



HAL
open science

Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets

Rym Smai

► **To cite this version:**

Rym Smai. Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets. Physique mathématique [math-ph]. Université d'Avignon, 2022. Français. NNT : 2022AVIG0424 . tel-04006896

HAL Id: tel-04006896

<https://theses.hal.science/tel-04006896v1>

Submitted on 27 Feb 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT D'AVIGNON UNIVERSITÉ

École Doctorale n° 536
Agrosciences et Sciences

Mention de doctorat :

Laboratoire de Mathématiques d'Avignon

Présentée par
Rym Smaï

Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets

Soutenue publiquement le 16/11/2022 devant le jury composé de :

Charles FRANCES	Professeur	Université de Strasbourg	Rapporteur
Francesco BONSANTE	Professeur	Università degli Studi di Pavia	Rapporteur
Thierry BARBOT	Professeur	Avignon Université	Directeur de thèse



INTRODUCTION

On s'intéresse dans cette thèse aux variétés (connexes et orientées) munies d'une structure conformément plate Lorentzienne appelées *espace-temps conformément plats*. Il s'avère que les objets géométriques naturels associés à ces espaces sont les géodésiques isotropes non-paramétrées appelées *photons*. Dans cette thèse, on définit une notion de complétude des photons et on se propose de décrire les espace-temps conformément plats qui en contiennent sous certaines hypothèses de causalité.

Dans ce qui suit, nous allons introduire de manière plus précise les objets que nous venons d'évoquer. Nous discuterons des questions autour des espace-temps conformément plats et motiverons la notion de photons complets.

Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques

Dans tout ce document, on note (n, p) la signature d'une forme quadratique non-dégénérée q où n et p sont respectivement le nombre de coefficients négatifs et le nombre de coefficients positifs dans la décomposition en carrée de q .

Structure causale des espace-temps

Une métrique Lorentzienne sur une variété lisse M est la donnée d'un champ lisse de formes quadratique non-dégénérées de signature $(1, n)$ sur M . Dans ce cas, la variété M est dite *Lorentzienne*. L'intérêt pour la géométrie Lorentzienne est motivé par la théorie physique de la relativité générale selon laquelle l'espace-temps physique serait modélisé par une variété Lorentzienne. Ainsi, une grande partie du vocabulaire que nous allons introduire doit son origine à cette théorie physique. Les vecteurs tangents à une variété Lorentzienne M sont répartis dans trois classes selon

le signe de leurs normes pour la métrique Lorentzienne sous-jacente : on distingue *les vecteurs de type temps*, de norme négative, *les vecteurs lumières*, de norme nulle, et *les vecteurs de type espace*, de norme positive. Les vecteurs de type temps et lumières sont regroupés sous la terminologie *vecteurs de type causal*. Dans chaque espace tangent à M , les vecteurs de type causal forment un cône appelé *cône causal*. La variété Lorentzienne M est alors dite *temporellement orientable* si l'on peut choisir dans chaque espace tangent une composante régulière du cône causal de manière continue sur M . Dans ce cas, les vecteurs de type causal contenus dans la composante choisie seront dits *futurs* et les autres *passés*. Un *espace-temps* est une variété Lorentzienne munie d'une orientation temporelle.

Le premier exemple d'espace-temps est *l'espace de Minkowski*, modèle de la relativité restreinte. Il s'agit de l'espace affine \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme quadratique $-t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ dans le système de coordonnées associé à sa base canonique.

On peut voir l'espace-temps de Minkowski comme l'analogue Lorentzien de l'espace euclidien en géométrie Riemannienne. Il existe également deux espace-temps de courbure 1 et -1 qui jouent un rôle similaire à celui de la sphère ronde \mathbb{S}^{n+1} et de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^{n+1} en géométrie Riemannienne, à savoir *l'espace de Sitter* $dS_{1,n}$ et *l'espace anti-de Sitter* $AdS_{1,n}$. Les espace-temps $\mathbb{R}^{1,n}$, $dS_{1,n}$ et $AdS_{1,n}$ sont les modèles Lorentziens de courbure constante : tout espace-temps de courbure constante est localement modelé sur l'un de ces espace-temps modèles.

L'une des questions posée par les physiciens est de comprendre la causalité de l'espace-temps physique, plus précisément de déterminer les événements qui peuvent influencer un événement donné. Cela se traduit mathématiquement par déterminer les points d'un espace-temps M qui peuvent être reliés à un point donné par une courbe causale, c'est à dire une courbe dont tous les vecteurs tangents sont de type causal. Tout ce qui est relatif aux relations de causalité entre les points d'un espace-temps M constitue ce que l'on appelle **la structure causale** de M . On définit, dans ce cadre, *le futur* (resp. *passé*) d'un point p de M comme l'ensemble des points de M reliés à p par une courbe causale future (resp. passée). L'intersection du futur d'un point avec le passé d'un autre point s'avèrera être un objet causal important appelé *diamant*.

L'étude de la causalité des espace-temps a été développée en grande partie vers la fin des années 60 et dans les années 70 par Geroch, Choquet-Bruhat, Penrose, Kronheimer, Hawking, Sachs et d'autres (voir par exemple [29, 25, 21]) et collectée principalement dans les livres de Beem-Ehrlich [9], Hawking-Ellis [26] et O'Neill [35]. Nous rappelons les principales notions de causalité d'un espace-temps dans l'Annexe B de ce document.

L'un des concepts relatif à la causalité, au cœur de notre travail, est celui de **frontière causale** d'un espace-temps, introduit par Geroch, Kronheimer et Penrose dans [21]. L'idée est d'attacher à un espace-temps M les points à l'infini des courbes causales inextensibles. Les extrémités futures à l'infini formeront la frontière causale future de M et les extrémités passées à l'infini, la frontière causale passée de M . L'union de M et de ses frontières causales, future et passée, est **le complété causal** de M . Il s'avère que la structure causale de M s'étend naturellement à son complété causal. Dans l'Annexe C nous donnons une définition précise de la frontière causale et nous

décrivons sa topologie et sa structure causale dans le cadre particulier des espace-temps globalement hyperboliques que l'on introduit dans le paragraphe suivant.

Une hiérarchisation des propriétés causales des espace-temps s'est dégagée de la théorie de la causalité développée dans les années 70. La plus importante et la plus forte d'entre elles est l'**hyperbolicité globale**. Celle-ci apparaît naturellement lors de la résolution des équations d'Einstein (nous renvoyons le lecteur curieux vers [] pour plus de détails à ce sujet). Il existe différentes définitions équivalentes de l'hyperbolicité globale. La première, due à Leray [32], déclare qu'un espace-temps M est *globalement hyperbolique* s'il n'y a pas de courbes causales qui se referment dans M et si tous les diamants de M sont compacts. Un résultat classique de Geroch affirme que, de manière équivalente, M est globalement hyperbolique s'il existe une hypersurface Riemannienne plongée S dans M qui rencontre toute courbe causale inextensible en exactement un point. Une telle hypersurface est appelée *hypersurface de Cauchy*. Si de plus, S est compacte, M est dit *Cauchy-compact*. On peut alors définir pour les espace-temps globalement hyperboliques, une notion naturelle de maximalité qui préserve leurs structures causales : on dira qu'un espace-temps globalement hyperbolique M avec pour hypersurface de Cauchy S est **maximal** si c'est le plus grand espace-temps pour *l'inclusion qui préserve S comme hypersurface de Cauchy*. Nous reviendrons plus précisément sur cette notion un peu plus tard. On emploiera l'abréviation GHMC pour désigner les espace-temps globalement hyperboliques maximaux Cauchy-compact.

L'intérêt pour les espace-temps GHMC de courbure constante s'est manifesté dans les années 90 avec les travaux de Mess et de Scannell. En 1990, Mess classifia les espace-temps GHMC plats et ceux de courbure constante négative en dimension 3 dans une prépublication qui n'a été publiée qu'en 2007 (voir [33]), et en 1996 Scannell classifia les espace-temps GHMC de courbure constante positive en toute dimension. Les travaux de Mess furent ensuite généralisés à toute dimension par Barbot [4] et Bonsante [15].

Une continuité naturelle de ces travaux est d'étudier les espace-temps GHMC *conformément plats*.

Structures conformes et structures conformément plates

Étant donné un espace-temps (M, g) , on peut considérer la classe conforme de sa métrique Lorentzienne g , c'est à dire l'ensemble des métriques $e^f g$ où f décrit l'ensemble des fonctions lisses de M dans \mathbb{R} , notée $[g]$. La variété M munie de la classe conforme de g est alors *un espace-temps conforme*. Il existe en géométrie Lorentzienne conforme un espace "universel" muni d'une structure conforme canonique, qui joue le rôle de la sphère conforme en géométrie Riemannienne. Il s'agit de l'**univers d'Einstein** $Ein_{1,n}$. Topologiquement, $Ein_{1,n}$ est le produit $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^n$. La structure conforme canonique est celle associée à la métrique Lorentzienne $-d\theta^2 + d\sigma^2$ où $d\theta^2$ et $d\sigma^2$ sont les métriques rondes sur \mathbb{S}^1 et \mathbb{S}^n . Le groupe de transformations conformes de $Ein_{1,n}$ est $O(2, n+1)$. À l'instar des modèles Riemanniens de courbure constante qui se plongent conformément dans la sphère \mathbb{S}^{n+1} , les trois modèles Lorentziens de courbure constante se plongent conformément dans $Ein_{1,n}$, ce qui justifie le caractère universel de $Ein_{1,n}$.

Parmi les espace-temps conformes, on distingue ceux qui sont *conformément plats*,

c'est à dire les espace-temps M dont chacun des points admet un voisinage conformément isométrique à un ouvert de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$. Un théorème de rigidité dû à Liouville implique qu'en dimension au moins 3, les espace-temps conformément plats sont munis d'une structure géométrique localement modelée sur $Ein_{1,n}$, ou plus exactement sur son revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme l'espace de Minkowski se réalise comme un ouvert de $Ein_{1,n}$, la réciproque est, quant à elle, toujours vraie. En particulier, les espace-temps de courbure constante sont conformément plats.

La structure causale est un invariant conforme. En effet, comme la multiplication par un scalaire positif ne change pas le signe de la norme d'un vecteur, la nature des vecteurs tangents est préservée par les changements conformes de métriques. Il y a donc bien du sens à parler de la structure causale d'un espace-temps conforme. D'un point de vue causal, on ne fait pas de distinction entre deux espace-temps conformément isométriques.

On distingue dans un espace-temps trois types de géodésiques suivant la nature des vecteurs tangents. Celles-ci ne sont à priori pas préservées par les changement conformes de métriques. Cependant, les géodésiques lumières le sont en tant que lieux géométriques (voir [20]). On appelle **photon** une géodésique lumière inextensible.

Ainsi, les objets géométriques naturels de la structure causale d'un espace-temps conformément plat sont les photons. Nous nous intéressons ici à décrire la structure causale des espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux. Précisons d'abord ce que nous entendons par maximal dans le contexte conforme.

Maximalité

Historiquement, la question de la maximalité d'un espace-temps globalement hyperbolique s'est présentée naturellement dans le contexte de la résolution des équations d'Einstein comme un problème d'extension d'une solution locale d'une EDP en une solution globale (voir [41]). Nous développons un peu plus en détails cet aspect historique dans l'Annexe B.7. Quoiqu'il en soit, la question est la suivante : étant donné un espace-temps globalement hyperbolique M et une hypersurface de Cauchy S dans M , peut-on étendre M en un espace-temps plus grand dans lequel S serait encore une hypersurface de Cauchy ? Cette question se formalise de la manière suivante.

Étant donné deux espace-temps globalement hyperboliques M et N , une application f de M dans N est *un plongement de Cauchy* si f est un plongement *isométrique* qui envoie une hypersurface de Cauchy de M sur une hypersurface de Cauchy de N . Dans ce cas, on dit que N est *une extension de Cauchy de M* . Un espace-temps globalement hyperbolique M est alors dit *maximal* si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps globalement hyperbolique est surjectif.

La réponse à la question de l'existence d'une extension maximale a été apportée dans les années 70 par Choquet-Bruhat et Geroch [41] pour les espace-temps globalement hyperboliques solutions des équations d'Einstein dans le sens suivant.

La famille des espace-temps solutions des équations d'Einstein forment une catégorie \mathcal{C} d'espace-temps dite *rigide* (voir Définition B.7.4). Dire qu'un espace-temps M

de \mathcal{C} est maximal au sein de cette catégorie signifie que tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps de \mathcal{C} est surjectif. On dira alors que M est \mathcal{C} -maximal. Choquet-Bruhat et Geroch montrent que tout espace-temps dans la catégorie \mathcal{C} admet une \mathcal{C} -extension maximale. Le fait que la catégorie \mathcal{C} soit rigide leur permet de montrer de plus que cette extension est unique à isométrie près. Il s'avère que ce résultat de Choquet-Bruhat et Geroch se généralise à d'autres catégories rigides d'espace-temps (les espace-temps munis d'une structure géométrique en sont un exemple).

La notion de maximalité a été étendue aux espace-temps conformes par Rossi dans [38] en remplaçant les plongements isométriques par des plongements conformes dans la définition des Cauchy-plongements. On parle alors de **C-maximalité** (avec un C droit pour conforme, à ne pas confondre avec la \mathcal{C} -maximalité où \mathcal{C} désigne une catégorie d'espace-temps). Rossi définit également la **\mathcal{C}_0 -maximalité** comme la C-maximalité au sein de la catégorie \mathcal{C}_0 des espace-temps conformément plats.

Étant donné un espace-temps conformément plat M , on dispose ainsi de deux notions de maximalité : la C-maximalité et la \mathcal{C}_0 -maximalité. Examinons le lien entre elles.

Il est clair que si M est C-maximal, il est \mathcal{C}_0 -maximal (en effet, si M est maximal, au sens conforme, parmi tous les espace-temps *conformes* globalement hyperboliques, il l'est en particulier parmi les espace-temps *conformément plats* globalement hyperboliques). À priori, il n'y a pas de raisons que la réciproque soit vraie. Rossi montre qu'en fait elle est vraie (voir [37, Chap. 7, Corollaire 2.8]). Dorénavant, on pourra donc dire simplement qu'un espace-temps conformément plat est maximal (en gardant toutefois à l'esprit que c'est au sens conforme). Rossi montre de plus que tout espace-temps conformément plat admet une extension maximale, unique à isométrie conforme près.

Sa preuve repose sur la notion *d'ombre* sur une hypersurface de Cauchy S de M . Étant donné un point p de M , l'ombre de p sur S est l'ensemble des points de S reliés à p par une courbe causale. On montre que c'est un compact de S . Il s'avère que les points d'un espace-temps globalement hyperbolique sont caractérisés par leurs ombres sur une hypersurface de Cauchy : deux points de M sont égaux si et seulement si leurs ombres sur S coïncident. Cela permet d'identifier M à un sous-ensemble de compacts de S . Il s'agit alors de compléter ce sous-ensemble par des compacts appropriés de sorte que l'ensemble de compacts de S obtenu corresponde à l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M .

Le fait que l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M soit C-maximale repose sur le critère suivant :

Critère 0.0.1. Un espace-temps conforme globalement hyperbolique d'hypersurface de Cauchy Σ est C-maximal si pour tout point p de sa frontière causale, l'ombre¹ de p sur Σ n'est pas compacte.

Les extensions maximales respectent-elles l'inclusion ? Nous nous posons la question suivante.

1. Comme la structure causale de M s'étend à celle de son complété causal, on peut encore définir l'ombre d'un point p du complété causal de M sur S comme l'ensemble des points de S reliés à p par une courbe causale du complété causal de M .

Soient M et N deux espace-temps conformes globalement hyperboliques et soit f un plongement conforme (pas forcément de Cauchy!) de M dans N .

Si M et N admettent des extensions C -maximales \hat{M} et \hat{N} respectivement, existe-t-il un plongement conforme de \hat{M} dans \hat{N} ?

Cette question peut sembler triviale mais elle est plus subtile qu'elle n'y paraît. En effet, le plongement f ne préserve pas, à priori, la structure causale des espace-temps M et N et n'a donc aucune raison d'induire un plongement entre les extensions maximales.

Nous ne savons pas encore répondre à cette question avec ce degré de généralité mais nous y donnons une réponse affirmative lorsque M et N sont des espace-temps conformément plats et que l'image de f est un ouvert *causalement convexe* de N , c'est à dire un ouvert U tel que toute courbe causale de N reliant deux points de U est contenue dans U :

Théorème 0.0.1. *Soient V un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique et U un ouvert causalement convexe de V . Alors, l'extension C_0 -maximale de U se plonge conformément dans celle de V .*

Nous démontrons ce théorème dans la Section 5.2 du Chapitre 5. Donnons les grandes lignes de la preuve dans le cas où V est développable. Le cas non-développable s'en déduira en passant au revêtement universel et en quotientant par des groupes appropriés.

L'idée principale est d'associer à V un espace-temps conformément plat $E(V)$ admettant une fibration triviale de rang 1 sur une variété \mathcal{B} localement modelée sur la sphère \mathbb{S}^n , dans lequel V se plongera et qui contiendra l'extension C_0 -maximale de V . L'intérêt de ce fibré est de réaliser les extensions C_0 -maximales de U et de V dans un même espace-temps, ce qui nous permettra de les comparer. Le fibré $E(V)$ permettra par ailleurs, de donner une autre preuve de l'existence et de l'unicité (à isométrie conforme près) de l'extension C_0 -maximale d'un espace-temps conformément plat.

Maximalité et fonctions eikonales. Un autre intérêt du fibré $E(V)$ est qu'il permet de redémontrer aisément l'équivalence entre la C_0 -maximalité et la C -maximalité.

L'ingrédient central de la preuve est la caractérisation *des ouverts causalement convexes maximaux* de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ présentée dans la Section 5.3 du Chapitre 5. Nous montrerons que ce sont exactement les domaines compris entre les graphes de deux fonctions 1-Lipschitz de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} qui s'expriment, grosso modo, comme la distance à un fermé de la sphère \mathbb{S}^n (voir Proposition 5.3.1). Ces fonctions présentent de grandes similitudes avec les fonctions eikonales² de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Par analogie, nous les appellerons *fonctions eikonales sur la sphère*.

Il s'avère que la propriété d'être eikonale sur la sphère est *locale* (voir Proposition 5.3.3). Cela nous permettra d'étendre cette notion aux fonctions définies sur une variété localement modelée sur la sphère \mathbb{S}^n à valeurs dans \mathbb{R} . On montrera alors que, comme dans

2. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite eikonale si elle est différentiable presque partout et satisfait l'équation eikonale $\|\nabla f\| = 1$ en les points où elle est différentiable. Les fonctions $x \mapsto d(x, C)$ où C est un ouvert à bord assez régulier de \mathbb{R}^n en sont des exemples.

$\widetilde{Ein}_{1,n}$, les ouverts causalement convexes globalement hyperboliques³ du fibré $E(V)$ sont exactement les domaines compris entre les graphes de deux fonctions eikonales f^+ et f^- de \mathcal{B} dans \mathbb{R} . Cette caractérisation permettra de réaliser la frontière causale de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de V dans le fibré $E(V)$: la frontière causale future correspondra au graphe de la fonction eikonale f^+ et la frontière causale passée au graphe de la fonction eikonale f^- . La \mathcal{C} -maximalité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de V se déduira alors facilement du Critère 0.0.1.

Nous présentons dans la section suivante une application du Théorème 0.0.1.

Voisinages canoniques

Décrire la structure conformément plate d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique M revient à décrire la développante et la représentation d'holonomie.

Assiettes de la développante. Supposons que M est développable et soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. Puisque D est un difféomorphisme local, il est naturel d'essayer de trouver des ouverts pertinents de M sur lesquels la développante est injective, appelés *assiettes de la développante*.

Du point de vue causal, les candidats naturels à être des assiettes de D sont les futurs et les passés de points de M . Rossi montre que c'est effectivement le cas dans [37, Chap. 6, Prop. 2.7]. Dans le Chapitre 4, nous construisons des assiettes *causalement convexes* plus grosses qui contiennent le futur et le passé d'un point de M , nous permettant ainsi de retrouver de manière immédiate le résultat de Rossi. Plus précisément, nous montrons l'énoncé suivant :

Proposition 0.0.1. *L'union des diamants ouverts contenant un point de M est une assiette causalement convexe de M dont l'image par la développante est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

On peut voir ce résultat comme l'analogie Lorentzien du résultat de Kulkarni-Pinkall selon lequel, dans une variété Riemannienne conformément plate développable, l'union U_p des boules ouvertes contenant un point p est une assiette de la développante (voir [30, Prop. 4.1]). L'ouvert U_p est appelé dans [30] voisinage canonique de p . Par analogie, on pose la définition suivante :

Définition 0.0.1. On appelle *voisinage canonique* d'un point p de M l'union des diamants ouverts de M contenant p .

3. L'espace-temps $E(V)$ n'étant pas globalement hyperbolique, la convexité causale n'implique pas forcément l'hyperbolicité globale (voir Remarque B.5.10). C'est pour cela que nous précisons ici que les ouverts causalement convexes de $E(V)$ considérés sont globalement hyperboliques contrairement au cas de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, où les ouverts causalement convexes le sont automatiquement (voir Lemme B.5.4).

Le fait que le voisinage canonique d'un point de M repose sur l'observation clé suivante : **les diamants de M sont des assiettes qui ont pour images des diamants de $\widetilde{Ein}_{1,n}$** . Ce fait se démontre alors en utilisant un résultat classique, appelé communément le lemme des assiettes, affirmant que si U et V sont deux assiettes de la développante telles l'intersection des images est connexe, l'union $U \cup V$ est une assiette. On se ramène ainsi à montrer que l'intersection de deux diamants dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est connexe.

Il est facile de voir que le voisinage canonique d'un point p de M contient le futur et le passé de M . L'injectivité de la développante sur les futurs et passés de points de M se déduit alors directement de notre résultat.

Maximalité des assiettes. Les ouverts causalement convexes de M étant globalement hyperboliques, on peut se demander si les assiettes que nous venons d'évoquer sont maximales en tant qu'espace-temps globalement hyperboliques.

Rossi montre que lorsque M est maximal, les futurs et les passés de points sont maximaux (voir [37, Prop. 3.6]). Notre Théorème 0.0.1 sur les extensions maximales permet de redémontrer de manière plus synthétique et plus rapide ce résultat. Il permet en outre de démontrer le résultat suivant (voir Chapitre 6) :

Théorème 0.0.2. *Si M est maximal, le voisinage canonique d'un point de M est maximal.*

Photons complets. La notion de photon complet est motivée par le résultat suivant dû à Rossi.

Théorème 0.0.3 ([38, Theorem 10]). *Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal. Si M contient deux points p et q reliés par deux géodésiques lumières distinctes librement homotopes⁴ alors M est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Par analogie avec la géométrie Riemannienne, on dira qu'un espace-temps qui est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est *elliptique*. Nous montrons dans le Chapitre 5 que le théorème ci-dessus se déduit facilement du fait que les voisinages canoniques sont des assiettes de la développante (voir Propositions 4.2.3 et 5.2.4).

Dans la suite, nous nous intéresserons aux espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux dont la géométrie globale n'est pas triviale, en l'occurrence qui sont *non-elliptiques*. D'après le théorème ci-dessus, ces espace-temps ne contiennent pas de points conjugués. On pourrait toutefois imaginer qu'ils contiennent des photons sur le point de se rejoindre en deux points conjugués mais qui n'ont pas le temps de le faire dans M . C'est ce que nous appellerons **des photons complets**. Plus précisément :

Définition 0.0.2. Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal développable. Un photon de M est dit *complet* s'il se développe en une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui s'étend strictement entre deux points conjugués.

4. Les points p et q sont alors dits *conjugués*.

La définition ci-dessus porte sur les espace-temps développables mais se généralise naturellement aux espace-temps non-développables en disant qu'un photon est complet s'il se relève au revêtement universel en un photon complet.

L'espace de Minkowski est un exemple d'espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal avec des photons complets. En fait, il s'avère que tous ses photons sont complets.

Nous allons voir que *les représentations Anosov* permettent de construire des exemples avec une géométrie plus complexe.

Espace-temps conformément plats et représentations Anosov

Les représentations Anosov ont été introduites par Labourie [31] pour donner une interprétation géométrique aux éléments d'une composante particulière de l'espace des représentations du groupe fondamental d'une surface de courbure négative dans $SL_n(\mathbb{R})$. Dans [34], Guichard et Wiehnard étendent la notion de représentations Anosov aux groupes Gromov-hyperboliques et en donnent plusieurs caractérisations. En fait, il s'avère que tout groupe de type fini admettant une représentation Anosov est Gromov hyperbolique⁵. L'intérêt des représentations Anosov est l'abondance d'exemples et leurs liens étroits avec les structures géométriques. Citons en quelques uns qui nous seront utiles par la suite.

Sous-groupes convexe cocompacts de $O(1, n)$. Un sous-groupe discret Γ de $O(1, n)$ est dit *convexe cocompact* s'il agit sur un convexe C de \mathbb{H}^n de manière proprement discontinue et cocompacte (cela signifie que le quotient de C par Γ est compact). De manière équivalente, Γ est convexe cocompact si son domaine de discontinuité Ω_Γ est cocompact, c'est à dire si le quotient Γ/Ω_Γ est compact. Il s'avère que les sous-groupes convexes cocompacts de $O(1, n)$ sont exactement ceux pour lesquels l'inclusion canonique dans $O(1, n)$ est Anosov (voir [34, Theorem 1.8]).

En rang supérieur, les représentations Anosov apparaissent à divers égards comme une généralisation des groupes convexes cocompacts. Ce point de vue a été développé dans les travaux de plusieurs auteurs, à savoir Guichard et Wiehnard [34], Danciger, Guéritaud et Kassel [17], Barbot et Mériçot [6, 8] et d'autres.

Liens avec la géométrie Lorentzienne. Dans [6, 8], Barbot et Mériçot mettent en évidence un lien étroit entre certaines représentations Anosov dans $O(2, n + 1)$ et les espace-temps GHCM de courbure constante négative. Ils définissent une notion de représentation quasi-Fuchsienne d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ dans $O(2, n + 1)$: une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow O(2, n + 1)$ est quasi-Fuchsienne si elle est fidèle, discrète, préserve

5. Ce fait découle des travaux de Kapovitch-Leeb-Porti [28]. Il a été redémontré par la suite de manière plus élémentaire par Bochi-Potri-Sambarino dans [13, Sections 3 et 4].

une n -sphère topologique acausale⁶ dans $Ein_{1,n}$ et si l'espace-temps globalement hyperbolique de courbure constante négative associé à ρ est Cauchy-compact. Ils montrent que les représentations quasi-Fuchsienues dans $O(2, n + 1)$ sont Anosov. Réciproquement, ils prouvent que toute représentation Anosov $\rho : \Gamma \rightarrow O(2, n + 1)$ qui préserve une n -sphère topologique acausale dans $Ein_{1,n}$ est l'holonomie d'un espace-temps GHCM localement modelé sur $AdS_{1,n+1}$.

En résumé, le caractère Anosov d'une représentation ρ d'un groupe Gromov hyperbolique Γ dans $O(2, n + 1)$, fidèle et discrète qui préserve une sphère topologique acausale de dimension n dans $Ein_{1,n}$ se traduit géométriquement par la compacité des hypersurfaces de Cauchy d'un espace-temps globalement hyperbolique localement modelé sur $AdS_{1,n+1}$ dont ρ est l'holonomie.

Dans [40], on généralise ce résultat de Barbot-Méridot à deux égards. D'une part, notre résultat porte sur la classe plus large des représentations Anosov d'un groupe Gromov-hyperbolique dans $O(2, n + 1)$ préservant un fermé acausal de $Ein_{1,n}$ qui n'est pas une sphère topologique de dimension n (le cas où c'est une sphère est donné par le théorème de Barbot-Méridot). D'autre part, on établit un lien entre ces représentations et la catégorie plus large des espace-temps conformément plats. Le résultat principal de [40] qui nous sera utile pour construire des exemples d'espace-temps avec des photons complets est le suivant :

Théorème 0.0.4 ([40, Theorem 5.1]). *Soit $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n + 1)$ une représentation P_1 -Anosov⁷ d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ . On suppose que l'ensemble limite Λ_Γ est acausal dans $Ein_{1,n}$ et que ce n'est pas une sphère topologique de dimension n . Alors, ρ est l'holonomie d'un espace-temps $M_\rho(\Gamma)$ conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal de dimension $(n + 1)$.*

Dans [40, Theorem 6.1], on établit également un lien entre ces représentations et les trous noirs BTZ [3, 2] mais nous n'aurons pas besoin de développer pas cet aspect ici.

La preuve du Théorème 0.0.4 consiste à associer à l'ensemble limite un ouvert causalement convexe maximal $\Omega(\Lambda_\Gamma)$ de $\widehat{Ein}_{1,n}$ qui apparaît dans de nombreux articles sous la terminologie *domaine invisible de Λ_Γ* (voir par exemple [1], [6], [8]).

Les propriétés dynamiques des représentations Anosov permettent de montrer que $\rho(\Gamma)$ agit de manière libre et proprement discontinue sur $\Omega(\Lambda_\Gamma)$. Le quotient $\Omega(\Lambda_\Gamma)$ par $\rho(\Gamma)$ est alors un espace-temps conformément plat, noté $M_\rho(\Gamma)$. On montre sans trop de difficulté que l'hyperbolicité globale et la maximalité de $\Omega_\rho(\Gamma)$ passent au quotient.

Le point délicat de la preuve consiste à montrer que $M_\rho(\Gamma)$ est Cauchy-compact. L'idée clé est que l'espace des photons d'un espace-temps globalement hyperbolique est homéomorphe au fibré unitaire tangent d'une de ses hypersurfaces de Cauchy. La Cauchy-compacité s'obtient alors à partir d'un résultat de Guichard-Kassel-Wienhard [24, Theorem 4.1] que nous reformulons ici dans le contexte Lorentzien. Leur théorème stipule que

6. Un sous-ensemble A d'un espace-temps M est acausal si deux points distincts de A ne peuvent être reliés par une courbe causale dans M .

7. Nous donnons une définition précise des représentations P_1 -Anosov dans le Chapitre 7.

toute représentation P_1 -Anosov d'un groupe Gromov-hyperbolique dans $O(2, n + 1)$ agit de manière proprement discontinue et cocompacte sur l'espace des géodésiques causales⁸ qui évitent l'ensemble limite Λ_Γ . Ce résultat est énoncé dans [24] pour des représentations P_1 -Anosov dans $O(p, q)$ quelque soient les entiers p et q .

Une des applications du Théorème 0.0.4 est de fournir des exemples d'espace-temps GHMC conformément plats avec des photons complets :

Exemples. On met en évidence deux familles d'exemples que l'on a intitulé : *trous noirs-trous blancs* et *extensions de domaines de Misner*.

Trou noir-trou blanc. On appelle *trou noir-trou blanc* tout espace-temps $M_\rho(\Gamma)$ conformément plat GHCM associé à une représentation P_1 -Anosov $\rho : \Gamma \rightarrow O(2, n + 1)$ d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ telle que :

1. ρ fixe un point p de $E_{in_{1,n}}$;
2. l'ensemble limite $\Lambda_\rho(\Gamma)$ est un fermé acausal de $E_{in_{1,n}}$ qui n'est pas une $(n - 1)$ -sphère topologique et qui est contenu dans le cône lumière de p .

Ces espace-temps sont décrits dans la Section 7.2.1 du Chapitre 7. On verra qu'un trou noir-trou blanc est l'union de deux ouverts causalement convexes maximaux B et W séparés par *des horizons de photons complets*.

Les photons passant par un point de B ne peuvent s'en échapper qu'en traversant l'un des horizons complets dans le passé et ne peuvent s'en échapper dans le futur. L'ouvert B est ainsi interprété comme un trou noir (il est noté B pour *black hole*).

De manière symétrique, les photons passant par un point de W ne peuvent s'en échapper qu'en traversant l'un des horizons complets dans le futur et ne peuvent s'en échapper dans le passé. L'ouvert W est alors interprété comme un trou blanc (il est noté W pour *white hole*). Cette description justifie le choix de la terminologie trou noir-trou blanc.

Domaines de Misner. On définit dans la Section 7.1 la notion de *domaines de Misner de l'univers d'Einstein* : un domaine de Misner d'indice k de $\widetilde{E}_{in_{1,n}}$ est l'ensemble des points de $\widetilde{E}_{in_{1,n}}$ qui ne sont causalement reliés à aucun point d'une sphère conforme de dimension $\ell = n - k - 1$ avec $0 \leq \ell \leq n - 2$. Cette notion est, dans un certain sens, une généralisation de la notion de domaines de Misner de l'espace de Minkowski introduite par Barbot [4] dans son étude des espace-temps GHMC plats.

On montre que les domaines de Misner de $\widetilde{E}_{in_{1,n}}$ sont des ouverts causalement convexes maximaux de $\widetilde{E}_{in_{1,n}}$ qui contiennent une infinité de photons complets. Ce sont donc des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets.

On se pose la question suivante :

8. Cet espace est constitué des géodésiques de type temps et celles de type lumière de $AdS_{1,n+1}$, et des géodésiques lumières de son bord conforme $E_{in_{1,n}}$.

Soit Γ un sous-groupe discret de $O(2, n + 1)$ qui préserve un domaine de Misner de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Existe-il un ouvert causalement convexe maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ invariant par Γ qui contient ce domaine de Misner ?

La réponse est oui ! Les représentations Anosov permettent de construire des exemples de tels ouverts que l'on appellera **extensions de Misner**.

Plus précisément, une *extension de Misner* est un espace-temps $M_\rho(\Gamma)$ conformément plat GHCM associé à une représentation P_1 -Anosov $\rho : \Gamma \rightarrow O(2, n + 1)$ d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ définie par la donnée :

1. d'une représentation convexe cocompacte $\rho_\ell : \Gamma \rightarrow O_0(1, \ell + 1)$,
2. d'une représentation $\rho_k : \Gamma \rightarrow O_0(1, k + 1)$ dont l'image est contenue dans un compact de $O_0(1, k + 1)$,

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = \ell + k + 1$.

Ces espace-temps sont décrits dans la Section 7.2.2 du Chapitre 7.

Photons complets

On souhaite décrire les photons complets au sein d'un espace-temps M conformément plat globalement hyperbolique maximal développable non-elliptique qui en contient.

On se propose d'abord de décrire les photons complets qui ont la même extrémité future p dans la frontière causale future de M . Par symétrie, le raisonnement est similaire dans le passé.

Il s'avère que ces photons complets sont codés par la sphère des directions lumières en p , notée $S(p)$. On distingue deux types de directions dans $S(p)$:

1. les directions tangentes à un photon passé issu de p qui rentre dans M ;
2. les directions tangentes à un photon passé issu de p qui reste dans la frontière causale de M .

Les directions du premier type forment un ouvert $H(p)$ de la sphère $S(p)$ et celles du second type, un fermé $T(p)$ de $S(p)$. L'ouvert $H(p)$ est le complémentaire de $T(p)$ dans $S(p)$ et est, à priori, l'union de plusieurs composantes connexes. Chacune d'entre elles est appelée **horismos**. On montre dans le Chapitre 8 la proposition clé suivante.

Proposition 0.0.2. *Soit $H \subset H(p)$ un horismos. Si H contient une direction tangente à un photon **complet** alors c'est le cas pour toutes les directions de H .*

Cela motive la définition suivante.

Définition 0.0.3. Un horismos $H \subset H(p)$ est dit *complet* si toute direction de H est tangente à un photon complet de M .

D'après la proposition ci-dessus, il suffit qu'un horismos contienne une direction tangente à un photon complet pour qu'il soit complet. Ce résultat est central car il implique

que tout photon complet de M est contenu dans une hypersurface plongée achronale de M feuilletée par des photons complets qui ont tous la même extrémité future et la même extrémité passée dans la frontière causale de M , que nous appelons **horizon complet de M** (voir Lemme 8.2.2). En particulier, ce fait nous dit qu'un photon complet n'est jamais isolé puisqu'il est toujours accumulé par les photons complets de son horizon. On dira alors qu'un photon complet φ de M est **accumulé non-trivialement** par une suite $\{\varphi_i\}$ de photons complets de M si les photons φ_i s'accumulent sur φ et que les extrémités futures (resp. passées) des φ_i dans la frontière causale de M sont deux à deux distinctes.

En résumé, nous montrons que les photons complets de M sont répartis dans des horizons complets définis par les horismos complets des points de la frontière causale de M . Une des questions que l'on peut se poser est de comprendre comment ces horizons complets se positionnent les uns par rapport aux autres. Une stratégie est de déterminer les propriétés satisfaites par les points de la frontière causale qui sont extrémités d'un photon complet.

Un point p de la frontière causale future de M est caractérisé par son passé strict⁹ dans M . Il s'avère que celui-ci est conformément équivalent à un domaine régulier futur¹⁰ $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{R}^{1,n}$ au sens de [14]. On montre que ce dernier est défini par un sous-ensemble canonique $\Lambda(p)$ du bord de Penrose¹¹ de $\mathbb{R}^{1,n}$. Il existe des liens étroits entre le fermé $T(p)$ de la sphère des directions lumières $S(p)$ et le sous-ensemble $\Lambda(p)$ que nous décryptons dans la Section 6.2 du Chapitre 6. Notre démarche était de chercher des propriétés de $\Lambda(p)$ et de $T(p)$ lorsque p est l'extrémité d'un photon complet.

Un cas particulier est lorsque $T(p)$ est réduit à une direction. Un tel point p est dit *complet élémentaire*. Notons que dans ce cas, $H(p)$ est connexe, autrement dit c'est un horismos. De plus, il est complet puisqu'il contient la direction tangente au photon complet φ . Dans ce cas, l'espace-temps M est complètement déterminé :

Théorème 0.0.5. *S'il existe un point de la frontière causale de M qui est complet élémentaire alors M est conformément équivalent à l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ ou à un demi-espace strict de $\mathbb{R}^{1,n}$ délimité par un hyperplan affine isotrope.*

Supposons que M n'admette pas de points complets élémentaires dans sa frontière causale. Dans la Section 8.4, nous montrons qu'une condition nécessaire pour qu'un photon complet φ de M soit accumulé non-trivialement par une suite de photons complets est que l'extrémité de φ dans la frontière causale future soit *aplatie* au sens de la définition suivante :

Définition 0.0.4. Un point de la frontière causale de M est **aplati** si $T(p)$ ou $\Lambda(p)$ est contenu dans le bord d'une hémisphère de $S(p)$.

9. Dans [21], le passé strict de p dans M est appelé TIP (il s'agit de l'acronyme de *Terminal Indecomposable Past set*). De manière symétrique, si p est un point de la frontière causale *passée*, son futur strict dans M est appelé TIF (pour *Terminal Indecomposable Future set*).

10. Un domaine régulier futur de $\mathbb{R}^{1,n}$ est l'intersection de demi-espaces futurs délimités par des hyperplans affines isotropes.

11. Il s'agit de la frontière de $\mathbb{R}^{1,n}$ dans la compactification conforme définie par Penrose dans [36].

Théorème 0.0.6. *Si φ est un photon complet accumulé non-trivialement par une suite de photons complets alors l'extrémité p de φ dans la frontière causale future est aplatie.*

On désigne par B une hémisphère de $S(p)$ qui contient $\Lambda(p)$ ou $T(p)$ dans son bord. Nous verrons dans la Section 8.4 qu'il résulte de cet énoncé trois situations possibles.

1^{re} **situation :** $T(p) \subsetneq \partial B$. Dans ce cas, $H(p)$ est connexe et complet et $T(p)$ est son bord. Le point p est dit *complet dégénéré*.

2^e **situation :** $T(p) = \partial B$. Dans ce cas $T(p)$ déconnecte la sphère $S(p)$ en deux horismos dont l'un au moins est complet (il s'agit de l'horismo contenant la direction du photon complet φ). Si les deux horismos sont complets, p est dit *bicéphale bicomplet*.

3^e **situation :** $T(p)$ est l'hémisphère fermée $S(p) \setminus \text{int} B$. Dans ce cas, $H(p)$ est l'hémisphère complète B .

Dans la première situation, le point p définit un seul horizon complet \mathcal{H} . On montre alors que :

Théorème 0.0.7. *Si M admet un point p complet dégénéré dans sa frontière causale alors M est égal à l'union disjointe de l'horizon \mathcal{H} défini par p , du futur strict de \mathcal{H} et du passé strict de \mathcal{H} dans M . La développante est alors injective sur M et son image est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Ce théorème permettrait de déterminer les espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux *non-développables* et non-elliptiques dont le revêtement universel contient un point complet dégénéré dans sa frontière causale. En effet, nous conjecturons l'énoncé suivant :

Conjecture 0.0.1. *Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal non-elliptique et non-développable. Si \tilde{M} contient un point complet dégénéré dans sa frontière causale alors M est soit un trou noir-trou blanc, soit une extension de Misner.*

Nous croyons fortement que cela est vrai mais par manque de temps, nous n'avons pu démontrer qu'une version plus faible de cet énoncé (voir Section 9.2).

Dans la deuxième situation, dans le cas où p est bicéphal bicomplet, nous savons montrer que M contient *une bande de Misner d'indice 1* mais, de nouveau par manque de temps, nous n'avons pas pu en écrire la preuve. Le cas où p est bicéphale mais que l'un des horismos n'est pas complet s'avère en revanche beaucoup plus ardu. Le dernier cas reste également ouvert.

Dans l'optique de comprendre comment les horizons complets se rencontrent, une des questions que nous nous sommes posés est de décrire l'espace-temps M lorsqu'il contient deux photons complets qui se coupent. Notre démarche a été d'étudier le voisinage canonique du point d'intersection de ses deux photons complets. Ce fut d'ailleurs ce qui a motivé notre résultat sur la maximalité des voisinages canoniques. Dans ce cas également, nous avons de fortes raisons de croire que M contiendrait une bande de Misner d'indice 1.

TABLE DES MATIÈRES

1	Espaces de Minkowski	16
1.1	Généralités	16
1.2	Structure causale	23
2	Domaines réguliers	35
2.1	Espace des hyperplans lumières	35
2.2	Espace de co-Minkowski	37
2.3	Domaines réguliers	42
3	Espaces d'Einstein	52
3.1	Espaces d'Einstein	52
3.2	Structure causale	57
3.2.1	Dans $Ein_{1,n}(E)$	57
3.2.2	Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$	59
3.2.3	Achronalité	62
3.3	Ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$	65
3.3.1	Dualité et convexité causale	68
3.4	Lieux géométriques remarquables	70
3.5	Cartes de Minkowski	71
3.5.1	Structure affine conforme canonique	71
3.5.2	Lieux géométriques remarquables dans une carte de Minkowski	72
3.5.3	Transformations conformes d'une carte de Minkowski	74
3.6	Bord de Penrose	74
3.6.1	Compactification d'une carte de Minkowski dans l'espace d'Einstein	76

3.6.2	Compactification d'une carte de Minkowski dans le revêtement universel de l'univers d'Einstein.	78
3.6.3	Action du groupe conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ sur le bord de Penrose	79
3.7	Ombres sur le bord de Penrose	80
3.7.1	Ombres et lisières	81
3.7.2	Fermés saturés	83
3.7.3	Domaines réguliers	85
4	Espace-temps conformément plats globalement hyperboliques	89
4.1	Espace-temps conformément plats	89
4.1.1	(G, X) -structures	89
4.1.2	Espace-temps conformément plats	94
4.2	Hyperbolicité globale	94
4.2.1	Les diamants sont des assiettes	95
4.2.2	Assiettes causalement convexes	96
4.2.3	Applications	97
4.3	Frontière causale d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique	100
4.3.1	Complété causal d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique développable sans points conjugués	101
4.3.2	Extension de la développante au complété causal	104
5	Extensions \mathcal{C}_0-maximales	106
5.1	Fibré associé à un espace-temps conformément plat	108
5.2	Extensions \mathcal{C}_0 -maximales	111
5.2.1	Le cas développable	111
5.2.2	Le cas général	116
5.3	Fonctions eikonales sur la sphère	123
5.3.1	Ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$	124
5.3.2	Fonctions eikonales	125
5.3.3	\mathcal{C}_0 -maximalité et dualité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$	127
5.3.4	Ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux dans une carte de Minkowski	128
5.4	\mathcal{C}_0 -maximalité et \mathcal{C} -maximalité	129
5.4.1	Ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $E(M)$	129
5.4.2	Fonctions eikonales généralisées	131
5.4.3	Équivalence entre \mathcal{C}_0 -maximalité et \mathcal{C} -maximalité.	133
6	Maximalité des voisinages canoniques	134
6.1	Passés/futurs de points	134
6.1.1	Espaces de Minkowski attachés à un point de M	135
6.1.2	Maximalité	136
6.2	TIPs/TIFs	138
6.2.1	Maximalité	139

6.2.2	Photons de TIPs et horismos	140
6.3	Voisinages canoniques	145
7	Exemples	150
7.1	Domaines de Misner	150
7.2	Représentations Anosov	154
7.2.1	Trous noirs-trous blancs	155
7.2.2	Extensions de domaines de Misner	156
8	Photons complets	158
8.1	Convergence de photons	158
8.2	Horizons de photons complets	160
8.3	Diamants extrêmes	167
8.4	Accumulation non-triviale de photons complets	169
9	TIPs complets dégénérés	173
9.1	Injectivité de la développante	173
9.2	Représentations Anosov et extensions de domaines de Misner	176
9.2.1	Trous noirs-trous blancs	177
9.2.2	Extensions d'un domaine de Misner	178
A	Cônes convexes et convexes fermés d'un espace affine	182
A.1	Cônes convexes	182
A.2	Convexes fermés	185
A.3	Convexes fermés d'un espace affine et cônes convexes	187
B	Espace-temps conformes	193
B.1	Espace-temps conformes	193
B.2	Courbes causales	195
B.3	Futur, passé	197
B.4	Sous-ensembles achronaux, acausaux	199
B.5	Hyperbolicité globale	202
B.6	Développements de Cauchy	206
B.7	Extensions maximales	208
B.8	Revêtement universel d'un espace-temps conforme	212
C	Frontière causale d'un espace-temps globalement hyperbolique	215
C.1	IPs et IFs	216
C.2	Relation de causalité sur la frontière causale	220
C.3	Topologie sur la frontière causale	223
C.4	TIPs et TIFs maximaux	225
C.5	Frontière causale et maximalité	225

CHAPITRE

1

ESPACES DE MINKOWSKI

Ce chapitre introduit la notion d'*espace-temps* à travers les modèles-jouets de la relativité restreinte : les *espaces de Minkowski*. On y introduit en particulier des notions de *causalité*, à savoir *les courbes causales, les photons, le futur et le passé d'un point, les sous-ensembles achronaux et acausaux*, qui sont développées dans un cadre plus général dans l'Annexe B. Notre présentation est quelque peu différente de celle que l'on trouve habituellement dans les ouvrages de géométrie Lorentzienne. L'écriture est plus "formelle" mais vise à définir les objets de manière *canonique* et à mettre en évidence les propriétés qui dépendent du choix d'un système de coordonnées. Ce parti pris est justifié par le fait que dans notre étude des espace-temps conformément plats, nous serons amenés à manipuler des cartes à valeurs dans des espaces de Minkowski différents. La compréhension de la nature des objets est alors primordiale lorsque l'on fait des changements de carte.

1.1 Généralités

Dans tout ce document, on désigne par (n, p, r) la signature d'une forme quadratique q où n, p, r sont respectivement le nombre de coefficients négatifs, positifs, nuls dans la décomposition en carrés de q . Lorsque q est non-dégénérée, on note simplement (n, p) .

Définition 1.1.1. Un *espace de Minkowski* de dimension $n + 1$ est un espace affine de dimension $n + 1$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est muni d'une forme quadratique $q_{1,n}$ non dégénérée de signature $(1, n)$.

Exemple 1.1.1. L'espace affine \mathbb{R}^{n+1} muni de la forme quadratique $q_{1,n} = -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ dans le système de coordonnées associé à sa base canonique est un espace de Minkowski. On le note \mathbb{M}_0^{n+1} .

Tout espace de Minkowski est isométrique à \mathbb{M}_0^{n+1} . Tout au long de cette section, on pourra donc illustrer les propriétés des espaces de Minkowski sur le modèle-jouet \mathbb{M}_0^{n+1} .

Soit \mathbb{M}^{n+1} un espace de Minkowski de direction $(V, q_{1,n})$. Il est canoniquement muni d'une structure de variété différentielle. En chaque point de \mathbb{M}^{n+1} , l'espace tangent est canoniquement isomorphe à V . Ainsi, on peut voir $q_{1,n}$ comme un champ "constant" de formes quadratiques non dégénérée de signature $(1, n)$ sur \mathbb{M}^{n+1} c'est à dire comme une *métrique Lorentzienne*. L'espace de Minkowski \mathbb{M}^{n+1} est alors une *variété Lorentzienne*.

(1.1.1) Géodésiques. La connexion plate de l'espace affine \mathbb{M}^{n+1} est compatible avec sa métrique Lorentzienne ; elle est sans torsion et son transport parallèle préserve $q_{1,n}$. C'est donc la connexion de Levi Civita de la métrique. Les géodésiques, au sens de courbes auto-parallèles, sont toujours les droites affines de \mathbb{M}^{n+1} .

(1.1.2) Vecteurs causaux. Par analogie avec le cas euclidien, on appelle *norme* d'un vecteur v de V le réel $q_{1,n}(v)$. Cette analogie est à nuancer puisque dans le contexte euclidien, cette terminologie correspondrait au carré de la norme euclidienne. De plus, notons que contrairement au carré d'une norme euclidienne, $q_{1,n}(v)$ peut prendre des valeurs négatives ou nulles.

À la forme quadratique $q_{1,n}$ est associée une forme bilinéaire symétrique notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$. Pour tout vecteur v de V , on désigne par v^\perp son orthogonal pour la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$.

Définition 1.1.2. Un vecteur *non nul* v de V est dit *temporel* (resp. *lumière*, *spatial*) si sa norme est strictement négative (resp. nulle, strictement positive).

Définition 1.1.3. Un vecteur *non nul* de V est dit *causal* s'il est temporel ou lumière.

Lemme 1.1.1. *L'espace des vecteurs causaux, noté \mathcal{C} , est l'union disjointe de deux cônes convexes saillants (i.e. qui ne contiennent pas de droites vectorielles) de V .*

Démonstration. Soit v_0 un vecteur temporel de norme -1 . Pour tout vecteur causal v , le produit $\langle v, v_0 \rangle_{1,n}$ est non nul. En effet, s'il était nul, v appartiendrait à l'orthogonal de v_0 . Comme v_0 est temporel, la restriction de $q_{1,n}$ à v_0^\perp est définie positive. Le vecteur v étant non nul, sa norme serait strictement positive ; contradiction. On pose alors

$$\mathcal{C}^+ = \{v \in \mathcal{C}, \langle v, v_0 \rangle_{1,n} < 0\} \text{ et } \mathcal{C}^- = \{v \in \mathcal{C}, \langle v, v_0 \rangle_{1,n} > 0\}.$$

Remarquons que \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- sont disjoints ; de plus, ils sont non-vides puisqu'ils contiennent respectivement v_0 et $-v_0$. On vient donc de montrer que \mathcal{C} est l'union disjointe de \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- . Il est clair que \mathcal{C}^+ et \mathcal{C}^- sont deux cônes saillants. Reste à montrer qu'ils sont convexes. Soient v, v' deux vecteurs de \mathcal{C}^+ . Ils se décomposent de manière unique en

$v = \lambda v_0 + w$ et $v' = \lambda' v_0 + w'$ où λ, λ' sont deux réels strictement positifs et w, w' deux vecteurs orthogonaux à v_0 . Alors

$$\langle v, v' \rangle_{1,n} = -\lambda\lambda' + \lambda \langle v_0, w \rangle_{1,n} + \lambda' \langle w', v_0 \rangle_{1,n} + \langle w, w' \rangle_{1,n}.$$

D'une part, comme v et v' sont causaux, $q_{1,n}(w) \leq \lambda^2$ et $q_{1,n}(w') \leq \lambda'^2$. D'autre part, la restriction de $q_{1,n}$ à v_0^\perp étant définie positive, par Cauchy Schwarz

$$\langle w, w' \rangle_{1,n}^2 \leq q_{1,n}(w)q_{1,n}(w').$$

Donc $\langle w, w' \rangle_{1,n} \leq \lambda\lambda'$. D'où

$$\langle v, v' \rangle_{1,n} \leq \lambda \langle v_0, w \rangle_{1,n} + \lambda' \langle w', v_0 \rangle_{1,n} \leq 0.$$

Par suite, le vecteur $v + v'$ est causal et $\langle v + v', v_0 \rangle_{1,n} = \langle v, v_0 \rangle_{1,n} + \langle v', v_0 \rangle_{1,n} < 0$. Donc, $v + v'$ appartient à \mathcal{C}^+ . On montre de manière similaire que \mathcal{C}^- est convexe. \square

Exemple 1.1.2. L'espace des vecteurs causaux de l'espace de Minkowski \mathbb{M}_0^{n+1} est l'union disjointe des deux cônes convexes $\{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq t^2 \text{ et } t > 0\}$ et $\{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq t^2 \text{ et } t < 0\}$.

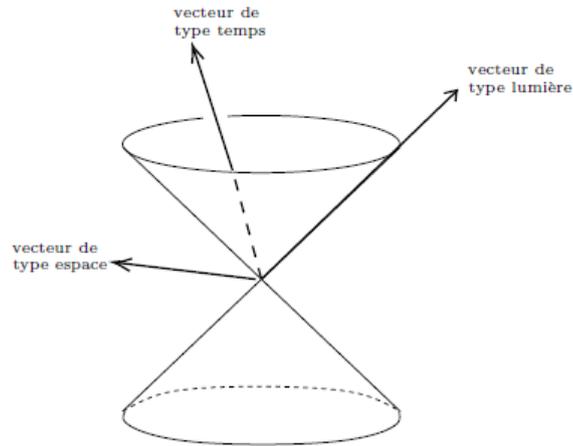


FIGURE 1.1 – Vecteurs de type temps, lumière, espace dans $\mathbb{R}^{1,n}$.

(1.1.3) Orientation temporelle.

Définition 1.1.4. Une *orientation temporelle* de \mathbb{M}^{n+1} est le choix d'une composante connexe de l'espace des vecteurs causaux. Les vecteurs situés dans la composante choisie sont alors dit *futurs* et les autres *passés*.

Notons que le choix d'une orientation temporelle de \mathbb{M}^{n+1} est toujours possible. On dit que \mathbb{M}^{n+1} est *temporellement orientable*.

Définition 1.1.5. Un espace de Minkowski orienté et temporellement orienté est appelé *espace-temps de Minkowski*.

Remarque 1.1.1. Cette définition s'inscrit dans le cadre plus général des *espace-temps* (voir Annexe B.1).

Dans la suite de ce chapitre, on fixe une orientation temporelle de \mathbb{M}^{n+1} . Autrement dit, on choisit une composante connexe de l'espace \mathcal{C} des vecteurs causaux que nous notons \mathcal{C}_0 . Le cône convexe \mathcal{C}_0 est alors appelé *cône causal futur*. Son intérieur est aussi un cône convexe constitué des vecteurs temporels futurs : il s'agit du *cône temporel futur*. Enfin, sa frontière est un cône (qui n'est pas convexe cette fois !) constitué des vecteurs lumières futurs appelé simplement *cône lumière futur*.

Exemple 1.1.3. Dans l'espace de Minkowski \mathbb{M}_0^{n+1} , le cône causal futur \mathcal{C}_0 est constitué des vecteurs causaux dont la première coordonnée dans la base canonique est strictement positive.

Définition 1.1.6. L'*espace hyperbolique* de dimension n de \mathbb{M}^{n+1} , noté \mathbb{H}^n , est le sous-espace de V constitué des vecteurs temporels futurs de norme -1 .

Exemple 1.1.4. L'espace hyperbolique de \mathbb{M}_0^{n+1} est l'hyperboloïde de \mathbb{R}^{n+1}

$$\{(t, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, -t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1 \text{ et } t > 0\}.$$

Remarque 1.1.2. D'après la preuve du Lemme 1.1.1, un vecteur causal v appartient à \mathcal{C}_0 si et seulement s'il existe un vecteur v_0 de \mathbb{H}^n tel que le produit $\langle v, v_0 \rangle_{1,n}$ est strictement négatif.

(1.1.4) Observateur et direction d'observation.

Définition 1.1.7. Une *droite vectorielle temporelle* est une droite de V dirigée par un vecteur de \mathbb{H}^n .

La restriction de $-q_{1,n}$ à une droite vectorielle temporelle Δ_0 est définie positive ; sa racine carrée définit donc une norme euclidienne sur Δ_0 que nous noterons $|\cdot|$.

Exemple 1.1.5. Dans \mathbb{M}_0^{n+1} , la droite vectorielle $\mathbb{R} \times \{0\} \simeq \mathbb{R}$ de \mathbb{R}^{n+1} est temporelle et la racine carrée de $-q_{1,n}$ restreinte à \mathbb{R} n'est rien d'autre que la valeur absolue.

Définition 1.1.8. Un *hyperplan vectoriel euclidien* est l'orthogonal dans V d'un vecteur de \mathbb{H}^n .

La restriction de la forme quadratique $q_{1,n}$ à un hyperplan vectoriel euclidien H_0 est définie positive. Sa racine carrée définit alors une norme euclidienne sur H_0 que nous noterons $\|\cdot\|$.

Exemple 1.1.6. Dans \mathbb{M}_0^{n+1} , l'hyperplan vectoriel $\{0\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ de \mathbb{R}^{n+1} est euclidien et la racine carrée de $q_{1,n}$ restreinte à \mathbb{R}^n n'est rien d'autre que la norme euclidienne usuelle de \mathbb{R}^n .

Toute droite vectorielle temporelle Δ_0 définit une décomposition orthogonale de V sous la forme $\Delta_0 \oplus \Delta_0^\perp$. Tout vecteur $v \in V$ se décompose alors de manière unique sous la forme $u + w$ avec $u \in \Delta_0$ et $w \in \Delta_0^\perp$ et sa norme s'exprime par :

$$q_{1,n}(v) = -|u|^2 + \|w\|^2.$$

À présent, nous allons étendre les définitions 1.1.7 et 1.1.8 aux droites et aux hyperplans *affines* de \mathbb{M}^{n+1} .

- Définition 1.1.9.**
1. Une droite affine de \mathbb{M}^{n+1} est dite *temporelle* si elle est dirigée par une droite vectorielle temporelle.
 2. Un hyperplan affine de \mathbb{M}^{n+1} est dit *euclidien* s'il est dirigé par un hyperplan vectoriel euclidien.

Définition 1.1.10. Soit Δ_0 une droite vectorielle temporelle de V .

1. L'espace des droite affines temporelles de direction Δ_0 , noté $H(\Delta_0)$, est le quotient $\mathbb{M}^{n+1}/\Delta_0$.
2. L'espace des hyperplans affines euclidiens de direction Δ_0^\perp , noté $D(\Delta_0)$, est le quotient $\mathbb{M}^{n+1}/\Delta_0^\perp$.

Le lemme suivant justifie notre choix des notations $H(\Delta_0), D(\Delta_0)$ dans la définition ci-dessus.

Lemme 1.1.2. Soit Δ_0 une droite vectorielle temporelle de V .

1. L'espace $H(\Delta_0)$ des droites affines de \mathbb{M}^{n+1} est canoniquement muni d'une structure d'espace affine euclidien de dimension n d'espace vectoriel sous-jacent V/Δ_0 . De plus, la restriction de la projection canonique $\mathbb{M}^{n+1} \rightarrow H(\Delta_0)$ à tout hyperplan affine euclidien est une isométrie affine.
2. L'espace $D(\Delta_0)$ des hyperplans affines de \mathbb{M}^{n+1} est canoniquement une droite affine euclidienne d'espace vectoriel sous-jacent V/Δ_0^\perp . De plus, la restriction de la projection canonique $\mathbb{M}^{n+1} \rightarrow D(\Delta_0)$ à toute droite affine temporelle est une isométrie affine.

Démonstration. On va prouver le point 1, la preuve du point 2 est similaire.

Soit $f : H(\Delta_0) \times H(\Delta_0) \rightarrow V/\Delta_0$ l'application qui associe à tout couple $([p], [p'])$ le vecteur $[p - p']$. Il est facile de voir que cette définition ne dépend pas du choix des représentants p et p' . La relation de Chasles est clairement satisfaite. Soit $[p_0] \in H(\Delta_0)$. Montrons que l'application $f_0 : [p] \in H(\Delta_0) \mapsto [p - p_0] \in V/\Delta_0$ est bijective. Soit $[v] \in V/\Delta_0$. On a $f_0([p_0 + v]) = [v]$, donc f_0 est surjective. Soient $[p], [p'] \in H(\Delta_0)$ tels que $[p - p_0] = [p' - p_0]$, autrement dit $(p - p_0) - (p' - p_0) \in \Delta_0$, c'est à dire $p - p' \in \Delta_0$, d'où $[p] = [p']$. Donc f_0 est injective. On en déduit que $H(\Delta_0)$ est un espace affine.

Il est facile de voir que V/Δ_0 est isomorphe à l'hyperplan Δ_0^\perp par l'application qui associe à tout vecteur V sa projection orthogonale sur Δ_0^\perp . L'espace vectoriel V/Δ_0 est donc de dimension n . De plus, la forme quadratique $q_{1,n}$ induit sur V/Δ_0 une norme

euclidienne isométrique à la norme $\|\cdot\|$ induite par $q_{1,n}$ sur Δ_0^\perp : pour tout vecteur v de V , la norme de $[v]$ est définie par $\|w\|$ où w est le projeté orthogonal de v sur Δ_0^\perp . Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix du représentant v .

Pour finir, soit H un hyperplan euclidien de \mathbb{M}^{n+1} de direction Δ_0^\perp . Montrons que la restriction de la projection $\mathbb{M}^{n+1} \rightarrow H(\Delta_0)$ à H est une isométrie affine. D'après ce qui précède, il suffit de vérifier qu'elle est injective. Soit $p, p' \in H$ tels que $[p] = [p']$, autrement dit tels que $p - p' \in \Delta_0$. Or, comme $p, p' \in H$, on a $p - p' \in \Delta_0^\perp$. Donc, $p - p' \in \Delta_0^\perp \cap \Delta_0 = \{0\}$. D'où, $p = p'$. \square

Dans ce qui suit, on note encore $|\cdot|$ (resp. $\|\cdot\|$) la norme euclidienne induite par $q_{1,n}$ sur l'espace directeur de $D(\Delta_0)$ (resp. $H(\Delta_0)$).

Remarque 1.1.3. Soit v_0 l'unique vecteur de \mathbb{H}^n qui dirige Δ_0 . On définit une relation d'ordre total \leq sur $D(\Delta_0)$ par :

$$[p] \leq [q] \Leftrightarrow \langle q - p, v_0 \rangle_{1,n} \leq 0. \quad (1.1)$$

Notons que cette définition ne dépend pas du choix des représentants p et q .

Si l'inégalité (1.1) est stricte, nous noterons $p < q$. Nous verrons dans la Section 1.2 que $p \leq q$ (resp. $p < q$) signifie que q est dans le futur causal (resp. strict) de p .

Décomposition spatio-temporelle de \mathbb{M}^{n+1} .

Lemme 1.1.3. Soient Δ_0, Δ_1 deux droites vectorielles temporelles de V . L'application de \mathbb{M}^{n+1} dans $D(\Delta_0) \times H(\Delta_1)$ qui associe à tout point ses projections dans $D(\Delta_0)$ et dans $H(\Delta_1)$ respectivement, est un isomorphisme affine.

Démonstration. Soit p et p' deux points de \mathbb{M}^{n+1} qui ont les mêmes projections dans $D(\Delta_0)$ et dans $H(\Delta_1)$, c'est à dire $p - p' \in \Delta_0^\perp \cap \Delta_1$. Comme Δ_0^\perp et Δ_1 sont supplémentaires, $p - p' = 0$ d'où $p = p'$.

Réciproquement, soient $[q] \in D(\Delta_0)$ et $[r] \in H(\Delta_1)$. La droite affine temporelle $r + \Delta_1$ rencontre l'hyperplan affine euclidien $q + \Delta_0^\perp$ en un unique point p_0 . On appelle alors p le point $p_0 + (q - p_0) + (r - p_0)$. Il est facile de voir que les projections de p sur $D(\Delta_0)$ et sur $H(\Delta_1)$ sont respectivement $[q]$ et $[r]$. \square

La donnée de deux droites vectorielles temporelles Δ_0 et Δ_1 définit donc *canoniquement* une **décomposition spatio-temporelle** $D(\Delta_0) \times H(\Delta_1)$ de \mathbb{M}^{n+1} . Lorsque les droites Δ_0 et Δ_1 sont égales, cette décomposition est dite *orthogonale*. En pratique, nous ne considérerons que des décompositions spatio-temporelles orthogonales de \mathbb{M}^{n+1} . Cela motive la définition suivante.

Définition 1.1.11. On appelle *direction d'observation* toute droite vectorielle temporelle de V .

Remarque 1.1.4. La donnée d'une direction d'observation est équivalente à la donnée d'un vecteur de \mathbb{H}^n .

Définition 1.1.12. On appelle *observateur* la donnée d'un point de \mathbb{M}^{n+1} et d'une direction d'observation.

(1.1.5) Isométries. On a vu que l'espace \mathbb{M}^{n+1} admet deux structures : il est à la fois muni d'une structure *affine* et d'une structure *Lorentzienne*. On va voir que les isométries de \mathbb{M}^{n+1} pour la métrique Lorentzienne induite par la forme quadratique $q_{1,n}$ sont exactement les isométries *affines* de \mathbb{M}^{n+1} , c'est à dire les isomorphismes affines qui préservent $q_{1,n}$.

Proposition 1.1.1. *Les isométries de l'espace-temps \mathbb{M}^{n+1} sont exactement les isométries affines de \mathbb{M}^{n+1} pour la forme quadratique $q_{1,n}$.*

Par définition, les isométries affines de \mathbb{M}^{n+1} sont différentiables et préservent la métrique Lorentzienne induite par $q_{1,n}$. Il s'agit donc de montrer que toute isométrie de \mathbb{M}^{n+1} pour sa structure Lorentzienne est affine et préserve la forme quadratique $q_{1,n}$. La preuve utilise le lemme classique suivant.

Lemme 1.1.4. *Soit M une variété Lorentzienne connexe et soit f une isométrie de M qui fixe un point p de M et telle que la différentielle de f en p est l'identité. Alors, f est l'identité de M .*

Démonstration. Voir [37, Chap. 1, Proposition 2.1]. □

Démonstration. On note $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ le groupe des isométries de \mathbb{M}^{n+1} et $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1})$ son groupe d'isométries affines. Remarquons que $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1}) \subset \text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$. Considérons le fibré des repères $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ de \mathbb{M}^{n+1} . On va montrer que chacun des groupes $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ et $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1})$ agit librement et transitivement sur $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$.

Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ agit sur $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ comme suit : soit $f \in \text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$, pour tout $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ et pour tous vecteurs v_1, \dots, v_{n+1} de $T_p\mathbb{M}^{n+1} \simeq V$, on pose

$$f \cdot (p, \{v_1, \dots, v_{n+1}\}) := (f(p), \{d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{n+1})\}).$$

Il résulte immédiatement du Lemme 1.1.4 que l'action est libre. La transitivité de l'action découle, quant à elle, du fait que l'action de $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1})$ sur $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ est transitive. Par conséquent, $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ s'identifie à $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$. Comme l'action de $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ sur $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ est libre, celle de $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1})$ l'est également. Donc, $\mathcal{R}\mathbb{M}^{n+1}$ s'identifie à $\text{Aff}(\mathbb{M}^{n+1})$. La proposition s'en suit. □

Soit $O(V, q_{1,n})$ le groupe des isométries linéaires de V qui préservent $q_{1,n}$. Le choix d'une origine p_0 dans \mathbb{M}^{n+1} permet d'identifier $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ à $O(V, q_{1,n}) \ltimes V$. On définit l'application ι qui associe à un couple $(\vec{\alpha}, \tau)$ de $O(V, q_{1,n}) \ltimes V$ l'isométrie affine α définie par $\alpha(p) = p_0 + \vec{\alpha}(p - p_0) + \tau$. Il est facile de voir que ι est un isomorphisme de groupes. On vient donc de montrer le résultat suivant :

Proposition 1.1.2. *Le groupe d'isométries de \mathbb{M}^{n+1} est isomorphe au groupe affine $O(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1,n}$.*

Remarque 1.1.5. Si l'on rajoute à ce groupe les homothéties, on obtient le groupe conforme de \mathbb{M}^{n+1} , c'est à dire $(\mathbb{R} \times O(1, n)) \ltimes \mathbb{R}^{1,n}$.

Remarque 1.1.6. Soit $O_0(1, n)$ la composante neutre de $O(1, n)$. Elle est constituée des isométries linéaires de $\mathbb{R}^{1, n}$ qui préservent son orientation et son orientation temporelle. Ainsi, le groupe d'isométries (conformes) de \mathbb{M}^{n+1} qui préservent son orientation et son orientation temporelle est isomorphe à $O_0(1, n) \times \mathbb{R}^{1, n} ((\mathbb{R} \times O_0(1, n)) \times \mathbb{R}^{1, n})$.

1.2 Structure causale

Dans toute cette section, \mathbb{M}^{n+1} désigne un espace-temps de Minkowski. On va définir et décrire la structure causale de \mathbb{M}^{n+1} . Toutes les notions de causalité introduites dans cette section s'inscrivent dans le cadre plus général des *espace-temps* et sont développées dans l'Annexe B.

(1.2.1) Courbes causales.

Définition 1.2.1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une courbe \mathcal{C}^1 -par morceaux $c : I \rightarrow \mathbb{M}^{n+1}$ est dite *causale* (resp. *temporelle*) *future* si tout vecteur tangent à la courbe, éventuellement défini seulement à droite ou à gauche, est causal (resp. temporel) futur.

On définit de manière similaire les courbes causales (resp. temporelles) passées. Ainsi, toute courbe causale est temporellement orientée soit vers le futur soit vers le passé et on peut distinguer parmi ses extrémités (lorsqu'elle en a) celle qui est future de celle qui est passée.

Définition 1.2.2. Soit U un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} et A une partie de \mathbb{M}^{n+1} . Le *futur strict* de A relativement à U , noté $I_U^+(A)$, est l'ensemble des extrémités futures des courbes temporelles non triviales issues d'un point de $A \cap U$ et contenues dans U .

Définition 1.2.3. Soit U un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} et A une partie de \mathbb{M}^{n+1} . Le *futur causal* de A relativement à U , noté $J_U^+(A)$, est l'ensemble des extrémités futures des courbes causales (y compris celles qui sont triviales) issues d'un point de $A \cap U$ et contenues dans U .

On définit de manière similaire le passé strict et le passé causal de A relativement à U notés respectivement $I_U^-(A)$ et $J_U^-(A)$. Lorsque U est tout \mathbb{M}^{n+1} , on parle simplement du futur et passé strict (resp. causal) de A que l'on note respectivement $I^+(A)$ et $I^-(A)$ (resp. $J^+(A)$ et $J^-(A)$).

Remarque 1.2.1. Le futur (resp. passé) de A relativement à U est contenu dans l'intersection du futur (resp. passé) de A avec U mais en général cette inclusion est stricte.

Remarque 1.2.2. Soit p un point de M et U un ouvert contenant p . Un point q appartient à $I_U^+(p)$ (resp. $J_U^+(p)$) si et seulement si p appartient à $I_U^-(q)$ (resp. $J_U^-(q)$).

Définition 1.2.4. Un sous-ensemble A de \mathbb{M}^{n+1} est dit *futur* si $I^+(A) \subset A$. Il est dit *futur-complet* si $I^+(A) = A$.

On définit de même les sous-ensembles passés-complets de \mathbb{M}^{n+1} .

Proposition 1.2.1. *Soit p un point de \mathbb{M}^{n+1} et U un ouvert convexe contenant p .*

Le futur causal (resp. strict) de p relativement à U est l'ensemble des points q de U tels que le vecteur $q - p$ est causal (resp. temporel) futur.

De même, le passé causal (resp. strict) de p relativement à U est l'ensemble des points q de U tels que le vecteur $q - p$ est causal (resp. temporel) passé.

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, on prouve la proposition pour \mathbb{M}_0^{n+1} (voir Exemple 1.1.1).

Soit q un point de U tel que le vecteur $q - p$ est causal futur. Alors, le segment $c(s) = p + s(q - p)$, avec $s \in [0, 1]$, qui relie p à q est causal futur. En effet, en tout point de la courbe c , le vecteur tangent $c'(s) = q - p$ est causal futur. De plus, comme U est convexe, le segment c est contenu dans U . Donc, q appartient à $J_U^+(p)$.

Réciproquement, soit q un point de $J_U^+(p)$. Par définition, q est l'extrémité future d'une courbe causale $c : [0, 1] \rightarrow U$ issue de p . On suppose d'abord que c est de classe \mathcal{C}^1 . On décompose \mathbb{M}_0^{n+1} sous la forme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Soient $t(s)$ et $x(s)$ les projections orthogonales de $c(s)$ sur \mathbb{R} et \mathbb{R}^n respectivement. La courbe causale c étant future, tout vecteur tangent à la courbe est futur, c'est à dire $t'(s) > 0$ pour tout $s \in [0, 1]$. Par suite, t est un difféomorphisme strictement croissant sur son image $[a, b]$ avec $a = t(0)$ et $b = t(1)$. On peut alors changer le paramétrage de la courbe en posant pour tout $\theta \in [a, b]$

$$\gamma(\theta) = c \circ t^{-1}(\theta) = (\theta, y(\theta))$$

avec $y(\theta) = x \circ t^{-1}(\theta) \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $\theta \in [a, b]$, le vecteur tangent $\gamma'(\theta) = (1, y'(\theta))$ est causal i.e. $\|y'(\theta)\| \leq 1$. D'où

$$\|y(b) - y(a)\| \leq \int_a^b \|y'(\theta)\| d\theta \leq b - a$$

soit $q_{1,n}(q - p) \leq 0$. Le vecteur $q - p$ est donc causal futur.

Maintenant, si la courbe c est de classe \mathcal{C}^1 - par morceaux, soient s_i les points de $[0, 1]$ où c n'admet pas de vecteurs tangents. D'après ce qui précède, pour tout i , le vecteur $c(s_i) - c(s_{i-1})$ est causal futur. Comme \mathcal{C}_0 est convexe

$$q - p = \sum_i (c(s_i) - c(s_{i-1})) \in \mathcal{C}_0.$$

La preuve est similaire pour le futur strict de p . En inversant l'orientation temporelle, on obtient le résultat pour les passés causal et strict de p . \square

Corollaire 1.2.1. *Soit p un point de \mathbb{M}^{n+1} et U un ouvert convexe contenant p . Alors, le futur (resp. passé) strict de p relativement à U est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} .*

De plus, pour toute partie K compacte de \mathbb{M}^{n+1} , le futur (resp. passé) causal de K coïncide avec l'adhérence du futur (resp. passé) strict de K .

Démonstration. D'après la Proposition 1.2.1

$$I_U^+(p) = \{q \in U, q_{1,n}(q - p) < 0 \text{ et } \langle q - p, v_0 \rangle_{1,n} < 0\}.$$

Il est alors clair que $I_U^+(p)$ est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} . De même,

$$I_U^-(p) = \{q \in U, q_{1,n}(q-p) < 0 \text{ et } \langle q-p, v_0 \rangle_{1,n} > 0\}$$

est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} .

Soit K un compact de \mathbb{M}^{n+1} et soit q un point de $J^+(K)$. Alors, il existe un point p de K tel que $q \in J^+(p)$. Soit v_0 un vecteur de \mathbb{H}^n . D'après la Proposition 1.2.1, pour tout entier non nul i , le point $q_i = q + (1/i)v_0$ est dans le futur strict de p . Comme $q = \lim q_i$, il appartient à $\overline{I^+(K)}$.

Il suffit de montrer que $J^+(K)$ est fermé pour conclure. Soit $\{q_i\}_i$ une suite de $J^+(K)$ qui converge vers un point q de \mathbb{M}^{n+1} . Il existe alors une suite $\{p_i\}_i$ de K telle que $q_i \in J^+(p_i)$ pour tout i . Comme K est compact, quitte à extraire, on peut supposer que $\{p_i\}_i$ converge vers un point p de K . D'après la Proposition 1.2.1, pour tout entier i

$$q_{1,n}(q_i - p_i) \leq 0 \text{ et } \langle q_i - p_i, v_0 \rangle \leq 0.$$

En passant à la limite, on obtient $q \in J^+(p) \subset J^+(K)$. Donc, $J^+(K)$ est un fermé de \mathbb{M}^{n+1} . D'où $J^+(K) = \overline{I^+(K)}$. \square

Proposition 1.2.2. *Soit U un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} et A une partie de U . Alors, $I_U^+(A)$ (resp. $I_U^-(A)$) est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} .*

Démonstration. On montre que le futur strict de tout point p de U relativement à U est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} . Le sous-ensemble $I_U^+(A)$ est alors un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} puisque c'est la réunion des ouverts $I_U^+(p)$ lorsque p parcourt A .

Soit donc p un point de U et q un point de $I_U^+(p)$. Par définition, q est l'extrémité future d'une courbe temporelle future c issue de p contenue dans U . Soit V un voisinage ouvert convexe de q contenu dans l'ouvert U et soit p' un point de la courbe c contenu dans V . D'après le Corollaire 1.2.1, $I_V^+(p')$ est un voisinage ouvert de q . Soit q' un point de $I_V^+(p')$. D'après la Proposition 1.2.1, le segment reliant p' à q' est une courbe temporelle future contenue dans V donc dans U . Par suite, en concaténant la portion de courbe c reliant p à p' au segment reliant p' à q' on obtient une courbe temporelle future reliant p à q' contenue dans U . Donc q' appartient à $I_U^+(p)$. On vient de montrer que $I_V^+(p')$ est un voisinage ouvert de q contenu dans $I_U^+(p)$. Donc $I_U^+(p)$ est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} .

On montre de manière similaire que $I_U^-(p)$ est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} et donc que $I^-(A)$ est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} . \square

Lemme 1.2.1. *Le futur strict d'un convexe C de \mathbb{M}^{n+1} est convexe.*

Démonstration. Soient q, q' deux points du futur strict de C dans \mathbb{M}^{n+1} . Il existe r, r' deux points de $C(p)$ tels que $q \in I^+(r)$ et $q' \in I^+(r')$. Soit $[r, r']$ le segment de droite reliant r à r' dans \mathbb{M}^{n+1} . Comme le futur strict de $[r, r']$ dans \mathbb{M}^{n+1} est convexe, il contient le segment $[q, q']$. Or, comme C est convexe, il contient le segment $[r, r']$. Ainsi, le futur strict de $C(p)$ dans \mathbb{M}^{n+1} contient celui du segment $[r, r']$ et par conséquent, le segment $[q, q']$. \square

La proposition suivante est une conséquence directe de la Proposition 1.2.1.

Proposition 1.2.3. *La relation "être dans le futur strict de" est transitive. Autrement dit, si p, q, r sont trois points de \mathbb{M}^{n+1} tels que $p \in I^+(q)$ et $q \in I^+(r)$ alors $p \in I^+(r)$.*

La relation "être dans le futur causal de" est transitive et réflexive. De plus, si p, q, r sont trois points de \mathbb{M}^{n+1} tels que $p \in I^+(q)$ et $q \in J^+(r)$ alors $p \in I^+(r)$.

D'après la Remarque 1.2.2, cette proposition reste vraie si l'on considère le passé au lieu du futur. Remarquons que tout point $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ est dans son futur/passé causal. Ainsi, la relation "être dans le futur/passé causal de" est une *relation d'ordre partielle* sur \mathbb{M}^{n+1} . Sa restriction à toute courbe causale, en particulier à toute droite temporelle, est une relation d'ordre totale. Il s'agit de la relation d'ordre que nous avons défini à la Remarque 1.1.3.

Corollaire 1.2.2. *Soient p, q deux points de \mathbb{M}^{n+1} . Si $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ alors toute courbe causale future reliant p à q est un segment de droite lumière.*

Définition 1.2.5. On appelle *diamant* de \mathbb{M}^{n+1} l'intersection du passé causal d'un point p de \mathbb{M}^{n+1} avec le futur causal d'un point q de \mathbb{M}^{n+1} . On le note $J(p, q)$.

Remarque 1.2.3. Un diamant $J(p, q)$ est non-vide si et seulement si $p \in J^+(q)$. Dans ce cas, si $p \in I^+(q)$, le diamant $J(p, q)$ est d'intérieur non-vide égal à $I^-(p) \cap I^+(q)$ (voir Corollaire 1.2.1) et noté $I(p, q)$, sinon $J(p, q)$ est réduit à un segment de droite lumière reliant p à q (voir Corollaire 1.2.2).

Définition 1.2.6. Une partie U de \mathbb{M}^{n+1} est *causalement convexe* si toute courbe causale reliant deux points de U est contenue dans U , ou de manière équivalente si U contient tous les diamants $J(p, q)$ avec $p, q \in U$.

Remarque 1.2.4. Si U est un ouvert causalement convexe de \mathbb{M}^{n+1} et A une partie de \mathbb{M}^{n+1} , alors le futur (resp. passé) de A relativement à U coïncide avec l'intersection du futur (resp. passé) de A avec U .

(1.2.2) Courbes causales topologiques. La définition suivante étend la notion de courbes causales aux courbes continues.

Définition 1.2.7. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Une courbe *continue* $c : I \rightarrow \mathbb{M}^{n+1}$ est une *courbe causale (resp. temporelle) topologique future* si pour tout temps $t_0 \in I$ et tout voisinage U de $c(t_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous temps $s, t \in]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$, si $s \leq t$ (resp. $s < t$) alors $c(t)$ est dans le futur causal (resp. temporel) de $c(s)$.

On définit de même les courbes causales (resp. temporelles) topologiques passées.

Remarque 1.2.5. Cette définition n'altère pas la notion de futur (resp. passé) : une courbe \mathcal{C}^1 -par morceaux de \mathbb{M}^{n+1} est causale future au sens de la Définition 1.2.1 si et seulement si elle est causale future au sens de la Définition 1.2.7. De plus, si une courbe causale topologique future relie deux points p et q de \mathbb{M}^{n+1} alors $q \in J^+(p)$.

Dorénavant, par courbe causale on entend courbe causale topologique. Les propositions suivantes caractérisent les courbes causales dans une décomposition spatio-temporelle orthogonale de \mathbb{M}^{n+1} .

Rappelons d'abord que la donnée d'une direction d'observation Δ_0 (voir Définition 1.1.11) définit une décomposition spatio-temporelle orthogonale canonique de \mathbb{M}^{n+1} de la forme $D(\Delta_0) \times H(\Delta_0)$ (voir §(1.1.4)).

D'après la Proposition 1.2.1, la relation d'ordre sur $D(\Delta_0)$ définie dans la Remarque 1.1.3 est la relation "être dans le futur de" : pour tous $[p], [q] \in D(\Delta_0)$, on a $[p] \leq [q]$ si et seulement si $q \in J^+(p)$. On écrit $[p] < [q]$ si $[p] \neq [q]$.

On note $|\cdot|$ (resp. $\|\cdot\|$) la norme euclidienne induite par $q_{1,n}$ sur $D(\Delta_0)$ (resp. $H(\Delta_0)$) (voir §(1.1.4)).

Proposition 1.2.4. *Pour une direction d'observation Δ_0 donnée, les courbes causales (resp. temporelles) futures de \mathbb{M}^{n+1} sont les courbes $c(s) = (s, x(s))$ où x est une fonction 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) d'un intervalle de $D(\Delta_0)$ dans $H(\Delta_0)$.*

Démonstration. Fixons une direction d'observation Δ_0 . Soit $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{M}^{n+1}$ une courbe causale future de \mathbb{M}^{n+1} . On note $t : [0, 1] \rightarrow D(\Delta_0)$ et $x : [0, 1] \rightarrow H(\Delta_0)$ les projections de c dans $D(\Delta_0)$ et dans $H(\Delta_0)$ respectivement. Ce sont des applications continues. De plus, t est strictement croissante. En effet, pour tous $s' > s$ dans $[0, 1]$, le point $c(s')$ est dans le futur causal de $c(s)$ (voir Définition 1.2.7), donc $t(s') \geq t(s)$. Si $t(s') = t(s)$, par définition $c(s') - c(s) \in \Delta_0^\perp$. Or, d'après la Proposition 1.2.1, $c(s') - c(s)$ est un vecteur causal. Contradiction. D'où, $t(s') > t(s)$. L'application $t : [0, 1] \rightarrow D(\Delta_0)$ est donc un homéomorphisme sur son image $[a, b]$ avec $a = t(0)$ et $b = t(1)$. On change alors le paramétrage de la courbe en posant pour tout $\theta \in [a, b]$

$$\alpha(\theta) = c \circ t^{-1}(\theta) = (\theta, y(\theta))$$

avec $y = x \circ t^{-1}(\theta) \in H(\Delta_0)$. Montrons que $y : [a, b] \rightarrow H(\Delta_0)$ est 1-Lipschitz. Soient $\theta, \theta' \in [a, b]$. Comme $\alpha(\theta)$ est causalement relié à $\alpha(\theta')$, d'après la Proposition 1.2.1, le vecteur $\alpha(\theta') - \alpha(\theta)$ est causal. D'où

$$\|y(\theta') - y(\theta)\| \leq |\theta' - \theta|.$$

Autrement dit, la fonction $y : [a, b] \subset D(v_0) \rightarrow H(v_0)$ est 1-Lipschitz. Si la courbe est temporelle, le vecteur $\alpha(\theta') - \alpha(\theta)$ est temporel donc l'inégalité ci-dessus est stricte. Autrement dit y est 1-contractante ; ce qui prouve la proposition. \square

Définition 1.2.8. Une courbe causale de \mathbb{M}^{n+1} est *inextensible dans le futur* (resp. *passé*) si elle ne possède pas d'extrémité future (resp. passée). Elle est dite *inextensible* si elle n'admet ni d'extrémité future ni d'extrémité passée.

Lemme 1.2.2. *Soit Δ_0 une direction d'observation et soit $c(s) = (s, x(s))$ une courbe causale future paramétrée par $]a, b[\subset D(\Delta_0)$. Alors, c admet un point limite futur (resp. passé) si et seulement si b (resp. a) est fini.*

En particulier, les courbes causales inextensibles de Minkowski sont à reparamétrage près les courbes causales $c(s) = (s, x(s))$ définies sur tout $D(\Delta_0)$.

Démonstration. Si c admet un point limite futur $q = (t, y)$ alors pour tout réel s dans $]a, b[$, le point $c(s) = (s, x(s))$ est dans le passé causal de q . En particulier, $s \leq t$. Donc b est fini.

Réciproquement, on suppose b fini. Soit $\{s_i\}_i$ une suite de $]a, b[$ qui converge vers b . Comme x est une fonction 1-Lipschitz de $]a, b[$ dans un $H(\Delta_0)$, on a pour tous i, j dans $]a, b[$

$$\|x(s_i) - x(s_j)\| \leq |s_i - s_j|.$$

La suite $\{x(s_i)\}_i$ est donc de Cauchy dans $H(\Delta_0)$ et converge vers un point y de $H(\Delta_0)$. Le point $q = (b, y)$ est alors un point limite futur de c . \square

Remarque 1.2.6. Les droites affines de type temps et de type lumière sont des courbes causales inextensibles. Les droites affines lumières sont appelées *photons*.

La proposition suivante est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Proposition 1.2.5. *Toute courbe causale de \mathbb{M}^{n+1} est contenue dans une courbe causale inextensible.*

(1.2.3) Parties achronales, acausales.

Définition 1.2.9. Une partie A de \mathbb{M}^{n+1} est *achronale* (resp. *acausale*) s'il n'existe pas de courbe temporelle (resp. causale) joignant deux points distincts de A .

Un exemple particulier de partie achronale est celui d'hyperplan lumière affine dont la définition est la suivante.

Définition 1.2.10. Un hyperplan affine de \mathbb{M}^{n+1} est *lumière* s'il est dirigé par l'orthogonal d'un vecteur lumière.

Remarque 1.2.7. Les ensembles acausaux sont achronaux mais la réciproque est fausse. En effet, un hyperplan lumière affine dirigé par l'orthogonal d'un vecteur lumière v est achronal mais n'est pas acausal puisqu'il contient les droites lumières affines dirigées par v .

Remarque 1.2.8. Le cône causal futur (resp. passé) de V est l'intersection des futurs (resp. passés) causaux de tous les hyperplans lumières de V . Autrement dit, c'est l'ensemble des vecteurs $v \in V$ tels que $\langle v, v_0 \rangle_{1,n} \leq 0$ pour tout vecteur lumière futur (resp. passé) v_0 . On obtient le cône temporel futur (resp. passé) en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.

Lemme 1.2.3. *Le passé (resp. futur) d'une droite lumière de l'espace de Minkowski coïncide avec le passé (resp. futur) de l'unique hyperplan lumière affine qui la contient.*

Démonstration. Soit D une droite affine de \mathbb{M}^{n+1} dirigée par un vecteur lumière v . Soit H l'hyperplan affine de direction v^\perp qui contient D . Soit H_0 un hyperplan affine euclidien de \mathbb{M}^{n+1} . Les hyperplans H et H_0 s'intersectent le long d'une droite D_0 et D intersecte H_0 en un point p_0 . L'intersection du passé de D avec H_0 est l'union de disques tangents à D_0 en p_0 . Cette union remplit le demi-espace délimité par D_0 qui coïncide avec la trace du passé de H sur H_0 . \square

Les deux définitions suivantes présentent une version locale de la notion d'ensembles achronaux (resp. acausaux).

Définition 1.2.11. Soit U un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} . Une partie A de U est *achronale* (resp. *acausale*) *relativement à U* s'il n'existe pas de courbes temporelles (resp. causales) contenues dans U reliant deux points de A .

Définition 1.2.12. Une partie A de \mathbb{M}^{n+1} est *localement achronale* (resp. *localement acausale*) si tout point p de A admet un voisinage U dans \mathbb{M}^{n+1} tel que la partie $A \cap U$ est achronale (resp. acausale) relativement à U .

Notons que la condition "localement achronal" est plus faible que la condition "achronal". En effet, dans une partie *localement achronale* A , les courbes temporelles "courtes" reliant deux points de A sont interdites mais, à priori, des courbes temporelles plus longues reliant deux points de A sont autorisées. Nous donnerons à la fin de cette partie des conditions pour qu'un sous-ensemble localement achronal soit achronal (voir Proposition 1.2.8).

Dans ce qui suit, on va caractériser les parties achronales dans une décomposition spatio-temporelle de \mathbb{M}^{n+1} .

Rappelons que la donnée d'une direction d'observation Δ_0 (voir Définition 1.1.11) définit une décomposition spatio-temporelle orthogonale canonique de \mathbb{M}^{n+1} de la forme $D(\Delta_0) \times H(\Delta_0)$ (voir §(1.1.4)). On munit $D(\Delta_0)$ de la relation d'ordre "être dans le futur de" : pour tous $[p], [q] \in D(\Delta_0)$ on écrit $[p] \leq [q]$ si et seulement si $q \in J^+(p)$. On écrit $[p] < [q]$ si $[p] \neq [q]$.

