$ . Cela correspond à la rigidification (voir l'exemple 2.8.6) des tores quantiques calibrés par le noyau de la calibration.*

*Démonstration.* L'oubli du morphisme  $h : \mathbb{Z}^n \twoheadrightarrow \Gamma$  pour le seul groupe  $\Gamma$  revient au quotient de l'action de  $\mathbb{Z}^n$  par  $\ker(h)$  (grâce au premier théorème d'isomorphisme).  $\square$

Dans la suite, on va considérer des calibrations « privilégiées » parmi les classes d'isomorphie de chaque calibration :

**Définition 3.3.10.** Une calibration  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  est dite standard si

- Pour tout  $1 \leq i \leq d$ ,  $h(e_i) = e_i$  ;
- $\mathcal{G} = \{n - |\mathcal{G}| + 1, \dots, n\}$ .

On notera  $\mathfrak{h}$  l'application  $\mathbb{Z}^{n-d} \rightarrow \Gamma$  définie par

$$x \mapsto \mathfrak{h}(0_{\mathbb{Z}^{n-d}} \oplus x)$$

i.e. on a l'égalité suivante pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  :

$$h(x) = (x_1, \dots, x_d) + \mathfrak{h}(x_{d+1}, \dots, x_n)$$

**Lemme 3.3.11.** *Toute calibration est isomorphe à une calibration standard. Autrement dit, l'inclusion  $\mathbf{QReseau}^{\text{standard}} \hookrightarrow \mathbf{QReseau}^{\text{cal}}$ , de la sous-catégorie pleine des calibrations standard dans celle des calibrations, est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Soit  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  une calibration. Soit  $I = \{i_1 < \dots < i_d\} \subset \{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{G}$  tel que  $(h(e_i), i \in I)$  soit une base de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  tel que

- $\sigma(I) = \{1, \dots, d\}$  et  $\sigma|_I$  soit croissante ;
- $\sigma(\mathcal{G}) = \{n - |\mathcal{G}| + 1, \dots, n\}$  et  $\sigma|_{\mathcal{G}}$  soit croissante.

Alors  $(L = (h(e_{i_1}) \dots h(e_{i_d}))^{-1}, H = P_\sigma)$  est un isomorphisme entre  $(h, \mathcal{G})$  et la calibration standard  $(LhH^{-1}, \sigma\mathcal{G})$ .  $\square$

**Notation 3.3.12.** Dans toute la suite, on utilisera la fonction exponentielle suivante :

$$E : (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d \mapsto (\exp(2i\pi z_1), \dots, \exp(2i\pi z_d)) \in \mathbb{T}^d := (\mathbb{C}^*)^d$$

**Proposition 3.3.13.** *Soit  $(h, \mathcal{G})$  une calibration standard. Alors le tore quantique calibré  $\mathcal{T}_{h, \mathcal{G}}$  est isomorphe à  $[(\mathbb{C}^*)^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  où  $\mathbb{Z}^{n-d}$  agit sur  $(\mathbb{C}^*)^d$  par le morphisme  $E \circ \mathfrak{h}$ .*

*Démonstration.* Comme  $(\mathbf{h}, \mathcal{G})$  est une calibration standard alors l'injection  $\mathbb{Z}^d \hookrightarrow \mathbb{Z}^n$  induit une action de  $\mathbb{Z}^d$  sur  $\mathbb{C}^d$  par translation. On en déduit donc que le quotient  $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^d$  est un  $\mathbb{Z}^d$ -fibré et donc par la proposition 2.4.1.14, on a un isomorphisme

$$[\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^n] \simeq [(\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^d)/(\mathbb{Z}^n/\mathbb{Z}^d)] \simeq [(\mathbb{C}^*)^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$$

□

**Exemple 3.3.14.** Soit  $(\mathbf{h} : (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mapsto x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}, \emptyset)$  une calibration. Alors les morphismes  $(L = \sqrt{2}\text{id}, H : (x, y) \mapsto (y, 2x))$  définissent un morphisme torique  $\mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset}$  comme l'illustre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^2 & \xrightarrow{(x,y) \mapsto (y, 2x)} & \mathbb{Z}^2 \\ \mathbf{h} \downarrow & & \downarrow \mathbf{h} \\ \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} & \xrightarrow{z \mapsto z\sqrt{2}} & \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C} & \xrightarrow{z \mapsto z\sqrt{2}} & \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset} = [\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}] & \xrightarrow{\llbracket z \mapsto z\sqrt{2} \rrbracket} & \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset} = [\mathbb{C}^*/\mathbb{Z}] \end{array}$$

On obtient ainsi des monômes « à exposants irrationnels » entre les tores quantiques (voir [49] pour l'étude des algèbres de tels monômes).

*Remarque 3.3.15.* Le groupe des morphismes toriques  $\mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \emptyset}$  est  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{2}$  (car les morphismes de groupes  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  induits par un morphisme linéaire  $x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha x \in \mathbb{R}$  doivent être un élément de  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$  tel que  $\alpha\sqrt{2}$  soit aussi dans  $\mathbb{Z} + \sqrt{2}\mathbb{Z}$ ), ce qui diffère du cas standard où les morphismes  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  sont les  $z \mapsto z^n$  où  $n \in \mathbb{Z}$  (cf. lemme 1.1.1.7).

**Proposition 3.3.16.** Soit  $\mathcal{T}_{\mathbf{h}, \mathcal{G}}$  un tore quantique calibré. Un cocaractère de  $\mathcal{T}_{\mathbf{h}, \mathcal{G}}$ , i.e. un morphisme de tores  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \mathcal{G}}$ , est donné par un élément de

$$\{(z, x) \in \text{im}(\mathbf{h}) \times \mathbb{Z}^{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{G}} \mid \mathbf{h}(x) = z\}.$$

i.e. est isomorphe à  $\mathbb{Z}^{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{G}}$ .

*Démonstration.* Soit  $(L, H)$  un morphisme  $\mathbb{C}^* = \mathcal{T}_{\text{id}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \emptyset} \rightarrow \mathcal{T}_{\mathbf{h}, \mathcal{G}}$  i.e.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z}^n \\ \text{id} \downarrow & & \downarrow \mathbf{h} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{L} & \Gamma \end{array}$$

Un morphisme de groupes  $\mathbb{Z} \rightarrow \Gamma$  est la donnée d'un vecteur  $v \in \Gamma$  (on notera  $w$  un antécédent de  $v$  par  $\mathbf{h}$ ). Lorsque ce vecteur est fixé, les seuls choix possibles pour  $H$  sont de la forme  $w + \ker(\mathbf{h})$ . Cependant comme  $H$  ne peut pas envoyer des générateurs non-virtuels sur des générateurs virtuels alors on doit restreindre cet espace à  $(w + \ker(\mathbf{h})) \cap \mathbb{Z}^{\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{G}}$ . □

**Exemple 3.3.17.** Si  $\mathbf{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  est un isomorphisme et  $\mathcal{G} = \emptyset$  (c'est notamment le cas dans le cas classique) alors cet ensemble est  $\text{im}(\mathbf{h}) = \Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$ .

**Proposition 3.3.18.** *Soit  $\mathcal{T}_{h,g}$  un tore quantique calibré. Un caractère de  $\mathcal{T}_{h,g}$ , i.e. un morphisme de tores  $\mathcal{T}_{h,g} \rightarrow \mathbb{C}^*$ , est un élément de  $\text{im}(h)^*$  si  $\mathcal{I} = \emptyset$ . Si  $\mathcal{I}$  n'est pas vide alors il n'y en a pas.*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{I}$  n'est pas vide alors comme il n'y a pas de flèches  $\mathcal{I} \rightarrow \emptyset$ , il ne peut pas y avoir de morphismes de calibrations. Supposons donc le contraire :

Soit  $(L, H)$  un morphisme  $\mathcal{T}_{h,g} \rightarrow \mathbb{C}^* = \mathcal{T}_{\text{id}:\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \emptyset}$  i.e.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z} \\ h \downarrow & & \downarrow \text{id} \\ \Gamma & \xrightarrow{L} & \mathbb{Z} \end{array}$$

Comme  $L$  est la restriction d'une forme linéaire alors il est donné par le produit scalaire par un vecteur  $w$ . Comme  $L(\Gamma) \subset \mathbb{Z}$  alors  $w \in \Gamma^*$  (voir la définition 3.2.4). Ensuite, pour tout  $m \in \mathbb{Z}^n$ , on a :

$$H(m) = Lh(m),$$

ce qui montre que  $H$  est entièrement déterminé par  $L$  et donc par  $w$ . □

## 3.4 Champs toriques quantiques

### 3.4.1 Cartes affines

Par analogie avec le cas classique, on va associer à un cône et à la calibration  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{I})$  un champ torique quantique puis les recoller le long des intersections.

**Notation 3.4.1.1.** La catégorie **Cone** est la catégorie dont les objets sont les triplets  $(\sigma, h, \mathcal{I})$  où  $\sigma$  est un cône de  $\mathbb{R}^d$ ,  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{I})$  une calibration telle qu'il existe un sous-ensemble  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \mathcal{I}$  tel que  $\sigma = \sigma_I = \text{Cone}(h(e_i), i \in I)$  et dont les morphismes  $(\sigma = \sigma_I, h, \mathcal{I}) \rightarrow (\sigma' = \sigma_{I'}, h', \mathcal{I}')$  sont les paires d'applications linéaires  $(L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'})$  telles que

- Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{h_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^d \\ H \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbb{R}^{n'} & \xrightarrow{h'_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^{d'} \end{array} \tag{3.2}$$

commute (où  $h_{\mathbb{R}}$  (resp.  $h'_{\mathbb{R}}$ ) est l'application  $\mathbb{R}$ -linéaire associée à  $h$  (resp. à  $h'$ ))

- $L(\Gamma) \subset \Gamma'$
- $L(\sigma) \subset \sigma'$
- La restriction de  $H : \mathbb{Z}^I \rightarrow \mathbb{Z}^{I'}$  est à coefficients dans  $\mathbb{N}$ .
- Pour tout  $i \notin \mathcal{I}$ ,  $H(e_i) \in \bigoplus_{j \notin \mathcal{I}'} \mathbb{Z}e_j$
- Il existe une application  $s : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}'$  telle que pour tout  $i \in \mathcal{I}$ ,  $H(e_i) = e_{s(i)}$

Dans un premier temps, on va se concentrer sur le cas des cônes simpliciaux (voir la définition 1.1.3.3.11). Pour cela, on va donner une caractérisation des cônes simpliciaux afin de simplifier la construction des objets toriques associés :

**Lemme 3.4.1.2.** *Un cône  $\sigma$  est simplicial si, et seulement si, il existe un isomorphisme linéaire  $L \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$  tel que  $L(\sigma) = \text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$  où  $k = \dim_{\mathbb{R}} \text{Vect}_{\mathbb{R}}(\sigma)$  et  $(e_1, \dots, e_d)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^d$ .*

*Démonstration.* Soit  $\sigma$  un cône simplicial de dimension  $k$ . Par définition, il existe une famille libre  $v_1, \dots, v_k$  qui engendrent  $\sigma$ . Complétons cette famille en une base  $(v_1, \dots, v_d)$  de  $\mathbb{R}^d$ . Alors  $L = (v_1 \dots v_d)^{-1}$  envoie  $\sigma$  sur  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$ . Réciproquement, l'image d'un cône  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$  par un automorphisme linéaire est simplicial.  $\square$

**Notation 3.4.1.3.** On notera **AffCone** la sous-catégorie pleine de **Cone** des cônes de la forme  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$  avec une calibration standard et **Cone<sup>simp</sup>** la sous-catégorie pleine des cônes simpliciaux.

**Lemme 3.4.1.4.** *Le foncteur d'inclusion **AffCone**  $\rightarrow$  **Cone<sup>simp</sup>** est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Par définition, cette inclusion est pleinement fidèle, il ne reste à montrer qu'elle est essentiellement surjective :

Soit  $(\sigma, h, \mathcal{G})$  un objet de **Cone<sup>simp</sup>** et  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma = \text{Cone}(h(e_i), i \in I)$ . Grâce au lemme 3.4.1.2, il existe un automorphisme linéaire  $L$  tel que  $L\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_{\dim(\sigma)})$  et qui envoie  $d - k$  autres vecteurs  $h(e_i), i \in J$  ( $\text{Card}(J) = d - k$ ) sur  $e_{k+1}, \dots, e_n$ . Soit  $\tau$  une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tel que :

- $\tau(I) = \llbracket 1, k \rrbracket$ , et  $\tau_I$  est croissante ;
- $\tau(J) = \llbracket k + 1, d \rrbracket$  et  $\tau_J$  est croissante.

Alors  $(L, H = P_\tau)$  est un isomorphisme entre  $(\sigma, h, \mathcal{G})$  et  $(L\sigma, LhH^{-1}, H\mathcal{G})$  qui est un objet de **AffCone**.  $\square$

On va donc définir le champ torique  $\mathcal{U}_{\sigma, h, \mathcal{G}}$  associé à  $\sigma$  et à une calibration  $(h, \mathcal{G})$  comme le champ torique associé à  $L\sigma = \text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$  et de la calibration  $LhH^{-1}$  (où  $H$  est l'isomorphisme linéaire de  $\mathbb{R}^n$  apparaissant dans la preuve du lemme 3.4.1.4) puis montrer que le champ obtenu ne dépend pas du choix de l'isomorphisme :

**Définition 3.4.1.5.** Le champ « torique quantique »  $\mathcal{U}_{\text{Cone}(e_1, \dots, e_k), h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G}}$  est le champ quotient  $[\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} / \mathbb{Z}^{n-d}]$  où l'action de  $\mathbb{Z}^{n-d}$  sur  $\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$  est donnée, pour tout  $m \in \mathbb{Z}^{n-d}$  et  $z \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$ ,

$$m \cdot z = E(\hbar(m))z$$

où la multiplication est terme-à-terme.

*Remarque 3.4.1.6.* Quand le contexte sera clair, on abrégera  $\mathcal{U}_{\text{Cone}(e_1, \dots, e_k), h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G}}$  par  $\mathcal{U}_{\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)}$ .

**Lemme 3.4.1.7.** *Le tore  $\mathcal{T}_{h, \mathcal{G}}$  est dense dans  $\mathcal{U}_{\text{Cone}(e_1, \dots, e_k), h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G}}$ .*

*Démonstration.* Cela vient du fait que  $(\mathbb{C}^*)^d$  est dense dans  $\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$ .  $\square$

**Définition 3.4.1.8.** Un morphisme de champs toriques quantiques, ou morphisme torique, entre  $\mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_\tau$  est un morphisme de champs qui se restreint en un morphisme de tores entre leur tores (cf. lemme 3.4.1.7).

On notera **AffCTQ** la catégorie des champs toriques quantiques affines.

**Théorème 3.4.1.9** ([81] Proposition 6.13). *Le foncteur **AffCone**  $\rightarrow$  **AffCTQ**,  $(\sigma, h, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{U}_{\sigma, h, \mathcal{G}}$  est pleinement fidèle et est donc une équivalence de catégories.*

*Idées de preuve.* Soient  $k \leq d$  et  $k' \leq d'$ . Notons  $\sigma$  le cône  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k) \subset \mathbb{R}^d$  et  $\sigma'$  le cône  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_{k'}) \subset \mathbb{R}^{d'}$ . Soient  $(h, \mathcal{G}), (h', \mathcal{G}')$  deux calibrations.

Soit  $(L, H)$  un morphisme  $(\sigma, h, \mathcal{G}) \rightarrow (\sigma', h', \mathcal{G}')$ . Par construction,  $H$  se décompose par blocs de la façon suivante :

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & * \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}$$

où  $H_1$  est une matrice  $k \times k'$  et  $H_2$  est une matrice  $(n - k) \times (n' - k')$  et  $L$  s'insère dans le diagramme commutatif suivant (car  $L$  se restreint en un morphisme  $\mathbb{Z}^k \rightarrow \mathbb{Z}^{k'}$ ) :



$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^d & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}^{d'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{T}^k \times \mathbb{C}^{d-k} & \xrightarrow{\bar{L}} & \mathbb{T}^{k'} \times \mathbb{C}^{d'-k'} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\bar{L}} & \mathbb{C}^{d'}
 \end{array} \tag{3.3}$$

où  $E_k$  est le morphisme  $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{T}^k \times \mathbb{C}^{d-k}$  défini par :

$$E_k(z_1, \dots, z_d) = (E(z_1), \dots, E(z_d), z_{d+1}, \dots, z_d)$$

Construisons le morphisme de champs associés :

Soit  $T \in \mathfrak{A}$  et

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{T} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} \\
 \downarrow & & \\
 T & & 
 \end{array}$$

un objet de  $\mathcal{U}_\sigma(T)$ . Le morphisme  $\hat{T} := \tilde{T} \times_{\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}} \mathbb{C}^d \rightarrow T$ , où le morphisme  $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$  est le morphisme

$$\bar{E}_k(z_1, \dots, z_d) = (z_1, \dots, z_k, E(z_{k+1}), \dots, E(z_d)),$$

est un  $\mathbb{Z}^{n-k}$ -revêtement pour l'action définie par :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^{n-k}, \forall (\tilde{t}, z) \in \hat{T}, m \cdot (\tilde{t}, z) = (\text{pr}_k(p) \cdot \tilde{t}, E_k(\hbar(p))z)$$

où  $\text{pr}_k$  est la projection  $\mathbb{Z}^{n-k} = \mathbb{Z}^{d-k} \times \mathbb{Z}^{n-d} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-d}$ .

On peut alors définir l'image de  $(\tilde{T}, m)$  par  $\ell$  :

$$\begin{array}{ccc}
 \ell(\tilde{T}) := \hat{T} \times_{\text{pr}_k \circ \text{H}_2} \mathbb{Z}^{n'-d'} & \xrightarrow{\ell(m)} & \mathbb{C}^{k'} \times \mathbb{T}^{d'-k'} \\
 \downarrow & & \\
 T & & 
 \end{array}$$

où  $\ell(m) : (z, q) \in \hat{T} \times_{\text{pr}_k \circ \text{H}_2} \mathbb{Z}^{n'-d'} \mapsto \bar{E}_k \bar{L}(z) \cdot E(\hbar(q)) \in \mathbb{C}^{k'} \times \mathbb{T}^{d'-k'}$ . Un morphisme de  $\mathcal{U}(T)$

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} \\
 & \nearrow m_1 & \\
 \tilde{T}_1 & \xrightarrow{g} & \tilde{T}_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T & \xrightarrow{\text{id}} & T
 \end{array}$$

est envoyé sur

$$\begin{array}{ccc}
 & & \mathbb{C}^{k'} \times \mathbb{T}^{d'-k'} \\
 & \nearrow \ell(m_1) & \\
 \ell(\tilde{T}_1) & \xrightarrow{g'} & \tilde{T}_2 \\
 & \searrow \ell(m_2) & \\
 \mathbb{T} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{T}
 \end{array}$$

où  $g'$  est défini par

$$g(\tilde{t}, z, q) = (g(\tilde{t}), z, q)$$

□

**Corollaire 3.4.1.10.** *La composée  $\mathbf{Cone}^{\text{simp}} \simeq \mathbf{AffCone} \rightarrow \mathbf{AffCTQ}$  est une équivalence de catégories définie de la façon suivante : Soit  $(\sigma, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  un cône de  $\mathbf{Cone}^{\text{simp}}$ . Soit  $(L, H)$  un isomorphisme entre  $(\sigma, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  et un objet de  $\mathbf{AffCone}$ . Alors*

$$\mathcal{U}_{\sigma, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} := \mathcal{U}_{L\sigma, L\mathfrak{h}H^{-1}, H\mathcal{G}}$$

### 3.4.2 Recollement

Comme dans le cas classique, la donnée combinatoire utilisée pour recoller les cartes affines est donnée par un famille de cônes polyédraux fortement convexes :

**Définition 3.4.2.1.** Un éventail quantique calibré  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  dans  $\Gamma$  est la donnée

- d'une collection  $\Delta$  de cônes polyédraux fortement convexes engendrés par des éléments de  $\Gamma$  tel que toute intersection de cônes de  $\Delta$  est dans  $\Delta$ , toute face d'une cône de  $\Delta$  est dans  $\Delta$  et  $\{0\}$  est un cône dans  $\Delta$ .
- d'une calibration standard  $\mathfrak{h}$  dont l'ensemble des générateurs virtuels est  $\mathcal{G}$ .
- d'un ensemble de générateurs  $A$  i.e. un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{G}$  tel que les 1-cônes engendrés par les  $\mathfrak{h}(e_i)$  pour  $i \in A$  sont exactement les 1-cônes de  $\Delta$

*Remarque 3.4.2.2.* Dans le cas rationnel, cette définition correspond aux éventails champêtres étendus (voir [78])

**Définition 3.4.2.3.** Un morphisme d'éventails quantiques calibrés entre  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  et  $(\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  est une paire d'applications linéaires  $(L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'})$  telles que pour tout  $\sigma \in \Delta$ , il existe  $\sigma' \in \Delta'$  tel que  $L : (\sigma, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \rightarrow (\sigma', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  est un morphisme de cônes.

On notera  $\mathbf{EQC}$  la catégorie des éventails quantiques calibrés et  $\mathbf{EQC}^{\text{simp}}$  la sous-catégorie pleine des éventails quantiques calibrés simpliciaux.

**Notation 3.4.2.4.** À un éventail quantique  $(\Delta, \mathfrak{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$ , on associe l'éventail  $(\Delta_{\mathfrak{h}}, \text{Id} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n, \mathcal{G})$  défini de la façon suivante : le cône  $\sigma$  appartient à  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  si, et seulement si, il existe  $\text{Cone}(\mathfrak{h}(e_i), i \in I) \in \Delta$  tel que  $\sigma \leq \text{Cone}(e_i, i \in I)$

**Lemme 3.4.2.5.** *La variété torique associée à l'éventail  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  est la variété torique décrite par l'égalité (1.1.5.8).*

Après avoir défini les cartes affines  $\{\mathcal{U}_{\sigma}\}_{\sigma \in \Delta}$ , les données nécessaires pour recoller ces cartes résident dans la combinatoire de l'éventail :

**Définition 3.4.2.6.** Le type combinatoire d'un éventail  $(\Delta, \mathbf{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  est l'ensemble partiellement ordonné, noté  $\text{comb}(\Delta)$ , des sous-ensembles  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $\text{Cone}(\mathbf{h}(e_i), i \in I) \in \Delta$  ordonnés par l'inclusion. À l'inverse, si  $D$  est un ensemble partiellement ordonné, on dira qu'une calibration  $(\mathbf{h}, \mathcal{G})$  est  $D$ -admissible s'il existe un éventail quantique  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  tel que

$$\text{comb}(\Delta) \simeq D$$

**Exemple 3.4.2.7.** Le type combinatoire de l'éventail du plan projectif i.e.

$$\begin{cases} \Delta = \{(e_1, e_2, -e_1 - e_2, \text{Cone}(e_1, e_2), \text{Cone}(e_1, -e_1 - e_2), \text{Cone}(-e_1 - e_2, e_2)) \\ \mathbf{h}: (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 \mapsto (x - z, y - z) \in \mathbb{Z}^2 \end{cases}$$

est

$$\text{comb}(\Delta) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$$

**Proposition 3.4.2.8.** Un cône  $\sigma = \text{Cone}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}^d$  est simplicial si, et seulement si, pour tout  $I \subset \mathcal{A}$ , le cône  $\text{Cone}(I)$  est une face de  $\sigma$ .

*Démonstration.* L'implication est immédiate (grâce à la donnée d'un isomorphisme entre  $\sigma$  et  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$ ). La réciproque se montre par contraposée. Supposons donc que  $\sigma$  est un cône non-simplicial. Soit  $\mathcal{L}$  une sous-famille libre de  $\mathcal{A}$  de cardinal maximal. Le cône  $\text{Cone}(\mathcal{L})$  ne peut pas être une face propre de  $\sigma$  car ils sont de la même dimension et n'est pas  $\sigma$  car on a supposé que  $\sigma$  n'était pas simplicial.  $\square$

**Corollaire 3.4.2.9.** Le fait d'être simplicial dépend uniquement du type combinatoire du cône.

**Corollaire 3.4.2.10.** Si  $\Delta$  est simplicial alors

$$\text{Cone}(e_i, i \in I) \in \Delta_{\mathbf{h}} \text{ si, et seulement si, } \text{Cone}(\mathbf{h}(e_i), i \in I) \in \Delta \quad (3.4)$$

**Lemme 3.4.2.11.** La correspondance  $\text{comb} : \mathbf{EQC} \rightarrow \mathbf{Poset}$  est fonctorielle.

*Démonstration.* Le morphisme d'ensembles partiellement ordonnés induit par un morphisme d'éventails quantiques calibrés  $(L, H) : (\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}) \rightarrow (\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$  est défini comme suit :

Soit  $\sigma_I \in \Delta$ . Par définition de morphisme d'éventails,  $L\sigma$  est inclus dans un cône  $\tau \in \Delta'$ . Le cône minimal pour cette propriété sera noté  $\text{comb}(L, H)(I)$ . On a ainsi défini un morphisme d'ensembles partiellement ordonnés  $\text{comb}(L, H) : \text{comb}(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}) \rightarrow \text{comb}(\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$  (i.e une application croissante).  $\square$

Construisons maintenant le recollement :

Soit  $\sigma$  un cône simplicial de dimension  $k$ . Si  $\tau$  est une face de  $\sigma$  alors  $\tau$  est engendrée par un sous-ensemble  $I$  des générateurs de  $\sigma$ . Quitte à réappliquer une permutation, on peut supposer que  $I = \{1, \dots, \dim(\tau)\}$ . On obtient donc une inclusion

$$\mathcal{U}_{\tau} = [\mathbb{C}^{\dim(\tau)} \times \mathbb{T}^{d-\dim(\tau)} / \mathbb{Z}^{n-d}] \hookrightarrow [\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} / \mathbb{Z}^{n-d}] = \mathcal{U}_{\sigma}$$

En particulier, si on a deux cônes simpliciaux  $\sigma$  et  $\tau$  de  $\Delta$  alors  $\sigma \cap \tau$  est une face de  $\Delta$ . On obtient donc le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} & & \mathcal{U}_{\sigma} \\ & \nearrow & \\ \mathcal{U}_{\sigma \cap \tau} & & \\ & \searrow & \\ & & \mathcal{U}_{\tau} \end{array}$$

où les changements de cartes sont données par les morphismes induits par les applications  $(L_\tau L_\sigma^{-1}, H_\tau H_\sigma^{-1})$  que l'on notera  $g_{\sigma\tau}$  ou si  $\sigma = \sigma_I$  et  $\tau = \tau_{I'}$  par  $g_{II'}$ . Ainsi, on obtient un diagramme<sup>1</sup> de champs  $D_{h,g} : \text{comb}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{Champ}_{\mathfrak{E}}$ .

**Définition 3.4.2.12.** Le champ torique quantique  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}$  associé à l'éventail calibré  $(\Delta, h, g)$  est le champ

$$\mathcal{X}_{\Delta,h,g} := \text{colim } D_{h,g}$$

**Proposition 3.4.2.13.** Soit  $T \in \mathfrak{U}$ . Un objet de  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}(T)$  est un recouvrement  $(T_I := T_{\sigma_I})$  de  $T$  indexé par l'ensemble des cônes maximaux  $\Delta_{\text{max}}$  avec un objet

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_I & \longrightarrow & \mathbb{C}^{|I|} \times \mathbb{T}^{d-|I|} \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array}$$

de  $\mathcal{U}_\sigma(T_I)$  pour tout  $\sigma_I \in \Delta_{\text{max}}$ , vérifiant pour tout couple  $(I, I')$  avec une intersection non-vide  $J$

$$g_{II'} \left( \begin{array}{ccc} \tilde{T}_{I \supset J} & \xrightarrow{m_I} & \mathbb{C}^{|J|} \times \mathbb{T}^{d-|J|} \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array} \right) = \begin{array}{ccc} \tilde{T}_{I \supset J} & \xrightarrow{m_{I'}} & \mathbb{C}^{|J|} \times \mathbb{T}^{d-|J|} \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array}$$

où  $\tilde{T}_{I' \supset J} := m_{I'}^{-1}(\mathbb{C}^{|J|} \times \mathbb{T}^{d-|J|})$  et  $\tilde{T}_{I \supset J} := m_I^{-1}(\mathbb{C}^{|J|} \times \mathbb{T}^{d-|J|})$

Un morphisme de  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}(T)$  est une famille de morphismes donnés par les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{d-|I|} & & \\ & m_I \nearrow & & \nwarrow n_I & \\ \tilde{T}_I & & & & \tilde{T}_{I'} \\ & \searrow & \alpha_I \longrightarrow & & \nearrow \\ & & T_I & & \end{array}$$

vérifiant la condition de compatibilité suivante :

$$g_{II'} \left( \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C}^J \times \mathbb{T}^{d-|J|} & & \\ & m_I \nearrow & & \nwarrow n_I & \\ \tilde{T}_{I \supset J} & & & & \tilde{T}_{I' \supset J} \\ & \searrow & \alpha_I \longrightarrow & & \nearrow \\ & & T_I & & \end{array} \right) = \begin{array}{ccccc} & & \mathbb{C}^J \times \mathbb{T}^{d-|J|} & & \\ & m_{I'} \nearrow & & \nwarrow n_{I'} & \\ \tilde{T}_{I' \supset J} & & & & \tilde{T}_{I \supset J} \\ & \searrow & \alpha_{I'} \longrightarrow & & \nearrow \\ & & T_I & & \end{array}$$

*Démonstration.* Cela se fait de la même façon que les exemples 2.3.1.19 et 2.3.1.20.  $\square$

**Définition 3.4.2.14.** Un morphisme de  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}$  est une famille de morphismes  $\ell_\sigma : \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$  qui sont

1. On rappelle qu'il y a un foncteur pleinement fidèle  $\mathbf{Poset} \rightarrow \mathbf{Cat}$ . On identifiera toujours l'ensemble partiellement ordonné et la catégorie associée.

compatibles avec les changements de cartes i.e. qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{U}_\sigma & \xrightarrow{\ell_\sigma} & \mathcal{U}_{\sigma'} \\
 & \nearrow & & & \nearrow \\
 \mathcal{U}_{\sigma \cap \tau} & \xrightarrow{\ell_{\sigma \cap \tau}} & \mathcal{U}_{\sigma' \cap \tau'} & & \\
 & \searrow & & & \searrow \\
 & & \mathcal{U}_\tau & \xrightarrow{\ell_\tau} & \mathcal{U}_{\tau'}
 \end{array}$$

On notera **CTQ** la catégorie des champs toriques quantiques.

**Exemple 3.4.2.15.** Soit  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la calibration standard telle que  $h(e_3) = (a, b) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  et  $\Delta$  l'éventail tel que

$$\Delta_{\max} = \{\sigma_0 = (e_1, e_2), \sigma_1 = (e_2, (a, b)), \sigma_2 = (e_1, (a, b))\}.$$

Le tore que l'on considère est

$$\mathcal{F}_h = [\mathbb{T}^2 / \mathbb{Z}]$$

où  $\mathbb{Z}$  agit sur  $\mathbb{T}^2$  par

$$m \cdot (z_1, z_2) = (E(ma)z_1, E(mb)z_2)$$

Les trois automorphismes linéaires de  $\mathbb{R}^2$  redressant les cônes sont :

$$L_0 = I_2, L_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} & 1 \\ \frac{1}{a} & 0 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{b} \\ 1 & -\frac{a}{b} \end{pmatrix}.$$

Les permutations associées sont

$$H = I_3, H_1 = P_{(1\ 3\ 2)}, H_2 = P_{(1\ 2\ 3)}.$$

Les cartes affines sont

$$\begin{aligned}
 \mathcal{U}_{\sigma_0} &= [\mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}] \text{ où } m \cdot (z_1, z_2) = (E(am)z_1, E(bm)z_2); \\
 \mathcal{U}_{\sigma_1} &= [\mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}] \text{ où } m \cdot (z_1, z_2) = \left( E\left(-\frac{b}{a}m\right)z_1, E\left(\frac{1}{a}m\right)z_2 \right); \\
 \mathcal{U}_{\sigma_2} &= [\mathbb{C}^2 / \mathbb{Z}] \text{ où } m \cdot (z_1, z_2) = \left( E\left(\frac{1}{b}m\right)z_1, E\left(-\frac{a}{b}m\right)z_2 \right);
 \end{aligned}$$

Les changements de cartes sont donnés par

$$\begin{aligned}
 [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_0} &\rightarrow [\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_1}, \text{og}[z, w] \mapsto [z^{-b/a}w, z^{1/a}] \text{ »} \\
 [\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_0} &\rightarrow [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_2}, \text{og}[z, w] \mapsto [w^{1/b}, zw^{-a/b}] \text{ »} \\
 [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C} / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_1} &\rightarrow [\mathbb{C} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{Z}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_2}, \text{og}[z, w] \mapsto [z^{1/b}w, z^{-a/b}] \text{ »}
 \end{aligned}$$

où les guillemets renvoient aux « monômes à exposants irrationnels » donnés par passage au quotient des applications linéaires (voir l'exemple 3.3.14).

**Théorème 3.4.2.16.** La correspondance  $(\Delta, h, g) \in \mathbf{EQC} \mapsto \mathcal{Z}_{\Delta, h, g} \in \mathbf{CTQ}$  est fonctorielle et induit une équivalence de catégories.

*Démonstration.* Cela déduit en recollant l'équivalence obtenue par le corollaire 3.4.1.10.  $\square$

*Remarque 3.4.2.17.* Dans la [définition 3.4.2.1](#), il est autorisé de considérer une famille de cônes avec des répétitions (« collection »). La différence se situe dans le fait que les éventails avec une répétition dans les cônes décrivent un champ torique non-séparé (voir [\[52, Corollary 6.5 & Example 6.20\]](#))

**Exemple 3.4.2.18.** Le premier exemple que l'on peut trouver est en dimension 1 : Prenons  $h : (x, y) \mapsto x + y$  et  $\Delta = \{\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, \mathbb{R}_{\leq 0}\}$ . Les deux cartes obtenues sont  $\mathbb{C} \times \mathcal{B}\mathbb{Z}$  et le recollement le long de  $\mathbb{C}^* \times \mathcal{B}\mathbb{Z}$  est l'identité. Par conséquent, le recollement est la droite affine à deux origines ( $\times \mathcal{B}\mathbb{Z}$ ) qui n'est donc pas séparé.

Dans la suite, on supposera qu'il n'y a pas de répétition (sauf pour les dégénérescences étudiées au [chapitre 5](#)).

### 3.5 Oubli de la calibration

Comme vu dans le [lemme 3.3.9](#), les tores quantiques calibrés sont une gerbe analytique sur une version non-calibrés de ceux-ci. De la même façon, on peut voir les champs toriques affines comme des gerbes au-dessus d'une contrepartie non-calibrée :

**Proposition 3.5.1.** *Soit  $(h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  une calibration.*

*Alors le morphisme*

$$f_\sigma : \mathcal{U}_\sigma := [\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} / \mathbb{Z}^{n-d}] \rightarrow [\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} / E(\Gamma)] \quad (3.5)$$

(où  $E(\Gamma)$  agit sur  $\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$  par :

$$E(\gamma) \cdot z = E(\gamma)z$$

où la multiplication se fait terme-à-terme) induit par le morphisme de groupoïdes

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} \times \mathbb{Z}^{n-d} & \xrightarrow{(id, id, Eh)} & \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} \times E(\Gamma) \\ \pi_1 \downarrow \downarrow \text{act} & & \pi_1 \downarrow \downarrow \text{act} \\ \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{n-k} & \xrightarrow{(id, id)} & \mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k} \end{array}$$

est une  $\ker(h)$ -gerbe analytique équivariante (i.e. dans  $\mathfrak{A}$ ).

*Démonstration.* L'action de  $\mathbb{Z}^{n-d}$  est la même que celle des formes multiplicatives des tores. Grâce à l'isomorphisme de [la proposition 3.3.13](#) avec le quotient  $[\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^n]$  donné par l'action de  $h$ , on en déduit que (3.5) est une  $\ker(h)$ -gerbe (car il y a le même groupe d'ineffectivité).  $\square$

On notera  $\mathcal{U}_\sigma^{\text{noncal}}$  le champ obtenu par la rigidification par  $\ker(h)$  du champ torique  $\mathcal{U}_\sigma$ .

De la même façon que dans [la définition 3.4.2.12](#), on peut définir, à partir d'un éventail quantique calibré, un diagramme de champs  $D_\Gamma : \text{comb}(\Delta) \rightarrow \mathfrak{Champ}$  qui associe à  $I$  le champ  $\mathcal{U}_{\sigma_I}^{\text{noncal}}$

**Proposition 3.5.2.** *Le morphisme  $f : \mathcal{X}_{\Delta, h, g} \rightarrow \text{colim } D_\Gamma =: \mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$ , obtenu par recollement des morphismes  $f_\sigma$ , est une  $\ker(h)$ -gerbe analytique équivariante. En particulier, si  $\ker(h) = 0$  alors  $f$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Cela se déduit du recollement des gerbes (3.5).  $\square$

De la même façon que pour  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}$ , on a :

**Lemme 3.5.3.** *Le tore  $\mathcal{F}_\Gamma$  est dense dans  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$ .*

On peut définir une catégorie de champs toriques quantiques non-calibrés  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}^{\text{noncal}}$  où les morphismes seront les morphismes de champs se restreignant en un morphisme de tores quantiques non-calibrés. Par construction, on a le résultat suivant

**Lemme 3.5.4.** *La correspondance  $f : \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}} \mapsto \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}^{\text{noncal}}$  est fonctorielle.*

Par le corollaire 2.8.11, cette donnée s'interprète homotopiquement comme une classe d'homotopie de morphismes  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}^{\text{noncal}} \rightarrow \mathbf{K}(\ker(\mathfrak{h}), 2) = \mathbf{B}\mathbb{T}^{\mathfrak{a}} = (\mathbb{C}\mathbb{P}^{\infty})^{\mathfrak{a}}$  (où  $\mathfrak{a} := \text{rg}(\ker(\mathfrak{h})) = \mathfrak{n} - \text{rg}(\Gamma)$ ) i.e. la classe d'homotopie d'un  $\mathbb{T}^{\mathfrak{a}}$ -fibré principal. Le reste de cette section sera dévoué à la construction.

Tout d'abord, nous allons montrer le résultat suivant

**Théorème 3.5.5.** *Le morphisme  $h : \mathcal{S} = \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \text{id}, \mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}$ , induit par  $(\mathfrak{h}, \text{id})$ , est un  $\mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}}$ -fibré principal.*

*Démonstration.* Dans un premier temps, nous allons décrire les restrictions de  $h$  sur les cartes affines :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{C}^{\mathfrak{d}} \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & \xrightarrow{h_c} & \mathbb{C}^{\mathfrak{d}} \\
 E_k \downarrow & & E_k \downarrow \\
 \mathbb{T}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{k}} & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{T}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{C}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}^{\mathfrak{d}} \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & \xrightarrow{\bar{h}} & \mathbb{C}^{\mathfrak{d}} \\
 (\bar{E}_k, \text{id}) \downarrow & & \downarrow \bar{E}_k \\
 (\mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}) \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & \xrightarrow{\hat{h}} & \mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}} \\
 \bar{E}_d \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{S} \supset \mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & \xrightarrow{h} & \mathcal{U}_{\sigma}
 \end{array}$$

où  $\mathfrak{k} = \dim(\sigma)$ ,  $\bar{h}$  est le morphisme

$$(z, w) \in \mathbb{C}^{\mathfrak{d}} \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} \mapsto (E(\mathfrak{h}_1(w))z_1, \dots, E(\mathfrak{h}_k(w))z_k, z_{k+1} + \mathfrak{h}_{k+1}, \dots, z_d + \mathfrak{h}_d) \in \mathbb{C}^{\mathfrak{d}}$$

et  $\hat{h}$  est le morphisme

$$(z, w) \in (\mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}) \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} \mapsto (E(\mathfrak{h}_1(w))z_1, \dots, E(\mathfrak{h}_k(w))z_d) \in \mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}.$$

Ce morphisme est  $\mathbb{Z}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}}$ -équivariant pour la translation sur le facteur de  $\mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}}$  à gauche et pour l'action

$$\mathfrak{p} \cdot z = E(\mathfrak{h}(\mathfrak{p}))z \quad (3.6)$$

à droite, il descend donc au quotient.

Nous allons maintenant montrer que ces morphismes sont trivialisables. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}) \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & \mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}} \\
 (\hat{h}, \text{id})^{-1} \downarrow \simeq & \nearrow \hat{h} & \\
 (\mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}) \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} & & 
 \end{array}$$

où  $\mathfrak{p} : (\mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}) \times \mathbb{C}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}} \rightarrow \mathbb{C}^{\mathfrak{k}} \times \mathbb{T}^{\mathfrak{d}-\mathfrak{k}}$  est la projection.

Le morphisme  $\mathfrak{p}$  est  $\mathbb{Z}^{\mathfrak{n}-\mathfrak{d}}$ -équivariant pour l'action

$$\mathfrak{p} \cdot (z, w) = (E(\mathfrak{h}(\mathfrak{p}))z, w + \mathfrak{p}) \quad (3.7)$$

à la source et l'action (3.6) au but et descend au quotient en un morphisme .

$$p : [(\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}) \times \mathbb{C}^{n-d}/\mathbb{Z}^{n-d}] \rightarrow [(\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k})/\mathbb{Z}^{n-d}].$$

Le morphisme  $(\hat{h}, \text{id})^{-1}$ , défini par

$$(\hat{h}, \text{id})^{-1}(z, w) = (E(-\hat{h}(w)z, w),$$

est  $\mathbb{Z}^{n-d}$ -équivariant pour l'action (3.7) à la source et la translation au but.

Le diagramme précédent descend donc au quotient pour donner :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}) \times \mathbb{C}^{n-d}/\mathbb{Z}^{n-d} & \xrightarrow{p} & [(\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}) \times \mathbb{C}^{n-d}/\mathbb{Z}^{n-d}] \\ \downarrow \simeq & \nearrow h_\sigma & \\ (\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}) \times \mathbb{T}^{n-d} & & \end{array}$$

On conclut grâce aux propriétés de functorialités de la construction de  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}$  □

Comme  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}$  est une gerbe au-dessus de  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$  de bande  $\mathbb{Z}^{\text{rk}(\Xi)}$  alors

**Théorème 3.5.6.** *Le morphisme  $f \circ h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$  est un  $\mathbb{C}^{n-d-\text{rg}(\Xi)} \times \mathbb{T}^{\text{rg}(\ker(h))}$ -fibré principal et donc, un  $\mathbb{T}^{\text{rg}(\ker(h))}$ -fibré principal à homotopie près.*

On obtient ainsi une réalisation du fibré associé à la  $\ker(h)$ -gerbe  $f : \mathcal{X}_{\Delta, h, g} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, h, g}^{\text{noncal}}$

## 3.6 Quotient global

On a vu dans le cas rationnel (cf. le [théorème 1.1.5.15](#) et la [sous-section 3.1.1](#)) que les variétés/champs toriques peuvent s'écrire comment le quotient d'un ouvert torique de  $\mathbb{C}^n$  par l'action d'un sous-groupe d'un tore. On verra dans cette section que les champs toriques quantiques s'écrivent également comme le quotient de cet ouvert par l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  donnée par un morphisme de groupes (de Lie)  $\mathbb{C}^{n-d} \rightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ .

Pour cela, on va utiliser la notion utilisée en géométrie convexe de transformation de Gale :

**Définition 3.6.1.** Soit  $\mathcal{G} = \{v_1, \dots, v_n\}$  une famille génératrice de  $\mathbb{R}^d$  et  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  le morphisme  $\mathbb{R}$ -linéaire tel que  $h(e_i) = v_i$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ .

Une transformation de Gale de  $\mathcal{G}$  est une base de  $\ker(h)$  ou encore de façon équivalente la donnée d'une application  $k : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} \xrightarrow{k} \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^d \longrightarrow 0$$

soit exacte.

*Remarque 3.6.2.* La transformation de Gale d'une famille génératrice de  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  est définie à une action de  $\text{GL}_{n-d}(\mathbb{R}) = \text{Aut}_{\mathbb{R}}(\ker(h))$  près. Cette matrice agit par précomposition sur  $k$ .

**Lemme 3.6.3.** *Si  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  est écrite de façon standard  $h = \text{id}_{\mathbb{R}^d} + \hat{h}$  alors une transformation de Gale de  $(h(e_i), i = 1..n)$  est donné par*

$$k = \begin{pmatrix} -\hat{h} \\ \text{id}_{\mathbb{R}^{n-d}} \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}^{n-d} \mapsto (-\hat{h}(x), x) \in \mathbb{R}^n$$

*Démonstration.* L'application  $k$  est injective car  $(-\hat{h}(x), x) = 0$  si, et seulement si,  $x = 0$ . De plus,  $h(x) = 0 \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_d) = -\hat{h}(x_{d+1}, \dots, x_n) \Leftrightarrow x = k(x_{d+1}, \dots, x_n)$  □



**Lemme 3.6.4.** Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire. Soit  $I$  un sous-ensemble de cardinal  $n - d$  tel que  $(h(e_i), i \in I^c)$  soit une base de  $\mathbb{R}^d$ . Si on demande que l'application  $k = (k_1, \dots, k_n) : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  vérifie

$$\forall i \in I, \forall x \in \mathbb{C}^{n-d}, k_i(x_1, \dots, x_{n-d}) = x_i \quad (3.8)$$

alors celle-ci est unique.

*Démonstration.* Soit  $h$  un épimorphisme linéaire  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  et  $k$  une transformation de Gale. Soit  $I = \{i_1 < \dots < i_d\}$  un sous-ensemble de cardinal  $n - d$  tel que  $(h(e_i), i \in I^c)$  soit une base de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $L$  l'isomorphisme  $e_j \mapsto h(e_j)$ . Alors  $Lh$  est standard (à permutation près) et donc vérifie (3.8). Aucun autre élément dans la  $GL_{n-d}(\mathbb{R})$ -orbite de la transformation de Gale ainsi obtenu ne vérifie (3.8).  $\square$

*Remarque 3.6.5.* La transformation de Gale est notamment utilisée pour construire des polytopes (voir, par exemple, [61, section 5.4]). Elle permet notamment de construire les types combinatoires qui ne peuvent pas être réalisés par des polytopes à coefficients rationnels (un exemple est construit dans [61, section 5.5]).

**Proposition 3.6.6.** Soit  $(\Delta, h)$  un éventail classique. Alors le groupe  $G = \text{Hom}(\text{Cl}(X_\Delta), \mathbb{C}^*)$  (utilisé dans le théorème 1.1.5.15) est isomorphe à  $E(k(\mathbb{C}^{n-d}))$ .

*Démonstration.* Rappelons ([34, Théorème 4.1.3]) que

$$G \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{coker}(h^\top : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^n), \mathbb{C}^*)$$

On a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^d \xrightarrow{h^\top} \mathbb{Z}^n \longrightarrow \text{coker}(h) \longrightarrow 0$$

Comme  $\mathbb{C}^*$  est un groupe injectif (car divisible) alors, en appliquant le foncteur exact  $\text{Hom}(-, \mathbb{C}^*)$ , on obtient la suite exacte suivante

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathbb{T}^n \xrightarrow{\varphi := \text{Hom}(h^\top, \mathbb{C}^*)} \mathbb{T}^d \longrightarrow 0 \quad (3.9)$$

Le morphisme  $\varphi$  est le morphisme  $\mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^d$  induit par  $h$  par passage au quotient  $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^n = \mathbb{T}^n$ . On en déduit que

$$G \simeq \ker(\varphi) = E(h^{-1}(\ker(E))) = E(h^{-1}(\mathbb{Z}^d)) = E(\mathbb{Z}^d + \ker(h)) = E(\ker(h)) = E(k(\mathbb{C}^{n-d}))$$

$\square$

**Théorème 3.6.7** ([81] Theorem 7.6). Soient  $(\Delta, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, g)$  un éventail quantique calibré et  $k$  est une transformation de Gale de  $h \otimes \text{id}_{\mathbb{R}}$ . Alors

$$\mathcal{X}_{\Delta, h, g} \simeq [\mathcal{S}(\Delta) / \mathbb{C}^{n-d}]$$

où  $\mathbb{C}^{n-d}$  agit sur  $\mathcal{S}(\Delta) \subset \mathbb{C}^n$  par

$$t \cdot z = E(k(t))z$$

La proposition 3.6.6 montre que le théorème 3.6.7 est l'analogie du résultat de quotient global du théorème 1.1.5.15

**Exemple 3.6.8** (Plan projectif quantique). Soit  $(h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \emptyset)$  la calibration standard telle que  $h(e_3) = (a, b) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  et  $\Delta$  l'éventail tel que

$$\Delta_{\max} = \{(e_1, e_2), (e_2, (a, b)), (e_1, (a, b))\}.$$

Alors  $\mathcal{S}(\Delta) = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$  et la transformation de Gale de  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, (\mathbf{a}, \mathbf{b}))$  est  $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 1)$ . On en déduit que

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset} = [\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}]$$

où  $\mathbf{t} \cdot (z_1, z_2, z_3) = (E(-\mathbf{a}\mathbf{t})z_1, E(-\mathbf{b}\mathbf{t})z_2, E(\mathbf{t})z_3)$ .

Plus généralement, on a :

**Exemple 3.6.9** (Espace projectif quantique). Soit  $(\mathbf{h} : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d, \emptyset)$  la calibration standard telle que  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_{d+1}) = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n) =: \mathbf{v} \in \mathbb{R}_{<0}^d$  et  $\Delta$  l'éventail tel que

$$\Delta_{\max} = \{(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d), (\mathbf{e}_1, \dots, \hat{\mathbf{e}}_i, \dots, \mathbf{e}_n, \mathbf{v}) \text{ pour } 1 \leq i \leq d\}. \quad (3.10)$$

Alors  $\mathcal{S}(\Delta) = \mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\}$  et la transformation de Gale de  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d, \mathbf{v})$  est  $(-\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_d, 1)$ . On en déduit que

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset} = [\mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}]$$

où  $\mathbf{t} \cdot (z_1, \dots, z_{d+1}) = (E(-\mathbf{a}_1\mathbf{t})z_1, \dots, E(-\mathbf{a}_d\mathbf{t})z_d, E(\mathbf{t})z_{d+1})$  (on notera  $\mathbb{P}_{\mathbf{q}}^n(\mathbf{v})$  ce champ torique quantique).

En particulier, si  $\mathbf{v} = (-1, \dots, -1)$  alors  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset}$  est une  $\mathbb{Z}$ -gerbe au-dessus de l'espace projectif  $\mathbb{P}^d$  (que l'on notera  $\widetilde{\mathbb{P}}^d$ ).

Si  $\mathbf{v} \in \mathbb{Q}^d$  alors  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset}$  est une  $\mathbb{Z}$ -gerbe au-dessus d'un espace projectif à poids (comme champ de Deligne-Mumford).

Plus précisément, on a le résultat suivant

**Lemme 3.6.10.** Si  $\mathbf{v} = \left(\frac{p_1}{q_1}, \dots, \frac{p_n}{q_n}\right)$  (avec  $p_i$  et  $q_i$  premiers entre eux) alors l'espace projectif à poids considéré dans l'exemple 3.6.9 est celui avec les coefficients suivants :

$$\left(\frac{p_1 Q}{q_1}, \dots, \frac{p_d Q}{q_d}\right)$$

où  $Q$  est le ppcm des dénominateurs  $q_1, \dots, q_d$ .

*Démonstration.* On sait que

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset} = [\mathbb{C}^{d+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C}]$$

où  $\mathbf{t} \cdot (z_1, \dots, z_{d+1}) = \left(E\left(-\frac{p_1}{q_1}\mathbf{t}\right)z_1, \dots, E\left(-\frac{p_d}{q_d}\mathbf{t}\right)z_d, E(\mathbf{t})z_{d+1}\right)$ . A reparamétrage près, l'action peut être écrite de la façon suivante :

$$\mathbf{t} \cdot (z_1, \dots, z_d) = \left(E\left(-\frac{p_1 Q}{q_1}\mathbf{t}\right)z_1, \dots, E\left(-\frac{p_d Q}{q_d}\mathbf{t}\right)z_d, E(Q\mathbf{t})z_{d+1}\right)$$

On obtient donc une PGCD  $\left(\frac{p_1 Q}{q_1}, \dots, \frac{p_n Q}{q_n}, Q\right)$   $\mathbb{Z}$ -gerbe

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{p_1 Q}{q_1}, \dots, \frac{p_n Q}{q_n}, Q\right)$$

(où le terme de droite est l'espace projectif à poids (vu comme champ de Deligne-Mumford) de poids  $\left(\frac{p_1 Q}{q_1}, \dots, \frac{p_n Q}{q_n}, Q\right)$ ). Montrons maintenant que  $\text{PGCD}\left(\frac{p_1 Q}{q_1}, \dots, \frac{p_n Q}{q_n}, Q\right) = 1$  : Notons  $r$  ce pgcd. Alors

$$\text{PGCD}\left(\frac{p_1 Q}{r q_1}, \dots, \frac{p_n Q}{r q_n}, \frac{Q}{r}\right) = 1$$

Comme  $q_i$  est premier avec  $p_i$  alors  $q_i$  divise  $\frac{Q}{r}$ . Comme cela est vrai pour tout  $i$  alors  $Q = \text{PPCM}(q_i)$  divise  $\frac{Q}{r}$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

**Définition 3.6.11.** On appellera espace projectif quantique tout champ torique quantique dont l'éventail est de la forme (3.10).

**Exemple 3.6.12** (Surface d'Hirzebruch quantique). Soit  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  la calibration standard telle que  $h(e_3) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{R}$  et  $h(e_4) = (\mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{<0}$  et  $\Delta$  l'éventail tel que

$$\Delta_{\max} = \{(e_1, e_2), (e_2, (\mathbf{a}, \mathbf{b})), ((\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d})), ((\mathbf{c}, \mathbf{d}), e_1)\}.$$

Alors  $\mathcal{S}(\Delta) \simeq (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2$  (l'isomorphisme est donné en intervertissant la deuxième et la troisième coordonnée) et la transformation de Gale de  $(e_1, e_2, (\mathbf{a}, \mathbf{b}), (\mathbf{c}, \mathbf{d}))$  est  $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, 1, 0), (-\mathbf{c}, -\mathbf{d}, 0, 1)$ . On en déduit que

$$\mathcal{X}_{\Delta, h, \emptyset} = [(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^2 / \mathbb{C}^2]$$

où  $(t, s) \cdot (z_1, z_2, z_3, z_4) = (E(-\mathbf{a}t - \mathbf{c}s)z_1, E(t)z_2, E(-\mathbf{b}t - \mathbf{d}s)z_3, E(s)z_4)$ .

Si  $\mathbf{a} = -1$  et  $(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = -e_2$  alors on obtient une  $\mathbb{Z}^2$ -gerbe au-dessus de la surface d'Hirzebruch  $\mathbb{F}_b = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}^{\oplus 2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-b))$ .

# ESPACES DE MODULES DE CHAMPS TORIQUES

L'ÉQUIVALENCE ENTRE LA DONNÉE GÉOMÉTRIQUE des champs toriques quantiques et la donnée combinatoire des éventails quantiques permet de construire aisément un champ de modules de champs toriques quantiques en fixant le nombre de générateurs et le type combinatoire. On peut même en donner une description explicite comme un ouvert  $\Omega$  donné par des inégalités polynomiales de l'espace affine réel modulo un groupe fini  $G$ .

Dans la [première section](#), on donnera les premiers résultats sur ces champs de modules et notamment comment le décrire comme champ quotient  $[\Omega/G]$ . On continuera cette étude dans la [deuxième section](#) en décrivant l'ensemble  $\Omega$  par des inégalités et dans la [quatrième section](#) en calculant certains groupes d'automorphismes de type combinatoire. La [troisième section](#) décrira le parallèle entre  $\Omega$  et un objet défini de façon similaire en géométrie convexe : les espaces de réalisation des polytopes. Enfin, on finira ce chapitre par une [cinquième section](#) d'exemples et de calculs explicites sur ces espaces de modules.

## 4.1 Définitions et premiers résultats

Par définition de calibration  $D$ -admissible (cf. [la définition 3.4.2.6](#)), on a le résultat suivant

**Lemme 4.1.1.** *La donnée d'un éventail calibré  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  est équivalente à la donnée de  $(\text{comb}(\Delta), \mathbf{h}, \mathcal{G})$  si  $\mathbf{h}$  est  $\text{comb}(\Delta)$ -admissible.*

On peut définir l'espace de modules des champs toriques donnés par un type combinatoire :

**Définition 4.1.2.** Soient  $D$  le type combinatoire d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$ ,  $n \geq \text{Card}(D(1))$  et  $\mathcal{G} \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus D(1)$ . L'espace de modules des champs toriques quantiques donnés par un éventail de type combinatoire  $D$  est le champ quotient (au-dessus du site  $\mathfrak{Var}\mathfrak{Diff}_{\mathbb{R}}$ ) :

$$\mathcal{M}(d, n, D, \mathcal{G}) := \{\mathbf{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \mid (\mathbf{h}(\mathbf{e}_i))_{i \in D(1)} \text{ est } D\text{-admissible}\} / \simeq \quad (4.1)$$

où  $\mathbf{h} \simeq \mathbf{h}'$  si, et seulement si, il existe un isomorphisme d'éventails entre l'éventail induit par  $(D, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  et celui induit par  $(D, \mathbf{h}', \mathcal{G})$ .

**Lemme 4.1.3.** *Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$  ayant un cône simplicial de dimension maximale,  $n \geq \text{Card}(D(1))$  et  $\mathcal{G} \subset \llbracket 1, n \rrbracket \setminus D(1)$ . Le champ  $\mathcal{M}(d, n, D, \mathcal{G})$  est isomorphe au champ*

$$\{\mathbf{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d \mid \mathbf{h}|_{\mathbb{Z}^d} = \text{id}_{\mathbb{Z}^d}, (\mathbf{h}(\mathbf{e}_i))_{i \in D(1)} \text{ est } D\text{-admissible}\} / \simeq$$

ou encore le quotient d'un sous-ensemble  $\Omega(\mathbf{D})$  de  $\mathbb{R}^{d(n-d)} = (\mathbb{R}^d)^{n-d}$  (représentant les différents générateurs  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_i)$ ) par les isomorphismes d'éventails calibrés  $(L, H)$  tel qu'il existe  $I \in \mathbf{D}$  tel que

$$\text{Cone}(L(\mathbf{h}(\mathbf{e}_i)), i \in I) = \text{Cone}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$$

*Démonstration.* Si  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  a un cône simplicial de dimension maximale alors il existe un isomorphisme d'éventails quantiques  $(L, H)$  qui envoie  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  sur un éventail quantique ayant un de ses cônes maximaux qui est  $\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ .  $\square$

**Lemme 4.1.4.** *Si  $\mathbf{D}$  est simplicial alors  $\Omega(\mathbf{D})$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$ .*

*Démonstration.* Comme le fait que  $d$  vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  soient linéairement indépendant est une condition ouverte alors le fait d'être  $\mathbf{D}$ -réalisable pour un type combinatoire simplicial  $\mathbf{D}$  est une condition ouverte aussi.  $\square$

*Remarque 4.1.5.* Le cas non-simplicial est plus compliqué. En effet, il existe des types combinatoires de polytopes (non-simples) qui ne sont pas réalisables sur  $\mathbb{Q}$  mais sont réalisables sur une extension de  $\mathbb{Q}$  (évoqués dans la remarque 3.6.5). Dans ce cas là, l'espace de réalisation n'est pas ouvert. On étudiera le cas polytopal en détails dans la section 4.3.

**Théorème 4.1.6.** *Soit  $\mathbf{D}$  le type combinatoire d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$  ayant un cône simplicial de dimension maximale,  $n \geq \text{Card}(\mathbf{D}(1))$  et  $\mathcal{G} \subset [1, n] \setminus \mathbf{D}(1)$ . L'espace de modules des champs toriques quantiques donnés par un éventail de type combinatoire  $\mathbf{D}$  et d'ensemble de générateurs virtuels  $\mathcal{G}$  est isomorphe au champ quotient*

$$[\Omega(\mathbf{D}) / \text{Aut}_{\text{Poset}}(\mathbf{D}) \times (\mathbb{Z}^n)^J \times \text{GL}_J(\mathbb{Z}) \times \mathfrak{S}_{\mathcal{G}}] \quad (4.2)$$

où  $J := [1, n] \setminus (\mathbf{D}(1) \cup \mathcal{G})$  et  $\mathfrak{S}_{\mathcal{G}}$  est le groupe de bijections de  $\mathcal{G}$ . L'action de  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(\mathbf{D}) \times (\mathbb{Z}^n)^J \times \text{GL}_J(\mathbb{Z}) \times \mathfrak{S}_{\mathcal{G}}$  sur  $\Omega(\mathbf{D})$  est défini comme suit : Soient  $\mathbf{h} \in \Omega(\mathbf{D})$ ,  $\tau \in \text{Aut}_{\text{Poset}}(\mathbf{D})$ ,  $(\alpha_j)_{j \in J}$ ,  $A \in \text{GL}_J(\mathbb{Z})$  et  $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathcal{G}}$ . Posons

$$H = \left( \begin{array}{c|c|c} P_{\tau} & (\alpha_i)_{i \in J} & 0 \\ \hline 0 & A & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_{\sigma} \end{array} \right)$$

et  $L = (\mathbf{h}(\mathbf{e}_{\tau(1)}) \dots \mathbf{h}(\mathbf{e}_{\tau(d)}))^{-1}$ . Alors,

$$(\tau, (\alpha_j)_{j \in J}, A, \sigma) \cdot \mathbf{h} = LhH^{-1}$$

*Démonstration.* Un isomorphisme d'éventails quantiques est la donnée de deux isomorphismes  $(L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$  qui respectent les cônes et les générateurs virtuels. De plus,  $H$  se décompose par blocs :

$$H = \left( \begin{array}{c|c} H_1 & 0 \\ \hline 0 & H_2 \end{array} \right) \quad (4.3)$$

où  $H_2 : \mathbb{R}^{\mathcal{G}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{G}}$  est entièrement décrit par une permutation de  $\mathcal{G}$ . Maintenant, il nous reste à décrire  $H_1$ . De la même façon que dans [81, section 11.2], il existe une permutation  $\tau$  tel que  $L = (\mathbf{h}(\mathbf{e}_{\tau(1)}) \dots \mathbf{h}(\mathbf{e}_{\tau(d)}))^{-1}$  et  $H_{|\mathbf{D}(1)} = P_{\tau}$ . Plus précisément,  $\tau$  (et son inverse) doit préserver les inclusions des cônes. C'est donc un automorphisme d'ensembles partiellement ordonnés. On en déduit que  $H_1$  est de la forme

$$H_1 = \begin{pmatrix} P_{\tau} & B \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

Comme  $H \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ ,

$$\pm 1 = \det(H) = \det(H_1) \det(H_2) = \det(P_{\tau}) \det(A) \det(P_{\sigma}) = \varepsilon(\sigma) \det(A) \varepsilon(\tau)$$

Et donc,  $\det(A) = \pm 1$ . Cela permet de conclure que  $A \in \text{GL}_J(\mathbb{Z})$ .  $\square$

**Corollaire 4.1.7.** *Si le type combinatoire  $D$  est maximal (i.e.  $J = \emptyset$ ) alors  $\mathcal{M}(d, n, D, \mathcal{G})$  est une orbifolde.*

**Notation 4.1.8.** On va supposer dans toute la suite que le type combinatoire est maximal. On omettera alors le  $\mathcal{G}$  dans la notation (puisque  $\mathcal{G} = \llbracket 1, n \rrbracket \setminus D(1)$ ).

Dans la suite, nous allons séparer l'étude de  $\mathcal{M}(d, n, D)$  (avec  $D$  simplicial) en deux : premièrement, on va décrire  $\Omega$  par des inégalités dans  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  puis donner des outils de calculs du groupe d'automorphismes de  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D)$ .

## 4.2 Semi-algèbricité de $\Omega$

Le but de cette section est de montrer que  $\Omega(D)$  est, dans le cas simplicial, un ouvert semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  qui est connexe si  $D$  est le type combinatoire d'un éventail complet.

**Définition 4.2.1.** Soient  $D$  le type combinatoire d'un éventail simplicial complet de  $\mathbb{R}^d$  avec  $n$  générateurs. Le déterminant associé à ce type combinatoire est l'application  $\det_D : \mathbb{R}^{d(n-d)} \rightarrow \mathbb{R}^{D_{\max}}$  définie par :

$$\forall \mathbf{v} = (v_{d+1}, \dots, v_n) \in (\mathbb{R}^d)^{n-d}, \det_D(\mathbf{v}) = (\det(v_i, \mathbf{i} \in I))_{I \in D_{\max}}$$

où  $v_1 = e_1, \dots, v_d = e_d$ .

On notera  $\mathcal{U}(D)$  l'ouvert (non-vide par hypothèse sur  $D$ )  $\det_D^{-1}((\mathbb{R}^*)^{D_{\max}})$  de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$ .

Dans la suite, on fixera le type combinatoire  $D$  qui sera supposé simplicial et dont tous les éléments maximaux seront de cardinal  $d$ .

*Remarque 4.2.2.* Grâce à ces hypothèses,  $\Omega(D) \subset \mathcal{U}(D)$ .

**Lemme 4.2.3.** *L'application  $\varphi_D : \mathcal{U}(D) \rightarrow \{\pm 1\}^{\Delta_{\max}}$  définie par*

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{U}(D), \varphi_D(\mathbf{v}) = \left( \frac{\det(v_i, \mathbf{i} \in I)}{|\det(v_i, \mathbf{i} \in I)|} \right)_{I \in D_{\max}}$$

*est localement constante (i.e. constante sur chaque composante connexe).*

*Démonstration.* Cela vient du fait que l'application  $\varphi_D$  est continue et que l'espace  $\{\pm 1\}^{\Delta_{\max}}$  est discret.  $\square$

**Proposition 4.2.4.** *L'espace  $\Omega(D)$  est un ouvert-fermé de  $\mathcal{U}(D)$ .*

*Démonstration.* Comme  $D$  est simplicial alors  $\Omega(D)$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  et donc par l'inclusion de [la remarque 4.2.2](#), un ouvert de  $\mathcal{U}(D)$ . Montrons que c'est aussi un fermé de  $\mathcal{U}(D)$  :

Soit  $(h_n)$  une suite de  $\Omega(D)$  qui converge vers  $h$  dans  $\overline{\Omega(D)} \cap \mathcal{U}(D)$ . Comme  $h \in \mathcal{U}(D)$  alors, pour  $I \in D_{\max}$  (qui sont de cardinal  $d$ )

$$\det(h(e_i), \mathbf{i} \in I) \neq 0$$

Pour tout  $I \in D_{\max}$ , les cônes  $\sigma_I = \text{Cone}(h(e_i), \mathbf{i} \in I)$  sont donc des cônes simpliciaux. De la même façon, les propriétés d'intersection sont conservés grâce au fait que  $h \in \mathcal{U}(D)$ . On en déduit donc, grâce à [la proposition 3.4.2.8](#), que  $h \in \Omega(D)$ . Cela montre donc que  $\Omega(D)$  est fermé.  $\square$

L'espace  $\Omega(D)$  est donc une union de composantes connexes de  $\mathcal{U}(D)$ . Par conséquent, grâce au [lemme 4.2.3](#), on obtient des inégalités décrivant les composantes connexes de  $\Omega(D)$ .

**Corollaire 4.2.5.** Soit  $h_0 \in \Omega(D)$ . la composante connexe de  $\Omega(D)$  contenant  $h_0$  est donné par les inégalités (en  $h$ ) :

$$\forall I \in D_{\max}, \text{sign det}(h(e_i), i \in I) = \text{sign det}(h_0(e_i), i \in I)$$

où  $\text{sign}$  est la fonction  $\mathbb{R} \rightarrow \{\pm 1, 0\}$  qui associe à un réel son signe. L'ouvert  $\Omega$  est donc un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$ .

**Proposition 4.2.6.** Si  $D$  est le type combinatoire d'un éventail simplicial complet alors  $\Omega(D)$  est connexe.

*Démonstration.* Comme le signe du déterminant est fixé sur le cône  $(e_1, \dots, e_d)$ , celui des autres est fixé de proche en proche i.e. si  $\sigma$  et  $\tau$  sont deux cônes maximaux ayant une intersection de dimension  $d-1$  alors on peut écrire  $\sigma = \text{Cone}(v_1, \dots, v_{d-1}, v_d)$  et  $\tau = \text{Cone}(v_1, \dots, v_{d-1}, v_{d+1})$  où

$$\text{sign}(\det(v_1, \dots, v_{d-1}, v_d)) = -\text{sign}(\det(v_1, \dots, v_{d-1}, v_{d+1}))$$

□

Regardons maintenant comment  $\Omega(\cdot)$  se comporte avec les produits de types combinatoires<sup>1</sup> : Soient  $n, m, d, e$  quatre entiers tels que  $n \geq d$  et  $m \geq e$ . Soient  $D_1$  le type combinatoire d'un éventail simplicial de  $\mathbb{R}^d$  et  $D_2$  le type combinatoire d'un éventail simplicial de  $\mathbb{R}^e$  avec  $|D_1(1)| = n$  et  $|D_2(1)| = m$ . Posons  $\pi_n$  le morphisme  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{d+e}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  défini par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_{d+e}) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{d+e}, \forall x \in \mathbb{R}^n, \pi_n(h)(x) = (h_1, \dots, h_d)(x \oplus 0)$$

et  $\pi_m$  le morphisme  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{d+e}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^e)$  défini par

$$\forall h = (h_1, \dots, h_{d+e}) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^{d+e}, \forall x \in \mathbb{R}^m, \pi_m(h)(x) = (h_{d+1}, \dots, h_{d+e})(0 \oplus x)$$

**Corollaire 4.2.7.** Le morphisme  $\pi_n$  se restreint en un morphisme  $\Omega(D_1 \times D_2) \rightarrow \Omega(D_1)$  et  $\pi_m$  en un morphisme  $\Omega(D_1 \times D_2) \rightarrow \Omega(D_2)$ .

*Démonstration.* Cela vient du fait que pour tout  $\sigma \in D_1$ ,  $\sigma \cup [n+1, n+e] \in D_1 \times D_2$  et tout  $\tau \in D_1$ ,  $[1, d] \cup \tau \in D_1 \times D_2$  et que les vecteurs correspondant aux cônes  $[1, d]$  et  $[n+1, n+e]$  sont ceux de la base canonique. □

On va utiliser ces morphismes dans [la section 4.5](#).

Pour conclure cette section, nous allons étudier le cas de la dimension 2 :

**Lemme 4.2.8.** Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^2$ . Alors  $D$  est isomorphe à

$$(1, \dots, n, (1, 2), (2, 3), \dots, (|D(1)| - 1, |D(1)|), (|D(1)|, 1))$$

*Démonstration.* L'isomorphisme est donné en ordonnant les générateurs des 1-cônes par leur argument (en identifiant  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{C}$ ). □

**Notation 4.2.9.** On notera  $C_n$  le type combinatoire

$$(1, \dots, n, (1, 2), (2, 3), \dots, (n-1, n), (n, 1))$$

qui est donc le type combinatoire d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^2$

1. Le produit de deux ensembles partiellement ordonnés  $(P_1, \leq_1)$  et  $(P_2, \leq_2)$  est l'ensemble partiellement ordonné  $(P_1 \times P_2, \leq)$  où  $(a, b) \leq (c, d)$  si  $a \leq_1 c$  et  $b \leq_2 d$ .

**Théorème 4.2.10.** *Pour tout  $n \geq 3$ , l'ouvert  $\Omega(C_n)$  est contractile.*

*Démonstration.* Par les inégalités du corollaire 4.2.5, on a :

$$\Omega(\mathbf{D}) = \{v_3 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3), \dots, v_{|\mathbf{D}(1)|} = (\mathbf{a}_{|\mathbf{D}(1)|}, \mathbf{b}_{|\mathbf{D}(1)|}) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^{|\mathbf{D}(1)|-2} \mid \\ \mathbf{a}_3 < 0, \mathbf{b}_{|\mathbf{D}(1)|} < 0, \det(v_i, v_{i+1}) > 0 \text{ pour } 3 \leq i \leq |\mathbf{D}(1)| - 1\}$$

Considérons maintenant l'image  $\Omega'$  de  $\Omega(\mathbf{D})$  par l'application

$$\pi: (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})^{|\mathbf{D}(1)|-2} \rightarrow (\mathbb{S}^1)^{|\mathbf{D}(1)|-2}.$$

Comme les cônes sont stables par la multiplication par un réel positif alors  $\pi|_{\Omega(\mathbf{D})} : \Omega(\mathbf{D}) \rightarrow \Omega'$  est une  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{|\mathbf{D}(1)|-2}$ -fibration. On en déduit que  $\pi|_{\Omega(\mathbf{D})}$  est une équivalence d'homotopie. Examinons donc maintenant  $\Omega'$  :

Par construction, l'ouvert  $\Omega'$  est donné par les mêmes équations que  $\Omega(\mathbf{D})$  :

$$\Omega' = \{v_3 = (\mathbf{a}_3, \mathbf{b}_3), \dots, v_{|\mathbf{D}(1)|} = (\mathbf{a}_{|\mathbf{D}(1)|}, \mathbf{b}_{|\mathbf{D}(1)|}) \in (\mathbb{S}^1)^{|\mathbf{D}(1)|-2} \mid \\ \mathbf{a}_3 < 0, \mathbf{b}_{|\mathbf{D}(1)|} < 0, \det(v_i, v_{i+1}) > 0 \text{ pour } 3 \leq i \leq |\mathbf{D}(1)| - 1\}$$

Les conditions portant sur les déterminants deviennent des conditions sur des angles grâce à la formule suivante

$$\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = |\sin(\mathbf{u}, \mathbf{v})|$$

pour  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{S}^1$ . De plus, on sait que le quadrant  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  est déjà occupé par un cône. On en déduit qu'il y a un homéomorphisme

$$\Omega' \simeq \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_{|\mathbf{D}(1)|}) \mid 0 < \alpha_i < \pi/2 \text{ pour } 3 \leq i \leq |\mathbf{D}(1)| - 1, \sum_{i=2}^{|\mathbf{D}(1)|} \alpha_i = 3\pi/2 \right\}$$

où  $\alpha_2 = \widehat{\mathbf{e}_2, v_3}, \dots, \alpha_{|\mathbf{D}(1)|} = \widehat{v_{|\mathbf{D}(1)|}, \mathbf{e}_1}$ .

Comme  $\alpha_{|\mathbf{D}(1)|}$  dépend des autres  $\alpha_i$ , on peut projeter et ainsi obtenir l'homéomorphisme suivant

$$\Omega' \simeq \left\{ (\alpha_2, \dots, \alpha_{|\mathbf{D}(1)|-1}) \mid 0 < \alpha_i < \pi/2 \text{ pour } 3 \leq i \leq |\mathbf{D}(1)| - 1, \pi/2 < \sum_{i=2}^{|\mathbf{D}(1)|-1} \alpha_i < 3\pi/2 \right\}$$

Pour conclure, montrons que le côté droit de cet homéomorphisme (que l'on notera  $\Omega''$  est homotope à un point. Considérons pour cela l'application  $H : [0, 1] \times \Omega'' \rightarrow \Omega''$  définie par

$$H(t, \alpha_2, \dots, \alpha_{|\mathbf{D}(1)|-1}) = \left( \alpha_1 + t \left( \frac{3\pi}{2(|\mathbf{D}(1)|-1)} - \alpha_1 \right), \dots, \alpha_{|\mathbf{D}(1)|-1} + t \left( \frac{3\pi}{2(|\mathbf{D}(1)|-1)} - \alpha_{|\mathbf{D}(1)|-1} \right) \right)$$

Cette application est bien définie car pour tout  $i$  et tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n = |\mathbf{D}(1)| - 2 \geq 1$ ,

$$0 < \alpha_i + t \left( \frac{3\pi}{2(n+1)} - \alpha_i \right) = (1-t)\alpha_i + t \frac{3\pi}{2(n+1)} \\ < (1-t)\pi + t \frac{3\pi}{2(n+1)}$$



$$\begin{aligned} &< \pi \left( 1 - t \left( 1 - \frac{3}{2(n+1)} \right) \right) \\ &< \pi \left( 1 - t \frac{2n-1}{2(n+1)} \right) < \pi \end{aligned}$$

et pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $n \geq 1$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left( (1-t)\alpha_i + t \frac{3\pi}{2(n+1)} \right) &= (1-t) \sum_{i=1}^n \alpha_i + t \frac{3\pi n}{2(n+1)} \\ &> (1-t) \frac{\pi}{2} + t \frac{3\pi n}{2(n+1)} \\ &> \frac{\pi}{2} \left( 1 + t \frac{2n-1}{n+1} \right) > \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (1-t) \sum_{i=1}^n \alpha_i + t \frac{3\pi n}{2(n+1)} &< (1-t) \frac{3\pi}{2} + t \frac{3\pi n}{2(n+1)} = \frac{3\pi}{2} \left( 1 - t \frac{\pi 1}{(n+1)} \right) \\ &< \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme  $H(0, \cdot) = \text{id}_{\Omega''}$  et  $H(1, \cdot)$  est l'application constante valant  $\left( \frac{3\pi}{2(|D(1)|-1)}, \dots, \frac{3\pi}{2(|D(1)|-1)} \right)$  alors  $\Omega''$  est contractile et donc  $\Omega(C)$  aussi. □

### 4.3 Cas polytopal

Dans la littérature, l'espace que l'on associe à un ensemble partiellement ordonné  $D$  est plus souvent celui des points formant un polytope dont l'ensemble partiellement ordonné des faces est  $D$  :

**Définition 4.3.1** ([111]). Soient  $P = \text{Conv}(p_1, \dots, p_n) \subset \mathbb{R}^d$  un polytope de  $\mathbb{R}^d$  avec  $n$  sommets et  $\mathcal{B} = (p_1, \dots, p_{d+1})$  une base de l'espace affine  $\mathbb{R}^d$ . L'espace de réalisation  $\mathcal{R}(P, \mathcal{B})$  est l'ensemble des matrices  $Q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{dn}$  tel que

$$\text{comb}(\text{Conv}(Q)) = \text{comb}(P)$$

et  $q_i = p_i$  pour  $i = 1, \dots, d+1$ .

*Remarque 4.3.2.* Les espaces obtenus en changeant de base sont « équivalents » (dans le sens de la fin de section)

**Proposition 4.3.3** ([28]). Soit  $D$  l'ensemble partiellement ordonné des faces d'un polytope (non-nécessairement simplicial)  $P \subset \mathbb{R}^d$  à  $n$  sommets et  $\mathcal{B}$  une base affine de  $\mathbb{R}^d$  (on va supposer que le premier point de  $\mathcal{B}$  est 0). Posons  $\mathcal{P}(P)$  l'ensemble

$$\mathcal{P}(P) := \{(Q, v) \in \mathcal{R}(P, \mathcal{B}) \times \mathbb{R}^d \mid v \in \text{Int Conv}(Q)\}$$

L'application  $(Q, v) \mapsto \{\text{sommets de } Q - v\}$  est une immersion ouverte  $\mathcal{P}(P) \hookrightarrow \Omega(D)$ .

*Remarque 4.3.4.* Le  $v$  qui est retiré permet au polytope d'avoir 0 dans son intérieur.

*Avertissement 4.3.5.* L'inclusion est toujours stricte pour  $n > d + 1$  même en dimension 2 i.e. même si tous les cônes sont engendrés par une face d'un polytope cela ne veut pas dire que les générateurs choisis par la calibration sont les sommets d'un polytope (voir la figure (4.1)).

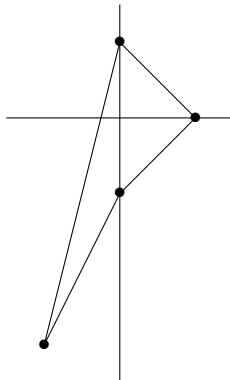


FIGURE 4.1 – Contre-exemple éventails polypaux/calibration

La fin de cette section sera dédiée à montrer que les espaces  $\Omega(D)$  pour  $D$  non-simplicial peuvent être aussi compliqués que possible.

**Définition 4.3.6** (équivalence stable). • Soit  $V \subset \mathbb{R}^n$  et  $W \subset \mathbb{R}^{n+d}$  deux sous-ensembles semi-algébriques tels que  $\pi(W) = V$  où  $\pi$  est la projection  $\mathbb{R}^{n+d} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Alors  $V$  est une projection stable de  $W$  si  $W$  est de la forme

$$W = \{(v, v') \mid v \in V, \forall i \in I, \forall j \in J, \varphi_i(v) \cdot v' > 0, \psi_j(v) \cdot v' = 0\}$$

où  $I$  et  $J$  sont des ensembles finis et les  $\varphi_i$  et  $\psi_j$  sont des fonctions polynomiales  $\mathbb{R}^n \rightarrow (\mathbb{R}^d)^*$

- Deux ensembles semi-algébriques  $V$  et  $W$  sont rationnellement équivalents s'il existe un homéomorphisme  $f : V \rightarrow W$  tel que  $f$  et  $f^{-1}$  sont des fonctions rationnelles.
- L'équivalence stable est la relation d'équivalence sur l'ensemble des ensembles semi-algébriques engendrée par la projection stable et l'équivalence rationnelle.

*Remarque 4.3.7.* On peut donner une interprétation géométrique à la projection stable :  $V$  est une projection stable de  $W$  si chaque fibre de la projection  $W \rightarrow V$  est l'intérieur d'un polyèdre dont les coefficients des équations sont donnés par des polynômes sur  $V$ .

**Lemme 4.3.8** ([110]). Soient  $V \subset \mathbb{R}^n$  et  $W \subset \mathbb{R}^m$  deux ensembles semi-algébriques stablement équivalents. Alors<sup>2</sup>,

- Si  $k$  est un sous-corps de  $\overline{\mathbb{Q}}$  et que  $V \cap k^n = \emptyset$  alors  $W \cap k^m = \emptyset$
- $V$  et  $W$  ont des « structures de singularité équivalentes ». Par exemple,  $V$  est lisse si, et seulement si,  $W$  est lisse

**Théorème 4.3.9** (d'universalité de MNEV, [95], 1986). Tout ensemble semi-algébrique  $V$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$  est stablement équivalent à l'espace de réalisation d'un polytope de dimension  $d$  à  $d + 4$  côtés.

2. dans [110], il est ajouté le fait que  $V$  et  $W$  sont homotopiquement équivalents mais l'exemple suivant montre que cela est faux :  $V = \mathbb{R}$  est une projection stable de  $W = \{(v, w, w') \in \mathbb{R}^3 \mid v(vw - w') = 0\}$  mais  $W$  n'est pas connexe par arcs alors  $V$  l'est. L'hypothèse que l'on peut rajouter pour que cela fonctionne est la constance de la dimension des fibres. Voir <https://taboerge.de/blog/2022/02/0n-stable-equivalence-of-semialgebraic-sets/> pour une discussion sur ce problème de [110]

**Théorème 4.3.10** (RICHTER-GEBERT,[111],1994). *Tout ensemble semi-algébrique  $V$  au-dessus de  $\mathbb{Z}$  est stablement équivalent à l'espace de réalisation d'un polytope de dimension 4.*

**Corollaire 4.3.11.** *Le corps  $\overline{\mathbb{Q}} \cap \mathbb{R}$  est le plus petit corps sur lequel tous les 4-polytopes peuvent être réalisés.*

Ces résultats nous montrent que les ensembles  $\Omega(D)$  peuvent contenir des ouverts très singuliers et que pour réaliser certains types combinatoires, on ne peut pas se placer sur  $\mathbb{Q}$ .

*Remarque 4.3.12.* Une conséquence notable de ces résultats est que les polytopes réalisant ces types combinatoires sont difficilement maniables de façon informatique : les flottants sont des représentations des rationnels et par conséquent, l'approximation faite en passant des réels aux flottants empêche que le polytope obtenu soit celui du type combinatoire que l'on voulait.

## 4.4 Automorphismes d'ensembles partiellement ordonnés

Le calcul des groupes d'automorphismes est, dans la pratique, compliqué à mener. En effet, pour qu'une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  soit dans  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D) \times \mathfrak{S}_g$ , il faut vérifier qu'elle envoie des cônes maximaux sur les cônes maximaux. C'est faisable pour des petites valeurs de  $n$  mais cela devient vite infaisable. Cette section a pour but d'expliciter certains résultats que l'on peut obtenir lorsque  $D$  est un produit de deux types combinatoires.

**Définition 4.4.1.** Un ensemble partiellement ordonné  $(P, \leq)$  est connexe si pour toute paire  $(a, b) \in P^2$ , il existe une suite finie  $c_1 = a, \dots, c_n = b$  tel que, pour tout  $i$ ,  $c_i$  et  $c_{i+1}$  soient comparables (i.e.  $c_i \leq c_{i+1}$  ou  $c_{i+1} \leq c_i$ ).

**Lemme 4.4.2.** *Si un ensemble partiellement ordonné  $P$  a un élément minimum  $m$  ou un élément maximum  $M$  (i.e. tel que pour tout  $p \in P$ ,  $m \leq p$  (ou  $p \leq M$ ) alors il est connexe.*

*Démonstration.* Soit  $P$  un ensemble partiellement ordonné ayant un élément minimum  $m$  (même raisonnement pour un élément maximal) alors pour toute paire d'éléments  $(a, b)$ , on a :

$$a \geq m \leq b$$

Ce qui montre que  $P$  est un connexe. □

**Théorème 4.4.3** ([42]). • *Soit  $X = \prod_{i \in I} X_i$  un ensemble partiellement ordonné connexe où  $X_i$  et  $X_j$  n'ont pas de facteur commun (i.e. il n'existe pas  $Y, X'_i, X'_j$  non vides tels que  $X_i \simeq Y \times X'_i$  et  $X_j \simeq Y \times X'_j$ ) pour  $i \neq j$ . Alors*

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(X) = \prod_{i \in I} \text{Aut}_{\text{Poset}}(X_i)$$

- *Soit  $X$  un ensemble partiellement ordonné indécomposable (i.e. il n'existe pas de  $Y, Z$  non vide tel que  $X \simeq Y \times Z$ ) et  $Y = \prod_{i \in I} X_i$ . Alors*

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(Y) = \prod_{i \in I} \text{Aut}_{\text{Poset}}(X_i) \rtimes \mathfrak{S}_I$$

où  $\mathfrak{S}_I$  agit sur  $\prod_{i \in I} \text{Aut}_{\text{Poset}}(X_i)$  par permutation des coordonnées.

**Corollaire 4.4.4.** Soient  $P_1, \dots, P_n$  des ensembles partiellement ordonnés indécomposables distincts et  $m_1, \dots, m_n$  des entiers naturels. Alors

$$\text{Aut}_{\text{Poset}} \left( \prod_{i=1}^n P_i^{m_i} \right) = \prod_{i=1}^n \text{Aut}_{\text{Poset}}(P_i)^{m_i} \rtimes \mathfrak{S}_{m_i}$$

**Corollaire 4.4.5.** Supposons que  $D_1$  et  $D_2$  n'ont pas de facteur commun alors les applications  $\pi_n$  et  $\pi_m$  descendent au quotient en des morphismes  $\mathcal{M}(d+e, n+m, D_1 \times D_2) \rightarrow \mathcal{M}(d, n, D_1)$  et  $\mathcal{M}(d+e, n+m, D_1 \times D_2) \rightarrow \mathcal{M}(e, m, D_2)$ .

**Exemple 4.4.6.** On peut prendre  $D_1$  le type combinatoire de  $\mathbb{P}^1$  et  $D_2$  le type combinatoire de  $\mathbb{P}^2$ . Alors

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(D_1 \times D_2) = \text{Aut}_{\text{Poset}}(D_1) \times \text{Aut}_{\text{Poset}}(D_2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3$$

**Proposition 4.4.7.** Soient  $\Delta_1$  et  $\Delta_2$  deux éventails. Alors

$$\text{comb}(\Delta_1 \times \Delta_2) = \text{comb}(\Delta_1) \times \text{comb}(\Delta_2)$$

*Démonstration.* Cela vient de l'égalité

$$\Delta_1 \times \Delta_2 = \{\sigma \times \tau \mid \sigma \in \Delta_1, \tau \in \Delta_2\}$$

□

**Proposition 4.4.8.** Si  $\Delta$  est un éventail normal de  $P$  alors

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(P)) = \text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(\Delta))$$

*Démonstration.* Cela vient de l'égalité (dû à la dualité éventails-polytopes) :

$$\text{comb}(P) = \text{comb}(\Delta)^{\text{op}}$$

(le  $\text{op}$  désignant le poset donné par l'ordre opposé). En effet, si on prend un automorphisme  $\varphi$  de  $\text{comb}(\Delta)$  alors

$$\mathbf{u} \leq \mathbf{v} \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{u}) \leq \varphi(\mathbf{v})$$

Par définition, on obtient

$$\mathbf{u} \geq_{\text{op}} \mathbf{v} \Leftrightarrow \varphi(\mathbf{u}) \geq_{\text{op}} \varphi(\mathbf{v})$$

□

**Exemple 4.4.9.** Si  $D$  est le type combinatoire d'un éventail de  $\mathbb{R}^2$  alors  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D)$  est le groupe d'automorphismes de graphes de la forme : On en déduit que le groupe  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D)$  est le groupe diédral à  $2|D(1)|$  éléments.

**Exemple 4.4.10.** Soit  $H_n = [0, 1]^n$  le  $n$ -hypercube. Alors

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(H_1)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

et

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(H_n)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \rtimes \mathfrak{S}_n$$

En particulier,

- $\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(H_2)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2 \rtimes \mathfrak{S}_2 = D_4$  ;

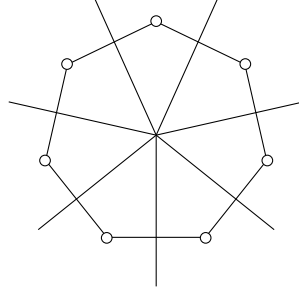


FIGURE 4.2 – Graphe cyclique et éventail

- $\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(H_3)) = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 \rtimes \mathfrak{S}_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_4$  ;

**Exemple 4.4.11.** Soit  $\Delta_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1\}$  le  $n$ -simplexe standard. Alors

$$\text{Aut}_{\text{Poset}}(\text{comb}(\Delta_n)) = \mathfrak{S}_{n+1}$$

**Exemple 4.4.12.** Le groupe d'automorphisme des deux polytopes de 4.3 est  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .



FIGURE 4.3 – Le « livre pentagonal » et une de ses dégénérescences

## 4.5 Exemples

Cette section sera dédiée au calcul de certains espaces de modules  $\mathcal{M}(d, n, D) = [\Omega(D)/\text{Aut}_{\text{Poset}}(D)]$ , leur groupe d'homotopie et leur groupes de cohomologie singuliers.

Dans ces exemples, nous allons montrer que  $\Omega(D)$  est contractile. Grâce à cela, nous allons réussir à calculer les groupes de cohomologie de  $\mathcal{M}(d, n, D)$  Pour cela, on peut commencer par rappeler le résultat suivant :

**Proposition 4.5.0.1.** *Si  $X$  est une variété contractile et  $G$  un groupe fini agissant sur  $X$ . Alors  $\mathcal{X} = [X/G]$  a le type d'homotopie de  $BG$  et donc*

$$H^*(\mathcal{X}, \mathbb{R}) = H^*(BG, \mathbb{R})$$

pour tout anneau  $\mathbb{R}$ .

On affinera ce résultat dans le [théorème 4.5.1.7](#) pour le cas où  $\mathbb{R} = \mathbb{Q}$ .

On a déjà montré le cas des surfaces dans le [théorème 4.2.10](#) :

**Corollaire 4.5.0.2.** *Le champ de modules  $\mathcal{M}(2, n, C_n)$  a le type d'homotopie de*

$$B(\text{Aut}(C_n)) = B(D_n)$$

.

### 4.5.1 Cohomologie des groupes

Pour calculer ces groupes de cohomologie, on va passer par la cohomologie des groupes grâce au [théorème 4.5.1.2](#) :

**Définition 4.5.1.1.** Soient  $G$  un groupe,  $M$  un  $\mathbb{Z}[G]$ -module. Le  $i$ ème groupe de cohomologie de  $G$  à valeurs dans  $M$  est

$$H^i(G, M) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}[G]}^i(\mathbb{Z}, M)$$

i.e. le  $i$ ème foncteur dérivé de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -) : \mathbb{Z}[G] - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$  évalué en  $M$

**Théorème 4.5.1.2** ([124] theorem 6.10.5). Soit  $G$  un groupe topologique et  $R$  un anneau. On a un isomorphisme d'anneaux gradués

$$H^*(BG, R) \simeq H^*(G, R)$$

où l'anneau de cohomologie à droite est celui de la cohomologie des groupes.

**Exemple 4.5.1.3** ([63] theorem 5.3). Soit  $m \geq 3$  un entier. Alors

$$H^0(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[D_m]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

et pour  $q \geq 1$

$$H^k(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{si } k \equiv 0[2] \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 4.5.1.4** ([63] theorem 5.3). Soit  $m \geq 3$  un nombre impair. Alors

$$H^0(D_m, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[D_m]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

et pour  $q \geq 1$

$$H^k(D_m, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{si } k \equiv 0[4] \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) & \text{si } k \equiv 2[4] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 4.5.1.5** ([63] theorem 5.2). Soit  $m \geq 3$  un nombre pair. Alors

$$H^0(D_m, \mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}[D_m]}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

et pour  $q \geq 1$

$$H^k(D_m, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{k}{2}} & \text{si } k \equiv 0[4] \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \equiv 1[4] \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{k+2}{2}} & \text{si } k \equiv 2[4] \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{k-1}{2}} & \text{si } k \equiv 3[4] \end{cases}$$

De plus, l'anneau gradué  $H^*(D_m, \mathbb{Z})$  est isomorphe à l'algèbre polynomiale

$$\mathbb{Z}[a_2, d_4]/(2a_2, nd_4)$$

où  $a_2, b_2$  sont les deux générateurs de  $H^2(D_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $c_3$  est le générateur de  $H^3(D_m, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $d_4$  est le générateur de  $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \subset H^4(D_m, \mathbb{Z})$

*Remarque 4.5.1.6.* Ces deux exemples décrivent la cohomologie singulière de  $\mathcal{M}(2, n, \mathbb{C})$  dans le cas où  $n = |\mathbb{C}(1)|$ .

Devant la difficulté pour calculer la cohomologie à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  des différents groupes finis, on va voir ce qui se passe pour le cas à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  :

**Théorème 4.5.1.7** ([23] Chapter III : Proposition 10.1, Corollary 10.2). *Soient  $G$  un groupe fini et  $M$  un  $\mathbb{Q}[G]$ -module (e.g.  $M = \mathbb{Q}$ ). Alors pour tout  $n \geq 1$ ,  $H^n(G, M) = 0$ .*

**Corollaire 4.5.1.8.** *Pour tout groupe fini  $G$  agissant sur une variété contractile  $X$  et tout  $n \geq 1$ , on a*

$$H^n([X/G], \mathbb{Q}) = H^n(BG, \mathbb{Q}) = H^n(G, \mathbb{Q}) = 0$$

## 4.5.2 Espaces projectifs

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $S_n$  le type combinatoire avec  $(n+1)$  rayons et dont les éléments maximaux sont toutes les sous-familles à  $n$  éléments de  $[[1, n+1]]$  i.e. le type combinatoire de  $\mathbb{P}^n$ .

**Lemme 4.5.2.1.**  $\Omega(S_n) = \mathbb{R}_{<0}^n$

*Démonstration.* On a l'inclusion  $\Omega(S_n) \subset \mathbb{R}_{<0}^n$  car  $(-1, \dots, -1) \in \Omega(S_n)$  (car  $\mathbb{P}^n$  a ce type combinatoire). Comme  $\Omega(D)$  est un sous-ensemble connexe dans  $\mathbb{R}_{<0}^n$  (par la proposition 4.2.6) donc  $\Omega(S_n) = \mathbb{R}_{<0}^n$ .  $\square$

**Proposition 4.5.2.2.**  $\mathcal{M}(n, n+1, D_n)$  a le type d'homotopie de  $B\mathfrak{S}_{n+1} = K(\mathfrak{S}_{n+1}, 1)$  et ses groupes de cohomologie sont donc

$$H^*(\mathcal{M}(n, n+1, S_n), \mathbb{Z}) = H^*(\mathfrak{S}_{n+1}, \mathbb{Z})$$

**Exemple 4.5.2.3.** Pour  $n = 2$ ,  $\mathfrak{S}_3 = D_3$  et donc

$$H^k(\mathcal{M}(n, n+1, S_n), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \equiv 2[4] \\ \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} & \text{si } k \equiv 0[4], k > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**Exemple 4.5.2.4** ([82]). Pour  $n = 3$ ,  $H^*(\mathcal{M}(3, 4, S_3))$  est l'anneau gradué décrit par générateurs et relations suivant :

$$\langle a, b, c, d \mid \deg(a) = 2, \deg(b) = 3, \deg(c) = 3, \deg(d) = 4, \\ 2a = 2b = 4c = 3d = 0, ab^{2j} = a^{j+1}(c + a^2)^j \text{ pour tout } j \geq 1 \rangle$$

Le calcul des groupes de cohomologie  $\mathfrak{S}_n$  ne sont pas connus pour  $n \geq 5$  mais comme  $\mathfrak{S}_n$  est fini alors que les groupes de cohomologie rationnelle de  $\mathfrak{S}_n$  sont faciles à calculer :

**Proposition 4.5.2.5.** *Pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$H^k(\mathcal{M}(n, n+1, S_n), \mathbb{Q}) = \begin{cases} \mathbb{Q} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

## 4.5.3 Surfaces de Hirzebruch

Dans cette sous-section, nous allons étudier l'espace de modules des surfaces d'Hirzebruch i.e. les éventails dont le type combinatoire est :

$$C_4 = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

On a vu dans le [théorème 4.2.10](#) que  $\Omega(C_4)$  est contractile. Dans cette exemple, on va redémontrer ce résultat en donnant une description plus géométrique de  $\Omega(C_4)$ .

On peut tout d'abord remarquer que le type combinatoire  $C_4$  est le carré du type combinatoire  $D = \{(1, 2)\}$  qui est le type combinatoire de l'éventail de la droite projective.

**Lemme 4.5.3.1.** *On a l'égalité :*

$$\Omega(C_4) = \{(a, b), (c, d) \in (\mathbb{R}^2)^2 \mid a < 0, d < 0, ad - bc > 0\}$$

*Démonstration.* On a les égalités suivantes :

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = -a, \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = ad - bc, \det \begin{pmatrix} c & d \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -d$$

De plus,  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  est une variété dont l'éventail est de type combinatoire  $D$  donc  $-a > 0, -d > 0, ad - bc > 0$ . On conclut grâce au fait que  $\Omega(D)$  est connexe puisque  $D$  est simplicial (cf. [la proposition 4.2.6](#)).  $\square$

Par le [corollaire 4.2.7](#), on a un morphisme

$$\begin{aligned} p: \quad \Omega(D_4) &\rightarrow \Omega(D) \times \Omega(D) = \mathbb{R}_{<0}^2 \\ ((a, b), (c, d)) &\mapsto (a, d) \end{aligned}$$

Pour tout  $a, d < 0$ , la fibre de  $p$  est

$$\begin{aligned} p^{-1}(a, d) &= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid ad - bc > 0\} \\ &\simeq \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid bc < ad\} \\ &\simeq \{(b, c) \in \mathbb{R}^2 \mid bc < 1\} =: \mathcal{H} \end{aligned}$$

(le dernier isomorphisme étant  $(b, c) \mapsto (\frac{b}{a}, \frac{c}{d})$ )

**Lemme 4.5.3.2.** *L'espace  $\mathcal{H}$  est homotope à  $\{(0, 0)\}$ .*

*Démonstration.* On considère l'homotopie  $H : (x, t) \in \mathcal{H} \times [0, 1] \mapsto (1 - t)x, y$  car pour tout  $(x, y) \in \mathcal{H}$  et  $t \in [0, 1]$ ,

$$(1 - t)x(1 - t)y = (1 - t)^2 xy < 1.$$

Alors  $H(\cdot, 1) = (0, 0)$ .  $\square$

On peut donc construire un quasi-inverse de  $p$  :

$$s(a, d) = (a, 0, 0, d)$$

Par conséquent, on retrouve que  $\Omega(C_4)$  est contractile et que  $\mathcal{M}(2, 4, C_4)$  a le type d'homotopie de  $B \text{Aut}_{\text{Poset}}(D) = BD_4$ . On peut donc calculer les groupes de cohomologie de  $\mathcal{M}(2, 4, D_1 \times D_2)$

#### 4.5.4 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$

Soient  $D_1 = \{(1), (2)\}$  et  $D_2 = \{(3), (4), (5), (3, 4), (4, 5), (5, 3)\}$  les types combinatoires de, respectivement, de la droite projective et du plan projectif. Notons  $D$  le type combinatoire produit  $D = D_1 \times D_2$ . C'est donc le type combinatoire de l'éventail de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$

**Lemme 4.5.4.1.**  *$\Omega(D)$  est l'ensemble des  $((a, b, c), (d, e, f)) \in (\mathbb{R}^3)^2$  tels que*



$$\begin{cases} \mathbf{a} < 0 \\ \mathbf{e} < 0 \\ \mathbf{f} < 0 \\ \mathbf{bd} - \mathbf{ae} < 0 \\ \mathbf{dc} - \mathbf{af} < 0 \end{cases}$$

*Démonstration.* Même preuve que le [lemme 4.5.3.1](#) □

On a une projection  $\mathbf{p} : \Omega(\mathbf{D}) \rightarrow \Omega(\mathbf{D}_1) \times \Omega(\mathbf{D}_2) = \mathbb{R}_{<0}^3$  définie par :

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

Soit  $(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}_{<0}^3$ . Alors

$$\mathbf{p}^{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \simeq \{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{bd} - \mathbf{ae} < 0, \mathbf{dc} - \mathbf{af} < 0\}$$

**Lemme 4.5.4.2.** *Pour tout  $(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \in \mathbb{R}_{<0}^3$ ,  $\pi_{\mathbf{a},\mathbf{e},\mathbf{f}} : (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbf{p}^{-1}(\mathbf{a}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto \mathbf{d} \in \mathbb{R}$  est une équivalence d'homotopie de quasi-inverse  $\mathbf{d} \mapsto (0, 0, \mathbf{d})$*

*Démonstration.* Soit  $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} \pi_{\mathbf{a},\mathbf{e},\mathbf{f}}^{-1}(\mathbf{d}) &= \{(\mathbf{b}, \mathbf{c}) \in \mathbb{R} \mid \mathbf{bd} - \mathbf{ae} < 0, \mathbf{dc} - \mathbf{af} < 0\} \\ &= \begin{cases} ] - \infty, \frac{\mathbf{ae}}{\mathbf{d}}[ \times ] - \infty, \frac{\mathbf{af}}{\mathbf{d}}[ \text{ si } \mathbf{d} > 0 \\ \mathbb{R}^2 \text{ si } \mathbf{d} = 0 \\ ] \frac{\mathbf{ae}}{\mathbf{d}}, +\infty[ \times ] \frac{\mathbf{af}}{\mathbf{d}}, +\infty[ \text{ si } \mathbf{d} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Comme  $\mathbf{ae} > 0$  alors  $(0, 0)$  est dans toutes les fibres de  $\pi_{\mathbf{a},\mathbf{e},\mathbf{f}}$  qui sont donc homotope à  $\{(0, 0)\}$ . □

**Proposition 4.5.4.3.** *La projection  $\Omega(\mathbf{D}) \rightarrow \mathbb{R}_{<0}^3 \times \mathbb{R}$  définie par :*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$$

*est une équivalence d'homotopie de quasi-inverse  $(\mathbf{a}, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) \mapsto (\mathbf{a}, 0, 0, \mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$*

*Démonstration.* Cela découle du lemme précédent. □

**Corollaire 4.5.4.4.** *L'ouvert  $\Omega(\mathbf{D})$  est contractile et  $\mathcal{M}(3, 5, \mathbf{D})$  a le type d'homotopie de  $\mathbf{B} \text{Aut}_{\text{Poset}}(\mathbf{D}) = \mathbf{B}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathfrak{S}_3) = \mathbf{BD}_6$*

**Corollaire 4.5.4.5.** *On a les égalités suivantes :*

$$\mathbf{H}^k(\mathcal{M}(3, 5, \mathbf{D}), \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} \text{ si } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \text{ si } k \equiv 2[4] \\ \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \text{ si } k \equiv 0[4], k > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

# COMPACTIFICATION DES ESPACES DE MODULES DE CHAMPS TORIQUES ET DÉGÉNÉRESCENCES

DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT, ON a décrit l'espace de modules de champs toriques quantiques où on a fixé la dimension, le nombre de générateurs et le type combinatoire. La question naturelle suivante est : « Comment compactifier cet espace de modules ? ». Pour faire cela, nous allons d'abord plonger  $\Omega(D)$  dans une variété grassmannienne (qui est compacte) puis prendre son adhérence afin d'obtenir un espace compact et ainsi compactifier le champ de modules  $\mathcal{M}(d, n, D)$ .

La [première section](#) de ce chapitre sera dédiée à des rappels sur les grassmanniennes. Afin de pouvoir faire les constructions des sections suivantes, on étudiera les passages au quotient des actions de groupe, dans la [deuxième section](#), lorsque l'action de groupe n'est plus équivariante mais vérifie une condition plus faible de compatibilité. La [quatrième section](#) décrira la famille universelle des champs toriques quantiques au-dessus de  $\mathcal{M}(d, n, D)$  grâce à la simplication de l'action de  $\text{Aut}(D)$  induite par le plongement dans la grassmannienne. La [cinquième section](#) sera vouée à la construction de la compactification de  $\mathcal{M}(d, n, D)$  et de celle de sa famille universelle. Enfin, la [sixième section](#) sera consacrée aux exemples.

## 5.1 Grassmanniennes

Dans cette section, on va rappeler la construction des grassmanniennes (voir, par exemple, [94]) et introduire les notations qui seront utilisées dans le reste du chapitre.

**Définition 5.1.1.** Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . La grassmannienne des  $k$ -plans ( $k \leq n$ ) de  $V$  est l'ensemble, noté  $\text{Gr}(k, V)$ , des sous-espaces vectoriels de dimension  $k$  de  $V$ .

**Exemple 5.1.2.**  $\text{Gr}(1, V) = \text{Gr}(\dim(V) - 1, V^*) = \mathbb{P}(V)$ .

*Remarque 5.1.3.* Un isomorphisme  $V \simeq \mathbb{R}^{\dim(V)}$  induit une bijection  $\text{Gr}(k, V) \simeq \text{Gr}(k, \mathbb{R}^{\dim(V)})$

**Corollaire 5.1.4.** On a une bijection

$$\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \simeq O(n)/O(k) \times O(n-k)$$

où  $O(k) \times O(n-k)$  agit sur  $O(n)$  par :

$$(N, P) \cdot R = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix} R$$

Cela munit  $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$  d'une structure de variété différentiable compacte de dimension  $k(n - k)$ .

*Démonstration.* Le groupe  $O(n)$  agit transitivement sur  $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$  par l'action induite par celle sur  $\mathbb{R}^n$ . Le stabilisateur de cette action en chaque point est  $O(k) \times O(n - k)$ , ce qui permet de conclure.  $\square$

On va maintenant donner deux autres isomorphismes afin de donner facilement des cartes de la grassmanniennes :

**Lemme 5.1.5.** *Pour  $n \geq k$ , l'ensemble*

$$\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \mid f \text{ surjective}\}$$

*est un ouvert de Zariski de  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ .*

*Démonstration.* Un morphisme  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$  est surjectif si, et seulement si, il existe un sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  de cardinal  $k$  tel que

$$\det(f|_{\mathbb{R}^I}) \neq 0$$

Ainsi,

$$\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) = \bigcup_{I, |I|=k} \{(a_{ij})_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^{nk} \mid \det((a_{ij})_{1 \leq i \leq k, j \in I}) \neq 0\} \quad (5.1)$$

$$=: \bigcup_{I, |I|=k} \text{Epi}_I(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) \quad (5.2)$$

$\square$

Dualement,

**Lemme 5.1.6.** *Pour  $n \geq k$ , l'ensemble*

$$\text{Mono}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) := \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \mid f \text{ injective}\}$$

*est un ouvert de Zariski de  $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^{nk}$ .*

Avec une égalité similaire à celle de (5.2) :

$$\text{Mono}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) = \bigcup_{I, |I|=k} \{(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} \in \mathbb{R}^{nk} \mid \det((a_{ij})_{1 \leq j \leq k, i \in I}) \neq 0\} \quad (5.3)$$

$$=: \bigcup_{I, |I|=k} \text{Mono}_I(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \quad (5.4)$$

**Théorème 5.1.7.** *L'application  $\ker(-) : \text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{R}}(n - d, \mathbb{R}^n)$ , qui associe à un épimorphisme  $f$  son noyau  $\ker(f)$  (qui est de dimension  $n - d$  par surjectivité de  $f$ ), est surjective et descend en un isomorphisme*

$$\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) / \text{GL}_d(\mathbb{R}) \simeq \text{Gr}_{\mathbb{R}}(n - d, \mathbb{R}^n) \quad (5.5)$$

où  $\text{GL}_k(\mathbb{R})$  agit par post-composition.

*Dualement,  $\text{im}(-) : \text{Mono}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Gr}_{\mathbb{R}}(n - d, \mathbb{R}^n)$  est surjective, qui associe à un monomorphisme  $f$  son image  $\text{im}(f)$  (qui est de dimension  $n - d$  par injectivité de  $f$ ), descend en un isomorphisme*

$$\text{Mono}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n) / \text{GL}_{n-d}(\mathbb{R}) \simeq \text{Gr}_{\mathbb{R}}(n - d, \mathbb{R}^n) \quad (5.6)$$

où  $GL_{n-d}(\mathbb{R})$  agit par pré-composition.

*Démonstration.* L'application  $\ker(-)$  est surjective car tout élément  $V$  de  $Gr(n-d, \mathbb{R}^n)$  induit un morphisme  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  par la composition

$$V \xleftarrow{i} \mathbb{R}^n \twoheadrightarrow \text{coker}(i) \simeq \mathbb{R}^d$$

dont le noyau est  $V$ . Il faut ensuite remarquer que

$$\ker(f) = \ker(g) \Leftrightarrow \exists P \in GL_d(\mathbb{R}), g = Pf$$

L'implication de la droite vers la gauche est immédiate et la deuxième se montre grâce au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\exists! P} & \mathbb{R}^d \\ [f] \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow [g] \\ \mathbb{R}^n / \ker(f) & \xrightarrow{=} & \mathbb{R}^n / \ker(g) \\ & \nwarrow \quad \nearrow & \\ & \mathbb{R}^n & \end{array}$$

Le deuxième cas se fait de la même façon. □

Les égalités (5.2) et (5.4) permettent de décrire des cartes de  $Gr(n-d, \mathbb{R}^n)$ . En effet, l'action de  $GL_d(\mathbb{R})$  sur  $\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  se restreint en une action sur  $\text{Epi}_I(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  (pour tout ensemble  $I$  de cardinal  $d$ ) et

**Lemme 5.1.8.** *On a un isomorphisme*

$$\varphi_I: \mathcal{U}_I := \text{Epi}_I(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) / GL_d(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{d(n-d)}$$

*Démonstration.* Soit  $I = \{i_1 < \dots < i_d\}$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, n\}$ . Notons  $I^c = \{i_1^c < \dots < i_{n-d}^c\}$ . Soit  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un élément de  $\text{Epi}_I(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  et notons  $M_f$  la matrice de la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}^I$ . Cette matrice est inversible par hypothèse sur  $I$ . Alors l'application  $M_f^{-1} \cdot f$  vérifie, pour tout  $j \in \{1, \dots, d\}$ ,

$$M_f^{-1} \cdot f(e_{i_j}) = e_j \tag{5.7}$$

On en déduit l'isomorphisme voulu :

$$[f] \mapsto (M_f^{-1}f(e_{i_1^c}), \dots, M_f^{-1}f(e_{i_{n-d}^c}))$$

L'inverse de  $\varphi_I$  associe à la famille  $v = (v_1, \dots, v_{n-d})$  de vecteurs de  $\mathbb{R}^d$  la classe d'équivalence de l'application linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{j=1}^d x_j e_{i_j} + \sum_{l=1}^{n-d} x_l v_{i_l^c}. \tag{5.8}$$

□

Cette démonstration nous montre que le morphisme  $\text{Epi}_I \rightarrow \mathcal{U}_I \subset Gr(n-d, \mathbb{R}^n)$  a une section  $s_{\text{Epi}, I}$  qui associe à  $W$  (donné par  $\varphi_I^{-1}$  par les vecteurs  $v_1, \dots, v_{n-d}$ ) le morphisme (5.8).

Passons aux cartes obtenues à partir de  $\text{Mono}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n)$  : pour tout  $I = \{i_1 < \dots < i_{n-d}\}$  de cardinal  $n-d$  (on notera  $i_1^c < \dots < i_d^c$  les éléments de  $I^c$ ), l'action de  $GL_{n-d}(\mathbb{R})$  sur  $\text{Mono}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n)$

se restreint en une action sur  $\text{Mono}_I(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n)$  et on obtient des isomorphismes

$$\psi_I : V_I := \text{Mono}_I(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n) / \text{GL}_{n-d}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{d(n-d)}$$

en remarquant que pour tout monomorphisme  $\lambda : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , il existe une (unique) matrice inversible  $M_\lambda$ , donnée par la matrice de la corestriction  $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $\lambda$ , telle que

$$(\lambda M_\lambda^{-1})_j(x_1, \dots, x_{n-d}) = x_{i_j}$$

pour tout  $j \in I$  et donc  $\psi_I$  est défini par

$$\psi_I([\lambda]) = ((\lambda M_\lambda^{-1})_{i_1^c}, \dots, (\lambda M_\lambda^{-1})_{i_d^c})$$

où on a identifié  $\mathbb{R}^{n-d}$  avec son dual. Le morphisme  $\psi_I^{-1}$  associe à  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_d) \in (\mathbb{R}^{n-d})^d$  la classe d'équivalence de l'application  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  définie par

$$\lambda_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} \langle \mathbf{x}, v_j \rangle & \text{if } k = i_j^c \\ x_i & \text{if } k = i_l \end{cases} \quad (5.9)$$

Comme dans le cas des épimorphismes, cette démonstration nous montre que le morphisme  $\text{Mono}_I \rightarrow V_I \subset \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$  a une section  $s_{\text{Mono}, I}$  qui associe à  $W$  (donné par  $\psi^{-1}$  par les vecteurs  $v_1, \dots, v_d$ ) le morphisme (5.9).

*Remarque 5.1.9.* Dans le cas des épimorphismes, les morphismes « modèles » sont ceux dont la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{d \times I} & \star \end{pmatrix}$$

et dans le cas des monomorphismes, ce sont ceux de la forme

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{I \times (n-d)} \\ \star \end{pmatrix}$$

En conclusion, on obtient :

**Proposition 5.1.10.** *La famille  $\{(U_I, \varphi_I)\}_{|I|=d}$  est un atlas de  $\text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$*

**Proposition 5.1.11.** *La famille  $\{(V_I, \psi_I)\}_{|I|=n-d}$  est un atlas de  $\text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$*

**Proposition 5.1.12.** *La composée  $\psi_{I^c}^{-1} \varphi_I$  est une transformée de Gale pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, n\}$  de cardinal  $d$ .*

*Démonstration.* Par définition, la transformée de Gale d'un épimorphisme  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  est la donnée d'un morphisme  $k : \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-d} \xrightarrow{k} \mathbb{R}^n \xrightarrow{h} \mathbb{R}^d \longrightarrow 0$$

est exacte. Ce qui est exactement le cas de l'application  $\psi_{I^c}^{-1} \varphi_I$  puisque  $\varphi_I$  est le passage au quotient de l'application noyau et  $\psi_I$  celle de l'application image (le quotient par  $\text{GL}_{n-d}(\mathbb{R})$  vient du fait que la transformée de Gale n'est pas unique).  $\square$

On peut montrer que la grassmannienne est une variété algébrique projective (voir [57] pour les détails) :

**Définition 5.1.13** (Plongement de Plücker). On appelle plongement de Plücker l'application  $\psi_{r,n} : \text{Gr}(r, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{RP}^{\binom{n}{r}-1}$  qui envoie un sous-espace vectoriel  $W$  de dimension  $r$  de  $\mathbb{R}^n$  de base  $v_1, \dots, v_r$  sur  $[v_1 \wedge \dots \wedge v_r]$ .

Ce morphisme  $\psi_{r,n}$  ne dépend pas du choix de la base. On peut même en donner une formule explicite : Soient  $W \in \text{Gr}(r, \mathbb{R}^n)$ ,  $\{v_1, \dots, v_r\}$  une base de  $W$  et  $P = (v_1, \dots, v_r) \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{R})$ . Alors

$$\psi_{r,n}(W) = \left[ \sum_{K=\{k_1 < \dots < k_r\}} \Delta_{K, \llbracket 1, r \rrbracket}(P) e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_r} \right],$$

où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et pour  $P = (v_i^j)$ ,  $\Delta_{I,J}(P)$  est le mineur  $\det((v_i^j)_{i \in I, j \in J})$

**Notation 5.1.14.** On note  $I(r, n)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  à  $r$  éléments que l'on aura ordonné.

Pour tout  $I, J \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ , on note le nombre d'inversion  $\iota(I, J) = \{(i, j) \in I \times J \mid i > j\}$ .

Enfin, les polynômes (homogènes) de Plücker  $\mathcal{P}_{I,J}$ , avec  $I \in I(r-1, n)$  et  $J = \{j_1 < \dots < j_r\} \in I(r+1, n)$ , sont données par :

$$\mathcal{P}_{I,J}(X) = \sum_{i, j_i \notin I} (-1)^{i+\iota(I, j_i)} X_{I \cup \{j_i\}} X_{J \setminus \{j_i\}} \in \mathbb{Z}[X_K, K \in I(r, n)]$$

**Théorème 5.1.15** ([57] The Plücker embedding). *Le morphisme  $\psi_{r,n}$  est un plongement et*

$$\psi_{r,n}(\text{Gr}(r, \mathbb{R}^n)) = \{p = [p_K]_{K \in I(r,n)} \in \mathbb{RP}^{\binom{n}{r}-1} \mid \forall I \in I(r-1, n), \forall J \in I(r+1, n), \mathcal{P}_{I,J}(p) = 0\}$$

**Exemple 5.1.16.** Si  $r = 2$  et  $n = 4$  alors il y a une équation :

$$p_{0,1}p_{2,3} - p_{0,2}p_{1,3} + p_{1,2}p_{0,3} = 0$$

**Exemple 5.1.17.** Si  $r = 3$  et  $n = 5$  alors il y a cinq équations indépendantes :

$$\begin{aligned} p_{3,4,5}p_{1,2,5} + p_{1,4,5}p_{2,3,5} - p_{2,4,5}p_{1,3,5} &= 0 \\ p_{3,4,5}p_{1,2,4} + p_{1,4,5}p_{1,3,4} - p_{2,4,5}p_{1,3,4} &= 0 \\ p_{3,4,5}p_{1,2,3} + p_{1,3,5}p_{1,3,4} - p_{2,3,5}p_{1,3,4} &= 0 \\ p_{2,4,5}p_{1,2,3} + p_{1,2,5}p_{1,3,4} - p_{2,3,5}p_{1,2,4} &= 0 \\ p_{1,4,5}p_{1,2,3} + p_{1,2,5}p_{1,3,4} - p_{1,3,5}p_{1,2,4} &= 0 \end{aligned}$$

La variété  $\text{Gr}(3, \mathbb{R}^5)$  (qui est de dimension 6) n'est donc pas une intersection complète dans  $\mathbb{P}^9$ .

## 5.2 Passage au quotient des actions de groupes

Cette section sera dédiée à continuer l'étude de la section 2.7 des actions de groupes sur les champs quotients  $[X/G]$  et plus précisément, des actions de groupes qui ne sont pas  $G$ -équivariantes (cf. la proposition 2.7.2.9) mais qui vérifient tout de même une condition plus faible de compatibilité que l'on retrouve dans les sections la section 5.4 et la section 5.5.

On va commencer par un résultat général de descente au quotient de fonctions :

**Théorème 5.2.1.** Soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur une variété  $X$ . Soit  $f : X \rightarrow X$  une application lisse telle qu'il existe une application lisse  $K : X \rightarrow \text{Aut}(G)$  telle que

$$\forall x \in X, \forall g \in G, f(g \cdot x) = K(x)(g)f(x). \quad (5.10)$$

Alors  $f$  descend en un morphisme de champs  $[X/G] \rightarrow [X/G]$ .

*Démonstration.* Par la propriété universelle (2.22), il suffit de montrer que l'application  $\pi f : X \rightarrow [X/G]$  (où  $\pi$  est la projection  $X \rightarrow [X/G]$ ) est invariante par l'action de  $G$  i.e. on a le diagramme 2-commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X \times G & \xrightarrow{\text{act}} & X \\ (\pi f, \text{id}) \downarrow & \searrow & \downarrow \pi f \\ [X/G] \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & [X/G] \end{array} \quad (5.11)$$

Par Yoneda, il suffit de démontrer que les fibrés  $(X \times G)_{\pi f \text{ act}} \times_{\pi} X \rightarrow X \times G$  et  $(X \times G)_{(\pi f, \text{id}) \text{ act}} \times_{\pi} X \rightarrow X \times G$  sont isomorphes de façon compatible avec la projection sur  $X$ .

La première étape pour calculer ses produits fibrés est le calcul de  $X_{\pi f} \times_{\pi} X$  :

$$\begin{array}{ccccc} X \times G & \xrightarrow{f \times \text{id}} & X \times G & \xrightarrow{\text{act}} & X \\ \text{pr}_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{pr}_1 & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\pi} & [X/G] \end{array} \quad (5.12)$$

Le produit fibré de droite est le résultat classique utilisé pour donner une présentation par groupoïde d'un champ quotient  $[X/G]$  et le deuxième est le tiré-en-arrière d'un fibré trivial par  $\text{act}$ . Dans la suite, on notera  $\alpha$  le morphisme défini par :

$$\forall g \in G, \forall x \in X, \alpha(g, x) = g \cdot f(x)$$

On peut maintenant calculer les deux produits fibrés voulus :

$$\begin{array}{ccccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\text{act} \times \text{id}} & X \times G & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \text{pr}_{1,2} \downarrow & \lrcorner & \downarrow \text{pr}_1 & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X \times G & \xrightarrow{\text{act}} & X & \xrightarrow{\pi f} & [X/G] \end{array}$$

(Le produit fibré à droite est donné par (5.12) et le deuxième est le tiré-en-arrière d'un fibré trivial par  $f$ ) et

$$\begin{array}{ccccc} X \times G \times G & \xrightarrow{\alpha \times \text{id}} & X \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & X \\ \text{pr}_{1,3} \downarrow & \lrcorner & \downarrow \pi \times \text{id} & \lrcorner & \downarrow \pi \\ X \times G & \xrightarrow{\pi f \times \text{id}} & [X/G] \times G & \xrightarrow{\text{pr}_1} & [X/G] \end{array}$$

Le produit fibré à droite est le tiré-en-arrière du fibré trivial par  $\pi$  et celui de gauche est donné par (5.12). Notons  $m_1$  le morphisme

$$(x, g, h) \mapsto \alpha \circ (\text{act} \times \text{id})(x, g, h) = h \cdot f(g \cdot x)$$

et  $m_2$  le morphisme

$$(x, g, h) \mapsto \text{pr}_1 \circ (\alpha \times \text{id})(x, g, h) = g \cdot f(x).$$

Posons  $\Phi$  le morphisme  $X \times G \times G \rightarrow X \times G \times G$  défini par :

$$\forall (x, g, h) \in X \times G \times G, \Phi(x, g, h) = (x, hK(x)(g), h).$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \nearrow m_1 & & \nwarrow m_2 & \\
 X \times G \times G & \xrightarrow{\Phi} & X \times G \times G & \xrightarrow{\Phi} & X \times G \times G \\
 & \searrow \text{pr}_{1,2} & & \swarrow \text{pr}_{1,3} & \\
 & & X \times G & & 
 \end{array}$$

commute. En effet, le triangle inférieur est clairement commutatif et pour montrer la commutativité du deuxième, on utilise les égalités suivantes :

$$\forall (x, g, h) \in X \times G \times G, m_2(\Phi(x, g, h)) = m_2(x, hK(x)(g), h) \quad (5.13)$$

$$= hK(x)g \cdot f(x) \quad (5.14)$$

$$= hf(g \cdot x) = m_1(x) \quad (5.15)$$

Le passage de la ligne (5.14) à la ligne (5.15) se fait grâce à l'égalité (5.10).

On en déduit donc que le diagramme (5.11) est 2-commutatif ce qui permet de conclure.  $\square$

Considérons maintenant le cas qui nous intéresse :

Soit  $X$  une  $G$ -variété et  $H$  un groupe de Lie agissant sur  $X$  tel que pour tout  $\gamma \in H$ , il existe  $K_\gamma : X \rightarrow \text{Aut}(G)$  tel que

$$\forall x \in X, \forall \gamma \in H, \forall g \in G, \gamma \cdot (gx) = K_\gamma(x)(g)\gamma \cdot x$$

Alors pour toute paire  $(\gamma, \gamma') \in H^2$ , on a :

$$\gamma' \circ \gamma(gx) = \gamma'(K_\gamma(x)(g) \cdot (\gamma \cdot x)) = K_{\gamma'}(\gamma \cdot x)(K_\gamma(x)(g)) \cdot (\gamma' \gamma \cdot x) \quad (5.16)$$

On remarque que le membre de droite dépend de  $\gamma$  et  $\gamma'$  mais pas de leur produit. Cela fait que a priori les descentes au quotient des  $\sigma$  ne forment pas, en général, une action de groupes.

**Proposition 5.2.2.** *Supposons que*

$$\forall x \in X, \forall g \in X, \forall \gamma, \gamma' \in H, K_{\gamma'}(x)(K_\gamma(x)(g)) = K_{\gamma\gamma'}(x)(g) \quad (5.17)$$

*Alors la descente au quotient de l'action de  $H$  est une action de groupe sur  $[X/G]$ .*

*Démonstration.* La condition sur le neutre est claire par passage au quotient de l'identité et les égalités (5.16), (5.17) (et la preuve du [théorème 5.2.1](#)) donnent les isomorphismes

$$\forall \gamma, \gamma' \in H, \forall x : S \rightarrow [X/G], \gamma' \cdot (\gamma \cdot x) \Rightarrow \gamma\gamma' \cdot x.$$

$\square$



### 5.3 Notations

Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail simplicial de  $\mathbb{R}^d$  ayant au moins un cône de dimension  $d$ . Dans la suite, nous noterons

- $p$  le nombre de 1-cônes de  $D$  (on a donc une injection  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D) \hookrightarrow \mathfrak{S}_p$ );
- $n \geq d$  le nombre total de cônes (les éléments de  $[[p+1, n]]$  seront les générateurs virtuels);
- $\Omega = \Omega(D)$  l'ouvert de  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  des configurations  $D$ -réalisables;
- $G$  le groupe  $\text{Aut}_{\text{Poset}}(D) \times \mathfrak{S}_{n-p} \hookrightarrow \mathfrak{S}_n$
- $\mathcal{M} = \mathcal{M}(d, n, D)$  l'espace de modules des champs toriques quantiques de configuration  $D$  et de générateurs virtuels  $[[p+1, n]]$  i.e. le champ différentiel

$$\mathcal{M} = [\Omega/G]$$

où  $G$  agit sur  $\Omega$  par

$$(\sigma, \tau) \cdot ((v_i)_{d+1 \leq i \leq p}, (v_j)_{p+1 \leq j \leq n}) = ((L_\sigma v_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq p}, (v_{\tau(j)})_{p+1 \leq j \leq n}) \quad (5.18)$$

(où  $v_i = e_i$  pour  $1 \leq i \leq d$  et  $L_\sigma = (v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(d)})^{-1} \in \text{GL}_d(\mathbb{R})$ )

- Notons  $\mathcal{S}$  la variété torique quasi-affine donnée par le type combinatoire  $D$  i.e.

$$\mathcal{S} := \bigcup_{I \in D} \mathbb{C}^{I^c} \times (\mathbb{C}^*)^I \quad (5.19)$$

Autrement dit, chaque point de  $\mathcal{M}$  représente un quotient de  $\mathcal{S}$ .

### 5.4 Familles universelles

Dans cette section, nous allons décrire la famille universelle de champs toriques quantiques associée à  $\mathcal{M}$ . La première étape sera de plonger  $\Omega$  dans la grassmannienne. Ce plongement aura deux conséquences : la première est de simplifier l'action (5.18) du groupe  $G$  sur l'image de  $\Omega$  et la deuxième est d'induire une compactification naturelle puisque la grassmannienne est une variété compacte.

Nous allons donc considérer le morphisme  $\iota$  défini par la composition

$$\mathbb{R}^{d(n-d)} \xrightarrow[\simeq]{\Phi_{[[1, d]]}^{-1}} \text{Epi}_{[[1, d]]}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d) / \text{GL}_d(\mathbb{R}) \xrightarrow{\ker(-)} \text{Gr}_{\mathbb{R}}(n-d, \mathbb{R}^n)$$

Autrement dit, le morphisme qui associe à  $(v_1, \dots, v_{n-d}) \in \mathbb{R}^{d(n-d)}$  le noyau de l'application linéaire

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \sum_{i=1}^d x_i e_i + \sum_{i=d+1}^n x_{i-d} v_i \in \mathbb{R}^d$$

**Lemme 5.4.1.** *Ce morphisme est une immersion ouverte  $G$ -équivariante pour l'action (5.18) à gauche et l'action définie par, pour  $V^{n-d}$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  et  $(\sigma, \tau) \in G$ ,*

$$(\sigma, \tau) \cdot V = \begin{pmatrix} P_\sigma^{-1} & 0 \\ 0 & P_\tau^{-1} \end{pmatrix} V \quad (5.20)$$

(où, pour  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ ,  $P_\sigma = (\delta_{i\sigma(j)})_{1 \leq i, j \leq p} \in \text{GL}_p(\mathbb{R})$ ) à droite.

*Démonstration.* À isomorphismes près (donné par la carte  $\varphi_{[[1,d]]}$  et (5.5)), c'est l'inclusion  $\text{Epi}_I \hookrightarrow \text{Epi}$ . Un isomorphisme d'éventails quantiques est donné par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^n \\ \mathfrak{h} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{h}' \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{L} & \mathbb{R}^d \end{array} \quad (5.21)$$

où  $L$  et  $H$  sont des isomorphismes linéaires (vérifiant des propriétés sur les réseaux). Comme le morphisme  $H$  envoie les cônes de  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  sur ceux de  $\Delta_{\mathfrak{h}'}$ , il permute les générateurs des cônes et peut donc s'écrire sous la forme (5.20) pour une paire  $(\sigma, \tau)$  bien choisie. Le morphisme  $L$  est entièrement déterminé par la permutation  $\sigma$  et est égal à la matrice  $L_{\sigma}$  de l'action (5.18). Par le diagramme (5.21), on obtient l'égalité

$$\ker(\mathfrak{h}') = H(\ker(\mathfrak{h}))$$

(car  $L$  est un isomorphisme). Autrement dit, on a

$$\ker((\sigma, \tau) \cdot \mathfrak{h}) = (\sigma, \tau) \cdot \ker(\mathfrak{h})$$

où à gauche, c'est l'action (5.18). Autrement dit, le morphisme  $\iota$  est  $G$ -équivariant.  $\square$

On notera encore  $\Omega$  l'image de  $\Omega$  par  $\iota$ . Ainsi, on peut interpréter  $\mathcal{M}$  comme un sous-champ ouvert de  $[\text{Gr}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{n} - d, \mathbb{R}^n)/G]$ .

**Notation 5.4.2.** Dans la suite, on notera  $[k]$  un élément de la grassmannienne vu comme une classe d'équivalence de morphismes  $\mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $[\mathfrak{h}]$  un élément de la grassmannienne vu comme une classe d'équivalence de morphismes  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  (on passe de l'un à l'autre par transformation de Gale cf. la proposition 5.1.12). On identifiera donc l'ouvert  $\mathcal{U}_I$  et l'ouvert  $\mathcal{V}_I$  de  $\text{Gr}(\mathfrak{n} - d, \mathbb{R}^n)$

En remontant cette action par les sections  $s_{\text{Epi},I}$  et  $s_{\text{Mono},I}$ , on obtient le résultat suivant :

**Lemme 5.4.3.** *L'action de  $G$  sur la grassmannienne vient du passage au quotient des actions de  $G$  sur  $\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$  et  $\text{Mono}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n)$ , définie respectivement par*

$$(\sigma, \tau) \cdot \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \begin{pmatrix} P_{\sigma} & 0 \\ 0 & P_{\tau} \end{pmatrix}$$

et

$$(\sigma, \tau) \cdot k = \begin{pmatrix} P_{\sigma}^{-1} & 0 \\ 0 & P_{\tau}^{-1} \end{pmatrix} k$$

*Démonstration.* Cela vient du diagramme (5.21) et du fait que l'on considère le noyau de  $\mathfrak{h}$  et l'image de  $k$ .  $\square$

**Notation 5.4.4.** Pour tout  $I$  de cardinal  $\mathfrak{n} - d$  et tout élément  $[k] \in \Omega' \cap \mathcal{U}_I =: \Omega_I$ , on peut définir une action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathcal{S}$  :

$$\mathfrak{t} \cdot_k z := E(s_{\text{Mono},I}([k])(\mathfrak{t}))z$$

On peut faire cette construction en famille en considérant le quotient

$$\mathcal{X}_I = [\mathcal{S} \times \Omega_I / \mathbb{C}^{n-d}] \quad (5.22)$$

où l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathcal{S} \times \Omega_I$  est définie par

$$\mathfrak{t} \cdot (z, k) = (E(s_{\text{Mono},I}([k])(\mathfrak{t}))z, k)$$

On notera en particulier  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{[[d+1, n]]} = [\mathcal{S} \times \Omega / \mathbb{C}^{n-d}]$ .

La projection sur la deuxième coordonnée  $\mathcal{S} \times \Omega_I \rightarrow \Omega_I$  (qui est  $\mathbb{C}^{n-d}$ -invariante) descend au quotient en un morphisme

$$\mathcal{X}_I \rightarrow \Omega_I$$

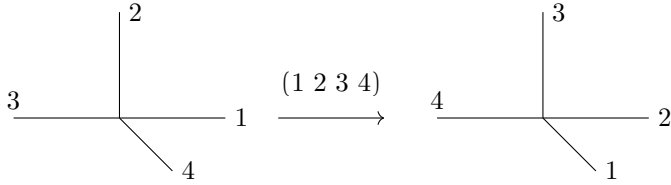
**Lemme 5.4.5.** *Soit  $I$  un ensemble de la forme  $[[1, n]] \setminus \sigma \cdot [[1, d]]$  où  $\sigma \in G$ . L'action du groupe  $G$  sur la grassmannienne  $\text{Gr}(n-k, \mathbb{R}^n)$  se restreint en une action sur  $\Omega_I$ .*

*Démonstration.* Soient  $\sigma \in G$  et  $[h] \in \Omega_I$ . L'ouvert  $\Omega_I$  est stable par  $G$  si, et seulement si, pour tout  $\tau \in G$ , la matrice représentative de  $h \circ \tau|_{\mathbb{R}^c}$  est inversible. Cela est équivalent à demander que la matrice représentative de  $h \circ \tau\sigma|_{\mathbb{R}^d}$  est inversible, ce qui est toujours vrai par définition de  $G$  (puisque l'action de  $\tau\sigma \in G$  envoie le cône  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_d)$  sur un cône simplicial de dimension  $d$ ).  $\square$

*Remarque 5.4.6.* Cela n'est pas vrai pour un  $I$  général. Prenons le cas suivant :  
Soit  $h : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par :

$$h(e_1) = e_1, \quad h(e_2) = e_2, \quad h(e_3) = -e_1, \quad h(e_4) \in \mathbb{R}_{\neq 0} \times \mathbb{R}_{<0}$$

Alors  $[h] \in \Omega_{\{2,4\}}$  et  $(1 \ 2 \ 3 \ 4) \cdot [h] \notin \Omega_{\{2,4\}}$ .



Jusqu'à la fin de cette section, on supposera que  $I = \{i_1 < \dots < i_{n-d}\}$  est de la forme  $[[1, n]] \setminus \sigma \cdot [[1, d]]$ . Cette action s'étend sur  $\Omega_I \times \mathcal{S}$  par :

$$\sigma \cdot (k, z) = (\sigma \cdot [k], (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)})) \quad (5.23)$$

car  $\sigma \in G$ .

Dans la suite, on va voir comment cette action descend au quotient. La proposition 5.4.8 montre que cela n'est pas trivial car cette action n'est pas  $G$ -invariante. Cependant, grâce aux résultats de la section 5.2, on va pouvoir tout de même réussir à le faire.

**Lemme 5.4.7.** *Pour tout  $[k] \in \Omega_I$  et tout  $\sigma \in G$ , on a :*

$$\sigma_{\text{Mono}, I}(\sigma \cdot [k]) = (\sigma \cdot (\sigma_{\text{Mono}, I}([k]))) \circ K_{\sigma, I}^{-1}([k]) \quad (5.24)$$

où  $K_{\sigma, I}([k]) = ((\sigma_{\text{Epi}, I}([k]))_{i_m} (e_{\sigma(j)}))_{1 \leq j, m \leq n-d} \in \text{GL}_{n-d}(\mathbb{R})$

*Démonstration.* Soient  $[k] \in \Omega_I$ ,  $k = s_{\text{Mono}, I}([k])$  et  $\sigma \in G$ . Par définition, le morphisme  $\sigma \cdot k = (k_{\sigma(1)}, \dots, k_{\sigma(n)})$  est dans l'orbite de  $\sigma \cdot k \circ K_{\sigma, I}([k])^{-1}$  qui est dans l'image de  $s_{\text{Mono}, I}$  (par construction de  $K_{\sigma, I}([k])$ ). Par conséquent,

$$s_{\text{Mono}, I}(\sigma \cdot [k]) = \sigma \cdot k \circ K_{\sigma, I}([k])^{-1} = \sigma \cdot s_{\text{Mono}, I}([k]) \circ K_{\sigma, I}([k])^{-1}$$

$\square$

**Proposition 5.4.8.** *Pour tout  $[k] \in \Omega_I$ , tout  $z \in \mathcal{S}$ , tout  $t \in \mathbb{C}^{n-d}$  et tout  $\sigma \in G$ ,*

$$\sigma \cdot (k, t \cdot z) = (K_{\sigma, I}([k])t) \cdot (\sigma \cdot (k, z))$$

*Démonstration.* Soient  $[k] \in \Omega_I$ ,  $z \in \mathcal{S}$ ,  $t \in \mathbb{C}^{n-d}$  et  $\sigma \in G$ . Alors, en notant  $z_\sigma$  le point  $(z_{\sigma_1}, \dots, z_{\sigma(n)})$ , on a, grâce à [lemme 5.4.7](#) :

$$\begin{aligned} (K_{\sigma,I}([k])t) \cdot (\sigma \cdot ([k], z)) &= (K_{\sigma,I}([k])t) \cdot ([k_\sigma], z_\sigma) \\ &= (k_\sigma, E(s_{\text{Mono},I}([k_\sigma]))(K_{\sigma,I}([k])t))z_\sigma \\ &= \sigma \cdot (k, E(s_{\text{Mono},I}([k]))(t))z = \sigma \cdot (t \cdot (k, z)) \end{aligned}$$

□

Les matrices  $K_{\sigma,I}$  ont une relation de cocycle de la forme [\(5.17\)](#) :

**Proposition 5.4.9.** *Soit  $I$  un ensemble de cardinal  $n - d$ ,  $\sigma, \tau \in G$  et  $[k] \in \Omega_I$ .*

$$K_{\sigma,I}(\tau \cdot [k])(K_{\tau,I}([k])) = K_{\sigma\tau,I}([k]) \quad (5.25)$$

*Démonstration.* Par [\(5.24\)](#), pour tout  $[k] \in \Omega_I$  et tout  $\sigma, \tau \in G$ , on a :

$$\begin{aligned} (\sigma\tau s_{\text{Mono},I}([k]))K_{\sigma\tau,I}^{-1} &= s_{\text{Mono},I}(\sigma\tau \cdot [k]) \\ &= \sigma \cdot s_{\text{Mono},I}(\tau \cdot [k])K_{\sigma,I}(\tau \cdot [k])^{-1} \\ &= \sigma\tau \cdot s_{\text{Mono},I}([k])K_{\tau,I}([k])^{-1}K_{\sigma,I}(\tau \cdot [k])^{-1} \end{aligned}$$

Par injectivité de  $k$ , on obtient

$$K_{\sigma\tau,I}^{-1} = K_{\tau,I}([k])^{-1}K_{\sigma,I}(\tau \cdot [k])^{-1}$$

En passant à l'inverse l'égalité précédente, on obtient l'égalité voulue

□

On déduit de ces deux résultats, du [théorème 5.2.1](#) et de [la proposition 5.2.2](#) le résultat suivant :

**Proposition 5.4.10.** *L'action de  $\sigma$  sur  $\Omega_I$  descend au quotient en une action sur  $\mathcal{X}_I$ .*

De plus, la projection  $\mathcal{X}_I \rightarrow \Omega_I$  est  $G$ -équivariante. Elle passe donc au quotient :

$$\mathcal{X}_I/G \rightarrow [\Omega_I/G] \quad (5.26)$$

**Définition 5.4.11.** La projection

$$\mathcal{X}/G \rightarrow [\Omega_{\llbracket d+1, n \rrbracket}/G] \simeq \mathcal{M} \quad (5.27)$$

est la famille universelle de champs toriques quantiques de type combinatoire  $D$ .