Avant de caractériser les parties achronales de \mathbb{M}^{n+1} dans une décomposition spatio-temporelle $D(\Delta_0) \times H(\Delta_0)$, on définit dans \mathbb{M}^{n+1} les notions de graphe, épigraphe et hypographe d'une fonction d'une partie de $H(\Delta_0)$ dans $D(\Delta_0)$.

Définition 1.2.13. Soit Δ_0 une direction d'observation et soit f une fonction d'une partie Ω de $H(\Delta_0)$ à valeurs dans $D(\Delta_0)$.

1. Le *graphe* de f est le sous-ensemble $G(f)$ de \mathbb{M}^{n+1} défini par

$$G(f) = \{(f(x), x) \mid x \in \Omega\}.$$

2. L'*épigraphe* de f est le sous-ensemble $\text{epi}(f)$ de \mathbb{M}^{n+1} défini par

$$\text{epi}(f) = \{(t, x), x \in \Omega \text{ et } t \geq f(x)\}.$$

Si l'inégalité $t \geq f(x)$ est stricte, on parle d'épigraphe *strict* de f et on note $\text{epi}_s(f)$.

3. L'*hypographe* de f est le sous-ensemble $\text{hyp}(f)$ de \mathbb{M}^{n+1} défini par

$$\text{hyp}(f) = \{(t, x), x \in \Omega \text{ et } t \leq f(x)\}.$$

Si l'inégalité $t \leq f(x)$ est stricte, on parle d'hypographe *strict* de f et on note $\text{hyp}_s(f)$.

Remarque 1.2.9. Dans \mathbb{M}_0^{n+1} , ces définitions coïncident avec les notions de graphe, épi-graphe, hypographe d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} .

Proposition 1.2.6. *Pour une direction d'observation Δ_0 donnée, les parties achronales (resp. acausales) de \mathbb{M}^{n+1} sont exactement les graphes d'applications 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) d'une partie Ω de $H(\Delta_0)$ à valeurs dans $D(\Delta_0)$.*

Démonstration. Fixons une direction d'observation Δ_0 . Soit $f : \Omega \subset H(\Delta_0) \rightarrow D(\Delta_0)$ une application 1-Lipschitz définie sur une partie Ω de $H(\Delta_0)$. Soient $x, x' \in \Omega$. Comme f est 1-Lipschitz, on a $|f(x) - f(x')| \leq \|x - x'\|$. Par conséquent, si on note $p = (x, f(x))$ et $p' = (x', f(x'))$, on a $q_{1,n}(p - p') = -|f(x) - f(x')| + \|x - x'\| \geq 0$. Ainsi, d'après la Proposition 1.2.1, $p' \notin I^+(p) \cup I^-(p)$. On en déduit que le graphe de f est une partie achronale de \mathbb{M}^{n+1} . Si f est 1-contractante, les inégalités ci-dessus sont strictes, donc $p' \notin J^+(p) \cup J^-(p)$. Cela prouve que le graphe de f est acausal.

Réciproquement, soit A une partie achronale de \mathbb{M}^{n+1} . On considère la projection Ω de A sur $H(\Delta_0)$:

$$\Omega = \{x \in H(\Delta_0), \exists t \in D(\Delta_0) : (t, x) \in A\}.$$

La fibre $\{(t, x), t \in D(\Delta_0)\}$ au dessus d'un point x de Ω rencontre A en un unique point $p = (t, x)$. En effet, s'il existait un autre point $p' = (t', x)$ dans A , les points p et p' seraient temporellement reliés d'après la Proposition 1.2.1 ; ce qui contredit l'achronalité de A . On définit alors l'application f qui associe à tout point x de Ω l'unique point t de $D(\Delta_0)$ tel que (t, x) appartient à A . Soient x, x' dans Ω . Comme la partie A est achronale, les points $p = (f(x), x)$ et $p' = (f(x'), x')$ ne sont pas temporellement reliés. D'après la Proposition 1.2.1, cela équivaut à dire que le vecteur $p - p'$ n'est pas temporel, i.e.

$$|f(x) - f(x')| \leq \|x - x'\|.$$

Autrement dit, f est 1-Lipschitz. Si la partie A est acausale, les points p, p' ne sont pas causalement reliés autrement dit le vecteur $p - p'$ n'est pas causal. Donc

$$|f(x) - f(x')| < \|x - x'\|.$$

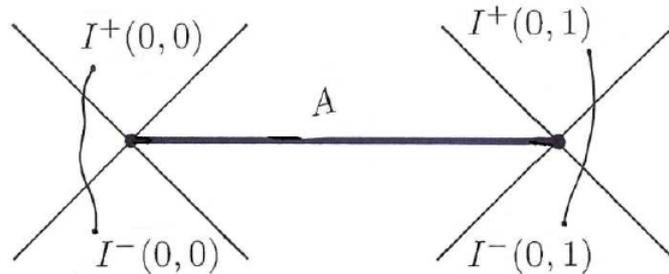
Autrement dit, f est 1-contractante. Cela prouve la proposition. \square

Définition 1.2.14. Une partie A de \mathbb{M}^{n+1} est *étanche* si tout point p de A admet un voisinage U tel que

1. la partie $A \cap U$ est achronale relativement à U (i.e. A est localement achronale) ;
2. toute courbe causale contenue dans U reliant un point de $I_U^+(A)$ à un point de $I_U^-(A)$ rencontre $A \cap U$.

Les sous-ensembles de \mathbb{M}^{n+1} introduits dans la Définition 1.2.14 sont connus sous la terminologie anglo-saxonne *edgeless sets*. À notre connaissance, il n'existe pas de terminologie française pour cette notion, nous proposons donc l'adjectif *étanche* pour caractériser ces ensembles. En effet, on peut penser une partie étanche A de \mathbb{M}^{n+1} comme une "barrière imperméable" qui sépare son futur de son passé. Cette image est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple 1.2.1. Soit A le segment $\{0\} \times [0, 1]$ de \mathbb{M}_0^2 . On voit sur la figure suivante que la condition 2 de la Définition 1.2.14 n'est pas vérifiée aux points $(0, 0)$ et $(0, 1)$. La partie A n'est donc pas étanche. Par contre, on voit facilement que $A \setminus \{(0, 0), (0, 1)\}$ est étanche.



Proposition 1.2.7. Soit Δ_0 une direction d'observation et soit $f : \Omega \subset H(\Delta_0) \rightarrow D(\Delta_0)$ une fonction 1-Lipschitz. Alors, la partie achronale $A = G(f)$ est :

1. étanche si et seulement si Ω est ouvert dans $H(\Delta_0)$;
2. fermée dans \mathbb{M}^{n+1} si et seulement si Ω est fermé dans $H(\Delta_0)$.

Démonstration. 1. Supposons A étanche. Soit x un point de Ω . Comme A est étanche, il existe un voisinage ouvert U de $p = (f(x), x)$ tel que toute courbe causale reliant un point de $I_U^+(p)$ à un point de $I_U^-(p)$ rencontre A . Soit V l'ensemble des points y de $H(\Delta_0)$ tels que la droite temporelle $\Delta_y = \{(t, y), t \in D(v_0)\}$ rencontre $I_U^+(p)$ et $I_U^-(p)$:

$$V = \{y \in H(\Delta_0), \Delta_y \cap I_U^+(p) \neq \emptyset \text{ et } \Delta_y \cap I_U^-(p) \neq \emptyset\}.$$

Le sous-ensemble V contient x et est contenu dans Ω puisque A est étanche. Montrons que V est un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} . Soit y un point de V et soient p_1, p_2 deux points dans l'intersection de Δ_y avec $I_U^-(p)$ et $I_U^+(p)$ respectivement. D'après la Proposition 1.2.2, $I_U^-(p)$ et $I_U^+(p)$ sont des ouverts de \mathbb{M}^{n+1} . Soient donc des voisinages ouverts U_1 et U_2 de p_1 et p_2 contenus dans $I_U^-(p)$ et $I_U^+(p)$. On considère alors l'intersection W des projections de U_1 et U_2 sur $H(\Delta_0)$. Comme la projection orthogonale sur $H(\Delta_0)$ est une application ouverte, W est un ouvert de $H(\Delta_0)$ qui contient y et est contenu dans V par définition. On vient donc de montrer que V est un voisinage ouvert de x contenu dans Ω . Donc Ω est ouvert dans $H(\Delta_0)$. Réciproquement, supposons Ω ouvert dans $H(\Delta_0)$. Soit $(f(x), x)$ un point de A et soit B une boule euclidienne centrée en x de rayon ε contenue dans Ω . Soit U le cylindre ouvert de \mathbb{M}^{n+1} :

$$U =]f(x) - \varepsilon/2, f(x) + \varepsilon/2[\times B.$$

Soit $p_1 = (t_1, x_1), p_2 = (t_2, x_2)$ deux points de $I_U^-(p)$ et $I_U^+(p)$ respectivement et soit $c(t) = (t, x(t))$ une courbe causale future reliant p_1 à p_2 paramétrée par

$[t_1, t_2] \subset D(v_0)$. Comme x est 1-Lipschitz, tout point $x(t)$ est contenue dans dans B . On considère alors la fonction $g : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(t) = f(x(t)) - t$. On a $g(t_1) < 0$ et $g(t_2) > 0$. La fonction g étant continue, il existe alors un réel t_0 dans $[t_1, t_2]$ tel que $g(t_0) = 0$ soit $c(t_0) \in U \cap A$.

2. Supposons A fermée dans \mathbb{M}^{n+1} . Soit $\{x_i\}_i$ une suite de Ω qui converge vers $x \in H(\Delta_0)$. Comme f est 1-Lipschitz, pour tous entiers i, j , on a

$$|f(x_i) - f(x_j)| \leq \|x_i - x_j\|.$$

Comme $\{x_i\}$ est une suite convergente de $H(\Delta_0)$, elle est de Cauchy. On déduit de l'inégalité précédente que $\{f(x_i)\}_i$ est une suite de Cauchy de $D(\Delta_0)$ et converge donc vers un point t de $D(\Delta_0)$. Comme la partie A est fermée, $(t, x) = \lim(f(x_i), x_i)$ appartient à A ; en particulier $x \in \Omega$. Donc, Ω est fermé dans $H(\Delta_0)$.

Réciproquement, supposons que Ω soit fermé dans $H(\Delta_0)$. Soit $\{(f(x_i), x_i)\}_i$ une suite de A qui converge vers $p = (t, x)$ dans \mathbb{M}^{n+1} . Comme $\{x_i\}_i$ est une suite du fermé Ω , sa limite x appartient à Ω . La fonction f étant continue, $\lim f(x_i) = f(x)$. Par unicité de la limite, $p = (f(x), x) \in A$. Donc A est fermée dans \mathbb{M}^{n+1} . \square

Corollaire 1.2.3. *Étant donnée une direction d'observation Δ_0 , les fermés achronaux étanches de \mathbb{M}^{n+1} sont les graphes d'applications 1-Lipschitz de $H(\Delta_0)$ dans $D(\Delta_0)$.*

Démonstration. Soit $A = G(f)$ une partie achronale non-vidé de \mathbb{M}^{n+1} où f est une fonction 1-Lipschitz d'une partie Ω de $H(\Delta_0)$ à valeurs dans $D(\Delta_0)$. D'après la Proposition 1.2.7, A est un fermé achronal étanche si et seulement si Ω est à la fois ouvert et fermé dans $H(\Delta_0)$. Comme $H(\Delta_0)$ est connexe et Ω non-vidé, on en déduit que $\Omega = H(\Delta_0)$. \square

Remarque 1.2.10. Il découle du Corollaire 1.2.3 que le futur (resp. passé) strict d'un fermé achronal étanche $A = G(f)$ coïncide avec l'épigraphe (resp. hypographe) strict de f .

Lemme 1.2.4. *Soit A une partie achronale de \mathbb{M}^{n+1} . Les sous-ensembles $I^-(A)$, A , $I^+(A)$ sont deux à deux disjoints. Si, de plus, A est fermé étanche, l'union disjointe de $I^-(A)$, A , $I^+(A)$ coïncide avec \mathbb{M}^{n+1} tout entier.*

Démonstration. Comme A est achronale, les sous-ensembles $I^+(A)$ (resp. $I^-(A)$) et A sont disjoints. Supposons que l'intersection $I^+(A) \cap I^-(A)$ est non-vidé. Il existe alors un point q de M^{n+1} et deux points p_0, p_1 de A tels que $q \in I^+(p_0) \cap I^-(p_1)$. D'après la Proposition 1.2.1, les vecteurs $q - p_0$ et $q - p_1$ sont respectivement temporels futur et passé. Comme

$$p_1 - p_0 = (p_1 - q) + (q - p_0)$$

est la somme de deux vecteurs temporels futurs et que le cône temporel futur est convexe, $p_1 - p_0$ est temporel futur. Donc p_1 est dans le futur strict de p_0 . Contradiction.

Supposons A fermé étanche. Soit v_0 une direction d'observation. Alors A est le graphe d'une application 1-Lipschitz f de $H(v_0)$ dans $D(v_0)$. Alors, d'après la Remarque 1.2.10, l'union disjointe de $I^-(A)$, A , $I^+(A)$ coïncide avec \mathbb{M}^{n+1} tout entier. \square

Dans ce qui suit, on s'intéresse aux parties de \mathbb{M}^{n+1} qui ne sont, à priori, pas achronales mais satisfont la condition plus faible d'être *localement* achronales. La proposition suivante donne des conditions suffisantes pour qu'une partie *localement* achronale de \mathbb{M}^{n+1} soit achronale.

Proposition 1.2.8. *Soit A une partie localement achronale étanche. Si A est fermé et connexe alors pour toute direction d'observation Δ_0 , A est le graphe d'une application 1-Lipschitz de $H(\Delta_0)$ dans $D(\Delta_0)$. En particulier, A est une partie achronale.*

Démonstration. Voir par exemple [5, Chapitre 1, Section 3, Proposition 3.1.1]. \square

Soulignons l'importance de l'hypothèse *connexe* dans l'énoncé de la Proposition 1.2.8. Par exemple, l'union de deux hyperplans euclidiens parallèles H et H' est un fermé localement achronal étanche qui n'est pas achronal : en effet, pour tout point $p \in H$, toute droite temporelle passant par p rencontre H' .

(1.2.4) Développement de Cauchy. Soit A une partie achronale de \mathbb{M}^{n+1} .

Définition 1.2.15. Le *développement de Cauchy futur* de A , noté $\mathcal{D}^+(A)$, est l'ensemble des points p de $I^+(A)$ tels que toute courbe causale issue de p inextensible dans le passé rencontre A .

On définit de même le développement de Cauchy passé de A , noté $\mathcal{D}^-(A)$, en remplaçant futur par passé et vice versa dans la définition ci-dessus.

Définition 1.2.16. Le développement de Cauchy de A , noté $\mathcal{D}(A)$, est l'ensemble des points p de \mathbb{M}^{n+1} tels que toute courbe causale inextensible passant par p rencontre A .

Remarque 1.2.11. D'après le Lemme 1.2.4, le développement de Cauchy d'une partie achronale A de \mathbb{M}^{n+1} est l'union disjointe de $\mathcal{D}^+(A)$, A et $\mathcal{D}^-(A)$.

Lemme 1.2.5. *Soit A un fermé achronal étanche de \mathbb{M}^{n+1} . Alors, le développement futur (resp. passé) de A est l'ensemble des points p de $I^+(A)$ (resp. $I^-(A)$) tels que toute droite lumière issue de p inextensible dans le passé (resp. futur) rencontre A .*

Démonstration. Voir par exemple [5, Chapitre 1, Section 5, Lemme 5.1.2]. \square

Proposition 1.2.9. *Il existe un fermé achronal étanche Σ de \mathbb{M}^{n+1} dont le développement de Cauchy est l'espace \mathbb{M}^{n+1} tout entier.*

On dit alors que \mathbb{M}^{n+1} est *globalement hyperbolique* et que Σ est une *hypersurface de Cauchy* de \mathbb{M}^{n+1} . Nous développerons la notion d'*hyperbolicité globale* dans le contexte plus général des espace-temps au Chapitre 4.

Démonstration. Soit Δ_0 une direction d'observation. D'après la Proposition 1.2.4, quitte à changer de paramétrage, $c(s) = (s, x(s))$, avec $s \in D(\Delta_0)$ et $x(s) \in H(\Delta_0)$. Soit Σ un hyperplan affine euclidien de \mathbb{M}^{n+1} . Dans la décomposition spatio-temporelle $D(\Delta_0) \times H(\Delta_0)$, l'hyperplan Σ se réalise comme $\{s_0\} \times H(\Delta_0)$ avec $s_0 \in D(\Delta_0)$. La courbe c rencontre donc Σ en un unique point. D'où $\mathbb{M}^{n+1} = \mathcal{D}(\Sigma)$. \square

On s'intéresse à présent aux développements de Cauchy de fermés achronaux étanches de \mathbb{M}^{n+1} . Ils ont été étudiés et classifiés dans [5]. On présente les résultats de cette classification dans le Théorème 1.2.1. Avant de l'énoncer, on définit *les domaines réguliers de Minkowski* suivant la terminologie de [14]. On reviendra en détails sur ces domaines dans le Chapitre 2.

Définition 1.2.17. Un *domaine régulier futur* (resp. *passé*) de Minkowski est un ouvert convexe non-vide de \mathbb{M}^{n+1} égal à l'intérieur de l'intersection des futurs (resp. passés) causaux d'hyperplans lumières affines.

Exemple 1.2.2. Le futur (resp. passé) strict d'un hyperplan lumière affine est un domaine régulier de Minkowski.

Théorème 1.2.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{M}^{n+1} , développement de Cauchy d'un fermé connexe localement achronal étanche A . Alors, Ω est soit un domaine régulier de Minkowski soit le domaine compris entre deux hyperplans lumières affines parallèles.*

Démonstration. Voir [5, Théorème 5.2.2]. \square

CHAPITRE

2

DOMAINES RÉGULIERS

Soit \mathbb{M}^{n+1} un espace-temps de Minkowski. Dans cette section, nous décrivons les domaines réguliers de \mathbb{M}^{n+1} -introduits dans la section précédente (voir Définition 1.2.17). Nous redémontrons, en particulier, un résultat de F. Bonsante qui porte sur les hyperplans d'appui à un domaine régulier [15, Proposition 4.12] dans le cadre plus général des convexes fermés d'un espace affine.

Deux espaces interviennent dans l'étude des domaines réguliers de \mathbb{M}^{n+1} que nous proposons : l'espace des hyperplans lumières de \mathbb{M}^{n+1} et l'espace des hyperplans de type espace de \mathbb{M}^{n+1} appelé espace de co-Minkowski (voir [7]) ou *half pipe* (voir [16, 39]).

2.1 Espace des hyperplans lumières

Dans cette section, on va définir et décrire l'espace des hyperplans lumières affines de \mathbb{M}^{n+1} .

À cet effet, on introduit d'abord l'espace des hyperplans affines de \mathbb{M}^{n+1} . Ce dernier est défini dans l'Annexe A.3 dans le cadre général d'un espace affine quelconque A . On en rappelle ici la définition dans le cas particulier où A est l'espace-temps de Minkowski \mathbb{M}^{n+1} . On gardera les mêmes notations que celles utilisées dans l'Annexe A.1 : on notera $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ l'espace vectoriel des formes affines sur \mathbb{M}^{n+1} et ξ la classe des formes affines constantes dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$.

Définition 2.1.1. L'espace des hyperplans de \mathbb{M}^{n+1} est l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})) \setminus \{\xi\}$ de l'espace projectif muni de la topologie induite. On le note $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$. Un point ζ de

$\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ définit l'hyperplan

$$H_\zeta = \{p \in A : \alpha(p) = 0\}$$

où α est un représentant de ζ .

Un hyperplan de \mathbb{M}^{n+1} est *lumière* s'il est dirigé par l'orthogonal d'un vecteur lumière (voir Définition 1.2.10). Ainsi, un hyperplan d'équation $\alpha(p) = 0$ est lumière si et seulement si l'application linéaire $\vec{\alpha}$ associée à α est $-\langle v, \cdot \rangle_{1,n}$ où v est un vecteur lumière de V . D'où la définition suivante.

Définition 2.1.2. L'espace des hyperplans lumières de \mathbb{M}^{n+1} , noté $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$, est la quadrique

$$\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1}) = \{[\alpha] \in \mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = -\langle v, \cdot \rangle_{1,n}, v \in V \text{ lumière}\}$$

de $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ munie de la topologie induite.

Pour définir les domaines réguliers de \mathbb{M}^{n+1} , il s'avère plus naturel de considérer l'espace des futurs/passés d'hyperplans lumières.

(2.1.1) Espace des futurs/passés d'hyperplans lumières. Dans le paragraphe (A.3.1) de l'Annexe A.3, nous définissons l'espace des demi-espaces (délimités par des hyperplans) d'un espace affine A . Nous en rappelons la définition ici pour $A = \mathbb{M}^{n+1}$. Soit $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ la sphère des rayons de $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ i.e. le quotient de $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}) \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence qui identifie α à $\lambda\alpha$ si $\lambda > 0$. On note ξ_+ (resp. ξ_-) la classe des formes affines constantes positives (resp. négatives).

Définition 2.1.3. L'espace des demi-espaces de \mathbb{M}^{n+1} est l'ouvert $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})) \setminus \{\xi_+, \xi_-\}$ de la sphère des rayons muni de la topologie induite. On le note $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$. Tout point ζ de $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ définit le demi-espace de \mathbb{M}^{n+1}

$$D_\zeta = \{p \in A, \alpha(p) \geq 0\}$$

où α est un représentant de ζ .

Remarque 2.1.1. L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ est un revêtement double de $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$.

Soit $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ le sous-espace de $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ constitué des futurs d'hyperplans lumières affines de \mathbb{M}^{n+1} . Plus précisément, $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ est la quadrique de $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ définie par

$$\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1}) = \{[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = -\langle v, \cdot \rangle_{1,n}, v \text{ lumière futur}\}$$

où $\vec{\alpha}$ est l'application linéaire associée à α .

De même, on définit le sous-espace $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$ de $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ constitué des passés d'hyperplans lumières affines de \mathbb{M}^{n+1} :

$$\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1}) = \{[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = -\langle v, \cdot \rangle_{1,n}, v \text{ lumière passé}\}$$

où $\vec{\alpha}$ est l'application linéaire associée à α .

Remarque 2.1.2. L'application d'antipodie $[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) \mapsto [-\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ définit un difféomorphisme entre $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ et $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. De plus, les restrictions de la projection $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ à $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ et $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$ sont des plongements d'image $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$.

2.2 Espace de co-Minkowski

La description de l'ensemble des hyperplans d'appui à un domaine régulier que nous proposons au paragraphe (2.3.4) fait intervenir l'espace des hyperplans de type espace de \mathbb{M}^{n+1} appelé *espace de co-Minkowski*. Cette terminologie se justifie par le fait qu'il existe une relation de *dualité* entre l'espace de Minkowski et l'espace de co-Minkowski que nous précisons au paragraphe (2.2.6).

Définition 2.2.1. L'espace de co-Minkowski, noté $co\mathbb{M}^{n+1}$, est le sous-espace de $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ défini par

$$co\mathbb{M}^{n+1} = \{[\alpha] \in \mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = - \langle v, \cdot \rangle_{1,n}, v \in V \text{ temporel}\}$$

où $\vec{\alpha}$ est l'application linéaire associée à α .

Remarque 2.2.1. Toute isométrie \mathbb{M}^{n+1} envoie hyperplan affine de type espace sur hyperplan affine de type espace. Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ agit donc naturellement sur $co\mathbb{M}^{n+1}$. Plus précisément, cette action est définie par $f.[\alpha] := [\alpha \circ f^{-1}]$ pour tous $f \in \text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ et $[\alpha] \in co\mathbb{M}^{n+1}$.

(2.2.1) Pseudo-métrique sur l'espace de co-Minkowski. Soit $\pi : co\mathbb{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ la projection naturelle qui associe à tout hyperplan affine de type espace son vecteur normal futur de norme -1 . Il s'agit d'un fibré en droites où chaque fibre est constituée d'hyperplans de type espace parallèles. Soit $g_{\mathbb{H}^n}$ la métrique Riemannienne sur \mathbb{H}^n induite par la forme quadratique $q_{1,n}$. On munit alors $co\mathbb{M}^{n+1}$ de la pseudo-métrique $g_{co\mathbb{M}^{n+1}}$ définie comme le tiré en arrière par π de $g_{\mathbb{H}^n}$. La pseudo-métrique $g_{co\mathbb{M}^{n+1}}$ est dégénérée et son noyau est tangent aux fibres de $\pi : co\mathbb{M}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^n$.

Remarque 2.2.2. Le groupe $\text{Isom}(\mathbb{M}^{n+1})$ est strictement contenu dans le groupe des transformations de $co\mathbb{M}^{n+1}$ qui préservent la pseudo-métrique dégénérée $g_{co\mathbb{M}^{n+1}}$ (voir [7, Section 2. , Remark 2.2]).

(2.2.2) Structure conforme sur l'espace des hyperplans lumières. La frontière de $co\mathbb{M}^{n+1}$ dans $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ est le sous-espace $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ constitué des hyperplans lumières de \mathbb{M}^{n+1} . La projection π s'étend continûment à $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ en un fibré en droite $\partial\pi : \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$. Chaque fibre est formée d'hyperplans lumières parallèles. L'espace $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ possède ainsi une structure conforme canonique : on le munit du tiré en arrière par $\partial\pi$ de la classe conforme de la métrique ronde sur la sphère $\partial\mathbb{H}^n$. Il s'agit d'une classe conforme de pseudo-métriques dégénérées et son noyau est tangent à chaque fibre de $\partial\pi : \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \partial\mathbb{H}^n$.

(2.2.3) Espace des futurs/passés d'hyperplans de type espace. La pré-image de $co\mathbb{M}^{n+1} \subset \mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ dans le revêtement double $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ admet deux composantes connexes. On note $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ la composante constituée des futurs d'hyperplans de type

espace et $co\mathbb{M}_-^{n+1}$ celle constituée des passés d'hyperplans de type espace. Plus précisément

$$\begin{aligned} co\mathbb{M}_+^{n+1} &= \{[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = - \langle v, . \rangle_{1,n}, v \in V \text{ temporel futur}\} \\ co\mathbb{M}_-^{n+1} &= \{[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = - \langle v, . \rangle_{1,n}, v \in V \text{ temporel passé}\} \end{aligned}$$

où $\vec{\alpha}$ est l'application linéaire associée à α .

La projection $\pi : co\mathbb{M}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^n$ se relève en deux projections $\pi_+ : co\mathbb{M}_+^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^n$ et $\pi_- : co\mathbb{M}_-^{n+1} \longrightarrow \mathbb{H}^n$. On munit $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ (resp. $co\mathbb{M}_-^{n+1}$) du tiré en arrière par π_+ (resp. π_-) de $g_{\mathbb{H}^n}$.

Remarque 2.2.3. L'application d'antipodie $[\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) \mapsto [-\alpha] \in \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ définit une isométrie entre $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ et $co\mathbb{M}_-^{n+1}$. De plus, les restrictions de la projection $\mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$ à $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ et $co\mathbb{M}_-^{n+1}$ définissent des isométries sur leur image $co\mathbb{M}^{n+1}$.

(2.2.4) Description de $co\mathbb{M}^{n+1}$ relativement à un observateur de \mathbb{M}^{n+1} . Le choix d'une direction d'observation de \mathbb{M}^{n+1} (voir Définition 1.1.11) permet de définir un modèle *affine* de l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$:

Soit $v_0 \in \mathbb{H}^n$ une direction d'observation. On note $A(v_0)$ la carte affine

$$A(v_0) := \{\alpha \in \mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}) : \vec{\alpha} = - \langle v, . \rangle_{1,n}, v \in V \text{ tel que } - \langle v, v_0 \rangle_{1,n} = 1\}.$$

Définition 2.2.2. On appelle *modèle affine* de l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$ l'image de $co\mathbb{M}^{n+1}$ dans la carte affine $A(v_0)$. Il est noté $co\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$.

Remarque 2.2.4. Comme toute droite vectorielle de type temps de V rencontre l'hyperplan affine d'équation $- \langle ., v_0 \rangle_{1,n} = 1$ en un unique point, l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$ est diffeomorphe à son modèle affine.

Modèle du cylindre. Le choix supplémentaire d'une origine p_0 dans \mathbb{M}^{n+1} permet d'identifier le modèle affine $co\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$ à un cylindre plein $\mathbb{B}^n \times \mathbb{R}$:

Soit α l'isomorphisme linéaire de $V \times \mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ qui associe à tout couple (v, s) la forme affine $\alpha(v, s) := - \langle . - p_0, v \rangle_{1,n} - s$.

Remarque 2.2.5. L'hyperplan $\alpha(v, s)(p) = 0$ est le translaté par sv_0 de l'hyperplan affine passant par p_0 de direction v^\perp .

L'intersection du cône temporel de V avec l'hyperplan affine euclidien $- \langle ., v_0 \rangle_{1,n} = 1$ est une boule ronde de dimension n notée $\mathcal{B}(v_0)$. Il est clair que :

Fait 2.2.1. La restriction de α à $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ est un diffeomorphisme sur le modèle affine $co\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$.

Remarque 2.2.6. Deux points (v, s) et (v, s') de $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ sur la même droite verticale correspondent à deux hyperplans de type espace parallèles. L'hyperplan $\alpha(v, s) = 0$ est dans le futur de l'hyperplan $\alpha(v, s') = 0$ si et seulement si $s \geq s'$.

Remarque 2.2.7. La boule $\mathcal{B}(v_0)$ est en fait le modèle de Klein de l'espace hyperbolique. En effet, rappelons que \mathbb{H}^n est isométrique à son modèle projectif $\mathbb{P}(\mathbb{H}^n)$, c'est à dire l'ensemble des droites vectorielles de type temps de V , muni du poussé en avant de la métrique hyperbolique $g_{\mathbb{H}^n}$. Le modèle de Klein de \mathbb{H}^n est l'image du modèle projectif de \mathbb{H}^n dans la carte affine $\{- < v, v_0 >_{1,n} = 1\}$, c'est à dire la boule ronde $\mathcal{B}(v_0)$. On note encore $g_{\mathbb{H}^n}$ la métrique hyperbolique sur $\mathcal{B}(v_0)$. Dans le modèle $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$, la pseudo-métrique dégénérée de $co\mathbb{M}^{n+1}$ s'exprime alors par $g_{\mathbb{H}^n} + 0 \cdot dx_t^2$.

Remarque 2.2.8. La direction d'observation v_0 permet de décomposer V sous la forme $\text{vect}(v_0) \oplus v_0^\perp$. Dans cette décomposition, la boule $\mathcal{B}(v_0)$ est l'ensemble des vecteurs $v_0 + u$ où u appartient à la boule unité \mathcal{B}_0 de l'hyperplan euclidien v_0^\perp . Elle est donc entièrement déterminée par \mathcal{B}_0 . En pratique, il sera plus utile d'identifier le cylindre $\mathcal{B}_0 \times \mathbb{R}$ à l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$: à tout couple $(u, s) \in \mathcal{B}_0 \times \mathbb{R}$ on associe la forme affine $\beta(u, s) := \alpha(v_0 + u, s)$. Pour tout $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ tel que $p - p_0 = tv_0 + x$, on a $\beta(u, s)(p) = t - < u, x >_0 - s$ où $< \cdot, \cdot >_0$ est le produit scalaire sur v_0^\perp induit par $< \cdot, \cdot >_{1,n}$.

On note H_0 l'hyperplan affine euclidien $- < v, v_0 >_{1,n} = 1$. Remarquons que le modèle $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ de l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$ est contenu dans l'hyperplan affine $H_0 \times \mathbb{R}$ de $V \times \mathbb{R}$. Le principal intérêt du modèle cylindrique de l'espace de coMinkowski réside alors dans le fait suivant :

Fait 2.2.2. *L'intersection de $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ avec un hyperplan affine de $H_0 \times \mathbb{R}$ transverse, munie de la métrique induite, est isométrique à l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n .*

Cela découle simplement du fait qu'un hyperplan de $H_0 \times \mathbb{R}$ transverse à $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ rencontre chaque fibre du cylindre. Le fait ci-dessus motive la définition suivante :

Définition 2.2.3. On appelle *hyperplan hyperbolique* de $co\mathbb{M}^{n+1}$ une section de $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ par un hyperplan affine transverse de $H_0 \times \mathbb{R}$.

Décomposition du bord conforme de l'espace de coMinkowski. Rappelons que le bord conforme de l'espace de coMinkowski $co\mathbb{M}^{n+1}$ est l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ des hyperplans lumières affines de \mathbb{M}^{n+1} . Comme pour $co\mathbb{M}^{n+1}$, on appelle *modèle affine* de $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ son image dans la carte affine $A(v_0)$. Puisque toute droite lumière de V rencontre l'hyperplan H_0 en un unique point, $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ est difféomorphe à son modèle affine.

L'intersection du cône lumière de V avec H_0 est la sphère conforme $\partial\mathcal{B}(v_0)$ de dimension $(n - 1)$. On munit le cylindre $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ du tiré en arrière par la projection $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R} \rightarrow \partial\mathcal{B}(v_0)$ de la structure conforme de $\partial\mathcal{B}(v_0)$. Comme pour $co\mathbb{M}^{n+1}$, l'isomorphisme α induit une isométrie conforme entre $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ et le modèle affine de $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$.

Remarque 2.2.9. Avec les notations de la Remarque 2.2.8, la sphère $\partial\mathcal{B}(v_0)$ est l'ensemble des vecteurs $v_0 + u$ où u appartient à la frontière de la boule ronde \mathcal{B}_0 dans v_0^\perp , notée $\partial\mathcal{B}_0$. Comme pour $co\mathbb{M}^{n+1}$, il sera plus utile en pratique d'identifier le cylindre $\partial\mathcal{B}_0 \times \mathbb{R}$ à $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$ par l'application qui associe à (u, s) la forme affine $\partial\beta(u, s) := \alpha(u + v_0, s)$. De même, pour tout $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ tel que $p - p_0 = tv_0 + x$, on a

$$\partial\beta(u, s)(p) = t - \langle u, x \rangle_0 - s.$$

Comme pour $co\mathbb{M}^{n+1}$, on a le fait suivant :

Fait 2.2.3. *L'intersection de $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ avec un hyperplan affine transverse de $H_0 \times \mathbb{R}$, munie de la structure conforme induite, est une sphère conforme de dimension $(n - 1)$.*

(2.2.5) Adhérence de $co\mathbb{M}^{n+1}$ dans l'espace projectif. On rappelle que ξ désigne la classe des formes affines constantes dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ et $\xi_+, \xi_- \in \mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ les classes des formes affines constantes positives et négatives.

La frontière de $co\mathbb{M}^{n+1}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ est $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1}) \sqcup \{\xi\}$. Ainsi, on peut voir l'adhérence de $co\mathbb{M}^{n+1}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ comme un tore plein pincé dont l'intérieur est $co\mathbb{M}^{n+1}$.

Dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$, la frontière de $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ est $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1}) \sqcup \{\xi_+, \xi_-\}$. On peut donc voir l'adhérence de $co\mathbb{M}_+^{n+1}$ comme un cylindre plein pincé en ses deux extrémités. L'adhérence de $co\mathbb{M}_-^{n+1}$ admet exactement la même description en remplaçant $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ par $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$.

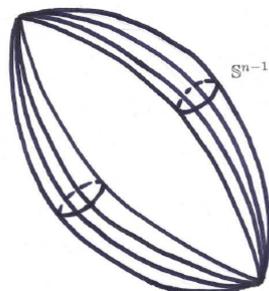


FIGURE 2.1 – L'espace de coMinkowski et son bord conforme dans la sphère des rayons.

(2.2.6) Dualité entre \mathbb{M}^{n+1} et $co\mathbb{M}^{n+1}$. On a vu qu'un hyperplan affine de type espace de \mathbb{M}^{n+1} définit un point de $co\mathbb{M}^{n+1}$. Inversement, nous allons voir que tout point de \mathbb{M}^{n+1} définit *hyperplan hyperbolique* de $co\mathbb{M}^{n+1}$ (voir Définition 2.2.3). Nous verrons que cette dualité provient de la dualité entre les espaces vectoriels $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})^*$. Rappelons d'abord le plongement de l'espace affine \mathbb{M}^{n+1} dans l'espace

vectorel $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})^*$ (voir Annexe A.3).

Soit $i : \mathbb{M}^{n+1} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})^*$ l'application qui associe à tout point $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ la forme linéaire $i(p)$ définie par $i(p)(\alpha) := \alpha(p)$. Cette application étant affine et injective, on peut voir \mathbb{M}^{n+1} comme un hyperplan affine de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})^*$.

Soit $\pi : \mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ la projection canonique.

Lemme 2.2.1. *Pour tout $p \in \mathbb{M}^{n+1}$, l'ensemble des hyperplans affines de type espace passant par p est l'intersection de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ avec l'hyperplan projectif $\pi(\ker i(p))$.*

Démonstration. Par définition

$$\pi(\ker i(p)) := \{[\alpha] \in \mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})) : \alpha(p) = 0\}.$$

Autrement dit, c'est l'ensemble des hyperplans affines passant par p . Son intersection avec $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ est donc l'ensemble des hyperplans affines *de type espace* passant par p . \square

Notons $K(p)$ l'intersection de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ avec l'hyperplan projectif $\pi(\ker i(p))$. Décrivons $K(p)$ dans le modèle affine et dans le modèle cylindrique de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$:

Fixons une origine p_0 de \mathbb{M}^{n+1} et une direction d'observation $v_0 \in \mathbb{H}^n$. Dans le modèle affine $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$, le sous-espace $K(p)$ est simplement l'intersection de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$ avec l'hyperplan vectoriel $\ker i(p)$.

Soit $\alpha : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ l'isomorphisme $\alpha(v, s) := - \langle \cdot, v \rangle_{1,n} - s$. On note $\mathcal{B}(v_0)$ la boule ronde de l'hyperplan affine euclidien $- \langle \cdot, v_0 \rangle_{1,n} = 1$ munie de la métrique hyperbolique $g_{\mathbb{H}^n}$. On a vu que α induit une isométrie entre le cylindre $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$, muni de la métrique $g_{\mathbb{H}^n} + 0 \cdot dx_t^2$, et le modèle affine de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}(v_0)$. Par conséquent, $K(p)$ se réalise dans $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ comme l'intersection de $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ avec l'hyperplan vectoriel $\alpha^{-1}(\ker i(p))$. Appelons H_0 l'hyperplan affine euclidien $- \langle \cdot, v_0 \rangle_{1,n} = 1$. Comme $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ est contenu dans $H_0 \times \mathbb{R}$, l'intersection de $\alpha^{-1}(\ker i(p))$ avec $H_0 \times \mathbb{R}$ est un hyperplan affine de $H_0 \times \mathbb{R}$ qui rencontre chaque fibre du cylindre $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$. Vu dans $H_0 \times \mathbb{R}$, $K(p)$ est donc une section de $\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ par un hyperplan affine transverse, c'est à dire un hyperplan hyperbolique (voir Définition 2.2.3). On vient ainsi de montrer le fait suivant :

Fait 2.2.4. *Pour tout $p \in \mathbb{M}^{n+1}$, l'ensemble des hyperplans affines de type espace de \mathbb{M}^{n+1} passant par p est un hyperplan hyperbolique de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ noté $K(p)$.*

L'ensemble des hyperplans lumières affines de \mathbb{M}^{n+1} passant par p est la sphère conforme $\partial K(p)$ de $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$. Dans le modèle $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$, la sphère $\partial K(p)$ est l'ensemble des $(v, s) \in \partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ tels que $- \langle v, p - p_0 \rangle_{1,n} = s$. Autrement dit, c'est le graphe de la fonction continue h_p de $\partial\mathcal{B}(v_0)$ dans \mathbb{R} définie par

$$h_p(v) = - \langle v, p - p_0 \rangle_{1,n}.$$

Remarque 2.2.10. Rappelons que $\partial\mathcal{B}_0$ désigne la sphère unité de v_0^\perp . Dans le modèle $\partial\mathcal{B}_0 \times \mathbb{R}$ (voir Remarque 2.2.2), la sphère $\partial K(p)$ est le graphe de la fonction \hat{h}_p de $\partial\mathcal{B}_0$ dans \mathbb{R} définie par $\hat{h}_p(u) := h_p(v_0 + u)$. Si $p - p_0 = tv_0 + x$ avec $x \in v_0^\perp$, on a

$$\hat{h}_p(u) = t - \langle u, x \rangle_0$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est le produit scalaire sur v_0^\perp induit par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$.

La proposition suivante met en correspondance les différentes configurations possibles de deux hyperplans hyperboliques $K(p_1)$ et $K(p_2)$ de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ et le type du vecteur $p_1 - p_2$.

Proposition 2.2.1. *Soient $p_1, p_2 \in \mathbb{M}^{n+1}$. On note $K(p_1), K(p_2)$ les hyperplans hyperboliques de $\text{co}\mathbb{M}^{n+1}$ associés. On note $\overline{K_1}$ (resp. $\overline{K_2}$) l'adhérence de K_1 (resp. K_2) dans $\text{co}\mathbb{M}^{n+1} \cup \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$.*

1. Si $K(p_1)$ et $K(p_2)$ se rencontrent, alors le vecteur $p_1 - p_2$ est de type espace.
2. Si $\overline{K(p_1)}$ et $\overline{K(p_2)}$ sont disjoints, alors le vecteur $p_1 - p_2$ est de type temps.
3. Si $\overline{K(p_1)}$ et $\overline{K(p_2)}$ se rencontrent en un point de $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$, alors le vecteur $p_1 - p_2$ est de type lumière.

2.3 Domaines réguliers

Pour tout $\Lambda \subset \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$, on désigne par $\bar{\Omega}(\Lambda)$ le convexe fermé de \mathbb{M}^{n+1} obtenu comme intersection des demi-espaces $D_\zeta = \{p \in \mathbb{M}^{n+1}, \alpha(p) \geq 0\}$ avec $[\alpha] = \zeta \in \Lambda$. On note $\Omega(\Lambda)$ l'intérieur de $\bar{\Omega}(\Lambda)$.

Définition 2.3.1. On appelle *domaine régulier* tout ouvert convexe *non-vide* de \mathbb{M}^{n+1} de la forme $\Omega(\Lambda)$ où Λ est une partie de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ ou de $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. Un domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ est dit *propre* si Λ contient au moins deux éléments¹.

Remarque 2.3.1. Cette définition est bien compatible avec la Définition 1.2.17 des domaines réguliers donnée dans le Chapitre 1, Section 1.2.

Le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est une intersection de demi-espaces *futurs* si $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$; *passés* si $\Lambda \subset \mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. Ainsi, un domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ est futur ou passé complet suivant que Λ soit une partie de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ ou de $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. Par soucis de légèreté, on dira simplement que $\Omega(\Lambda)$ est futur ou passé.

(2.3.1) Exemples. Les domaines réguliers de \mathbb{M}^{n+1} qui ne sont pas propres se réduisent :

1. à \mathbb{M}^{n+1} lui-même : il s'agit du domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ avec $\Lambda = \emptyset$;
2. et aux futurs/passés stricts d'hyperplans lumières : il s'agit des domaines réguliers $\Omega(\Lambda)$ où Λ est un singleton.

1. On a adopté ici la terminologie de [14] qui diffère de celle de [15] pour lequel un domaine régulier désigne un domaine propre au sens de la Définition 2.3.1.

Les domaines réguliers *propres* constituent, quant à eux, une classe très riche de domaines convexes de \mathbb{M}^{n+1} . On donne ici une famille d'exemples qui jouera un rôle central dans la description des espace-temps conformément plat contenant des photons complets, à savoir **les domaines de Misner**.

Les domaines de Misner. On appelle *domaine de Misner futur* l'intersection des futurs stricts de deux hyperplans lumières de \mathbb{M}^{n+1} . Autrement dit, un domaine de Misner est un domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ défini par un fermé Λ de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ contenant exactement deux points distincts. On définit de même les domaines de Misner passés en renversant l'orientation du temps. Ces domaines ont été introduits par T. Barbot dans [4, Section 4] pour décrire les espace-temps *plats* globalement hyperboliques.

Notons qu'un domaine de Misner est le futur d'un $(n-1)$ -plan affine de type espace. En effet, deux hyperplans lumières affines P_1, P_2 de \mathbb{M}^{n+1} s'intersectent le long d'un $(n-1)$ -plan P de type espace. L'intersection des deux demi-espaces futurs délimités par P_1 et de P_2 est donc le quart d'espace égal au futur strict de P . Plus généralement, nous allons voir le futur strict d'un k -plans de type espace de \mathbb{M}^{n+1} , avec $0 \leq k \leq n-1$, est un domaine régulier futur que nous appellerons *domaine de Misner futur d'indice k* .

Soit P un k -plan de type espace de \mathbb{M}^{n+1} où k est un entier compris entre 0 et $(n-1)$. L'orthogonal de P est alors un $(n-k+1)$ -plan de type $(1, n-k)$.

Lemme 2.3.1. *Le k -plan de type espace P est l'intersection des hyperplans lumières affines passant par un point p de P , dirigés par l'orthogonal d'une direction lumière de P^\perp . De plus, le futur strict de P est l'intersection des futurs stricts de cette famille d'hyperplans lumières affines.*

Démonstration. Pour simplifier l'écriture, on identifie \mathbb{M}^{n+1} à son espace vectoriel sous-jacent V par l'application qui associe à un point q le vecteur $q-p$. On note \mathcal{P} la famille des hyperplans lumières paramétrée par les directions lumières de P^\perp .

Montrons que P est l'intersection des hyperplans de la familles \mathcal{P} . Pour toute direction lumière Δ de P^\perp , on a $P \subset \Delta^\perp$. Par conséquent, P est contenu dans l'intersection des hyperplans lumières de la famille \mathcal{P} . Réciproquement, soit q un point de cette intersection. Soit \mathcal{B} une base de vecteurs lumières de P^\perp . Par hypothèse, q est orthogonal à chaque vecteur de cette base. Donc, $q \in (P^\perp)^\perp = P$.

À présent, montrons que le futur strict de P est l'intersection des futurs stricts des hyperplans de la famille \mathcal{P} , notée Ω . D'après ce qui précède, le futur strict de P est contenu dans Ω . Réciproquement, soit $q \in \Omega$. Soit q_P le projeté orthogonal de q sur P . On va montrer que $q \in I^+(q_P)$. Soit v un vecteur lumière futur de P^\perp . Comme $q \in \Omega$, on a $\langle q, v \rangle_{1,n} < 0$. Puisque q_P est orthogonal à P^\perp , $\langle q - q_P, v \rangle_{1,n} = \langle q, v \rangle_{1,n}$. Par suite, $\langle q - q_P, v \rangle_{1,n} < 0$ pour tout vecteur lumière futur de P^\perp . Autrement dit, le vecteur $q - q_P$ appartient à l'intersection des demi-espaces futurs délimités par un hyperplan lumière de P^\perp . Il est facile de voir que cette intersection est exactement le cône temporel futur de P^\perp . On vient ainsi de montrer que le vecteur $q - q_P$ est temporel futur. D'après la Proposition 1.2.1, on en déduit que $q \in I^+(q_P)$. Donc, $\Omega \subset I^+(P)$. Le lemme s'en suit. \square

Corollaire 2.3.1. *Le futur strict de P est un domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ défini par une sphère conforme Λ de dimension $(n - k - 1)$ de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$. En particulier, lorsque k est égal à $n - 1$, le futur strict de P est un domaine de Misner.*

Démonstration. Soit p un point de P . Pour simplifier l'écriture, on identifie \mathbb{M}^{n+1} à son espace vectoriel sous-jacent V par l'application qui associe à un point q le vecteur $q - p$. On note $S(P)$ la sphère des directions lumières de P^\perp . Il s'agit du quotient du cône lumière de P^\perp par la relation d'équivalence qui identifie deux vecteurs s'ils sont colinéaires par un scalaire strictement positif. C'est une sphère conforme de dimension $(n - k - 1)$. Soit Λ le sous-ensemble de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ constitué des éléments $[\alpha]$ tels que $\alpha = - \langle v, \cdot \rangle_{1,n}$ avec $[v] \in S(P)$. Il est clair que Λ est conformément isométrique à $S(P)$. C'est donc une sphère conforme de dimension $(n - k - 1)$ de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$. D'après la Proposition 2.3.5, l'ouvert $\Omega(\Lambda)$ coïncide alors avec l'intersection des demi-espaces futurs délimités par les hyperplans lumières orthogonaux à une direction lumière de P^\perp . Par conséquent, d'après le Lemme 2.3.1, le domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ est le futur strict de P . \square

Définition 2.3.2. Soit k un entier compris entre 0 et n . On appelle *domaine de Misner d'indice k* un domaine régulier $\Omega(\Lambda)$ défini par une sphère conforme Λ de dimension $(n - k - 1)$.

En particulier, un domaine de Misner d'indice $(n - 1)$ est un domaine de Misner au sens de Barbot [4].

Remarque 2.3.2. Un domaine de Misner d'indice 0 est le futur strict d'un point de \mathbb{M}^{n+1} .

(2.3.2) Caractérisation des domaines réguliers. Dans ce paragraphe, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ouvert $\Omega(\Lambda)$ défini par une famille Λ de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ (ou de $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$) soit *non-vide*, c'est à dire soit *un domaine régulier*. Rappelons que ξ_- désigne la classe des formes affines constantes négatives dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$.

Proposition 2.3.1. *Soit $\Lambda \subset \mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$ et soit $\bar{\Lambda}$ son adhérence dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$. Alors, l'ouvert $\Omega(\Lambda)$ est non-vide si et seulement si $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$.*

La Proposition 2.3.1 est un cas particulier de la Proposition A.3.2 démontrée dans l'Annexe A.3, que nous rappelons ici.

Proposition 2.3.2. *Soit $\Lambda' \subset \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$. Alors, $\bar{\Omega}(\Lambda')$ est non vide si et seulement si $\xi_- \notin \text{Conv}(\bar{\Lambda}')$ où $\bar{\Lambda}'$ est l'adhérence de Λ' dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$.*

Nous renvoyons à l'Annexe A.3 (§(A.3.3)) pour la définition de l'enveloppe convexe d'une partie de $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ (voir Définition A.3.3 et Lemme A.3.6).

Le fait que Λ soit contenu dans $\mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$ permet de montrer les deux faits suivants :

1. $\bar{\Omega}(\Lambda) \neq \emptyset$ si et seulement si $\Omega(\Lambda) \neq \emptyset$ (voir Lemme 2.3.2) ;
2. $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$ si et seulement si $\xi_- \notin \text{Conv}(\bar{\Lambda})$ (voir Lemme 2.3.3).

La Proposition 2.3.1 découle alors immédiatement de la Proposition 2.3.2 appliquée à $\Lambda' = \Lambda$ et de ces deux faits que nous prouvons maintenant.

Par soucis de légèreté, on suppose $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ mais les arguments sont similaires pour $\Lambda \subset \mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$.

Lemme 2.3.2. *Si $\bar{\Omega}(\Lambda) \neq \emptyset$ alors $\Omega(\Lambda) \neq \emptyset$.*

Démonstration. Comme $\bar{\Omega}(\Lambda) \neq \emptyset$, il existe $x \in \bar{\Omega}(\Lambda)$. Comme $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$, le convexe $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est futur-complet, donc $I^+(x) \subset \bar{\Omega}(\Lambda)$. Comme $I^+(x)$ est ouvert, il s'en suit que $I^+(x) \subset \Omega(\Lambda)$. D'où $\Omega(\Lambda) \neq \emptyset$. \square

Lemme 2.3.3. *Si $\xi_- \in \text{Conv}(\bar{\Lambda})$ alors $\xi_- \in \bar{\Lambda}$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$. D'après la description de l'adhérence de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ (voir Section 2.2, §(2.2.5)), les points adhérents à Λ sont tous dans $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ sauf éventuellement la classe ξ_+ des formes affines constantes positives. Soit donc Λ_0 et J les images réciproques par la projection canonique $\mathbb{S} : \mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}) \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ de $\bar{\Lambda}$ et de $\text{coM}^+_{n+1} \cup \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ respectivement. On note α_1 et α_{-1} les formes affines constantes respectivement égales à 1 et -1 . Comme $\xi_- \in \text{Conv}(\bar{\Lambda})$, il existe des réels positifs ou nuls t, t_1, \dots, t_p et p formes affines β_1, \dots, β_p dans $\Lambda_0 \cap J$ tels que

$$\alpha_{-1} = t\alpha_1 + \sum_{i=1}^p t_i\beta_i.$$

Remarquons que J est un cône convexe de $\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1})$ stable par addition d'une forme affine constante. Il s'en suit que α_{-1} est soit la forme nulle, soit la forme constante positive $t\alpha_1$, soit une forme affine de J . Contradiction! \square

On reformule à présent la Proposition 2.3.1 relativement au choix d'un observateur de \mathbb{M}^{n+1} .

Soit $p_0 \in \mathbb{M}^{n+1}$ et $v_0 \in \mathbb{H}^n$ une direction d'observation. Dans ce qui suit, on identifie $\mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$ au cylindre $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ défini dans le paragraphe (2.2.4) de la Section 2.2.

Définition 2.3.3. Soit $\Lambda \subset \mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$. On dit que Λ est *majoré* (resp. *minoré*) s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $s \leq C$ (resp. $s \geq C$) pour tout $(v, s) \in \Lambda$.

Lemme 2.3.4. *Soit Λ un sous-ensemble de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ (resp. $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$). Alors, $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$ si et seulement si Λ est majoré (resp. minoré).*

Démonstration. On suppose $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$; la preuve est similaire pour $\Lambda \subset \mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. On montre d'abord que si $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$ alors Λ est majoré. Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\{(v_i, s_i)\}$ de Λ telle que $\lim s_i = +\infty$. Pour tout entier i , on note α_i la forme affine $\alpha(v_i, s_i) = - \langle v_i, \cdot - p_0 \rangle_{1,n} - s_i$. Comme $\lim s_i = +\infty$ alors, à partir d'un certain rang, on peut écrire $\alpha_i/s_i = - \langle v_i/s_i, \cdot - p_0 \rangle_{1,n} - 1$. Quitte à extraire, la suite $\{v_i\}$ converge dans $\partial\mathcal{B}(v_0)$. Comme $\lim s_i = +\infty$, il s'en suit que $\lim v_i/s_i = 0$. Par conséquent, $\{\alpha_i/s_i\}$ converge vers la forme affine constante égale à -1 . Posons

$\xi_i = [\alpha_i] \in \mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$. On vient de montrer que la suite $\{\xi_i\}$ de Λ converge vers ξ_- ; autrement dit $\xi_- \in \bar{\Lambda}$. Contradiction. Donc, Λ est majoré.

Réciproquement, supposons Λ majoré. Supposons par l'absurde que $\xi_- \in \bar{\Lambda}$. Alors, il existe une suite $\{\xi_i\}$ de Λ qui converge vers ξ_- . Pour tout i , il existe un unique couple $(v_i, s_i) \in \partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ tel que $\xi_i = [\alpha(v_i, s_i)]$ avec $\alpha(v_i, s_i) = - \langle v_i, \cdot - p_0 \rangle_{1,n} - s_i$. On note α_i la forme affine $\alpha(v_i, s_i)$ et α_{-1} la forme affine constante égale à -1 . Comme $\lim \xi_i = \xi_-$, il existe une suite $\{t_i\}$ de réels positifs telle que $\lim t_i \alpha_i = \alpha_{-1}$. Il en découle les deux égalités suivantes :

$$\lim t_i v_i = 0 \tag{2.1}$$

$$\lim t_i s_i = 1. \tag{2.2}$$

Quitte à extraire, la suite $\{v_i\}$ converge dans $\partial\mathcal{B}(v_0)$. On déduit alors de l'égalité 2.1 que $\lim t_i = 0$. Comme $t_i > 0$, l'égalité 2.2 implique que $s_i > 0$ à partir d'un certain rang. Par hypothèse, Λ est majoré ; il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $s_i \leq C$ pour tout entier i . Ainsi, la suite $\{s_i\}$ est bornée. Comme $\lim t_i = 0$, il s'en suit que $\lim s_i t_i = 0$, ce qui contredit l'égalité 2.2. Donc, $\xi_- \notin \bar{\Lambda}$. \square

D'après le Lemme 2.3.4, la Proposition 2.3.1 se reformule alors comme suit.

Proposition 2.3.3. *Soit Λ une partie de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ (resp. $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$). L'ouvert $\Omega(\Lambda)$ est non vide si et seulement si Λ est majoré (resp. minoré).*

(2.3.3) Description des domaines réguliers.

Proposition 2.3.4. *Soit $\Lambda \subset \mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$. Alors $\Omega(\Lambda) = \Omega(\bar{\Lambda}^L)$ où $\bar{\Lambda}^L$ est l'adhérence de Λ dans $\mathcal{L}^\pm(\mathbb{M}^{n+1})$.*

Démonstration. Soit $\bar{\Lambda}$ l'adhérence de Λ dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$. D'après la description de l'adhérence de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$,

1. soit $\bar{\Lambda} = \bar{\Lambda}^L$, alors d'après la Proposition A.3.3, $\Omega(\bar{\Lambda}^L) = \Omega(\Lambda)$;
2. soit $\bar{\Lambda}$ est l'union disjointe de $\bar{\Lambda}^L$ et $\{\xi_+\}$ où ξ_+ est la classe des formes affines constantes positives dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$. Dans ce cas,

$$\Omega(\bar{\Lambda}) = \Omega(\bar{\Lambda}^L) \cap \{p \in \mathbb{M}^{n+1} : \alpha_1(p) > 0\}$$

où α_1 est la forme affine constante égale à 1. Or, $\{p \in \mathbb{M}^{n+1} : \alpha_1(p) > 0\} = \mathbb{M}^{n+1}$. D'où, $\Omega(\bar{\Lambda}^L) = \Omega(\bar{\Lambda})$. Donc, d'après la Proposition A.3.3, $\Omega(\bar{\Lambda}^L) = \Omega(\Lambda)$. \square

Proposition 2.3.5. *Soit $\Omega(\Lambda)$ un domaine régulier. Si Λ est fermé dans $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ alors $\Omega(\Lambda)$ coïncide avec l'intersection des demi-espaces stricts de Λ :*

$$\Omega(\Lambda) = \{p \in \mathbb{M}^{n+1}, \alpha(p) > 0, \forall [\alpha] \in \Lambda\}.$$

Démonstration. Soit $\zeta \in \Lambda$. On note D_ζ le demi-espace strict $\{p \in \mathbb{M}^{n+1}, \alpha(p) > 0\}$ avec $\zeta = [\alpha]$, et \bar{D}_ζ son adhérence. On a : $\bar{\Omega}(\Lambda) \subset \bar{D}_\zeta$. Donc, $\Omega(\Lambda) \subset D_\zeta$. D'où, $\Omega(\Lambda) \subset \bigcap_{\zeta \in \Lambda} D_\zeta$.

Réciproquement, soit $p \in \mathbb{M}^{n+1}$ tel que $\alpha(p) > 0$ pour tout $[\alpha] \in \Lambda$. Supposons par l'absurde que $p \notin \Omega(\Lambda)$. Il existe alors une suite $\{p_i\}$ de \mathbb{M}^{n+1} qui converge vers p et une suite $\{\zeta_i\}$ de Λ telle que $\zeta_i(p_i) < 0$. Soit $p_0 \in \mathbb{M}^{n+1}$ et soit v_0 une direction d'observation. Dans la suite de la preuve, on suppose $\Omega(\Lambda)$ futur mais le raisonnement est le même pour un domaine passé. On identifie $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$: un couple (v, s) définit la classe de la forme affine $\alpha(v, s) = - \langle v, \cdot - p_0 \rangle_{1,n} - s$. Soit (v_i, s_i) le point de $\partial\mathcal{B}(v_0) \times \mathbb{R}$ correspondant à ζ_i . L'inégalité $\zeta_i(p_i) < 0$ s'écrit :

$$- \langle v_i, p_i - p_0 \rangle_{1,n} - s_i < 0$$

Par hypothèse, p vérifie pour tout entier i

$$- \langle v_i, p - p_0 \rangle_{1,n} - s_i > 0$$

Par conséquent,

$$- \langle v_i, p_i - p_0 \rangle_{1,n} < s_i < - \langle v_i, p - p_0 \rangle_{1,n}$$

Quitte à extraire, la suite $\{v_i\}$ converge vers un point $v \in \partial\mathcal{B}(v_0)$. En passant à la limite, la suite $\{s_i\}$ converge donc vers $s = - \langle v, p - p_0 \rangle_{1,n}$. Comme Λ est fermé, $(v, s) \in \Lambda$. Or, $- \langle v, p - p_0 \rangle_{1,n} - s = 0$. Contradiction. Donc, $p \in \Omega(\Lambda)$. \square

La proposition suivante donne une description du convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ relativement à un observateur de \mathbb{M}^{n+1} .

Soit $p_0 \in \mathbb{M}^{n+1}$ et $v_0 \in \mathbb{H}^n$ une direction d'observation. On désigne par H_0 l'hyperplan de type espace passant par p_0 de direction v_0^\perp et par D_0 la droite affine de type temps passant par p_0 dirigée par v_0 . On note $\|\cdot\|$ (resp. $|\cdot|$) la norme euclidienne sur H_0 (resp. D_0) induit par $q_{1,n}$.

Proposition 2.3.6. *Soit Λ un sous-ensemble de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ (resp. $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$). Alors, pour tout observateur $(p_0, v_0) \in \mathbb{M}^{n+1} \times \mathbb{H}^n$ de \mathbb{M}^{n+1} , le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est l'épigraphe (resp. hypographe) d'une fonction 1-Lipschitz convexe (resp. concave) de $(H_0, \|\cdot\|)$ dans $(D_0, |\cdot|)$.*

Démonstration. Soit $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$. Le raisonnement est similaire pour un sous-ensemble Λ de $\mathcal{L}^-(\mathbb{M}^{n+1})$. Pour simplifier l'écriture, on ne perd rien à supposer que \mathbb{M}^{n+1} est l'espace de Minkowski usuel $\mathbb{R}^{1,n}$ avec pour origine le point $p_0 = (0, \dots, 0)$ et pour direction d'observation $v_0 = (1, 0, \dots, 0)$. La décomposition associée à cet observateur est $\mathbb{R}^{1,n} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^n$. La norme $\|\cdot\|$ est la norme usuelle de \mathbb{R}^n . On note $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ le produit scalaire associé. Tout point de $\mathbb{R}^{1,n}$ sera noté (t, x) avec $t \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Dans cette décomposition, la norme de (t, x) pour la forme quadratique $q_{1,n}$ est $-t^2 + \|x\|^2$. Dans la suite, on identifie $\mathcal{L}^+(\mathbb{R}^{1,n})$ au cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ où \mathbb{S}^{n-1} est la sphère unité de l'hyperplan euclidien \mathbb{R}^n :

Tout demi-espace futur délimité par un hyperplan lumière est défini par un unique couple $(u, s) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ comme l'ensemble des points $(t, x) \in \mathbb{R}^{1,n}$ tels que :

$$- \langle (1, u), (t, x) \rangle_{1,n} \geq s$$

c'est à dire $t - \langle u, x \rangle_0 \geq s$.

Si $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est vide alors il est égal à l'épigraphe de la fonction constante $f^+ = +\infty$. On suppose donc $\bar{\Omega}(\Lambda)$ non-vide. Soit $(t, x) \in \mathbb{R}^{1,n}$. Par définition :

$$\begin{aligned} (t, x) \in \bar{\Omega} &\Leftrightarrow t - \langle u, x \rangle_0 \geq s, \quad \forall (u, s) \in \Lambda \\ &\Leftrightarrow t \geq \langle u, x \rangle_0 + s, \quad \forall (u, s) \in \Lambda \\ &\Leftrightarrow t \geq f^+(x) \end{aligned}$$

avec

$$f^+(x) = \sup_{(u,s) \in \Lambda} (\langle u, x \rangle_0 + s).$$

On vient de montrer que $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est l'épigraphe de la fonction f^+ de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Comme $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est convexe, f^+ est convexe. Reste à montrer que f_+ est 1-Lipschitz. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et soit $(u, s) \in \Lambda$. On a :

$$\begin{aligned} (\langle u, x \rangle_0 + s) - f^+(y) &= (\langle u, x \rangle_0 + s) - \sup_{(u', s') \in \Lambda} (\langle u', y \rangle_{1,n} + s') \\ &= (\langle u, x \rangle_0 + s) + \inf_{(u', s') \in \Lambda} (-\langle u', y \rangle_{1,n} - s') \\ &\leq \langle u, x \rangle_0 + s - \langle u, y \rangle_0 - s \\ &\leq \langle u, x - y \rangle_0. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz, $\langle u, x - y \rangle_0 \leq \|x - y\|$. Pour tout $(u, s) \in \Lambda$ on a donc $(\langle u, x \rangle_0 + s) - f^+(y) \leq \|x - y\|$. D'où :

$$f^+(x) - f^+(y) \leq \|x - y\|$$

En intervertissant les rôles de x et y , on obtient $-\|x - y\| \leq f^+(x) - f^+(y)$. D'où :

$$|f^+(x) - f^+(y)| \leq \|x - y\|.$$

Autrement dit, f^+ est 1-Lipschitz. □

Il découle de la Proposition 2.3.6 qu'un domaine régulier futur (resp. passé) est l'épigraphe (resp. hypographe) *strict* d'une fonction convexe (resp. concave) 1-Lipschitz de H_0 dans D_0 . Sa frontière, égale au graphe de cette fonction, est donc un fermé achronal étanche de \mathbb{M}^{n+1} (voir Corollaire 1.2.7). De plus, d'après la Remarque 1.2.10, un domaine régulier futur (resp. passé) coïncide avec le futur (resp. passé) de sa frontière. En fait, on a mieux lorsque le domaine est *propre* :

Proposition 2.3.7. *Soit Ω un domaine régulier propre de \mathbb{M}^{n+1} . Si Ω est futur (resp. passé) alors il coïncide avec le développement futur (resp. passé) de sa frontière $\partial\Omega$. De plus, le développement passé (resp. futur) de $\partial\Omega$ est vide.*

Démonstration. Supposons que Ω est un domaine régulier futur. Le raisonnement est similaire pour les domaines passés. Comme Ω coïncide avec le futur strict de sa frontière, il contient en particulier $\mathcal{D}^+(\partial\Omega)$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $p \in \Omega$ et γ une courbe causale issue de p inextensible dans le passé. Comme Ω est propre, Ω admet un hyperplan d'appui P de type espace. La courbe γ doit couper P , donc $\partial\Omega$. D'où, $p \in \mathcal{D}^+(\partial\Omega)$.

Montrons à présent que le développement passé de $\partial\Omega$ est vide. Par l'absurde, supposons qu'il existe un point p dans le passé strict de $\partial\Omega$ tel que toute courbe causale issue de p inextensible dans le futur rencontre $\partial\Omega$. Alors, p appartient au passé strict d'un hyperplan P de Λ . Par suite, toute droite lumière issue de p parallèle à P reste dans le passé strict de P et ne rencontre donc pas Ω . Contradiction. \square

(2.3.4) Hyperplans d'appuis. Dans ce paragraphe, nous redémontrons le résultat suivant dû à F. Bonsante [15, Proposition 4.12].

Proposition 2.3.8. *Soit Ω un domaine régulier propre et $p \in \partial\Omega$. Alors, l'ensemble des hyperplans d'appui en p est égal à l'enveloppe convexe dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$ de ceux qui sont lumières.*

Remarque 2.3.3. En tout point p de $\partial\Omega$, il existe au moins un hyperplan d'appui lumière. Si c'est le seul hyperplan d'appui lumière en p , la Proposition 2.3.8 stipule que c'est le seul hyperplan d'appui en p . La Proposition 2.3.8 a donc de l'intérêt pour les points p de $\partial\Omega$ pour lesquels il existe au moins deux hyperplans d'appui lumières. Ces points sont dits **singuliers** selon la terminologie de [15]. L'hypothèse *propre* assure l'existence de points singuliers.

La Proposition 2.3.8 découle d'un énoncé plus général que nous prouvons dans l'Annexe A.3 (voir Proposition A.3.3) et que nous rappelons ci-dessous.

Proposition 2.3.9. *Soit $\Lambda \subset \mathcal{D}(\mathbb{M}^{n+1})$ et soit Λ_0 sa projection dans $\mathcal{H}(\mathbb{M}^{n+1})$. On note $\bar{\Lambda}_0$ l'adhérence de Λ_0 dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(\mathbb{M}^{n+1}))$. Pour tout $p \in \partial\Omega(\Lambda)$, l'ensemble des hyperplans d'appui au convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ en p est égal à l'enveloppe convexe de ceux contenus dans $\bar{\Lambda}_0$.*

Preuve de la Proposition 2.3.8. On suppose Ω futur-complet; la preuve est similaire pour un domaine passé. Soit donc $\Lambda \subset \mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ tel que $\Omega(\Lambda) = \Omega$. D'après la Proposition 2.3.4, on ne perd rien à supposer que Λ est fermé dans $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$. Soit Λ_0 la projection de Λ dans $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$; c'est un fermé de $\mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$. D'après la Proposition 2.3.9, l'ensemble des hyperplans d'appuis à Ω en p est l'enveloppe convexe de ceux contenus dans Λ_0 . Comme tous les éléments de Λ_0 sont des hyperplans lumières, le résultat s'en suit. \square

Corollaire 2.3.2. *Soit Ω un domaine régulier. Pour tout $p \in \partial\Omega$, les hyperplans d'appui à Ω en p sont de type lumière ou espace.*

Démonstration. Dans la preuve de la Proposition 2.3.8, on a montré que l'ensemble des hyperplans d'appui à Ω en p est égal à l'enveloppe convexe de ceux contenus dans Λ_0 . Comme $\Lambda_0 \subset \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$, son enveloppe convexe est contenue dans $\text{co}\mathbb{M}^{n+1} \cup \mathcal{L}(\mathbb{M}^{n+1})$. Le résultat s'en suit. \square

Pour finir, signalons le fait suivant qui découle immédiatement de la Proposition 2.3.9 :

Fait 2.3.1. *Soit Ω un domaine régulier futur de \mathbb{M}^{n+1} . Pour tout fermé Λ de $\mathcal{L}^+(\mathbb{M}^{n+1})$ tel que $\Omega = \Omega(\Lambda)$, tout hyperplan d'appui lumière au domaine régulier Ω est un élément de Λ .*

(2.3.5) Strates. Nous allons voir que la frontière d'un domaine régulier propre Ω de \mathbb{M}^{n+1} définit une stratification de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n . Celle-ci fut introduite et décrite par F. Bonsante dans [15].

Rappelons que le modèle projectif de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n correspond à l'ensemble des directions de type temps de \mathbb{M}^{n+1} et son bord conforme $\partial\mathbb{H}^n$ à l'ensemble des directions lumières de \mathbb{M}^{n+1} .

À tout point p de $\partial\Omega$, on associe le sous-ensemble de $\partial\mathbb{H}^n$ constitué des directions des hyperplans d'appui lumières en p , noté $L(p)$.

Définition 2.3.4. Soit $p \in \partial\Omega$ un point singulier. On appelle *strate* de p , notée $\text{Strat}(p)$, l'enveloppe convexe de $L(p)$ dans \mathbb{H}^n .

Avant d'énoncer le résultat de stratification, faisons les deux remarques préliminaires suivantes :

Remarque 2.3.4. Deux points singuliers p et q de $\partial\Omega$ ne sont pas causalement reliés. En effet, dans le cas contraire, p et q seraient reliés par un segment lumière contenu dans $\partial\Omega$. On ne perd rien à supposer que $q \in J^+(p)$. Comme q est singulier, il existe une demi-droite lumière issue de q non-colinéaire au segment $[p, q]$ contenue dans $\partial\Omega$. Or, puisque $q \in J^+(p)$, cette demi-droite rencontrerait $I^+(p)$ qui est contenu dans Ω . Contradiction.

Remarque 2.3.5. Toute direction de type espace de \mathbb{M}^{n+1} définit un hyperplan \mathbb{H}^{n-1} dans \mathbb{H}^n . En effet, comme l'orthogonal d'une direction de type espace est de type $(1, n-1)$, son intersection avec \mathbb{H}^n est un sous-espace totalement géodésique de codimension 1.

D'après la Remarque 2.3.4, deux points singuliers p, q de $\partial\Omega$ sont toujours reliés par un segment de type espace. On note $\mathbb{H}^{n-1}(p, q)$ l'hyperplan de \mathbb{H}^n défini par l'orthogonal de $p - q$. L'hyperplan $\mathbb{H}^{n-1}(p, q)$ divise l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n en deux demi-espaces fermés. Étant donnés deux convexe C et C' de \mathbb{H}^n , on dit que $\mathbb{H}^{n-1}(p, q)$ *sépare au sens large* C et C' si C est contenu dans l'un des demi-espaces fermés délimité par $\mathbb{H}^{n-1}(p, q)$ et C' dans l'autre.

Proposition 2.3.10 ([15, Proposition 4.14]). *Soit Ω un domaine régulier propre de \mathbb{M}^{n+1} . Pour tous points singuliers p, q de $\partial\Omega$, l'hyperplan $\mathbb{H}^{n-1}(p, q)$ sépare, au sens large, les strates $\text{Strat}(p)$ et $\text{Strat}(q)$. Le segment $[p, q]$ est contenu dans $\partial\Omega$ si et seulement si les strates de p et q se rencontrent. Dans ce cas, pour tout point r dans le segment $[p, q]$, on a :*

$$\text{Strat}(r) = \text{Strat}(p) \cap \mathbb{H}^{n-1}(p, q) = \text{Strat}(q) \cap \mathbb{H}^{n-1}(p, q) = \text{Strat}(p) \cap \text{Strat}(q).$$

CHAPITRE

3

ESPACES D'EINSTEIN

Dans ce chapitre, nous décrivons les espaces modèles des espace-temps conformément plats, à savoir *les espaces d'Einstein*. Nous gardons le même style d'écriture que celui du Chapitre 1 afin de mettre en évidence la nature des objets que nous définissons.

3.1 Espaces d'Einstein

Nous rappelons que nous notons (n, p, r) la signature d'une forme quadratique q où n, p, r sont respectivement le nombre de coefficients négatifs, positifs, nuls dans la décomposition en carrés de q . Lorsque q est non-dégénérée, nous notons simplement (n, p) .

Soit E un espace vectoriel de dimension $n + 3$ (avec $n \geq 2$) muni d'une forme quadratique $q_{2,n+1}$ de signature $(2, n + 1)$. On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,n+1}$ la forme bilinéaire associée. Soit $\mathbb{S}(E)$ la sphère des rayons de E i.e. le quotient de $E \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence qui identifie p à q si $q = \lambda p$ avec $\lambda > 0$. On note $\mathbb{S} : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{S}(E)$ la projection canonique. Pour tout sous-espace vectoriel F de E , on désigne par F^\perp son orthogonal pour la forme quadratique $q_{2,n+1}$.

Définition 3.1.1. Un vecteur *non nul* v de E est dit *temporel* (resp. *lumière*, *spatial*) si le réel $q_{2,n+1}(v)$ est strictement négatif (resp. nul, strictement positif).

Définition 3.1.2. Le cône lumière de E , noté $\mathcal{L}(E)$, est le lieu des vecteurs v de $E \setminus \{0\}$ tels que $q_{2,n+1}(v)$ est nul.

Définition 3.1.3. Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et soit q_F la restriction de $q_{2,n+1}$ à F . Alors, F est dit :

1. *temporel* (resp. *euclidien*, *pseudo-euclidien*) si la forme q_F est définie négative (resp. définie positive, non-dégénérée indéfinie) ;
2. *dégénéré* s'il existe un vecteur non nul de F orthogonal à F i.e. $F \cap F^\perp \neq \{O_E\}$;
3. *totalelement isotrope* si tout vecteur de F est orthogonal à F i.e. $F \subset F^\perp$.

Dans le cas où F est pseudo-euclidien, nous dirons " F est de type $\text{sign}(q_F)$ " pour préciser la signature de q_F .

(3.1.1) Décomposition spatio-temporelle de E . Soit P un plan temporel de E . Son orthogonal P^\perp est un sous-espace vectoriel euclidien de dimension n de E . Nous posons alors la définition suivante.

Définition 3.1.4. Une *décomposition spatio-temporelle* de E est une décomposition en somme orthogonale $P \oplus P^\perp$ où P est un plan temporel de E .

Un vecteur v de E sera alors noté (u, w) où u, w sont les projetés orthogonaux de v sur P et P^\perp respectivement.

Définition 3.1.5. Le *produit scalaire associé à une décomposition spatio-temporelle* $P \oplus P^\perp$ de E est la forme q_0^P donnée par

$$q_0^P(u, w) = -q_{2,n+1}(u) + q_{2,n+1}(w)$$

pour tout vecteur (u, w) de E .

(3.1.2) Cercles temporels et sphères euclidiennes. Soit P un plan temporel de E . Soit S_0 la sphère ronde de (E, q_0^P) :

$$S_0 = \{v \in E : q_0^P(v) = 1\}.$$

1. L'intersection de S_0 avec P est un cercle noté $\mathcal{S}^1(P)$. On désigne par $d\theta^2(P)$ la métrique ronde induite par q_0 sur $\mathcal{S}^1(P)$.
2. L'intersection de S_0 avec P^\perp est une sphère de dimension n , notée $\mathcal{S}^n(P)$. On désigne par $d\sigma^2(P)$ la métrique ronde induite par q_0 sur $\mathcal{S}^n(P)$.

Définition 3.1.6. Un *cercle temporel* de E est un cercle $\mathcal{S}^1(P)$, où P est un plan temporel de E , muni de la métrique $-d\theta^2(P)$.

Définition 3.1.7. Une *sphère euclidienne* de E est une sphère $\mathcal{S}^n(P)$, où P est un plan temporel de E , munie de la métrique $d\sigma^2(P)$.

(3.1.3) Espaces d'Einstein. On considère le projectivisé $L(E)$ du cône lumière de E dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(E)$. Nous allons voir que cet espace est une variété de dimension $(n + 1)$ munie d'une classe conforme de métriques Lorentziennes.

Lemme 3.1.1. *Pour tout plan temporel P de E , la restriction de la projection canonique \mathbb{S} à $\mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$, notée f_P , est un plongement différentiable d'image $L(E)$.*

Démonstration. Soient (x, y) et (x', y') deux points de $\mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ tels que $f_P(x, y) = f_P(x', y')$. Alors, il existe $\lambda > 0$ tel que $x' = \lambda x$ et $y' = \lambda y$. Or, $1 = |x'|^2 = \lambda^2 |x|^2 = \lambda^2$. D'où $\lambda = 1$. Donc, f_P est injective. Il est clair que l'image de f_P est contenue dans $L(E)$. Réciproquement, soit $\xi \in L(E)$; $\xi = \mathbb{S}(v)$ où v est un vecteur lumière de E . Il existe un unique couple $(x, y) \in P \times P^\perp$ tel que $v = x + y$. On a $0 = q_{2,n+1}(v) = -|x|^2 + \|y\|^2$. Donc, $|x|^2 = \|y\|^2$. Ainsi, $(x', y') := (x/|x|, y/|x|) \in \mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ et $f_P(x', y') = \xi$. \square

L'espace $L(E)$ est alors une variété différentiable de dimension $(n + 1)$ connexe, compacte et orientable. Pour tout plan temporel P , la métrique induite par la forme quadratique $q_{2,n+1}$ sur $\mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ est la métrique Lorentzienne $-d\theta^2(P) + d\sigma^2(P)$. Ainsi, d'après la Lemme 3.1.1, le poussé en avant de la métrique $-d\theta^2(P) + d\sigma^2(P)$ par le plongement f_P est une métrique Lorentzienne sur $L(E)$ que nous notons g_P .

Lemme 3.1.2. *Soient P, P' deux plans temporels de E . Alors les métriques Lorentziennes g_P et $g_{P'}$ sont dans la même classe conforme.*

Démonstration. Soient $s_P, s_{P'} : L(E) \rightarrow E$ les inverses de $f_P, f_{P'}$ respectivement. Comme $\mathbb{S} \circ s_P = \mathbb{S} \circ s_{P'}$ alors pour tout point q de $L(E)$, il existe $\lambda(q) > 0$ tel que $s_P(q) = \lambda(q)s_{P'}(q)$. Comme $s_P, s_{P'}$ sont différentiables, $\lambda : L(E) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est différentiable. Ainsi, pour tout point q de $L(E)$ et tout vecteur tangent ξ à $L(E)$ en q , on a

$$\begin{aligned} g_P(q)(\xi) &= q_{2,n+1}(d_q s_P(\xi)) \\ &= q_{2,n+1}(d_q \lambda(\xi) s_{P'}(q) + \lambda(q) d_q s_{P'}(\xi)). \end{aligned}$$

Comme $\langle s_{P'}(q), s_{P'}(q) \rangle_{2,n+1} = 0$ alors $\langle d_q s_{P'}(\xi), s_{P'}(q) \rangle_{2,n+1} = 0$. D'où

$$g_P(q)(\xi) = \lambda(q)^2 q_{2,n+1}(d_q s_{P'}(\xi)) = \lambda(q)^2 g_{P'}(q)(\xi).$$

Donc, $g_P, g_{P'}$ sont dans la même classe conforme. \square

D'après le Lemme 3.1.2, la forme quadratique $q_{2,n+1}$ induit *canoniquement* une classe conforme de métriques Lorentziennes sur $L(E)$ que nous notons \mathfrak{g} .

Lemme 3.1.3. *La variété $L(E)$ munie de la structure conforme Lorentzienne \mathfrak{g} est temporellement orientable.*

Démonstration. Soit P un plan temporel orienté. L'orientation de P induit une orientation de $\mathcal{S}^1(P)$. Soit X_1 le champ de vecteurs sur $\mathcal{S}^1(P)$ qui associe à tout point z le vecteur unitaire orienté positivement de $T_z \mathcal{S}^1(P)$. On considère le champ de vecteurs temporels X sur $\mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ défini par $X(z, x) = (X_1(z), 0)$. Le push-forward de X par f_P définit alors une orientation temporelle de $L(E)$. \square

Remarque 3.1.1. Une orientation temporelle de $L(E)$ est donnée par l'orientation d'un plan temporel de E .

Définition 3.1.8. Un *espace d'Einstein* de dimension $(n + 1)$ est un espace $(L(E), \mathfrak{g})$ orienté et temporellement orienté. On le note $Ein_{1,n}(E)$.

Un espace d'Einstein est donc un espace-temps *conforme*.

Remarque 3.1.2. Nous aurions pu projeter le cône lumière de E dans l'espace projectif $\mathbb{P}(E)$ au lieu de le projeter dans la sphère $\mathbb{S}(E)$. Nous aurions ainsi obtenu un espace-temps conforme, noté $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ diffeomorphe au quotient de $\mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ par la relation d'antipodie. La projection canonique $\pi_0 : \mathbf{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow \mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ est un revêtement double.

Exemple 3.1.1. Soit $\mathbb{R}^{2,n+1}$ l'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+3} muni de la forme quadratique

$$q_{2,n+1}(u, v, x_1, \dots, x_{n+1}) = -u^2 - v^2 + x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2$$

dans le système de coordonnées associé à la base canonique de \mathbb{R}^{n+3} . On note $\mathbf{Ein}_{1,n}$ l'espace d'Einstein $\mathbf{Ein}_{1,n}(\mathbb{R}^{2,n+1})$ et $\mathbf{Ein}_{1,n}$ son modèle projectif.

Tout espace d'Einstein est conformément isométrique à $\mathbf{Ein}_{1,n}$. Tout au long de ce chapitre, nous pourrons donc illustrer les propriétés des espaces d'Einstein sur le modèle jouet $\mathbf{Ein}_{1,n}$.

(3.1.4) Revêtement universel de $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$. Soit $\pi : \widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E) \rightarrow \mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ un revêtement universel de l'univers d'Einstein. On munit $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$ de la structure de variété différentielle pour laquelle π est un diffeomorphisme local. On considère alors sur \widetilde{M} le tiré en arrière par π de la classe conforme \mathfrak{g} . Soit X un champ de vecteurs de type temps sur $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ compatible avec l'orientation temporelle de M . Alors π^*X est un champ de vecteurs de type temps sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$. On munit $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$ de l'orientation temporelle définie par π^*X . Ainsi, $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$ est un espace-temps conforme et π est une application conforme qui préserve les orientations temporelles de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$ et $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$.

Soit P un plan temporel de E . Nous notons $D(P)$ le revêtement universel de $\mathcal{S}^1(P)$. Soit $dt^2(P)$ la métrique sur $D(P)$ pour laquelle la projection de $D(P)$ sur $\mathcal{S}^1(P)$ est une isométrie. Le diffeomorphisme conforme $f_P : \mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P) \rightarrow \mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ défini dans le paragraphe précédent se relève en un diffeomorphisme conforme

$$\tilde{f}_P : D(P) \times \mathcal{S}^n(P) \rightarrow \widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$$

où $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ est muni de la classe conforme de la métrique $-dt^2(P) + d\sigma^2(P)$. Nous faisons alors les remarques triviales mais utiles suivantes.

Remarque 3.1.3. Pour tout $x \in \mathcal{S}^n(P)$, le sous-espace $D(P) \times \{x\}$ est un espace affine de dimension 1 de type temps plongé dans $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$.

Remarque 3.1.4. Pour tout $t \in D(P)$, le sous-espace $\{t\} \times \mathcal{S}^n(P)$ est une hypersurface plongée de type espace de $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$.

Ainsi, tout plan temporel P de E définit deux feuilletages sur $\widetilde{\mathbf{Ein}}_{1,n}(E)$: un feuilletage en droites verticales de type temps et un feuilletage en sphères horizontales de type espace.

Définition 3.1.9. Une *décomposition spatio-temporelle* de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est un difféomorphisme conforme \tilde{f}_P^{-1} de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ dans $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ où P est un plan temporel de E .

L'orientation temporelle de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ induit une orientation de la droite $D(P)$. Pour alléger l'écriture, nous identifierons $D(P)$ à \mathbb{R} dans toute la suite.

(3.1.5) Isométries conformes. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Nous allons voir que le groupe des isométries conformes de $Ein_{1,n}(E)$, noté $\text{Conf}(Ein_{1,n}(E))$, est isomorphe au groupe $O(2, n + 1)$ des isométries linéaires de $\mathbb{R}^{2,n+1}$. Pour cela, la version Lorentzienne du théorème de Liouville est centrale. Nous désignons par $O(E, q_{2,n+1})$ le groupe d'isométries linéaires de $(E, q_{2,n+1})$.

Théorème 3.1.1 (Liouville). *Toute application conforme entre deux ouverts de l'espace d'Einstein $Ein_{1,n}(E)$ (pour $n \geq 2$) est la restriction d'un élément de $O(E, q_{2,n+1})$.*

Le théorème de Liouville est à l'origine un résultat de géométrie Riemannienne. Une preuve dans le cas général des métriques pseudo-Riemannienne est donnée par C. Frances dans [20]. D'après le théorème 3.1.1, le groupe d'isométries conformes de $Ein_{1,n}(E)$ est contenu dans $O(E, q_{2,n+1})$. Le lemme suivant permet de déduire l'inclusion réciproque.

Lemme 3.1.4. *La classe conforme \mathfrak{g} de $Ein_{1,n}(E)$ est $O(E, q_{2,n+1})$ -invariante.*

Démonstration. Toute isométrie linéaire γ de E se factorise en un difféomorphisme $\bar{\gamma} : \mathbb{S}(E) \rightarrow \mathbb{S}(E)$ qui préserve $L(E)$. Montrons que $\bar{\gamma}$ préserve la classe conforme \mathfrak{g} . Soit g une métrique Lorentzienne dans \mathfrak{g} . Il existe un plan temporel P de E telle que $g = g_P$. Pour tout point q de $L(E)$ et tout vecteur tangent ξ en q , on a alors

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}^* g_P(q)(\xi) &= g_P(\bar{\gamma} \cdot q)(d_q \bar{\gamma}(\xi)) \\ &= q_{2,n+1}(d_{\bar{\gamma} \cdot q} f_P^{-1}(d_q \bar{\gamma}(\xi))) \\ &= q_{2,n+1}(\gamma^{-1} d_{\bar{\gamma} \cdot q} f_P^{-1}(d_q \bar{\gamma}(\xi))) \\ &= q_{2,n+1}(d_q (\gamma^{-1} f_P^{-1} \bar{\gamma})(\xi)) \\ &= g_{P'}(q)(\xi) \end{aligned}$$

avec $P' = \gamma^{-1}P$. D'après le Lemme 3.1.2, on déduit que $\bar{\gamma}^*g$ appartient à \mathfrak{g} . □

On vient ainsi de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.1.1. *Le groupe d'isométries conformes de $Ein_{1,n}(E)$ est isomorphe à $O(2, n + 1)$.*

Soit $O_0(2, n + 1)$ la composante neutre de $O(2, n + 1)$.

Proposition 3.1.2. *Le groupe des isométries conformes de $Ein_{1,n}(E)$ qui préservent son orientation et son orientation temporelle est isomorphe à $O_0(2, n + 1)$. On le note $\text{Conf}_0(Ein_{1,n}(E))$.*

Groupe d'isométries conformes de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soit $\text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n}(E))$ le groupe d'isométries conformes de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Par la théorie des revêtements, toute isométrie conforme de $Ein_{1,n}(E)$ se relève en une isométrie conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Réciproquement :

Proposition 3.1.3. *Toute isométrie conforme de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ passe au quotient en une isométrie conforme de $Ein_{1,n}(E)$.*

Démonstration. Voir par exemple [19, Chap. 3, Prop. 4.5]. □

On obtient ainsi un morphisme de groupes surjectif

$$\bar{\pi} : \text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n}(E)) \rightarrow \text{Conf}(Ein_{1,n}(E)).$$

Le noyau de $\bar{\pi}$ est isomorphe au groupe de Poincaré de $Ein_{1,n}(E)$ et est contenu dans le centre de $\text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n}(E))$.

3.2 Structure causale

Soit $Ein_{1,n}(E)$ un espace d'Einstein avec $n \geq 2$. Dans l'Annexe B, nous définissons la structure causale d'un espace-temps conforme quelconque. Dans cette section, nous donnons une description plus spécifique dans l'espace-temps $Ein_{1,n}(E)$ et dans son revêtement universel. Le contenu de cette section est inspiré de [19, 37].

3.2.1 Dans $Ein_{1,n}(E)$

(3.2.1) Courbes causales. Dans ce qui suit, pour tout plan temporel P de E , on munit $\mathcal{S}^1(P)$ et $\mathcal{S}^n(P)$ des distances induites par les métriques $d\theta^2(P)$ et $d\sigma^2(P)$ respectivement.

Proposition 3.2.1. *Pour tout plan temporel P de E , les courbes causales (resp. temporelles) futures de $Ein_{1,n}(E)$, sont à reparamétrage près, de la forme $(\theta, x(\theta))$ où x est une application 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) d'un intervalle de $\mathcal{S}^1(P)$ dans $\mathcal{S}^n(P)$.*

Démonstration. Voir [37, Chap. 2, Sect. 2.4, Proposition 2.9]. □

Proposition 3.2.2. *Pour tout plan temporel P de E , les photons de $Ein_{1,n}(E)$ sont, à reparamétrage près, les courbes $(\theta, x(\theta))$ où x est une géodésique de $\mathcal{S}^n(P)$ définie sur un intervalle de $\mathcal{S}^1(P)$ et paramétrée par longueur d'arc.*

Démonstration. Voir [37, Chap. 2, Sect. 2.4, Corollaire 2.11 et Remarque 2.13]. □

Remarque 3.2.1. Il découle des propositions 3.2.1 et 3.2.2 qu'une courbe causale est *inextensible* si la paramétrisation $(\theta, x(\theta))$ est définie pour tout $\theta \in \mathbb{S}^1(P)$.