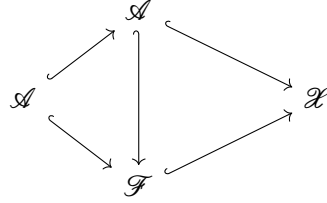
## 5.5 Compactifications

Dans cette section, nous allons construire une compactification naturelle de  $\mathcal{M}$  i.e. décrire un champ  $\overline{\mathcal{M}}$  qui contient  $\mathcal{M}$  comme ouvert dense avec une famille  $\overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}$  qui étend la famille [\(5.27\)](#).

### 5.5.1 Compactification de l'espace de modules

**Définition 5.5.1.1.** Soit  $\mathcal{A}$  un sous-champ d'un champ topologique  $\mathcal{X}$ . L'adhérence  $\overline{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  est le champ fermé vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour tout sous-champ fermé  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{X}$  contenant  $\mathcal{A}$ , il existe un monomorphisme  $\overline{\mathcal{A}} \hookrightarrow \mathcal{F}$  qui fait (2-)commuter le diagramme suivant :



Grâce à la correspondance entre les sous-champs fermés de  $[X/G]$  et les fermés de  $X$   $G$ -invariants, on en déduit

**Proposition 5.5.1.2.** *Soit  $A$  un sous-ensemble de  $X$  qui est  $G$ -invariant et notons  $\overline{A}$  l'adhérence  $G$ -invariante de  $A$  dans  $X$  i.e. le plus petit fermé  $G$ -invariant contenant  $A$ . Alors l'adhérence de  $[A/G]$  est  $[\overline{A}/G]$ .*

Lorsque  $G$  est fini (ce qui sera notre cas), on a une description explicite de l'adhérence  $G$ -invariante :

**Lemme 5.5.1.3.** *Soit  $G$  un groupe fini,  $X$  un espace topologique muni d'une action continue de  $G$  et  $A$  un sous-ensemble  $G$ -invariant de  $X$ . Alors l'adhérence  $G$ -invariante de  $A$  dans  $X$  est le fermé*

$$\bigcup_{g \in G} g \cdot \text{Adh}(A)$$

où  $\text{Adh}(A)$  est l'adhérence de  $A$  dans  $X$

*Démonstration.* Comme  $G$  est fini et que l'application  $x \mapsto g \cdot x$  est un homéomorphisme alors

$$\text{Adh} \left( \bigcup_{g \in G} g \cdot A \right) = \bigcup_{g \in G} \text{Adh}(g \cdot A) = \bigcup_{g \in G} g \cdot \text{Adh}(A) \quad (5.28)$$

Par définition de l'adhérence, cet ensemble est inclus dans l'adhérence  $G$ -invariante  $\overline{A}$ . De plus, l'égalité (5.28) implique qu'il est  $G$ -invariant, ce qui permet de montrer l'égalité

$$\overline{A} = \bigcup_{g \in G} g \cdot \text{Adh}(A)$$

□

Supposons que  $\mathcal{X} = [X/G]$  soit un champ différentiel quotient et  $\mathcal{A} = [A/G]$  un sous-champ ouvert de  $\mathcal{X}$ . Alors l'adhérence  $\overline{\mathcal{A}} = [\overline{A}/G]$  de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{X}$  (vus tous les deux comme des champs au-dessus de  $\mathfrak{Top}$ ) peut être vue comme un champ au-dessus de  $\mathfrak{VarDiff}$  en voyant l'adhérence  $\overline{A} \xrightarrow{j} X$  comme l'espace difféologique  $j^*X$  (cf. l'exemple 2.1.3.7) et donc comme un faisceau sur  $\mathfrak{VarDiff}$  et  $\overline{A} = [\overline{X}/G]$  comme le champ quotient  $j^*\overline{X}/G$  (cf. théorème 2.7.2.3).

**Définition 5.5.1.4.** On appelle adhérence topologique du champ différentiel  $\mathcal{A} = [A/G]$  dans le champ différentiel  $\mathcal{X} = [X/G]$  le champ  $j^*\overline{X}/G$  défini sur  $\mathfrak{VarDiff}$ .

Soit  $\overline{\Omega}$  l'adhérence  $G$ -invariante de  $\Omega$  dans  $\text{Gr}_{\mathbb{R}}(n-d, \mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 5.5.1.5.** *L'espace  $\overline{\Omega}$  est un fermé semi-algébrique connexe de  $\text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$  (vu comme sous-variété réelle de  $\mathbb{R}^{n^2}$ , cf. [16, Théorème 3.4.4]).*

*Démonstration.* L'adhérence d'un ensemble semi-algébrique étant semi-algébrique (voir [16, Proposition 2.2.2]),  $\overline{\Omega} \cap \mathbf{U}_i$  est un ensemble semi-algébrique de  $\mathbf{U}_i \simeq \mathbb{R}^{d(n-d)}$  que l'on peut plonger (algébriquement) dans  $\mathbb{R}^{n^2}$ . En prenant l'union (qui est finie) sur les  $I$ , on en déduit que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_I \overline{\Omega} \cap \mathbf{U}_i$$

est un semi-algébrique.

La connexité de  $\overline{\Omega}$  vient de celle de  $\Omega$  (car on est dans le cas simplicial, voir la proposition 4.2.6).  $\square$

Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Proposition 5.5.1.6.** *Soit  $\varepsilon = \det_D(\mathbf{h}) \in \{\pm 1\}^{\Delta_{\max}}$  avec  $\mathbf{h} \in \Omega$  (cela ne dépend pas du choix de  $\mathbf{h}$  dans  $\Omega$ ) de telle sorte que*

$$\Omega = \{\mathbf{h} = (\mathbf{h}_{d+1}, \dots, \mathbf{h}_n) \in \mathbb{R}^{d(n-d)} \mid \forall I \in \mathbf{D}_{\max}, \text{sign} \det(\mathbf{h}_{d+1}, \dots, \mathbf{h}_n) = \varepsilon_I\}$$

Le fermé  $\overline{\Omega}$  (plongé dans  $\mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{R}^n)$  par le plongement de Plücker) est une composante connexe de

$$\left\{ [\mathbf{p}_I] \in \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n) \leftrightarrow \mathbb{P} \left( \bigwedge^r \mathbb{R}^n \right) \mid \forall I, J \in \mathbf{D}_{\max}, \text{sign}(\mathbf{p}_I \mathbf{p}_J) \in \overline{\varepsilon_I \varepsilon_J} \right\} \quad (5.29)$$

avec égalité si (5.29) est connexe (ici,  $\text{sign}(x) \in \overline{1}$  veut dire que  $x \geq 0$  et  $\text{sign}(x) \in \overline{-1}$  veut dire  $x \leq 0$ ).

*Remarque 5.5.1.7.* Les signes qui apparaissent sont bien définis car changer de représentant  $\lambda \mathbf{p} \simeq \mathbf{p}$  multiple par  $\lambda^2$  et ne change pas le signe.

*Démonstration.* Notons  $F$  le membre de droite. C'est un fermé de  $\mathbb{P}(\bigwedge^r \mathbb{R}^n)$ . De plus, on a une injection

$$\Omega \hookrightarrow F$$

car  $\{1, \dots, d\}$  est un cône maximal de  $\mathbf{D}$  et que le déterminant associé  $\mathbf{p}_{1, \dots, d}$  est  $1 \geq 0$ . Les autres équations sont immédiatement vérifiées.  $\square$

## 5.5.2 Construction de l'extension de la famille universelle

Le but de cette section est d'étendre la famille universelle (5.27) en une famille au-dessus de  $[\overline{\Omega}/G]$ . Notons  $\overline{\Omega}_I$  l'intersection  $\overline{\Omega} \cap \mathbf{U}_I$  ou encore l'adhérence de  $\Omega_I = \Omega \cap \mathbf{U}_I$  dans  $\mathbf{U}_I \simeq \mathbb{R}^{d(n-d)}$ . Le fermé  $\overline{\Omega}_I \setminus \Omega_I$  correspond aux configurations de vecteurs qui ne sont plus  $\mathbf{D}$ -admissibles car certains cônes de  $\mathbf{D}$  ne sont plus fortement convexes. Pour résoudre ce problème, nous allons considérer des types combinatoires « dégénérés » issus de  $\mathbf{D}$  i.e. des types combinatoires où on a enlevé les cônes qui ne sont plus fortement convexes pour une calibration  $\mathbf{h} \in \Omega(\mathbf{D})$ . Plus précisément,

**Définition 5.5.2.1.** Soit  $\mathbf{D}$  un type combinatoire d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$ . Un type combinatoire dégénéré issu de  $\mathbf{D}$  est un sous-ensemble partiellement ordonné  $\mathbf{D}'$  de  $\mathbf{D}$  qui a les mêmes 1-cônes que  $\mathbf{D}$ , qui est stable par intersection (i.e. si  $\sigma, \tau \in \mathbf{D}'$  alors  $\sigma \cap \tau \in \mathbf{D}'$ ), qui vérifie

$$\forall \sigma \in \mathbf{D}', \forall \tau \in \mathbf{D}, \tau \leq \sigma \Rightarrow \tau \in \mathbf{D}'$$

(pour abrégé, on dira que l'ensemble partiellement ordonné  $\mathbf{D}'$  est stable « par passage aux faces », par analogie avec les cônes des éventails) et dont les maxima des cardinaux des éléments de ces deux types combinatoires sont égaux.

**Exemple 5.5.2.2.** Soit  $D$  le type combinatoire de l'éventail  $\Delta$  du plan projectif i.e.

$$D = (1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\})$$

Alors les types combinatoires dégénérés issus de  $D$  sont les ensembles partiellement ordonnés suivants :

$$D'_1 = (1, 2, 3, \{1, 2\}, \{3, 1\})$$

$$D'_2 = (1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\})$$

$$D'_3 = (1, 2, 3, \{2, 3\}, \{3, 1\})$$

$$D'_{1,2} = (1, 2, 3, \{1, 2\})$$

$$D'_{2,3} = (1, 2, 3, \{2, 3\})$$

$$D'_{3,1} = (1, 2, 3, \{3, 1\})$$

Ces types combinatoires dégénérés correspondent à des sous-familles de cônes de  $\Delta$  où certains cônes ne sont plus fortement convexes et donc on a dû les enlever afin d'avoir un éventail. Par exemple, pour le type combinatoire  $D'_1$ , on obtient des éventails de la forme (5.1).

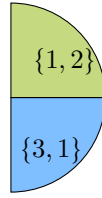


FIGURE 5.1 – Éventail associé à  $D'_1$

**Lemme 5.5.2.3.** *Un type combinatoire dégénéré d'un type combinatoire simplicial est simplicial.*

*Démonstration.* Cela vient de la proposition 3.4.2.8. □

Par la définition de  $\mathcal{S}$  donnée dans (5.19), on a :

**Lemme 5.5.2.4.** *Si  $D'$  est un type combinatoire dégénéré issu de  $D$  alors*

$$\mathcal{S}(D') = \mathcal{S}(D) \setminus \bigcup_{\sigma \in D \setminus D'} \mathbb{T}^{\sigma^c} \times 0^\sigma \quad (5.30)$$

$$= \mathcal{S}(D) \setminus \bigcup_{\sigma \in D \setminus D'} \mathbb{C}^{\sigma^c} \times 0^\sigma \quad (5.31)$$

*Démonstration.* L'égalité (5.30) vient de la définition de  $\mathcal{S}$ . L'égalité (5.31) se déduit de (5.30) en utilisant le fait que  $D'$  est stable par passage aux faces et donc si  $\sigma \notin D'$  alors tout cône contenant  $\sigma$  n'est pas dans  $D'$ . Alors

$$\bigcup_{\sigma \in D \setminus D'} \mathbb{T}^{\sigma^c} \times 0^\sigma = \bigcup_{\sigma \in D \setminus D'} \bigcup_{\tau \geq \sigma} \mathbb{T}^{\tau^c} \times 0^\tau = \bigcup_{\sigma \in D \setminus D'} \mathbb{C}^{\sigma^c} \times 0^\sigma$$

□

*Remarque 5.5.2.5.* Le champ torique quantique obtenu comme quotient de  $\mathcal{S}(\Delta')$  peut ne pas partager les mêmes propriétés. En particulier, si un générateur d'un cône tend vers 0 alors on perd la compacité (car les éventails ne sont plus complets) ou si un 1-cône d'un cône converge vers un autre 1-cône alors

on obtient un champ non-séparé (voir la remarque 3.4.2.17). On verra des exemples de cela dans la section 5.6.

Soit  $\mathbf{h} \in \overline{\Omega_I} \setminus \Omega_I$  et soit  $D'(\mathbf{h})$  le type combinatoire dégénéré maximal pour lequel  $\mathbf{h}$  est  $D'$ -admissible (i.e. le type combinatoire dégénéré issu de  $D$  où on a enlevé tous les cônes non fortement convexes).

**Lemme 5.5.2.6.** *On a l'égalité suivante*

$$D'(\mathbf{h}) = D \setminus \{\sigma \in D \mid \dim \text{Vect}(\mathbf{h}(e_i), i \in \sigma) < |\sigma|\}$$

*Démonstration.* Le type combinatoire  $D'$  est obtenu de  $D$  en enlevant les éléments  $I$  de  $D$  où  $\text{Cone}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)$  n'est pas fortement convexe. Comme  $D$  est simplicial, cette condition est équivalente au fait que la dimension de l'espace engendré par les  $\mathbf{h}(e_i), i \in I$  est strictement inférieure au cardinal de  $I$ .  $\square$

La fibre de la famille universelle au-dessus du point  $\mathbf{h}$  doit être un quotient de  $\mathcal{S}(D'(\mathbf{h}))$ . On définit donc :

$$E_I := \{(\mathbf{h}, z) \in \overline{\Omega} \times \mathcal{S} \mid z \in \mathcal{S}(D'(\mathbf{h}))\} \quad (5.32)$$

et

$$E_{IJ} := E_I \cap (U_J \times \mathcal{S}). \quad (5.33)$$

En utilisant l'égalité (5.31) et du lemme 5.5.2.6, on obtient

**Lemme 5.5.2.7.** *On peut écrire  $E_I$  sous la forme suivante :*

$$E_I = \{(\mathbf{h}, z) \mid \forall \sigma \in D, \dim \text{Vect}(\mathbf{h}(e_i), i \in \sigma) < |\sigma| \Rightarrow (z_i, i \in \sigma) \neq 0\}$$

On définit une action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $E_I \subset U_I \times \mathcal{S}$  par :

$$t \cdot ([k], z) = ([k], E(s_{\text{Mono}, I}([k])(t))z) \quad (5.34)$$

La projection  $\pi : E_I \rightarrow \overline{\Omega_I}$  est invariante et descend donc au quotient :

$$\rho_I : \overline{\mathcal{X}}_I := [E_I / \mathbb{C}^{n-d}] \rightarrow \overline{\Omega_I}$$

**Lemme 5.5.2.8.** *Soit  $[k] \in \Omega_I \cap U_J$ . Alors*

$$s_{\text{Mono}, J}([k]) = s_{\text{Mono}, I}([k]) \circ K_{JI}([k])^{-1}$$

où  $K_{JI}([k]) = ((s_{\text{Mono}, I}([k]))_j(e_i))_{i \in [1, n-d], j \in J} \in \text{GL}_{n-d}(\mathbb{R})$

*Démonstration.* Ce résultat se montre de la même façon que le lemme 5.4.7  $\square$

Comme l'action de  $\text{GL}_{n-d}(\mathbb{R})$  sur  $\text{Epi}(\mathbb{R}^{n-d}, \mathbb{R}^n)$  est libre, les matrices  $(K_{JI}([k]))$  vérifient une condition de cocycle :

**Lemme 5.5.2.9.** *Pour tout sous-ensemble  $I, J, L \subset \{1, \dots, n\}$  de cardinal  $n-d$  et tout  $[k] \in U_I \cap U_J \cap U_L$ ,*

$$K_{IL}([k]) = K_{IJ}([k])K_{JL}([k])$$

Grâce au théorème 5.2.1, on en déduit donc le résultat suivant :

**Proposition 5.5.2.10.** *L'identité  $E_{IJ} \subset E_I \rightarrow E_{IJ} \subset E_J$  descend en un isomorphisme de champs :*

$$\Phi_{I,J} : \overline{\mathcal{X}}_{IJ} := [E_I \cap U_J \times \mathcal{S} / \mathbb{C}^{n-d}] \rightarrow \overline{\mathcal{X}}_{JI} := [E_J \cap U_I \times \mathcal{S} / \mathbb{C}^{n-d}] \quad (5.35)$$



De plus, pour tous  $I, J, L$  sous-ensembles de  $\llbracket 1, \mathbf{n} \rrbracket$  de cardinal  $\mathbf{n} - \mathbf{d}$ , la composée  $\Phi_{I,J}\Phi_{J,L}\Phi_{L,I}$  est 2-isomorphe à l'identité.

Les cocycles  $\Phi_{IJ}$  définissent des applications de transitions entre les  $\overline{\mathcal{X}}_I$ . On peut donc définir le recollement :

$$\overline{\mathcal{X}} := \operatorname{colim}_{I,J} \left( \begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{IJ} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_I \\ \Phi_{IJ} \downarrow & & \\ \mathcal{X}_{JI} & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{X}}_J \end{array} \right)$$

Notons  $E$  l'union des  $E_I$  i.e.

$$E = \{(\mathbf{h}, \mathbf{z}) \in \overline{\Omega} \times \mathcal{S} \mid \forall \sigma \in D, \dim \operatorname{Vect}(\mathbf{h}(e_i), \mathbf{i} \in \sigma) < |\sigma| \Rightarrow (\mathbf{z}_i, \mathbf{i} \in \sigma) \neq 0\} \quad (5.36)$$

Les morphismes  $p_I$  se recollent en un morphisme

$$p : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\Omega} \quad (5.37)$$

Le groupe  $G$  agit sur  $E$  de la façon suivante :

$$\sigma \cdot ([\mathbf{k}], \mathbf{z}) = (\sigma \cdot [\mathbf{k}], \mathbf{z}_\sigma) \quad (5.38)$$

**Lemme 5.5.2.11.** *L'action de  $\sigma \in G$  envoie  $E_I$  sur  $E_{\sigma^{-1}(I)}$ .*

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{k} : \mathbb{R}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$  un monomorphisme linéaire et soit  $\sigma^{-1}(i) \in \sigma^{-1}(I)$ . La  $\sigma^{-1}(i)$ ème composante de  $\sigma \cdot \mathbf{k} = P_\sigma^{-1}\mathbf{k}$  vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}}, (\sigma \cdot [\mathbf{k}])_{\sigma^{-1}(i)}(x) = x_i$$

On en déduit donc que si  $[\mathbf{k}] \in \mathbf{U}_I$  alors  $\sigma \cdot [\mathbf{k}] \in \mathbf{U}_{\sigma^{-1}(I)}$ .  $\square$

**Proposition 5.5.2.12.** *L'action (5.38) descend en une action sur  $\overline{\mathcal{X}}$  et la projection  $p : \overline{\mathcal{X}} \rightarrow \overline{\Omega}$  est une application  $G$ -équivariante qui descend donc en un morphisme :*

$$\overline{\mathcal{X}}/G \rightarrow \overline{\Omega}/G =: \overline{\mathcal{M}} \quad (5.39)$$

*Démonstration.* La deuxième partie de l'énoncé est immédiate. Montrons la descente au quotient : Pour cela, on montre, dans un premier temps, que tout  $\sigma$  définit un morphisme de champs  $\overline{\mathcal{X}}_I \rightarrow \overline{\mathcal{X}}_{\sigma^{-1}(I)}$  pour tout  $I$  :

Soit  $\sigma \in G$ ,  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}}$  et  $([\mathbf{k}], \mathbf{z}) \in E_I$ . Alors

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\mathbf{t} \cdot ([\mathbf{k}], \mathbf{z})) &= \sigma \cdot ([\mathbf{k}], ) \\ &= (\sigma \cdot [\mathbf{k}], \sigma \cdot E(s_{\operatorname{Mono}, I}[\mathbf{k}](\mathbf{t})\mathbf{z})) = (\sigma \cdot [\mathbf{k}], E(s_{\operatorname{Mono}, \sigma^{-1}(I)}(\sigma \cdot [\mathbf{k}])(\mathbf{t})\mathbf{z}_\sigma)) \\ &= \mathbf{t} \cdot (\sigma \cdot [\mathbf{k}], \mathbf{z}_\sigma) = \mathbf{t} \cdot (\sigma \cdot ([\mathbf{k}], \mathbf{z})) \end{aligned}$$

Le morphisme  $\sigma \cdot$  est un morphisme  $\mathbb{C}^{\mathbf{n}-\mathbf{d}}$ -équivariant et qui descend donc au quotient.

De plus, comme ce morphisme envoie  $E_{IJ}$  sur  $E_{\sigma^{-1}(I)\sigma^{-1}(J)}$  pour tout  $I$  et  $J$  alors les isomorphismes  $\overline{\mathcal{X}}_I \rightarrow \overline{\mathcal{X}}_{\sigma^{-1}(I)}$  se recollent en un automorphisme de  $\overline{\mathcal{X}}$ .  $\square$

En conclusion, nous avons montré

**Théorème 5.5.2.13.** *La compactification  $\overline{\mathcal{M}}$  de  $\mathcal{M}$  est la base d'une famille (ici, une application lisse dont toutes les fibres sont de la même dimension) :*

$$\overline{\mathcal{X}}/\mathbf{G} \rightarrow \overline{\mathcal{M}} \quad (5.40)$$

de champs toriques quantiques telles que :

- Au-dessus de  $\mathcal{M}$ , les fibres sont des champs toriques quantiques données par un éventail de type combinatoire  $\mathbf{D}$  ;
- Au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}} \setminus \mathcal{M}$ , les fibres sont des champs toriques quantiques données par un éventail de type combinatoire une dégénérescence de  $\mathbf{D}$ .

## 5.6 Exemples

### 5.6.1 Espaces projectifs

Dans cette section, on va considérer le type combinatoire  $\mathbf{S}_d$  de l'espace projectif  $\mathbb{P}^d$ .

**Lemme 5.6.1.1.** *Le membre de droite de l'égalité (5.29) est égal à :*

$$\mathbf{C} = \left\{ [p_0 : \dots : p_d] \in \text{Gr}(1, \mathbb{R}^{d+1}) = \mathbb{R}\mathbb{P}^d \mid p_i \geq 0, \sum_{i=0}^d p_i = 1 \right\}$$

*Démonstration.* Le fermé  $\mathbf{F}$  est donné par les équations

$$\forall i < j, p_i p_j \geq 0$$

car le noyau du morphisme  $h : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  associé à un  $h$   $\mathbf{S}_d$ -admissible est engendré par  $\begin{pmatrix} -h(e_{d+1}) \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{d+1}$ . On a donc  $\mathbf{C} \subset \mathbf{F}$ . Montrons l'inclusion inverse :

Soit  $[p] \in \mathbf{F}$ . Quitte à prendre un représentant opposé, on peut supposer, grâce aux équations de  $\mathbf{F}$ , que tous les  $p_i$  sont positifs. Alors  $\sum_{i=0}^d p_i$  est strictement positif et donc :

$$[p] = \left[ \frac{p_0}{\sum_{i=0}^d p_i} : \dots : \frac{p_d}{\sum_{i=0}^d p_i} \right] \in \mathbf{C}$$

□

Par le [lemme 5.6.1.1](#) et la [proposition 5.5.1.6](#), on obtient

**Proposition 5.6.1.2.** *L'espace  $\overline{\Omega(\mathbf{S}_d)}$  est égal à*

$$\left\{ [\lambda_0 : \dots : \lambda_d] \in \text{Gr}(1, \mathbb{R}^{d+1}) = \mathbb{R}\mathbb{P}^d \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \right\}$$

*Le fermé  $\overline{\Omega(\mathbf{S}_d)}$  est donc un  $d$ -simplexe.*

**Proposition 5.6.1.3.** *La famille  $\mathcal{X}_{d-1}/\mathcal{S}_d \rightarrow \overline{\mathcal{M}_{d-1}}$  est obtenue en projetant les coordonnées dégénérées de la restriction  $(\mathcal{X}_d/\mathcal{S}_{d+1})|_{\overline{\mathcal{M}_d} \setminus \mathcal{M}_d} \rightarrow \overline{\mathcal{M}_d} \setminus \mathcal{M}_d$*

*Démonstration.* Un champ torique au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}}_d \setminus \mathcal{M}_d$  est obtenu par au moins une dégénérescence i.e. est un quotient d'un ouvert de  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$  (quitte à permuter les coordonnées, on peut supposer que la dégénérescence arrive sur la dernière coordonnée). On peut donc projeter :

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{X}_d / \mathcal{S}_{d+1})|_{\overline{\mathcal{M}}_d \setminus \mathcal{M}_d} & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{X}_{d-1} / \mathcal{S}_d \\
 & \searrow \quad \swarrow & \\
 & \overline{\mathcal{M}}_d \setminus \mathcal{M}_d & 
 \end{array}$$

□

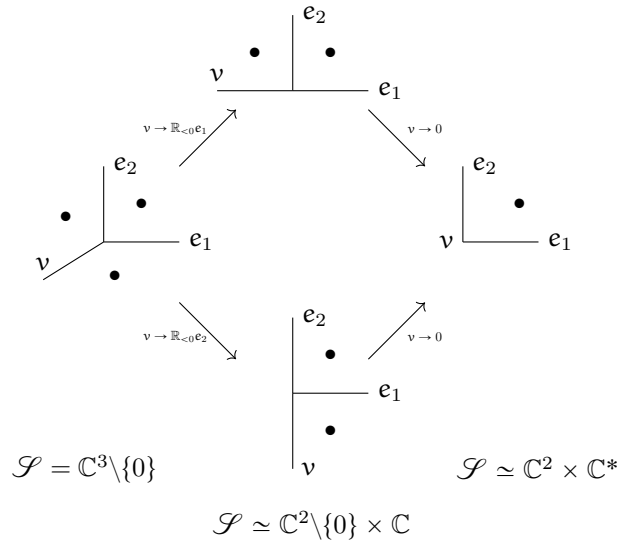


FIGURE 5.2 – Dégénérescences en dimension 2

### 5.6.2 Exemple de la dimension 2

Dans cette sous-section, on va supposer que  $d = 2$ .

On peut remarquer qu'en restant sur une même carte, il y a trois possibilités de dégénérescence :

1. des vecteurs  $h(e_i)$  s'annulent ;
2. deux vecteurs  $h(e_i)$  et  $h(e_j)$ ,  $\{i, j\} \in D$  deviennent (strictement) positivement dépendants ;
3. deux vecteurs  $h(e_i)$  et  $h(e_j)$ ,  $\{i, j\} \in D$  deviennent (strictement) négativement dépendants.

Les trois prochains énoncés décrivent ce que l'on peut dire de ces trois cas :

On supposera, par simplicité, que l'ensemble des générateurs virtuels est vide car ceux-ci n'influent pas sur la situation.

**Proposition 5.6.2.1.** *Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^2$  et  $D'$  le type combinatoire dégénéré obtenu à partir de  $D$  en faisant tendre les vecteurs  $h(e_i)$ ,  $i \in I$  vers 0. Alors le champ torique quantique obtenu n'est plus complet et est de la forme*

$$\mathcal{X} \times [\mathbb{T}^I / \mathbb{C}^I]$$

où  $\mathbb{C}^I$  agit sur  $\mathbb{T}^I$  par le morphisme  $E$  et  $\mathcal{X}$  est décrit par l'éventail obtenu en restreignant la calibration à  $\mathbb{Z}^{1^c} \oplus 0$  et en supprimant les cônes contenant les 1-cônes engendrés par les  $h(e_i)$ ,  $i \in I$ .

*Démonstration.* Sans perte de généralité, on peut supposer que  $I = \{n - |I| + 1, \dots, n\}$ . La calibration  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^2$  est nulle sur  $\mathbb{R}^I \oplus 0$ . Par conséquent, une base de  $\ker(h)$  est donné par la concaténation d'une base de  $h_{\mathbb{R}^{1^c}}$  avec les vecteurs de  $e_i$ ,  $i \in I$ . Le morphisme de la transformée de Gale est la transposée de

$$\begin{pmatrix} v_1 \cdots v_{n-|I|-2} & 0 \\ & \text{Id}_{|I|} \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

Ensuite, les vecteurs nuls ne peuvent pas être générateurs de 1-cônes donc, par définition, la variété  $\mathcal{S}$  est de la forme

$$\mathcal{S}' \times \mathbb{T}^I$$

L'action de  $\mathbb{C}^{n-2}$  sur  $\mathcal{S}$  se décompose donc en deux : la première sur  $\mathcal{S}'$  par l'action donnée par (l'exponentielle de) la base de  $\ker(h_{\mathbb{R}^{1^c}})$  et la deuxième sur  $\mathbb{T}^I$  donnée par (l'exponentielle de) l'identité. Autrement dit,

$$\mathcal{X}_{h,\Delta} = [\mathcal{S}/\mathbb{C}^{n-2}] = [\mathcal{S}' \times \mathbb{T}^I/\mathbb{C}^{n-|I|-2} \times \mathbb{C}^I] = [\mathcal{S}'/\mathbb{C}^{n-|I|-2}] \times [\mathbb{T}^I/\mathbb{C}^I]$$

□

**Exemple 5.6.2.2.** On part du type combinatoire

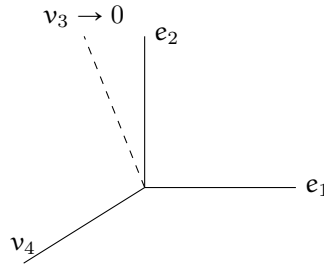
$$D = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

Lorsqu'on fait converger  $h(e_3)$  vers 0, on obtient le type combinatoire

$$D' = \{(1, 2), (4, 1)\}$$

Alors

$$\mathcal{S}(D') = \mathbb{C}_x \times \mathbb{C}_z^* \times \mathbb{C}_{y,t}^2 \setminus \{0\}.$$



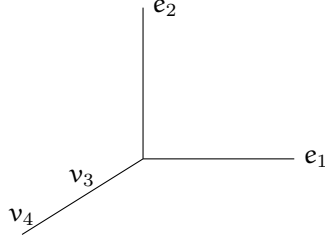
**Proposition 5.6.2.3.** Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^2$  et  $D'$  le type combinatoire dégénéré obtenu à partir de  $D$  en faisant tendre un couple  $(h(e_i), h(e_j))$ ,  $i, j \in D$  vers un couple de la forme  $(h(e_i), \lambda h(e_i))$ ,  $\lambda > 0$ . Alors on obtient un éventail complet où le cône  $\mathbb{R}_{\geq 0} h(e_i)$  apparaît deux fois et a donc deux générateurs données par  $h$  :  $h(e_i)$  et  $h(e_j)$ .

**Exemple 5.6.2.4.** On part du type combinatoire

$$D = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

Lorsqu'on fait converger  $h(e_3)$  vers la demi-droite  $\mathbb{R}_{\geq 0}h(e_4)$ , on obtient le type combinatoire

$$D' = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (4, 1)\}$$



*Remarque 5.6.2.5.* On garde les deux cônes puisque c'est ce qui est prescrit par le type combinatoire et la calibration.

*Avertissement 5.6.2.6.* La variété  $\mathcal{S}$  obtenue est différente<sup>1</sup> de celle obtenue en gardant un seul générateur. Dans l'exemple précédant, on voit que la variété obtenue est

$$\mathcal{S}(D') = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* \cup \mathbb{C} \times \mathbb{T}^2 \times \mathbb{C}$$

et si on garde un seul générateur (et en définissant l'autre comme virtuel), c'est

$$(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^*$$

(on obtient alors un plan projectif quantique avec un générateur virtuel). Plus précisément, on a l'égalité :

$$\mathcal{S}(D') \setminus \{\mathbb{C} \times \mathbb{T}^2 \times 0\} = [(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}^*] \setminus [0 \times \mathbb{C}^* \times 0 \times \mathbb{C}^*].$$

**Proposition 5.6.2.7.** Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^2$  et  $D'$  le type combinatoire dégénéré obtenu à partir de  $D$  en faisant tendre un couple  $(h(e_i), h(e_j))$ ,  $i, j \in D$  vers un couple de la forme  $(h(e_i), \lambda h(e_i))$ ,  $\lambda < 0$ . Alors, si le groupe  $\Gamma_{pr} = \sum_{k \neq i, j} \langle w, h(e_k) \rangle \mathbb{Z}$  (où  $w \perp h(e_i)$ ) est de rang 1 i.e.  $\Gamma_{pr} = \alpha \mathbb{Z}$  alors il existe un morphisme torique plat  $\mathcal{X}_{\Delta', h} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{R}_{\geq 0}, \frac{1}{\alpha} \langle h, w \rangle}$  de fibre générique une droite projective quantique et de fibre au-dessus de  $[0/\mathbb{Z}^{n-d}]$  une union finie de droites projectives quantiques.

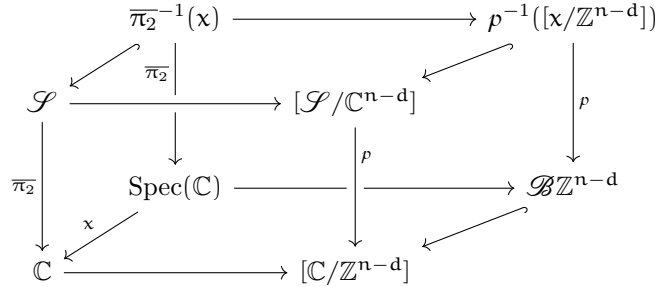
*Remarque 5.6.2.8.* • Cette proposition est l'analogie irrationnel de la dégénérescence torique de [98].

- La condition sur  $\Gamma_{pr}$  est nécessaire pour que le morphisme  $\mathcal{X}_{\Delta'} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathbb{R}_{\geq 0}, \frac{1}{\alpha} \langle h, w \rangle}$  soit défini (car les images des générateurs des 1-cônes de  $\Delta'$  doivent être un multiple entier du générateur de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ).

*Démonstration.* Quitte à appliquer un isomorphisme, on peut supposer que  $w = e_2$ . Le morphisme que l'on va considérer est la projection  $\pi_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto y$ . C'est un morphisme d'éventails  $(\Delta, h) \rightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, \pi_2 h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma_{pr})$  si, et seulement si, pour tout  $i \in \Delta(1)$ ,  $\pi_2 h(e_i) \in \mathbb{N} \pi_2 h(e_1)$ . Dans ce cas,  $\Gamma$  est de rang 1. On peut même, sans perte de généralité, supposer qu'il est engendré par 1. Pour calculer la fibre,

1. le champ torique obtenu n'est pas séparé (cf. la remarque 3.4.2.17)

on va utiliser le diagramme cartésien suivant :



Le morphisme  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$  étant plat (car non constant), on en déduit la platitude du passage au quotient. La fibre en un point non nul est donnée par les cônes  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times 0$  et  $\mathbb{R}_{\leq 0} \times 0$ . On a juste à examiner les deux cônes les contenant. Notons  $v = (v_1, v_2)$  le générateur du 1-cône allant avec  $\mathbb{R}_{\geq 0} \times 0$ . Par hypothèse,  $v_2 \in \mathbb{N}$  et donc le morphisme  $\overline{\pi_2}$  est défini par

$$\overline{\pi_2}(z_1, z_2) = z_2^{v_2}$$

Et donc la fibre  $\overline{\pi_2}^{-1}(E(t))$  est

$$\mathbb{C} \times \mu_{v_2} E \left( \frac{t}{v_2} \right) \tag{5.42}$$

où  $\mu_{v_2}$  est le groupe des racines  $v_2$ èmes de l'unité. Il nous reste à regarder l'action de  $\mathbb{Z}^{n-d}$ . Elle est donnée par le morphisme

$$\begin{pmatrix} 1 & v_1 \\ 0 & v_2 \end{pmatrix}^{-1} h = \begin{pmatrix} 1 & -v_1/v_2 \\ 0 & 1/v_2 \end{pmatrix} h$$

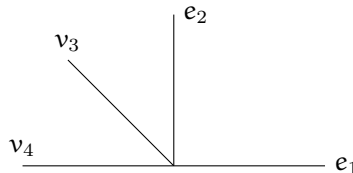
On en déduit que les  $v_2$  droites de (5.42) sont identifiées par l'action. On obtient le même résultat pour le deuxième cône. Les changements de carte recollent ces deux droites en une droite projective quantique. Le cas de la fibre de 0 se fait essentiellement de la même façon. La différence étant que sur les cônes qui ne sont pas sur les bords la fibre en 0 est deux droites sécantes.  $\square$

**Exemple 5.6.2.9.** On part du type combinatoire

$$D = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$$

Lorsqu'on fait converger  $h(e_4)$  vers la demi-droite  $\mathbb{R}_{\leq 0}h(e_1) = \mathbb{R}_{\leq 0}e_1$ , on obtient le type combinatoire

$$D' = \{1, 2, 3, 4, (1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$$



La projection sur la deuxième coordonnée est un morphisme torique (comme vu dans la proposition précédente). Pour voir les fibres de ce morphisme, il suffit de le décomposer de la façon suivante :

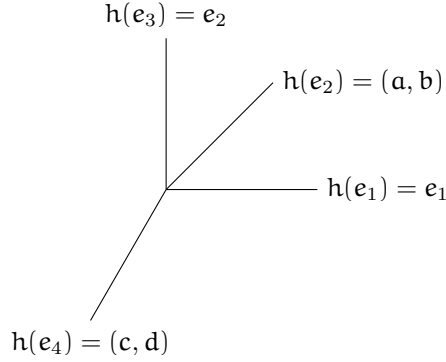
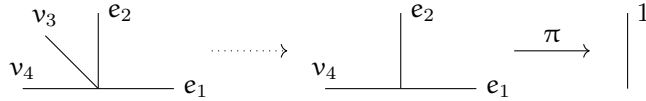


FIGURE 5.3 – Carte  $U_{(1,3)}$



La première flèche est un éclatement en un point équivariant (lorsqu'il existe) et la deuxième est la projection du produit. En dehors de zéro, les fibres sont des droites projectives et en 0, c'est une droite projection fans laquelle on a remplacé un point équivariant (0 ou  $\infty$ ) par une autre droite projective.

### 5.6.3 Exemple avec 4 générateurs

On va maintenant supposer  $n = 4$  et donc considérer le type combinatoire :

$$D(4) = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$$

C'est le type combinatoire des surfaces d'Hirzebruch. On a vu des dégénérescences de ce type combinatoire dans les exemples 5.6.2.2, 5.6.2.4 et 5.6.2.9. On va systématiser cette étude dans ce paragraphe.

Il y a trois cas à examiner (les autres s'obtiennent en faisant agir  $G$ ) :

- la carte « usuelle »  $U_{(1,2)}$  ;
- la carte  $U_{(1,3)}$  ;
- la carte  $U_{(2,4)}$  ;

Les deux derniers cas se traitent de la même façon (voir les figures 5.3 et 5.4). En effet,

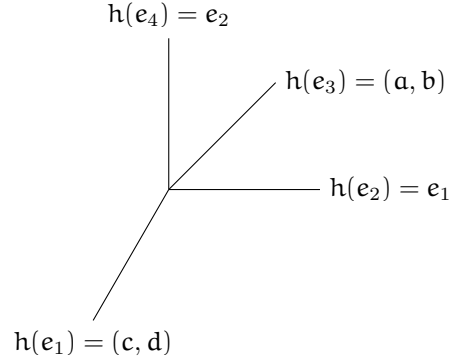
$$\Omega_{(1,3)} = \Omega_{(2,4)} = \{((a, b), (c, d)) \in \mathbb{R}^4 \mid a, b > 0, c, d < 0\}$$

comme l'illustrent les figures (5.3) et (5.4). On en déduit donc

$$\overline{\Omega}_{(1,3)} = \overline{\Omega}_{(2,4)} = \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times \mathbb{R}_{\leq 0}^2. \tag{5.43}$$

On va maintenant se concentrer sur  $\overline{\Omega}_{1,2}$ . On sait que  $\overline{\Omega}_{1,2}$  est inclus dans le fermé  $F$  de  $\mathbb{R}_{a,b,c,d}^4$  défini

$$\text{par } \begin{cases} f_1(a, b, c, d) := -a \geq 0 \\ f_2(a, b, c, d) := ad - bc \geq 0 \\ f_3(a, b, c, d) := -d \geq 0 \end{cases}$$

FIGURE 5.4 – Carte  $U_{(2,4)}$ 

On peut décomposer  $F$  de la façon suivante :

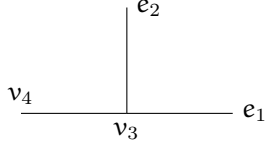
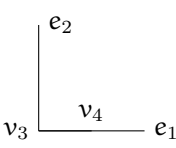
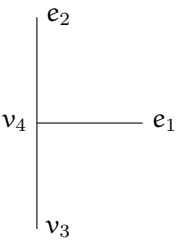
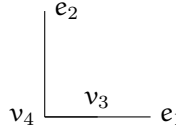
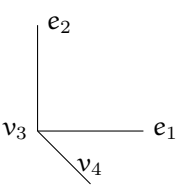
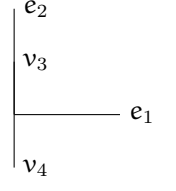
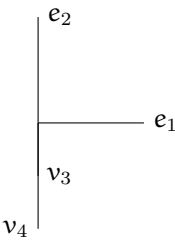
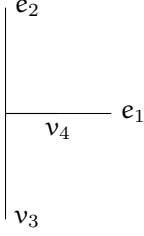
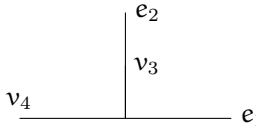
$$\begin{aligned}
 F &= \coprod_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{0,1\}^3} \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mid \forall j, \text{sign}(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})) = \varepsilon_j\} \\
 &= \Omega(\mathbb{D}) \coprod_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in \{0,1\}^3 \setminus \{(1,1,1)\}} \coprod \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mid \forall j, \text{sign}(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})) = \varepsilon_j\}
 \end{aligned}$$

Cela définit une stratification de  $F$ .

**Notation 5.6.3.1.** On désignera l'ensemble  $\{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mid \forall j, \text{sign}(f_j(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})) = \varepsilon_j\}$  par  $F_{4\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3}$  (autrement dit, l'écriture en binaire de  $k$  ( $k \in \{0, \dots, 6\}$ ) donne les signes des  $f_i$  pour  $F_k$ ).

*Remarque 5.6.3.2.* Si  $k = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3$  alors le champ torique quantique associé à  $\mathbf{h} \in F_i$  a  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + 1$  cônes (le  $+1$  venant du cône  $\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  qui est toujours là). Plus précisément, on enlève les cônes correspondent aux  $i$  où  $\varepsilon_i = 0$



|                         |  |  |
|-------------------------|--|--|
| <p><math>F_0</math></p> | <p><math>\alpha = 0, bc = 0, d = 0</math></p>    | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>b = 0, c \leq 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>b = 0, c \geq 0</math></p> </div> </div> <div style="display: flex; justify-content: space-around; margin-top: 20px;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>c = 0, b \leq 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>c = 0, b \geq 0</math></p> </div> </div> |
| <p><math>F_1</math></p> | <p><math>\alpha = 0, bc = 0, d &lt; 0</math></p> | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>b = 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>b &gt; 0, c = 0</math></p> </div> </div> <div style="text-align: center; margin-top: 20px;">  <p><math>b &lt; 0, c = 0</math></p> </div>   |
| <p><math>F_2</math></p> | <p><math>\alpha = 0, bc &lt; 0, d = 0</math></p> | <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;">  <p><math>b &lt; 0, c &gt; 0</math></p> </div> <div style="text-align: center;">  <p><math>b &gt; 0, c &lt; 0</math></p> </div> </div>  |

|       |                             |  |
|-------|-----------------------------|--|
| $F_3$ | $a = 0, bc < 0, d < 0$      |  |
| $F_4$ | $a < 0, bc = 0, d = 0$      |  |
| $F_5$ | $a < 0, ad - bc = 0, d < 0$ |  |
| $F_6$ | $a < 0, bc < 0, d = 0$      |  |

On en déduit :

**Proposition 5.6.3.3.** *L'adhérence  $\overline{\Omega}_{1,2}$  est égale au fermé  $F$ .*

Les égalités (5.43) et la proposition 5.6.3.3 permettent d'obtenir l'égalité suivante :

**Théorème 5.6.3.4.** *Le compactifié  $\overline{\Omega}$  est égal à*

$$\{[a : b : c : d : e : f] \in \text{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{RP}^5 \mid ef \geq 0, af \leq 0, df \leq 0, ad \geq 0, ae \leq 0, de \leq 0\}$$



# CHAMPS TORIQUES QUANTIQUES NON-SIMPLICIAUX

LES VARIÉTÉS TORIQUES DÉCRITES par un éventail simplicial sont des variétés orbifoldes (ayant donc des singularités quotients) et forment donc une petite partie des variétés toriques. Par la correspondance combinatoire-géométrie, les éventails simpliciaux forment donc aussi une petite partie des éventails. De la même façon que les variétés n'ayant pas des singularités quotients sont plus difficiles à étudier, les éventails non-simpliciaux vont être plus difficiles à étudier. C'est pour cette raison que dans l'article [81], les auteurs se restreignent au cas simplicial pour définir les « variétés toriques quantiques ». Le but de ce chapitre est de présenter l'article [17] qui décrit une construction de champs toriques quantiques dans le cas non-simplicial.

Tout d'abord, on va décrire les changements apparaissant dans le cas non-simplicial dans la [première section](#) et en premier lieu le fait que ces cônes non-simpliciaux n'ont plus de modèles simples. Dans le cas simplicial du [chapitre 3](#), on utilise, de façon cruciale, l'équivalence de catégories entre les cônes simpliciaux et les cônes de la forme  $\text{Cone}(e_1, \dots, e_k)$  (cf. [lemme 3.4.1.4](#)) pour définir les champs toriques quantiques affines associés. On ne peut plus le faire en général. De plus, dans ce cas-là, on peut avoir un nombre de 1-cônes changeant entre les différents cônes maximaux.

Dans la [deuxième section](#), on va donner une définition adaptée de « tore quantique » (qui sera dit « présenté ») permettant de gérer ce problème. Plus précisément, la présentation du tore quantique permettra d'encoder un changement de calibration considérée : au lieu de considérer une calibration d'un groupe  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ , on prendra un calibration d'un groupe  $G \subset \mathbb{R}^p$  (où  $p \geq \dim(\sigma)$  est le nombre de 1-cônes du cône  $\sigma$  que l'on voudra considérer) qui sera isomorphe au groupe  $\Gamma$  initial.

Dans la [troisième section](#), on va pouvoir définir le champ torique quantique associé à un cône (potentiellement non-simplicial) puis définir des champs toriques quantiques généraux par recollement (de la même façon que dans [chapitre 3](#)) des cartes affines ou autrement dit, par les données de descente des cartes affines. En particulier, cette construction coïncide avec la construction donnée dans le [chapitre 3](#) (et venant de [81]). On finira cette section par la preuve de l'équivalence de catégories entre les éventails quantiques et celles des champs toriques quantiques dans le cadre général.

Finalement, on montre, dans la [quatrième section](#), que ces champs toriques quantiques peuvent être réalisés comme un champ quotient et peuvent être décrits comme une gerbe au-dessus d'une version non-calibrée dans la [cinquième section](#).

## 6.1 Cônes non-simpliciaux

On va étudier les propriétés des cônes non-simpliciaux. Tout d'abord, ils n'existent qu'en dimension  $\geq 3$  :

**Lemme 6.1.1.** *En dimension 2, tous les cônes fortement convexes sont simpliciaux.*

*Démonstration.* Soient  $\sigma$  un cône fortement convexe de  $\mathbb{R}^2$  et  $\text{Cone}(v_1), \dots, \text{Cone}(v_n)$  les 1-cônes de  $\sigma$ . On va identifier  $\mathbb{R}^2$  avec  $\mathbb{C}$ . Par forte convexité, on peut supposer que  $v_1 = e_1$  et  $\sigma \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ . Soit  $j$  l'élément de  $\{1, \dots, n\}$  tel que  $v_j$  soit d'argument maximal. Alors

$$\sigma = \text{Cone}(v_1, v_j).$$

En effet, puisque pour tout  $k \neq 1, j$ ,  $0 < \text{Arg}(v_k) < \text{Arg}(v_j) < \pi$ , les vecteurs  $v_k$  peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire à coefficients positifs de  $v_1$  et  $v_j$ . On en déduit donc que  $n$  est nécessairement égal à 2 et donc  $\sigma$  est simplicial. □

Déjà en dimension 3, le comportement des cônes non-simpliciaux dénote fortement du cas simplicial :

**Lemme 6.1.2.** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un cône de dimension 3 ayant  $n$  1-cônes .*

*Démonstration.* Soit  $P$  un polygone de  $\mathbb{R}^2$  à  $n$  côtés. Alors le cône engendré par  $P$  i.e.

$$C(P) = \text{Cone}(P \times \{1\}) \subset \mathbb{R}^3$$

est un cône de  $\mathbb{R}^3$  avec  $n$  1-cônes. □

**Exemple 6.1.3.** Voici un exemple de cône de dimension 3 et ayant 5 côtés :

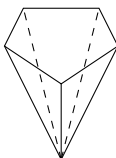


FIGURE 6.1 – Un cône de dimension 3 ayant 5 côtés

Le deuxième problème combinatoire que les cônes non-simpliciaux posent est que leurs faces sont plus difficiles à déterminer (voir [la proposition 3.4.2.8](#)) :

**Exemple 6.1.4.** Considérons le cône suivant :

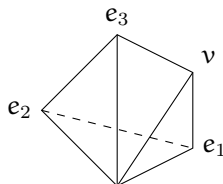


FIGURE 6.2 – Le cône  $\text{Cone}(e_1, e_2, e_3, e_1 - e_2 + e_3)$

Ces faces sont :

- $\text{Cone}(e_1), \text{Cone}(e_2), \text{Cone}(e_3), \text{Cone}(v)$  (avec un générateur) ;
- $\text{Cone}(e_1, e_2), \text{Cone}(e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, v), \text{Cone}(e_3, v)$  (avec deux générateurs) ;
- il n'y a pas de face avec trois générateurs.

Pour conclure cette section, nous allons voir les propriétés que l'on perd en passant au côté non-simplicial dans le cadre géométrique :

**Théorème 6.1.5.** *Soit  $X_\Delta$  une variété torique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $\Delta$  est simplicial ;
2.  $X_\Delta$  est orbifolde ;
3.  $X_\Delta$  est  $\mathbb{Q}$ -factoriel (i.e. tous les diviseurs de Weil sont  $\mathbb{Q}$ -Cartier) ;
4.  $X_\Delta$  est le quotient géométrique de  $\mathbb{A}^n$  pour l'action de  $G = \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(X_\Delta)])$ .

*Démonstration.* Voir [théorème 1.1.3.3.12](#) pour l'équivalence  $1 \Leftrightarrow 2$ , [[34](#), Proposition 4.2.7] pour l'équivalence  $1 \Leftrightarrow 3$  et [théorème 1.1.5.15](#) pour l'équivalence  $1 \Leftrightarrow 4$ .  $\square$

**Exemple 6.1.6.** La variété torique associée au cône de la figure [6.2](#) est la variété affine

$$V(\text{xt} - \text{zy}) \subset \mathbb{C}^4$$

Le cône  $\sigma$  est l'unique cône (à isomorphisme près) non-simplicial de dimension 3 pour lequel  $U_\sigma$  a des singularités terminales ([\[34, Theorem 11.4.21\]](#)).

## 6.2 Tores quantiques présentés

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  et  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  une calibration de  $\Gamma$ . Le tore quantique standard associé à ces données est le champ quotient  $\mathcal{T}_{h,\mathcal{G}} = [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^n]$  où  $\mathbb{Z}^n$  agit sur  $\mathbb{C}^d$  par le morphisme  $h$ . Comme un cône non-simplicial peut avoir plus de  $d$  générateurs, on doit considérer les tores quantiques comme un champ quotient d'un espace  $\mathbb{C}^p$  de plus haute dimension. Pour faire cela, nous allons remplacer le groupe  $\Gamma$  et sa calibration  $h$  par un sous-groupe  $G$  de  $\mathbb{R}^p$ , qui est isomorphe à  $\Gamma$ , et une calibration de ce groupe. On va donc décrire ces tores quantiques par la donnée d'un tore quantique standard sous-jacent (pour garder la trace de la donnée combinatoire du groupe  $\Gamma$ ) avec la donnée d'un isomorphisme de champs, respectant les générateurs virtuels, avec un tel champ quotient. Plus précisément,

**Définition 6.2.1.** Un tore quantique présenté est un sextuplet  $(\mathcal{T}_{h,\mathcal{G}}, \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G \subset \mathbb{C}^p, \mathcal{G}', L, H, s)$  où  $\varphi$  est une calibration d'un groupe  $G$  (où  $\mathcal{G}'$  est son ensemble de générateurs virtuels),  $L : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^d$  est un épimorphisme linéaire,  $H : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  est un isomorphisme de groupes et  $s : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$  est une bijection tels que :

- $L(G) = \Gamma$  et  $L|_G : G \rightarrow \Gamma$  est un isomorphisme de groupes.
- Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \mathbb{Z}^n \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h \\ G & \xrightarrow{L|_G} & \Gamma \end{array}$$

est commutatif.

- Pour tout  $i \in \mathcal{G}$ ,  $H(e_i) = e_{s(i)}$  et pour tout  $i \notin \mathcal{G}$ ,  $H(e_i) \in \bigoplus_{j \notin \mathcal{G}'} \mathbb{Z}e_j$

Le morphisme  $\varphi$  est la calibration de ce tore quantique calibré présenté.

Avec ces données, on peut définir un champ quotient  $[\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^n \times \ker(L \otimes_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{C}})]$  où  $\mathbb{Z}^n \times \ker(L \otimes_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{C}})$  agit sur  $\mathbb{C}^p$  par

$$(m, w) \cdot z = z + \varphi(m) + w,$$

De plus, les morphismes  $(L, H)$  induisent un isomorphisme de champs

$$[\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^n \times \ker(L \otimes_{\mathbb{R}} \text{id}_{\mathbb{C}})] \simeq \mathcal{T}_{h,g}.$$

Si  $L$  est un isomorphisme linéaire alors cet isomorphisme de champs est un isomorphisme de tores comme défini dans la définition 3.3.8.

On peut définir une forme multiplicative du tore grâce au morphisme exponentiel : on doit supposer  $h$  standard i.e. on va supposer qu'il existe un sous-ensemble  $\tilde{I} = \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, p\}$  tel que  $\mathbb{Z}^{\tilde{I}} \subset G$  et  $h(e_k) = e_{i_k}$  pour  $k = 1..d$ . Alors, la descente au quotient de l'exponentielle nous donne :

$$[\mathbb{C}^p / \mathbb{Z}^n \times \ker(L_{\mathbb{C}})] \simeq [\mathbb{T}^p / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(L_{\mathbb{C}}))]$$

où  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(L_{\mathbb{C}}))$  agit  $\mathbb{T}^p$  par

$$(m, E(w)) \cdot z = E(\varphi(0 \oplus m) + w)z$$

*Remarque 6.2.2.* Ici,  $E(\ker(L_{\mathbb{C}}))$  est juste muni de sa structure de groupe topologique. On peut penser au cas où  $\ker(L_{\mathbb{C}}) = \text{Vect}((1, \alpha))$  et donc son image par l'exponentielle est dense dans le tore et qui n'est donc pas une sous-variété de  $\mathbb{T}^2$ . Il agit tout de même par biholomorphisme sur  $\mathbb{T}^p$ .

**Définition 6.2.3.** Un morphisme de tores quantiques présentés

$$(\mathcal{T}_{h,g}, \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow G \subset \mathbb{C}^p, \tilde{\mathcal{G}}, L, H, s) \rightarrow (\mathcal{T}_{h',g'}, \varphi' : \mathbb{Z}^{n'} \rightarrow G' \subset \mathbb{C}^{p'}, \tilde{\mathcal{G}}', L', \varphi, s')$$

ou morphisme torique présenté est un sextuplet  $(\mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{L}', \mathcal{H}', \mathcal{S}')$  de morphismes tels que :

- $(\mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{S})$  induit un morphisme torique  $\mathcal{T}_{h,g} \rightarrow \mathcal{T}_{h',g'}$  ;
- Pour tout  $j \in \tilde{\mathcal{G}}, \mathcal{H}'(e_j) = e_{s'(j)}$  et pour tout  $j \notin \tilde{\mathcal{G}}$ ,

$$\mathcal{H}'(e_j) \in \bigoplus_{k \notin \tilde{\mathcal{G}}'} \mathbb{Z}e_k$$

- Les diagrammes suivants commutent

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}^n & \xleftarrow{H} & \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^d & \xleftarrow{[L_{\mathbb{C}}]} & \mathbb{C}^p / \ker(L_{\mathbb{C}}) \\ \mathcal{H}' \downarrow & & \downarrow \mathcal{H} & & \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L}' \\ \mathbb{C}^{n'} & \xleftarrow{H'} & \mathbb{C}^{n'} & \xrightarrow{h'} & \mathbb{C}^{d'} & \xleftarrow{[L'_{\mathbb{C}}]} & \mathbb{C}^{p'} / \ker(L'_{\mathbb{C}}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G} & \xrightarrow{s} & \tilde{\mathcal{G}} \\ \mathcal{S} \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}' \\ \mathcal{G}' & \xrightarrow{s'} & \tilde{\mathcal{G}}' \end{array}$$

En particulier, on a le diagramme commutatif suivant montrant les relations entre les différentes calibrations :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathbb{Z}^{n'} & \xrightarrow{H'^{-1}} & \mathbb{Z}^{n'} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow h & & \downarrow h' & & \downarrow \varphi' \\ G & \xrightarrow{L} & \Gamma & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \Gamma' & \xrightarrow{(L'_{\mathbb{C}'})^{-1}} & G' \end{array}$$

On peut reformuler cela en termes de champ quotient :

**Lemme 6.2.4.** *On utilise les mêmes notations que dans la définition 6.2.3.*

Soit  $\ell' : [\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^n \times \ker(L_{\mathbb{C}})] \rightarrow [\mathbb{C}^{p'}/\mathbb{Z}^{n'} \times \ker(L'_{\mathbb{C}})]$  le morphisme de champs décrit par les applications linéaires  $(\mathcal{L}', \mathcal{H}')$  et  $\ell : \mathcal{T}_{h,g} \rightarrow \mathcal{T}_{h',g'}$  le morphisme de champs décrit par les applications linéaires  $(\mathcal{L}, \mathcal{H})$ . Alors, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{C}^p/\mathbb{Z}^n \times \ker(L_{\mathbb{C}})] & \xrightarrow{\ell'} & [\mathbb{C}^{p'}/\mathbb{Z}^{n'} \times \ker(L'_{\mathbb{C}})] \\ \simeq \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \mathcal{T}_{h,g} & \xrightarrow{\ell} & \mathcal{T}_{h',g'} \end{array}$$

commute (où les isomorphismes sont des isomorphismes de champs encodés par la présentations des tores quantiques présentés).

Les tores quantiques ne sont (essentiellement) pas de nouveaux tores quantiques dans le sens où les tores quantiques présentés ayant le même tore quantique sous-jacent sont isomorphes :

**Lemme 6.2.5.**  $(\mathcal{T}_{h,g}, \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbf{G} \subset \mathbb{C}^p, \mathcal{G}', L, H, s)$  et  $(\mathcal{T}_{h,g}, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G}, \text{id}, \text{id}, \text{id})$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Un isomorphisme est donné par  $(\text{id}_{\mathbb{C}^d}, H, s, [L_{\mathbb{C}}], \text{id}_{\mathbb{C}^n}, \text{id}_{g'})$ . □

On en déduit

**Proposition 6.2.6.** *Le foncteur d'oubli*

$$(\mathcal{T}_{h,g}, \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbf{G}, \mathcal{G}', L, H, s) \rightarrow \mathcal{T}_{h,g},$$

est une équivalence de catégories entre la catégorie des tores quantiques présentés et la catégorie des tores quantiques standard.

## 6.3 Définition des champs toriques quantiques (non-simpliciaux)

Soient  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\Gamma) = \mathbb{R}^d$  et  $(\Delta, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  un éventail quantique. Pour définir le champ torique quantique associé à cet éventail, nous allons tout d'abord définir le champ torique affine associé à chacun des cônes de cet éventail. Le point important ici sera de remplacer la calibration  $h$  de  $\Gamma$  par une calibration adaptée pour chaque cône maximal de  $\Delta$ . On pourra ensuite définir les champs toriques quantiques généraux  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$  par recollement des cartes affines (comme dans la proposition 3.4.2.13).

À la fin de cette section, on prouvera que la correspondance

$$(\Delta, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$$

est une équivalence de catégories.

### 6.3.1 Champs toriques quantiques affines

Soit

$$\sigma = \sigma_I = \text{Cone}(v_{i_1} := h(e_{i_1}), \dots, v_{i_p} := h(e_{i_p}))$$

(avec  $I := \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$ ) un cône fortement convexe de  $\Delta$ . Il y a deux possibilités :  $\sigma$  est de dimension maximale i.e. de dimension  $d$ , ou pas. Dans le deuxième cas, on doit faire un choix de



complétion de  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\sigma)$  dans  $\mathbb{R}^d$ . Heureusement, tous les champs toriques quantiques ainsi obtenus sont isomorphes et ces isomorphismes respectent une condition de cocycle.

### 6.3.1.1 Cônes de dimension $d$

Supposons que  $\sigma$  soit un cône de dimension  $d$  i.e.  $\text{Vect}_{\mathbb{R}}(\sigma) = \mathbb{R}^d$ . Notons  $h_{\sigma} : \mathbb{Z}^I \rightarrow \Gamma$  la restriction de  $h$  sur  $\mathbb{Z}^I$ ,  $h_{\sigma\mathbb{C}} : \mathbb{C}^I \rightarrow \mathbb{C}^d$  l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire qui est associée et  $\hat{\sigma}$  le cône de  $\mathbb{R}^n$  défini par

$$\hat{\sigma} = \text{Cone}(e_i, i \in I) \quad (6.1)$$

et  $\tilde{\sigma}$  sa restriction sur  $\mathbb{R}^I$

Soit  $\mathcal{B} = (v_i, i \in \tilde{I})$  une sous-famille de  $(v_1, \dots, v_p)$  qui est une base de  $\mathbb{C}^d$ . Alors, on peut considérer la décomposition  $\mathbb{C}^I = \mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus \ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$ . L'application  $h_{\sigma\mathbb{C}}$  induit un isomorphisme linéaire  $\psi$  entre  $\mathbb{C}^{\tilde{I}}$  et  $\mathbb{C}^d$ .

Soit  $\chi \in \mathfrak{S}_n$  une permutation telle que  $\chi(\{1, \dots, d\}) = \tilde{I}$ .

**Définition 6.3.1.1.1.** L'application linéaire  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{\tilde{I}} \hookrightarrow \mathbb{C}^I$  définie par

$$e_k \mapsto \psi^{-1}(h_{\mathbb{C}}(e_{\chi(k)}))$$

avec son ensemble de générateurs virtuels  $\chi(\mathcal{G})$  est appelée calibration associée à  $\sigma$  (et  $\mathcal{B}$  et  $\chi$ )

On peut penser cette calibration comme une calibration induite par la calibration  $(h, \mathcal{G})$  sur  $\mathbb{C}^I$ . En effet, l'image de  $\mathbb{Z}^d$  par le morphisme  $\varphi$  est  $\mathbb{Z}^{\tilde{I}}$  (par construction) et le groupe  $\varphi(\mathbb{Z}^n)$  est isomorphe à  $\Gamma$ .

On peut définir une action de  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{C}^I$  en posant pour  $(m, E(t)) \in \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  et  $z \in \mathbb{C}^I$ ,

$$(m, t) \cdot z = E(\varphi(0 \oplus m)) + tz$$

*Remarque 6.3.1.1.2.* L'ineffectivité de cette action vient uniquement de la calibration i.e. le sous-groupe d'ineffectivité de cette action est isomorphe à  $\ker(h)$ .

L'action de  $\mathbb{T}^I$  sur  $\mathbb{C}^I = \mathcal{U}_{\hat{\sigma}}$  commute avec cette action. On peut donc former le quotient  $[\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))]$ .

**Lemme 6.3.1.1.3.** *Le champ quotient  $[\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))]$  ne dépend ni du choix de la base  $\mathcal{B}$  ni de la permutation  $\chi$ . De ce fait, l'action induite par le morphisme  $\varphi$  dépend uniquement de  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Soient  $(\mathcal{B} = (v_i, i \in \tilde{I}), \chi)$  et  $(\mathcal{B}' = (v_i, i \in \tilde{I}'), \chi')$  deux paires (base, permutation). On peut définir les deux isomorphismes associés  $\psi : \mathbb{C}^{\tilde{I}} \rightarrow \mathbb{C}^d$  et  $\psi' : \mathbb{C}^{\tilde{I}'} \rightarrow \mathbb{C}^d$ , et deux morphismes  $\varphi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^I$ ,  $\varphi' : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^{I'}$ . Alors, le morphisme identité est un morphisme  $\alpha$ -équivariant, où  $\alpha$  est le morphisme  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \rightarrow \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  défini par :

$$\alpha(m, E(y)) = (P_{\chi'}^{-1} P_{\chi}(m), E(\varphi(m) - \psi'^{-1} h(\varphi(m))) E(y))$$

où  $P_{\chi}$  est le morphisme linéaire associé à  $\chi$ . En effet, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E(h_{\sigma}^{-1}(\Gamma)) & \xrightarrow{=} & E(h_{\sigma}^{-1}(\Gamma)) \\ \text{action par } \varphi \downarrow & & \downarrow \text{action par } \varphi' \\ \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \end{array}$$

commute. □

**Définition 6.3.1.1.4.** Le champ  $\mathcal{U}_\sigma := [\mathbb{C}^I/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$  est le champ torique quantique associé au cône  $\sigma$  et à la calibration  $\mathfrak{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$ .

Le « tore » associé à  $\mathcal{U}_\sigma$  est le champ  $[\mathbb{T}^I/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$ . On peut munir ce champ d'une structure de tore quantique présenté grâce aux morphismes utilisés pour définir  $\mathcal{U}_\sigma$ .

**Proposition 6.3.1.1.5.**  $(\mathcal{T}_{\mathfrak{h},\mathcal{G}}, \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \psi^{-1}(\Gamma), \mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}, \chi^{-1}(\mathcal{G}), P_\chi : \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{e}_{\chi(i)}, \chi)$  est un tore quantique présenté qui encode le champ  $[\mathbb{T}^I/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$ .

*Démonstration.* Cela vient du fait que le morphisme  $\psi$  est induit par  $\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{C}^I/\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{C}^{\tilde{I}}$  et de l'égalité  $\varphi = \psi^{-1}\mathfrak{h}P_\chi$ .  $\square$

**Notation 6.3.1.1.6.** Dans ce qui suit, on omettra l'isomorphisme et on écrira  $[\mathbb{T}^I/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$  à la place de ce sextuplet.

**Définition 6.3.1.1.7.** Un champ torique quantique affine est un champ  $\mathcal{U}$  avec un tore ouvert dense  $\mathcal{T}$  qui est isomorphe (en tant que champs) à un champ torique quantique associé à un cône et une calibration  $(\mathfrak{h}, \mathcal{G})$  et tel que cet isomorphisme se restreint en un isomorphisme entre  $\mathcal{T}$  et  $\mathcal{T}_{\mathfrak{h},\mathcal{G}}$ .

*Remarque 6.3.1.1.8 (Modèles locaux).* Si  $\sigma$  est non-simplicial (i.e.  $\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})$  est non-vide et est donc non-discret) alors le champ torique quantique associé à  $\sigma$  ne peut pas être décrit par une quasifolde (i.e. localement le quotient d'un  $\mathbb{R}^n$  par un sous-groupe discret, voir [108]), ce qui est le cas pour  $\sigma$  simplicial. C'est le produit de (une version champêtre de) quasifoldes avec le quotient  $\Theta_{|I|-d} := [\mathbb{C}^{|I|-d}/(\mathbb{C}^*)^{|I|-d}]$ . Ce dernier champ peut être décrit comme suit : un point ouvert (donné par l'orbite  $(\mathbb{C}^*)^{|I|-d}$ ), des points localement fermés (donnés par les orbites de la forme  $(\mathbb{C}^*)^J \times 0$  où  $0 < |J| < |I| - d$ ) et un point fermé (donné par l'orbite de  $\{0\}$ ). De plus, l'adhérence du point  $\mathbf{x}_J := (\mathbb{C}^*)^J \times 0$  est

$$\overline{\mathbf{x}_J} = [\mathbb{C}^J \times 0/(\mathbb{C}^*)^{|I|-d}] = \bigcup_{K \subset J} [(\mathbb{C}^*)^K/(\mathbb{C}^*)^{|I|-d}] = \bigcup_{K \subset J} \mathbf{x}_K$$

On obtient donc la stratification par des quasifoldes démontrées dans [12].

*Avertissement 6.3.1.1.9.* Si  $\Gamma$  est un réseau, le champ  $\mathcal{U}_\sigma = [\mathbb{C}^I/\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})] \times \mathcal{B}\mathbb{Z}^{n-d}$  n'est pas une variété (ou plus précisément, un champ représentable par une variété) à cause de la partie en  $\mathcal{B}\mathbb{Z}^{n-d}$ . De plus, si on oublie la partie en  $\mathcal{B}\mathbb{Z}^{n-d}$ , on obtient aussi un champ non-représentable.

Cependant, si on remplace le quotient champêtre par le quotient donné par la théorie géométrique des invariants, on retrouve la variété torique classique associée à  $\sigma$ .

**Proposition 6.3.1.1.10.** Si  $\Gamma$  est discret,  $\mathfrak{h}$  est un isomorphisme et l'ensemble des générateurs virtuels est vide, alors on peut définir la variété torique (classique)  $\mathbf{U}_\sigma$  associée à  $\sigma$  (et  $\Gamma$ ) et

$$\mathbf{U}_\sigma = \mathbb{C}^I // \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))$$

où  $//$  est le quotient catégorique (cf. la définition 1.1.5.11 pour la définition de quotient catégorique).

*Démonstration.* Comme  $\mathfrak{h}$  est un isomorphisme, l'action du groupe  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{C}^I$  est la même action que l'action de  $E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma))$  dessus grâce à l'égalité

$$\{E(\varphi(0 \oplus \mathfrak{m}) + \mathfrak{t}) \mid \mathfrak{m} \in \mathbb{Z}^{n-d}, E(\mathfrak{t}) \in E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))\} = E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma)). \quad (6.2)$$

On conclut de la même façon que dans la proposition 3.6.6.  $\square$

On ne peut pas obtenir l'égalité

$$\mathbb{C}^I // \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})) = [\mathbb{C}^I/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))].$$

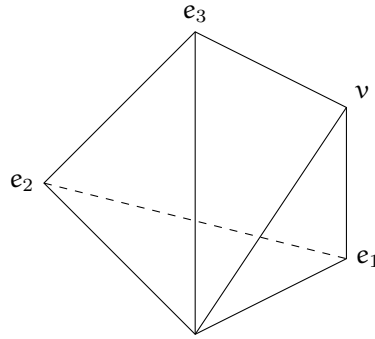
En effet, le quotient catégorique (pour l'action de  $G$ )  $\mathbb{C}^1 \rightarrow \mathcal{U}_\sigma$  est géométrique si, et seulement si,  $\sigma$  est un cône simplicial (cf. [théorème 1.1.5.15](#)).

**Exemple 6.3.1.1.11.** Soit

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}(ae_1 - be_2 + ce_3) + \sum_{i=5}^n \mathbb{Z}v_i \subset \mathbb{R}^3$$

avec  $a, b, c \in \mathbb{R}_{>0}, v_i \in \mathbb{R}^3$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}^3$ , le morphisme  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  est une calibration de  $\Gamma$  défini par  $h(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $h(e_4) = ae_1 - be_2 + ce_3$  et  $h(e_i) = v_i$  pour  $i \geq 5$ . Soit  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, ae_1 - be_2 + ce_3)$  un cône fortement convexe de  $\mathbb{R}^4$ .

FIGURE 6.3 – Le cône  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, ae_1 - be_2 + ce_3)$



Le morphisme  $h_\sigma$  est la restriction  $h|_{\mathbb{Z}^4 \oplus 0}$  et le noyau  $\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$  est la droite

$$\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(-a, b, -c, 1)$$

On a une décomposition  $\mathbb{C}^4 = (\mathbb{C}^3 \oplus 0) \oplus \ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$  et donc, une action de  $\mathbb{Z}^{n-3} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{C}^4$  définie par :

$$(m, E(t)) \cdot s = E(h(0 \oplus m) + t)s \tag{6.3}$$

Alors,  $\mathcal{U}_\sigma = [\mathbb{C}^4 / \mathbb{Z}^{n-3} \times E(\mathbb{C}(-a, b, -c, 1))]$ .

L'action de  $\mathbb{Z}^{n-3} \times E(\mathbb{C}(-a, b, -c, 1))$  sur  $\mathbb{C}^4$  n'est pas effective. En effet,  $\ker(h)$  stabilise tous les points de  $\mathbb{C}^4$ . Il y a aussi des points qui ont des stabilisateurs plus grand :

- Le stabilisateur de  $0_{\mathbb{C}^4}$  est  $\mathbb{Z}^{n-3} \times E(\mathbb{C}(-a, b, -c, 1))$  ;
- Le stabilisateur de  $(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) \oplus 0$  est  $\ker(h) \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  ;
- Le stabilisateur de  $0 \oplus \mathbb{C}^*(-a, b, -c, 1)$  est  $\mathbb{Z}^{n-d} \times \{0\}$  ;
- Le stabilisateur des autres points est  $\ker(h)$ .

Pour le cas  $n = 4$  et  $a = b = c = 1$ , on retrouve une version champêtre de la variété torique  $\mathbb{C}^4 // \mathbb{C}^* = V(yt - xz) \subset \mathbb{C}^4$  (voir [\[47, page 17\]](#)).

### 6.3.1.2 Cônes de dimension $k < d$

Supposons maintenant que  $\sigma = \sigma_1 \subset \mathbb{R}^d$  soit un cône de dimension  $k < d$ . Soit  $J$  un sous-ensemble de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $d - k$  tel que

$$\mathbb{C}^d = \text{Vect}(\sigma) \oplus \text{Vect}(v_j, j \in J)$$

On en déduit que  $\bar{h}_\sigma : \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{C}^d, e_i \mapsto v_i$  est un épimorphisme. On peut maintenant réutiliser la discussion de la sous-sous-section 6.3.1.1 et définir une action de  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_\sigma))$  sur  $\mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J$  (on peut supposer que la permutation  $\chi$  envoie  $\{k+1, \dots, d\}$  sur  $J$ ). On peut remarquer que la variété torique  $\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J = \mathcal{U}_{\bar{\sigma} \times 0}$  est préservée par cette action et donc on peut définir le champ torique affine associé à  $\sigma$  :

$$\mathcal{U}_\sigma := [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(\bar{h}_\sigma)]$$

**Proposition 6.3.1.2.1.** *Le champ torique quantique affine  $\mathcal{U}_\sigma$  est bien défini i.e. si on change la famille  $(v_j, j \in J)$ , on obtient un isomorphisme qui respecte une condition de cocycle.*

*Démonstration.* Soient  $J$  et  $J'$  deux sous-ensembles de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de cardinal  $d - k$  tels que  $\dim(\text{Vect}(v_j, j \in J)) = \dim(\text{Vect}(v_j, j' \in J')) = d - k$  et  $\chi, \chi'$  les deux permutations associées (et  $P_\chi, P_{\chi'}$  les applications linéaires associées). Le morphisme  $P_{\chi'} \circ P_\chi^{-1} : \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{C}^{J'}$  est un isomorphisme et  $\text{id} \oplus P_{\chi'} \circ P_\chi^{-1} : \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^{J'}$  aussi.

On va maintenant montrer que ce morphisme induit un isomorphisme de champs

$$[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_J)] \simeq [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{J'} / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_{J'})]$$

où  $h_J$  (resp.  $h_{J'}$ ) est la restriction de  $h_{\mathbb{C}}$  sur  $\mathbb{Z}^J$  (resp.  $\mathbb{Z}^{J'}$ )

En premier lieu, on peut remarquer que  $x \oplus y \in \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_J) = \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_{J'})$  si, et seulement si,  $x \in \ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$  et  $y = 0$ . On obtient donc le diagramme commutatif suivant (toutes les flèches sont des isomorphismes) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J / \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_J) & \xrightarrow{\text{id} \oplus (P_{\chi'} \circ P_\chi^{-1})} & \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^{J'} / \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_{J'}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}^I / \ker(h_\sigma) \oplus \mathbb{C}^J & \longrightarrow & \mathbb{C}^I / \ker(h_\sigma) \oplus \mathbb{C}^{J'} \end{array}$$

Par construction, l'isomorphisme  $\text{id} \oplus P_{\chi'}^{-1} \circ P_\chi$  descend au quotient. On obtient donc :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J & \xrightarrow{E} & \mathbb{T}^I \times \mathbb{T}^J & \hookrightarrow & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J & \longrightarrow & [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_J)] \\ \text{id} \oplus P_{\chi'} \circ P_\chi^{-1} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow h_{J'} \\ \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^{J'} & \xrightarrow{E} & \mathbb{T}^I \times \mathbb{T}^{J'} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{J'} & \longrightarrow & [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{J'} / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(h_{\sigma\mathbb{C}} \oplus h_{J'})] \end{array}$$

Le morphisme le plus à droite est l'isomorphisme désiré.

Si on prend un troisième sous-ensemble  $J''$  (et une permutation  $\chi''$ ), on obtient deux autres isomorphismes  $h_{J''J}$  et  $h_{J''J'}$ . L'égalité

$$(\text{id} \oplus P_{\chi''} \circ P_{\chi'}^{-1}) \circ (\text{id} \oplus P_{\chi'} \circ P_\chi^{-1}) = \text{id} \oplus P_{\chi''} \circ P_\chi^{-1}$$

induit une égalité entre les isomorphismes de champs

$$h_{J''J'} \circ h_{J'J} = h_{J''J}.$$

□

La proposition suivante se prouve de la même façon que la proposition 6.3.1.1.10.

**Proposition 6.3.1.2.2.** *Si  $\Gamma$  est discret,  $h$  est un isomorphisme et l'ensemble des générateurs virtuels est vide alors*

$$\mathcal{U}_\sigma = \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J // \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_\sigma))$$

**Exemple 6.3.1.2.3.** On va décrire une variante de l'exemple 6.3.1.1.11 :

Soit

$$\Gamma = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 + \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}(ae_1 - be_2 + ce_3) + \sum_{i=5}^n v_i \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^4$$

un sous-groupe de  $\mathbb{R}^4$ , ( $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, [[5, n]]$ ) une calibration de  $\Gamma$  définie par  $h(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, 2, 3$ ,  $h(e_4) = ae_1 - be_2 + ce_3$  et  $h(e_i) = v_i$  pour  $i \geq 5$ , et  $\sigma = \text{Cone}(e_1, e_2, e_3, ae_1 - be_2 + ce_3)$ .

Notons  $k \in \{5, \dots, n\}$  un entier tel que  $(e_1, e_2, e_3, v_k)$  soit une base de  $\mathbb{C}^4$ . Le noyau du morphisme  $\bar{h}_\sigma: \mathbb{C}^4 \oplus \mathbb{C}^{\{k\}} \rightarrow \mathbb{C}^4$  est  $\mathbb{C}(-a, b, -c, 1, 0)$  i.e.  $\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) \oplus 0$ . Alors

$$\mathcal{U}_\sigma = [\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^{n-3} \times E(\mathbb{C}(-a, b, -c, 1, 0))]$$

On va conclure cette sous-section avec la compatibilité de cette construction avec les restrictions à une face des cônes.

**Proposition 6.3.1.2.4.** Soit  $\sigma = \sigma_1$  un cône d'un éventail et  $\tau = \sigma_{1'}$  une face de  $\sigma$ . Alors, on a un isomorphisme

$$\mathcal{U}_\tau \simeq [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{I \setminus I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))] \hookrightarrow \mathcal{U}_\sigma$$

qui se restreint en un isomorphisme de tores

$$[\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\tau\mathbb{C}}))] \simeq [\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^{I \setminus I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))]$$

induit par le morphisme identité de  $\mathcal{F}_{h,g}$ .

*Démonstration.* On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} [\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_\tau))] & \xrightarrow{\ell} & [\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_\sigma))] \\ & \searrow (\bar{h}_\tau, P_x) & \nearrow (\bar{h}_\sigma, P_x')^{-1} \\ & \mathcal{F}_{h,g} & \end{array}$$

Comme  $h_\sigma(e_i) = h_\tau(e_i)$  pour tout  $i \in I'$  (et donc  $[h_\sigma]^{-1} \circ [h_\tau]([e_i]) = [e_i]$ ) alors  $\ell$  peut être étendu à un isomorphisme  $\mathcal{U}_\tau \rightarrow [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{I \setminus I'} \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_\sigma))]$ .  $\square$

### 6.3.1.3 Morphismes toriques entre champs toriques quantiques affines

On va utiliser la même définition de morphisme torique que dans la définition 3.4.2.14.

**Définition 6.3.1.3.1.** Un morphisme torique entre deux champs toriques quantiques affines  $\mathcal{U}_{\sigma_1} = [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / G_1]$  et  $\mathcal{U}_{\sigma_2} = [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$  est un morphisme de champs  $[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / G_1] \rightarrow [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$  qui se restreint en morphismes de tores quantiques présentés  $[\mathbb{T}^I \times \mathbb{T}^J / G_1] \rightarrow [\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$

Par définition de morphismes toriques, un tel morphisme de tores induit un morphisme de tores quantiques  $\mathcal{F}_{h,g} \rightarrow \mathcal{F}_{h',g'}$  et donc deux morphismes linéaires ( $L: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d'}, H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n'}$ ). De plus,  $L(\sigma) \subset \sigma'$  et  $H(\hat{\sigma}) \subset \hat{\sigma}'$ . Ces morphismes forment donc un morphisme d'éventails quantiques. Réciproquement, nous allons voir comment associer à un morphisme d'éventails quantiques un morphisme torique :

Soient  $\sigma$  un cône de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\sigma'$  un cône de dimension  $k'$  de  $\mathbb{R}^{d'}$ ,  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{\sigma}'$  les cônes associés dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^{n'}$ .

Soit  $(L, H): (\sigma, h) \rightarrow (\sigma', h')$  un morphisme d'éventails quantiques.

Par définition de morphismes d'éventails quantiques, il existe un cône  $\tilde{\sigma}' = \tilde{\sigma}_{1'}$  de  $\Delta'_{h'}$ , tel que  $H(\tilde{\sigma}) \subset \tilde{\sigma}'$ . On va adapter la construction de [81, section 5.1]. Dans un premier temps, on va commencer par remplacer

la calibration  $h$  par le morphisme  $\varphi$  (utilisé dans la définition dans  $\mathcal{U}_\sigma$ ) dans le diagramme (3.2) :  
 Soit  $J$  un sous-ensemble de cardinal  $d - k$  de  $\{1, \dots, n\}$  tel que

$$\mathbb{C}^d = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\sigma) \oplus \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}_j, j \in J).$$

Soit  $\tilde{J}$  un sous-ensemble  $J$  tel que pour tout  $j \in \tilde{J}$ ,  $L(\mathbf{v}_j) \notin L(\text{Vect}_{\mathbb{C}}(\sigma))$  et tel que la famille  $(L(\mathbf{v}_j), j \in \tilde{J})$  est libre. Soit  $J'$  un sous-ensemble de cardinal  $d' - \dim(\sigma')$  de  $\{1, \dots, n\}$  contenant  $\tilde{J}$  tel que

$$\mathbb{C}^{d'} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\sigma') \oplus \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\mathbf{v}'_j, j \in J').$$

Notons  $h_J : \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{C}^d$  (resp.  $h_{J'} : \mathbb{C}^{J'} \rightarrow \mathbb{C}^{d'}$ ) l'application linéaire  $e_j \mapsto \mathbf{v}_j$  for all  $j \in J$  (resp.  $e_j \mapsto \mathbf{v}'_j$  for all  $j \in J'$ ). En résumé, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J & \xrightarrow{h_{\sigma\mathbb{C}} + h_J} & \mathbb{C}^d \\ \tilde{L} \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbb{C}^{I'} \oplus \mathbb{C}^{J'} & \xrightarrow{h_{\sigma'\mathbb{C}} + h_{J'}} & \mathbb{C}^{d'} \end{array} \quad (6.4)$$

où  $\tilde{L}$  est le morphisme  $\mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J = \ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) \oplus (\mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus \mathbb{C}^J) \rightarrow \ker(h'_{\sigma'\mathbb{C}}) \oplus (\mathbb{C}^{\tilde{I}'} \oplus \mathbb{C}^{J'})$  défini par :

$$\forall w \in \ker(h_{\sigma\mathbb{C}}), \forall z \in \mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus \mathbb{C}^J, \tilde{L}(w, z) = (H(w), \psi'^{-1}(L(h_{\sigma\mathbb{C}}(z))))$$

où  $\psi'$  est le morphisme induit par  $h'_{\sigma'}$ , utilisé dans la définition de  $\mathcal{U}_\sigma$ . Ce morphisme est défini car  $H(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \subset \ker(h'_{\sigma'\mathbb{C}})$  car  $H(\hat{\sigma}) \subset \hat{\sigma}'$  et  $(L, H)$  est un morphisme d'éventails quantiques.

Soient  $\chi$  et  $\chi'$  des permutations utilisées dans les définitions des champs toriques  $\mathcal{U}_\sigma$  et  $\mathcal{U}_{\sigma'}$  i.e. des permutations telles que :

$$\chi(\{1, \dots, k\}) = \tilde{I}, \chi(\{k+1, \dots, d\}) = J$$

et

$$\chi'(\{1, \dots, k'\}) = \tilde{I}', \chi'(\{k'+1, \dots, d'\}) = J'.$$

Soient  $P_\chi \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $P_{\chi'} \in GL_{n'}(\mathbb{R})$  les deux isomorphismes linéaires associés.

On peut étendre le diagramme (6.4) avec les morphismes  $\varphi = \psi^{-1} \circ h_{\mathbb{C}} \circ P_\chi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J$  et  $\varphi' = \psi'^{-1} \circ h'_{\mathbb{C}} \circ P_{\chi'} : \mathbb{C}^{n'} \rightarrow \mathbb{C}^{I'} \oplus \mathbb{C}^{J'}$  utilisés pour définir les champs toriques  $\mathcal{U}_\sigma$  et  $\mathcal{U}_{\sigma'}$  (et plus précisément, utilisés pour définir une action de  $\mathbb{Z}^{n-d}$  (resp.  $\mathbb{Z}^{n'-d'}$ ) sur  $\mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J$  (resp.  $\mathbb{C}^{I'} \oplus \mathbb{C}^{J'}$ ) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J & \xrightarrow{h_{\sigma\mathbb{C}} + h_J} & \mathbb{C}^d \\ P_{\chi'}^{-1} H P_\chi \downarrow & & \tilde{L} \downarrow & & \downarrow L \\ \mathbb{C}^{n'} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbb{C}^{I'} \oplus \mathbb{C}^{J'} & \xrightarrow{h_{\sigma'\mathbb{C}} + h_{J'}} & \mathbb{C}^{d'} \end{array} \quad (6.5)$$

Après ce remplacement, on peut suivre la construction de [81, Corollary 5.6, section 5.1] pour associer aux morphismes  $(H_{\chi\chi'} := P_{\chi'}^{-1} H P_\chi, \tilde{L})$  un morphisme torique  $\mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$  :

Notons  $E_I : \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J$  l'application définie par :

$$((z_i)_{i \in I}, (w_j)_{j \in J}) \mapsto ((E(z_i))_{i \in I}, (w_j)_{j \in J})$$

et  $\bar{E}_J : \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J \rightarrow \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$  l'application définie par

$$((z_i)_{i \in I}, (w_j)_{j \in J}) \mapsto ((z_i)_{i \in I}, (E(w_j))_{j \in J})$$

On définit de la même façon  $E'_I, \bar{E}'_{J'}$ . On peut remarquer que  $E' = E'_I \circ \bar{E}'_{J'}$ . On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J & \xrightarrow{E_I} & \mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J & \hookrightarrow & \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J & \xrightarrow{\bar{E}_J} & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J \\
 \tilde{\Gamma} \downarrow & & \bar{\Gamma} \downarrow & & \bar{\Gamma} \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbb{C}^{I'} \oplus \mathbb{C}^{J'} & \xrightarrow{E'_{I'}} & \mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{C}^{J'} & \hookrightarrow & \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{C}^{J'} & \xrightarrow{\bar{E}'_{J'}} & \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'}
 \end{array} \tag{6.6}$$

Le morphisme  $\tilde{\Gamma}$  descend sur  $\mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J$  car  $\tilde{\Gamma}(\tilde{\sigma}) \subset \tilde{\sigma}'$  mais puisqu'on n'a pas fait assez de restrictions sur  $J$  et  $J'$ , le morphisme  $\bar{\Gamma}$  n'a aucune raison de descendre en un morphisme  $\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J \rightarrow \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'}$  (ce qui est déjà le cas dans le cas simplicial).

Soit  $T \in \mathfrak{A}$  et

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{T} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J \\
 \downarrow & & \\
 T & & 
 \end{array}$$

un objet de  $\mathcal{U}_\sigma(T)$ .

Soit  $\tilde{T}$  le produit fibré

$$\tilde{T}_m \times_{\bar{E}_J} (\mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J) = \left\{ (\tilde{t}, z) \in \tilde{T} \times (\mathbb{C}^I \oplus \mathbb{C}^J) \mid m(\tilde{t}) = \bar{E}_J(z) \right\}.$$

Le groupe  $\mathbb{Z}^{n-k} \times E_I(\ker(h_\sigma))$  agit sur  $\tilde{T}$  par :

$$(p, E_I(w_1, w_2)) \cdot (\tilde{t}, z_1, z_2) = ((\text{pr}_k(p), E(w_1, w_2)) \cdot \tilde{t}, z_1 + w_1, E(w_2)z_2)$$

où  $\text{pr}_k : \mathbb{Z}^{n-k} = \mathbb{Z}^{n-d} \oplus \mathbb{Z}^{d-k} \rightarrow \mathbb{Z}^{n-d}$  est la projection (on prend la même définition pour  $\text{pr}'_{k'} : \mathbb{Z}^{n'-k'} \rightarrow \mathbb{Z}^{n'-d'}$ ).

L'application linéaire  $H_{XX'}$  vérifie, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,

$$H_{XX'}(e_i) \in \mathbb{Z}^{k'} \oplus 0$$

L'application  $H_{XX'}$  est de la forme  $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & M \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,n'}(\mathbb{Z})$  (on n'a pas besoin de la partie supérieure puisque on compose avec l'application  $E_I$ ).

Grâce à tout cela, on peut définir le  $\mathbb{Z}^{n'-d'} \times E'(\ker(h_{\sigma'\mathbb{C}}))$ -fibré principal  $\tilde{T}'$  par

$$\tilde{T}' := \hat{T} \times_{(\text{pr}'_{k'} \circ M) \times \bar{E}'_{J'} \circ \bar{\Gamma}} (\mathbb{Z}^{n'-d'} \times E'(\ker(h_{\sigma'\mathbb{C}})))$$

avec le morphisme équivariant associé

$$\tilde{m} : (\tilde{t}, z, (q, E'(w))) \in \tilde{T}' \mapsto \bar{E}'_J(\bar{\Gamma}(z)) \cdot E'(\varphi'(0 \oplus q) + w) \in \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'}$$

Donc,

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{T}' & \xrightarrow{\tilde{m}} & \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} \\
 \downarrow & & \\
 T & & 
 \end{array}$$

est un objet de  $\mathcal{U}_{\sigma'}(T)$ .

**Lemme 6.3.1.3.2.** *Le carré de gauche et le carré de droite du diagramme suivant sont cartésiens :*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \hat{\mathbb{T}} & \longrightarrow & \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J & \xrightarrow{\bar{L}} & \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{C}^{J'} & \xleftarrow{g} & \hat{\mathbb{T}} \times_{M \times \bar{L}} (\mathbb{Z}^{n'-d'} \times E'_{I'}(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma'} \mathbb{C}))) \\
 \downarrow & & \downarrow \bar{E}_J & & \downarrow \bar{E}'_{J'} & & \downarrow f \\
 \tilde{\mathbb{T}} & \xrightarrow{m} & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J & \dashrightarrow & \mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} & \xleftarrow{\tilde{m}} & \tilde{\mathbb{T}}' \\
 & \searrow & & & & \nearrow & \\
 & & \mathbb{T} & & & & 
 \end{array}$$

où

$$f(\tilde{\mathfrak{t}}, z, \mathfrak{q}, E'_{I'}(\mathfrak{t})) = (\tilde{\mathfrak{t}}, z, \text{pr}'_{k'}(\mathfrak{q}), E'(\mathfrak{t}))$$

et

$$g(\tilde{\mathfrak{t}}, z, \mathfrak{q}, E'_{I'}(\mathfrak{t})) = E'_{I'}(\varphi'(0 \oplus \mathfrak{q}) + \mathfrak{t}) \cdot \bar{L}(z)$$

*Démonstration.* Voir la preuve de [81, Lemma 5.3].  $\square$

On définit l'image d'un morphisme entre objets de  $\mathcal{U}_\sigma$  de la même façon que dans [81, diagram 6.10]. On obtient un morphisme de champs  $\iota: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$ .

**Théorème 6.3.1.3.3.**

- *Le morphisme de champs  $\iota$  est un morphisme torique.*
- *Soit  $\sigma \subset \mathbb{R}^d$ ,  $\sigma' \subset \mathbb{R}^{d'}$ ,  $\sigma'' \subset \mathbb{R}^{d''}$  trois cônes fortement convexes et soient  $(L, H)$ ,  $(L', H')$  deux morphismes d'éventails quantiques entre les éventails associés à ces cônes. Notons  $\ell, \ell'$  les morphismes toriques associés et  $\ell''$  le morphisme torique associé à  $(L' \circ L, H' \circ H)$ . Alors,*

$$\ell'' = \ell' \circ \ell \tag{6.7}$$

- *Soit  $\ell$  un morphisme de tores entre  $\mathcal{T}_{n,g}$  et  $\mathcal{T}_{n',g'}$  et soit  $(L, H)$  les applications linéaires induites. Alors,  $\ell$  s'étend en un morphisme torique  $\mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$  si, et seulement si,  $(L, H)$  est un morphisme d'éventails quantiques.*

*Démonstration.* Le second point se montre de la même façon que dans [81, Lemma 5.4] et le premier et le troisième se montre comme dans [81, Theorem 6.2].  $\square$

Les deux premiers points impliquent que l'on a défini un foncteur entre la sous-catégorie pleine des éventails quantiques donnée par un cône et la catégorie des champs toriques quantiques affines. Ce foncteur est une équivalence de catégories grâce au troisième point.

On peut maintenant donner le lien entre cette construction des champs toriques affines définie dans ce chapitre et celle donnée dans le [chapitre 3](#).

**Proposition 6.3.1.3.4.** *Supposons  $\sigma$  simplicial. Alors, on a un isomorphisme torique :*

$$\mathcal{U}_\sigma \simeq \mathcal{U}_{\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k), \mathbb{P}_X^{-1} \circ \varphi}^{\text{simp}}$$

où  $k$  est la dimension de  $\sigma$  et  $\mathcal{U}^{\text{simp}}$  correspond à la construction du [chapitre 3](#).

*Démonstration.* Si  $\sigma$  est simplicial alors  $\mathfrak{h}_{\sigma \mathbb{C}}$  est un monomorphisme et  $\bar{\mathfrak{h}}_\sigma$  est un isomorphisme (on notera  $\varphi$  l'isomorphisme utilisé dans la construction de  $\mathcal{U}$  et  $\chi$  la permutation utilisée). Le morphisme  $(\bar{\mathfrak{h}}_\sigma \mathbb{P}_X, \mathbb{P}_X)$  est un isomorphisme d'éventails quantiques entre l'éventail induit par les cônes  $C_{k,d} = \text{Cone}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)$



et la calibration  $P_X^{-1} \circ \varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow P_{X^{-1}}(\bar{h}_\sigma^{-1}(\Gamma))$  et l'éventail induit par le cône  $\sigma$  et la calibration  $h$  :  
Le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{P_X^{-1}\varphi} & \mathbb{C}^I \\ P_X \downarrow & & \downarrow \bar{h}_{\sigma\mathbb{C}P_X} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}^d \end{array}$$

car  $\varphi = \bar{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1} \circ h \circ P_X$ . L'application  $\bar{h}_{\sigma\mathbb{C}P_X}$  envoie  $C_{k,d}$  sur  $\sigma$  puisque

$$\bar{h}_{\sigma\mathbb{C}P_X}(e_i) = \bar{h}_{\sigma\mathbb{C}}(e_{X(i)}) = v_{X(i)} \in \sigma$$

Les autres points sont immédiats.

On en déduit qu'il y a un isomorphisme torique (grâce au [théorème 6.3.1.3.3](#))

$$\mathcal{U}_\sigma \simeq \mathcal{U}_{\text{Cone}(e_1, \dots, e_k), P_X^{-1} \circ \varphi}^{\text{simp}}$$

□

## 6.3.2 Champs toriques quantiques

### 6.3.2.1 Définitions

Soient  $\sigma = \sigma_I = \text{Cone}(v_i, i \in I)$  et  $\tau = \sigma_J = \text{Cone}(v_j, j \in J)$  deux cônes de  $\Delta$ . Notons  $\tilde{\sigma}$  (resp.  $\tilde{\tau}$ ) le cône associé (voir (6.1)) de  $\mathbb{R}^I$  (resp.  $\mathbb{R}^J$ ),  $h_\sigma$  (resp.  $h_\tau$ ) le morphisme de groupes associé. Dans cette sous-section, nous allons voir comment recoller ces champs toriques quantiques qui leur sont associés.

On peut supposer que  $\sigma$  et  $\tau$  sont de dimension  $d$  mais la construction suivante fonctionne pour des cônes de dimension plus petite.

Soit  $H_{\sigma\tau} : \mathbb{C}^{I \cup J} \rightarrow \mathbb{C}^d$  le morphisme linéaire tel que  $H_{\sigma\tau|_{\mathbb{C}^I}} = h_{\sigma\mathbb{C}}$  and  $H_{\sigma\tau|_{\mathbb{C}^J}} = h_{\tau\mathbb{C}}$ . Le morphisme identité  $\mathcal{I}_{d,g} \rightarrow \mathcal{I}_{d,g}$  induit des isomorphismes de tores

$$[\mathbb{T}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))] \simeq [\mathbb{T}^{I \cup J} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau\mathbb{C}}))] \quad (6.8)$$

$$[\mathbb{T}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(h_{\tau\mathbb{C}})] \simeq [\mathbb{T}^{I \cup J} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau\mathbb{C}}))] \quad (6.9)$$

De plus, ces morphismes s'étendent en des isomorphismes toriques entre  $\mathcal{U}_\sigma = [\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})]$  et  $[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau}))]$  et entre  $\mathcal{U}_\tau = [\mathbb{C}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\tau\mathbb{C}})]$  et  $[\mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau}))]$  de la même façon que dans la [proposition 6.3.1.2.4](#).

Notons  $K_I := (I \cup J) \setminus I$  et  $K_J := (I \cup J) \setminus J$ .

Comme l'intersection  $\sigma \cap \tau$  est non vide, l'intersection  $\{0\} \times \tilde{\tau} \cap \tilde{\sigma} \times \{0\}$  dans  $\mathbb{R}^{I \cup J}$  l'est aussi. La théorie classique nous donne alors un ouvert torique  $\mathcal{S}_{\sigma\tau}$  de  $\mathbb{U}_{\{0\} \times \tilde{\tau}}$ ,  $\mathcal{S}_{\tau\sigma}$  un ouvert torique de  $\mathbb{U}_{\tilde{\sigma} \times \{0\}}$  et un isomorphisme torique  $\varphi : \mathcal{S}_{\sigma\tau} \rightarrow \mathcal{S}_{\tau\sigma}$ . Grâce à la décomposition  $\mathbb{C}^{I \cup J} = \mathbb{C}^{K_I} \oplus \mathbb{C}^{I \cap J} \oplus \mathbb{C}^{K_J}$ , on obtient :

$$\mathbb{U}_{\tilde{\sigma} \times \{0\}} = \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{K_I}, \mathbb{U}_{\{0\} \times \tilde{\tau}} = \mathbb{T}^{K_J} \times \mathbb{C}^J \subset \mathbb{C}^{I \cup J} \quad (6.10)$$

et

$$\varphi = \text{id} : \mathcal{S}_{\sigma\tau} = \mathbb{T}^{K_J} \times \mathbb{C}^{I \cap J} \times \mathbb{T}^{K_I} \rightarrow \mathcal{S}_{\tau\sigma} = \mathbb{T}^{K_I} \times \mathbb{C}^{I \cap J} \times \mathbb{T}^{K_J} \quad (6.11)$$

L'identité descend en un isomorphisme de champs (grâce à l'isomorphisme linéaire induit par la permutation  $\chi'^{-1}\chi$  et du [théorème 6.3.1.3.3](#))

$$[\mathcal{S}_{\tau\sigma} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau}))] \simeq [\mathcal{S}_{\sigma\tau} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(H_{\sigma\tau}))]$$

(car les variétés toriques  $\mathcal{S}_{\sigma\tau}$ ,  $\mathcal{S}_{\tau\sigma}$  sont préservées par ces actions).

On obtient, grâce à l'égalité (6.11) et aux isomorphismes (6.8) et (6.9), un isomorphisme torique  $g_{IJ}$  entre  $\mathcal{U}_{\tau\sigma} := [\mathbb{T}^K \times \mathbb{C}^{I \cap J} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \hookrightarrow [\mathbb{C}^I / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$  et  $\mathcal{U}_{\sigma\tau} := [\mathbb{C}^{I \cap J} \times \mathbb{T}^{K_I} / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\tau\mathbb{C}}))] \hookrightarrow [\mathbb{C}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\tau\mathbb{C}}))]$ .

*Remarque 6.3.2.1.1.* Les changements de cartes vérifient une condition de cocycle vu que l'identité la vérifie.

Grâce à tout cela, on peut définir des champs toriques quantiques généraux :

**Définition 6.3.2.1.2.** Soit  $T \in \mathfrak{A}$ . Un objet de  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}$  au-dessus de  $T$  est un recouvrement  $(T_I := T_{\sigma_I})$  de  $T$  indicé par l'ensemble des cônes maximaux  $\mathcal{I}_{\max}$  avec des objets

$$\begin{array}{c} \tilde{T}_I \xrightarrow{m_I} \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^K \\ \downarrow \\ T_I \end{array}$$

de  $[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^K / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{\mathfrak{h}}_{\sigma_I \mathbb{C}}))](T_I)$  pour tout  $\sigma_I \in \mathcal{I}_{\max}$ , vérifiant pour tout couple  $(I, I')$  avec une intersection non vide  $J$

$$g_{II'} \left( \begin{array}{c} \tilde{T}_{I \supset J} \xrightarrow{m_I} \mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}} \\ \downarrow \\ T_I \end{array} \right) = \begin{array}{c} \tilde{T}_{I' \supset J} \xrightarrow{m_{I'}} \mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I \\ \downarrow \\ T_{I'} \end{array}$$

où  $\tilde{T}_{I' \supset J} := m_I^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}})$  et  $\tilde{T}_{I \supset J} := m_{I'}^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I})$

Un morphisme de  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}}$  au-dessus d'un morphisme torique  $T \rightarrow S$  est définie de la même façon que dans la proposition 3.4.2.13 (avec les modifications nécessaires).

### 6.3.2.2 Morphismes toriques

Un morphisme de champs toriques quantiques  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathfrak{g}'}$  est une collection de morphismes toriques compatibles entre les cartes affines. Autrement dit,

**Définition 6.3.2.2.1.** Un morphisme  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathfrak{g}'}$  de champs toriques quantiques est une collection de morphismes toriques  $l_\sigma: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$  pour tout cônes maximaux de  $\Delta$  compatible avec le recollement i.e. si l'intersection de  $\sigma$  et  $\tau$  est non-vide alors le morphisme  $l_\sigma$  (resp.  $l_\tau$ ) se restreint en un morphisme  $\mathcal{U}_{\tau\sigma} \rightarrow \mathcal{U}_{\tau'\sigma'}$  (resp.  $\mathcal{U}_{\sigma\tau} \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'\tau'}$ ) et qui vérifie l'égalité suivante sur  $\mathcal{U}_{\tau\sigma}$

$$g'_{\sigma'\tau'} l_\sigma = l_\tau g_{\sigma\tau} \quad (6.12)$$

pour toute paire de cônes  $\sigma, \tau$  d'intersection non vide.

Dans la sous-sous-section 6.3.1.3, on a prouvé la correspondance entre les morphismes de champs toriques quantiques affines et les morphismes entre cônes. Nous allons maintenant la compléter :

Soit  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathfrak{g}} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathfrak{g}'}$  un morphisme de champs toriques quantiques i.e. une collection de morphismes toriques  $l_\sigma: \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{\sigma'}$  vérifiant les égalités (6.12).

Soient  $(L_\sigma, H_\sigma)$  les applications linéaires associées à  $l_\sigma$ ,  $(g_{\sigma\tau}, k_{\sigma\tau})$  les isomorphismes linéaires associés à  $g_{\sigma\tau}$  et  $(g_{\sigma'\tau'}, k'_{\sigma'\tau'})$  les isomorphismes linéaires associés à  $g'_{\sigma'\tau'}$ . Donc, grâce au deuxième point du théorème 6.3.1.3.3, les équations (6.12) deviennent :

$$g'_{\sigma'\tau'} \circ H_\sigma = H_\tau \circ g_{\sigma\tau} \text{ et } k'_{\sigma'\tau'} \circ L_\sigma = L_\tau \circ k_{\sigma\tau} \quad (6.13)$$

On peut donc recoller ces morphismes d'éventails quantiques en un morphisme  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \rightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$ . Réciproquement, un morphisme d'éventails quantiques  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \rightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  définit un morphisme torique entre les champs toriques quantiques affines associés vérifiant (6.12) i.e. définit un morphisme torique  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}'}$

Cela prouve donc le théorème central suivant :

**Théorème 6.3.2.2.2.** *La correspondance  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  est fonctorielle et définit une équivalence de catégories entre la catégorie d'éventail quantique calibrés et la catégorie des champs toriques quantiques.*

## 6.4 Construction TGI

Dans cette section, on va regarder la réalisation des champs toriques quantiques comme un champ quotient.

On peut construire le recollement des champs toriques quantiques d'une façon différente que celle de la section précédente :

Soit  $\mathcal{S}$  le recollement des variétés toriques  $\mathbb{C}^I$  et  $\mathbb{C}^J$  le long de l'intersection  $\{0\} \times \tilde{\tau} \cap \tilde{\sigma} \times \{0\}$ . Alors, on peut réaliser le recollement de  $\mathcal{U}_\sigma$  et  $\mathcal{U}_\tau$  comme le champ quotient  $[\mathcal{S}/\mathbb{Z}^{n-d} \times \mathbb{E}(\ker(H_{\sigma\tau}))]$ . On en déduit

**Théorème 6.4.1.** *Notons  $A$  l'ensemble  $A := \bigcup_{\sigma \in \Delta} I$ . Soit  $\tilde{A}$  un sous-ensemble  $\{1, \dots, n\} \setminus \mathcal{G}$  tel que la famille  $(v_i, i \in \tilde{A})$  soit libre et tel que*

$$\mathbb{C}^d = \text{Vect}(v_i, i \in A) \oplus \text{Vect}(v_i, i \in \tilde{A}).$$

Soit  $\mathfrak{h}_A : \mathbb{Z}^{A \cup \tilde{A}} \rightarrow \Gamma$  le morphisme de groupes défini par  $\mathfrak{h}(e_i) = v_i$  pour  $i \in A \cup \tilde{A}$ . Notons  $\mathcal{S}_A$  la variété torique définie par l'éventail associé (voir (6.1)) de  $\Delta$  dans  $\mathbb{R}^A$  :

$$\Delta_{\mathfrak{h}} \cap \mathbb{R}^A = \{\tau \mid \exists \sigma \in \Delta, \tau \leq \hat{\sigma} \cap \mathbb{R}^A\}.$$

On définit une action de  $\mathbb{Z}^{n-d} \times \mathbb{E}(\ker(\mathfrak{h}_A))$  sur  $\mathcal{S}_A \times \mathbb{T}^{\tilde{A}}$  de la même façon que dans la sous-section 6.3.1.2. Alors,

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} \simeq [\mathcal{S}_A \times \mathbb{T}^{\tilde{A}}/\mathbb{Z}^{n-d} \times \mathbb{E}(\ker(\mathfrak{h}_A))]$$

comme champs

De plus, de la même façon que dans le début de la sous-section 6.3.2, on a un isomorphisme torique

$$[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J/\mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})] \simeq [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{I^c}/\mathbb{Z}^{n-d} \times \ker(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}})]$$

On en déduit une réalisation de  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  comme un quotient global (qui ressemble à la TGI) :

**Théorème 6.4.2.** *Soit  $\mathcal{S}$  la variété torique associée à l'éventail  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  associé à  $\Delta$  et  $\mathfrak{h}$ . Alors, on a un isomorphisme de champs*

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} \simeq [\mathcal{S}/\mathbb{Z}^{n-d} \times \mathbb{E}(\ker(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}))] \quad (6.14)$$

qui se restreint en un isomorphisme torique entre les différents tores quantiques sur chaque carte affine.

Contrairement au cas simplicial, on ne peut pas réaliser  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  comme le quotient d'une variété torique par une action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  par la transformation de Gale (le « TGI quantique » du théorème 3.6.7), ce qui sera démontré dans chapitre 7.

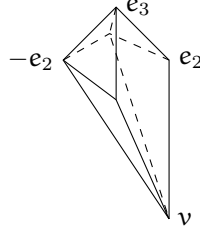
**Exemple 6.4.3.** Soit  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ . Soit  $v = (-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon}, -\frac{2}{\varepsilon})$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\Gamma = \mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}v$  un sous-groupe de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathfrak{h} : \mathbb{Z}^6 \rightarrow \Gamma$  une calibration standard de  $\Gamma$  telle que  $\mathfrak{h}(e_4) = -e_1$ ,  $\mathfrak{h}(e_5) = -e_2$ ,  $\mathfrak{h}(e_6) = v$  et  $\Delta$

l'éventail de  $\mathbb{R}^3$  dont les cônes maximaux sont

$$\Delta_{\max} = \{\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \\ \text{Cone}(\mathbf{e}_1, \pm \mathbf{e}_2, \mathbf{v}), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_2, \mathbf{v}), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{v})\}$$

C'est l'éventail normal associé à (un déformation de) la tranche non-simple du flop d'indice (2,2) du cube (voir [21, figure 5] pour la description de ce flip ou le chapitre 9).

FIGURE 6.4 – Le polytope associé à l'éventail  $\Delta$



Il contient six cônes maximaux simpliciaux et un cône maximal non-simplicial. On associe à chacun un champ torique quantique affine (comme dans l'exemple 6.3.1.1.11) et on les recolle. Voyons comment le décrire globalement :

La variété  $\mathcal{S}$  associée à  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  est :

$$\mathcal{S} = (\mathbb{C}^2 \setminus \{0\})^3 \setminus [\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 \times (\mathbb{C}^*)^2 \cup \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}] \cup (\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C})$$

et le noyau de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  est

$$\ker(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}) = \mathbb{C}(1, 0, 0, 1, 0, 0) \oplus \mathbb{C}(0, 1, 0, 0, 1, 0) \oplus \mathbb{C}\left(-\frac{1}{\varepsilon}, \frac{2+2\varepsilon}{\varepsilon}, -\frac{2}{\varepsilon}, 0, 0, -1\right)$$

Le champ torique quantique  $\mathcal{Z}_{\Delta, \mathfrak{h}, \emptyset}$  est isomorphe au champ quotient  $[\mathcal{S}/\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}))]$  où  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}))$  agit sur  $\mathcal{S}$  par :

$$(p, E(t)) \cdot z = E(\mathfrak{h}(p) + t)z$$

## 6.5 Oubli de la calibration et structure de gerbe

Dans cette section, nous allons donner l'analogue de la section 3.5 pour les champs toriques quantiques non-simpliciaux.

On peut associer à chaque champ torique quantique  $\mathcal{Z}_{\sigma} = [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))]$  un « champ torique quantique non-calibré »  $\mathcal{Z}_{\sigma}^{\text{noncal}} := [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma))]$ .

Plus précisément, si on note  $\Xi$  le noyau de  $\mathfrak{h}$ ,  $T$  un objet de  $\mathfrak{A}$  et  $(\tilde{T}, m)$  un objet de  $\mathcal{Z}_{\sigma}(T)$  alors, puisque

$$\mathfrak{h} \times \text{id}: \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))}{\Xi \times 0} = E(\Gamma) \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}})) = E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma))$$

est un  $\Xi$ -revêtement, le morphisme  $\tilde{T}^{\text{noncal}} = \tilde{T}/\Xi \rightarrow T$  est un  $E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma))$ -fibré principal.

Le morphisme  $m^{\text{noncal}}: [\tilde{t}] \in \tilde{T}^{\text{noncal}} \mapsto m(\tilde{t}) \in \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$  est bien définie car

$$\forall \xi \in \Xi, \forall \tilde{t} \in \tilde{T}, m((\xi, 0) \cdot \tilde{t}) = E(\varphi(\xi, 0))m(\tilde{t}) = m(\tilde{t})$$

En d'autres termes, un champ torique quantique non-calibré est le champ obtenu en oubliant l'ineffectivité de l'action de  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}))$  sur  $\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$ .

**Définition 6.5.1.** Le champ torique quantique associé à  $\sigma_I$  et au groupe  $\Gamma$  est le champ

$$\mathcal{U}_\sigma = [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / E(\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}^{-1}(\Gamma))]$$

où  $|J| = n - \dim(\sigma)$

On peut définir des morphismes entre champs toriques quantiques affines non-calibrés de la même façon que dans la définition 6.3.1.3.1 :

**Définition 6.5.2.** Un morphisme torique entre deux champs toriques quantiques affines non-calibrés  $\mathcal{U}_{\sigma_1} = [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / G_1]$  and  $\mathcal{U}_{\sigma_2} = [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$  est un morphisme de champs  $[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / G_1] \rightarrow [\mathbb{C}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$  qui se restreint en un morphisme de tores présentés non-calibrés  $[\mathbb{T}^I \times \mathbb{T}^J / G_1] \rightarrow [\mathbb{T}^{I'} \times \mathbb{T}^{J'} / G_2]$

On peut voir, en suivant la preuve de théorème 6.3.1.3.3, qu'un morphisme de champs toriques quantiques affines descend au quotient et induit un morphisme de champs toriques quantiques affines non-calibrés. Cela définit donc un foncteur  $f : \mathcal{U}_\sigma \mapsto \mathcal{U}_\sigma^{\text{noncal}}$  entre la catégorie des champs toriques affines et celle des champs toriques affines non-calibrés.

*Remarque 6.5.3.* La présence du noyau de  $\mathfrak{h}_{\sigma\mathbb{C}}$  dans la description de  $\mathcal{U}_\sigma$  entraîne qu'il est nécessaire d'avoir deux morphismes (L, H) pour définir des morphismes entre champs toriques quantiques non-simpliciaux.

**Lemme 6.5.4.** Ce foncteur coïncide avec le foncteur  $f$  du lemme 3.5.4 sur les champs toriques quantiques simpliciaux.

De plus, le foncteur  $f$  induit (grâce au lemme 6.2.4) un foncteur  $\tilde{f}$  sur la catégorie de tores quantiques présentés définie par

$$\tilde{f}(\mathcal{F}_{\mathfrak{h}, \mathcal{G}}, \mathfrak{h}' : \mathbb{Z}^N \rightarrow \mathfrak{G}, \mathcal{G}', L, H, s) = (\mathcal{F}_\Gamma, L)$$

et

$$\tilde{f}(\mathcal{L}, \mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{L}', \mathcal{H}', \mathcal{S}') = (\mathcal{L}, \mathcal{L}')$$

**Proposition 6.5.5.** On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\sigma & \xrightarrow{\ell} & \mathcal{U}_{\sigma'} \\ \downarrow f & & \downarrow f \\ \mathcal{U}_\sigma^{\text{noncal}} & \xrightarrow{\ell^{\text{noncal}}} & \mathcal{U}_{\sigma'}^{\text{noncal}} \end{array}$$

On peut adapter la définition de champs torique quantiques non-calibrés au cas non-simplicial :

**Définition 6.5.6.** Soit  $(\Delta, \mathfrak{h} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  un éventail quantique. Soit  $T \in \mathfrak{A}$ . Un objet de  $\mathfrak{X}_{\Delta, \Gamma}$  au-dessus de  $T$  est un recouvrement  $(T_I := T_{\sigma_I})$  de  $T$  indexé par l'ensemble des cônes maximaux  $\Delta_{\max}$  avec l'image par  $f$  de l'objet

$$\begin{array}{ccc} \tilde{T}_I & \xrightarrow{m_I} & \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^K \\ \downarrow & & \\ T_I & & \end{array}$$

de  $[\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^K / \mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(\bar{h}_{\sigma_I \mathbb{C}}))](\mathbb{T}_I)$  pour tout  $\sigma_I \in \Delta_{\max}$ , satisfaisant pour tout couple  $(I, I')$  ayant une intersection non-vide  $J$

$$f \left( g_{II'} \left( \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{T}}_{I \supset J} & \xrightarrow{m_I} & \mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{T}_I & & \end{array} \right) \right) = f \left( \begin{array}{ccc} \tilde{\mathbb{T}}_{I' \supset J} & \xrightarrow{m_{I'}} & \mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I} \\ \downarrow & & \\ \mathbb{T}_{I'} & & \end{array} \right) \quad (6.15)$$

où  $\tilde{\mathbb{T}}_{I' \supset J} := m_{I'}^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_{I'} \sigma_I})$  et  $\tilde{\mathbb{T}}_{I \supset J} := m_I^{-1}(\mathcal{S}_{\sigma_I \sigma_{I'}})$

Un morphisme de  $\mathcal{X}_{\Delta, \Gamma}$  au-dessus d'un morphisme torique  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$  est défini en appliquant le foncteur  $f$  à un morphisme de  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g}$  au-dessus de  $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{S}$ .

La définition de champs toriques quantiques non-calibrés utilise le foncteur d'oubli  $f$  car, comme remarqué précédemment (cf. la remarque 6.5.3), on a besoin de plus de données qu'un éventail quantique non-calibré pour définir les applications de transitions.

De la même façon que dans la proposition 3.5.2, on a :

**Théorème 6.5.7.** *Le morphisme  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \Gamma}$  est une gerbe analytique de bande  $\mathbb{Z}^{\text{rg}(\Xi)}$ . En particulier, si  $\Xi = 0$  alors c'est un isomorphisme.*

La structure de gerbe induit, au niveau homotopique, un  $\mathbb{T}^{\text{rk}(\Xi)}$ -fibré principal de  $\mathcal{X}_{\Delta, \Gamma}$  à homotopie près. La fin de cette section sera dédiée à le décrire.

Soit  $\sigma = \sigma_I \in \Delta$  un cône maximal,  $h_{\sigma \mathbb{C}}$  l'application  $\mathbb{C}$ -linéaire qui lui est associée et  $\psi : \mathbb{C}^I / \ker(h_{\sigma \mathbb{C}}) \rightarrow \mathbb{C}^d$  l'application linéaire induite par  $h_{\sigma \mathbb{C}}$ .

Soit  $\tilde{I}$  un sous-ensemble de  $I$  tel que  $(h(e_i), i \in \tilde{I})$  soit une base de  $\text{Vect}(\sigma)$ ,  $J$  un ensemble de cardinal  $d - \dim(\sigma)$  tel que

$$\text{Vect}(h(e_i), i \in I \cup J) = \mathbb{C}^d,$$

soit  $\chi \in \mathfrak{S}_n$  une permutation telle que

$$\chi(\{1, \dots, \dim(\sigma)\}) = \tilde{I} \text{ et } \chi(\{\dim(\sigma) + 1, \dots, d\}) = J \quad (6.16)$$

et  $P_\chi \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  l'application linéaire associée à  $\chi$ .

Soit  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$  l'application linéaire  $\psi^{-1} h P_\chi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^I / \ker(h_\sigma) \times \mathbb{C}^J$ . Grâce aux conditions (6.16), on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J / \ker(h_\sigma) \\ (\psi^{-1}, \text{id}_{\mathbb{C}^{n-d}}) \circ E_k \downarrow & & \downarrow E_I \\ \mathbb{T}^I / E(\ker(h_{\sigma \mathbb{C}})) \times \mathbb{C}^J \times \mathbb{C}^{n-d} & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & \mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J / \ker(h_\sigma) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{C}^I / E(\ker(h_{\sigma \mathbb{C}})) \times \mathbb{C}^J \times \mathbb{C}^{n-d}] & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & [\mathbb{C}^I \times \mathbb{C}^J / E(\ker(h_\sigma))] \\ (\text{id}, E, \text{id}) \downarrow & & \downarrow \bar{E}_J \\ [\mathbb{C}^I / E(\ker(h_{\sigma \mathbb{C}})) \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{C}^{n-d}] & \xrightarrow{\hat{\varphi}} & [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J / E(\ker(h_\sigma))] \\ \bar{E}_d \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{C}^I / E(\ker(h_{\sigma \mathbb{C}})) \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{T}^{n-d}] & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{U}_\sigma \end{array}$$

où, pour tout  $(z_1, z_2) \in \mathbb{T}^I \times \mathbb{C}^J$ ,  $w \in \mathbb{C}^{n-d}$

$$\bar{\varphi}([z_1], z_2, w) = ([E(\varphi_1(0 \oplus w))z_1], \varphi_2(0 \oplus w) + z_2)$$

et  $z \in \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$ ,  $w \in \mathbb{C}^{n-d}$ ,

$$\hat{\varphi}([z_1], z_2, w) = ([E(\varphi(0 \oplus w))z])$$

(on peut traduire ces égalités en termes de fibrés principaux).

Le groupe  $\mathbb{Z}^{n-d}$  agit sur  $[\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{C}^{n-d}$  par translation sur le dernier facteur et sur  $[\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{C}^{n-d}$  par le morphisme  $\varphi$ . Le morphisme  $\hat{\varphi}$  est équivariant pour ces deux actions. Donc, le morphisme  $\hat{\varphi}$  descend en un morphisme de champs  $[\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{T}^{n-d} \rightarrow \mathcal{U}_\sigma$ .

De la même façon, la projection sur le premier facteur

$$([\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J) \times \mathbb{C}^{n-d} \rightarrow [\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J$$

est équivariante pour l'action (à la source) de  $\mathbb{Z}^{n-d}$  définie par, pour  $p \in \mathbb{Z}^{n-d}$ ,  $(z, w) \in \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$

$$p \cdot (z, w) = (E(\varphi(0 \oplus p))z, w + p) \quad (6.17)$$

(c'est bien défini puisque les actions sont multiplicatives) et l'action de  $\mathbb{Z}^{n-d}$  sur le but définie, pour  $p \in \mathbb{Z}^{n-d}$  et pour  $(z, w) \in \mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J$ , par

$$p \cdot z = E(\varphi(0 \oplus p))z \quad (6.18)$$

La projection descend donc en un morphisme de champs :

$$\begin{array}{ccc} ([\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J) \times \mathbb{C}^{n-d} & \xrightarrow{\pi_1} & ([\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J) \\ \downarrow & & \downarrow \\ [(\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J) \times \mathbb{C}^{n-d}/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{Z}^{n-d} & \xrightarrow{p} & \mathcal{U}_\sigma \end{array} \quad (6.19)$$

De plus, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} ([\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J) \times \mathbb{C}^{n-d} & \xrightarrow{\pi_1} & [\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \\ (\hat{\varphi}, \text{id})^{-1} \downarrow & \nearrow \hat{\varphi} & \\ [\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{C}^{n-d} & & \end{array}$$

Le morphisme  $(\hat{\varphi}, \text{id})^{-1}$  est équivariant pour l'action (6.17) et pour la translation sur le dernier facteur. On obtient donc le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} [(\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^J) \times \mathbb{C}^{n-d}/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{Z}^{n-d} & \xrightarrow{p} & \mathcal{U}_\sigma \\ (\hat{\varphi}, \text{id})^{-1} \downarrow & \nearrow \Phi & \\ [\mathbb{C}^I/E(\ker(\mathbf{h}_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{T}^{n-d} & & \end{array} \quad (6.20)$$

Les diagrammes (6.19) et (6.20) peuvent être vus comme des trivialisations du morphisme  $\Phi$ . Le morphisme  $\Phi$  est donc un  $\mathbb{C}^{n-d}$ -fibré principal trivial.

On peut donc remarquer que les applications de transition de  $\mathcal{Z}_{\Delta, \mathbf{h}, \mathbf{g}}$  sont obtenues par descente au

quotient de fonctions de transitions des différents  $[\mathbb{C}^I/E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J$ . On peut donc définir un champ  $\mathcal{X}_\Delta$  (remplaçant la variété torique  $\mathcal{S}$  de la section 3.5) donné par le recollement de la famille de champs  $[\mathbb{C}^I/E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))] \times \mathbb{T}^J \times \mathbb{T}^{n-d}$  indexé par les cônes maximaux de  $\Delta$  avec ces applications de transition (de la même façon que pour la proposition 3.4.2.13).

Par functorialité, on a :

**Théorème 6.5.8.** *Le morphisme  $\Phi: \mathcal{X}_\Delta \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, h, g}$  est un  $\mathbb{C}^{n-d}$ -fibré principal.*

Comme  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \Gamma}$  est une  $\mathbb{Z}^{\text{rg}(\Gamma)}$ -gerbe alors

**Corollaire 6.5.9.** *Le morphisme  $f\Phi: \mathcal{X}_\Delta \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \Gamma}$  est un  $\mathbb{T}^{\text{rg}(\Xi)} \times \mathbb{C}^{n-d-\text{rg}(\Xi)}$ -fibré principal et donc un  $\mathbb{T}^{\text{rg}(\Xi)}$ -fibré principal à homotopie près.*





# DEUXIÈME CONSTRUCTION NON-SIMPLICIALE

DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT, NOUS AVONS VU COMMENT DÉCRIRE UN CHAMP TORIQUE QUANTIQUE ASSOCIÉ À UN ÉVENTAIL QUANTIQUE constitué de cônes possiblement non-simpliciaux. On a vu que cette construction vérifiait de bonnes propriétés : elle induit une équivalence de catégories entre les éventails et les champs toriques (voir [théorème 6.3.2.2](#)), les champs toriques ainsi définis sont des champs quotients (voir [théorème 6.4.2](#)),...

Cependant, elle se comporte mal lorsque l'on considère cette construction en famille : le groupe par lequel on quotiente dans le [théorème 6.4.2](#) dépend de la calibration que l'on considère. Le but de ce chapitre est de présenter une variante de la construction du [chapitre 6](#) dans lequel le groupe que l'on va considérer ne varie pas (et va être  $\mathbb{C}^{n-d}$  comme dans le [théorème 3.6.7](#)).

Dans la [première section](#), nous allons voir comment construire ces champs toriques quantiques et décrire leur tore. Puis dans la [deuxième section](#), nous allons montrer qu'il y a toujours une équivalence de catégories entre les éventails et les champs toriques. Enfin, dans la [troisième section](#), nous allons voir les différences avec la construction du [chapitre 6](#).

## 7.1 Définition

On va commencer par donner une définition de champ torique quantique associé à un éventail qui est plus facile que celle du chapitre précédent :

**Définition 7.1.1.** Soit  $(\Delta, \mathfrak{h}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  une éventail quantique. Le champ torique quantique associé  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  est le champ quotient

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} := [\mathcal{S}(\Delta)/\mathbb{C}^{n-d}]$$

où  $\mathcal{S}(\Delta) \subset \mathbb{C}^n$  est la variété torique (classique) définie par l'éventail  $\Delta_{\mathfrak{h}}$  et l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathcal{S}$  est définie par

$$t \cdot z = E(k(t))z \tag{7.1}$$

où  $k$  est une transformée de Gale de  $\mathfrak{h} \otimes \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

*Remarque 7.1.2.* • Cette définition étend celle des champs toriques quantiques donnée par un éventail simplicial (par le [théorème 3.6.7](#))

- On retrouve le cas classique en quotientant par l'ineffectivité (afin d'enlever la gerbe) puis en remplaçant le quotient champêtre par un quotient catégorique (grâce à [la proposition 3.6.6](#), on réobtient le [théorème 1.1.5.15](#))

- Cette écriture permet de munir  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  d'une structure de champ analytique équivariant (i.e. est donné par la champification d'un groupoïde interne de  $\mathfrak{U}$ ) :

$$\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} = [\pi_1, \text{act}: \mathcal{S} \times \mathbb{C}^{n-d} \rightrightarrows \mathcal{S}]$$

où le groupe de Lie qui agit sur  $\mathcal{S} \times \mathbb{C}^{n-d}$  est le groupe de Lie produit  $((\mathbb{C}^*)^n, \times) \times (\mathbb{C}^{n-d}, +)$  et celui sur  $\mathcal{S}$  est  $((\mathbb{C}^*)^n, \times)$ .

On va maintenant retrouver le tore dense de  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  grâce à la proposition suivante (c'est un corollaire du [théorème 3.6.7](#) mais on va redonner la preuve dans le cas plus simple du tore) :

**Proposition 7.1.3.** *Soit  $(\mathfrak{h}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathcal{G})$  une calibration. Le champ  $[(\mathbb{C}^*)^n / \mathbb{C}^{n-d}]$  et le tore  $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  sont isomorphes.*

*Démonstration.* On a un isomorphisme, donné par descente au quotient de l'exponentielle,

$$[\mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^n \times \mathbb{C}^{n-d}] \simeq [(\mathbb{C}^*)^n / \mathbb{C}^{n-d}]$$

où l'action à droite de  $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathbb{C}^n$  est

$$(\mathfrak{m}, \mathfrak{t}) \cdot z = z + \mathfrak{m} + k(\mathfrak{t})$$

Par le premier théorème d'isomorphisme (et comme les actions de  $\mathbb{Z}^n$  et  $\mathbb{C}^n$  commutent), on a un deuxième isomorphisme

$$[\mathbb{C}^n / \mathbb{Z}^n \times \mathbb{C}^{n-d}] \simeq [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^n]$$

par le passage au quotient du morphisme linéaire  $\mathfrak{h}$  (grâce à l'égalité  $k(\mathbb{C}^{n-d}) = \ker(\mathfrak{h})$ ) ; l'action de  $\mathbb{Z}^n$  sur  $\mathbb{C}^d$  est donné par  $\mathfrak{h}$ .  $\square$

**Corollaire 7.1.4.** *Par l'isomorphisme du [la proposition 7.1.3](#), le tore quantique  $\mathcal{T}_{\mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  est dense dans  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$ .*

## 7.2 Équivalence de catégories

On va maintenant démontrer dans ce cadre le théorème d'équivalence de catégories entre les éventails quantiques et les champs toriques quantiques (comme pour le [théorème 3.4.2.16](#) et le [théorème 6.3.2.2.2](#))

**Lemme 7.2.1.** *L'association  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \mapsto \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  est fonctorielle.*

*Démonstration.* Soit  $(L, H): (\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \rightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  un morphisme d'éventails quantiques calibrés. Par définition, le morphisme  $H$  est un morphisme d'éventails  $\Delta_{\mathfrak{h}} \rightarrow \Delta_{\mathfrak{h}'}$  et induit donc un morphisme torique  $\tilde{H}: \mathcal{S}(\Delta) \rightarrow \mathcal{S}(\Delta')$ . On complète le diagramme (3.2) :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-d} & \xrightarrow{k} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathfrak{h}} & \mathbb{R}^d & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \tilde{H} & & \downarrow H & & \downarrow L & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n'-d'} & \xrightarrow{k'} & \mathbb{R}^{n'} & \xrightarrow{\mathfrak{h}'} & \mathbb{R}^{d'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

(car pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n-d}$ ,  $\mathfrak{h}'(H(k(x))) = L(\mathfrak{h}(k(x))) = 0$  et donc il existe (un unique par injectivité de  $k$ )  $z \in \mathbb{R}^{n'-d'}$  tel que  $k'(z) = H(k(x))$ ). On peut donc définir  $\tilde{H}(x) := z$  et remarquer que l'application  $\tilde{H}$  ainsi définie est linéaire).

Notons  $h$  le morphisme de champs induit par le morphisme de groupoïdes

$$(\mathcal{S}(\Delta) \times \mathbb{C}^{n-d} \rightrightarrows \mathcal{S}(\Delta)) \xrightarrow[\overline{H}]{(\overline{H}, \tilde{H})} (\mathcal{S}(\Delta') \times \mathbb{C}^{n'-d'} \rightrightarrows \mathcal{S}(\Delta'))$$

Il nous reste plus qu'à montrer que  $h$  est un morphisme torique.

Pour cela, il suffit de montrer que le diagramme suivant de morphismes de groupoïdes commute

$$\begin{array}{ccccc} [\mathcal{S}(\Delta) \times \mathbb{C}^{n-d} \rightrightarrows \mathcal{S}(\Delta)] & \xrightarrow[\overline{H}]{(\overline{H}, \tilde{H})} & [\mathcal{S}(\Delta') \times \mathbb{C}^{n'-d'} \rightrightarrows \mathcal{S}(\Delta')] & & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ [(\mathbb{C}^*)^n \times \mathbb{C}^{n-d} \rightrightarrows (\mathbb{C}^*)^n] & \xrightarrow[\overline{H}]{(\overline{H}, \tilde{H})} & [(\mathbb{C}^*)^{n'} \times \mathbb{C}^{n'-d'} \rightrightarrows (\mathbb{C}^*)^{n'}] & & (7.2) \\ \simeq \downarrow & & \simeq \downarrow & & \\ [(\mathbb{C}^*)^d \times \mathbb{Z}^{n-d} \rightrightarrows (\mathbb{C}^*)^d] & \xrightarrow[\overline{L}]{(\overline{L}, \tilde{H})} & [(\mathbb{C}^*)^{d'} \times \mathbb{Z}^{n'-d'} \rightrightarrows (\mathbb{C}^*)^{d'}] & & \end{array}$$

Ainsi, par champification, on aurait :

$$\begin{array}{ccc} [\mathcal{S}(\Delta)/\mathbb{C}^{n-d}] & \xrightarrow{h} & [\mathcal{S}(\Delta')/\mathbb{C}^{n'-d'}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ [(\mathbb{C}^*)^n/\mathbb{C}^{n-d}] & \xrightarrow{h} & [(\mathbb{C}^*)^{n'}/\mathbb{C}^{n'-d'}] \\ \uparrow \simeq & & \uparrow \simeq \\ \mathcal{T}_{h,g} & \xrightarrow{\ell} & \mathcal{T}_{h',g'} \end{array}$$

où  $\ell$  est le morphisme de tores donné par la paire  $(L, H)$ .

La commutativité du diagramme (7.2) vient de la commutativité du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n/\mathbb{C}^{n-d} & \xrightarrow{[H]} & \mathbb{C}^{n'}/\mathbb{C}^{n'-d'} \\ [h] \downarrow & & \downarrow [h'] \\ \mathbb{C}^d & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}^{d'} \end{array}$$

où  $[\cdot]$  désigne le passage au quotient, et des isomorphismes du [la proposition 7.1.3](#).  $\square$

**Proposition 7.2.2.** *Soient  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  et  $(\Delta', h', \mathcal{G}')$  des éventails quantiques calibrés. Un morphisme de tores  $\mathcal{T}_{h,g} \rightarrow \mathcal{T}_{h',g'}$  (donné par une paire de morphismes  $(L, H)$ ) s'étend en un morphisme torique  $\mathcal{X}_{\Delta, h, g} \rightarrow \mathcal{X}_{\Delta', h', g'}$  si, et seulement si,  $(L, H)$  est un morphisme d'éventails quantiques calibrés.*

*Démonstration.* La réciproque est donnée dans la preuve du [lemme 7.2.1](#). Supposons donc que le morphisme se prolonge. Quitte à recoller, on peut supposer que les deux éventails ne contiennent qu'un cône maximal et donc  $\mathcal{S}(\Delta) = \mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}$  et  $\mathcal{S}(\Delta') = \mathbb{C}^J \times (\mathbb{C}^*)^{J^c}$ . Soient  $z \in \mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}$  et  $(E(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $(\mathbb{C}^*)^n$  convergeant vers  $z$ . Il faut alors montrer que la suite  $(\overline{H}E(z_n))$  tend vers un élément de  $\mathbb{C}^J \times (\mathbb{C}^*)^{J^c}$  car cela impliquerait que  $H$  (resp.  $L$ ) envoie les générateurs de  $\text{Cone}(e_i, i \in I)$  (resp.  $\sigma_I$ ) sur une combinaison  $\mathbb{N}$ -linéaire des générateurs de  $\text{Cone}(e_j, j \in J)$  (resp de  $\sigma'_J$ ).

Pour cela, on va utiliser le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (\mathbb{C}^*)^n & \xrightarrow{\quad \bar{H} \quad} & (\mathbb{C}^*)^{n'} \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{S} & \xrightarrow{\quad \text{---} \quad} & \mathcal{S}' & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathcal{T}_{h,g} & \xrightarrow{\quad \ell \quad} & \mathcal{T}_{h',g'} \\
 & \swarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{Z}_{\Delta,h,g} & \xrightarrow{\quad \ell \quad} & \mathcal{Z}_{\Delta',h',g'} & & 
 \end{array}$$

Par hypothèse,  $\ell([\mathbf{z}]) \in [\mathbb{C}^J \times (\mathbb{C}^*)^J / \mathbb{C}^{n-d}](\mathbb{C})$  et  $\ell([\mathbf{E}(z_n)]) = [\bar{H}\mathbf{E}(z_n)]$  (où  $[\cdot]$  est le passage au quotient). On en déduit que, comme l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  ne change pas les coordonnées nulles, la suite  $(\bar{H}(\mathbf{E}(z_n)))$  converge dans  $\mathbb{C}^J \times \mathbb{C}^c$   $\square$

**Corollaire 7.2.3.** *Le foncteur  $(\Delta, h, \mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{Z}_{\Delta,h,g}$  est une équivalence de catégories entre la catégorie des éventails quantiques calibrés et la catégorie des champs toriques quantiques (avec comme morphismes les morphismes de champs qui se restreignent en un morphisme de tores).*

### 7.3 Différences

La dernière question à étudier de ce chapitre est de voir les différences entre la construction du chapitre 6 et celle de ce chapitre. Plus précisément, on va montrer que les champs obtenus ne sont pas isomorphes (à cause du fait que leurs groupes d'isotropie ne sont pas isomorphes).