Proposition 3.2.3. *Les photons de $Ein_{1,n}(E)$ sont les intersections des projectivisés de plans totalement isotropes dans $\mathbb{S}(E)$ avec $Ein_{1,n}(E)$.*

Démonstration. Voir [37, Chap. 2, Sect. 2.4, Lemme 2.12]. \square

Remarque 3.2.2. Deux géodésiques lumières de $Ein_{1,n}(E)$ sont soit disjointes, soit confondues, soit sécantes en un point et un seul.

Définition 3.2.1. Le cône lumière d'un point p de $Ein_{1,n}(E)$ est l'union des photons passant par p .

Corollaire 3.2.1. Soit v un vecteur lumière de E . Le cône lumière de $[v]$ dans $Ein_{1,n}(E)$ est l'intersection du projectivisé de l'orthogonal de v avec $Ein_{1,n}(E)$.

Démonstration. Soit $u \in E$ un vecteur lumière. Si $[u] \in Ein_{1,n}(E)$ appartient au cône lumière de $[v]$, alors il existe une géodésique lumière reliant $[u]$ à $[v]$. D'après la Proposition 3.2.3, il s'en suit que le plan engendré par u et v est totalement isotrope. D'où, $u \in v^\perp$. Réciproquement, si $u \in v^\perp$ alors le plan $\text{vect}\{u, v\}$ est totalement isotrope. Donc, d'après la Proposition 3.2.3, les points $[u]$ et $[v]$ sont sur un même photon. Ainsi, $[u]$ appartient au cône lumière de $[v]$. \square

(3.2.2) Cartes de Minkowski. Soient $\xi, \xi' \in Ein_{1,n}(E)$. Nous notons $\langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1}$ le signe du réel $\langle v, v' \rangle_{2,n+1}$ où $v, v' \in E$ sont deux représentants de ξ, ξ' . D'après le Corollaire 3.2.1, le cône lumière d'un point ξ_0 de $Ein_{1,n}(E)$ déconnecte $Ein_{1,n}(E)$ en deux ouverts

$$M_{>}(\xi_0) := \{\xi \in Ein_{1,n}(E) : \langle \xi, \xi_0 \rangle_{2,n+1} > 0\}$$

$$M_{<}(\xi_0) := \{\xi \in Ein_{1,n}(E) : \langle \xi, \xi_0 \rangle_{2,n+1} < 0\}.$$

Notons que $M_{>}(\xi_0)$ et $M_{<}(\xi_0)$ sont conformément isométriques par l'application d'antipodie $[v] \in Ein_{1,n}(E) \mapsto [-v] \in Ein_{1,n}(E)$.

Proposition 3.2.4. Soit $\xi_0 \in Ein_{1,n}(E)$. L'ouvert $M_{<}(\xi_0)$ est conformément isométrique à un espace de Minkowski.

Démonstration. On ne perd rien à supposer que $E = \mathbb{R}^{2,n+1}$ muni du système de coordonnées $(a, b, t, x_1, \dots, x_n)$ tel que $q_{2,n+1}(a, b, t, x_1, \dots, x_n) = -ab - t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ et que $\xi_0 = [1 : 0 : \dots : 0]$. Ainsi, $M_{<}(\xi_0) = \{[a : b : x] \in Ein_{1,n}, b > 0\}$. Soit $s : \mathbb{R}^{1,n} \rightarrow Ein_{1,n}$ l'application définie par $s(x) = [q_{1,n}(x) : 1 : x]$; elle est clairement injective et son image coïncide avec $M_{<}(\xi_0)$. \square

La Proposition 3.2.4 motive la définition suivante.

Définition 3.2.2. On appelle *carte de Minkowski* de $Ein_{1,n}(E)$ toute composante connexe du complémentaire du cône lumière d'un point ξ_0 dans $Ein_{1,n}(E)$.

Dans la preuve de la Proposition 3.2.4, l'application $s^{-1} : M_{<}(\xi_0) \rightarrow \mathbb{R}^{1,n}$ est appelée *projection stéréographique de pôle ξ_0* ; elle envoie conformément $M_{<}(\xi_0)$ sur $\mathbb{R}^{1,n}$. Par extension, nous appellerons projection stéréographique tout difféomorphisme conforme d'une carte de Minkowski dans un espace de Minkowski.

(3.2.3) La structure causale de $Ein_{1,n}(E)$ est triviale. La Proposition 3.2.1 permet de montrer l'énoncé suivant.

Proposition 3.2.5. *Le futur (resp. passé) strict de tout point de $Ein_{1,n}(E)$ coïncide avec $Ein_{1,n}(E)$.*

Démonstration. Voir [37, Chap. 2, Sect. 2.4, Corollaire 2.10]. □

Il s'en suit que deux points distincts de $Ein_{1,n}(E)$ sont toujours temporellement reliés. Il n'existe donc pas de parties achronales dans $Ein_{1,n}(E)$, en particulier $Ein_{1,n}(E)$ n'est pas globalement hyperbolique. En revanche, il s'avère que son revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ admet une structure causale plus riche et est globalement hyperbolique.

3.2.2 Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

(3.2.1) Courbes causales. Toute courbe causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est le relevé d'une courbe causale de $Ein_{1,n}$. Ainsi les Propositions 3.2.1 et 3.2.2 donnent, de manière immédiate, une description des courbes causales de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ dans une décomposition spatio-temporelle $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$. Dans tout ce qui suit, on munit $D(P)$ et $\mathcal{S}^n(P)$ des distances induites par les métriques $-dt^2(P)$ et $d\sigma^2(P)$.

Proposition 3.2.6. *Pour tout plan temporel P de E , les courbes causales (resp. temporelles) futures de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$, sont à reparamétrage près, de la forme $(t, x(t))$ où x est une application 1-Lipschitz (resp. 1-contractante) d'un intervalle de $D(P)$ dans $\mathcal{S}^n(P)$. En particulier, les géodésiques lumières sont les courbes $(t, x(t))$ où x est une géodésique de $\mathcal{S}^n(P)$ paramétrée par longueur d'arc définie sur un intervalle de $D(P)$.*

Remarque 3.2.3. Une courbe causale est inextensible si la paramétrisation $(t, x(t))$ est définie sur tout $D(P)$.

(3.2.2) Futur, passé. La caractérisation des courbes causales de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ dans une décomposition spatio-temporelle $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ (voir Proposition 3.2.6) permet de décrire de manière simple le futur et le passé d'un point dans une telle décomposition. Nous désignons par d_P la distance sur $\mathcal{S}^n(P)$ induite par $d\sigma^2(P)$.

Proposition 3.2.7. *Pour tout plan temporel P de E , le futur (resp. passé) strict d'un point (t_0, x_0) de $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ est l'ensemble des points (t, x) tels que $d_P(x, x_0) < t - t_0$ (resp. $d_P(x, x_0) < t_0 - t$).*

Démonstration. Voir [37, Chap. 2, Sect. 2.4, Lemme 2.18]. □

Remarque 3.2.4. Dans la Proposition 3.2.7, le futur (resp. passé) causal d'un point (t_0, x_0) s'obtient en remplaçant les inégalités strictes par des inégalités larges. Il s'en suit que les points qui ne sont pas causalement reliés à un point (t_0, x_0) sont exactement les points (t, x) tels que $d_P(x, x_0) > |t - t_0|$.

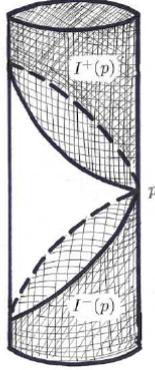


FIGURE 3.1 – Futur, passé d'un point dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

(3.2.3) Points conjugués. L'application d'antipodie $-id : E \rightarrow E$ se factorise en une application $\mathbb{S}(E) \rightarrow \mathbb{S}(E)$ qui préserve $Ein_{1,n}(E)$. Sa restriction à $Ein_{1,n}(E)$, notée $\bar{\sigma}$, se relève au revêtement universel en $\sigma : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Remarque 3.2.5. Soit $P \subset E$ un plan temporel. Pour tout $(\theta, x) \in \mathcal{S}^1(P) \times \mathcal{S}^n(P)$, l'application $\bar{\sigma}$ est donnée par $\bar{\sigma}(\theta, x) = (-\theta, -x)$. Alors, σ s'exprime par $\sigma(t, x) = (t + \pi, -x)$ pour tout $(t, x) \in D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$.

Remarque 3.2.6. Le groupe fondamental de $Ein_{1,n}(E)$ est isomorphe à \mathbb{Z} : il s'agit du groupe engendré par l'automorphisme $\delta := \sigma^2$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Soit $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ le modèle projectif de l'univers d'Einstein. L'espace $Ein_{1,n}(E)$ est un revêtement double de $\mathbf{Ein}_{1,n}$ (voir Remarque 3.1.2). Le groupe fondamental de $\mathbf{Ein}_{1,n}(E)$ est le groupe engendré par l'automorphisme σ de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Définition 3.2.3. Deux points de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ sont dits *conjugués* s'ils sont l'image l'un de l'autre par σ^k avec $k \in \mathbb{Z}$.

Lemme 3.2.1. *Toutes les géodésiques lumières inextensibles issues d'un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ s'intersectent aux points conjugués de p , i.e. $\{\sigma^k(p), k \in \mathbb{Z}\}$, et nul part ailleurs.*

Démonstration. Soit φ, ψ deux photons de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ passant par un point $p_0 \in \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soit $P \subset E$ un plan temporel tel que dans la décomposition $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$, le point p_0 s'écrive (t_0, x_0) . D'après la Proposition 3.2.6, quitte à changer de paramétrage, il existe deux géodésiques $x, y : D(P) \rightarrow \mathcal{S}^n(P)$ paramétrées par longueur d'arc telles que pour tout $t \in D(P)$, on ait $\varphi(t) = (t, x(t))$ et $\psi(t) = (t, y(t))$. On a $\varphi(t) = \psi(t)$ si et seulement si $x(t) = y(t)$ soit $t - t_0 = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Les points d'intersection de φ et ψ sont donc exactement les points $(t_0 + k\pi, x(t_0 + k\pi))$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Or, $x(t_0 + k\pi) = (-1)^k x(t_0) = (-1)^k y(t_0) = (-1)^k x_0$ et d'après la Remarque 3.2.5, $(t_0 + k\pi, (-1)^k x_0) = \sigma^k(t_0, x_0) = \sigma^k(p_0)$. Le lemme s'en suit. \square

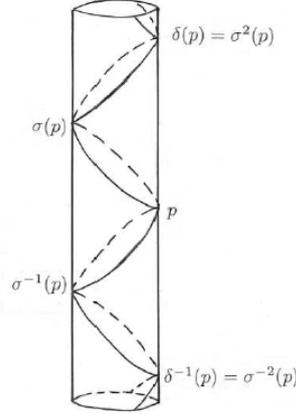


FIGURE 3.2 – Points conjugués dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

(3.2.4) Cartes de Minkowski. Soit $p \in \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. On désigne par $\text{Mink}_0(p)$ l'ensemble des points de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ qui ne sont pas causalement reliés à p :

$$\text{Mink}_0(p) = \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \setminus (J^+(p) \cup J^-(p)).$$

D'après la description du futur et du passé causal de p , $\text{Mink}_0(p)$ est le diamant ouvert $I(\sigma(p), \sigma^{-1}(p))$. La proposition suivante justifie la notation $\text{Mink}_0(p)$.

Proposition 3.2.8. *La restriction de la projection $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow Ein_{1,n}(E)$ à $\text{Mink}_0(p)$ est injective et a pour image la carte de Minkowski*

$$M_{<}(\xi) = \{\xi' \in Ein_{1,n}(E), \langle \xi', \xi \rangle_{2,n+1} < 0\}$$

avec $\xi = \pi(p)$.

Démonstration. Comme le diamant $I(\sigma(p), \sigma^{-1}(p))$ ne contient pas de points conjugués, la restriction de π à $\text{Mink}_0(p)$ est injective. Montrons que $\pi(\text{Mink}_0(p)) = M_{<}(\xi)$. Il est clair que $\pi(\text{Mink}_0(p))$ ne rencontre pas le cône lumière de ξ . De plus, comme $\text{Mink}_0(p)$ est connexe, $\pi(\text{Mink}_0(p))$ est contenu dans $M_{>}(\xi)$ ou dans $M_{<}(\xi)$. Soit $P \subset E$ un plan temporel tel que p s'écrive (t, x) dans la décomposition $D(P) \times \mathcal{S}^1(P)$. Remarquons que $(t, -x) \in \text{Mink}_0(p)$. Par conséquent, si θ est le projeté de t dans $\mathcal{S}^1(P)$, on a $\langle (\theta, -x), (\theta, x) \rangle_{2,n+1} = -2 < 0$. Par conséquent, $\pi(\text{Mink}_0(p))$ est un ouvert de $M_{<}(\xi)$. Comme $M_{<}(\xi)$ est connexe, il suffit de montrer que $\pi(\text{Mink}_0(p))$ est fermé dans $M_{<}(\xi)$ pour conclure. Soit donc $\{\xi_i\}$ une suite de $\pi(\text{Mink}_0(p))$ qui converge vers un point ξ_∞ de $M_{<}(\xi)$. Pour tout entier i , il existe un unique point $p_i \in \text{Mink}_0(p)$ tel que $\xi_i = \pi(p_i)$. Quitte à extraire, $\{p_i\}$ converge vers un point $p_\infty \in J(\sigma(p), \sigma^{-1}(p))$. Par unicité de la limite, $\pi(p_\infty) = \xi_\infty$. Si p_∞ appartient au cône lumière de p alors, comme π est conforme, ξ_∞ appartient au cône lumière de ξ . Ainsi, d'après le Corollaire 3.2.1, $\langle \xi_\infty, \xi \rangle_{2,n+1} = 0$. Contradiction. Donc, $p_\infty \in \text{Mink}_0(p)$. \square

La proposition 3.2.8 motive la définition suivante.

Définition 3.2.4. On appelle *carte de Minkowski* de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ tout ouvert de la forme $\text{Mink}_0(p)$ avec $p \in \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Dans la suite, on sera amené à considérer des cartes de Minkowski dans le passé (resp. futur) strict d'un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. On note alors $\text{Mink}_-(p)$ (resp. $\text{Mink}_+(p)$) la carte de Minkowski dans le passé (resp. futur) strict de p définie par le premier point conjugué dans le passé (resp. futur) de p :

$$\begin{aligned}\text{Mink}_-(p) &:= \text{Mink}_0(\sigma^{-1}(p)) \\ \text{Mink}_+(p) &:= \text{Mink}_0(\sigma(p)).\end{aligned}$$

Remarque 3.2.7. Les cartes $\text{Mink}_-(p)$ et $\text{Mink}_+(p)$ se projettent sur $M_{>}(\xi)$ où ξ est le projeté de p dans $Ein_{1,n}(E)$.

3.2.3 Achronalité

Nous rappelons la caractérisation des fermés achronaux étanches de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Les preuves des deux propositions suivantes sont similaires à celles portant sur les fermés achronaux étanches d'un espace de Minkowski (voir Proposition 1.2.6, Proposition 1.2.7 et Corollaire 1.2.3 du Chapitre 1).

Proposition 3.2.9. *Pour tout plan temporel P de E , les parties achronales de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ sont les graphes d'application 1-Lipschitz d'une partie de $\mathcal{S}^n(P)$ à valeurs dans $D(P)$.*

Proposition 3.2.10. *Soit P un plan temporel de E et f une application 1-Lipschitz d'une partie Ω de $\mathcal{S}^n(P)$ à valeurs dans $D(P)$. Alors, le graphe Λ de f est une partie achronale de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. De plus,*

1. Λ est étanche si et seulement si Ω est ouvert dans $\mathcal{S}^n(P)$;
2. Λ est fermé si et seulement si Ω est fermé dans $\mathcal{S}^n(P)$.

Corollaire 3.2.2. *Pour tout plan temporel P de E , les fermés achronaux étanches de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ sont les graphes d'applications 1-Lipschitz de $\mathcal{S}^n(P)$ dans $D(P)$.*

Corollaire 3.2.3. *Tout fermé achronal étanche de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est causalement convexe.*

Démonstration. Soit Λ un fermé achronal étanche de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soit P un plan temporel de E . D'après le corollaire 3.2.2, Λ est le graphe d'une fonction 1-Lipschitz f de la sphère $\mathcal{S}^n(P)$ dans $D(P)$. Soit $p_0 = (f(x_0), x_0), p_1 = (f(x_1), x_1)$ deux points Λ tels que $p_1 \in J^+(p_0)$. Soit (t, x) un point de $J(p_1, p_0)$. Comme $(t, x) \in J^+(p_0)$, alors $d_P(x, x_0) \leq t - f(x_0)$. De plus, comme f est 1-Lipschitz, $f(x) - f(x_0) \leq d_P(x, x_0)$. Donc, $f(x) \leq t$. Un raisonnement similaire utilisant le fait que $p \in J^-(p_1)$ montre que $t \leq f(x)$. D'où $f(x) = t$ soit $(t, x) \in \Lambda$. \square

Lemme 3.2.2. Soit S une hypersurface de type espace complète de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Alors, pour tout plan temporel P , l'hypersurface S est le graphe d'une application 1-contractante de $\mathbb{S}^n(P)$ dans $D(P)$. En particulier, S est un fermé achronal étanche.

Remarque 3.2.8. D'après le Lemme 3.2.2, une hypersurface de type espace complète de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est acausale.

Définition 3.2.5. On appelle *sphère tendue* l'union des géodésiques lumières de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ reliant un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ à son premier point conjugué $\sigma(p)$.

Remarque 3.2.9. Soit p un point de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ et soit $\sigma(p)$ son premier point conjugué futur. La sphère tendue définie par p et $\sigma(p)$ est la frontière de $I^+(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$, ou de manière équivalente, la frontière de $I^-(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Lemme 3.2.3. Soit Λ un sous-ensemble achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Si Λ contient deux points conjugués alors Λ est contenu dans une sphère tendue. Si de plus, Λ est fermé et étanche, on a égalité.

Démonstration. Notons p_0, p'_0 les deux points conjugués avec $p'_0 \in J^+(p_0)$. Remarquons que p'_0 est le premier point conjugué de p_0 car sinon p'_0 serait dans le futur strict de p_0 , ce qui contredirait l'achronalité de Λ . D'après la Remarque 3.2.9, la sphère tendue définie par p_0 et p'_0 est égale à $\partial I^+(p_0)$. Soit $p \in \Lambda$. Si p n'appartient pas à $\partial I^+(p_0)$ alors p est dans le futur strict de p_0 ou dans le passé strict de p'_0 . Contradiction. Donc, Λ est contenu dans $\partial I^+(p_0)$. Si de plus Λ est fermé et étanche alors d'après la Proposition 3.2.3, Λ est causalement convexe. Par suite, le diamant $J(p'_0, p_0)$ - égal à $\partial I^+(p_0)$ - est contenu dans Λ . D'où l'égalité. \square

Le lemme 3.2.3 motive la définition suivante.

Définition 3.2.6. Un fermé achronal Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est dit *purement lumière* s'il contient deux points conjugués.

(3.2.1) Dans $Ein_{1,n}(E)$. Bien qu'il n'existe pas de parties achronales dans $Ein_{1,n}(E)$ à proprement parler, $Ein_{1,n}(E)$ hérite d'une notion d'achronalité dans le sens suivant.

Définition 3.2.7. Une partie de $Ein_{1,n}(E)$ est dite *achronale* (resp. *acausale*) si c'est la projection d'une partie achronale (acausale) de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Cette définition est motivée par les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.4. La restriction de la projection $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow Ein_{1,n}(E)$ à toute partie achronale est injective.

Démonstration. Voir [8, Lemma 2.4]. \square

Lemme 3.2.5. Soient A_1, A_2 deux parties achronales de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ qui admettent la même projection dans $Ein_{1,n}(E)$. Alors, il existe un entier k tel que $A_1 = \delta^k(A_2)$ où δ est le générateur du groupe fondamental de $Ein_{1,n}(E)$ défini au paragraphe (3.2.3).

Démonstration. Voir [8, Corollary 2.5]. \square

La projection d'une partie achronale A purement lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ contient deux points opposés (il s'agit des projetés des deux points conjugués de A). On a alors la définition suivante.

Définition 3.2.8. Une partie achronale de $Ein_{1,n}(E)$ est dite *purement lumière* si elle contient deux points opposés.

Nous allons voir que le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,n+1}$ permet de caractériser les parties achronales de $Ein_{1,n}(E)$.

Lemme 3.2.6. *Soit A une partie achronale de $Ein_{1,n}$. Alors, pour tous points ξ, ξ' de A , le produit $\langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1}$ est négatif ou nul.*

Démonstration. Par définition, A est la projection d'une partie achronale \tilde{A} de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soient p, q deux points de \tilde{A} . Alors

- soit p appartient au cône lumière de q , en auquel cas $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{2,n+1}$ est nul ;
- soit p et q ne sont pas causalement reliés, donc d'après la Proposition 3.2.8, le produit $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{2,n+1}$ est négatif.

\square

Réciproquement :

Lemme 3.2.7. *Toute partie A de $Ein_{1,n}(E)$ telle que pour tous points ξ, ξ' de A le produit $\langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1}$ est négatif ou nul, est achronale.*

Démonstration. Soit $\xi_0 \in A$ et soit $M(\xi_0)$ la carte de Minkowski définie comme l'ensemble des points ξ de $Ein_{1,n}(E)$ tels que $\langle \xi, \xi_0 \rangle_{1,n} < 0$. Le sous-ensemble A est contenu dans l'adhérence de $M(\xi_0)$ dans $Ein_{1,n}(E)$. Soit $p_0 \in \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ un relevé de ξ_0 . On note $\sigma : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ l'application qui associe à un point de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ son premier point conjugué futur et δ l'automorphisme σ^2 . Soit $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow Ein_{1,n}(E)$ le revêtement universel. L'adhérence de la carte de Minkowski $Mink_0(p_0)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ est l'union de $Mink_0(p_0)$, $\partial I^+(p_0)$ et $\partial I^-(p_0)$. La restriction de la projection π à l'adhérence de $Mink_0(p_0)$ privée du point $\sigma(p_0)$, notée π_0 , est injective et a pour image la carte de Minkowski $M(\xi_0)$. Soit \tilde{A} la préimage par π_0 de A . Montrons que le sous-ensemble \tilde{A} est achronal. Soient $p, q \in \tilde{A}$. Alors, soit $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{1,n} = 0$ soit $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{1,n} < 0$. Si $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{1,n} = 0$ alors p et q sont sur un même photon de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Montrons que si $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{1,n} < 0$, les points p et q ne sont pas causalement reliés. On distingue deux cas :

- 1^{er} cas :* $p, q \in \partial I^+(p_0) \cup \partial I^-(p_0)$. Montrons que p et q sont tous les deux dans $\partial I^+(p_0)$ ou dans $\partial I^-(p_0)$. Supposons par l'absurde, que $p \in \partial I^+(p_0)$ et $q \in \partial I^-(p_0)$. Alors, $\sigma(q) \in \partial I^+(p_0)$. Comme p et q ne sont pas sur le même photon, p et $\sigma(q)$ ne sont pas causalement reliés. Alors, d'après la Proposition 3.2.8, $\langle \pi(\sigma(q)), \pi(p) \rangle_{1,n} < 0$. Comme $\pi(\sigma(q)) = -\pi(q)$, on obtient $\langle \pi(q), \pi(p) \rangle_{1,n} > 0$. Contradiction. Par

conséquent, p et q sont tous les deux dans la même sphère tendue $\partial I^+(p_0)$ ou $\partial I^-(p_0)$. Comme ils ne sont pas sur le même photon, on en déduit qu'ils ne sont pas causalement reliés.

2^e cas : *L'un des points est dans $\text{Mink}_0(p_0)$.* On ne perd rien à supposer que $p \in \text{Mink}_0(p_0)$.

Comme $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{1,n} < 0$, d'après la Proposition 3.2.8, il existe un relevé $r \in \widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ de $\pi(q)$ non-causalement relié à p , autrement dit $r \in \text{Mink}_0(p)$. Supposons, par l'absurde, que r n'appartient pas à l'adhérence de $\text{Mink}_0(p_0)$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$. Alors, r appartient à $I^+(p_0)$ ou à $I^-(p_0)$. On ne perd rien à supposer que $r \in I^+(p_0)$. Comme $\pi(q) = \pi(r)$, il existe alors un entier $k > 0$ tel que $q = \delta^{-k}(r)$. Montrons que $r \in I^-(\delta(p_0))$. D'une part, comme $r \in \text{Mink}_0(p)$, $r \in I^-(\sigma(p))$. D'autre part, puisque p est dans l'adhérence de $\text{Mink}_0(p)$, $\sigma(p) \in J^-(\delta(p_0))$, donc $I^-(\sigma(p)) \subset I^-(\delta(p_0))$. D'où, $r \in I^-(\delta(p_0))$. Par suite, $\delta^{-1}(r) \in I^-(p_0)$. Comme $q = \delta^{-k}(r) \in J^-(\delta^{-1}(r))$, on en déduit que $q \in I^-(p_0)$. Contradiction. Donc, r appartient à l'adhérence de $\text{Mink}_0(p_0)$. Comme r n'est pas causalement relié à $p \in \text{Mink}_0(p_0)$, r est distinct de $\sigma(p)$. L'égalité $\pi(q) = \pi(r)$ implique alors $q = r$. Autrement dit, p et q ne sont pas causalement reliés.

On vient ainsi de montrer que \tilde{A} est un sous-ensemble achronal de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ qui se projette injectivement sur A . Le lemme s'en suit. \square

Il résulte des lemmes 3.2.6 et 3.2.7 la caractérisation suivante.

Proposition 3.2.11. *Une partie A de $\text{Ein}_{1,n}(E)$ est achronale si et seulement si pour tous points ξ, ξ' de A , le produit $\langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1}$ est négatif ou nul.*

Remarque 3.2.10. De manière similaire, une partie A de $\text{Ein}_{1,n}(E)$ est acausale si et seulement si pour tous points ξ, ξ' de A , le produit $\langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1}$ est strictement négatif.

3.3 Ouverts causalement convexes de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$

Dans cette section, nous caractérisons les ouverts causalement convexes de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ dans une décomposition spatio-temporelle $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$. Dans toute la suite, nous désignons par $\overline{D(P)}$ la compactification $D(P) \cup \{+\infty, -\infty\}$ de $D(P)$.

Proposition 3.3.1. *Les ouverts causalement convexes de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ sont exactement les domaines compris entre les graphes de deux fonctions 1-Lipschitz f^+, f^- définies sur un ouvert U de $\mathcal{S}^n(P)$ à valeurs dans $\overline{D(P)}$ telles que $f^- < f^+$ et qui coïncident sur ∂U .*

Montrer la Proposition 3.3.1 revient à montrer les deux lemmes ci-dessous.

Lemme 3.3.1. *Soit U un ouvert de $\mathcal{S}^n(P)$. Soient $f^+, f^- : U \rightarrow \overline{D(P)}$ deux fonctions 1-Lipschitz telles que $f^- < f^+$ et qui coïncident sur ∂U . Alors,*

$$\Omega = \{(t, x) \in D(P) \times U : f^-(x) < t < f^+(x)\}$$

est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$.

Démonstration. La fonction f^\pm étant 1-Lipschitz, si elle est infinie en un point $x \in U$, elle le sera en tout point de U . Remarquons que si $f^+ \equiv +\infty$ et $f^- \equiv -\infty$ alors $U = \mathcal{S}^n(P)$. D'où, $\Omega = \widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Supposons que les fonctions f^+ et f^- prennent leurs valeurs dans $D(P)$. Soit $p_0 = (t_0, x_0); p_1 = (t_1, x_1)$ deux points de Ω tels que le diamant $J(p_1, p_0)$ est non-vide. Notons $\hat{J}(p_1, p_0)$ la projection de $J(p_1, p_0)$ dans $\mathcal{S}^n(P)$. Montrons que $\hat{J}(p_1, p_0) \subset U$. Comme $\hat{J}(p_1, p_0)$ est connexe, il suffit de montrer que $\hat{J}(p_1, p_0) \cap U$ est ouvert et fermé dans $\hat{J}(p_1, p_0)$ pour avoir l'égalité autrement dit pour que $\hat{J}(p_1, p_0) \subset U$. L'intersection $\hat{J}(p_1, p_0) \cap U$ est clairement un ouvert de $\hat{J}(p_1, p_0)$. Soit donc $x \in \hat{J}(p_1, p_0) \cap \bar{U}$. Supposons par l'absurde que $x \in \partial U$. Comme $x \in \hat{J}(p_1, p_0)$, il existe $t \in D(P)$ tel que $(t, x) \in J(p_1, p_0)$. Comme $(t, x) \in J^+(p_0)$ alors $d_P(x, x_0) \leq t - t_0$. De plus, comme f^- est 1-Lipschitz, $f^-(x) - f^-(x_0) \leq d_P(x, x_0)$. Par suite, $f^-(x) - f^-(x_0) \leq t - t_0$. Or, $f^-(x_0) < t_0$ puisque $p_0 \in \Omega$. Donc, $f^-(x) < t$. Un raisonnement similaire, utilisant le fait que (t, x) soit dans le passé de p_1 montre que $t < f^+(x)$. Par conséquent, $f^-(x) < f^+(x)$. Or, comme $x \in \partial U$, $f^-(x) = f^+(x)$. Contradiction. Donc, $\hat{J}(p_1, p_0) \subset U$. De plus, la preuve ci-dessus montre que pour tout $(t, x) \in J(p_1, p_0)$, on a $f^-(x) < t < f^+(x)$ autrement dit $(t, x) \in \Omega$. Donc, $J(p, q) \subset \Omega$. Le raisonnement que nous venons de faire s'adapte dans le cas où l'une des fonctions f^+, f^- est infinie. Donc, Ω est causalement convexe. \square

Lemme 3.3.2. *Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Alors, il existe deux fonctions $f^- < f^+$ définies sur un ouvert U de $\mathcal{S}^n(P)$ à valeurs dans $\overline{D(P)}$ qui coïncident sur ∂U telles que*

$$\Omega = \{(t, x) \in D(P) \times U : f^-(x) < t < f^+(x)\}.$$

Démonstration. Soit U la projection de Ω sur la sphère $\mathcal{S}^n(P)$. L'ouvert Ω étant causalement convexe, l'intersection de Ω et de toute droite temporelle $D(P) \times \{x\}$ avec $x \in U$ est connexe ; c'est donc un segment ouvert $]f^-(x), f^+(x)[\times \{x\}$. On vient donc de définir deux fonctions $f^+, f^- : U \rightarrow \overline{D(P)}$ telles que $f^- < f^+$ et

$$\Omega = \{(t, x) \in D(P) \times U : f^-(x) < t < f^+(x)\}.$$

Fait 1 : *S'il existe $x \in U$ tel que $f^+(x) = +\infty$ alors $f^+ \equiv +\infty$. En effet, supposons par l'absurde, qu'il existe $y \in U$ tel que $f^+(y) \in D(P)$. Il est clair que la demi-droite $]f^-(x), +\infty[\times \{x\}$ rencontre le futur strict de $(f^+(y), y)$. Soit donc (t, x) un point de cette intersection et soit (s, y) un point de Ω . Comme $(f^+(y), y)$ est dans le futur strict de (s, y) , alors par transitivité, (t, x) est dans le futur strict de (s, y) . Ainsi, le diamant de sommets $p = (t, x)$, $q = (s, y)$ est non-vide. Comme Ω est causalement convexe, le diamant $J(p, q)$ est contenu dans Ω . Or, $(f^+(y), y)$ est un point de $J(p, q)$ qui n'est pas dans Ω . Contradiction.*

Fait 2 : *Si la fonction f^+ est finie alors f^+ est 1-Lipschitz. D'après la Proposition 3.2.9, cela revient à montrer que le graphe de f^+ est achronal dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in U$ tel que $p = (f^+(x), x)$ soit dans le futur strict de $q = (f^+(y), y)$. Alors, $I^+(q)$ est un voisinage ouvert de p . Comme $p \in \partial\Omega$, $I^+(q)$*

rencontre Ω . Soit donc $q_1 \in I^+(q) \cap \Omega$ et soit $q_0 \in I^-(q) \cap \Omega$. Comme Ω est causalement convexe, le diamant $J(p_1, p_0)$ est contenu dans Ω . Or, $q \in J(p_1, p_0)$ mais $q \notin \Omega$. Contradiction.

De manière similaire, on montre que si la fonction f^- est infinie en un point $x \in U$, elle est infinie en tout point de U . De plus, si la fonction f^- est finie, f^- est 1-Lipschitz.

Fait 3 : Si les fonctions f^+ et f^- sont finies et ∂U est non-vide alors f^+ et f^- coïncident sur ∂U . En effet, soit $x \in \partial U$. Alors, il existe une suite $\{x_i\} \subset U$ qui converge vers x . Pour tout entier i , $f^-(x_i) < f^+(x_i)$. En passant à la limite, on obtient $f^-(x) \leq f^+(x)$. Supposons par l'absurde que $f^-(x) < f^+(x)$. Soit donc $t \in D(P)$ tel que $f^-(x) < t < f^+(x)$. Soit $]t_0, t_1[$ un intervalle ouvert centré en t contenu dans $]f^-(x), f^+(x)[$. Posons $\varepsilon_k = |f^+(x) - t_k|$ avec $k = 0, 1$. Comme $\{f^+(x_i)\}$ converge vers $f^+(x)$ alors pour i grand $f^+(x) - f^+(x_i) < \varepsilon_0$ soit $f^+(x) - f^+(x_i) < f^+(x) - t_0$. D'où $t_0 < f^+(x_i)$ pour i grand. Le même raisonnement appliqué à f^- montre que $f^-(x_i) < t_0$ pour i grand. Ainsi, à partir d'un certain rang

$$f^-(x_i) < t_0 < f^+(x_i). \quad (3.1)$$

En remplaçant ε_0 par ε_1 dans le raisonnement ci-dessus, on montre qu'à partir d'un certain rang :

$$f^-(x_i) < t_1 < f^+(x_i). \quad (3.2)$$

Comme $\{x_i\}$ converge vers x , alors pour i grand

$$d_P(x, x_i) < t - t_0. \quad (3.3)$$

Fixons un entier i tel que les trois inégalités ci-dessus soient satisfaites. D'après l'inégalité (3.3), le point (t, x) est dans le futur strict de (t_0, x_i) . Comme $t - t_0 = t_1 - t$, l'inégalité (3.3) implique aussi que (t, x) est dans le passé strict de (t_1, x_i) . Posons $p_0 = (t_0, x_i)$ et $p_1 = (t_1, x_i)$. Nous venons de montrer que (t, x) appartient au diamant $J(p_1, p_0)$. D'après les inégalités (3.1) et (3.2), les points p_0, p_1 sont dans Ω qui est causalement convexe. Par conséquent, le diamant $J(p_1, p_0)$ est contenu dans Ω . En particulier, $(t, x) \in \Omega$. D'où $x \in U$. Contradiction. Donc, $f^-(x) = f^+(x)$. \square

Les lemmes 3.3.1 et 3.3.2 impliquent la Proposition 3.3.1.

Définition 3.3.1. On appelle *frontière future* (resp. *passée*) de Ω est le graphe de f^+ (resp. f^-).

Remarque 3.3.1. La frontière future (resp. passée) de Ω est vide si et seulement si f^+ (resp. f^-) est infinie.

3.3.1 Dualité et convexité causale

La notion de convexité dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(E)$ induit une notion naturelle de *dualité* dans $Ein_{1,n}(E)$. Nous verrons que les duaux de fermés achronaux de $Ein_{1,n}$ sont les projections d'ouverts causalement convexes remarquables de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. En effet, nous montrerons dans le Chapitre 5 que ces ouverts sont exactement les ouverts causalement convexes *maximaux* de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

(3.3.1) Dualité dans $Ein_{1,n}(E)$. Soit P une partie de $Ein_{1,n}(E)$. Considérons l'enveloppe convexe de P dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(E)$, notée $\text{Conv}(P)$ ¹. Le cône convexe dual de P dans $\mathbb{S}(E)$ est

$$\text{Conv}(P)^* = \{\xi \in \mathbb{S}(E); \langle \xi, \xi_0 \rangle_{2,n+1} < 0, \forall \xi_0 \in \text{Conv}(P)\}.$$

Définition 3.3.2. On appelle *dual de P* , noté P° , l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ et du cône convexe dual de P dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(E)$.

Il est facile de voir que le dual de P coïncide avec

$$\{\xi \in Ein_{1,n}(E); \langle \xi, \xi_0 \rangle_{2,n+1} < 0, \forall \xi_0 \in P\}.$$

Ainsi, le dual de P correspond à l'ensemble des points de $Ein_{1,n}(E)$ qui *ne sont causalement reliés à aucun point de P* au sens de la Définition 3.2.7 (voir Remarque 3.2.10). Par extension, on définit une notion de dualité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ comme suit.

(3.3.2) Dualité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soit P une partie de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

Définition 3.3.3. On appelle *dual de P* , noté P° , l'ensemble des points de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de P ²

$$P^\circ := \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \setminus (J^+(P) \cup J^-(P)).$$

Proposition 3.3.2. 1. *Le dual de P , s'il est non-vide, est causalement convexe.*

2. $P \subset (P^\circ)^\circ =: P^{\circ\circ}$.

3. *Si P est ouvert alors P° est compact.*

4. *Si P est fermé alors P° est ouvert.*

Démonstration. 1. Soient $p, q \in P^\circ$ tels que le diamant $J(p, q)$ est non-vide. Supposons qu'il existe $x \in J(p, q)$ qui ne soit pas dans P° . Alors, x est dans le futur (ou le passé) d'un point $p_0 \in P$. Par suite, q est dans le futur (ou p est dans le passé) de p_0 . Contradiction. Donc, P° est causalement convexe.

1. Dans l'Annexe (A.3.3), nous précisons la notion de convexité dans la sphère des rayons (voir Définition A.3.2).

2. Dans [6, 8], le dual d'un fermé achronal Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ apparaît sous la terminologie *domaine invisible depuis Λ* .

2. Soit $p \in P$. Par définition de P° , p_0 n'est causalement relié à aucun point de P° . Autrement dit $p \in A^{\circ\circ}$.
3. Supposons P ouvert. Montrons que $J^+(P)$ est ouvert. Soit $p \in J^+(P)$. Il existe alors $p_0 \in P$ tel que $p \in J^+(p_0)$. Comme P est ouvert, il existe $p_1 \in P$ tel que $p_0 \in I^+(p_1)$. Par suite, $I^+(p_1)$ est un voisinage ouvert de p contenu dans $J^+(P)$. Donc, $J^+(P)$ est ouvert. De manière similaire, $J^-(P)$ est ouvert. Il s'en suit que P° est fermé. Par définition, $P^\circ \subset \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \setminus (I^+(p_0) \cup I^-(p_0))$ avec $p_0 \in P$. Comme $\widetilde{Ein}_{1,n}(E) \setminus (I^+(p_0) \cup I^-(p_0))$ est compact, P° est compact.
4. Supposons P fermé. Si P n'est pas compact alors P contient une courbe causale inextensible dans le futur ou dans le passé. Il s'en suit que $J^+(P) \cup J^-(P)$ est l'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ tout entier. D'où $P^\circ = \emptyset$. Si P est compact alors $J^\pm(P)$ sont fermés. Donc, P° est ouvert. □

Proposition 3.3.3. *Soit Λ un fermé achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Alors, la projection du dual de Λ dans $Ein_{1,n}(E)$ est égale au dual de la projection de Λ dans $Ein_{1,n}(E)$.*

Démonstration. Soit $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n}(E) \rightarrow Ein_{1,n}(E)$. Soit $p \in \Lambda^\circ$. Comme aucun point de Λ n'est causalement relié à p alors Λ est contenu dans $\text{Mink}_0(p)$. Par conséquent, pour tout $q \in \Lambda$, le produit $\langle \pi(p), \pi(q) \rangle_{2,n+1}$ est strictement négatif. D'où, $\pi(p) \in \pi(\Lambda)^\circ$. □

La proposition suivante caractérise le dual d'un fermé achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ dans une décomposition spatio-temporelle. Nous allons voir que les fonctions f^+, f^- donnés par la Proposition 3.3.1, sont, *grosso modo*, des fonctions "distance à un fermé de la sphère".

Soit donc Λ un fermé achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ et soit P un plan temporel de E . D'après la Proposition 3.2.10, Λ est le graphe d'une application 1-Lipschitz f d'un fermé Λ_0 de la sphère $\mathcal{S}^n(P)$ dans $D(P)$.

Proposition 3.3.4. *Le dual de Λ est égal au domaine compris entre les graphes des fonctions $f^+, f^- : \mathcal{S}^n(P) \rightarrow D(P)$ définies par :*

$$f^+(x) = \inf_{x_0 \in \Lambda_0} \{f(x_0) + d_P(x, x_0)\}$$

$$f^-(x) = \sup_{x_0 \in \Lambda_0} \{f(x_0) - d_P(x, x_0)\}.$$

Démonstration. Soit $(t, x) \in \Lambda^\circ$. Par définition, (t, x) n'est causalement relié à aucun point $(f(x_0), x_0)$ de Λ . Alors, d'après la Remarque 3.2.4, pour tout $x_0 \in \Lambda_0$, on a $d_P(x, x_0) > |t - f(x_0)|_P$ soit $f(x_0) - d_P(x, x_0) < t < f(x_0) + d_P(x, x_0)$. D'où

$$\sup_{x_0 \in \Lambda_0} \{f(x_0) - d_P(x, x_0)\} \leq t \leq \inf_{x_0 \in \Lambda_0} \{f(x_0) + d_P(x, x_0)\}.$$

Comme Λ_0 est compact, le supremum et l'infimum ci-dessus sont atteints ; les inégalités sont donc strictes. On a donc $f^-(x) < t < f^+(x)$. L'inclusion réciproque est évidente. □

Exemple 3.3.1. Lorsque Λ est réduit à un point p , il existe un plan temporel P de E tel que $p = (0, x) \in \mathbb{R}(P) \times \mathcal{S}^n(P)$. Dans cette décomposition, f^+ est simplement la distance à x et $f^- = -f^+$.

Dans le Chapitre 5, nous verrons que les duaux de fermés achronaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ sont exactement les ouverts causalement convexes *maximaux* de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$.

3.4 Lieux géométriques remarquables

Dans cette section, nous mettons en évidence des sous-espaces géométriques remarquables de $Ein_{1,n}(E)$. Nous allons voir que l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace vectoriel F de E définit, suivant le type de F , *une sphère conforme, un espace d'Einstein* ou *un cône lumière*.

(3.4.1) Le cas non-dégénéré. Remarquons que l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace temporel ou euclidien est vide.

Définition 3.4.1. Une *sphère conforme* de dimension k est une composante connexe de l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace de type $(1, k + 1)$.

Définition 3.4.2. Un *sous-espace d'Einstein* de dimension $(k + 1)$ est l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace de type $(2, k + 1)$.

Remarque 3.4.1. Un sous-espace d'Einstein de dimension 1 de $Ein_{1,n}(E)$ est l'union disjointe de deux cercles temporels de $Ein_{1,n}(E)$ qui sont image l'un de l'autre par l'application d'antipodie.

(3.4.2) Le cas dégénéré. Soit $F \subset E$ un sous-espace dégénéré. Nous désignons par q_F la restriction de la forme $q_{2,n+1}$ à F et par $N(q_F)$ son noyau. La forme q_F induit sur l'espace vectoriel quotient $F/N(q_F)$ une forme quadratique non-dégénérée notée \hat{q}_F . On distingue deux cas :

1^{er} cas. La forme \hat{q}_F est définie. Dans ce cas, l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection de F est réduite à un point si le noyau $N(q_F)$ est de dimension 1, à un photon sinon.

2^e cas. La forme \hat{q}_F est indéfinie.

Lemme 3.4.1. *Le noyau $N(q_F)$ est de dimension 1.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $N(q_F)$ soit de dimension 2. Comme la forme \hat{q}_F est indéfinie, il existe un vecteur lumière $v \in F$ dans un supplémentaire de $N(q_F)$. Alors, $N(q_F) \oplus \text{vect}(v)$ est un sous-espace de dimension 3 de E . Contradiction. \square

Posons $\dim F = k + 2$ avec $1 \leq k \leq n$.

Lemme 3.4.2. *La forme \hat{q}_F est de signature $(1, k)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que \hat{q}_F soit de signature $(2, k - 1)$. Soit G est un supplémentaire de $N(q_F)$ et soit $P \subset G$ un plan totalement isotrope. Alors, $N(q_F) \oplus P$ est un sous-espace totalement isotrope de E de dimension 3. Contradiction. \square

Proposition 3.4.1. *L'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection de F est le cône lumière d'un point dans un sous-espace d'Einstein de $Ein_{1,n}(E)$.*

Démonstration. Soit G un supplémentaire de $N(q_F)$ dans F . Alors, la droite $N(q_F)$ est contenue dans G^\perp . Soit P un plan de G^\perp de type $(1, 1)$ qui contient $N(q_F)$. Alors, $P \oplus G$ est un sous-espace de type $(2, k + 1)$ noté F' . L'orthogonal de $N(q_F)$ dans F' est égal à F . Si ξ est le point de $Ein_{1,n}(E)$ défini par $N(q_F)$ alors l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection de F est le cône lumière de ξ dans $Ein_{1,k}(F')$. \square

Définition 3.4.3. Un *cône lumière de dimension k* est le cône lumière d'un point ξ de $Ein_{1,n}(E)$ dans un sous-espace d'Einstein de dimension $k + 1$ passant par ξ .

3.5 Cartes de Minkowski

Nous avons vu que chaque cône lumière de $Ein_{1,n}(E)$ déconnecte $Ein_{1,n}(E)$ en deux ouverts qui s'identifient, par une projection stéréographique, à un espace de Minkowski. À cet effet, nous avons appelé ces ouverts *cartes de Minkowski*. Dans cette section, nous montrons que la structure d'espace affine conforme d'une carte de Minkowski ne dépend pas du choix de la projection stéréographique.

3.5.1 Structure affine conforme canonique

Soit $\xi \in Ein_{1,n}(E)$. Nous montrons que chacune des cartes de Minkowski $M_<(\xi)$ et $M_>(\xi)$ est *canoniquement* munie d'une structure d'espace affine conforme. Par souci de légèreté, nous n'énoncerons les résultats que pour

$$M_<(\xi) = \{\xi' \in Ein_{1,n}(E), \langle \xi, \xi' \rangle_{2,n+1} < 0\}$$

que nous notons dorénavant simplement $M(\xi)$. Dans ce qui suit, D désigne la droite lumière de E définie par ξ .

Soit $v \in E$ un représentant de ξ . On note $f_v : M(\xi) \times M(\xi) \rightarrow D^\perp/D$ l'application qui associe à un couple (η, η') le vecteur $[u' - u]$ où u, u' sont les uniques représentants de η, η' tels que $\langle u, v \rangle_{2,n+1} = \langle u', v \rangle_{2,n+1} = -1/2$.

Lemme 3.5.1. *L'application f_v définit une structure d'espace affine de direction D^\perp/D sur $M(\xi)$. De plus, $q_{2,n+1}$ induit sur D^\perp/D une forme quadratique de signature $(1, n)$.*

Démonstration. La relation de Chasles est clairement satisfaite. Il reste à vérifier que pour tout $\eta_0 \in M(\xi)$, l'application $\eta \in M(\xi) \mapsto f_v(\eta_0, \eta) \in D^\perp/D$ est bijective. Soient $\eta, \eta' \in M(\xi)$ tels que $f_v(\eta_0, \eta) = f_v(\eta_0, \eta')$. Si u, u' sont les représentants de η, η' tels que $\langle u, v \rangle_{2,n+1} = \langle u', v \rangle_{2,n+1} = -1/2$ alors $u - u' \in D$, donc $u - u' = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. D'une part, $\lambda = -2\lambda \langle u, v \rangle_{2,n+1} = -2 \langle u, u - u' \rangle_{2,n+1} = 2 \langle u, u' \rangle_{2,n+1}$. D'autre part, $\lambda = -2\lambda \langle u', v \rangle_{2,n+1} = -2 \langle u', u - u' \rangle_{2,n+1} = -2 \langle u', u \rangle_{2,n+1}$. D'où, $\lambda = 0$ c'est à dire $u = u'$. À présent, soit $[w] \in D^\perp/D$. Posons $u = u_0 + w + q_{2,n+1}(u_0 + w)v$. C'est un vecteur isotrope de E tel que $\langle u, v \rangle_{2,n+1} = -1/2$. Il définit ainsi un point η de $M(\xi)$ tel que $f_v(\eta_0, \eta) = [w]$. La carte $M(\xi)$ est donc un espace affine. La droite D admet un supplémentaire de type $(1, n)$ dans D^\perp . Par conséquent, la forme $q_{2,n+1}$ induit sur D^\perp/D une forme quadratique de signature $(1, n)$. \square

Lemme 3.5.2. *Soient $v, v' \in E$ deux représentants distincts de ξ . Alors les structures affines sur $M(\xi)$ définies par f_v et $f_{v'}$ sont les mêmes à homothétie près.*

Démonstration. Comme $\xi = [v] = [v']$, il existe $\lambda > 0$ tel que $v' = \lambda v$. Soient $\eta, \eta' \in M(\xi)$ et soient $u, u' \in E$ leurs représentants vérifiant $\langle u, v \rangle_{2,n+1} = \langle u', v \rangle_{2,n+1} = -1/2$. Alors $\langle u/\lambda, v' \rangle_{2,n+1} = \langle u'/\lambda, v' \rangle_{2,n+1} = -1/2$. D'où, $f_v(\eta, \eta') = \lambda f_{v'}(\eta, \eta')$. \square

Il résulte des lemmes 3.5.1 et 3.5.2 la proposition suivante.

Proposition 3.5.1. *L'ouvert $M(\xi)$ est un espace de Minkowski conforme.*

Remarque 3.5.1. Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$, nous avons vu que toute carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ se projette de manière injective sur $M(\xi)$ où ξ est le projeté de p dans $Ein_{1,n}(E)$ (voir Proposition 3.2.8). Ainsi, $\text{Mink}_0(p)$ est canoniquement un espace de Minkowski conforme de direction D^\perp/D où D est la droite lumière de E définie par ξ .

3.5.2 Lieux géométriques remarquables dans une carte de Minkowski

Nous décrivons l'intersection d'un lieu géométrique remarquable de $Ein_{1,n}(E)$ avec une carte de Minkowski $M(\xi)$. Dans tout ce qui suit, D désigne la droite lumière de E définie par ξ .

(3.5.1) Intersection avec un lieu géométrique passant par ξ .

Proposition 3.5.2. *L'intersection de $M(\xi)$ et d'une sphère conforme S passant par ξ est un espace affine euclidien conforme.*

Démonstration. Soit S une sphère conforme passant par ξ . Elle se réalise comme l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace F de E de type $(1, k+1)$ contenant D . Soit $D^{\perp F}$ l'orthogonal de D dans F . Il est alors facile de voir que la structure affine conforme sur $M(\xi)$ induit sur $S \cap M(\xi)$ une structure affine conforme de direction $D^{\perp F}/D$. Comme F est de type $(1, k+1)$, la restriction de la forme $q_{2,n+1}$ à F induit une forme définie positive sur $D^{\perp F}/D$. La proposition s'en suit. \square

Proposition 3.5.3. *L'intersection de $M(\xi)$ et d'un sous-espace d'Einstein passant par ξ est un espace de Minkowski conforme.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.5.2. □

Remarque 3.5.2. D'après la Remarque 3.4.1, un sous-espace d'Einstein de dimension 1 passant par ξ est l'union disjointe de deux cercles temporels de $Ein_{1,n}(E)$, l'un passant par ξ et l'autre par $-\xi$. Le cercle temporel passant par ξ ne rencontre pas $M(\xi)$ tandis que celui passant par $-\xi$ rencontre $M(\xi)$ en une droite temporelle.

Proposition 3.5.4. *L'intersection de $M(\xi)$ et d'un cône lumière contenant ξ est soit vide soit égale à un hyperplan lumière de $M(\xi)$.*

Démonstration. Soit C un cône lumière de $Ein_{1,n}(E)$ contenant ξ . Il est défini comme l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection de l'orthogonal d'une droite isotrope Δ de E . Comme $\xi \in C$ alors $\Delta \subset D^\perp$. Si $\Delta = D$ alors C coïncide avec le cône lumière de ξ ; son intersection avec $M(\xi)$ est donc vide. Supposons Δ distincte de D . La projection de Δ dans D^\perp/D est donc une droite isotrope notée $\bar{\Delta}$. Il est facile de voir que la structure d'espace affine conforme de $M(\xi)$ induit sur $C \cap M(\xi)$ une structure affine conforme dont la direction est l'orthogonal de $\bar{\Delta}$. La proposition s'en suit. □

Remarque 3.5.3. De manière générale, l'intersection de $M(\xi)$ avec un cône lumière de dimension k est soit vide soit égale à un sous-espace affine dégénéré de dimension k de $M(\xi)$.

(3.5.2) Intersection avec un lieu géométrique évitant ξ .

Proposition 3.5.5. *L'intersection de $M(\xi)$ et d'une sphère conforme S disjointe de ξ est soit vide soit égale à un hyperboloïde à deux nappes dans $M(\xi)$.*

Démonstration. Soit S une sphère conforme qui évite ξ . Elle se réalise comme l'intersection de $Ein_{1,n}(E)$ avec la projection d'un sous-espace F de E de type $(1, k+1)$ qui ne contient pas D . Posons $G = F \oplus D$. Si $F \subset D^\perp$ alors S est contenue dans le cône lumière de ξ ; elle est donc disjointe de $M(\xi)$. Supposons que F ne soit pas orthogonal à D . Alors, G est un sous-espace de E de type $(2, k+1)$. L'orthogonal de F dans G est donc une droite de type temps. Soit $v_0 \in G$ un vecteur directeur unitaire de cette droite. Considérons le vecteur directeur v de D tel que $\langle v_0, v \rangle_{2,n+1} = -1/2$ et notons u_0 son symétrique dans G par rapport à la droite dirigée par v_0 : $u_0 = v_0 - v$. Le vecteur u_0 est isotrope et vérifie $\langle u_0, v \rangle_{1,n} = -1/2$. Il définit ainsi un point η_0 de l'intersection de $M(\xi)$ avec la projection de G . Cette intersection est un sous-espace de Minkowski de $M(\xi)$ de dimension $k+1$ que nous notons \mathbb{M}^{k+1} . Montrons que $S \cap M(\xi)$ est exactement le lieu des points η de \mathbb{M}^{k+1} tels que le vecteur $\eta - \eta_0$ est de norme -1 . Soit $\eta \in \mathbb{M}^{k+1}$ et soit $u \in G$ un représentant de η tel $\langle u, v \rangle_{1,n} = -1/2$. Par définition, la norme du vecteur $\eta - \eta_0$ est égale à $q_{2,n+1}(u - u_0) = -2 \langle u, u_0 \rangle_{2,n+1} = -2 \langle u, v_0 - v \rangle_{2,n+1} = -2 \langle u, v_0 \rangle_{2,n+1} - 1$. Par conséquent, la norme de $\eta - \eta_0$ vaut -1 si et seulement si $\langle u, v_0 \rangle_{2,n+1} = 0$ c'est à dire $u \in F$ ou encore $\eta \in S \cap M(\xi)$. La proposition s'en suit. □

Proposition 3.5.6. *L'intersection de $M(\xi)$ et d'un sous-espace d'Einstein disjoint de ξ est un hyperboloïde à une nappe dans $M(\xi)$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.5.5. □

Proposition 3.5.7. *L'intersection de $M(\xi)$ avec un cône lumière évitant ξ est un cône lumière de $M(\xi)$.*

Démonstration. Soit C un cône lumière de $Ein_{1,n}(E)$ qui évite ξ . Soit η un sommet de C . Alors, le produit $\langle \eta, \xi \rangle_{2,n+1}$ est non nul. S'il est négatif alors $\eta \in M(\xi)$. Comme l'intersection d'une géodésique lumière de $Ein_{1,n}(E)$ avec $M(\xi)$ est une géodésique lumière de $M(\xi)$ (c'est à dire une droite lumière), alors l'intersection $C \cap M(\xi)$ est égale au cône lumière de η dans $M(\xi)$. Sinon, $-\eta \in M(\xi)$ et l'intersection $C \cap M(\xi)$ est égale au cône lumière de $-\eta$ dans $M(\xi)$. □

3.5.3 Transformations conformes d'une carte de Minkowski

Le groupe des transformations conformes de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est engendré par les homothéties, les isométries linéaires et les translations de $M(\xi)$. Il s'agit du groupe $(\mathbb{R}^* \cdot O_0(1, n)) \times \mathbb{R}^{1,n}$. Il s'avère que ce groupe est isomorphe au stabilisateur d'un point dans $Ein_{1,n}$:

Proposition 3.5.8. *Le groupe d'isométries conformes d'une carte de Minkowski $M(\xi)$ coïncide avec le stabilisateur de ξ dans $\text{Conf}(Ein_{1,n}(E)) = O(2, n + 1)$.*

Démonstration. Il est facile de voir que toute isométrie conforme de $Ein_{1,n}(E)$ qui fixe ξ stabilise $M(\xi)$. Réciproquement, soit f une transformation conforme de $M(\xi)$. Par le théorème de Liouville, on peut étendre de manière unique l'application f en une isométrie conforme g de $Ein_{1,n}(E)$ qui stabilise $M(\xi)$. Comme $g(M(\xi))$ coïncide avec $M(g(\xi))$, on en déduit que g fixe ξ . □

Remarque 3.5.4. Le stabilisateur de ξ dans $O(2, n + 1)$ fixe $-\xi$.

De la même façon, le groupe d'isométries conformes d'une carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ coïncide avec le stabilisateur de p dans $\text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n}(E))$. Une isométrie conforme de $\text{Mink}_0(p)$ fixe les points conjugués, futur et passé, de p si et seulement si elle préserve l'orientation temporelle de $\text{Mink}_0(p)$. Dans le cas contraire, elle les permute.

3.6 Bord de Penrose

Dans [36], Penrose définit une compactification de l'espace de Minkowski \mathbb{M}^{n+1} en lui attachant un bord conforme correspondant aux points à l'infini des droites affines.

Ce bord conforme est constitué de cinq parties distinctes et disjointes : trois points i^+, i_0, i^- et deux hypersurfaces \mathcal{J}^+ et \mathcal{J}^- . Les points i^+ et i^- représentent les points à l'infini, futur et passé, des droites affines de type temps, et i_0 le point à l'infini des droites affines de type espace. Les hypersurfaces \mathcal{J}^+ et \mathcal{J}^- correspondent, quant à elles,

à l'ensemble des points à l'infini, futurs et passés, des droites affines lumières. Chacune des hypersurfaces \mathcal{J}^+ et \mathcal{J}^- est homéomorphe au cylindre $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ et a pour points à l'infini, futur et passé, i^+ et i_0 , et i_0 et i^- respectivement.

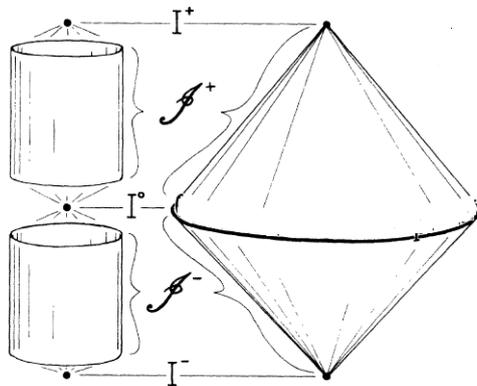


FIGURE 3.3 – Compactification de Penrose de $\mathbb{R}^{1,n}$. Le cercle s'identifie au point i_0 .

Dans l'espace d'Einstein, l'adhérence d'une carte de Minkowski en donne une compactification conforme.

- Dans $Ein_{1,n}(E)$, la frontière d'une carte de Minkowski $M(\xi)$ est le cône lumière de ξ . La partie lisse est l'union de deux hypersurfaces connexes obtenues en privant le cône lumière de ξ des sommets ξ et $-\xi$. Notons que ces deux hypersurfaces sont conformément isométriques par l'application d'antipodie.
- Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$, la frontière d'une carte de Minkowski $Mink_0(p)$ est l'union de $\partial I^+(p)$ et de $\partial I^-(p)$. La partie lisse est l'union de deux hypersurfaces connexes, à savoir la frontière de $I^+(p)$ privée de p et de son premier point conjugué futur, notée $\mathcal{J}^+(p)$, et la frontière de $I^-(p)$ privée de p et de son premier point conjugué passé, notée $\mathcal{J}^-(p)$.

Soit ξ le projeté de p dans $Ein_{1,n}$. Chacune des hypersurfaces $\mathcal{J}^+(p)$ et $\mathcal{J}^-(p)$ se projette injectivement sur une composante connexe de la partie régulière du cône lumière de ξ . On désignera par $\mathcal{J}^\pm(\xi)$ la projection de $\mathcal{J}^\pm(p)$ dans ${}^3 Ein_{1,n}$.

Dans cette section, on se propose d'étudier le lien entre la structure causale d'une carte de Minkowski et sa frontière dans chacun des espaces $Ein_{1,n}$ et $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. On

3. Cette définition ne dépend pas du choix du relevé. En effet, pour tout point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$, l'hypersurface $\mathcal{J}^+(\delta(p))$ coïncide avec $\delta(\mathcal{J}^+(p))$ où δ est le générateur du groupe fondamental de $Ein_{1,n}(E)$ défini au paragraphe (3.2.3).

verra que la frontière d'une carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ correspond exactement au bord de Penrose décrit ci-dessus : le point p correspondra à i_0 , les premiers points conjugués, futur et passé, de p à i^+ et i^- , et les composantes régulières $\mathcal{J}^+(p)$ et $\mathcal{J}^-(p)$ aux hypersurfaces \mathcal{J}^+ et \mathcal{J}^- .

3.6.1 Compactification d'une carte de Minkowski dans l'espace d'Einstein

Soit $M(\xi)$ une carte de Minkowski de $\text{Ein}_{1,n}(E)$. L'espace $\mathcal{J}^+(\xi)$ est naturellement feuilleté par des géodésiques lumières : il s'agit des segments ouverts de photons reliant ξ à $-\xi$. Soit $\hat{S}^+(\xi)$ l'ensemble des vecteurs lumières de $T_\xi \text{Ein}_{1,n}(E)$ tangents à une géodésique lumière de ce feuilletage. On quotiente $\hat{S}^+(\xi)$ par la relation d'équivalence qui identifie deux vecteurs s'ils sont colinéaires. L'espace quotient, noté $S^+(\xi)$, est une sphère conforme de dimension $(n-1)$. Soit $\hat{\rho} : \mathcal{J}^+(\xi) \rightarrow S^+(\xi)$ la projection qui associe à tout point η le vecteur tangent en ξ à l'unique géodésique lumière passant par ξ et η . C'est un fibré en droites, les fibres étant les géodésiques lumières de $\mathcal{J}^+(\xi)$.

(3.6.1) Le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(\xi)$ est le bord conforme de l'espace de co-Minkowski $\text{co}M(\xi)$. Rappelons que l'espace de coMinkowski $\text{co}M(\xi)$ est l'espace des hyperplans affines de type espace de $M(\xi)$ (voir Section 2.2). On va montrer que le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(\xi)$ s'identifie au bord conforme de $\text{co}M(\xi)$. Ce dernier est égal à l'espace des hyperplans lumières affines de $M(\xi)$.

Définition 3.6.1. Soit η un point de $M(\xi)$. On appelle *lisière de η sur $\mathcal{J}^+(\xi)$* , notée $\text{Lis}^+(\eta)$, l'intersection du cône lumière de η avec le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(\xi)$

Le choix de cette terminologie sera justifié dans la Section 3.7.1.

Lemme 3.6.1. *Soit η un point de la carte de Minkowski $M(\xi)$. Alors, la lisière de η sur $\mathcal{J}^+(\xi)$ est une section globale du fibré $\hat{\rho} : \mathcal{J}^+(\xi) \rightarrow S^+(\xi)$.*

Démonstration. Soient $u, v \in E$ des représentants de η, ξ respectivement. L'intersection de $\mathcal{J}^+(\xi)$ avec le cône lumière de η est une composante connexe de l'intersection de $\text{Ein}_{1,n}(E)$ avec la projection de $u^\perp \cap v^\perp$, notée $S(\eta)$. Comme $\langle u, v \rangle_{2,n+1} < 0$, le plan engendré par $\{u, v\}$ est de type $(1, 1)$. Il est facile de voir que $u^\perp \cap v^\perp$ coïncide avec $\text{vect}\{u, v\}^\perp$. Par conséquent, $u^\perp \cap v^\perp$ est de type $(1, n)$. La composante $S(\eta)$ de l'intersection de $\text{Ein}_{1,n}(E)$ avec la projection de $u^\perp \cap v^\perp$ est donc une sphère conforme de dimension $(n-1)$ contenue dans $\mathcal{J}^+(\xi)$. De plus, d'après le Lemme 3.2.2, $S(\eta)$ rencontre chaque fibre de $\mathcal{J}^+(\xi)$. Le lemme s'en suit. \square

Lemme 3.6.2. *Toute géodésique lumière de $\mathcal{J}^+(\xi)$ définit une unique direction lumière de la carte de Minkowski $M(\xi)$ et vice versa.*

Démonstration. Soit $v \in E$ un représentant de ξ . Rappelons que l'espace vectoriel directeur de $M(\xi)$ est v^\perp/v . Une géodésique lumière de $\mathcal{J}^+(\xi)$ est l'intersection de $\text{Ein}_{1,n}(E)$

avec la projection d'un plan totalement isotrope contenant v . La donnée d'une géodésique lumière de $\mathcal{J}^+(\xi)$ est donc équivalente à la donnée d'une direction isotrope de v^\perp autre que v ; c'est à dire, d'une direction isotrope de v^\perp/v . \square

Nous avons vu dans la Section 3.5.2, que l'intersection de $M(\xi)$ avec le cône lumière d'un point de $\mathcal{J}^+(\xi)$ est un hyperplan lumière de $M(\xi)$. Soit donc \hat{f} l'application de $\mathcal{J}^+(\xi)$ dans l'espace des hyperplans lumières de $M(\xi)$ qui associe à un point η l'intersection de son cône lumière avec $M(\xi)$. Rappelons que l'espace des hyperplans lumières de $M(\xi)$ est un fibré en droites au-dessus de $\partial\mathbb{H}^n$ (voir Section 2.2). On a alors la proposition suivante.

Proposition 3.6.1. *L'application \hat{f} est un difféomorphisme conforme entre $\mathcal{J}^+(\xi)$ et l'espace des hyperplans lumières de $M(\xi)$ qui envoie fibre sur fibre, autrement dit \hat{f} est un isomorphisme de fibrés.*

Démonstration. Il découle du Lemme 3.6.2 que f est un morphisme de fibrés. Construisons l'application inverse. Soit P un hyperplan lumière de $M(\xi)$ passant par un point η . L'espace vectoriel directeur de P est l'orthogonal d'une direction lumière u de $M(\xi)$. D'après le Lemme 3.6.2, la direction u définit une unique géodésique lumière φ de $\mathcal{J}^+(\xi)$. D'après le Lemme 3.6.1, l'intersection de $\mathcal{J}^+(\xi)$ avec le cône lumière de η est une section globale du fibré en droites $\mathcal{J}^+(\xi) \rightarrow S^+(\xi)$. Par conséquent, le cône lumière de η rencontre la géodésique lumière φ en un unique point que nous notons $\hat{g}(P)$. Nous venons ainsi de construire une application \hat{g} de l'espace des hyperplans lumières de $M(\xi)$ dans $\mathcal{J}^+(\xi)$. Il est clair que \hat{g} envoie fibre sur fibre et que $\hat{g} = \hat{f}^{-1}$. \square

Le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(\xi)$ est donc le bord conforme de l'espace de coMinkowski $coM(\xi)$.

Remarque 3.6.1. La lisière d'un point η sur $\mathcal{J}^+(\xi)$ correspond à l'ensemble des hyperplans lumières affines passant par η .

(3.6.2) Comportement à l'infini des droites affines de $M(\xi)$. Le comportement à l'infini des droites lumières affines découle immédiatement de la Proposition 3.6.1 :

Lemme 3.6.3. *Toute droite lumière de $M(\xi)$ s'accumule vers un point de $\mathcal{J}^+(\xi)$ à l'infini. De plus, deux droites lumières s'accumulent vers un même point de $\mathcal{J}^+(\xi)$ si et seulement si elles appartiennent au même hyperplan lumière.*

Lemme 3.6.4. *Les droites temporelles de $M(\xi)$ s'accumulent toutes vers le point $-\xi$ à l'infini.*

Démonstration. Soit Δ une droite de type temps de $M(\xi)$. Nous avons vu dans la Section 3.5.2 que l'intersection de $M(\xi)$ avec un cercle temporel de $Ein_{1,n}(E)$ passant par $-\xi$ est une droite de type temps de $M(\xi)$. Soit donc \mathcal{C}_0 un cercle temporel passant par $-\xi$ et soit Δ_0 son intersection avec $M(\xi)$. Il existe une isométrie conforme f de $M(\xi)$ qui envoie Δ_0 sur Δ . Or, f est la restriction d'une isométrie conforme g de $Ein_{1,n}(E)$ qui fixe $-\xi$. Par suite, $g(\mathcal{C}_0)$ est un cercle temporel passant par $-\xi$ dont l'intersection avec $M(\xi)$ coïncide avec Δ . La droite Δ s'accumule donc sur $-\xi$. \square

Lemme 3.6.5. *Tout sous-espace spatial de $M(\xi)$ se compactifie en une sphère conforme passant par ξ .*

Démonstration. Soit P un sous-espace spatial de $M(\xi)$. Nous avons vu dans la Section 3.5.2 que l'intersection de $M(\xi)$ avec une sphère conforme de $Ein_{1,n}(E)$ passant par ξ est un sous-espace spatial de $M(\xi)$. Soit donc \mathcal{S}_0 une sphère conforme passant par ξ et soit P_0 son intersection avec $M(\xi)$. Il existe une isométrie conforme f de $M(\xi)$ qui envoie P_0 sur P . Or, f est la restriction d'une isométrie conforme g de $Ein_{1,n}(E)$ qui fixe ξ . Par suite, $g(\mathcal{S}_0)$ est une sphère conforme passant par ξ dont l'intersection avec $M(\xi)$ coïncide avec P . Le lemme s'en suit. \square

Pour finir, nous reproduisons le célèbre diagramme de Penrose qui illustre la compactification de $M(\xi)$ dans $Ein_{1,n}(E)$.

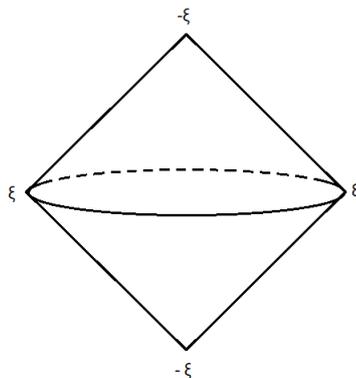


FIGURE 3.4 – Compactification d'une carte de Minkowski $M(\xi)$ dans $Ein_{1,n}$. Les sommets du diamant sont identifiés au point $-\xi$. Le cercle équatorial, quant à lui, s'identifie au point ξ .

3.6.2 Compactification d'une carte de Minkowski dans le revêtement universel de l'univers d'Einstein.

Nous venons de décrire la compactification d'une carte de Minkowski dans l'espace d'Einstein $Ein_{1,n}(E)$. Décrivons à présent cette compactification dans le revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$. Soit $Mink_0(p)$ une carte de Minkowski de $\widetilde{Ein}_{1,n}(E)$ et soit ξ le projeté de p dans $Ein_{1,n}(E)$. Comme $\mathcal{J}^+(p)$ se projette de manière injective sur $\mathcal{J}^+(\xi)$, il admet une description similaire à celle de $\mathcal{J}^+(\xi)$:

On appelle $S^+(p)$ la sphère des directions lumières futures en p . L'espace $\mathcal{J}^+(p)$ est un fibré en droites au-dessus de $S^+(p)$, les fibres étant les géodésiques lumières reliant

p à son premier point conjugué futur. Comme dans la section précédente, $\mathcal{J}^+(p)$ est le bord conforme de l'espace de coMinkowski $\text{coMink}_0(p)$. Chaque fibre de $\mathcal{J}^+(p)$ définit une direction lumière de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$. De plus, l'intersection du cône lumière d'un point $q \in \text{Mink}_0(p)$ avec $\mathcal{J}^+(p)$, encore appelée *lisière de q sur $\mathcal{J}^+(p)$* , correspond à l'ensemble des hyperplans lumières affines passant par p .

Remarque 3.6.2. La structure causale de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ n'étant pas triviale, l'espace $\mathcal{J}^+(p)$ s'identifie aussi naturellement à l'espace des passés (futurs) d'hyperplans lumières de $\widetilde{\text{Mink}}_0(p)$. En effet, pour tout $q \in \mathcal{J}^+(p)$, l'intersection du passé (resp. dual) de p dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ avec la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ est exactement le passé (resp. futur) dans $\text{Mink}_0(p)$ de l'hyperplan lumière défini par q .

(3.6.1) Comportement à l'infini des sous-espaces affines de $\text{Mink}_0(p)$. L'adhérence de $\text{Mink}_0(p)$ privée des premiers points conjugués, futur et passé, de p est contenu dans un domaine fondamental de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ (en effet, dans une décomposition spatio-temporelle $D(P) \times \mathcal{S}^n(P)$ de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$, l'ouvert $]t - \pi, t + \pi[\times \mathcal{S}^n(P)$, où t est la coordonnée de p dans $D(P)$, constitue un tel domaine). Ainsi, le comportement à l'infini des sous-espaces de type espace et des sous-espaces dégénérés de $\text{Mink}_0(p)$ est identique à celui décrit dans le cas de $\text{Ein}_{1,n}(E)$. Quant aux droites temporelles, leur comportement à l'infini diffère légèrement de celui des droites temporelles de $M(\xi)$.

Lemme 3.6.6. *Les droites temporelles de $\text{Mink}_0(p)$ convergent toutes à l'infini vers le point $\sigma(p)$ dans le futur et vers le point $\sigma^{-1}(p)$ dans le passé.*

Démonstration. Soit Δ une droite temporelle de $\text{Mink}_0(p)$. Considérons une suite $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ strictement croissante de Δ c'est à dire telle que $x_{i+1} \in I^+(x_i)$ pour tout entier i . Quitte à extraire, les suites $\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et $\{x_{-i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $x_\infty, x_{-\infty}$ dans le diamant $J(\sigma(p), \sigma^{-1}(p))$. Notons que $x_\infty \neq x_{-\infty}$ car sinon $\Delta \cup \{x_\infty\}$ serait un cercle temporel de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$, ce qui est impossible. Soit $\pi : \widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E) \rightarrow \text{Ein}_{1,n}(E)$. Comme π est continue, $\pi(x_\infty) = \lim \pi(x_i)$ et d'après le Lemme 3.6.4, $\lim \pi(x_i) = -\xi$. D'où, $\pi(x_\infty) = -\xi$. De même, $\pi(x_{-\infty}) = -\xi$. Par conséquent, $x_\infty, x_{-\infty} \in \{\sigma(p), \sigma^{-1}(p)\}$. Comme $x_{-i} \in I^-(x_i)$ pour tout entier i , à la limite on obtient $x_{-\infty} \in J^-(x_\infty)$. Donc, $x_\infty = \sigma(p)$ et $x_{-\infty} = \sigma^{-1}(p)$. \square

Pour finir, on reproduit ci-dessous le diagramme de Penrose illustrant la compactification d'un espace de Minkowski dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$.

3.6.3 Action du groupe conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ sur le bord de Penrose

On décrit ici l'action du groupe conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ sur la composante régulière \mathcal{J}^+ du bord de Penrose de $\mathbb{R}^{1,n}$, notamment sur son feuilletage en géodésiques lumières, noté \mathcal{L} .

On désigne par ρ_L la projection du groupe conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ sur le groupe linéaire $O_0(1, n)$ qui associe à toute isométrie conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ sa partie linéaire.

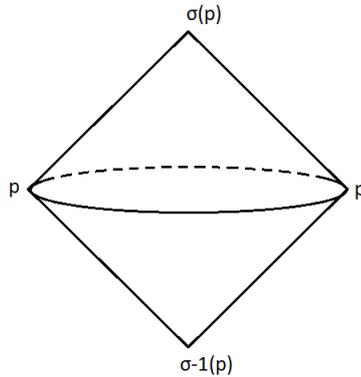


FIGURE 3.5 – Compactification d’une carte de $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}$. La figure représente le diamant de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}$ ayant pour sommets les premiers points conjugués, futur et passé, de p . Le cercle équatorial s’identifie à p .

Soit f une transformation conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$. Les points de \mathcal{J}^+ correspondent aux hyperplans lumière affines de $\mathbb{R}^{1,n}$. Puisque f est conforme, elle envoie un hyperplan lumière affine sur un hyperplan lumière affine. Ainsi, f agit naturellement sur \mathcal{J}^+ et envoie une feuille de \mathcal{L} sur une autre feuille de \mathcal{L} , autrement dit, f préserve le feuilletage \mathcal{L} .

On a vu dans la section précédente que l’espace des feuilles de \mathcal{L} est une sphère conforme de dimension $(n - 1)$ qui correspond à l’espace des directions lumière de $\mathbb{R}^{1,n}$. L’isométrie conforme f agit naturellement sur cette sphère via l’isométrie linéaire $\rho_L(f)$.

3.7 Ombres sur le bord de Penrose

Dans cette section, nous allons voir que la structure causale d’une carte de Minkowski est déterminée par les **ombres** de ses points sur le bord de Penrose. La notion d’ombre fut introduite par C. Rossi dans [37, Chap. 4]. Rappelons que dans un espace-temps M , l’ombre d’un point p sur un fermé achronal A est l’ensemble des points de A causalement reliés à p .

Comme la notion d’ombre fait intervenir la causalité de l’espace-temps ambiant, il est plus pertinent de considérer des cartes de Minkowski de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ au lieu de $\text{Ein}_{1,n}(E)$. Dans tout ce qui suit, on fixe une carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ de $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$. On se contentera de décrire les propriétés des ombres des points de $\text{Mink}_0(p)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$. On obtiendra une description similaire pour $\mathcal{J}^-(p)$ en renversant l’orientation du temps.

3.7.1 Ombres et lisières

L'ombre sur $\mathcal{J}^+(p)$ d'un point q de $\text{Mink}_0(p)$, notée $O^+(q)$, est l'intersection de $\mathcal{J}^+(p)$ avec le futur causal (strict) de q . Les frontières des ombres s'avèreront être des outils utiles dans la description des propriétés causales d'un espace-temps conformément plat. À notre connaissance, il n'existe pas de terminologie pour désigner la frontière d'une ombre $O^+(q)$. Nous proposons le terme **lisière** et la notation $\text{Lis}^+(q)$. Notons que la frontière d'une ombre $O^+(q)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$ est l'intersection du cône lumière de q avec $\mathcal{J}^+(p)$. Cela justifie la Définition 3.6.1.

(3.7.1) Accumulation de lisières. Soit $\{q_i\}$ une suite de points de $\text{Mink}_0(p)$. On se propose d'étudier le comportement à l'infini des lisières $\text{Lis}^+(q_i)$ dans le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(p)$. Pour cela, on identifie $\mathcal{J}^+(p)$ à l'espace des hyperplans lumières affines de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$. Une lisière $\text{Lis}^+(q_i)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$ correspond alors à l'ensemble des hyperplans lumières affines passant par q_i . On a vu que dans le modèle du cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, cet ensemble est le graphe d'une fonction continue h_i de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} que nous avons déterminé dans la Section 2.2. Ce modèle s'avèrera adapté pour comprendre le comportement à l'infini des lisières $\text{Lis}^+(q_i)$ puisque l'on se ramènera à l'étude de la suite de fonctions $\{h_i\}$. Rappelons d'abord l'expression de ces fonctions.

Fixons une origine p_0 de $\text{Mink}_0(p)$ et une direction d'observation $v_0 \in \mathbb{H}^n$. Pour simplifier l'écriture, on identifie $\text{Mink}_0(p)$ à son espace vectoriel sous-jacent par l'application qui associe à un point p le vecteur $p - p_0$. Tout point $p = tv_0 + x$, avec $x \in v_0^\perp$, sera alors noté (t, x) . On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ le produit scalaire sur v_0^\perp induit par la forme quadratique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1,n}$ de $\text{Mink}_0(p)$.

Soit \mathbb{S}^{n-1} la sphère unité de v_0^\perp . On a vu dans la Section 2.2 que $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ s'identifie à l'espace des hyperplans lumières affines de $\text{Mink}_0(p)$ par l'application qui associe à un couple (u, s) l'hyperplan $P(u, s) := \{(t, x) \in \text{Mink}_0(p); t - \langle u, x \rangle_0 = s\}$. L'ensemble des hyperplans lumières affines passant par $q_i = (t_i, x_i)$ est donc l'ensemble des couples (u, s) de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tels que $t_i - \langle u, x_i \rangle_0 = s$. Autrement dit, c'est le graphe de la fonction h_i de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} définie par

$$h_i(u) = t_i - \langle u, x_i \rangle_0 .$$

Posons $x_i = r_i y_i$ avec $r_i \geq 0$ et $y_i \in \mathbb{S}^{n-1}$. On note d_0 la métrique ronde sur \mathbb{S}^{n-1} . La fonction h_i s'écrit alors :

$$h_i(u) = t_i - r_i \cos(d_0(u, y_i)).$$

Remarque 3.7.1. L'épigraphe de h_i , c'est à dire l'ensemble des couples $(u, s) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tels que $s \geq h_i(u)$, correspond à l'ombre $O^+(q_i)$.

Quitte à extraire, la suite $\{q_i\}$ converge vers un point dans l'adhérence de $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$. Dans ce qui suit, on décrit le comportement des fonctions h_i en fonction de la position du point limite.

Remarque 3.7.2. Si la suite $\{q_i\}$ converge vers un point q_∞ de $\text{Mink}_0(p)$, la suite de fonctions $\{h_i\}$ converge simplement vers la fonction $h_\infty : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ par :

$$h_\infty(u) = t_\infty - \langle u, x_\infty \rangle > 0$$

où (t_∞, x_∞) sont les coordonnées de q_∞ . Cela se traduit géométriquement par l'accumulation des lisières $\text{Lis}^+(q_i)$ sur la lisière $\text{Lis}^+(q_\infty)$.

En vertu de la Remarque 3.7.2, on supposera dans la suite que $\{q_i\}$ ne converge pas dans $\text{Mink}_0(p)$. Soit $\sigma : \widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E) \rightarrow \widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ l'application qui associe à un point son premier point conjugué futur.

Lemme 3.7.1. *Si $\{q_i\}$ converge vers $\sigma(p)$ (resp. $\sigma^{-1}(p)$) alors pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).*

Démonstration. Supposons que $\{q_i\}$ converge vers $\sigma(p)$. Soient $u \in \mathbb{S}^n$ et $s_0 > 0$. La sphère $\mathbb{S}^{n-1} \times \{s_0\}$ est la lisière du point $q_0 \in \text{Mink}_0(p)$ de coordonnées $(s_0, 0)$. Comme $I^+(q_0)$ est un voisinage ouvert de $\sigma(p)$, il contient tous les q_i sauf un nombre fini. Alors, $J^+(q_i) \subset I^+(q_0)$ et par conséquent, la lisière $\text{Lis}^+(q_i)$ est dans le futur de $\text{Lis}^+(q_0)$. Comme $(u, h_i(u)) \in \text{Lis}^+(q_i)$ et $(u, s_0) \in \text{Lis}^+(q_0)$, l'hyperplan défini par $(u, h_i(u))$ est alors dans le futur strict de l'hyperplan défini par (u, s_0) . Il est facile de voir que cela se traduit par $h_i(u) \geq s_0$. D'où, $\lim h_i(u) = +\infty$. Le raisonnement est similaire lorsque $\{q_i\}$ converge vers $\sigma^{-1}(p)$. Le lemme s'en suit. \square

Lemme 3.7.2. *Si $\{q_i\}$ converge vers un point $q_\infty = (u_\infty, s_\infty)$ de $\mathcal{J}^+(p)$ alors pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_\infty\}$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $+\infty$.*

Démonstration. Soient $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_\infty\}$ et $s_0 > 0$. Puisque $u \neq u_\infty$, les points (u, s_0) et (u_∞, s_∞) sont sur deux fibres différentes de $\mathcal{J}^+(p)$ et ne sont donc pas causalement reliés. Par suite, le dual de (u, s_0) dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ est un voisinage ouvert de q_∞ , il contient donc tous les q_i sauf un nombre fini. L'intersection du dual de (u, s) dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ avec $\text{Mink}_0(p)$ est le futur strict de l'hyperplan lumière $P(u, s_0)$ défini par (u, s_0) . Ainsi, q_i est dans le futur strict de $P(u, s_0)$ dans $\text{Mink}_0(p)$. L'hyperplan lumière passant par q_i parallèle à $P(u, s_0)$, c'est à dire l'hyperplan $P(u, h_i(u))$, est donc dans le futur strict de $P(u, s_0)$ dans $\text{Mink}_0(p)$. Il est facile de voir que cela se traduit par $h_i(u) > s_0$. D'où, $\lim h_i(u) = +\infty$. \square

Remarque 3.7.3. Si l'on note f le difféomorphisme entre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ et $\mathcal{J}^+(p)$, la composée $\sigma^{-1} \circ f$ identifie $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ à $\mathcal{J}^-(p)$. Le raisonnement ci-dessus permet alors de prouver de manière similaire que si $\{q_i\}$ converge vers un point $q_\infty = (u_\infty, s_\infty)$ de $\mathcal{J}^-(p)$, pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{u_\infty\}$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $-\infty$.

Lemme 3.7.3. *Si $\{q_i\}$ converge vers p alors il existe une boule fermée B de dimension $(n-1)$ dans \mathbb{S}^{n-1} , éventuellement réduite à un point ou égale à \mathbb{S}^{n-1} , telle que*

1. pour tout $u \in \text{int}B$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $+\infty$;

2. pour tout $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus B$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $-\infty$.

Démonstration. Rappelons que $h_i(u) = t_i - r_i \cos(d_0(y_i, u))$. Puisque $\{q_i\}$ s'échappe de $\text{Mink}_0(p)$ vers le point p à l'infini, la suite $\{r_i\}$ converge vers $+\infty$. Donc, $r_i > 0$ pour i grand. Écrivons alors h_i sous la forme

$$h_i(u) = r_i[\mu_i - \cos(d_0(y_i, u))]$$

avec $\mu_i = t_i/r_i$. Comme $y_i \in \mathbb{S}^{n-1}$, quitte à extraire, $\{y_i\}$ converge vers un point $y_\infty \in \mathbb{S}^{n-1}$. Montrons que $\mu_i \in [-1, 1]$. Soit p_0 l'origine de $\text{Mink}_0(p)$. Le dual de p_0 dans $\widehat{\text{Ein}}_{1,n}(E)$ est un voisinage ouvert de p , il contient donc tous les q_i sauf un nombre fini. Comme q_i et p_0 ne sont pas causalement reliés, il est facile de voir que leurs lisières sont transverses. La lisière $\text{Lis}^+(p_0)$ est la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\} = \mathbb{S}^{n-1}$, l'intersection $\text{Lis}^+(q_i) \cap \text{Lis}^+(p_0)$ est donc le lieu des points $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ où $h_i(u) = 0$. Cette équation est vérifiée si et seulement si $r_i = 0$ ou $\mu_i = \cos(d_0(u, y_i))$. Pour i grand, q_i est proche de p , donc $r_i \neq 0$. Par conséquent, l'intersection $\text{Lis}^+(q_i) \cap \text{Lis}^+(p_0)$ est le lieu des points $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ où $\mu_i = \cos(d_0(u, y_i))$. Comme cette intersection est non-vide, on en déduit que $\mu_i \in [-1, 1]$. Par suite, quitte à extraire, $\{\mu_i\}$ converge vers $\mu_\infty \in [-1, 1]$.

Soit B la boule $d_0(u, y_\infty) \geq \arccos(\mu_\infty)$. Remarquons que si $\mu_\infty = 1$, la boule B est égale à \mathbb{S}^{n-1} et si $\mu_\infty = -1$, B est réduite au point $-y_\infty$.

Soit $u \in \text{int}B$. Montrons que $\lim h_i(u) = +\infty$. Comme $u \in \text{int}B$, on a

$$\lim(\mu_i - \cos(d_0(u, y_i))) = \mu_\infty - \cos(d_0(u, y_\infty)) > 0.$$

Par conséquent, $\lim h_i(u) = +\infty$. De même, si $u \in \mathbb{S}^{n-1} \setminus B$, on a

$$\lim(\mu_i - \cos(d_0(u, y_i))) = \mu_\infty - \cos(d_0(u, y_\infty)) < 0.$$

D'où, $\lim h_i(u) = -\infty$. Le lemme s'en suit. \square

3.7.2 Fermés saturés

Nous introduisons ici la notion de **fermés saturés** de $\mathcal{J}^+(p)$. Celle-ci apparaît naturellement dans la description des domaines réguliers de $\text{Mink}_0(p)$ que nous présentons dans la section suivante.

Définition 3.7.1. Soit Λ un sous-ensemble de $\mathcal{J}^+(p)$. On appelle *saturé de Λ* , noté $\text{Sat}(\Lambda)$, l'union de Λ et des segments ouverts de photons reliant un point de Λ à p .

Exemple 3.7.1. Dans le modèle $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, le saturé du graphe d'une fonction f de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} est l'hypographe de f , c'est à dire l'ensemble des couples (u, s) de $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ tels que $s \leq f(x)$.

Définition 3.7.2. Un sous-ensemble Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ est dit *majoré* s'il existe un point p_0 de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ tel que l'ombre $O^+(p_0)$ est disjointe de Λ .

Remarque 3.7.4. Dans le modèle du cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, cette définition coïncide avec la Définition 2.3.3 donnée dans la Section 2.3 du Chapitre 2.

Exemple 3.7.2. Dans le modèle du cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, le graphe d'une fonction f de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} est majoré au sens de la Définition 3.7.2 si et seulement si f est majorée.