**Lemme 7.3.1.** *Les groupes  $(\mathbb{C}^*, \times) \times (\mathbb{Z}, +)$  et  $(\mathbb{C}, +)$  ne sont pas isomorphes.*

*Démonstration.* Le groupe de torsion de  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{Z}$  est  $\mu_\infty \times \{0\}$  où  $\mu_\infty$  est le groupe des racines de l'unité et celui de  $\mathbb{C}$  est trivial. On en déduit donc que ces deux groupes ne peuvent pas être isomorphes.  $\square$

**Proposition 7.3.2.** *Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire et  $\sigma = \sigma_I$  un cône de dimension  $d$  engendré par les  $h(e_i)$ ,  $i \in I$ . Alors les groupes  $E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \times \ker(h_{\sigma|\mathbb{Z}^I})$  et  $\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$  ne sont pas isomorphes si, et seulement si,  $\sigma$  n'est pas simplicial.*

*Démonstration.* Par le premier théorème d'isomorphisme, on a :

$$E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \simeq \ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) / (\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) \cap \mathbb{Z}^n) = \ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) / \ker(h_{\sigma|\mathbb{Z}^I}).$$

Le rang de  $\ker(h_{\sigma|\mathbb{Z}^I})$  est égal à

$$\text{rang}(\ker(h_{\sigma|\mathbb{Z}^I})) = |I| - d \leq n - d = \dim(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$$

On peut donc décomposer  $\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})$  de la façon suivante :

$$\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\ker(h_{\sigma|\mathbb{Z}^I})) \oplus \mathbb{C}^{|I|-d}$$

On en déduit donc que :

$$E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \simeq (\mathbb{C}^*)^{|I|-d} \times \mathbb{C}^{n-|I|}$$

On utilise le lemme 7.3.1 pour conclure (et le fait que  $|I| = d$  si, et seulement si,  $\sigma_I$  est simplicial).  $\square$

Soit  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^d$  une calibration et  $\sigma$  un cône de  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $\mathcal{U}_\sigma$  le champ torique quantique affine associé à  $\sigma$  dans le [chapitre 6](#) et  $\mathcal{U}'_\sigma$  défini dans ce chapitre.

**Proposition 7.3.3.** *Si  $\sigma$  n'est pas simplicial alors les champs  $\mathcal{U}_\sigma$  et  $\mathcal{U}'_\sigma$  ne sont pas isomorphes.*

*Démonstration.* Le groupoïde associé à  $\mathcal{U}_\sigma$  et le groupoïde associé à  $\mathcal{U}'_\sigma$  ne peuvent pas être Morita-équivalents car leurs groupes d'isotropies (i.e. le stabilisateur d'un point de l'action) ne peuvent pas être isomorphes (voir [127, Theorem 4.4]).

Plus précisément, le stabilisateur de l'action de  $\mathbb{Z}^{n-d} \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  en chaque point de  $(\mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus 0) \times \mathbb{T}^J$  est  $E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}})) \times \ker(h)$  et il n'y a aucun point de  $\mathbb{C}^I \times \mathbb{T}^{I^c}$  avec un stabilisateur isomorphe pour l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$ . En effet, les différents stabilisateurs de l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sont  $k^{-1}(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) \cap \mathbb{C}^K + \ker(h))$  en un point de  $\mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus (\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) \cap \{0\}^K) \times \mathbb{T}^{I^c}$  pour  $\emptyset \neq K \subsetneq I$  et  $k^{-1}(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}) + \ker(h))$  en un point de  $(\mathbb{C}^{\tilde{I}} \oplus \{0\}) \times \mathbb{T}^{I^c}$ . Ces groupes ne peuvent pas être isomorphes à  $E(\ker(h_{\sigma})) \times \ker(h)$  (par la [proposition 7.3.2](#)).  $\square$

Voyons ce résultat sur un exemple :

**Exemple 7.3.4.** Reprenons l'exemple 6.3.1.1.11 avec  $n = 4$  (on va noter  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{c}$  par  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ ) : On a vu que dans  $\mathcal{U}_\sigma$  les stabilisateurs s'écrivent de la façon suivante :

- Le stabilisateur de  $0_{\mathbb{C}^4}$  est  $\mathbb{Z} \times E(\mathbb{C}(-\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_3, 1))$  qui est isomorphe à  $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}$  si  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  ou  $\mathbf{a}_3$  est irrationnel ou  $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$  sinon ;
- Le stabilisateur de  $(\mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \oplus 0) \oplus 0$  est  $\ker(h) \times E(\ker(h_{\sigma\mathbb{C}}))$  qui est isomorphe à  $\mathbb{C}$  si  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  ou  $\mathbf{a}_3$  est irrationnel ou  $\mathbb{Z} \times \mathbb{C}^*$  sinon ;
- Le stabilisateur de  $0 \oplus \mathbb{C}^*(-\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, -\mathbf{a}_3, 1)$  est  $\mathbb{Z} \times \{0\}$  ;
- Le stabilisateur des autres points est  $\ker(h)$  qui est isomorphe à  $0$  si  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ou  $\mathbf{c}$  est irrationnel ou  $\mathbb{Z}$  sinon.

Alors que dans  $\mathcal{U}'_\sigma$ , on a :

- Le stabilisateur de  $0_{\mathbb{C}^4}$  est  $\mathbb{C}$  ;
- Le stabilisateur d'un point de  $\mathbb{C}^I \times \{0\}$  est  $\bigcap_{i \in I} \mathbf{a}_i \mathbb{Z}$  (qui est toujours un sous-groupe fini). En particulier, si  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ou  $\mathbf{c}$  est irrationnel, le stabilisateur d'un point du tore est trivial et est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  s'il y a une seule coordonnée non nulle.



# MORPHISMES BIRATIONNELS : ÉCLATEMENTS

EN GÉOMÉTRIE ALGÈBRE, LES ÉCLATEMENTS sont un outil central : on les retrouve notamment comme exemple élémentaire d'applications birationnelles ou dans la résolution des singularités de variétés (en caractéristique 0) où l'on éclate les singularités d'une variété afin d'obtenir une variété lisse (cf. [70]).

Dans le cas torique classique, les éclatements des points invariants par l'action du tore des variétés toriques sont entièrement décrits de façon combinatoire (voir la [proposition 1.1.4.4](#)). On peut réutiliser les mêmes résultats dans le cas quantique et réussir à définir un éclatement de façon combinatoire et ainsi obtenir un morphisme torique d'éclatement. À la place de prendre  $\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^d \mathbf{u}_i$ , on pourrait aussi définir  $\mathbf{u}_0$  comme une  $\mathbb{N}$ -combinaison linéaire des  $\mathbf{u}_i$  pour obtenir un éclatement à poids du champ torique considéré (ce qui est déjà possible pour les variétés classiques). La principale nouveauté des champs toriques quantique est qu'il serait possible de considérer des poids irrationnels. Malheureusement, dans ce cas-là, on ne peut pas obtenir un morphisme entre l'« éclatement » et le champ du début mais seulement un morphisme entre des ouverts de ces champs.

Le but de ce chapitre est d'introduire les morphismes birationnels entre champs toriques quantiques à travers l'exemple des éclatements. Dans la [première section](#), nous allons donner la définition générale de morphismes birationnels d'éventails qui, par les théorèmes d'équivalence combinatoire-géométrie, induisent un morphisme birationnel entre les champs toriques quantiques associés. Évidemment les éclatements sont un exemple de tel morphisme. Deux cas se présentent alors : soit le morphisme naturel d'éclatement existe et alors on peut examiner les fibres de ces morphismes et leurs propriétés : c'est le cas entier/rationnel (quitte à composer par un revêtement) que l'on étudiera dans la [deuxième section](#), soit le morphisme naturel n'existe pas, ce qui est le cas irrationnel que l'on étudiera dans la [troisième section](#). Dans les deux cas, les fibres (quitte à réduire) de ces éclatements sont des espaces projectifs quantiques généralisant le cas classique où c'est un espace projectif. La [quatrième section](#) sera dédiée à montrer que, sous des conditions assez faibles, des champs toriques quantiques donnés par des éventails complets sont reliés par des éclatements et des contractions.

## 8.1 Morphismes birationnels

On va commencer cette section avec l'exemple classique de l'éclatement de l'origine du plan pour permettre de donner une motivation à la définition générale de morphisme torique birationnel qui sera donnée ensuite.



### 8.1.1 Éclatement en dimension 2

Prenons  $(\mathbb{Z}^3 \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^2, \emptyset)$  une calibration (standard) et notons  $\mathbf{v} = \mathbf{h}(\mathbf{e}_3)$ .

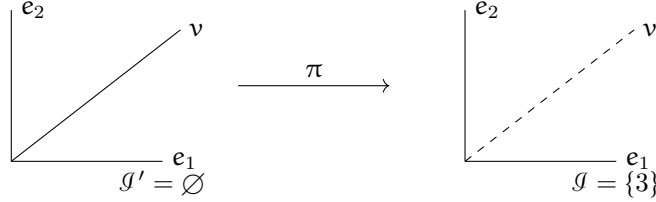


FIGURE 8.1 – Éclatement du plan à l'origine

**Lemme 8.1.1.1.** *Le morphisme d'éclatement  $\pi$  existe si, et seulement si,  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^2$ . Celui-ci est alors*

*donné par le couple  $(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{a} \\ 0 & 1 & \mathbf{b} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3)$*

*Démonstration.* Le premier point vient de la définition des morphismes d'éventails et de l'équivalence de catégories du [théorème 3.4.2.16](#).  $\square$

On obtient donc un morphisme  $\bar{\mathbf{H}} : \mathcal{S}(\Delta') = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{S}(\Delta) = \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$  défini par :

$$\bar{\mathbf{H}}(x, y, z) = (xz^{\mathbf{a}}, yz^{\mathbf{b}}, 1)$$

Le champ torique quantique de gauche (resp. à droite) est le quotient de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}$  (resp. de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^*$ ) par l'action de  $\mathbb{C}$  donné par

$$\mathbf{t} \cdot (z_1, z_2, z_3) = (E(-\mathbf{a}\mathbf{t})z_1, E(-\mathbf{b}\mathbf{t})z_2, E(\mathbf{t})z_3)$$

On en conclut que pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^*$ ,  $\mathbf{H}(x, y, z)$  est dans la même classe d'équivalence que  $(x, y, z)$  (en effet, si  $z = E(\mathbf{t})$  alors  $(xz^{\mathbf{a}}, yz^{\mathbf{b}}, 1) = (-\mathbf{t}) \cdot (x, y, z)$ ). Par conséquent, le morphisme d'éclatement  $\pi$  se restreint en l'identité sur  $[\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}]$ .

*Remarque 8.1.1.2.* Le morphisme identité est toujours défini quel que soit  $\mathbf{v} \in \mathbb{N}^2$ . Cependant, ce n'est pas un morphisme  $\mathcal{S}(\Delta') \rightarrow \mathcal{S}(\Delta)$  mais juste sur des ouverts i.e.  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* \subset \mathcal{S}(\Delta') \rightarrow (\mathbb{C}^2 \times \{0\}) \times \mathbb{C}^* \subset \mathcal{S}(\Delta)$

### 8.1.2 Cas général

L'exemple de la sous-section précédente illustre le fait que pour pouvoir définir des éclatements, il est nécessaire de considérer des applications linéaires  $(\mathbf{L}, \mathbf{H})$  qui sont des morphismes d'éventails sur des sous-éventails :

**Définition 8.1.2.1.** Un morphisme birationnel d'éventails quantiques entre  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  dans  $\Gamma$  et  $(\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$  dans  $\Gamma'$  est une paire d'applications linéaires  $(\mathbf{L} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \mathbf{H} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N)$  tels qu'il existe une paire de sous-éventails  $\tilde{\Delta} \subset \Delta, \tilde{\Delta}' \subset \Delta'$ , des sous-ensembles  $\mathbf{J} \subset \llbracket 1, \mathbf{n} \rrbracket \setminus (\Delta(1) \cup \mathcal{G}), \mathbf{J}' \subset \llbracket 1, \mathbf{n}' \rrbracket \setminus (\Delta'(1) \cup \mathcal{G}')$  tel que  $(\mathbf{L}, \mathbf{H})$  soit un isomorphisme d'éventails toriques entre  $(\tilde{\Delta}, \mathbf{h}, \mathcal{G} \cup (\Delta(1) \setminus \tilde{\Delta}(1)) \cup \mathbf{J})$  et  $(\tilde{\Delta}', \mathbf{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\Delta}'(1)) \cup \mathbf{J}')$ . On notera ce morphisme  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}) \dashrightarrow (\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$ .

*Remarque 8.1.2.2.* On se permet de changer les générateurs qui ne sont ni des générateurs des éventails ni virtuels pour que les morphismes induits par les cobordismes du [chapitre 9](#) soient des morphismes birationnels.

La symétrie de cette définition nous donne le résultat suivant :

**Lemme 8.1.2.3.** *Si  $(L, H)$  est un morphisme birationnel d'éventails quantiques  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \dashrightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  alors  $(L^{-1}, H^{-1})$  est un morphisme birationnel  $(\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}') \dashrightarrow (\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$ .*

Par l'équivalence de catégories du [théorème 3.4.2.16](#), un morphisme birationnel  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \dashrightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  d'éventails induit un morphisme birationnel  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}'}$  i.e. un isomorphisme torique entre deux ouverts  $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_{\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}}$  et  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}_{\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}'}$  qui sont donnés par les éventails  $(\tilde{\Delta}, \mathfrak{h}, \mathcal{G} \cup (\Delta(1) \setminus \tilde{\Delta}(1)) \cup J)$  et  $(\tilde{\Delta}', \mathfrak{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\Delta}'(1)) \cup J')$

**Exemple 8.1.2.4.** Soit  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ . Le  $\alpha$ -éclatement de l'origine du plan est défini par le couple  $(\text{id}_{\mathbb{R}^2}, \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  qui induit un morphisme birationnel entre  $\mathcal{X}' = [\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C} / \mathbb{C}] \dashrightarrow \mathcal{X} = [\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}]$  où l'action de  $\mathbb{C}$  est donné par

$$t \cdot (z_1, z_2, z_3) = (E(-\alpha_1 t)z_1, E(-\alpha_2 t)z_2, E(t)z_3)$$

Comme vu dans [la remarque 8.1.1.2](#), les ouverts toriques en question sont  $\mathcal{U} = \mathcal{V} = [\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}]$  et le morphisme entre les deux est l'identité. Le complémentaire  $\mathcal{X}' \setminus [\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}] = [\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \{0\} / \mathbb{C}]$  est le « diviseur exceptionnel » de l'éclatement (c'est une droite projective quantique) et  $\mathcal{X} \setminus [\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}] = \{0\} \times \mathbb{C}^* / \mathbb{C}$  est le point que l'on a éclaté.

**Proposition 8.1.2.5.** *La composée de deux morphismes birationnels d'éventails est un morphisme birationnel d'éventails.*

*Démonstration.* Soient  $(L_1, H_1) : (\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G}) \dashrightarrow (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}')$  et  $(L_2, H_2) : (\Delta', \mathfrak{h}', \mathcal{G}') \dashrightarrow (\Delta'', \mathfrak{h}'', \mathcal{G}'')$  deux morphismes birationnels d'éventails. Ils induisent des isomorphismes d'éventails

$$(\tilde{\Delta}, \mathfrak{h}, \mathcal{G} \cup (\Delta(1) \setminus \tilde{\Delta}(1)) \cup J) \simeq (\tilde{\Delta}', \mathfrak{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\Delta}'(1)) \cup J')$$

et

$$(\tilde{\tilde{\Delta}}', \mathfrak{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\tilde{\Delta}}'(1)) \cup J) \simeq (\tilde{\tilde{\Delta}}'', \mathfrak{h}'', \mathcal{G}'' \cup (\Delta''(1) \setminus \tilde{\tilde{\Delta}}''(1)) \cup J'').$$

Soit  $(\bar{\Delta}', \mathfrak{h}, \bar{\mathcal{G}}')$  le raffinement commun des éventails  $(\tilde{\tilde{\Delta}}', \mathfrak{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\tilde{\Delta}}'(1)) \cup J)$  et  $(\tilde{\tilde{\Delta}}', \mathfrak{h}', \mathcal{G}' \cup (\Delta'(1) \setminus \tilde{\tilde{\Delta}}'(1)) \cup J)$ . Avec les isomorphismes  $(L_1^{-1}, H_1^{-1})$  et  $(L_2, H_2)$ , on obtient des sous-éventails compatibles de  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  et  $(\Delta'', \mathfrak{h}'', \mathcal{G}'')$ . On en conclut que  $(L_2 L_1, H_2 H_1)$  est un morphisme birationnel.  $\square$

## 8.2 Éclatements rationnels

Cette section traitera du cas où le morphisme d'éclatement est bien défini, c'est-à-dire lorsque le poids de l'éclatement est entier. Tout d'abord, nous allons montrer des résultats généraux sur les fibres de morphismes toriques (entre des champs toriques quantiques affines). Cela permettra de faire une description locale des fibres des champs toriques. Nous allons utiliser ensuite ces résultats pour calculer le diviseur exceptionnel de l'éclatement dans le cas entier puis voir comment adapter cela dans le cas rationnel.

### 8.2.1 Description des fibres

**Théorème 8.2.1.1.** *Soit  $\ell : \mathcal{U}_\sigma := [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^{n-d}] \rightarrow \mathcal{U}_\tau := [\mathbb{C}^{d'} / \mathbb{Z}^{n'-d'}]$  un morphisme torique entre champs toriques affines induit par les applications linéaires  $(L, H)$ . Alors,*

$$\ell^{-1}(0) := [0 / \mathbb{Z}^{n'-d'}] \times_{[\mathbb{C}^{d'} / \mathbb{Z}^{n'-d'}]} [\mathbb{C}^d / \mathbb{Z}^{n-d}] = [\bar{\Gamma}^{-1}(0) / \mathbb{Z}^{n-d}]$$

où  $\bar{L}$  est l'application  $\mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$  définie dans (3.3). Autrement dit, le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{array}{ccc} [\bar{L}^{-1}(0)/\mathbb{Z}^{n-d}] & \hookrightarrow & [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \ell \\ [0/\mathbb{Z}^{n'-d'}] & \xrightarrow{i} & [\mathbb{C}^{d'}/\mathbb{Z}^{n'-d'}] \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $T \in \mathfrak{A}$ . Alors,

$$\ell^{-1}(0)(T) = \left\{ \alpha : T' \rightarrow T, \begin{array}{c} \tilde{T} \xrightarrow{m} \mathbb{C}^d \\ \pi \downarrow \\ T \end{array} \mid \varphi : i(\alpha) \simeq \ell(\pi, m) \right\}$$

L'isomorphisme  $\varphi$  (dans  $[\mathbb{C}^{d'}/\mathbb{Z}^{N'-d'}](T)$ ) est décrit par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{C}^{d'} & \\ & \nearrow 0 & \nwarrow \\ T' & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & \tilde{T} \times_{H_2} \mathbb{Z}^{n-d} \\ & \searrow & \swarrow \\ & T & \end{array}$$

où l'application  $m' : \tilde{T} \times_{H_2} \mathbb{Z}^{N'-d'} \rightarrow \mathbb{C}^{d'}$  est définie par :

$$m'([\tilde{t}, p]) = \bar{L}(m(\tilde{t}))E'(\hbar(p))$$

Comme le triangle supérieur est commutatif alors, pour tout  $\tilde{t} \in \tilde{T}'$ ,

$$\bar{L}(m(\tilde{t})) = 0$$

Autrement dit,  $m$  prend ses valeurs dans  $\bar{L}^{-1}(0)$ .

**Lemme 8.2.1.2.** *Pour tout objet  $T$  dans  $\mathfrak{A}$ , le foncteur d'oubli  $\ell^{-1}(0)(T) \rightarrow [\bar{L}^{-1}(0)/\mathbb{Z}^{n-d}](T)$  est une équivalence de catégories.*

*Démonstration.* Ce foncteur est clairement (essentiellement) surjectif. Il nous reste à montrer qu'il est pleinement fidèle :

Un morphisme  $(\alpha, (\pi, m), \varphi) \rightarrow (\alpha', (\pi', m'), \varphi')$  of  $\ell^{-1}(0)(T)$  est donné par un morphisme  $u : \alpha \rightarrow \alpha'$  et un morphisme  $v : (\pi, m) \rightarrow (\pi', m')$  tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} i(\alpha) & \xrightarrow{i(u)} & i(\alpha') \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \ell(\pi, m) & \xrightarrow{\ell(v)} & \ell(\pi', m') \end{array} \quad (8.1)$$

Pour montrer que le foncteur d'oubli est pleinement fidèle, il nous reste à montrer que l'application

$$F(-) : \text{Hom}((\alpha, (\pi, m), \varphi), (\alpha', (\pi', m'), \varphi')) \rightarrow \text{Hom}((\pi, m), (\pi', m')), (u, v) \mapsto v$$

est bijective.

Dans le diagramme (8.1), on peut voir que  $i(\mathbf{u}) = (\varphi')^{-1}l(\mathbf{v})\varphi$ . En corestreignant l'application équivariante sur 0, on obtient un morphisme de  $[0/\mathbb{C}^{n'-d'}](\mathbb{T})$ .

Cela définit une application de  $\text{Hom}((\pi, \mathfrak{m}), (\pi', \mathfrak{m}'))$  vers  $\text{Hom}((\alpha, (\pi, \mathfrak{m}), \varphi), (\alpha', (\pi', \mathfrak{m}'), \varphi'))$  qui est l'inverse de  $F(-)$ .  $\square$

Le foncteur d'oubli définit un morphisme de champs  $\ell^{-1}(0) \rightarrow [\bar{\mathbb{L}}^{-1}(0)/\mathbb{Z}^{n-d}]$  alors c'est un isomorphisme grâce au lemme 8.2.1.2.  $\square$

**Corollaire 8.2.1.3.** *On peut remplacer  $\{0\}$  par une sous-variété invariante de  $\mathbb{C}^n$  dans l'énoncé du théorème 8.2.1.1 et les  $\mathbb{C}^d$  par des  $\mathbb{C}^k \times \mathbb{T}^{d-k}$ .*

**Notation 8.2.1.4.** Si  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{C}^d$  (ou  $^1$  si  $[\mathbf{t}]$  est l'orbite d'un élément de  $\mathbb{C}^d$ ) alors  $I_{\mathbf{t}} := \{i \in \{1, \dots, d\} \mid t_i \neq 0\}$  et  $\mathbf{t}_{\neq 0} = (t_i)_{i \in I_{\mathbf{t}}}$ .

On continue en calculant l'image réciproque d'une orbite :

**Lemme 8.2.1.5.** *Soit  $\ell$  un morphisme torique  $[\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}] \rightarrow [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n'-d}]$ . Soient  $L = (\alpha_j^i)_{1 \leq i, j \leq d} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $H : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n'}$  les applications linéaires associées à  $\ell$ . Soit  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^d$ . Supposons que  $L$  soit un isomorphisme. Alors l'espace analytique réduit  $X := \bar{\mathbb{L}}^{-1}([\mathbf{t}])^{\text{red}}$  est*

- le point  $E(L_{\bar{\mathbb{C}}^{-1}}(\mathbf{w}))$  si  $\mathbf{t} = E(\mathbf{w}) \in (\mathbb{C}^*)^d$ .
- $\bigcup_I \{(Z, 0_{I_{\pi_2(I)}}) \mid L_I Z = \mathbf{t}_{\neq 0}\}$  où l'union est indexée par toutes les familles  $I = \{(k, j)\}_{k \notin I_{[\mathbf{t}]}} \subset \llbracket 1, d \rrbracket^2$  telles que  $\alpha_j^k \neq 0$  et  $\alpha_j^l = 0$  si  $l \notin \pi_2(I)$ , et les applications  $\pi_i$  sont les projections sur la  $i^{\text{ème}}$  coordonnée et  $L_I = (\alpha_j^i)_{i \notin \pi_1(I), j \notin \pi_2(I)}$ , si  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^d \setminus (\{0_d\} \cup (\mathbb{C}^*)^d)$
- $\bigcup_I \mathbb{C}^I \times 0_{I^c}$  où l'union est indexée par les sous-ensembles  $I$  de  $\{1, \dots, d\}$  tels que pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , il existe  $j \in I^c$ ,  $\alpha_j^i \neq 0$ , si  $\mathbf{t} = 0$

*Démonstration.* Si  $\mathbf{t} \in (\mathbb{C}^*)^d$  alors comme la restriction d'un morphisme torique sur les tores est un morphisme de tores. Alors, on obtient notre résultat grâce au diagramme commutatif (3.1).

Si  $\mathbf{t} \in \mathbb{C}^d \setminus (\{0_d\} \cup (\mathbb{C}^*)^d)$  alors  $I_{\mathbf{t}} \neq \emptyset$  et  $I_{\mathbf{t}} \neq \{1, \dots, d\}$ . Si  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n) \in X$  alors les coordonnées de  $\mathbf{z}$  vérifient les deux conditions suivantes :

1. Pour tout  $i \in I_{[\mathbf{t}]}$  et tout  $l \in \{1, \dots, d\}$ ,  $\alpha_l^i = 0$  ou  $z_l \neq 0$
2. Pour tout  $k \notin I_{[\mathbf{t}]}$ , il existe  $j(k) \in \{1, \dots, d\}$  tel que  $\alpha_{j(k)}^k \neq 0$  et  $z_j = 0$

Par conséquent, si on prend une famille  $\{(k, j(k))\}_{k \notin I_{[\mathbf{t}]}}$  telle que  $\alpha_j^k \neq 0$  et  $\alpha_j^l = 0$  si  $l \notin \pi_2(I)$  alors les coordonnées dans  $I_{[\mathbf{t}]}$  de l'image de  $[\mathbf{z}]$  par  $\varphi$  est 0. Alors, pour les coordonnées restantes, on conclut de la même façon que dans le premier point (même si  $L_I$  n'est pas inversible).

Si  $\mathbf{t} = 0$  alors  $\mathbf{z} \in X$  si, et seulement si, la condition (2) est vérifiée. Alors, pour tout sous-ensemble  $I$  de  $\{1, \dots, d\}$  tel que, pour tout  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ , il existe  $j \in I^c$ ,  $\alpha_j^i \neq 0$ ,  $(z_I, 0_{I^c}) \in X$  pour n'importe quel  $z_I \in \mathbb{C}^I$ . Réciproquement tous les points de  $X$  sont de cette forme.  $\square$

**Exemple 8.2.1.6.** Soit  $\left( L = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, H : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n'} \right)$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ ,  $ad - bc \neq 0$ ) une paire de morphismes linéaires compatibles avec deux calibrations  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  et  $\mathbb{Z}^{n'} \rightarrow \Gamma'$  dans  $\mathbb{R}^2$ . L'application  $\bar{L}$  est donnée par :

$$(z_1, z_2) \mapsto (z_1^a z_2^b, z_1^c z_2^d)$$

et descend au quotient en un morphisme  $\ell : [\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^{n-2}] \rightarrow [\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}^{n'-2}]$ .

Alors,

---

1. C'est la même chose vu que l'action préserve les coordonnées nulles

- Si  $t = \mathbb{Z}^{n-2} \cdot (E(w_1), E(w_2)) \in \mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^{n'-2}$  alors grâce au diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \xrightarrow{L} & \mathbb{C}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ [\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^{n-2}] & \xrightarrow{t} & [\mathbb{T}^2/\mathbb{Z}^{n'-2}] \end{array}$$

on voit que la fibre de  $t$  est  $[E(L^{-1}w)]$  (la compatibilité des quotients vient de la compatibilité de l'application linéaire).

- si  $t = \mathbb{Z}^{n-2} \cdot (0, E(w))$  alors plusieurs cas se présentent :
  - Si  $a = 0$  alors  $b \neq 0$  (et si  $b = 0$  alors  $a \neq 0$ ) et  $z_2 = 0$  (resp.  $z_1=0$ ) alors  $d = 0$  (resp.  $c = 0$ ) sinon on aurait une contradiction avec la non-nullité de la deuxième (resp. première) coordonnée. Il nous reste plus qu'à résoudre  $[z_1^c] = [E(w)]$  (resp.  $[z_2^d] = [E(w)]$ ). La fibre réduite de  $L$  en  $z$  est donc  $[\mu_c E(w/c)] \times 0$  (resp.  $0 \times [\mu_d E(w/d)]$ ) où  $\mu_n$  est le groupe des racines nèmes de l'unité.
  - si  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  alors  $z_1 = 0$  ou  $z_2 = 0$  et on est arrivé à la même conclusion que dans le cas précédent.
- si  $t = (0, 0)$  alors on fait le même raisonnement que précédemment mais en remplaçant  $E(t)$  par 0 et donc la fibre réduite est 0 si la puissance est non nulle.

### 8.2.2 Poids entiers

Dans cette sous-section, on va examiner le cas de l'éclatement (à poids entiers) d'un sous-champ analytique fermé équivariant d'un champ torique quantique affine (donné par un cône simplicial), autrement dit l'éclatement d'un sous-champ  $[0^I \times \mathbb{C}^{I^c}/\mathbb{Z}^{n-d}]$  dans  $\mathcal{U} := [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  : Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d\}$  tel que  $\text{Card}(I) \leq d - 2$ . Soit  $v = \sum_{k \in I} v_k e_k$  un vecteur de  $(\mathbb{N}^*)^I \times 0^{I^c} \subset \mathbb{C}_d = \mathbb{R}_{\geq 0}^d$  tel qu'il existe  $k$  tel que  $h(e_k) = v$ . Quitte à réordonner, on peut supposer que  $d + 1$  convient. Pour tout  $i \in I^c$ , notons  $\sigma_i$  le cône de  $\mathbb{R}^d$  défini par

$$\sigma_i = \text{Cone}(e_1, \dots, \hat{e}_i, v, e_{i+1}, \dots, e_d)$$

Notons  $\Delta(v)$  l'éventail dont les cônes maximaux sont les  $\sigma_i$ . On notera  $f$  le morphisme torique donné par le morphisme d'éventails quantiques  $\Delta(v) \rightarrow \mathbb{C}_d$  donné par le couple  $(\text{id}, H)$  où

$$H = \begin{pmatrix} & v_1 & & \\ \text{id}_{\mathbb{R}^d} & \vdots & & \\ & v_d & & \\ & & & \text{id}_{\mathbb{R}^{n-d-1}} \end{pmatrix}$$

Soit  $L_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  l'isomorphisme linéaire tel que  $L_i(e_k) = e_k$  pour  $k \neq i$  et  $L_i(v) = e_i$  et  $H_i$  la permutation  $(d + 1 \ i) \in \mathfrak{S}_n$ .

Soit  $\mathcal{U}_i = [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  (où  $\mathbb{Z}^{n-d}$  agit sur  $\mathbb{C}^d$  par  $EL_i h H_i^{-1}$ ) le champ torique quantique associé à  $\sigma_i$ .

Le morphisme d'éventails quantiques

$$\mathbb{C}_d \xrightarrow{(L_i^{-1}, H_i^{-1})} \sigma_i \xleftarrow{(\text{id}, H)} \mathbb{C}_d$$

induit un morphisme torique  $f_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}$ .





Chacun de ces morphismes toriques est donné par la descente au quotient de morphismes toriques  $\bar{L}_i: \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}^d$  définis par

$$\forall z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \bar{L}_i(z) = (z_1^N z_i^{Nv_1}, \dots, z_{i-1}^N z_i^{Nv_{i-1}}, z_i^{Nv_i}, z_{i+1}^N z_i^{Nv_{i+1}}, \dots, z_d z_i^{Nv_d})$$

**Lemme 8.2.3.1.** *Si  $N > 1$  alors pour tout  $\alpha \in 0^I \times \mathbb{C}^{I^c}$ , l'espace analytique  $\bar{L}_i^{-1}(\alpha)$  est non-réduit.*

*Démonstration.* Voir le [lemme 8.2.2.3](#). □

## 8.3 Éclatements

On va maintenant passer au cas général des éclatements à poids non-nécessairement entiers. On finira par un autre exemple de morphisme birationnel : une généralisation du « flip d'Atiyah » qui est une construction classique par éclatements et contraction d'une application birationnelle  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ .

### 8.3.1 Éclatements d'un point

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel et  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  une calibration standard de  $\Gamma$  et  $\mathcal{G}$  son ensemble de générateurs virtuels.

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \Gamma$  un vecteur dans l'intérieur de  $C_d$  (i.e. pour tout  $i$ ,  $\alpha_i > 0$ ) tel qu'il existe un élément  $k$  de  $\{1, \dots, d\}$  tel que  $h(e_k) = \alpha$ . Quitte à permuter, on peut supposer  $k = d + 1$ .

Soit  $(\widetilde{C}_d, h, \mathcal{G} \setminus \{k\})$  l'éventail quantique dont les cônes maximaux sont

$$\sigma_i = \text{Cone}(e_1, \dots, \widehat{e}_i, \alpha, e_{i+1}, \dots, e_d) \subset C_d$$

pour  $1 \leq i \leq d$  où  $\widehat{\cdot}$  est un vecteur omis. Le morphisme identité  $\text{id}_{\mathbb{R}^d}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  et le morphisme  $\text{id}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  forment un morphisme birationnel d'éventails quantiques  $(\widetilde{C}_d, h, \mathcal{G} \setminus \{k\}) \rightarrow (C_d, h, \mathcal{G})$ . Il induit un morphisme torique birationnel  $f: \mathcal{X}_{\widetilde{C}_d, h} \dashrightarrow \mathcal{U}_{C_d}$ .

**Définition 8.3.1.1.** Le morphisme  $f: \mathcal{X}_{\widetilde{C}_d, h} \dashrightarrow \mathcal{U}_{C_d}$  est appelé  $\alpha$ -éclatement (ou éclatement de poids  $\alpha$ ) de  $\mathcal{U}_{C_d}$ .

**Définition 8.3.1.2.** On appellera diviseur exceptionnel de cet éclatement le diviseur  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{X}_{\widetilde{C}_d, h, \mathcal{G} \setminus \{k\}}$  où le morphisme  $f$  n'est pas défini i.e. le complément de l'ouvert maximal de  $\mathcal{X}_{\widetilde{C}_d, h, \mathcal{G} \setminus \{k\}}$  où  $f$  est défini.

Par construction, le morphisme  $f$  se restreint en un isomorphisme  $\mathcal{X}_{\widetilde{C}_d, h} \setminus \mathcal{D} \simeq \mathcal{U}_{C_d} \setminus [0/\mathbb{Z}^{n-d}]$ . Ce morphisme est une collection de morphismes birationnels compatibles  $f_i: \mathcal{U}_{\sigma_i} \dashrightarrow \mathcal{U}_{C_d}$  sur les cartes affines.

**Lemme 8.3.1.3.** *Le morphisme  $f_i: [C^d/\mathbb{Z}^{n-d}] \dashrightarrow [C^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  (où l'action à droite est donnée par le morphisme  $h_i := A_i h H_i^{-1}$  où  $A_i$  et  $H_i$  sont les isomorphismes linéaires au cône  $\sigma_i$ ) est défini sur  $[C^{d-1} \times \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^{n-d}]$  (où le facteur  $\mathbb{C}^*$  est en  $i$ ème position).*

*Démonstration.* On enlève dans  $[C^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  l'orbite du tore quantique correspondant au 1-cône de l'éclatement. □

Le diviseur exceptionnel  $\mathcal{U}_i := [C^d/\mathbb{Z}^{n-d}] \setminus [C^{d-1} \times \mathbb{C}^*/\mathbb{Z}^{n-d}] = [C^{\{1, \dots, d\} \setminus i} \times \{0\}^{\{i\}}/\mathbb{Z}^{n-d}]$  est isomorphe (comme champ) à

$$[C^{\{1, d\} \setminus i}/\mathbb{Z}^{n-d}]$$

où  $\mathbb{Z}^{n-d}$  agit sur  $C^{\{1, d\} \setminus i}$  par le morphisme  $\text{pr}_i h: \mathbb{Z}^{n-d} \rightarrow \text{pr}_i \Gamma$  où  $\text{pr}_i: C^d \rightarrow C^{\{1, d\} \setminus i}$  est la projection

$$(z_1, \dots, z_d) \mapsto (z_1, \dots, \widehat{z}_i, \dots, z_d).$$



De ce fait,  $\mathcal{U}_i$  est un champ torique quantique. Les applications de transition de  $\mathcal{X}_{\widetilde{\mathbb{C}}_d, h, \mathcal{G} \setminus \{k\}}$  descendent en des applications de transition entre les champs toriques quantiques  $\mathcal{U}_i$  :

**Théorème 8.3.1.4.** *Soit  $h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  une calibration standard de  $\Gamma$  et  $\mathcal{G}$  son ensemble de générateurs virtuels. La diviseur exceptionnel de  $f : \mathcal{X}_{\widetilde{\mathbb{C}}_d, h, \mathcal{G}} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{C}_d}$  au-dessus de  $\{[0, \dots, 0]\}$  est l'espace projectif quantique donné par les vecteurs*

$$e_1, \dots, e_{d-1}, v_d = - \sum_{k \neq i} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} e_k$$

et la calibration  $(\text{pr}_i A_i h H_i^{-1} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{pr}_i(A_i \Gamma), \mathcal{G} \setminus \{k\})$  où  $(A_i, H_i)$  est la paire de morphismes linéaires associée à un cône  $\sigma_i$  pour un  $i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  fixé.

*Démonstration.* Le lemme 8.3.1.3 nous donne les cartes affines de la fibre. Voyons comment elles se recollent :

Pour tout  $i$  et  $j$ ,

$$\sigma_i \cap \sigma_j = \text{Cone}(e_1, \dots, \hat{e}_i, \alpha, \dots, \hat{e}_j, \dots, e_d) \neq \emptyset$$

Les applications de transition de  $\mathcal{U}_{\sigma_i \cap \sigma_j} \subset \mathcal{U}_{\sigma_i}$  et  $\mathcal{U}_{\sigma_j \cap \sigma_i} \subset \mathcal{U}_{\sigma_j}$  est l'isomorphisme torique défini par l'isomorphisme d'éventails quantiques

$$A_j A_i^{-1} : e_k \mapsto \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq i, j \\ e_j & \text{si } k = i \\ \frac{1}{\alpha_j} e_j - \sum_{k \neq j} \frac{\alpha_k}{\alpha_j} e_k & \text{si } k = j \end{cases}$$

Ce morphisme descend en un isomorphisme  $\widetilde{A}_{ij} : \mathbb{C}^{d-1} \rightarrow \mathbb{C}^{d-1}$  tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \xrightarrow{A_j A_i^{-1}} & \mathbb{C}^d \\ \text{pr}_i \downarrow & & \downarrow \text{pr}_j \\ \mathbb{C}^{d-1} & \xrightarrow{\widetilde{A}_{ij}} & \mathbb{C}^{d-1} \end{array} \quad (8.2)$$

En d'autres termes

$$\widetilde{A}_{ij} : e_k \mapsto \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq i, j \\ - \sum_{k \neq j} \frac{\alpha_k}{\alpha_j} e_k & \text{si } k = j \end{cases}$$

L'application linéaire  $\widetilde{A}_{ij}$  est une bijection puisque  $\det(\widetilde{A}_{ij}) = -\frac{\alpha_i}{\alpha_j} \neq 0$ . Son inverse est l'application

$$\widetilde{A}_{ij}^{-1} : e_k \mapsto \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq i, j \\ - \sum_{k \neq i} \frac{\alpha_k}{\alpha_i} e_k =: v_d & \text{si } k = i \end{cases}$$

Le vecteur  $v_d$  ne dépend pas de  $j$ . De plus, les restrictions de ces morphismes sur le sous-groupe  $\text{pr}_i A_i \Gamma$  sont des isomorphismes. Avec les calculs précédents, il nous reste plus qu'à examiner la deuxième application linéaire de l'application de transition donnée par  $\widetilde{\mathbb{C}}_d$  :

Soit  $i \neq j$  deux éléments de  $\{1, \dots, d\}$ . Par définition, l'isomorphisme linéaire  $H_j H_i^{-1}$  associé à l'applica-

tion de transition entre  $\sigma_i$  et  $\sigma_j$  s'insère dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{H_j H_i^{-1}} & \mathbb{Z}^n \\ \mathcal{A}_i h H_i^{-1} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A}_j h H_j^{-1} \\ \mathbb{C}^d & \xrightarrow{\mathcal{A}_j \mathcal{A}_i^{-1}} & \mathbb{C}^d \end{array}$$

Alors, grâce au diagramme (8.2), on obtient

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{H_j H_i^{-1}} & \mathbb{Z}^n \\ \text{pr}_i \mathcal{A}_i h H_i^{-1} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_j \mathcal{A}_j h H_j^{-1} \\ \mathbb{C}^{d-1} & \xrightarrow{\widetilde{\mathcal{A}}_{ij}} & \mathbb{C}^{d-1} \end{array}$$

On en conclut que les applications de transition  $\{\widetilde{\mathcal{A}}_{ij}, H_j H_i^{-1}\}_j$  sont les applications de transition d'un espace projectif quantique (voir l'exemple 3.4.2.15).  $\square$

**Exemple 8.3.1.5.** Fixons  $d = 2$ ,

$$\Gamma = \mathbb{Z}^2 + (\alpha e_1 + \beta e_2)\mathbb{Z} + (\gamma e_1 + \delta e_2)\mathbb{Z},$$

$$h : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \Gamma, e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto e_2, e_3 \mapsto \alpha e_1 + \beta e_2, e_4 \mapsto \gamma e_1 + \delta e_2$$

et  $\mathcal{G} = \{4\}$  avec  $\alpha, \beta < 0, \gamma, \delta > 0$  et  $\mathbf{v} = (\gamma, \delta) \in \Gamma$ .

La fibre de  $f$  au-dessus  $[0/\mathbb{Z}^2]$  est le champ torique quantique  $\mathcal{X}_{\Delta_1, \text{pr}_1 \mathcal{A}_1 h H_1^{-1}, \emptyset}$  donné par l'éventail

$$\Delta_1 = \{\mathbb{R}_{\leq 0}, \{0\}, \mathbb{R}_{\geq 0}\}$$

sur le groupe (avec sa calibration) :

$$\text{pr}_1 \mathcal{A}_1 h H_1^{-1} : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{pr}_1(\mathcal{A}_1 \Gamma) = \mathbb{Z} + \frac{\gamma}{d} \mathbb{Z} + \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\delta} \mathbb{Z}$$

i.e. c'est la  $\mathbb{Z}^{4-\text{rg}(\Gamma)}$ -gerbe au-dessus  $\mathbb{P}^1(-\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha \delta - \beta \gamma}{\delta})$  (voir [81, 5.16]). En particulier, si  $\alpha = \beta = -1$  et  $\gamma = \delta = 1$ , on obtient la  $\mathbb{Z}^2$ -gerbe au-dessus de la droite projective  $\mathbb{P}^1$  qui est la projectivisation du fibré conormal de  $\{(0, 0)\}$  dans  $\mathbb{C}^2$  comme attendu de l'éclatement d'une  $\mathbb{Z}^2$ -gerbe d'une variété lisse.

**Exemple 8.3.1.6.** Fixons  $d = 3$ . Alors, les isomorphismes linéaires  $\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1^{-1}$  et  $\mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1^{-1}$  sont

$$\mathcal{A}_3 \mathcal{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \\ 1 & 0 & \frac{1}{\alpha_3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{\alpha_2} & 0 \\ 0 & -\alpha_3 & 1 \end{pmatrix}$$

De ce fait, les isomorphismes  $\widetilde{\mathcal{A}}_{13}$  et  $\widetilde{\mathcal{A}}_{12}$  sont

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{13} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 \\ 1 & -\alpha_2 \\ & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{A}}_{12} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_3 \\ & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

et leurs inverses sont

$$\widetilde{\mathcal{A}}_{13}^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 1 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 \\ & \alpha_1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{A}}_{12}^{-1} = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & -\alpha_3 \\ & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

On peut comparer ces matrices avec, respectivement, les matrices  $A_{31}$  et  $A_{23}$  de [81, exemple 5.17] à permutation des lignes près. On obtient ainsi un plan projectif quantique.

### 8.3.2 Éclatement d'une sous-variété

Maintenant nous allons voir comment éclater une sous-champ  $\mathcal{F}_{h,g}$ -équivariant de  $\mathcal{U} := [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  : Le point de départ est à peu près le même que la sous-section 8.2.2 :

Soit  $d \in \mathbb{N}^*$  un entier naturel et  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $(h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, g)$  une calibration standard de  $\Gamma$ .

Soit  $I$  un sous-ensemble de  $\{1, \dots, d\}$  tel que  $\text{Card}(I) \leq d - 2$ . Notons  $i_1^c < \dots < i_{\text{Card}(I^c)}^c$  les éléments de  $I^c$ . Soit  $\alpha = \sum_{j \in I} \alpha_j e_j$  un vecteur de  $\mathbb{R}_{>0}^I \times 0^{I^c} \subset \mathbb{C}_d$  tel qu'il existe  $k$  tel que  $h(e_k) = v$ .

Pour tout  $1 \leq j \leq \text{Card}(I^c)$ , notons  $\sigma_j$  le cône de  $\mathbb{R}^d$  défini par

$$\sigma_j = \text{Cone}(e_k, k \in I, e_{i_1^c}, \dots, \widehat{e_{i_j^c}}, \alpha, e_{i_{j+1}^c}, \dots, e_{i_{\text{Card}(I^c)}^c})$$

Notons  $(\widetilde{\mathbb{C}}_d, h, g)$  l'éventail dont les cônes maximaux sont les  $\sigma_j$ . Soit  $A_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  l'isomorphisme linéaire tel que  $A_i(e_k) = e_k$  pour  $k \neq i$  et  $A_i(\alpha) = e_i$  et  $H_i$  la permutation  $(1\ i) \in \mathfrak{S}_n$ .

Soit  $\mathcal{U}_i = [\mathbb{C}^d/\mathbb{Z}^{n-d}]$  (où  $\mathbb{Z}^{n-d}$  agit sur  $\mathbb{C}^d$  par  $EA_i h H_i^{-1}$ ) le champ torique quantique associé à  $\sigma_i$ .

Le morphisme birationnel d'éventails  $(\text{id}_{\mathbb{R}^d}, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$  induit un morphisme birationnel

$$f : \mathcal{X}_{\widetilde{\mathbb{C}}_d, h, g} \dashrightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{C}_d}.$$

Sa restriction sur le complémentaire de son diviseur exceptionnel induit un isomorphisme entre

$$\mathcal{X}_{\widetilde{\mathbb{C}}_d, h, g} \setminus \mathcal{D} \simeq [\mathbb{C}^d \setminus \{0\}]^I \times \mathbb{C}^{I^c} / \mathbb{Z}^{n-d}.$$

Le morphisme  $f$  induit ensuite une famille  $f_i : \mathcal{U}_{\sigma_i} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{C}_d}$  de morphismes birationnels.

**Proposition 8.3.2.1.** *Le diviseur exceptionnel de  $f_i$  est  $\mathcal{D}_i := [\mathbb{C}^{d-1} \times \{0\} / \mathbb{Z}^{n-d}]$  où le  $\{0\}$  est en ième position.*

*Démonstration.* C'est la même preuve que le lemme 8.2.1.5. □

Dans le cas classique, le diviseur exceptionnel est un  $\mathbb{P}^{n-|I|-1}$ -fibré sur le diviseur que l'on a éclaté. Dans la suite, on va donc regarder le recollement des intersections des  $\mathcal{D}_i$  avec  $[\{0\}^I \times \mathbb{C}^{I^c} / \mathbb{Z}^{n-d}]$  i.e. des champs  $\mathcal{d}_i := [0 \times \mathbb{C}^{I^c \setminus \{i\}} / \mathbb{Z}^{n-d}]$  :

Il ne nous reste plus qu'à examiner le recollement de ses fibres.

Soit  $i, j$  deux éléments de  $I^c$ . Alors, le morphisme linéaire  $A_j A_i^{-1}$  est défini par

$$A_j A_i^{-1} : e_l \mapsto \begin{cases} e_l & \text{si } l \neq i, j \\ e_j & \text{si } l = i \\ e_j - \sum_{m \in I^c \setminus \{j\}} \frac{\alpha_m}{\alpha_j} e_m & \text{si } l = j \end{cases}$$

On peut remarquer que cette application s'insère dans le diagramme commutatif suivant (de la même façon que dans le diagramme (8.2)) :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^d & \xrightarrow{A_j A_i^{-1}} & \mathbb{C}^d \\ \text{pr}_{I^c \setminus \{i\}} \downarrow & & \downarrow \text{pr}_{I^c \setminus \{j\}} \\ \mathbb{C}^{I^c \setminus \{i\}} & \xrightarrow{\widetilde{A}_{ji}} & \mathbb{C}^{I^c \setminus \{j\}} \end{array}$$

Le morphisme  $\widetilde{A}_{ji}$  est un isomorphisme défini par :

$$\widetilde{A}_{ji} : e_l \mapsto \begin{cases} e_l & \text{si } l \in I^c \setminus \{i, j\} \\ -\sum_{m \in I^c \setminus \{j\}} \frac{\alpha_m}{\alpha_j} e_m & \text{si } l = j \end{cases}$$

et son inverse est

$$\widetilde{A}_{ji}^{-1} : e_l \mapsto \begin{cases} e_l & \text{si } l \in I^c \setminus \{i, j\} \\ -\sum_{m \in I^c \setminus \{i\}} \frac{\alpha_m}{\alpha_i} e_j & \text{si } l = i \end{cases}$$

Le vecteur  $\widetilde{A}_{ji}^{-1}(e_i)$  ne dépend pas de  $j$ . On en déduit l'énoncé suivant :

**Proposition 8.3.2.2.** *Le recollement des  $d_i$  est l'espace projectif quantique de dimension  $n - |I| - 1$  donné par les vecteurs*

$$e_j, j \in I^c \setminus \{i\}, v_d = - \sum_{m \in I^c \setminus \{i\}} \frac{\alpha_m}{\alpha_i} e_m$$

et la calibration  $\text{pr}_{I^c \setminus \{i\}} A_i h H_i^{-1} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{pr}_{I^c \setminus \{i\}}(A_i \Gamma)$  (dont l'ensemble des générateurs virtuels est  $\mathcal{I} \setminus \mathbf{k}$ ) où  $(A_i, H_i)$  est la paire de morphismes linéaires associé au cône  $\sigma_i$  pour un  $i \in I^c$  fixé.

### 8.3.3 Flip d'Atiyah

On va considérer maintenant une composition de deux éclatements et d'une contraction entre  $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  :

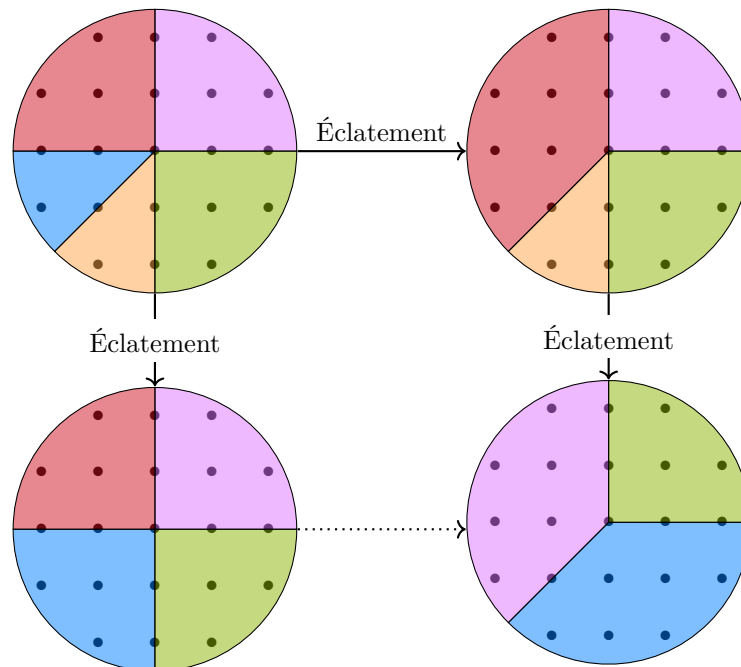


FIGURE 8.2 – Flip d'Atiyah classique

### 8.3.3.1 Rappel sur le cas classique

Considérons l'éclatement du plan projectif  $\mathbb{P}^2$  (décrit par l'éventail dont les cônes maximux sont  $\sigma_0 = \text{Cone}(e_1, e_2)$ ,  $\sigma_1 = \text{Cone}(e_2, -e_1 - e_2)$  et  $\sigma_2 = \text{Cone}(-e_1 - e_2, e_1)$  in  $\mathbb{Z}^2$ ) aux points  $\mathfrak{p} = [0 : 1 : 0]$  and  $\mathfrak{q} = [1 : 0 : 0]$  i.e. les points équivariants de, respectivement,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . La variété torique  $V$  ainsi obtenue est décrite par l'éventail dont les cônes maximaux sont :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \text{Cone}(e_1, e_2), \sigma_1^1 = \text{Cone}(e_2, -e_1), \sigma_1^2 = \text{Cone}(-e_1, -e_1 - e_2), \\ \sigma_2^1 &= \text{Cone}(-e_1 - e_2, -e_2), \sigma_2^2 = \text{Cone}(-e_2, e_1) \end{aligned}$$

Comme le vecteur  $-e_1 - e_2$  est la somme de  $-e_1$  et de  $-e_2$ , on peut contracter la variété torique  $V$  sur la variété décrite par l'éventail dont les cônes maximaux sont  $\pm e_1, \pm e_2$  i.e.  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (ou autrement dit,  $V$  est l'éclatement de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  au point équivariant du cône  $\text{Cone}(-e_1, -e_2)$  i.e.  $(\infty, \infty)$ ).

De ce fait, on obtient une application birationnelle entre  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  et  $\mathbb{P}^2$  et donc, un isomorphisme entre les sous-variétés ouvertes  $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \setminus E_1$  et  $\mathbb{P}^2 \setminus E_2$ . Le diviseur  $E_2$  est la droite passant par  $\mathfrak{p}$  et  $\mathfrak{q}$  et le diviseur  $E_1$  est  $\mathbb{P}^1 \times \{\infty\} \cup \{\infty\} \times \mathbb{P}^1$  (voir [64, exemple 7.22] avec la projection  $[x : y : z : t] \mapsto [y : z : t]$  et le plongement de Segre).

*Avertissement 8.3.3.1.1.* La variété  $E_2$  n'est pas une variété torique mais une somme amalgamée de variétés toriques :

$$E_2 = \mathbb{P}^1 \coprod_{\infty} \mathbb{P}^1. \quad (8.3)$$

En effet, les tores denses des droites projectives ne sont pas denses sur tout  $E_2$ .

On va maintenant donner une autre description de la variété  $E_2$ ; On peut la décomposer comme l'union suivante

$$E_2 = \mathbb{P}^1 \times \{\infty\} \cup \{\infty\} \times \mathbb{P}^1 = (\mathbb{C} \times \{\infty\}) \cup ((\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \{\infty\} \cup \{\infty\} \times (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})) \cup (\{\infty\} \times \mathbb{C})$$

En d'autres termes

**Lemme 8.3.3.1.2.** *La variété  $E_2$  est le recollement de  $\mathbb{C} \times \{0\} \subset \mathcal{U}_{\sigma_1}$ ,  $\mathbb{C} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathcal{U}_{\sigma_2}$  et  $\{0\} \times \mathbb{C} \subset \mathcal{U}_{\sigma_3}$  par les applications de transition de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ .*

On va utiliser cette description dans le cas quantique.

### 8.3.3.2 Cas quantique

Soit  $\Gamma$  un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^2$  et  $h: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma$  une calibration standard de  $\Gamma$  et  $\mathcal{G}$  un ensemble de générateurs virtuels (de cardinal  $n - 3$ ) tel que  $h(e_3) = ae_1 + be_2 \in \mathbb{R}_{<0}^2$

Soit  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  l'éventail quantique dont les cônes maximaux de  $\Delta$  sont :

$$\sigma_0 = \text{Cone}(e_1, e_2), \sigma_1 = \text{Cone}(e_2, ae_1 + be_2), \sigma_2 = \text{Cone}(ae_1 + be_2, e_2)$$

Le champ torique quantique  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$  associé à cet éventail est un plan projectif quantique. Soient  $v = h(e_k) = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 (ae_1 + be_2) \in \sigma_1$ ,  $w = h(e_l) = \beta_1 (ae_1 + be_2) + \beta_2 e_2 \in \sigma_2$  deux vecteurs de  $\Gamma$  (où  $k, l > 3$ ) tel que l'angle  $(\widehat{v, w}) < \pi$ . Notons  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathbb{R}_{>0}^2$  le vecteur tel que  $ae_1 + be_2 = \gamma_1 v + \gamma_2 w$ .

On va utiliser la même procédure que dans la sous-sous-section 8.3.3.1 :

Considérons le  $\alpha$ -éclatement du  $\beta$ -éclatement (ou l'inverse vu que ces opérations commutent puisque l'on n'éclate pas le même cône) du plan projectif quantique  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$ . On obtient donc une surface torique quantique qui est le  $\gamma$ -éclatement d'une surface torique quantique donné par l'éventail quantique  $(\Delta', h, (\mathcal{G} \setminus \{k, l\}) \cup \{3\})$  où

$$\sigma_0 = \text{Cone}(e_1, e_2), \sigma_1^1 = \text{Cone}(e_2, \alpha), \sigma_{12} = \text{Cone}(\alpha, \beta), \sigma_2^2 = \text{Cone}(\beta, e_1)$$

On obtient un morphisme birationnel  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta', h, (\mathcal{G} \setminus \{k, l\}) \cup \{3\}}$ . Le sous-champ fermé qui a été enlevé de  $\mathcal{X}_{\Delta', h, (\mathcal{G} \setminus \{k, l\})}$  est la droite projective quantique donnée par le  $\gamma$ -éclatement dans le [théorème 8.3.1.4](#). On peut décrire aussi le sous-champ fermé  $\mathcal{E}$  qui a été retiré de  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$  :

**Théorème 8.3.3.2.1.** *Le champ  $\mathcal{E}$  est la somme amalgamée des deux droites projectives quantiques données par les diviseurs exceptionnels du l' $\alpha$ -éclatement et du  $\beta$ -éclatement le long de  $[\{0\}/\mathbb{Z}^{n-2}]$ .*

*Démonstration.* De la même façon que dans le [lemme 8.3.3.1.2](#),  $\mathcal{E}$  est le recollement de  $\mathcal{U}_1 := [\mathbb{C} \times \{0\}/\mathbb{Z}^{n-2}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_1}$ ,  $\mathcal{U}_2 := [\mathbb{C} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}^{n-2}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_{12}}$  and  $\mathcal{U}_3 = [\{0\} \times \mathbb{C}/\mathbb{Z}^{n-2}] \subset \mathcal{U}_{\sigma_2}$ . On peut recoller la partie  $\mathbb{C} \times \{0\}$  de  $\mathcal{U}_{12}$  avec  $\mathcal{U}_3$  pour obtenir le diviseur exceptionnel de l' $\alpha$ -éclatement et la partie  $\mathbb{C} \times \{0\}$  avec  $\mathcal{U}_1$  afin d'obtenir le diviseur exceptionnel du  $\beta$ -éclatement (voir le [théorème 8.3.1.4](#)). Les descentes au quotient des inclusions  $\{(0, 0)\} \hookrightarrow \mathbb{C} \times \{0\}$  et  $\{(0, 0)\} \hookrightarrow \{0\} \times \mathbb{C}$  donnent l'amalgamation.  $\square$

## 8.4 Décomposition des morphismes birationnels

Un résultat classique en géométrie birationnelle est qu'une application birationnelle entre deux variétés algébriques propres et lisses (sur un corps algébriquement clos) se décompose en une suite d'éclatements et de contractions de centres lisses (cf. [\[126\]](#) et [\[3\]](#)). La preuve de ce théorème vient de la preuve du cas torique par WŁODARCZYK. L'énoncé qui va nous intéresser ici sera le résultat un peu plus faible suivant :

**Théorème 8.4.1** ([\[125\]](#) Théorème A). *Soit  $\Delta, \Delta'$  deux éventails dans  $\mathbb{Q}^n$  tels que  $|\Delta| = |\Delta'|$ . Alors il existe une suite d'éventails simpliciaux  $(\Delta_i)_{i=0..n}$  telle que  $\Delta = \Delta_0, \Delta_n = \Delta'$  et tout  $\Delta_i$  est obtenu à partir de  $\Delta_{i-1}$  par éclatement ou contraction pour  $i = 1, \dots, n$ .*

Le résultat analogue pour le cas quantique est le suivant :

**Théorème 8.4.2.** *Soient  $\Delta, \Delta'$  deux familles de cônes polyédraux fortement convexes simpliciaux de  $\mathbb{R}^d$  stables par intersection et aux passages aux faces. Si  $|\Delta| = |\Delta'|$  alors il existe deux calibrations  $(h, \mathcal{G})$ ,  $(h, \mathcal{G}')$ <sup>2</sup> telles que  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  et  $(\Delta', h, \mathcal{G}')$  soient des éventails quantiques et telles qu'il existe une suite d'éventails quantiques simpliciaux  $(\Delta_i)_{0 \leq i \leq n}$  tel que  $\Delta = \Delta_0, \Delta_n = \Delta'$  et tout  $\Delta_i$  soit obtenu à partir de  $\Delta_{i-1}$  par éclatement ou contraction pour tout  $i = 1, \dots, n$ .*

*Démonstration.* Comme les familles sont composées de cônes simpliciaux alors par le [lemme 4.1.4](#), il existe  $\Delta_{\text{rat}}$  et  $\Delta'_{\text{rat}}$  composés de cônes rationnels et « proche » de  $\Delta$  et  $\Delta'$  (pour n'importe quelle norme de  $\mathbb{R}^d$  sur des générateurs des cônes). On applique le [théorème 8.4.1](#) pour relier  $\Delta_{\text{rat}}$  et  $\Delta'_{\text{rat}}$  par des éclatements et des contractions. Soit  $G$  l'ensemble des générateurs des cônes de tous les  $\Delta_i$  et posons  $h_{\text{rat}} : \mathbb{Z}^G \rightarrow \mathbb{R}^d$  l'épimorphisme défini par ces générateurs. Soit  $h$  un épimorphisme  $\mathbb{Z}^G \rightarrow \mathbb{R}^d$  « proche » de  $h_{\text{rat}}$  et tel qu'il existe  $I$  et  $I'$  des sous-ensembles de  $G$  tels que pour tout  $i \in I$  (resp.  $i \in I'$ ),  $h(e_i)$  soit un générateur d'un 1-cône de  $\Delta$  (resp.  $\Delta'$ ) et que tous les générateurs soient de cette forme (cela existe aussi grâce au fait que l'espace  $\Omega(D)$  soit ouvert). Enfin, on pose  $\mathcal{G} := G \setminus I$  et  $\mathcal{G}' := G \setminus I'$  pour finir cette preuve.  $\square$

**Exemple 8.4.3.** Soit  $(\Delta, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{G})$  un éventail quantique complet tel qu'il existe  $k \in \mathcal{G}$  tel que  $h(e_k) \in \mathbb{R}_{<0}^d$ .

Alors le champ torique  $\mathcal{X}_{\Delta, h, \mathcal{G}}$  peut être relié, par éclatements et contractions, à l'espace projectif quantique donné par l'éventail  $(\Delta', h, \mathcal{G} \setminus \{k\} \cup (\Delta(1) \setminus \{1, \dots, d\}))$  où  $\Delta'$  est l'éventail dont les cônes maximaux sont

$$\text{Cone}(e_1, \dots, e_d), \text{Cone}(e_1, \dots, \hat{e}_i, h(e_k), \dots, e_d), \dots, \text{Cone}(e_1, \dots, e_{d-1}, h(e_k))$$

Plus précisément, on éclate tout d'abord le sous-champ correspond à un cône contenant  $h(e_k)$  puis on contracte tous les autres 1-cônes sauf  $e_1, \dots, e_d$  afin d'obtenir l'espace projectif quantique.

2. C'est le même morphisme  $h$  dans les deux calibrations

**Corollaire 8.4.4.** *Soit  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique et  $\Delta'$  un raffinement de  $\Delta$  donné par des générateurs virtuels. Alors il existe un morphisme birationnel  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta', \mathbf{h}, \mathcal{G}}$  (donné par des éclatements et des contractions).*

# COBORDISMES

DANS LE CHAPITRE PRÉCÉDENT, NOUS avons décrit comment définir des morphismes birationnels entre des champs toriques quantiques et complètement détaillé l'exemple des éclatements. Le but de ce chapitre est de continuer l'étude des morphismes birationnels en considérant ceux décrit par des constructions combinatoires plus élaborées que les subdivisions étoilées. Plus précisément, nous allons définir une généralisation des cobordismes de polytopes, décrits notamment dans [21], au cas général des éventails quantiques. De la même façon que ces cobordismes permettent d'obtenir des applications birationnelles entre les variétés LVM et sous de bonnes conditions de rationalités, entre les orbifolles toriques projectifs induites par passage au quotient, les cobordismes d'éventails permettant d'obtenir des morphismes birationnels entre les champs toriques quantiques qui ont des types combinatoires différents.

Dans la [première section](#) et la [deuxième section](#), on va rappeler les résultats de [21] sur les liens entre les polytopes, les variétés LVM et notamment le lien entre les cobordismes de polytopes et la chirurgie de variétés LVM. Dans la [troisième section](#), nous allons commencer par définir les cobordismes d'éventails en généralisant celui des polytopes. Ces cobordismes n'induisent pas, en général, des chirurgies au niveau des champs toriques (car les  $\mathbb{C}^m$ -actions ont des orbites non-fermées qui entraînent donc que les chirurgies ne descendent pas au quotient) mais ils permettent tout de même d'obtenir des morphismes birationnels entre les éventails quantiques qui sont cobordants.

## 9.1 Polytopes et intersection de quadriques

On va tout d'abord rappeler le cadre classique décrit dans [21] :  
Soit  $A = (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ . On appelle système associé à la matrice  $A$  le système :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n A_i |z_i|^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n |z_i|^2 = 1 \end{cases} \quad (9.1)$$

Notons  $X_A$  l'ensemble de ses solutions dans  $\mathbb{C}^n$  (c'est une intersection de quadriques dans la sphère  $\mathbb{S}^{2n-1}$ ).

**Lemme 9.1.1** ([21] lemma 0.3). *L'ensemble  $X_A$  est une variété réelle (de dimension  $2n - p - 1$ ) si, et seulement si,*

- $0_{\mathbb{R}^p} \in \text{Conv}(A_1, \dots, A_n)$  [Condition de Siegel];
- Si un ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$  vérifie  $0 \in \text{Conv}(A_i, i \in I)$  alors  $|I| > p$  [Hyperbolicité faible].

Dans ce cas, on dira que  $A$  est admissible.

Dans toute la suite, on va supposer que  $A$  vérifie ces conditions. Le tore  $(\mathbb{S}^1)^n$  a une action naturelle sur  $X_A$  (par l'inclusion  $(\mathbb{S}^1)^n \hookrightarrow (\mathbb{C}^*)^n$ ).



**Proposition 9.1.2** ([21] lemma 0.12). *Le quotient  $X_A/(\mathbb{S}^1)^n$  est un polytope simple de dimension  $n - p - 1$ . On notera  $P_A$  ce polytope.*

**Exemple 9.1.3.** Prenons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X_A$  est l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} |x_1|^2 = |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 \\ |x_2|^2 = |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 \\ |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 = 1 \end{cases}$$

et donc  $X_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ . Le polytope  $P_A$  est

$$\mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 / (\mathbb{S}^1)^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^5 / (\mathbb{S}^1)^3 = \mathbb{P}^2 / (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = \text{triangle plein}$$

car  $\mathbb{C}^2/(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$  est homéomorphe à  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  et on va le recoller pour obtenir un triangle plein (voir le lemme 5.6.1.1 pour la preuve).

**Exemple 9.1.4.** Prenons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X_A$  est l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} |x_1|^2 = |x_4|^2 + |x_5|^2 \\ |x_2|^2 + |x_3|^2 = |x_4|^2 + |x_5|^2 \\ |x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + |x_4|^2 + |x_5|^2 = 1 \end{cases}$$

et donc  $X_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3)$ . Le polytope  $P_A$  est

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 / \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^1)^2 \times (\mathbb{S}^1)^2 = (\mathbb{S}^3 / (\mathbb{S}^1)^2)^2 = (\mathbb{P}^1 / \mathbb{S}^1)^2 = \text{carré plein}$$

**Exemple 9.1.5** ([93] Exemple 5.6). Prenons  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

Alors  $X_A \simeq \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1$  et le polytope  $P_A$  est

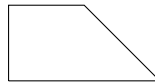


FIGURE 9.1 – Triangle coupé

Tous les polytopes simples peuvent être réalisés de cette façon :

**Théorème 9.1.6** ([21] Theorem 0.14). *Soit  $P$  un polytope simple. Il existe  $n, p \in \mathbb{N}$  et une matrice  $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$  tels que  $P = P_A$ .*

Restreignons l'action naturelle de  $(\mathbb{S}^1)^n$  sur  $X_A$  en une action de  $\mathbb{S}^1$  par le morphisme diagonal

$$x \in \mathbb{S}^1 \mapsto (x, \dots, x) \in (\mathbb{S}^1)^n.$$

Notons  $\tilde{X}_A$  le quotient de  $X_A$  par cet action.

**Théorème 9.1.7** ([21] Theorem 12.2). *Soit  $A$  une matrice admissible de  $M_{n,p}(\mathbb{R})$ . Alors il y a deux cas possibles :*

- Si  $p$  est impair alors la variété  $X_A$  peut être munie d'une structure complexe ;
- Si  $p$  est pair alors les variétés  $\tilde{X}_A$  et  $X_A \times \mathbb{S}^1$  peuvent être munies d'une structure complexe.

**Exemple 9.1.8.** Dans l'exemple 9.1.3, la variété  $X_A/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^5 \times \mathbb{S}^1$  peut être munie de la structure d'une variété de Hopf (voir [73]) et dans l'exemple 9.1.5, la variété  $X_A/\mathbb{S}^1 = \mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3$  est une variété de Calabi-Eckmann (voir [25]).

Les variétés  $X_A \times \mathbb{S}^1$  sont le produit des variétés précédentes avec un tore (compact) complexe.

Dans les deux cas, les variétés complexes obtenus sont des variétés LVM. Ces variétés sont des variétés complexes compactes non-Kähler complètement décrites de façon combinatoire par une famille de points  $\Lambda_i$  dans  $\mathbb{C}^m$  vérifiant les conditions du lemme 9.1.1 introduite par S.LOPEZ DE MEDRANO, A.VERJOVSKY (dans [88] pour  $m = 1$ ) puis généralisées par L.MEERSSEMAN (dans [91] pour  $m$  quelconque). Ici, on a  $m = \frac{p+1}{2}$  pour  $p$  impair ou  $\frac{p}{2}$  ou  $\frac{p+2}{2}$  si  $p$  est pair (selon les cas). Sous des conditions de rationalité sur  $\Lambda_i$ , on peut montrer que les variétés LVM sont des fibres de Seifert en tores complexes (de dimension complexe  $m$ ) au-dessus d'une variété torique projective orbifold (voir [93, Theorem A]). Plus généralement, on peut montrer, sous une hypothèse sur les générateurs virtuels, que les variétés LVM sont des  $\mathbb{C}^m$ -fibrés au-dessus d'un champ torique quantique (voir [81, Theorem 9.13]). On retrouve le point de vue précédent car sous ces conditions de rationalité, les champs toriques quantiques sont des  $\mathbb{Z}^{2m}$ -gerbes au-dessus d'une variété torique orbifold (on récupère ainsi le  $\mathbb{C}^m/\mathbb{Z}^{2m} = (\mathbb{S}^1)^{2m}$ -fibré).

## 9.2 Cobordismes de polytopes et chirurgie

Dans cette sous-section, nous allons voir comment des opérations sur les polytopes peuvent décrire des transformations birationnelles entre les variétés associées de la sous-section précédente.

**Définition 9.2.1** ([21] définition 2.1, [118]). Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes simples de même dimension  $q$ . Soit  $W$  un polytope de dimension  $q + 1$ . On dit que  $W$  est un cobordisme entre  $P$  et  $Q$  si  $P$  et  $Q$  sont deux facettes disjointes de  $W$ . On dira que  $W$  est un cobordisme trivial (resp. élémentaire) si  $W \setminus (P \cup Q)$  contient aucun (resp. un) sommet de  $W$ .

On peut noter qu'un cobordisme est la concaténation de cobordismes élémentaires. On peut donc se restreindre à l'étude des cobordismes élémentaires.

Considérons donc un cobordisme élémentaire  $W$  entre deux polytopes  $P$  et  $Q$ . Notons  $v$  le sommet de  $W \setminus (P \cup Q)$ . Par unicité, toute arête partant de  $v$  est reliée à un sommet de  $P$  ou à un sommet de  $Q$ . Notons  $a$  le nombre d'arêtes reliant  $v$  à un sommet de  $P$  et  $b$  le nombre d'arêtes reliant  $v$  à un sommet de  $Q$ . Par simplicité de  $W$ , on a  $a + b = q + 1$

**Définition 9.2.2.** L'indice du cobordisme  $W$  est le couple d'entiers  $(a, b)$ . On dira que  $Q$  est obtenue par un flip de  $P$  d'indice  $(a, b)$ .

La relation de cobordisme étant transitive, si  $Q$  est obtenue par un flip de  $P$  d'indice  $(a, b)$  alors  $Q$  est obtenue par un flip de  $Q$  d'indice  $(b, a)$ . On peut voir un cobordisme comme étant une déformation continue du polytope  $P$  et  $Q$ . Plus précisément, le simplexe donné par les  $a$  sommets de  $P$  reliés à  $v$  est réduit à un point puis celui-ci est dilaté en le simplexe formé par les  $b$  autres points reliés à  $v$  pour obtenir  $Q$ .

**Exemple 9.2.3.** On a un cobordisme entre les polytopes des exemples 9.1.3 et 9.1.5 donné par le polytope de la figure 9.2.

**Définition 9.2.4.** Le polytope obtenu après avoir réduit les points reliés au sommet de  $W$  est appelé polytope de catastrophe, noté  $C$ , du cobordisme élémentaire  $W$

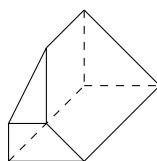


FIGURE 9.2 – Cobordisme entre le triangle et le carré

*Remarque 9.2.5.* Si  $a = 1$  alors  $C = P$  et si  $b = 1$  alors  $C = Q$

*Avertissement 9.2.6.* Le fait que  $P$  et  $Q$  soient simples n'implique pas que  $C$  le soit. Plus précisément, si  $a > 1$  et  $b > 1$  alors  $C$  n'est pas simple.

Une autre façon de le voir est que le passage de  $P$  à  $Q$  se fait « en découpant » un voisinage de la face engendrée par les  $a$  points de  $W$  reliés à  $P$  et en recollant un voisinage fermé de la face engendrée par les  $b$  points de  $Q$ .

**Définition 9.2.7.** Le polytope obtenu en découpant  $P$  ou  $Q$  (vu qu'ils sont identiques) est appelé polytope de transition du cobordisme élémentaire  $W$ .

*Remarque 9.2.8.* Si  $a = 1$  alors  $T = Q$  et si  $b = 1$  alors  $T = P$

**Exemple 9.2.9.** On peut considérer le cobordisme entre le cube et le « livre pentagonal » (décrit dans la figure 9.3) :



FIGURE 9.3 – Le cube et le livre pentagonal

On a réduit une arête du cube à un point et on a réduit une arête du livre pentagonal à un point mais dans « l'autre sens ». Le polytope de transition est représenté dans la figure 9.5.

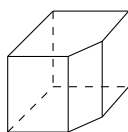


FIGURE 9.4 – Polytope de transition

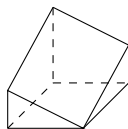


FIGURE 9.5 – Polytope de catastrophe

Il n'est pas simple car il a un sommet d'où part quatre arêtes.

Pour pouvoir faire le lien avec la sous-section précédente, on va rappeler la définition de chirurgie :

**Définition 9.2.10** ([96] p 15). Soient  $M$  une variété réelle (resp. complexe),  $S$  une sous-variété compacte de  $M$ ,  $W$  un voisinage de  $S$ . Soient  $S^* \subset W^*$  deux variétés telles que  $W^*$  soit un voisinage de  $S^*$  et tel qu'il existe un difféomorphisme (resp. un biholomorphisme)  $f : W \setminus S \rightarrow W^* \setminus S^*$ . Alors on peut construire une variété réelle (resp. complexe)  $M^*$  « en coupant  $S$  et en recollant  $S^*$  » i.e. le diagramme suivant est cocartésien :

$$\begin{array}{ccc} W \setminus S & \xleftarrow{f} & W^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \longrightarrow & M^* \end{array}$$

On dira alors que  $M^*$  est obtenue à partir de  $M$  par chirurgie (holomorphe)  $(S, W, S^*, W^*, f)$ .

**Théorème 9.2.11** ([21] Theorem 4.8). Soient  $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$  deux matrices admissibles. Alors  $P_A$  et  $P_B$  sont reliés par un flip d'indice  $(a, b)$  (ici,  $a + b = n - p = \dim(P_A) + 1$ ) si, et seulement si, les variétés  $X_A$  et  $X_B$  sont reliées par une chirurgie de la forme suivante

$$X_A \setminus (\mathbb{S}^{2a-1} \times \mathbb{D}^{2b} \times (\mathbb{S}^1)^p) \coprod_i (\overline{\mathbb{D}^{2a}} \times \mathbb{S}^{2b-1} \times (\mathbb{S}^1)^p) = X_B$$

où  $i$  est l'isomorphisme  $(\mathbb{S}^1)^n$ -équivariant

$$\partial(\mathbb{S}^{2a-1} \times \mathbb{D}^{2b} \times (\mathbb{S}^1)^p) \simeq \mathbb{S}^{2a-1} \times \mathbb{S}^{2b-1} \times (\mathbb{S}^1)^p \simeq \partial(\overline{\mathbb{D}^{2a}} \times \mathbb{S}^{2b-1} \times (\mathbb{S}^1)^p)$$

où  $\mathbb{D}^n$  est la boule unité ouverte de  $\mathbb{R}^n$  et  $\overline{\mathbb{D}^n}$  est la boule fermée (et permettent de former des voisinages tubulaires (triviaux) des produits de sphères d'à côté) et où l'action de  $(\mathbb{S}^1)^n = (\mathbb{S}^1)^a \times (\mathbb{S}^1)^b \times (\mathbb{S}^1)^p$  sur  $\mathbb{C}^a \times \mathbb{C}^b \times (\mathbb{S}^1)^p$  est donnée par l'inclusion  $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^*$ . Si  $X_A$  et  $X_B$  sont des variétés complexes (ou quitte à quotienter par  $\mathbb{S}^1$ ) alors cette chirurgie est holomorphe.

Dans le cas classique, ces chirurgies descendent au quotient et induisent des chirurgies entre les variétés toriques (car les disques sont invariants par l'action des tores compacts de même dimension).

**Exemple 9.2.12.** Reprenons l'exemple 9.2.3 entre le triangle et le triangle coupé :

On a les isomorphismes suivants :

$$X_A \setminus ((\mathbb{S}^1)^2 \times \mathbb{D}^4 \times \mathbb{S}^1) = (\mathbb{S}^1)^2 \times (\mathbb{S}^5 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^4)) = (\mathbb{S}^1)^2 \times (\mathbb{S}^5 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^4)) = (\mathbb{S}^1)^2 \times (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$$

et

$$X_B \setminus ((\mathbb{S}^1)^2 \times \mathbb{S}^3 \times \mathbb{D}^2) = \mathbb{S}^1 \times ((\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^3) \setminus (\mathbb{S}^3 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times (\mathbb{S}^3 \setminus (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2)) = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^3 \times (\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \times \mathbb{S}^1)$$

En quotient par  $(\mathbb{S}^1)^3$ , on obtient une chirurgie entre variétés toriques :

$$\mathbb{C}P^2 \setminus \mathbb{D}^4 \simeq (Bl_0 \mathbb{C}P^2) \setminus (\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{D}^2)$$

Autrement dit, en enlevant le voisinage d'un point de  $\mathbb{P}^2$  et en le remplaçant par un voisinage d'un  $\mathbb{P}^1$ , on obtient l'éclaté de  $\mathbb{P}^2$  en un point.

Cela n'est plus le cas dans le cas irrationnel. En effet, dans ce cas, il y a un ouvert d'orbite qui ne sont plus compactes (celles issues de points où le groupe d'isotropie n'est pas de rang maximal) et donc les voisinages des sphères ne sont plus incluses dans des boules.

Il y a tout de même un intérêt majeur dans le cadre irrationnel : on peut considérer la famille continue de champs toriques quantiques donnée par le cobordisme indexé par  $t \in [-1, 1]$  où  $W_{-1} = P$  et  $W_1 = Q$ .

Pour étudier cela, nous allons tout d'abord étendre ces définitions au cas général des éventails quantiques. On s'appuiera sur ces définitions pour définir les familles dans la section 11.7.

### 9.3 Cobordismes d'éventails

Pour obtenir ces familles, on va revenir à des considérations sur les éventails.

**Définition 9.3.1.** Soient  $(\Delta_0, h_0 : \mathbb{Z}^{n_0} \rightarrow \Gamma_0 \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{G}_0)$ ,  $(\Delta_1, h_1 : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \Gamma_1 \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{G}_1)$  deux éventails quantiques simpliciaux dans  $\mathbb{R}^d$ . Un pré-cobordisme élémentaire entre eux est un quintuplet  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  où  $\Delta = (\Delta, h : \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  est un éventail quantique complet simplicial de  $\mathbb{R}^{d+1}$ , les  $\widetilde{\Delta}_i$  sont des sous-éventails de  $\Delta$  i.e. donnés par un sous-ensemble de cônes de  $\Delta$  et les  $\pi_i = (L_i : \mathbb{R}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}^d, H_i : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n_i})$  sont des paires de morphismes linéaires tels que

- les ensembles  $\widetilde{\Delta}_{0, \max}$  et  $\widetilde{\Delta}_{1, \max}$  de cônes maximaux de, respectivement,  $\widetilde{\Delta}_0$  et  $\widetilde{\Delta}_1$  sont disjoints
- $|\Delta_{\max} \setminus (\widetilde{\Delta}_{0, \max} \cup \widetilde{\Delta}_{1, \max})| = 1$
- Les morphismes  $L_i, H_i$  sont surjectifs, vérifient l'égalité  $L_i h_i = h H_i$ ,  $L_i$  envoie les cônes de  $\widetilde{\Delta}_i$  sur les cônes de  $\Delta_i$  et  $H_i$  envoie les cônes de  $\widetilde{\Delta}_{i, h}$  sur les cônes de  $\Delta_{i, h_i}$

Cette définition est la transposition de la définition de cobordisme de polytope de la section précédente dans le cadre des éventails (les changements viennent du fait que le passage polytopes/éventails par l'éventail normal retourne les inclusions. Ainsi les sommets du polytope deviennent des cônes maximaux et les facettes deviennent des 1-cônes) grâce au résultat suivant :

**Proposition 9.3.2.** Soit  $W$  un cobordisme entre deux polytopes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{R}^d$ . Notons  $i_P : P \hookrightarrow W$  et  $i_Q : Q \hookrightarrow W$  les morphismes d'inclusion. Notons  $N_P, N_Q, N_W$  les éventails normaux de, respectivement,  $P, Q$  et  $W$  et  $N_{W, P}, N_{W, Q}$  les sous-éventails de  $N_W$  associés aux sommets de  $P$  et  $Q$  (voir la sous-section 1.2.2 pour les détails). Alors,

$$i_P^\top(N_{W, P}) = N_P \quad (9.2)$$

$$i_Q^\top(N_{W, Q}) = N_Q \quad (9.3)$$

*Démonstration.* À une transformation affine près, on peut supposer que l'espace affine engendré par  $i_P(P)$  est  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid t = -1\}$ . Alors,  $i_P$  est le morphisme  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto (x, 0)$  et  $i_P^\top$  est la projection  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto x \in \mathbb{R}^d$ . On en déduit que pour tout sommet  $v$  dans  $i_P(P)$ , le cône maximal  $C_{v, W}$  associé à  $v$  dans  $W$  est de la forme

$$C_{v, W} = \text{Cone}(i_P(C_{v, P}), e_{d+1})$$

où  $C_{v, P}$  est le cône maximal associé à  $v$  dans  $P$  On obtient donc l'égalité voulue :

$$i_P^\top(C_{v, W}) = C_{v, P}$$

□

Ce n'est qu'un pré-cobordisme car il ne prend pas en compte toute la donnée combinatoire d'un éventail quantique. En effet, le nombre de générateurs  $n_0, n_1$  et  $n$ , et les différents ensembles de générateurs virtuels  $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  n'ont pas de relation entre eux dans cette définition. On va donc devoir rigidifier cette définition. Pour cela, nous allons donner quelques propriétés des pré-cobordismes afin de rajouter quelques conditions à la définition 9.3.5 :

Soit  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  un pré-cobordisme entre les éventails quantiques  $(\Delta_0, h_0 : \mathbb{Z}^{n_0} \rightarrow \Gamma_0, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta_1, h_1 : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \Gamma_1, \mathcal{G}_1)$ .

Notons  $\sigma$  l'unique cône maximal dans  $\Delta_{\max} \setminus (\widetilde{\Delta}_{0,\max} \cup \widetilde{\Delta}_{1,\max})$ . Notons  $\sigma_1, \dots, \sigma_{d+1}$  les cônes maximaux de  $\Delta$  qui intersectent  $\sigma$  en une face de dimension  $d$ . Notons  $\mathbf{a}$  le nombre de  $\sigma_i$  tel que  $\sigma_i \in \widetilde{\Delta}_0$  et  $\mathbf{b} = d+1 - \mathbf{a}$  le nombre de  $\sigma_i$ .

**Définition 9.3.3.** Le couple  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  est l'indice du pré-cobordisme  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$ .

**Lemme 9.3.4.** Soit  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  un pré-cobordisme d'indice  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  entre les éventails quantiques  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0 : \mathbb{Z}^{n_0} \rightarrow \Gamma_0, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1 : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \Gamma_1, \mathcal{G}_1)$ . Alors

- si  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \geq 2$  alors  $\Delta_0(1) = \Delta_1(1)$  et

$$|\Delta(1)| = |\Delta_0(1)| + 2 = |\Delta_1(1)| + 2,$$

- Si  $\mathbf{a} = 1$  alors  $\Delta_0(1) \subsetneq \Delta_1(1)$  et

$$|\Delta(1)| = |\Delta_0(1)| + 3 = |\Delta_1(1)| + 2,$$

- Si  $\mathbf{b} = 1$  alors  $\Delta_0(1) \supsetneq \Delta_1(1)$  et

$$|\Delta(1)| = |\Delta_0(1)| + 2 = |\Delta_1(1)| + 3.$$

*Démonstration.* La proposition 9.3.2 et la dualité entre la combinatoire d'un polytope et celle de son éventail normal réduisent cet énoncé à [21, Proposition 2.9] et [21, Proposition 2.13].  $\square$

**Définition 9.3.5.** Soient  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0 : \mathbb{Z}^{n_0} \rightarrow \Gamma_0 \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{G}_0)$ ,  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1 : \mathbb{Z}^{n_1} \rightarrow \Gamma_1 \subset \mathbb{R}^d, \mathcal{G}_1)$  deux éventails quantiques simpliciaux dans  $\mathbb{R}^d$ . Un cobordisme (élémentaire) est un pré-cobordisme (élémentaire)  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  (on notera  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  son indice) tel que :

- $n_0 + 2 = n_1 + 2 = n$ ;
- les morphismes  $H_i$  coïncident avec la projection  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^{n-2}$  enlevant les coordonnées indexées par  $\Delta(1) \setminus (\Delta_0(1) \cup \Delta_1(1))$  (qui est de cardinal 2 par le lemme 9.3.4);
- si  $\mathbf{a} = 1$  (resp.  $\mathbf{b} = 1$ ) alors on notera  $\widetilde{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G} \cup (\Delta_1(1) \setminus \Delta_0(1))$  (resp.  $\widetilde{\mathcal{G}}_1 = \mathcal{G} \cup (\Delta_0(1) \setminus \Delta_1(1))$ ) et sinon,  $\widetilde{\mathcal{G}}_0 = \mathcal{G}$  (resp.  $\widetilde{\mathcal{G}}_1 = \mathcal{G}$ ). Les paires de morphismes  $(L_i, H_i)$  sont des morphismes toriques  $(\widetilde{\Delta}_i, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_i) \rightarrow (\Delta_i, \mathbf{h}_i, \mathcal{G}_i)$

Dans la suite, les trois premiers éléments du quintuplet  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  désigneront les éventails quantiques considérés dans la définition 9.3.5 et les  $\pi_i$  désigneront les morphismes toriques  $(\widetilde{\Delta}_i, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_i) \rightarrow (\Delta_i, \mathbf{h}_i, \mathcal{G}_i)$ .

*Avertissement 9.3.6.* Le couple  $(\text{id} : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}, \text{id} : \mathbb{Z}^{d+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{d+1})$  n'est pas, en général, un morphisme d'éventails entre  $(\widetilde{\Delta}_i, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_i)$  et  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  à cause des changements d'ensemble de générateurs virtuels.

C'est l'unique obstruction au fait que cela soit un morphisme :

**Lemme 9.3.7.** Le couple  $(\text{id} : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2}, \text{id} : \mathbb{Z}^{d+1} \rightarrow \mathbb{Z}^{d+1})$  est un morphisme torique  $(\widetilde{\Delta}_0, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_0) \rightarrow (\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  (resp.  $(\widetilde{\Delta}_1, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_1) \rightarrow (\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$ ) si, et seulement si,  $\mathbf{a} \geq 2$  (resp.  $\mathbf{b} \geq 2$ ).

*Démonstration.* On va prendre  $i = 0$  (l'autre cas se fait de façon totalement symétrique). Si  $\mathbf{a} = 1$  alors ce n'est pas un morphisme car il envoie un générateur non-virtuel sur un générateur virtuel. Si  $\mathbf{a} \geq 2$  alors comme  $\widetilde{\Delta}_0$  est un sous-éventail de  $\Delta$  et  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}$  alors c'est bien un morphisme.  $\square$

Dans le cas où  $\mathbf{a} = 1$ , le morphisme que l'on obtient entre  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  est un morphisme birationnel donné par la composition du morphisme d'inclusion  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}) \hookrightarrow (\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  et le morphisme birationnel  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0) \dashrightarrow (\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  rendant virtuel le l'unique élément de  $\Delta_1(1) \setminus \Delta_0(1)$  (n'apparaissant pas dans  $\mathcal{G}$ ).

**Exemple 9.3.8.** L'exemple suivant est la traduction en éventails de l'exemple 9.2.3.

Soit  $\Delta$  l'éventail de  $\mathbb{R}^3$  dont les cônes maximaux sont :

$$\begin{aligned} &\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \text{Cone}(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3), \\ &\text{Cone}(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \text{Cone}(\mathbf{e}_1, -\mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3), \text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3), \\ &\text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_3), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, -\mathbf{e}_3), \end{aligned}$$

i.e. l'éventail de l'éclatement d'un point de  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  car

$$-\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 = (-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \mathbf{e}_1 + (-\mathbf{e}_3) \tag{9.4}$$

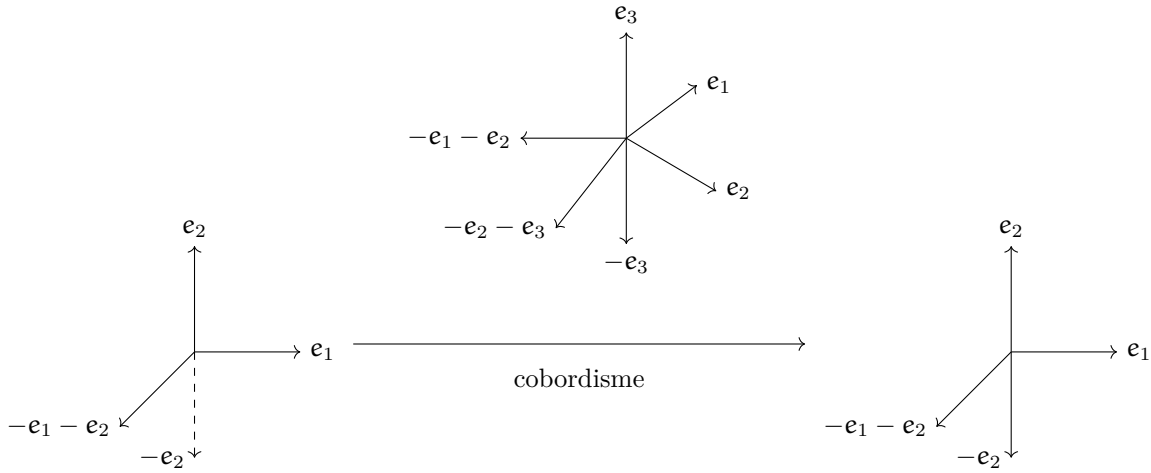


FIGURE 9.6 – Cobordisme entre l'éventail de  $\mathbb{P}^2$  et son éclaté en un point

Soit  $(\mathbf{h} : \mathbb{Z}^6 \rightarrow \mathbb{Z}^3, \emptyset)$  la calibration standard tel que  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_4) = -\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_5) = \mathbf{e}_3$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_6) = -\mathbf{e}_3$ .

Notons  $\widetilde{\Delta}_0$  le sous-éventail donné par les trois premiers cônes de  $\Delta$  et  $\widetilde{\Delta}_1$  par les quatre derniers.

Soit  $\Delta_0$  l'éventail de  $\mathbb{R}^2$  dont les cônes maximaux sont :

$$\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \text{Cone}(\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

i.e. l'éventail de  $\mathbb{P}^2$ .

Soit  $(\mathbf{h}_0 : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y, z, t) \mapsto (x - z, y - z - t), \mathcal{G}_0 = \{4\})$  une calibration de  $\mathbb{Z}^2$ .

Soit  $\Delta_1$  l'éventail de  $\mathbb{R}^2$  dont les cônes maximaux sont :

$$\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \text{Cone}(\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \text{Cone}(-\mathbf{e}_2, -\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$$

i.e. l'éventail d'un éclatement de  $\mathbb{P}^2$ .

Soit  $(\mathbf{h}_1 : \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}^2, (x, y, z, t) \mapsto (x - z, y - z - t), \mathcal{G}_1 = \emptyset)$  une calibration de  $\mathbb{Z}^2$ . Alors l'éventail  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$ , les deux éventails  $(\widetilde{\Delta}_0, \mathbf{h}, \{4\})$ ,  $(\widetilde{\Delta}_1, \mathbf{h}, \emptyset)$  et les deux projections  $\pi_0 = (L_0 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2, H_0 : (x, y) \in \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}^2 \mapsto x \in \mathbb{Z}^4) : (\widetilde{\Delta}_0, \mathbf{h}, \{4\}) \rightarrow (\Delta_0, \mathbf{h}_0, \{4\})$  et  $\pi_1 = (L_1 : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x, y) \in \mathbb{R}^2, H : (x, y) \in \mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}^2 \mapsto x \in \mathbb{Z}^4) : (\widetilde{\Delta}_1, \mathbf{h}, \emptyset) \rightarrow (\Delta_0, \mathbf{h}_0, \emptyset)$  forment un cobordisme entre  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \{4\})$  et  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1, \emptyset)$

*Remarque 9.3.9.* Dans l'exemple précédent, on aurait pu mettre des coefficients (potentiellement irration-

nel) dans l'égalité (9.4) pour obtenir un éclatement à poids de (la  $\mathbb{Z}$ -gerbe au-dessus de)  $\mathbb{P}^2$ .

La construction peut être faite en dimension quelconque :

**Construction 9.3.10.** Soit  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  un éventail quantique simplicial complet de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $\alpha \in (\mathbb{R}_{>0})^d$  et  $\sigma = \text{Cone}(\mathbf{v}_1 = \mathbf{h}(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{v}_d = \mathbf{h}(\mathbf{e}_d)) \in \Delta_{\max}$  (supposons que  $\mathbf{h}_0(\mathbf{e}_n) = \sum_{j=1}^d \alpha_j \mathbf{h}(\mathbf{e}_j)$ ). Soit  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  l'éventail quantique défini par :

- $\Delta$  est la subdivision étoilée (de poids  $\alpha$ ) de  $\Delta_0 \times (\mathbb{R}_{\geq 0}, 0, \mathbb{R}_{\leq 0})$  le long du cône  $\sigma \times \mathbb{R}_{\leq 0} \mathbf{e}_{d+1}$
- $\mathbf{h} : \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \Gamma := \sum_{i=1}^n \mathbf{h}(\mathbf{e}_i) \mathbb{Z} + \mathbf{e}_{d+1} \mathbb{Z}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{h}_0(\mathbf{e}_i)$ ,  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_n) = \sum_j \alpha_j \mathbf{v}_j - \mathbf{e}_{d+1}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_{n+1}) = \mathbf{e}_{d+1}$ ,  $\mathbf{h}(\mathbf{e}_{n+2}) = -\mathbf{e}_{d+1}$  ;
- $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \setminus \{\mathbf{n}\}$ .
- $\widetilde{\Delta}_1$  est le sous-éventail de  $\Delta$  dont les cônes maximaux sont :
  - les éléments de  $(\Delta_{\max} \setminus \{\sigma\}) \times \mathbb{R}_{\leq 0}$  ;
  - les cônes de la forme  $\text{Cone}(\mathbf{v}_i, i \in I, \mathbf{h}(\mathbf{e}_n), -\mathbf{e}_{d+1})$  où  $I$  est un sous-ensemble de  $\llbracket 1, d \rrbracket$  de cardinal  $d-2$ .

Soit  $\Delta_1$  l'image de  $\widetilde{\Delta}_1$  par la projection  $\pi : (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ . On reconnaît alors l'éventail de la subdivision étoilée (de poids  $\alpha$ ) le long du cône  $\sigma$  i.e. c'est l'éventail qui décrit l'éclatement de poids  $\alpha$  de  $\mathcal{X}_{\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0}$ .

Le quintuplet  $(\Delta, \Delta_0 \times \mathbb{R}_{\geq 0}, \widetilde{\Delta}_1, (\pi(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mapsto \mathbf{x}, \text{pr} : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^n), (\pi : (\mathbf{x}, \mathbf{t}) \mapsto \mathbf{x}, \text{pr} : \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^n))$  est un cobordisme entre  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1 := \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_1 := \mathcal{G}_0 \setminus \{\mathbf{n}\})$ , appelé cobordisme de l' $\alpha$ -éclatement de  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  en  $\sigma$ .

*Remarque 9.3.11.* Un éclatement d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$  est d'indice  $(1, d)$ .

La donnée d'un cobordisme  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  entre  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  and  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1, \mathcal{G}_1)$  est, par le [théorème 3.4.2.16](#) et la [définition 8.1.2.1](#), équivalent à la donnée du diagramme suivant de champs toriques quantiques :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{X}_{\widetilde{\Delta}_0, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_0} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}} & \xleftarrow{\quad \quad \quad} \mathcal{X}_{\widetilde{\Delta}_1, \mathbf{h}, \widetilde{\mathcal{G}}_1} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{X}_{\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0} & & \mathcal{X}_{\Delta_1, \mathbf{h}_1, \mathcal{G}_1}
 \end{array} \tag{9.5}$$

Ainsi, un cobordisme permet de lier deux champs toriques quantiques avec des types combinatoires différents (un exemple est décrit dans l'[exemple 9.3.8](#) entre les types combinatoires  $D_0 = \{1, 2, 3, 12, 23, 34\}$  et  $D_1 = \{1, 2, 3, 4, 12, 23, 34, 41\}$ ).

**Notation 9.3.12.** Dans la suite, pour des raisons de simplicité, on va supposer que les morphismes toriques  $\pi_i$  sont donnés par la même paire de morphismes linéaires  $(L, H)$ . À isomorphisme linéaire, on peut supposer que  $L$  est la projection  $(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \in \mathbb{R}^{d+1} \mapsto \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ .

**Proposition 9.3.13.** Soit  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  un cobordisme entre les éventails quantiques  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1, \mathcal{G}_1)$ . Soit  $\sigma$  le cône maximal de  $\Delta$  n'appartenant ni à  $\Delta_0$  ni à  $\Delta_1$ . Soit  $\Sigma_i$  l'ensemble des cônes maximaux de  $\Delta_i$  ayant une intersection de dimension maximale avec  $\sigma$ . Alors

$$L \left( \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma \right) = L \left( \bigcup_{\tau \in \Sigma_1} \tau \right) \tag{9.6}$$

et les éventails quantiques obtenus en remplaçant les éléments de  $L(\Sigma_0)$  par le cône  $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$  et les éléments de  $L(\Sigma_1)$  par le cône  $L(\bigcup_{\tau \in \Sigma_1} \tau)$  sont identiques.



*Démonstration.* Soit  $(a, b)$  l'indice du cobordisme  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$ . Notons  $v_1, \dots, v_{d+1}$  les générateurs de  $\sigma$ . Alors les cônes de  $\Delta_0$  intersectant  $\sigma$  de façon maximale sont de la forme

$$\sigma_k := \text{Cone}(v_i, I \setminus \{k\}, \alpha e_{d+1})$$

où  $k \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket$ . De la même façon, les cônes de  $\Delta_1$  intersectant  $\sigma$  de façon maximale sont de la forme

$$\tau_l := \text{Cone}(v_i, I \setminus \{l\}, \beta e_{d+1})$$

où  $l \in \llbracket 1, d+1 \rrbracket$  et  $\alpha\beta < 0$ . Si  $a \geq 2$  et  $b \geq 2$  alors l'union des générateurs des  $L\sigma_k$  coïncident avec l'union des générateurs des  $L\tau_l$ . Montrons maintenant que

$$L \left( \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma \right) = L \left( \bigcup_{\tau \in \Sigma_1} \tau \right) ?$$

Soit  $x \in L \left( \bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma \right)$  et  $k$  tel que  $x \in L\sigma_k$ . Soient  $\tau$  et  $\tau'$  des cônes de  $\Sigma_1$ . Quitte à réindexer les générateurs, on peut supposer qu'ils sont de la forme

$$L\tau = \text{Cone}(Lv_1, \dots, Lv_{d-1}, Lv_d)$$

et

$$L\tau' = \text{Cone}(Lv_1, \dots, Lv_{d-1}, Lv_{d+1})$$

Par construction, on a

$$Lv_{d+1} = \sum_{i=1}^d \lambda_i Lv_i$$

où pour tout  $i < d$ ,  $\lambda_i \geq 0$  et  $\lambda_d < 0$ . On a donc aussi

$$Lv_d = \sum_{i=1}^d \frac{\lambda_i}{-\lambda_d} Lv_i + \frac{1}{\lambda_d} Lv_{d+1}.$$

Comme  $x \in L\sigma_k$  alors

$$x = \sum_{i \neq k, i \leq d+1} \mu_i Lv_i$$

et donc

$$x = \sum_{i \neq k, i \leq d-1} (\mu_i + \mu_{d+1} \lambda_i) v_i + (\mu_d + \mu_{d+1} \lambda_d) v_d = \sum_{i \neq k, i \leq d-1} \left( \mu_i + \mu_{d+1} \frac{\lambda_i}{-\lambda_d} \right) v_i + \left( \mu_d + \frac{\mu_{d+1}}{\lambda_d} \right) v_d$$

Ainsi  $x \in L\tau_1$  si  $\mu_d + \mu_{d+1} \lambda_d \geq 0$  et  $x \in L\tau_2$  sinon. Autrement dit,  $x \in L \left( \bigcup_{\tau \in \Sigma_1} \tau \right)$ . L'inclusion dans l'autre sens se fait de la même façon. Si  $a = 1$  ou  $b = 1$ , ce cobordisme est le cobordisme d'un éclatement à poids. Les cônes  $\tau_1, \dots, \tau_d$  (resp.  $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ ) reliés au cône maximal forment la subdivision étoilée du cône  $\sigma_1$  (resp.  $\tau_1$ ). On en déduit donc que

$$\sigma_1 = \bigcup_{i=1}^d \tau_i.$$

□

**Définition 9.3.14.** L'éventail quantique ainsi obtenu est appelé éventail de catastrophe et est noté  $\Delta_{1/2}$ .

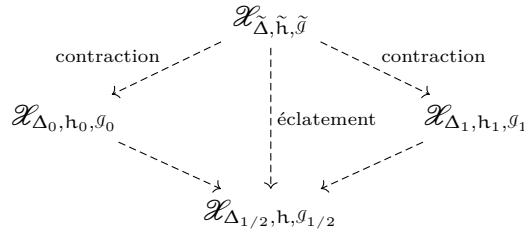
**Exemple 9.3.15.** Dans le cas des éclatements, l'éventail de catastrophe est l'éventail que l'on veut éclater.

*Remarque 9.3.16.* De la même façon que pour le cobordisme des polytopes (avertissement 9.2.6), l'éventail de transition n'est pas en général simplicial.

Comme les éventails quantiques  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)$ ,  $(\Delta_{1/2}, \mathbf{h}, \mathcal{G}_{1/2})$  (où  $\mathcal{G}_{1/2} = \mathcal{G}_0 \cap \mathcal{G}_1$ ) et  $(\Delta_1, \mathbf{h}, \mathcal{G}_1)$  ont un raffinement commun alors

**Proposition 9.3.17.** *Les champs toriques quantiques  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)$ ,  $(\Delta_{1/2}, \mathbf{h}, \mathcal{G}_{1/2})$  et  $(\Delta_1, \mathbf{h}, \mathcal{G}_1)$  sont birationnels.*

On peut décrire ces morphismes birationnels de façon explicite : Notons  $\sigma$  le cône  $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$  et  $\alpha \in \sigma$ . On va considérer l'éclatement<sup>1</sup> de  $\Delta$  le long de  $\sigma$  en  $\alpha$  que l'on notera  $\tilde{\Delta}$ . Cette éventail correspond au polytope de transition de la définition 9.2.7. Le morphisme birationnel  $(\tilde{\Delta}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathcal{G}}) \dashrightarrow (\Delta_{1/2}, \mathbf{h}, \mathcal{G}_{1/2})$  a pour diviseur exceptionnel  $\mathcal{D}$  le produit d'un espace projectif quantique  $\mathbb{P}_q^{a-1}$  de dimension  $a-1$  et d'un espace projectif quantique  $\mathbb{P}_q^{b-1}$  de dimension  $b-1$  (grâce au fait dual que la facette que l'on ajoute dans le polytope de transition est le produit d'un simplexe de dimension  $a-1$  et d'un simplexe de dimension  $b-1$ , voir [21, Proposition 2.6]). Les projections  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}_q^{a-1}$  et  $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{P}_q^{b-1}$  induisent les contractions  $\mathcal{X}_{(\tilde{\Delta}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathcal{G}})} \dashrightarrow \mathcal{X}_{(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)}$  et  $\mathcal{X}_{(\tilde{\Delta}, \tilde{\mathbf{h}}, \tilde{\mathcal{G}})} \dashrightarrow \mathcal{X}_{(\Delta_1, \mathbf{h}, \mathcal{G}_1)}$  (qui viennent du simplexe qui a été ôté dans le cas polytopal entre le polytope de transition et les polytopes du cobordisme). On obtient donc les flèches  $\mathcal{X}_{(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)} \dashrightarrow \mathcal{X}_{(\Delta_1, \mathbf{h}, \mathcal{G}_1)}$ ,  $\mathcal{X}_{(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)} \dashrightarrow \mathcal{X}_{(\Delta_1, \mathbf{h}, \mathcal{G}_1)}$ ,  $\mathcal{X}_{(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}_0)} \dashrightarrow \mathcal{X}_{(\Delta_{1/2}, \mathbf{h}, \mathcal{G}_{1/2})}$  par composition. En un diagramme,



**Exemple 9.3.18.** Considérons le pendant éventail du cobordisme entre le cube et le livre pentagonal (cf. l'exemple 9.2.9). Le cône  $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$  est un cône non-simplicial à quatre côtés.

L'éclatement de ce cône correspond à la triangulation complète de ce cône :

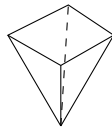


FIGURE 9.7 – Le cône  $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$

On peut ensuite contracter ce cône de deux façons différentes :

Les autres cônes sont inchangés par toutes ces opérations. Le diagramme de morphismes birationnels s'écrit donc sous la forme décrite dans la figure 9.10.

Ce diagramme rappelle le flop d'Atiyah comme décrit dans [8, section 3] où on éclate l'origine de la variété singulière  $V(xt - yz) \subset \mathbb{C}^4$  (qui est la variété torique associée au cône au-dessus d'un carré). Le

1. On éclate ici un cône non-simplicial. Pour obtenir cet éclatement, on va considérer toutes les sous-familles libres de cardinal  $d$  des générateurs de  $\sigma$  qui contiennent  $\alpha$ . On obtient aussi un morphisme birationnel grâce au théorème 6.3.2.2.2.

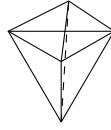


FIGURE 9.8 – Le cône  $L(\bigcup_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma)$  éclaté



FIGURE 9.9 – Les projections des cônes de  $\Delta_0$  et des cônes de  $\Delta_1$  reliés au cône maximal du cobordisme

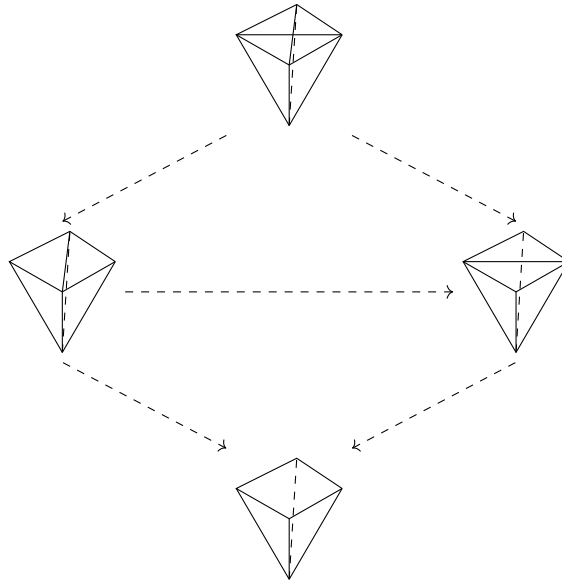


FIGURE 9.10 – Diagramme de morphismes birationnels du cobordisme

diviseur exceptionnel de cet éclatement est  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (vu comme plongé dans l'espace projectif  $\mathbb{P}^3$  par le plongement de Segre et d'équation  $xt - yz = 0$ ). Ce diviseur  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  peut être contracté sur  $\mathbb{P}^1$  par les deux projections. Les deux variétés ainsi obtenues  $X_0$  et  $X_1$  sont birationnelles et sont données par les éventails de la figure 9.9.

Pour finir cette section, nous allons étudier les déformations de cobordismes. Dans le cadre classique de [21], les cobordismes se déforment aisément puisque comme l'espace de réalisation des polytopes simples est ouvert, une (petite) déformation (des sommets) du polytope  $W$  (induite par une déformation de  $P$  ou  $Q$ ) ne change pas sa combinatoire.

De cette façon, on obtient une déformation des variétés LVM associées mais on n'a pas de déformation des variétés toriques puisqu'on a à considérer des coefficients irrationnels.

Grâce au cadre quantique, on peut sans problème considérer des déformations de cobordismes et d'éventails :

**Théorème 9.3.19.** *Soit  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  un cobordisme entre les éventails quantiques maximaux  $(\Delta_0, h_0, \mathcal{G}_0)$  et  $(\Delta_1, h_1, \mathcal{G}_1)$ . Soit  $(\Delta'_0, h'_0, \mathcal{G}_0)$  un éventail quantique dans un voisinage de  $(\Delta_0, h_0, \mathcal{G}_0)$  (avec  $h_0$  et  $h'_0$*

coïncidant sur  $\mathbb{Z}^{g_0}$ ) dans  $\Omega(\text{comb}(\Delta_0))$ . Il existe un unique éventail  $(\Delta'_1, \mathbf{h}'_1, \mathcal{G}_1) \in \Omega(\text{comb}(\Delta_1))$  (avec  $\mathbf{h}_1$  et  $\mathbf{h}'_1$  coïncidant sur  $\mathbb{Z}^{g_1}$ ) et un unique cobordisme  $(\Delta', \widetilde{\Delta}'_0, \widetilde{\Delta}'_1, \pi_0, \pi_1)$  entre eux qui minimisent la distance entre  $\mathbf{h}$  et  $\mathbf{h}'$ . On a la même chose en inversant 0 et 1.

En un diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (\widetilde{\Delta}'_0, \mathbf{h}', \mathcal{G}'_0) & \longleftarrow & (\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}') & \longleftarrow & (\widetilde{\Delta}'_1, \mathbf{h}', \mathcal{G}'_1) \\
 \downarrow & \approx & \Downarrow & \approx & \downarrow \\
 (\Delta'_0, \mathbf{h}'_0, \mathcal{G}'_0) & \approx & (\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0) & & (\Delta_1, \mathbf{h}_1, \mathcal{G}_1) \approx (\Delta'_1, \mathbf{h}'_1, \mathcal{G}'_1)
 \end{array}$$

*Démonstration.* Soit  $(\Delta'_0, \mathbf{h}'_0, \mathcal{G}'_0)$  un éventail quantique dans un voisinage de  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  et tel que  $\mathbf{h}_0$  et  $\mathbf{h}'_0$  coïncident sur  $\mathbb{Z}^{g_0}$ . Le [lemme 9.3.4](#) détermine l'unique candidat pour  $(\Delta_1, \mathbf{h}_1, \mathcal{G}_1)$ . Montrons qu'il existe un cobordisme entre  $(\Delta'_0, \mathbf{h}'_0, \mathcal{G}'_0)$  et  $(\Delta'_1, \mathbf{h}'_1, \mathcal{G}'_1)$ .

Par continuité de la projection, il existe un morphisme  $\mathbf{h}' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$  dans le voisinage  $\mathbf{h}$  dans  $\Omega(\text{comb}(\Delta'))$  qui minimise la distance parmi les antécédents de  $\mathbf{h}_0$  (car  $\Omega(\text{comb}(\Delta'))$  est ouvert et  $\ker(L)$  est un convexe). La combinatoire d'un cobordisme étant fixé, on en déduit ainsi le cobordisme entre  $(\Delta'_0, \mathbf{h}'_0, \mathcal{G}'_0)$  et  $(\Delta'_1, \mathbf{h}'_1, \mathcal{G}'_1)$ .  $\square$

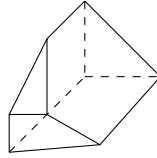


FIGURE 9.11 – Déformation du cobordisme entre le triangle et le triangle coupé

**Exemple 9.3.20.** Soit  $(\Delta, \widetilde{\Delta}_0, \widetilde{\Delta}_1, \pi_0, \pi_1)$  l' $\alpha$ -éclatement du cône  $\text{Cone}(-\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1)$  dans  $(\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  comme défini dans l'[exemple 9.3.8](#). Alors on peut obtenir cette éclatement par une déformation d'un éclatement rationnel (par densité de  $\mathbb{Q}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ ).



UNE FAÇON DE CONSTRUIRE DE NOUVELLES VARIÉTÉS à partir d'une variété est de regarder les fibrés au-dessus de celle-ci et en particulier les fibrés vectoriels. Ce chapitre sera dévoué à l'étude des fibrés (et plus précisément des fibrés en droites) sur les champs toriques quantiques. On réutilisera ces résultats dans le [chapitre 12](#) dans l'étude des variations de théorie géométrique des invariants dans la construction de champs toriques quantiques.

Ce chapitre est découpé comme suit : la [première section](#) décrit les propriétés d'extension des fibrés vectoriels sur les différents sites que l'on peut considérer dans l'étude des champs toriques (i.e. le site étale sur  $\text{Spec}(\mathbb{C})$ , le site analytique  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$ , le site analytique équivariant  $\mathfrak{A}$ ) afin de pouvoir les utiliser dans la [deuxième section](#) pour calculer le groupe de Picard des champs toriques quantiques. La [troisième section](#) sera dévouée au calcul des fibrés en droites et en droites projectives sur l'espace projectif et leur description en termes de champs toriques. Cela permet de créer des familles à paramètres de champs toriques quantiques au-dessus des espaces projectifs quantiques. Enfin, on examinera dans la [quatrième section](#) la description des diviseurs de champs toriques quantiques et les différences avec le cas rationnel.

## 10.1 Changements de site et groupes de Picard

Dans cette section, nous allons examiner les fibrés en droites au-dessus des objets des  $\mathfrak{Sch}_{\text{et}}$  (du cadre classique des champs toriques),  $\mathfrak{An}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{A}$  et plus particulièrement les extensions des fibrés vectoriels. Comme tout champ torique s'écrit comme un champ quotient d'une sous-variété ouverte  $\mathcal{S}$  de  $\mathbb{C}^n$  (ou  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ ) par un groupe  $G$  alors tout fibré en droites sur un champ torique  $\mathcal{X}$  est la donnée d'un fibré en droites  $G$ -linéarisable sur  $\mathcal{S}$ . Comme les fibrés en droites sur  $\mathbb{C}^n$  ou  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  sont triviaux (on utilise le lemme de  $\bar{\partial}$ -Poincaré (voir [\[57\]](#)) et la suite exacte exponentielle pour le premier et [\[109\]](#) pour le deuxième) alors si on arrive à étendre les fibrés sur  $\mathcal{S}$  à des fibrés sur  $\mathbb{C}^n$ , on obtiendra que les fibrés sur  $\mathcal{S}$  sont triviaux et les fibrés sur  $\mathcal{X}$  sont donnés par des caractères  $G \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

**Définition 10.1.1** ([\[115\]](#) Tag 0AVU). Soit  $X$  un schéma localement noethérien. Un  $\mathcal{O}_X$ -module cohérent est réflexif si la flèche naturelle

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee} = \underline{\text{Hom}}(\underline{\text{Hom}}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X), \mathcal{O}_X)$$

est un isomorphisme (où  $\underline{\text{Hom}}$  est le hom interne de la catégorie monoïdale symétrique  $(\mathcal{O}_X\text{-Mod}, \otimes_{\mathcal{O}_X})$ ).

**Exemple 10.1.2.** • Un fibré vectoriel est réflexif

- Si  $\mathcal{F}$  est un faisceau cohérent alors  $\mathcal{F}^{\vee\vee}$  est réflexif.

**Théorème 10.1.3** ([\[66\]](#) proposition 1.11). Soit  $X$  un schéma normal localement noethérien et  $\mathcal{F}$  un faisceau cohérent réflexif au-dessus de  $X$ . Alors, pour tout ouvert  $U$  de  $X$  et tout fermé  $F$  de  $X$  de codimension au moins 2, la restriction  $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U \setminus F)$  est un isomorphisme.

**Corollaire 10.1.4.** *Soit  $X$  un schéma normal localement noethérien et soit  $F$  un fermé de  $X$  de codimension au moins 2. Alors tout fibré vectoriel  $\mathcal{F}$  sur  $X \setminus F$  s'étend de façon unique sur  $X$  i.e.  $i^* \mathcal{G} = \mathcal{F}$  comme  $\mathcal{O}_U$ -modules.*

*Remarque 10.1.5.* Un des principaux intérêts des schémas localement noethériens est le fait que leur faisceau structural est cohérent (voir [58, paragraphe 6.1]), ce qui est toujours le cas des faisceaux structuraux des espaces analytiques (voir [106]). On peut donc utiliser tel que la définition 10.1.1 dans le cas analytique.

**Exemple 10.1.6** (Contre-exemple dans la catégorie analytique). Considérons l'inclusion  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}^2$ . Comme dit en introduction de cette section, tous les fibrés sur  $\mathbb{C}^2$  sont triviaux. On va utiliser la suite exacte exponentielle pour construire un fibré en droites non trivial sur  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  :

$$H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}) \longrightarrow H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}^*) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) \quad (10.1)$$

L'espace  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  a le type d'homotopie de  $\mathbb{S}^3$  donc

$$H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = H^2(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathbb{Z}) = 0$$

On en déduit donc que

$$\text{Pic}(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}) = H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}) \simeq H^1(\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}^*)$$

est de dimension infinie (voir [55, Chapter 5, section 4]).

Ce contre-exemple et le théorème suivant montre que dans le cadre différentiel complexe la borne optimale sur la codimension pour obtenir une extension de fibrés est de 3 au lieu de 2 dans le cadre algébrique (corollaire 10.1.4).

**Théorème 10.1.7** ([67]). *Soient  $X$  une variété (différentielle) complexe de dimension  $n$  et  $Z$  une sous-variété fermée de  $X$  de codimension  $\geq 3$ . Alors tout fibré en droites de  $X \setminus Z$  s'étend uniquement en un fibré en droites sur  $X$ .*

On va finir cette section avec le cas équivariant.

**Lemme 10.1.8.** *Soient  $P \in \mathfrak{A}$ . Soit  $G$  un groupe de Lie vu comme élément de  $\mathfrak{A}$  en agissant par translation. Un fibré équivariant (i.e. un morphisme de  $\mathfrak{A}$ )  $P \rightarrow G$  est trivial.*

*Démonstration.* Les seuls ouverts équivariants de  $G$  sont le vide et  $G$ . □

## 10.2 Fibrés en droites d'un champ torique quantique

Soit  $\mathcal{X}$  un champ sur  $\mathfrak{A}$ . On notera  $\text{Pic}_{\text{equiv}}(\mathcal{X})$  le groupe des fibrés en droites (équivariants, par définition) de  $\mathcal{X}$  et  $\text{Pic}(\mathcal{X})$  le groupe des fibrés en droites de  $\mathcal{X}$  vu comme champ sur  $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}$ .

Le but de cette section est de montrer le théorème suivant :

**Théorème 10.2.1.** *Soit  $\mathcal{X} = [\mathcal{S}/\mathbb{C}^{n-d}] = \mathcal{X}_{\Delta, n, g}$  un champ torique quantique. Alors  $\text{Pic}_{\text{equiv}}(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^{n-d}$ . Si, de plus,  $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{S}$  est de codimension au moins 3 dans  $\mathbb{C}^n$  ou si  $\mathcal{S} = \mathbb{C}^2 \setminus 0$  alors  $\text{Pic}(\mathcal{X}) = \text{Pic}_{\text{equiv}}(\mathcal{X}) = \mathbb{C}^{n-d}$ .*

Rappelons qu'un fibré en droites sur  $[X/G]$  est un fibré en droites sur  $X$  muni d'une  $G$ -linéarisation (voir théorème 2.6.2.5).

Pour montrer le théorème 10.2.1, on va commencer par regarder le groupe de Picard de  $\mathcal{S}$ .

**Théorème 10.2.2.** Soit  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique. Notons  $E$  le complémentaire de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Delta)$  dans  $\mathbb{C}^n$ . Alors

- Si  $E$  est de codimension au moins 3 alors  $\text{Pic}(\mathcal{S}) = 0$
- Si  $E$  est de codimension  $\leq 2$  alors deux cas se présentent :
  - Si  $\mathcal{S} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  alors les fibrés en droites  $\mathbb{C}^{n-d}$ -linéarisables sont triviaux.
  - Sinon, les fibrés en droites équivariants  $\mathbb{C}^{n-d}$ -linéarisables sont triviaux.

où l'action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathcal{S}$  est

$$t \cdot (z_1, \dots, z_n) = (E(k_1(t))z_1, \dots, E(k_n(t))z_n)$$

( $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n)$  étant une transformation de Gale de  $\mathfrak{h}$ )

On peut supposer qu'il n'y avait pas de générateurs virtuels car dans le cas contraire  $E$  serait de codimension 1 et on serait dans le dernier cas du théorème. Or on peut montrer que

**Lemme 10.2.3.** Soit  $(\Delta, \mathfrak{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique. Les fibrés équivariants au-dessus de  $\mathcal{X}_{\Delta_n, \text{id}, \mathcal{G}} = \mathcal{S}(\Delta) \times (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{G}}$  sont induits par ceux au-dessus de  $\mathcal{X}_{\Delta_n, \text{id}, \emptyset} = \mathcal{S}(\Delta)$

*Démonstration.* Cela vient du fait que les ouverts  $(\mathbb{C}^*)^n \times (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{G}}$ -équivariants de  $\mathcal{S} \times (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{G}}$  sont de la forme  $U \times (\mathbb{C}^*)^{\mathcal{G}}$  où  $U$  est un ouvert  $(\mathbb{C}^*)^n$ -équivariants de  $\mathcal{S}$ .  $\square$

Pour montrer le [théorème 10.2.2](#), on rappelle le lemme suivant :

**Lemme 10.2.4** ([91] II lemme 5). La variété  $\mathcal{S} = \mathbb{C}^n \setminus E$  est  $(2\text{codim}_{\mathbb{C}^n}(E) - 2)$ -connexe i.e.

$$\forall k < 2\text{codim}_{\mathbb{C}^n}(E) - 2, \pi_k(\mathcal{S}) = 0$$

Ensuite, on utilise le théorème d'Hurewicz pour le transformer en résultat sur les groupes d'homologie/cohomologie :

**Théorème 10.2.5** (HUREWICZ, [68] theorem 4.32). Si un espace topologique  $X$  est  $(n-1)$ -connexe avec  $n \geq 2$  alors

$$\forall k < n, H_n(X, \mathbb{Z}) = 0$$

et

$$H_n(X, \mathbb{Z}) = \pi_n(X)$$

Comme on considère des champs toriques quantiques sans générateur virtuel alors  $\text{codim}(E) \geq 2$  et donc  $\mathcal{S}$  est au moins 2-connexe, ce qui permet de dire que  $H_1(X, \mathbb{Z}) = H_2(X, \mathbb{Z}) = 0$  et donc  $H^1(X, \mathbb{Z}) = H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$ .

Grâce à la suite exponentielle

$$\dots \longrightarrow H^1(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) \longrightarrow H^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}^*) \longrightarrow H^2(\mathcal{S}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \dots \quad (10.2)$$

on obtient l'isomorphisme

$$H^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) \simeq H^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}^*) = \text{Pic}(\mathcal{S})$$

Si  $E$  est de codimension 3 alors, grâce à [55, chapter V, paragraph 4], cela conclut car, dans ce cas,

$$H^1(\mathcal{S}, \mathcal{O}_{\mathcal{S}}) = H^1(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) = 0$$



Le cas  $\text{codim}(E) = 2$  est un peu plus délicat.

On décompose  $\mathcal{S}$  en ouverts toriques :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\sigma_1 \in \Delta_{\max}} \mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}$$

Comme  $\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}$  sont des variétés de Stein (car biholomorphe à un fermé de  $\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^2)^{I^c}$ ) alors

$$H^1(\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}}) = H^2(\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}}) = 0,$$

par la suite exacte (10.2) on a un isomorphisme

$$\text{Pic}(\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}) \simeq H^2(\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{\binom{I^c}{2}} = H^2((\mathbb{C}^*)^{I^c}, \mathbb{Z}) \simeq \text{Pic}((\mathbb{C}^*)^{I^c})$$

Le groupe des fibrés en droites est donc trivial si, et seulement si,  $|I^c| = 1$ . Les seuls champs toriques dont toutes les cartes vérifient cette condition sont les espaces projectifs quantiques. Il nous reste donc juste à traiter le cas du plan projectif quantique.

On va maintenant traiter ce cas :

On déduit de ce qui précède que le groupe de Picard de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  est le groupe des classes d'équivalences d'applications holomorphes  $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  (i.e. les changements de cartes possibles). Regardons maintenant quels sont les fibrés  $\mathbb{C}$ -linéarisables (cf. la construction 2.6.2.6) i.e. quelles sont les applications holomorphes  $f: \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  telles qu'ils existent des caractères  $\chi_i: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ ,  $t \mapsto E(\alpha_i t)$  tels que

$$\forall t \in \mathbb{C}, \forall (x, y) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*, \chi_1(t)f(t \cdot (x, y)) = \chi_2(t)f(x, y) \quad (10.3)$$

Au voisinage de  $(0,0)$ , (un représentant de la classe de cohomologie de) la fonction  $f$  peut s'écrire sous la forme (voir [55, Chapter 5, section 4])

$$f(x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}_{<0}} a_{ij} x^i y^j$$

Alors, l'équation (10.3) devient (en posant  $\alpha := \alpha_1 - \alpha_2$ )

$$\sum_{i, j \in \mathbb{Z}_{<0}} E((a_0 i + a_1 j)t) a_{ij} x^i y^j = E(\alpha t) \sum_{i, j \in \mathbb{Z}_{<0}} a_{ij} x^i y^j$$

Par conséquent (en supposant que  $-\alpha \in \mathbb{N}a_0 + \mathbb{N}a_1 \subset \mathbb{R}_{>0}$ ),

$$f(x, y) = \sum_{a_0 i + a_1 j = \alpha, i, j \in \mathbb{Z}_{<0}} a_{ij} x^i y^j$$

Comme on somme sur un ensemble d'indice fini alors  $f$  est une fonction polynomiale. De plus, comme  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{C}^*$  alors il n'y a qu'un seul coefficient  $a_{ij}$  non nul (sinon  $f$  aurait un zéro) :

$$f(x, y) = a_{ij} x^i y^j$$

où  $a_0 i + a_1 j = \alpha$ . L'application  $f$  est le produit de  $(x, y) \mapsto a_{ij} x^i \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*}^*)$  et de  $(x, y) \mapsto y^j \in \Gamma(\mathcal{O}_{\mathbb{C} \times \mathbb{C}^*}^*)$  i.e.  $f$  est nulle dans  $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ . On en déduit que le seul fibré  $\mathbb{C}$ -linéarisable de  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  est le fibré trivial.

Étudions maintenant le cas restant. Comme le groupe de Picard des cartes affines ne sont pas triviaux, on va devoir demander que les fibrés soient équivariants pour que les fibrés équivariants  $\mathbb{C}^{n-d}$ -linéarisables de  $\mathcal{S}$  puissent être triviaux. En effet, si on demande cela, le seul fibré en droites au-dessus de  $(\mathbb{C}^*)^l$  est

le fibré trivial (voir [lemme 10.1.8](#)). Par conséquent, le seul fibré équivariant au-dessus de  $\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}$  est trivial.

Pour conclure, on montre, de la même façon que pour le cas du plan projectif, que les seules applications de transition  $\mathbb{C}^{n-d}$ -équivariantes sont monomiales et nulles en cohomologie. Ce qui permet de prouver le [théorème 10.2.2](#).

On en déduit ensuite le [théorème 10.2.1](#) car un fibré en droites sur  $[\mathcal{S}/\mathbb{C}^{n-d}]$  est un fibré en droites sur  $\mathcal{S}$  avec une  $\mathbb{C}^{n-d}$ -linéarisation, ce qui dans notre cas se résume à avoir un caractère  $\mathbb{C}^{n-d} \rightarrow \mathbb{C}^*$  i.e. un élément de  $\mathbb{C}^{n-d}$  (voir le [lemme 10.2.6](#)).

**Lemme 10.2.6.**

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}(\mathrm{VarDiff}_{\mathbb{C}})}(\mathbb{C}^d, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})) \simeq \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^d$$

*Démonstration.* Il suffit de le montrer pour  $d = 1$ . Les éléments du groupe  $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}, \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}))$  sont les applications holomorphes  $\mathbb{C} \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  qui vérifient

$$\begin{aligned} f(x + y) &= f(x)f(y) \\ f(0) &= I_n \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à  $x$  et en évaluant en 0, on obtient

$$f'(y) = f'(0)f(y)$$

et dont l'unique solution valant l'identité en 0 (car c'est un morphisme de groupes) est

$$f(y) = e^{f'(0)y}$$

L'isomorphisme voulu est donc  $f \mapsto f'(0) \in T_{I_n} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  □

## 10.3 Fibrés au-dessus d'un espace projectif quantique

Dans cette section, on va se restreindre au cas des espaces projectifs et décrire quelques fibrés sur ceux-ci.

**Notation 10.3.0.1** (voir [l'exemple 3.6.9](#)). Soit  $\mathbb{P}_q^n = \mathbb{P}_q^n(\underline{a})$  un espace projectif quantique i.e. le quotient de  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  par l'action de  $\mathbb{C}$  donnée par :

$$t \cdot (z_1, \dots, z_{n+1}) = (E(\mathbf{a}_1 t)z_1, \dots, E(\mathbf{t})z_{n+1})$$

où les  $\mathbf{a}_i, 1 \leq i \leq n$  sont des réels strictement positifs.

Remarquons que, grâce au [théorème 10.2.2](#), on a l'égalité :

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_q^n) = \mathrm{Pic}_{\mathrm{equiv}}(\mathbb{P}_q^n)$$

### 10.3.1 Fibrés en droites

**Proposition 10.3.1.1.** *On a un isomorphisme*

$$\mathrm{Pic}(\mathbb{P}_q^n) \simeq \mathbb{C}.$$

donné par  $\alpha \in \mathbb{C} \mapsto (t \in \mathbb{C} \mapsto E(\alpha t) \in \mathbb{C}^*) \in \mathrm{Car}(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_q^n)$

*Démonstration.* Cela découle du [théorème 10.2.1](#). □

**Proposition 10.3.1.2.** *Soit  $(\alpha: \mathbb{P}_q^n \rightarrow \mathcal{B}\mathbb{C}^*) \in \text{Pic}(\mathbb{P}_q^n) = \mathbb{C}$  un fibré en droites. Notons  $p: \mathcal{X} := [\mathbb{C}/\mathbb{C}^*] \times_{\mathcal{B}\mathbb{C}^*} \mathbb{P}_q^n \rightarrow \mathbb{P}_q^n$  le morphisme correspondant. Alors le champ  $\mathcal{X}$  et le morphisme  $p$  sont toriques si, et seulement si,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dans ce cas, on note  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha)$  le champ  $\mathcal{X}$  que l'on peut décrire de la façon suivante :*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha) = \begin{cases} \mathbb{P}_q^n \times \mathbb{C} & \text{si } \alpha = 0 \\ l'(-\underline{a}/\alpha, -1/\alpha)\text{-éclatement de l'origine de } \mathbb{C}^{n+1} & \text{si } \alpha < 0 \\ \mathbb{P}_q^{n+1}(\underline{a}/\alpha, 1/\alpha) \setminus (\text{point fermé}) & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad (10.4)$$

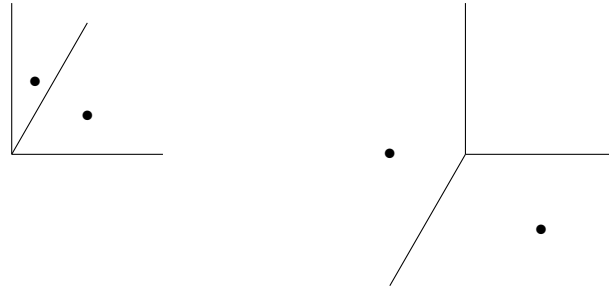


FIGURE 10.1 – Fibrés en droites  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha)$  pour  $\alpha < 0$  et  $\alpha > 0$

*Démonstration.* C'est un morphisme torique si, et seulement si, il est donné par un morphisme linéaire  $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^d$  ce qui oblige  $\alpha$  à être réel (car un isomorphisme complexe de  $\mathbb{C}^d \supset \mathbb{R}^d$  ne peut pas envoyer  $d$  réels et un complexe sur  $d + 1$  réels). Alors

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha) = [(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/\mathbb{C}]$$

où l'action de  $\mathbb{C}$  sur  $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}$  est donnée par :

$$t \cdot z = (E(\mathbf{a}_1 t)z_1, \dots, E(\mathbf{a}_n t)z_n, E(t)z_{n+1}, E(\alpha t)z_{n+2})$$

i.e est donnée par l'application

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{k}(t) = (\mathbf{a}_1 t, \dots, \mathbf{a}_n t, t, \alpha t) \in \mathbb{R}^{n+2}$$

Si  $\alpha = 0$  alors  $\mathbb{C}$  n'agit pas sur la dernière composante. On en déduit que :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha) = [(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{C}] \times \mathbb{C} = \mathbb{P}_q^n \times \mathbb{C}$$

Supposons maintenant  $\alpha \neq 0$ . Pour trouver l'éventail de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\alpha)$ , il faut trouver une application  $h: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  telle que la suite suivante soit exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{k} \mathbb{R}^{n+2} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow 0$$

Le morphisme

$$(x_1, \dots, x_{n+1}, y) \mapsto \left( x_1 - \frac{\mathbf{a}_1}{\alpha} y, \dots, x_n - \frac{\mathbf{a}_n}{\alpha} y, x_{n+1} - \frac{1}{\alpha} y \right) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i + \frac{1}{\alpha} (-\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_n, -1)$$

convient.

Deux cas surviennent :

- Si  $\alpha > 0$  alors  $\frac{1}{\alpha}(-\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_n, -1) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$ , on obtient donc l'éventail d'un projectif moins le cône maximal  $\text{Cone}(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1})$  ce qui enlève le sous-champ fermé  $[0_{\mathbb{C}^n} \times \mathbb{C}^*/\mathbb{C}]$  de cet espace projectif.
- Si  $\alpha < 0$  alors  $\frac{1}{\alpha}(-\mathbf{a}_1, \dots, -\mathbf{a}_n, -1) \in \mathbb{R}_{>0}^{n+1}$ , on obtient donc l'éventail d'un éclatement<sup>1</sup> de  $\mathbb{C}^{n+1}$ .  $\square$

**Exemple 10.3.1.3.** Dans le cadre classique i.e. en prenant «  $\mathbb{P}_q^n = \mathbb{P}^n$  », on a les résultats suivants :

- le fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$  est le fibré tautologique de  $\mathbb{P}^n$  i.e.

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1) = \{(L, \mathbf{v}) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n \mid \mathbf{v} \in L\}$$

Autrement dit, c'est l'éclatement de l'origine de  $\mathbb{C}^{n+1}$  ;

- le fibré  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$  est le dual du fibré précédent et est défini par

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) = (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) \times \mathbb{C}/\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^{n+2} \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* \setminus (0_{\mathbb{C}^{n+1}} \times \mathbb{C}^*/\mathbb{C}^* = \mathbb{P}^{n+1} \setminus (0 : \dots : 0 : 1)).$$

Cette famille d'éventails/champs est indexée par  $\mathbb{R}$ . Cependant lorsque  $\alpha$  tend vers 0, on a une discontinuité car le vecteur « libre » tend vers l'infini. Pour mieux comprendre ce qui se passe, il faut changer la carte de l'espace de modules dans laquelle on regarde cette famille :

**Corollaire 10.3.1.4.** Dans la carte  $\mathcal{U}_k$ , ( $k < n+2$ ), de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n+1}$ , la calibration de la proposition 10.3.1.2 s'écrit :

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{e}_i) = \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i < k \\ \frac{1}{\alpha_k}(-\mathbf{a}_1, \dots, \widehat{-\mathbf{a}_k}, \dots, -\mathbf{a}_n, -1, -\alpha) & \text{si } i = k \\ \mathbf{e}_{i-1} & \text{si } i > k \end{cases}$$

où  $\mathbf{a}_{n+1} = 1$ .

La projection  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\alpha) \rightarrow \mathbb{P}_q^n$  est donnée par la morphisme d'éventails  $(\pi_n, \mathbb{P}_{(n+1 \ n \dots k)} \pi_{n+2})$

Démonstration.  $\ker(\mathbf{h}) = \ker(\tilde{\mathbf{h}}) = \mathbb{R}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}, \alpha)$   $\square$

On obtient ainsi une famille de champs toriques dont les types combinatoires changent avec  $\alpha$ . C'est pour cela que dans la première calibration choisie il y avait une discontinuité qui venait du fait que l'on avait fixé un cône qu'il allait disparaître lorsque  $\alpha$  allait changer de signe.

### 10.3.2 Fibrés projectifs

Dans la suite, on va voir comment définir sur les champs analytiques quelques constructions classiques sur les fibrés vectoriels et tout d'abord le produit direct de deux fibrés :

**Définition 10.3.2.1.** Soient  $\mathcal{X}$  un champ analytique et  $\mathcal{V}_1 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}ect_n, \mathcal{V}_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}ect_p$  (où  $\mathcal{V}ect_p \simeq \mathcal{B}GL_p(\mathbb{C})$  est le champ des fibrés vectoriels de rang  $p$ ) deux fibrés vectoriels sur  $\mathcal{X}$ .

Alors  $\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{V}ect_{n+p}$  est défini, pour tout  $S \in \mathfrak{A}_n$  et  $X \in \mathcal{X}(S)$ , par :

$$\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2(S)(X) := \mathcal{V}_1(S)(X) \oplus \mathcal{V}_2(S)(X) \in \mathcal{V}ect_{n+p}(S)$$

(car la somme directe d'un fibré de rang  $n$  et d'un fibré de rang  $p$  est de rang  $n+p$ ) et

$$\mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2(X \xrightarrow{f} Y) := \mathcal{V}_1(X) \oplus \mathcal{V}_2(X) \xrightarrow{\mathcal{V}_1(f) \oplus \mathcal{V}_2(f)} \mathcal{V}_1(Y) \oplus \mathcal{V}_2(Y)$$

1. Le morphisme vers  $\mathbb{C}^{n+1}$  de l'éclatement n'est pas un morphisme torique (voir chapitre 8 pour des détails)

*Remarque 10.3.2.2.* • On peut faire cette construction pour un nombre (même infini) arbitraire de fibrés.

- Si  $\mathcal{X}$  est un espace analytique alors cette définition correspond bien, par le lemme de Yoneda, à la somme directe des deux fibrés (car la somme directe commute aux tirés-en-arrière et que le tiré-en-arrière d'un fibré vectoriel est un fibré vectoriel, voir [115, Tag 01AJ et 01C8] ).