Lemme 3.7.4. *Le saturé d'un fermé majoré Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ est fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$.*

Démonstration. Soit $\{q_i\}$ une suite de points de $\text{Sat}(\Lambda)$ qui converge vers un point q de $\mathcal{J}^+(p)$. Par définition, chaque q_i est sur un segment de photon $[\lambda_i, p[$ avec $\lambda_i \in \Lambda$. Montrons que Λ est contenu dans un compact de $\mathcal{J}^+(p)$. Soit p_1 un point de $\text{Mink}_0(p)$ dans le passé strict de q . L'ombre $O^+(q_1)$ est un voisinage de q , elle contient donc tous les q_i , sauf éventuellement un nombre fini. Puisque $\lambda_i \in J^+(q_i)$, l'ombre $O^+(q_1)$ contient tous les λ_i . Comme Λ est majoré, tous les λ_i sont aussi contenus dans le complémentaire d'une ombre $O^+(p_0)$ avec $p_0 \in \text{Mink}_0(p)$ noté $E^+(p_0)$. L'intersection de $O^+(p_1)$ avec l'adhérence dans $\mathcal{J}^+(p)$ de $E^+(p_0)$ est un compact de $\mathcal{J}^+(p)$ contenant tous les λ_i (sauf un nombre fini). Quitte à extraire, $\{\lambda_i\}$ converge donc vers un point $\lambda \in \mathcal{J}^+(p)$. Comme Λ est fermé, $\lambda \in \Lambda$. Comme $q_i \in J^-(\lambda_i)$, en passant à la limite $q \in J^+(\lambda)$. Autrement dit, il existe une géodésique lumière passée reliant λ à q . D'où, $q \in \text{Sat}(\Lambda)$. Donc, $\text{Sat}(\Lambda)$ est fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$. \square

Si l'on enlève l'une des hypothèses *majoré* ou *fermé*, l'énoncé du Lemme 3.7.4 n'est plus vrai comme le montrent les exemples suivants :

Exemple 3.7.3. Soit Λ l'image d'une courbe $c : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{J}^+(p)$ asymptote à une fibre de $\mathcal{J}^+(p)$ dans le futur. C'est un fermé non-majoré de $\mathcal{J}^+(p)$. Son saturé n'est pas fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$.

Exemple 3.7.4. Considérons le modèle du cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ de $\mathcal{J}^+(p)$. Soit f une fonction semi-continue inférieurement (mais pas continue) majorée de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} .

Le graphe de f est un sous-ensemble majoré de $\mathcal{J}^+(p)$ qui n'est pas fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$. Son saturé n'est pas fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$.

Remarque 3.7.5. À contrario, il existe des sous-ensembles majorés de $\mathcal{J}^+(p)$ qui ne sont pas fermés dans $\mathcal{J}^+(p)$ mais dont le saturé est fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$. Dans le modèle du cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$, les graphes de fonctions semi-continues supérieurement de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} en sont des exemples. En effet, il est facile de voir que l'hypographe d'une fonction semi-continue supérieurement est fermé. De plus, comme les fonctions que l'on considère sont semi-continues supérieurement sur un compact, elles sont majorées ; autrement dit, leurs graphes sont majorés dans $\mathcal{J}^+(p)$.

Définition 3.7.3. Un sous-ensemble Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ est dit *saturé* si pour tout point q de Λ , le segment ouvert de photon reliant q à p est contenu dans Λ .

Remarque 3.7.6. La frontière dans $\mathcal{J}^+(p)$ d'un fermé saturé de $\mathcal{J}^+(p)$ est causalement convexe.

Lemme 3.7.5. *Soit Λ un fermé saturé de $\mathcal{J}^+(p)$. Si Λ est majoré alors il est égal au saturé de sa frontière $\partial\Lambda$ dans $\mathcal{J}^+(p)$.*

Démonstration. Il est clair que $\text{Sat}(\partial\Lambda) \subset \Lambda$. Réciproquement, soit $q \in \Lambda$. Comme Λ est majoré, la fibre de $\mathcal{J}^+(p)$ passant par q rencontre $\partial\Lambda$ en un point dans le futur de q (éventuellement égal à q). Le lemme s'en suit. \square

3.7.3 Domaines réguliers

Rappelons qu'un domaine régulier futur de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ est un ouvert convexe non-vide de $\text{Mink}_0(p)$ égal à l'intérieur de l'intersection de demi-espaces futurs de $\text{Mink}_0(p)$ délimités par un hyperplan lumière affine.

Dans cette section, nous étudions le lien entre les domaines réguliers futurs de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ et la composante $\mathcal{J}^+(p)$ de son bord de Penrose.

On voit ici $\mathcal{J}^+(p)$ comme l'espace des demi-espaces futurs de $\text{Mink}_0(p)$ délimités par un hyperplan lumière affine :

Un point q de $\text{Mink}_0(p)$ définit le demi-espace futur $\text{Mink}_0(p) \setminus I^-(q)$.

Tout sous-ensemble Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ définit alors un ouvert convexe $\Omega^+(\Lambda)$ de $\text{Mink}_0(p)$ égal à l'intérieur de l'intersection des demi-espaces futurs définis par les points de Λ :

$$\Omega^+(\Lambda) = \text{int} \bigcap_{q \in \Lambda} (\text{Mink}_0(p) \setminus I^-(q)).$$

On a vu dans la Section 2.2 que cet ouvert est non-vide, c'est à dire est un domaine régulier, si et seulement si Λ est majoré au sens de la Définition 3.7.2 (voir Proposition 2.3.3). Ainsi :

Fait 3.7.1. *Les domaines réguliers futurs de $\text{Mink}_0(p)$ sont paramétrés par les sous-ensembles majorés de $\mathcal{J}^+(p)$.*

Soulignons qu'il existe une infinité de sous-ensembles majorés de $\mathcal{J}^+(p)$ qui définissent le même domaine régulier futur. Cela découle de la remarque suivante :

Remarque 3.7.7. Un domaine régulier futur $\Omega^+(\Lambda)$ reste inchangé si l'on rajoute à Λ des points de $\mathcal{J}^+(p)$ dans le passé de Λ . En particulier, $\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\text{Sat}(\Lambda))$ où $\text{Sat}(\Lambda)$ désigne le saturé de Λ (voir Définition 3.7.1).

En effet, si q est un point de $\mathcal{J}^+(p)$ dans le passé d'un élément r de Λ , le demi-espace futur $\text{Mink}_0(p) \setminus I^-(r)$ est contenu dans le demi-espace futur $\text{Mink}_0(p) \setminus I^-(q)$. Ce dernier ne contribue donc pas à la définition du domaine régulier, autrement dit $\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda \cup \{q\})$.

Dans ce qui suit, nous caractérisons les points d'un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$ par leurs ombres sur le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(p)$.

Rappelons que l'ombre d'un point $q \in \text{Mink}_0(p)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$ est l'intersection de $J^+(q)$ avec $\mathcal{J}^+(p)$ et est notée $O^+(q)$.

Lemme 3.7.6. *Soit Λ un sous-ensemble majoré de $\mathcal{J}^+(p)$ et soit q un point du domaine régulier futur $\Omega^+(\Lambda)$ de $\text{Mink}_0(p)$. Alors, l'ombre $O^+(q)$ est disjointe de Λ .*

Démonstration. S'il existe $q_0 \in O^+(q) \cap \Lambda$ alors $q \in J^-(q_0)$. D'où $q \notin \Omega^+(\Lambda)$. Contradiction. \square

Si, de plus, Λ est fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$, la réciproque du Lemme 3.7.6 est vraie :

Lemme 3.7.7. *Soit Λ un fermé majoré de $\mathcal{J}^+(p)$ et soit $q \in \text{Mink}_0(p)$. Si l'ombre $O^+(q)$ est disjointe de Λ alors q appartient au domaine régulier futur $\Omega^+(\Lambda)$ de $\text{Mink}_0(p)$.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, que $q \notin \Omega^+(\Lambda)$. Comme Λ est fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$, d'après la Proposition 2.3.5, $\Omega^+(\Lambda)$ est le complémentaire dans $\text{Mink}_0(p)$ de l'intersection des $J^-(\lambda)$ avec $\lambda \in \Lambda$. Il existe alors $q_\Lambda \in \Lambda$ tel que $q \in J^-(q_\Lambda)$. Par symétrie, $q_\Lambda \in J^+(q)$, donc $q_\Lambda \in O^+(q)$. Contradiction. \square

Nous avons ainsi prouvé la proposition suivante.

Proposition 3.7.1. *Soit Λ un fermé majoré de $\mathcal{J}^+(p)$. Le domaine régulier futur $\Omega^+(\Lambda)$ est exactement l'ensemble des points $q \in \text{Mink}_0(p)$ dont l'ombre sur $\mathcal{J}^+(p)$ est disjointe de Λ .*

Lemme 3.7.8. *Soit Λ un fermé majoré de $\mathcal{J}^+(p)$. Pour tout point q dans la frontière de $\Omega^+(\Lambda)$ dans $\text{Mink}_0(p)$, l'ombre $O^+(q)$ de q sur $\mathcal{J}^+(p)$ rencontre Λ . De plus, l'intersection $O^+(q) \cap \Lambda$ correspond exactement à l'ensemble des hyperplans d'appui lumières en q .*

Démonstration. On note $\partial\Omega^+(\Lambda)$ la frontière de $\Omega^+(\Lambda)$ dans $\text{Mink}_0(p)$. Soit $q \in \partial\Omega^+(\Lambda)$. D'après la Proposition 3.7.1, l'ombre $O^+(q)$ rencontre Λ . Montrons que $O^+(q) \cap \Lambda$ correspond exactement aux hyperplans d'appui lumière en q . Comme $q \in \partial\Omega^+(\Lambda)$, il existe une géodésique lumière φ issue de q inextensible dans le futur dans $\text{Mink}_0(p)$ qui est contenue dans $\partial\Omega^+(\Lambda)$. Cette géodésique s'accumule sur un point $r \in \mathcal{J}^+(p)$. L'hyperplan lumière de $\text{Mink}_0(p)$ défini par r contient φ , c'est donc un hyperplan d'appui lumière à $\Omega^+(\Lambda)$ en q . D'après le Fait 2.3.1, $r \in \Lambda$.

Réciproquement, soit $r \in \mathcal{J}^-(p)$ tel que l'hyperplan lumière défini par r soit d'appui à $\Omega^+(\Lambda)$ en q . Alors, il existe une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ reliant r à q contenu dans $\partial\Omega^+(\Lambda)$. Donc, $r \in O^+(q)$. De plus, d'après le Fait 2.3.1, $r \in \Lambda$. D'où $r \in O^+(q) \cap \Lambda$. Le lemme s'en suit. \square

(3.7.1) Plus petit fermé saturé de $\mathcal{J}^+(p)$ associé à un domaine régulier. On a montré dans la Section 2.3 qu'un sous-ensemble majoré Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ et son adhérence $\bar{\Lambda}$ dans $\mathcal{J}^+(p)$ définissent le même domaine régulier dans $\text{Mink}_0(p)$, c'est à dire :

$$\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\bar{\Lambda}).$$

Ainsi, tout domaine régulier de $\text{Mink}_0(p)$ est défini par un fermé majoré de $\mathcal{J}^+(p)$. Celui-ci n'est pas unique en vertu de la Remarque 3.7.7 (il suffit de rajouter à Λ des segments fermés de photons dans $\mathcal{J}^+(p)$ ayant pour extrémité future un point de Λ). En particulier, le saturé d'un fermé majoré Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ est un fermé de $\mathcal{J}^+(p)$ (voir Lemme 3.7.4) qui reste, par définition, majoré et qui définit le même domaine régulier futur que Λ .

Dans ce qui suit, nous montrons que tout domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$ admet un plus petit fermé saturé Λ de $\mathcal{J}^+(p)$ qui le définit.

Proposition 3.7.2. *Soient Λ, Λ' deux fermés saturés majorés de $\mathcal{J}^+(p)$ qui définissent le même domaine régulier futur, c'est à dire $\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda')$. Alors,*

$$\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda \cap \Lambda') = \Omega^+(\Lambda').$$

La preuve de cette proposition utilise le lemme suivant. On désigne par $S^+(p)$ la sphère des directions lumières futures en p . Rappelons que $\mathcal{J}^+(p)$ se projette de manière canonique sur $S^+(p)$.

Lemme 3.7.9. *Soient Λ, Λ' deux fermés de $\mathcal{J}^+(p)$ tels que $\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda')$. Alors, les projections de Λ et Λ' dans $S^+(p)$ sont égales.*

Démonstration. On identifie $\mathcal{J}^+(p)$ au cylindre $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Soit $(u, s) \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$ un point de Λ . Montrons qu'il existe $s' \in \mathbb{R}$ tel que $(u, s') \in \Lambda'$. Soit $\{q_i\}$ une suite de points de $\text{Mink}_0(p) \setminus \Omega^+(\Lambda)$ telle que $q_{i+1} \in I^+(q_i)$, qui s'accumule sur $(u, s) \in \mathcal{J}^+(p)$. Comme $q_i \notin \Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda')$, d'après la Proposition 3.7.1, l'ombre $O^+(q_i)$ rencontre Λ' . Soit $(u'_i, s'_i) \in O^+(q_i) \cap \Lambda'$. Montrons que la suite $\{s'_i\}$ est bornée. D'une part, puisque $\Omega^+(\Lambda')$ est non-vide, Λ' est majoré, c'est à dire il existe $M > 0$ tel que pour tout $(u, s) \in \Lambda'$, $s \leq M$ (voir Proposition 2.3.3). Donc $\{s'_i\}$ est majorée. D'autre part, l'inclusion $I^+(q_i) \subset I^+(q_0)$ implique $O^+(q_i) \subset O^+(q_0)$. Donc, $(u'_i, s'_i) \in O^+(q_0)$. Chaque ombre $O^+(q_i)$ est l'épigraphe d'une fonction continue h_i de \mathbb{S}^{n-1} dans \mathbb{R} . Alors, $s'_i \geq h_0(u'_i)$. Comme h_0 est minoré, $\{s'_i\}$ est minorée. On vient ainsi de montrer que $\{s'_i\}$ est bornée. Quitte à extraire, la suite $\{(u'_i, s'_i)\}$ converge alors vers un point $(u', s') \in \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{R}$. On va voir que $u' = u$. Supposons par l'absurde que $u' \neq u$. Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout entier $j \geq i$, on a $O^+(q_j) \subset O^+(q_i)$, donc $h_j(u'_j) \geq h_i(u'_j)$. Puisque $s'_j \geq h_j(u'_j)$, on en déduit que $s'_j \geq h_i(u'_j)$. En passant à la limite sur j , on obtient $s' \geq h_i(u')$. Or, d'après le Lemme 3.7.2, $\lim h_i(u') = +\infty$. Contradiction. Donc, $u' = u$. On vient ainsi de montrer que la projection de Λ est contenue dans celle de Λ' . Comme Λ et Λ' jouent des rôles symétriques, le lemme s'en suit. \square

Preuve de la Proposition 3.7.2. Il est clair que $\Omega^+(\Lambda) \subset \Omega^+(\Lambda \cap \Lambda')$. Supposons par l'absurde, qu'il existe $q \in \partial\Omega^+(\Lambda) \cap \Omega^+(\Lambda \cap \Lambda')$. Alors, il existe un hyperplan d'appui lumière à $\Omega^+(\Lambda)$ en q . Soit r le point de $\mathcal{J}^+(p)$ qui correspond à cet hyperplan lumière affine. D'après le Fait 2.3.1, $r \in \Lambda$. De même, puisque $\Omega(\Lambda) = \Omega(\Lambda')$, on a aussi $r \in \Lambda'$. Comme $r \in \Lambda \cap \Lambda'$ et $q \in \Omega(\Lambda \cap \Lambda')$, le point q devrait être dans le futur strict de l'hyperplan défini par r (voir Proposition 2.3.5). Contradiction. Donc, $\Omega^+(\Lambda)$ est ouvert et fermé dans $\Omega^+(\Lambda \cap \Lambda')$. Comme ce dernier est convexe, donc connexe, on en déduit l'égalité $\Omega^+(\Lambda) = \Omega^+(\Lambda \cap \Lambda')$. \square

Conclusion. Le plus petit fermé saturé de $\mathcal{J}^+(p)$ associé à un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$ est l'intersection de tous les fermés saturés de $\mathcal{J}^+(p)$ qui définissent ce domaine.

(3.7.2) Radical d'un domaine régulier. Soit Ω un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$. On note $\Lambda(\Omega)$ le plus petit fermé saturé de $\mathcal{J}^+(p)$ qui le définit.

Par définition, pour tout point q de $\Lambda(\Omega)$, le rayon lumière passé issu de q contenu dans $\mathcal{J}^+(p)$ est contenu dans Λ . On a vu que les points de ce rayon sont superflus dans la détermination de Ω (voir Remarque 3.7.7).

On appelle **radical de Ω** le sous-ensemble de $\Lambda(\Omega)$ obtenu en enlevant tous les points superflus à la détermination du domaine Ω . Plus précisément :

Définition 3.7.4. Le *radical* de Ω , noté $\text{rad}(\Omega)$, est l'ensemble des points de $\Lambda(\Omega)$ qui ne contiennent aucun autre point de Λ dans leurs futurs autre qu'eux mêmes :

$$\text{rad}(\Omega) = \{q \in \Lambda(\Omega) : J^+(q) \cap \Lambda = \{q\}\}.$$

Remarque 3.7.8. Le radical d'un domaine régulier n'est pas forcément fermé dans $\mathcal{J}^+(p)$.

CHAPITRE

4

ESPACE-TEMPS CONFORMÉMENT PLATS GLOBALEMENT HYPERBOLIQUES

4.1 Espace-temps conformément plats

Définition 4.1.1. Une *structure Lorentzienne conformément plate* sur une variété M est la donnée d'une classe conforme de métriques Lorentziennes toutes localement équivalentes à la métrique plate sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$.

Exemple 4.1.1. Tout espace de Minkowski muni de la classe conforme de sa métrique plate est conformément plat.

Exemple 4.1.2. D'après la Proposition 3.5.1, tout espace d'Einstein est conformément plat.

Nous allons voir que si M est une variété de dimension au moins 3 alors la donnée d'une structure Lorentzienne conformément plate est équivalente à la donnée d'une (G, X) -structure avec $G = O_0(2, n)$ et $X = Ein_{1,n}$. Commençons par rappeler quelques généralités sur les (G, X) -structures.

4.1.1 (G, X) -structures

Le contenu de cette section est largement inspiré de [23, Part 2]. Dans son célèbre programme d'Erlangen, Felix Klein proposait de fonder la géométrie sur la notion d'ac-

tions de groupes et d'invariants. Une *géométrie modèle* y est décrite comme la donnée d'un couple (G, X) où X est une variété connexe sur laquelle agit un groupe de Lie G de manière transitive et fidèle. On demande de plus que l'action de G sur X soit *analytique*, c'est à dire que deux éléments de G dont l'action coïncide sur un ouvert de X soient égaux. Il s'agissait alors d'étudier les objets géométriques dans X invariants sous l'action de G . La notion de (G, X) -structure formalise l'idée de variétés différentielles "localement modelées" sur une géométrie modèle (G, X) . Dans tout ce qui suit, nous ne considérons que des variétés connexes.

Définition 4.1.2. Une (G, X) -structure sur une variété M est la donnée

1. d'un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de M ;
2. d'une famille d'applications $\phi_i : U_i \rightarrow X$ qui sont des difféomorphismes sur leurs images et telles que les applications de recollement $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$ sont des restrictions d'éléments de G .

La famille $\{(U_i, \phi)\}$ est appelée (G, X) -atlas. Une variété munie d'un (G, X) -atlas est appelée (G, X) -variété.

Donnons quelques exemples. Supposons que l'espace modèle X soit simplement connexe. Un moyen naturel de construire des (G, X) -variétés est de considérer des quotients X/Γ où Γ est un sous-groupe discret de G qui agit de manière proprement discontinue et libre sur X . De telles (G, X) -variétés sont dites *complètes* (voir Proposition 4.1.2).

Exemple 4.1.3. Toute variété Riemannienne géodésiquement complète de courbure sectionnelle constante égale à -1 est une $(O_0(1, n), \mathbb{H}^n)$ -variété complète.

Un autre moyen de construire des (G, X) -structures est de chercher un ouvert Ω de X sur lequel un sous-groupe discret Γ de G agit de manière proprement discontinue et libre. Le quotient Ω/Γ est alors une (G, X) -variété qui est dite *Kleinienne*.

Exemple 4.1.4. Soit Γ un sous-groupe discret de $O_0(1, 3)$ non-élémentaire (autrement dit son ensemble limite $\Lambda_\Gamma \subset \partial\mathbb{H}^3$ est infini). Notons $C(\Lambda_\Gamma)$ l'enveloppe convexe de Λ_Γ dans \mathbb{H}^3 . Alors, le quotient $C(\Lambda_\Gamma)/\Gamma$ est une $(O_0(1, 3), \mathbb{H}^3)$ -variété Kleinienne.

Définition 4.1.3. Un (G, X) -morphisme entre deux (G, X) -variétés M et N est une application différentielle $f : M \rightarrow N$ telle que la lecture dans les cartes $\phi_j \circ f \circ \phi_i^{-1}$ est la restriction d'un élément de G .

Remarque 4.1.1. Un (G, X) -morphisme est un difféomorphisme local. En particulier, c'est une application ouverte.

Lemme 4.1.1. Une (G, X) -structure sur une variété M induit naturellement une (G, X) -structure sur son revêtement universel \tilde{M} de sorte que la projection $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ soit un (G, X) -morphisme.

Démonstration. Soit $\{(U_i, \phi_i)\}$ un (G, X) -atlas de M . Quitte à rétrécir les ouverts U_i , on peut supposer que chaque ouvert U_i est trivialisant. Alors, pour tout i , $\pi^{-1}(U_i)$ est une union disjointe dénombrable d'ouverts V_{ij} de \tilde{M} . La famille $\{(V_{ij}, \phi_i \circ \pi)\}$ est alors un (G, X) -atlas de \tilde{M} . □

Dans ce qui suit, nous allons voir qu'une (G, X) -structure sur une variété M est équivalente à la donnée d'un couple (D, ρ) où

1. D est un difféomorphisme *local* du revêtement universel \tilde{M} de M à valeurs dans l'espace modèle X ,
2. ρ est un morphisme de groupes du $\pi_1 M$ à valeurs dans G ;

qui vérifie pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $x \in \tilde{M}$

$$D(\gamma.x) = \rho(\gamma).D(x).$$

Une telle paire (D, ρ) est appelée **paire développante-holonomie**. Cette équivalence met en parallèle deux approches différentes. D'un côté, M est défini par la donnée d'une famille de plongements $\{\phi_i : U_i \rightarrow X\}$: la variété M est le quotient de l'union disjointe des U_i par la relation d'équivalence qui identifie $x_i \in U_i$ à $x_j \in U_j$ s'il existe $g \in G$ tel que $\phi_i(x_i) = g \circ \phi_j(x_j)$. De l'autre, M est pensé comme le quotient de \tilde{M} par son groupe d'automorphismes $\pi_1 M$. Ce deuxième point de vue permet de construire un (G, X) -atlas de cartes *locales* à partir d'une application *globale* $D : \tilde{M} \rightarrow X$ (qui n'est, en général, pas une carte globale!). Les changements de cartes, quant à eux, sont donnés par le morphisme $\rho : \pi_1 M \rightarrow G$.

Proposition 4.1.1. *Soit M une (G, X) -variété. Alors, il existe un (G, X) -morphisme D de \tilde{M} dans X appelé développante. De plus, si D' est une autre développante alors il existe un unique $g \in G$ tel que $D' = g \circ D$.*

Démonstration. Voir [23, Part 2, Chap. 5, Prop. 5.2.1]. □

Rappelons que $\pi_1 M$ agit sur \tilde{M} par automorphismes de la manière suivante. Soit $[\alpha] \in \pi_1 M$ la classe d'homotopie d'un lacet α de M . Pour tout $x \in \tilde{M}$, on définit $[\alpha].x$ comme l'extrémité du relevé de α à partir de x . L'application $x \mapsto [\alpha].x$ ne dépend pas du choix du lacet α dans la classe d'homotopie $[\alpha]$. De plus, cette application est un automorphisme de \tilde{M} .

Corollaire 4.1.1. *Soit M une (G, X) -variété et soit $D : \tilde{M} \rightarrow X$ une développante. Alors, il existe un unique morphisme de groupes $\rho : \pi_1 M \rightarrow G$ tel que pour tout $\gamma \in \pi_1 M$ et pour tout $x \in \tilde{M}$*

$$D(\gamma.x) = \rho(\gamma) \circ D(x).$$

Le morphisme ρ est appelé représentation d'holonomie.

Démonstration. Soit $\gamma \in \pi_1 M$. Alors, $D \circ \gamma$ est une application développante. D'après la Proposition 4.1.1, il existe un unique $g \in G$ tel que $D \circ \gamma = g \circ D$. On pose alors $\rho(\gamma) := g$. □

Remarque 4.1.2. Si $D' = g \circ D$ ($g \in G$) est une autre application développante alors la représentation d'holonomie ρ' qui lui est associée est définie par $\rho'(\gamma) = g \circ \rho(\gamma) \circ g^{-1}$.

On définit une relation d'équivalence sur les paires développante-holonomie :

Définition 4.1.4. Soient $(D, \rho), (D', \rho')$ deux paires développante-holonomie. Elles sont équivalentes s'il existe $g \in G$ tel que $D' = g \circ D$ et $\rho'(\gamma) = g \circ \rho(\gamma) \circ g^{-1}$.

On vient donc d'associer à une (G, X) structure sur M une classe d'équivalence de paires développante-holonomie. Réciproquement, soit M une variété et soit (G, X) une géométrie modèle. Fixons un revêtement universel $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$.

Lemme 4.1.2. *La donnée d'une paire développante-holonomie (D, ρ) définit une (G, X) -structure sur M . De plus, toute paire (D', ρ') équivalente à (D, ρ) définit la même (G, X) -structure sur M .*

Démonstration. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert de \tilde{M} tel que les restrictions de π et D à U_i soient injectives. Posons $V_i = \pi(U_i)$. Alors, $\mathcal{A} = \{(V_i, D \circ \pi|_{U_i}^{-1})\}$ est un atlas de M . Soient V_i, V_j deux domaines de cartes qui s'intersectent. Soit $p \in V_i \cap V_j$. Alors, $p = \pi(p_i) = \pi(p_j)$ avec $u_i \in U_i$ et $u_j \in U_j$. Par suite, il existe $\gamma \in \pi_1 M$ tel que $u_j = \gamma.u_i$. Alors, $D \circ \pi|_{U_j}^{-1}(p) = D(u_j) = D(\gamma.u_i) = \rho(\gamma)D(u_i) = \rho(\gamma)D \circ \pi|_{U_i}^{-1}(p)$ avec $\rho(\gamma) \in G$. Ainsi, \mathcal{A} est un (G, X) -atlas sur M . Il est clair que cette construction ne dépend pas du choix de la paire développante-holonomie dans la classe d'équivalence de (D, ρ) . \square

Conclusion. *La donnée d'une (G, X) -structure sur une variété M est équivalente à la donnée d'une classe d'équivalence de paires développante-holonomie.*

Dorénavant, il nous arrivera de parler de *la* développante D et *du* morphisme d'holonomie ρ en gardant l'esprit que D et ρ sont définis respectivement à composition par un élément de G près et à conjugaison près.

(4.1.1) (G, X) -structures développables.

Définition 4.1.5. Une (G, X) -variété M est dite *développable* si toute développante, $D : \tilde{M} \rightarrow X$ se factorise, via la projection $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$, en un (G, X) -morphisme $\bar{D} : M \rightarrow X$.

Lemme 4.1.3. *Une (G, X) -variété M est développable si et seulement si pour toute développante $D : \tilde{M} \rightarrow X$, l'holonomie associée $\rho : \pi_1 M \rightarrow G$ est triviale.*

Démonstration. Soient $D : \tilde{M} \rightarrow X$ une développante et $\rho : \pi_1 M \rightarrow G$ l'holonomie associée. On pose $\Gamma := \pi_1 M$. Si ρ est triviale alors pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \tilde{M}$, $D(\gamma.x) = \rho(\gamma).D(x) = D(x)$. Donc, D passe au quotient en un difféomorphisme local $\hat{D} : M \rightarrow X$. Réciproquement, supposons que M est développable. Alors, D passe au quotient, c'est à dire $D(\gamma.x) = D(x)$ pour tous $\gamma \in \Gamma$ et $x \in \tilde{M}$. Or, $D(\gamma.x) = \rho(\gamma).D(x)$. Donc, pour $\gamma \in \Gamma$ fixé, $\rho(\gamma).D(x) = D(x)$ pour tout $x \in \tilde{M}$. Autrement dit, $\rho(\gamma)$ est égal à l'identité sur $D(\tilde{M})$. Par conséquent, $\rho(\gamma)$ est l'identité de G . \square

(4.1.2) Structures complètes.

Définition 4.1.6. Une (G, X) -variété M est dite *complète* si la développante est un revêtement.

Remarque 4.1.3. Si M est une (G, X) -variété complète et que X est simplement connexe alors la développante est un difféomorphisme global.

La preuve de la Proposition suivante est laissée au lecteur.

Proposition 4.1.2. *Soit M une (G, X) -variété complète. Si X est simplement connexe alors l'holonomie ρ est injective. De plus, $\rho(\Gamma)$ agit de manière proprement discontinue sur X et M est (G, X) -isomorphe au quotient $X/\rho(\Gamma)$.*

(4.1.3) Assiettes de l'application développante. Soit M une (G, X) -variété et soit $D : \tilde{M} \rightarrow X$ une application développante. Lorsque M est complète, tout ouvert de \tilde{M} au dessus d'un ouvert trivialisant est appelé, dans le langage des revêtements, une *assiette*. Par extension, nous posons la définition suivante dans le cas général où M n'est pas forcément une (G, X) -variété complète.

Définition 4.1.7. Une *assiette* de la développante D est un ouvert U de \tilde{M} sur lequel D est injective.

Nous rappelons ci-dessous un lemme classique permettant de construire des assiettes de plus en plus grosses de la développante.

Lemme 4.1.4 (Lemme des assiettes). *Soient U, V deux assiettes de D d'intersection non-vide. Si $D(U) \cap D(V)$ est connexe alors $U \cup V$ est une assiette de D .*

Démonstration. Montrons que $D(U \cap V) = D(U) \cap D(V)$. Comme $D(U) \cap D(V)$ est connexe, il suffit de montrer que $D(U \cap V)$ est ouvert et fermé dans $D(U) \cap D(V)$. L'application D étant un difféomorphisme local, elle est ouverte. Donc, $D(U \cap V)$ est un ouvert de $D(U) \cap D(V)$. Soit $\{x_i\}$ une suite de $U \cap V$ telle que $\{D(x_i)\}$ converge vers un point y de $D(U) \cap D(V)$. Alors, il existe $u \in U$ et $v \in V$ tel que $D(u) = y = D(v)$. Comme U est une assiette et $\lim D(x_i) = D(u)$ alors $\{x_i\}$ converge vers u . De même, comme V est une assiette et $\lim D(x_i) = D(v)$, alors $\{x_i\}$ converge vers v . Par unicité de la limite, $u = v$. D'où, $y \in D(U \cap V)$. Donc, $D(U \cap V)$ est fermé dans $D(U) \cap D(V)$. Par conséquent, $D(U \cap V) = D(U) \cap D(V)$. Soient à présent $u \in U$ et $v \in V$ tels que $D(u) = D(v)$. Alors, $D(u) \in D(U) \cap D(V)$. Comme $D(U) \cap D(V) = D(U \cap V)$, il existe $u_0 \in U \cap V$ tel que $D(u_0) = D(u) = D(v)$. Comme U est une assiette, $u = u_0$. De même, comme V est une assiette $v = u_0$. D'où $u = v$. \square

L'énoncé suivant est aussi un résultat classique donnant une condition suffisante pour que la développante soit injective sur l'adhérence d'une assiette.

Lemme 4.1.5. *Soit U une assiette de D . On suppose que son image par D est localement connexe, c'est à dire que tout point p de X adhérent à $D(U)$ admet un voisinage W arbitrairement petit tel que $D(U) \cap W$ est connexe. Alors, la restriction de D à l'adhérence de U dans \tilde{M} est injective.*

Démonstration. Soient $u, u' \in \bar{U}$ tels que $D(u) = D(u')$. Supposons, par l'absurde, que $u \neq u'$. Il existe alors deux voisinages ouverts V et V' de u et u' respectivement qui sont disjoints. Quitte à rétrécir, on peut supposer que V et V' sont des assiettes de D . Comme $D(U)$ est localement connexe, il existe un voisinage W de $D(u) = D(u')$ tel que $W \subset D(V) \cap D(V')$ et $W \cap D(U)$ est connexe. Soit W_0 (resp. W'_0) l'image réciproque par $D|_V$ (resp. $D|_{V'}$) de W . Comme $D(W_0) \cap D(U) = W \cap D(U)$ est connexe, d'après la preuve du Lemme 4.1.4, $D(W_0 \cap U) = W \cap D(U)$. De même, $D(W'_0 \cap U) = W \cap D(U)$. D'où, $W_0 \cap U = W'_0 \cap U$. $V \cap V'$. Par conséquent, $V \cap V'$ contient $W_0 \cap U$. Contradiction. \square

4.1.2 Espace-temps conformément plats

Une conséquence importante de la version Lorentzienne du théorème de Liouville (voir Théorème 3.1.1) est qu'en dimension supérieure ou égale à 3, les variétés Lorentziennes conformément plates sont exactement les $(O_0(2, n+1), Ein_{1,n})$ -variétés.

Proposition 4.1.3. *Soit M une variété de dimension $(n+1) \geq 3$. Une structure Lorentzienne conformément plate sur M est équivalente à la donnée d'une $(O_0(2, n+1), Ein_{1,n})$ -structure.*

Démonstration. D'après la Proposition 3.5.1, une $(O_0(2, n+1), Ein_{1,n})$ -structure sur M est conformément plate. La réciproque est une conséquence directe du théorème de Liouville. \square

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des espace-temps conformément plats M de dimension $(n+1) \geq 3$. Nous disposerons alors d'une application développante $D : \tilde{M} \rightarrow Ein_{1,n}$ et d'une représentation d'holonomie $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n+1)$ que nous étudierons pour tenter de décrire la structure causale de ces espaces. À cet effet, il est plus pertinent de considérer comme géométrie modèle $(\tilde{O}_0(2, n+1), \tilde{Ein}_{1,n})$ puisque la structure causale de $\tilde{Ein}_{1,n}$ est riche tandis que celle $Ein_{1,n}$ est triviale.

4.2 Hyperbolicité globale

L'hyperbolicité globale est une propriété des espace-temps qui apparaît naturellement dans la résolution des équations d'Einstein en relativité générale. La première définition, due à Leray [32], est qu'un espace-temps M est globalement hyperbolique s'il est causal, c'est à dire ne contient pas de courbes causales fermées, et si tous ses diamants sont compacts. Un résultat classique de Geroch affirme que, de manière équivalente, M est globalement hyperbolique s'il admet une hypersurface fermée achronale qui rencontre toute courbe causale inextensible exactement une fois. Une telle hypersurface est dite *de Cauchy*. Si elle est compacte, M est dit *Cauchy-compact*. Les espaces de Minkowski et les espaces d'Einstein *universels* sont des exemples d'espace-temps globalement hyperboliques. En effet, dans $\mathbb{R}^{1,n}$, l'hyperplan euclidien $t = 0$ est une hypersurface de Cauchy et dans $\tilde{Ein}_{1,n}$, pour toute décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$, les niveaux $t = a$ sont des sphères de Cauchy. En particulier, $\tilde{Ein}_{1,n}$ est Cauchy-compact. En revanche,

les espaces d'Einstein ne sont pas globalement hyperboliques puisqu'ils contiennent des courbes causales fermées (voir Lemme 3.2.5). Dans l'Annexe B.5, on rappelle, avec plus de détails, quelques faits généraux sur les espace-temps conformes globalement hyperboliques.

Dans cette section, on se place dans le cadre plus spécifique des espace-temps **conformément plats**. On s'intéresse, en particulier, aux propriétés des espace-temps conformément plats globalement hyperboliques *développables* (voir Définition 4.1.5). Dans toute cette section, M désignera un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat développable et $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante.

Le résultat principal que nous démontrons est que **l'union des diamants ouverts contenant un point p de M est une assiette de la développante** (voir Proposition 4.2.2). On peut voir ce résultat comme l'analogue Lorentzien du résultat de Kulkarni-Pinkall [30, Prop. 4.1] affirmant que dans une variété Riemannienne conformément plate développable N , l'union U_p des boules maximales (pour l'inclusion) contenant un point p de N est une assiette de la développante. Dans [30], U_p est appelé voisinage canonique du point p . Par analogie, pour tout point p de M , on appellera *voisinage canonique* de p l'union des diamants ouverts contenant p .

Il est facile de voir que le voisinage canonique d'un point p contient $J^+(p)$ et $J^-(p)$ (voir Remarque 4.2.2). Ainsi, le fait que le voisinage canonique de p soit une assiette permettra de retrouver de manière immédiate que les passés et futurs de points sont des assiettes [37, Chap.6, Prop. 2.7].

La preuve du résultat principal de cette section repose sur l'observation clé suivante : **les diamants ouverts de M sont des assiettes qui ont pour images des diamants de $\widetilde{Ein}_{1,n}$** (voir Lemme 4.2.1). Ce lemme s'avèrera central puisqu'il permettra de retrouver, presque immédiatement, l'un des résultats principaux de [38], qui sera le point de départ de notre travail, à savoir : s'il existe une géodésique lumière de M dont l'image par D contient deux points conjugués de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ alors M admet une sphère de Cauchy et est, par conséquent, une assiette de D (voir Proposition 4.2.3). Dans la Section 5.2.2, on verra que sous l'hypothèse supplémentaire que M est \mathcal{C}_0 -maximal, M est conformément difféomorphe $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Dans la Section 4.2.1, on montre que les diamants ouverts de M sont des assiettes de la développante. Les applications de ce résultat sont décrites dans la Section 4.2.3. On y démontrera en particulier, que le voisinage canonique d'un point est une assiette.

Pour alléger l'écriture, les images par D des points p, q, \dots de \widetilde{M} seront notées \bar{p}, \bar{q}, \dots

4.2.1 Les diamants sont des assiettes

Commençons par remarquer que la développante envoie courbe causale sur courbe causale.

Lemme 4.2.1. *Soit $\gamma : I \rightarrow M$ une courbe causale de M . Alors, $D \circ \gamma : I \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est une courbe causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En particulier, $D \circ \gamma$ est un plongement sur son image.*

Démonstration. Comme la développante est conforme, pour tout $t \in I$, le vecteur tangent $(D \circ \gamma)'(t) = d_{\gamma(t)}D(\gamma'(t))$ est causal. De plus, s'il existe $t, t' \in I$ tels que $t \neq t'$ et $D \circ \gamma(t) = D \circ \gamma(t')$ alors $D \circ \gamma$ serait une courbe causale de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui se referme. Contradiction. \square

Lemme 4.2.2. *La restriction de la développante à tout diamant non-vide $J(p, q)$ de M est injective et a pour image le diamant $J(\bar{p}, \bar{q})$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Par le Lemme 4.2.1, l'image par D de $J(p, q)$ est contenue dans le diamant $J(\bar{p}, \bar{q})$. Notons $D_{p,q}$ l'application $D|_{J(p,q)} : J(p, q) \rightarrow J(\bar{p}, \bar{q})$. Le diamant $J(p, q)$ étant compact, $D_{p,q}$ est une application propre. Comme $D_{p,q}$ est un difféomorphisme local, c'est donc un revêtement. Or, $J(\bar{p}, \bar{q})$ est simplement connexe. Donc, $D_{p,q}$ est un difféomorphisme. \square

Corollaire 4.2.1. *Les diamants ouverts non-vides de M sont des assiettes qui ont pour image des diamants ouverts de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

4.2.2 Assiettes causalement convexes

Soit U un ouvert causalement convexe de M . On va donner un critère pour que U soit une assiette.

Remarque 4.2.1. L'ouvert U est globalement hyperbolique. En effet, il est causal puisque M l'est. Le fait que U soit causalement convexe implique que les diamants de U sont exactement les diamants de M contenus dans U . Ainsi, les diamants de U sont compacts.

L'ouvert U étant globalement hyperbolique, il admet des hypersurfaces de Cauchy.

Lemme 4.2.3. *Si U admet une hypersurface de Cauchy Σ dont l'image par D est achronale dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ alors il suffit que D soit injective sur Σ pour que U soit une assiette.*

L'outil principal de la preuve est la construction d'un feuilletage en courbes temporelles inextensibles sur M :

On fixe une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le tiré en arrière par D du champ de vecteurs ∂_t est un champ de vecteur de type temps T sur M . Les orbites de T forment une partition de M en courbes de type temps inextensibles, autrement dit un feuilletage \mathcal{F} où les feuilles sont des sous-variétés *plongées* de dimension 1, de type temps.

Preuve du Lemme 4.2.3. Soient $x, y \in U$ tels que $D(x) = D(y)$. On considère les feuilles F_x et F_y passant par x et y . Comme U est causalement convexe, les intersections de chacune des feuilles F_x, F_y avec U sont connexes. On note α et β les intersections de F_x et F_y avec U . Ce sont des courbes temporelles inextensibles de U , chacune d'elles rencontre donc Σ en un unique point. Soit a (resp. b) le point d'intersection de α (resp. β) avec Σ . Par définition, l'image par D de α (resp. β) est contenue dans la droite temporelle

passant par $D(x)$ (resp. $D(y)$). Comme $D(x) = D(y)$, les images par D de α et β sont contenues dans la même droite temporelle Δ . Par suite, $D(a)$ et $D(b)$ appartiennent à l'intersection de Δ avec $D(\Sigma)$. Si $D(a) \neq D(b)$, la droite temporelle Δ rencontrerait $D(\Sigma)$ en au moins deux points distincts, ce qui contredirait l'achronalité de $D(\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Donc, $D(a) = D(b)$. Comme D est injective sur Σ , il s'en suit que $a = b$. Comme les feuilles F_x et F_y passent par le même point $a = b$, elles sont égales. Les points x et y appartiennent donc à la même feuille. Par le Lemme 4.2.1, on en déduit que $x = y$. \square

Une des applications du Lemme 4.2.3 est que M est une assiette dès qu'il contient une hypersurface de Cauchy *compacte* :

Proposition 4.2.1 ([38, Theorem 4]). *Si M est Cauchy-compact alors M admet une sphère de Cauchy et est, par conséquent, une assiette de D .*

La preuve de cette proposition utilise le fait classique suivant.

Lemme 4.2.4. *Soit $f : (\Sigma, g) \rightarrow (\Sigma', g')$ un difféomorphisme local entre deux variétés Riemanniennes. On suppose que Σ est complète et que f dilate les longueurs, c'est à dire $f^*g' \geq g$. Alors, f est un revêtement.*

Démonstration. Voir par exemple [33, Lemma 1]. \square

Preuve de la Proposition 4.2.1. Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Fixons une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Soit $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le deuxième facteur. Le tiré en arrière par D de la métrique $d\sigma^2 - dt^2$ sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est une métrique Lorentzienne sur M , qui induit une métrique Riemannienne sur S notée g_0 . Remarquons que $\pi^*d\sigma^2 \geq d\sigma^2 - dt^2$. Comme $D|_S$ est une isométrie locale, il s'en suit que :

$$\begin{aligned} (\pi \circ D|_S)^*(d\sigma^2) &= D|_S^*(\pi^*d\sigma^2) \\ &\geq D|_S^*(d\sigma^2 - dt^2) = g_0. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\pi \circ D|_S : (S, g_0) \rightarrow (\mathbb{S}^n, d\sigma^2)$ dilate les longueurs. Comme S est compacte, elle est complète. D'après le Lemme 4.2.4, $\pi \circ D|_S$ est donc un revêtement. Comme \mathbb{S}^n est simplement connexe, $\pi \circ D|_S$ est un difféomorphisme. Par conséquent, $D|_S$ est un difféomorphisme sur image et $D(S)$ est une hypersurface de type espace complète de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 3.2.2, $D(S)$ est donc un fermé achronal étanche de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. De plus, $D(S)$ est compacte puisque S est compacte. Il découle alors du Lemme B.6.2 que $D(S)$ est une hypersurface de Cauchy de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 4.2.3, la développante D est injective sur M . \square

4.2.3 Applications

Nous allons voir que le Corollaire 4.2.1 permet de construire de "grosses" assiettes de la développante. Soit p un point de M .

Définition 4.2.1. On appelle *voisinage canonique* de p l'union des diamants ouverts de M contenant p . On le note $\mathcal{R}(p)$.

(4.2.1) Le voisinage canonique de p est une assiette.

Proposition 4.2.2. *Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ est une assiette de l'application développante.*

La preuve de cette proposition utilise le Lemme des assiettes 4.1.4. Comme tout diamant ouvert de M est une assiette qui a pour image un diamant ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, la Proposition 4.2.2 est alors une conséquence du lemme suivant.

Lemme 4.2.5. *L'intersection d'une famille de diamants ouverts de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contenant un point de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est connexe.*

Démonstration. Soit $\{\Delta_i\}_{i \in I}$ une famille de diamants ouverts de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contenant un point $p_0 \in \widetilde{Ein}_{1,n}$ et soit Δ leur intersection. Montrons que Δ est connexe par arcs. Soient $p, q \in \Delta$. On distingue deux cas :

- 1^{er} cas. p et q sont causalement reliés. Chaque diamant Δ_i étant causalement convexe, leur intersection Δ l'est également. Par suite, il existe une courbe causale contenue dans Δ reliant p à q .
- 2^e cas. p et q ne sont pas causalement reliés. Soit $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}$ une décomposition spatio-temporelle de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ telle que p, q appartiennent à la même sphère $\Sigma = \mathbb{S}^n \times \{0\}$. Pour tout $i \in I$, on désigne par $p_i = (x_i, t_i)$, $q_i = (x'_i, t'_i)$ les sommets du diamant Δ_i avec $p_i \in I^+(q_i)$. Pour tout $i \in I$, le sous-ensemble $\Delta_i \cap \Sigma = \{(x, 0) \in \Sigma : d_0(x, x_i) < t_i \text{ et } d_0(x, x'_i) < -t'_i\}$ est l'intersection des deux boules B_i et B'_i de la sphère Σ de centres respectifs $(x_i, 0)$ et $(x'_i, 0)$, et de rayons respectifs t_i et $-t'_i$. Comme B_i et B'_i sont des convexes de la sphère ronde Σ , leur intersection est convexe. Par suite, $\Delta \cap \Sigma$ est une intersection *non-vide* de convexes puisqu'elle contient p et q . Donc, $\Delta \cap \Sigma$ est un convexe de Σ . Il existe alors une courbe contenue dans $\Delta \cap \Sigma$ reliant p à q .

Par conséquent, Δ est connexe par arcs, donc connexe. □

Preuve de la Proposition 4.2.2. Soient q, r deux points de $\mathcal{R}(p)$ tels que $\bar{q} = \bar{r}$. Alors, le point q (resp. r) est contenu dans un diamant ouvert $\Delta(q)$ (resp. $\Delta(r)$) contenant p . Les images de $\Delta(q)$ et $\Delta(r)$ sont des diamants ouverts de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui contiennent \bar{p} . D'après le Lemme 4.2.5, leur intersection est donc connexe. Par le lemme des assiettes 4.1.4, l'union des diamants $\Delta(q)$ et $\Delta(r)$ est une assiette. D'où, $q = r$. Donc, $\mathcal{R}(p)$ est une assiette. □

Lemme 4.2.6. *L'assiette $\mathcal{R}(p)$ est causalement convexe dans M .*

Démonstration. Soit $q, r \in \mathcal{R}(p)$ tels que $q \in J^+(r)$. Les points q, r sont contenus dans des diamants $I(q^+, q^-), I(r^+, r^-)$ qui contiennent p . Alors, q, r appartiennent au diamant $I(q^+, r^-)$ qui contient p . D'où, $J(q, r) \subset I(q^+, r^-) \subset \mathcal{R}(p)$. □

Remarque 4.2.2. Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ contient le futur et le passé de p . En effet, soit $q \in J^+(p)$. Soient $r \in I^+(q)$ et $s \in I^-(p)$. Alors, le diamant $I(r, s)$ contient à la fois p et q . D'où, $q \in \mathcal{R}(p)$. Donc, $J^+(p) \subset \mathcal{R}(p)$. Par symétrie, $J^-(p) \subset \mathcal{R}(p)$.

D'après la Remarque 4.2.2, il découle immédiatement de la Proposition 4.2.2 le résultat suivant énoncé dans [37, Chap. 6, Proposition 2.7].

Corollaire 4.2.2. *La restriction de la développante à l'union de $J^+(p)$ et de $J^-(p)$ est injective.*

En résumé, on vient de mettre en évidence trois familles d'assiettes causalement convexes : les diamants, les passés/futurs de points et les voisinages canoniques de points de M . Dans ce qui suit, nous décrivons leurs images par la développante. On a déjà vu que l'image d'un diamant est un diamant. On va voir que pour tout point p de M , les images du passé/futur de p et du voisinage canonique de p sont causalement convexes dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Lemme 4.2.7. *L'image par D de $J^-(p)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soient $q, r \in J^-(p)$ tels que $\bar{r} \in J^+(\bar{q})$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 4.2.1, les points \bar{q}, \bar{r} sont contenus dans $J^-(\bar{p})$. Ainsi, \bar{r} appartient au diamant $J(\bar{p}, \bar{q})$. Or, $J(\bar{p}, \bar{q})$ coïncide avec l'image du diamant $J(p, q)$ par la développante. Il existe donc $r' \in J(p, q)$ tel que $\bar{r}' = \bar{r}$. Comme la développante est injective sur $J^-(p)$, on en déduit que $r' = r$. Comme $J^-(p)$ est causalement convexe, il contient le diamant $J(r, p)$. Ce dernier est envoyé par la développante sur le diamant $J(\bar{r}, \bar{q})$. Donc, $J(\bar{r}, \bar{q})$ est contenu dans l'image de $J^-(p)$. Le lemme s'en suit. \square

Remarque 4.2.3. Par symétrie, l'image par D de $J^+(p)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Lemme 4.2.8. *L'image par D de $\mathcal{R}(p)$ est l'union des diamants $I(\bar{r}, \bar{s})$ avec $r \in I^+(p)$ et $s \in I^-(p)$.*

Démonstration. Soit $r \in I^+(p)$ et soit $s \in I^-(p)$. Le diamant $I(r, s)$ est contenu dans $\mathcal{R}(p)$ et s'envoie sur le diamant $I(\bar{r}, \bar{s})$. Par conséquent, l'union des diamants $I(\bar{r}, \bar{s})$ avec $r \in I^+(p)$ et $s \in I^-(p)$, est contenue dans l'image de $\mathcal{R}(p)$. Réciproquement, soit $q \in \mathcal{R}(p)$. Alors, q appartient à un diamant $I(r, s)$ avec $r \in I^+(p)$ et $s \in I^-(p)$. Donc, \bar{q} est contenu dans $D(I(r, s)) = I(\bar{r}, \bar{s})$. Le lemme s'en suit. \square

Corollaire 4.2.3. *L'image par D de $\mathcal{R}(p)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soient $q_0, q_1 \in \mathcal{R}(p)$ tels que $\bar{q}_1 \in J^+(\bar{q}_0)$. D'après le Lemme 4.2.8, \bar{q}_0, \bar{q}_1 sont contenus respectivement dans des diamants $I(\bar{r}_0, \bar{s}_0)$ et $I(\bar{r}_1, \bar{s}_1)$ avec $r_0, r_1 \in I^+(p)$ et $s_0, s_1 \in I^-(p)$. Par suite, le diamant $J(\bar{q}_1, \bar{q}_0)$ est contenu dans $I(\bar{r}_1, \bar{s}_0)$, donc dans l'image de $\mathcal{R}(p)$. Le lemme s'en suit. \square

(4.2.2) Points conjugués. Dans [37], C. Rossi étend la notion de points conjugués dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ aux espace-temps conformément plats.

Définition 4.2.2. Deux points p, q d'un espace-temps conformément plat sont dits *conjugués* s'il existe deux géodésiques lumières distinctes reliant p à q qui n'ont aucun autre point d'intersection entre p et q .

Proposition 4.2.3 ([38, Theorem 5]). *Si M contient deux points conjugués p et q alors M admet une sphère de Cauchy et est, par conséquent une assiette de D .*

Démonstration. Supposons $p \in J^+(q)$. Soient $p_1 \in I^+(p)$ et $q_1 \in I^-(q)$. D'après le Lemme 4.2.2, $D|_{I(p_1, q_1)} : I(p_1, q_1) \rightarrow I(\bar{p}_1, \bar{q}_1)$ est un difféomorphisme conforme. Notons que $I(p_1, q_1)$ contient le diamant $J(p, q)$ qui est envoyé sur le diamant $J(\bar{p}, \bar{q})$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme p et q sont conjugués dans M alors \bar{p} est le premier point conjugué futur de \bar{q} . Donc, $J(\bar{p}, \bar{q}) = \partial I^+(\bar{q})$. Par suite, $J(p, q)$ est achronal étanche dans $I(p_1, q_1)$. Comme $I(p_1, q_1)$ est causalement convexe, $J(p, q)$ est achronal étanche dans M . Le diamant $J(p, q)$ étant compact, il résulte du Corollaire B.6.2 que $J(p, q)$ est une hypersurface de Cauchy de M . Par conséquent, d'après le Lemme 4.2.3, M est une assiette. \square

4.3 Frontière causale d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique

La *frontière causale* d'un espace-temps M est une notion introduite par Penrose, Geroch et Kronheimer dans [21]. Leur idée est d'attacher à M une collection de points idéaux qui correspondent aux points à l'infini de courbes causales inextensibles : ceux dans le futur forment la frontière causale future et ceux dans le passé, la frontière causale passée. La notion qui permet de formaliser cette idée est celle d'*ouverts passés indécomposables* appelés *IPs* (de l'anglais "Indecomposable Past sets"). On distingue deux classes de *IPs* : les passés stricts de points, appelés *PIPs* (Proper *IPs*) et les passés stricts de courbes causales inextensibles, appelés *TIPs* (Terminal *IPs*). Pour éviter certaines situations pathologiques, l'espace-temps M est supposé distinguant¹. Ainsi, M s'identifie à l'ensemble des *PIPs* par l'application qui associe à un point son passé strict. Quand aux *TIPs*, on peut les voir comme les "extrémités" futures des courbes causales inextensibles de M . Ils forment la frontière causale future notée $\partial_c^+ M$. Les *IFs*, *PIFs*, *TIFs* sont définis de manière symétrique. Comme pour les *IPs*, l'ensemble des *PIFs* s'identifie à M et l'ensemble des *TIFs* forme la frontière causale passée notée $\partial_c^- M$. Le *complété causal* de M , noté M^\sharp , est l'union disjointe de M et de ses frontières causales, future et passée.

Cette construction est présentée de manière détaillée dans l'Annexe C dans le cadre des espace-temps *globalement hyperboliques* (ces derniers sont, en particulier, distinguants). Nous y précisons, en particulier, les relations de causalité et la topologie sur le complété causal d'un espace-temps globalement hyperbolique (voir Annexes C.2 et C.3). Dans ce chapitre, on se restreint à la classe des espace-temps **conformément plats**. On s'intéresse, en particulier, à ceux qui sont *développables*. Le résultat principal de cette section est que le complété causal d'un espace-temps conformément globalement hyperbolique développable *sans points conjugués* est une variété topologique à bord (voir

1. Un espace-temps est *passé-distinguant* si pour tous points p et q distincts, $I^-(p)$ et $I^-(q)$ sont distincts. Autrement dit, l'application $p \in M \mapsto I^-(p)$ est injective. De manière symétrique, on définit les espace-temps *futur-distinguants*. Un espace-temps est alors dit *distinguant* s'il est à la fois passé et futur distinguant.

Section 4.3.1). Avant cela, mentionnons un résultat clé des espace-temps conformément plats globalement hyperboliques développables, à savoir :

Proposition 4.3.1. *Les IPs et les IFs sont des assiettes de la développante. De plus, leurs images sont causalement convexes dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. On a vu dans la Section 4.2 que les PIPs et les PIFs sont des assiettes de la développante (voir Corollaire 4.2.2). Comme les TIPs (resp. les TIFs) sont des unions croissantes de passés (resp. futurs) stricts de points, ce sont alors aussi des assiettes. De plus, comme les images par la développante des PIPs et des PIFs sont causalement convexes dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Lemme 4.2.7), il en est de même pour les images des TIPs et des TIFs. La proposition s'en suit. \square

4.3.1 Complété causal d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique développable sans points conjugués

Nous allons montrer que le complété causal d'un espace-temps M conformément plat globalement hyperbolique **développable** et **sans points conjugués** est **une variété topologique à bord**. Le complété causal de M sera muni de la topologie décrite dans l'Annexe C.3.

Faisons nous une intuition de ce résultat à travers les exemples suivants, développés en détail dans l'Annexe C.1.

Exemple 4.3.1. La frontière causale future (passée) de $\mathbb{R}^{1,n}$ s'identifie à l'union du bord de Penrose \mathcal{J}^\pm et de $\{i^\pm\}$. Le complété causal de $\mathbb{R}^{1,n}$ s'identifie ainsi au compactifié de $\mathbb{R}^{1,n}$, défini par Penrose, privé du point i_0 .

Exemple 4.3.2. Soit Ω un domaine régulier futur de $\mathbb{R}^{1,n}$. On distingue deux cas :

1. Ω est **propre**. Sa frontière causale future s'identifie à l'ensemble des points du bord de Penrose \mathcal{J}^+ dans le futur strict de Ω et sa frontière causale passée s'identifie à la frontière de Ω dans $\mathbb{R}^{1,n}$.
2. Ω est le **futur strict d'un hyperplan lumière** L . L'hyperplan L s'accumule sur un point $\ell^+ \in \mathcal{J}^+$ dans le futur et sur un point $\ell^- \in \mathcal{J}^-$ dans le passé. La frontière causale future de Ω s'identifie alors à l'union de $\{i^+\}$ et du complémentaire dans \mathcal{J}^+ du segment fermé reliant ℓ^+ à i_0 . La frontière causale passée de Ω s'identifie à l'union de l'hyperplan L et du segment de \mathcal{J}^- reliant ℓ^- à i_0 , fermé en ℓ^- et ouvert en i_0 .

En renversant l'orientation du temps, on obtient une description similaire des domaines réguliers passés de $\mathbb{R}^{1,n}$.

D'après la description ci-dessus, les complétés causaux de $\mathbb{R}^{1,n}$ et de ses domaines réguliers sont des *variétés topologiques à bord*. Plus généralement, nous allons voir que cela reste vrai pour tout ouvert causalement convexe sans points conjugués de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Section 4.3.1.1). Nous en déduisons que le complété causal de tout espace-temps globalement hyperbolique conformément plat développable et sans points conjugués est une variété topologique à bord (voir Section 4.3.1.2). Les hypothèses *développable* et *sans*

points conjugués sont cruciales dans notre énoncé comme l'indiquent les contre-exemples suivants :

Exemple 4.3.3. L'espace-temps $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est conformément plat globalement hyperbolique développable avec une infinité de points conjugués. Il admet un unique TIP et un unique TIF égal à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ lui-même (voir Annexe C.1). Autrement dit, sa frontière causale future (passée) est réduite à un point. Le complété causal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ n'est donc pas une variété à bord.

Exemple 4.3.4. Soit M le quotient d'un domaine régulier Ω de $\mathbb{R}^{1,2}$ par un sous-groupe discret Γ d'isométries de $\mathbb{R}^{1,2}$. C'est un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique sans points conjugués mais qui n'est pas développable. En général, l'action de Γ sur l'ensemble des points singuliers de Ω (au sens de [15]) est sauvage : elle n'est ni libre ni proprement discontinue. Le quotient du complété causal de Ω par Γ est donc loin d'être une variété.

4.3.1.1 Le cas des ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$

Soit Ω un ouvert causalement convexe sans points conjugués de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$, l'ouvert Ω est le domaine compris entre les graphes de deux fonctions 1-Lipschitz f^+, f^- définies sur la projection U de Ω sur \mathbb{S}^n à valeurs dans \bar{R} telles que $f^+ > f^-$ et qui s'étendent à ∂U en une même fonction 1-Lipschitz f (voir Proposition 3.3.1). Comme Ω ne contient pas de points conjugués, f^+ et f^- sont finies. On note d_0 la distance usuelle sur \mathbb{S}^n .

Lemme 4.3.1. *Supposons que ∂U soit non-vide. Alors, l'ouvert Ω est contenu dans le dual du graphe de f , autrement dit, les points de Ω ne sont causalement reliés à aucun point du graphe de f .*

Démonstration. Soient $(t, x) \in \Omega$. Il s'agit de vérifier que $|t - f(x_0)| < d_0(x, x_0)$ pour tout $x_0 \in \partial U$ (voir Remarque 3.2.4). Soit $x_0 \in \partial U$. D'une part, $t - f(x_0) < f^+(x) - f(x_0) \leq d_0(x, x_0)$, soit $t - f(x_0) < d_0(x, x_0)$. D'autre part, $f(x_0) - t < f(x_0) - f^-(x) \leq d_0(x, x_0)$, soit $f(x_0) - t < d_0(x, x_0)$. D'où, $|t - f(x_0)| < d_0(x, x_0)$. \square

Lemme 4.3.2. *Toute courbe causale inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui rencontre Ω coupe chacun des graphes de $f^+_{|U}$ et $f^-_{|U}$ en un unique point.*

Démonstration. Soit $\hat{\gamma}$ une courbe temporelle inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui rencontre Ω . Alors, $\hat{\gamma}$ coupe donc la frontière de Ω . Cette dernière est l'union du graphe de $f^+_{|U}$, noté $\partial^+\Omega$, du graphe de f , noté Λ , et du graphe de $f^-_{|U}$, noté $\partial^-\Omega$. On distingue deux cas :

- 1^{er} cas : Λ est vide. Alors, $\hat{\gamma}$ doit couper $\partial^+\Omega$ ou $\partial^-\Omega$. Supposons que $\hat{\gamma}$ coupe $\partial^+\Omega$. Le domaine Ω n'étant pas passé-complet, la courbe de type temps inextensible $\hat{\gamma}$ doit recouper la frontière de Ω . Comme la frontière $\partial^+\Omega$ est achronale, $\hat{\gamma}$ ne peut la recouper une seconde fois. Donc, $\hat{\gamma}$ coupe $\partial^-\Omega$.
- 2^e cas : Λ est non-vide. D'après le Lemme 4.3.1, la courbe temporelle $\hat{\gamma}$ ne peut couper Λ . Le même raisonnement que celui du cas précédent permet de conclure.

□

Corollaire 4.3.1. *La frontière causale future (resp. passée) de Ω s'identifie au graphe de $f_{|U}^+$ (resp. de $f_{|U}^-$).*

Démonstration. Tout point p du graphe de $f_{|U}^+$ définit le TIP $I^-(p) \cap \Omega$ de Ω . Réciproquement, soit U un TIP de Ω . C'est le passé strict d'une courbe causale inextensible γ de Ω . Comme Ω est causalement convexe, γ est l'intersection d'une courbe causale inextensible $\hat{\gamma}$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ avec Ω . D'après le Lemme 4.3.2, $\hat{\gamma}$ coupe le graphe de $f_{|U}^+$ en un unique point p . Par suite, U coïncide avec le passé strict de p dans Ω . Ainsi, la frontière causale future de Ω s'identifie au graphe de $f_{|U}^+$. Par symétrie, la frontière causale passée s'identifie au graphe de $f_{|U}^-$. □

On vient ainsi de montrer la proposition suivante :

Proposition 4.3.2. *Le complété causal de Ω est une variété à bord homéomorphe à $S \times [0, 1]$, où S est une hypersurface de Cauchy de Ω .*

4.3.1.2 Le cas général

Soit M un espace-temps globalement hyperbolique conformément plat **développable** et **sans points conjugués**.

Proposition 4.3.3. *Le complété causal de M est une variété à bord.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que tout TIP de M admet un voisinage homéomorphe à un demi-espace de $\mathbb{R}^{1,n}$. Par symétrie, il en sera de même pour les TIFs. Soit P un TIP de M et $p \in P$. Le futur strict de p dans le complété causal de M est un voisinage ouvert de P (voir Annexe C.2). On va montrer que ce voisinage est homéomorphe à un demi-espace de $\mathbb{R}^{1,n}$. D'après le Lemme 4.2.7, l'image par D de $I^+(p)$ est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, noté Ω . Dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, l'ouvert Ω est défini par

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U, f^-(x) < t < f^+(x)\}$$

où $f^+, f^- : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions 1-Lipschitz définies sur la projection de Ω dans \mathbb{S}^n telles que leurs extensions à ∂U coïncident en une fonction f . Les fonctions f^+ et f^- sont finies. En effet, si l'une d'elles était infinie, Ω contiendrait des points conjugués et par conséquent M aussi. Contradiction. On note $\partial^+ \Omega$ le graphe de f^+ . Montrons que l'image par D^\sharp des TIPs dans le futur strict de p est égale à $\partial^+ \Omega$. Soit Q un TIP dans le futur strict de p . Vu comme un ouvert de M , cela signifie que Q rencontre $I^+(p)$. Alors, Q est le passé strict d'une courbe causale inextensible $\hat{\gamma}$ qui rencontre $I^+(p)$. Soit γ l'intersection de $\hat{\gamma}$ avec $I^+(p)$. Son image par D est une courbe causale inextensible de Ω qui, d'après le Lemme 4.3.2, s'accumule dans le futur vers un unique point x de $\partial^+ \Omega$. Donc, $D^\sharp(Q) = x$. Réciproquement, tout point x de $\partial^+ \Omega$ est l'extrémité future d'une courbe causale inextensible $\bar{\gamma}$ de Ω . Cette dernière est l'image d'une courbe causale

future-inextensible γ de M qui rencontre $I^+(p)$. Soit Q le TIP égal à $I^-(\gamma)$, il est dans le futur strict de p . On vient de montrer que x est l'image par D^\sharp de Q . Par conséquent, l'image par D^\sharp des TIPs dans le futur strict de p est égale à $\partial^+\Omega$. La Proposition s'en suit. \square

Remarque 4.3.1. On verra dans le Chapitre 5 que, comme pour les ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, le complété causal de M est homéomorphe à $S \times [0, 1]$ où S est une hypersurface de Cauchy de M (voir Section 5.4.1).

4.3.2 Extension de la développante au complété causal

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique développable sans points conjugués et soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. On va voir que D s'étend au complété causal de M en un homéomorphisme local $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$.

La développante D permet de définir de manière naturelle, une application \hat{D} de l'ensemble des IPs de M dans l'ensemble des IPs de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Pour tout IP U de M , on pose :

$$\hat{D}(U) := I^-(D(U)).$$

Lemme 4.3.3. *L'image d'un PIP de M par \hat{D} est un PIP de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Plus précisément, pour tout point p de M :*

$$\hat{D}(I^-(p)) = I^-(D(p)).$$

Démonstration. Soit $r \in \widetilde{Ein}_{1,n}$. Supposons qu'il existe $q \in I^-(p)$ tel que $r \in I^-(\bar{q})$. Comme D est conforme, $\bar{q} \in I^-(\bar{p})$. D'où, par transitivité, $r \in I^-(\bar{p})$. Réciproquement, supposons $r \in I^-(\bar{p})$. Soit $q \in I^-(p)$. Si \bar{q} appartient au diamant $J(\bar{p}, r)$ alors l'inclusion réciproque est prouvée. Sinon, les diamants $J(\bar{p}, r)$ et $J(\bar{p}, \bar{q})$ se rencontrent. Or, $J(\bar{p}, \bar{q})$ est égal à l'image du diamant $J(p, q)$. Il existe donc $q' \in J(p, q)$ tel que $\bar{q}' \in J(\bar{p}, r)$ soit $r \in I^-(\bar{q}')$. Le lemme s'en suit. \square

Lemme 4.3.4. *L'image d'un TIP U de M est un PIP de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a, b[\rightarrow M$ une courbe causale future-inextensible telle que $I^-(\gamma) = U$. Par des arguments similaires à ceux du Lemme 4.3.3, on montre que $\hat{D}(U)$ coïncide avec le passé strict de la courbe $D \circ \gamma$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Supposons que $D \circ \gamma$ soit future-inextensible dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Alors, il existe deux points p, q de γ (avec $p \in J^+(q)$) tels que le diamant $J(\bar{p}, \bar{q})$ contienne des points conjugués. Comme la restriction de D à $J(p, q)$ est un difféomorphisme sur son image $J(\bar{p}, \bar{q})$ (voir Lemme 4.2.2), $J(p, q)$ contient des points conjugués. Contradiction. Par conséquent, $D \circ \gamma$ admet un point limite futur $p_+ = \lim_{t \rightarrow b} D \circ \gamma(t)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Ainsi, $I^-(D \circ \gamma)$ coïncide avec $I^-(p_+)$. D'où, $\hat{D}(U) = I^-(p_+)$. \square

Ainsi, \hat{D} induit une application $\hat{\mathbf{D}}$ de $M \cup \partial_c^+ M$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 4.3.3, $\hat{\mathbf{D}}$ coïncide avec D sur M . De plus, d'après la preuve du Lemme 4.3.4, pour tout TIP U de M :

$$\hat{\mathbf{D}}(U) = \lim_{t \rightarrow b} D \circ \gamma(t)$$

où $\gamma : [a, b[\rightarrow M$ est une courbe causale future inextensible dont le passé strict coïncide avec U .

De manière symétrique, D permet également de définir une application \check{D} de l'ensemble des IFs de M dans l'ensemble des IFs de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ donnée par $\check{D}(U) = I^+(D(U))$ pour tout IF U de M . En renversant l'orientation du temps, nous obtenons des énoncés similaires à ceux des lemmes 4.3.3 et 4.3.4 pour \check{D} . Ainsi, \check{D} induit une application $\check{\mathbf{D}}$ de $M \cup \partial_c^- M$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, qui coïncide avec D sur M et telle que pour tout TIF U de M :

$$\check{\mathbf{D}}(U) = \lim_{t \rightarrow b} D \circ \gamma(t)$$

où $\gamma : [a, b[\rightarrow M$ est une courbe causale passée inextensible dont le futur strict coïncide avec U .

Soit M^\sharp le complété causal de M , c'est à dire l'union de M , de sa frontière causale future et de sa frontière causale passée. Les applications $\hat{\mathbf{D}}$ et $\check{\mathbf{D}}$ permettent d'étendre la développante D à M^\sharp :

Définition 4.3.1. L'extension de la développante D au complété causal de M est l'application $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ définie pour tout point ξ de M^\sharp par :

$$D^\sharp(\xi) = \begin{cases} \hat{\mathbf{D}}(\xi) & \text{si } \xi \in \partial_c^+ M \\ \check{\mathbf{D}}(\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarque 4.3.2. L'application D^\sharp coïncide avec D sur M . En effet, pour tout point p de M , $D^\sharp(p) = \check{\mathbf{D}}(p) = D(p)$.

Remarque 4.3.3. Comme \hat{D} et \check{D} coïncident avec D sur M , la définition de D^\sharp est symétrique :

$$D^\sharp(\xi) = \begin{cases} \check{\mathbf{D}}(\xi) & \text{si } \xi \in \partial^- \tilde{M} \\ \hat{\mathbf{D}}(\xi) & \text{sinon.} \end{cases}$$

CHAPITRE

5

EXTENSIONS \mathcal{C}_0 -MAXIMALES

Étant donné un espace-temps globalement hyperbolique M d'hypersurface de Cauchy S , il est naturel de se demander si l'on peut étendre M en un espace-temps globalement hyperbolique N pour lequel S sera encore une hypersurface de Cauchy. Un tel espace-temps N est alors appelé *extension de Cauchy* de M . S'il en existe une, on peut alors se demander si on peut, de nouveau étendre cette extension, jusqu'à obtenir un espace-temps que l'on ne puisse plus étendre. Autrement dit, existe-t-il une extension de Cauchy *maximale* de M et dans ce cas, est-elle unique ? Ces questions générales sont discutées dans l'Annexe B.7 tandis que dans cette section, nous les abordons dans le cadre particulier des espace-temps **conformément plats**. Avant cela, rappelons de manière plus précise le contexte général (développé plus en détails dans l'Annexe B.7).

La notion de maximalité à laquelle nous nous intéressons concerne les espace-temps **globalement hyperboliques**. Les espace-temps que nous considérerons le seront donc toujours sans que nous ayons à le préciser. Un espace-temps N est une *extension de Cauchy* d'un espace-temps M s'il existe un *Cauchy-plongement* de M dans N ; c'est à dire un plongement *isométrique* qui envoie une hypersurface de Cauchy de M sur une hypersurface de Cauchy de N . Un espace-temps est maximal si tout Cauchy-plongement dans un autre espace-temps est surjectif. L'existence d'une extension maximale d'un espace-temps globalement hyperbolique n'est à priori pas assurée. Toutefois, il s'avère qu'elle l'est si l'on se restreint à certaines catégories d'espace-temps¹. Un espace-temps M d'une catégorie \mathcal{C} est dit *maximal dans \mathcal{C}* ou *\mathcal{C} -maximal*, si tout Cauchy-plongement de M dans

1. Une *catégorie d'espace-temps* est une famille d'espace-temps stable par isométrie, recollement et restriction (voir Définition B.7.3).

un autre espace-temps de \mathcal{C} est surjectif. Un résultat, dont les idées sont principalement dûes à Choquet-Bruhat et Geroch, affirme que dans une catégorie *rigide*², tout espace-temps admet une extension maximale, de plus cette extension est *unique* à isométrie près. La catégorie d'espace-temps qui nous intéresse est celle des espace-temps *conformément plats* de dimension au moins 3, notée \mathcal{C}_0 . Les espace-temps conformément plats étant naturellement munis d'une structure conforme, Rossi [38] étend la définition d'extension de Cauchy aux espace-temps *conformes*. Sa définition consiste à considérer non plus des Cauchy-plongements isométriques mais conformes. Un espace-temps conforme maximal en ce sens sera dit *C-maximal* (C pour conforme). Rossi montre alors que tout espace-temps conformément plat M admet une extension \mathcal{C}_0 -maximale (au sens conforme) \hat{M} ; de plus, cette extension est unique à isométrie conforme près. À priori, rien n'assure que \hat{M} soit C-maximal c'est à dire maximal parmi tous les espace-temps *conformes*. Autrement dit, \hat{M} pourrait admettre un Cauchy-plongement (conforme) non-surjectif dans un espace-temps conforme N qui ne serait plus conformément plat. Dans [37, Chap. 7], Rossi montre qu'en fait, cela n'est pas possible : tout espace-temps conformément plat \mathcal{C}_0 -maximal est C-maximal, ce qui implique notamment que l'extension C-maximale est automatiquement conformément plate. Remarquons que la réciproque est toujours vraie. Nous avons donc une équivalence entre la \mathcal{C}_0 -maximalité et la C-maximalité. Nous redémontrons ce fait dans ce chapitre, avec une méthode assez différente de celle employée par Rossi.

En résumé, nous avons deux notions différentes de maximalité : la première considère des Cauchy-plongement isométriques et la seconde, que nous avons appelé C-maximalité, considère des Cauchy-plongements conformes. Dorénavant, nous adopterons ce deuxième point de vue. Nous pouvons définir d'autres notions de maximalité au sens conforme en nous restreignant à une catégorie d'espace-temps \mathcal{C} . Il est clair que si un espace-temps M d'une catégorie \mathcal{C} est C-maximal alors il est maximal dans \mathcal{C} . La réciproque n'est à priori pas vraie. Toutefois elle l'est pour la catégorie des espace-temps *conformément plats*.

Dans cette section, nous tentons de répondre à la question suivante :

Soit V un espace-temps **conforme** globalement hyperbolique et soit U un ouvert *causalement convexe* de V . Supposons que chacun des espace-temps U et V admette une extension maximale \hat{U} et \hat{V} respectivement³. Alors, l'espace-temps \hat{U} se plonge t-il conformément dans \hat{V} ?

Cette question peut sembler triviale mais elle est plus subtile qu'elle n'y paraît ! En effet, les extensions maximales de U et V dépendent de leurs hypersurfaces de Cauchy respectives qui n'ont à priori aucun lien ... Cependant, nous donnons une réponse af-

2. Voir Définition B.7.4.

3. Un ouvert causalement convexe est globalement hyperbolique (voir Lemme B.5.4), il y a donc bien du sens à parler d'une extension maximale de U .

firmative à notre question dans le cadre des espace-temps **conformément plats** (voir Théorème 5.2.3). Ce résultat s'avèrera central puisqu'il permettra de démontrer, dans le Chapitre 6, un énoncé clef de cette thèse, à savoir : les voisinages canoniques, introduits dans la Section 4.2.3, sont *maximaux*. L'idée principale de la preuve du Théorème 5.2.3 est d'associer à \tilde{V} , un *espace fibré* $E(\tilde{V})$ dans lequel \tilde{V} se plongera et qui contiendra l'extension maximale de \tilde{V} . Nous proposons ainsi une autre preuve de l'existence et de l'unicité de l'extension maximale d'un espace-temps conformément plat M . Notre construction permettra également de redémontrer l'équivalence entre la \mathcal{C}_0 -maximalité et la C-maximalité.

5.1 Fibré associé à un espace-temps conformément plat

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique. Supposons qu'il existe un difféomorphisme conforme local $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$. Nous allons construire un espace-temps fibré conformément plat $E(M)$ dans lequel M se plongera conformément et qui contiendra l'extension maximale de M .

(5.1.1) Feuilletage en courbes temporelles sur M . Nous avons défini dans la Section 4.2.2 un feuilletage \mathcal{F} sur M en courbe de type temps inextensible :

Après avoir fixé une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on tire en arrière par D le champs de vecteurs ∂_t . On obtient ainsi un champ de vecteurs de type temps T sur M . Les feuilles de \mathcal{F} sont les orbites de T .

(5.1.2) Espace des feuilles. Soit \mathcal{B} l'espace des feuilles de \mathcal{F} , c'est à dire le quotient de M par la relation d'équivalence qui identifie deux points s'ils appartiennent à la même feuille. On note $\psi : M \rightarrow \mathcal{B}$ la projection canonique.

L'ensemble \mathcal{B} est muni de la topologie quotient, c'est à dire de l'unique topologie pour laquelle ψ est continue : les ouverts de \mathcal{B} sont les sous-ensembles dont l'image réciproque par ψ est un ouvert de M . Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Toute feuille étant une courbe de type temps de M , elle rencontre S en exactement un point. Il en découle immédiatement le lemme suivant.

Lemme 5.1.1. *La restriction de ψ à S est un homéomorphisme sur l'espace \mathcal{B} muni de la topologie quotient.*

Remarque 5.1.1. La projection ψ est une application ouverte sur M . En effet, soit U un ouvert de M et soit S une hypersurface de Cauchy de M qui rencontre U . L'intersection de S avec U est un ouvert D de S . Alors, $\psi^{-1}(\psi(U))$ est l'union des feuilles qui rencontrent l'ouvert D ; c'est donc un ouvert de M .

Comme la restriction de $\pi \circ D$ à toute feuille est constante, l'application $\pi \circ D$ induit

une application $d : B \rightarrow \mathbb{S}^n$ telle que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{D} & \widetilde{Ein}_{1,n} \\ \psi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{d} & \mathbb{S}^n \end{array}$$

commute, c'est à dire $d \circ \psi = \pi \circ D$. Les applications $\pi \circ D$ et ψ étant des homéomorphismes locaux, il s'en suit que d est un homéomorphisme local. On munit alors \mathcal{B} de la structure différentielle pour laquelle d est un difféomorphisme local.

(5.1.3) Fibré associé à M .

Définition 5.1.1. On appelle $\hat{\pi} : E(M) \rightarrow \mathcal{B}$ le fibré image réciproque du fibré trivial $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{S}^n$ par $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$, c'est à dire

$$E(M) := \{(p, b) \in \widetilde{Ein}_{1,n} \times B : \pi(p) = d(b)\}$$

et $\hat{\pi}(p, b) = b$ pour tout $(p, b) \in E(M)$.

Il s'avère que ce fibré est trivial :

Lemme 5.1.2. *Le fibré $\hat{\pi} : E(M) \rightarrow \mathcal{B}$ est isomorphe au fibré trivial $\hat{\pi}_0 : \mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ défini par $\hat{\pi}_0(t, b) = b$, c'est à dire, il existe un difféomorphisme conforme de $E(M)$ dans $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$ qui envoie fibre sur fibre.*

Démonstration. Considérons l'application j de $\mathbb{R} \times \mathcal{B} \rightarrow E(M)$ qui associe à (t, b) l'élément (p, b) de $E(M)$, où p est le point de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ de coordonnées $(t, d(b))$ dans la décomposition $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$. L'application j est clairement continue et injective. Soit k l'application de $E(M)$ dans $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$ qui associe à (p, b) l'élément (t, b) où t est le projeté de p sur \mathbb{R} . Elle est continue et vérifie $j \circ k = id_{E(M)}$ et $k \circ j = id_{\mathbb{R} \times \mathcal{B}}$, autrement dit k est un inverse continu de j . On vient de montrer que j est un homéomorphisme. Il est facile de voir que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & E(M) \\ \hat{\pi}_0 \searrow & & \swarrow \hat{\pi} \\ & \mathcal{B} & \end{array}$$

commute : $\hat{\pi} \circ j = \hat{\pi}_0$. Cela est équivalent à dire que j envoie toute fibre de $\hat{\pi}_0$ sur une fibre de $\hat{\pi}$. Par conséquent, j est un isomorphisme de fibrés. \square

Lemme 5.1.3. *L'espace fibré $E(M)$ admet une structure d'espace-temps conformément plat naturelle définie par la projection sur le premier facteur $\hat{D} : E(M) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Le fait que d soit un homéomorphisme local implique facilement que \hat{D} en est un également. On munit alors $E(M)$ de la structure conformément plate pour laquelle \hat{D} est un (G, X) -morphisme avec $X = \widetilde{Ein}_{1,n}$ et $G = \text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n})$. Ainsi, $E(M)$ est un espace-temps conformément plat. \square

Lemme 5.1.4. *Les fibres de $\hat{\pi}$ sont des courbes temporelles inextensibles de $E(M)$.*

Démonstration. Soit $b \in \mathcal{B}$. La fibre $\hat{\pi}^{-1}(b)$, notée E_b , est l'ensemble des couples (p, b) avec $p \in \widetilde{Ein}_{1,n}$, tels que $\pi(p) = d(b)$. La restriction de \hat{D} à E_b est clairement un homéomorphisme sur la fibre $\pi^{-1}(d(b))$ du fibré trivial $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{S}^n$. La fibre $\pi^{-1}(d(b))$ étant égale à la droite temporelle $\mathbb{R} \times \{d(b)\}$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on en déduit que E_b est une courbe temporelle de $E(M)$. \square

Soit $i : M \rightarrow E(M)$ l'application définie par $i(p) := (D(p), \psi(p))$ pour tout $p \in M$.

Lemme 5.1.5. *L'application i est un plongement conforme de M dans $E(M)$.*

Démonstration. Comme D et ψ sont des applications continues, ouvertes et conformes, alors i est continue, ouverte et conforme. Reste à vérifier que i est injective. Soient $p, q \in M$ tels que $i(p) = i(q)$. Alors $\psi(p) = \psi(q)$ et $D(p) = D(q)$. L'égalité $\psi(p) = \psi(q)$ implique que p et q appartiennent à la même feuille F . Comme F est une courbe de type temps de M , alors d'après le Lemme 4.2.1, la restriction de D à F est injective. Par conséquent, l'égalité $D(p) = D(q)$ implique que $p = q$. \square

Remarque 5.1.2. La restriction de la développante $\hat{D} : E(M) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ à $i(M)$ coïncide avec D . Plus précisément, $\hat{D} \circ i = D$.

Lemme 5.1.6. *L'image par i de toute hypersurface de Cauchy de M est une hypersurface de type espace qui déconnecte $E(M)$.*

Démonstration. Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Comme $i : M \rightarrow E(M)$ est un plongement, $i(S)$ est une hypersurface de type espace de $E(M)$. D'après le Lemme 5.1.2 et le Lemme 5.1.1, le fibré $E(M)$ est isomorphe au fibré $\mathbb{R} \times S \rightarrow S$. Pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, l'hypersurface $\{t\} \times S$ déconnecte $\mathbb{R} \times S$. Comme $i(S)$ est homéomorphe à S , donc à $\{t\} \times S$, on en déduit que $i(S)$ déconnecte $E(M)$. \square

D'après le Lemme B.4.3, l'énoncé ci-dessus implique que l'image par i de toute hypersurface de Cauchy de M est achronale dans $E(M)$. En vertu du Lemme B.4.2, on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 5.1.1. *L'image par i de toute hypersurface de Cauchy de M est une hypersurface acausale de $E(M)$.*

Lemme 5.1.7. *L'image de i est un ouvert causalement convexe de $E(M)$.*

Démonstration. Soit $p_0, p_1 \in M$ tels que $i(p_0)$ et $i(p_1)$ soient causalement reliés dans $E(M)$. Soit donc γ une courbe causale de $E(M)$ reliant $i(p_0)$ à $i(p_1)$. Soit $\hat{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $E(M)$ contenant γ . Chaque composante connexe de l'intersection de $\hat{\gamma}$ avec $i(M)$ est une courbe causale inextensible de $i(M)$. Soient γ_0 et γ_1 les composantes connexes qui contiennent p_0 et p_1 respectivement. Montrer que γ est contenue dans $i(M)$ revient à montrer que les courbes γ_0 et γ_1 sont égales. Supposons, par l'absurde, que γ_0 et γ_1 soient distinctes. Comme γ_0 et γ_1 sont des courbes causales inextensibles

de $i(M)$, chacune d'elles rencontre $i(S)$ en unique point, x_0 et x_1 respectivement. Les courbes γ_0 et γ_1 étant disjointes, les points x_0 et x_1 sont distincts. Ainsi, la courbe causale $\hat{\gamma}$ coupe $i(S)$ en au moins deux points distincts, ce qui contredit l'acausalité de $i(S)$ (voir Corollaire 5.1.1). Par conséquent, les courbes γ_0 et γ_1 coïncident. Elles sont égales à γ qui est donc contenue dans $i(M)$. Cela prouve que $i(M)$ est causalement convexe dans $E(M)$. \square

Pour finir, soulignons que la construction du fibré $E(M)$ dépend du choix de la décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et de la développante $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$. Toutefois, si on fixe la décomposition spatio-temporelle de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, deux développantes différentes donnent des fibrés isomorphes. Il nous arrivera alors de parler *du* fibré associé à M (défini à isomorphisme près).

5.2 Extensions \mathcal{C}_0 -maximales

Dans cette section, nous allons démontrer le théorème suivant annoncé dans l'introduction de ce chapitre.

Théorème 5.2.1. *Soit V un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique et soit U un ouvert causalement convexe de V . Alors, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de U se plonge conformément dans celle de V . De plus, son image est causalement convexe dans \hat{V} .*

On commence par prouver ce théorème dans le cas où V est développable. L'élément central de la preuve consiste à réaliser les extensions \mathcal{C}_0 -maximales de U et de V dans le fibré $E(V)$. Nous redémontrerons de ce fait, l'existence et l'unicité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique *développable* (voir Section 5.2.1). Le cas général, traité dans la Section 5.2.2, s'en déduira en passant aux revêtements universels et en quotientant par des groupes appropriés.

Dans toute cette section, on fixe une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Les fibrés associés aux espace-temps considérés seront tous relatifs à cette décomposition.

5.2.1 Le cas développable

(5.2.1) Existence et unicité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale. Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique développable. Nous allons construire l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M dans son fibré associé $E(M)$.

Lemme 5.2.1. *Toute extension de Cauchy conformément plate de M est développable.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement de M dans un espace-temps conformément plat N . Fixons un point base x dans M et posons $y = f(x)$. Soient $D' : \tilde{N} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante et $\rho' : (\pi_1 N, y) \rightarrow \text{Conf}(\widetilde{Ein}_{1,n})$ l'holonomie associée.

Montrer que N est développable revient à montrer que ρ' est triviale. D'après le Lemme B.8.2, f se relève en un Cauchy-plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$. Ainsi, $D := D' \circ \tilde{f}$ est une développante sur \tilde{M} . L'holonomie associée est $\rho := \rho' \circ f_*$ où $f_* : (\pi_1 M, x) \rightarrow (\pi_1 N, y)$ est le morphisme associé à f . Comme M est développable, D passe au quotient, autrement dit, pour tout $\gamma \in (\pi_1 M, x)$ et pour tout $x \in \tilde{M}$, $D(\gamma.x) = D(x)$ soit $\rho(\gamma).D(x) = D(x)$. Si l'on fixe γ , ce qui précède montre que $\rho(\gamma)$ est égale à l'identité sur l'ouvert $D(\tilde{M})$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Donc, $\rho(\gamma)$ est égal à l'identité sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Maintenant, comme f est un Cauchy-plongement, le morphisme f_* est bijectif (voir Remarque B.7.1). Tout élément γ de $(\pi_1 N, y)$ est donc l'image par f_* d'un élément γ_0 de $(\pi_1 M, x)$. Par suite, $\rho'(\gamma) = \rho'(f_*(\gamma_0)) = \rho' \circ f_*(\gamma_0) = \rho(\gamma_0) = id$. On en déduit que N est développable. \square

Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement dans un espace-temps conformément plat N . Par le Lemme 5.2.1, N est développable, c'est à dire il existe un difféomorphisme local $D' : N \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$. L'application $D := D' \circ f$ est alors une développante sur M . Considérons les fibrés $E(M)$ et $E(N)$ définis par les développantes D et D' respectivement. Il s'avère que $E(M)$ et $E(N)$ sont isomorphes :

Lemme 5.2.2. *Le Cauchy-plongement f induit un isomorphisme de fibrés F de $E(M)$ dans $E(N)$, c'est à dire un difféomorphisme conforme qui envoie fibre sur fibre.*

Démonstration. Soient $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le deuxième facteur et ∂_t le champ de vecteurs de type temps sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ dont les courbes intégrales sont les fibres de π . On désigne par \mathcal{F} (resp. \mathcal{F}') le feuilletage sur M (resp. N) par les courbes intégrales du tiré en arrière par D (resp. D') de ∂_t . Soient $\psi : M \rightarrow \mathcal{B}$ et $\psi' : N \rightarrow \mathcal{B}'$ les projections dans les espaces des feuilles de \mathcal{F} et \mathcal{F}' . Comme f est un Cauchy-plongement, l'image par f de toute feuille de \mathcal{F} est l'intersection d'une unique feuille de \mathcal{F}' avec $f(M)$. Par conséquent, l'application $\psi' \circ f$ se factorise en un difféomorphisme $\tilde{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$. Si $d' : \mathcal{B}' \rightarrow \mathbb{S}^n$ est la développante induite par D' , c'est à dire qui vérifie $\pi \circ D' = d' \circ \psi'$, alors $d' \circ \tilde{f} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ est la développante induite par D . L'application $F : E(M) \rightarrow E(N)$ définie par $F(p, b) = (p, \tilde{f}(b))$ est donc un isomorphisme de fibrés. \square

Remarque 5.2.1. Il résulte de la preuve du Lemme 5.2.2 que M et N se réalisent **tous les deux dans $\mathbf{E}(\mathbf{M})$** comme des ouverts *causalement convexes* U et V tels que :

1. U est contenu dans V ;
2. U et V partagent une hypersurface de Cauchy commune.

En effet, soient $i : M \rightarrow E(M)$ et $j : N \rightarrow E(N)$ les plongements définis dans la section précédente (voir Lemme 5.1.5). L'application $F^{-1} \circ j$ est un plongement de N dans $E(M)$. Posons $U = i(M)$ et $V = F^{-1} \circ j(N)$. Ce sont deux ouverts de $E(M)$ qui sont causalement convexes d'après le Lemme 5.1.7. D'après la preuve du Lemme 5.2.2, le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{i} & E(M) \\ f \downarrow & & \downarrow F \\ N & \xrightarrow{j} & E(N) \end{array}$$

commute, c'est à dire : $F \circ i = j \circ f$. D'où, $i = F^{-1} \circ j \circ f$. Par conséquent, $i(M) = F^{-1} \circ j \circ f(M) \subset F^{-1} \circ j(N)$ soit $U \subset V$. Considérons une hypersurface de Cauchy S de M . Comme f est un Cauchy-plongement, $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N . Ainsi, $i(S) = F^{-1} \circ j \circ f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de U et de V .