Maintenant, nous allons voir comment projectiviser un fibré vectoriel i.e transformer un fibré vectoriel de rang  $n$  en un  $\mathbb{P}^{n-1}$ -fibré ou autrement dit un  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ -fibré principal en un  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ -fibré principal. Pour cela, il suffit de remarquer qu'il existe un morphisme  $p: \mathcal{B}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$  défini par

$$(T \rightarrow S) \in \mathcal{B}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \mapsto (T/\mathbb{C}^* \rightarrow S) \in \mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$$

où  $\mathbb{C}^*$  agit sur  $T$  grâce au morphisme  $t \in \mathbb{C}^* \mapsto tI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  et les images des morphismes sont obtenues par passage au quotient. Ainsi,

**Définition 10.3.2.3.** Soit  $\mathcal{X}$  un champ analytique et  $\mathcal{V}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$  un fibré vectoriel de rang  $n$  sur  $\mathcal{X}$ . Alors, la projectivisation de  $\mathcal{V}$  est la composition  $p \circ \mathcal{V}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ . On notera  $\mathbb{P}(\mathcal{V})$  le produit fibré  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})} [\mathbb{P}^{n-1}/\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})]$ . On obtient ainsi un  $\mathbb{P}^{n-1}$ -fibré au-dessus de  $\mathcal{X}$  (de groupe structurel  $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$ ) i.e. pour tout  $f: S \rightarrow \mathcal{X}$ , on a :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(f^*\mathcal{V}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & [\mathbb{P}^{n-1}/\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ S & \xrightarrow{f} & \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

*Remarque 10.3.2.4.* • Cela correspond bien à la construction habituelle car le foncteur  $\mathbb{P}(-)$  commute aux tirés-en-arrière (cf. [115, Tag 01O3] )

- Le morphisme  $\mathcal{V} \setminus Z \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{V})$  (où  $Z$  est la section nulle) est un  $\mathbb{C}^*$ -fibré principal (car  $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  l'est) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{V} \setminus Z & \longrightarrow & [\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] & & \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \searrow \cong & \\ \mathbb{P}(\mathcal{V}) & \longrightarrow & [\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] & \longrightarrow & [\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C}) / \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})] \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow{\mathcal{V}} & \mathcal{B}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{B}\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C}) \end{array}$$

L'isomorphisme  $[\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})] \rightarrow [\mathbb{P}^{n-1} / \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})]$  vient du fait que  $\mathbb{C}^n \setminus \{0\} / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^{n-1}$  et  $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* = \mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$  et en utilisant l'isomorphisme de la proposition 2.4.1.14.

Considérons maintenant le fibré vectoriel de rang 2  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbb{P}_q^n$  et son projectivisé  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}))$ . Par construction, on a :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}) = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 / \mathbb{C}]$$

où  $\mathbb{C}$  agit sur  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2$  par :

$$t \cdot (z, v_1, v_2) = \left( t \cdot z, \exp \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{b} \end{pmatrix} t \right) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right) = (t \cdot z, v_1, E(\mathbf{b}t)v_2)$$

(l'action sur  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$  est celle de  $\mathbb{P}_q^n$ ). Son projectivisé est donc

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b})) = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*]$$

où l'action est :

$$(t, s) \cdot (z, v_1, v_2) = (t \cdot z, sv_1, sE(bt)v_2)$$

La présence du  $\mathbb{C}^*$  empêche que ce champ quotient soit un champ torique quantique. C'est pour cela que l'on va considérer la  $\mathbb{Z}$ -gerbe, que l'on notera  $\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}))$ , au-dessus de  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}))$  définie par

$$\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b})) := [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C} \times \mathbb{C}]$$

où l'action est :

$$(t, s) \cdot (z, v_1, v_2) = (t \cdot z, E(s)v_1, E(s + bt)v_2) \quad (10.5)$$

*Remarque 10.3.2.5.* Dans le cas classique,  $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mathbf{b}))$  est une surface d'Hirzebruch.

**Théorème 10.3.2.6.** *Le champ  $\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b}))$  est le champ torique quantique donné par la calibration  $h : \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  définie par :*

$$\begin{aligned} h(e_i) &= e_i, 1 \leq i \leq n+1 \\ h(e_{n+2}) &= v := \frac{1}{b}(a_1, \dots, a_n, 1) \\ h(e_{n+3}) &= -v = \frac{-1}{b}(a_1, \dots, a_n, 1) \end{aligned}$$

et d'éventail (simplicial) :

$$\Delta_{\max} = \{I \subset \llbracket 1, \dots, n+3 \rrbracket \mid |I| = n+1, \llbracket 1, \dots, n+1 \rrbracket \not\subset I, \llbracket n+2, n+3 \rrbracket \not\subset I\}$$

si  $b \neq 0$  et

$$\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}) = \mathbb{P}_q^n \times \widetilde{\mathbb{P}^1}$$

sinon (où  $\widetilde{\mathbb{P}^1}$  est la  $\mathbb{Z}$ -gerbe au-dessus de  $\mathbb{P}^1$  donnée par l'éventail trivialement calibré de  $\mathbb{P}^1$  (cf. l'exemple 3.6.9)).

*Démonstration.* On a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{k} \mathbb{R}^{n+3} \xrightarrow{h} \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow 0$$

où  $k$  est le morphisme  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+3}$  définissant l'action (10.5) i.e.

$$k(x, y) = x(a_1, \dots, a_n, 0, b) + y(0, \dots, 0, 1, 1)$$

et  $h : \mathbb{R}^{n+3} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  est défini par :

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i + x_{n+2} v - x_{n+3} v$$

La combinatoire de l'éventail est donnée par la variété  $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  i.e. son type combinatoire est le produit de  $\text{comb}(\Delta_{\mathbb{P}^n}) \times \text{comb}(\Delta_{\mathbb{P}^2})$ .

Si  $b = 0$  alors les actions des deux  $\mathbb{C}$  sont indépendantes et donc :

$$\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}) = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C} \times \mathbb{C}] = [\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} / \mathbb{C} \times \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / \mathbb{C}] = \mathbb{P}_q^n \times \widetilde{\mathbb{P}^1}$$

□

*Remarque 10.3.2.7.* On voit dans cette preuve que l'on obtient la même chose en prenant  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{a}) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_q^n}(\mathbf{b})$

ou  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ .

**Exemple 10.3.2.8.** Prenons  $n = 1$  alors en appliquant l'isomorphisme d'éventails calibrés  $(L = (\mathbf{e}_1 \mathbf{v})^{-1}, P_{(2\ 3)})$ , obtient l'éventail suivant :

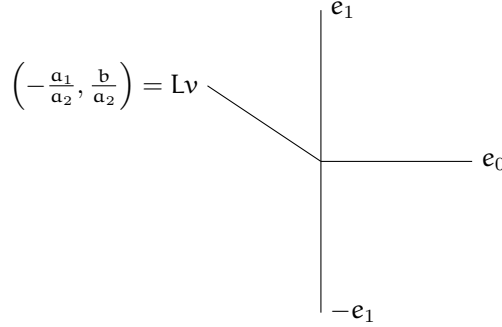


FIGURE 10.2 – Éventail de  $\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_q} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_q}(\mathbf{a}))$

i.e. une surface d'Hirzebruch quantique.

De façon plus générale, on peut écrire l'éventail de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_q} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_q}(\mathbf{b})$  de la façon suivante : Soit  $k \in \{0, \dots, n\}$  et posons

$$L_k = (\mathbf{e}_1 \dots \widehat{\mathbf{e}_k} \mathbf{v} \dots \mathbf{e}_{n+1})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & -\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_k & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & 1 & -\mathbf{a}_{k-1}/\mathbf{a}_k & & & & \\ & & & \mathbf{b}/\mathbf{a}_k & & & & \\ & & & -\mathbf{a}_{k+1}/\mathbf{a}_k & 1 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & -\mathbf{a}_{n+1}/\mathbf{a}_k & & & 1 & \end{pmatrix}$$

et  $H = P_{(k\ n+2)}$ . On est donc dans la carte  $U_{\{1, \dots, k-1, \widehat{k}, n+2, k+1, \dots, n+1\}}$ . Alors, par cet isomorphisme, le champ torique  $\mathbb{P}_q(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_q} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_q}(\mathbf{b}))$  est décrit par la calibration

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^n x_i \mathbf{e}_i + x_{n+1} \left( \frac{-1}{\mathbf{a}_k} (\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, -\mathbf{b}, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_n) \right) - x_{n+2} \mathbf{e}_k$$

On obtient donc une famille continue de calibration  $\mathbf{b} \mapsto h_{\mathbf{b}}$  donnée par le paramètre du « twist » du fibré en plans que l'on considère qui définit des champs toriques dont le type combinatoire change.

Pour un fibré projectif quelconque sur  $\mathbb{P}^n_q$ , on a les résultats suivants :

**Théorème 10.3.2.9.** Soient  $d \geq 2$  et  $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d \in \mathbb{R}$ .

- S'il existe  $i$  et  $j$  tels que  $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{b}_j$  alors le champ  $\mathbb{P}_q \left( \bigoplus_{k=1}^d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_q}(\mathbf{b}_k) \right)$  est le champ torique quantique donné par la calibration suivante :

$$h(x_1, \dots, x_{n+1}, y_1, \dots, y_d) = \sum_{k=1}^{n+1} x_k \mathbf{e}_k + \sum_{k \neq i, j} y_k \mathbf{f}_k + \frac{y_j - y_i}{\mathbf{b}_i - \mathbf{b}_j} (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_1, \dots, \widehat{\mathbf{b}}_i, \widehat{\mathbf{b}}_j, \dots, \mathbf{b}_d)$$

(où  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n+1}, \mathbf{f}_1, \dots, \widehat{\mathbf{f}}_i, \dots, \widehat{\mathbf{f}}_j, \dots, \mathbf{f}_d)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+d-1}$  (pour que cela soit une calibration standard, on va prendre  $i = d - 1, j = d$  quitte à changer l'ordre)





L'injection des caractères dans les diviseurs de Cartier équivariants permet de donner une description du groupe de Picard de la variété considérée :

**Proposition 10.4.1.2** ([34],Theorem 4.1.3). *Soit  $X_\Delta$  une variété torique compacte de tore  $T$ . Alors on a la suite exacte de groupes abéliens suivante :*

$$0 \longrightarrow \text{Car}(T) \xrightarrow{\text{div}} \text{CDiv}_T(X_\Delta) \xrightarrow{\pi} \text{Pic}(X_\Delta) \longrightarrow 0 \quad (10.6)$$

où la première flèche associe au caractère  $\chi^m$  le diviseur principal associé et la deuxième flèche est le passage au quotient.

Rappelons que l'on peut décrire explicitement la première flèche :

**Lemme 10.4.1.3** ([34],Proposition 4.1.2). *Soit  $X_\Delta$  une variété torique de tore  $T$ . Alors*

$$\forall \chi^m \in \text{Car}(T) \simeq \mathbb{Z}^d, \text{div}(\chi^m) = \sum_{\rho \in \Delta(1)} \langle m, u_\rho \rangle D_\rho \quad (10.7)$$

où  $\langle -, - \rangle$  est le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^d$ .

Dans le cas simplicial, le groupe des diviseurs de Cartier est d'indice fini dans celui des diviseurs de Weil :

**Lemme 10.4.1.4** ([34],Proposition 4.2.7). *Soit  $X_\Delta$  une variété torique orbifolde (i.e.  $\Delta$  est simplicial) de tore  $T$ . La tensorisation par  $\mathbb{Q}$  de l'inclusion  $\text{CDiv}_T(X_\Delta) \hookrightarrow \text{Div}_T(X_\Delta)$  est un isomorphisme et leur quotient par  $\text{Car}(T) \otimes \mathbb{Q}$  est  $\text{Pic}(X) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{n-d}$ .*

## 10.4.2 Cas quantique

Si  $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$  n'est pas discret alors le groupe des caractères du tore quantique  $\mathcal{T}_{h,\emptyset}$ , qui est isomorphe à  $\Gamma^*$  (voir la section 3.2 pour la définition de cette dualité et la section 3.3 pour la démonstration), est de rang strictement inférieur à  $d$  (rappelons que si l'ensemble des générateurs virtuels est non-vidé alors il n'y a pas de caractères). Plus précisément, si  $\bar{\Gamma} = \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{Z}^p$  alors  $\text{Car}(\mathcal{T}_{h,\emptyset}) = \mathbb{Z}^p$ . Cependant, on a toujours le résultat suivant :

**Proposition 10.4.2.1.** *Le groupe des diviseurs de Weil  $\mathcal{T}_{h,\emptyset}$ -équivariants  $\text{Div}_{\mathcal{T}_{h,\emptyset}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g})$  d'un champ torique quantique  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g} = [\mathcal{S}/\mathbb{C}^{n-d}]$  est engendré par les diviseurs*

$$\mathcal{D}_i := [\mathcal{S} \cap \{z_i = 0\}/\mathbb{C}^{n-d}]$$

pour  $1 \leq i \leq n$ .

*Démonstration.* Les diviseurs de Weil  $\mathcal{T}_{h,\emptyset}$ -équivariants de  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}$  sont les sous-variétés fermées de  $\mathcal{X}_{\Delta,h,g}$  qui sont équivariants pour l'action de  $\mathcal{T}_{h,\emptyset}$ . Autrement dit, c'est la donnée de diviseurs de Weil de  $\mathcal{S}$  qui sont équivariants pour l'action de  $(\mathbb{C}^*)^n$  (comme variété torique) et celle de  $\mathbb{C}^{n-d}$  (par la TGI quantique) par la proposition 2.5.1.3 et l'isomorphisme de la proposition 7.1.3. Comme  $E(k(\mathbb{C}^{n-d})) \subset (\mathbb{C}^*)^n$  alors c'est la même chose que les sous-variétés fermées de  $\mathcal{S}$  qui sont  $(\mathbb{C}^*)^n$ -équivariantes qui sont celles décrites dans la proposition.  $\square$

On a aussi montré que  $\text{Pic}_{\text{equiv}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g}) = \mathbb{C}^{n-d}$  et que seuls les éléments de  $\mathbb{R}^{n-d}$  correspondent à un fibré en droites donné par un champ torique quantique (on le notera  $\text{Pic}_{\text{equiv}}^{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g})$ ). Ainsi même en se restreignant à ces fibrés et en tensorisant tout par  $\mathbb{R}$ , on ne peut pas obtenir une suite exacte de la forme (10.6). On peut toutefois définir des applications pour obtenir un analogue de cette suite exacte

au niveau combinatoire :

La première application est donné formellement par la formule (10.7) i.e. c'est l'application  $\mathbb{R}^d \rightarrow \text{Div}_{\mathcal{F}_{h,\emptyset}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g}) \otimes \mathbb{R}$  définie par :

$$\forall \mathbf{m} \in \mathbb{R}^d, \text{div}(\mathbf{m}) = \sum_{i=1}^n \langle \mathbf{m}, \mathbf{u}_i \rangle D_i$$

(une autre façon de le voir est que c'est l'application  $\mathbf{h}^\top : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ensuite la deuxième application va être définie par l'application  $\text{Div}_{\mathcal{F}_{h,\emptyset}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g}) \otimes \mathbb{R} \rightarrow \text{Pic}_{\text{equiv}}^{\mathbb{R}}(\mathcal{X}_{\Delta,h,g})$  :

$$\pi \left( \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i D_i \right) = \mathbf{k}^\top(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$$

où l'élément à droite est le caractère  $\mathbb{C}^{n-d} \rightarrow \mathbb{C}^*$  donnant le fibré. Autrement dit, c'est la tensorisation par  $\mathbb{R}$  de la transposée de la transformée de Gale de  $\mathbf{h}$ .



# ÉVENTAIL SECONDAIRE

UN ÉVENTAIL QUANTIQUE EST LA DONNÉE D'UN épimorphisme linéaire  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  et d'une donnée combinatoire constituée d'une famille de cônes  $\Delta$  (engendrés par des familles  $(h(e_i))_{i \in I}$  où  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ), appelée éventail, et une famille  $\mathcal{G}$  de 1-cônes « virtuels » (engendrés par un  $h(e_i)$ ) qui n'apparaissent pas dans l'éventail. Une question naturelle découlant de cette définition est : si on fixe le morphisme  $h$ , quels sont les couples  $(\Delta, \mathcal{G})$  permettant d'obtenir un éventail quantique  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  ? Ou la question équivalente suivante : pour quels types combinatoires  $D$ , le morphisme  $h$  est  $D$ -admissible ? Cette question apparaît déjà en géométrie torique classique (cf. [51]) mais nécessite l'ajout de la donnée d'un générateur à chaque 1-cône qui n'apparaît pas dans la donnée combinatoire d'un éventail classique.

Pour répondre à cette question, nous allons paramétrer les différents types combinatoires que l'on peut obtenir à partir de  $h$  grâce à un vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$ . Celui-ci permettra d'encoder un type combinatoire d'un éventail quantique  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$  par une adaptation de la construction d'un éventail normal au polyèdre (qui doit être de dimension  $d$ )

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i, \langle h(e_i), x \rangle \geq -b_i\}$$

On fera cette construction dans la [deuxième section](#). Dans la [troisième section](#), on verra comment déterminer les propriétés combinatoires de  $\Delta_b$  à partir de  $b$  et notamment pour quel  $b$ , l'éventail  $\Delta_b$  est simplicial. On construira pour cela l'éventail secondaire de  $h$  (défini dans le cas rationnel dans [51]) qui encode les changements de combinatoire de  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$ . Dans la [quatrième section](#), nous allons voir quelques exemples de ces constructions. Dans la [cinquième section](#), nous verrons les liens entre la construction précédente et le cas classique. Un des intérêts de l'éventail secondaire est de fournir des exemples de morphismes birationnels grâce aux changements de combinatoire induits par les passages de murs entre deux cônes maximaux de l'éventail secondaire. On étudiera dans la [sixième section](#) les propriétés des morphismes birationnels ainsi obtenus puis dans la [septième](#), les liens entre les flips et les cobordismes, ce qui nous donnera des exemples de passages de murs. Enfin, dans la [huitième section](#), nous allons montrer un premier résultat de connexité sur les éventails quantiques que l'on peut relier à un éventail d'un espace projectif quantique par l'éventail secondaire.

## 11.1 Exemple introductif : les surfaces d'Hirzebruch

Soit  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire définie par :

$$h(e_1) = e_1, h(e_2) = e_2, h(e_3) = v_3 = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_{<0}^2, h(e_4) = v_4 = (\gamma, \delta) \in \mathbb{R}_{<0}^2.$$

On va donc considérer les polytopes

$$P_{\mathbf{b}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq -b_1, y \geq -b_2, \alpha x + \beta y \geq -b_3, \gamma x + \delta y \geq -b_4\}$$

Comme  $\langle h(e_i), x \rangle = \langle e_i, h^\top(x) \rangle$ , on peut remarquer deux choses :

- Si on remplace  $\mathbf{b}$  par  $\mathbf{b} + \mathbf{y}$  où  $\mathbf{y} \in \text{im}(h^\top) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \right)$ , on obtient un translaté de  $P_{\mathbf{b}}$ .

Notons  $k$  une transformée de Gale de  $h$  :

$$k = \begin{pmatrix} -\alpha & -\gamma \\ -\beta & -\delta \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors le polytope  $P_{\mathbf{b}}$  change par translation si on change  $\mathbf{b}$  par un élément de  $\mathbf{b} + \ker(k^\top)$ .

- Toujours grâce à l'égalité  $\langle h(e_i), x \rangle = \langle e_i, h^\top x \rangle$ , on voit que

$$P_{\mathbf{b}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h^\top(x, y) + \mathbf{b} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^4\}$$

En appliquant le morphisme  $k^\top$  à  $h^\top(x, y) + \mathbf{b}$ , on en déduit que  $P_{\mathbf{b}}$  est non-vide si, et seulement si,  $k^\top \mathbf{b} \in \text{Cone}(k^\top(e_1), k^\top(e_2), k^\top(e_3), k^\top(e_4))$  (car  $h^\top k^\top = 0$ ). Comme la combinatoire de  $P_{\mathbf{b}}$  ne dépend que de l'image de  $\mathbf{b}$  par  $k^\top$  (grâce à la remarque précédente), ce cône nous donne toute l'information qui nous fallait pour trouver les types combinatoires que l'on cherchait.

Comme  $k^\top = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta & 1 & 0 \\ -\gamma & -\delta & 0 & 1 \end{pmatrix}$  alors

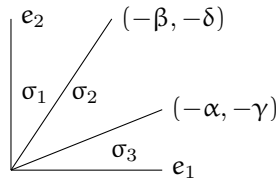
$$\text{Cone}(k^\top(e_1), k^\top(e_2), k^\top(e_3), k^\top(e_4)) = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$$

La figure (11.2) nous donne les différentes possibilités combinatoires pour  $P_{\mathbf{b}}$ .

On a trois types combinatoires différents qui sont décrits par trois cônes de  $\mathbb{R}_{\geq 0}^2$  :

- $\sigma_1 = \text{Int}(\text{Cone}((0, 1), (-\beta, -\delta)))$ ;
- $\sigma_2 = \text{Int}(\text{Cone}((-\alpha, -\gamma), (-\beta, -\delta)))$ ;
- $\sigma_3 = \text{Int}(\text{Cone}((-\alpha, -\gamma), (1, 0)))$ ;

FIGURE 11.1 – L'éventail secondaire de  $h$



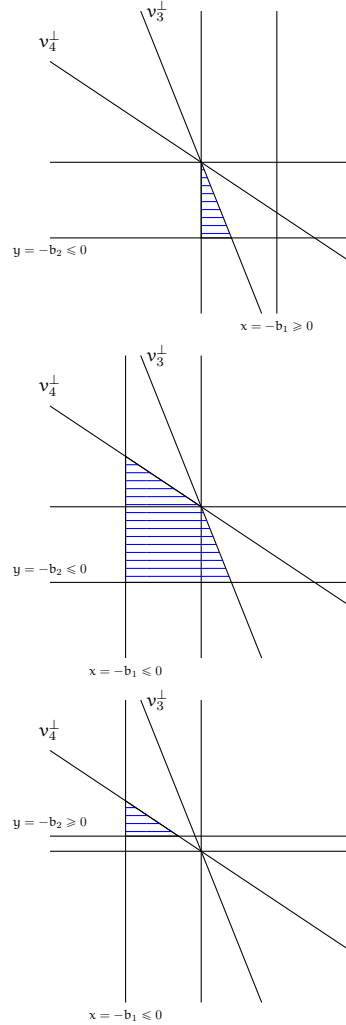
On dit que ces trois cônes (et l'intersection de leur adhérence) forment l'éventail secondaire du morphisme  $h$ .

Pour chacun de ses cônes, on peut donc décrire les champs toriques quantiques correspondants :

- Si  $\chi \in \sigma_1$  (et même sur le bord) alors le champ torique quantique associé est un espace projectif quantique donné par  $v_4$  et avec un générateur virtuel  $v_3$ ;

- Si  $\chi \in \sigma_2$  alors le champ torique quantique associé est une surface de Hirzebruch quantique donnée par  $v_3$  et  $v_4$  ;
- Si  $\chi \in \sigma_3$  (et même sur le bord) alors le champ torique quantique associé est un espace projectif quantique donné par  $v_3$  et avec un générateur virtuel  $v_4$ .

FIGURE 11.2 – Le polytope  $P_b$  pour  $\chi = k^\top(b)$  appartenant à  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$



## 11.2 Construction d'éventails quantiques à paramètre

Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire tel que  $h(e_i) \neq 0$  pour tout  $i$ . Soit  $b \in \mathbb{R}^n$  tel que le polytope

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle x, h(e_i) \rangle \geq -b_i\}$$

soit de dimension  $d$ . Le but de cette section est de construire à partir de la donnée  $(h, b)$  un éventail quantique  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$ . Pour cela, on va adapter la construction de l'éventail normal :

On va commencer par associer à chaque face du polytope  $P_b$  un cône :

**Définition 11.2.1** ([34]). Soit  $P \subset \mathbb{R}^n$  un polytope de dimension  $d$  donné par :

$$P = \bigcap_{F \leq P, \dim(F)=d-1} \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, u_F \rangle \geq -a_F\}$$

où  $u_F$  est un vecteur normal à la face  $F$ .

Alors le cône associé à la face  $Q$  de  $P$  est

$$\sigma_Q := \text{Cone}(u_F, Q \leq F, \dim(F) = d - 1)$$

*Remarque 11.2.2.* Tout est bien défini car pour chaque face  $F$ , le couple  $(u_F, a_F)$  est défini à multiplication par un scalaire strictement positif près.

On a alors le résultat de dualité suivant :

**Proposition 11.2.3** ([34] Proposition 2.3.8 pour le cas rationnel). Soit  $P \subset \mathbb{R}^d$  un polytope de dimension  $d$ . Alors, pour toute face  $Q$  de  $P$ ,

$$\dim(Q) + \dim(\sigma_Q) = d$$

De plus,  $Q \mapsto \sigma_Q$  renverse les inclusions.

De ce fait, les 1-cônes correspondent aux faces de dimension  $d - 1$  du polytope ou autrement dit l'intersection du polytope avec un hyperplan. Cependant l'intersection d'un polytope avec un hyperplan n'est pas toujours de dimension maximale (penser à l'intersection du carré  $[0, 1]^2$  et de l'hyperplan  $x+y = 2$  qui est un point).

**Lemme 11.2.4.** La famille  $\Delta_b := \{\sigma_Q\}_{Q \leq P_b}$  est un éventail complet de  $\mathbb{R}^d$  dont les 1-cônes forment un sous-ensemble de  $\{h(e_i), i = 1, \dots, n\}$ .

**Notation 11.2.5.** On notera  $F_{i,b}$  les intersections de  $P$  avec l'hyperplan  $\{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle x, h(e_i) \rangle = b_i\}$

**Définition 11.2.6.** Les faces  $F_{i,b}$  de  $P_b$  de dimension strictement inférieure à  $d - 1$  seront appelés hyperfaces virtuelles du polytope  $P_b$ .

*Remarque 11.2.7.* Dans le cas rationnel, on demande que les hyperfaces virtuelles soient vides et non de dimension  $< d - 1$ . On ne fait pas ici car on ne regarde que les éventails de dimension maximale.

Posons  $\mathcal{G}_b$  l'ensemble des  $i \in \{1, \dots, n\}$  pour lesquels  $F_{i,b}$  est une hyperface virtuelle de  $P_b$ , ce qui conclut la construction de l'éventail quantique calibré  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$ .

Dans la suite, on considérera aussi le polytope de  $\mathbb{R}^n$  que l'on notera  $P_{k^\top b}$  et qui est défini par

$$P_{k^\top b} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, x_i \geq 0, x - b \in \ker(k^\top)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i, x_i \geq 0, k^\top x = k^\top b\}$$

**Lemme 11.2.8.** Soit  $\chi = k^\top b \in \mathbb{R}^{n-d}$ . Le polytope  $P_\chi$  est l'image de  $P_b$  par l'application affine (injective)  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto h^\top(x) + b \in \mathbb{R}^n$ . Cette application envoie les hyperfaces  $F_{i,b}$  sur les intersections  $F_{i,\chi} := P_\chi \cap \{x_i = 0\}$ .

*Démonstration.* Soit  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $\chi = k^\top b$ .

Notons  $F_h$  l'application  $x \in \mathbb{R}^d \mapsto h^\top(x) + b \in \mathbb{R}^n$ . Cette application est injective car  $h^\top$  l'est (car  $h$  est surjective).

Soit  $x \in P_b$ . Alors, par définition de  $P_b$ ,

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \langle x, h(e_i) \rangle \geq -b_i$$

Ainsi, pour tout  $i$ ,

$$\langle h^\top(x) + b, e_i \rangle = \langle h^\top(x), e_i \rangle + b_i = \langle x, h(e_i) \rangle + b_i \geq 0$$

De plus, comme  $k^\top h^\top = 0$  alors  $F_h(x) \in P_\chi$ .  
 Réciproquement, si  $y = (y_1, \dots, y_n) \in P_\chi$  alors  $y - b \in \ker(k^\top) = \text{im}(h^\top)$  alors il existe  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que  $y = F_h(x)$ . Comme, de plus,  $y_i \geq 0$  alors

$$0 \leq y_i = \langle h^\top(x) + b, e_i \rangle = \langle x, h(e_i) \rangle + b_i$$

□

*Remarque 11.2.9.* Ce dernier polytope est plus utilisé dans le cadre classique de la théorie géométrique des invariants car le paramètre  $\chi$  correspond à un caractère du groupe de Picard de la variété torique associée (en le tensorisant par  $\mathbb{R}$ ) et de ce fait, le polytope  $P_\chi$  est défini de façon plus intrinsèque que  $P_b$  où  $\chi = k^\top b$ .

Pour conclure, on montre le résultat suivant :

**Proposition 11.2.10.** *Tous les éventails complets  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  qui ont une fonction support de  $\Delta$  (i.e. linéaire sur chaque cône) strictement convexe sont réalisés de cette manière.*

*Démonstration.* Pour montrer cet énoncé, on va utiliser la preuve de [34, Proposition 14.4.1] où on aura remplacé la condition de semi-projectivité par la condition équivalente d'existence d'une fonction support strictement convexe (voir [34, Théorème 7.2.4]) puisque c'est cette condition qui est utilisée dans la preuve. Comme la preuve est entièrement combinatoire, elle se transpose au cas quantique. Il nous reste juste à vérifier les hypothèses de cette proposition :

Par hypothèse de notre énoncé, les deux premiers points sont vérifiés et grâce au fait que l'on a retiré tous les  $F_{i,b}$  qui ne sont pas dimension maximale, le troisième point l'est aussi (dans le cas rationnel, on est obligé de rajouter cette condition puisque on peut avoir des faces de dimension intermédiaire qui ne seront virtuelles, voir la remarque 11.2.7).

□

## 11.3 Éventails secondaires

Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire tel que, pour tout  $i$ ,  $h(e_i) \neq 0$ . Soit  $k$  une transformation de Gale de  $h$ . Notons  $\text{Cone}(k^\top)$  le cône

$$\text{Cone}(k^\top(e_1), \dots, k^\top(e_n)) \subset \mathbb{R}^{n-d}$$

Dans cette section, nous allons définir l'éventail secondaire de  $h$  de la même façon que la section 11.1.

**Lemme 11.3.1** ([34] Proposition 14.3.5). *Soit  $\chi \in \text{Cone}(k^\top)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $P_\chi \neq \emptyset$
- $\chi \in \text{Cone}(k^\top)$

**Proposition 11.3.2.** *Soit  $\chi \in \text{Cone}(k^\top)$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\dim(P_\chi) = d$  ;
- $\chi$  est dans l'intérieur de  $\text{Cone}(k^\top)$  ;

*Démonstration.* Supposons que  $\chi$  est dans l'intérieur relatif de  $\text{Cone}(k^\top(e_i), i = 1..n)$ . Alors, par la preuve de c)  $\Rightarrow$  d) de [34, proposition 14.3.6], cela implique que les  $F_{i,b} := \{x \in P_b \mid \langle x, h(e_i) \rangle = b_i\}$  sont des faces propres de  $P_b$  pour tout  $i$ . On en déduit donc que  $P_b$  est de dimension maximale.



Réciproquement, supposons que  $P_b$  est de dimension maximale et que  $\chi$  est sur une face propre  $F$  de  $\text{Cone}(k^\top(e_i), i = 1..n)$ . Comme  $\chi$  est dans  $\text{Cone}(k^\top(e_i), i = 1..n)$  alors

$$\chi = \sum_{i=1}^n \alpha_i k^\top(e_i)$$

où  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in P_\chi$ .

On en déduit que pour tout  $i$ ,  $\alpha_i k^\top(e_i) \in F$ . Ce qui permet de dire que pour tout  $j \notin \{i \mid k^\top(e_i) \in F\}$  (qui existe car  $F$  est une face propre),  $\alpha_j$  est nul. Par conséquent, pour de tels  $j$ , on a  $F_{j,\chi} = P_\chi$  et donc :

$$F_{j,b} = P_b$$

ce qui est absurde car cela impliquerait que la dimension de  $P_b$  serait au plus celle d'un hyperplan (car  $h(e_j) \neq 0$ ). □

Le théorème suivant donne une description des  $\chi$  pour lesquels la variété obtenue est simpliciale.

**Théorème 11.3.3** ([34] théorème 14.3.14). *Soit  $\chi = \sum \alpha_i \beta_i \in \text{Int}(\text{Cone}(\beta))$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Pour tout ensemble  $I \subset \{1, \dots, n\}$  tel que  $\dim \text{Cone}(\beta) < n - d$ ,  $\chi \notin \text{Cone}(k^\top(e_i), i \in I)$  («  $\chi$  est générique ») ;*
2.  *$P_b$  est simple de dimension  $d$  et les sous-ensembles*

$$F_{i,\alpha} = \{m \in P_\alpha \mid \langle \chi, m \rangle = -\alpha_i\}$$

*sont soit des faces de  $P_b$  soit vides ;*

Les éléments du cône  $\text{Cone}(k^\top)$  encodent plusieurs types combinatoires pour  $h$ . On peut le décomposer en cônes où la combinatoire est constante :

**Définition 11.3.4.** Soit  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  un éventail quantique vérifiant la condition de la [proposition 11.2.10](#). Le cône GKZ associé à  $(\Delta, \mathcal{G})$ , noté  $\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})}$  est l'image du cône

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^n \mid \exists \varphi \in \text{CSF}(\Delta), \forall j \notin I, \varphi(h(e_j)) = -\alpha_j, \forall i \in I, \varphi(h(e_i)) \geq -\alpha_i\}$$

par  $k^\top$ , où  $\text{CSF}(\Delta)$  est l'ensemble des fonctions support de  $\Delta$  qui sont convexes.

Ces cônes sont appelés GKZ pour GELFAND, KAPRANOV, ZELEVINSKY dans [51, Chapter 7].

*Remarque 11.3.5.* • A  $\alpha$  donné, la fonction support associée est unique

- L'intérieur relatif de  $\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})}$  est donné par les fonctions strictement convexes.

**Proposition 11.3.6** ([34] Théorème 14.4.7). *La collection  $\Delta_{\text{GKZ}}$  est un éventail et plus précisément,  $\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})}$  est une face de  $\Gamma_{(\Delta', \mathcal{G}')}$  si, et seulement si,  $\Delta$  raffine  $\Delta'$  et  $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ .*

**Définition 11.3.7.** Les cônes maximaux de  $\Delta_{\text{GKZ}}$  sont appelés chambres de l'éventail secondaire et leur intersection sont appelés murs de l'éventail secondaire.

**Proposition 11.3.8** ([34] Théorème 14.4.9). *Si  $\chi \in \text{Relint}(\Gamma_{(\Delta, I)})$  alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- $\chi$  est générique ;
- $\Delta$  est simplicial ;
- $\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})}$  est une chambre de l'éventail secondaire.

On donnera quelques exemples dans la section suivante.

## 11.4 Exemples

On va maintenant trois exemples d'éventails secondaires. Les deux premiers seront des éventails non-complets. Cela aura deux conséquences : les polyèdres ne seront pas compacts (ils auront par conséquent moins de sommet ) et le support de l'éventail secondaire sera tout  $\mathbb{R}^{n-d}$  (cf. [34, Lemma 14.3.2]).

**Exemple 11.4.1.** Soit  $h : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  l'épimorphisme tel que  $h(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $h(e_4) = (1, -1, 1)$ . La transformation de Gale associée est le morphisme

$$k : m \in \mathbb{R} \mapsto m(-1, 1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$$

Sa transposée est donc l'application

$$k^\top : x \in \mathbb{R}^4 \mapsto \langle x, (-1, 1, -1, 1) \rangle \in \mathbb{R}$$

On a donc  $\text{Cone}(\beta) = \mathbb{R}$  qui se décompose en 3 cônes :

1. la chambre  $\mathbb{R}_{>0} = k^\top(\mathbb{R}_{<0} \times \{0\}^3 + \ker(k^\top))$  qui correspond à l'éventail associé aux cônes

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, e_3, (1, -1, 1))$$

car si  $b < 0$ , le polyèdre

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq -b, y \geq 0, z \geq 0, x - y + z \geq 0\}$$

a deux sommets

$$(-b, -b, 0) \text{ et } (-b, 0, 0) ;$$

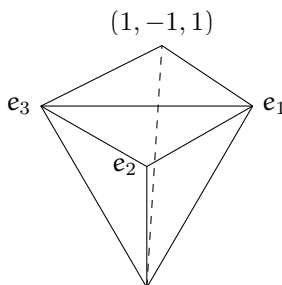


FIGURE 11.3 – Éventail associé à  $b > 0$

2. la chambre  $\mathbb{R}_{<0} = k^\top(\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}^3 + \ker(k^\top))$  qui correspond à l'éventail associé aux cônes

$$\text{Cone}(e_1, e_2, (1, -1, 1)), \text{Cone}(e_2, e_3, (1, -1, 1))$$

car, pour  $b > 0$ , le polyèdre  $P_b$  a deux sommets

$$(-b, 0, b) \text{ et } (0, 0, 0) ;$$

3. leur intersection  $\{0\}$  qui correspond à l'éventail associé au cône

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3, (1, -1, 1))$$

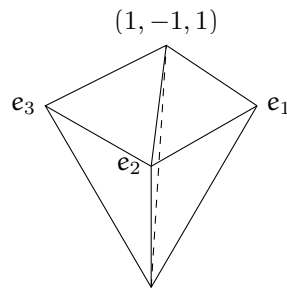


FIGURE 11.4 – Éventail associé à  $b < 0$

car le polyèdre  $P_b$  est le cône

$$\text{Cone}(e_1, e_3, e_1 + e_2, e_2 + e_3)$$

qui a un sommet.

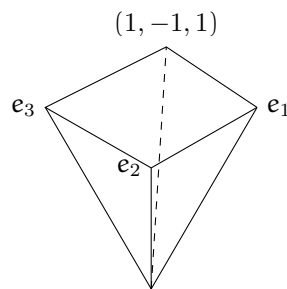


FIGURE 11.5 – Éventail associé à  $b = 0$

**Exemple 11.4.2.** Soit  $h : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un épimorphisme tel que  $h(e_i) = e_i$  pour  $i = 1, 2, 3$  et  $h(e_4) = v_4 = (1, -2, 2)$  et  $h(e_5) = v_5 = (2, -2, 1)$ .

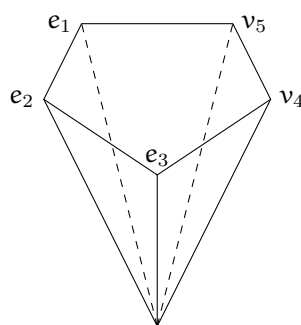


FIGURE 11.6 – Cône engendré par les  $h(e_i)$ ,  $i = 1..5$

La transformation de Gale associée est le morphisme

$$k : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x(-1, 2, -2, 1, 0) + y(-2, 2, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^5$$

Son éventail secondaire est donc donné par la figure (11.7).

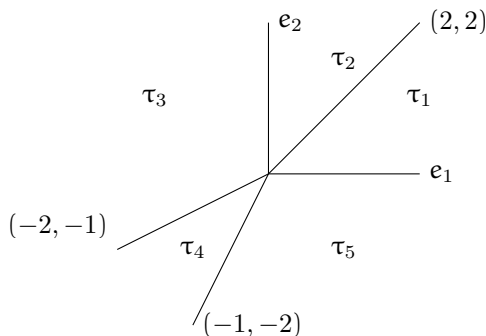


FIGURE 11.7 – Éventail GKZ

On a  $\text{Cone}(k^\top) = \mathbb{R}^2$ . Grâce à la décomposition

$$\mathbb{R}^5 = \ker(k^\top) \oplus \mathbb{R}_{x_4, x_5}^2,$$

le polytope  $P_b$  sont de la forme (modulo  $\ker(k^\top)$ )

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x - 2y + 2z \geq -\alpha, 2x - 2y + z \geq -\beta\}$$

1. dans l'intérieur des cônes maximaux de l'éventail, on obtient un éventail ayant 3 cônes maximaux simpliciaux (correspondant aux différentes triangulations du cône (11.6)) :

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_1)$ , les trois sommets de  $P_b$  sont

$$(0, 0, 0) = \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\},$$

$$\left(0, \frac{\beta}{2}, 0\right) = \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\},$$

$$\left(-\beta + \alpha, \frac{-\beta + 2\alpha}{2}, 0\right) = \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\}$$

et les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, e_3, v_5), \text{Cone}(e_3, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_2)$ , les trois sommets de  $P_b$  sont

$$(0, 0, 0) = \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\},$$

$$\left(0, \frac{\alpha}{2}, 0\right) = \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\},$$

$$\left(0, \frac{-\beta + 2\alpha}{2}, +\beta - \alpha\right) = \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\}$$

et les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, e_3, v_4), \text{Cone}(e_1, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_3)$ , les trois sommets de  $P_b$  sont

$$\begin{aligned} (-\alpha, 0, 0) &= \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\}, \\ \left(0, 0, -\frac{\alpha}{2}\right) &= \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\}, \\ \left(0, \frac{-\beta + 2\alpha}{2}, +\beta - \alpha\right) &= \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\} \end{aligned}$$

et les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_2, e_3, v_4), \text{Cone}(e_1, e_2, v_4), \text{Cone}(e_1, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_4)$ , les trois sommets de  $P_b$  sont

$$\begin{aligned} (-\alpha, 0, 0) &= \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\}, \\ (0, 0, -\beta) &= \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\}, \\ \left(\frac{\alpha - 2\beta}{3}, 0, \frac{-2\alpha + \beta}{3}\right) &= \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\} \end{aligned}$$

et les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_2, e_3, v_4), \text{Cone}(e_1, e_2, v_5), \text{Cone}(e_2, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_5)$ , les trois sommets de  $P_b$  sont

$$\begin{aligned} \left(\frac{-\beta}{2}, 0, 0\right) &= \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\}, \\ (0, 0, -\beta) &= \{x \mid \langle x, e_1 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, e_2 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\}, \\ \left(\frac{\alpha - 2\beta}{3}, \frac{-2\alpha + \beta}{3}, 0\right) &= \{x \mid \langle x, e_3 \rangle = 0\} \cap \{x \mid \langle x, v_4 \rangle = -\alpha\} \cap \{x \mid \langle x, v_5 \rangle = -\beta\} \end{aligned}$$

et les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_2, e_3, v_5), \text{Cone}(e_1, e_2, v_5), \text{Cone}(e_3, v_4, v_5);$$

2. dans l'intérieur relatif des 1-cônes, on obtient un éventail ayant deux cônes maximaux, un non-simplicial avec quatre générateurs (qui résulte de la fusion de deux cônes simpliciaux des éventails donnés par les cônes maximaux de l'éventail secondaire) et un simplicial i.e. on a séparé les cinq 1-cônes de la figure (11.6) en deux cônes :

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_1 \cap \tau_2)$ , les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3), \text{Cone}(e_1, e_3, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_2 \cap \tau_3)$ , les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3, v_4), \text{Cone}(e_1, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_3 \cap \tau_4)$ , les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_2, e_3, v_4), \text{Cone}(e_1, e_2, v_4, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_4 \cap \tau_5)$ , les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_2, e_3, v_4, v_5), \text{Cone}(e_1, e_2, v_5);$$

- si  $(\alpha, \beta) \in \text{Int}(\tau_5 \cap \tau_1)$ , les cônes associés sont

$$\text{Cone}(e_1, e_2, e_3, v_5), \text{Cone}(e_3, v_4, v_5);$$

3. si  $0 \in \mathbb{R}^2$  alors  $P_b$  est le cône de la figure 11.6

$$\text{Cone}((2, 1, 0), e_1, e_3, (0, 1, 2), (2, 1, 2)),$$

on obtient donc un éventail donné par un cône non-simplicial avec les générateurs  $e_1, e_2, e_3, v_4, v_5$ .

**Exemple 11.4.3.** On va reprendre l'exemple de la sous-sous-section 8.3.3.2 : on va donc considérer l'application linéaire  $h : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que

- $(h(e_3), h(e_5)) \in \Omega(\text{comb}(\Delta_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}))$ ,
- $h(e_4) \in \Omega(\text{comb}(\Delta_{\mathbb{P}^2}))$

Ce flip peut être décrit entièrement par les figures 11.8, 11.9, 11.10, 11.11 obtenue en faisant varier la quatrième coordonnée de  $b$  :

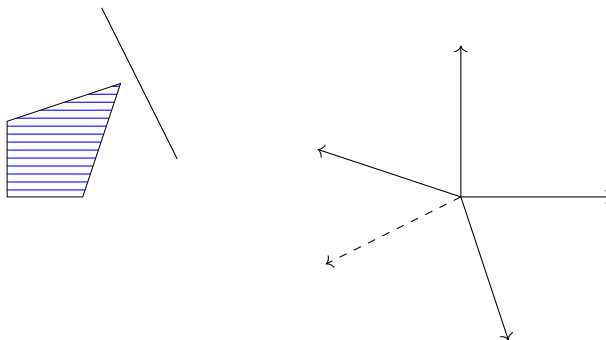


FIGURE 11.8 – Éventail d'une surface d'Hirzebruch avec un générateur virtuel

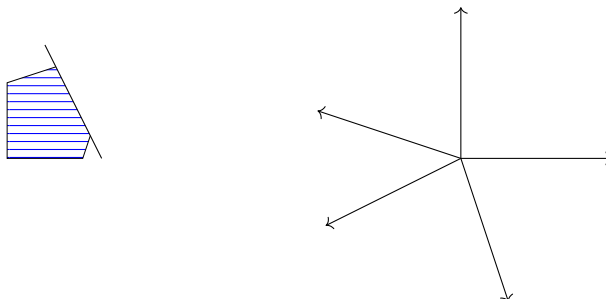


FIGURE 11.9 – Éventail d'une surface d'Hirzebruch éclatée en un point

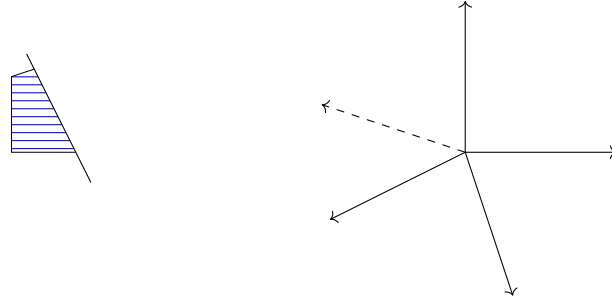


FIGURE 11.10 – Éventail d’un plan projectif quantique éclaté en un point avec un générateur virtuel

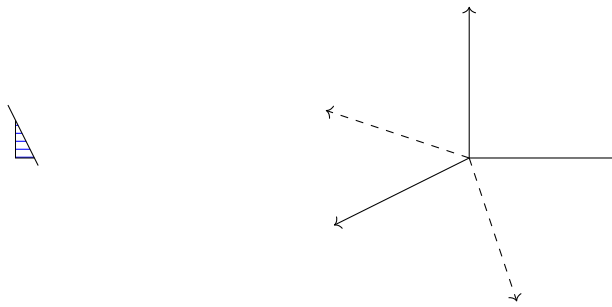


FIGURE 11.11 – Éventail d’un plan projectif quantique avec deux générateurs virtuels

## 11.5 Cas classique

Dans cette section, on va étudier les différences entre la construction de ce chapitre et la construction classique des variations de la théorie géométrique des invariants (voir [97] pour une explication complète sur la TGI) dans le cas torique.

Le premier point à noter est qu’il va être nécessaire de rajouter dans les données combinatoires un épimorphisme  $\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^d$  qui n’est pas présent dans le cas classique; on le construit en prenant les générateurs minimaux de chaque 1-cône. Par l’équivalence du [théorème 1.1.1.9](#), cette donnée est équivalente à la donnée d’un sous-groupe (algébrique) de  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^n$ .

On se donne donc un sous-groupe  $G$  de  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^n$  (il agit sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  par multiplication terme-à-terme) et un fibré en droites sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  avec une  $G$ -linéarisation (i.e. un élément de  $\text{Pic}([\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n/G])$ ). Comme le seul fibré en droites sur  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  est le fibré trivial alors c’est équivalent à se donner un caractère de  $G$  (car un automorphisme du fibré trivial est donné par la multiplication de  $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ ).

**Définition 11.5.1.** Soit  $\chi$  un caractère de  $G$ . Alors le groupe  $G$  agit sur les sections globales de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$  par :

$$\forall z \in \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n, g \cdot (\text{id}, s)(z) = (g \cdot z, \chi(g)s(g^{-1}z))$$

où  $g \in G$  et  $(\text{id}, s)$  est une section globale de  $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1 \rightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ . L’anneau des sections  $\chi$ -invariantes est :

$$\Gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)_{\chi}^G = \{f \in \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n] \mid \forall g \in G, \chi(g)f(-) = f(g \cdot -)\}$$

**Exemple 11.5.2.** Soit  $X_{\Delta}$  une variété torique propre. On va considérer le groupe  $G = \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(X_{\Delta})])$

agissant sur  $\mathbb{A}^{\Delta(1)}$ . Soit  $\chi$  un caractère de  $G$  (notons  $\beta$  l'élément de  $\text{Cl}(X_\Delta)$  associé). Alors

$$\Gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)_{\chi}^G = \left\{ \sum_{\rho \in \Delta(1)} \alpha_{\rho} x^{\rho} \in \mathbb{C}[x_{\rho}, \rho \in \Delta(1)] \mid \pi(\rho) \neq \beta \Rightarrow \alpha_{\rho} = 0 \right\}$$

En particulier, si  $X_\Delta$  est un espace projectif alors les section invariants pour le caractère  $\mathbf{t} \mapsto \mathbf{t}^d$  sont les polynômes homogènes de degré  $d$ .

**Définition 11.5.3.** Soit  $\mathbf{p}$  un point de  $\mathbb{A}^n$ . Alors

- $\mathbf{p}$  est semi-stable s'il existe  $d > 0$  et une section  $s \in \Gamma(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1)_{\chi^d}^G$  tel que  $s(\mathbf{p}) \neq 0$ ;
- $\mathbf{p}$  est stable s'il existe  $d > 0$  et une section  $s \in \Gamma(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1)_{\chi^d}^G$  tel que  $s(\mathbf{p}) \neq 0$ , les groupes d'isotropie  $\text{Stab}_G(\mathbf{p})$  sont finis et que les  $G$ -orbites dans  $Z(s)^c$  sont fermés dans  $Z(s)^c$ .

On notera  $(\mathbb{A}^n)_{\chi}^{ss}$  (resp.  $(\mathbb{A}^n)_{\chi}^s$ ) les points semi-stables (resp. stables) de  $\mathbb{A}^n$  pour  $\chi$ .

**Exemple 11.5.4.** Dans l'exemple précédent, si  $\beta \notin \pi(\mathbb{N}^n)$  alors l'ensemble des points semi-stables est vide et donc celui qui est stable l'est aussi. Si  $\beta$  est nulle alors

$$\Gamma(\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n, \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \times \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^1)_{\chi}^G = 0$$

car  $\text{im}(M) \cap \mathbb{N}^{\Delta(1)} = 0$ . Par conséquent,  $(\mathbb{A}^n)_{\chi}^{ss} = \mathbb{A}^n$  mais les orbites ne sont jamais fermées donc le lieu stable est vide.

Les points semi-stables/stables permettent de retrouver la variété  $\mathcal{S}$  donnée par le [lemme 1.1.5.8](#) :

**Proposition 11.5.5** ([34] Proposition 14.1.9). Soient  $X_\Delta$  une variété torique projective et  $\Delta'$  le sous-éventail de  $\Delta$  contenant ses cônes simpliciaux. Soit  $\chi \in \widehat{G} = \text{Cl}(X_\Delta)$  un caractère correspondant à un diviseur ample. Alors

- $(\mathbb{A}^{\Delta(1)})_{\chi}^s = \mathcal{S}(\Delta')$ ;
- $(\mathbb{A}^{\Delta(1)})_{\chi}^{ss} = \mathcal{S}(\Delta)$

En particulier, les lieux stable et semi-stable coïncident si, et seulement si,  $\Delta$  est simplicial.

**Définition 11.5.6.** Soit  $G \subset \mathbb{G}_m^n$  un sous-groupe algébrique et  $\chi$  un caractère de  $G$ . On définit le quotient TGI  $\mathbb{A}^n //_{\chi} G$  comme le schéma projectif

$$\mathbb{A}^n //_{\chi} G := \text{Proj} \left( \bigoplus_{d=1}^{\infty} \Gamma(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1)_{\chi^d}^G \right)$$

Voici le lien entre le quotient TGI et la notion usuelle de quotient :

**Proposition 11.5.7** ([34] Proposition 14.1.12).

- $\mathbb{A}^n //_{\chi} G \neq \emptyset$  si, et seulement si,  $(\mathbb{A}^n)_{\chi}^{ss} \neq \emptyset$ ;
- $\mathbb{A}^n //_{\chi} G = (\mathbb{A}^n)_{\chi}^{ss} // G$ ;
- Si  $(\mathbb{A}^n)_{\chi}^s \neq \emptyset$  alors  $\mathbb{A}^n //_{\chi} G$  est de dimension  $n - \dim(G)$ .

**Lemme 11.5.8** ([34] Theorem 14.2.13). Supposons  $G = D(\text{Cl}(X_\Delta)) \subset \mathbb{G}_m^n$  avec  $X_\Delta$  une variété torique. Soit  $\chi$  un caractère de  $G$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n$  tel que  $\pi(\mathbf{b}) = \chi$  (voir (1.1)). Soit  $P_{\mathbf{b}}$  le polyèdre défini par :

$$P_{\mathbf{b}} := \{\mathbf{m} \in M_{\mathbb{R}} \mid \forall i, \langle \mathbf{m}, \mathbf{v}_i \rangle \geq -\mathbf{b}_i\} \quad (11.1)$$



où les  $v_i$  sont les 1-cônes de l'éventail de  $X_\Delta$ . Alors il existe un isomorphisme

$$\bigoplus_{d=1}^{\infty} \Gamma(\mathbb{A}^n, \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1)_\chi^G \simeq \mathbb{C}[\mathbb{C}(\mathbb{P}_b) \cap M \times \mathbb{Z}]$$

où  $\mathbb{C}(\mathbb{P})$  est le cône engendré par  $\mathbb{P} \times \{1\}$  dans  $M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$

On retrouve la construction des variétés toriques par quotient global (cf. la sous-section 1.1.5).

**Théorème 11.5.9** ([34] Théorème 14.2.13). *Soient  $X_\Delta$  une variété torique projective et  $D$  un diviseur ample de  $X_\Delta$ . Notons  $\chi$  le caractère dans  $G := \text{Spec}(\mathbb{C}[\text{Cl}(X_\Delta)])$  associé à  $D$ . Alors  $\Delta$  est l'éventail normal de  $\mathbb{P}_D = \mathbb{P}_\alpha$  et*

$$X_\Delta = \mathbb{A}^n //_\chi G$$

Ainsi lorsque  $\chi$  parcourt l'éventail secondaire, le lieu semi-stable/stable varie et donc le type combinatoire que l'on considère change. La question que l'on peut maintenant se poser est la suivante : Peut-on définir  $\mathcal{X}_{\Delta_b, h, g_b}$  de telle sorte que ce soit le champ quotient (et plus le quotient TGI) du lieu semi-stable d'une action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathbb{C}^n$  par ladite action de  $\mathbb{C}^{n-d}$  ?

Le principal obstacle pour cela est le fait que  $\mathbb{C}^n$  ne soit pas un groupe réductif :

**Lemme 11.5.10.** *Le groupe de Lie  $(\mathbb{C}^n, +)$  n'est pas réductif (i.e. son radical unipotent n'est pas trivial)*

*Démonstration.* Cela vient du fait que  $(\mathbb{C}^n, +)$  est unipotent grâce à l'inclusion  $\iota: \mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{U}_{n+1}$  (où  $\mathbb{U}_n$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures de taille  $n$  avec une diagonale constituée que des 1) définie par :

$$\iota(z_1, \dots, z_n) = \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \dots & z_n \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

□

En effet, le cadre classique de la théorie géométrique des invariants est la donnée d'une action d'un groupe réductif sur une variété (par exemple, dans [97, Chapitre 1, §2-3-4...]). Un des effets de cela est que le lieu semi-stable/stable n'est pas ce que l'on voudrait avoir :

**Exemple 11.5.11.** Considérons l'action de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}^2$  donnée par :

$$t \cdot (z_1, z_2) = (E(t)z_1, E(\alpha t)z_2)$$

où  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0} \setminus \mathbb{Q}_{>0}$ . Considérons  $\mathfrak{a} \in \mathbb{R}$  et le caractère  $\chi^\alpha: t \in \mathbb{C} \mapsto E(\alpha t) \in \mathbb{C}^*$ . Pour la même raison que celle utilisée dans la preuve de [théorème 10.2.2](#), les fonctions holomorphes  $\chi^\alpha$ -équivariantes sont données autour de  $(0,0)$  par :

$$f(x, y) = \sum_{\mathfrak{a}=\mathfrak{i}+\alpha\mathfrak{j}} a_{ij} x^{\mathfrak{i}} y^{\mathfrak{j}}$$

Comme  $(1, \alpha)$  est une famille  $\mathbb{Q}$ -libre alors le couple  $(i, j)$  (quand il existe) est unique :

$$f(x, y) = a_{ij} x^{\mathfrak{i}} y^{\mathfrak{j}}$$

Par conséquent, l'ensemble des points  $G$ -semi-stables est :

$$(\mathbb{C}^2)_X^{ss} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mathbf{a} \notin \mathbb{N} + \mathbb{N}\alpha \\ (\mathbb{C}^*)^2 & \text{si } \mathbf{a} \in \mathbb{N}^* + \mathbb{N}^*\alpha \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C}^* & \text{si } \mathbf{a} \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{C}^* \times \mathbb{C} & \text{si } \mathbf{a} \in \mathbb{N}^*\alpha \\ \mathbb{C}^2 & \text{si } \mathbf{a} = 0 \end{cases}$$

On n'obtient plus le résultat classique de  $(\mathbb{C}^2)_X^{ss} = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  de la droite projective.

## 11.6 Passages de murs

Dans cette section, nous allons étudier les applications birationnelles induites par le passage de murs i.e. entre deux champs toriques dont le type combinatoire est donné par des éléments étant dans deux chambres distinctes séparées par un mur.

On va fixer un épimorphisme  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  linéaire tel que :

- pour tout  $i$ ,  $h(e_i) \neq 0$ ;
- pour tout  $i \neq j$ ,  $h(e_j) \notin \mathbb{R}h(e_i)$

On dira alors que  $h$  est géométrique.

**Lemme 11.6.1.** *Soit  $\Delta$  un éventail polytopal et  $\mathcal{G}$  un ensemble (non vide) de faces virtuelles. Alors la chambre associée se décompose de la façon suivante :*

$$\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})} = \Gamma_{(\Delta, \emptyset)} \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{G}}. \quad (11.2)$$

*Remarque 11.6.2.*

- Le fait que  $h$  soit géométrique assure que  $\Gamma_{(\Delta, \emptyset)}$  soit non-vidé;
- Dans le cas classique,  $\Gamma_{(\Delta, \emptyset)}$  est isomorphe au cône des  $\mathbb{R}$ -diviseurs nef de  $X_\Delta$  (inclus dans  $\text{Pic}(X_\Delta) \otimes \mathbb{R}$ ).

*Démonstration.* La preuve [34, Proposition 15.1.3] du cas rationnel étant purement combinatoire (elle utilise des fonctions supports), l'égalité (11.2) reste toujours vraie dans le cas quantique pour les chambres de l'éventail secondaire (grâce au théorème 11.3.3; le cas de la dimension plus petite ne fonctionne pas car on n'a pris une définition plus forte de « facettes virtuelles » (dimension  $< d - 1$  à la place de vide)).  $\square$

Ainsi, il y a deux cas pour les facettes de  $\Gamma_{(\Delta, \mathcal{G})}$  (i.e. les murs de l'éventail secondaire) :

1. soit elles sont le produit d'une facette de  $\Gamma_{(\Delta, \emptyset)}$  avec  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{G}}$  (« mur divisoriel »);
2. soit elles sont le produit de  $\Gamma_{(\Delta, \emptyset)}$  avec  $\mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{G}\{i\}}$  où  $i \in \mathcal{G}$  (« mur renversant <sup>1</sup> »).

*Remarque 11.6.3.* Les adjectifs donnés aux types de murs viennent du programme des modèles minimaux (voir, par exemple, [84])

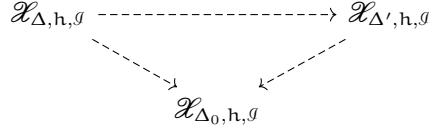
**Théorème 11.6.4.** *Soit  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  un éventail quantique donné par la construction de la section 11.2. Soit  $\Gamma_{\Delta', \mathcal{G}}$  une chambre ayant un mur  $\Gamma_{\Delta_0, \mathcal{G}} \simeq F \times \mathbb{R}_{\geq 0}^{\mathcal{G}}$  où  $F$  est une facette de  $\Gamma_{(\Delta, \emptyset)}$ . Alors c'est un mur entre deux chambres  $\Gamma_{\Delta', h, \mathcal{G}}$  et  $\Gamma_{\Delta, h, \mathcal{G}}$  et*

- $\Delta_0$  n'est pas simplicial;

---

1. « flipping wall »

- $\Delta(1) = \Delta_0(1) = \Delta'(1)$  ;
- $\Delta_0$  est le raffinement commun le plus grossier de  $\Delta$  et  $\Delta'$  ;
- Les lieux exceptionnels des morphismes birationnels  $\mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}}$  et  $\mathcal{X}_{\Delta', \mathbf{h}, \mathcal{G}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta_0, \mathbf{h}, \mathcal{G}}$  sont de codimension  $\geq 2$  :



*Démonstration.* Ces énoncés se montrent de façon combinatoire de la même façon que [34, Théorème 15.3.6] (pour le quatrième point, il faut utiliser la correspondance orbite-cône (pour trouver la dimension du lieu exceptionnel) pour la variété  $\mathcal{S}$  et le corollaire 8.4.4).  $\square$

Pour décrire les murs divisoriels, on va avoir besoin d'une notion plus générale de subdivision étoilée :

**Définition 11.6.5.** Soit  $(\Delta, \mathbf{h}: \mathbb{Z}^n \rightarrow \Gamma, \mathcal{G})$  un éventail quantique et  $\mathbf{v} \in |\Delta| \cap \Gamma$ , soit  $\Delta(\mathbf{v})$  l'ensemble des cônes suivants :

- $\sigma \in \Delta$  où  $\mathbf{v} \notin \sigma$  ;
- $\text{Cone}(\tau, \mathbf{v})$  où  $\mathbf{v} \notin \tau \in \Delta$  et  $\mathbf{v} \cup \tau \subset \sigma \in \Delta$

On appelle  $\Delta^*(\mathbf{v})$  la subdivision étoilée de  $\Delta$  en  $\mathbf{v}$ .

Ensuite, il faut remarquer que sur le polytope  $P_{\mathbf{b}}$ , ils correspondent au moment où un hyperplan intersecte le polytope sur une face de petite dimension. De ce fait, ils ne sont plus virtuels dans le cas classique mais n'interviennent pas dans l'éventail. Dans le cas quantique, il reste virtuel et donc le champ torique dans la chambre et le champ torique sur le mur sont identiques.

**Théorème 11.6.6.** Soit  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique donné par la construction de la section 11.2. Sur les facettes de  $\Gamma_{\Delta, \mathcal{G}} \simeq \Gamma_{\Delta, \emptyset} \times \mathbb{R}^{\mathcal{G}}$  de la forme  $\Gamma_{\Delta, \mathbf{h}, \emptyset} \times \mathbb{R}^{\mathcal{G} \setminus \{i\}}$ , l'éventail quantique obtenu est  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  et

- $\Gamma_{\Delta, \emptyset} \times \mathbb{R}^{\mathcal{G} \setminus \{i\}}$  est un mur reliant  $\Gamma_{\Delta, \mathcal{G}}$  et  $\Gamma_{\Delta', \mathcal{G} \setminus \{i\}}$  où  $\Delta'$  est la subdivision étoilée de  $\Delta$  le long de  $\text{Cone}(\mathbf{h}(e_i)) \cap \mathbb{Z}^d$
- Le lieu exceptionnel du morphisme birationnel  $\mathcal{X}_{\Delta', \mathbf{h}, \mathcal{G} \setminus \{i\}} \dashrightarrow \mathcal{X}_{\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G}}$  est de codimension 1.

*Démonstration.* C'est la même démonstration que [34, Lemma 15.3.7] (modulo la remarque préliminaire et le fait qu'on utilise le corollaire 8.4.4).  $\square$

## 11.7 Flips et cobordismes

Dans cette section, nous allons reprendre l'étude des cobordismes grâce à l'éventail secondaire. Soient  $P$  et  $Q$  deux polytopes et  $W$  un cobordisme entre  $P$  et  $Q$  (pour des raisons de simplicité, on va supposer que la face de  $W$  correspondant à  $P$  est dans l'hyperplan affine  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid t = -1\}$  et celle correspondant à  $Q$  est dans l'hyperplan affine  $\{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \mid t = 1\}$ ). Les équations de  $W$  sont de la forme

$$\begin{cases}
 L_1(x) + \alpha_1 t \geq -\beta_1 \\
 \vdots \\
 L_n(x) + \alpha_n t \geq -\beta_n \\
 -1 \leq t \leq 1.
 \end{cases} \tag{11.3}$$

où les  $L_i$  sont des formes linéaires  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\alpha_i \in \mathbb{R}$ . On va utiliser une autre écriture dans la suite :

$$\begin{cases} L_1(x) \geq -\beta_1 - \alpha_1 t \\ \vdots \\ L_n(x) \geq -\beta_n - \alpha_n t \\ -1 \leq t \leq 1. \end{cases} \quad (11.4)$$

Les équations de P sont donc

$$\begin{cases} L_1(x) \geq -\beta_1 + \alpha_1 \\ \vdots \\ L_n(x) \geq -\beta_n + \alpha_n \end{cases}$$

et celles de Q sont :

$$\begin{cases} L_1(x) \geq -\beta_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ L_n(x) \geq -\beta_n - \alpha_n \end{cases}$$

Les inégalités (11.3) et (11.4) induisent deux interprétations des cobordismes en termes d'éventail secondaire :

- la forme (11.3) suggère de considérer la famille de calibrations  $h_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  où

$$h_t^\top(x) = \left( \frac{b_i}{b_i + \alpha_i t} L_i(x) \right)_{1 \leq i \leq n}$$

i.e. on fixe un point dans l'éventail secondaire et on change la calibration (On va faire l'hypothèse supplémentaire que  $b_i + \alpha_i t > 0$  pour tout  $t$ ).

- la forme (11.4) suggère de garder la calibration  $h$  mais de bouger le point de l'éventail secondaire sur le chemin

$$\chi(t) := k^\top(\beta_1 + \alpha_1 t, \dots, \beta_n + \alpha_n t).$$

Dans le premier cas, le morphisme  $k_t^\top$ , donné par la transposée de la transformation de Gale de  $h_t$  change continûment avec  $t$ . Par conséquent, les chambres de l'éventail secondaire changent avec  $t$  (puisque elles sont décrites par des familles de  $k^\top(e_i)$ ). Les changements de combinatoire se font lorsqu'on a suffisamment déformé  $k^\top$  pour que  $\beta = k^\top(\beta_1, \dots, \beta_n)$  change de chambre.

**Exemple 11.7.1.** Soit  $h$  le morphisme  $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x - 2z - x, y - z - 2w) \in \mathbb{R}^2$  (qui est un cas particulier de la section 11.1). Considérons le cobordisme donné par les équations suivantes

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ \frac{1}{2+t}(-2x - y) \geq -1 \\ -x - 2y \geq -1 \end{cases}$$

Le morphisme  $k^\top$  est donc donné par

$$k_t^\top(x, y, z, w) = \left( \frac{2}{2+t}x + y + z, \frac{1}{2+t}x + 2y + t \right)$$

On obtient ainsi les éventails secondaires suivants :

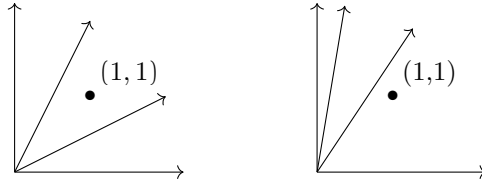


FIGURE 11.12 – Éventail secondaire à  $t = -1$  et à  $t = 1$

Dans le deuxième cas, le flip est un chemin affine dans l'éventail secondaire de la calibration  $h$  entre l'éventail  $(\Delta_{\beta-\alpha}, h, \mathcal{G}_{\beta-\alpha})$  et  $(\Delta_{\beta+\alpha}, h, \mathcal{G}_{\beta+\alpha})$ . Les changements de combinatoire apparaissent quand on passe un mur, ce qui se passe lorsque  $t = 0$ .

Réciproquement, un chemin affine de l'éventail secondaire passant un mur induit un cobordisme puisque si l'on a un chemin affine  $\chi : t \in [-1, 1] \mapsto k^T(\beta + \alpha t)$  alors les coefficients  $\beta$  et  $\alpha$  correspondent à ceux des inégalités (11.3) et (11.4). On a donc un cobordisme entre  $(\Delta_{\chi(-1)}, h, \mathcal{G}_{\chi(-1)})$  et  $(\Delta_{\chi(1)}, h, \mathcal{G}_{\chi(1)})$ .

En conclusion, on obtient le résultat suivant :

**Théorème 11.7.2.** *Un passage de murs de l'éventail secondaire donné par un chemin affine est un cobordisme. Plus précisément, le passage d'un mur divisoriel est un cobordisme d'indice  $(1, d)$  ou  $(d, 1)$  et le passage d'un mur renversant est un cobordisme d'indice  $(a, b)$ ,  $a, b > 1$ .*

*Démonstration.* Le fait d'un passage de murs affines est un cobordisme est montré au-dessus. Le passage de murs renversant a une « tranche » non-simpliciale (cf. [théorème 11.6.4](#)) donc c'est un cobordisme d'indice  $(a, b)$ ,  $a, b > 1$  (cf. [avertissement 9.2.6](#)). Le cas restant des murs divisoriels est donc d'indice  $(1, d)$  ou  $(d, 1)$ .  $\square$

## 11.8 Flips et espaces projectifs

Le point de départ de cette section est la section précédente et le résultat suivant

**Lemme 11.8.1** ([21] Lemma 2.3). *Tout polytope simple convexe (à homéomorphisme PL près) peut être obtenu à partir d'un simplexe de même dimension avec un nombre fini de flips.*

Grâce à la section précédente, on peut se poser la question naturelle suivante : peut-on relier un éventail quantique à l'éventail décrit par un simplexe ? Ou de façon plus géométrique, peut-on relier un champ torique quantique à un espace projectif quantique ?