Construction de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M . D'après la Remarque 5.2.1, toutes les extensions de Cauchy conformément plates de M se réalisent dans $E(M)$ comme des ouverts causalement convexes, l'un inclus dans l'autre et partageant une hypersurface de Cauchy commune. Dans ce qui suit, on identifie M et ses extensions de Cauchy avec leurs images dans $E(M)$.

Soit S une hypersurface de Cauchy de M . D'après ce qui précède, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M serait le *plus grand* ouvert causalement convexe de $E(M)$ contenant S comme hypersurface de Cauchy. Le candidat naturel est le développement de Cauchy de S dans $E(M)$, noté $\mathcal{D}(S)$.

Lemme 5.2.3. *Le développement de Cauchy de S dans $E(M)$ est un espace-temps globalement hyperbolique, d'hypersurface de Cauchy S .*

Démonstration. Comme S est une hypersurface acausale de $E(M)$ (voir Corollaire 5.1.6), $\mathcal{D}(S)$ est un ouvert de $E(M)$ (voir Lemme B.6.2), donc un espace-temps. De plus, par le Lemme B.6.1, $\mathcal{D}(S)$ est globalement hyperbolique, d'hypersurface de Cauchy S . \square

Lemme 5.2.4. *Le développement de Cauchy de S dans $E(M)$ contient toutes les extensions de Cauchy de M . En particulier, il contient M .*

Démonstration. Soit N une extension de Cauchy de M . Montrons que N , vue dans $E(M)$, est contenue dans $\mathcal{D}(S)$. Soient $x \in N$ et $\hat{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $E(M)$ passant par x . Comme N est causalement convexe dans $E(M)$, l'intersection de $\hat{\gamma}$ avec N est connexe, on la note γ . Puisque γ est une courbe causale inextensible de N , γ - donc $\hat{\gamma}$ - rencontre S en exactement un point. D'où, $x \in \mathcal{D}(S)$. \square

Remarque 5.2.2. Toute extension de Cauchy de M (vue dans $E(M)$) admet S comme hypersurface de Cauchy. Il résulte alors des lemmes 5.2.3 et 5.2.4 que $\mathcal{D}(S)$ est une extension de Cauchy de chacune des extensions de Cauchy de M . En particulier, $\mathcal{D}(S)$ est une extension de Cauchy de M .

Proposition 5.2.1. *Le développement de Cauchy de S dans $E(M)$ est une extension \mathcal{C}_0 -maximale de M .*

Démonstration. D'après la Remarque 5.2.2, $\mathcal{D}(S)$ est une extension de Cauchy de M . Montrons qu'elle est \mathcal{C}_0 -maximale. Soit N une extension de Cauchy de $\mathcal{D}(S)$. En particulier, N est une extension de Cauchy de M . Donc, N se réalise dans $E(M)$ (voir Remarque 5.2.1). Comme N est une extension de Cauchy de $\mathcal{D}(S)$, alors N (vue dans $E(M)$) contient $\mathcal{D}(S)$. Or, d'après le Lemme 5.2.4, $\mathcal{D}(S)$ contient N . Donc, N est égale à $\mathcal{D}(S)$. Par conséquent, $\mathcal{D}(S)$ est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

Remarque 5.2.3. L'extension \mathcal{C}_0 -maximale $\mathcal{D}(S)$ est **unique**, à difféomorphisme conforme près. En effet, soit \hat{M} une autre extension \mathcal{C}_0 -maximale de M . D'après le Lemme 5.2.4, \hat{M} (vue dans $E(M)$) est contenue dans $\mathcal{D}(S)$. Si cette inclusion était stricte, alors par la Remarque 5.2.2, $\mathcal{D}(S)$ serait une extension de Cauchy de \hat{M} , distincte de \hat{M} . Cela contredit la \mathcal{C}_0 -maximalité de \hat{M} . Donc, \hat{M} est égale à $\mathcal{D}(S)$.

Nous venons ainsi de redémontrer l'existence et l'unicité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale dans le cadre particulier des espace-temps **développables**. Le cas général est prouvé dans la section suivante.

Proposition 5.2.2. *Tout espace-temps conformément plat développable globalement hyperbolique admet une extension \mathcal{C}_0 -maximale. De plus, cette extension est unique à difféomorphisme conforme près.*

(5.2.2) Les extensions \mathcal{C}_0 -maximales respectent l'inclusion. La Proposition 5.2.1 permet de démontrer le Théorème 5.2.1 dans le cas particulier des espace-temps conformément plats **développables**.

Proposition 5.2.3. *Soit V un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique et soit U un ouvert causalement convexe de V . On suppose que V est développable. On note \hat{U} et \hat{V} les extensions \mathcal{C}_0 -maximales de U et V respectivement. Alors, \hat{U} se plonge conformément dans \hat{V} . De plus, son image est causalement convexe dans \hat{V} .*

La preuve de la Proposition 5.2.3 utilise le lemme suivant. Soit $D : V \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante et soient $E(V)$ et $E(U)$ les fibrés définis par D .

Lemme 5.2.5. *L'injection canonique $i : U \hookrightarrow V$ induit un plongement de $E(U)$ dans $E(V)$ qui envoie fibre sur fibre et tel que la restriction à chaque fibre est surjective.*

Démonstration. Soient $\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le deuxième facteur et ∂_t le champ de vecteurs de type temps sur $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ dont les courbes intégrales sont les fibres de π . On désigne par \mathcal{F} le feuilletage sur V par les courbes intégrales du tiré en arrière par D de ∂_t . Comme U est causalement convexe dans V , l'intersection de toute feuille de \mathcal{F} avec U est connexe. L'ouvert U est ainsi feuilleté par des courbes temporelles inextensibles. Ce feuilletage, noté \mathcal{F}_U , correspond aux courbes intégrales du tiré en arrière par $D|_U$ du champ de vecteurs ∂_t . Soient $\psi : V \rightarrow \mathcal{B}$ et $\psi_U : U \rightarrow \mathcal{B}_U$ les projections dans les espaces des feuilles de \mathcal{F} et \mathcal{F}_U . Notons que \mathcal{B}_U coïncide avec l'ouvert $\psi(U)$ de \mathcal{B} . Si $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ est la développante induite par D , c'est à dire qui vérifie $\pi \circ D = d \circ \psi$, alors $d_{\mathcal{B}_U} : \mathcal{B}_U \rightarrow \mathbb{S}^n$ est la développante induite par $D|_U$. L'application $j : E(U) \rightarrow E(V)$ définie par $j(p, b) = (p, i(b))$ est donc un plongement qui envoie fibre sur fibre. \square

Remarque 5.2.4. D'après le Lemme 5.2.5, $E(U)$ se réalise comme un sous-fibré de $E(V)$ obtenu en réduisant la base. Autrement dit, $E(U)$ se réalise comme un ouvert Ω de $E(V)$ tel que pour tout point x de Ω , la fibre de $E(V)$ passant par x est entièrement contenue dans Ω .

Preuve de la Proposition 5.2.3. D'après la Remarque 5.2.4, on peut voir $E(U)$ dans $E(V)$. Comme U et V se plongent dans $E(U)$ et $E(V)$ respectivement, on peut aussi les voir dans $E(V)$. Dans ce qui suit, U , $E(U)$ et V sont vus dans $E(V)$. Soient Σ et S des hypersurfaces de Cauchy de U et V respectivement. D'après la Proposition 5.2.1, \hat{U} est égal au développement de Cauchy de Σ dans $E(U)$, noté $\mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma)$, et \hat{V} au développement de Cauchy de S dans $E(V)$, noté $\mathcal{D}(S)$. Il s'agit alors de montrer que $\mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma)$ est contenu dans $\mathcal{D}(S)$.

Comme Σ est dans $E(V)$, on peut considérer le développement de Cauchy de Σ dans $E(V)$, noté $\mathcal{D}(\Sigma)$. Montrons que $\mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma)$ et $\mathcal{D}(\Sigma)$ sont égaux. Soit $x \in \mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma)$ et soit $\hat{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $E(V)$ passant par x . L'intersection de $\hat{\gamma}$ avec $E(U)$ est une union de composantes connexes; soit γ la composante connexe qui passe par x . C'est une courbe causale inextensible de $E(U)$. Par suite, γ rencontre Σ . Donc, $x \in \mathcal{D}(\Sigma)$. On vient de montrer que $\mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma) \subset \mathcal{D}(\Sigma)$. En fait, cette inclusion est un plongement de Cauchy. Comme $\mathcal{D}_{E(U)}(\Sigma)$ est \mathcal{C}_0 -maximal, on a égalité.

Maintenant, il est facile de voir que $\mathcal{D}(\Sigma)$ est contenu dans $\mathcal{D}(S)$. En effet, soit $x \in \mathcal{D}(\Sigma)$ et soit $\hat{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $E(V)$ passant par x . Comme $\hat{\gamma}$ rencontre Σ , $\hat{\gamma}$ rencontre V (puisque $\Sigma \subset U \subset V$). Comme V est causalement convexe dans $E(V)$ (voir Lemme 5.1.7), l'intersection de $\hat{\gamma}$ avec V est connexe; on la note γ . C'est une courbe causale inextensible de V . Par suite, γ , donc $\hat{\gamma}$, rencontre S en un unique point. D'où, $x \in \mathcal{D}(S)$. On vient de montrer que $\mathcal{D}(\Sigma) \subset \mathcal{D}(S)$.

Pour finir, $\mathcal{D}(\Sigma)$ est causalement convexe dans $\mathcal{D}(S)$. En effet, soient x, y deux points de $\mathcal{D}(\Sigma)$ causalement reliés dans $\mathcal{D}(S)$. Il s'agit de montrer que le diamant de sommets x, y dans $\mathcal{D}(S)$ est contenu dans $\mathcal{D}(\Sigma)$. Or, comme $\mathcal{D}(S)$ est causalement convexe dans $E(V)$, les diamants de $\mathcal{D}(S)$ sont exactement les diamants de $E(V)$ contenus dans $\mathcal{D}(S)$. Il s'agit donc de montrer que le diamant $J(x, y)$ de $E(V)$ est contenu dans $\mathcal{D}(\Sigma)$. Comme x, y sont causalement reliés dans $\mathcal{D}(S)$, ils le sont dans $E(V)$. Puisque $\mathcal{D}(\Sigma)$ est causalement convexe dans $E(V)$ (voir Lemme B.6.2), il contient $J(x, y)$, ce qui conclut la preuve. \square

Terminons cette section par quelques résultats sur les espace-temps \mathcal{C}_0 -maximaux développables.

(5.2.3) Espace-temps \mathcal{C}_0 -maximaux développables. Soit M un espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal développable. Soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. D'après la Proposition 5.2.3, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de tout ouvert causalement convexe U de M se réalise dans M comme un ouvert causalement convexe \hat{U} contenant U . Dans l'énoncé suivant, on identifie \hat{U} à son image dans M .

Lemme 5.2.6. *Soit U un ouvert causalement convexe de M . Si U est une assiette dont l'image par D est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ alors \hat{U} est aussi une assiette. De plus, l'image par D de \hat{U} est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soit Σ une hypersurface de Cauchy de U . Comme U est une assiette, $D(\Sigma)$ est achronale dans $D(U)$. Comme $D(U)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, $D(\Sigma)$ est achronale dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il résulte alors du Lemme 4.2.3 que \hat{U} est une assiette.

Montrons que l'image par D de \hat{U} est contenue dans le développement de Cauchy de $D(\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Soit $x \in \hat{U}$ et soit $\hat{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ passant par $D(x)$. L'intersection de $\hat{\gamma}$ avec $D(\hat{U})$ admet, à priori, plusieurs composantes connexes. On note γ celle qui contient $D(x)$; c'est une courbe causale inextensible de $D(\hat{U})$. Comme \hat{U} est une assiette, γ est l'image d'une courbe causale inextensible α de \hat{U} . Puisque Σ est une hypersurface de Cauchy de \hat{U} , α rencontre Σ . Ainsi, γ -donc $\hat{\gamma}$ - rencontre $D(\Sigma)$. D'où, $D(x) \in \mathcal{D}(D(\Sigma))$. La développante restreinte à \hat{U} et co-restreinte à $\mathcal{D}(D(\Sigma))$ est donc un Cauchy-plongement. Comme \hat{U} est \mathcal{C}_0 -maximal, ce Cauchy-plongement est surjectif. Autrement dit, l'ouvert $D(\hat{U})$ est égal à $\mathcal{D}(D(\Sigma))$, il est donc causalement convexe par le Lemme B.6.2. \square

Remarque 5.2.5. D'après la preuve ci-dessus, si Σ est une hypersurface de Cauchy de U alors l'image par D de U est exactement le développement de Cauchy de $D(\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Pour finir, rappelons le résultat important suivant dû à C. Rossi :

Proposition 5.2.4 ([38, Theorem 4]). *L'espace $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est le seul espace-temps **simplement connexe** conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact \mathcal{C}_0 -maximal.*

On a montré une version plus faible de ce résultat dans la Section 4.2.3 (voir Proposition 4.2.1). La Proposition 5.2.4 s'en déduit immédiatement :

Démonstration. Soit M un espace-temps simplement connexe globalement hyperbolique Cauchy-compact \mathcal{C}_0 -maximal et soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. D'après la Proposition 4.2.1, D est un Cauchy-plongement. Comme M est \mathcal{C}_0 -maximal, D est surjective, autrement dit M est conformément équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

5.2.2 Le cas général

(5.2.1) Existence et unicité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale. Après avoir redémontré l'existence et l'unicité de l'extension \mathcal{C}_0 -maximale d'un espace-temps conformément plat *développable*, nous le prouvons à présent pour un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique *quelconque*.

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique. On note Γ son groupe fondamental. Soient $D : \tilde{M} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante et $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n+1)$ le morphisme d'holonomie associé. Fixons une hypersurface de Cauchy \tilde{S} de \tilde{M} .

Remarque 5.2.6. Si \tilde{S} est compacte, par la Proposition 5.2.4, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de \tilde{M} est $\widetilde{Ein}_{1,n}$. L'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M est alors le quotient de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ par $\rho(\Gamma)$. Le morphisme d'holonomie étant injectif, $\rho(\Gamma)$ s'identifie à Γ . C'est donc un groupe discret qui préserve une sphère de Cauchy, $\rho(\Gamma)$ est donc fini.

Dans la suite, on suppose que \tilde{S} n'est pas compacte. On fixe une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et on considère le fibré $E(\tilde{M})$ défini par cette décomposition et par la développante D (voir Section 5.1). Soit $\hat{D} : E(\tilde{M}) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ l'extension de la développante D à $E(\tilde{M})$ (voir Lemme 5.1.3 et Remarque 5.1.2).

Nous avons vu que l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de \tilde{M} est le développement de Cauchy de \tilde{S} dans $E(\tilde{M})$, noté $\mathcal{D}(\tilde{S})$ (voir Proposition 5.2.1). Le candidat naturel à être l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M est le quotient de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ par Γ . Encore faut-il s'assurer que Γ opère sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ et que cette action est compatible avec celle de Γ sur \tilde{M} .

(5.2.2) Action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$. La notion qui permet de décrire l'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est la notion *d'ombre* introduite par Rossi dans [37, Chap. 4], et que nous avons déjà évoqué dans la Section 3.7, dans l'étude de la structure causale des espace-temps de Minkowski. Plus généralement, on peut définir dans un espace-temps conforme quelconque, l'ombre d'un point p sur une partie achronale A , notée $O(p, A)$: il s'agit de l'ensemble des points de A causalement reliés à p .

L'une des propriétés intéressantes des espace-temps conformes globalement hyperboliques est que leurs points sont caractérisés par leurs ombres sur une hypersurface de Cauchy : soit N un espace-temps conforme globalement hyperbolique d'hypersurface de Cauchy Σ ; deux points p et q de N dont les ombres sur Σ sont *strictement* contenues dans Σ , sont égaux si et seulement si leurs ombres sur Σ sont égales (voir Proposition B.6.5).

Dans notre cas, $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est globalement hyperbolique, d'hypersurface de Cauchy \tilde{S} . Par le Lemme B.6.4, l'ombre d'un point de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ sur \tilde{S} est compacte. Elle ne peut donc pas être égale à \tilde{S} puisque \tilde{S} n'est pas compacte. Les points de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ sont ainsi caractérisés par leurs ombres sur \tilde{S} . Pour alléger l'écriture, on notera simplement $O(p)$ l'ombre d'un point p sur \tilde{S} .

Nous allons voir que l'action de Γ sur les ombres permet d'étendre l'action de Γ sur \tilde{M} à $\mathcal{D}(\tilde{S})$:

Proposition 5.2.5. *Soit $p \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ et soit $\gamma \in \Gamma$. Alors, il existe un unique point de $\mathcal{D}(\tilde{S})$, noté $\gamma.p$, dont l'ombre sur \tilde{S} coïncide avec $\gamma.O(p)$.*

Remarque 5.2.7. S'il existe un point p' de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ dont l'ombre sur \tilde{S} est $\gamma.O(p)$ alors il est forcément unique d'après la Proposition B.6.5. Par conséquent, si $p \in \tilde{M}$, $\gamma.p$ est exactement l'image de p par γ pour l'action usuelle de Γ sur \tilde{M} .

Avant de donner une preuve de la Proposition 5.2.5, faisons une analyse et une synthèse du problème.

Analyse : Supposons que pour tout point p de $\mathcal{D}(\tilde{S})$, il existe un unique point $\gamma.p$ dont l'ombre sur \tilde{S} est $\gamma.O(p)$. Nous allons déterminer des critères que doit satisfaire un tel point, ce qui nous permettra, lors de la synthèse, de l'identifier et de montrer de ce fait son existence.

Lemme 5.2.7. *L'application φ de $\Gamma \times \mathcal{D}(\tilde{S})$ dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$ qui associe à (γ, p) le point $\gamma.p$ est une action de groupe.*

Démonstration. Cela découle du fait que l'application φ restreinte à $\Gamma \times \tilde{S}$ coïncide avec l'action usuelle de Γ sur \tilde{S} . En effet, soit p un point de $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Vérifions que :

1. $1.p = p$ où 1 est l'identité de Γ . Par définition, $O(1.p) = 1.O(p)$. Or, $1.O(p) = O(p)$. Donc, $O(1.p) = O(p)$. D'où, $1.p = p$.
2. pour tous $\gamma, \gamma' \in \Gamma$, $\gamma'.(\gamma.p) = (\gamma'\gamma).p$. Par définition

$$\begin{aligned} O(\gamma'.(\gamma.p)) &= \gamma'.O(\gamma.p) \\ &= \gamma'.(\gamma.O(p)) \end{aligned}$$

Or, $\gamma'.(\gamma.O(p)) = (\gamma'\gamma).O(p) = O((\gamma'\gamma).p)$. Donc, $O(\gamma'.(\gamma.p)) = O((\gamma'\gamma).p)$. D'où, $\gamma'.(\gamma.p) = (\gamma'\gamma).p$.

□

Lemme 5.2.8. *L'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ respecte les relations de causalité :*

$$\begin{aligned} p \preceq q &\Leftrightarrow \gamma.p \preceq \gamma.q \\ p \prec q &\Leftrightarrow \gamma.p \prec \gamma.q \end{aligned}$$

pour tous $p, q \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ et pour tout $\gamma \in \Gamma$.

Démonstration. Soient $p, q \in \mathcal{D}(\tilde{S})$ et soit $\gamma \in \Gamma$.

1^{er} cas : $p, q \in J^+(\tilde{S})$. Alors

$$\begin{aligned} p \preceq q &\Leftrightarrow O(p) \subset O(q) \\ &\Leftrightarrow \gamma.O(p) \subset \gamma.O(q) \\ &\Leftrightarrow O(\gamma.p) \subset O(\gamma.q) \\ &\Leftrightarrow \gamma.p \preceq \gamma.q. \end{aligned}$$

2^e cas : $p, q \in J^-(\tilde{S})$. Ce cas se déduit du précédent en inversant l'orientation du temps.

3^e cas : $q \in J^+(\tilde{S})$ et $p \in J^-(\tilde{S})$. Alors

$$\begin{aligned} p \preceq q &\Leftrightarrow O(p) \cap O(q) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \gamma.O(p) \cap \gamma.O(q) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow O(\gamma.p) \cap O(\gamma.q) \neq \emptyset \end{aligned}$$

D'après les deux cas précédents, $\gamma.q \in J^+(\tilde{S})$ et $\gamma.p \in J^-(\tilde{S})$. Donc

$$O(\gamma.p) \cap O(\gamma.q) \neq \emptyset \Leftrightarrow \gamma.p \preceq \gamma.q.$$

D'où, $p \preceq q \Leftrightarrow \gamma.p \preceq \gamma.q$.

La deuxième équivalence s'obtient de la même façon en remplaçant les ombres par leurs intérieurs dans \tilde{S} . □

Lemme 5.2.9. *La restriction de la développante \hat{D} à $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est ρ -équivariante :*

$$\hat{D}(\gamma.p) = \rho(\gamma).\hat{D}(p)$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $p \in \mathcal{D}(\tilde{S})$.

Démonstration. Soient $\gamma \in \Gamma$ et $p \in \mathcal{D}(\tilde{S})$. Soit q un point de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ dans le futur strict de p . On note Σ l'intérieur de $O(q)$ dans \tilde{S} , et $\bar{\Sigma}$ son image par D . Remarquons que $O(p) = O(p, \Sigma)$. Comme $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est globalement hyperbolique, le passé strict de q dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est une assiette de \hat{D} et son image est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Proposition 4.2.2 et Lemme 4.2.7). Par conséquent, $D(O(p)) = O(\hat{D}(p), \bar{\Sigma})$. Alors,

$$\begin{aligned} D(\gamma.O(p)) &= \rho(\gamma).D(O(p)) \\ &= \rho(\gamma).O(\hat{D}(p), \bar{\Sigma}) \\ &= O(\rho(\gamma).\hat{D}(p), \rho(\gamma).\bar{\Sigma}). \end{aligned}$$

D'où

$$D(O(\gamma.p)) = O(\rho(\gamma).\hat{D}(p), \rho(\gamma).\bar{\Sigma}). \quad (5.1)$$

D'après le Lemme 5.2.8, $\gamma.p \in I^-(\gamma.q)$. Alors, $O(\gamma.p) = O(\gamma.p, \gamma.\Sigma)$. Comme pour p , il s'en suit que $D(O(\gamma.p)) = O(\hat{D}(\gamma.p), D(\gamma.\Sigma))$, soit

$$D(O(\gamma.p)) = O(\hat{D}(\gamma.p), \rho(\gamma).\bar{\Sigma}). \quad (5.2)$$

Il résulte des égalités (5.1) et (5.2) que les ombres de $\hat{D}(\gamma.p)$ et de $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$ sur $\rho(\gamma).\bar{\Sigma}$ sont égales. D'où, $\hat{D}(\gamma.p) = \rho(\gamma).\hat{D}(p)$. \square

Synthèse : Soit $p \in \mathcal{D}(\tilde{S})$. On suppose que $p \in I^+(\tilde{S})$ (par symétrie, le raisonnement est similaire si $p \in I^-(\tilde{S})$). Nous allons à présent utiliser les propriétés trouvées dans l'analyse pour identifier $\gamma.p$.

Idée de la preuve : D'après ce qui précède, si $\gamma.p$ existe alors $\hat{D}(\gamma.p) = \rho(\gamma).\hat{D}(p)$. On essaie alors de reconstituer la preuve du Lemme 5.2.9 à reculons : l'idée est de trouver une assiette V de \hat{D} dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$ qui jouera la rôle du passé strict de $\gamma.q$ et qui contiendra, de ce fait, $\gamma.p$. L'ouvert V doit satisfaire les propriétés suivantes :

1. V contient $\gamma.O(p)$;
2. V est causalement convexe dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$;
3. $\hat{D}(V)$ contient $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$.
4. $\hat{D}(V)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Ainsi, $\gamma.p$ sera l'unique point de V qui a pour image $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$.

Mise en oeuvre : On désigne par q un point de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ dans le futur strict de p et par Σ l'intérieur de $O(q)$ dans \tilde{S} . Le candidat naturel pour V est le développement de Cauchy de $\gamma.\Sigma$ dans $E(\tilde{M})$, noté $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$. Il est clair que :

1. $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est un ouvert. Cela découle du fait que $\gamma.\Sigma$ est une hypersurface⁴ acausale de $E(\tilde{M})$ (voir Lemme B.6.2) ;
2. $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est contenu dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$ (puisque $\gamma.\Sigma \subset \tilde{S}$) ;
3. $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est causalement convexe dans $E(\tilde{M})$ (voir Lemme B.6.2), donc dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$;
4. $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ contient $\gamma.O(p)$. En effet, comme $p \prec q$, $O(p) \subset \Sigma$. D'où, $\gamma.O(p) \subset \gamma.\Sigma \subset \mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$.

Lemme 5.2.10. *Le développement de Cauchy de $\gamma.\Sigma$ dans $E(\tilde{M})$ est une assiette de \hat{D} . De plus, son image par \hat{D} est exactement le développement de Cauchy de $D(\gamma.\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Comme $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est globalement hyperbolique, le passé strict de q dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est une assiette (voir Proposition 4.2.2). Si on note Ω son image par \hat{D} , il en résulte que $\hat{D}(\Sigma)$ est acausale dans Ω . Or, Ω est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Lemme 4.2.7). Donc, $\hat{D}(\Sigma)$ est acausale dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Par conséquent, $\rho(\gamma).D(\Sigma)$, soit $D(\gamma.\Sigma)$, est acausale dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme D est injective sur Σ et D est ρ -équivariante, D est injective sur $\gamma.\Sigma$. Il résulte alors du Lemme 4.2.3 que $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est une assiette de \hat{D} . D'après la preuve de la Proposition 5.2.3, $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est \mathcal{C}_0 -maximal. D'après la Remarque 5.2.5, l'image par \hat{D} de $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ est le développement de Cauchy de $D(\gamma.\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

Preuve de la Proposition 5.2.5. D'après la preuve du Lemme 5.2.9, l'image par \hat{D} de l'ombre de $\gamma.O(p)$ sur \tilde{S} est égale à l'ombre de $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$ sur $D(\gamma.\Sigma)$:

$$D(\gamma.O(p)) = O(\rho(\gamma).\hat{D}(p), D(\gamma.\Sigma)). \quad (5.3)$$

Par suite, $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$ appartient au développement de Cauchy de $D(\gamma.\Sigma)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après le Lemme 5.2.10, il existe un unique point p' dans $\mathcal{D}(\gamma.\Sigma)$ qui a pour image $\rho(\gamma).\hat{D}(p)$. De plus, l'égalité 5.3 implique que $\gamma.O(p) = O(p')$. On pose alors $\gamma.p := p'$. \square

Conclusion. On vient de définir une action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ qui respecte les relations de causalité et pour laquelle la restriction de \hat{D} à $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est ρ -équivariante.

(5.2.3) Propriétés de l'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$.

Lemme 5.2.11. *L'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est libre.*

Lemme 5.2.12. *L'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est proprement discontinue.*

Pour prouver la propriété de l'action, nous allons utiliser le critère suivant dû à C. Francès.

4. On a considéré l'intérieur de $O(q)$ dans \tilde{S} , au lieu de $O(q)$, à cet effet : pour avoir une hypersurface (sans bord) de $E(\tilde{M})$.

Critère 5.2.1. Soit X un espace topologique et soit G un groupe topologique qui agit continûment sur X . Alors, l'action de G sur X est proprement discontinue si et seulement si pour toute suite $\{x_i\}$ de X qui converge dans X et pour toute suite divergente $\{g_i\}$ de G (c'est à dire qui sort de tout compact), la suite $\{g_i.x_i\}$ n'admet pas de valeurs d'adhérence dans X .

Démonstration. Voir [18, Proposition 1]. □

Preuve du Lemme 5.2.12. Soit $\{p_i\}$ une suite de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ qui converge vers un point p de $\mathcal{D}(\tilde{S})$ et soit $\{\gamma_i\}$ une suite divergente de Γ . Supposons par l'absurde que $\{\gamma_i.p_i\}$ admette une valeur d'adhérence q dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Nous notons encore $\{\gamma_i.p_i\}$ la sous-suite qui converge vers q . On ne perd rien à supposer que $p, q \in J^+(\tilde{S})$. Soit $p' \in I^+(p) \cap \mathcal{D}(\tilde{S})$. Alors, $I^-(p') \cap \mathcal{D}(\tilde{S})$ est un voisinage ouvert de p dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Comme $\{p_i\}$ converge vers p , tous les p_i sont le passé de p' sauf éventuellement un nombre fini. Soit $x_i \in O(p_i)$. Comme $O(p_i)$ est contenu dans $O(p')$ qui est compact (voir Lemme B.6.4), quitte à extraire, la suite $\{x_i\}$ converge vers un point $x \in O(p')$. Soit à présent $q' \in I^+(q) \cap \mathcal{D}(\tilde{S})$. Comme $\{\gamma_i.p_i\}$ converge vers q , tous les $\gamma_i.p_i$ sont dans le passé de q' sauf éventuellement un nombre fini. Comme l'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ préserve les relations de causalité, $\gamma_i.x_i \in O(\gamma_i.p_i)$. Or, $O(\gamma_i.p_i)$ est contenu dans $O(q')$ qui est compact. Donc, quitte à extraire, la suite $\{\gamma_i.x_i\}$ converge vers un point de $O(q')$. Cela contredit le fait que l'action de Γ sur \tilde{S} est proprement discontinue. □

(5.2.4) Extension \mathcal{C}_0 -maximale de M . L'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ étant libre et proprement discontinue, le quotient $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ est une variété différentielle. De plus, puisque la restriction de la développante \tilde{D} à $\mathcal{D}(\tilde{S})$ est ρ -équivariante pour l'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$, la structure d'espace-temps conformément plat sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ passe au quotient.

Proposition 5.2.6. *L'espace-temps $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ est une extension \mathcal{C}_0 -maximale de M .*

Démonstration. Soit i l'injection de \tilde{M} dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Notons \hat{M} le quotient $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$. Soit π_M (resp. $\pi_{\hat{M}}$) la projection de \tilde{M} (resp. $\mathcal{D}(\tilde{S})$) sur M (resp. \hat{M}). Comme l'action de Γ sur $\mathcal{D}(\tilde{S})$ restreinte à $i(\tilde{M})$ coïncide avec l'action usuelle de Γ sur \tilde{M} , l'application $\pi_{\hat{M}} \circ i$ se factorise en un plongement de Cauchy $\tilde{i} : M \rightarrow \hat{M}$. Donc, \hat{M} est une extension de Cauchy de M . Comme le revêtement universel $\mathcal{D}(\tilde{S})$ de \hat{M} est \mathcal{C}_0 -maximal, il découle de la Proposition B.8.1, que \hat{M} est \mathcal{C}_0 -maximal. □

Lemme 5.2.13. *L'extension \mathcal{C}_0 -maximale $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ est unique à difféomorphisme conforme près.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement dans un espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal N . D'après le Lemme B.8.2, f se relève en un Cauchy-plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$. Alors, \tilde{N} se réalise comme un ouvert causalement convexe de $E(\tilde{M})$ qui contient \tilde{S} comme hypersurface de Cauchy et qui est contenu dans $\mathcal{D}(\tilde{S})$. Si $\tilde{N} \subsetneq \mathcal{D}(\tilde{S})$, cette inclusion se factorise en un Cauchy-plongement de N dans $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ qui n'est pas surjectif. Contradiction. Donc, $\tilde{N} = \mathcal{D}(\tilde{S})$. Par suite, N est le quotient $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$. □

Nous venons ainsi de redémontrer le théorème suivant :

Théorème 5.2.2. *Tout espace-temps conformément plat globalement hyperbolique admet une extension \mathcal{C}_0 -maximale unique à difféomorphisme conforme près.*

La preuve de la Proposition 5.2.6 repose sur le fait que si le revêtement universel d'un espace-temps M est maximal alors M est maximal. Une conséquence de la Proposition 5.2.6 est que la réciproque est vraie dans le cadre conformément plat.

Proposition 5.2.7. *Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique \mathcal{C}_0 -maximal. Alors, son revêtement universel \tilde{M} est \mathcal{C}_0 -maximal.*

Démonstration. Soit \tilde{S} une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} . D'après la Proposition 5.2.6, le quotient $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ est une extension \mathcal{C}_0 -maximale de M . Comme M est \mathcal{C}_0 -maximal par hypothèse, M et $\mathcal{D}(\tilde{S})/\Gamma$ sont égaux. Donc, \tilde{M} et $\mathcal{D}(\tilde{S})$ sont égaux. Il résulte alors de la Proposition 5.2.1) que \tilde{M} est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

(5.2.5) Les extensions \mathcal{C}_0 -maximales respectent l'inclusion. On démontre à présent le théorème suivant annoncé dans l'introduction de ce chapitre.

Théorème 5.2.3. *Soient V un espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal et U un ouvert causalement convexe de V . Alors, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de U se plonge conformément dans V . De plus, son image est causalement convexe dans V .*

Démonstration. On note $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ le revêtement universel de V et Γ le groupe fondamental de V . Soit U' une composante connexe de la pré-image par π de U et soit $\Gamma' < \Gamma$ le stabilisateur de U' . L'ouvert U' est causalement convexe dans \tilde{V} . En effet, soient $p, q \in U'$ et γ une courbe causale reliant p à q . La projection de γ est une courbe causale de V reliant les projetés de p et de q dans V . Comme U est causalement convexe, $\pi(\gamma)$ est contenue dans U . Donc, γ est contenue dans U' . D'après la Proposition 5.2.3, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de U' , notée \widehat{U}' , se réalise alors comme un ouvert causalement convexe de \tilde{V} qui contient U' . Montrons que le stabilisateur de \widehat{U}' dans Γ est contenu dans Γ' . Soit γ un élément de Γ qui stabilise \widehat{U}' . Fixons une hypersurface de Cauchy S de U' . Soient $p \in \widehat{U}'$ et $\hat{\varphi}$ une courbe causale inextensible de \tilde{V} passant par p . Comme \widehat{U}' est causalement convexe dans \tilde{V} , l'intersection de $\hat{\varphi}$ avec \widehat{U}' est une courbe causale inextensible φ de \widehat{U}' qui rencontre donc S en un unique point q . L'image par γ de $\hat{\varphi}$ est une courbe causale inextensible de \tilde{V} passant par $\gamma.p \in \widehat{U}'$. De même, l'intersection de $\gamma.\hat{\varphi}$ avec \widehat{U}' est une courbe causale inextensible φ' de \widehat{U}' qui rencontre donc S en un unique point q' . Il s'avère que $q' = \gamma.q$. En effet, $\gamma.q$ appartient à la fois à $\gamma.\hat{\varphi}$ et à U' , autrement dit $\gamma.q$ est un point de φ' . Ainsi, si $q' \neq \gamma.q$, l'intersection de $\pi(\gamma')$ avec U serait une courbe causale inextensible de U qui rencontre l'hypersurface de Cauchy $\pi(S)$ en deux points distincts $\pi(q')$ et $\pi(\gamma.q) = \pi(q)$. Contradiction. Donc, $q' = \gamma.q$. D'où, $\gamma \in \Gamma'$. Considérons alors le quotient de \widehat{U}' par Γ' , noté \hat{U} , on note $\pi' : \widehat{U}' \rightarrow \hat{U}$ la projection canonique. L'injection $\widehat{U}' \hookrightarrow \tilde{V}$ passe alors au quotient en une injection $\hat{U} \rightarrow V$. De plus, comme \widehat{U}' est causalement convexe dans \tilde{V} , \hat{U} est causalement convexe dans V . Il est clair que \hat{U} est une extension de Cauchy de U . Montrons que \hat{U} est \mathcal{C}_0 -maximal.

Soit $f : \widehat{U} \rightarrow W$ un Cauchy-plongement. La projection π' induit un morphisme injectif $\pi'_* : \pi_1 \widehat{U}' \hookrightarrow \pi_1 \widehat{U}$. D'après le Lemme B.7.1, f induit un isomorphisme entre $\pi_1 \widehat{U}$ et $\pi_1 W$. Le morphisme $(f \circ \pi')_* : \pi_1 \widehat{U}' \rightarrow \pi_1 W$ induit par $f \circ \pi'$ est donc injectif. Soit alors $p : \widehat{W} \rightarrow W$ le revêtement tel que $p_*(\pi_1 \widehat{W}) = (f \circ \pi')_*(\pi_1 \widehat{U}')$. Les mêmes arguments que ceux de la preuve du Lemme B.8.2 montrent que f se relève en un Cauchy-plongement $\widehat{f} : \widehat{U}' \rightarrow \widehat{W}$. Comme \widehat{U}' est \mathcal{C}_0 -maximal, \widehat{f} est surjectif. D'où, f est surjectif. Donc, \widehat{U} est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

(5.2.6) Espace-temps \mathcal{C}_0 -maximaux. Terminons cette section par un résultat clé des espace-temps conformément plats globalement hyperbolique \mathcal{C}_0 -maximaux dû à C. Rossi, qui est le point de départ de notre travail :

Théorème 5.2.4. *Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique \mathcal{C}_0 -maximal. Si M contient des points conjugués alors M est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

On a démontré une version plus faible de cet énoncé, sans l'hypothèse de maximalité, dans le Chapitre 4 (voir Proposition 4.2.3). Nous allons voir que le Théorème 5.2.4 découle alors facilement de la Proposition 4.2.3.

Démonstration. Soient $p, q \in M$ deux points conjugués. Alors, il existe deux géodésiques lumières α, β reliant p à q sans points d'intersection entre p et q . Soit $\tilde{p} \in \tilde{M}$ un relevé de p . Les géodésiques α, β se relèvent en deux géodésiques lumières $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ reliant \tilde{p} à un relevé \tilde{q} de q . De plus, $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ n'ont pas de points d'intersection entre \tilde{p} et \tilde{q} . Donc, \tilde{p} et \tilde{q} sont conjugués. D'après la Proposition 4.2.3, la développante $D : \tilde{M} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ est alors un Cauchy-plongement. Comme M est \mathcal{C}_0 -maximal alors d'après la Proposition 5.2.7, \tilde{M} est \mathcal{C}_0 -maximal. Par conséquent, la développante D est un difféomorphisme conforme. Soit π la projection de \tilde{M} dans M . Si S est une hypersurface de Cauchy de M alors $\pi^{-1}(S)$ est une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} . Comme $\pi^{-1}(S)$ est Γ -invariant, l'orbite $\Gamma.x$ d'un point x de $\pi^{-1}(S)$ est un sous-ensemble discret de $\pi^{-1}(S)$. Or, $\pi^{-1}(S)$ est compact. Donc, $\Gamma.x$ est fini. Comme l'action de Γ sur $\pi^{-1}(S)$ est libre, on en déduit que Γ est fini. \square

Par analogie avec le cas Riemannien, on pose la définition suivante.

Définition 5.2.1. Un espace-temps M est dit elliptique si c'est un quotient fini de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

5.3 Fonctions eikonales sur la sphère

Pour illustrer la notion de maximalité, on se propose de décrire les ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux. Dans la Section 3.3, on a vu que les ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ se décrivent dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ comme les domaines compris entre les graphes de fonctions 1-Lipschitz définies sur la sphère \mathbb{S}^n à valeurs dans \mathbb{R} (voir Proposition 3.3.1). Dans cette section, on va voir que les ouverts \mathcal{C}_0 -maximaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont caractérisés par des fonctions, qui s'expriment, grosso modo, comme la distance à un fermé de \mathbb{S}^n et qui seront appelés à cet effet *fonctions eikonales*.

5.3.1 Ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$

On caractérise les ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$. On désigne par d_0 la distance sur \mathbb{S}^n induite par la métrique ronde.

Soit Ω un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après la Proposition 3.3.1, Ω est le domaine compris entre les graphes de deux fonctions 1-Lipschitz f^+ et f^- définies sur un ouvert U de \mathbb{S}^n à valeurs dans \mathbb{R} telles que $f^- < f^+$ et qui s'étendent à ∂U en une même fonction f . Soient g^+, g^- les fonctions de U dans \mathbb{R} définies par :

$$g^+(x) = \inf_{x_0 \in \partial U} \{f(x_0) + d_0(x, x_0)\}$$

$$g^-(x) = \sup_{x_0 \in \partial U} \{f(x_0) - d_0(x, x_0)\}.$$

Proposition 5.3.1. *Le domaine Ω est \mathcal{C}_0 -maximal si et seulement si les fonctions f^+ et f^- sont égales à g^+ et g^- respectivement.*

La preuve de la Proposition 5.3.1 utilise les lemmes suivants.

Lemme 5.3.1. *Toute application 1-Lipschitz g de U dans \mathbb{R} telle que son extension à ∂U coïncide avec f est comprise entre g^- et g^+ .*

Démonstration. Soient $x \in U$ et $x_0 \in \partial U$. Notons \bar{g} l'extension de g à \bar{U} . Comme elle est 1-Lipschitz, on a $\bar{g}(x) - \bar{g}(x_0) \leq d_0(x, x_0)$ soit $g(x) - f(x_0) \leq d_0(x, x_0)$. Donc, $g(x) \leq f(x_0) + d_0(x, x_0)$. En passant à l'infimum sur ∂U , on obtient $g(x) \leq g^+(x)$. En utilisant l'inégalité $-d_0(x, x_0) \leq \bar{g}(x) - \bar{g}(x_0)$, on montre de la même façon que $g^-(x) \leq g(x)$. \square

On note $\hat{\Omega}$ le domaine compris entre les graphes de g^+ et g^- .

Lemme 5.3.2. *L'ouvert $\hat{\Omega}$ est une extension de Cauchy de Ω .*

Démonstration. D'après le Lemme 5.3.1, $\Omega \subset \hat{\Omega}$. Soit γ une courbe causale inextensible de $\hat{\Omega}$. Puisque $\hat{\Omega}$ est causalement convexe, γ est l'intersection d'une courbe causale inextensible $\hat{\gamma}$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ avec $\hat{\Omega}$. D'après le Lemme 4.3.2, $\hat{\gamma}$ rencontre chacun des graphes de $g^+|_U$ et $g^-|_U$ en un unique point. Comme f^+ est comprise entre $g^-|_U$ et $g^+|_U$, la courbe $\hat{\gamma}$, donc γ , coupe le graphe de f^+ . Ainsi, γ rentre dans Ω et rencontre donc une hypersurface de Cauchy de Ω . Le lemme s'en suit. \square

Lemme 5.3.3. *L'ouvert $\hat{\Omega}$ est \mathcal{C}_0 -maximal.*

Démonstration. D'après la Proposition 5.2.3, l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de $\hat{\Omega}$ se réalise dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ comme un ouvert causalement convexe Ω_0 tel que l'inclusion $\hat{\Omega} \subset \Omega_0$ est de Cauchy. Ainsi, Ω_0 est le domaine compris entre deux fonctions 1-Lipschitz $h^+, h^- : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui s'étendent à ∂U en la même fonction f . D'après le Lemme 5.3.1, $g^- \leq h^- \leq h^+ \leq g^+$ soit $\Omega_0 \subset \hat{\Omega}$. D'où, $\hat{\Omega} = \Omega_0$. Autrement dit, $\hat{\Omega}$ est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

Remarque 5.3.1. L'ouvert $\hat{\Omega}$ est égal au développement de Cauchy dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ d'une hypersurface de Cauchy Σ de Ω . En effet, il résulte du Lemme 5.3.2 que $\hat{\Omega}$ est contenu dans $\mathcal{D}(\Sigma)$. Cette inclusion étant de Cauchy, il découle du Lemme 5.3.3 l'égalité.

Preuve de la Proposition 5.3.1. Il résulte des lemmes 5.3.2 et 5.3.3 que Ω est \mathcal{C}_0 -maximal si et seulement si $\Omega = \hat{\Omega}$. \square

5.3.2 Fonctions eikonales

Définition 5.3.1. Une fonction d'un ouvert U de la sphère \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} est dite *eikonale future* (resp. *passée*) si son graphe est la frontière future (resp. passée) d'un ouvert causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal.

Remarque 5.3.2. D'après la Proposition 5.3.1, une fonction f^+ (resp. f^-) d'un ouvert U de \mathbb{S}^n à valeurs dans \mathbb{R} est eikonale future (resp. passée) si et seulement si

$$f^+(x) = \inf_{x_0 \in \partial U} \{f(x_0) + d_0(x, x_0)\} \quad (5.4)$$

$$(\text{resp. } f^-(x) = \sup_{x_0 \in \partial U} \{f(x_0) - d_0(x, x_0)\})$$

où f est le prolongement de f^+ (resp. f^-) à ∂U .

Dans ce qui suit, on décrit les propriétés des fonctions eikonales futures. Les fonctions eikonales passées jouissent des mêmes propriétés par symétrie.

La proposition suivante donne une caractérisation géométrique des fonctions eikonales futures.

Proposition 5.3.2. *Soit f^+ une fonction d'un ouvert U de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} . Alors, f^+ est eikonale future si et seulement si son graphe $\Gamma(f^+)$ vérifie la propriété (P) suivante : Pour tout point p de $\Gamma(f^+)$, il existe une géodésique lumière passée issue de p contenue dans $\Gamma(f^+)$ qui n'admet pas de point limite passé dans $\Gamma(f^+)$.*

Démonstration. Supposons f^+ eikonale future. Soit $x \in U$. Il existe $x_0 \in \partial U$ tel que $f^+(x) = f(x_0) + d_0(x, x_0)$ soit $f^+(x) - f(x_0) = d_0(x, x_0)$. Par conséquent, il existe une géodésique lumière reliant $(f^+(x), x)$ au point $(f(x_0), x_0)$ de Λ et qui reste dans le graphe de f^+ . Réciproquement, pour tout $x \in U$, posons

$$g^+(x) = \inf_{x_0 \in \partial U} \{f(x_0) + d_0(x, x_0)\}$$

où f est l'extension de f^+ à ∂U . D'après le Lemme 5.3.1, $f^+ \leq g^+$. Soit $x \in U$. Par hypothèse, il existe une géodésique lumière passée φ issue de $(f^+(x), x)$ contenue dans $\Gamma(f^+)$ qui n'admet pas de point limite passé dans $\Gamma(f^+)$. Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, la géodésique φ s'accumule alors vers un point $(f(x_0), x_0)$ avec $x_0 \in \partial U$. Donc, $d_0(x, x_0) = f^+(x) - f(x_0)$ soit $f^+(x) = f(x_0) + d_0(x, x_0)$. D'où $g^+(x) \leq f^+(x)$. Ainsi, $g^+ \leq f^+$ et $f^+ \leq g^+$. Donc, $f^+ = g^+$ autrement dit f^+ est eikonale future. \square

Remarque 5.3.3. Tout ouvert causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est (l'intérieur du) développement de Cauchy d'une hypersurface achronale Σ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. La Proposition 5.3.2 est, en fait, un cas particulier d'un fait classique plus général selon lequel, dans tout espace-temps M , la frontière future du développement de Cauchy d'une hypersurface achronale vérifie la propriété (\mathcal{P}) énoncée dans la Proposition 5.3.2 (voir Lemme B.6.3). Nous venons ainsi de redémontrer ce fait, à l'aide des fonctions eikonales sur la sphère, dans le cadre particulier de l'univers d'Einstein $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Dans la Section 5.4.2, on généralisera la notion de fonction eikonale à des fonctions définies sur une variété Riemannienne conformément plate. Ces fonctions eikonales généralisées permettront de retrouver le fait ci-dessus dans le cadre des espace-temps conformément plats.

Exemple 5.3.1. La Proposition 5.3.2 permet de voir facilement que les diamants ouverts de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont \mathcal{C}_0 -maximaux.

Nous allons voir que la propriété "eikonale" est une propriété *locale*.

Définition 5.3.2. Une fonction f^+ d'un ouvert U de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} est *localement eikonale future* si tout point x de U admet une base de voisinages sur lesquels la fonction f^+ est eikonale future.

Remarque 5.3.4. Une fonction localement eikonale est localement 1-Lipschitz donc 1-Lipschitz.

Soit f^+ une fonction d'un ouvert U de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} .

Lemme 5.3.4. *Si f^+ est eikonale future alors elle est localement eikonale future.*

Démonstration. Soit V un ouvert de U . Soit g la restriction de f^+ à ∂V . Pour tout $x \in V$, posons :

$$g^+(x) = \inf_{x_0 \in \partial V} \{g(x_0) + d_0(x, x_0)\}.$$

D'après le Lemme 5.3.1, on a $f^+_{|V} \leq g^+$. On note W (resp. Ω) l'ouvert causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal qui a pour frontière future le graphe de g^+ (resp. f^+). L'intersection $W \cap \Omega$ est un ouvert causalement convexe qui a pour frontière future le graphe de $f^+_{|V}$. Comme W est l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de $W \cap \Omega$, d'après la Proposition 5.2.3, $W \subset \Omega$. D'où $g^+ \leq f^+_{|V}$. Donc, $f^+_{|V} = g^+$ autrement dit $f^+_{|V}$ est eikonale future. \square

La réciproque du Lemme 5.3.4 est vraie :

Lemme 5.3.5. *Si f^+ est localement eikonale future alors elle est eikonale future.*

Démonstration. Nous allons utiliser le critère donné par la Proposition 5.3.2. Nous désignons par f l'extension de f^+ à ∂U . Soit $x \in U$ et soit V un voisinage ouvert de x contenu dans U , sur lequel f^+ est eikonale future. Alors, il existe une géodésique lumière passée φ issue de $(f^+(x), x)$ contenue dans $\Gamma(f^+)$ qui s'accumule sur un point $(f^+(x_0), x_0)$ avec $x_0 \in \partial V$. Si $x_0 \in \partial U$, c'est terminé. Sinon, il existe un voisinage ouvert V_0 de x_0 contenu dans U sur lequel f^+ est eikonale future. Il existe alors une géodésique lumière passée

φ_0 issue de $(f^+(x_0), x_0)$ contenue dans $\Gamma(f^+)$ qui s'accumule sur un point $(f^+(x_1), x_1)$ avec $x_1 \in \partial V_0$. La géodésique φ_0 prolonge φ car sinon $(f^+(x_0), x_0)$ et $(f^+(x_1), x_1)$ serait temporellement reliés et on aurait $d_0(x_0, x_1) < f^+(x_0) - f^+(x_1)$. Ce qui contredit le fait que f^+ soit 1-Lipschitz. On prolonge ainsi de proche en proche la géodésique φ en une géodésique passée contenue dans $\Gamma(f^+)$ sans point limite passé dans $\Gamma(f^+)$. La fonction f^+ est donc eikonale future. \square

Nous venons ainsi de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.3.3. *Une fonction f^+ d'un ouvert U de \mathbb{S}^n dans \mathbb{R} est eikonale future si et seulement si elle est **localement** eikonale future.*

5.3.3 \mathcal{C}_0 -maximalité et dualité dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$

On a défini, dans la Section 3.3.1, une notion de **dualité** dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$: le **dual** d'une partie A de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'ensemble des points de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de A . On a vu que le dual d'un fermé Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. De plus, lorsque Λ est *achronal*, on a montré que dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$, les fonctions f^+ et f^- qui caractérisent le dual de Λ sont eikonales (voir Proposition 3.3.4). Plus généralement :

Lemme 5.3.6. *Le dual d'un fermé Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est \mathcal{C}_0 -maximal.*

Démonstration. Par définition, tout point p dans la frontière du dual de Λ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est causalement relié à un point de Λ par une géodésique lumière φ qui reste dans la frontière. Si φ est réduite à un point, p est dans Λ . Sinon, soit φ est dirigée vers le passé, en auquel cas p est dans la frontière future du dual de Λ , soit φ est dirigée vers le futur, en auquel cas p est dans la frontière passée. Il résulte alors de la Proposition 5.3.2 que le dual de Λ est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

Exemple 5.3.2. Toute carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, définie comme le dual de $\{p\}$, est \mathcal{C}_0 -maximale. Si $p = (t_0, x_0)$ dans une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$, les fonctions f^+ et f^- qui caractérisent $\text{Mink}_0(p)$ sont données par :

$$\begin{aligned} f^+(x) &= t_0 + d_0(x, x_0) \\ f^-(x) &= t_0 - d_0(x, x_0). \end{aligned}$$

Réciproquement :

Lemme 5.3.7. *Tout ouvert (connexe) causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est (une composante connexe du) dual d'un fermé achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert connexe causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Fixons une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Soient $f^+, f^- : U \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions 1-Lipschitz définies sur un ouvert U de \mathbb{S}^n qui caractérisent Ω . On note f leur prolongement commun à ∂U . Comme f est 1-Lipschitz, son graphe, noté Λ , est un fermé

achronal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Le dual de Λ est le domaine compris entre les graphes des fonctions eikonales définies par f (voir Proposition 3.3.4). Il résulte alors de la Proposition 5.3.1 que Ω est la composante connexe du dual de Λ qui se projette sur la composante connexe U du complémentaire de ∂U dans \mathbb{S}^n . \square

On vient de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.3.4. *Les ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sont exactement des unions de composantes connexes de duaux de fermés achronaux de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

5.3.4 Ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux dans une carte de Minkowski

Soit $p \in \widetilde{Ein}_{1,n}$. On considère la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ qui consiste en l'ensemble des points non-causalement reliés à p .

Lemme 5.3.8. *Tout domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$ est \mathcal{C}_0 -maximal.*

Démonstration. Soit Ω un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$. Par définition, Ω est l'ensemble des points de $\text{Mink}_0(p)$ qui ne sont causalement reliés à aucun point d'un fermé Λ de $\mathcal{J}^+(p)$. Si l'on note $\hat{\Lambda}$ l'union de Λ et de $\{p\}$, cela revient à dire que Ω est le dual de $\hat{\Lambda}$. Il résulte alors du Lemme 5.3.6 que Ω est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

Lemme 5.3.9. *Soit Ω un ouvert causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Supposons que Ω soit contenu dans $\text{Mink}_0(p)$. Si Ω est futur alors Ω est un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$.*

Démonstration. D'après le Lemme 5.3.7, Ω est l'intersection de $\text{Mink}_0(p)$ avec le dual d'un fermé achronal Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Autrement dit, Ω est le dual du fermé $\Lambda \cup \{p\} =: \hat{\Lambda}$. Notons que, puisque Ω est contenu dans $\text{Mink}_0(p)$, le fermé $\hat{\Lambda}$ est contenu dans l'adhérence de $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Montrons que $\hat{\Lambda}$ est contenu dans l'union de $\mathcal{J}^+(p)$ et de $\{p\}$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un point $q \in \hat{\Lambda}$ distinct de p qui ne soit pas contenu dans $\mathcal{J}^+(p)$. Remarquons que q est distinct de $\sigma(p)$ et de $\sigma^{-1}(p)$. En effet, supposons que $q = \sigma(p)$. L'ouvert Ω étant contenu dans le dual de Λ , il est, en particulier, contenu dans $\text{Mink}_0(\sigma(p))$. Or, $\text{Mink}_0(\sigma(p))$ est disjoint de $\text{Mink}_0(p)$, donc de Ω . Contradiction. D'où, $q \neq \sigma(p)$. Pour les mêmes raisons, $q \neq \sigma^{-1}(p)$. Ainsi, q appartient à $\mathcal{J}^-(p)$ ou à $\text{Mink}_0(p)$. Si $q \in \mathcal{J}^-(p)$, Ω est contenu dans le passé strict de l'hyperplan lumière défini par q . Cela contredit le fait que Ω soit futur dans $\text{Mink}_0(p)$. Donc, $q \in \text{Mink}_0(p)$ et Ω est contenu dans le complémentaire du cône causal de q dans $\text{Mink}_0(p)$. Encore une fois, cela contredit le fait que Ω soit futur dans $\text{Mink}_0(p)$. Par conséquent, $q \in \mathcal{J}^+(p) \cup \{p\}$. On vient de montrer que $\hat{\Lambda}$ est contenu dans $\mathcal{J}^+(p) \cup \{p\}$. Autrement dit, Ω est un domaine régulier futur de $\text{Mink}_0(p)$. \square

Remarque 5.3.5. Les deux lemmes ci-dessus restent vrais si l'on renverse l'orientation du temps.

On vient de prouver la proposition suivante.

Proposition 5.3.5. *Les ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux futurs (resp. passés) de $\text{Mink}_0(p)$ sont exactement les domaines réguliers futurs (resp. passés) de $\text{Mink}_0(p)$.*

5.4 \mathcal{C}_0 -maximalité et \mathcal{C} -maximalité

Dans cette section, on montre que tout espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal est \mathcal{C} -maximal. La preuve repose sur le critère suivant ⁵ :

Proposition 5.4.1 (Critère de maximalité). *Soit M un espace-temps conforme globalement hyperbolique qui n'est pas Cauchy-compact. Alors, M est \mathcal{C} -maximal si l'intersection de S avec tout TIP et tout TIF de M n'est pas compacte.*

Il s'agit alors de décrire la frontière causale d'un espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal. On se place d'abord dans le cadre des espace-temps développables. Le cas général s'en déduira.

On a vu dans la Section 5.2.1 que tout espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal développable M se réalise comme un ouvert causalement convexe globalement hyperbolique de $E(M)$. On se propose alors de décrire les ouverts causalement convexes globalement hyperboliques ⁶ de $E(M)$.

5.4.1 Ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $E(M)$

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique *développable*.

Soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. Fixons une décomposition spatio-temporelle $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^n$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on note $\pi : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \mathbb{S}^n$ la projection sur le premier facteur. Considérons le fibré $\hat{\pi} : E(M) \rightarrow \mathcal{B}$ défini par cette décomposition et par la développante D (voir Section 5.1). Rappelons que $E(M)$ est le fibré trivial $\mathbb{R} \times \mathcal{B}$. La développante D s'étend à $E(M)$ en un difféomorphisme local $\hat{D} : E(M) \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ défini par $\hat{D}(t, b) = (t, d(b))$. La base \mathcal{B} est une variété Riemannienne conformément plate : $\pi \circ \hat{D}$ se factorise via la projection $\hat{\pi}$ en un difféomorphisme local $d : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{S}^n$ qui satisfait $\pi \circ \hat{D} = d \circ \hat{\pi}$.

(5.4.1) Caractérisation des ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $E(M)$. Les ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $E(M)$ contenant des points conjugués s'identifient à des ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Proposition 4.2.3 et Lemme B.7.1). Comme la frontière causale des ouverts causalement convexes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est décrite dans la Section 4.3.1, les ouverts causalement convexes globalement hyperboliques de $E(M)$ considérés dans la suite, seront supposés sans points conjugués.

5. Ce critère est démontré dans l'Annexe C.5.

6. L'espace-temps $E(M)$ n'étant, à priori, pas globalement hyperbolique, ses ouverts causalement convexes ne sont pas forcément globalement hyperboliques (voir Remarque B.5.10, Annexe B.5).

Proposition 5.4.2. *Tout ouvert causalement convexe globalement hyperbolique Ω de $E(M)$ sans points conjugués est le domaine compris entre les graphes de deux fonctions $f^+ > f^-$ définies sur un ouvert U de \mathcal{B} à valeurs dans \mathbb{R} telles que les graphes de f^+ et f^- sont achronaux dans $E(M)$.*

Démonstration. Soit U la projection de Ω sur \mathcal{B} . L'ouvert Ω étant causalement convexe, l'intersection de Ω avec toute fibre $\mathbb{R} \times \{x\}$, avec $x \in U$, est connexe; c'est donc un segment ouvert $I_x :=]f^-(x), f^+(x)[\times \{x\}$. Notons que ce segment est borné. En effet, si $f^+(x) = +\infty$ ou $f^-(x) = -\infty$, I_x contiendrait des points conjugués. Contradiction. Ainsi, on vient de définir deux fonctions $f^+, f^- : U \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f^- < f^+$ et

$$\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times U : f^-(x) < t < f^+(x)\}.$$

Le graphe de f^+ est achronal. En effet, supposons par l'absurde, qu'il existe deux points p, q du graphe de f^+ tels que $p \in I^+(q)$. Ainsi, $I^+(q)$ est un voisinage ouvert de p . Comme $p \in \partial\Omega$, $I^+(q)$ rencontre Ω . Soit donc $q_1 \in I^+(q) \cap \Omega$ et soit $q_0 \in I^-(q) \cap \Omega$. Comme Ω est causalement convexe, le diamant $J(p_1, p_0)$ est contenu dans Ω . Alors, comme $q \in J(p_1, p_0)$, $q \in \Omega$. Contradiction. Par symétrie, le graphe de f^- est également achronal. \square

Définition 5.4.1. Le graphe de f^+ (resp. f^-) est appelé *frontière future* (resp. *passée*) de Ω dans $E(M)$ et est noté $\partial^+\Omega$ (resp. $\partial^-\Omega$).

Soit Ω un ouvert causalement convexe globalement hyperbolique de $E(M)$ sans points conjugués. D'après ce qui précède, c'est le domaine compris entre les graphes de deux fonctions f^+, f^- définies sur un ouvert U de \mathcal{B} .

Proposition 5.4.3. *La frontière causale future (resp. passée) de Ω s'identifie au graphe de f^+ (resp. f^-).*

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout point p de Ω , l'intersection du graphe de f^+ avec le futur strict de p dans $E(M)$ s'identifie à l'ensemble des points de la frontière causale future de Ω contenus dans le futur strict de p dans Ω .

Soit $p \in \Omega$. On note $I^+(p, \Omega)$ le futur strict de p dans Ω , $I^+(p)$ le futur strict de p dans $E(M)$ et $G(f^+)$ le graphe de f^+ . Montrons d'abord que $I^+(p, \Omega)$ est causalement convexe dans $E(M)$. Soient $q, q' \in I^+(p, \Omega)$ reliés par une courbe causale γ . Comme Ω est causalement convexe, γ est contenue dans Ω . Or, $I^+(p, \Omega)$ est causalement convexe dans Ω . Donc, γ est contenue dans $I^+(p, \Omega)$. Autrement dit, $I^+(p, \Omega)$ est causalement convexe dans $E(M)$. Par conséquent, l'intersection de $I^+(p, \Omega)$ avec toute fibre de $E(M)$ est connexe. Cela définit un feuilletage sur $I^+(p, \Omega)$ en courbes de type temps inextensibles, noté \mathcal{F}_p . Par définition, tout point $q \in G(f^+) \cap I^+(p, \Omega)$ est le point limite futur d'une feuille de \mathcal{F}_p .

D'après le Lemme 4.2.2, $I^+(p, \Omega)$ s'identifie à son image par la développante, notée U_p . D'après le Lemme 4.2.7, U_p est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, c'est donc le domaine compris entre les graphes de deux fonctions 1-Lipschitz f_p^+, f_p^- définies sur un ouvert de \mathbb{S}^n . L'ouvert U_p est feuilleté par des segments ouverts verticaux. Par définition,

tout point du graphe de f_p^+ est le point limite futur d'un de ces segments. Comme l'image par la développante du feuilletage \mathcal{F}_p est exactement le feuilletage sur U_p en segments verticaux, on en déduit que $G(f^+) \cap I^+(p, \Omega)$ s'identifie au graphe de f_p^+ . Or, d'après la Proposition 4.3.1, le graphe de f_p^+ correspond exactement à la frontière causale future de U_p . Autrement dit, le graphe de f_p^+ correspond exactement aux extrémités futures des courbes causales inextensibles de U_p . Par conséquent, $G(f^+) \cap I^+(p, \Omega)$ correspond exactement aux points de la frontière causale future de Ω dans $I^+(p, \Omega)$. La proposition s'en suit. \square

La Proposition 5.4.3 implique que f est **1-Lipschitz** au sens de la définition suivante :

Définition 5.4.2. Une fonction f d'un ouvert U de \mathcal{B} dans \mathbb{R} est dite *1-Lipschitz* si pour tout $x \in U$, il existe une assiette $U_x \subset U$ de d contenant x telle que $f \circ d_{|U_x}^{-1} : d(U_x) \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est 1-Lipschitz.

Cette définition généralise la notion (locale) de fonctions 1-Lipschitz définies sur un ouvert de la sphère.

5.4.2 Fonctions eikonales généralisées

Dans cette section, on caractérise les ouverts causalement convexes de $E(M)$ sans points conjugués qui sont **\mathcal{C}_0 -maximaux**. Comme dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, on va voir que les fonctions f^+, f^- qui caractérisent ces ouverts satisfont les mêmes propriétés que les fonctions eikonales sur un ouvert de la sphère \mathbb{S}^n . La notion de fonction eikonale sur un ouvert de la sphère \mathbb{S}^n étant *locale*, elle se généralise naturellement aux fonctions définies sur un ouvert d'une variété Riemannienne conformément plate.

(5.4.1) Fonctions eikonales généralisées. Soit $f^+ : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de \mathcal{B} .

Définition 5.4.3. La fonction f^+ est dite *eikonale future* si pour tout $x \in \mathcal{B}$, il existe une assiette U_x de d contenant x telle que $f^+ \circ d^{-1} : d(U_x) \subset \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est eikonale future.

Remarque 5.4.1. Les fonctions eikonales *passées* sont définies de manière similaire en renversant l'orientation du temps.

La définition ci-dessus généralise la notion (locale) de fonction eikonale sur un ouvert de la sphère \mathbb{S}^n .

Proposition 5.4.4. *La fonction f^+ est eikonale future si et seulement si son graphe $\Gamma(f^+)$ satisfait la propriété (\mathcal{P}) suivante : pour tout $x \in U$, il existe une géodésique lumière passée issue de $(f^+(x), x)$ contenue dans $\Gamma(f^+)$ et sans point limite passé dans $\Gamma(f^+)$.*

Démonstration. Supposons que f^+ est eikonale future. Soit $x \in U$. Il existe une assiette U_x de d contenant x telle que $f^+ \circ d_{|U_x}^{-1} : d(U_x) \rightarrow \mathbb{R}$ soit eikonale future. Comme U_x est une assiette de d , la développante \hat{D} est injective sur le graphe de $f_{|U_x}^+$. De plus, l'image

par \hat{D} de $\Gamma(f^+_{|U_x})$ est exactement le graphe de $f^+ \circ d^{-1}_{|U_x}$. Il résulte alors de la Proposition 5.3.2, qu'il existe une géodésique lumière passée φ issue de $(f^+(x), x)$ contenue dans le graphe $\Gamma(f^+_{|U_x})$ de $f^+_{|U_x}$ et sans point limite passé dans $\Gamma(f^+_{|U_x})$. Si φ n'admet pas de point limite passé dans $\Gamma(f^+)$, c'est terminé. Sinon, soit $(f^+(x_0), x_0)$ le point limite passé de φ . Par un raisonnement similaire, il existe une assiette U_{x_0} de d contenant x_0 et une géodésique lumière φ_0 issue x_0 contenue dans $\Gamma(f^+_{|U_{x_0}})$ et sans point limite passé dans $\Gamma(f^+_{|U_{x_0}})$. La géodésique φ_0 prolonge φ car sinon $\Gamma(f^+)$ contiendrait des points temporellement reliés, ce qui contredit son achronalité. On prolonge ainsi φ de proche en proche jusqu'à obtenir une géodésique lumière passée sans point limite passé dans $\Gamma(f^+)$. Réciproquement, supposons que le graphe de f^+ vérifie la propriété (\mathcal{P}) . Soit $x \in U$ et soit U_x une assiette de d contenant x . Pour tout point y de U_x , il existe une géodésique lumière passée issue de $(f^+(y), y)$ contenue dans $\Gamma(f^+_{|U_x})$ et sans point limite passé dans $\Gamma(f^+_{|U_x})$. Comme U_x est une assiette de d , la développante \hat{D} est injective sur $\Gamma(f^+_{|U_x})$. Par conséquent, le graphe de $f^+ \circ d^{-1}_{|U_x}$ vérifie la propriété (\mathcal{P}) . D'après la Proposition 5.3.2, $f^+ \circ d^{-1}_{|U_x}$ est donc eikonale future. \square

Remarque 5.4.2. Par symétrie, on obtient une caractérisation similaire des fonctions eikonales passées.

(5.4.2) Ouverts causalement convexes \mathcal{C}_0 -maximaux de $E(M)$. Soit Ω un ouvert causalement convexe de $E(M)$ sans points conjugués. On note $f^+, f^- : U \subset \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ les fonctions qui caractérisent Ω .

Proposition 5.4.5. *L'ouvert Ω est \mathcal{C}_0 -maximal si et seulement si f^+ et f^- sont eikonales, future et passée respectivement.*

Démonstration. Supposons que Ω est \mathcal{C}_0 -maximal. Soit $p \in U$. On note U_p le futur strict de p dans Ω . D'après la Proposition 6.1.1, U_p est \mathcal{C}_0 -maximal. Donc, $\hat{D}(U_p)$ est \mathcal{C}_0 -maximal. Il résulte alors de la Proposition 5.4.3 que f^+ est eikonale future. En renversant l'orientation du temps, on montre que f^- est eikonale passée. Réciproquement, supposons que f^+ et f^- sont eikonales, future et passée respectivement. Soit $\hat{\Omega} \subset E(M)$ l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de Ω . Supposons, par l'absurde, que Ω est *strictement* contenue dans $\hat{\Omega}$. Alors, $\partial^+ \Omega \cap \hat{\Omega} \neq \emptyset$ ou $\partial^- \Omega \cap \hat{\Omega} \neq \emptyset$. Supposons que $\partial^+ \Omega \cap \hat{\Omega} \neq \emptyset$ (le raisonnement est similaire si l'on renverse l'orientation du temps). Soit $p \in \partial^+ \Omega \cap \hat{\Omega}$. D'après la Proposition 5.4.4, il existe une géodésique lumière passée issue de p contenue dans $\partial^+ \Omega$ sans point limite passé dans $\partial^+ \Omega$. Par conséquent, si S est une hypersurface de Cauchy de Ω , la géodésique lumière φ passée-inextensible ne rencontre pas S . Contradiction. Donc $\Omega = \hat{\Omega}$, autrement dit Ω est \mathcal{C}_0 -maximal. \square

Remarque 5.4.3. L'ouvert \mathcal{C}_0 -maximal Ω est (l'intérieur du) développement de Cauchy d'une partie achronale étanche Σ de $E(M)$. On retrouve ainsi, d'une manière différente, le fait classique (voir Lemme B.6.3) selon lequel la frontière future du développement de Cauchy d'une partie achronale étanche d'un espace-temps N vérifie la propriété (\mathcal{P}) définie dans la Proposition 5.4.4.

5.4.3 Équivalence entre \mathcal{C}_0 -maximalité et C-maximalité.

Il est clair que tout espace-temps conformément plat C-maximal est \mathcal{C}_0 -maximal. Dans cette section, on montre que la réciproque est vraie, à savoir, tout espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal est C-maximal.

(5.4.1) Le cas simplement connexe. Soit M un espace-temps *simplement connexe* \mathcal{C}_0 -maximal. On va montrer que M est C-maximal.

Si M est Cauchy-compact, M est conformément difféomorphe à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Proposition 5.2.4).

Proposition 5.4.6. *L'univers d'Einstein universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est C-maximal.*

Démonstration. Soit f un Cauchy-plongement de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dans un espace-temps conforme globalement hyperbolique N . Supposons, par l'absurde, que f n'est pas surjectif. Alors, $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ ou $\partial^- f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ est non-vide. Supposons $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n}) \neq \emptyset$ (le raisonnement est similaire si l'on renverse l'orientation du temps). D'après le Lemme C.5.2, $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ s'injecte dans la frontière causale future de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme cette dernière est réduite à un point, la frontière $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ est réduite à un point. Or, $\partial^+ f(\widetilde{Ein}_{1,n})$ est une hypersurface fermée achronale de N (voir Lemme B.7.3). Contradiction. Donc, $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est C-maximal. \square

Supposons que M admette une hypersurface de Cauchy S non-compacte.

Proposition 5.4.7. *L'espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal M est C-maximal.*

Démonstration. On utilise le critère donné par la Proposition 5.4.1. L'espace-temps M se réalise comme un ouvert causalement convexe \mathcal{C}_0 -maximal Ω de $E(M)$ (voir Proposition 5.2.1). Soit S une hypersurface de Cauchy de Ω et soit P un TIP de Ω . D'après la preuve de la Proposition 5.4.3, il existe un unique point $p \in \partial^+ \Omega$ tel que $P = I^-(p) \cap \Omega$. D'après la Proposition 5.4.4, il existe une géodésique lumière passée φ issue de p contenue dans $\partial^+ \Omega$ sans point limite passé dans $\partial^+ \Omega$. Cette géodésique ne rencontre donc jamais S . Ainsi, l'ombre de P sur S , égale à $I^-(p) \cap S$, n'est pas compacte. Donc, M est C-maximal. \square

(5.4.2) Le cas général.

Théorème 5.4.1. *Tout espace-temps \mathcal{C}_0 -maximal M est C-maximal.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement de M dans un espace-temps conforme globalement hyperbolique N . Il se relève en un Cauchy plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ (voir Lemme B.8.2). Comme M est \mathcal{C}_0 -maximal, \tilde{M} l'est également (voir Proposition 5.2.7). Alors, d'après la Proposition 5.4.7, \tilde{f} est surjectif. D'où, f est surjectif. Autrement dit, M est C-maximal. \square

En vertu du Théorème 5.4.1, on dira simplement qu'un espace-temps conformément plat est **maximal** (au sens conforme) pour signifier qu'il est \mathcal{C}_0 -maximal.

CHAPITRE

6

MAXIMALITÉ DES VOISINAGES CANONIQUES

On a vu que tout espace-temps conformément plat globalement hyperbolique développable admet deux familles remarquables d'assiettes *causalement convexes* : les IPs/IFs et les voisinages canoniques. Dans ce chapitre, on montre que, si de plus l'espace-temps est **maximal**, ces assiettes sont maximales ; plus précisément, elles sont conformément équivalentes à un domaine régulier d'un espace de Minkowski.

Dans tout ce qui suit, M désignera un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal développable de dimension $(n+1)$ (avec $n \geq 2$) et $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante.

Si M admet des points conjugués ou une hypersurface de Cauchy compacte, M est conformément équivalent à $\widetilde{Ein}_{1,n}$. On supposera donc que M n'est pas Cauchy-compact et n'admet pas de points conjugués.

6.1 Passés/futurs de points

Dans cette section, on montre que le passé (resp. futur) strict d'un point p de M est un domaine régulier futur (resp. passé) propre d'un espace de Minkowski.

6.1.1 Espaces de Minkowski attachés à un point de M

Étant donné un point $q \in \widetilde{Ein}_{1,n}$, on désigne par $\text{Mink}_-(q)$ (resp. $\text{Mink}_+(q)$) la carte de Minkowski de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dans le passé (resp. futur) strict de q et $\text{Mink}_0(q)$ la carte de Minkowski constituée des points non-causalement reliés à q .

Lemme 6.1.1. *Soit $p \in M$. L'image par la développante D du passé strict de p dans M est un ouvert causalement convexe futur de la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(D(p))$.*

Démonstration. D'après le Lemme 4.2.1, l'image par D de $I^-(p)$ est un ouvert de $I^-(D(p))$. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $q \in I^-(p)$ tel que $D(q) \notin \text{Mink}_-(D(p))$. Autrement dit, $D(q)$ est dans le passé strict du premier point conjugué passé de $D(p)$. Le diamant $I(D(p), D(q))$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contient alors des points conjugués. Or, $I(D(p), D(q))$ est l'image par D de l'assiette $I(p, q)$. Le diamant $I(p, q)$ de M contient donc des points conjugués. Contradiction. L'image par D de $I^-(p)$ est donc un ouvert de $\text{Mink}_-(D(p))$. D'après le Lemme 4.2.7, $D(I^-(p))$ est causalement convexe dans $\text{Mink}_-(D(p))$.

Il reste à montrer que $D(I^-(p))$ est futur dans $\text{Mink}_-(D(p))$, c'est à dire que pour tout $q \in I^-(p)$, le futur strict de $D(q)$ dans $\text{Mink}_-(D(p))$ est contenu dans $D(I^-(p))$.

Soit $q \in I^-(p)$. Il est clair que le futur strict de $D(q)$ dans $\text{Mink}_-(D(p))$ est le diamant ouvert $I(D(p), D(q))$. Celui ci est l'image par D du diamant $I(p, q)$. Puisque $I(p, q) \subset I^-(p)$, $I(D(p), D(q)) = D(I(p, q)) \subset D(I^-(p))$. Le lemme s'en suit. \square

Remarque 6.1.1. Par symétrie, l'image par D du futur strict de p est un ouvert causalement convexe passé de la carte de Minkowski $\text{Mink}_+(D(p))$.

Soit $\partial I^-(p)$ la frontière du passé strict de p dans M .

Lemme 6.1.2. *L'image par D de $\partial I^-(p)$ est l'union des ombres sur $\partial I^-(D(p))$ des points de $D(I^-(p))$.*

Démonstration. La preuve est laissée au lecteur. \square

Remarque 6.1.2. En renversant l'orientation du temps, on obtient un énoncé similaire pour le futur strict de p dans M .

Il résulte immédiatement du Lemme 6.1.2 la propriété suivante :

Remarque 6.1.3. L'image par D de $\partial I^-(p)$ est saturée dans $\partial I^-(D(p))$, autrement dit elle contient toutes les géodésiques lumières futures reliant un de ses points à $D(p)$.

Conclusion. Comme la restriction de la développante à l'union de $J^+(p)$ et de $J^-(p)$ est injective, on peut à présent s'affranchir de la développante.

À tout point p de M sont attachés trois espaces de Minkowski :

1. un espace $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ où le point i^+ du bord de Penrose représente le point p de M et lui uniquement ;
2. un espace $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$ où le point i^- du bord de Penrose représente le point p de M et lui uniquement ;

3. un espace $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ où le point i_0 du bord de Penrose représente le point p de M et lui uniquement.

Dans la suite, on adoptera les notations indiquées sur la figure suivante :

Figure

Remarque 6.1.4. Ces trois espaces correspondent aux cartes de Minkowski $\text{Mink}_-(D(p))$, $\text{Mink}_+(D(p))$ et $\text{Mink}_0(D(p))$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}$.

Les lemmes 6.1.1 et 6.1.2 se reformulent alors de la manière suivante :

Fait 6.1.1. *Le passé (resp. futur) strict de p dans M est un ouvert causalement convexe futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ (resp. $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$).*

Fait 6.1.2. *La frontière du passé (resp. futur) strict de p dans M se réalise dans $\mathcal{J}^-(p)$ (resp. $\mathcal{J}^+(p)$) comme l'union des ombres des points du passé (resp. futur) strict de p vu dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ (resp. $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$).*

Nous verrons l'intérêt de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ dans la Section 6.3.

6.1.2 Maximalité

La maximalité de l'espace-temps M implique la maximalité des passés (futurs) stricts des points de M :

Proposition 6.1.1. *Le passé strict de p dans M est un domaine régulier futur de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. En particulier, il est maximal.*

Démonstration. Posons $U := I^-(p)$ et notons \hat{U} son extension maximale. On a vu que U est un ouvert causalement convexe futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Par conséquent, d'après la Proposition 5.2.3, \hat{U} s'identifie à un ouvert causalement convexe maximal de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui contient U . D'après la Proposition 5.3.5, \hat{U} est un domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Montrons que $\hat{U} \subset U$. Soit $q \in \hat{U}$. Comme \hat{U} est une extension de Cauchy de U , il existe un point $r \in U$ temporellement relié à q . Alors :

1. Soit $q \in I^-(r)$. Dans ce cas, comme $r \in U = I^-(p)$, $I^-(r) \subset I^-(p)$. Donc, $q \in I^-(p) = U$.
2. Soit $q \in I^+(r)$. Dans ce cas, comme $I^-(p)$ est futur dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, $q \in I^-(p) = U$.

Donc, $q \in U$. D'où $U = \hat{U}$. La proposition s'en suit. \square

Définition 6.1.1. On appelle $\Omega^+(p)$ le domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui correspond au passé strict de p dans M .

Rappelons que tout domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ est défini par un sous-ensemble de la composante $\mathcal{J}^-(p)$ du bord de Penrose (voir Section 3.7.3). Dans ce qui suit, nous allons déterminer un sous-ensemble de $\mathcal{J}^-(p)$ qui définit $\Omega^+(p)$.

Propriétés du domaine régulier futur $\Omega^+(p)$. Dans ce paragraphe, on va montrer les deux propriétés suivantes :

Propriété 1 : Le domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ est défini par une sphère topologique acausale de dimension $(n - 1)$ de $\mathcal{J}^-(p)$.

En particulier, $\Omega^+(p)$ est propre, autrement dit $\Omega^+(p)$ n'est pas le futur strict d'un hyperplan lumière.

Propriété 2 : La frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ ne contient pas de segment de type espace.

Preuve de la Propriété 1. Faisons l'observation suivante.

Fait 6.1.3. *Tout géodésique lumière passée issue de p admet une extrémité dans $\mathcal{J}^-(p)$.*

Démonstration. Soit φ une géodésique lumière passée issue de p . Si φ n'admet pas d'extrémité dans $\mathcal{J}^-(p)$, le photon de M contenant φ contiendrait des points conjugués. Contradiction. \square

Définition 6.1.2. On appelle $\Lambda^-(p)$ le sous-ensemble de $\mathcal{J}^-(p)$ constitué des extrémités des géodésiques lumières passées issues de p .

Remarque 6.1.5. $\Lambda^-(p)$ est un sous-ensemble acausal de $\mathcal{J}^-(p)$ en bijection avec la sphère des directions lumières passées en p .

Soit $\Omega^+(\Lambda^-(p))$ le domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ défini par $\Lambda^-(p)$.

Proposition 6.1.2. *Le domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ est égal à $\Omega^+(\Lambda^-(p))$.*

Démonstration. Soit $q \in \Omega^+(p)$. Alors, l'ombre de q sur $\mathcal{J}^-(p)$ est contenue dans $\partial I^-(p)$ (voir Fait 6.1.2), elle est donc disjointe de $\Lambda^-(p)$. D'après la Proposition 3.7.1, on en déduit que $q \in \Omega^+(\Lambda^-(p))$. D'où, $\Omega^+(p) \subset \Omega^+(\Lambda^-(p))$.

Montrons que $\Omega^+(\Lambda^-(p))$ est une extension de Cauchy de $\Omega^+(p)$. Fixons une hypersurface de Cauchy Σ de $\Omega^+(p)$. Soient $q \in \Omega^+(\Lambda^-(p))$ et γ une courbe causale inextensible de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ passant par q . D'après la Proposition 3.7.1, l'ombre de q sur $\mathcal{J}^-(p)$, notée $O^+(q)$, est disjointe de $\Lambda^-(p)$. Montrons qu'alors $O^+(q) \subset \partial I^-(p)$. Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in O^+(q) \setminus \partial I^-(p)$. Alors, la géodésique lumière future reliant r à p rencontre $\Lambda^-(p)$. Comme $O^+(q)$ est l'ensemble des points de $\mathcal{J}^-(p)$ dans le futur de q , cette géodésique lumière est contenue dans $O^+(q)$. Contradiction. D'où $O^+(q) \subset \partial I^-(p)$. Puisque la courbe γ s'accumule dans le futur sur un point de $O^+(q)$, elle doit rencontrer le domaine $\Omega^+(p)$. Ce dernier étant causalement convexe dans $\text{Mink}_-(\bar{p})$, l'intersection de γ avec $\Omega^+(p)$ est une courbe causale inextensible de $\Omega^+(p)$ et rencontre donc Σ . On vient ainsi de montrer que $\Omega^+(\Lambda^-(p))$ est une extension de Cauchy de $\Omega^+(p)$. Comme $\Omega^+(p)$ est maximal, on a égalité. \square

Il résulte immédiatement de cette proposition les deux énoncés suivants.

Corollaire 6.1.1. *Le domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ est propre.*

Corollaire 6.1.2. *L'ensemble des TIFs de M dans le passé strict de p est la frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.*

Lemme 6.1.3. *L'ensemble $\Lambda^-(p)$ est une sphère **topologique** acausale de dimension $(n - 1)$ de $\mathcal{J}^-(p)$.*

Démonstration. Soit $q \in M$ tel que $p \in I^-(q)$. Alors, $J^-(p) \subset I^-(q)$. L'ouvert $I^-(q)$ est un domaine régulier futur $\Omega^+(q)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. Vu dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$, $J^-(p)$ est donc le passé causal de p dans $\Omega^+(q)$. Comme $\Omega^+(q)$ est causalement convexe dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$, le passé causal de p dans $\Omega^+(q)$ est l'intersection de $\Omega^+(q)$ avec le passé causal de p dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. Par suite, l'ensemble $\Lambda^-(p)$ est l'intersection du cône lumière passé de p dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$ avec la frontière $\partial\Omega^+(q)$ de $\Omega^+(q)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. Comme $\Omega^+(q)$ est propre, toute demi-droite lumière de $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$ issue de p rencontre $\partial\Omega^+(q)$ en un unique point (voir Proposition 2.3.7). Le lemme s'en suit. \square

Preuve de la Propriété 2.

Proposition 6.1.3. *La frontière du domaine régulier $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ ne contient pas de segment de type espace.*

Démonstration. On note $\partial\Omega^+(p)$ la frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Nous reprenons les notations de la Section 6.1.1 pour désigner les points i^+, i_0, i^- dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.

Supposons, par l'absurde, qu'il existe un segment s de type espace dans $\partial\Omega^+(p)$. Ce segment est contenu dans une droite Δ de type espace de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. La droite Δ se compactifie en un cercle conforme \mathcal{C} passant par p_0 .

Soit $q \in M$ tel que $p \in I^-(q)$. L'ouvert $I^-(q)$ est un domaine régulier futur propre $\Omega^+(q)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. On note $\partial\Omega^+(q)$ le bord de $\Omega^+(q)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. Vu dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$, p est un point de $\Omega^+(q)$. De plus, l'intersection du passé strict de p dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$ avec $\Omega^+(q)$ correspond exactement à $\partial\Omega^+(p)$. Vu dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$, $\partial\Omega^+(p)$ est donc convexe.

Dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$, le cercle \mathcal{C} est la composante connexe d'un hyperboloïde à deux nappes qui contient le segment s (voir Section 3.5.2). Notons H cette composante. Il reste à la déterminer.

Le segment s étant contenu dans $\partial\Omega^+(p) \subset \partial\Omega^+(q)$, il est convexe dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$. Par conséquent, H est convexe dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$ et rencontre donc le cône lumière de p dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(q)$ en deux points distincts. Or, par définition, \mathcal{C} (donc H) ne rencontre le cône lumière de p qu'au point p_0 . Contradiction. \square

Remarque 6.1.6. En renversant l'orientation du temps, on obtient des énoncés similaires décrivant le futur strict de p .

6.2 TIPs/TIFs

Rappelons qu'un TIP P de M est un ouvert passé indécomposable de M égal au passé strict dans M d'une courbe causale futur-inextensible γ . Un autre point de vue

consiste à voir P comme *un point* de la frontière causale future de M qui correspond à l'extrémité future à l'infini de γ . Par symétrie, un TIF F de M peut être vu comme un ouvert futur indécomposable de M ou comme un point de la frontière causale passée. On passera souvent d'un point de vue à l'autre suivant le contexte.

6.2.1 Maximalité

On va voir ici que tout TIP (resp. TIF), vu comme un ouvert de M , s'identifie à un domaine régulier futur (resp. passé) d'un espace de Minkowski. Les énoncés de cette section portent sur les TIPs. Ceux sur les TIFs s'obtiennent en renversant l'orientation du temps.

Soit $P \subset M$ un TIP. On note p le point de la frontière causale future de M qui correspond à P . Soit $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ l'extension de la développante au complété causal de M .

Étant donné un point $q \in \widetilde{Ein}_{1,n}$, on désigne par $\text{Mink}_-(q)$ la carte de Minkowski de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dans le passé strict de q .

Lemme 6.2.1. *L'image par D de P est un ouvert causalement convexe futur de la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(D^\sharp(p))$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme 6.1.1. □

Comme la restriction de la développante à P est injective, on peut à présent s'affranchir de la développante.

On attache à P un espace de Minkowski noté $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ de sorte que le point i^+ du bord de Penrose représente le point p de la frontière causale future, et lui uniquement. Dans ce qui suit, on identifiera i^+ à p . Par souci d'homogénéité, on rebaptisera p_0 et p^- les points i_0 et i^- du bord de Penrose et $\mathcal{J}^-(p)$ la composante du bord de Penrose comprise entre p et p_0 .

Le lemme 6.2.1 se reformule alors de la manière suivante :

Fait 6.2.1. *Le TIP P est un ouvert causalement convexe futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.*

Comme pour les passés stricts des points de M , la maximalité de M permet de montrer la proposition suivante :

Proposition 6.2.1. *Le TIP P est un domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. En particulier, il est maximal.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 6.1.1. □

Définition 6.2.1. On appelle $\Omega^+(p)$ le domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui correspond à P .

6.2.2 Photons de TIPs et horismos

On a vu dans la Section 5.4 que M se réalise dans son fibré associé $E(M)$ comme le domaine compris entre les graphes de deux fonctions $f^+, f^- : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ où \mathcal{B} désigne la base du fibré $E(M)$. De plus, les graphes de f^+ et f^- correspondent exactement à la frontière causale future et à la frontière causale passée de M .

Le fait que M soit maximal se traduit par le fait que f^+ et f^- soient eikonales. Géométriquement, cela signifie qu'en tout point p du graphe de f^+ (resp. f^-), il existe une géodésique lumière de $E(M)$ issue de p , inextensible dans le passé (resp. futur) et qui reste dans le graphe de f^+ (resp. f^-). Une telle géodésique correspond à un segment de TIPs (resp. TIFs) dans la frontière causale future (resp. passée) que nous appelons *photon de TIPs* (resp. *photon de TIFs*).

Fait 6.2.2. *Vu dans M , un photon de TIPs est une famille de TIPs $\{Q_t\}_{t \in [0,1[}$ décroissante pour l'inclusion.*

Démonstration. On réalise M dans $E(M)$. Soient $P = I^-(\gamma), Q = I^-(\psi)$ deux TIPs de M . Le point de la frontière causale future correspondant à P (resp. Q) est représenté dans $E(M)$ par l'extrémité future de la courbe causale γ (resp. ψ) dans le graphe de f^+ , notée p (resp. q). Il est clair que $P = I^-(p)$ et $Q = I^-(q)$. Alors, $P \subset Q$ si et seulement si $p \in J^-(q)$. Puisque $p \notin M$, en particulier, $q \notin Q = I^-(q)$. Donc, $p \in \partial I^-(q)$. Autrement dit, il existe une géodésique lumière passée dans le graphe de f^+ qui relie q à p . Cela prouve le fait. \square

Remarque 6.2.1. La relation d'inclusion est une relation de causalité sur l'ensemble des TIPs (vus comme des ouverts de M) : étant donnés deux TIPs $P, Q \subset M$, on dit que P est dans le passé de Q si $P \subset Q$ (voir Annexe C.2). D'après le fait ci-dessus, cette relation de causalité se traduit sur la frontière causale par la notion de photon de TIPs.

Remarque 6.2.2. De manière symétrique, un photon de TIFs vu dans M est une famille de TIFs $\{Q_t\}_{t \in [0,1[}$ croissante pour l'inclusion.

TIPs, TIFs maximaux. Soit p un TIP de M vu comme un point du graphe de f^+ . Il existe une géodésique lumière φ inextensible dans le passé issue de p qui reste dans le graphe de f^+ . Si φ ne peut pas se prolonger dans le futur en restant dans le graphe de f^+ , le TIP p , vu comme un point de la frontière causale, est dit *maximal*¹ (à ne pas confondre avec la maximalité du TIP vu comme un ouvert causalement convexe de M !) On définit de manière symétrique les TIFs maximaux.

Horismos. Soit $P \subset M$ un TIP. On note p le point de la frontière causale future qui correspond à P .

On distingue deux types de photons issus de p : les photons de TIPs, contenus dans la frontière causale future, et les photons qui rentrent dans M .

1. Nous développons la notion de TIPs maximaux dans un cadre plus général dans l'Annexe C.5.

Lemme 6.2.2. *L'union des photons issus de p qui rentrent dans M constitue la frontière de P dans M .*

Démonstration. On voit M dans son fibré associé $E(M)$ comme le domaine compris entre les graphes de deux fonctions eikonales f^+, f^- de \mathcal{B} dans \mathbb{R} . Vu dans $E(M)$, le TIP p est un point du graphe de f^+ . L'ouvert P , quant à lui, correspond au passé strict de p dans M . La frontière de P dans M correspond alors à l'intersection du cône lumière de p dans $E(M)$ avec M . Elle est donc égale à l'union des géodésiques lumières passées de $E(M)$ issues de p qui rentrent dans M . Le lemme s'en suit. \square

Rappelons que $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ désigne l'extension de la développante au complété causal de M .

Lemme 6.2.3. *Toute direction lumière passée en $D^\sharp(p)$ est tangente soit à l'image par D d'un photon issu de p qui rentre dans M , soit à l'image par D^\sharp d'un photon de TIPs issu de p .*

Démonstration. Soit $q \in P$. Alors, $I^+(q)$ est un voisinage du point p dans le complété causal de M . On identifie $I^+(q)$ à son image par la développante D . Celle-ci est un domaine régulier passé propre, noté $\Omega^-(q)$, de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ attaché à q (voir Section 6.1.1). La frontière de $\Omega^-(q)$ dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$, notée $\partial\Omega^-(q)$, correspond exactement aux TIPs de M dans le futur strict de q (voir Corollaire 6.1.2). L'image par D^\sharp de p correspond alors à un point de la frontière de $\Omega^-(q)$ dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$, que l'on note encore p . De plus, la sphère des directions passées en D^\sharp s'identifie à la sphère des directions passées en p dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$.

Une direction lumière passée en p dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ est soit tangente à une géodésique lumière passée issue de q qui rentre dans le domaine $\Omega^-(q)$, soit à une géodésique lumière passée qui reste dans le bord du domaine. Le lemme s'en suit. \square

Lemme 6.2.4. *La restriction de la développante D à l'union des photons issus de p qui rentrent dans M est injective.*

De plus, l'image par D d'un photon issu de p qui rentre dans M est un segment ouvert de photon dans $\mathcal{J}^-(D^\sharp(p))$ ayant pour extrémité future $D^\sharp(p)$.

Démonstration. La restriction de D à l'adhérence de P dans \overline{M} est injective. En effet, comme l'image par D de P est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, elle est localement connexe. D'après le lemme de fermeture des assiettes (voir Lemme 4.1.5), la restriction de D à l'adhérence de P dans M est donc injective. D'après le Lemme 6.2.2, il s'en suit que la restriction de D à l'union des photons issus de p qui rentrent dans M est injective. Soit φ un photon issu de p qui rentre dans M . Comme $I^-(\varphi) = P$, l'image par D de φ est une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui a pour extrémité future $D^\sharp(p)$. Si $D(\varphi)$ n'était pas contenue dans $\mathcal{J}^-(D^\sharp(p))$, elle rencontrerait le passé strict du premier point conjugué passé de $D^\sharp(p)$ et contiendrait donc des points conjugués. Contradiction. \square

Lemme 6.2.5. *L'image par D^\sharp d'un photon de TIPs issu de p est une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ issue de $D^\sharp(p)$ contenue dans l'union de $D^\sharp(p)$ et de $\mathcal{J}^-(D^\sharp(p))$.*

Démonstration. Comme D^\sharp préserve les relations de causalité, l'image par D^\sharp d'un photon de TIPs ϕ issu de p est une géodésique lumière passée de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ issue de $D^\sharp(p)$. Supposons qu'il existe un TIP q de ϕ tel que $D^\sharp(q)$ n'est pas dans $\mathcal{J}^-(D^\sharp(p))$. Autrement dit, $D^\sharp(q)$ est dans le passé causal du premier point conjugué passé de $D^\sharp(p)$. Posons $Q \subset M$ le passé strict de q dans M . La carte de Minkowski $\text{Mink}_-(D^\sharp(q))$ qui contient $D(Q)$ (voir Lemme 6.2.1) est donc disjointe de la carte $\text{Mink}_-(D^\sharp(p))$. Or, comme $Q \subset P$, $D(Q) \subset D(P) \subset \text{Mink}_-(D^\sharp(p))$. Contradiction. \square

Dans ce qui suit, on voit le TIP p dans $E(M)$ comme un point du graphe de f^+ . Soit $S(p)$ la sphère des directions lumières passées en p dans $E(M)$.

Définition 6.2.2. On appelle $H(p)$ le sous-ensemble de $S(p)$ constitué des directions tangentes à une géodésique lumière passée issue de p qui rentre dans M . Le complémentaire de $H(p)$ dans $S(p)$ est noté $T(p)$.

Remarque 6.2.3. Il existe une projection naturelle de la frontière ∂P de P dans M sur $H(p)$ qui associe à tout point q de ∂P , la direction de l'unique photon passant par q contenu dans ∂P .

Remarque 6.2.4. Le sous-ensemble $T(p)$ est constitué des directions tangentes à un photon de TIPs issu de p . Il est non-vide. En effet, comme M est maximal, il existe au moins un photon de TIPs issu de p .

Lemme 6.2.6. *Le sous-ensemble $H(p)$ est ouvert dans $S(p)$.*

Démonstration. Soit $[v] \in H(p)$. On note φ_v le photon de M issu de p tangent à v . Soit q un point de φ_v . D'après le Lemme 6.2.2, $q \in \partial P$ où ∂P désigne la frontière de P dans M . Comme ∂P est une hypersurface (topologique) de M , le point q admet un voisinage ouvert V_q dans ∂P . La projection de V_q dans $S(p)$ est alors un voisinage ouvert de $[v]$ dans $H(p)$. \square

Définition 6.2.3. On appelle *horismos* de p une composante connexe de $H(p)$.

Définition 6.2.4. Le TIP p est dit *dégénéré* s'il admet un horismos H dont le bord ne déconnecte pas la sphère $S(p)$. Dans ce cas, H est le seul horismos de p , c'est à dire $H = H(p)$, et $T(p)$ est le bord de $H(p)$.

Nous donnerons des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux contenant des TIPs dégénérés dans le Chapitre 7.

(6.2.1) Caractérisation d'un TIP dans son espace de Minkowski associé. Soit $P \subset M$ un TIP. On note p le point de la frontière causale future qui lui correspond. Rappelons que P est un domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui lui est attaché (voir Section 6.2.1). Dans ce qui suit, nous allons déterminer un sous-ensemble de $\mathcal{J}^-(p)$ qui définit $\Omega^+(p)$.

On a vu dans le paragraphe précédent qu'à tout photon issu de p dans le complété causal de M correspond une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ et vice versa. Un photon issu de p dans le complété causal de M se réalise alors comme un segment de la géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ correspondante, qui s'étend jusqu'au point p du bord de Penrose.

Définition 6.2.5. On appelle $\Lambda(p)$ le sous-ensemble de $\mathcal{J}^-(p)$ constitué des extrémités des photons issus de p dans le complété causal de M (on prend en compte les photons qui rentrent dans M et les photons de TIPs).

Remarque 6.2.5. Le sous-ensemble $\Lambda(p)$ est acausal dans $\mathcal{J}^-(p)$.

Remarque 6.2.6. Comme $\Omega^+(p)$ est non-vide, $\Lambda(p)$ est majoré dans $\mathcal{J}^-(p)$ au sens de la Définition 3.7.2 (voir Proposition 2.3.3).

Contrairement au cas d'un point de M , le sous-ensemble $\Lambda(p)$ ne rencontre, à priori, pas forcément toutes les géodésiques lumières de $\mathcal{J}^-(p)$. En effet, il pourrait exister un photon issu de p (qui rentre dans M ou de TIPs) qui s'étend jusqu'au point p_0 . C'est ce que l'on appelle *un photon complet*.

Définition 6.2.6. Un photon du complété causal de M est dit *complet* s'il se développe en une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui s'étend entre deux points conjugués.

Remarque 6.2.7. Si φ est un photon complet issu de p qui rentre dans M alors son extrémité dans la frontière causale passée est représentée par le point p_0 dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Les photons complets issus de p (s'il y en a) n'ont pas forcément la même extrémité dans la frontière causale passée mais leurs extrémités passées sont toutes représentées par le même point p_0 dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.

Si φ est un *photon de TIPs* complet issu de p , le point p_0 ne correspond à aucun point du complété causal de M .

Soulignons que peuvent être issus de p des photons complets qui rentrent dans M et des photons complets de TIPs.

Nous décrirons des exemples d'espace-temps avec des photons complets dans le Chapitre 7. Les photons complets seront étudiés dans le Chapitre 8.

Revenons à la description du domaine régulier $\Omega^+(p)$. On note $\Omega^+(\Lambda(p))$ le domaine régulier de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ défini par $\Lambda(p)$.

Proposition 6.2.2. *Le domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ est égal à $\Omega^+(\Lambda(p))$.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 6.1.1. □

On a vu que $\Lambda(p)$ ne rencontre pas forcément toute géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$. En particulier, $\Lambda(p)$ peut être réduit à un point ou être vide.

Si $\Lambda(p)$ est vide, le domaine régulier $\Omega^+(p)$ est tout $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Ce cas est très particulier :

Proposition 6.2.3. *Si $\Omega^+(p)$ est tout $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ alors M est conformément équivalent à l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.*

Démonstration. On montre que P est fermé dans M . Comme P est ouvert dans M qui est connexe, on en déduira que $P = M$.

Soit donc q un point de M dans la frontière de P . Il est représenté par un point du bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, noté \hat{q} . Soit φ un photon de M passant par p qui rencontre P . Vu dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, l'intersection de φ avec P est une droite lumière de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Comme celle-ci s'étend entre deux points conjugués, φ contient des points conjugués. Contradiction. Donc, P est fermé dans M . D'où $P = M$. La proposition s'en suit. \square

Si $\Lambda(p)$ est réduit à un point, le domaine régulier $\Omega^+(p)$ est le futur strict d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.

Remarque 6.2.8. Dans ce cas, il est facile de voir que l'ensemble des TIFs de M qui rencontrent P correspond exactement à la frontière causale passée du demi-espace futur $\Omega^+(p)$. Rappelons que cette dernière est l'union de l'hyperplan lumière L qui délimite le demi-espace $\Omega^+(p)$ et du segment de photon reliant p_0 au point q du bord de Penrose $\mathcal{J}^-(p_0)$ qui définit L , ouvert en p_0 et fermé en q .

Le cas où $\Omega^+(p)$ est le futur strict d'un hyperplan lumière est également très particulier et sera traité dans le Chapitre 8 (voir Section 8.3). Nous y montrerons que si M admet un TIP égal à un demi-espace d'un espace de Minkowski délimité par un hyperplan lumière alors M est un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ au sens de la définition suivante :

Définition 6.2.7. Un diamant non-vide $I(p, q)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est dit *extrême* si p et q sont sur un même photon.

Remarque 6.2.9. Les diamants extrêmes de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ sans points conjugués sont exactement les cartes de Minkowski et les demi-espaces délimités par un hyperplan lumière d'une carte de Minkowski.

Si $\Lambda(p)$ admet au moins deux points distincts, le domaine régulier $\Omega^+(\Lambda(p))$ est propre.

Définition 6.2.8. Un TIP $P \subset M$ est dit *propre* si le domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ est propre.

Remarque 6.2.10. Si $P \subset M$ est un TIP propre, l'ensemble des TIFs de M qui rencontrent P correspond exactement à la frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.

Soit $Q \subset$ un TIF qui rencontre P . On le note q lorsqu'il est vu comme un point de la frontière causale passée. D'après la Remarque 6.2.10, q se réalise dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ comme un point de la frontière de $\Omega^+(p)$. Il y a alors une identification naturelle entre les sphères $S(q)$ et $S(p)$: à toute direction lumière de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ en q correspond une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ donc une unique direction lumière dans $S(p)$, et vice versa.

On voit $T(q)$ dans la sphère $S(p)$ via cette identification.

Lemme 6.2.7. *Le fermé $T(q)$ de $S(p)$ est contenu dans la projection de $\Lambda(p)$ dans $S(p)$.*

Démonstration. Soit $[v] \in T(q) \subset S(p)$. Par définition, la géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ tangente à $[v]$ rencontre un photon de TIFs ϕ issu de q . On note r le point d'intersection et $L(r)$ l'hyperplan lumière qu'il définit dans la carte $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$.

Si la direction $[v]$ est tangente à un photon issu de p qui rentre dans M , le point r est l'extrémité passée de ce photon, donc $r \in \Lambda(p)$. Considérons à présent le cas où la direction $[v]$ est tangente à un photon de TIPs issu de p . Supposons par l'absurde que r corresponde à un TIP de M . Soit r' un point de M dans le passé strict de r . En particulier, $r' \in P$. Le point r' se réalise alors dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ comme un point de $\Omega^+(p)$ dans le passé strict de l'hyperplan lumière $L(r)$. Or, comme $L(r)$ contient le photon ϕ qui est contenu dans la frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, c'est un hyperplan d'appui à $\Omega^+(p)$. Contradiction. Donc, r est l'extrémité passée dans $\mathcal{J}^-(p)$ du photon de TIPs issu de p tangent à $[v]$. D'où, $r \in \Lambda(p)$.

Dans les deux cas, le fait que $r \in \Lambda(p)$ implique que $[v]$ est dans la projection de $\Lambda(p)$ dans $S(p)$. \square

6.3 Voisinages canoniques

On va voir ici que le voisinage canonique d'un point p de M , noté $\mathcal{R}(p)$, est maximal. Plus précisément, nous montrons que $\mathcal{R}(p)$ s'identifie au dual d'un compact dans $\widehat{Ein}_{1,n}$.

Rappelons que $\mathcal{R}(p)$ contient le futur et le passé causal de p que nous avons décrit dans la Section 6.1. Rappelons brièvement cette description ici.

On a vu que sont attachés au point p trois espaces de Minkowski, $\mathbb{M}^{n+1}(p)$, $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$ et $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ qui correspondent aux cartes de Minkowski $\text{Mink}_-(D(p))$, $\text{Mink}_+(D(p))$ et $\text{Mink}_0(D(p))$ dans $\widehat{Ein}_{1,n}$.

Le passé strict de p dans M s'identifie à un domaine régulier futur propre de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, noté $\Omega^+(p)$. Quant au cône lumière passé $\partial I^-(p)$ de p dans M , il se réalise dans le bord de Penrose $\mathcal{J}^-(p)$ comme un ouvert saturé qui rencontre toutes les géodésiques lumières de $\mathcal{J}^-(p)$, bordé par une sphère topologique acausale de dimension $(n-1)$ notée $\Lambda^-(p)$. Le domaine $\Omega^+(p)$ est exactement le domaine régulier futur défini par $\Lambda^-(p)$.

En renversant l'orientation du temps, on obtient une description similaire du futur causal de p dans M . On garde les mêmes notations en remplaçant $+$ par $-$ et vice versa.

Dans ce qui suit, on décrit l'ensemble des points de $\mathcal{R}(p)$ qui ne sont pas causalement reliés à p . On va voir que celui-ci se réalise comme un ouvert causalement convexe de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$.

Lemme 6.3.1. *L'image par la développante D de l'ensemble des points de $\mathcal{R}(p)$ qui ne sont pas causalement reliés à p est un ouvert causalement convexe de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(D(p))$.*

Démonstration. Soit $q \in \mathcal{R}(p) \setminus (J^+(p) \cup J^-(p))$. Supposons par l'absurde que $\widetilde{D}(q) \in \text{Mink}_+(D(p))$. Comme l'image par D de $\mathcal{R}(p)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, il existe un point $q' \in I^+(p)$ tel que $D(q') = D(q)$. Or, $q' \in \mathcal{R}(p)$ et $\mathcal{R}(p)$ est une assiette de D . Donc, $q = q'$. Contradiction.

Un raisonnement symétrique montre que $D(q) \notin \text{Mink}_-(D(p))$. D'où, $D(q) \in \text{Mink}_0(D(p))$. L'image par D de $\mathcal{R}(p) \setminus (J^+(p) \cup J^-(p))$ est donc un ouvert de $\text{Mink}_0(D(p))$.

L'image par D de $\mathcal{R}(p) \setminus (J^+(p) \cup J^-(p))$ est exactement l'intersection de $D(\mathcal{R}(p))$ avec la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(D(p))$. D'après le Lemme 4.2.6, $D(\mathcal{R}(p))$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme $\text{Mink}_0(D(p))$ est aussi causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, le lemme s'en suit. \square

Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ étant une assiette de la développante D , on peut à présent s'affranchir de la développante. Le Lemme 6.3.1 se reformule alors simplement par :

Fait 6.3.1. *L'ensemble des points de $\mathcal{R}(p)$ qui ne sont pas causalement reliés à p est un ouvert causalement convexe de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$.*

Définition 6.3.1. On appelle $M(p)$ l'union de p , des cartes de Minkowski $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$, $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ et des composantes $\mathcal{J}^+(p)$ et $\mathcal{J}^-(p)$ du bord de Penrose de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$.

Remarque 6.3.1. L'espace $M(p)$ s'identifie au diamant ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ ayant pour sommets les deuxièmes points conjugués, futur et passé, de $D(p)$.

D'après ce qui précède, on peut voir $\mathcal{R}(p)$ comme un ouvert de $M(p)$. L'intersection de $\mathcal{R}(p)$ avec la carte $\mathbb{M}_+^{n+1}(p)$ (resp. $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$) est le domaine régulier $\Omega^-(p)$ (resp. $\Omega^+(p)$) qui correspond au futur (resp. passé) strict de p dans M et son intersection avec la carte $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ correspond à l'ensemble des points de $\mathcal{R}(p)$ qui ne sont pas causalement reliés à p .

Fait 6.3.2. *Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ est causalement convexe dans $M(p)$. Il est égal à l'union des diamants $I(s, r)$ de $M(p)$ avec $s \in \Omega^-(p)$ et $r \in \Omega^+(p)$.*

Démonstration. On identifie $\mathcal{R}(p)$ à son image par la développante dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et $M(p)$ au diamant ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ décrit dans la Remarque 6.3.1. D'après le Lemme 4.2.8, $\mathcal{R}(p)$ est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Puisque $M(p)$ est causalement convexe dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, $\mathcal{R}(p)$ est causalement convexe dans $M(p)$. Le fait est alors juste une reformulation du Lemme 4.2.8. \square

Le lemme suivant décrit plus précisément $\mathcal{R}(p)$ dans la carte $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$.

Les sphères $\Lambda^+(p) \subset \mathcal{J}^+(p)$ et $\Lambda^-(p) \subset \mathcal{J}^-(p)$ définissent deux domaines réguliers propres dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$, futur et passé, notés $\Omega_0^+(p)$ et $\Omega_0^-(p)$.

Lemme 6.3.2. *Dans la carte $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$, le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ est le complémentaire de l'union des adhérences dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ des domaines réguliers $\Omega_0^+(p)$ et $\Omega_0^-(p)$.*

Démonstration. On voit $\mathcal{R}(p)$ dans $M(p)$ (voir Définition 6.3.1). Le cône lumière futur (resp. passé) de p dans M vu dans $M(p)$ sera noté $\partial I_M^+(p)$ (resp. $\partial I_M^-(p)$). La notation $I^+(q)$ (resp. $I^-(q)$) désignera le futur (resp. passé) strict dans $M(p)$ d'un point $q \in M(p)$. On note $\overline{\Omega_0^\pm(p)}$ l'adhérence de $\Omega_0^\pm(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ et $O^+(q)$ l'ombre d'un point q de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$.

Soit $q \in \mathcal{R}(p) \cap \mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Supposons par l'absurde que $q \in \overline{\Omega_0^-(p)}$. Comme $q \in \mathcal{R}(p)$, d'après le Fait 6.3.2, q est contenu dans un diamant $I(s, r)$ de $M(p)$ avec $s \in \Omega^-(p)$ et $r \in \Omega^+(p)$. Soit γ une courbe causale de $M(p)$ reliant s à q . Comme $s \in \Omega^-(p)$, la courbe γ coupe le bord de Penrose $\mathcal{J}^+(p)$ en un point de $\partial I_M^+(p)$. Or, d'après la Proposition 3.7.1 et le Lemme 3.7.8, l'ombre $O^+(q)$ est disjointe de $\partial I_M^+(p)$. Contradiction. Donc, $q \notin \overline{\Omega_0^-(p)}$. Un raisonnement symétrique montre que $q \notin \overline{\Omega_0^+(p)}$. On vient ainsi de montrer que $\mathcal{R}(p) \cap \mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ est contenu dans le complémentaire de l'union de $\overline{\Omega_0^-(p)}$ et de $\overline{\Omega_0^+(p)}$.

Réciproquement, soit $q \in \mathbb{M}_0^{n+1}(p) \setminus (\overline{\Omega_0^-(p)} \cup \overline{\Omega_0^+(p)})$. Comme $q \notin \overline{\Omega_0^+(p)}$, d'après la Proposition 3.7.1 et le Lemme 3.7.8, l'ombre $O^+(q)$ rencontre $\partial I_M^-(p)$. Soit $s \in \Omega^-(p)$ dans le futur strict d'un point de $O^+(q)$ dans $M(p)$. Alors, $q \in I^-(s)$. Par un raisonnement symétrique, le fait que $q \notin \overline{\Omega_0^-(p)}$ montre qu'il existe un point $r \in \Omega^+(p)$ tel que $q \in I^+(r)$. Ainsi, q appartient au diamant $I(s, r)$ de $M(p)$ avec $s \in \Omega^-(p)$ et $r \in \Omega^+(p)$. Donc, $q \in \mathcal{R}(p)$. \square

Lemme 6.3.3. *L'intersection des adhérences des domaines réguliers $\Omega_0^+(p)$ et $\Omega_0^-(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ est un convexe non-vide de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ noté $C(p)$.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que $C(p)$ est vide. Alors, il existe un hyperplan de type espace H qui sépare les adhérences de $\Omega_0^+(p)$ et de $\Omega_0^-(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. L'hyperplan H se compactifie en une sphère conforme S de dimension n de $M(p)$ passant par p . D'après le Lemme 6.3.2, cette sphère est contenue dans $\mathcal{R}(p)$. Vu dans M , la sphère S est de Cauchy de M (voir Lemme B.6.2). Comme M est maximal, il résulte de la Proposition 5.2.4, que M est $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Contradiction. Le sous-ensemble $C(p)$ est donc non-vide. Il est convexe comme intersection de deux convexes. \square

Lemme 6.3.4. *Le convexe $C(p)$ est compact.*

Démonstration. Comme $\Lambda^+(p)$ est une $(n-1)$ -sphère acausale de $\mathcal{J}^+(p)$, il existe un point $r \in \Omega_0^-(p)$ dont l'ombre $O^+(r)$ sur $\mathcal{J}^+(p)$ contient $\Lambda^+(p)$. Cela se traduit dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ par le fait que l'adhérence de $\Omega_0^+(p)$ est contenu dans le futur strict de r dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Par symétrie, il existe un point $s \in \Omega_0^+(p)$ qui contient l'adhérence de $\Omega_0^-(p)$ dans son passé strict dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Par conséquent, $C(p)$ est contenu dans le diamant fermé $J(s, r)$ de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Le convexe $C(p)$ est fermé dans le compact $J(s, r)$, il est donc compact. \square

Rappelons que $M(p)$ s'identifie à un "gros" diamant de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Remarque 6.3.1). On peut donc voir $C(p)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ et considérer son dual dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme $C(p)$ est compact, son dual est un ouvert causalement convexe maximal de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il est facile de

voir que le dual de $C(p)$ est contenu dans le diamant de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ correspondant à $M(p)$. On peut donc voir le dual de $C(p)$ dans $M(p)$; il s'agit de l'ensemble des points de $M(p)$ qui ne sont causalement relié à aucun point de $C(p)$. C'est un ouvert causalement convexe maximal de $M(p)$.

Lemme 6.3.5. *Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ est contenu dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$.*

Démonstration. On note $I^+(q)$ (resp. $J^+(q)$) le futur strict (resp. causal) dans $M(p)$ d'un point $q \in M(p)$. Le cône lumière futur (resp. passé) de p dans M vu dans $M(p)$ est noté $\partial I_M^+(p)$ (resp. $\partial I_M^-(p)$).

Le futur (resp. passé) causal de $C(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ est contenu dans l'adhérence de $\Omega_0^+(p)$ (resp. $\Omega_0^-(p)$) dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. D'après le Lemme 6.3.2, l'intersection de $\mathcal{R}(p)$ avec la carte $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ est donc contenue dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$.

Soit $q \in \mathcal{R}(p) \setminus \mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. On distingue trois cas :

1^{er} cas : $q \in \partial I_M^+(p) \cup \partial I_M^-(p)$. On ne perd rien à supposer que $q \in \partial I_M^+(p)$. Alors, $J^+(q)$ est disjoint de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ et $J^-(q)$ est disjoint de l'adhérence de $\Omega_0^+(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Par conséquent, $J^+(q) \cup J^-(q)$ est disjoint de $C(p)$. Autrement dit, q est dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$.

2^e cas : $q \in \mathbb{M}_+^{n+1}(p)$. Supposons par l'absurde qu'il existe une courbe causale passée γ de $M(p)$ reliant q à un point r de $C(p)$. D'après le Lemme 3.7.8, γ coupe $\mathcal{J}^+(p)$ en un point $q_0 \notin \partial I_M^+(p)$. Or, q_0 appartient à l'ombre de q sur $\mathcal{J}^+(p)$ qui est contenue dans $\partial I_M^+(p)$ (voir Proposition 3.7.1). Contradiction. Donc, q est dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$.

3^e cas : $q \in \mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Un raisonnement symétrique à celui du cas précédent montre que q est dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$. \square

Lemme 6.3.6. *L'extension maximale de $\mathcal{R}(p)$ est le dual de $C(p)$ dans $M(p)$.*

Démonstration. Montrons que le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est une extension de Cauchy de $\mathcal{R}(p)$. Il suffit de montrer que toute courbe causale inextensible du dual de $C(p)$ dans $M(p)$ rencontre $\mathcal{R}(p)$.

Soit γ une courbe causale inextensible du dual de $C(p)$ dans $M(p)$. Comme le dual de $C(p)$ est causalement convexe dans $M(p)$, la courbe γ est l'intersection d'une courbe causale inextensible $\tilde{\gamma}$ de $M(p)$ avec le dual de $C(p)$. Supposons par l'absurde que γ est disjointe de $\mathcal{R}(p)$. Alors, $\tilde{\gamma}$ rencontre $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. En effet, dans le cas contraire, $\tilde{\gamma}$ passerait par p et rencontrerait de ce fait $\mathcal{R}(p)$. Comme $\tilde{\gamma} \cap \mathcal{R}(p) \subset \gamma$, cela impliquerait que γ rencontre $\mathcal{R}(p)$. Contradiction. Donc, $\tilde{\gamma}$ rencontre $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. On note $\tilde{\gamma}_0$ l'intersection de $\tilde{\gamma}$ avec $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. C'est une courbe causale inextensible de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Comme γ ne rencontre pas $\mathcal{R}(p)$, il en est de même pour $\tilde{\gamma}_0$. Celle-ci est donc contenue dans l'union des adhérences de $\Omega_0^+(p)$ et de $\Omega_0^-(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ (voir Lemme 6.3.2). On ne perd rien à supposer que $\tilde{\gamma}_0$ passe par un point de l'adhérence de $\Omega_0^+(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Comme $\Omega_0^+(p)$ est propre, la courbe $\tilde{\gamma}_0$ finit par sortir du domaine $\Omega_0^+(p)$ par un point q_0 de la frontière de $\Omega_0^+(p)$. Par hypothèse, le rayon passé de la courbe $\tilde{\gamma}_0$ issu de q_0 rentre dans $\Omega_0^-(p)$. Donc, q_0 appartient à l'adhérence de $\Omega_0^-(p)$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. D'où $q_0 \in C(p)$. Ainsi,

γ est causalement relié au point q_0 de $C(p)$. Contradiction. Donc, γ rencontre $\mathcal{R}(p)$. Par conséquent, le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est une extension de Cauchy de $\mathcal{R}(p)$. Comme le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est maximal, le lemme s'en suit. \square

Théorème 6.3.1. *Le voisinage canonique $\mathcal{R}(p)$ est le dual de $C(p)$ dans $M(p)$. En particulier, il est maximal.*

Démonstration. D'après le Lemme 6.3.6, il s'agit de montrer que le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est contenu dans $\mathcal{R}(p)$. D'après la Proposition 5.2.3, le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ correspond à un ouvert causalement convexe maximal de M contenant $\mathcal{R}(p)$.

Soit q un point de $M(p)$ dans le dual de $C(p)$. On distingue trois cas :

1^{er} cas : $q \in \mathbb{M}_+^{n+1}(p)$. Il existe alors une courbe causale future de $M(p)$ reliant p à q . Comme le dual de $C(p)$ est causalement convexe dans $M(p)$, la courbe γ est contenue dans le dual de $C(p)$. Elle correspond alors à une courbe causale future de M reliant p à q , autrement dit $q \in J^+(p)$ dans M . Donc, $q \in \mathcal{R}(p)$.

2^e cas : $q \in \mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Par un raisonnement symétrique au cas précédent, $q \in J^-(p)$ dans M . Donc, $q \in \mathcal{R}(p)$.

3^e cas : $q \in \mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. On se place dans M . Puisque le dual de $C(p)$ est une extension de Cauchy de $\mathcal{R}(p)$, il existe un point $q_0 \in \mathcal{R}(p)$ temporellement relié à q . On ne perd rien à supposer que $q \in I^+(q_0)$ dans M . Comme $q_0 \in \mathcal{R}(p)$, l'intersection $I^-(q_0) \cap I^-(p)$ est non-vide. Soit $r \in I^-(q_0) \cap I^-(p)$. Alors, $q \in I^+(r)$. Il reste à montrer que $I^+(q) \cap I^+(p) \neq \emptyset$ pour conclure.

On se place dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Dans le paragraphe suivant, pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$, la notation $I^+(A)$ (resp. $J^+(A)$) désigne le futur strict (resp. causal) dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ de A .

Comme q est dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$, le cône causal $J^+(q)$ rencontre la frontière de $I^+(C(p))$ dans $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$. Soit u un point de cette intersection. Comme $I^+(C(p))$ est convexe (voir Lemme 1.2.1), il existe un hyperplan d'appui P à $I^+(C(p))$ en u . L'hyperplan P sépare $J^+(C(p))$ et q , plus précisément $J^+(C(p)) \subset J^+(P)$ et $q \in I^-(P)$. L'hyperplan lumière de $\mathbb{M}_0^{n+1}(p)$ passant par q parallèle à P s'accumule alors dans le futur sur un point q_∞ de $\mathcal{J}^+(p)$ qui est dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$. Comme le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est causalement convexe dans $M(p)$, la géodésique lumière φ de $\mathcal{J}^+(p)$ reliant p à q_∞ est contenue dans le dual de $C(p)$ dans $M(p)$. Comme ce dernier se réalise dans M , φ correspond à une géodésique lumière de M . Par conséquent, q_∞ correspond à un point de M dans l'intersection des cônes lumières futurs de p et de q dans M . On en déduit que les futurs stricts de p et de q se rencontrent dans M . Soit s un point de cette intersection. Le point q appartient alors au diamant $I(s, r)$ de M qui contient p . D'où, $q \in \mathcal{R}(p)$.

On vient de montrer que le dual de $C(p)$ dans $M(p)$ est contenu dans $\mathcal{R}(p)$. On a donc égalité. En particulier, $\mathcal{R}(p)$ est maximal. \square

CHAPITRE

7

EXEMPLES

Dans ce chapitre, nous décrivons des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux non-elliptiques contenant des photons complets, c'est à dire des photons qui se développent sur une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui s'étend entre deux points conjugués.

Les premiers exemples évidents sont les espace-temps de Minkowski et les demi-espaces délimités par un hyperplan lumière dans un espace-temps de Minkowski. Dans ce qui suit, nous décrivons d'autres familles d'exemples qui apparaissent dans notre étude des photons complets présentée dans les chapitres suivants.

7.1 Domaines de Misner

On étend ici la notion de *domaine de Misner d'un espace de Minkowski* (voir Section 2.3) à l'univers d'Einstein. On montrera que *les domaines de Misner de l'univers d'Einstein* constituent des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets.

Définition. Soit $\text{Mink}_0(p)$ une carte de Minkowski de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Rappelons qu'un domaine de Misner futur Ω de $\text{Mink}_0(p)$ au sens de [5] est l'intersection des futurs stricts de deux hyperplans lumières affines L et L' .

Dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, les hyperplans lumières affines L et L' correspondent à deux points q et q' de $\mathcal{J}^+(p)$ qui ne sont pas causalement reliés. Le domaine Ω est alors l'ensemble des points de $\text{Mink}_0(p)$ qui ne sont causalement reliés à aucun des points q, q' .

Ainsi, un domaine de Misner de $\text{Mink}_0(p)$ peut être décrit dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ comme l'intersection de la carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ avec le dual dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ d'une sphère conforme de $\mathcal{J}^+(p)$ de dimension 0.

Soit k un entier compris entre 0 et $n - 1$. Plus généralement, un domaine de Misner d'indice k de $\text{Mink}_0(p)$ est l'intersection de $\text{Mink}_0(p)$ avec le dual d'une sphère conforme de $\mathcal{J}^+(p)$ de dimension $(n - 1 - k)$. Cela motive la définition suivante.

Définition 7.1.1. On appelle *domaine de Misner d'indice k de $\widetilde{Ein}_{1,n}$* , noté Mis_k , le dual dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ d'une sphère conforme S de dimension $(n - 1 - k)$.

Remarque 7.1.1. Soit p un point de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui contient S dans son cône lumière futur. Alors, l'intersection de Mis_k avec $\text{Mink}_0(p)$ est un domaine de Misner futur d'indice k de $\text{Mink}_0(p)$.

Remarque 7.1.2. Un domaine de Misner Mis_k de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est contenu dans une carte de Minkowski de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. En effet, puisque Mis_k est le dual d'une sphère conforme S , il est contenu en particulier dans le dual d'un point p de S , c'est à dire dans $\text{Mink}_0(p)$.

Remarque 7.1.3. Il résulte de la Remarque 7.1.2 qu'un domaine de Misner Mis_k de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ s'identifie à sa projection dans $Ein_{1,n}$. Celle-ci est le dual dans $Ein_{1,n}$ d'une sphère conforme de dimension $(n - 1 - k)$. Un domaine de Misner est donc équivalent à la donnée d'un sous-espace vectoriel de type $(1, n - k)$ de $\mathbb{R}^{2,n+1}$.

Il résulte immédiatement du Lemme 5.3.6 le fait suivant.

Fait 7.1.1. *Un domaine de Misner Mis_k de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal.*

Modèles des domaines de Misner de l'univers d'Einstein. Nous décrivons ici deux modèles des domaines de Misner Mis_k . On va montrer que Mis_k est conformément équivalent à

1. $\mathbb{H}^{n-k} \times dS_{1,k}$ où $dS_{1,k}$ désigne l'espace de Sitter¹ de dimension $(k + 1)$;
2. l'intersection du futur strict dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ d'une sphère conforme S de dimension k et du passé strict dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ de la sphère conforme constituée des premiers points conjugués futurs des points de S .

Posons $\ell = n - k - 1$. On décompose $\mathbb{R}^{2,n+1}$ en la somme orthogonale $\mathbb{R}^{1,\ell+1} \oplus \mathbb{R}^{1,k+1}$. On munit $\mathbb{R}^{2,n+1}$ du système de coordonnées $(x_0, \dots, x_{\ell+1}, y_0, \dots, y_{k+1})$ dans lequel la forme quadratique $q_{2,n+1}$ s'exprime par :

$$-x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{\ell+1}^2 - y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{k+1}^2.$$

Introduisons quelques notations que nous utiliserons dans notre description des domaines de Misner.

1. L'espace de Sitter $dS_{1,k}$ est le lieu des vecteurs de $\mathbb{R}^{1,k}$ de norme 1 pour la forme quadratique $q_{1,k}$ muni de la métrique induite. C'est un espace-temps globalement hyperbolique de courbure 1 qui se plonge conformément dans $\widetilde{Ein}_{1,k} \simeq \mathbb{S}^k \times \mathbb{R}$. Il se réalise comme un domaine $\mathbb{S}^k \times]0, \pi[$ de $\widetilde{Ein}_{1,k}$. Nous renvoyons vers [37] pour plus de détails.

Notations. On désigne par \mathcal{C}_+^k (resp. \mathcal{C}_-^k) le cône causal futur (resp. passé) de $\mathbb{R}^{1,k+1}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_+^k &= \{(0, \dots, 0, y_0, \dots, y_{k+1}) : -y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{k+1}^2 \leq 0, y_0 > 0\} \\ \mathcal{C}_-^k &= \{(0, \dots, 0, y_0, \dots, y_{k+1}) : -y_0^2 + y_1^2 + \dots + y_{k+1}^2 \leq 0, y_0 < 0\}.\end{aligned}$$

Soit \mathbb{S}_+^k (resp. \mathbb{S}_-^k) la sphère des directions lumières futures (resp. passées) de $\mathbb{R}^{1,k}$, c'est à dire la projection de $\partial\mathcal{C}_+^k$ (resp. $\partial\mathcal{C}_-^k$) dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{2,n+1})$.

On note \mathcal{C}^ℓ le cône causal futur de $\mathbb{R}^{1,\ell+1}$:

$$\mathcal{C}^\ell = \{(x_0, \dots, x_{\ell+1}, 0, \dots, 0) : -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{\ell+1}^2 \leq 0, x_0 > 0\}.$$

Soit \mathbb{S}^ℓ la sphère des directions lumières futures de $\mathbb{R}^{1,\ell+1}$, c'est à dire la projection de $\partial\mathcal{C}^\ell$ dans la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{2,n+1})$.

Description des domaines de Misner. D'après la Remarque 7.1.3, tout domaine de Misner d'indice k est conformément équivalent au dual de \mathbb{S}^ℓ dans $Ein_{1,n}$ noté Ω . Celui-ci est l'ensemble des points $[x : y]$ de $Ein_{1,n}$ tels que $\langle [x : y], [z : 0] \rangle_{2,n+1} > 0$ pour tout $[z : 0] \in \mathbb{S}^\ell$, ou de manière équivalente, tels que $\langle x, z \rangle_{1,\ell+1} < 0$ pour tout $z \in \partial\mathcal{C}^\ell$. D'après la Remarque 1.2.8, cette dernière condition signifie que $x \in \mathcal{C}^\ell$, c'est à dire $q_{1,\ell+1}(x) < 0$. Par conséquent, $q_{1,k+1}(y) = -q_{1,\ell+1}(x) > 0$. Ainsi,

$$\Omega = \{[x : y] \in Ein_{1,n} : q_{1,\ell+1}(x) < 0 \text{ et } q_{1,k+1}(y) > 0\}. \quad (7.1)$$

Remarque 7.1.4. Chacune des inégalités $q_{1,\ell+1}(x) < 0$ et $q_{1,k+1}(y) > 0$ suffit à caractériser le domaine Ω . En effet, comme $q_{1,\ell+1}(x) = -q_{1,k+1}(y)$, la donnée de l'une permet de déduire l'autre.

Soient $\mathbb{H}^{\ell+1} \subset \mathbb{R}^{1,\ell+1}$ et $dS_{1,k} \subset \mathbb{R}^{1,k+1}$. Il résulte immédiatement de l'égalité (7.1) l'énoncé suivant.

Fait 7.1.2. *Le domaine de Misner Ω est difféomorphe à $\mathbb{H}^{\ell+1} \times dS_{1,k}$.*

D'après la Remarque 7.1.4, $[x : y] \in \Omega$ si et seulement si $q_{1,k+1}(y) > 0$, autrement dit

$$y \notin \mathcal{C}_+^k \cup \mathcal{C}_-^k.$$

D'après la Remarque 1.2.8, cela est équivalent à dire qu'il existe $z \in \mathcal{C}_+^k$ et $z' \in \mathcal{C}_-^k$ tels que :

$$\begin{cases} \langle y, z \rangle_{1,k+1} > 0 \\ \langle y, z' \rangle_{1,k+1} > 0 \end{cases}$$

ou de manière équivalente

$$\begin{cases} \langle \xi, \eta \rangle_{2,n+1} > 0 \\ \langle \xi, \eta' \rangle_{2,n+1} > 0 \end{cases}$$

où $\xi = [x : y]$, $\eta = [0 : z]$ et $\eta' = [0 : z']$ dans $Ein_{1,n}$.

Soient S^+ et S^- des relevés de \mathbb{S}_+^k et \mathbb{S}_-^k à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ tels que S^+ est constitué des premiers points conjugués futurs des points de S . D'après la Proposition 3.2.8, ces deux dernières inégalités impliquent que ξ admet un unique relevé $p \in I^-(S^+) \cap I^+(S^-)$. Réciproquement, tout point p de $I^-(S^+) \cap I^+(S^-)$ se projette dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ en un point ξ qui vérifie les deux inégalités ci-dessus. On en déduit l'énoncé suivant.

Fait 7.1.3. *Le domaine de Misner Ω s'identifie à un ouvert $I^-(S^+) \cap I^+(S^-)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ où S^+ et S^- sont des sphères conformes de dimension k telles que S^+ est constitué des premiers points conjugués futurs des points de S .*

Remarque 7.1.5. Soit $O_0(1, \ell+1) \times O_0(1, k+1)$ le sous-groupe de $O_0(2, n+1)$ qui préserve la décomposition $\mathbb{R}^{2,n+1} = \mathbb{R}^{1,\ell+1} \oplus \mathbb{R}^{1,k+1}$. Il agit naturellement sur le domaine de Misner $\mathbb{H}^{\ell+1} \times dS_{1,k}$: pour tout $(\gamma_1, \gamma_2) \in O_0(1, \ell+1) \times O_0(1, k+1)$ et tout $(x, y) \in \mathbb{H}^{\ell+1} \times dS_{1,k}$, on pose

$$(\gamma_1, \gamma_2) \cdot (x, y) := (\gamma_1 \cdot x, \gamma_2 \cdot y).$$

Photons complets. L'espace de Sitter $dS_{1,k}$ contient une infinité de photons complets. En effet, $dS_{1,k}$ est conformément équivalent à l'ouvert $\mathbb{S}^k \times]0, \pi[$ de $\widetilde{Ein}_{1,k} \simeq \mathbb{S}^k \times \mathbb{R}$; tout segment ouvert de photon de $\widetilde{Ein}_{1,k}$ reliant un point de la sphère $\mathbb{S}^k \times \{0\}$ à son premier point conjugué dans $\mathbb{S}^k \times \{\pi\}$ définit un photon complet de $dS_{1,k}$.

Le modèle $\mathbb{H}^{\ell+1} \times dS_{1,k}$ permet alors de voir facilement l'existence de photons complets dans un domaine de Misner : un photon complet de $\mathbb{H}^{\ell+1} \times dS_{1,k}$ est la donnée d'un point de $\mathbb{H}^{\ell+1}$ et d'un photon complet de $dS_{1,k}$.

Dans le modèle $I^-(S^+) \cap I^+(S^-) \subset \widetilde{Ein}_{1,n}$, les photons complets que nous venons de décrire correspondent aux segments ouverts de photons de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ reliant un point de S^- à son premier point conjugué futur dans S^+ .

Remarque 7.1.6. Lorsque $k = 1$, l'espace de Sitter $dS_{1,1}$ admet deux feuilletages \mathcal{F} et \mathcal{F}' en photons complets. Ceux-ci induisent deux feuilletages $\hat{\mathcal{F}}$ et $\hat{\mathcal{F}}'$ de codimension 1 sur $\mathbb{H}^{n-1} \times dS_{1,1}$. Les feuilles de chacun de ces feuilletages sont difféomorphes à $\mathbb{H}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Un domaine de Misner d'indice 1 de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ auquel l'on enlève une feuille d'un de ces feuilletages donne un exemple d'ouvert globalement hyperbolique de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui n'est pas causalement convexe.

Frontière causale d'un domaine de Misner. Comme la décomposition $\mathbb{R}^{2,n+1} = \mathbb{R}^{1,\ell+1} \oplus \mathbb{R}^{1,k+1}$ est orthogonale, chaque point de \mathbb{S}_+^k est relié à tout point de \mathbb{S}^ℓ par un unique segment de photon dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il en est de même pour \mathbb{S}_-^k et \mathbb{S}_0 .

Soit S_0 le relevé de la sphère \mathbb{S}^ℓ tel que le domaine de Misner $I^-(S^+) \cap I^+(S^-)$ est le dual de S_0 dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. D'après ce qui précède, chaque point de S^+ est relié à S_0 par une unique géodésique lumière passée dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il en est de même pour S^- et S_0 avec l'orientation du temps inverse.

Soit $\Lambda_{k,\ell}^+$ (resp. $\Lambda_{k,\ell}^-$) l'union de toutes les géodésiques lumières reliant un point de S^+ (resp. S^-) à un point de S_0 . Il s'agit du joint des sphères S^+ (resp. S^-) et S_0 ,

c'est donc une sphère topologique de dimension n achronale dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. La frontière de $I^-(S^+) \cap I^+(S^-)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est l'union des sphères $\Lambda_{k,\ell}^+$ et $\Lambda_{k,\ell}^-$.

Ainsi, $\Lambda_{k,\ell}^+ \setminus S_0$ correspond à la frontière causale future du domaine de Misner et $\Lambda_{k,\ell}^- \setminus S_0$ à la frontière causale passée. L'ensemble des TIPs maximaux correspond exactement à la sphère S^+ et l'ensemble des TIFs maximaux à la sphère S^- .

Remarque 7.1.7. D'après la description ci-dessus, un photon de TIPs (resp. de TIFs) équivaut à la donnée d'un point de S_0 et d'un point de S^+ (resp. S^-). L'espace des photons de TIPs (resp. de TIFs) d'un domaine de Misner est donc homéomorphe à $\mathbb{S}^\ell \times \mathbb{S}^k$.

Remarque 7.1.8. La construction des domaines de Misner présente des similitudes avec celles des *split AdS-spacetimes* définie par Barbot dans [6].

7.2 Représentations Anosov

Dans cette section, nous allons voir que les représentations Anosov permettent de construire des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets.

Nous considérons des représentations Anosov d'un groupe Gromov hyperbolique Γ dans $O_0(2, n+1)$. Il s'avère qu'il y a différentes manières d'être Anosov dans le groupe de Lie $O_0(2, n+1)$ (cela est dû au fait que $O(2, n+1)$ est de rang 2). Nous nous intéresserons aux représentations dites *P_1 -Anosov*.

La définition fait intervenir d'une part, la dynamique nord-sud sur le bord de Gromov de Γ , noté $\partial\Gamma$, sous l'action de Γ ; d'autre part, une dynamique similaire sur $Ein_{1,n}$ sous l'action de suites de $O_0(2, n+1)$ dites *P_1 -divergentes*. Une suite $\{g_i\}$ d'éléments de $O_0(2, n+1)$ est dite *P_1 -divergente* si elle sort de tout compact et s'il existe une sous-suite $\{g_{i_j}\}$, un point attractif $p_+ \in Ein_{1,n}$ et un point répulsif $p_- \in Ein_{1,n}$ telle que $\{g_{i_j}\}$ converge uniformément vers p_+ sur tout compact qui évite le cône lumière de p_- . Étant donné un groupe Gromov-hyperbolique Γ , une représentation $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n+1)$ est dite *P_1 -Anosov* si

1. toute suite d'éléments distincts deux à deux de $\rho(\Gamma)$ est P_1 -divergente;
2. il existe une application continue ρ -équivariante $\xi : \partial\Gamma \rightarrow Ein_{1,n}$ qui
 - (a) est *transverse*, c'est à dire pour toute paire de points distincts η, η' de $\partial\Gamma$, $\xi(\eta)$ n'est pas contenu dans le cône lumière de $\xi(\eta')$ dans $Ein_{1,n}$,
 - (b) *préserve la dynamique*, c'est à dire si $\eta \in \partial\Gamma$ est un point attractif de $\gamma \in \Gamma$, $\xi(\eta) \in Ein_{1,n}$ est attractif pour $\rho(\gamma)$.

L'ensemble limite Λ_Γ de ρ est l'ensemble des points attractifs des suites P_1 -divergentes de $\rho(\Gamma)$. C'est un fermé $\rho(\Gamma)$ -invariant. Il s'avère que $\xi(\partial\Gamma)$ est exactement l'ensemble limite Λ_Γ .

Dans [40], nous démontrons le résultat suivant.

Théorème 7.2.1 ([40, Theorem 5.1]). *Soit $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n + 1)$ une représentation P_1 -Anosov d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ . On suppose que l'ensemble limite Λ_Γ est acausal dans $Ein_{1,n}$ et que ce n'est pas une sphère topologique de dimension n . Alors, ρ est l'holonomie d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal de dimension $(n + 1)$.*

Ce théorème généralise le résultat de Barbot-Méridot [6] sur les représentations quasi-Fuchsiennes d'un groupe Gromov-hyperbolique dans $O_0(2, n + 1)$ à la classe plus large des représentations Anosov dont l'ensemble limite est acausal dans $Ein_{1,n}$.

Une application du Théorème 7.2.1 est de fournir des exemples d'espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux avec des photons complets. Nous décrirons deux familles d'exemples, à savoir *les trous noirs-trous blancs* et *les extensions de domaines de Misner*.

Avant de décrire ces exemples, rappelons brièvement ici les grandes lignes de la preuve du Théorème 7.2.1. Nous renvoyons à [40] pour les détails de la démonstration.

On définit le domaine invisible $\Omega(\Lambda_\Gamma)$ de l'ensemble limite dans $Ein_{1,n}$ comme le dual de Λ_Γ dans $Ein_{1,n}$. La dynamique "nord-sud" sous l'action d'un sous-groupe discret de $O_0(2, n + 1)$ sur la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathbb{R}^{2,n+1})$ permet de montrer que l'action de $\rho(\Gamma)$ sur $\Omega(\rho(\Gamma))$ est libre et proprement discontinue. Le quotient $\rho(\Gamma) \backslash \Omega(\Lambda_\Gamma)$ est alors un espace-temps conformément plat, noté $M_\rho(\Gamma)$. Les propriétés dynamiques de l'action permettent de montrer, sans trop de difficultés, que l'hyperbolicité globale et la maximalité de $\Omega(\Lambda_\Gamma)$ passent au quotient, autrement dit que $M_\rho(\Gamma)$ est globalement hyperbolique maximal. Le point délicat consiste à montrer que $M_\rho(\Gamma)$ est Cauchy-compact. L'idée clé est que l'espace des photons d'un espace-temps globalement hyperbolique s'identifie au fibré unitaire tangent d'une de ses hypersurfaces de Cauchy (voir Section 8.1). La Cauchy-compacité de $M_\rho(\Gamma)$ se déduit alors du résultat [24, Theorem 4.1] de Guichard-Kassel-Wienhard qui, reformulé dans le langage Lorentzien, affirme que l'action d'une représentation P_1 -Anosov d'un groupe Gromov-hyperbolique dans $O_0(2, n + 1)$ sur l'espace des géodésiques causales² qui évitent l'ensemble limite est proprement discontinue et cocompacte.

7.2.1 Trous noirs-trous blancs

Soit $\rho : \Gamma \rightarrow O_0(2, n + 1)$ une représentation P_1 -Anosov d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ qui fixe un point p de $Ein_{1,n}$ et telle que l'ensemble limite $\Lambda_\rho(\Gamma)$ est un fermé acausal de $Ein_{1,n}$ contenu dans le cône lumière de p qui n'est pas une n -sphère topologique.

D'après le Théorème 7.2.1, la représentation ρ est alors l'holonomie d'un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal, noté $M_\rho(\Gamma)$. Celui-ci est le quotient du domaine invisible $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ par $\rho(\Gamma)$.

2. L'espace des géodésiques causales est un ensemble constitué des géodésiques de type temps et de type lumière de l'espace anti-de-Sitter $AdS_{1,n+1}$ et des géodésiques lumières de $Ein_{1,n} = \partial AdS_{1,n+1}$ (voir [40, Section 4]).

Dans $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$, les géodésiques lumières dans la composante du bord de Penrose contenant $\Lambda_\rho(\Gamma)$ qui évitent l'ensemble limite sont des photons complets de $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$. Une composante connexe de l'union de ces géodésiques lumières est appelée *horizon complet*. Chaque horizon complet déconnecte $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ en deux composantes connexes. Celles-ci sont égales aux domaines réguliers définis par $\Lambda_\rho(\Gamma)$ dans chacune des cartes de Minkowski associées à p . L'un d'eux est futur et l'autre passé. On les note $\Omega^+(\Lambda_\rho(\Gamma))$ et $\Omega^-(\Lambda_\rho(\Gamma))$ respectivement.

Un photon de $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ issu d'un point de $\Omega^-(\Lambda_\rho(\Gamma))$ ne peut s'échapper du domaine régulier passé $\Omega^-(\Lambda_\rho(\Gamma))$ qu'en traversant l'un des horizons complets dans le passé ; il ne peut pas s'en échapper dans le futur. Le domaine $\Omega^-(\Lambda_\rho(\Gamma))$ est donc *un trou noir*. De manière symétrique, un photon de $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ issu d'un point de $\Omega^+(\Lambda_\rho(\Gamma))$ ne peut s'échapper du domaine régulier futur $\Omega^+(\Lambda_\rho(\Gamma))$ qu'en traversant l'un des horizons complets dans le futur ; il ne peut pas s'en échapper dans le passé. Le domaine $\Omega^+(\Lambda_\rho(\Gamma))$ est donc *un trou blanc*.

Ainsi, $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ est l'union d'un trou noir et d'un trou blanc séparé par des horizons complets. Cette description passe au quotient $M_\rho(\Gamma)$. On pose alors la définition suivante :

Définition 7.2.1. On appelle *trou noir-trou blanc* tout espace-temps conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal $M_\rho(\Gamma)$ associé à une représentation P_1 -Anosov ρ d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ dans $O_0(2, n + 1)$ telle que :

1. ρ fixe un point p de $Ein_{1,n}$;
2. l'ensemble limite $\Lambda_\rho(\Gamma)$ est un fermé acausal de $Ein_{1,n}$ qui n'est pas une $(n - 1)$ -sphère topologique et qui est contenu dans le cône lumière de p .

7.2.2 Extensions de domaines de Misner

Soient $\ell \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = \ell + k + 1$. On considère la décomposition orthogonale $\mathbb{R}^{2,n+1} = \mathbb{R}^{1,\ell+1} \oplus \mathbb{R}^{1,k+1}$. Soit $O_0(1, \ell + 1) \times O_0(1, k + 1)$ le sous-groupe de $O_0(2, n + 1)$ qui préserve cette décomposition.

Soit Γ un groupe Gromov hyperbolique. On se donne deux représentations :

1. une représentation $\rho_\ell : \Gamma \rightarrow O_0(1, \ell + 1)$ convexe cocompacte ;
2. une représentation $\rho_k : \Gamma \rightarrow O_0(1, k + 1)$ dont l'image est contenue dans un compact de $O_0(1, k + 1)$.

Soit $\rho := (\rho_\ell, \rho_k)$ la représentation de Γ dans $O_0(1, \ell + 1) \times O_0(1, k + 1) \subset O_0(2, n + 1)$. Il n'est pas difficile de voir que ρ est P_1 -Anosov. De plus, ρ fixe la sphère conforme \mathbb{S}^ℓ de $\mathbb{R}^{1,\ell+1}$. Cette dernière contient l'ensemble limite $\Lambda_\rho(\Gamma)$. Ainsi, $\Lambda_\rho(\Gamma)$ est un fermé acausal de $Ein_{1,n}$.

Soit $M_\rho(\Gamma)$ l'espace-temps conformément plat associé à ρ , à savoir le quotient du domaine invisible $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ par $\rho(\Gamma)$. Il résulte du Théorème 7.2.1 que $M_\rho(\Gamma)$ est globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal.

Comme $\Lambda_\rho(\Gamma)$ est contenu dans \mathbb{S}^ℓ , le domaine invisible $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ contient le domaine de Misner Mis_k défini comme le dual de \mathbb{S}^ℓ dans $Ein_{1,n}$. Ainsi, $\Omega(\Lambda_\rho(\Gamma))$ contient une infinité de photons complets. D'après la Remarque 7.1.5, Mis_k est préservé par $\rho(\Gamma)$. Par conséquent, $M_\rho(\Gamma)$ contient le quotient d'un domaine de Misner. Cela motive la définition suivante.

Définition 7.2.2. On appelle *extension de Misner* tout espace-temps conformément plat globalement hyperbolique Cauchy-compact maximal $M_\rho(\Gamma)$ associé à une représentation P_1 -Anosov ρ d'un groupe Gromov-hyperbolique Γ dans $O_0(2, n+1)$ définie par la donnée :

1. d'une représentation convexe cocompacte $\rho_\ell : \Gamma \rightarrow O_0(1, \ell+1)$;
2. d'une représentation $\rho_k : \Gamma \rightarrow O_0(1, k+1)$ dont l'image est contenue dans un compact de $O_0(1, k+1)$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n = \ell + k + 1$.

CHAPITRE

8

PHOTONS COMPLETS

Dans ce chapitre, on étudie les espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux non-elliptiques développables contenant des **photons complets**, c'est à dire des photons qui se développent dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ en des géodésiques lumières qui s'étendent entre deux points conjugués.

Nous verrons que dans un tel espace-temps M , un photon complet est toujours accumulé par une suite de photons complets qui ont tous la même extrémité future et la même extrémité passée dans les frontières causales, future et passée, de M . Nous dirons alors que l'accumulation dans M d'une suite de photons complets φ_i sur un photon complet φ est *non-triviale* si les extrémités, futures et passées, des photons φ_i dans les frontières causales, future et passée, de M sont distinctes deux à deux.

Le but de ce chapitre est de trouver des conditions nécessaires pour qu'un photon complet soit accumulé non-trivialement par une suite de photons complets.

8.1 Convergence de photons

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique.

Espace des photons de M . On appelle $\mathcal{P}(M)$ l'ensemble des photons de M en tant que lieux géométriques. On va voir que $\mathcal{P}(M)$ est naturellement en bijection avec le fibré unitaire tangent d'une hypersurface de Cauchy de M .

Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Pour tout $(p, v) \in T^1S$, on désigne par $u(v)$ le vecteur lumière futur de l'espace tangent à M en p qui se projette orthogonalement sur T_pS . On définit alors l'application $f : T^1S \rightarrow \mathcal{P}(M)$ qui associe à tout point (p, v)

de T^1S le photon passant par p tangent à $u(v)$.

Proposition 8.1.1. *L'application f est une bijection entre le fibré unitaire tangent à S et l'ensemble $\mathcal{P}(M)$ des photons de M .*

Démonstration. La preuve est laissée au lecteur. □

On munit $\mathcal{P}(M)$ de la topologie pour laquelle f est un homéomorphisme.

Accumulation de photons dans M . Soit $\{\varphi_i\}$ une suite de photons de M .

Définition 8.1.1. On dit que les photons φ_i s'accumulent sur un photon φ dans M si pour tout point p de φ et tout voisinage V de p , tous les φ_i rencontrent V sauf un nombre fini.

Remarque 8.1.1. L'accumulation des photons φ_i sur un photon φ dans M est équivalente à la convergence de la suite $\{\varphi_i\}$ vers φ dans $\mathcal{P}(M)$.

Remarque 8.1.2. Si les photons φ_i s'accumulent sur un photon φ dans M , une infinité d'entre eux rencontrent le passé strict ou le futur strict de φ dans M (ou les deux).

Lemme 8.1.1. *Si les photons φ_i s'accumulent sur un photon φ dans M alors les deux extrémités, futures et passées, des φ_i convergent vers celles de φ dans la frontière causale de M .*

Démonstration. On note p_i, q_i les extrémités, future et passée, de φ_i et p, q celles de φ dans la frontière causale de M .

Montrons que $p = \lim p_i$. Soit $r \in I^-(\varphi)$. Alors, p est un TIP de M dans $I^+(r)$. Rappelons que $I^+(r)$ s'identifie à un domaine régulier propre passé $\Omega^-(r)$ dans la carte de Minkowski associée $\mathbb{M}_+^{n+1}(r)$. De plus, la frontière de $\Omega^-(r)$ dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(r)$, notée $\partial\Omega^-(r)$, correspond exactement aux TIPs de M dans le futur strict de r (voir Section 6.1). Le TIP p est donc représenté par un unique point de $\partial\Omega^-(r)$.

Comme les photons φ_i s'accumulent sur φ , ils rencontrent tous $I^+(r)$ (sauf éventuellement un nombre fini). Chaque p_i est donc représenté par un unique point de $\partial\Omega^-(r)$. On voit à présent les points p_i et p dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(r)$.

Soit V un voisinage de p dans l'adhérence de $\Omega^-(r)$. Il est clair que V rencontre φ (vu dans $\Omega^-(r)$). Les photons φ_i (vus dans $\Omega^-(r)$) rencontrent donc V . D'où $p_i \in V$. Par conséquent, $\lim p_i = p$.

Par symétrie, le même raisonnement montre que $\lim q_i = q$. □

Accumulation de segments de photons dans M . Soient $\{\varphi_i\}$ une suite de segments de photons de M et φ un segment de photon dans M . On note $\tilde{\varphi}_i$ le photon de M qui contient φ_i et $\tilde{\varphi}$ celui qui contient φ .

Définition 8.1.2. On dit que les segments φ_i s'accumulent sur φ dans M si

1. la suite $\{\tilde{\varphi}_i\}$ converge vers $\tilde{\varphi}$ dans $\mathcal{P}(M)$;

2. les extrémités des segments φ_i convergent vers les extrémités de φ dans M .

On suppose M de dimension $(n+1) \geq 3$ et développable. Soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante. Il résulte facilement du Lemme 8.1.1 l'énoncé suivant.

Lemme 8.1.2. *Soit $\{\varphi_i\}$ une suite de photons de M . Si les photons φ_i s'accumulent sur un photon φ de M alors il en est de même pour les images par la développante en tant que segments de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. La preuve est laissée au lecteur. □

8.2 Horizons de photons complets

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal non-elliptique de dimension $(n+1) \geq 3$ développable. Soit $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ une développante et $D^\sharp : M^\sharp \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ son extension au complété causal de M .

Rappelons qu'un photon de M est dit *complet* s'il se développe en une géodésique lumière de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ qui s'étend entre deux points conjugués a et b . Notons que puisque M est non-elliptique, a est le *premier* point conjugué de b .

Lemme 8.2.1. *Soit $\{\varphi_i\}$ une suite de photons **complets** de M qui s'accumulent sur un photon φ de M . Alors, φ est complet.*

Démonstration. Soient p_i, q_i (resp. p, q) les extrémités, future et passée, de l'image par D de φ_i (resp. φ). On note $\sigma : \widetilde{Ein}_{1,n} \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$ l'application qui associe à un point son premier point conjugué futur.

Il s'agit de montrer que $p = \sigma(q)$. D'après le Lemme 8.1.2, on a $\lim p_i = p$ et $\lim q_i = q$. Comme σ est continue, $\lim \sigma(q_i) = \sigma(q)$. Or, les photons φ_i étant complets, $\sigma(q_i) = p_i$. Donc, $\lim p_i = \sigma(q)$. Par unicité de la limite, $p = \sigma(q)$, c'est à dire φ est complet. □

Dans ce qui suit, on va voir qu'un photon complet de M est toujours accumulé dans M par une suite de photons complets qui ont tous la même extrémité future et la même extrémité passée dans les frontières causales, future et passée, de M .

Horismos complets. Soit p un point de la frontière causale future de M .

On a défini dans la Section 6.2 la sphère des directions lumières passées en p notée $S(p)$. On distingue deux types de directions dans $S(p)$. D'une part, les directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans M , d'autre part, les directions tangentes à un photon de TIPs.

Les directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans M forment un ouvert de $S(p)$ noté $H(p)$. Son complémentaire, constitué des directions tangentes à un photon de TIPs issu de p , est noté $T(p)$. Notons que, puisque M est maximal, il existe au moins un photon de TIPs issu de p , autrement dit $T(p)$ est non-vide. On a appelé *horismos* de p une composante connexe de $H(p)$.

On définit les mêmes objets avec les mêmes notations pour l'orientation du temps inverse.

Définition 8.2.1. Un horismos de p est dit *complet* si toute direction de cet horismos est tangente à un photon *complet* qui rentre dans M .

En fait, il suffit qu'un horismos contienne une direction tangente à un photon complet pour qu'il soit complet.

Proposition 8.2.1. *Si un horismos H de p contient une direction tangente à un photon complet alors il est complet.*

Démonstration. Soit U l'ensemble des directions de H tangentes à un photon complet. Il est non-vide par hypothèse. Montrons que U est ouvert et fermé dans H . Comme H est connexe, on en déduira que $U = H$.

Montrons que U est ouvert dans H . Soient $[v_0] \in U$ et φ_0 le photon complet issu de p tangent à v_0 . On note P l'ouvert de M correspondant au point p de la frontière causale future. Comme P est un ensemble passé, sa frontière ∂P dans M est une hypersurface topologique sans bord achronale (voir Proposition B.4.2). De plus, l'hypersurface ∂P est feuilletée par les photons de M issus de p . Elle contient donc, en particulier, φ_0 . Soit $r \in I^+(\varphi_0)$. Alors, $I^-(r) \cap \partial P$ est un ouvert non-vide de ∂P qui rencontre φ_0 . La projection naturelle de $I^-(r) \cap \partial P$ sur $H(p)$ est un ouvert V de $H(p)$. On appelle V_0 la composante connexe de V qui contient la direction $[v_0]$, c'est un voisinage ouvert de $[v_0]$ contenu dans H .

Montrons que $V_0 \subset U$. Soient $[v] \in V_0$ et φ le photon de M issu de p tangent à v . Montrons que φ est complet. Soient \bar{p} et \bar{q} les extrémités, future et passée, de $D(\varphi)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Il s'agit de montrer que \bar{q} est le premier point conjugué passé de \bar{p} , noté \bar{p}_* . D'après le Lemme 6.2.4, $D(\varphi) \subset \partial I^-(\bar{p}) = \partial I^+(\bar{p}_*)$. Donc, $\bar{q} \in \partial I^+(\bar{p}_*)$. Supposons par l'absurde que $\bar{q} \neq \bar{p}_*$.

Par définition, φ rencontre $I^-(r)$. D'après le Lemme 4.2.2, $I^-(r)$ s'identifie à son image par la développante. Celle-ci est un domaine régulier futur propre $\Omega^+(r)$ de la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(D(r))$ (voir Section 6.1). Ainsi, $D(\varphi \cap I^-(r))$ est un photon du domaine $\Omega^+(r)$ (vu comme un espace-temps). On note $\partial\Omega^+(r)$ la frontière de $\Omega^+(r)$ dans $\text{Mink}_-(D(r))$. Comme $\Omega^+(r)$ est propre, l'extrémité passée de $D(\varphi \cap I^-(r))$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$, à savoir \bar{q} , appartient à $\partial\Omega^+(r)$. De même, puisque φ_0 rencontre $I^-(r)$, l'extrémité passée \bar{q}_0 de $D(\varphi_0)$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ appartient à $\partial\Omega^+(r)$. Le photon φ_0 étant complet, $\bar{q}_0 = \bar{p}_*$. Donc, $\bar{p}_* \in \partial\Omega^+(r)$.

Résumons. On vient de voir que \bar{q} et \bar{p}_* sont deux points distincts de $\text{Mink}_-(D(r))$ contenus dans $\partial\Omega^+(r)$. De plus, \bar{q} appartient au cône lumière futur de \bar{p}_* dans $\text{Mink}_-(D(r))$. La demi-droite lumière future de $\text{Mink}_-(D(r))$ issue de \bar{p}_* passant par \bar{q} contient l'image par D de $\varphi \cap I^-(r)$, elle rentre donc dans $\Omega^+(r)$. D'où, $\bar{q} \in \Omega^+(r)$. Contradiction. Par conséquent, $\bar{q} = \bar{p}_*$. Autrement dit, φ est complet. Donc, $V_0 \subset U$. On en déduit que U est ouvert dans H .

Montrons que U est fermé dans H . Soit $[v] \in \partial U \cap H$. Alors, $[v] = \lim[v_i]$ avec $[v_i] \in U$. On note φ_i le photon issu de p tangent à v_i et φ le photon issue de p tangent à

v . Il est facile de voir que les photons φ_i s'accumulent sur φ . Comme les φ_i sont complets, il résulte du Lemme 8.2.1 que φ est complet. D'où, $[v] \in U$. Donc U est fermé dans H .

L'ensemble U est ouvert et fermé dans H , donc $U = H$. La proposition s'en suit. \square

Définition 8.2.2. Le TIP p est dit *complet* s'il admet un horismos complet. Il est dit *complet élémentaire* si de plus $T(p)$ est réduit à un point.

Remarque 8.2.1. Un TIP complet élémentaire admet un seul horismos qui est complet.

Nous verrons dans la section suivante que l'existence de TIPs complets élémentaires dans M correspond à un cas très particulier; nous montrerons que ces TIPs n'apparaissent que dans un diamant extrême¹ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Théorème 8.3.1).

Horizons complets. Soit p un point de la frontière causale future de M . Considérons un horismos complet H de p .

Lemme 8.2.2. *Les photons issus de p tangents à une direction de H se terminent tous en la même extrémité dans la frontière causale passée de M .*

Démonstration. On note \mathcal{H} l'union des photons complets issus de p tangents à une direction de H . Soit $r \in I^+(\mathcal{H})$. On appelle V le sous-ensemble de H constitué des directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans $I^-(r)$. C'est un ouvert non-vide de H . Montrons que V est fermé dans H . Soit $[v] \in \partial V \cap H$. Alors, $[v] = \lim[v_i]$ avec $[v_i] \in V$. Soient φ_i le photon complet issu de p tangent à v_i et φ le photon complet issu de p tangent à v . On note q_i et q les extrémités respectives de φ_i et φ dans la frontière causale passée. Comme $[v] = \lim[v_i]$, les photons φ_i s'accumulent sur φ . D'après le Lemme 8.1.1, il en découle que $\lim q_i = q$. Montrons que les photons φ_i ont tous la même extrémité passée q' dans $I^-(r)$. Par unicité de la limite, on obtiendra $q = q'$, ce qui prouvera que φ rencontre $I^-(r)$, c'est à dire que $[v] \in V$.

On identifie $I^-(r)$ à son image par la développante. Celle-ci est un domaine régulier futur propre $\Omega^+(r)$ de la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(D(r))$ (voir Proposition 6.1.1). L'ensemble des points de la frontière causale passée dans le passé strict de r s'identifie, via D^\sharp , à la frontière de $\Omega^+(r)$ dans $\text{Mink}_-(D(r))$ notée $\partial\Omega^+(r)$. Ainsi, $D^\sharp(q_i) \in \partial\Omega^+(r)$. Posons $\bar{p} = D^\sharp(p)$ et notons \bar{p}_* le premier point conjugué passé de \bar{p} dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Comme les φ_i sont des photons complets issus de p , leurs images par D sont des géodésiques lumières qui s'étendent entre \bar{p} et \bar{p}_* . Donc, $\bar{p}_* = D^\sharp(q_i) \in \partial\Omega^+(r)$. Il existe un unique point q' de la frontière causale passée dans le passé strict de r tel que $D^\sharp(q') = \bar{p}_*$. D'où $q_i = q'$ pour tout entier i . On en déduit que V est fermé dans H . Comme H est connexe, on en déduit que $V = H$.

Le raisonnement ci-dessus montre que les photons issus de p tangents à une direction de H et qui rentrent dans $I^-(r)$ ont tous la même extrémité passée. L'égalité $V = H$ prouve donc le lemme. \square

1. Un diamant $I(p, q)$ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est dit extrême si les points p et q sont sur un même photon (voir Définition 6.2.7).

Soit q l'extrémité passée commune des photons complets issus de p tangents à une direction de H . On désigne par H^* l'horismos de q contenant la direction de l'un de ces photons. Par symétrie, les photons issus de q tangents à une direction de H^* se terminent tous en la même extrémité future, ici égale à p . On obtient ainsi une identification canonique entre H et H^* :

À toute direction $[v]$ de H correspond la direction $[v^*]$ de H^* tangente en q au photon tangent à $[v]$ en p , et vice versa.

Remarque 8.2.2. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait qu'il puisse exister des photons complets issus de p qui rentrent dans M et dont l'extrémité passée n'est pas q .

Définition 8.2.3. On appelle *horizon complet* une union de photons complets de M ayant la même extrémité p dans la frontière causale future, dont la projection naturelle dans $S(p)$ est exactement un horismos H de p .

Remarque 8.2.3. D'après ce qui précède, tous les photons d'un horizon complet ont la même extrémité q dans la frontière causale passée. De plus, la projection naturelle de cet horizon dans la sphère $S(q)$ est exactement l'horismos H^* de q correspondant à H .

Fait 8.2.1. *Un horizon complet est un fermé achronal étanche connexe de M feuilleté par des photons complets.*

Démonstration. Soit \mathcal{H} un horizon complet. On note p son extrémité dans la frontière causale future. Soit P l'ouvert de M qui correspond à p . Rappelons que la frontière de P dans M , notée ∂P , est l'union des photons issus de p qui rentrent dans M . Comme ∂P est un sous-ensemble passé, d'après la Proposition B.4.2, c'est un fermé achronal étanche de M . Il est alors clair que l'horizon \mathcal{H} est une composante connexe de ∂P feuilletée par des photons complets, homéomorphe à $H \times \mathbb{R}$. Ceci prouve le fait. \square

Corollaire 8.2.1. *Si M est simplement connexe, tout horizon complet \mathcal{H} déconnecte M en deux composantes connexes, l'une contenant $I^-(\mathcal{H})$, l'autre contenant $I^+(\mathcal{H})$.*

Fait 8.2.2. *Tout photon complet de M est contenu dans un horizon complet de M .*

Démonstration. Soit φ un photon complet. On note p son extrémité dans la frontière causale future. Soit $[v] \in H(p)$ la direction tangente à φ . On appelle H l'horismos contenant v . D'après la Proposition 8.2.1, H est complet. Le photon φ est alors contenu dans l'horizon complet défini par H . \square

Voisinage canonique d'un horizon complet de M . Soit \mathcal{H} un horizon complet de M .

Définition 8.2.4. On appelle *voisinage canonique de \mathcal{H}* , noté $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, l'union des diamants ouverts de M qui rencontrent \mathcal{H} .

Remarque 8.2.4. Cette définition étend la notion de voisinage canonique d'un point de M défini dans le Chapitre 4 (voir Définition 4.2.1).

Soient p et q les extrémités dans les frontières causales, future et passée, de l'horizon complet \mathcal{H} .

On appelle $P \subset M$ le TIP correspondant à p et $Q \subset M$ le TIF correspondant à q .

Proposition 8.2.2. *Le voisinage canonique de \mathcal{H} est l'union de P , de \mathcal{H} et de Q .*

Démonstration. Soit $r \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Par définition, r est contenu dans un diamant ouvert $I(s_1, s_0)$ qui rencontre \mathcal{H} . D'après le Fait 8.2.1, $\mathcal{H} \cap I(s_1, s_0)$ est une hypersurface achronale de $I(s_1, s_0)$, notée Σ , qui déconnecte le diamant en deux composantes connexes, l'une dans $I^+(\Sigma)$ et l'autre dans $I^-(\Sigma)$. Comme $I^+(\Sigma) \subset Q$ et $I^-(\Sigma) \subset P$, on en déduit que $r \in P \cup \mathcal{H} \cup Q$.

Réciproquement, il est clair que $\mathcal{H} \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$. Soit $r \in P \cup Q$. D'après le Corollaire 8.2.1, il existe une courbe γ de type temps inextensible qui rencontre \mathcal{H} . Soit $s_1 \in P \cap \gamma$ dans le futur de r et $s_0 \in Q \cap \gamma$ dans le passé de r . Alors, $r \in I(s_1, s_0) \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$. \square

Lemme 8.2.3. *Le voisinage canonique de $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est causalement convexe dans M .*

Démonstration. Soient $r, s \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ tels que $r \in J^+(s)$. Il s'agit de montrer que le diamant $J(r, s)$ est contenu dans $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Par définition, r appartient à un diamant $I(r_1, r_0)$ qui rencontre \mathcal{H} , c'est à dire $r_1 \in I^+(\mathcal{H})$ et $r_0 \in I^-(\mathcal{H})$. De même, s appartient à un diamant $I(s_1, s_0)$ avec $s_1 \in I^+(\mathcal{H})$ et $s_0 \in I^-(\mathcal{H})$. Comme $r \in J^+(s)$, r et s sont contenus dans le diamant $I(r_1, s_0)$ qui rencontre \mathcal{H} . Donc, $J(r, s) \subset I(r_1, s_0) \subset \mathcal{R}(\mathcal{H})$. \square

Lemme 8.2.4. *Le voisinage canonique de \mathcal{H} est une assiette de la développante D .*

Démonstration. Soient $r, s \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ tels que $D(r) = D(s)$. Posons $\bar{p} = D^\sharp(P)$ et $\bar{q} = D^\sharp(Q)$. On distingue quatre cas :

1^{er} cas : $r, s \in P$ ou $r, s \in Q$. D'après la Proposition 4.3.1, $r = s$.

2^e cas : $r, s \in \mathcal{H}$. D'après le Lemme 6.2.4, $r = s$.

3^e cas : $r \in P$ et $s \in Q$. Alors $D(r) \in D(P)$ et $D(s) \in D(Q)$. Or, $D(P) \subset I^-(\bar{p})$ et $D(Q) \subset I^+(\bar{q})$. Comme \bar{q} est le premier point conjugué passé de \bar{p} , les ouverts $I^-(\bar{p})$ et $I^+(\bar{q})$ sont disjoints. Il en est donc de même pour $D(P)$ et $D(Q)$. Contradiction.

4^e cas : $r \in \mathcal{H}$ et $s \in P$. Alors, $D(r) \in D(\mathcal{H})$ et $D(s) \in D(P)$. Or, $D(\mathcal{H}) \subset \partial I^-(\bar{p})$ et $D(P) \subset I^-(\bar{p})$. Donc, $D(\mathcal{H})$ et $D(P)$ sont disjoints. Contradiction. De même, le cas où $r \in \mathcal{H}$ et $s \in Q$ est impossible.

On en déduit que $r = s$. Donc, $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est une assiette. \square

On vient ainsi de montrer la proposition suivante.

Proposition 8.2.3. *Le voisinage canonique de \mathcal{H} est une assiette causalement convexe de la développante D .*

On peut à présent s'affranchir de la développante et voir $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ dans chacun des espaces de Minkowski attachés à p et à q notées respectivement $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ et $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ (voir Section 6.1). Ces espaces correspondent aux cartes de Minkowski $\text{Mink}_-(D^\sharp(p))$ et $\text{Mink}_+(D^\sharp(q))$. Rappelons brièvement comment interpréter ces espaces de Minkowski et comment voir le voisinage canonique $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ dans chacun d'entre eux.

Le point i^+ du bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ représente le point p de la frontière causale future, et lui uniquement. Dans la suite, on identifiera p et i^+ . Par souci d'homogénéité, les points i_0 et i^- du bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ seront dorénavant notés p_0 et p^- et la composante du bord de Penrose entre p et p_0 sera notée $\mathcal{J}^-(p)$.

Le TIP P s'identifie à un domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ noté $\Omega^+(p)$. Quant aux photons issus de p dans le complété causal de M , ils se réalisent dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ de la manière suivante :

À tout photon issu de p dans le complété causal de M correspond une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ et vice versa. Un photon issu de p dans le complété causal de M se réalise alors dans $\mathcal{J}^-(p)$ comme un segment de la géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ correspondante, qui s'étend jusqu'à p . En particulier, un photon complet de M issu de p se réalise comme une géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ qui s'étend entre p et p_0 . Le point p_0 représente ainsi les extrémités dans la frontière causale passée, des photons complets de M issus de p , qui soulignons le peuvent être distinctes.

La carte $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ admet une description similaire. On garde les mêmes notations en remplaçant $+$ par $-$ et p par q dans ce qui précède.

D'après la description ci-dessus, l'horizon complet \mathcal{H} peut être vu à la fois dans $\mathcal{J}^-(p)$ et dans $\mathcal{J}^+(q)$.

Définition 8.2.5. On associe à l'horizon complet \mathcal{H} une carte notée $M(\mathcal{H})$ égale à l'union des deux cartes de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ et $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ que l'on colle en identifiant $\mathcal{J}^-(p)$ à $\mathcal{J}^+(q)$.

Remarque 8.2.5. La carte $M(\mathcal{H})$ est un espace-temps qui s'identifie au diamant de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ dont les sommets, futur et passé, sont respectivement le premier point conjugué futur de $D^\sharp(p)$ et le premier point conjugué passé de $D^\sharp(q)$.

Remarque 8.2.6. La carte $M(\mathcal{H})$ permet d'identifier naturellement les sphères $S(p)$ et $S(q)$. En effet, on a vu que toute direction de $S(p)$ (resp. $S(q)$) définit une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ (resp. $\mathcal{J}^+(q)$) et vice versa. L'identification entre $\mathcal{J}^-(p)$ et $\mathcal{J}^+(q)$ induit ainsi un homéomorphisme f entre $S(p)$ et $S(q)$.

Si $H \subset S(p)$ et $H^* \subset S(q)$ sont les horismos correspondant à l'horizon complet \mathcal{H} , l'image de H par f est exactement H^* .

Fait 8.2.3. Le voisinage canonique $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ vu dans la carte $M(\mathcal{H})$ est l'union du domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, de l'horizon \mathcal{H} vu dans $\mathcal{J}^-(p) \simeq \mathcal{J}^+(q)$, et du domaine régulier passé $\Omega^-(q)$ de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$.

Frontière d'un horizon complet de M dans le complété causal de M . Soit \mathcal{H} un horizon complet de M . On note p et q ses extrémités, future et passée, dans la

frontière causale et, $H \subset S(p)$ et $H^* \subset S(q)$ les horismos correspondant à l'horizon \mathcal{H} .

D'après le Fait 8.2.1, la frontière de \mathcal{H} dans M est vide. La frontière de \mathcal{H} dans le complété causal de M est alors constituée de deux parties distinctes :

1. Une partie contenue dans la frontière causale future, égale à l'union des photons de TIPs issus de p tangents à une direction dans la frontière de H dans $S(p)$. On la note $\partial^+\mathcal{H}$.
2. Une partie contenue dans la frontière causale passée, égale à l'union des photons de TIFs issus de q tangents à une direction dans la frontière de H^* dans $S(q)$. On la note $\partial^-\mathcal{H}$.

Décrivons la frontière de \mathcal{H} dans le complété causal de M vue dans la carte $M(\mathcal{H})$ (voir Définition 8.2.5).

D'après la Remarque 8.2.6, il y a une correspondance naturelle entre les photons de TIPs de $\partial^+\mathcal{H}$ et les photons de TIFs de $\partial^-\mathcal{H}$:

À tout photon de TIPs ϕ issu de p dans $\partial^+\mathcal{H}$ correspond un unique photon de TIFs ϕ^* issu de q dans $\partial^-\mathcal{H}$ et vice versa, tel que les photons ϕ et ϕ^* , vus dans $M(\mathcal{H})$, sont des segments portés par la même géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p) \simeq \mathcal{J}^+(q)$ (voir Figure).

Fait 8.2.4. *Les segments ϕ et ϕ^* sont disjoints dans $\mathcal{J}^-(p) \simeq \mathcal{J}^+(q)$. De plus, l'extrémité passée de ϕ et l'extrémité future de ϕ^* dans $\mathcal{J}^-(p)$ sont égales.*

Démonstration. Soient P et Q les ouverts de M correspondant à p et q respectivement. Supposons par l'absurde qu'il existe $r \in \phi \cap \phi^*$. Alors, r correspond à la fois à un TIP et à un TIF de M .

Soit $\tilde{\varphi}$ un photon de $M(\mathcal{H})$ passant par r qui traverse $\mathcal{J}^-(p)$. Comme r est dans la frontière de \mathcal{H} dans $\mathcal{J}^-(p)$, il existe une suite $\{\tilde{\varphi}_i\}$ de photons de $M(\mathcal{H})$ qui traversent \mathcal{H} et qui s'accroissent sur $\tilde{\varphi}$. L'intersection de $\tilde{\varphi}_i$ avec $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ correspond à un photon φ_i de M qui traverse l'horizon \mathcal{H} . On note p_i l'extrémité de φ_i dans la frontière causale future.

D'une part, on voit r comme un TIP de M . Le segment passé issu de r contenu dans ϕ est alors un photon de TIPs issu de r . Quant aux autres photons issus de r , ils rentrent tous dans P . L'intersection de $\tilde{\varphi}$ avec P correspond donc à un photon φ de M issu de r accumulé par les photons φ_i . D'après le Lemme 8.1.1, on en déduit que $\lim p_i = r$.

D'autre part, on voit r comme un TIF de M . Le segment futur issu de r contenu dans ϕ^* est alors un photon de TIFs issu de r . Quant aux autres photons issus de r , ils rentrent tous dans Q . L'intersection de $\tilde{\varphi}$ avec Q correspond donc à un photon φ^* de M issu de r accumulé par les photons φ_i . On note r^* l'extrémité de φ^* dans la frontière causale future. D'après le Lemme 8.1.1, on en déduit que $\lim p_i = r^*$.

On vient ainsi de montrer que $\lim p_i = r$ et $\lim p_i = r^*$. Par unicité de la limite $r^* = r \in \mathcal{J}^-(p)$. Or, comme φ^* rentre dans $Q \subset \mathbb{M}_+^{n+1}(q)$, son extrémité future r^* ne peut être contenue dans $\mathcal{J}^-(p)$. Contradiction. Donc, ϕ et ϕ^* sont disjoints dans $\mathcal{J}^-(p)$.

Soient e (resp. e^*) l'extrémité passée (resp. future) de ϕ (resp. ϕ^*) dans $\mathcal{J}^-(p)$. Supposons par l'absurde que les points e et e^* sont distincts. Comme ϕ et ϕ^* sont disjoints, cela signifie que e est dans le futur de e^* (voir Figure). Soit a un point du

segment ouvert de photon reliant e à e^* . Il est clair que a est dans la frontière de \mathcal{H} dans $\mathcal{J}^-(p)$. Alors, $a = \lim a_i$ avec $a_i \in \mathcal{H}$. Comme a est dans le segment ouvert de photon reliant e à e^* , il existe voisinage ouvert V de a dans $\mathcal{J}^-(p)$ tel que de tout point de V est issue une géodésique lumière future de $M(\mathcal{H})$ qui rentre dans le futur strict de e^* dans $M(\mathcal{H})$. Puisque $a = \lim a_i$, V contient tous les a_i sauf un nombre fini. Ainsi, de tout point a_i est issue une géodésique lumière future ψ_i qui rentre dans le futur strict de e^* dans $M(p)$. Comme $a_i \in \mathcal{H}$, les ψ_i correspondent à une géodésique lumière de M qui rentre dans Q . Vu dans $M(p)$, cela signifie que ψ_i rentre dans le domaine $\Omega^-(q)$. Or, d'après la Proposition 6.2.2, $\Omega^-(q)$ est disjoint du futur strict de e^* dans $M(\mathcal{H})$. Contradiction. Donc, $e = e^*$. \square

Corollaire 8.2.2. *Aucun photon de TIPs de $\partial^+\mathcal{H}$ n'est complet.*

Démonstration. Soit ϕ un photon de TIPs de $\partial^+\mathcal{H}$. Il lui correspond un photon de TIFs ϕ^* de $\partial^-\mathcal{H}$ tel que ϕ et ϕ^* sont portés par la même géodésique lumière dans $\mathcal{J}^-(p)$. Supposons que ϕ est complet. Cela signifie que ϕ s'étend entre p et q . Comme ϕ^* s'étend jusqu'à q (mais pas forcément jusqu'à p), ϕ rencontre ϕ^* , ce qui contredit le Fait 8.2.4. Donc, ϕ n'est pas complet. \square

Remarque 8.2.7. Par symétrie, aucun photon de TIFs de $\partial^-\mathcal{H}$ n'est complet.

Accumulation non-triviale de photons complets. On vient de voir qu'un photon complet φ de M est toujours contenu dans un horizon de photons complets. En particulier, φ est accumulé par les photons complets contenus dans son horizon.

Définition 8.2.6. Soit $\{\varphi_i\}$ une suite de photons complets qui s'accumulent sur un photon complet φ de M . Cette accumulation est dite *non-triviale* si aucun des photons φ_i n'est contenu dans l'horizon de φ , sauf éventuellement un nombre fini.

8.3 Diamants extrêmes

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal de dimension $(n + 1) \geq 3$ développable. On décrit ici l'espace-temps M dans le cas où il contient un TIP complet élémentaire (voir Définition 8.2.2). On en déduira le cas où M contient un TIP conformément équivalent au futur strict d'un hyperplan lumière dans un espace-temps de Minkowski.

Nous ne le précisons pas systématiquement mais tous les énoncés de cette section restent vrais pour l'orientation du temps inverse.

On consacre cette section à la preuve du théorème ci-dessous annoncé dans la section précédente :

Théorème 8.3.1. *Si M admet un TIP complet élémentaire alors M est un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.*

La preuve du Théorème 8.3.1 utilise les lemmes suivants.

Lemme 8.3.1. *Un TIP complet élémentaire de M est conformément équivalent au futur strict d'un hyperplan lumière dans un espace de Minkowski.*

Démonstration. Soit p un TIP complet élémentaire vu comme un point de la frontière causale future. Soit P l'ouvert de M correspondant à p . Rappelons que P se réalise dans la carte de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ attachée à p , comme un domaine régulier futur $\Omega^+(p)$.

Par définition, $T(p)$ est réduit à un point et son complémentaire dans $S(p)$ est un horismos complet H . En particulier, $T(p)$ est la frontière de H . Il résulte alors du Corollaire 8.2.2 que l'unique photon de TIPs issu de p n'est pas complet. Il admet donc une extrémité passée dans la composante $\mathcal{J}^-(p)$ du bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Ainsi, le sous-ensemble $\Lambda(p)$ qui définit $\Omega^+(p)$ (voir Définition 6.2.5) est réduit à un point. Autrement dit, $\Omega^+(p)$ est le futur strict d'un hyperplan lumière. \square

Lemme 8.3.2. *Un TIP complet élémentaire de M n'est pas maximal (vu comme un point de la frontière causale future).*

Démonstration. Soit p un TIP complet élémentaire vu comme un point de la frontière causale future. Alors, p est l'extrémité future d'un horizon complet de M . Soit q l'extrémité passée de cet horizon. Il résulte de la description des horizons (voir Section 8.2) que q est un TIF complet élémentaire. D'après le Lemme 8.3.1, le futur strict de q est alors un demi-espace passé de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Le TIP p correspond au point q_0 dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$, il n'est donc pas maximal. \square

Preuve du Théorème 8.3.1. Soit $P \subset M$ un TIP complet élémentaire. On note p le point de la frontière causale future qui lui correspond.