Dans cette section, nous allons donner une réponse à une question un peu plus restrictive : À une calibration  $h$  fixée, peut-on relier un éventail quantique  $(\Delta, h, \mathcal{G})$  à un espace projectif  $(\Delta_{\mathbb{P}^d}, h, \tilde{\mathcal{G}})$  ?

**Théorème 11.8.2.** *Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Il existe  $b \in \mathbb{R}^n$  tel que*

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall 1 \leq i \leq n, \langle h(e_i), x \rangle \geq -b_i\}$$

*est un simplexe ;*

2. *Il existe un sous-ensemble  $I$  de cardinal  $d + 1$  tel que  $0 \in \text{Conv}(h(e_i), i \in I)$ .*

*On notera  $\mathbb{P}(d, n)$  l'ensemble des  $h$  vérifiant ces conditions et  $\mathbb{P}^{\text{st}}(d, n)$  le sous-ensemble de  $\mathbb{P}(d, n)$  qui contient les épimorphismes standard.*

*Démonstration.* S'il existe un  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $P_{\mathbf{b}}$  soit un simplexe alors il existe un ensemble  $I$  de cardinal  $d+1$  tel que

$$P_{\mathbf{b}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in I, \langle h(e_i), x \rangle \geq -b_i\}$$

Montrons que  $0 \in \text{Conv}(h(e_i), i \in I)$  :

Soit  $k \in I$ . Par hypothèse, la restriction  $h_k := h|_{\mathbb{R}^{I \setminus \{k\}}}$  est un isomorphisme. Alors

$$(h_k^{-1})^T P_{\mathbf{b}} = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in I \setminus \{k\}, \langle e_i, x \rangle \geq -b_i, \langle h_k^{-1}h(e_k), x \rangle \geq -b_k\}$$

est aussi un simplexe et donc  $h_k^{-1}h(e_k) \in \mathbb{R}_{\leq 0}^d$ . On en déduit donc  $0 \in \text{Conv}(e_i, i \in I \setminus \{k\}, h_k^{-1}h(e_k))$ . En appliquant  $h_k$ , on en déduit que  $0 \in \text{Conv}(h(e_i), i \in I)$ .

Réciproquement, supposons qu'il existe un sous-ensemble  $I$  de cardinal  $d+1$  tel que  $0 \in \text{Conv}(h(e_i), i \in I)$ . Par le même raisonnement que précédemment, le polytope

$$P := \text{Conv}(h(e_i), i \in I)^\circ = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in I, \langle h(e_i), x \rangle \geq -1\}$$

est un simplexe. Montrons maintenant qu'il existe  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  tel que

- pour tout  $i \in I$ ,  $b_i = 1$  ;
- $P_{\mathbf{b}} = P$ .

Soit  $R \in \mathbb{R}_{>0}$  tel que la boule ouverte  $B(0, R)$  contienne  $P$ . On notera  $\mathbb{R}\mathbb{S}^{d-1}$  sa frontière. Pour tout  $i$ , il existe un  $b_i$  tel que l'hyperplan (affine)

$$H_{i, b_i} := \{x \mid \langle h(e_i), x \rangle = -b_i\}$$

soit tangent à  $\mathbb{R}\mathbb{S}^{d-1}$  et telle que le demi-plan supérieur

$$H_{i, b_i}^+ := \{x \mid \langle h(e_i), x \rangle \geq -b_i\}$$

contienne  $B(0, R)$ .

En effet, les deux points où  $H_{i, b_i}$  peut être tangent à  $\mathbb{R}\mathbb{S}^{d-1}$  sont

$$\pm \frac{R}{|h(e_i)|} h(e_i)$$

On en déduit donc que les deux candidats pour  $b_i$  sont

$$\pm \frac{R}{|h(e_i)|} \langle h(e_i), h(e_i) \rangle = \pm R|h(e_i)|.$$

Comme on veut en plus que le demi-plan supérieur  $H_{i, b_i}^+$  contienne  $B(0, R)$  alors

$$b_i = R|h(e_i)|.$$

On a donc construit un vecteur  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  tel que  $P_{\mathbf{b}} = P$  puisque, par construction,

$$P \subset \bigcap_{i \in I} H_{i, b_i}^+.$$

□

**Corollaire 11.8.3.** *L'ensemble  $\mathbb{P}(d, n)$  forme un ouvert (non-vide) de  $\text{Epi}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^d)$ . Autrement dit, il y a*

un ouvert des calibrations qui peuvent être reliés à un espace projectif quantique par l'éventail secondaire i.e. en changeant le paramètre  $\mathbf{b}$ .

*Démonstration.* Le théorème 11.8.2 dit que tout  $\mathbf{h} \in \mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$ , il existe  $I \subset \{1, \dots, \mathbf{n}\}$  tel que  $0 \in \text{Conv}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)$ . Autrement dit,

$$\mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n}) = \bigcup_{I, |I|=\mathbf{d}+1} \{\mathbf{h} \in \text{Epi}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \mid 0 \in \text{Conv}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)\}$$

Si  $0 \in \text{Conv}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)$  alors comme  $I$  est de cardinal  $\mathbf{d} + 1$ , le convexe  $\text{Conv}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)$  s'envoie, par une transformation linéaire, sur le simplexe  $\text{Conv}(e_1, \dots, e_{\mathbf{d}}, v)$  où  $v \in \mathbb{R}_{<0}^{\mathbf{d}}$ . On en déduit donc que

$$\{\mathbf{h} \in \text{Epi}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{d}}) \mid 0 \in \text{Conv}(\mathbf{h}(e_i), i \in I)\} \simeq (\mathbb{R}^{\mathbf{d}})^{I^c} \times \text{GL}_{\mathbf{d}}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_{<0}^{\mathbf{d}} \subset (\mathbb{R}^{\mathbf{d}})^{I^c} \times (\mathbb{R}^{\mathbf{d}})^I$$

qui est donc un ouvert de  $\text{Epi}(\mathbb{R}^{\mathbf{n}}, \mathbb{R}^{\mathbf{d}})$ . □

On peut en faire une description complète en dimension 2 :

**Corollaire 11.8.4.** *Pour tout  $\mathbf{n} \geq 3$ , on a deux cas possibles :*

- $\Omega(2, \mathbf{n}, C_{\mathbf{n}}) = \mathbb{P}^{\text{st}}(2, \mathbf{n})$  si  $\mathbf{n} \neq 4$  ;
- $\Omega(2, \mathbf{n}, C_{\mathbf{n}}) \setminus \mathbb{P}^{\text{st}}(2, \mathbf{n}) \simeq \mathbb{R}_{>0}^2$  si  $\mathbf{n} = 4$

*Démonstration.* Si  $\mathbf{n} = 3$  alors  $\Omega(2, 3, C_3)$  est l'ensemble des calibrations définissant des espaces projectifs. On en déduit donc

$$\Omega(2, 3, C_3) = \mathbb{P}^{\text{st}}(2, 3).$$

Passons au cas  $\mathbf{n} = 4$ .

Soit  $\mathbf{h} \in \Omega(2, 4, C_4) \setminus \mathbb{P}^{\text{st}}(2, 4)$ . Soient  $\alpha_3, \alpha_4 \in [0, 2\pi[$  tels que

$$\mathbf{h}(e_k) = |\mathbf{h}(e_k)| e^{i\alpha_k}.$$

par l'identification  $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ . Comme  $\mathbf{h} \in \Omega(2, 4, D_4)$  alors

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_k < 2\pi$$

De plus, comme  $\mathbf{h} \notin \mathbb{P}^{\text{st}}(2, 4)$  alors les vecteurs  $\mathbf{h}(e_3)$  et  $\mathbf{h}(e_4)$  n'appartiennent pas à  $\mathbb{R}_{<0}^2$  et donc

$$\frac{\pi}{2} < \alpha_3 \leq \pi, \quad \frac{3\pi}{2} \leq \alpha_4 < 2\pi. \quad (11.5)$$

Comme les cônes formés par les  $\mathbf{h}(e_i)$  doivent être fortement convexes alors

$$\alpha_4 - \alpha_3 < \pi. \quad (11.6)$$

Comme, de plus,  $0 \notin \text{Conv}(e_1, \mathbf{h}(e_3), \mathbf{h}(e_4))$  alors les inégalités (11.5) donnent  $\alpha_3 = \pi$ . De la même façon, comme  $0 \notin \text{Conv}(e_2, \mathbf{h}(e_3), \mathbf{h}(e_4))$  alors  $\alpha_4 = \frac{3\pi}{2}$ .

L'isomorphisme  $\Omega(2, \mathbf{n}, C_{\mathbf{n}}) \setminus \mathbb{P}^{\text{st}}(2, \mathbf{n}) \simeq \mathbb{R}_{>0}^2$  est donc  $\mathbf{h} \mapsto (|\mathbf{h}(e_3)|, |\mathbf{h}(e_4)|)$ .

Le cas  $\mathbf{n} \geq 5$  se montre en utilisant le cas  $\mathbf{n} = 4$ . Supposons qu'il existe  $\mathbf{h} \in \Omega(2, \mathbf{n}, C_{\mathbf{n}}) \setminus \mathbb{P}^{\text{st}}(2, \mathbf{n})$ . Notons  $k \in \{1, \dots, \mathbf{n}\}$  tel que

- $\text{Arg}(\mathbf{h}(e_i)) \leq \pi$  pour  $i \leq k$ ,
- $\text{Arg}(\mathbf{h}(e_i)) \geq \frac{3\pi}{2}$  pour  $i > k$ .

---

Alors par le raisonnement fait pour  $n = 4$ , on a  $h(e_k) = \pi$  et  $h(e_{k+1}) = \frac{3\pi}{2}$ . Si  $k > 3$  alors  $0 \in \text{Conv}(e_1, e_{k+1}, e_3)$ , ce qui est absurde. Si  $k = 3$  alors  $0 \in \text{Conv}(e_2, e_k, e_n)$ , ce qui est aussi absurde. On en déduit donc qu'il n'y a pas d'élément dans  $\Omega(2, n, C_n) \setminus \mathbb{P}^{\text{st}}(2, n)$ . □





# ESPACES DE MODULES AUGMENTÉS

LA VARIATION DE LA THÉORIE GÉOMÉTRIQUE DES INVARIANTS nous permet de construire des chemins entre des champs toriques quantiques ayant des types combinatoires différents. Dans ce chapitre, on va utiliser ces chemins afin de recoller les espaces de modules de types combinatoires différents et leur famille universelle associée puis, d'une façon similaire au [chapitre 5](#), compactifier naturellement ce recollement. Cela donnera une réponse à la question [5](#) sur la « Toric big moduli conjecture » énoncée pendant l'introduction qui suggère que l'on pourrait recoller les espaces de modules des champs toriques quantiques donnés par des éventails simpliciaux entre eux grâce aux espaces de modules des champs toriques donnés par des éventails non-simpliciaux. Le tout pouvant être globalement compactifier afin d'obtenir un espace de modules global de champs toriques quantiques qui soit compact.

Dans la [première section](#), on va décrire la famille universelle au-dessus de l'éventail secondaire associé à une calibration fixée. Dans la [deuxième section](#), on fera varier, dans la construction précédente, la calibration  $h$  de telle sorte à avoir une famille de champs toriques au-dessus de l'union des éventails secondaires  $U^{\text{adm}}$ . Le quotient de cet ouvert par les isomorphismes d'éventails sera appelé « espaces de modules augmentés ». Une des propriétés importantes de ces espaces est qu'ils contiennent une copie (à  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration) de chaque espace de modules d'un type combinatoire compatible (voir [la proposition 11.2.10](#)). Pour finir, dans la [troisième section](#), on va compactifier (avec la famille universelle associée) ces espaces de modules augmentés. Cette construction est compatible avec la construction du [chapitre 5](#) dans le sens où les compactifications obtenues contiennent (à  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration) les compactifications des espaces de modules.

## 12.1 Construction de la famille universelle

Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$  un épimorphisme linéaire. Le but de cette section est de construire la famille universelle de variétés toriques  $\mathcal{S}$  (données par la combinatoire des éventails quantiques  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$ ) au-dessus de l'éventail secondaire de  $h$ .

Soient  $b \in \mathbb{R}^n$  et  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$  l'éventail quantique calibré associé (voir [la section 11.2](#) pour les détails).

Le cône  $\sigma = \sigma_I = \text{Cone}(h(e_{i_1}), \dots, h(e_{i_p}))$  est un cône maximal de  $\Delta$  (i.e. de dimension  $d$ ) si, et seulement si, la face correspondant à  $\sigma$  du polytope associé

$$P_b = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, h(e_i) \rangle \geq -b_i\}$$

est un sommet donné par l'intersection des hyperfaces normales aux vecteurs  $h(e_{i_j}), j \in I$ . Le lemme suivant va permettre de traduire ces conditions en équations :

**Lemme 12.1.1.** *Ces conditions sont équivalentes aux trois conditions suivantes :*

- La famille  $(h(e_{i_k}))_{k \in \llbracket 1, p \rrbracket}$  est génératrice de  $\mathbb{R}^d$  ;

- Les  $F_{i,b}$  sont des faces de dimension  $d - 1$  de  $P_b$  (correspondant donc aux 1-cônes de  $\sigma$  dans la définition 11.2.1);
- L'égalité

$$\dim\{x \in P \mid \forall i \in I, \langle x, h(e_i) \rangle = -b_i\} = 0 \quad (12.1)$$

*Démonstration.* La première condition assure que le cône soit de la bonne dimension et la troisième assure l'existence du sommet.  $\square$

La condition (12.1) est équivalente à l'existence d'un point  $x_\sigma \in \mathbb{R}^d$  (cf. [34, proposition 14.2.21]) tel que

$$\begin{cases} \forall i \in I, \langle x_\sigma, h(e_i) \rangle = -b_i \\ \forall j \notin I, \langle x_\sigma, h(e_j) \rangle \geq -b_j \end{cases} \quad (12.2)$$

L'équation (12.2) se réécrit de façon plus concise :

$$\begin{cases} h_\sigma^\top(x_\sigma) = -b_I \\ \forall j \notin I, \langle x_\sigma, h(e_j) \rangle \geq -b_j \end{cases}$$

Comme  $\sigma$  est de dimension maximale alors  $h_\sigma$  est surjective et donc  $h_\sigma^\top$  est injective. Ce qui assure l'unicité de la solution lorsqu'elle existe. On en conclut que

**Lemme 12.1.2.** Soit  $\mathcal{S}(P_b)$  la variété associée à l'éventail quantique polytopal  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$  (décrite dans 1.1.5.8). Alors,

$$\mathcal{S}(P_b) = \bigcup_I \mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c} \quad (12.3)$$

où  $I$  parcourt les sous-ensembles de  $\{1, \dots, n\}$  tels que :

1.  $\dim(\sigma_I) = d$ ;
2. Il existe  $x \in \mathbb{R}^d$  tel que  $h^\top(x) = -b_I$  et, pour tout  $i \notin I$ ,  $\langle x, h(e_i) \rangle \geq -b_i$ ;
3.  $\forall i \in I, \dim(F_{i,b}) = d - 1$ .

**Notation 12.1.3.** Dans la suite, on notera (C) les trois conditions du lemme 12.1.2 pour le triplet  $(b, I, h)$ .

**Définition 12.1.4.** On dira que  $b \in \mathbb{R}^n$  est admissible si le polytope  $P_b$  est de dimension  $d$ . On notera  $\tilde{U}^{\text{adm}}(h)$  l'ensemble des  $b$  admissibles.

Lorsque l'on fait bouger  $b$  dans  $\tilde{U}^{\text{adm}} \subset \mathbb{R}^n$ , on obtient une famille de variétés  $\mathcal{S}$  i.e. un morphisme  $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{univ}}(h) \rightarrow \tilde{U}^{\text{adm}}$  tel que pour  $b \in \tilde{U}^{\text{adm}}$ ,  $\tilde{\mathcal{F}}^{\text{univ}}(h)_b = \mathcal{S}(P_b)$ , en posant

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\text{univ}}(h) = \bigcup_I \{(b, z) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}) \mid (b, I, h) \text{ vérifie la condition (C)}\}$$

et en prenant pour  $\pi$  la projection  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sur la première coordonnée.

Grâce à l'égalité (12.3), on a le résultat suivant

**Lemme 12.1.5.** Soit  $b \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $m \in \ker(k^\top)$ , on a :

$$\mathcal{S}(P_b) = \mathcal{S}(P_{b+m})$$

*Démonstration.* Soient  $b \in \mathbb{R}^n$  tel que  $P_b \neq \emptyset$ , et  $m = -h^\top(y) \in \ker(k^\top) = \text{im}(h^\top)$ . Soit  $x \in P_b$ . Alors, pour tout  $i$ ,

$$\langle x + y, h(e_i) \rangle = \langle x, h(e_i) \rangle + \langle y, h(e_i) \rangle = \langle x, h(e_i) \rangle + \langle h^\top y, e_i \rangle \geq -b_i - m_i$$

Cela montre que  $P_{b+m} \supset y + P_b$  (la translation de  $P_b$  par le vecteur  $y$ ). On montre de la même façon que  $y + P_b \subset P_{b+m}$ . On en conclut que  $y + P_b = P_{b+m}$  et donc  $\mathcal{S}(P_b) = \mathcal{S}(P_{b+m})$ .  $\square$

**Proposition 12.1.6.** *Les ensembles  $\widetilde{\mathcal{F}}(\mathfrak{h})$  et  $\widetilde{U}^{\text{adm}}(\mathfrak{h})$  sont invariants par l'action de  $\ker(\mathfrak{h})$  (où l'action se fait par translation). De plus, la projection  $\pi$  est  $\ker(\mathfrak{h})$ -équivariante.*

On en déduit que la projection  $\pi$  passe au quotient par  $\ker(k^\top)$  i.e.  $\pi$  induit un morphisme

$$\bigcup_I \{([b], z) \in \mathbb{R}^n / \ker(k^\top) \times (\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}) \mid (b, I, \mathfrak{h}) \text{ vérifie (C)}\} \rightarrow U^{\text{adm}}(\mathfrak{h}) := \widetilde{U}^{\text{adm}}(\mathfrak{h}) / \ker(k^\top) \subset \mathbb{R}^{n-d}$$

car  $\mathbb{R}^n / \ker(k^\top) \simeq \text{im}(k^\top) = \mathbb{R}^{n-d}$  par injectivité de  $k$ . On notera  $\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathfrak{h})$  la famille ainsi obtenue.

On a déjà calculé  $U^{\text{adm}}(\mathfrak{h})$  dans la proposition 11.3.2 :

**Proposition 12.1.7.**  $U^{\text{adm}}(\mathfrak{h}) = \text{Int Cone}(k^\top(e_i), i = 1..n)$

**Théorème 12.1.8.**  $\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathfrak{h})$  est un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{2n}$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que les différentes conditions de la condition (C) sont semi-algébriques :

- la condition 1 est semi-algébrique car équivalente à la non-annulation d'un mineur  $d \times d$  de la matrice donné par les  $\mathfrak{h}(e_i)$ ,  $i \in I$ ;
- la condition 2 est semi-algébrique par l'élimination des quantificateurs donné par le théorème de Tarski-Seidenberg (voir [16, Proposition 5.2.2]);
- la condition 3 est semi-algébrique car équivalente à l'existence d'une famille libre de cardinal  $d - 1$  (donc à la non-annulation d'un mineur  $(d - 1) \times (d - 1)$ ) et le fait que tout famille de cardinal  $d$  est liée (qui est semi-algébrique par stabilité des semi-algébriques par intersection).  $\square$

*Remarque 12.1.9.* Ce résultat fait écho aux résultats sur la semi-algèbricité des espaces de réalisabilité des polytopes (voir corollaire 4.2.5).

**Exemple 12.1.10.** On reprend les notations de la section 11.1. On a  $U^{\text{adm}}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ .

Ensemblistement, on a l'égalité

$$\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathfrak{h}) = (\overline{\sigma}_1 \cap U^{\text{adm}}) \times \mathbb{C}_{x,y,t}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}_z^* \coprod \sigma_2 \times (\mathbb{C}_{xz}^2 \setminus \{0\}) \times (\mathbb{C}_{yt}^2 \setminus \{0\}) \coprod ((\overline{\sigma}_3 \cap U^{\text{adm}}) \times \mathbb{C}_{x,y,z}^3 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}_t^*)$$

où  $\overline{\sigma}$  est l'adhérence (topologique) de  $\sigma$ .

**Exemple 12.1.11.** On reprend les notations de l'exemple 11.4.1. On a  $U^{\text{adm}}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}$ .

Ensemblistement, on a l'égalité

$$\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathfrak{h}) = \mathbb{R}_{<0} \times \mathbb{C}_{xz}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}_{yt}^2 \coprod \{(0, 0)\} \times \mathbb{C}^4 \coprod \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{C}_{xz}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{C}_{yt}^2$$

## 12.2 Recollement des espaces de modules

Dans cette section, nous allons faire la construction de la section précédente en faisant varier la calibration  $\mathfrak{h}$  afin d'obtenir un espace contenant un « épaissement » des ouverts  $\Omega(D)$  contenant les calibrations  $D$ -admissibles (pour  $D$  un type combinatoire).

Posons

$$\widetilde{\mathcal{F}}^{\text{univ}} = \bigcup_{I \subset \{1, \dots, n\}} \left\{ (b, z, \mathfrak{h}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{C}^I \times (\mathbb{C}^*)^{I^c}) \times \mathbb{R}^{d(n-d)} \mid (b, I, \mathfrak{h}) \text{ vérifie (C)} \right\}$$

et  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  l'image de  $\widetilde{\mathcal{S}}^{\text{univ}}$  par l'application suivante :

$$(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{d(n-d)} \mapsto (\mathbf{k}^\top(\mathbf{b}), \mathbf{z}, \mathbf{h}) \in \mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$$

où  $\mathbf{k}$  est la transformée de Gale de la calibration standard associé à  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{d(n-d)}$ .

**Lemme 12.2.1.** *La projection de  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  sur  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  définit une famille continue  $(\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathbf{h}))_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{d(n-d)}}$*

**Théorème 12.2.2.**  *$\mathcal{S}^{\text{univ}}$  est un ensemble semi-algébrique.*

*Démonstration.* Voir la preuve du [théorème 12.1.8](#). □

**Lemme 12.2.3.** *L'image de la projection de  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  sur  $\mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  est :*

$$\mathbb{U}^{\text{adm}} := \coprod_{\mathbf{h} \in \mathbb{R}^{d(n-d)}} \mathbb{U}^{\text{adm}}(\mathbf{h}) = \{(\chi, \mathbf{h}) \mid \chi \in \text{Cone}(\mathbf{k}^\top(\mathbf{e}_i), i = 1..n)\}$$

qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^{n-d} \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$ .

On a le résultat plus précis de préservation de la combinatoire, grâce à la continuité de la transformation de Gale :

**Proposition 12.2.4.** *Soit  $(\chi, \mathbf{h}_0)$  un couple admissible où  $\chi$  est générique. Alors il existe un voisinage ouvert  $V$  de  $\mathbf{h}_0$  dans  $\mathbb{R}^{d(n-d)}$  tel que pour tout  $\mathbf{h} \in V$ ,*

$$\mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathbf{h})_\chi = \mathcal{S}^{\text{univ}}(\mathbf{h}_0)_\chi$$

*Démonstration.* Les murs dans l'éventail secondaire sont des cônes de la forme  $\text{Cone}(\mathbf{k}^\top(\mathbf{e}_{i_1}), \dots, \mathbf{k}^\top(\mathbf{e}_{i_p}))$ . Comme  $\chi$  est générique, on peut prendre des voisinages autour des murs qui vont éviter  $\chi$ . Par conséquent, par continuité de la transformée de Gale, il existe un voisinage  $V$  de  $\mathbf{h}_0$  qui fait que pour tout  $\mathbf{h}$  dans  $V$ , la combinatoire de l'éventail donnée par ce couple ne change pas. □

**Théorème 12.2.5.** *Pour tout éventail quantique simplicial  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$ , il existe un chemin dans  $\mathbb{U}^{\text{adm}}$  le reliant à un espace projectif quantique.*

*Démonstration.* Soit  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique simplicial. Par connexité (par arcs) des  $\Omega(\text{comb}(\Delta))$ , il existe un chemin entre  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  et un élément  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  de  $\mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n}) \cap \Omega(\text{comb}(\Delta))$  (qui est non-vide par le [corollaire 11.8.3](#)). Puis par définition de  $\mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$ , il existe un chemin dans l'éventail secondaire reliant  $(\Delta_0, \mathbf{h}_0, \mathcal{G}_0)$  à un projectif quantique. □

*Remarque 12.2.6.* Grâce au [lemme 11.8.1](#), on sait que tout polytope simple est cobordant (à homéomorphisme PL près) à un simplexe. Par conséquent, tout éventail peut être déformé pour obtenir un éventail de  $\mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$  qui sera relié à l'éventail d'un projectif quantique par un chemin affine. Remarquons que l'on ne peut pas utiliser le [théorème 9.3.19](#) puisque si l'éventail n'est pas dans  $\mathbb{P}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$  alors nécessairement l'éventail obtenu par déformation du cobordisme ne peut pas être dans l'espace de modules des projectifs quantiques.

On va maintenant définir l'espace de modules augmenté qui paramétra les couples  $(\chi, \mathbf{h})$  où  $\chi \in \text{Cone}(\mathbf{k}^\top)$  où le nombre de générateurs et la dimension de l'espace ambiant sont fixés, à isomorphisme de calibration près, ce qui grâce aux équivalences des [théorèmes 3.4.2.16](#) et [6.3.2.2.2](#) et à la construction de l'éventail secondaire du [chapitre 11](#), correspond aux champs toriques quantiques de dimension fixé et le nombre de générateurs fixés à isomorphisme torique près.

**Définition 12.2.7.** L'espace de modules augmenté  $\mathcal{A}(d, n)$  est le quotient de  $\mathcal{U}^{\text{adm}}$  par la relation d'équivalence  $\sim$  définie de la façon suivante :  $([b], h) \sim ([b'], h')$  si  $[b] = [b']$  et s'il existe (pour n'importe quel représentant) un isomorphisme d'éventails entre l'éventail induit par  $h$  et  $b$  et celui induit par  $h'$  et  $b'$  (voir la section 11.2). Plus précisément, si on note  $\mathbf{A}(d, n) = (X \rightrightarrows \mathcal{U}^{\text{adm}})$  le groupoïde donné par cette relation,  $\mathcal{A}(d, n)$  est la champification du pseudo-foncteur

$$T \in \mathfrak{VarDiff}_{\mathbb{R}} \mapsto (X(T) \rightrightarrows \mathcal{U}^{\text{adm}}(T)) \in \mathfrak{Gpd}$$

où  $X(T)$  est l'ensemble des applications  $T \rightarrow X$  qui s'étendent en une application lisse  $T \rightarrow \mathcal{U}^{\text{adm}} \times \mathcal{U}^{\text{adm}}$  (cf. l'exemple 2.1.3.7) et  $\mathcal{U}^{\text{adm}}(T) = \text{Hom}_{\mathfrak{VarDiff}_{\mathbb{R}}}(T, \mathcal{U}^{\text{adm}})$ .

**Lemme 12.2.8.** *Le groupoïde  $\mathbf{A}(d, n)$  peut être décrit par la représentation suivante  $(R \rightrightarrows \mathcal{U}^{\text{adm}})$  où :*

- $R \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \times \mathcal{U}^{\text{adm}}$  est l'espace des  $(H, b, h)$  où  $H = \begin{pmatrix} P_\sigma & 0 \\ 0 & P_\tau \end{pmatrix}$  où  $(\sigma, \tau) \in \text{Aut}(\text{comb}(\Delta_b, h)) \times \mathfrak{S}_{g_b}$  où  $(\Delta_b, \mathcal{G}_b)$  sont définis dans la section 11.2 ;
- La flèche de source est la projection sur  $\mathcal{U}^{\text{adm}}$  ;
- La flèche de but est définie comme suit :

$$t(H, [b], [h]) = ([b], L_\sigma h H^{-1})$$

$$\text{où } L_\sigma = (L_{\sigma(1)} \dots L_{\sigma(d)})^{-1}.$$

*Démonstration.* Cela vient du fait que les isomorphismes de  $(\Delta_b, h, \mathcal{G}_b)$  sont donnés par des permutations  $(\sigma, \tau) \in \text{Aut}(\text{comb}(\Delta_b)) \times \mathfrak{S}_{g_b}$  (par le théorème 4.1.6).  $\square$

On peut ensuite construire la famille universelle de champs toriques quantiques associée en considérant le groupoïde  $\mathbf{E} = (R \rightrightarrows \mathcal{S}^{\text{univ}})$  où

- $R \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}^{n-d} \times \mathcal{S}^{\text{univ}}$  est l'espace des  $(H, t, [b], z, h)$  où  $H = \begin{pmatrix} P_\sigma & 0 \\ 0 & P_\tau \end{pmatrix}$  où  $(\sigma, \tau) \in \text{Aut}(\text{comb}(\Delta_b, h)) \times \mathfrak{S}_{g_b}$  où  $(\Delta_b, \mathcal{G}_b)$  sont définis dans la section 11.2 ;
- La flèche de source est la projection sur  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  ;
- La flèche de but est définie comme suit :

$$t(H, t, [b], z, [h]) = ([b], E(\text{Hk}\hat{H}^{-1}t)z, L_\sigma h H^{-1})$$

où  $\hat{H}$  est l'automorphisme linéaire de  $\mathbb{C}^{n-d}$  qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n-d} & \xrightarrow{\hat{H}} & \mathbb{C}^{n-d} \\ \kappa \downarrow & & \downarrow \kappa' \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{C}^n \end{array}$$

On notera  $\mathcal{E}(d, n)$  le champ obtenu par champification. La projection induit un morphisme  $\mathcal{E}(d, n) \rightarrow \mathcal{A}(d, n)$  dont les fibres sont des champs toriques quantiques qui sera la famille universelle de l'espace de modules augmentés  $\mathcal{A}(d, n)$ . Grâce à leur présentation, on en déduit :

**Lemme 12.2.9.** *Les champs  $\mathcal{A}(d, n)$  et  $\mathcal{E}(d, n)$  sont des champs topologiques (par oubli de structure).*

**Théorème 12.2.10.** *Soient  $n \geq d$  deux entiers. Soit  $D$  le type combinatoire d'un éventail simplicial vérifiant la condition de la proposition 11.2.10 (et  $\mathcal{G} = D(1)^c$  l'ensemble des générateurs virtuels associés).*

Soit  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  un éventail quantique de type combinatoire  $D$ . Notons  $\widehat{\Omega}(D)$  l'ensemble des couples  $(\mathbf{h}, [\mathbf{b}])$  de  $\Omega(D) \times \mathbb{R}^{n-d} \cap \mathbf{U}^{\text{adm}}$  étant dans la même chambre de l'éventail secondaire que  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  (i.e. ayant donc la même combinatoire que  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$ ). Alors  $\widehat{\Omega}(D)$  est un ouvert de  $\mathbf{U}^{\text{adm}}$  et la projection

$$\widehat{\Omega}(D) \rightarrow \Omega(D)$$

est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration et donc une équivalence d'homotopie.

*Remarque 12.2.11.* On peut aussi prendre  $D$  non simplicial mais alors  $\widehat{\Omega}(D)$  n'est pas ouvert dans  $\mathbf{U}^{\text{adm}}$

*Démonstration.* L'ensemble  $\widehat{\Omega}(D)$  est un ouvert de  $\Omega(D) \times \mathbb{R}^{n-d} \cap \mathbf{U}^{\text{adm}}$  et donc de  $\mathbf{U}^{\text{adm}}$  par la proposition 12.2.4. Chaque fibre de la projection  $\widehat{\Omega}(D) \rightarrow \Omega(D)$  est un cône convexe ouvert et est donc homéomorphe (et même difféomorphe) à  $\mathbb{R}^{n-d}$ . Par continuité de la transformation de Gale, c'est une fibration de fibre  $\mathbb{R}^{n-d}$  qui est contractile. La section nulle est le quasi-inverse voulu.  $\square$

De la même façon,  $\mathcal{S}_{\widehat{\Omega}(D)}^{\text{univ}} \rightarrow \Omega(D) \times \mathcal{S}(D)$  est aussi une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration (où  $\mathcal{S}_{\widehat{\Omega}(D)}^{\text{univ}}$  est la restriction de  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  sur  $\widehat{\Omega}(D)$ ).

Pour obtenir une famille de champs toriques, on peut faire agir  $\mathbb{C}^{n-d}$  sur  $\mathcal{S}^{\text{univ}}$  par :

$$\mathbf{t} \cdot ([\mathbf{b}], \mathbf{z}, \mathbf{h}) = ([\mathbf{b}], \mathbb{E}(k(\mathbf{t}))\mathbf{z}, \mathbf{h}) \quad (12.4)$$

Le champ quotient  $[\mathcal{S}^{\text{univ}}/\mathbb{C}^{n-d}]$  sera noté  $\mathcal{X}^{\text{univ}}$  et

**Corollaire 12.2.12.** *La projection  $\widehat{\mathcal{X}}(D) := [\mathcal{S}_{\widehat{\Omega}(D)}^{\text{univ}}/\mathbb{C}^{n-d}] \subset \mathcal{X}^{\text{univ}} \rightarrow \mathcal{X}(D)$  est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration où  $\mathcal{X}(D)$  est l'espace total de la famille de champs toriques quantiques de type combinatoire  $D$  au-dessus de  $\Omega(D)$ .*

Ensuite, on peut définir une action de  $G := \text{Aut}(D) \times \mathfrak{S}_g \subset \mathfrak{S}_n$  sur  $\widehat{\mathcal{X}}(D)$  par passage au quotient de l'action sur  $\widehat{\Omega}(D)$  par

$$\sigma \cdot ([\mathbf{b}], \mathbf{z}, [\mathbf{k}]) = ([\mathbf{b}_\sigma], \mathbf{z}_\sigma, \sigma \cdot \mathbf{h})$$

où  $\mathbf{b}_\sigma$  est le point donné par  $(\mathbf{b}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{b}_{\sigma(n-d)})$ .

De la même façon, on peut définir une action sur  $\widehat{\Omega}(D)$  par :

$$\sigma \cdot ([\mathbf{b}], \mathbf{h}) = ([\mathbf{b}_\sigma], \sigma \cdot \mathbf{h}) \quad (12.5)$$

*Remarque 12.2.13.* Cette action a été choisie car si  $(L, H)$  est un isomorphisme d'éventails entre  $(\Delta, \mathbf{h}, \mathcal{G})$  et  $(\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$  et que

$$\mathbf{P} := \{\mathbf{x} \in (\mathbb{R}^d)^* \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{h}'(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\}$$

est le polytope associé à  $(\Delta', \mathbf{h}', \mathcal{G}')$  dans  $(\mathbb{R}^d)^*$  alors

$$\begin{aligned} L^\top \mathbf{P} &= \{L^\top \mathbf{x} \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{h}'(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\} \\ &= \{\mathbf{y} \mid \langle (L^\top)^{-1}(\mathbf{y}), \mathbf{h}'(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\} \\ &= \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, L^{-1} \mathbf{h}'(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\} \\ &= \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{h} H^{-1}(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\} \\ &= \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{e}_{\sigma(i)}) \rangle \geq -\mathbf{b}_{\sigma(i)}\} \\ &= \{\mathbf{y} \mid \langle \mathbf{y}, \mathbf{h}(\mathbf{e}_i) \rangle \geq -\mathbf{b}_i\} \end{aligned}$$

Ces actions font des projections  $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D}) \rightarrow \widehat{\Omega}(\mathbb{D})$ ,  $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{D})$  et  $\widehat{\Omega}(\mathbb{D}) \rightarrow \Omega(\mathbb{D})$  des morphismes  $G$ -équivariants. Ces derniers descendent donc au quotient :

$$p_1 : \widehat{\Omega}(\mathbb{D})/G \rightarrow [\Omega(\mathbb{D})/G] = \mathcal{M}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}, \mathbb{D}),$$

$$p_2 : \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D})/G \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{D})/G$$

et

$$p_3 : \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D})/G \rightarrow [\widehat{\Omega}(\mathbb{D})/G]$$

**Corollaire 12.2.14.** *Le morphisme  $p_1 : \widehat{\Omega}(\mathbb{D})/G \rightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}, \mathbb{D})$  est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration.*

*Démonstration.* Par le [théorème 12.2.10](#), la composée  $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D}) \rightarrow \Omega(\mathbb{D}) \rightarrow [\Omega(\mathbb{D})/G]$  est un  $G \times \mathbb{R}^{n-d}$ -fibration. On en déduit que le morphisme obtenu par passage au quotient  $\widehat{\Omega}(\mathbb{D})/G \rightarrow \Omega(\mathbb{D})/G$  est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration.  $\square$

On a de la même façon le résultat pour le morphisme  $p_2$  :

**Corollaire 12.2.15.** *Le morphisme  $p_2 : \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D})/G \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{D})/G$  est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration.*

En conclusion, on a le résultat suivant :

**Théorème 12.2.16.** *Soient  $d \leq n$  deux entiers. Pour tout éventail quantique (vérifiant les conditions de la [proposition 11.2.10](#)) de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $n$  générateurs et de type combinatoire  $\mathbb{D}$ , on a les résultats suivants :*

- *il existe un sous-champ  $\mathcal{A}(\mathbb{D})$  (qui est ouvert si  $\mathbb{D}$  est simplicial) de  $\mathcal{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n})$  et une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration de  $\mathcal{A}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}, \mathbb{D})$  ;*
- *il existe un sous-champ  $\mathcal{E}(\mathbb{D})$  (qui est ouvert si  $\mathbb{D}$  est simplicial) de  $\mathcal{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n})$  et une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration  $\mathcal{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{X}(\mathbb{D})$  ;*
- *on a une projection  $\mathcal{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$  dont toutes les fibres sont des champs toriques quantiques de type combinatoire  $\mathbb{D}$ .*

*Démonstration.* On a :

- $\mathcal{A}(\mathbb{D}) := [\widehat{\Omega}(\mathbb{D})/G]$  et la fibration est donnée par la projection du [corollaire 12.2.14](#) ;
- $\mathcal{E}(\mathbb{D}) := \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{D})/G$  et la fibration est donnée par la projection du [corollaire 12.2.15](#) ;
- La projection  $\mathcal{E}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathbb{D})$  est le morphisme  $p_3$ . Ces fibres sont des champs toriques quantiques de type combinatoire  $\mathbb{D}$  par construction (c'est le passage au quotient de la restriction de la projection  $\mathcal{X}^{\text{univ}} \rightarrow \mathbb{U}^{\text{adm}}$  aux éventails quantiques de type combinatoire  $\mathbb{D}$ ).

En résumé, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{X}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}, \mathbb{D}) & \xleftarrow{\mathbb{R}^{n-d}\text{-fibration}} & \mathcal{E}(\mathbb{D}) & \hookrightarrow & \mathcal{E}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{M}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n}, \mathbb{D}) & \xleftarrow{\mathbb{R}^{n-d}\text{-fibration}} & \mathcal{A}(\mathbb{D}) & \hookrightarrow & \mathcal{A}(\mathfrak{d}, \mathfrak{n})
 \end{array} \tag{12.6}$$

où les fibres des morphismes verticaux sont des champs toriques quantiques.  $\square$



## 12.3 Compactification des espaces de modules augmentés

Cette section sera dédiée à la compactification de l'espace de modules augmenté. La première chose que l'on peut voir est que pour chaque cône de l'éventail secondaire, on peut se restreindre à son intersection avec la boule unité puisque la combinatoire ne change pas dans ce cône. Nous allons considérer le fermé  $\mathbf{U}^{\text{adm}} \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  de  $\mathbf{U}^{\text{adm}}$  (où  $\overline{\mathbb{B}}(0, 1)$  est la boule unité fermée de  $\mathbb{R}^{n-d}$  pour la norme euclidienne). On peut montrer :

**Lemme 12.3.1.** *L'inclusion  $\mathbf{U}^{\text{adm}} \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d(n-d)} \hookrightarrow \mathbf{U}^{\text{adm}}$  est une équivalence d'homotopie.*

*Démonstration.* Cela vient du fait que pour tout cône fortement convexe  $\sigma$ ,  $\sigma$  et  $\sigma \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1)$  sont homotopes à  $\{0\}$ .  $\square$

De plus, cette restriction est compactible avec les actions de groupe :

**Lemme 12.3.2.** *Le fermé  $\widehat{\Omega}(D) \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  est invariant par l'action de  $G$  induite par (12.5).*

*Démonstration.* Cela vient du fait que la norme euclidienne est invariante par l'action du groupe symétrique et donc la boule unité est invariante par permutation de coordonnées.  $\square$

En reprenant les résultats du chapitre 5, on peut maintenant plonger  $\mathbf{U}^{\text{adm}} \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  dans l'espace compact  $\overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$ . On notera  $\mathbf{U}$  l'image du plongement dans  $\overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$ . On peut transporter l'action (12.4) à  $\mathbf{U}$  comme dans (5.20). De la même façon, la famille de champs toriques au-dessus de  $\mathbf{U}^{\text{adm}} \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \mathbb{R}^{d(n-d)}$  se pousse-en-avant en une famille  $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{U}$ .

Notons  $K$  l'adhérence de  $\mathbf{U}$  dans  $\overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n)$ . De façon analogue à la sous-section 5.5.2, on obtient une famille de champs toriques quantiques  $\mathcal{F} \rightarrow K$ .

De la même façon que le théorème 12.2.10, on a le résultat suivant :

**Lemme 12.3.3.** *Pour tout type combinatoire  $D$  vérifiant les conditions de la proposition 11.2.10, la projection  $\widehat{\Omega}(D) \cap \overline{\mathbb{B}}(0, 1) \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n) \subset K \rightarrow \overline{\Omega}(D)$  est une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration.*

On définit sur  $K$  la relation d'équivalence  $\sim$  suivante où  $(h, [b]) \sim (k, [b'])$  si  $[b] = [b']$  et s'il existe (pour n'importe quel représentant) un isomorphisme d'éventails entre l'éventail induit par  $[h]$  et  $b$  et entre celui entre  $[k]$  et  $b'$  (voir la section 11.2). Cette relation d'équivalence définit un groupoïde  $\mathbf{K}(d, n)$ . On construit de la même façon que dans la définition 12.2.7 un champ  $\mathcal{K}(d, n)$  associé qui est la « compactification »<sup>1</sup> de l'espace de modules augmenté.

Comme dans les lemmes 12.2.8 et 12.2.9, on a les deux résultats suivants :

**Lemme 12.3.4.** *Le groupoïde  $\mathbf{K}(d, n)$  peut être décrit par la représentation suivante  $(R \rightrightarrows K)$  où :*

- $R \subset \text{GL}_n(\mathbb{Z}) \times K$  est l'espace des  $(H, [b], h)$  où  $H = \begin{pmatrix} P_\sigma & 0 \\ 0 & P_\tau \end{pmatrix}$  où  $(\sigma, \tau) \in \text{Aut}(\text{comb}(\Delta_b, h)) \times \mathfrak{S}_{g_b}$  où  $(\Delta_b, \mathcal{I}_b)$  sont définis dans la section 11.2 ;
- La flèche de source est la projection sur  $K$  ;
- La flèche de but est défini comme suit :

$$t(H, [b], [h]) = ([b], [hH^{-1}])$$

**Lemme 12.3.5.** *Le champ  $\mathcal{K}(d, n)$  est un champ topologique (par oubli de structure).*

De la même façon que le corollaire 12.2.15, on obtient

1. ce n'est pas une vraie compactification puisque on a restreint à la boule unité fermée

**Lemme 12.3.6.** *La projection du lemme 12.3.3 descend en une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration*

$$\mathcal{H}(\mathbf{D}) := \left( \widehat{\Omega}(\mathbf{D}) \cap \overline{\mathbb{B}(0, 1)} \times \text{Gr}(n-d, \mathbb{R}^n) / \sim \right) \subset \mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n}) \rightarrow [\overline{\Omega}(\mathbf{D}) / \text{Aut}(\mathbf{D}) \times \mathfrak{S}_{\mathbf{D}(1)^c}] = \overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}.$$

*Démonstration.* Il suffit de voir que les isomorphismes d'éventails que l'on retrouve dans  $\widehat{\Omega}(\mathbf{D})$  sont dans  $\text{Aut}(\mathbf{D}) \times \mathfrak{S}_{\mathbf{D}(1)^c}$ .  $\square$

Par la même méthode que pour la proposition 5.5.2.12 ou dans la définition de  $\mathcal{E}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$  de la section précédente, on peut pousser-en-avant la famille  $\mathcal{F} \rightarrow \mathbf{K}$  sur  $\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$ . On notera  $\overline{\mathcal{Z}(\mathbf{d}, \mathbf{n})}$  l'espace total obtenu qui est la famille universelle au-dessus de la compactification  $\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})$ . En conclusion, on obtient une réponse à la « Toric Big Moduli Conjecture » :

**Théorème 12.3.7.** *Soit  $n \geq d$  deux entiers. Il existe un champ (au-dessus du site  $\mathfrak{Var}\mathfrak{Diff}_{\mathbb{R}}$ ) compact  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})}$  et un morphisme de champs  $\overline{\mathcal{Z}(\mathbf{d}, \mathbf{n})} \rightarrow \overline{\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})}$  tel que :*

- Pour tout type combinatoire  $\mathbf{D}$  d'un éventail complet de  $\mathbb{R}^d$  à  $n$  générateurs, il existe un fermé  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{D})}$  de  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})}$  et une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{D})} \rightarrow \overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$ ;
- Cette fibration s'étend en une fibration entre la famille au-dessus de  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{D})}$  et celle au-dessus de  $\overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$ .

On peut résumer ce théorème par le diagramme suivant qui est une sorte de compactification du diagramme (12.6) :

$$\begin{array}{ccccc} \overline{\mathcal{Z}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})} & \xleftarrow{\mathbb{R}^{n-d}\text{-fibration}} & \overline{\mathcal{E}(\mathbf{D})} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{E}(\mathbf{d}, \mathbf{n})} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})} & \xleftarrow{\mathbb{R}^{n-d}\text{-fibration}} & \overline{\mathcal{H}(\mathbf{D})} & \xrightarrow{\quad} & \overline{\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})} \end{array}$$

En d'autres termes, le champ (compact)  $\overline{\mathcal{H}(\mathbf{d}, \mathbf{n})}$  est constitué d'un « épaissement » (donné par une  $\mathbb{R}^{n-d}$ -fibration) de chaque compactification  $\overline{\mathcal{M}(\mathbf{d}, \mathbf{n}, \mathbf{D})}$  des espaces de modules des champs toriques quantiques, que l'on a pu recoller grâce à l'éventail secondaire.



# PUBLICATION

---

Titre : "*Non-simplicial quantum toric varieties*".

Résumé : In this paper, we define quantum toric varieties associated to an arbitrary fan in a finitely generated subgroup of some  $\mathbb{R}^d$  generalizing the article arXiv:2002.03876 of Katzarkov, Lupercio, Meersseman and Verjovsky.

Lien ArXiv : <https://arxiv.org/abs/2006.16715>.



# BIBLIOGRAPHIE

- 
- [1] M. ABOUZAIID, *Morse homology, tropical geometry, and homological mirror symmetry for toric varieties*, *Selecta Mathematica*, 15 (2006).
  - [2] D. ABRAMOVICH, A. CORTI, AND A. VISTOLI, *Twisted bundles and admissible covers*, *Communications in Algebra*, 31 (2003), p. 35473618.
  - [3] D. ABRAMOVICH, K. KARU, K. MATSUKI, AND J. WŁODARCZYK, *Torification and factorization of birational maps*, *Journal of the American Mathematical Society*, 15 (2002), pp. 531–572.
  - [4] E. ARBARELLO, J. HARRIS, M. CORNALBA, AND P. GRIFFITHS, *Geometry of Algebraic Curves : Volume II with a contribution by Joseph Daniel Harris*, *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, Springer Berlin Heidelberg, 2011.
  - [5] M. ARTIN, *Algebraization of formal moduli : II. existence of modifications*, *Annals of Mathematics*, (1970), pp. 88–135.
  - [6] M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, AND J.-L. VERDIER, *Théorie de Topos et Cohomologie Étale des Schémas I, II, III*, vol. 269, 270, 305 of *Lecture Notes in Mathematics*, Springer, 1971.
  - [7] M. ATIYAH AND I. MACDONALD, *Introduction To Commutative Algebra*, Addison-Wesley series in mathematics, Avalon Publishing, 1994.
  - [8] M. F. ATIYAH, *On analytic surfaces with double points*, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 247 (1958), pp. 237–244.
  - [9] M. AUDIN, *Spinning Tops : A Course on Integrable Systems*, *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*, Cambridge University Press, 1999.
  - [10] J. C. BAEZ AND A. E. HOFFNUNG, *Convenient categories of smooth spaces*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 363 (2011), p. 57895825.
  - [11] F. BATTAGLIA, *Complex quotients by nonclosed groups and their stratifications*, arXiv e-prints, (2007), p. arXiv:0704.2727.
  - [12] F. BATTAGLIA, *Geometric spaces from arbitrary convex polytopes*, *International Journal of Mathematics*, 23 (2012), p. 1250013.
  - [13] F. BATTAGLIA AND D. ZAFFRAN, *Foliations modeling nonrational simplicial toric varieties*, *International Mathematics Research Notices*, (2015).

- 
- [14] K. BEHREND, B. CONRAD, D. EDIDIN, B. FANTECHI, W. FULTON, L. GÖTTSCHE, AND A. KRESCH, *Introduction to stacks*. [https://www.math.uzh.ch/index.php?id=ve\\_vo\\_det&key2=580&semId=13](https://www.math.uzh.ch/index.php?id=ve_vo_det&key2=580&semId=13).
- [15] K. BEHREND AND P. XU, *Differentiable stacks and gerbes*, Journal of Symplectic Geometry, 9 (2006).
- [16] J. BOCHNAK, M. COSTE, AND M. ROY, *Real Algebraic Geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [17] A. BOIVIN, *Non-simplicial quantum toric varieties*, 2020.
- [18] L. BORISOV, L. CHEN, AND G. SMITH, *The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks*, Journal of the American Mathematical Society, 18 (2004), p. 193215.
- [19] M. BORN, W. HEISENBERG, AND P. JORDAN, *Zur Quantenmechanik. II.*, Z. Phys., 35 (1926), pp. 557–615.
- [20] M. BORN AND P. JORDAN, *Zur Quantenmechanik*, Z. Phys., 34 (1925), pp. 858–888.
- [21] F. BOSIO AND L. MEERSSEMAN, *Real quadrics in  $\mathbb{C}^n$ , complex manifolds and convex polytopes*, Acta Math., 197 (2006), pp. 53–127.
- [22] N. BOURBAKI, *Topologie générale : Chapitres 5 à 10*, Bourbaki, Nicolas, Springer Berlin Heidelberg, 2007.
- [23] K. S. BROWN, *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics #87, Springer, 1982.
- [24] V. M. BUKHSHTABER AND N. RAY, *Toric manifolds and complex cobordisms*, Russian Mathematical Surveys, 53 (1998), pp. 371–373.
- [25] E. CALABI AND B. ECKMANN, *A class of compact, complex manifolds which are not algebraic*, Annals of Mathematics, 58 (1953), pp. 494–500.
- [26] A. CANDEL AND L. CONLON, *Foliations I*, Foliations, American Mathematical Society, 2000.
- [27] C. CARATHÉODORY, *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. (mit 2 figuren im text).*, Mathematische Annalen, 64 (1907), pp. 95–115.
- [28] F. CHAPOTON, S. FOMIN, AND A. ZELEVINSKY, *Polytopal realizations of generalized associahedra*, 2002.
- [29] A. CONNES, *Noncommutative geometry*, 1994.
- [30] ———, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Sympos. Pure Math., 38 (2010).
- [31] B. CONRAD, *Relative ampleness in rigid geometry*, Annales de l’Institut Fourier, 56 (2006), pp. 1049–1126.
- [32] D. COX, *Recent developments in toric geometry*, arXiv preprint alg-geom/9606016, (1996).
- [33] D. COX AND S. KATZ, *Mirror symmetry and algebraic geometry*, Mathematical surveys and monographs 68, American Mathematical Society, 1999.
- [34] D. COX, J. LITTLE, AND H. SCHENCK, *Toric Varieties*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Soc., 2011.

- 
- [35] D. A. COX, *Erratum to "the homogeneous coordinate ring of a toric variety", along with the original paper*, arXiv e-prints, (1992).
- [36] M. CRAINIC AND I. MOERDIJK, *Foliation groupoids and their cyclic homology*, *Advances in Mathematics*, 157 (2000), pp. 177–197.
- [37] P. DELIGNE AND D. MUMFORD, *The irreducibility of the space of curves of given genus*, *Publications Mathématiques de l’IHÉS*, 36 (1969), pp. 75–109.
- [38] T. DELZANT, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l’application moment*, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 116 (1988), pp. 315–339.
- [39] M. DEMAZURE, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, *Annales scientifiques de l’École Normale Supérieure*, 4e série, 3 (1970), pp. 507–588.
- [40] M. DEMAZURE AND A. GROTHENDIECK, *Schémas en Groupes, I-III. (SGA3)*, *Lecture notes in mathematics*, Springer-Verlag, 1970.
- [41] A. DOUADY, *Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d’un espace analytique donné*, *Annales de l’Institut Fourier*, 16 (1966), pp. 1–95.
- [42] D. DUFFUS, *Automorphisms and products of ordered sets*, *algebra universalis*, 19 (1984), pp. 366–369.
- [43] J. EBERT, *The homotopy type of a topological stack*, 2009.
- [44] B. FANTECHI, *Stacks for everybody*, in *European Congress of Mathematics*, C. Casacuberta, R. M. Miró-Roig, J. Verdera, and S. Xambó-Descamps, eds., Basel, 2001, Birkhäuser Basel, pp. 349–359.
- [45] B. FANTECHI, E. MANN, AND F. NIRONI, *Smooth toric Deligne-Mumford stacks*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 648 (2010), pp. 201–244. 44 pages ; 4 figures.
- [46] C. FROMENTEAU, *Sur le champ de Teichmüller des surfaces de Hopf*, PhD thesis, Université d’Angers, 2017. Thèse de doctorat dirigée par Laurent MEERSSEMAN, Mathématiques Angers 2017.
- [47] W. FULTON, *Introduction to toric varieties*, *Annals of mathematics studies*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1993.
- [48] P. GABRIEL AND M. ZISMAN, *Calculus of Fractions and Homotopy Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 2. Folge*, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [49] N. GEIST AND E. MILLER, *Global dimension of real-exponent polynomial rings*, 2021.
- [50] I. GELFAND, *Normierte Ringe*, *Rec. Math. Moscou, n. Ser.*, 9 (1941), pp. 3–23.
- [51] I. GELFAND, M. KAPRANOV, AND A. ZELEVINSKY, *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*, *Modern Birkhäuser Classics*, Birkhäuser Boston, 2009.
- [52] A. GERASCHENKO AND M. SATTRIANO, *Toric stacks I : The theory of stacky fans*, *Transactions of the American Mathematical Society*, 367 (2014), p. 10331071.
- [53] J. GIRAUD, *Cohomologie non abélienne*, *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*, Springer-Verlag, 1971.
- [54] H. GRAUERT, F. CAMPANA, T. PETERNELL, G. DETHLOFF, AND R. REMMERT, *Several Complex Variables VII : Sheaf-Theoretical Methods in Complex Analysis*, *Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer Berlin Heidelberg, 2013.



- 
- [55] H. GRAUERT, A. HUCKLEBERRY, AND R. REMMERT, *Theory of Stein Spaces*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer New York, 2013.
- [56] H. GRAUERT AND R. REMMERT, *Coherent Analytic Sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer Berlin Heidelberg, 2012.
- [57] P. GRIFFITHS AND J. HARRIS, *Principles of Algebraic Geometry*, Wiley, Aug. 2011.
- [58] A. GROTHENDIECK, *Éléments de géométrie algébrique : I. le langage des schémas*, Publications Mathématiques de l’IHÉS, 4 (1960), pp. 5–228.
- [59] ———, *Techniques de construction et théorèmes d’existence en géométrie algébrique IV : les schémas de Hilbert*, in Séminaire Bourbaki : années 1960/61, exposés 205–222, no. 6 in Séminaire Bourbaki, Société mathématique de France, 1961. talk:221.
- [60] A. GROTHENDIECK AND M. RAYNAUD, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, 2002.
- [61] B. GRÜNBAUM, V. KAIBEL, V. KLEE, AND G. ZIEGLER, *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.
- [62] D. HALPERN-LEISTNER, *Modern moduli theory*, 2020. [http://pi.math.cornell.edu/~danielhl/modern\\_moduli\\_theory.pdf](http://pi.math.cornell.edu/~danielhl/modern_moduli_theory.pdf).
- [63] D. HANDEL, *On products in the cohomology of the dihedral groups*, Tohoku Mathematical Journal, 45 (1993), pp. 13 – 42.
- [64] J. HARRIS, *Algebraic Geometry : A First Course*, Graduate Texts in Mathematics, Springer New York, 2013.
- [65] R. HARTSHORNE, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1977.
- [66] ———, *Generalized divisors on Gorenstein schemes*, K-theory, 8 (1994), pp. 287–339.
- [67] R. HARVEY, *Removable singularities of cohomology classes in several complex variables*, American Journal of Mathematics, 96 (1974), pp. 498–504.
- [68] A. HATCHER, *Algebraic Topology*, Algebraic Topology, Cambridge University Press, 2002.
- [69] J. HEINLOTH, *Some notes on differentiable stacks*. <https://www.uni-due.de/~hm0002/stacks.pdf>.
- [70] H. HIRONAKA, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero : I*, Annals of Mathematics, 79 (1964), pp. 109–203.
- [71] B. HOFFMAN, *Toric symplectic stacks*, Advances in Mathematics, 368 (2020), p. 107135.
- [72] B. HOFFMAN AND R. SJAMAAR, *Stacky hamiltonian actions and symplectic reduction*, International Mathematics Research Notices, 2021 (2021), pp. 15209–15300.
- [73] H. HOPF, *Zur Topologie der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen, (1930).
- [74] J. H. HUBBARD AND S. KOCH, *An analytic construction of the Deligne-Mumford compactification of the moduli space of curves*, Journal of Differential Geometry, 98 (2014), pp. 261–313. 44 pages (for Tamino).
- [75] P. IGLESIAS-ZEMMOUR, *Diffeology*, vol. 185 of Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2013.

- 
- [76] P. IGLESIAS-ZEMMOUR AND E. PRATO, *Quasifolds, diffeology and noncommutative geometry*, Journal of Noncommutative Geometry, 15 (2021), pp. 735–759.
- [77] T. JAMIN, *Espace de Teichmüller du fibré des repères d'une 3-variété hyperbolique réelle*, PhD thesis, Université d'Angers, 2021. Thèse de doctorat dirigée par Laurent MEERSSEMAN, Mathématiques Angers 2021.
- [78] Y. JIANG, *The orbifold cohomology ring of simplicial toric stack bundles*, Illinois J. Math., 52 (2008), pp. 493–514.
- [79] L. KATZARKOV AND G. KERR, *Partially wrapped Fukaya categories of simplicial skeleta*, 2017.
- [80] L. KATZARKOV, E. LUPERCIO, L. MEERSSEMAN, AND A. VERJOVSKY, *The definition of a non-commutative toric variety*, Contemporary mathematics, 620 (2014), pp. 223–250.
- [81] ———, *Quantum (non-commutative) toric geometry : Foundations*, Advances in Mathematics, 391 (2021), p. 107945.
- [82] M. KIRDAR, *K-ring of the classifying space of the symmetric group on four letters*, Representations, 3 (2013), p. Z24.
- [83] D. KNUTSON, *Algebraic Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 1971.
- [84] J. KOLLÁR AND S. MORI, *Birational Geometry of Algebraic Varieties*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1998.
- [85] M. KONTSEVICH, *Homological algebra of mirror symmetry*, 1994.
- [86] M. KORAS, *Linearization of reductive group actions*, in Group Actions and Vector Fields, J. B. Carrell, ed., Berlin, Heidelberg, 1982, Springer Berlin Heidelberg, pp. 92–98.
- [87] G. LAUMON AND L. MORET-BAILLY, *Champs algébriques*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge / A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer Berlin Heidelberg, 1999.
- [88] S. LÓPEZ DE MEDRANO AND A. VERJOVSKY, *A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds*, Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, 28 (1997), pp. 253–269.
- [89] I. MADSEN AND M. WEISS, *The stable moduli space of Riemann surfaces : Mumford's conjecture*, Annals of Mathematics, 165 (2007), p. 843941.
- [90] P. MCMULLEN, *The numbers of faces of simplicial polytopes*, Israel Journal of Mathematics, 9 (1971), pp. 559–570.
- [91] L. MEERSSEMAN, *Un procédé géométrique de construction de variétés compactes complexes, non algébriques, en dimension quelconque*, PhD thesis, Université de Lille, 1998. Thèse de doctorat dirigée par Alberto VERJOVSKY, Mathématiques Lille, 1998.
- [92] ———, *The Teichmüller and Riemann moduli stacks*, Journal de l'École Polytechnique Mathématiques, 6 (2019), p. 879945.
- [93] L. MEERSSEMAN AND A. VERJOVSKY, *Holomorphic principal bundles over projective toric varieties*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 572 (2004), pp. 57–96.

- 
- [94] J. MILNOR AND J. D. STASHEFF, *Characteristic classes*, Annals of mathematics studies 76, Princeton University Press, 1974.
- [95] N. E. MNĚV, *The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes varieties*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1988, pp. 527–543.
- [96] J. MORROW AND K. KODAIRA, *Complex Manifolds (AMS Chelsea Publishing)*, American Mathematical Society, 2006.
- [97] D. MUMFORD, J. FOGARTY, AND F. KIRWAN, *Geometric Invariant Theory*, no. vol. 34 in Ergebnisse der Mathematik und Ihrer Grenzgebiete, 3 Folge/A Series of Modern Surveys in Mathematics Series, Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [98] T. NISHINOU AND B. SIEBERT, *Toric degenerations of toric varieties and tropical curves*, Duke Mathematical Journal, 135 (2004).
- [99] N. NITSURE, *Construction of Hilbert and Quot schemes*, arXiv : Algebraic Geometry, (2005).
- [100] NLAB AUTHORS, *Grothendieck construction*. <http://ncatlab.org/nlab/show/Grothendieck%20construction>, Sept. 2020. [Revision 62](#).
- [101] ———, *groupoid*. <http://ncatlab.org/nlab/show/groupoid>, Sept. 2020. [Revision 73](#).
- [102] B. NOOHI, *Foundations of topological stacks I*, arXiv : Algebraic Geometry, (2005).
- [103] ———, *Homotopy types of topological stacks*, Advances in Mathematics, 230 (2012), pp. 2014–2047.
- [104] ———, *Fibrations of topological stacks*, Advances in Mathematics, 252 (2014), pp. 612–640.
- [105] J. NUITEN, *Cohomological quantization of local prequantum boundary field theory*, Master’s thesis, Universiteit Utrecht, 2013.
- [106] K. OKA, *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Sur quelques notions arithmétiques*, Bulletin de la Société Mathématique de France, 78 (1950), pp. 1–27.
- [107] A. PIR AND F. SOTTILE, *Irrational toric varieties and secondary polytopes*, Discrete & Computational Geometry, 67 (2022).
- [108] E. PRATO, *Simple non-rational convex polytopes via symplectic geometry*, Topology, 40 (2001), pp. 961–975.
- [109] D. QUILLEN, *Projective modules over polynomial rings*, Inventiones Mathematicae, 36 (1976), pp. 167–171.
- [110] J. RICHTER-GEBERT, *Realization spaces of polytopes*, Springer, 2006.
- [111] J. RICHTER-GEBERT AND G. ZIEGLER, *Realization spaces of 4-Polytopes are universal*, Preprint Reihe Mathematik, TU, Fachbereich 3, 1995.
- [112] E. RIEHL, *Category Theory in Context*, Aurora : Dover Modern Math Originals, Dover Publications, 2017.
- [113] M. ROMAGNY, *Group actions on stacks and applications*, Michigan Mathematical Journal, 53 (2005), pp. 209 – 236.
- [114] M. SENECHAL, *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, 1996.

- 
- [115] T. STACKS PROJECT AUTHORS, *Stacks Project*. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2018.
- [116] R. P. STANLEY, *The number of faces of a simplicial convex polytope*, Advances in Mathematics, 35 (1980), pp. 236–238.
- [117] H. SUMIHIRO, *Equivariant completion*, J. Math. Kyoto Univ., 14 (1974), pp. 1–28.
- [118] V. A. TIMORIN, *An analogue of the Hodge-Riemann relations for simple convex polytopes*, Russ. Math. Surv., 54 (1999), pp. 381–426.
- [119] B. TOËN AND M. VAQUIÉ, *Algébrisation des variétés analytiques complexes et catégories dérivées*, Mathematische Annalen, 342 (2008), pp. 789–831.
- [120] B. TOËN AND G. VEZZOSI, *Homotopical algebraic geometry. ii. geometric stacks and applications*, Memoirs of the American Mathematical Society, 193 (2008), p. 00.
- [121] J. C. VARILLY, *An introduction to noncommutative geometry*, vol. 4, European Mathematical Society, 2006.
- [122] A. VISTOLI, *Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory*. <http://homepage.sns.it/vistoli/descent.pdf>.
- [123] J. WATTS AND S. WOLBERT, *Diffeological coarse moduli spaces of stacks over manifolds*, 2014.
- [124] C. A. WEIBEL, *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1994.
- [125] J. WŁODARCZYK, *Decomposition of birational toric maps in blow-ups and blow-downs*, Transactions of the American Mathematical Society, 349 (1997), pp. 373–411.
- [126] ———, *Birational cobordisms and factorization of birational maps*, arXiv preprint math/9904074, (1999).
- [127] P. XU, *Momentum maps and Morita equivalence*, Journal of Differential Geometry, 67 (2004), pp. 289–333.

**Titre :** Compactification des espaces de modules en géométrie torique quantique.

**Mot clés :** Géométrie torique, espace de modules, champs analytiques, compactification, géométrie birationnelle.

**Résumé :** Le but de cette thèse est de continuer l'étude des champs toriques quantiques introduits par L.KATZARKOV, E.LUPERCIO, L.MEERSSEMAN, A.VERJOVSKY. Ce sont des champs analytiques d'Artin définis grâce aux recollements, décrits par les cônes (non nécessairement rationnels) d'un éventail de  $\mathbb{R}^d$ , de quotients d'un espace affine par un sous-groupe finiment engendré de  $\mathbb{R}^d$ . Contrairement aux variétés toriques qui sont rigides à cause de la rationalité des éventails les définissant, les champs toriques quantiques peuvent être déformés continûment. Dans leurs articles, ils ont étendu l'équivalence géométrie-combinatoire des variétés toriques aux champs toriques quantiques définis par un éventail simplicial. En utilisant cela, ils ont défini et étudié les espaces de modules des champs toriques à combinatoire de l'éventail fixé.

Dans un premier temps, nous montrons que ces espaces de modules sont le quotient d'un ouvert semi-algébrique par un groupe fini et qu'ils sont la base d'une famille universelle de champs toriques quantiques. Nous proposons ensuite une construction d'une compactification combinatoire de ces espaces de modules, grâce à un plongement dans une variété grassmannienne, avec une extension de la famille universelle qui est décrite par les dégénérescences de la combinatoire initiale.

Dans un deuxième temps, nous étendons la construction de champs toriques quantiques à des éventails quelconques et montrons que cela étend l'équivalence géométrie-combinatoire précédemment citée. Grâce à cela, nous pouvons utiliser les éventails secondaires introduits par I.GELFAND, M.KAPRANOV, A.ZELEVINSKY dans le cadre quantique. Cela permet de décrire des passages de murs entre champs toriques quantiques de combinatoire différente. Cela définit donc des morphismes birationnels entre eux (que l'on peut aussi décrire de façon combinatoire). La souplesse du cadre quantique nous permet même d'obtenir des familles continues entre deux champs toriques reliés par un passage de murs qui passe par un champ torique donné par un éventail non-simplicial (le « mur »).

Tout cela nous permet de définir un « espace de modules augmenté » défini par deux paramètres : le premier paramétrant les générateurs des cônes de l'éventail (lorsqu'on le fixe, on bouge dans l'éventail secondaire) et le deuxième paramétrant la combinatoire (lorsqu'on le fixe, on bouge dans les espaces de modules). Le travail sur la compactification des espaces de modules nous permet aussi de compactifier cet espace de modules augmenté avec sa famille universelle.

**Title:** Compactification of moduli spaces in quantum toric geometry.

**Keywords:** Toric geometry, moduli spaces, analytic stacks, compactification, birational geometry.

**Abstract:** This thesis aims to continue the study of quantum toric stacks introduced by L.KATZARKOV, E.LUPERCIO, L.MEERSSEMAN, A.VERJOVSKY. These are Artin analytic stacks defined by gluings, described by the (not necessarily rational) cones of a fan of  $\mathbb{R}^d$ , of quotients of an affine space by a finitely generated subgroup of  $\mathbb{R}^d$ . Unlike toric varieties which are rigid because of the rationality of the fans defining them, quantum toric stacks can be deformed continuously. In their papers, they extended the geometric-combinatorial equivalence of toric varieties to quantum toric stacks defined by a simplicial fan. Using this, they defined and studied moduli spaces of toric stacks with fixed fan combinatorics.

First, we show that these moduli spaces are the quotient of a semi-algebraic open subset by a finite group and that they are the basis of a universal family of toric quantum stacks. We then propose a construction of a combinatorial compactification of these moduli spaces, thanks to an embedding in a Grassmannian manifold, with an extension of the universal family which is described by the degeneracies of the initial combinatorics.

In a second step, we extend the construction of toric quantum stacks to an arbitrary fan and prove that this extends the geometry-combinatorics equivalence previously mentioned. Thanks to this, we can use the secondary fans introduced by I.GELFAND, M.KAPRANOV, A.ZELEVINSKY in the quantum framework. This allows us to describe wall-crossings between toric quantum stacks of different combinatorics. Thus this defines birational morphisms between them (which can also be described combinatorially). The flexibility of the quantum framework even allows us to get continuous families between two toric stacks connected by a wall-crossing which passes through a toric quantum stack given by a non-simplicial fan (the "wall").

All this allows us to define an "augmented moduli space" defined by two parameters: the first one parametrizing the generators of the fan cones (when fixed, we move in the secondary fan) and the second one parametrizing the combinatorics (when fixed, we move in the moduli spaces). The work on the compactification of moduli spaces also allows us to compactify this augmented moduli space with its universal family.