Soit $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ la carte de Minkowski attachée à p . Le TIP P s'identifie à un domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui, d'après le Lemme 8.3.1, est égal au futur strict d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Cet hyperplan est défini par un point de $\mathcal{J}^-(p_0)$ qui correspond à un TIF maximal de M , noté q lorsqu'il est vu comme un point de la frontière causale passée, et Q lorsqu'il est vu comme un ouvert de M . D'après la Remarque 6.2.8, tous les photons issus de q sont des photons de TIFs.

Soit $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ la carte de Minkowski attachée à q . Le TIF Q s'identifie à un domaine régulier passé $\Omega^-(q)$ dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Par symétrie, le TIP p est représenté par un point de $\mathcal{J}^+(q_0)$ dans le bord de Penrose de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$, noté encore p (voir Figure). Comme p n'est pas maximal (voir Lemme 8.3.2), le domaine régulier $\Omega^-(q)$ contient le passé causal de l'hyperplan lumière $L(p)$ défini par p dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Par conséquent, $\Omega^-(q)$ est soit le passé strict d'un hyperplan lumière dans $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ contenant strictement le demi-espace délimité par $L(p)$, soit tout $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Dans ce deuxième cas, il résulte de la Proposition 6.2.3 que M est égal à $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Il reste à étudier le premier cas.

Supposons donc que $\Omega^-(q)$ est le passé strict d'un hyperplan lumière. Ce dernier est défini par un point de $\mathcal{J}^+(q_0)$ qui correspond à un TIP maximal p^* de M relié à p par un segment de TIPs. D'après la Remarque 6.2.8, tous les photons issus de p^* sont des photons de TIPs de M . On a vu ci-dessus (par un argument similaire) que tous les photons issus de q sont des photons de TIFs de M . Cela prouve que Q est fermé dans M . Comme Q est ouvert dans M qui est connexe, on en déduit que $M = Q$.

Dans les deux cas, on a montré que M est un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Cela prouve le théorème. \square

Corollaire 8.3.1. *Si M admet un TIP P conformément équivalent au futur strict d'un hyperplan lumière dans un espace de Minkowski alors M est un diamant extrême.*

Démonstration. Soit p le point de la frontière causale future qui correspond à P . On identifie P au demi-espace futur strict $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ délimité par un hyperplan lumière L . On note q^* le point de $\mathcal{J}^-(p)$ qui définit L et ϕ le segment de photon reliant p à q^* dans $\mathcal{J}^-(p)$. Montrons que ϕ correspond à un segment de TIPs. Supposons par l'absurde que ϕ correspond à une géodésique lumière de M . Soit q un point de ϕ et φ un photon de M passant par q qui rentre dans M . L'intersection de φ avec P correspond à une droite lumière de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ contenu dans $\Omega^+(p)$ et parallèle à P . Comme cette droite s'étend entre deux points conjugués, on en déduit que φ en contient. Contradiction. Donc, ϕ est un segment de TIPs. Il est clair que chaque TIP de ce segment est complet élémentaire. Le Théorème 8.3.1 permet de conclure. \square

8.4 Accumulation non-triviale de photons complets

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal non-elliptique de dimension $n + 1 \geq 3$. On suppose de plus, que M n'est pas un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Dans cette section, nous allons voir qu'une condition nécessaire pour qu'un photon complet φ de M soit accumulé non-trivialement par une suite de photons complets de M est que le TIP $I^-(\varphi)$ vu comme un point de la frontière causale, soit aplati au sens de la Définition 8.4.1.

Soit p un point de la frontière causale future de M . On considère la sphère $S(p)$ des directions lumières passées en p . Rappelons que $H(p)$ désigne l'ouvert de $S(p)$ constitué des directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans M et $T(p)$ le complémentaire de $H(p)$ dans $S(p)$, constitué des directions tangentes à un photon de TIPs issu de p . Le passé strict dans M du TIP p est caractérisé par un sous-ensemble canonique du bord de Penrose de l'espace de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ attaché à p que nous avons noté $\Lambda(p)$ (voir Définition 6.2.5 et Proposition 6.2.2).

Définition 8.4.1. Un TIP p est dit *aplati* si la projection de $\Lambda(p)$ dans $S(p)$ ou le fermé $T(p)$ est contenu dans le bord d'une hémisphère de $S(p)$. S'il y a égalité, p est dit *bicéphale*.

Théorème 8.4.1. *Soit φ un photon complet de M accumulé non-trivialement par une suite $\{\varphi_i\}$ de photons complets de M . Alors, l'extrémité p de φ dans la frontière causale future est un TIP aplati.*

Démonstration. Soit P l'ouvert de M correspondant à p , à savoir $P = I^-(\varphi)$. Quitte à renverser l'orientation du temps, on suppose qu'une infinité de φ_i rencontre P .

Soient $H \subset S(p)$ l'horismos de φ , q_i les extrémités passées des photons φ_i et q l'extrémité passée de φ .

Soit $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ la carte de Minkowski attachée à p . Le TIP P se réalise dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ comme un domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ défini par le sous-ensemble $\Lambda(p)$ de $\mathcal{J}^-(p)$ (voir Définition 6.2.5 et Proposition 6.2.2). Le photon complet φ , quant à lui, correspond à une géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ qui s'étend entre les points p et p_0 du bord de Penrose de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. En particulier, son extrémité passée q est représentée par le point p_0 .

Le domaine régulier $\Omega^+(p)$ est propre. En effet, dans le cas contraire M serait un diamant extrême de $\widehat{Ein}_{1,n}$ (voir Proposition 6.2.3 et Corollaire 8.3.1), ce qui contredit notre hypothèse. La frontière de $\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$, notée $\partial\Omega^+(p)$, correspond alors exactement aux TIFs de M qui rencontrent P . Ainsi, les TIFs q_i correspondent à des points de $\partial\Omega^+(p)$ dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. Dans la suite, pour tout entier i , on identifie la sphère $S(q_i)$ à $S(p)$: à toute direction lumière de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ en q_i correspond une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ donc une unique direction lumière dans $S(p)$, et vice versa. On désigne par $H_i \subset S(q_i)$ l'horismos contenant la direction de φ_i vu dans $S(p)$.

Nous allons décrire les ombres de q_i sur $\mathcal{J}^-(p)$. On identifie $\mathcal{J}^-(p)$ au cylindre $S(p) \times \mathbb{R}$. On a vu dans la Section 3.7.1 que chaque lisière de q_i est le graphe d'une fonction continue h_i de $S(p)$ dans \mathbb{R} . Comme les photons φ_i s'accumulent sur φ dans M , les TIFs q_i convergent vers q dans la frontière causale passée (voir Lemme 8.1.1). Cela se traduit dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ par la convergence des q_i , vus comme des points de $\partial\Omega^+(p)$, vers p_0 . D'après le Lemme 3.7.3, il existe alors une boule fermée B de dimension $(n-1)$ dans $S(p)$, éventuellement réduite à un point ou égale à toute la sphère $S(p)$, telle que :

1. pour tout $u \in \text{int}B$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $+\infty$;
2. pour tout $u \in S^{n-1} \setminus B$, la suite $\{h_i(u)\}$ converge vers $-\infty$.

Fait 8.4.1. *La projection de $\Lambda(p)$ dans $S(p)$ est contenue dans B .*

En effet, supposons qu'il existe un point $(u, s) \in \Lambda^-(p)$ tel que $u \notin B$. D'après la Proposition 3.7.1, pour tout entier i , on a $h_i(u) > s$. Or, comme $u \notin B$, $\lim h_i(u) = -\infty$. Contradiction.

Fait 8.4.2. *Soit $s_0 \geq 0$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$, l'ensemble des directions $u \in S(p)$ telles que $h_i(u) > s_0$ est contenu dans H_i .*

En effet, comme $\Omega^+(p)$ est non-vidé, $\Lambda(p)$ est majoré dans $S(p) \times \mathbb{R}$, c'est à dire, il existe $s_0 \geq 0$ tel que pour tout $(u, s) \in \Lambda^-(p)$, on ait $s \leq s_0$ (voir Proposition 2.3.3). On appelle U_0 l'ensemble des directions $u \in S(p)$ telles que $h_i(u) > s_0$.

Montrons que $U_0 \cap H_i$ est non-vidé. Soit p_0 un point de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ tel que l'ombre de p_0 sur $\mathcal{J}^-(p)$ est $S(p) \times [s_0, +\infty[$. Puisque les φ_i s'accumulent sur φ , les p_i convergent vers p (voir Lemme 8.1.1). Par conséquent, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$, φ_i rencontre l'ombre ouverte de p_0 sur $\mathcal{J}^-(p)$. Cela se traduit par $h_i(u_i) > s_0$ où $u_i \in H_i$ est la direction de φ_i (vue dans $S(p)$). Donc, $u_i \in U_0 \cap H_i$. Par conséquent, $U_0 \cap H_i$ est un ouvert non-vidé de $S(p)$.

Il suffit de montrer que $U_0 \cap H_i$ est fermé dans U_0 pour déduire le Fait 8.4.2. Comme $U_0 \cap H_i$ est ouvert dans U_0 qui est connexe, on obtiendra $U_0 \subset H_i$.

Soit donc $u \in U_0 \cap \partial H_i$. Puisque $\partial H_i \subset T(q_i)$, il résulte du Lemme 6.2.7 que $(u, h_i(u)) \in \Lambda^-(p)$. D'où $h_i(u) \leq s_0$. Contradiction. Donc, $u \in H_i$. Le fait s'en suit.

Fait 8.4.3. *L'intérieur de B est constitué des directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans M , c'est à dire $\text{int}B \subset H(p)$.*

En effet, soit $u \in \text{int}B$. Fixons $s_0 > 0$. Puisque $\lim h_i(u) = +\infty$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $h_i(u) > s_0$ pour tout entier $i \geq i_0$. D'après le Fait 8.4.2, il existe $i_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_1$, si $h_i(u) > s_0$ alors $u \in H_i$. Fixons $i > \max\{i_0, i_1\}$. Alors, $u \in H_i$.

Soient ψ la géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ tangente à u et φ la demi-droite lumière future issue de q_i dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui s'accumule sur un point r de ψ . D'après la Proposition 3.7.1, r correspond soit à un point de M soit à un TIP. Comme φ correspond à un photon complet de M , r correspond à un point de M . Par conséquent, le segment de photon reliant r à p correspond à une géodésique lumière de M . Autrement dit, $u \in H(p)$.

Fait 8.4.4. *La boule B est une hémisphère de $S(p)$.*

En effet, si B est réduite à un point, d'après le Fait 8.4.1, $\Omega^+(p)$ serait un demi-espace futur délimité par un hyperplan lumière dans $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$. D'après le Corollaire 8.3.1, M serait un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Contradiction.

Si $\text{int}B$ est la sphère $S(p)$ privée d'un point, d'après le Fait 8.4.3, $T(p)$ serait réduit à un point et $H(p)$ serait un horismos complet. Autrement dit, p serait un TIP complet élémentaire. D'après le Théorème 8.3.1, M serait un diamant extrême de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Contradiction.

Fait 8.4.5. *La frontière de l'horismos H dans $S(p)$ est contenue dans ∂B .*

En effet, d'après le Fait 8.4.3, ∂H est disjoint de l'intérieur de B . Autrement dit, $\partial H \subset S(p) \setminus \text{int}B$. S'il existe $u \in \partial H \setminus B$, d'après le Fait 8.4.1, la direction u est tangente à un photon de TIPs complet issu de p . Cela contredit le Corollaire 8.2.2. Donc, ∂H est contenu dans ∂B .

Conclusion. On distingue deux cas :

1^{er} cas : $\partial H \subsetneq \partial B$. Dans ce cas, le complémentaire de ∂H dans $S(p)$ est le seul horismos de p . Comme celui-ci contient la direction du photon complet φ , il est complet (voir Proposition 8.2.1). Il résulte alors du Corollaire 8.2.2 que la projection de $\Lambda(p)$ dans $S(p)$ est égale à $\partial H = T(p)$.

2^e cas : $\partial H = \partial B$. Alors,

1. soit $S(p) \setminus B$ est un horismos, autrement dit $T(p) = \partial H$;
2. soit $S(p) \setminus B$ rencontre $T(p)$. Montrons que dans ce cas, $S(p) \setminus B \subset T(p)$. Supposons par l'absurde qu'il existe un horismos U dans $S(p) \setminus B$. D'après le Fait 8.4.1, U est complet. Si son bord ∂U est disjoint de $S(p) \setminus B$, on se ramène à l'un des cas précédents. Supposons donc qu'il existe un point $[v]$ de ∂U dans $S(p) \setminus B$. D'après le Fait 8.4.1, $[v]$ est une direction tangente à un photon de

TIPs complet dans le bord d'un horismos complet. Contradiction (voir Corollaire 8.2.2). Donc, $T(p) = S(p) \setminus \text{int}B$ et $\text{int}B$ est un horismos complet. Par conséquent, d'après le Corollaire 8.2.2, ∂H coïncide avec la projection de $\Lambda(p)$.

Dans tous les cas, on a montré que p est aplati. \square

Remarque 8.4.1. Il résulte de la preuve du Théorème 8.4.1 trois situations possibles :

1. Soit $T(p) \subsetneq \partial B$. Dans ce cas, p admet un seul horismos qui est complet, égal au complémentaire de $T(p)$ dans $S(p)$. Le point p est alors un TIP complet dégénéré (voir Définitions 8.2.2 et 6.2.4). Ce cas sera traité dans le Chapitre 9.
2. Soit $T(p) = S(p) \setminus \text{int}B$. Dans ce cas, p admet un seul horismos qui est complet, égal à l'hémisphère $\text{int}B$.
3. Soit $T(p) = \partial B$. Dans ce cas, $T(p)$ déconnecte la sphère $S(p)$ en deux horismos dont l'un au moins est complet (il s'agit de l'horismos contenant la direction du photon complet φ). Si les deux horismos sont complets, p est dit *bicéphale bicomplet*.

TIPS COMPLETS DÉGÉNÉRÉS

Dans ce chapitre, on décrit les espace-temps conformément plats globalement hyperboliques maximaux de dimension $(n + 1) \geq 3$ dont le revêtement universel admet un TIP complet dégénéré (voir Définitions 8.2.2 et 6.2.4).

9.1 Injectivité de la développante

Soit M un espace-temps *simplement connexe* conformément plat globalement hyperbolique maximal de dimension $(n + 1) \geq 3$. Fixons une développante $D : M \rightarrow \widetilde{Ein}_{1,n}$.

Nous allons voir que si M admet un TIP complet dégénéré alors M est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Théorème 9.1.1).

Horizon d'un TIP complet dégénéré. Soient p un point de la frontière causale future de M et P l'ouvert de M qui lui correspond.

On considère la sphère $S(p)$ des directions lumières passées en p . Rappelons que $H(p)$ désigne l'ouvert de $S(p)$ constitué des directions tangentes à un photon issu de p qui rentre dans M et $T(p)$ le complémentaire de $H(p)$ dans $S(p)$, constitué des directions tangentes à un photon de TIPs issu de p .

Dire que p est complet dégénéré signifie que :

1. $H(p)$ est un horismos complet, c'est à dire d'une part, que $H(p)$ est connexe, d'autre part, que toute direction de $H(p)$ est tangente à un photon *complet* ;
2. $T(p)$ est le bord de $H(p)$ dans $S(p)$.

Cela se traduit dans le complété causal de M par le fait que :

1. La frontière de P dans M est un horizon complet (voir Lemme 6.2.2). Soulignons, par ailleurs, que c'est le seul horizon complet qui a pour extrémité p dans la frontière causale future.
2. Les photons de TIPs issus de p sont tous dans la frontière de l'horizon complet de p dans le complété causal de M .

En renversant l'orientation du temps, on obtient une description similaire des TIFs complets dégénérés.

Lemme 9.1.1. *Soient p et q les extrémités d'un horizon complet \mathcal{H} dans les frontières causales, future et passée, de M . On note P et Q les ouverts de M qui correspondent à p et à q .*

Si le point p est complet dégénéré alors q l'est aussi. Dans ce cas, les frontières de P et de Q dans M sont toutes les deux égales à l'horizon \mathcal{H} .

Démonstration. Comme p est complet dégénéré, il admet un seul horismos complet $H(p)$. On a vu dans la Section 8.2 que cet horismos est homéomorphe à un horismos complet H^* de $S(q)$. Par conséquent, le bord de H^* dans $S(q)$ est exactement le complémentaire de H^* dans $S(q)$, c'est à dire $H^* = H(q)$ et $\partial H^* = T(q)$. Ceci prouve que q est complet dégénéré. L'horizon complet \mathcal{H} est exactement celui défini par les horismos $H(p)$ et $H(q)$, c'est à dire les frontières de P et de Q dans M respectivement. Le lemme s'en suit. \square

Voisinage canonique de l'horizon d'un TIP complet dégénéré. Soient p et q les extrémités d'un horizon complet \mathcal{H} dans les frontières causales, future et passée, de M .

On suppose que le point p est complet dégénéré. D'après le Lemme 9.1.1, q l'est également. En particulier, \mathcal{H} est le seul horizon qui a pour extrémité q dans la frontière causale passée de M . On note P et Q les ouverts de M qui correspondent à p et à q .

On se propose ici de décrire le voisinage canonique de \mathcal{H} noté $\mathcal{R}(\mathcal{H})$. Rappelons que celui-ci est l'union disjointe de P , \mathcal{H} et Q (voir Proposition 8.2.2). On a vu dans la Section 8.2 que $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ s'identifie à un ouvert de la carte $M(\mathcal{H})$ associée à l'horizon complet \mathcal{H} . On va voir que $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est **causalement convexe dans $M(\mathcal{H})$** (ce qui n'était à priori pas le cas). Commençons par rappeler brièvement la description de $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ dans $M(\mathcal{H})$.

Tout d'abord, la carte $M(\mathcal{H})$ est l'union des espaces de Minkowski $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ et $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ attachés à p et à q respectivement, collés le long de la composante commune $\mathcal{J}^-(p) \simeq \mathcal{J}^+(q)$ de leurs bords de Penrose.

Le TIP P s'identifie alors à un domaine régulier futur $\Omega^+(p)$ de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ et le TIF Q à un domaine régulier passé $\Omega^-(q)$ de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$. Quant à l'horizon \mathcal{H} , il s'identifie à une union connexe de géodésiques lumières de $\mathcal{J}^-(p)$ qui s'étendent de p à q .

Soit $\Lambda(p)$ le sous-ensemble de $\mathcal{J}^-(p)$ constitué des extrémités passées des photons issus de p (qui rentrent dans M ou de TIPs) vus dans $M(\mathcal{H})$. D'après la Proposition

6.2.2, le domaine régulier futur de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ défini par $\Lambda(p)$ est exactement $\Omega^+(p)$. On définit de même le sous-ensemble $\Lambda(q)$ de $\mathcal{J}^+(q) \simeq \mathcal{J}^-(p)$ qui caractérise le domaine régulier $\Omega^-(q)$.

Fait 9.1.1. *L'ensemble $\Lambda(p)$ correspond exactement aux extrémités passées de photons de TIPs issus de p dans $\mathcal{J}^-(p)$.*

Démonstration. Comme p est complet dégénéré, les photons issus de p qui rentrent dans M sont tous complets. Vus dans $\mathcal{J}^-(p)$, ce sont des géodésiques lumières de $\mathcal{J}^-(p)$ qui s'étendent entre p et q . Les photons de M issus de p ne contribuent donc pas à la définition de $\Lambda(p)$. Autrement dit, seuls les photons de TIPs issus de p y contribuent. \square

Remarque 9.1.1. De manière symétrique, $\Lambda(q)$ correspond exactement aux extrémités futures de photons de TIFs issus de q dans $\mathcal{J}^-(p)$.

Lemme 9.1.2. *Les sous-ensembles $\Lambda(p)$ et $\Lambda(q)$ de $\mathcal{J}^-(p)$ sont égaux.*

Démonstration. D'après le Fait 9.1.1, $\Lambda(p)$ est exactement l'ensemble des extrémités passées de photons de TIPs issus de p dans $\mathcal{J}^-(p)$. Comme p est complet dégénéré, les photons de TIPs issus de p sont contenus dans la frontière de \mathcal{H} dans $\mathcal{J}^-(p)$. La situation est complètement symétrique pour q . On a alors une correspondance entre les photons de TIPs issus de p et les photons de TIFs issus de q : à tout photon de TIPs ϕ issu de p correspond un unique photon de TIFs ϕ^* issu de q , et vice versa, tel que ϕ et ϕ^* , vus dans $M(\mathcal{H})$, sont contenus dans la même géodésique lumière de $\mathcal{J}^-(p)$ et se terminent en la même extrémité (voir Fait 8.2.4). Par conséquent, $\Lambda(p) = \Lambda(q)$. \square

Posons $\Lambda := \Lambda(p) = \Lambda(q)$.

Proposition 9.1.1. *L'ouvert $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est le dual de Λ dans $M(\mathcal{H})$, c'est à dire l'ensemble des points de $M(\mathcal{H})$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de Λ . En particulier, $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est causalement convexe dans $M(\mathcal{H})$.*

Démonstration. D'après la Proposition 6.2.2, $\Omega^+(p)$ est exactement l'ensemble des points de $\mathbb{M}_-^{n+1}(p)$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de $\Lambda(p) = \Lambda$. De manière symétrique, $\Omega^-(q)$ est exactement l'ensemble des points de $\mathbb{M}_+^{n+1}(q)$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de $\Lambda(q) = \Lambda$. Enfin, puisque \mathcal{H} ne contient aucun point de Λ , c'est exactement l'ensemble des points de $\mathcal{J}^-(p)$ qui ne sont causalement reliés à aucun point de Λ . Comme $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est l'union disjointe de $\Omega^+(p)$, \mathcal{H} et de $\Omega^-(q)$, il en découle que $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est le dual de Λ . Il résulte alors de la Proposition 3.3.2 que $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ est causalement convexe dans $M(\mathcal{H})$. \square

Il résulte de la description ci-dessus le théorème suivant.

Théorème 9.1.1. *Si M admet un TIP complet dégénéré p alors M est égal au voisinage canonique de l'horizon complet de p . La développante D est alors injective sur M et son image est un ouvert causalement convexe de $\widehat{Ein}_{1,n}$.*

Démonstration. Soit P l'ouvert de M qui correspond à p . On a vu que l'horizon complet de p est exactement la frontière de P dans M . Soient q l'extrémité de cet horizon dans la frontière causale passée et Q l'ouvert de M qui lui correspond. D'après le Lemme 9.1.1, q est un TIF complet dégénéré. En particulier, $\partial Q = \partial P$.

On va montrer que le voisinage canonique $\mathcal{R}(\partial P)$ de l'horizon complet ∂P est fermé dans M . Comme M est connexe, on en déduira l'égalité.

D'après le Corollaire 8.2.1, ∂P déconnecte M en deux composantes connexes, l'une contenant P et l'autre Q . Montrer que $\mathcal{R}(\partial P)$ est fermé dans M revient alors à montrer que P et Q sont fermés dans $M \setminus \partial P$. Il est clair que P est fermé dans $M \setminus \partial P$. Comme $\partial P = \partial Q$, il en est de même pour Q . Donc, $M = \mathcal{R}(\partial P)$. Il résulte alors des Propositions 8.2.3 et 9.1.1 que M est une assiette de la développante D dont l'image est un ouvert causalement convexe de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. \square

9.2 Représentations Anosov et extensions de domaines de Misner

Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique maximal de dimension $(n+1) \geq 3$ dont le revêtement universel \tilde{M} contient un TIP complet dégénéré.

Il résulte du Théorème 9.1.1 que M est le quotient d'un ouvert causalement convexe Ω de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ par un sous-groupe discret Γ de $O_0(2, n+1)$ qui agit sur Ω de manière libre et proprement discontinue.

Par ailleurs, l'ouvert Ω est le dual d'un sous-ensemble Λ de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ tel que :

1. Λ est contenu dans le cône lumière passé d'un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ privé de ses sommets, noté $\mathcal{J}^-(p)$;
2. la projection de Λ dans la sphère $S(p)$ des directions lumières passées en p est un fermé d'intérieur vide.

L'union des géodésiques lumières de $\mathcal{J}^-(p)$ qui évitent un point de Λ forme un horizon complet de Ω , noté \mathcal{H} . Celui-ci déconnecte Ω en deux composantes connexes, l'une égale au futur strict de \mathcal{H} dans Ω et l'autre au passé strict de \mathcal{H} dans Ω .

Nous distinguons les deux cas suivants :

1^{er} cas : Γ fixe p . Autrement dit, Γ est un sous-groupe du stabilisateur de p . Rappelons que ce dernier est isomorphe au groupe conforme de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$, à savoir $(\mathbb{R}^* \cdot O_0(1, n)) \ltimes \mathbb{R}^{1,n}$.

Dans ce cas, nous montrerons que si M est *Cauchy-compact*, c'est à dire admet une hypersurface de Cauchy compacte, la partie linéaire de Γ est un sous-groupe convexe cocompact de $O_0(1, n)$.

2^e cas : Γ ne fixe pas p . Dans ce cas, nous montrerons que Ω contient un domaine de Misner d'indice k préservé par Γ .

Le 1^{er} cas est traité dans la Section 9.2.1 et le second dans la Section 9.2.2.

9.2.1 Trous noirs-trous blancs

Supposons que Γ fixe le point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Dans ce cas, nous pensons que si M est Cauchy-compact alors M est un trou noir-trou blanc au sens de la Définition 7.2.1 mais, par manque de temps, nous nous contentons de montrer la version plus faible ci-dessous.

D'après la Proposition 3.5.8, Γ est un sous-groupe discret du groupe conforme de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ égal à $(\mathbb{R}^* \cdot O_0(1, n)) \rtimes \mathbb{R}^{1,n}$. Alors :

Théorème 9.2.1. *Si M est Cauchy-compact, la partie linéaire de Γ est un sous-groupe convexe cocompact de $O_0(1, n)$.*

Démonstration du Théorème 9.2.1. Fixons une hypersurface de Cauchy S de Ω . Soit $\Gamma_L < O_0(1, n)$ la partie linéaire de Γ . Rappelons que Γ agit naturellement sur la sphère conforme $S(p)$ via Γ_L (voir Section 3.6.3).

On désigne par T la projection de Λ dans $S(p)$. Par hypothèse, T est un fermé d'intérieur vide de $S(p)$. Soit Ω_0 le complémentaire de T dans $S(p)$. Il correspond à l'ensemble des directions tangentes à un photon complet de Ω dans l'horizon \mathcal{H} .

Action de Γ_L sur Ω_0 . Tout photon complet de Ω dans l'horizon \mathcal{H} rencontre l'hypersurface de Cauchy S en un unique point. L'ouvert Ω_0 est donc homéomorphe à l'intersection $\mathcal{H} \cap S$. Comme Γ fixe le TIP p de Ω , il préserve l'horizon \mathcal{H} . Ainsi, Γ agit sur $\mathcal{H} \cap S$. De plus, cette action correspond exactement à l'action de Γ_L sur Ω_0 .

Lemme 9.2.1. *L'action de Γ_L sur Ω_0 est proprement discontinue et cocompacte.*

Démonstration. Cela revient à montrer que l'action de Γ sur $\mathcal{H} \cap S$ est proprement discontinue et cocompacte. L'action de Γ sur S étant proprement discontinue, elle l'est en particulier sur $\mathcal{H} \cap S$. Montrons que l'action de Γ sur $S \cap \mathcal{H}$ est cocompacte. Soit $\{x_i\}$ une suite de points de $S \cap \mathcal{H}$. Par hypothèse, M est Cauchy-compact, autrement dit le quotient de S par Γ est compact. Quitte à extraire, il existe alors une suite $\{\gamma_i\}$ d'éléments de Γ qui sort de tout compact, telle que $\{\gamma_i \cdot x_i\}$ converge vers un point $x \in S$. Comme \mathcal{H} est fermé dans Ω (voir Fait 8.2.1), $x \in \mathcal{H}$. D'où, $x \in \mathcal{H} \cap S$. L'action de Γ sur $\mathcal{H} \cap S$ est donc cocompacte. \square

Domaine de discontinuité de Γ_L . Soit Λ_{Γ_L} l'ensemble limite de Γ_L dans $S(p)$. C'est le plus petit fermé de $S(p)$ en dehors duquel l'action de Γ_L est proprement discontinue. Le complémentaire de Λ_{Γ_L} dans $S(p)$ est le domaine de discontinuité de Γ_L noté Ω_{Γ_L} .

Lemme 9.2.2. *Le domaine de discontinuité Ω_{Γ_L} est égal à Ω_0 .*

Démonstration. D'après le Lemme 9.2.1, l'action de Γ_L sur Ω_0 est proprement discontinue. Comme Ω_L est le plus grand ouvert de $S(p)$ (pour l'inclusion) sur lequel l'action de Γ_L est proprement discontinue, cela implique que $\Omega_0 \subset \Omega_{\Gamma_L}$.

Montrons que Ω_{Γ_L} est connexe. Soient U et V deux ouverts disjoints de $S(p)$ tels que $\Omega_{\Gamma_L} = U \sqcup V$. Alors, $\Omega_0 = (U \cap \Omega_0) \sqcup (V \cap \Omega_0)$. Comme Ω_0 est connexe, on en déduit

que $(U \cap \Omega_0)$ ou $(V \cap \Omega_0)$ est vide. On ne perd rien à supposer que $V \cap \Omega_0$ est vide. Autrement dit, $V \subset T$. D'où $V \subset \text{int}T = \emptyset$. Donc, $V = \emptyset$. On en déduit que Ω_{Γ_L} est connexe. Comme Ω_0 est un ouvert non-vide de Ω_{Γ_L} , il suffit alors de montrer qu'il est fermé dans Ω_{Γ_L} pour en déduire l'égalité.

Soit $\{x_i\}$ une suite de Ω_0 qui converge vers un point x de Ω_{Γ_L} . L'action de Γ_L sur Ω_0 étant cocompacte, il existe (quitte à extraire) une suite $\{\gamma_i\}$ d'éléments de Γ_L qui sort de tout compact, telle que $\{\gamma_i.x_i\}$ converge vers un point $y \in \Omega_0 \subset \Omega_{\Gamma_L}$. Cela contredit le fait que l'action de Γ_L sur Ω_{Γ_L} est proprement discontinue (voir Critère 5.2.1). Donc, Ω_0 est fermé dans Ω_{Γ_L} . D'où, $\Omega_0 = \Omega_{\Gamma_L}$. \square

Conclusion. D'après le Lemme 9.2.2, $\Omega_{\Gamma_L} = \Omega_0$. Il résulte alors du Lemme 9.2.1 que Ω_{Γ_L} est un domaine de discontinuité cocompact, autrement dit, Γ_L est convexe cocompact.

Remarque 9.2.1. La propriété "convexe cocompact" est stable par passage à un sous-groupe d'indice fini, plus précisément, si un sous-groupe d'indice fini de Γ_L est convexe cocompact, il en est de même pour Γ_L . Ainsi, si le stabilisateur de p dans M dans Γ est d'indice fini, le Théorème 9.2.1 reste vrai.

9.2.2 Extensions d'un domaine de Misner

Supposons que Γ ne fixe pas le point p . D'après la Remarque 9.2.1, on suppose que le stabilisateur de p dans Γ est d'indice infini.

Dans ce cas, nous pensons que si M est Cauchy-compact alors M est une extension de Misner au sens de la Définition 7.2.2. Par manque de temps, nous nous contentons de montrer la version plus faible suivante.

Théorème 9.2.2. *Le domaine Ω contient un domaine de Misner d'indice k préservé par Γ .*

Preuve du Théorème 9.2.2. Rappelons que Ω s'écrit comme l'union disjointe de l'horizon complet \mathcal{H} , du futur strict de \mathcal{H} dans Ω et du passé strict de \mathcal{H} dans Ω .

Soit q le premier point conjugué passé de p . Le futur strict de \mathcal{H} dans Ω est un domaine régulier passé de $\text{Mink}_+(q)$ noté Ω^- . Le passé strict de \mathcal{H} dans Ω est, quant à lui, un domaine régulier futur de $\text{Mink}_-(p)$ noté Ω^+ .

Remarque 9.2.2. Les domaines réguliers Ω^- et Ω^+ sont exactement les domaines réguliers définis par Λ dans chacune des cartes de Minkowski $\text{Mink}_+(q)$ et $\text{Mink}_-(p)$.

Les points p et q étant les extrémités de l'horizon complet \mathcal{H} , ils correspondent respectivement à un TIP et un TIF de Ω . Les TIPs de Ω , autres que p , correspondent à la frontière de Ω^- dans $\text{Mink}_+(q)$, notée $\partial\Omega^-$. De manière symétrique, les TIFs de Ω autres que q , correspondent à la frontière de Ω^+ dans $\text{Mink}_-(p)$.

Comme le stabilisateur de p dans Γ est d'indice infini, il existe une infinité d'itérés de p , tous contenus dans $\partial\Omega^-$. Comme p est un TIP complet dégénéré de Ω , ses itérés le sont également.

Dans ce qui suit, nous décrivons l'ensemble des TIPs complets de Ω . On désignera par $S(r)$ la sphère des directions lumières en un point $r \in \overline{Ein}_{1,n}$, par $U \subset S(q)$ l'horismos complet du TIF complet dégénéré q et $T \subset S(q)$ son bord.

Lemme 9.2.3. *Soit $p_0 \in \partial\Omega^-$ un TIP complet. Alors, p_0 est dégénéré.*

Démonstration. Soit $U_0 \subset S(p_0)$ un horismos complet de p_0 . On identifie canoniquement $S(p_0)$ à $S(q)$: toute direction lumière en p_0 correspond à une unique géodésique lumière de $\mathcal{J}^+(q)$, donc à une unique direction de $S(q)$, et vice versa. Dans ce qui suit, on voit U_0 dans $S(q)$ via cette identification.

Montrons que $U_0 = U$. Tout photon complet de Ω issu de p_0 doit traverser l'horizon \mathcal{H} et donc rencontrer un photon complet de Ω issu de q . Cela se traduit par $U_0 \subset U$. Comme U_0 est un ouvert non-vide de U qui est connexe, il suffit de montrer qu'il est fermé dans U pour en déduire l'égalité. Soit $[v] \in \partial U_0 \cap U$. Alors, $[v]$ définit un photon de TIPs issu de p_0 qui se termine sur un photon complet issu de q . Contradiction. Donc, U_0 est fermé dans U . D'où $U = U_0$. Comme q est dégénéré, on en déduit que le complémentaire de U_0 dans $S(p_0)$ est la frontière de U_0 dans $S(p_0)$. Autrement dit, p_0 est dégénéré. \square

Lemme 9.2.4. *Soient $p_0, p_1 \in \partial\Omega^-$ deux TIPs complets. Alors, le segment de type espace reliant p_0 à p_1 est contenu dans $\partial\Omega^-$.*

Démonstration. D'après le Lemme 9.2.3, p_0 et p_1 sont dégénérés. Soient $U_0 \subset S(p_0)$ et $U_1 \subset S(p_1)$ leurs horismos complets respectifs. On voit U_0 et U_1 dans $S(q)$ et on note T_0 et T_1 leurs complémentaires respectifs dans $S(q)$. Ces derniers correspondent à l'ensemble des hyperplans d'appui lumières à Ω^- en p_0 et p_1 . Les strates de p_0 et p_1 sont donc les enveloppes convexes de T_0 et de T_1 dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^n bordé par $S(q)$.

Soient $\mathbb{H}^{n-1}(p_0, p_1)$ l'hyperplan de \mathbb{H}^n défini par l'orthogonal du vecteur de type espace $p_0 - p_1$ (voir Remarque 2.3.5) et C_{01} son bord conforme dans $S(q)$.

D'après la Proposition 2.3.10, $\mathbb{H}^{n-1}(p_0, p_1)$ sépare au sens large, les strates de p_0 et de p_1 . Or, d'après la preuve du Lemme 9.2.3, $U_0 = U_1 = U$. D'où, $T_0 = T_1 = T$. Par conséquent, $T \subset C_{0,1}$ et les strates de p_0 et p_1 sont égales. Il résulte alors de la Proposition 2.3.10 que le segment de type espace reliant p_0 à p_1 est contenu dans $\partial\Omega^-$. \square

Soit E le sous-espace affine de \mathbb{M}^{n+1} engendré par les TIPs complets de Ω , notons qu'il est euclidien. On désigne par \overrightarrow{E} l'espace vectoriel directeur de E . Posons $\dim E = k \geq 1$.

Lemme 9.2.5. *Le domaine Ω^- est saturé par le sous-espace vectoriel \overrightarrow{E} , plus précisément, pour tout point x de Ω^- , le sous-espace affine passant par x dirigé par \overrightarrow{E} est contenu dans Ω^- .*

Démonstration. Soit $x_0 \in \Omega$. On note E_0 le sous-espace affine passant par x_0 dirigé par \overrightarrow{E} . Montrons que $E_0 \subset \Omega^-$. Cela revient à montrer que l'ombre de tout point de E_0 sur $\mathcal{J}^+(q)$ est disjointe de Λ (voir Proposition 3.7.1).

Pour tous TIPs complets $p_i, p_j \in \partial\Omega^-$, on note C_{ij} l'ensemble des directions lumières de l'orthogonal du vecteur de type espace $p_i - p_j$. C'est une sphère conforme de codimension 1 dans $S(q)$. L'ensemble des directions lumières de l'orthogonal de \overrightarrow{E} est alors

l'intersection de tous les C_{ij} , notée C . C'est une sphère conforme de dimension $(n-1-k)$ dans $S(q)$. Il s'en suit que les lisières des points de E_0 s'intersectent toutes le long d'une sphère conforme C_0 de dimension $(n-1-k)$ de $\mathcal{J}^+(q)$ qui se projette sur C .

Par ailleurs, d'après la preuve du Lemme 9.2.4, pour tous TIPs complets $p_i, p_j \in \partial\Omega^-$ on a $T \subset C_{ij}$. D'où, $T \subset C$. Comme la projection de Λ est exactement T , l'ensemble Λ est contenu dans la bande $C \times \mathbb{R}$ de $\mathcal{J}^+(q) \simeq S(q) \times \mathbb{R}$. Il suffit alors de vérifier que Λ est disjoint de C_0 et dans le passé de C_0 pour conclure. Comme la sphère C_0 est contenue dans la lisière de $x_0 \in \Omega$, cela est bien le cas d'après la Proposition 3.7.1. \square

Corollaire 9.2.1. *Le sous-espace affine euclidien E est contenu dans $\partial\Omega$.*

Démonstration. Soient $p_0 \in E$ un TIP complet et $x \in E$. Par définition de E , la droite Δ passant par x et p_0 coupe un segment $[p_i, p_j]$ reliant deux TIPs complets $p_i, p_j \in E$ en un point y . D'après le Lemme 9.2.4, le segment $[p_i, p_j]$ est contenu dans $\partial\Omega^-$, en particulier $y \in \partial\Omega^-$. Supposons par l'absurde que Δ n'est pas contenue dans $\partial\Omega^-$. Comme Ω^- est concave, Δ traverse Ω^- à travers les points p_0 et y de $\partial\Omega^-$. En particulier, Δ rencontre le domaine Ω^- . Alors, d'après le Lemme 9.2.5, $\Delta \subset \Omega^-$. En particulier, $p_0, y \in \Omega^-$. Contradiction. Donc, $\Delta \subset \partial\Omega^-$. Le corollaire s'en suit. \square

En résumé, nous venons de montrer que les TIPs complets de Ω dans la carte de Minkowski $\text{Mink}_+(q)$ sont tous dégénérés et engendrent un sous-espace affine euclidien E de dimension $k \geq 1$ contenu dans $\partial\Omega^-$.

De manière symétrique, le raisonnement ci-dessus reste vrai pour les TIFs de Ω . Ainsi, les TIFs complets de Ω dans la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(p)$ sont tous dégénérés et engendrent un sous-espace affine euclidien E^* dans $\partial\Omega^+$.

Lemme 9.2.6. *Les TIPs complets de Ω sont en correspondance avec les TIFs complets de Ω . Le sous-espace E^* est alors l'ensemble des premiers points conjugués passés des points de E .*

Démonstration. D'après le Lemme 9.2.3, les TIPs et les TIFs complets de Ω sont tous dégénérés. On a vu dans la Section 9.1 qu'à tout TIP complet dégénéré correspond un unique TIF complet dégénéré et vice versa. Le lemme s'en suit. \square

Soient S et S^* les compactifications des sous-espaces affines euclidiens E et E^* dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Ce sont des sphères conformes de dimension k .

Lemme 9.2.7. *Les TIPs de Ω contenus dans S sont tous complets.*

Démonstration. Soit $x \in S$ et soit φ un photon issu de x qui rentre dans Ω . Alors, φ rencontre l'horizon d'un TIP complet p_i de S , et rentre dans le passé strict de p_i dans Ω . Ce dernier est un domaine régulier futur $\Omega^+(p_i)$ de la carte de Minkowski $\text{Mink}_-(p_i)$. Comme S^* passe par le premier point conjugué passé de p_i , son intersection avec la carte $\text{Mink}_-(p_i)$ est un sous-espace affine E_i^* de dimension k . D'après ce qui précède, E_i^* est contenu dans le bord de $\Omega^+(p_i)$ dans $\text{Mink}_-(p_i)$, noté $\partial\Omega^+(p_i)$. Par conséquent, après être rentré dans $\Omega^+(p_i)$, le photon φ reste dans le domaine jusqu'à atteindre son premier point conjugué dans $E_i^* \cap \partial\Omega^+(p_i)$. Autrement dit φ est complet. Donc, p_i est complet. \square

De manière symétrique, les TIFs de Ω contenus dans S^* sont tous complets.

Conclusion. Soit Mis_k le domaine de Misner défini par S et S^* , à savoir l'intersection du passé strict de S dans Ω avec le futur strict de S^* dans Ω . On vient de montrer que S (resp. S^*) est exactement l'ensemble des TIPs (resp. TIFs) complets de Ω . Comme Γ envoie photon complet sur un photon complet, Γ préserve l'ensemble des TIPs (resp. TIFs) complets de Ω , c'est à dire S (resp. S^*). Par conséquent, Γ préserve le domaine de Misner Mis_k . On a donc montré que Ω contient un domaine de Misner d'indice k invariant par Γ , autrement dit que Ω est une extension de Misner d'indice k .

ANNEXE

A

CÔNES CONVEXES ET CONVEXES FERMÉS D'UN ESPACE AFFINE

Le but de cette annexe est l'étude des *convexes fermés* d'un espace affine à partir de la théorie des cônes convexes d'un espace vectoriel. Nous verrons, en particulier, comment réaliser *canoniquement* un espace affine comme un hyperplan affine d'un espace vectoriel. Cette étude fera l'objet de la Section A.3. Avant cela, nous rappelons quelques éléments de la théorie des cônes convexes (voir Section A.1) puis des convexes fermés (voir Section A.2) d'un espace vectoriel. Pour plus de détails, consulter [27]. On renvoie également à cet ouvrage [27] pour les preuves des propositions énoncées dans la Section A.1 et la Section A.2.

A.1 Cônes convexes

Dans toute cette section, V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

(A.1.1) Cônes.

Définition A.1.1. Un sous-ensemble C de V est un *cône* s'il est stable par multiplication par tout scalaire strictement positif, i.e. pour tout $\lambda > 0$, on a $\lambda C \subset C$.

Remarque A.1.1. 1. L'intersection d'une famille de cônes est un cône.

2. L'adhérence d'un cône est un cône.

Définition A.1.2. Un cône C de V est dit

- *saillant* s'il ne contient pas de droite vectorielle autrement dit si $C \cap (-C) = \{0\}$.
- *pointé* si $0 \in C$. Il est dit *épointé* dans le cas contraire.

Remarque A.1.2. Tout cône fermé non-vide est pointé.

(A.1.2) Ensembles convexes.

Définition A.1.3. Un sous-ensemble C de V est dit *convexe* si pour tous $x, y \in C$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$.

Définition A.1.4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soient v_1, \dots, v_k des vecteurs de V . On appelle *combinaison convexe* de ces k vecteurs, tout vecteur v de V tel que $v = \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i$, les réels λ_i étant positifs de somme égale à 1.

- Remarque A.1.3.*
1. Une partie C de V est convexe si et seulement si elle est stable par combinaisons convexes.
 2. L'intersection d'une famille de sous-ensembles convexes de V est convexe.
 3. L'adhérence d'un convexe est convexe.

Proposition A.1.1. *L'intérieur d'un convexe C de V est un convexe. De plus, si $\text{int}C$ est non-vide, alors $\overline{\text{int}C} = \bar{C}$.*

(A.1.3) Cônes convexes.

Proposition A.1.2. *Un cône C de V est convexe si et seulement s'il est stable par addition i.e. $C + C \subset C$.*

Remarque A.1.4. L'adhérence d'un cône convexe est un cône convexe.

Définition A.1.5. On appelle *combinaison conique* de vecteurs de V toute combinaison linéaire à coefficients positifs de ces vecteurs.

Remarque A.1.5. Une partie C de V est un cône convexe si et seulement si elle est stable par combinaison conique.

(A.1.4) Enveloppe convexe. Soit P une partie de V . Il existe au moins un sous-ensemble convexe de V contenant P , à savoir V lui-même. On peut donc considérer l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de V contenant P . D'où la définition suivante.

Définition A.1.6. On appelle *enveloppe convexe* d'une partie P de V l'intersection de tous les sous-ensembles convexes de V contenant P . On la note $\text{Conv } P$. Il s'agit du plus petit convexe de V contenant P .

Proposition A.1.3. Soit P une partie de V . L'enveloppe convexe de P est égale à l'ensemble des combinaisons convexes des points de P :

$$\text{Conv}(P) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, k \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, v_i \in P \right\}.$$

Théorème A.1.1 (C. Carathéodory). Soit P une partie de V . Alors, tout point de l'enveloppe convexe de P peut s'écrire comme une combinaison convexe de $(n+1)$ vecteurs de V .

Proposition A.1.4. Soit P une partie de V . L'adhérence de l'enveloppe convexe de P est le plus petit convexe fermé contenant P i.e. c'est l'intersection de tous les convexes fermés contenant P .

(A.1.5) Enveloppe conique.

Définition A.1.7. L'enveloppe conique d'une partie P de V , notée $C(P)$, est l'intersection de tous les cônes convexes pointés contenant P . C'est donc le plus petit cône convexe pointé contenant P .

Proposition A.1.5. Soit P une partie de V . L'enveloppe conique de P est égale à l'ensemble des combinaisons linéaires coniques des points de P :

$$C(P) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i, k \in \mathbb{N}^*, \lambda_i \in \mathbb{R}_+, v_i \in P \right\}.$$

Définition A.1.8. Soit P une partie de V . On appelle cône engendré par P le cône pointé \mathbb{R}_+P .

Remarque A.1.6. L'enveloppe conique d'une partie P de V coïncide avec l'enveloppe convexe du cône engendré par P et avec le cône engendré par l'enveloppe convexe de P :

$$C(P) = \text{Conv}(\mathbb{R}_+P) = \mathbb{R}_+\text{Conv}(P).$$

(A.1.6) Cône dual. Soit V^* l'espace vectoriel dual de V . La notion de cône dual permet d'associer à toute partie non-vide P de V un cône convexe fermé non-vide du dual V^* .

Définition A.1.9. Soit P une partie non-vide de V . Le cône dual de P , noté P^* , est le sous-ensemble de V^* constitué des formes linéaires positives sur P :

$$P^* := \{ \alpha \in V^* : \alpha(v) \geq 0 \forall v \in P \}.$$

Remarque A.1.7. Le cône dual d'une partie P de V est un cône convexe fermé comme intersection de la famille des demi-espaces fermés $\{ \alpha \in V^* : \alpha(p) \geq 0 \}$ indexée par P . Il est non-vide puisqu'il contient 0.

Définition A.1.10. Soit P une partie non-vide de V . Le *cône bidual* de P , noté P^{**} , est le cône convexe fermé $(P^*)^*$ de V^{**} .

Dans ce qui suit, on identifie V à V^{**} par l'isomorphisme qui associe à tout $v \in V$ la forme linéaire v^* définie pour tout $\alpha \in V^*$ par $v^*(\alpha) := \alpha(v)$. Ainsi, le bidual d'une partie P de V est pensé comme un cône convexe fermé de V . Remarquons que P est toujours contenu dans son bidual P^{**} .

Proposition A.1.6. Soit P et Q deux parties non-vides de V .

1. Si $P \subset Q$ alors $Q^* \subset P^*$.
2. Le cône dual de P coïncide avec le cône dual de l'enveloppe conique de P , i.e. $P^* = C(P)^*$.
3. Le cône dual de $C(P)$ est égal au cône dual de $C(\bar{P})$, i.e. $C(P)^* = C(\bar{P})^*$.
4. Le bidual de P est le plus petit cône convexe fermé contenant P , i.e. $P^{**} = \overline{C(P)}$.

A.2 Convexes fermés

Dans cette section, on rappelle l'énoncé d'un théorème clef de la théorie des convexes fermés : le *théorème de Hahn Banach*. De ce théorème découlent des résultats de séparation des convexes dont l'une des applications est la description des convexes fermés. Commençons par préciser quelques définitions. Dans toute cette partie, V désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

(A.2.1) Séparation des convexes. Étant donné un hyperplan affine H de V , il existe une forme linéaire α sur V et un réel C tels que $\alpha(v) = C$ soit une équation de H . L'hyperplan H délimite deux demi-espaces fermés de V

$$\{v \in V : \alpha(v) \geq C\} \text{ et } \{v \in V : \alpha(v) \leq C\}.$$

On parle de demi-espaces *ouverts* lorsque les inégalités ci-dessus sont strictes. On a alors les définitions suivantes.

Définition A.2.1. Soient P et Q deux parties de V et H un hyperplan affine de V . On dit que :

1. H *sépare* P et Q *au sens large* si P est dans l'un et Q dans l'autre des demi-espaces fermés définis par H .
2. H *sépare* P et Q *au sens strict* si P est dans l'un et Q est dans l'autre des demi-espaces ouverts définis par H .
3. H *sépare fortement* P et Q si et seulement s'il existe une équation $\alpha(x) = C$ de H et un réel $\varepsilon > 0$, tels que

$$\forall x \in P, \alpha(x) + \varepsilon \leq C \text{ et } \forall x \in Q, \alpha(x) - \varepsilon \geq C.$$

Remarque A.2.1. Séparation forte \Rightarrow séparation stricte \Rightarrow séparation large.

Théorème A.2.1 (Théorème de Hahn Banach géométrique). *Soient Ω un ouvert convexe de V et L un sous-espace affine de V disjoint de Ω . Alors, il existe un hyperplan affine H de V qui contient L et qui ne rencontre pas Ω .*

Le théorème de Hahn Banach permet de montrer les résultats de séparation des convexes suivants.

Proposition A.2.1. *Soient C et C' deux convexes disjoints de V .*

1. *Il existe un hyperplan affine séparant (au sens large) C et C' .*
2. *Si, de plus, C et C' sont ouverts, il existe un hyperplan séparant strictement C et C' .*
3. *Si C est fermé et C' compact, il existe un hyperplan séparant fortement C et C' .*

Dans ce qui suit, nous présentons deux conséquences de ces résultats de séparation des convexes.

(A.2.2) Description des convexes fermés. L'intersection de demi-espaces fermés est un convexe fermé. Une conséquence des résultats de séparation est que, réciproquement, tout convexe fermé est soit V tout entier soit une intersection de demi-espaces fermés. Plus précisément :

Théorème A.2.2. *Soit C un convexe fermé de V , $C \neq V$. Alors, C est l'intersection de tous les demi-espaces fermés qui le contiennent.*

Démonstration. Notons K l'intersection des demi-espaces fermés contenant C . Supposons que l'inclusion $C \subset K$ soit stricte. Il existe alors un point $x \in K \setminus C$. D'après le point 3 de la Proposition A.2.1, il existe un hyperplan affine H séparant fortement $\{x\}$ et C . Autrement dit, x n'appartient pas au demi-espace fermé délimité par H contenant C ; contradiction. \square

(A.2.3) Existence d'hyperplans d'appui. Une autre application des résultats de séparation est l'existence d'hyperplans d'appui en tout point de la frontière d'un convexe fermé. Avant d'énoncer cette proposition, rappelons la définition d'hyperplan d'appui.

Définition A.2.2. Soit P une partie de V et p_0 un point de P . Un hyperplan affine H de V est dit *hyperplan d'appui* de P en p_0 si

1. H contient p_0 ;
2. H sépare $\{p_0\}$ et P .

Autrement dit s'il existe une équation $\alpha(p) = 0$ de H telle que

$$\alpha(p_0) = 0 \text{ et } \alpha(p) \geq 0 \forall p \in P.$$

Le point p est appelé *point d'appui* de H .

Remarque A.2.2. Il n'existe pas nécessairement d'hyperplan d'appui en un point p_0 de P . Un hyperplan d'appui en un point p_0 de P n'est pas nécessairement unique. Enfin, un hyperplan d'appui peut avoir plusieurs points d'appui.

Remarque A.2.3. Soit P une partie de V .

1. L'ensemble des points d'appui d'un hyperplan d'appui H de P est $H \cap P$.
2. Si P est convexe, tout hyperplan d'appui de P est disjoint de $\text{int}P$. De plus, les points d'appui de H sont contenus dans la frontière de P .

Proposition A.2.2. *Soit C un convexe fermé de V et soit p un point de la frontière de C . Alors, il existe au moins un hyperplan d'appui de C en p .*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le point 1 de la Proposition A.2.1 aux convexes $\text{int}C$ et $\{p\}$. □

(A.2.4) Hyperplans d'appui et cône dual. Pour finir, la proposition suivante établit une dualité entre les hyperplans d'appui d'un convexe fermé et les points de la frontière de son cône dual.

Proposition A.2.3. *Soient C un convexe fermé de V , x un point de ∂C et α une forme linéaire sur V . Si $\ker \alpha$ est un hyperplan d'appui de C en $x \in \partial C$ alors $\ker x^*$ est un hyperplan d'appui de C^* en $\alpha \in \partial C^*$ où x^* est la forme linéaire sur V^* définie par*

$$x^*(\alpha) = \alpha(x) \quad \forall \alpha \in V^*.$$

A.3 Convexes fermés d'un espace affine et cônes convexes

Dans cette section, on étudie les convexes fermés d'un espace affine. Rappelons que tout convexe fermé est l'intersection des demi-espaces fermés (délimités par des hyperplans) qui le contiennent (voir le Théorème A.2.2). Ainsi, la donnée d'un convexe fermé équivaut à la donnée d'une famille de demi-espaces. Cela suggère que le cadre naturel pour l'étude des convexes fermés d'un espace affine A est l'espace des demi-espaces de A délimités par des hyperplans. Après avoir précisé la topologie de cet espace, nous verrons comment l'étude des convexes fermés d'un espace affine se ramène à la théorie des cônes convexes fermés d'un espace vectoriel. Dans toute cette partie, A désigne un espace affine réel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ de direction V .

(A.3.1) Espace des demi-espaces de A . Toute forme affine non constante sur A définit le demi-espace

$$D_\alpha = \{p \in A, \alpha(p) \geq 0\}$$

délimité par l'hyperplan d'équation $\alpha(p) = 0$. Deux demi-espaces $D_\alpha, D_{\alpha'}$ coïncident si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que $\alpha' = \lambda\alpha$. Réciproquement, tout demi-espace de A délimité par un hyperplan peut-être décrit comme un demi-espace D_α .

En résumé, la donnée d'un demi-espace de A délimité par un hyperplan équivaut à la donnée d'un rayon de formes affines non constantes. Notons $\mathcal{F}(A)$ l'espace vectoriel des formes affines sur A . Il s'avère alors pertinent de considérer la sphère des rayons de $\mathcal{F}(A)$ notée $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$. Il s'agit du quotient de $\mathcal{F}(A) \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence qui identifie α à $\lambda\alpha$ si $\lambda > 0$. On note $\mathbb{S} : \mathcal{F}(A) \rightarrow \mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ la projection canonique. Le rayon des formes affines constantes positives (resp. négatives) est un point de la sphère des rayons que nous notons ξ_+ (resp. ξ_-).

Définition A.3.1. L'espace des demi-espaces de A est l'ouvert $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A)) \setminus \{\xi_+, \xi_-\}$ de la sphère des rayons muni de la topologie induite. On le note $\mathcal{D}(A)$.

Tout point ζ de $\mathcal{D}(A)$ définit le demi-espace de A

$$D_\zeta = \{p \in A, \alpha(p) \geq 0\}$$

où α est un représentant de ζ .

(A.3.2) Réalisation d'un espace affine comme hyperplan affine d'un espace vectoriel. Nous allons voir que l'on peut réaliser *canoniquement* A comme un hyperplan affine de l'espace vectoriel dual $\mathcal{F}(A)^*$. On définit l'application $i : A \rightarrow \mathcal{F}(A)^*$ qui associe à tout point x de A la forme linéaire $i(x)$ définie pour tout $\alpha \in \mathcal{F}(A)$ par $i(x)(\alpha) := \alpha(x)$.

Lemme A.3.1. L'application i est affine et injective.

Démonstration. Soit $\vec{i} : V \rightarrow \mathcal{F}(A)^*$ l'application linéaire qui associe à tout vecteur $v \in V$ la forme linéaire $\vec{i}(v)$ définie pour tout $\alpha \in \mathcal{F}(A)$ par $\vec{i}(v)(\alpha) := \vec{\alpha}(v)$ où $\vec{\alpha}$ est l'application linéaire associée à α . On vérifie que pour tous points x, y de A on ait

$$i(x) = i(y) + \vec{i}(x - y).$$

L'application i est donc affine d'application linéaire associée \vec{i} . Montrons que i est injective. Soit $\{e_1, \dots, e_n\}$ une base de V et $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ sa base duale. Soit $v = \sum_{i=1}^n e_i^*(v)e_i$ un vecteur de V tel que $\vec{i}(v) \equiv 0$. Alors, pour tout $\alpha \in \mathcal{F}(A)$, on a $\vec{i}(v)(\alpha) = 0$ soit $\vec{\alpha}(v) = 0$. Autrement dit, pour tout $\vec{\alpha} \in V^*$, on a $\vec{\alpha}(v) = 0$. En particulier, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $e_i^*(v) = 0$. D'où, $v = 0$. Donc, i est injective. \square

On déduit du Lemme A.3.1 que le sous-espace affine $i(A)$ est un hyperplan affine de $\mathcal{F}(A)^*$. Il s'avère que l'on peut précisément décrire $i(A)$. Soient α_1 la forme affine constante sur A égale à 1 et H_1 l'hyperplan affine de $\mathcal{F}(A)^*$ défini par

$$H_1 := \{f \in \mathcal{F}(A)^* : f(\alpha_1) = 1\}.$$

Le Lemme A.3.2 montre que l'hyperplan $i(A)$ est exactement l'hyperplan affine H_1 .

Lemme A.3.2. Le sous-espace affine $i(A)$ coïncide avec l'hyperplan affine H_1 .

Démonstration. Pour tout point x de A , $i(x)(\alpha_1) = \alpha_1(x) = 1$ donc $i(A) \subset H_1$. Comme $\dim i(A) = \dim H_1$, on obtient l'égalité $i(A) = H_1$. \square

(A.3.3) Convexes fermés et cônes convexes. Soit $\Lambda \subset \mathcal{D}(A)$ une famille de demi-espaces de A . L'intersection de ces demi-espaces dans A est un convexe fermé noté $\bar{\Omega}(\Lambda)$:

$$\bar{\Omega}(\Lambda) := \{p \in A : \alpha(p) \geq 0 \forall \alpha \in \mathbb{S}^{-1}(\Lambda)\}.$$

Remarque A.3.1. Si la famille Λ est vide, $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est l'espace A tout entier.

Le plongement $i : A \rightarrow \mathcal{F}(A)^*$ nous permet de penser $\bar{\Omega}(\Lambda)$ comme un convexe fermé de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(A)^*$. Le paragraphe suivant caractérise $i(\bar{\Omega}(\Lambda))$ dans $\mathcal{F}(A)^*$.

On pose $\Lambda_0 := \mathbb{S}^{-1}(\Lambda)$. Soit $C(\Lambda_0)$ l'enveloppe conique de Λ_0 dans $\mathcal{F}(A)$ et $C(\Lambda_0)^*$ son cône convexe dual. D'après le point 2 de la Proposition A.1.6, $C(\Lambda_0)^*$ coïncide avec le cône dual Λ_0^* . Il est alors clair que

$$i(\bar{\Omega}(\Lambda)) = i(A) \cap C(\Lambda_0)^*. \quad (\text{A.1})$$

Lemme A.3.3. Soit $\bar{\Lambda}$ l'adhérence de Λ dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$. Alors, $\bar{\Omega}(\Lambda) = \bar{\Omega}(\bar{\Lambda})$.

Démonstration. Cela découle immédiatement du fait que $C(\Lambda_0)^* = C(\bar{\Lambda}_0)^*$ (voir Proposition A.1.6, point 3). \square

Lemme A.3.4. Si Λ est fermé dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ alors le cône convexe $C(\Lambda_0)$ est fermé dans $\mathcal{F}(A)$.

Démonstration. Soit $\{\beta_i\}_i$ une suite de $C(\Lambda_0)$ qui converge vers $\beta \in \mathcal{F}(A)$. Pour tout entier i , il existe $(n+1)$ réels positifs t_{i0}, \dots, t_{in} et $(n+1)$ formes affines $\alpha_{i0}, \dots, \alpha_{in}$ de Λ_0 tels que

$$\beta_i = \sum_{j=0}^n t_{ij} \alpha_{ij}.$$

Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Comme la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ est compacte, le fermé Λ est compact. Par suite, quitte à extraire, la suite $\{t_{ij} \alpha_j\}_i$ converge vers un point α_j de Λ_0 . Ainsi, $\{\beta_i\}_i$ converge vers la somme $\alpha_0 + \dots + \alpha_n$. Par unicité de la limite,

$$\beta = \sum_{j=0}^n \alpha_j \in C(\bar{\Lambda}_0).$$

Le cône convexe $C(\bar{\Lambda}_0)$ est donc fermé dans $\mathcal{F}(A)$. \square

D'après l'égalité A.1, le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est vide si et seulement si le cône convexe fermé $C(\Lambda_0)^*$ est disjoint de l'hyperplan affine $i(A)$ égal

$$H_1 = \{f \in \mathcal{F}(A)^* : f(\alpha_1) = 1\}.$$

L'hyperplan vectoriel directeur de H_1 est l'hyperplan H_0 donné par

$$H_0 = \{f \in \mathcal{F}(A)^* : f(\alpha_1) = 0\}.$$

On a alors le lemme suivant.

Lemme A.3.5. *Le cône convexe fermé $C(\Lambda_0)^*$ est disjoint de H_1 si et seulement s'il est contenu dans le demi-espace de $\mathcal{F}(A)^*$*

$$\{f \in \mathcal{F}(A)^* : f(\alpha_1) \leq 0\}$$

délimité par H_0 .

Soit Δ_- le rayon fermé de $\mathcal{F}(A)$ constitué des formes affines constantes négatives.

Remarque A.3.2. Le demi-espace $\{f \in \mathcal{F}(A)^* : f(\alpha_1) \leq 0\}$ est égal au cône dual de Δ_- .

Proposition A.3.1. *Le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est vide si et seulement si Δ_- est contenu dans le cône convexe fermé $C(\bar{\Lambda}_0)$.*

Démonstration. D'après le Lemme A.3.5 et la Remarque A.3.2, le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est vide si et seulement si $C(\Lambda_0)^* \subset \Delta_-^*$. Supposons $\bar{\Omega}(\Lambda)$ vide i.e. $C(\Lambda_0)^* \subset \Delta_-^*$. Alors, d'après le point 1 de la Proposition A.1.6, $\Delta_-^{**} \subset C(\Lambda_0)^{**}$. Comme $C(\bar{\Lambda}_0)^* = C(\Lambda_0)^*$ (voir Proposition A.1.6, point 3), on a $C(\Lambda_0)^{**} = C(\bar{\Lambda}_0)^{**}$. On rappelle que le bidual d'une partie de $\mathcal{F}(A)$ est le plus petit cône convexe fermé qui la contient. Comme Δ_- et $C(\bar{\Lambda}_0)$ sont des cônes convexes fermés (voir Lemme A.3.4), on a

$$\Delta_-^{**} = \Delta_- \text{ et } C(\bar{\Lambda}_0)^{**} = C(\bar{\Lambda}_0) \text{ soit } C(\Lambda_0)^{**} = C(\bar{\Lambda}_0).$$

L'inclusion $\Delta_-^{**} \subset C(\Lambda_0)^{**}$ s'écrit alors $\Delta_- \subset C(\bar{\Lambda}_0)$. Réciproquement, si $\Delta_- \subset C(\bar{\Lambda}_0)$ alors $C(\bar{\Lambda}_0)^* \subset \Delta_-^*$. Or, $C(\bar{\Lambda}_0)^* = C(\Lambda_0)^*$. Donc $C(\Lambda_0)^* \subset \Delta_-^*$ autrement dit $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est vide. \square

On reformule la Proposition A.3.1 en termes d'enveloppe convexe de $\bar{\Lambda}$. Avant cela, précisons la notion de convexité dans la sphère des rayons.

Définition A.3.2. Un *convexe* de $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ est la projection radiale d'un cône convexe de $\mathcal{F}(A)$.

Définition A.3.3. Soit P une partie de $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$. L'*enveloppe convexe* de P est le plus petit convexe contenant P , i.e. l'intersection de tous les convexes contenant P .

Lemme A.3.6. *Soit P une partie de $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$. L'enveloppe convexe de P est égale à la projection radiale de l'enveloppe conique de $P_0 := \mathbb{S}^{-1}(P)$, i.e. $\text{Conv}P = \mathbb{S}(C(P_0))$.*

La Proposition A.3.1 donne alors une condition nécessaire et suffisante sur Λ pour que le convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ soit non-vide. Rappelons qu'on désigne par ξ_- la classe des formes affines constantes négatives dans $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$.

Proposition A.3.2. *Un convexe fermé $\bar{\Omega}(\Lambda)$ de A est non-vide si et seulement si ξ_- n'appartient pas à l'enveloppe convexe de $\bar{\Lambda}$.*

(A.3.4) Hyperplans d'appui. On a vu qu'en tout point de la frontière d'un convexe fermé A , il existe au moins un hyperplan d'appui (voir Proposition A.2.2). Dans ce paragraphe, on décrit l'ensemble des hyperplans d'appuis d'un convexe fermé de A en un point de sa frontière. Avant cela précisons la topologie de l'espace des hyperplans de A .

Toute forme affine non constante α sur A définit un unique hyperplan de A d'équation $\alpha(p) = 0$. Deux formes affines non constantes α, α' sur A définissent le même hyperplan si et seulement si elles sont colinéaires. Inversement, tout hyperplan de A est le lieu des zéros d'une forme affine non constante.

En résumé, la donnée d'un hyperplan de A équivaut à la donnée d'une droite vectorielle de formes affines non constantes sur A autrement dit d'un point de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$. Soit $\xi \in \mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ la classe des formes affines constantes. On a alors la définition suivante.

Définition A.3.4. L'espace des hyperplans de A est l'ouvert $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A)) \setminus \{\xi\}$ de l'espace projectif muni de la topologie induite. On le note $\mathcal{H}(A)$. Un point ζ de $\mathcal{H}(A)$ définit l'hyperplan

$$\{p \in A : \alpha(p) = 0\}$$

où α est un représentant de ζ .

La description des hyperplans d'appui d'un convexe fermé de A fait appel à la notion de convexité dans l'espace projectif. La sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ est un revêtement double de $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ et on a défini ci-dessus les convexes de la sphère des rayons. Il est alors naturel de définir les convexes de l'espace projectif comme suit.

Définition A.3.5. Un *convexe* de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ est la projection d'un convexe de la sphère des rayons $\mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$.

Remarque A.3.3. Un convexe de $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ est la projection d'un cône convexe de $\mathcal{F}(A)$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$.

Définition A.3.6. L'enveloppe convexe d'une partie P de $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ est le plus petit convexe contenant P .

Remarque A.3.4. Si l'on note $\mathbb{P} : \mathcal{F}(A) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ la projection canonique, l'enveloppe convexe de P est égale à la projection de l'enveloppe conique de $P_0 := \mathbb{P}^{-1}(P)$, dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$, i.e. $\text{Conv}P = \mathbb{P}(C(P_0))$.

Proposition A.3.3. Soient $\bar{\Omega}(\Lambda)$ un convexe fermé de A et p_0 un point de sa frontière. On note $\hat{\Lambda}$ la projection de $\Lambda \subset \mathbb{S}(\mathcal{F}(A))$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$. Alors, l'ensemble des hyperplans d'appui de $\bar{\Omega}(\Lambda)$ en x est égal à l'enveloppe convexe des hyperplans d'appui contenus dans l'adhérence de $\hat{\Lambda}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$.

Démonstration. On rappelle que l'on note i le plongement de A dans $\mathcal{F}(A)^*$ et Λ_0 le cône époiné $\mathbb{S}^{-1}(\Lambda)$ de $\mathcal{F}(A)$. D'après la Proposition A.2.2, il existe un hyperplan d'appui de $\bar{\Omega}(\Lambda)$ en p_0 . Autrement dit, il existe une forme linéaire $\alpha \in \mathcal{F}(A)$ telle que $\alpha(p_0) = 0$ et $\alpha(p) \geq 0$ pour tout $p \in \bar{\Omega}(\Lambda)$. Si l'on note α^* la forme linéaire sur $\mathcal{F}(A)^*$ définie par

$\alpha^*(f) := f(\alpha)$, cela équivaut à dire que $\ker \alpha^*$ est un hyperplan d'appui de $C(\Lambda_0)^*$ en $i(p_0) \in \partial C(\Lambda_0)^*$. D'après la Proposition A.2.3, $\ker i(p_0)$ est alors un hyperplan d'appui de $C(\Lambda_0)$ en $\alpha \in \partial C(\Lambda_0)$. De plus, la projection de l'ensemble des points d'appui de $\ker i(p_0)$ dans l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$ est égal à l'ensemble des hyperplans d'appui de $\Omega(\Lambda)$ en p_0 . Or, l'ensemble des points d'appui de $\ker i(p_0)$ est $\ker i(p_0) \cap \partial C(\Lambda_0) \subset \ker i(x) \cap C(\overline{\Lambda_0})$. L'ensemble des hyperplans d'appui de $\bar{\Omega}(\Lambda)$ est donc l'enveloppe convexe des hyperplans d'appui contenus dans l'adhérence de $\hat{\Lambda}$ dans $\mathbb{P}(\mathcal{F}(A))$. \square

Remarque A.3.5. En vertu de la Proposition A.1.1, tout ouvert convexe non-vide de A est de la forme $\text{int} \bar{\Omega}(\Lambda)$ avec $\bar{\Omega}(\Lambda) \neq \emptyset$. Comme les frontières de $\text{int} \bar{\Omega}(\Lambda)$ et $\bar{\Omega}(\Lambda)$ sont égales, la Proposition A.3.3 reste vraie pour des ouverts convexes non-vides.

ANNEXE

B

ESPACE-TEMPS CONFORMES

Cette annexe vise à fournir au lecteur qui n'est pas familier avec la géométrie Lorentzienne conforme, un dictionnaire rassemblant les notions de base de cette géométrie. Nous nous sommes appuyés sur [35, Chap. 14], [10] et [37] pour écrire cette annexe ; nous renvoyons le lecteur vers ces documents pour plus de détails.

B.1 Espace-temps conformes

Définition B.1.1. Soit M une variété différentielle de dimension $(n + 1)$. Une *métrique Lorentzienne* sur M est une métrique pseudo-Riemannienne sur M de signature $(1, n)$.

Définition B.1.2. Une variété *Lorentzienne* est une variété différentielle M munie d'une métrique Lorentzienne.

Exemple B.1.1. L'espace vectoriel \mathbb{R}^{n+1} muni de la métrique $-dt^2 + dx_1^2 + \dots + dx_n^2$ dans le système de coordonnées associé à la base canonique, est une variété Lorentzienne. Il s'agit de l'*espace de Minkowski* noté $\mathbb{R}^{1,n}$.

Définition B.1.3. Soit (M, g) une variété-Lorentzienne. Un vecteur v tangent à M est de type *temps* (resp. *lumière*, *espace*) si sa pseudo-norme $g(v, v)$ est négative (resp. nulle, positive).

Nous emploierons le terme *causal* pour désigner les vecteurs tangents à M qui sont temporels ou lumières.

Pour chaque point p de M , on peut trouver un système de coordonnées sur $T_p M$ dans lequel la forme quadratique g_p s'écrit $-t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$. Par conséquent, l'ensemble des

vecteurs de type temps est un cône ouvert, union disjointe de deux demi-cônes convexes. La frontière de ce cône ouvert est l'ensemble des vecteurs lumière appelé *cône lumière*.

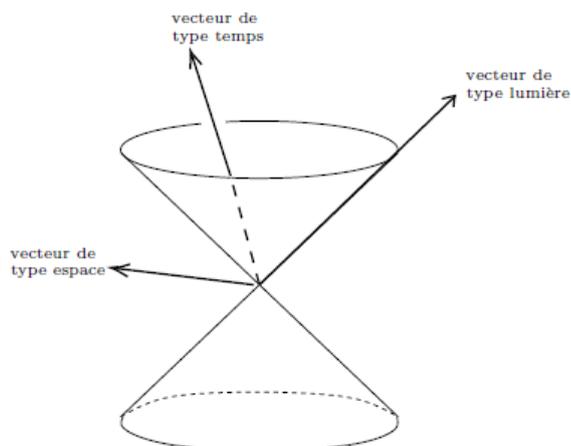


FIGURE B.1 – Vecteurs de type temps, lumière, espace.

Définition B.1.4. Une *orientation temporelle* d'une variété Lorentzienne M est un choix continu, pour tout $p \in M$, d'une des deux composantes connexes du cône des vecteurs de type temps de T_pM . Autrement dit, c'est la donnée d'un champ de vecteurs de type temps sur M .

Une variété Lorentzienne munie d'une orientation temporelle est dite *temporellement orientée*.

Définition B.1.5. Un *espace-temps* est une variété Lorentzienne orientée et temporellement orientée.

Exemple B.1.2. L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est orientable et temporellement orientable. Il admet donc une structure d'espace-temps.

Soulignons que les notions d'orientabilité et d'orientabilité temporelle sont indépendantes comme le montre l'exemple suivant.

Exemple B.1.3. Une bande de Möbius n'est pas orientable mais on peut la munir d'une structure Lorentzienne temporellement orientable.

Invariance conforme.

Définition B.1.6. Soient g, g' deux métriques Lorentziennes sur une variété M . On dit que g et g' sont dans la même *classe conforme* si elles sont proportionnelles par un facteur strictement positif, c'est à dire $g' = e^f g$ où f est une application lisse de M dans \mathbb{R} . La classe conforme d'une métrique Lorentzienne g est notée $[g]$.

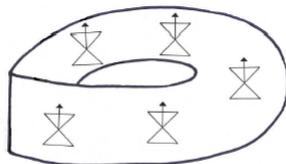


FIGURE B.2 – Orientation temporelle d’une bande de Möbius.

Nous faisons alors la remarque triviale mais importante suivante :

Remarque B.1.1. Si g et g' sont deux métriques Lorentziennes sur une variété M qui sont dans la même classe conforme alors le type d’un vecteur tangent est le même pour g et g' . Ainsi, pour chaque point p de M , le cône des vecteurs de type temps de T_pM reste inchangé pour g et g' .

Il en résulte que la notion d’orientabilité temporelle d’une variété Lorentzienne (M, g) ne dépend que la classe conforme de g .

Définition B.1.7. Un espace-temps *conforme* est une variété munie d’une classe conforme de métriques Lorentziennes qui est orientée et temporellement orientée.

Exemple B.1.4. L’espace d’Einstein est un espace-temps conforme (voir Chapitre 3).

B.2 Courbes causales

Définition B.2.1. Soit (M, g) un espace-temps. Une courbe $\mathcal{C}^1 \gamma : I \rightarrow M$ est dite *causale future* (resp. *passée*) si chaque vecteur tangent $\gamma'(t)$ est causal futur (resp. passé).

On définit de même les courbes de type temps, lumière futures et passées et les courbes de type espace.

Remarque B.2.1. La Définition B.2.1 s’étend sans difficulté aux courbes \mathcal{C}^1 -par morceaux : aux points où la courbe γ n’est pas différentiable, on demande à ce que les vecteurs tangents à droite et à gauche soient causaux futurs (ou passés).

Remarque B.2.2. D’après la Remarque B.1.1, les notions de courbes causales, de type temps, lumière et espace ne dépendent que de la classe conforme de g . On peut donc les définir dans n’importe quel espace-temps conforme.

Géodésiques. Le théorème fondamental de la géométrie Riemannienne s’étend à géométrie Lorentzienne, et plus généralement à la géométrie pseudo-Riemannienne : dans une variété pseudo-Riemannienne (M, g) , il existe une unique connexion sans torsion et qui respecte la métrique : la *connexion de Levi-Civita*. Les *géodésiques* sont alors les courbes auto-parallèles pour la connexion de Levi-Civita.

Dans un espace-temps (M, g) , le type d'un vecteur tangent à une courbe paramétrée peut changer lorsqu'on se déplace le long de la courbe. En revanche, le type d'un vecteur tangent à une géodésique ne change pas. En effet, si $\gamma : I \rightarrow M$ est une géodésique alors

$$\frac{d}{ds}g(\gamma'(s), \gamma'(s)) = 2g(\nabla_{\gamma'(s)}\gamma'(s), \gamma'(s)) = 2g(0, \gamma'(s)) = 0$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M . Les géodésiques de M sont donc soit de type temps, lumière (futurs ou passés) ou espace.

Invariance conforme des géodésiques lumières. Si g et g' sont deux métriques Lorentziennes sur une variété M qui sont dans la même classe conforme alors les courbes qui sont des géodésiques pour g ne le sont en général pas pour g' . Cela provient du fait que la connexion de Levi-Civita n'est pas préservée par changements conformes de métriques¹. En revanche, les géodésiques lumières sont les mêmes, en tant que lieux géométriques, pour g et g' . Cet énoncé reste vrai dans le cadre plus général de la géométrie pseudo-Riemannienne. Pour une preuve de ce résultat, consulter [20, Théorème 3].

Théorème B.2.1. *Soit (M, g) une variété pseudo-Riemannienne. Alors, les géodésiques lumières sont les mêmes en tant que lieux géométriques, pour toutes les métriques de la classe conforme.*

Ainsi, dans un espace-temps *conforme*, la seule notion de géodésique qui a un sens est donc celle de *géodésique lumière*.

Courbes causales inextensibles. Soit M un espace-temps.

Définition B.2.2. Une courbe causale future (resp. passée) $\gamma : I \rightarrow M$ est *inextensible* s'il n'existe aucune courbe causale future (resp. passée) $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$ qui la prolonge c'est à dire telle que $I \subsetneq J$ et $\tilde{\gamma}_I = \gamma$.

Proposition B.2.1. *Toute courbe causale future (resp. passée) de M est contenue dans une courbe causale future (resp. passée) inextensible de M .*

Démonstration. Voir par exemple [37, Chap.1, Sect. 3, Prop. 3.24]. □

Définition B.2.3. Une géodésique lumière inextensible est appelée *photon*.

Dans la suite, nous allons introduire des notions permettant de décrire la *structure causale* d'un espace-temps M , autrement dit d'étudier tout ce qui est relatif aux liens de causalité dans M . Nous venons de voir que les relations de causalités qu'il peut y avoir entre deux points d'un espace-temps M ne dépendent que de la structure conforme de M . Par conséquent, toutes les notions qui suivent sont bien définies dans tout espace-temps *conforme*.

1. La formule qui relie deux connexions de Levi-Civita associées à deux métriques d'une même classe conforme peut être trouvée dans [9, Chap. 9].

B.3 Futur, passé

Soit M un espace-temps.

Définition B.3.1. Soit p un point de M et U un sous-ensemble de M contenant p . Le *futur strict de p dans U* , noté $I^+(p, U)$, est l'ensemble des extrémités de courbes \mathcal{C}^1 -par morceaux non-triviales de type temps futures issues de p contenues dans U .

On définit de même le *passé strict de p relativement à U* que l'on note $I^-(p, U)$. Le futur et le passé de p dans M sont notés simplement $I^+(p)$ et $I^-(p)$.

Remarque B.3.1. — Comme les courbes considérées dans la Définition B.3.1 sont *non-triviales*, un point p n'appartient pas à son futur strict $I^+(p, U)$ ni à son passé strict $I^-(p, U)$.

- Les ensembles $I^+(p, U)$ et $I^-(p, U)$ sont disjoints.
- Un point q est dans le futur strict d'un point p si et seulement si le point p est dans le passé strict de q .
- La relation "être dans le futur strict de" est transitive : pour tous points $p, q, r \in M$ et pour tout sous-ensemble U de M contenant ces trois points, si $q \in I^+(p, U)$ et $r \in I^+(q, U)$ alors $r \in I^+(p, U)$. En effet, lorsque l'on met bout à bout une courbe \mathcal{C}^1 -par morceaux de type temps joignant p à q et une courbe \mathcal{C}^1 -par morceaux de type temps joignant q à r , on obtient une courbe \mathcal{C}^1 -par morceaux de type temps allant de p à r . C'est d'ailleurs le principal intérêt de considérer des courbes \mathcal{C}^1 -par morceaux dans la Définition B.3.1.

La relation "être dans le futur strict d'un point dans M " est appelée *relation de chronologie* et notée \prec : pour tous points p et q de M , nous écrivons $p \prec q$ si $q \in I^+(p)$. Nous notons \prec_U lorsqu'il s'agit du futur strict dans un sous-ensemble U de M . Comme le futur strict et le passé strict d'un point sont disjoints, la relation \prec_U est anti-symétrique. On a donc l'énoncé suivant.

Lemme B.3.1. *Pour tout sous-ensemble U de M , la relation \prec_U est anti-symétrique et transitive.*

Définition B.3.2. Soit p un point de M et U un sous-ensemble de M contenant p . Le *futur causal de p dans U* , noté $J^+(p, U)$, est l'ensemble des extrémités de courbes \mathcal{C}^1 -par morceaux (éventuellement réduites à un point) causales futures issues de p contenues dans U .

On définit de même le *passé causal de p relativement à U* que l'on note $J^-(p, U)$. Le futur et le passé de p dans M sont notés simplement $J^+(p)$ et $J^-(p)$.

Remarque B.3.2. — Il est évident que le futur (resp. passé) strict d'un point p est contenu dans son futur (resp. passé) causal.

- Tout point p de M appartient à $J^+(p, U)$ et $J^-(p, U)$ puisque dans la Définition B.3.2 les courbes réduites à un point sont autorisées. Ainsi, l'intersection de $J^+(p, U)$ et $J^-(p, U)$ est réduite à $\{p\}$.

- Un point q est dans le futur causal d'un point p si et seulement si le point p est dans le passé causal de q .
- Comme pour le futur strict, la relation "être dans le futur causal de" est transitive. Comme le seul point d'intersection du futur et du passé causal d'un point p est le point p , cette relation est aussi réflexive et antisymétrique.

La relation "être dans le futur causal d'un point dans M " est appelée *relation de causalité* et notée \preceq : pour tous points p et q de M , nous écrivons $p \preceq q$ si $q \in J^+(p)$. Nous notons \preceq_U lorsqu'il s'agit du futur causal dans un sous-ensemble U de M . Il résulte du point 4 de la Remarque B.3.2 l'énoncé suivant.

Lemme B.3.2. *Pour tout sous-ensemble U de M , la relation \preceq_U est une relation d'ordre.*

Lemme B.3.3. *Soit p un point d'un espace-temps M et soit U un ouvert géodésiquement convexe contenant p . Alors,*

- *le futur strict $I^+(p, U)$ est constitué des points $q \in U$ tels que l'unique arc géodésique qui joint p à q est de type temps orienté vers le futur ;*
- *le futur causal $J^+(p, U)$ est constitué des points $q \in U$ tels que l'unique arc géodésique qui joint p à q est de type temps ou lumière orienté vers le futur.*

Démonstration. Voir par exemple [10, Sect.3, Lemme 1]. □

Si $(M, [g])$ est un espace-temps conforme, alors, pour toute métrique Lorentzienne fixée dans la classe conforme $[g]$, le Lemme B.3.3 s'applique. Dans la suite, M désigne un espace-temps conforme.

Corollaire B.3.1. *Pour tout point p de M et tout voisinage ouvert U de p , l'ensemble $I^+(p, U)$ est un ouvert de M .*

Démonstration. Voir [10, Sect. 3, Prop. 2]. □

Si U est un voisinage géodésiquement convexe de p alors le Lemme B.3.3 implique facilement que $J^+(p, U)$ est fermé dans M . En revanche, cela n'est pas vrai en général si U n'est pas géodésiquement convexe. En particulier, $J^+(p)$ n'est pas toujours fermé dans M comme le montre l'exemple suivant.

Exemple B.3.1. Considérons l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,1}$ privé de l'origine. Alors, le passé du point p sur la figure ci-dessous n'est pas compact.

Le Lemme B.3.3 permet cependant de montrer le résultat suivant.

Proposition B.3.1. *Pour tout point p de M et pour tout voisinage ouvert U de M contenant p , le futur causal $J^+(p, U)$ est contenu dans l'adhérence de $I^+(p, U)$.*

Démonstration. Pour simplifier, prouvons la proposition pour $U = M$. Soit $q \in J^+(p)$. Il existe alors une courbe \mathcal{C}^1 par morceaux $\gamma : I \rightarrow M$ causale future reliant p à q . Soit $\{U_i\}_{1 \leq i \leq n}$ un recouvrement fini de la courbe $\{\gamma(t)\}_{t \in I}$ par des ouverts convexes de M . □

Proposition B.3.2. *Pour tous points p, q, r de M et pour tout sous-ensemble U de M contenant ces trois points.*

- Si $r \preceq_U q$ et $q \prec_U p$ alors $r \prec_U p$.
- Si $r \prec_U q$ et $q \preceq_U p$ alors $r \prec_U p$.

Démonstration. Voir [10, Sect. 3, Prop. 3]. □

Proposition B.3.3. *Soient p et q deux points de M . Si $q \in J^+(p) \setminus I^+(p)$ alors toute courbe C^1 -par morceaux causale future reliant p à q est à reparamétrage près un arc de géodésique lumière.*

Démonstration. Voir [10, Sect. 3, Prop. 4]. □

Futur, passé d'un sous-ensemble. Dans ce qui précède, nous avons défini le futur et le passé d'un point de M mais on peut étendre ces définitions à tout sous-ensemble A de M .

Définition B.3.3. Soient A et U deux sous-ensembles de M tels que $A \subset U$. Le *futur strict* (resp. *causal*) de A dans U est l'union des futurs stricts (resp. causaux) $I^+(p, U)$ (resp. $J^+(p, U)$) lorsque p parcourt A .

On définit de même le passé strict et causal de A dans U . Lorsque $U = M$, nous notons simplement $I^+(A)$ et $J^+(A)$ le futur strict et causal de A dans M .

Les propriétés énoncées ci-dessus dans le cas où A est réduit à un point se généralisent immédiatement au cas où A est quelconque.

B.4 Sous-ensembles achronaux, acausaux

Soit M un espace-temps de dimension $(n + 1)$.

Définition B.4.1. Soient A et U deux sous-ensembles de M tels que $A \subset U$. Le sous-ensemble A est dit *achronal* (resp. *acausal*) dans U si pour tous points p et q de A , il n'existe aucune courbe *temporelle* (resp. *causale*) dans U reliant p à q .

Lorsque $U = M$, nous disons simplement que A est achronal ou acausal. Notons que toute partie acausale est achronale.

Exemple B.4.1. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$, tout hyperplan $t = C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, est acausal.

Exemple B.4.2. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$, l'hyperbole $-t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = -1$ avec $t > 0$, est acausale. Il s'agit de l'espace *hyperbolique* noté \mathbb{H}^n .

Exemple B.4.3. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$, le cône $-t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ avec $t \geq 0$, est achronal mais n'est pas acausal.

Il existe également une notion *locale* d'achronalité.

Définition B.4.2. Un sous-ensemble A de M est dit *localement achronal* (resp. *localement acausal*) si tout point p de A admet un voisinage U tel que $A \cap U$ est achronal (resp. acausal) dans U .

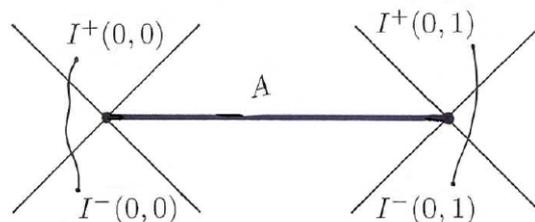
Remarque B.4.1. Tout sous-ensemble achronal (resp. acausal) de M est localement achronal (resp. localement acausal).

Définition B.4.3. Un sous-ensemble A de M est dit *étanche* si tout point p de A admet un voisinage ouvert U tel que :

1. $A \cap U$ est achronal dans U (autrement dit A est localement achronal) ;
2. toute courbe causale contenue dans U reliant un point de $I^+(p, U)$ à un point de $I^-(p, U)$ rencontre $U \cap A$.

Les sous-ensembles introduits dans la Définition B.4.3 sont connus sous la terminologie anglo-saxonne *edgeless sets*. À notre connaissance, il n'existe pas de terminologie française pour cette notion, nous proposons donc l'adjectif *étanche* pour caractériser ces ensembles. En effet, on peut penser une partie étanche comme une "barrière imperméable" qui sépare son futur de son passé comme le montre l'exemple suivant.

Exemple B.4.4. Le segment $I = \{(0, x) : 0 \leq x \leq 1\}$ de $\mathbb{R}^{1,1}$ n'est pas étanche. En effet, les points $(0, 0)$ et $(0, 1)$ ne vérifient pas la condition (2) de la Définition B.4.3. En fait, ces deux points constituent la seule obstruction à l'étanchéité de I . En effet, il est facile de voir que tout point du segment ouvert $0 < x < 1$ vérifie les conditions (1) et (2) de la Définition B.4.3. Le segment ouvert $I_0 = \{(0, x) : 0 < x < 1\}$ est donc étanche dans $\mathbb{R}^{1,1}$.



Dans l'Exemple B.4.4, nous avons vu que le segment I_0 est étanche dans $\mathbb{R}^{1,1}$. Toutefois, si l'on voit I_0 comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{1,2}$, autrement dit si l'on considère le segment $\hat{I}_0 = \{(0, x, 0) : 0 < x < 1\}$ de $\mathbb{R}^{1,2}$, alors \hat{I}_0 n'est pas étanche. En fait, aucun point de \hat{I}_0 ne vérifie la condition (2) de la Définition B.4.3. Dans ce qui suit, nous allons voir que toute partie achronale étanche de M est une hypersurface *topologique* (qui n'est pas forcément lisse²).

2. Par exemple, dans $\mathbb{R}^{1,n}$, le cône $-t^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$, avec $t \geq 0$, est un sous-ensemble achronal étanche de $\mathbb{R}^{1,n}$. C'est une hypersurface de $\mathbb{R}^{1,n}$ qui n'est pas lisse en $(0, \dots, 0)$.

Rappelons qu'un sous-ensemble S de M est une hypersurface *topologique* si pour tout point p de M , il existe un voisinage ouvert U de p et un *homéomorphisme* ϕ de U dans un ouvert de \mathbb{R}^{n+1} tel que $\phi(U \cap S) = \phi(U) \cap H$ où H est un hyperplan de \mathbb{R}^{n+1} .

Proposition B.4.1. *Un sous-ensemble achronal A de M est une hypersurface topologique si et seulement si A est étanche.*

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Prop. 25]. □

Une classe particulière de sous-ensembles achronaux étanches sont les frontières de sous-ensembles futurs (passés) de M :

Définition B.4.4. Un sous-ensemble A de M est dit *futur* (resp. *passé*) s'il contient son futur (resp. passé) strict.

Remarque B.4.2. Le complémentaire dans M d'un sous-ensemble futur F est passé. En effet, soit $x \in I^-(M \setminus F)$. Alors, x appartient au passé strict d'un point x_0 de $M \setminus F$. Si $x \in F$ alors $I^+(x)$ est contenu dans F , en particulier $x_0 \in F$. Contradiction.

Proposition B.4.2. *La frontière de tout sous-ensemble futur (ou passé) de M est un fermé achronal étanche de M .*

Démonstration. [35, Corollary 27, p. 415]. □

(B.4.1) Hypersurfaces de Cauchy.

Définition B.4.5. Une *hypersurface de Cauchy* de M est un sous-ensemble S de M qui rencontre toute courbe de type temps inextensible de M exactement une fois.

Remarque B.4.3. Une hypersurface de Cauchy est achronale.

Exemple B.4.5. Dans $\mathbb{R}^{1,n}$, tout hyperplan $t = C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante, est une hypersurface de Cauchy mais \mathbb{H}^n n'en est pas une.

La terminologie *hypersurface* est motivée par le lemme suivant.

Lemme B.4.1. *Une hypersurface de Cauchy de M est une hypersurface topologique fermée achronale de M qui rencontre toute courbe causale inextensible.*

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Lemma 29]. □

Un espace-temps arbitraire ne contient pas forcément d'hypersurface de Cauchy. Dans la section suivante, nous allons voir que les espace-temps admettant une hypersurface de Cauchy constituent une classe importante d'espace-temps, celle des espace-temps *globalement hyperboliques*.

(B.4.2) Hypersurfaces spatiales. Jusqu'à présent, nous n'avons abordé la notion d'achronalité que d'un point de vue topologique. Dans ce paragraphe, nous discutons l'achronalité d'une hypersurface *lisse* de M .

Définition B.4.6. Une *hypersurface de type espace* de M est une hypersurface (lisse) S de M telle que tout vecteur tangent à S est de type espace.

Remarque B.4.4. Une hypersurface de type espace est localement acausale mais n'est pas forcément acausale ni même achronale.

Il s'avère qu'il suffit qu'une hypersurface de type espace de M soit achronale pour qu'elle soit acausale :

Lemme B.4.2. *Soit S une hypersurface de type espace de M . Si S est achronale alors S est acausale.*

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Lemma 42]. □

Lemme B.4.3. *Soit S une hypersurface de type espace fermée et connexe de M . Si S déconnecte M alors S est achronale.*

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Lemma 45]. □

B.5 Hyperbolicité globale

Soit M un espace-temps. Dans cette section, nous introduisons la notion d'hyperbolicité globale due à Leray [32].

(B.5.1) Diamants, convexité causale.

Définition B.5.1. Un *diamant* de M est l'intersection du passé causal d'un point p de M et du futur causal d'un point q de M . Il est noté $J(p, q)$.

Remarque B.5.1. Un diamant $J(p, q)$ de M est non-vide si et seulement si $q \in J^-(p)$. En effet, si $J(p, q)$ est non vide, alors il existe $r \in M$ tel que $p \in J^+(r)$ et $r \in J^+(q)$. D'où $p \in J^+(q)$. Réciproquement, si $q \in J^-(p)$ alors il existe une courbe causale passée qui joint p à q et qui est donc contenue dans $J(p, q)$.

Remarque B.5.2. Il est facile de voir que les diamants de M sont connexes par arcs. En effet, étant donnés deux points r, r' dans un diamant $J(p, q)$, il existe deux courbes causales passées, l'une reliant p à r , l'autre p à r' . En mettant bout à bout ces deux courbes, on obtient un chemin qui joint r à r' et qui est contenu dans $J(p, q)$.

Définition B.5.2. Un diamant *ouvert* de M est l'intersection du passé *strict* d'un point p de M et du futur *strict* d'un point q de M . Il est noté $I(p, q)$.

D'après le Corollaire B.3.1, $I(p, q)$ est un ouvert de M ce qui justifie la terminologie *diamant ouvert*. De plus, d'après le Corollaire B.3.1, le diamant $J(p, q)$ est contenu dans l'adhérence de $I(p, q)$.

Remarque B.5.3. De la même façon que pour les diamants, $I(p, q)$ est non-vide si et seulement si $q \in I^-(p)$.

Remarque B.5.4. Les diamants ouverts sont connexes par arcs. En effet, soient deux points r, r' dans un diamant ouvert $I(p, q)$ de M . Alors, $I^+(r) \cap I^+(r') \cap I^-(p)$ est un ouvert non-vide de $I(p, q)$, soit donc s un point de cet ouvert. De même, $I^-(r) \cap I^-(r') \cap I^+(p)$ est un ouvert non-vide de $I(p, q)$, soit donc s' un point de cet ouvert. Par suite, r, r' appartiennent au diamant $J(s, s')$ qui est connexe par arcs et qui est contenu dans $I(p, q)$.

Définition B.5.3. Une partie A de M est *causalement convexe* si toute courbe causale reliant deux points p, q de A est contenue dans A ou, de manière équivalente, si tous les diamants $J(p, q)$ de sommets $p, q \in A$ sont contenus dans A .

Remarque B.5.5. Tout diamant non-vide $J(p, q)$ de M est causalement convexe. En effet, soit r, r' deux points de $J(p, q)$ tels que $r' \in J^-(r)$. Alors, $J^-(r) \subset J^-(p)$ et $J^+(r') \subset J^+(q)$. D'où $J(r, r') \subset J(p, q)$. De même, tout diamant *ouvert* de M est causalement convexe.

Remarque B.5.6. L'intersection (non-vide) de deux parties causalement convexes de M est causalement convexe.

Lemme B.5.1. Soit V un ouvert causalement convexe de M et soit $p \in V$. Le futur causal $J^+(p, V)$ de p dans V est égal à l'intersection de $J^+(p)$ avec V .

Démonstration. Par définition, $J^+(p, V) \subset I^+(p) \cap V$. Réciproquement, soit $q \in J^+(p) \cap V$. Comme V est causalement convexe, toute courbe causale future reliant p à q est contenue dans V . Donc, $q \in J^+(p, V)$. \square

Démonstration. Le Lemme B.5.1 reste vrai si l'on remplace futur *causal* par futur *strict*. Par symétrie, le lemme est également vrai pour les passés causals et stricts. \square

Lemme B.5.2. Soient V un ouvert causalement convexe de M et U un ouvert de V . Alors, U est causalement convexe dans V si et seulement s'il est causalement convexe dans M .

Démonstration. Si U est causalement convexe dans M , alors toute courbe causale reliant deux points p, q de U est contenue dans U , en particulier les courbes causales contenues dans V . Donc, U est causalement convexe dans V . Réciproquement, soient p, q deux points de U et γ une courbe causale reliant p à q . Comme $p, q \in V$ et V est causalement convexe, γ est contenue dans V . Comme U est causalement convexe dans V , il s'en suit que γ est contenue dans U . Donc, U est causalement convexe dans M . \square

(B.5.2) Hyperbolicité globale.

Définition B.5.4. Un espace-temps M vérifie l'*hypothèse de causalité forte* si tout point de M admet un voisinage causalement convexe arbitrairement petit.

L'hypothèse de causalité forte assure qu'une courbe causale issue d'un point p de M ne puisse pas revenir arbitrairement proche de p . Cette hypothèse est motivée par la théorie de la relativité générale dans laquelle les trajectoires de particules sont représentées par des courbes causales. D'un point de vue physique, l'hypothèse de causalité forte se traduit par le fait qu'une particule ne puisse pas revenir arbitrairement proche de son passé. Une autre hypothèse plus faible et plus intuitive est qu'une particule ne puisse pas revenir dans son passé :

Définition B.5.5. Un espace-temps M vérifie l'hypothèse de causalité faible s'il ne contient pas de courbes causales fermées. On dit alors que M est *causal*.

Les hypothèses de causalité imposent des contraintes assez fortes sur la topologie de M .

Proposition B.5.1. Si M satisfait l'hypothèse de causalité faible alors M n'est pas compact.

Démonstration. Voir [10, Sect. 4, Prop. 7] ou [37, Chap. 1, Sect. 5, Prop. 5.3]. \square

Une propriété fondamentale des espace-temps satisfaisant l'hypothèse de causalité forte est que leur topologie est équivalente à la topologie engendrée par les diamants ouverts appelée *topologie d'Alexandrov* :

Proposition B.5.2. Un espace-temps M satisfait l'hypothèse de causalité forte si et seulement si sa topologie est équivalente à la topologie d'Alexandrov.

Cette proposition est un résultat classique dû à Kronheimer et Penrose. Une preuve peut être trouvée dans [9, Chap. 3, Prop. 3.11].

Définition B.5.6. Un espace-temps M est *globalement hyperbolique* si

- M satisfait l'hypothèse de causalité forte,
- tous les diamants de M sont compacts.

Exemple B.5.1. L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est globalement hyperbolique.

Exemple B.5.2. L'espace $\mathbb{R}^{1,n} \setminus \{0\}$ n'est pas globalement hyperbolique puisque les diamants contenant l'origine ne sont pas compacts.

La Définition B.5.6 a été introduite, sous une forme un peu différente, par Leray [32] pour l'étude globale des équations aux dérivées partielles hyperboliques. Dans [12], Bernal et Sanchez ont montré qu'il est équivalent de remplacer l'hypothèse de causalité forte par l'hypothèse de causalité *faible* dans la Définition B.5.6.

Remarque B.5.7. D'après la Proposition B.5.1, un espace-temps globalement hyperbolique ne peut pas être compact.

Remarque B.5.8. D'après la Proposition B.5.2, la topologie d'un espace-temps globalement hyperbolique est équivalente à la topologie d'Alexandrov.

Lemme B.5.3. Si M est globalement hyperbolique alors le futur causal de tout compact K de M est fermé.

Démonstration. Voir [10, Prop. 9]. □

Dans [22], Geroch montre que tout espace-temps globalement hyperbolique admet une hypersurface (topologique) de Cauchy.

Théorème B.5.1 (R. Geroch [22]). *Tout espace-temps globalement hyperbolique M admet une hypersurface de Cauchy S .*

Nous allons voir dans la section suivante que la réciproque est vraie.

Dans [11], Bernal et Sanchez affinent le résultat de Geroch en montrant l'existence d'une hypersurface de Cauchy *lisse* :

Théorème B.5.2. *Tout espace-temps globalement hyperbolique M admet une hypersurface de type espace S de Cauchy et est, par conséquent, difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$.*

Une conséquence de ce résultat est l'énoncé suivant :

Corollaire B.5.1. *Toutes les hypersurfaces de Cauchy d'un espace-temps globalement hyperbolique sont difféomorphes.*

Remarque B.5.9. La topologie d'un espace-temps globalement hyperbolique M est déterminée par celle d'une de ses hypersurfaces de Cauchy S . En effet, comme M est difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$, le groupe fondamental de M est isomorphe à celui de S .

Une classe intéressante d'espace-temps globalement hyperboliques est celle des espace-temps admettant une hypersurface de Cauchy *compacte* :

Définition B.5.7. Un espace-temps globalement hyperbolique qui admet une hypersurface de Cauchy compacte est dit *Cauchy-compact* ou *spatialement compact*.

(B.5.3) Causalité convexe et hyperbolicité globale. Il existe un lien étroit entre la convexité causale et l'hyperbolicité globale. Il s'avère que tout ouvert *causalement convexe* d'un espace-temps globalement hyperbolique est globalement hyperbolique comme l'indique le lemme suivant. Toutefois, la réciproque n'est pas vraie en général (voir Remarque 7.1.6).

Lemme B.5.4. *Tout ouvert causalement convexe U d'un espace-temps globalement hyperbolique M est globalement hyperbolique.*

Démonstration. L'ouvert U est causal puisque M est causal. Soient $p, q \in U$. Comme U est causalement convexe, le diamant $J(p, q)$ est contenu dans U . Comme M est globalement hyperbolique, $J(p, q)$ est compact. Cela prouve que tous les diamants de U sont compacts. Donc U est globalement hyperbolique. □

Exemple B.5.3. Les domaines réguliers³ de $\mathbb{R}^{1,n}$ sont des ouverts causalement convexes de $\mathbb{R}^{1,n}$ et sont donc globalement hyperboliques.

Remarque B.5.10. L'hypothèse que M est globalement hyperbolique est importante. En effet, considérons l'espace-temps $M = \mathbb{R}^{1,n} \setminus \{(0, 0)\}$ (voir Exemple B.5.2). Un diamant de $\mathbb{R}^{1,n}$ contenant l'origine est un ouvert causalement convexe de M qui n'est pas globalement hyperbolique.

3. Voir Chapitre 2, Définition 2.3.1.

B.6 Développements de Cauchy

Dans toute cette section, M est un espace-temps et A désigne un sous-ensemble achronal de M .

Définition B.6.1. Le *développement de Cauchy de A* , noté $\mathcal{D}(A)$, est l'ensemble des points p de M tels que toute courbe causale inextensible de M passant par p rencontre A .

Remarque B.6.1. Un fermé achronal étanche S de M est une hypersurface de Cauchy de M si et seulement si $M = \mathcal{D}(S)$.

Lemme B.6.1. Soit $p \in M$. Si p est dans l'intérieur de $\mathcal{D}(A)$ alors toute courbe causale inextensible passant par p rencontre à la fois $I^-(A)$ et $I^+(A)$.

Démonstration. [35, Chap. 14, Lemma 37]. □

Lemme B.6.2. Le développement de Cauchy de A est causalement convexe dans M .

Proposition B.6.1. Si l'intérieur de $\mathcal{D}(A)$ est non-vide alors il est globalement hyperbolique.

Démonstration. [35, Chap. 14, Theorem 38]. □

Il découle du Lemme B.6.1 que la réciproque du théorème de Geroch est vraie :

Corollaire B.6.1. Si M admet une hypersurface de Cauchy alors M est globalement hyperbolique.

Démonstration. Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Alors $M = \mathcal{D}(S)$. Par conséquent, d'après la Proposition B.6.1, M est globalement hyperbolique. □

Proposition B.6.2. Si S est une hypersurface topologique acausale de M alors $\mathcal{D}(S)$ est ouvert.

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Lemma 43]. □

Nous notons $\mathcal{D}^+(A)$ l'intersection de $\mathcal{D}(A) \cap J^+(A)$.

Proposition B.6.3. Soit $p \in \text{int}\mathcal{D}(A)$. Si $p \notin I^-(A)$ alors $J^-(p) \cap \mathcal{D}^+(A)$ est compact.

Démonstration. Voir [35, Chap. 14, Lemma 40]. □

La Proposition B.6.3 admet une réciproque lorsque A est un fermé achronal étanche de M :

Proposition B.6.4. Supposons que A soit fermé et étanche. Soit $p \in M$. Si $p \notin I^-(A)$ et $J^-(p) \cap J^+(A)$ est compact alors $p \in \mathcal{D}^+(A)$.

Démonstration. Supposons que $p \notin \mathcal{D}^+(A)$. Il existe alors une courbe causale γ issue de p inextensible dans le passé qui ne rencontre pas A . Soit $\{q_i\}$ une suite décroissante de γ pour la relation de causalité \preceq . Comme γ est inextensible dans le passé, cette suite n'admet pas de valeurs d'adhérence. Comme $p \in I^+(A)$ et comme γ ne rencontre pas A , la courbe γ reste confinée dans $I^+(A)$. Ainsi, γ est contenue dans $J^-(p) \cap J^+(A)$ qui est compact. Par conséquent, la suite $\{q_i\}$ admet une valeur d'adhérence q dans $J^+(A) \cap J^-(p)$. Contradiction. \square

Corollaire B.6.2. *On suppose que M est globalement hyperbolique. Soit S un fermé achronal étanche de M . Si S est compact alors S est une hypersurface de Cauchy de M .*

Démonstration. Soit $p \in M$. On ne perd rien à supposer que $p \in J^+(S)$. Montrons que $J^-(p) \cap J^+(S)$ est compact. Soit donc $\{q_i\}$ une suite de $J^-(p) \cap J^+(S)$. Pour tout entier i , il existe $s_i \in S$ tel que $q_i \in J(p, s_i)$. Comme S est compact, quitte à extraire, la suite $\{s_i\}$ converge vers $s \in S$. Soit $r \in I^-(s)$. Alors $I^+(s)$ est un voisinage ouvert de s . Par conséquent, tous les s_i (sauf éventuellement un nombre fini) sont dans $I^+(r)$. Par suite, tous les q_i sont dans le diamant $J(p, r)$. Or $J(p, r)$ est compact puisque M est globalement hyperbolique. Par conséquent, quitte à extraire, $\{q_i\}$ converge vers un point q dans $J(p, r)$. Comme $J^-(p) \cap J^+(S)$ est fermé (voir Proposition B.5.3), alors $q \in J^-(p) \cap J^+(S)$. Donc, $J^-(p) \cap J^+(S)$ est compact. D'après la Proposition B.6.4, on en déduit que $p \in \mathcal{D}^+(S)$. \square

Soit $\partial^+\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des points de la frontière de $\text{int}\mathcal{D}(A)$ dans le futur strict de A .

Lemme B.6.3. *Supposons que A soit étanche. Alors, pour tout point p de $\partial^+\mathcal{D}(A)$, il existe une géodésique lumière φ issue de p inextensible dans le passé telle que son intersection avec $\partial^+\mathcal{D}(A)$ soit une géodésique lumière passée contenue dans $\partial^+\mathcal{D}(A)$ sans point limite passé dans $\partial^+\mathcal{D}(A)$.*

Démonstration. Voir par exemple [37, Lemme 6.9 et Lemme 6.13]. \square

Ombres. La notion d'ombres a été introduite par C. Rossi dans [37, Chap. 4]. Nous en rappelons ici la définition sous une forme plus synthétique.

Définition B.6.2. Soit $p \in M$. L'ombre de p sur A , notée $O(p, A)$, est l'ensemble des points de A causalement reliés à p .

Une conséquence de la Proposition B.6.3 est le lemme suivant.

Lemme B.6.4. *Soit $p \in M$. Si p est dans l'intérieur de $\mathcal{D}(A)$ alors l'ombre de p sur A est compacte.*

Les points de l'intérieur de $\mathcal{D}(A)$ sont caractérisés par leurs ombres :

Proposition B.6.5. *Soient p, q deux points de l'intérieur de $\mathcal{D}(A)$ dans le futur strict de A . Supposons que les ombres de p et de q sur A sont strictement contenus dans A . Alors, les ombres $O(p, A)$ et $O(q, A)$ sont égales si et seulement si $p = q$.*

Démonstration. Voir [37, Chap. 4, Prop. 2.6]. \square

B.7 Extensions maximales

Soit M un espace-temps globalement hyperbolique et soit S une hypersurface de Cauchy de M . Grosso modo, une *extension de Cauchy* de M est un espace-temps N contenant M pour lequel S est aussi une hypersurface de Cauchy. Cette notion fut introduite par Y. Choquet-Bruhat [41] dans la résolution de l'équation d'Einstein en relativité générale. Nous rappelons brièvement le contexte dans lequel la notion d'extension de Cauchy fut introduite. Pour plus de détails et de précisions sur l'équation d'Einstein, nous suggérons [10].

Un bref historique. En relativité générale, notre univers est modélisé par un espace-temps M ; l'équation d'Einstein met en relation la métrique Lorentzienne sur M et un tenseur T qui décrit la distribution de matière dans M . Nous nous contenterons d'illustrer nos propos sur l'équation d'Einstein dans le vide qui admet une expression simple : $Ric(g) = 0$ où $Ric(g)$ désigne le tenseur de Ricci.

Un moyen de résoudre cette équation est de supposer que M est difféomorphe à un produit $S \times \mathbb{R}$ où S est une variété de dimension n . On se donne comme donnée initiale une métrique Riemannienne h sur S (qui code la géométrie intrinsèque de S) et un $(2,0)$ -tenseur symétrique sur S (qui détermine la manière dont S sera plongée dans M). Une solution de ce problème de Cauchy est alors une métrique Lorentzienne g sur M de tenseur de Ricci nul, telle que la restriction de la métrique g à S coïncide avec h et tel que la 2^e forme fondamentale pour g coïncide avec le tenseur II .

Pour que ce problème de Cauchy admette une solution, il s'avère que la métrique h et le champ de formes bilinéaires II ne peuvent pas être donnés de manière indépendante. Une condition nécessaire pour l'existence de solutions est que h et II vérifient des équations connues sous le nom *d'équations de contrainte* (analogues des équations de Gauss-Codazzi en géométrie Riemannienne). Choquet-Bruhat montre que vérifier les équations de contraintes est une condition suffisante pour l'existence de solutions. De plus, Geroch montre que les solutions trouvées sont globalement hyperboliques et que la donnée initiale S est une hypersurface de Cauchy de ces solutions. Une question naturelle se pose alors :

Est-il possible d'étendre la solution trouvée en une solution maximale ?

Précisons d'abord ce que l'on entend par "étendre". Soient (M, g) et (M', g') deux solutions du problème de Cauchy pour la donnée initiale (S, h, II) . Nous désignons par i et i' les plongements de la donnée initiale S dans M et M' respectivement. On dit que (M', g') est une *extension de Cauchy* de (M, g) s'il existe un plongement isométrique de M dans M' qui envoie $i(S)$ sur $i'(S)$. Une solution est maximale si elle n'admet aucune extension autre qu'elle-même. Choquet-Bruhat et Geroch montrent alors que toute solution du problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein dans le vide, s'étend en une solution maximale. De plus cette solution est unique à isométrie près.

La notion d'extension de Cauchy fut ensuite étendue à d'autres classes d'espace-temps globalement hyperboliques. Les questions d'existence d'une extension maximale

et de son unicité se sont naturellement posées. Nous discutons de ces questions dans le paragraphe suivant.

Extensions de Cauchy. Soient M et N deux espace-temps globalement hyperboliques.

Définition B.7.1. Un *Cauchy-plongement* de M dans N est un plongement *isométrique* $f : M \rightarrow N$ qui envoie une hypersurface de Cauchy de M sur une hypersurface de Cauchy de N . L'espace-temps N est alors appelé *extension de Cauchy* de M .

Définition B.7.2. Un espace-temps globalement hyperbolique M est *maximal* si tout Cauchy-plongement de M dans tout autre espace-temps globalement hyperbolique est surjectif.

Il s'avère que les arguments utilisés par Choquet-Bruhat et Geroch dans leur preuve de l'existence et de l'unicité d'une solution maximale du problème de Cauchy associé à l'équation d'Einstein s'adaptent à certaines *catégories* d'espace-temps dites *rigides*.

Définition B.7.3. Une *catégorie d'espace-temps* est une classe \mathcal{C} d'espace-temps qui est stable par :

1. *isométrie*, c'est à dire si un espace-temps (M, g) est isométrique à un espace-temps (M', g') de \mathcal{C} alors il est dans \mathcal{C} ;
2. *recollement*, c'est à dire si (M, g) est recouvert par des ouverts $\{U_i\}$ tels que $(U_i, g|_{U_i})$ est dans \mathcal{C} alors M appartient à \mathcal{C} ;
3. *restriction*, c'est à dire si (M, g) est un espace-temps de \mathcal{C} alors tout ouvert U de M muni de la métrique induite g_U est dans \mathcal{C} .

Définition B.7.4. Une catégorie \mathcal{C} d'espace-temps est *rigide* si pour tous espace-temps globalement hyperboliques M, N de \mathcal{C} , toute isométrie $f : I^+(p) \rightarrow I^+(q)$ avec $p \in M$ et $q \in N$, s'étend en une isométrie $\hat{f} : U \cup I^+(p) \rightarrow V \cup I^+(q)$ où U (resp. V) est un voisinage ouvert de p (resp. q).

Exemple B.7.1. 1. La classe des espace-temps solutions de l'équation d'Einstein est une catégorie rigide.

2. Étant donné une géométrie modèle (G, X) , les espace-temps muni d'une (G, X) -structure forment une catégorie rigide.⁴

Définition B.7.5. Un espace-temps globalement hyperbolique M d'une catégorie rigide \mathcal{C} est *maximal dans \mathcal{C}* si tout Cauchy-plongement de M dans un autre espace-temps globalement hyperbolique de \mathcal{C} est surjectif. Dans ce cas, on dit que M est *\mathcal{C} -maximal*.

Théorème B.7.1. *Tout espace-temps globalement hyperbolique d'une catégorie rigide \mathcal{C} admet une extension \mathcal{C} -maximale. De plus, cette extension est unique à isométrie près.*

4. Pour plus d'exemples, consulter [37, Chap. 3].

Dans ce document, nous nous intéressons en particulier à la catégorie des espace-temps *conformément plats*. Ces derniers admettent une structure conforme naturelle. Dans [38], Rossi étend la notion d'extension de Cauchy aux espace-temps conformes en considérant des Cauchy-plongements qui au lieu d'être *isométriques* sont *conformes*. Pour préciser que nous considérons des Cauchy-plongements **conformes**, nous parlerons de C-maximalité (avec un C droit pour conforme). Parmi les espace-temps conformes, on note \mathcal{C}_0 la classe de ceux qui sont conformément plat. Rossi montre alors le résultat suivant.

Théorème B.7.2 ([38, Theorem 3]). *Tout espace-temps conformément plat M globalement hyperbolique admet une extension \mathcal{C}_0 -maximale. De plus, cette extension est unique à difféomorphisme conforme près.*

La preuve que propose Rossi dans [38] repose sur le Lemme de Zorn. Elle obtient, de ce fait, l'existence d'une extension \mathcal{C}_0 -maximale mais sans en avoir de description. Dans [37, Chap. 7], Rossi propose une autre preuve, où elle construit l'extension \mathcal{C}_0 -maximale de M . Cela lui permet alors de montrer le résultat suivant.

Théorème B.7.3 ([37, Chap. 7, Corollaire 2.8]). *Tout espace-temps conformément plat M globalement hyperbolique est \mathcal{C}_0 -maximal si et seulement s'il est C-maximal.*

Il est évident que si M est C-maximal alors M est \mathcal{C}_0 -maximal. L'intérêt du résultat consiste en l'implication réciproque, qui a priori n'est pas claire. En vertu de cette équivalence entre la \mathcal{C}_0 -maximalité et la C-maximalité, nous dirons dorénavant qu'un espace-temps conformément plat est C-maximal, ou plus simplement maximal (en gardant à l'esprit que c'est au sens conforme). Dans le Chapitre 5, nous proposons des preuves différentes des théorèmes B.7.2 et B.7.3.

Pour finir, nous rappelons les propriétés principales des Cauchy-plongements.

Propriétés des Cauchy-plongements. Dans ce paragraphe, tous les espace-temps considérés sont conformes.

Lemme B.7.1. *Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. Alors, $f(M)$ est un ouvert causalement convexe de N .*

Démonstration. Soit S une hypersurface de Cauchy de M telle que $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N . Montrons d'abord que pour tout $p \in J^+(S)$, l'image de $J^-(p) \cap J^+(S)$ coïncide avec $J^-(f(p)) \cap J^+(f(S))$. Comme f est un plongement conforme, $f(J^-(p) \cap J^+(S))$ est un ouvert de $J^-(f(p)) \cap J^+(f(S))$. Comme $\mathcal{D}^+(S) = J^+(S)$ alors d'après la Proposition B.6.3, $J^-(p) \cap J^+(S)$ est compact. L'image de $J^-(p) \cap J^+(S)$ est donc à la fois ouverte et fermée dans $J^-(f(p)) \cap J^+(f(S))$ qui est connexe. L'égalité s'en suit. De même, pour tout $p \in J^-(S)$, l'image de $J^+(p) \cap J^-(S)$ coïncide avec $J^+(f(p)) \cap J^-(f(S))$. À présent, soient $p, q \in M$ tels que $f(p) \in J^+(f(q))$. On ne perd rien à supposer que $p \in J^+(S)$. On distingue deux cas :

1^{er} **cas.** $q \in J^+(S)$. Alors, le diamant $J(f(p), f(q))$ est contenu dans l'intersection $J^-(f(p)) \cap J^+(f(S))$ qui est égale à $f(J^-(p) \cap J^+(S))$.

2^e **cas.** $q \in J^-(S)$. Alors, le diamant $J(f(p), f(q))$ est contenu dans l'union de $J^-(f(p)) \cap J^+(f(S))$, égal à $f(J^-(p) \cap J^+(S))$, et de $J^+(f(q)) \cap J^-(f(S))$, égal à $f(J^+(p) \cap J^-(S))$.

Dans tous les cas, le diamant $J(f(p), f(q))$ est contenu dans $f(M)$. Donc $f(M)$ est causalement convexe dans N . \square

Corollaire B.7.1. *Un Cauchy-plongement $f : M \rightarrow N$ envoie toute hypersurface de Cauchy de M sur une hypersurface de Cauchy de N .*

Démonstration. Comme f est un Cauchy-plongement, il existe une hypersurface de Cauchy S_0 de M qui est envoyée sur une hypersurface de Cauchy de N . Soit S une autre hypersurface de Cauchy de M . Soit γ une courbe temporelle inextensible de N . Comme $f(S_0)$ est une hypersurface de Cauchy de N , la courbe γ rencontre $f(S_0)$ et par conséquent $f(M)$. Comme, d'après le Lemme B.7.1, $f(M)$ est causalement convexe, l'intersection de γ et $f(M)$ est une courbe temporelle inextensible de $f(M)$ que nous notons $\bar{\alpha}$. Soit α son image réciproque; c'est une courbe temporelle inextensible de M . Par conséquent, α rencontre S en un unique point. Par suite, $\bar{\alpha} \subset \gamma$ rencontre $f(S)$ en un unique point. Donc $f(S)$ est une hypersurface de Cauchy de N . \square

Lemme B.7.2. *Soient $f, g : M \rightarrow N$ deux Cauchy plongements qui coïncident sur une hypersurface de Cauchy S de M . Alors f et g sont égaux sur M .*

Démonstration. Voir [37, Chap. 3, Sect. 2, Lemme 2.4]. \square

Remarque B.7.1. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. Alors, **les espace-temps M et N ont la même topologie**, plus précisément, leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. En effet, nous avons vu que le groupe fondamental d'un espace-temps globalement hyperbolique est isomorphe à celui d'une de ses hypersurfaces de Cauchy. Or, par le Corollaire B.7.1, toute hypersurface de Cauchy de M est homéomorphe à une hypersurface de Cauchy de N . La remarque s'en suit.

De manière plus explicite, pour tout point x de M , l'application f induit un morphisme de groupes $f_* : (\pi_1 M, x) \rightarrow (\pi_1 N, y)$ (avec $y = f(x)$) défini par

$$f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$$

où $[\alpha]$ est la classe d'homotopie d'un lacet α de M basé en x et $[f \circ \alpha]$ est la classe d'homotopie du lacet $f \circ \alpha$ de N basé en y . Soit S une hypersurface de Cauchy de M passant par x . Le fait que M soit difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$ permet facilement de voir que tout lacet de M basé en x est homotope à un lacet de S basé en x . De même, tout lacet de N basé en y est homotope à un lacet de $f(S)$ basé en y . Ainsi, f_* est égal au morphisme induit par l'homéomorphisme $f|_S : S \rightarrow f(S)$. Par conséquent, f_* est bijectif.

Lemme B.7.3. *Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. La frontière de $f(M)$ dans N est l'union disjointe de deux hypersurfaces fermées achronales (éventuellement vides) $\partial^+ f(M)$ et $\partial^- f(M)$ de N telles que*

$$I^-(\partial^+ f(M)) \cap I^+(\partial^- f(M)) \subset f(M).$$

Démonstration. Voir [37, Chap. 3, Sect. 2, Lemme 2.5]. □

B.8 Revêtement universel d'un espace-temps conforme

Soit $(M, [g])$ un espace-temps conforme et soit $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ un revêtement universel. On munit \tilde{M} de la structure de variété différentielle pour laquelle π est un difféomorphisme local. On considère alors sur \tilde{M} le tiré en arrière par π de la classe conforme de g . Soit X un champ de vecteurs de type temps sur M compatible avec l'orientation temporelle de M . Alors π^*X est un champ de vecteurs de type temps sur \tilde{M} . On munit \tilde{M} de l'orientation temporelle définie par π^*X . Ainsi, \tilde{M} est un espace-temps conforme et π est une application conforme qui préserve les orientations temporelles de \tilde{M} et M .

Lemme B.8.1. *Si M est globalement hyperbolique alors \tilde{M} est globalement hyperbolique.*

Démonstration. 1. L'espace-temps \tilde{M} est causal. En effet, s'il existe une courbe causale fermée $\tilde{\gamma}$ de \tilde{M} , alors $\pi \circ \tilde{\gamma}$ est une courbe causale fermée de M . Contradiction.

2. Soit S une hypersurface de Cauchy de M . Posons $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$. Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe temporelle inextensible de \tilde{M} . Comme π est conforme, alors $\gamma := \pi \circ \tilde{\gamma}$ est une courbe de type temps de M . De plus, γ est inextensible. En effet, s'il existe une courbe γ_0 de type temps de M qui contient strictement γ alors γ_0 se relève en une courbe de type temps de \tilde{M} qui contient strictement $\tilde{\gamma}$. Contradiction. Donc, γ rencontre S en un unique point p . Par conséquent, $\tilde{\gamma}$ rencontre \tilde{S} en des relevés de p . Soient $x, y \in \tilde{\gamma} \cap \tilde{S}$. Supposons que x et y soient distincts. Alors, le segment de la courbe $\tilde{\gamma}$ qui relie x à y se projette sur une courbe de type temps fermée de M . Contradiction. On vient ainsi de montrer que \tilde{S} est une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} . Donc, \tilde{M} est globalement hyperbolique. □

Remarque B.8.1. La réciproque est **fausse** : dans le chapitre 3, nous montrons que l'espace d'Einstein $Ein_{1,n}$ n'est pas globalement hyperbolique alors que son revêtement universel $\widetilde{Ein}_{1,n}$ l'est.

Lemme B.8.2. *Soient M et N deux espace-temps conformes globalement hyperboliques et soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement. On note $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ et $\pi' : \tilde{N} \rightarrow N$ les revêtements universels de M et N . Alors, f se relève en un Cauchy-plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ tel que $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$.*

Démonstration. D'après le théorème de relèvement des applications, f se relève en une application continue $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ de sorte que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{N} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

commute, c'est à dire $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. Vérifions que :

1. \tilde{f} est ouverte : cela découle facilement du fait que $f \circ \pi$ est un homéomorphisme local et π' un revêtement. En effet, soit U_i un ouvert connexe de \tilde{M} sur lequel $f \circ \pi$ est injectif et dont l'image $f \circ \pi(U_i)$ est un ouvert trivialisant de N . Comme $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ et $\tilde{f}(U_i)$ est connexe, $\tilde{f}(U_i)$ est une assiette de π' au dessus de $f \circ \pi(U_i)$, donc un ouvert de \tilde{N} . Comme tout ouvert U peut s'écrire comme une union d'ouverts U_i décrits précédemment, $\tilde{f}(U)$ est l'union des ouverts $\tilde{f}(U_i)$, donc un ouvert de \tilde{N} .
2. \tilde{f} est injective : soient $x, y \in \tilde{M}$ tels que $\tilde{f}(x) = \tilde{f}(y)$. Alors, $\pi' \circ \tilde{f}(x) = \pi' \circ \tilde{f}(y)$ soit $f \circ \pi(x) = f \circ \pi(y)$. Comme f est injective, $\pi(x) = \pi(y)$ soit $y = \gamma.x$ avec $\gamma \in \text{Aut}(\tilde{M})$. Posons $\bar{x} = \pi(x)$ et $\bar{y} = \pi'(\tilde{f}(x))$. Par la théorie des revêtements, il existe un unique $[\alpha] \in (\pi_1 M, \bar{x})$ tel que $\gamma.x = x.[\alpha]$ où $x.[\alpha]$ est l'extrémité du relevé de α à partir de x . Soit $f_* : (\pi_1 M, \bar{x}) \rightarrow (\pi_1 N, \bar{y})$ le morphisme induit par f . Il est clair que $\tilde{f}(x.[\alpha]) = \tilde{f}(x).f_*([\alpha])$. Or, $\tilde{f}(x.[\alpha]) = \tilde{f}(y) = \tilde{f}(x)$. Donc, $\tilde{f}(x).f_*([\alpha]) = \tilde{f}(x)$. L'action de $(\pi_1 N, \bar{y})$ sur la fibre $(\pi')^{-1}(\bar{y})$ étant libre, on en déduit que $f_*([\alpha]) = 1$. Comme f_* est injectif (voir Remarque B.7.1), $[\alpha] = 1$, d'où $x = y$.
3. \tilde{f} envoie une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} sur une hypersurface de Cauchy de \tilde{N} : soit S une hypersurface de Cauchy de M et soit $\tilde{S} = \pi^{-1}(S)$. D'après la preuve du Lemme B.8.1, \tilde{S} est une hypersurface de Cauchy de \tilde{M} . On a : $\pi'(\tilde{f}(\tilde{S})) = \pi' \circ \tilde{f}(\tilde{S}) = f \circ \pi(\tilde{S}) = f(\pi(\tilde{S})) = f(S)$. Autrement dit, $\tilde{f}(\tilde{S})$ est le relevé de l'hypersurface de Cauchy $f(S)$ de N , c'est donc une hypersurface de Cauchy de \tilde{N} .

On vient de montrer que \tilde{f} est un Cauchy-plongement. Le lemme s'en suit. □

Proposition B.8.1. *Soit M un espace-temps conforme globalement hyperbolique. Si \tilde{M} est maximal alors M est maximal.*

Démonstration. Soit $f : M \rightarrow N$ un Cauchy-plongement de M dans un espace-temps conforme globalement hyperbolique N . On note $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ et $\pi' : \tilde{N} \rightarrow N$ les revêtements universels de M et N . D'après le Lemme B.8.2, f se relève en un Cauchy-plongement $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ tel que $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$. Comme \tilde{M} est maximal, \tilde{f} est surjectif. Il résulte alors de l'égalité $\pi' \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ que f est surjectif. Autrement dit, M est maximal. □

Dans [37], C. Rossi a montré que la réciproque est vraie dans le cadre des espace-temps conformément plats.

Théorème B.8.1 ([37, Chap. 7, Corollaire 2.7]). *Soit M un espace-temps conformément plat globalement hyperbolique. Si M est maximal alors \tilde{M} est maximal.*

Dans le Chapitre 5, nous proposons une autre preuve de ce théorème (voir Proposition 5.2.7).

ANNEXE

C

FRONTIÈRE CAUSALE D'UN ESPACE-TEMPS GLOBALEMENT HYPERBOLIQUE

Dans [21], Penrose, Geroch et Kronheimer introduisent la notion de *frontière causale* d'un espace-temps M sous l'unique hypothèse que M est distinguant (cela signifie que deux points distincts de M ont des passés/futurs stricts distincts) ¹. Leur idée est de compléter M en lui attachant une collection de *points idéaux*. Ces derniers correspondent aux points à l'infini de courbes causales inextensibles de M ; ceux dans le futur forment *la frontière causale future* et ceux dans le passé *la frontière causale passée*. Pour éviter certaines difficultés techniques qui n'apporteront rien à la compréhension, nous nous contentons de rappeler ici la construction de Penrose-Geroch-Kronheimer [21] dans le cadre particulier des espace-temps *globalement hyperboliques*. Nous gardons toutefois une forme de généralité puisque nous ne supposons aucune structure particulière sur les espace-temps que nous considérons (ils ne sont pas forcément conformément plats par exemple). Les outils utilisés pour définir la frontière causale ne font appel qu'à la structure causale de l'espace-temps. La construction exposée ci-dessous reste donc valable dans un espace-temps *conforme*. Dans tout ce qui suit, M désignera donc un espace-temps conforme globalement hyperbolique.

1. Cette notion a été introduite par Kronheimer-Penrose dans [29].

C.1 IPs et IFs

Rappelons qu'un sous-ensemble P de M est dit *passé* s'il contient son passé strict. Nous nous intéresserons dans la suite aux *ouverts* passés de M . Remarquons que dans le cas des ouverts, être passé signifie être *égal* à son passé strict. En effet, comme M est globalement hyperbolique, sa topologie coïncide avec la topologie d'Alexandrov, c'est à dire la topologie engendrée par les diamants ouverts de M . Un ouvert U de M est donc toujours contenu dans son passé strict ; il est passé si l'inclusion réciproque est vérifiée, autrement dit si U est *égal* à son passé strict.

Définition C.1.1. Un ouvert passé P de M est dit *indécomposable* s'il ne s'écrit pas comme l'union de deux ouverts passés distincts de P .

Suivant la terminologie de [21], un ouvert passé indécomposable de M est appelé un *IP*².

Exemple C.1.1. Le passé strict d'un point p de M est indécomposable. En effet, supposons par l'absurde, que $I^-(p)$ s'écrive comme l'union de deux ouverts passés Q et R *distincts* de $I^-(p)$. Alors, $Q \not\subset R$ et $R \not\subset Q$. En effet, si $Q \subset R$ alors $I^-(p) = R$ ce qui contredit l'hypothèse " R distinct de $I^-(p)$ ". En inversant les rôles de R et Q , ce raisonnement montre aussi que $R \not\subset Q$. Soient donc $q \in Q \setminus R$ et $r \in R \setminus Q$. Comme $q, r \in I^-(p)$, leurs futurs stricts s'intersectent dans $I^-(p)$. Soit $p' \in I^-(p)$ un point de cette intersection. Alors, $p' \in Q$ ou $p' \in R$. D'une part, $q, r \in I^-(p')$. D'autre part, puisque Q et R sont des sous-ensembles *passés*, $I^-(p') \subset Q \cap R$. Par conséquent, $r \in Q$ ou $q \in R$. Contradiction.

Dans [21, Theorem 2.1], les auteurs montrent que les IPs de M sont exactement *les passés stricts de courbes causales de M* . La preuve repose sur la caractérisation des IPs suivante, que nous utiliserons souvent en pratique.

Lemme C.1.1. *Un ouvert passé P de M est indécomposable si et seulement si pour tous points p, q de P , les futurs stricts de p et de q se rencontrent dans P .*

Démonstration. Supposons que P est un IP. Comme P est un sous-ensemble passé, il est égal à l'union $I^-(P \cap I^+(p)) \cup I^-(P \setminus I^+(p))$. Puisque P est indécomposable, il s'en suit que $P = I^-(P \cap I^+(p))$ ou $P = I^-(P \setminus I^+(p))$. Or, $p \notin I^-(P \setminus I^+(p))$. Donc, $P = I^-(P \cap I^+(p))$. Comme $q \in P$, il existe $r \in P \cap I^+(p)$ tel que $q \in I^-(r)$. Ainsi, r est un point de P à la fois dans le futur strict de p et de q . Réciproquement, supposons que pour tous points p, q de P , les futurs stricts de p et q s'intersectent dans P . Montrons que P est indécomposable. Par l'absurde, supposons que P est égal à l'union de deux ouverts passés Q et R distincts de P . Il existe alors $q \in Q \setminus R$ et $r \in R \setminus Q$. Par hypothèse, il existe un point p de P à la fois dans le futur strict de q et de r . Comme Q et R sont des sous-ensembles passés, $I^-(p) \subset Q \cap R$. Par suite, si $p \in Q$ alors $r \in Q$. Contradiction. Donc, $p \in R$ et $q \in R$. Contradiction. On vient ainsi de montrer que P est indécomposable. \square

Nous rappelons à présent la preuve de [21, Theorem 2.1] :

Proposition C.1.1 ([21, Theorem 2.1]). *Un sous-ensemble passé P de M est un IP si et seulement si P est de la forme $I^-(\gamma)$ où γ est une courbe causale de M .*

2. Il s'agit de l'acronyme de *Indecomposable Past*.

Démonstration. Soit γ une courbe causale de M . Montrons que $I^-(\gamma)$ est un IP. Supposons, par l'absurde, que $I^-(\gamma)$ s'écrive comme l'union de deux ouverts passés Q et R distincts de $I^-(\gamma)$. Alors, il existe $q \in Q \setminus R$ et $r \in R \setminus Q$. Comme $I^-(\gamma)$ est l'union croissante des passés $I^-(p)$ lorsque p parcourt γ vers le futur, il existe un point p de γ tel que $q, r \in I^-(p)$. Par conséquent, $I^+(q)$ et $I^+(r)$ se rencontrent dans $I^-(p)$. Soit $p' \in I^-(p)$ un point de cette intersection. Alors, $p' \in Q$ ou $p' \in R$. Comme Q et R sont des sous-ensembles passés, on en déduit que $I^-(p') \subset Q$ ou $I^-(p') \subset R$. D'où, $r \in Q$ ou $q \in R$. Contradiction. Réciproquement, soit P un IP de M . Montrons qu'il existe une courbe causale γ telle que $I^-(\gamma) = P$. Comme P est un ouvert de M , il est séparable³. Soit donc $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de M dense dans M . Soit q_0 un point de P dans le futur strict de p_0 . Comme q_0, p_1 sont dans P alors, d'après le Lemme C.1.1, les futurs stricts de q_0 et de p_1 se rencontrent dans P . Soit donc q_1 un point de cette intersection. Par le même argument, il existe un point q_2 dans P à la fois dans le futur strict de q_1 et p_2 . Nous construisons ainsi une suite $\{q_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de P telle que $q_n \in I^-(q_{n+1})$ et $p_n \in I^-(q_n)$. Comme $q_n \in I^-(q_{n+1})$, il existe une courbe temporelle γ reliant tous les points q_n . Vérifions que $P = I^-(\gamma)$. Remarquons que $I^-(\gamma)$ est égal à l'union croissante des $I^-(q_n)$. Comme $q_n \in P$ et que P est un sous-ensemble passé, $I^-(q_n)$ est contenu dans P . D'où, $I^-(\gamma) \subset P$. Réciproquement, soit $p \in P$. Montrons qu'il existe un entier n tel que $p \in I^-(q_n)$. Comme $\{p_n\}$ est dense dans P , l'ouvert $P \cap I^+(p)$ de P contient les p_n à partir d'un certain rang. Comme $p_n \in I^-(q_n)$, il s'en suit qu'à partir d'un certain rang, $q_n \in P \cap I^+(p)$; autrement dit $p \in I^-(q_n)$. Donc, $p \in I^-(\gamma)$. D'où $P = I^-(\gamma)$. \square

Soit γ une courbe causale de M . On distingue deux cas :

1. γ admet une extrémité future $p \in M$; alors $I^-(\gamma)$ coïncide avec $I^-(p)$. Dans ce cas, $I^-(\gamma)$ est dit *propre*;
2. γ est inextensible dans le futur. Dans ce cas, $I^-(\gamma)$ est dit *terminal*.

Dans [21], les IPs propres sont appelés des *PIPs*⁴ et les IPs terminaux sont appelés des *TIPs*⁵. Ainsi, les IPs de M se scindent en deux classes : les PIPs, qui correspondent aux passés stricts de points de M et les TIPs, qui correspondent aux passés stricts de courbes causales de M inextensibles dans le futur. Les IFs, PIFs et TIFs de M sont définis de manière similaire en renversant l'orientation du temps. Conformément aux notations de [21], l'ensemble des IPs sera noté \hat{M} et l'ensemble des IFs \check{M} .

L'espace-temps M étant globalement hyperbolique, il est distinguant et s'identifie ainsi à l'ensemble de ses PIPs, par l'application $p \in M \mapsto I^-(p)$, et à l'ensemble de ses PIFs par l'application $p \in M \mapsto I^+(p)$. Les TIPs et les TIFs quant à eux, peuvent être vus comme les points à l'infini passés et futurs des courbes causales inextensibles de M , appelés *points idéaux* dans [21]. On peut ainsi voir \hat{M} (resp. \check{M}) comme un complété partiel de M auquel on a ajouté les extrémités futures (resp. passées) des courbes causales inextensibles de M . Ces points idéaux forment *la frontière causale* de M :

3. Tous les espace-temps que nous considérons sont supposés *séparables*, c'est à dire qu'ils contiennent une partie au plus dénombrable dense. Tout ouvert d'un espace séparable est séparable.

4. Il s'agit de l'acronyme de *Proper Indecomposable Past set*.

5. Il s'agit de l'acronyme de *Terminal Indecomposable Past set*.

Définition C.1.2. La *frontière causale future* (resp. *passée*) de M , notée $\partial_c^+ M$ (resp. $\partial_c^- M$), est l'ensemble des TIPs (resp. TIFs) de M .

Remarque C.1.1. L'espace \hat{M} (resp. \check{M}) des IPs (resp. IFs) est l'union disjointe de M et $\partial_c^+ M$ (resp. $\partial_c^- M$).

Définition C.1.3. Le *complété causal* de M , noté M^\sharp , est l'union disjointe de M et de ses frontières causales, future et passée.

Illustrons ces notions par quelques exemples qui montreront, entre autre, la pertinence de la terminologie *frontière* dans la Définition C.1.2.

(C.1.1) Exemple 1 : Le revêtement universel de l'espace d'Einstein. Il découle immédiatement de la description des courbes causales inextensibles de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir Proposition 3.2.6) que le passé (futur) strict de toute courbe causale inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est égal à l'espace tout entier. Il existe donc un unique TIP et un unique TIF de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, tous deux égaux à $\widetilde{Ein}_{1,n}$ lui-même.

(C.1.2) Exemple 2 : L'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$. Un TIP remarquable de $\mathbb{R}^{1,n}$ est le passé strict de la droite temporelle $x_1 = \dots = x_n = 0$, égal à l'espace tout entier. Le futur strict de cette droite est aussi égal à $\mathbb{R}^{1,n}$. L'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ est donc à la fois un TIP et un TIF. Contrairement à $\widetilde{Ein}_{1,n}$, il existe d'autres TIPs et d'autres TIFs dans $\mathbb{R}^{1,n}$. En effet, d'après le Lemme 1.2.3, les passés (resp. futurs) stricts d'hyperplans lumières sont des TIPs (resp. TIFs). En fait, nous allons voir qu'il n'y en a pas d'autres.

Une démarche pour décrire la frontière causale de $\mathbb{R}^{1,n}$ consiste à plonger conformément $\mathbb{R}^{1,n}$ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Nous avons vu dans la Section 3.2 (voir les propositions 3.2.4 et 3.2.8) que $\mathbb{R}^{1,n}$ se réalise de manière conforme dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ comme l'ensemble des points qui ne sont pas causalement reliés à un point p de $\widetilde{Ein}_{1,n}$, noté $\text{Mink}_0(p)$. Ce dernier est égal au diamant $I(\sigma(p), \sigma^{-1}(p))$ où $\sigma(p)$ et $\sigma^{-1}(p)$ sont les premiers points conjugués, futur et passé, de p (voir Définition (3.2.3), Section 3.2.2). Sa frontière dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ est le cône lumière de p et admet deux composantes connexes régulières, notées $\mathcal{J}^+(p)$ et $\mathcal{J}^-(p)$ (voir Section 3.6). Nous allons voir que la frontière causale future (resp. passée) de $\text{Mink}_0(p)$ s'identifie à la réunion de $\mathcal{J}^+(p)$ (resp. $\mathcal{J}^-(p)$) et de $\{\sigma(p)\}$ (resp. $\{\sigma^{-1}(p)\}$).

D'une part, l'intersection de $I^-(\sigma(p))$ avec $\text{Mink}_0(p)$ est égale à $\text{Mink}_0(p)$. D'autre part, pour tout point q de $\mathcal{J}^+(p)$, l'intersection de $I^-(q)$ avec $\text{Mink}_0(p)$ est le passé strict d'un hyperplan lumière de $\text{Mink}_0(p)$ (voir Section 3.6.1). Nous avons remarqué plus haut, que $\text{Mink}_0(p)$ et les passés stricts d'hyperplans lumières sont des TIPs de $\text{Mink}_0(p)$. Tout point q de $\mathcal{J}^+(p) \cup \{\sigma(p)\}$ définit donc un unique TIP de $\text{Mink}_0(p)$ donné par $I^-(q) \cap \text{Mink}_0(p)$. Réciproquement, soit P un TIP de $\text{Mink}_0(p)$; il est égal au passé strict dans $\text{Mink}_0(p)$ d'une courbe causale inextensible γ de $\text{Mink}_0(p)$. Comme $\text{Mink}_0(p)$ est causalement convexe, le passé strict de γ dans $\text{Mink}_0(p)$ coïncide avec l'intersection de $I^-(\gamma)$ avec $\text{Mink}_0(p)$. Soit $\tilde{\gamma}$ une courbe causale inextensible de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contenant γ .

6. On désigne par $I^-(\gamma)$ le passé strict de γ dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Puisque $\text{Mink}_0(p)$ est causalement convexe, l'intersection de $\tilde{\gamma}$ avec $\text{Mink}_0(p)$ est exactement γ . Il résulte facilement de la Remarque 3.2.3 que $\tilde{\gamma}$ rencontre $\mathcal{J}^+(p) \cup \{\sigma(p)\}$ en un point ξ^+ dans son futur. Puisque $I^-(\tilde{\gamma})$ est l'union croissante des passés stricts $I^-(q)$ lorsque q parcourt $\tilde{\gamma}$ vers le futur, $I^-(\tilde{\gamma}) = I^-(\xi^+)$. D'où, P est égal à $I^-(\xi^+) \cap \text{Mink}_0(p)$. On vient de montrer que l'application de $\mathcal{J}^+(p) \cup \{\sigma(p)\}$ dans la frontière causale future de $\text{Mink}_0(p)$ qui associe à un point q le TIP $I^-(q) \cap \text{Mink}_0(p)$, est bijective. Cela prouve ce que nous avons annoncé plus haut, à savoir que les seuls TIPs de $\text{Mink}_0(p)$ sont $\text{Mink}_0(p)$ lui-même et les passés stricts d'hyperplans lumières. Par symétrie, on montre que l'application de $\mathcal{J}^-(p) \cup \{\sigma^{-1}(p)\}$ dans la frontière causale passée de $\text{Mink}_0(p)$ qui associe à tout point q le TIF $I^+(q) \cap \text{Mink}_0(p)$ est bijective. Ainsi, les seuls TIFs de $\text{Mink}_0(p)$ sont $\text{Mink}_0(p)$ et les futurs stricts d'hyperplans lumières.

(Figure)

La frontière de $\text{Mink}_0(p)$ dans $\widetilde{\text{Ein}}_{1,n}$ correspond au bord conforme à l'infini de $\mathbb{R}^{1,n}$ défini par Penrose [36] : les points $\sigma^{-1}(p), p, \sigma(p)$ y sont notés i^-, i_0, i^+ respectivement. Les composantes $\mathcal{J}^+(p), \mathcal{J}^-(p)$, quant à elles, sont simplement notées $\mathcal{J}^+, \mathcal{J}^-$ et sont appelées *bords de Penrose*.

(Figure)

Il résulte de la description ci-dessus l'énoncé suivant.

Lemme C.1.2. *La frontière causale future (resp. passée) de $\mathbb{R}^{1,n}$ est en bijection avec la réunion du bord de Penrose \mathcal{J}^+ (resp. \mathcal{J}^-) et du singleton $\{i^+\}$ (resp. $\{i^-\}$).*

De manière plus synthétique, la frontière causale de $\mathbb{R}^{1,n}$ s'identifie au bord conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ privé du point i_0 .

(C.1.3) Exemple 3 : Domaines réguliers de $\mathbb{R}^{1,n}$. Soit Ω un domaine régulier propre⁷ futur de $\mathbb{R}^{1,n}$ (par symétrie, on obtient une description similaire des domaines passés). Nous allons voir qu'il résulte facilement du paragraphe précédent une description des TIPs et des TIFs de Ω . Commençons par faire la remarque clé suivante.

Remarque C.1.2. L'ouvert Ω étant causalement convexe, l'intersection de toute courbe causale inextensible de $\mathbb{R}^{1,n}$ avec Ω est *connexe*. Il en résulte que toute courbe causale inextensible de Ω se réalise comme l'intersection d'une courbe causale inextensible de $\mathbb{R}^{1,n}$ avec Ω .

Décrivons d'abord la frontière causale passée de Ω qui se visualise dans $\mathbb{R}^{1,n}$.

Lemme C.1.3. *La frontière causale passée de Ω s'identifie à la frontière de Ω dans $\mathbb{R}^{1,n}$.*

7. Cela signifie que Ω est l'intérieur de l'intersection des futurs d'au moins deux hyperplans lumières de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Démonstration. Soit γ une courbe causale inextensible de Ω . Comme Ω est futur-complet, $I^+(\gamma)$ est contenu dans Ω . Notons F le TIF $I^+(\gamma)$ de Ω . D'après la Remarque C.1.2, la courbe γ est égale à l'intersection d'une courbe causale inextensible $\hat{\gamma}$ de $\mathbb{R}^{1,n}$ avec Ω . Comme Ω est propre, $\hat{\gamma}$ rencontre $\partial\Omega$ en unique point γ^- (voir Proposition 2.3.7). Comme $I^+(\hat{\gamma})$ est l'union croissante des $I^+(p)$ lorsque p parcourt γ dans la direction du passé, $I^+(\gamma)$ coïncide avec $I^+(\gamma^-)$. Autrement dit, F est égal à $I^+(\gamma^-)$. Soit α une autre courbe causale inextensible de Ω dont le futur strict coïncide avec F . Si α^- est l'extrémité passée de α dans $\partial\Omega$, alors d'après ce qui précède, $I^+(\alpha^-)$ est égal à F . D'où, $I^+(\gamma^-) = I^+(\alpha^-)$. Comme $\mathbb{R}^{1,n}$ est distinguant, $\gamma^- = \alpha^-$. On vient donc d'associer à tout TIF de Ω un unique point de $\partial\Omega$. Réciproquement, pour tout point p de $\partial\Omega$, l'ouvert $I^+(p)$ est un IF de Ω . Si $I^+(p)$ était un PIF de Ω alors, il existerait un point $q \in \Omega$ tel que $I^+(p) = I^+(q)$. Comme $\mathbb{R}^{1,n}$ est distinguant, $p = q \in \Omega$. Contradiction. Donc, $I^+(p)$ est un TIF de Ω . \square

À présent, décrivons la frontière causale future. Puisque Ω est causalement convexe dans $\mathbb{R}^{1,n}$, le passé strict d'un point p de Ω dans Ω est égal à l'intersection de $I^-(p)$ avec Ω . Par conséquent, d'après la Remarque C.1.2, les TIPs de Ω sont exactement les intersections $I^-(\gamma) \cap \Omega$ où γ est une courbe causale inextensible de $\mathbb{R}^{1,n}$. Il résulte alors de la description des TIPs de $\mathbb{R}^{1,n}$ présentée dans le paragraphe (C.1.2), le lemme suivant.

Lemme C.1.4. *La frontière causale future de Ω s'identifie aux points du bord conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$ dans le futur strict de Ω .*

Remarque C.1.3. On montre dans la Section 3.7 que Ω est défini par un fermé Λ du bord de Penrose \mathcal{J}^+ . La frontière causale future de Ω est alors l'union de $\{i^+\}$ et de l'ouvert $U(\Lambda)$, défini dans la Section 3.7, égal au complémentaire dans \mathcal{J}^+ de l'union des segments fermés de photons reliant un point de Λ à i_0 . De manière synthétique, si l'on voit Ω comme un ouvert de $\widetilde{Ein}_{1,n}$ contenu dans une carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$, la frontière causale de Ω s'identifie à la frontière de Ω dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ privée du fermé Λ de $\mathcal{J}^+(p)$.

Remarque C.1.4. Si Ω n'est pas propre, c'est à dire est égal au futur strict d'un hyperplan lumière P de $\mathbb{R}^{1,n}$, alors :

1. sa frontière causale future s'identifie à l'union de $\{i^+\}$ et du complémentaire dans \mathcal{J}^+ de la géodésique lumière reliant le point p correspondant à l'hyperplan lumière P à i_0 (extrémités comprises) ;
2. sa frontière causale passée s'identifie à l'union de la géodésique lumière reliant i_0 au premier point conjugué passé de p , privée de l'extrémité i_0 , et de l'hyperplan lumière P .

C.2 Relation de causalité sur la frontière causale

Nous venons de voir dans la section précédente, que le complété causal de $\mathbb{R}^{1,n}$ se réalise dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ comme l'adhérence d'une carte de Minkowski $\text{Mink}_0(p)$ privée du point p . Le complété causal de M hérite alors naturellement des relations de causalité \prec

et \preceq sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$. Voyons comment les relations de causalité entre les points de l'adhérence de $\text{Mink}_0(p)$ privée du point p , se traduisent en des relations de causalité entre les IPs puis entre les IFs de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Un IP Q de $\text{Mink}_0(p)$ est de la forme

$$Q = I^-(q) \cap \text{Mink}_0(p)$$

où q est un point de $\text{Mink}_0(p)$ ou de sa frontière causale future $\partial^+\text{Mink}_0(p)$. Si q est un point de $\text{Mink}_0(p)$ alors Q est un PIP sinon c'est un TIP. Soient q, r deux points de $\text{Mink}_0(p) \cup \partial^+\text{Mink}_0(p)$. Il est clair que

$$\begin{aligned} q \preceq r &\Leftrightarrow Q \subset R \\ q \prec r &\Leftrightarrow Q \subset I^-(r') \text{ avec } r' \in R \end{aligned}$$

où $I^-(r')$ est le passé strict de r' dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$.

Remarque C.2.1. Comme Q est un sous-ensemble de $\text{Mink}_0(p)$, l'inclusion $Q \subset I^-(r')$ est équivalente à $Q \subset I^-(r') \cap \text{Mink}_0(p)$ autrement dit à l'inclusion de Q dans le passé strict de r' dans $\text{Mink}_0(p)$.

(Figure)

On définit alors des relations \prec_{IP} et \preceq_{IP} sur l'ensemble des IPs de $\mathbb{R}^{1,n}$ comme suit :

$$Q \preceq_{IP} R \Leftrightarrow Q \subset R \tag{C.1}$$

$$Q \prec_{IP} R \Leftrightarrow Q \subset I^-(r') \text{ avec } r' \in R \tag{C.2}$$

où $I^-(r')$ désigne le passé strict de r' dans $\mathbb{R}^{1,n}$. Il est facile de vérifier que

1. \preceq_{IP} est une relation d'ordre, c'est à dire qu'elle est réflexive, anti-symétrique et transitive ;
2. \prec_{IP} est une relation anti-réflexive (autrement dit, aucun IP Q ne satisfait $Q \prec_{IP} Q$), anti-symétrique et transitive.
3. Si $P \prec_{IP} Q$ alors $P \preceq_{IP} Q$.
4. Chacune des assertions $P \preceq_{IP} Q \prec_{IP} R$ et $P \prec_{IP} Q \preceq_{IP} R$ implique $P \prec_{IP} R$.

Les relations \prec_{IP} et \preceq_{IP} sont alors respectivement des relation *de chronologie* et *de causalité* au sens de Kronheimer-Penrose [29]. Par symétrie, les relations \prec et \preceq sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ induisent des relations de causalité \prec_{IF} et \preceq_{IF} sur l'ensemble des IFs de $\mathbb{R}^{1,n}$.

Nous avons vu également dans la section précédente, que le complété causal d'un domaine régulier propre futur Ω de $\mathbb{R}^{1,n}$ se réalise dans $\widetilde{Ein}_{1,n}$ (voir § (C.1.3)). Le raisonnement ci-dessus permet de montrer, de manière similaire, que les relations de causalité \prec et \preceq sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ induisent des relations de causalité \preceq_{IP} et \prec_{IP} sur l'ensemble des IPs de Ω définies par les propositions C.1 et C.2 où Q et R désignent, dans ce contexte, des IPs de Ω , et $I^-(r')$ désigne le passé strict de r' dans Ω . Par symétrie, les relations \prec et

\preceq sur $\widetilde{Ein}_{1,n}$ induisent des relations de causalité \prec_{IF} et \preceq_{IF} sur l'ensemble des IFs de Ω .

Plus généralement, soit M un espace-temps conforme globalement hyperbolique. L'ensemble \hat{M} des IPs peut être muni de relations de chronologie et de causalité, notées \preceq_{IP} et \prec_{IP} , définies par les propositions C.1 et C.2 où Q et R désignent cette fois, des IPs de M et $I^-(r')$ désigne le passé strict de r' dans M . L'ensemble \hat{M} est alors un *espace causal* au sens de Kronheimer-Penrose [29, Définition 5.13]. Rappelons que M s'identifie à l'ensemble de ses PIPs par l'application $I^- : p \in M \mapsto I^-(p)$. Comme M est globalement hyperbolique, les équivalences suivantes s'établissent facilement :

$$\begin{aligned} p \prec q &\Leftrightarrow I^-(p) \prec_{IP} I^-(q) \\ p \preceq q &\Leftrightarrow I^-(p) \preceq_{IP} I^-(q) \end{aligned}$$

où \prec et \preceq sont les relations de chronologie et de causalité sur M . Ces équivalences montrent que les relations \prec_{IP} et \preceq_{IP} étendent les relations de causalité \prec et \preceq sur M à sa frontière causale future.

Définition C.2.1. Le *passé strict* (resp. *causal*) d'un IP P dans \hat{M} , noté $I_{IP}^-(P)$ (resp. $J_{IP}^-(P)$), est l'ensemble des IPs Q tels que $Q \prec_{IP} P$ (resp. $Q \preceq_{IP} P$).

De manière symétrique, le *futur strict* (resp. *causal*) d'un IP P dans \hat{M} , noté $I_{IP}^+(P)$ (resp. $J_{IP}^+(P)$), est l'ensemble des IPs Q tels que $P \prec_{IP} Q$ (resp. $P \preceq_{IP} Q$).

Lemme C.2.1. Soit P un IP de M . Le passé strict de P dans \hat{M} ne contient que des PIPs et s'identifie à l'ouvert P de M .

Démonstration. Soit $Q \in I_{IP}^-(P)$. Il existe $p \in P$ tel que $Q \subset I^-(p)$. D'après la Proposition C.1.1, Q est égal au passé strict d'une courbe causale future $\gamma : I \rightarrow M$. Comme $I^-(\gamma) \subset I^-(p)$, alors pour tout $t \in I$, on a $I^-(\gamma(t)) \subset I^-(p)$, donc $\gamma(t) \in J^-(p)$. Soit $t_0 \in I$. Pour tout $t \in I$ tel que $t \geq t_0$, $\gamma(t)$ appartient au diamant $J(p, \gamma(t_0))$. Comme M est globalement hyperbolique, ce diamant est compact. La courbe γ admet donc un point limite futur q dans $J(p, \gamma(t_0))$. D'où Q est le PIP $I^-(q)$. Comme P est ouvert, il existe $p' \in P$ tel que $p \in I^-(p')$. Donc, $J^-(p) \subset I^-(p')$ et comme P est passé, $I^-(p') \subset P$. D'où, $J^-(p) \subset P$, en particulier $q \in P$. On vient de montrer que tout élément Q de $I_{IP}^-(P)$ est le passé strict d'un point q de P . Réciproquement, si $q \in P$ alors, comme P est ouvert, il existe $p \in P$ tel que $q \in I^-(p)$. D'où, $I^-(q) \subset I^-(p)$. Autrement dit, le PIP $I^-(q)$ est dans le passé strict de P dans \hat{M} . \square

Exemple C.2.1. Le passé strict d'un IP P de $\mathbb{R}^{1,n}$ dans $\widehat{\mathbb{R}^{1,n}}$ s'identifie au passé strict d'un point de $\mathbb{R}^{1,n}$ si P est un PIP, au passé strict d'un hyperplan lumière sinon.

Remarque C.2.2. Par un raisonnement similaire à celui de la preuve du Lemme C.2.1, le passé *causal* d'un PIP $P = I^-(p)$ ne contient que des PIPs et s'identifie à $J^-(p)$.

Corollaire C.2.1. Le futur strict d'un TIP P de M est toujours vide.

Démonstration. S'il existait $Q \in I_{IP}^+(P)$ alors $P \in I_{IP}^-(Q)$ et d'après la Remarque C.2.1, P serait un PIP. Contradiction. \square

Pour finir, donnons une caractérisation pratique, facile à établir, des IPs dans le futur strict d'un PIP de M .

Lemme C.2.2. *Soit $P = I^-(p)$ un PIP de M . Un IP Q est dans le futur strict de P dans \hat{M} si et seulement si Q rencontre $I^+(p)$.*

Remarque C.2.3. Les IPs de M qui rencontrent $I^+(p)$ sont exactement les IPs de $I^+(p)$. En effet, soulignons d'abord que, puisque $I^+(p)$ est causalement convexe dans M , c'est un espace-temps globalement hyperbolique. Il y a donc bien du sens à parler de IPs de $I^+(p)$. Notre affirmation découle alors immédiatement du fait que toute courbe causale inextensible de $I^+(p)$ se réalise comme l'intersection d'une courbe causale inextensible de M qui rencontre $I^+(p)$.

Remarque C.2.4. Il résulte du Lemme C.2.2 et de la Remarque C.2.3 que le futur strict de $P = I^-(p)$ dans \hat{M} s'identifie à l'union disjointe de $I^+(p)$ et de sa frontière causale future.

Par symétrie, les relations de causalité sur M induisent naturellement des relations de causalité \prec_{IF}, \preceq_{IF} sur l'ensemble \check{M} des IFs de M . On définit alors les passés (futurs), strict et causal, d'un IF. En renversant l'orientation, on obtient des énoncés analogues à ceux des lemmes ci-dessus, pour les IFs de M .

C.3 Topologie sur la frontière causale

Nous allons voir que la topologie de M s'étend naturellement à sa frontière causale. Par souci de légèreté, nous nous contentons de décrire la topologie de la frontière causale future $\partial_c^+ M$. En renversant l'orientation du temps, nous obtenons une description similaire pour la frontière causale passée $\partial^- M$.

Commençons par définir une topologie sur l'ensemble \hat{M} des IPs de M . Rappelons d'abord que la topologie de M coïncide avec celle engendrée par la famille \mathcal{A} constituée des futurs et passés stricts de points de M et des complémentaires dans M des futurs et des passés causaux de points de M :

$$\mathcal{A} = \{I^+(p), I^-(p), M \setminus J^+(p), M \setminus J^-(p); p \in M\}.$$

Autrement dit, une partie de M est un ouvert si c'est une réunion (quelconque) d'intersections finies d'éléments de \mathcal{A} .

On va étendre naturellement les ouverts de la famille \mathcal{A} à $\hat{M} = M \sqcup \partial_c^+ M$: Soit $\hat{\mathcal{A}}$ la famille de parties de \hat{M} de la forme $I_{IP}^+(P), I_{IP}^-(P), \hat{M} \setminus J_{IP}^+(P), \hat{M} \setminus J_{IP}^-(P)$ où $P = I^-(p)$ est un PIP de M . Notons que l'intersection de M avec chacune de ces parties s'identifie à $I^+(p), I^-(p), M \setminus J^+(p), M \setminus J^-(p)$ respectivement. On munit alors \hat{M} de la topologie \mathcal{T} engendrée par $\hat{\mathcal{A}}$.

Remarque C.3.1. Soit $P = I^-(p)$ un PIP de M .

1. $I_{IP}^-(P)$ s'identifie au passé strict de p dans M (voir Remarque C.2.2);

2. $I_{IP}^+(P)$ s'identifie à l'union disjointe du futur strict de p dans M et de l'ensemble des TIPs de M qui rencontrent $I^+(p)$ (voir Lemme C.2.2) ;
3. $\hat{M} \setminus J_{IP}^-(P)$ s'identifie à l'union disjointe de $M \setminus J^-(p)$ et de toute la frontière causale de M ;
4. $\hat{M} \setminus J_{IP}^+(P)$ s'identifie à l'union disjointe de $M \setminus J^+(p)$ et de l'ensemble des TIPs de M dont l'adhérence est contenue dans $M \setminus J^+(p)$.

(Figure)

Lemme C.3.1. *La topologie \mathcal{T} est séparée.*

Démonstration. Soient P, Q deux IPs distincts. Alors, $Q \setminus P$ ou $P \setminus Q$ est non-vide. Quitte à inverser les rôles, on peut supposer que $Q \setminus P$ est non-vide. Le complémentaire dans Q de l'adhérence \bar{P} de P dans M est non-vide. En effet, dans le cas contraire, Q serait contenu dans \bar{P} . Or, comme P est passé, il découle de la Proposition B.4.2 que \bar{P} est l'union disjointe de P et de sa frontière dans M . Autrement dit, l'intérieur de \bar{P} est P . Par conséquent, l'inclusion $Q \subset \bar{P}$ impliquerait $Q \subset P$ soit $Q \setminus P = \emptyset$. Contradiction. Soit donc $q \in Q \setminus \bar{P}$. On pose $Q = I^-(q)$. Alors, les ouverts

$$\begin{aligned} U &= \hat{M} \setminus J_{IP}^+(Q) \\ V &= I_{IP}^+(Q) \end{aligned}$$

sont des voisinages ouverts disjoints de P et Q respectivement. \square

Lemme C.3.2. *L'application $I^- : p \in M \mapsto I^-(p) \in \hat{M}$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. L'espace-temps M étant globalement hyperbolique, sa topologie coïncide avec la topologie d'Alexandrov, c'est à dire la topologie engendrée par les diamants ouverts de M . L'image d'un diamant $I(p, q)$ est l'ouvert $I_{IP}^-(P) \cap I_{IP}^+(Q)$ avec $P = I^-(p)$ et $Q = I^-(q)$. L'image de tout ouvert de M est donc une union d'ouverts de la forme $I_{IP}^-(P) \cap I_{IP}^+(Q)$. Par conséquent, I^- est ouverte. Soit $P = I^-(p)$ un PIP de M . Les images réciproques de $I_{IP}^+(P)$, $I_{IP}^-(P)$, $\hat{M} \setminus J_{IP}^+(P)$, $\hat{M} \setminus J_{IP}^-(P)$ sont les ouverts $I^+(p)$, $I^-(p)$, $M \setminus J^+(p)$, $M \setminus J^-(p)$ qui engendrent la topologie d'Alexandrov. L'application I^- est donc continue. \square

Le Lemme C.3.2 montre que la topologie \mathcal{T} est une extension de celle de M .

Lemme C.3.3. *L'image de M par I^- est dense dans \hat{M} .*

Démonstration. Soit P un IP de M . D'après la Proposition C.1.1, P est le passé strict d'une courbe causale future $\gamma : I \rightarrow M$. Soit $\{p_n\}$ une suite croissante (pour \preceq) de points de γ . Montrons que la suite $\{P_n\}$ définie par $P_n = I^-(p_n)$, converge vers P . Soit $q \in P$. On pose $Q = I^-(q)$. Comme $P = I^-(\gamma)$, à partir d'un certain rang, $p_n \in I^+(q)$ soit $P_n \in I_{IP}^+(Q)$. Donc, $\{P_n\}$ converge vers P . \square

C.4 TIPs et TIFs maximaux

La restriction de la relation de causalité \preceq_{IP} à la frontière causale future $\partial_c^+ M$, notée \preceq_{TIP} , est une relation d'ordre (partiel) sur $\partial_c^+ M$. Il est alors naturel de s'intéresser aux éléments de $\partial_c^+ M$ qui sont maximaux pour la relation d'ordre \preceq_{TIP} :

Définition C.4.1. Un TIP P de M est dit *maximal* s'il n'existe aucun TIP, autre que P , dans son futur causal.

Par symétrie, la restriction de la relation de causalité \preceq_{IF} à la frontière causale passée $\partial_c^- M$, notée \preceq_{TIF} , est une relation d'ordre (partiel) sur $\partial_c^- M$. Les TIFs maximaux sont les TIF F dont le passé causal ne contient aucun autre TIF que F . Donnons quelques exemples.

- Exemple C.4.1.*
1. L'espace de Minkowski admet un unique TIP maximal et unique TIF maximal égaux à $\mathbb{R}^{1,n}$. Le TIP (TIF) maximal de $\mathbb{R}^{1,n}$ s'identifie au point i^+ (resp. i^-) du bord conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$.
 2. Un domaine régulier propre futur Ω admet un unique TIP maximal égal à Ω ; il s'identifie au point i^+ du bord conforme de $\mathbb{R}^{1,n}$. Les *points singuliers*, au sens de Bonsante [15, Section 4], de la frontière de Ω dans $\mathbb{R}^{1,n}$ sont des TIFs maximaux⁸ de Ω .

La proposition suivante prouve l'existence de TIPs maximaux de M .

Proposition C.4.1. *La frontière causale future $\partial_c^+ M$ admet au moins un TIP maximal.*

Démonstration. Il s'agit de montrer l'existence d'un élément maximal de la frontière causale $\partial_c^+ M$ pour la relation d'ordre \preceq_{TIP} . Pour cela, nous utilisons le lemme de Zorn, selon lequel un ensemble ordonné E admet un élément maximal si toute chaîne de E admet un majorant. Soit donc C une chaîne de $\partial_c^+ M$, c'est à dire un sous-ensemble totalement ordonné de $\partial_c^+ M$. Le candidat naturel à être un majorant de C est l'ouvert P de M égal à l'union croissante des éléments de C . Vérifions que P est un TIP. Soit $p \in P$ et soit $q \in I^-(P)$. Par définition, il existe $Q \in C$ tel que $p \in Q$. Comme Q est passé, $q \in Q$ donc $q \in P$. L'ouvert P est donc passé. Supposons que P s'écrive comme l'union de deux ouverts passés R et S . Alors, tout TIP Q dans C est l'union des ouverts passés $Q \cap R$ et $Q \cap S$. Comme Q est indécomposable, alors $Q = Q \cap R$ ou $Q = Q \cap S$. D'où, $P = R$ ou $P = S$. Donc, P est indécomposable. Tout $Q \in C$ est dans le passé causal de P dans \hat{M} . D'après la Remarque C.2.2, si P est un PIP alors Q est un PIP. Contradiction. Donc, P est un TIP. On vient ainsi de montrer que P est un majorant de C . D'après le Lemme de Zorn, $\partial_c^+ M$ admet donc un élément maximal. \square

C.5 Frontière causale et maximalité

Soient M et N deux espace-temps conformes globalement hyperboliques et soit f un Cauchy-plongement conforme de M dans N . Dans l'Annexe B.7, nous avons vu que

8. Notons qu'un TIF maximal de Ω n'est pas forcément singulier.

la frontière de $f(M)$ dans N est l'union disjointe de deux fermés achronaux étanches : une frontière future $\partial^+ f(M)$ et une frontière passée $\partial^- f(M)$ (voir Lemme B.7.3). Il existe un lien étroit entre la frontière conforme $\partial^+ f(M)$ ($\partial^- f(M)$) de M dans N et sa frontière causale $\partial_c^+ M$ (resp. $\partial_c^- M$). Il s'avère, en effet, que tout point de $\partial^+ f(M)$ définit un unique TIP de M :

Proposition C.5.1. *Si $\partial^+ f(M)$ est non-vide alors pour tout point p de $\partial^+ f(M)$, la pré-image par f de l'intersection de $f(M)$ avec le passé strict de p dans N , notée P , est un TIP de M .*

La preuve de la Proposition C.5.1 utilise le lemme suivant.

Lemme C.5.1. *Supposons $\partial^+ f(M)$ non-vide. Soit $p \in \partial^+ f(M)$. Alors*

$$I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(p).$$

Démonstration. L'inclusion $I^-(I^-(p) \cap f(M)) \subset I^-(p)$ est évidente. Réciproquement, soit $q \in I^-(p)$. D'après le Lemme B.7.1, $f(M)$ est causalement convexe dans N . Ainsi, l'intersection de $f(M)$ avec toute courbe temporelle inextensible passant par p et q est connexe. Il existe donc un point r de cette intersection compris entre p et q , autrement dit $q \in I^-(r)$ avec $r \in I^-(p) \cap f(M)$. Donc, $q \in I^-(I^-(p) \cap f(M))$. \square

Preuve de la Proposition C.5.1. L'application f étant continue, P est un ouvert de M . Vérifions que P est passé. Soit $q \in P$ et soit $r \in I^-(q)$. Par définition, $f(q) \in I^-(p)$. Comme f est conforme, $r \in I^-(q)$ implique $f(r) \in I^-(f(q))$. Comme la relation de chronologie est transitive, $f(r) \in I^-(f(q))$ et $f(q) \in I^-(p)$ entraîne $f(r) \in I^-(p)$. D'où, $r \in P$. À présent, vérifions que P est indécomposable. Supposons que P soit égal à l'union de deux ouverts passés Q et R . Alors, $f(P)$ s'écrit comme l'union des deux ouverts passés $f(Q)$ et $f(R)$ de $f(M)$. Posons $Q' = f(Q)$ et $R' = f(R)$. Comme $f(P) = I^-(p) \cap f(M)$, alors $I^-(p) \cap f(M) = Q' \cup R'$. D'où,

$$I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(Q' \cup R') \tag{C.3}$$

$$= I^-(Q') \cup I^-(R'). \tag{C.4}$$

D'après le Lemme C.5.1, $I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(p)$. L'égalité (C.4) s'écrit alors $I^-(p) = I^-(Q') \cup I^-(R')$. Or, $I^-(p)$ est indécomposable. Donc, $I^-(p) = I^-(Q')$ ou $I^-(p) = I^-(R')$. Par suite,

$$I^-(p) \cap f(M) = I^-(Q') \cap f(M) \text{ ou } I^-(p) \cap f(M) = I^-(R') \cap f(M). \tag{C.5}$$

Comme $f(M)$ est causalement convexe, $I^-(Q') \cap f(M)$ est égal au passé strict de Q' dans $f(M)$. Or, $Q' = f(Q)$ est un ouvert passé de $f(M)$. Donc, $I^-(Q') \cap f(M) = Q'$. De même, $I^-(R') \cap f(M) = R'$. Par conséquent, la proposition (C.5) s'écrit

$$I^-(p) \cap f(M) = f(Q) \text{ ou } I^-(p) \cap f(M) = f(R).$$

D'où, $P = Q$ ou $P = R$. Donc P est un IP. Si P était un PIP de M , il existerait $q \in M$ tel que $P = I^-(q)$. D'où, $f(P) = f(I^-(q))$. D'une part, $f(P) = I^-(p) \cap f(M)$. D'autre part, $f(I^-(q)) = I^-(f(q)) \cap f(M)$. Donc, $I^-(p) \cap f(M) = I^-(f(q)) \cap f(M)$. Par conséquent, $I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(I^-(f(q)) \cap f(M))$ soit $I^-(p) = I^-(f(q))$. Comme N est distinguant, $p = f(q)$. Contradiction. Donc P est un TIP. \square

Remarque C.5.1. En renversant l'orientation du temps, nous obtenons un énoncé similaire pour $\partial^- f(M)$.

Nous venons ainsi de définir une application φ de $\partial^+ f(M)$ dans la frontière causale future $\partial_c^+ M$ qui associe à tout point p le TIP P défini par la Proposition C.5.1.

Lemme C.5.2. *L'application φ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. Soient $p, q \in \partial^+ f(M)$ tels que $\varphi(p) = \varphi(q)$ soit $f^{-1}(I^-(p) \cap f(M)) = f^{-1}(I^-(q) \cap f(M))$. Alors, $I^-(p) \cap f(M) = I^-(q) \cap f(M)$. Donc, $I^-(I^-(p) \cap f(M)) = I^-(I^-(q) \cap f(M))$. D'après le Lemme C.5.1, $I^-(p) = I^-(q)$. Comme N est distinguant, $p = q$. Donc, φ est injective. \square

Nous terminons par un critère de maximalité :

Proposition C.5.2. *Supposons que M admette une hypersurface de Cauchy S qui n'est pas compacte. Si l'intersection de S avec tout TIP et tout TIF de M n'est pas compacte, M est C-maximal.*

Démonstration. Soit f un Cauchy-plongement conforme de M dans N . Supposons, par l'absurde, que M ne soit pas maximal. Alors, $\partial^+ f(M)$ ou $\partial^- f(M)$ est non-vide. Supposons, par exemple, que $\partial^+ f(M)$ est non-vide (le raisonnement est similaire si $\partial^- f(M)$ est non-vide). Soit $p \in \partial^+ f(M)$ et soit P la pré-image par f de $I^-(p) \cap f(M)$. D'après la Proposition C.5.1, P est un TIP de M . Par hypothèse, l'intersection $P \cap S$ est non-compacte. Or, l'image par f de $P \cap S$ est égale à $I^-(p) \cap f(S)$ qui est compacte. Comme la restriction de f à S est un homéomorphisme sur $f(S)$, l'intersection $P \cap S$ devrait être compacte. Contradiction. Donc, M est C-maximal. \square

Remarque C.5.2. On montre dans le Chapitre 6 que si M est conformément plat et développable, la réciproque de la Proposition C.5.2 est vraie.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Lars Andersson, Thierry Barbot, François Béguin, and Abdelghani Zeghib. Cosmological time versus CMC time in spacetimes of constant curvature. *Asian Journal of Mathematics*, 16(1) :37–88, 03 2012.
- [2] Bañados, Henneaux, Teitelboim, and Zanelli. Geometry of the 2+1 black hole. *Physical review. D, Particles and fields*, 48 4 :1506–1525, 1993.
- [3] Bañados, Teitelboim, and Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical review letters*, 69 13 :1849–1851, 1992.
- [4] Thierry Barbot. Globally hyperbolic flat space-times. *J. Geom. Phys.*, 53(2) :123–165, 2005.
- [5] Thierry Barbot. Domaines globalement hyperboliques de l’espace de minkowski et de l’espace anti-de sitter. *Algèbre, dynamique et analyse pour la géométrie : aspects récents*, pages 2004–2007, 2010.
- [6] Thierry Barbot. Deformations of Fuchsian AdS representations are quasi-Fuchsian. *Journal of Differential Geometry*, 101(1) :1–46, 2015.
- [7] Thierry Barbot and François Fillastre. *Quasi-Fuchsian Co-Minkowski Manifolds*, pages 645–703. 12 2020.
- [8] Thierry Barbot and Quentin Mérigot. Anosov AdS representations are quasi-Fuchsian. *Groups, Geometry, and Dynamics*, 6(3) :441–483, 2012.
- [9] J.K. Beem, P.E. Ehrlich, and K.L. Easley. *Global Lorentzian Geometry*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. Dekker, 1996.
- [10] François Béguin. Une introduction aux aspects géométriques de la relativité générale. *Geometries et Dynamiques*, page 215.

- [11] Antonio Bernal and Miguel Sánchez. On smooth cauchy hypersurfaces and geroch's splitting theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 243 :461–470, 12 2003.
- [12] Antonio N. Bernal and Miguel Sanchez. Globally hyperbolic spacetimes can be defined as 'causal' instead of 'strongly causal'. *Class. Quant. Grav.*, 24 :745–750, 2007.
- [13] Jairo Bochi, Rafael Potrie, and Andrés Sambarino. Anosov representations and dominated splittings. *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*, 21(11) :3343–3414, 2019.
- [14] F. Bonsante and Andrea Seppi. Spacelike convex surfaces with prescribed curvature in (2+1)-minkowski space. *arXiv : Differential Geometry*, 2015.
- [15] Francesco Bonsante. Flat spacetimes with compact hyperbolic cauchy surfaces. *Journal of Differential Geometry*, 69(3) :441–521, 2005.
- [16] Jeffrey Danciger. A geometric transition from hyperbolic to anti-de sitter geometry. *Geometry & Topology*, 17(5) :3077–3134, 2013.
- [17] Jeffrey Danciger, François Guéritaud, and Fanny Kassel. Convex cocompactness in pseudo-riemannian hyperbolic spaces. *Geometriae Dedicata*, 192 :87–126, 2017.
- [18] C. Frances. Lorentzian kleinian groups. *Comment. Math. Helv.*, 80(no. 4) :883–910, (2005).
- [19] Charles Frances. *Géométrie et Dynamique Lorentziennes Conformes*. Theses, Ecole Normal Supérieure de Lyon, December 2002.
- [20] Charles Frances. Une preuve du théorème de Liouville en géométrie conforme dans le cas analytique. *Enseign. Math. (2)*, 49(1-2) :95–100, 2003.
- [21] R. Geroch, E. H. Kronheimer, and R. Penrose. Ideal Points in Space-Time. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 327(1571) :545–567, April 1972.
- [22] Robert Paul Geroch. The domain of dependence. *Journal of Mathematical Physics*, 11 :437–449, 1970.
- [23] William Goldman. Geometric structures on manifolds. *University of Maryland, Lecture Notes*, 2018.
- [24] Olivier Guichard, Fanny Kassel, and Anna Wienhard. Tameness of riemannian locally symmetric spaces arising from anosov representations. *arXiv :1508.04759*, 2015.
- [25] S. Hawking and Rainer Sachs. Causally continuous spacetimes. *Communications in Mathematical Physics*, 35, 12 1974.
- [26] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [27] Jean-Baptiste Hiriart-Urruty and Claude Lemaréchal. *Fundamentals of convex analysis*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] Michael Kapovich, Bernhard Leeb, and Joan Porti. A morse lemma for quasi-geodesics in symmetric spaces and euclidean buildings. *Geometry & Topology*, 22(7) :3827–3923, Dec 2018.

- [29] E. H. Kronheimer and R. Penrose. On the structure of causal spaces. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 63(2) :481, January 1967.
- [30] Pinkall Ulrich Kulkarni, Ravi S. A canonical metric for möbius structures and its applications. *Mathematische Zeitschrift*, 216(1) :89–130, 1994.
- [31] François Labourie. Anosov flows, surface groups and curves in projective space. *Inventiones mathematicae*, 165(1) :51–114, 2006.
- [32] Jean Lorey. Hyperbolic differential equations. *Mimeographed notes*, 1952.
- [33] Geoffrey Mess. Lorentz spacetimes of constant curvature. *Geometriae Dedicata*, 126 :3–45, 2007.
- [34] A. Weinhard O, Guichard. Anosov representations : domain of discontinuity and applications. *Inventiones mathematicae*, (2012).
- [35] Barrett O’neill. *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic press, 1983.
- [36] Roger Penrose. Asymptotic properties of fields and space-times. *Phys. Rev. Lett.*, 10 :66–68, Jan 1963.
- [37] Clara Rossi Salvemini. *Espace-temps globalement hyperboliques conformément plats*. PhD thesis, Université d’Avignon, 2012.
- [38] Clara Rossi Salvemini. Maximal extension of conformally flat globally hyperbolic spacetimes. *Geometriae Dedicata*, 174 :235–260, 2013.
- [39] Andrea Seppi. Examples of geometric transition in low dimensions. *Actes du Séminaire de Théorie Spectrale et Géométrie (Grenoble)*, 35 :163–196, 2020.
- [40] Rym Smai. Anosov representations as holonomies of globally hyperbolic spatially compact conformally flat spacetimes. *Geometriae Dedicata*, 216(4) :1–36, 2022.
- [41] R. Geroch Y. Choquet-Bruhat. Global aspects of the cauchy problem in general relativity. *Commun.Math.Phys.*14,329-335, (1969).